DA1337/1338 Homework 6

tombergm

November 2023

Innehållsförteckning

1 Induktion

1.1 Problem 1

Vi har ett påstående $P(n)$:

$$P(n) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Basfall $P(1)$:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} \Rightarrow P(1)$$

Induktionssteg; Antag $P(n-1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2 \\
&= \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \\
&= \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + \frac{6n^2}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&\Rightarrow P(n)
\end{aligned}$$

Vi har

$$P(1) \wedge [P(n-1) \Rightarrow P(n)]$$

V.S.B.

1.2 Problem 2

$$P(n) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} 2j - 1 = n^2$$

Basfall $P(1)$:

$$\sum_{j=1}^{1} 2j - 1 = (2 \cdot 1 - 1) = 1^2 \Rightarrow P(1)$$

Induktionssteg; Antag $P(n-1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} 2j-1 &= \sum_{j=1}^{n-1} 2j-1+(2n-1) \\
&= (n-1)^2+(2n-1) \\
&= (n^2-2n+1)+(2n-1) \\
&= n^2 \\
\Rightarrow P(n)
\end{aligned}$$

Därmed

$$P(1) \wedge [P(n-1) \Rightarrow P(n)]$$

V.S.B.

2 Iterativ korrekthet

Vi har en funktion expIterative$(x, n) = f(x, n)$. I början av loopen är

$$res = res_0 = 1 = x^0$$

I slutet av iteration i är

$$res = res_{i+1} = res_i \cdot x = x^i \cdot x = x^{i+1}$$

Den sista iterationen är iteration $n-1$. Efter loopen är

$$res = res_{n-1+1} = res_n = x^n$$

Returvärdet är

$$f(x, n) = res_n = x^n$$

Antalet iterationer är n. Tidskomplexiteten är $T(n) \in O(n)$.

3 Rekursiv korrekthet

Vi har en funktion expRecursive$(x, n) = g(x, n)$.

$$g(x,n) = \begin{cases} f(x,n) = x^n & 0 \le n \le 4 \\ g(x, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \cdot g(x, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor) & n > 4 \end{cases}$$

Låt påståendet $P(n)$:

$$P(n) \Leftrightarrow g(x,n) = x^n$$

Vi har basfallen

$$g(x,n) = f(x,n) = x^n \Rightarrow P(n), n \in \{0,1,2,3,4\} \tag{1}$$

Induktionsteg; Antag $P(k), 2k > 4$:

$$g(x, 2k) = g(x, k) \cdot g(x, k) = x^k \cdot x^k = x^{2k} \Rightarrow P(2k) \tag{2}$$

och $P(k) \wedge P(k+1), 2k+1 > 4$:

$$g(x, 2k+1) = g(x, k) \cdot g(x, k+1) = x^k \cdot x^{k+1} = x^{2k+1} \Rightarrow P(2k+1) \tag{3}$$

Dessa två induktionssteg tillsammans med basfallen ger $P(n)$ för $n \in \mathbb{N}$, e.g.

$$\begin{array}{rcl} P(2) \wedge P(3) \Rightarrow & P(5) & \text{enligt (3)} \\ P(3) \wedge P(4) \Rightarrow & P(6) \wedge P(7) & \text{enligt (2) och (3)} \\ P(4) \wedge P(5) \Rightarrow & P(8) \wedge P(9) & \text{enligt (2) och (3)} \\ P(5) \wedge P(6) \Rightarrow & P(10) \wedge P(11) & \text{enligt (2) och (3)} \\ \ldots & & \end{array}$$

Tidskomplexiteten är av den rekursiva formen

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

där

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 2 \\ f(n) &\in \Theta(1) \qquad \text{då } n \leq 4 \text{ för alla expIterative}(x, n) \text{ i expRecursive} \end{aligned}$$

Mästarsatsen ger

$$T(n) \in \Theta(n^{log_b a}) = \Theta(n)$$