(Φ) 11—13,22　一维氢原子

一维氢原子的斯塔克效应

O 562.1
O 413.1

李　珏
(广西师范大学 物理与电子科学系,桂林　541002)

摘要:用定态微扰理论计算了一维氢原子在均匀外电场中的斯塔克效应,并给出了一级、二级能级修正的普遍公式.

关键词:斯塔克效应;微扰;简并　一维氢原子,能级

中图分类号:O 413.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-0712(2000)03-0011-03

二维、三维氢原子在均匀外电场中出现能级分裂的斯塔克效应已在文献[1～3]中讨论过.本文讨论一维氢原子置于均匀外电场中的斯塔克效应.

假定均匀外电场 ε 沿 x 轴方向,则一维氢原子在外电场中的哈密顿算符 $H=H_0+H'$.其中 $H_0=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\lambda}{|x|}(\lambda>0)$,$H'=-e\varepsilon x$.如果 $H'\ll H_0$,则 $H'=-e\varepsilon x$ 可以看成外电场中氢原子哈密顿算符的微扰项.

文献[4]讨论了一维氢原子的基态能量和波函数,得出

$$E_0^{(0)}=-\infty \tag{1}$$

$$\varphi_0^{(0)}(x)=[\delta(x)]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

文献[5,6]指出:由于一维氢原子的库仑势场 $V(x)=-\frac{\lambda}{|x|}(\lambda>0)$ 在 $x=0$ 处出现了奇异点,且满足 $V(0)\to\infty$ 和 $\varphi_n^+(0)=\varphi_n^-(0)$ 的条件,故一维氢原子能级是二重简并的.为此我们采用文献[4]中对一维氢原子能量本征方程 $\frac{-\hbar^2}{2\mu}\varphi''(x)-\frac{\lambda}{|x|}\varphi(x)=E\varphi(x)$ 的定态解的结论:

$$E_n^{(0)}=-\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{\mu e_s^4}{\hbar^2}=-\frac{e_s^2}{2n^2a}\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{3}$$

相应于同一个 n,可构造出偶、奇宇称波函数各一个:

$$\varphi_1(x)=\varphi_{n+}(x)=\begin{cases}xF\left(1-n,2,\frac{2x}{na}\right)e^{-\frac{x}{na}}, & x>0\\ -xF\left(1-n,2,-\frac{2x}{na}\right)e^{\frac{x}{na}}, & x<0\end{cases} \tag{4}$$

$$\varphi_2(x)=\varphi_{n-}(x)=\begin{cases}\varphi_{n+}(x), & x>0\\ -\varphi_{n+}(x), & x<0\end{cases} \tag{5}$$

其中 F 为合流超几何函数,a 为玻尔半径.

$$F(\alpha,\gamma,Z)=1+\frac{\alpha}{\gamma}Z+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{Z^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot\frac{Z^3}{3!}+\cdots$$

$$a=\frac{\hbar^2}{\mu e_s^2}\quad\left(e_s=\frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\right)$$

1　一维氢原子基态能量的修正

由于一维氢原子基态能级是非简并的,故可用非简并的定态微扰理论得到基态能量的一级修正:

$$E_0^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0^{(0)*}(x)H'\varphi_0^{(0)}(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(x)]^{\frac{1}{2}}(-e\varepsilon x)[\delta(x)]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=0$$

收稿日期:1999－05－10

作者简介:李珏(1967－),女,广西桂林人,广西师范大学物理与电子科学系讲师.

可见,外电场中基态能级不发生平移或分裂.

2 一维氢原子激发态能量修正

由于一维氢原子激发态能级是二重简并的,可以用简并的定态微扰理论求出能量的一级修正值,这就归结为解一个二行二列矩阵的久期方程,即

$$\begin{vmatrix} H'_{11}-E_n^{(1)} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22}-E_n^{(1)} \end{vmatrix}=0 \tag{6}$$

其中矩阵元 $H'_{ij}=\int\varphi_i^*(x)\hat{H}'\varphi_j(x)\mathrm{d}x$ 可利用一维氢原子本征函数的奇偶性算出:

$$H'_{11}=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^*(x)\hat{H}'\varphi_1(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n+}^*(x)\hat{H}'\varphi_{n+}(x)\mathrm{d}x=0 \tag{7}$$

$$H'_{22}=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2^*(x)\hat{H}'\varphi_2(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n-}^*(x)\hat{H}'\varphi_{n-}(x)\mathrm{d}x=0 \tag{8}$$

$$H'_{12}=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^*(x)\hat{H}'\varphi_2(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n+}^*(x)\hat{H}'\varphi_{n-}(x)\mathrm{d}x=-2e\varepsilon\int_0^{\infty}x^3\mathrm{F}^2\left(1-n,2,\frac{2x}{na}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2x}{na}}\mathrm{d}x$$

$$n=1,2,3,\cdots \tag{9}$$

$$H'_{21}=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2^*(x)\hat{H}'\varphi_1(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n-}^*(x)\hat{H}'\varphi_{n+}(x)\mathrm{d}x=-2e\varepsilon\int_0^{\infty}x^3\mathrm{F}^2\left(1-n,2,\frac{2x}{na}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2x}{na}}\mathrm{d}x$$

$$n=1,2,3,\cdots \tag{10}$$

根据文献[7]可知,合流超几何函数与广义拉盖尔函数有如下关系:

$$\mathrm{F}(-n,\mu+1,Z)=\frac{n!\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+1)}\cdot\mathrm{L}_n^{\mu}(Z) \tag{11}$$

其中 μ 为不等于负整数的任意实数,$\mathrm{L}_n^{\mu}(Z)$ 为广义拉盖尔函数.把式(11)代入式(9)、(10)得:

$$H'_{12}=H'_{21}=-2e\varepsilon\int_0^{\infty}x^3\cdot\left[\frac{(n-1)!\,\Gamma(2)}{\Gamma(n+1)}\mathrm{L}_{n-1}^1\right]^2\mathrm{e}^{-\frac{2x}{na}}\mathrm{d}x$$

令 $Z=\frac{2}{na}$,则上式变为:

$$H'_{12}=H'_{21}=-\frac{e\varepsilon n^2a^4}{8}\int_0^{\infty}Z^3\mathrm{e}^{-Z}\cdot\mathrm{L}_{n-1}^1(Z)\mathrm{L}_{n-1}^1(Z)\mathrm{d}Z \tag{12}$$

广义拉盖尔函数满足如下积分公式[7]:

$$\int_0^{\infty}Z^{\lambda}\mathrm{e}^{-Z}\mathrm{L}_n^{\mu}(Z)\mathrm{L}_{n'}^{\mu'}(Z)\mathrm{d}Z=(-1)^{n+n'}\Gamma(\lambda+1)\cdot\sum_K\binom{\lambda-\mu}{n-K}\binom{\lambda-\mu'}{n'-K}\binom{\lambda+K}{K} \tag{13}$$

其中 $\binom{P}{n}=\frac{P(P-1)\cdots(P-n+1)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot n}$,$\binom{P}{0}=1$,且 $\mathrm{Re}(\lambda)>-1$ 以保证积分收敛.

把式(13)代入式(12)可得:

$$H'_{12}=H'_{21}=-\frac{3}{4}e\varepsilon n^2a^4\cdot\sum_K\binom{2}{n-1-K}\binom{2}{n-1-K}\binom{3+K}{K} \tag{14}$$

将式(7)、(8)、(14)代入式(6)可得:

$$E_n^{(1)}=\pm\frac{3}{4}e\varepsilon n^2a^4\cdot\sum_K\binom{2}{n-1-K}\binom{2}{n-1-K}\binom{3+K}{K} \tag{15}$$

可见在外电场作用下,原来二重简并的能级在一级修正下分裂为两个能级:

$$E_{n1}^{(1)}=\frac{3}{4}e\varepsilon n^2a^4\cdot\sum_K\binom{2}{n-1-K}\binom{2}{n-1-K}\binom{3+K}{K} \tag{16}$$

$$E_{n2}^{(1)}=-\frac{3}{4}e\varepsilon n^2a^4\cdot\sum_K\binom{2}{n-1-K}\binom{2}{n-1-K}\binom{3+K}{K} \tag{17}$$

相应的零级近似波函数为:

$$\varphi_{n1}^{(0)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_{n+}(x)-\varphi_{n-}(x)] \tag{18}$$

$$\varphi_{n2}^{(0)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_{n+}(x)+\varphi_{n-}(x)] \tag{19}$$

n 取值不同,式(15)~(19)对应不同激发态能量的一级修正值和相应的零级近似波函数.

$n=1$ 时

$$E_1^{(1)}=\pm\frac{3}{4}e\varepsilon a^4\binom{2}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{0}=\pm\frac{3}{4}e\varepsilon a^4$$

$n=2$ 时

$$E_2^{(1)} = \pm \frac{3}{4} e\varepsilon a^4 2^2 \left[\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0} + \binom{2}{0}\binom{2}{0}\binom{4}{1} \right] = \pm 24 e\varepsilon a^4$$

$n=3$ 时

$$E_3^{(1)} = \pm \frac{3}{4} e\varepsilon a^4 3^2 \left[\binom{2}{2}\binom{2}{2}\binom{3}{0} + \binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1} + \binom{2}{0}\binom{2}{0}\binom{5}{2} \right] = \pm \frac{729}{4} e\varepsilon a^4$$

经过一级修正后，一维氢原子简并性完全被解除，故可以利用非简并定态微扰理论进一步讨论氢原子能量的二级修正．其中 $E_{n1}^{(1)}$ 的修正等于 $\hat{H}'$ 在 $\varphi_{n1}^{(0)}(x)$ 态的平均值；$E_{n2}^{(1)}$ 的修正等于 $\hat{H}'$ 在 $\varphi_{n2}^{(0)}(x)$ 态的平均值，即：

$$E_{n1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n1}^{(0)*}(x)\hat{H}'\varphi_{n1}^{(0)}(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 [\varphi_{n+}(x) - \varphi_{n-}(x)]^2(-e\varepsilon x)\mathrm{d}x = 2e\varepsilon\int_0^{\infty} x\varphi_{n+}^2(x)\mathrm{d}x = 2e\varepsilon\int_0^{\infty} x^3 \cdot \mathrm{F}^2\left(1-n,2,\frac{2x}{na}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2x}{na}}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}e\varepsilon n^2 a^4 \cdot \sum_K \binom{2}{n-1-K}\binom{2}{n-1-K}\binom{3+K}{K} \tag{20}$$

$$E_{n2}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n2}^{(0)*}(x)\hat{H}'\varphi_{n2}^{(0)}(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot [\varphi_{n+}(x) + \varphi_{n-}(x)]^2 \cdot (-e\varepsilon x)\mathrm{d}x = 2e\varepsilon \cdot \int_0^{\infty} x^3\mathrm{F}^2\left(1-n,2,\frac{2x}{na}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2x}{na}}\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}e\varepsilon n^2 a^4 \cdot \sum_K \binom{2}{n-1-K}\binom{2}{n-1-K}\binom{3+K}{K} \tag{21}$$

式(20)、(21)中 n 取不同值对应不同激发态能量的二级修正值．$n=1,2,3$ 时，对应的能量二级修正值分别为：

$$\pm\frac{3}{4}e\varepsilon a^4,\quad \pm 24 e\varepsilon a^4,\quad \pm\frac{729}{4}e\varepsilon a^4$$

可见简并解除后，一维氢原子 $E_{n1}^{(1)}$，$E_{n1}^{(2)}$ 能级又发生了平移．下面用图示方法表示出 $n=1,2,3$ 激发态能量修正情况：

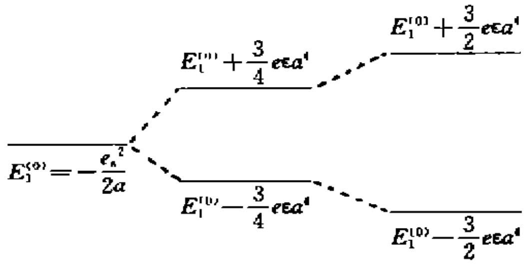

图 1　第一激发态的能级修正

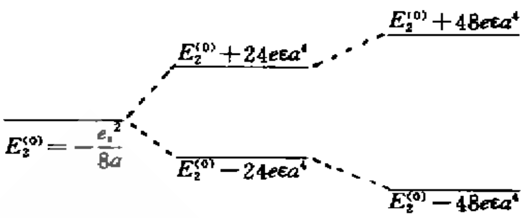

图 2　第二激发态的能级修正

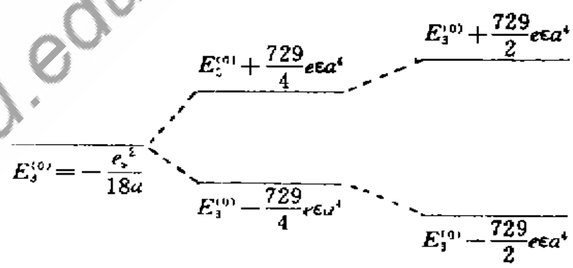

图 3　第三激发态的能级修正

3　结束语

比较一、二、三维氢原子的斯塔克效应可以看出：基态时，一、二、三维氢原子能量一级修正值均为零；激发态时，一维、二维氢原子简并能级在一级近似下完全被解除，三维氢原子简并能级只是部分解除．

参考文献：

[1]　曾谨言．量子力学　下册[M]．北京：科学出版社，1981．313．
[2]　邵彬，王荣瑶．二维氢原子的斯塔克效应[J]．大学物理，1995，14(2)：9．
[3]　李元勋．在平面抛物线坐标系中求解二维氢原子的 Stark 效应[J]．大学物理，1997，16(6)：14

（下转 22 页）

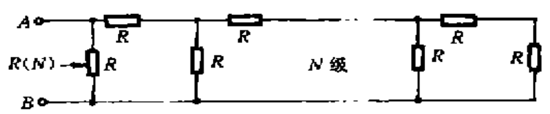

图 6

3 结论

由线性电阻构成的无穷梯形网络,其总入端电阻是一个由电路参数 R_1、R_2 决定的常数,其值可根据式(4)计算.

参考文献:

[1] 郭木森,廖玄九,张绍南.电工学[M].北京:高等教育出版社,1987.50.

[2] 邱关源.电路[M].北京:高等教育出版社,1982.80~100.

A study on ladder-shaped resistance network

JIANG Chao

(Department of Physics, Hubei Normal University, Huangshi, Hubei, 435002, China)

Abstract: A computer-aided method of ladder-shaped resistance network is introduced, and a calculation formula for ladder-shaped infinite resistance network is presented.

Key words: ladder-shaped resistance network; computer-aided method; ladder-shaped infinite resistance network; input resistance

(上接 13 页)

[4] 钱伯初.一维氢原子的束缚态[J].大学物理,1989,8(7):5.

[5] 赵书城.一维束缚定态能级简并性的讨论[J].大学物理,1986,5(5):23.

[6] 朱文熙,王玉平.对称双方势阱能级无简并[J].大学物理,1999,18(2):32.

[7] Wang Zhu-xi, Guo Dun-ren. An Introduction to special Functions[M]. Beijing: Science Press, 1965. 361 ~ 365(in Chinese)

The Stark effect of one-dimensional hydrogen atom

LI Jue

(Department of Physice, Guangxi Normal University, Guilin, 541002, China)

Abstract: The calculation of the Stark effect of one-dimensional hydrogen atom is given by using the perturbation theory. The Stark effect for each energy level is calculated to the second-order approximation.

Key words: Stark effect; perturbation; degeneracy