

# طراحی الگوریتم: پیشرفتهای روشمند

حسین رادمرد

۱۴ اردیبهشت ۱۴۰۳

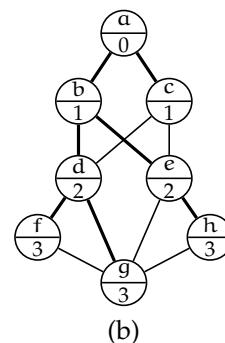
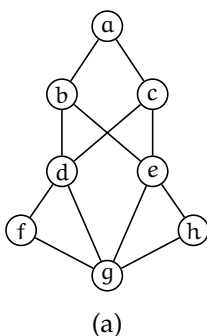
## ۱.۰ مسئله ۸۳ رنگ کردن یک گراف دو رنگی

در این مسئله، مانند موارد بعدی، حل مسئله هدف ماست و بهینه بودن جواب برای ما حائز اهمیت نیست. در اینجا، ما الگوریتمی را برای رنگ کردن گراف با در دست داشتن تنها دو رنگ، بررسی میکنیم. نسخه کلی‌تر (رنگ آمیزی با هر تعداد رنگ) در مسئله ۵۹، صفحه ۲۳۶ بررسی میشود. گرچه، نسخه فعلی بسیار بهینه‌تر است. در ادامه، این بحث بسیار به موضوع "گرافهای پرکاربرد: گرافهای دوبخشی" مرتبط است. گراف همبند بدون جهت  $(G = N, V)$  (ناتهی) به ما داده شده‌ست. ما قصد داریم با رنگ‌های سیاه و سفید گراف را رنگ آمیزی کنیم به گونه‌ای که هیچ دو راس همسایه‌ای دارای رنگ یکسانی نباشند. چنین گرافی را گراف دورنگی مینامیم. الگوریتم حریصانه‌ای که ما قصد ساخت آن را برای این منظور داریم به پیمایش سطری گراف ها مرتبط است که آن را در ابتدا بررسی کردیم.

### پیمایش سطری گراف: یادآوری

#### معرفی

اول از همه، اجازه دهید مفاهیم "فاصله‌ی میان دو راس" و "پیمایش سطری" را برای گراف‌های همبند بدون جهت تعریف کنیم. تعریف ۱۰ (فاصله‌ی میان دو راس): در نظر میگیریم،  $G = (N, V)$  یک گراف همبند بدون جهت  $s$  و  $s'$  دو راس این گراف باشند. طول کوتاه‌ترین مسیر میان  $s$  و  $s'$  را فاصله‌ی میان  $s$  و  $s'$  گویند. تعریف ۱۱ (جستجوی سطری): فرض کنیم  $G$  یک گراف همبند و بدون جهت  $s$  یکی از راس‌های آن باشد. هر فرایندی که با افزایش فاصله‌ها از راس  $s$  با راس‌های گراف  $G$  برخورد میکند به عنوان پیمایش سطری گراف  $G$  از  $s$  شناخته میشود. از نمودار (b) در شکل ۸.۷ صفحه ۳۶۳، میتوانیم نتیجه بگیریم که لیست  $a, b, c, d, e, f, g, h$  با پیمایش سطری با شروع از راس  $a$  مطابقت دارد. و همین مطلب برای لیست  $a, c, b, d, e, h, f, g$  نیز صدق میکند.



جدول ۱۲.۱۲: یک آرایه پیشوند-پسوندی از تمام پورین های ۴ حرف

تصویر ۸.۷ - یک مثال از گراف. تصویر (a) گرافی را نمایش میدهد که مثالی از حالت مسئله را نشان میدهد. تصویر (b) کوتاه‌ترین مسیر راس  $a$  را تا هر راس گراف با خطوط پررنگ نشان میدهد. در تصویر (b)، عددی که در هر راس مشخص است در واقع فاصله‌ی آن راس تا راس  $a$  است.

## حلقه بدون تغییر

ما علاقه داریم یک الگوریتم حریصانه تکرارشونده بسازیم، و در این نمونه خود را برای جستجوی حلقه بدون تغییر محدود میکنیم، ادامه ی این ساز و کار به خواننده واگذار میشود. اکنون تصور میکنیم قسمتی از کار انجام شده ست (بخش ۳، صفحه ۹۳ را ببینید). به این ترتیب، برای یک گراف جزئی  $G = (N, V)$  (زیرگراف  $G$  القا شده با مجموعه رئوس  $N'$ ، حاوی راس شروع  $s$ )، لیستی تشکیل شده از پیمایش سطری  $G'$  با شروع از  $s$  داریم. مرسومًا، این لیست، CLOSE نامیده میشود. پیشرفت این روند شامل گستردن این لیست با افزودن رئوسی است که در CLOSE نیستند و تا جای ممکن به  $s$  نزدیکند.

از آنجایی که هر راسی که در CLOSE حضور نداشته باشد، یک کاندید احتمالی برای انتقال به CLOSE است، در غیاب بقیه ی مفروضات، پیشرفت ممکن اما به همان نسبت هزینه بر است. پیشنهاد میکنیم که نسخه اول این ثابت را با اضافه کردن یک ساختمان داده بهبود ببخشید. ساختمان داده OPEN شامل تمام رئوسی ست که در CLOSE حضور نداشته و کاندید این موضوع هستند که همسایه حداقل یکی از رئوس CLOSE هستند. بیشین<sup>۱</sup>، OPEN به عنوان یک لیست اولویت با مدیریت بر روی فاصله ی عناصرش از  $s$  بوجود می آید، این موضوع به این دلیل است که عنصری که باید به لیست CLOSE منتقل شود باید نزدیک ترین به  $s$  باشد.

بعدها میبینیم که نسخه ساده تری از یک لیست اولویت نیز امکان پذیر است. برای ماندگاری این نسخه جدید از تغییر ناپذیر<sup>۲</sup>، بهینه است که ابتدای صف OPEN را به انتهای لیست CLOSE، به عنوان همتای تقویت ثابت<sup>۳</sup> - برای معرفی همسایگان "جدید" عنصر منتقل شده به OPEN، عنصرهایی که نه در OPEN نه در CLOSE هستند (انتخاب حریصانه) منتقل کنیم.

با این حال، با توجه به عنصر  $e$  در OPEN، پرسیدن سوال درباره وجود یا عدم وجود یکی از همسایگان آن در OPEN یا CLOSE می تواند پرهزینه باشد. راه حل بهتر شامل گزاره زیر است: از نظر رنگ آمیزی، یک "رنگ" به هر راس گراف اختصاص می یابد؛ سفید، اگر راس در OPEN یا CLOSE باشد، و در غیر این صورت خاکستری (در واقع، در اینجا، دو رنگ نقش مقادیر بولین را بازی می کنند). به شرطی که دسترسی مستقیم به رئوس امکان پذیر باشد، به روز رسانی OPEN آسان تر می شود. در پیشرفت، حفظ این مکمل ناورد با رنگ آمیزی هر راسی که به OPEN منتقل می شود به رنگ سفید حاصل می شود.

بیا بید به استراتژی مدیریت صف OPEN بازگردیم. آیا می توان به جای صف اولویت دار از یک صف ساده FIFO (نگاه کنید به بخش ۸.۱، صفحه ۳۲) استفاده کرد؟ در این صورت، مدیریت OPEN به طور قابل توجهی ساده می شود. برای انجام این کار، زمانی که رأس  $e$  از OPEN خارج می شود تا به CLOSE ملحق شود، همسایگان  $e$  که نامزد ورود به OPEN هستند باید فاصله ای بیشتر یا مساوی با تمام عناصر موجود در OPEN داشته باشند، که این امر امکان داشتن یک صف مرتب را فراهم می کند. این بدان معناست که اگر  $e$  در فاصله  $k$  از  $s$  باشد، سایر عناصر OPEN در فاصله  $k$  یا  $(k + 1)$  از  $s$  قرار دارند، زیرا همسایگان "خاکستری"  $e$  در فاصله  $(k + 1)$  از  $s$  قرار دارند. این فرض را به ناورد اضافه می کنیم. خواننده دعوت می شود بررسی کند که آیا این موضوع با راه اندازی حلقه واقعاً برقرار شده است. همچنان باید ثابت کرد که با پیشرفت حفظ می شود. در نهایت، ما ناوردای زیر را پیشنهاد می کنیم که از چهار بند تشکیل شده است.

۱. بسته (CLOSE) یک صف اول-وارد-اول-خارج (FIFO) است که محتوای آن نشان دهنده یک "پیمایش عمق-اول" از زیرگراف  $G$  است که توسط رئوس موجود در بسته (CLOSE) تشکیل شده است.

۲. باز (OPEN) یک صف اول-وارد-اول-خارج (FIFO) از رئوس همسایه رئوس موجود در بسته (CLOSE) است. اشتراک مجموعه بین باز (OPEN) و بسته (CLOSE) تهی است.

۳. اگر ابتدای صف باز (OPEN) حاوی رئوس با فاصله  $k$  از  $s$  باشد، سایر عناصر صف باز (OPEN) در فاصله  $k$  یا  $(k + 1)$  از  $s$  قرار دارند.

۴. در گراف  $G$ ، رئوس موجود در بسته (CLOSE) یا باز (OPEN) به رنگ سفید رنگ آمیزی می شوند، سایر رئوس خاکستری هستند.

<sup>1</sup>priori<sup>2</sup>invariant

شکل ۹.۷، صفحه ۳۶۶، مراحل مختلف «پیمایش اول-سطر» گراف شکل ۸.۷، صفحه ۳۶۳ را نشان می‌دهد. در هر گراف موجود در تصویر، رئوس موجود در CLOSE با خطوط خاکستری و رئوس موجود در OPEN با خطوط دوتایی نمایش داده شده‌اند. فواصل فقط به عنوان یادآوری ذکر شده‌اند، الگوریتم از آنها استفاده نمی‌کند. بیابید به عنوان مثال در مورد مرحله‌ای که منجر به گذار از شکل e به شکل f می‌شود، توضیح دهیم. در شکل e، لیست CLOSE «پیمایش اول-سطر» زیرگراف القا شده توسط رئوس a، b، c و d را در خود جای داده است. راس e، ابتدای صف OPEN، به انتهای CLOSE منتقل خواهد شد. کدام همسایه‌های e قرار است به OPEN ملحق شوند؟ c و b از قبل در CLOSE هستند، بنابراین آنها را در نظر نمی‌گیریم. g از قبل در OPEN است، بنابراین تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد. تنها راس باقی‌مانده h است که به صف OPEN ملحق شده و با رنگ سفید رنگ‌آمیزی می‌شود.

### ساختارهای داده

از دو نوع ساختار داده در این الگوریتم استفاده شده است. مورد اول، صف‌های اول-وارد-اول-خارج<sup>۳</sup>، که در صفحه ۳۲ توضیح داده شده‌اند. مورد دوم مربوط به نسخه‌ی «رنگ‌آمیزی‌شده» گراف‌ها است. این ساختار داده را گراف بدون جهت رنگ‌آمیزی‌شده می‌نامند. در این الگوریتم، نیاز به رنگ‌آمیزی رئوس‌های یک گراف، دسترسی به رنگ آن‌ها و کاوش لیست همسایگان وجود دارد، بنابراین تعاریف زیر ارائه می‌شود (فرض بر این است که مجموعه رنگ‌ها تعریف شده است):

- عملگر رنگ‌آمیزی  $ColorGr(G, s, col)$ : عملیاتی که رأس s گراف G را با رنگ col رنگ‌آمیزی می‌کند.
- عملگر  $ColorGr(G, s, col)$ : عملیاتی که رأس s گراف G را با رنگ col رنگ‌آمیزی می‌کند.
- تابع  $WhichColorGr(G, s)$  نتیجه رنگ‌ها: تابعی که رنگ رأس s گراف G را برمی‌گرداند.
- عملگر  $OpenNeighborsGr(G, s)$ : عملیاتی که کاوش لیست همسایگان رأس s گراف G را آغاز می‌کند.
- تابع  $EndListNeighborsGr(G, s)$  نتیجه بولی: تابعی که مقدار درست را برمی‌گرداند اگر و تنها اگر کاوش لیست همسایگان رأس s گراف G تمام شده باشد.
- عملگر  $ReadNeighborsGr(G, s, s)$ : عملیاتی که هویت رأسی که زیر نشانگر لیست همسایگان s است را در s' ذخیره کرده و سپس نشانگر را یک خانه به جلو حرکت می‌دهد.

در این کاربرد، از نظر بیان الگوریتم و کارایی، بهترین بهینه‌سازی نمایش آن با استفاده از لیست همجوری است (برای مشاهده‌ی نمونه‌ای از چنین نمایشی برای گراف‌های جهت‌دار، به شکل (d) در صفحه‌ی ۲۳ مراجعه کنید). بنابراین، گراف به صورت یک «سه‌تایی»  $G = (N, V, R)$  تعریف می‌شود که در آن R نشان‌دهنده رنگ‌ها است (در حال حاضر «سفید» و «خاکستری»).

### الگوریتم

علاوه بر نمودار G، این الگوریتم از متغیرهای cv راس جاری و فهرست همسایگان برای مرور لیست همسایگان استفاده می‌کند.

1. constants
2. n N1 and n = . . . and N = 1 .. n and Colors = grey, white and
3. V N × N and V = . . .

<sup>3</sup>FIFO: first in first out

4. variables

5.  $R \subseteq N \times N$  Colors and  $G = (N, V, R)$  and

6.  $s \in N$  and  $cv \in N$  and  $neighb \subseteq N$  and  $CLOSE \subseteq FIFO(N)$  and  $OPEN \subseteq FIFO(N)$

7. begin

شکل ۹.۷ - مراحل مختلف کاوش اولویت-عرضی در گراف اسکیم (الف) در شکل ۸.۷ (صفحه ۳۶۳). رئوس با دایره توپر، رئوس CLOSE هستند، آنهایی که با دو دایره مشخص شده اند، رئوس OPEN هستند. مقدار صحیح که هر راس را همراهی می کند، فاصله شناخته شده از راس  $a$  است. دو صف OPEN و CLOSE به ترتیب در شمال شرقی و جنوب گراف ها نشان داده شده اند.

1. / coloring all the vertices in grey: /

2. for  $w \in N$  do

3. ColorGr( $G, w, grey$ )

4. end for;

5. InitFifo(CLOSE); InitFifo(OPEN);

6.  $s \in N$ ; / choice of the initial vertex: /

7. ColorGr( $G, s, white$ );

8. AddFifo(OPEN,  $s$ );

9. while not IsEmptyFifo(OPEN) do

10.  $cv \leftarrow \text{HeadFifo(OPEN)}$ ; RemoveFifo(OPEN);

11. AddFifo(CLOSE,  $cv$ );

12. OpenNeighborsGr( $G, cv$ ) ;

13. while not EndListNeighborsGr( $G, cv$ ) do

14. ReadNeighborsGr( $G, cv, neighb$ ) ;

15. if WhichColorGr( $G, neighb$ ) = grey then

16. ColorGr( $G, neighb, white$ ) ;

17. AddFifo(OPEN,  $neighb$ )

18. end if

19. end while

20. end while;

21. write(CLOSE)

22. end

سوال ۱: پیچیدگی مجانبی این الگوریتم از نظر شرایط ارزیابی شده چیست؟  
سوال ۲: بر اساس این الگوریتم، اصل الگوریتم رنگ آمیزی حریصانه را توضیح دهید.

### الگوریتم رنگ آمیزی دو رنگ گراف

اکنون مجهز هستیم تا به مشکل اصلی در هسته این مسئله بپردازیم: رنگ آمیزی یک گراف با سیاه و سفید. ما الگوریتم بالا را به گونه ای تطبیق خواهیم داد که به صورت متناوب با سیاه و سفید، بر اساس عمق در رابطه با راس شروع، رنگ آمیزی شود، تا زمانی که رئوس ها تمام شوند یا یک عدم امکان کشف شود.

سوال ۳: الگوریتم رنگ آمیزی را طراحی کنید.

سوال ۴: بر اساس این الگوریتم، اصل الگوریتم رنگ آمیزی حریصانه را توضیح دهید.

شکل ۸.۷، صفحه ۳۶۳

سوال ۵: کد الگوریتم را بنویسید و پیچیدگی آن را مشخص کنید.

سوال ۶: مسئله ۵۹، صفحه ۲۳۶، به مسئله عمومی تر رنگ آمیزی با  $m$  رنگ ( $m \geq 2$ ) می پردازد. امکان تعمیم الگوریتم ارائه شده در پاسخ به سوال

۵، برای  $m < 2$  را مورد بحث قرار دهید.

تذکر یک ویژگی جالب از گراف های دو-رنگ پذیر این است که: یک گراف دو-رنگ پذیر است اگر و تنها اگر هیچ دوره ی فرد طولی نداشته باشد.

با این حال، این ویژگی سازنده نیست: مشاهده ی آن روی یک گراف منجر به رنگ آمیزی نمی شود!

راه حل در صفحه ۳۹۷ است.

## ۲۰. مسئله ۸۴: از ترتیب جزئی به ترتیب کلی

دو نسخه از مرتب‌سازی توپولوژیکی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نسخه اول ساده لوحانه است اما خیلی کارآمد نیست و طراحی آن آسان است. نسخه دوم نیازمند تقویت یک ناورد [خاصیت تغییرناپذیر] است؛ با استفاده از اشاره‌گرها پیاده‌سازی می‌شود و هر دو مسئله‌ی بهینه‌سازی و دستکاری ساختارهای پویا را به خوبی نشان می‌دهد. الگوریتمی که در اینجا ساخته شده است نزدیک به الگوریتم ماریونت برای سطح‌بندی یک گراف بدون مدار است. برای حل این مسئله، ابتدا باید مسئله ۲، صفحه ۳۳ را مطالعه کرد. فرض کنید  $(E, \prec)$  یک زوج مرتب باشد به گونه‌ای که  $E$  یک مجموعه متناهی با  $n$  عضو و  $\prec$  یک رابطه ترتیب جزئی روی  $E$  باشد. ما می‌خواهیم روی  $E$  یک رابطه ترتیب کلی  $\sqsubseteq$  سازگار با  $\prec$  بنا کنیم، به این معنی که برای هر زوج  $(a, b)$  از  $(ab)(ab) : E$ . به هر عضو از  $(E, \prec)$  که هیچ پیش‌تر نداشته باشد، عضو مینیمال گفته می‌شود. مثال در زمینه‌ی دوره‌ی علوم کامپیوتر،  $1c \sqsubseteq 2c$  نشان‌دهنده‌ی این واقعیت است که دوره‌ی  $1c$  باید قبل از دوره‌ی  $2c$  گذرانده شود تا پیش‌نیازهای لازم برای درک دوره‌ی دوم فراهم شود. حال دوره‌های زیر را در نظر بگیرید:

مثالی از رابطه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ab, ac, bd, cb, cd, ce, cf, ed, fe$$

این را می‌توان با نمودار زیر نشان داد:

این نوع گراف با دو ویژگی شناخته می‌شود: جهت‌دار بودن و عاری بودن از دور (مدار). به چنین گرافی، «گراف جهت‌دار غیر دوردار» یا «DAG» گفته می‌شود. در چنین گرافی به یک عضو بدون هیچ پیش‌تر (عضو مینیمال مرتب‌سازی جزئی)، «نقطه‌ی ورود» گفته می‌شود. هدف این مسئله، ساخت یک الگوریتم حریصانه است که یک ترتیب کلی سازگار با ترتیب جزئی اولیه را ارائه دهد. برای مثال بالا، یک راه‌حل شامل پیشنهاد ترتیب کلی  $acbfed$  است.

سوال ۱: اثبات کنید که یک گراف جهت‌دار غیر دوردار (DAG) غیر تهی، که هر یک از نقاط ورود آن حذف شده باشد، همچنان یک گراف جهت‌دار غیر دوردار (DAG) باقی می‌ماند.

سوال ۲: فرض کنیم هر گرافی با  $G = (N, V)$  نمایش داده شود و  $n$  برابر  $card(N)$  باشد. اثبات کنید که برخی DAG ها (گراف جهت‌دار غیر دوردار) به گونه‌ای هستند که  $card(V)(n^2)$  است.

اکنون، پیش از اجرای آن روی مثال بالا، به ترسیم کلی حلقه‌ی «حریصانه» الگوریتم می‌پردازیم. روش ساخت استفاده شده مبتنی بر تکنیک «اجرای پیشرو» است. سوالات بعدی در مورد الگوریتم، بهینه‌سازی و پیچیدگی آن خواهد بود.

## اولین تلاش برای ساخت

فرض کنید  $G = (E, V)$  یک DAG ورودی با  $n$  رأس باشد  
 ناورد [خاصیت تغییرناپذیری]: فرض کنید  $S$  صف خروجی باشد که شامل مجموعه  $ES(ESE)$  از رأس‌های مرتب‌سازی شده بر اساس یک ترتیب کلی سازگار با  $\square$  می‌باشد، به گونه‌ای که هر رأس  $v$  از  $E$  که در  $ES$  نیست  $(v \notin E-ES)$  طبق ترتیب جزئی بزرگ‌تر از هر رأس  $ES$  است.  
 شرط توقف: تمام رأس‌ها در صف  $S$  قرار دارند، یعنی  $|S| = n$ . در واقع، اشتراک ناورد [خاصیت تغییرناپذیری] و شرط قبلی ایجاب می‌کند که  $S$  فهرستی مرتب‌سازی شده بر اساس ترتیبی سازگار با ترتیب جزئی باشد.  
 روند کار الحاق یکی از رأس‌های  $(EES)$  به صف  $S$  است. این کار باعث می‌شود که این رأس در زیرگراف القا شده  $(Induced(G, EES))$  قرار گیرد و ناورد [خاصیت تغییرناپذیری] در این راستا تقویت خواهد شد.  
 به منظور تعیین راسی که باید به بهترین نحو در صف قرار گیرد، ضروری است یک ساختار داده‌ای معرفی کنیم که قادر به بهره‌برداری از زیرگراف القا شده  $(Induced(G, EES))$  باشد.

## طرح جایگزین برای ساختار

به عنوان یک متغیر در نظر گرفته می‌شود. ناورد [خاصیت تغییرناپذیری]: گزاره “ $G$  یک DAG است” به نسخه قبلی ناورد اضافه می‌شود.  
 شرط توقف: بدون تغییر باقی می‌ماند.  
 به دنبال یکی از نقاط ورود گراف  $G$  هستیم تا این رأس از  $(EES)$  را به صف  $S$  منتقل کنیم. به راحتی قابل بررسی است که  $S$  نسخه اول ناورد را برآورده می‌کند و اینکه  $G$  زیرگراف القا شده جدید، در واقع یک DAG است (به دلیل ویژگی‌ای که در پاسخ به سوال ۱ برقرار شده است).  
 قابل ذکر است که  $G$  نقش صف ورودی الگوریتم‌های حریصانه را ایفا می‌کند و اشتراک ناورد و شرط توقف، در واقع، به معنای دستیابی به هدف مطلوب است.

آغازین سازی: ناورد [خاصیت تغییرناپذیری] از صف خالی  $S$  و گراف  $G$  که همان گراف اولیه است، برقرار می‌شود.  
 تابع پایان مناسب  $n|S|$  است، زیرا در هر مرحله از پیشرفت، یک عنصر از  $G$  به  $S$  منتقل می‌شود.  
 قابل ذکر است که این الگوریتم بر اساس ساخت، خروجی صحیحی را برمی‌گرداند. بدیهی است که این روش، «اجرای پیشرو» را انجام می‌دهد.  
 سوال ۳: الگوریتم بالا را بر روی مثال ابتدایی اعمال کنید.  
 سوال ۴: فرض کنید که هر دو تابع  $dG(s)$  که درجه ورودی رأس  $s$  را در گراف  $G$  برمی‌گرداند و القا  $(Induced)$  (برای مفاهیم مربوط به گراف‌ها به بخش ۵.۱، صفحه ۲۲ مراجعه کنید) در دسترس هستند، کد این الگوریتم را بنویسید. با فرض اینکه نمایش گراف‌ها با فهرستی از جانشین‌ها باشد (به شکل ۳.۱، صفحه ۲۳ مراجعه کنید)، ثابت کنید که پیچیدگی این الگوریتم از نظر تعداد رؤس بازدید شده در  $O(n^2)$  است.  
 سوال ۵: در نسخه بدست آمده در پاسخ به سوال ۴، از دیدگاه پیچیدگی، عامل جریمه‌کننده جستجو برای حداقل بین تمام رؤس‌هایی است که هنوز باید در نظر گرفته شوند. بر اساس تقویت (تقویت) ناورد فوق، راه حل کارآمدتری برای گراف‌های غیرمترکم (چند قوس با توجه به مجذور تعداد رؤس) پیشنهاد دهید. در مورد کارایی این راه حل چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟  
 راه حل در صفحه ۴۰۰ است.