实分析笔记

2023 年 8 月 18 日

写这篇笔记是为了让我尽可能相信它是对的.

目录

1 分　布

分布的引入可来自 Dirac δ 函数, 后来由 Schwartz 的广义函数论而推广.

一个暂时够用的定义是, 分布是 $\mathbb{R}^n$ 上开集 X 中光滑紧支函数空间上的连续线性泛函, 两者记为 $C_c^\infty(X)$ 和 $C_c^\infty(X)^*$. 其中赋予 $C_c^\infty(X)$ 有半范数族 $\|\partial^\bullet\|_\infty$ 生成的拓扑, $C_c^\infty(X)^*$ 以弱* 拓扑, 即在 $C_c^\infty(X)$ 上逐点收敛拓扑.

则处理由 $C_c^\infty(X)$ 上的拓扑可得:

- $\phi_\bullet \to \phi \iff \exists K \in \mathsf{Cpt}(X), \partial^\bullet\phi_\bullet \rightrightarrows \partial^\bullet\phi$;
- 考虑 $C_c^\infty(X)$ 和 $C_c^\infty(Y)$ 之间的连续函数 f, 则必有 $\forall K \Subset X$, $\exists F \Subset Y$, $f(C_c^\infty(K)) \subset f(C_c^\infty(F))$;
- $C_c^\infty(X)$ 完备.

以下是一些分布的例子.

- 所有局部可积函数 $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$, 其作用为 $\phi \mapsto \int \phi f$, 若 $f_1 \overset{\text{a.e}}{=} f_2$, 则其对应的分布 $\mathrm{distr}(f_1) = \mathrm{distr}(f_2)$, 反之由 Lebesgue 微分定理显然成立; 因此 $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ 到 $C_c^\infty(X)^*$ 有一个自然的嵌入.
- 在 X 上的 Radon 复测度刚好对应一个分布 (Risez 表示定理);
- δ 分布, 某种意义上起 identity 的作用, 此处定义 δ_x 是 x 处的脉冲;
- 赋值或者求导: $\partial^\bullet$.

为了少些括号用 $\langle F, \phi\rangle$ 来表示分布 F 在 ϕ 上的作用.

分布与 identity　在弱* 拓扑下很多分布的极限都是 δ:

Proposition 1.1. 令 $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $\mathrm{distr}(f(x/t)/t^n) \xrightarrow{t\to 0} \delta\int f$.

Proof. 记 $f(x/t)/t^n$ 为 $f_t(x)$, 则

$$\int f_t\phi = \phi * f_t^\sim - \langle\delta,\phi\rangle\int f = \int f^\sim(y)(\phi(x-ty)-\phi(x))\,\mathrm{d}y.$$

其中 $^\sim : f \mapsto f\circ(-1)$, 由 ϕ 一致连续和紧支即得. □

Remark. 其中这样的 f_t 可以称为一种在 $C_c^\infty(X)$ 上的单位逼近. 在一些关于极大函数的讨论后可以证得若 f_t 满足径向衰减且恒正, 其对 $\mathscr{L}^{[1,\infty)}$ 亦成立.

分布的函数　现考虑一般函数在分布上的推广, 一个浅显的例子是矩阵和其转置: 令 V 是有限维复线性空间, 线性变换在某族基下面表示为 $\boldsymbol{A}$, 则其可诱导其线性函数上的线性变换, 即 $\boldsymbol{A}$ 的拉回, 在对偶基下恰好是 $\boldsymbol{A}^\top$. 即:

$$\boldsymbol{A}^\top : f \mapsto (x \mapsto f(\boldsymbol{A}x)).$$

置入 $C_c^\infty(X)$ 中可写为 $\langle \boldsymbol{A}^\top f, \phi\rangle \coloneqq \langle f, \boldsymbol{A}\phi\rangle$.

若欲推广一般函数的处理 T, 考虑到 $\operatorname{distr}(\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)) \subset C_c^\infty(X)^*$, 则应有 $\operatorname{distr}(Tf) = T\operatorname{distr}(f)$, $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$, 也即与一般函数相容.

- 微分. 考虑一般良好函数的情形, $\operatorname{distr}(\partial^\bullet f) = \partial^\bullet \operatorname{distr}(f)$. 即

  $$\langle \partial^\bullet \operatorname{distr}(f), \phi\rangle = \langle \operatorname{distr}(\partial^\bullet f), \phi\rangle = \int (\partial^\bullet f)\phi.$$

  累次用分布积分可以得到 $\int(\partial^\bullet f)\phi = (-1)^\bullet \int f(\partial^\bullet\phi)$. 故

  $$\langle \partial^\bullet \operatorname{distr}(f), \phi\rangle \coloneqq (-1)^\bullet\langle \operatorname{distr}(f), \partial^\bullet\phi\rangle, \quad \langle \partial^\bullet F, \phi\rangle = (-1)^\bullet\langle F, \partial^\bullet\phi\rangle.$$

- 平移与缩放. 考虑平移算子 $\tau_y\phi(x) = \phi(x-y)$. 由于平移会改变函数的支集, 不妨令 $\tau_y : C_c^\infty(x) \to C_c^\infty(X+y)$. 现考虑其在分布上的推广:

  $$\tau_y \operatorname{distr}(f) = \operatorname{distr}(\tau_y f).$$

  其中后者的作用是 $\phi \mapsto \int(\tau_y f)\phi = \int f(x-y)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\phi(x+y)\,\mathrm{d}x$. 因此定义

  $$\langle \tau_y \operatorname{distr}(f), \phi\rangle \coloneqq \langle \operatorname{distr}(f), \tau_y\phi\rangle, \quad \langle \tau_y F, \phi\rangle \coloneqq \langle F, \tau_y\phi\rangle.$$

  其中 $\tau_y \operatorname{distr}(f)$ 定义在 $C_c^\infty(X+y)^*$ 上.

  缩放则考虑微分同胚 T, 则 T 在一般函数上的作用是 $f \mapsto f \circ T$. 因此定义 $T : C_c^\infty(X) \to C_c^\infty(T^{-1}(X))$, 满足

  $$\langle \operatorname{distr}(f)\circ T, \phi\rangle = \langle \operatorname{distr}(f\circ T), \phi\rangle = \int_X (f\circ T)\phi = \int_{T(X)} \frac{(\phi\circ T^{-1})f}{|\det T|}.$$

  即 $\langle F\circ T, \phi\rangle = \langle F, (\phi\circ T^{-1})/|\det T|\rangle$.

- 与函数的乘积. 自然考虑 $\langle g\operatorname{distr}(f), \phi\rangle = \langle \operatorname{distr}(gf), \phi\rangle = \int gf\phi = \langle \operatorname{distr}(f), g\phi\rangle$.

- 和 $C_c^\infty(X)$ 的卷积.

  $$\langle \operatorname{distr}(f) * g, \phi\rangle = \langle \operatorname{distr}(f * g), \phi\rangle = \int (f * g)\phi = \int (g * \phi^{\sim}) f.$$

  故定义 $\langle F * g, \phi\rangle = \langle F, g * \phi^{\sim}\rangle$.

  考虑到此处分布与 $C_c^\infty(X)$ 的卷积后仍是分布, 这可能是一个比较麻烦的点. 一个形式上的处理是用 δ_x 固定住其在 x 处的值:

  $$(F * g)(x) \coloneqq \langle F * g, \delta_x\rangle = \langle F, \delta_x * g^{\sim}\rangle.$$

  其中 $(\delta_x * g^{\sim})(z) = \int \delta(y - x) g(y - z)\,\mathrm{d}y = g(x - z) = \tau_x g^{\sim}(z)$. 故

  $$(F * g)(x) = \langle F, \tau_x \phi^{\sim}\rangle.$$

- Fourier 变换和逆变换. 同上讨论定义为 $\langle F^{\wedge}, \phi\rangle = \langle F, \phi^{\wedge}\rangle$. 此处可将 $C_c^\infty(X)$ 换成速降函数空间 $\mathcal{S}$.

Proposition 1.2. 一般函数上卷积和其他运算有某些交换性质推广到分布后亦然成立.

- 分布和 $C_c^\infty(X)$ 的卷积 $F * \phi$ 将其看成是一个函数, 则其属于 $C^\infty(X + \operatorname{supp}\phi)$;
- 考虑一般情形下求导和卷积的对换原则, 分布时亦然: $\partial^\bullet(F * \phi) = F * (\partial^\bullet \phi) = (\partial^\bullet F) * \phi$;
- 上述用 δ_x 固定 x 是合理的, 也就是 $\operatorname{distr}(F * g) = F * g$. 此处用 $\operatorname{distr}(F * g)$ 简记 $\operatorname{distr}\big(x \mapsto \langle F, \tau_x g^{\sim}\rangle\big)$.

Proof.

- 只证明一次微分情形, 设 Δ 是差分算子.

  $$\Delta(F * \phi) = \langle F, \Delta(\tau_x \phi^{\sim})\rangle \to \langle F, \tau_x \partial\phi\rangle = \langle F, \tau_x (\partial\phi)^{\sim}\rangle.$$

  故 $\partial(F * \phi) = F * \partial\phi$, 归纳即得第一款和第二款.

- 只需证明 $\langle \operatorname{distr}(F * g), \phi\rangle = \langle F * g, \phi\rangle$.

  由支集紧致且 ϕ 在其上连续, 故可用 Riemann 和逼近. 由 $(g * \phi^{\sim})(x) = \int g(y)\phi(y - x)\,\mathrm{d}y = \int g(y)\tau_y \phi^{\sim}(x)\,\mathrm{d}y$. 则令 $y_\bullet$ 为对应的取值集, 有

  $$\frac{1}{N}\sum g(y_\bullet)\tau_{y_\bullet}\phi^{\sim} \rightrightarrows (g * \phi^{\sim})(x).$$

且其导函数 $\partial^\bullet(\sum g(y_\bullet)\tau_{y_\bullet}\phi)/N \rightrightarrows \partial^\bullet(g * \phi^\sim)$(由于高阶导数有界), 故该逼近在 $C_c^\infty(X)$ 拓扑中趋向于 $g * \phi^\sim$. 故

$$\begin{aligned}\langle F, g * \phi^\sim\rangle &= \lim \frac{1}{N}\sum g(y_\bullet)\langle F, \tau_{y_\bullet}\phi^\sim\rangle \\ &= \int \sum g(y)\langle F, \tau_y\phi^\sim\rangle \, \mathrm{d}y \\ &= \int (F * \phi) g = \langle \mathrm{distr}(F * g), \phi\rangle. \quad \square\end{aligned}$$

由于分布的奇异性, 我们想要用合理的函数逼近之, 下面给出了可行性:

Proposition 1.3. $\overline{\mathrm{distr}(C_c^\infty(X))} = C_c^\infty(X)^*$.

Proof. 证明分为以下几步:

Step I. 用紧支分布逼近. 用上升紧集列 $\{K_\bullet\}$ 逼近 X, 且 $K_{\bullet-1} \subset K_\bullet^\circ$. 令 $g_\bullet \in C_c^\infty(X)$ 满足 $g_\bullet|_{K_\bullet} = 1$, $g_\bullet|_{K_{\bullet+1}^c} = 0$. 则 $g_\bullet\phi \to \phi$, 故

$$\langle \mathrm{distr}(g_\bullet)F, \phi\rangle = \langle F, g_\bullet\phi\rangle \to \langle F, \phi\rangle \implies \mathrm{distr}(g_\bullet)F \to F.$$

Step II. 用单位逼近卷积逼近紧支分布. 令 $h_t(x) = h(x/t)/t^n$, $\int h = 1$. 则 $h_t^\sim * \phi \to \phi$. 考虑 $\mathrm{distr}(g_\bullet)F * h_t$:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{distr}(g_\bullet)F * h_t, \phi\rangle &= \langle \mathrm{distr}(g_\bullet)F, \phi * h_t^\sim\rangle \to \langle \mathrm{distr}(g_\bullet)F, \phi\rangle \\ &\implies \mathrm{distr}(g_\bullet)F * h_t \to \mathrm{distr}(g_\bullet)F.\end{aligned}$$

Step III. 证明 $\mathrm{distr}(g_m)F * h_{1/n}$ 有紧支子列. 固定 m, 现处理 $\langle F, g_m\tau_x h_{1/n}\rangle$, 只需考虑 $\operatorname{supp} g_m \cap (x + \operatorname{supp} h_{1/n}^\sim)$ 和注意勿让 $x + \operatorname{supp} h_{1/n}^\sim$ 与 X^c 相交即可. 令

$$n(m) = \min\left\{ n \;\middle|\; \sup_{\operatorname{supp} h_{1/n}} |\cdot| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\operatorname{supp} g_m, X^c) \right\}.$$

则 $C_c^\infty(x) \ni \mathrm{distr}(g_\bullet)F * h_{1/n(\bullet)} \to F$. $\square$

缓增分布 $\mathcal{S}^*$ 比较重要的是其 Fourier 变换:

$$\langle F^\wedge, \phi\rangle \coloneqq \langle F, \phi^\wedge\rangle, \quad \langle F^\vee, \phi\rangle \coloneqq \langle F, \phi^\vee\rangle.$$

故 $\wedge \circ \vee = \vee \circ \wedge = \mathrm{id}_{\mathcal{S}^*}$.

以下公式由速降函数的性质可以直接运算得到:

$$\begin{aligned}
&(\tau_y F)^\wedge = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\cdot)y} F^\wedge, && (\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\cdot)y} F)^\wedge = \tau_y F^\wedge,\\
&\partial^\bullet F^\wedge = ((-2\pi\mathrm{i}(\cdot))^\bullet F)^\wedge, && (\partial^\bullet F)^\wedge = (2\pi\mathrm{i}(\cdot))F^\wedge,\\
&(F\circ T)^\wedge = |\det T|(F^\wedge \circ T^{-1\top}), && (F * \phi)^\wedge = \mathrm{distr}(\phi^\wedge)F^\wedge.
\end{aligned}$$

PROPOSITION 1.4. 形式上地, $F^\wedge(x) = \langle F, \delta_x^\wedge\rangle$, 也就是 $F^\wedge(x) = \langle F, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x(\cdot)}\rangle$. 为了保证后者有意义, 令 F 紧支.

Proof. 只需证明 $\forall\phi \in \mathscr{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int\langle F, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\cdot)x}\rangle\phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle F, \phi^\wedge\rangle$. 同 [**PROPOSITION 1.2**] 中处理一致, 用 Riemann 和逼近:

$$\begin{aligned}
\langle F, \phi^\wedge\rangle &\leftarrow \sum\langle F, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x_\bullet(\cdot)}\phi(x_\bullet)\Delta x_\bullet\rangle\\
&= \sum\langle F, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x_\bullet(\cdot)}\rangle\phi(x_\bullet)\Delta x_\bullet \to \int\langle F, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\cdot)x}\rangle\phi(x)\,\mathrm{d}x. \quad\square
\end{aligned}$$

2 Hilbert 变换

Hilbert 变换定义为

$$H : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}^2, \quad f \mapsto \left[x \mapsto \mathrm{p.\,v.}\int\frac{f(x-y)\,\mathrm{d}y}{\pi y}\right] = f * \frac{\mathrm{p.\,v.}}{(\cdot)\pi}.$$

直接的估计可以得到 $xHf(x) \to \int f$. 故其属于 $\mathscr{L}^2$.

同 [**PROPOSITION 1.4**] 中讨论 $\langle \mathrm{p.\,v.}/((\cdot)\pi), \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x(\cdot)}\rangle = -\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}\,x$.

故由 Plancherel 定理得到 H 是强 $(2,2)$ 的, 由 Fourier 变换唯一性得到 $H^2 = -\mathrm{id}_{\mathscr{L}^2}$. 同时:

$$(Hf)g = g^\vee * (Hf)^\vee = \mathrm{i}(f^\vee\cdot\mathrm{sgn}) * g.$$

故 $\int(Hf)g = -\int(Hg)f$.

THEOREM 2.1 (Kolmogorov). H 是弱 $(1,1)$ 的.

Proof. 不妨假设 f 非负, 其余情形由线性组合得到. 证明的步骤是利用 Calderón – Zygmind 分解: 固定 λ, 则存在不交区间列 $I_\bullet$ 满足

$$\begin{aligned}
&f \leqslant \lambda, \quad \forall x \overset{\text{a.e}}{\in} \Big(\bigcup I_\bullet\Big)^\mathrm{c} =: \Omega^\mathrm{c},\\
&|\Omega| \coloneqq m(\Omega) \leqslant \frac{\|f\|_1}{\lambda},\\
&⨍_{I_\bullet} f \in (\lambda, 2\lambda].
\end{aligned}$$

令 $g=f\mathbf{1}_{\Omega^c}+\sum\mathbf{1}_{I_\bullet}\fint_{I_\bullet}f$, $b=\sum\mathbf{1}_{I_\bullet}(f-\fint_{I_\bullet}f)=\sum b_\bullet$. 即好与坏的部分. 则

$$g\overset{\text{a.e}}{\leqslant}2\lambda,\qquad\int b_\bullet=0,\quad\operatorname{supp}b_\bullet\subset I_\bullet.$$

令 $a_?^K(f)=|\{x\in K\,|\,?(|f|)\}|$, K 为全空间时省略. 则只需证明 $a_{>\lambda}(Hf)\lesssim^f\|f_1\|_1/\lambda$ 即可, 其中

$$a\lesssim b\coloneqq\sup_{a\neq0}(b/a)<\infty.$$

上标 f 强调常数和 f 无关.

由 $a_{>\lambda}(Hf)\leqslant a_{>\lambda/2}(Hg)+a_{>\lambda/2}(Hb)$, 只需令 $a_{>\lambda/2}(Hg)$, $a_{>\lambda/2}(Hb)\lesssim^f\|f_1\|_1/\lambda$ 即可.

- 易见 $g\in\mathscr{L}^2$, 故 Hg 亦然, 有

  $$a_{>\lambda/2}(Hg)\leqslant\frac{4}{\lambda^2}\|Hg\|_2^2=\frac{4}{\lambda^2}\|g\|_2^2\leqslant\frac{8}{\lambda}\|g\|_1=\frac{8}{\lambda}\|f\|_1.$$

- 对 b 采用扩大区间的估计. 令 $2I_\bullet$ 定义为中心为原中心, 长度变为两倍的区间, 2Ω 定义为 $\bigcup 2I_\bullet$.

  则 $|2\Omega|\leqslant2|\Omega|$ 且:

  $$a_{>\lambda/2}(Hb)\leqslant|2\Omega|+a_{>\lambda/2}^{2\Omega^c}(Hb)\leqslant\frac{2\|f_1\|_1}{\lambda}+\frac{2}{\lambda}\int_{2\Omega^c}|Hb|.$$

  考虑 $f\in\mathcal{S}$, 故 $b\in\mathscr{L}^2$, $\sum_{\text{finite}}b_\bullet\to b$, 故 $H(\sum_{\text{finite}}b_\bullet)=\sum_{\text{finite}}Hb_\bullet\to Hb$, 由 H 强 $\mathscr{L}^2$ 有界即得. 故

  $$|Hb|\leftarrow\left|H\Big(\sum_{\text{finite}}b_\bullet\Big)\right|\leqslant\sum_{\text{finite}}|Hb_\bullet|\to\sum|Hb_\bullet|.$$

  而考虑到 $b_\bullet$ 只是速降函数减去某个常数在区间上的限制, 故

  $$Hb_\bullet=\text{p. v.}\int_{I_\bullet}\frac{b_\bullet(y)}{x-y}\,\mathrm{d}y$$

  存在. 令 $c_\bullet$ 是 $I_\bullet$ 中心, 则

  $$\begin{aligned}\int_{2\Omega^c}|Hb|&\leqslant\sum\int_{2I_\bullet^c}|Hb_\bullet|\leqslant\sum\int_{2I_\bullet^c}\left|\text{p. v.}\int_{I_\bullet}\frac{b_\bullet(y)}{x-y}\,\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\sum\int_{I_\bullet}|b_\bullet(y)|\left(\text{p. v.}\int_{2I_\bullet^c}\left|\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x-c_\bullet}\right|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&=\sum\int_{I_\bullet}|b_\bullet(y)|\left(\text{p. v.}\int_{2I_\bullet^c}\frac{|y-c_\bullet|}{|x-y||x-c_\bullet|}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&\leqslant\sum\int_{I_\bullet}|b_\bullet(y)|\left(\text{p. v.}\int_{2I_\bullet^c}\frac{|I_\bullet|}{|x-c_\bullet|^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&\lesssim^f\sum\|b_\bullet\|_1\lesssim^f\|f\|_1.\end{aligned}$$

故 $a_{>\lambda/2}(Hb) \lesssim^f \|f\|_1/\lambda$. 证毕. □

REMARK. 由 *Hilbert* 变换的弱 $(1,1)$ 性, 令 $\mathcal{S} \ni f_\bullet \to f \in \mathscr{L}^1$, 则

$$a_{>\lambda}(f_m - f_n) \lesssim \|f_m - f_n\|_1 \to 0.$$

能诱导依测度 *Cauthy* 列, 故有一个可测函数极限, 但非 $\mathscr{L}^1$.

Hilbert 变换的 $\mathscr{L}^1$ 常数是 $\pi^2/8 \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n/(2n+1)^2$.

THEOREM 2.2 (Riesz)**.** H 是强 (p,p) 的, 其中 $p \in (1,\infty)$.

Proof. 证明是极其经典的. 用 Marcinkiewicz 插值定理得到 $p \in (1,2]$ 的情形, $p > 1$ 的情形用 $\mathscr{L}^p$ 的对偶过渡:

$$\begin{aligned}\|Hf\|_p &= \sup\left\{ \left|\int (Hf)g\right| \,\middle|\, \|g\|_{p'} \leqslant 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ \left|\int (Hg)f\right| \,\middle|\, \|g\|_{p'} \leqslant 1 \right\} \\ &\leqslant \|f_p\| \sup\{ \|Hg\|_{p'} \mid \|g\| \leqslant 1 \} \lesssim^f \|f\|_p. \quad \square\end{aligned}$$

THEOREM 2.3 (截断 Hilbert 变换)**.** 令 $H_\varepsilon f(x) = \int_{|y|>\varepsilon} f(x-y)/\pi y \,\mathrm{d}y$. 则 $\forall f \in \mathscr{L}^{[1,\infty)}$, $Hf \overset{a.e}{=} \lim H_\varepsilon f$. 同时亦有 $\lim \|H_\varepsilon f - Hf\|_p = 0$.

Proof. 先证明 $\lim \|H_\varepsilon f - Hf\|_p = 0$. 由 $(\mathbf{1}_{\{y \mid |y|>\varepsilon\}})^\wedge = -2\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}\int_{2\pi\varepsilon|\cdot|}^\infty \mathrm{sinc}$ 有界, 故强 $(2,2)$, 同 [**THEOREM 2.2**] 讨论知其强 (p,p). 故

$$\|Hf - H_\varepsilon f\| \leqslant \|Hf - Hf_n\| + \|Hf_n - H_\varepsilon f_n\| + \|H_\varepsilon f_n - H_\varepsilon f\|.$$

$\mathcal{S} \ni f_n \to f$. 则中间者用 $f_n \in \mathcal{S}$ 得到, 其他由强 (p,p) 控制得到.

欲证明 $Hf \overset{\text{a.e}}{=} \lim H_\varepsilon f$, 由 $\mathscr{L}^p$ 收敛知存在几乎处处收敛子序列, 只需证明序列几乎处处收敛即可, 由 $\mathcal{S}$ 上的情形显然, 故只需证明

$$H^* f \coloneqq \sup_{\varepsilon>0} |H_\varepsilon f|.$$

是弱 (p,p) 的即可. 证明需要用到 Cotlar 不等式:

LEMMA 2.1 (Cotlar)**.** 若 $f \in \mathcal{S}$, 则 $H^* f \lesssim MHf + Mf$.

Proof of Cotlar inequality. 只需证明 $H_\varepsilon f \lesssim^\varepsilon MHf + Mf$ 即可. □

□

3 Calderón – Zygmind 奇异积分

先主要考虑同展缩可交换的卷积型算子, 令 $\tau^a : f \mapsto f \circ a$. 即考虑

$$T\tau^a = \tau^a T$$

的 T, 其中 $Tf = K * f$. 计算得到 K 要满足齐次条件:

$$K(\lambda x)\lambda^n = K(x).$$

故考虑形似

$$Tf(x) = \text{p. v.} \int \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} f(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

的 T.

Proposition 3.1. 即使考虑 $\mathscr{S}$ 上的函数, 为使上式存在, 须有 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega\,\mathrm{d}\sigma = 0$, σ 为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的曲面测度.

Proof. 令 f 在 $B(0,2)$ 内值为 1, 则

$$Tf(x) = \int_{|y|>1} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} f(x-y)\,\mathrm{d}y + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|\leqslant 1} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\,\mathrm{d}y.$$

前者易见收敛, 而后者值为

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega\,\mathrm{d}\sigma \cdot \log\varepsilon.$$

故须有 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega\,\mathrm{d}\sigma = 0$. □

由于 $\mathbb{S}^{n-1}$ 测度有限, 故先考虑最广的情形:

Theorem 3.1. 令 $x' = x/|x|$, 若 $\Omega \in \mathscr{L}^{(1,\infty)}(\mathbb{S}^{n-1})$, $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega\,\mathrm{d}\sigma = 0$, 则 $(\Omega(-')/|-|^n)^\wedge$ 是 0 次的, 由于 $\Omega(-')/|-|^n * \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x(\cdot)}$ 有意义, 故其 *Fourier* 变换是一个函数:

$$m(x) = -\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(u)\Big(\log|ux'| + \frac{\pi\mathrm{i}}{2}\operatorname{sgn}(ux')\Big)\,\mathrm{d}\sigma(u).$$

Proof. 其是 0 次的由 Fourier 变换与次数的关系直接得到. 现计算其 Fourier 变换:

$$\begin{aligned} m(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|<1/\varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\varepsilon<|y|<1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y + \int_{1<|y|<1/\varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(u)\left(\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}rux}-1}{r}\,\mathrm{d}r + \int_1^{1/\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}rux}\,\mathrm{d}r}{r}\right)\mathrm{d}\sigma(u). \end{aligned}$$

考虑 $\mathbb{R}\circ m(x)$ 和 $\mathbb{J}\circ m(x)$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}\circ m(x)\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\int_\varepsilon^1\frac{\cos(2\pi rux)-1}{r}\,\mathrm{d}r+\int_1^{1/\varepsilon}\frac{\cos(2\pi rux)\,\mathrm{d}r}{r}\right)\Omega(u)\,\mathrm{d}\sigma(u),\\ \mathbb{J}\circ m(x)&=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(u)\left(\int_\varepsilon^{1/\varepsilon}\frac{\sin(2\pi rux)}{r}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\sigma(u).\end{aligned}$$

由于 $|\int_\varepsilon^{1/\varepsilon}\sin(2\pi rux)/r\,\mathrm{d}r|\leqslant\pi/2$. 故由控制收敛定理得

$$\mathbb{J}\circ m(x)=-\frac{\pi\,\mathrm{sgn}(ux)}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega.$$

至于 $\mathbb{R}\circ m(x)$, 由

$$\begin{aligned}&\int_\varepsilon^1\frac{\cos(2\pi rux)-1}{r}\,\mathrm{d}r+\int_1^{1/\varepsilon}\frac{\cos(2\pi rux)\,\mathrm{d}r}{r}\\&=\int_{2\pi|ux|\varepsilon}^1\frac{\cos s-1}{s}\,\mathrm{d}s+\int_1^{2\pi|ux|/\varepsilon}\frac{\cos s\,\mathrm{d}s}{s}-\int_1^{2\pi|ux|}\frac{\mathrm{d}s}{s}.\end{aligned}$$

前两者有界故可分离出来用控制收敛定理, 由 Ω 积分零而消失, 后者恰好为 $-\log|ux|$. □

REMARK. 此中 m 是一个看起来非 $\mathscr{L}^\infty$ 的乘子, 若将 Ω 限制为 $\mathscr{L}^{(1,\infty)}$ 函数, 则 m 的确有界. 同时, 若 Ω 是奇 $\mathscr{L}^1$ 的, 则 $\mathbb{R}\circ m$ 经过计算为 0, 故:

$$\Omega-\Omega^\sim\in\mathscr{L}^1,\quad \Omega+\Omega^\sim\in\mathscr{L}^{(1,\infty)}\implies m\text{ 有界}.$$

更一般地, 可以推广到 $\Omega+\Omega^\sim\in\mathscr{L}\log\mathscr{L}(\mathbb{S}^{n-1})$ 的情形. 故其 $\mathscr{L}^2$ 上强有界.

3.1 奇核与旋转方法

此节认为 Ω 是奇的.

旋转方法可以将一些一维算子推广到 n 维, 同时保留一些有界性质. 给定 T 在 $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ 上强有界, $u\in\mathbb{S}^{n-1}$, 则令

$$T_uf(x)=T(f(\#u+\rho^\perp(x)))(\rho(x)).$$

其中 $\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, x\mapsto\langle x,u\rangle$, $\rho^\perp:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}u^\perp, x\mapsto x-\langle x,u\rangle$.

也即是 f 截面投影的 T 像. 有界性质由下式保持:

$$\begin{aligned}\|T_u f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}u^\perp}\int_{\mathbb{R}} |T(f(\cdot u+\rho^\perp(x)))(\rho(x))|^p \,\mathrm{d}\rho(x)\,\mathrm{d}x \\ &\lesssim_p \int_{\mathbb{R}u^\perp}\int_{\mathbb{R}} |f(\cdot u+\rho^\perp(x))(\rho(x))|^p \,\mathrm{d}\rho(x)\,\mathrm{d}x \\ &\lesssim_p \|f\|_p^p.\end{aligned}$$

如 Hilbert 变换就可由此推广到 n 维上 (方向 Hilbert 变换).

Proposition 3.2. 令 $T:\mathscr{L}^p(\mathbb{R})\to\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ 的范数为 C_p, 则 $\forall\Omega\in\mathscr{L}^1(\mathbb{S}^{n-1})$, 令

$$T_u[\Omega]f(x)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(u)T_u f(x)\,\mathrm{d}\sigma(u).$$

是 $\mathscr{L}^p$ 强有界的. 范数至多为 $C_p\|\Omega\|_1$.

Proof. 由 Minkowski 不等式:

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathcal{S}^{n-1}}\Omega(u)T_u f(x)\,\mathrm{d}\sigma(u)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \\ \leqslant& \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\Omega(u)T_u f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}\sigma(u) \\ \leqslant& \int_{\mathcal{S}^{n-1}}|\Omega(u)|C_p\|f\|_p\,\mathrm{d}\sigma(u)=C_p\|\Omega\|_1\|f\|_p. \quad\square\end{aligned}$$

以上就是最朴素的旋转方法.

Theorem 3.2 (oddker). 令 $\Omega\in\mathscr{L}^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 且奇, 则 $Tf(x)=\text{p. v.}\int\Omega(y/|y|)f(x-y)/|y|^n\,\mathrm{d}y$ 定义的算子在 $\mathscr{L}^{(1,\infty)}$ 中强有界. 同时该极限几乎处处收敛.

Proof. 在 $Tf(x)=\text{p. v.}\int\Omega(y/|y|)f(x-y)/|y|^n\,\mathrm{d}y$ 中考虑极坐标约化, 往 [**Proposition 3.2**] 中情形靠近:

$$Tf(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(u)\int_\varepsilon^\infty\frac{f(x-ru)\,\mathrm{d}r}{r}\,\mathrm{d}\sigma(u).$$

在原点附近减去作为主项的 $f(x)$ 得到:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(u)\int_\varepsilon^1\frac{f(x-ru)-f(x)}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\sigma(u)+\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(u)\int_1^\infty\frac{f(x-ru)\,\mathrm{d}r}{r}\,\mathrm{d}\sigma(u).$$

上定义为 I_1+I_2, 由奇核最朴素的抵消性质:

$$I_1=\frac12\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(u)\int_{\varepsilon<|r|<1}\frac{f(x-ru)-f(x)}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\sigma(u).$$

其中 $\int_{\varepsilon<|r|<1} \frac{f(x-ru)-f(x)}{r}\,\mathrm{d}r$ 本身是有界的 ($f \in \mathcal{S}$), 故由控制收敛定理得 $I_1 \to \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(u) H_u(f\mathbf{1}_{\mathbb{D}})(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)$. 同理 $I_2 = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(u) H_u(f\mathbf{1}_{\mathbb{D}^c})(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)$, 因此

$$Tf(x) = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(u) H_u f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x).$$

由 Hilbert 变换强 (p,p) 和 [**Proposition 3.2**] 得到 T 是强 (p,p) 的.

证明其极限几乎处处存在极只需考察极大函数:

$$T^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0}\left|\int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} f(x-y)\,\mathrm{d}y\right|.$$

由

$$\begin{aligned}\int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} f(x-y)\,\mathrm{d}y &= \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(u) H_u(f\mathbf{1}_{\mathbb{D}(\varepsilon)^c})(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)\\ &\leqslant \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(u)|(H^*)_u f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x).\end{aligned}$$

而 H^* 的有界性由 [**Lemma 2.1**] 得到, 由 [**Proposition 3.2**] 即得. □

3.2 偶核与 Riesz 变换

对于偶核, 主要采用套一个 Riesz 变换得到奇核的处理: 令

$$R_\bullet f = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-(n+1)/2}\,\mathrm{p.v.}\,\pi_\bullet(\cdot')/|\cdot|^n * f.$$

则由对奇核的讨论, Riesz 变换是强 (p,p) 的. 且 $(R_\bullet f)^\wedge = -\mathrm{i}\pi_\bullet(\cdot')f^\wedge$, 故 $\sum R_\bullet^2 = -\mathrm{id}$. 此对 $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ 中亦成立.

令 $f \in \mathcal{C}_c^\infty$, 则

$$-\sum R_\bullet^2 Tf = Tf.$$

若 $R_\bullet Tf$ 为一奇核卷积形式, 则可由 Riesz 变换的强有界性得到偶核卷积的强有界性.

考虑其 Fourier 的有界性, 不妨令 $\Omega \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$, $K(x) = \Omega(x')/|x|^n$, $K_\varepsilon(x) = \Omega(x')/|x|^n \mathbb{1}_{\{x\,|\,|x|>\varepsilon\}}$.

令 $\Omega \in \mathcal{L}^q$, $q>1$, 则 $K_\varepsilon \in \mathcal{L}^{(1,q)}$, 故其局部可积, 考虑 $f \in C_c^\infty$, 则

$$(R_\bullet(K_\varepsilon * f))^\wedge = -\mathrm{i}\pi_\bullet(\cdot')(K_\varepsilon * f)^\wedge = -\mathrm{i}\pi_\bullet(\cdot')K_\varepsilon^\wedge f^\wedge = (R_\bullet K_\varepsilon)^\wedge f^\wedge = ((R_\bullet K_\varepsilon) * f)^\wedge.$$

可认为是在 $\mathcal{L}^p$, $1<p<\min(q,2)$ 中间进行 Fourier 操作, 由 Fourier 变换唯一性 (和连续性) 得到

$$R_\bullet(K_\varepsilon * f) = (R_\bullet K_\varepsilon) * f.$$

故先寻找满足要求的奇核 $\Omega(\cdot')/|\cdot|^n \overset{\text{a.e.}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} R_\bullet K_\varepsilon$.

LEMMA 3.1. $\exists P_\bullet(x)$, $-n$ 齐次, 奇, 且

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R_\bullet K_\varepsilon = P_\bullet.$$

几乎处处成立, 且在 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 中是内闭几乎处处一致收敛的.

Proof. 由 $R_\bullet(K_\varepsilon * f) = (R_\bullet K_\varepsilon) * f$, 而 $K_\varepsilon * f \in \mathcal{L}^{(1,q)}$, 故由 [??] 知积分几乎处处存在.

令 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 极小, 不妨令其小于 $|x|/2$ 以防止 $x = y$, 则

$$R_\bullet(K_{\varepsilon_1} - K_{\varepsilon_2})(x) \approx \text{p. v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\pi_\bullet(x-y)}{|x-y|^{n+1}}(K_{\varepsilon_1} - K_{\varepsilon_2})(x)\,\mathrm{d}y \approx \int_{\varepsilon_1<|y|<\varepsilon_2} \frac{\pi_\bullet(x-y)\Omega(y')}{|x-y|^{n+1}|y|^n}\,\mathrm{d}y.$$

同理减去关于 x 的主项:

$$R_\bullet(K_{\varepsilon_1} - K_{\varepsilon_2})(x) \approx \int_{\varepsilon_1<|y|<\varepsilon_2} \left(\frac{\pi_\bullet(x-y)}{|x-y|^{n+1}} - \frac{\pi_\bullet(x)}{|x|^{n+1}} \right) \frac{\Omega(y')}{|y|^n}\,\mathrm{d}y.$$

由中值定理

$$\left| \frac{\pi_\bullet(x-y)}{|x-y|^{n+1}} - \frac{\pi_\bullet(x)}{|x|^{n+1}} \right| \leqslant \sup_{B(x,|x-y|)} \left| \left(\frac{\pi_\bullet}{|\cdot|^{n+1}} \right)' \right| |y|.$$

而计算得到

$$\left| \left(\frac{\pi_\bullet}{|\cdot|^{n+1}} \right)' \right| (x) = \frac{\sqrt{(n^2-1)x_\bullet^2 + |x|^2}}{|x|^{n+2}} \lesssim \frac{1}{|x|^{n+1}}$$

故

$$|R_\bullet(K_{\varepsilon_1} - K_{\varepsilon_2})(x)| \lesssim \frac{1}{|x|^{n+1}} \int_{\varepsilon_1<|y|<\varepsilon_2} \frac{|\Omega(y')|}{|y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y \lesssim \frac{\varepsilon_2\|\Omega\|_1}{|x|^{n+1}}.$$

故 $\forall x$, $R_\bullet K_\varepsilon$ 是 Cauthy 列, 且在 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 上内闭一致, 故令 $\lim_{\varepsilon\to0} R_\bullet K_\varepsilon$ 几乎处处存在. 令 $x \in E$ 上述极限存在, 则令 $L_\bullet = \mathbb{1}_{E\cap -E} \lim_{\varepsilon\to 0} R_\bullet K_\varepsilon$, 则 $L_\bullet$ 奇, 只需证明其几乎处处 $-n$ 齐次.

由于 $R_\bullet$ 对应的核是 $-n$ 齐次的, 故

$$R_\bullet K_\varepsilon = \lambda^{-n} R_\bullet K_{\varepsilon/\lambda} \implies L_\bullet(\lambda x) = \lambda^{-n} L_\bullet(x).$$

在 $E/\lambda \cap E$ 上成立. 但是 $\cap_{\lambda>0} E/\lambda$ 不一定几乎处处. 故考虑固定 $\mathcal{L}_\bullet$ 在某球面上的值, 依靠延拓达到 $\mathbb{R}^n$ 上的 $-n$ 齐次函数, 此时只需上式在某球面上几乎处处成立即可.

令 $D = \{\, (x,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \mid L_\bullet(\lambda x) \neq \lambda^{-n} L_\bullet(x) \,\}$, 则

$$m^{n+1}(D) = \int_0^\infty m^n(\{\, x \mid L_\bullet(\lambda x) \neq \lambda^{-n} L_\bullet(x) \,\})\,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

极坐标换元可得

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x \mid L_\bullet(\lambda r u) \neq \lambda^{-n} L_\bullet(ru)\}} r^{n-1} \,\mathrm{d}\lambda \,\mathrm{d}\sigma(u) \,\mathrm{d}r = 0.$$

故存在 ρ, $\int_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x \mid L_\bullet(\lambda r u) \neq \lambda^{-n} L_\bullet(ru)\}} r^{n-1} \,\mathrm{d}\lambda \,\mathrm{d}\sigma(u) = 0$. 即 $\sigma(\{x \mid L_\bullet(\lambda x) \neq \lambda^{-n} L_\bullet(x), |x| = \rho\}) = 0$. 故考虑

$$P_\bullet(x) = \mathbb{1}_{\{x \mid x \neq 0, L_\bullet(\lambda \rho x') = \lambda^{-n} L_\bullet(\rho x')\}} \left(\frac{\rho}{x}\right)^n L_\bullet(\rho x').$$

也即是将 $L_\bullet|_{\mathbb{S}^{n-1}(\rho)}$ 的部分齐次延拓出去, 易见

$$m(P_\bullet \neq L_\bullet) \subset E \cup \{x \mid L_\bullet(\lambda \rho x') \neq \lambda^{-n} L_\bullet(\rho x')\} = \{0\}.$$

故两者几乎处处相等. □

$R_\bullet(K_\varepsilon * f)$ 已经解决, 我们现仍需处理 $P_\bullet$ 本身, 如其是否 $\mathcal{L}^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 等等.

Lemma 3.2. $\|P_\bullet|_{\mathbb{S}^{n-1}}\|_1 \lesssim \|\Omega\|_q$, $\|R_\bullet K_\varepsilon - P_\bullet \mathbb{1}_{\{x \mid |x| > \varepsilon\}}\|_1 \lesssim \|\Omega\|_q$.

Proof. $P_\bullet$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的积分可以通过极坐标变换回到 $\mathbb{R}^n$ 中来:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |P_\bullet| \,\mathrm{d}\sigma \approx \int_{1<|x|<2} |P_\bullet| \,\mathrm{d}m.$$

故 $\int_{1<|x|<2} |P_\bullet| \,\mathrm{d}m \leqslant \int_{1<|x|<2} |P_\bullet - R_\bullet K_{1/2}| \,\mathrm{d}m + \int_{1<|x|<2} |R_\bullet K_{1/2}| \,\mathrm{d}m =: I_1 + I_2$. 由于 $|R_\bullet(K_{\varepsilon_1} - K_{\varepsilon_2})(x)| \lesssim \varepsilon_2 \|\Omega\|_1 / |x|^{n+1}$ 得到

$$|(P_\bullet - R_\bullet K_{\varepsilon_2})(x)| \lesssim \frac{\varepsilon_2 \|\Omega\|_1}{|x|^{n+1}}$$

(几乎处处成立) 故 $I_1 \lesssim \|\Omega\|_1$. 而 I_2:

$$I_2 \lesssim \|R_\bullet K_{1/2}\|_q \lesssim \|K_{1/2}\|_q \approx \|\Omega\|_q.$$

故 $\|P_\bullet|_{\mathbb{S}^{n-1}}\|_1 \lesssim \|\Omega\|_q$.

第二个不等式由于 $\|R_\bullet K_\varepsilon - P_\bullet \mathbb{1}_{\{x \mid |x| > \varepsilon\}}\|_1 = \|R_\bullet K_1 - P_\bullet \mathbb{1}_{\{x \mid |x| > 1\}}\|_1$, 只需证明后者.

$$\int \left| R_\bullet K_1 - P_\bullet \mathbb{1}_{\{x \mid |x| > 1\}} \right| \leqslant \int_{|\cdot|<2} |R_\bullet K_1| + \int_{1<|\cdot|<2} |P_\bullet| + \int_{|\cdot|>2} \left| R_\bullet K_1 - P_\bullet \right|.$$

前者由 $R_\bullet$ 强 (p, p) 和 $\|K_1\|_q \lesssim \|\Omega\|_q$ 得到, 中间者已在第一个不等式中证实, 后者 $\lesssim \|\Omega\|_1 \int_{|\cdot|>2} 1/|x|^{n+1} \,\mathrm{d}x$. □

回忆一下得到的三条公式:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R_\bullet K_\varepsilon \overset{\text{a.e.}}{=} P_\bullet, \quad \|P_\bullet|_{\mathbb{S}^{n-1}}\|_1 \lesssim \|\Omega\|_q, \quad \|R_\bullet K_\varepsilon - P_\bullet \mathbb{1}_{\{x\,|\,|x|>\varepsilon\}}\|_1 \lesssim \|\Omega\|_q.$$

可得到:

THEOREM 3.3. 令 $\Omega \in \mathcal{L}^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 且 $\Omega + \Omega^\sim \in \mathcal{L}^q(\mathbb{S}^{n-1})$, $q > 1$, 则

$$Tf \coloneqq \frac{\Omega(\cdot')}{|\cdot|^n} * f.$$

在 $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ 上强有界.

Proof. 只考虑 C_c^∞ 上的函数和 Ω 偶的情形. 由定义 $Tf = \lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon * f$, $K_\varepsilon * f = -\sum R_\bullet(R_\bullet K_\varepsilon * f)$. 且

$$R_\bullet K_\varepsilon * f = (R_\bullet K_\varepsilon - P_\bullet \mathbb{1}_{\{x\,|\,|x|>\varepsilon\}}) * f + P_\bullet \mathbb{1}_{\{x\,|\,|x|>\varepsilon\}} * f =: \Delta_\varepsilon * f + P_\bullet \mathbb{1}_{\{x\,|\,|x|>\varepsilon\}} * f.$$

其中 $\|\Delta_\varepsilon * f\|_p \leqslant \|\Delta\|_1 \|f\|_p \lesssim \|\Omega\|_1 \|f\|_p$. 而 $P_\bullet \mathbb{1}_{\{x\,|\,|x|>\varepsilon\}}$ 是奇核, 故其与 f 的卷积几乎处处存在, 且 $f \mapsto \sup_{\varepsilon>0} |P_\bullet \mathbb{1}_{\{x\,|\,|x|>\varepsilon\}} * f|$ 在 $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ 上强有界. 故

$$\|P_\bullet \mathbb{1}_{\{x\,|\,|x|>\varepsilon\}} * f\|_p \lesssim \left\|\sup_{\varepsilon>0} |P_\bullet \mathbb{1}_{\{x\,|\,|x|>\varepsilon\}} * f|\right\|_p \lesssim \|P_\bullet\|_1 \|f\|_p \lesssim \|\Omega\|_q \|f\|_p.$$

故由 Riesz 变换也是 $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ 强有界得到

$$\|K_\varepsilon * f\|_p \lesssim \|\Omega\|_q \|f\|_p.$$

但由 Fatou 引理: $\|Tf\|_p \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \|K_\varepsilon * f\|_p \lesssim \|\Omega\|_q \|f\|_p$. □

4 Banach 代数和谱理论

Banach 代数是 $\mathbb{C}$ 上的代数赋予范数 $\|\cdot\|$ 满足

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

一个 $*$-代数是代数赋予对合运算:

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \quad (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*, \quad (xy)^* = y^* x^*, \quad * \circ * = \mathrm{id}.$$

若满足 $\|x^* x\| = \|x\|^2$ 则称为 C^* 代数. 以下是几个著名的例子:

- 最基本的例子, 令 H 是 Hilbert 空间, 则 $\mathrm{End}(H)$ 是含幺 C* 代数, 其中对合定义为伴随.
- 令 $X \in \mathsf{CHaus}$, 则 $(C(X), \sup, f \mapsto \overline{f})$ 是一个 C* 代数. 令 X 局部紧 Hausdorff, 则 sup 亦有意义, 但此时 C* 代数无幺元.
- $l^1 \coloneqq \mathcal{L}^1(\mathbb{Z}, \mathrm{card})$. 则 $(l^1, \|\cdot\|_1, a \mapsto \overline{a}^{\sim})$ 是一个 Banach *-代数, 但不是 C* 的, 其中 $ab \coloneqq a * b$. 这个代数与 Wiener $1/f$ 定理直接相关. 注意到 l^1 由 $e = \mathbb{1}_0$, $\mathbb{1}_{-1}$ 和 $\mathbb{1}_1$ 生成.

4.1 含幺 Banach 代数中的可逆元

最基本的例子是 $\lambda - x$, 若 $\|x\| < \lambda$, 则 $(\lambda - x)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} x^n/\lambda^{n+1}$. 这个例子可以导出 Banach 代数中可逆元的分布:

LEMMA 4.1. 令 $\mathscr{A}$ 是含幺 *Banach* 代数, 则 $\mathrm{Inv}\,\mathscr{A}$ 是开集, 且 $x \mapsto x^{-1}$ 可微.

Proof. 易见 $B(x, \|x^{-1}\|^{-1}) \subset \mathrm{Inv}\,\mathscr{A}$: $\|yx^{-1} - 1\| \leqslant \|y - x\|\|x^{-1}\| < 1$, 故 $yx^{-1} \in \mathrm{Inv}\,\mathscr{A} \implies y \in \mathscr{A}$. 令 $u(y) = -x^{-1}yx^{-1}$, 则

$$\|(x + y)^{-1} - x^{-1} - u(y)\| = \|(1 + x^{-1}y)^{-1}x^{-1} - x^{-1} + x^{-1}yx^{-1}\|.$$

其中 $1 + x^{-1}y$ 的可逆性由 $y < \|x^{-1}\|^{-1}/2$ 保证. 故

$$\|(1 + x^{-1}y)^{-1}x^{-1} - x^{-1} + x^{-1}yx^{-1}\| \leqslant \|(1 + x^{-1}y)^{-1} - (1 - x^{-1}y)\|\|x^{-1}\|.$$

现在估计 $\|(1 + x^{-1}y)^{-1} - (1 - x^{-1}y)\|$, 令 $z = x^{-1}y$, 则

$$\|(1 + z)^{-1} - (1 - z)\| = \left\|\sum_{n\geqslant 0}(-z)^n - 1 + z\right\| \leqslant \sum_{n\geqslant 0}\|z\|^n \leqslant \frac{\|z\|^2}{1 - \|z\|}.$$

故令 $\|y\| \to 0$ 得到

$$\|(1 + z)^{-1} - (1 - z)\| = o(\|z\|) = o(\|y\|). \qquad \square$$

同理, $x \mapsto (\lambda - x)^{-1}$ 亦可微.

THEOREM 4.1 (Gel'fand). 含幺 *Banach* 代数中任意元的谱是非空紧集.

Proof. 有界闭显然, 只需证明非空. $\mathrm{spec}\,x = \varnothing$. 但 $\forall\phi \in \mathscr{A}^*$, $\phi((\lambda - x)^{-1})$ 可微, 故是整函数, 由 $\|(\lambda - x)^{-1}\| \lesssim 1/|\lambda|$ 得有界, 故为常数, 与 ϕ 可以分点矛盾. $\square$

COROLLARY 4.1 (Gel'fand – Mazur). 令 $\mathscr{A}$ 是含幺 *Banach* 代数且无平凡不可逆元, 则 $\mathscr{A} \cong \mathbb{C}$.

定义谱半径为 $\rho(x) = \sup\{\,|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{spec} x\,\}$, 则 $\rho(x) \leqslant \|x\|$. 则

THEOREM 4.2 (Beurling). $\rho(x) = \inf_n \|x^n\|^{1/n}$, 即

$$\rho(x) = \inf\{\,\|x\|_{\mathscr{A}} \mid \|\cdot\|_{\mathscr{A}} \text{ 是 } \mathscr{A} \text{ 上的范数}\,\}.$$

Proof. $\lambda^n - x^n = (\lambda - x)\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j x^{n-1-j}$. 故 $\lambda \in \operatorname{spec} x \implies \lambda^n \in \operatorname{spec} x^n$. 即

$$\lambda \leqslant \liminf \|x^n\|^{1/n}.$$

反之, 令 $\phi \in \mathscr{A}^*$, $\phi((\lambda - x)^{-1})$ 在 $\lambda > \rho(x)$ 上可微, 故解析 (考虑其在无穷远点的展开):

$$\phi((\lambda - x)^{-1}) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\phi(x^n)}{\lambda^{n+1}}.$$

故 $\phi(x^n)/\lambda^{n+1}$ 有界. 将 x^n/λ^{n+1} 视为 $\mathscr{A}^{**}$ 中元素, 由一致有界性定理得到 x^n/λ^{n+1} 有界, 故 $\|x^n\| \leqslant C\lambda^{n+1} \implies \limsup \|x^n\|^{1/n} \leqslant \rho(x)$. □

将 $\mathscr{A}$ 上的乘性泛函的集合称为 $\operatorname{spec} \mathcal{A}$. 则 $\forall h \in \operatorname{spec} \mathscr{A}$, $|h(x)| \leqslant \|x\|$. 若不然, 由 $h(x) - x \in \ker h$ 和可逆矛盾.

现给定 $\mathscr{A}$ 的真理想 I, 则 $I \subset (\operatorname{Inv} \mathscr{A})^{\mathrm{c}}$. 故 $\bar{I} \subset (\operatorname{Inv} \mathscr{A})^{\mathrm{c}}$. 由 Zorn 引理保证极大理想存在性后有:

THEOREM 4.3. $\ker : \operatorname{spec} \mathscr{A} \to \{\,\mathscr{A} \text{ 的极大理想集合}\,\}$ 是一个双射.

Proof. 先证明 $\ker h$ 极大. 由 $h(x) - x \in \ker h$ 得到 $\ker h + \mathbb{C} = \mathscr{A}$. 故极大.

然后是 ker 是单射, 令 $\ker h_1 = \ker h_2$, 则 $h_1(x - h_2(x)) = 0 \implies h_1 = h_2$.

最后是 ker 是满射, 给定一个极大理想 I, 其必然是闭的, 则 $\mathscr{A}/I \cong \mathbb{C}$: 由其只有平凡理想得到每个非零元可逆, 再应用 Gel'fand – Mazur 定理即得. 故将两者等同, 投影映射 π 就是所需乘性泛函. □

Gel'fand 变换可将 $\mathscr{A}$ 中元视为 $C(\operatorname{spec} \mathscr{A})$ 中元素, 其中 $\operatorname{spec} \mathscr{A}$ 赋予弱* 拓扑, 则其是 $\mathscr{A}^*$ 中单位球内闭集, 由 Banach – Alaoglu 定理, 其是个紧 Hausdorff 空间. 定义 Gel'fand 变换:

$$\Gamma : x \mapsto \hat{x} = [f \mapsto f(x)].$$

则

THEOREM 4.4 (Gel'fand 表示). 对 *Gel'fand* 变换有以下事实成立. 其中 $\mathscr{A}$ 交换.

- 由于 $\operatorname{spec}\mathscr{A}$ 紧 *Hausdorff*, 故 $C(\operatorname{spec}\mathscr{A})$ 是一个 C^* 代数. *Gel'fand* 变换则是代数同态;
- $x \in \operatorname{Inv}(\mathscr{A}) \iff 0 \notin \hat{x}(\operatorname{spec}\mathscr{A})$, $\operatorname{im}\hat{x} = \operatorname{spec} x$.
- 若 $\mathscr{A}$ 是由 x, e 或者 x, x^{-1} 生成的, 则 $\hat{x} : \operatorname{spec}\mathscr{A} \to \operatorname{spec} x$ 是一个同胚.

Proof. 第一款是显然的. 第二款: $\lambda \in \operatorname{spec} x \iff \lambda - x$ 不可逆 $\iff (\lambda - x)\mathscr{A}$ 是真理想 $\iff \exists h \in \operatorname{spec}\mathscr{A}, h(\lambda - x) = h(\lambda) - h(x) = 0$; 第三款: 由第二款, $h_n \xrightarrow{w.} h \implies h_n(x) \to h(x) \iff \hat{x}(h_n) \to \hat{x}(h)$, 故 $\hat{x}$ 连续, 由两个谱都是紧 Hausdorff 的, 只需证明 $\hat{x}$ 是双射即可, 满射性由第二款得到, 证明单射性只需证明 h 由 $h(x)$ 决定即可, 这由 $\mathscr{A}$ 是由 x, e 或者 x, x^{-1} 生成即得. □

两个例子:

THEOREM 4.5.
- 令 $X \in \mathsf{CHaus}$, 则 $C(\operatorname{spec} X) \cong X$.
- $\operatorname{spec} l^1 \cong \mathbb{T}$.

Proof. 定义 $x^{\mathrm{pb}} : f \mapsto f(x)$. 则由 $C(X)$ 分点得 $\mathrm{pb} : x \mapsto x^{\mathrm{pb}}$ 单射; $x_\alpha \to x \implies f(x_\alpha) \to f(x) \implies (x_\alpha)^{\mathrm{pb}} \xrightarrow{\mathrm{w}^*.} x^{\mathrm{pb}}$. 故 pb 是连续的, 只需证明满射, 也即是连续函数环上的极大理想与 X 的对应. 若理想 I 不含于某个 $\ker x^{\mathrm{pb}}$, 则 $\exists f_x, f_x(x) \neq 0$. 考虑

$$X = \bigcup_{x\in X} (f_x(0))^{\mathrm{c}} \implies X = \bigcup_{i=1}^{n} (f_{x_i}(0))^{\mathrm{c}}.$$

令 $g = \sum f_{x_\bullet} \overline{f_{x_\bullet}} \in I$, 则 $g > 0$, 故可逆与 I 真矛盾.

对第二款, 令 $F : \mathbb{T} \to C(\operatorname{spec} l^1)$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mapsto [\{a_\bullet\} \mapsto \sum a_\bullet \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bullet\theta}]$. 由于 l^1 由 $\mathbb{1}_{-1}$, $\mathbb{1}_1$ 生成, 故 $\operatorname{spec} l^1 \cong \operatorname{spec} \mathbb{1}_1$.

考虑 $\lambda - \mathbb{1}_1$, 令 $a \in l^1$, 则

$$(\lambda - \mathbb{1}_1)a = (\lambda - \mathbb{1}_1) * a = \{\lambda a_\bullet - a_{\bullet-1}\}.$$

故 (如果存在)

$$(\lambda - \mathbb{1}_1)^{-1} = a_0 \sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathbb{1}_n}{\lambda^n} + (\lambda a_0 - 1) \sum_{n\geqslant 1} \lambda^{n-1} \mathbb{1}_{-n}.$$

令其属于 l^1 得到

$$(\lambda - \mathbb{1}_1)^{-1} = \begin{cases} -\sum_{n\geqslant 1} \lambda^{n-1}\mathbb{1}_{-n}, & |\lambda| < 1; \\ \sum_{n\geqslant 0}(\mathbb{1}_n/\lambda^n), & |\lambda| > 1; \\ \text{不存在}, & |\lambda| = 1. \end{cases}$$

又 $\exists! f \in \operatorname{spec} l^1$ 满足 $f(\mathbb{1}_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 故

$$f(a) = f\Big(\sum a_\bullet \mathbb{1}_\bullet\Big) = \sum a_\bullet \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bullet\theta}.$$

而只需令 $f = F(\theta)$ 即可. □

COROLLARY 4.2 (Wiener $1/f$ 定理). 令 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, 且 $f^\wedge \in l^1$, $f^{-1}(0) = \varnothing$, 则 $(1/f)^\wedge \in l^1$.

Proof. 由 $\sum f^\wedge \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bullet(\cdot)}$ 一致收敛, 故 f 几乎处处为一个连续函数, 又 f 不为 0, 故

$$\forall h \in \operatorname{spec} l^1, \quad h(f) = \sum f^\wedge \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bullet\theta} \neq 0.$$

故 $g^\wedge$ 是 $f^\wedge$ 的逆, 易见 $g \overset{\text{a.e.}}{=} 1/f$. □

以上处理未用到对合运算, 以下是一些关于对合运算的例子.

4.2 Banach* 代数和 C* 代数

Γ 是代数同态, 但不一定是 $*$ 的, 因此称 Γ 是 $*$ 时的 $\mathscr{A}$ 为对称的. 即 $\Gamma(x^*) = \overline{\Gamma(x)}$.

PROPOSITION 4.1. *C^* 代数是对称的. 更一般地, $\mathscr{A}$ 是对称的当且仅当 $x = x^* \implies \operatorname{im}\hat{x} \subset \mathbb{R}$.*

Proof. 若 $\mathscr{A}$ 对称, 则 $\Gamma(x^*) = \overline{\Gamma(x)}$, 故 $x = x^* \implies \Gamma(x^*) = \overline{\Gamma(x)} \implies \operatorname{im}\Gamma(x) \subset \mathbb{R}$. 反之, 令 $u = (x + x^*)/2$, $v = (x - x^*)/2\mathrm{i}$, 则 $u^* = u$, $v^* = v$, 由 $\Gamma(u), \Gamma(v)$ 实值得到

$$\Gamma(x^*) = \Gamma(u - \mathrm{i}v) = \overline{\Gamma(x)}.$$

若 $\mathscr{A}$ 是 C^* 的, 则令 $x = x^*, h \in \operatorname{spec}\mathscr{A}$, $\hat{x}(h) = a+b\mathrm{i}$, 故 $h(x+\mathrm{i}t) = a+(b+t)\mathrm{i}$, 令 $z = x + t\mathrm{i}$, 则

$$a^2 + (b+t)^2 = |h(z)|^2 \leqslant \|z\|^2 = \|zz^*\| \leqslant \|x^2\| + t^2.$$

即 $a^2 + b^2 + 2bt \leqslant \|x^2\|$, 故 $b = 0$. □

Theorem 4.6 (Gel'fand – Naimark). 令 $\mathscr{A}$ 是交换含幺的 C^* 代数, 则 Γ 是 $\mathscr{A}$ 到 $C(\operatorname{spec}\mathscr{A})$ 的等距同构.

Proof. 等距只需证明 $\|x^*x\| = \|x\|^2 = \|\hat{x}\|_{\sup}^2 = \rho(x)^2$. 若等距, 则应有 $\|x\|^2 = \|\hat{x}\|_{\sup}^2 = \|\hat{x}^2\|_{\sup} = \|\widehat{x^2}\| = \|x^2\|$. 故先考虑

$$\|x^2\| = \|x\|^2.$$

此可以得到 $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$. 故

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\|x^{2^n}\|\right)^{1/2^n} = \|x\|.$$

因此只需证明 $\|x^2\| = \|x\|^2$ 即可. 令 $y = x^*x$, 则

$$\|y^2\| = \|yy^*\| = \|y\|^2.$$

故 $\|y\| = \|\hat{y}\|_{\sup}$. 而一般情形有

$$\|x\|^2 = \|y\| = \|\hat{y}\|_{\sup} = \|(x^*x)^\wedge\|_{\sup} = \||\hat{x}|^2\|_{\sup} = \|x\|_{\sup}^2.$$

故对一般元也是等距.

现只需证明满射. 由等距和 $\mathscr{A}$ 的 Banach 性, $\operatorname{im}\Gamma$ 是 $C(\operatorname{spec}\mathscr{A})$ 的闭子代数, 只需使用 Stone – Weierstraß 定理: 自伴随已由对称性获得, 含幺显然, 分点来自对偶. □

最后, 我们需要证明含幺 C* 代数的范数是唯一确定的. 这可由 $\|x^*x\|$ 唯一确定或自 $*$-元的范数唯一确定得到.

Theorem 4.7. 令 $\mathscr{A}$ 是含幺的 C^* 代数, 则

$$\|x\| = \sqrt{\rho(x^*x)}.$$

Proof. 证明思路如下:

- 先取 $\mathscr{A}$ 的某个交换 C* 子代数 $\mathscr{B}$ 来研究, 我们需要区分两个代数的谱;
- 剩下的由 $\|x\| = \|\hat{x}|_{\mathscr{B}}\|_{\sup} = \rho_{\mathscr{B}}(x)$ 得到. 我们需要说明 $\rho_{\mathscr{B}}(x) = \rho_{\mathscr{A}}(x)$.

故只需证明 $\operatorname{spec}_{\mathscr{A}}(x^*x) = \operatorname{spec}_{\mathscr{B}}(x^*x)$ 即可, 其中 $\mathscr{B}$ 是由 $x^*x, 1$ 生成的 C* 闭子代数.

Lemma 4.2. 令 $\mathscr{A}$ 是含幺 *Banach* 代数, $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ 是闭子代数.

- $x \in \mathscr{B}$, $\operatorname{spec}_{\mathscr{B}} x$ 无处稠密, 则 $\operatorname{spec}_{\mathscr{A}} x = \operatorname{spec}_{\mathscr{B}} x$.

- 令 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是 C^* 含幺的, 则 $x \in \mathscr{B}, x \in \operatorname{Inv} \mathscr{A} \implies x \in \operatorname{Inv} \mathscr{B}$.

proof of LAMMA. 第一款: 令 $\lambda \in \operatorname{spec}_{\mathscr{B}} x$, 则 $\exists\{\lambda_\bullet\} \subset (\operatorname{spec}_{\mathscr{B}} x)^{\mathrm{c}}$, $\lambda_\bullet \to \lambda$. 则 $\|(\lambda_\bullet - x)^{-1}\| \to \infty$. 否则令 $\|(\lambda_\bullet - x)^{-1}\| \leqslant^\bullet N$, $\|\lambda_\bullet - \lambda\| < 1/N$ 时可得 $\lambda - x = \lambda_\bullet - x - (\lambda_\bullet - \lambda) \in \operatorname{Inv} \mathscr{B}$, 矛盾. 同时, $\lambda - x \notin \operatorname{Inv} \mathscr{A}$, 否则 $\|(\lambda_\bullet - x)^{-1}\| \to \|(\lambda - x)^{-1}\|$. 故 $\operatorname{spec}_{\mathscr{A}} x = \operatorname{spec}_{\mathscr{B}} x$.

第二款: $\mathscr{B}$ 显然闭. 令 $\mathscr{C} = \operatorname{cl}\operatorname{span}\{x^* x, 1\}$. 由 $x \in \operatorname{Inv} \mathscr{A} \implies x^* x \in \operatorname{Inv} \mathscr{A}$. 故 $0 \in \operatorname{spec}_{\mathscr{A}}(x^* x)$, 反之, 由 $(x^* x)^* = x^* x \in \mathscr{C}$, 故 $\mathscr{C}$ 也是 C^* 的, 故对称: $\operatorname{spec}_{\mathscr{C}}(x^* x) = \operatorname{im} \Gamma(x^* x) \subset \mathbb{R}$. 由第一款, $\operatorname{spec}_{\mathscr{C}}(x^* x) = \operatorname{spec}_{\mathscr{A}}(x^* x)$, 故 $0 \notin \operatorname{spec}_{\mathscr{C}}(x^* x) \implies x^* x \in \operatorname{Inv} \mathscr{C}$. 而 $x^{-1} = (x^* x)^{-1} x^* \in \mathscr{B}$. □

故 $\operatorname{spec}_{\mathscr{A}}(x^* x) = \operatorname{spec}_{\mathscr{B}}(x^* x)$ 由引理第二款得到. □

4.3 Banach* 代数和 C* 代数的幺

先讨论一般 Banach* 代数的幺. 对非含幺的 Banach* 代数, 可强制加入一个幺元, 也即等价直和上 $\mathbb{C}$:

$$\left(\mathscr{A} \oplus \mathbb{C},\ (x, a)(y, b) = (xy + ay + bx, ab),\ \|\cdot\|_{\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}} := \|\cdot\|_{\mathscr{A}} + |\cdot|_{\mathbb{C}},\ * = ((\cdot)^*, \overline{(\cdot)})\right).$$

是一个合理的延拓: 其中 $\mathscr{A} \subset \mathscr{A} \oplus \mathbb{C}$ 是一个 codim 为 1 的闭理想, 且 $\|\cdot\|_{\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}}|_{\mathscr{A}} = \|\cdot\|_{\mathscr{A}}$. $*_{\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}}|_{\mathscr{A}} = *_{\mathscr{A}}$. 且 $*$ 的延拓是唯一的.

以下是两个例子:

- 考虑 $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, m), *)$. 其没有卷积幺元 ($\delta$). 故只能将 δ 视为测度 (或分布), 考虑 $\mu_f(E) := \int_E f\,\mathrm{d}m$. 故 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C} = \operatorname{span}\{\mu_{L^1(\mathbb{R})}, \delta\}$. 其中卷积定义为测度的卷积 ($\int h\,\mathrm{d}(\mu_f * \mu_g) := \iint h(x+y)\,\mathrm{d}\mu_f(x)\,\mathrm{d}\mu_g(y) = \int (f * g) h\,\mathrm{d}m$) 或分布的卷积. 而 $\|f + a\delta\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})\oplus\mathbb{C}} = \int |f|\,\mathrm{d}m + |a| = |\mu_f + a\delta|(\mathbb{R})$. 但这个例子是险要的, 最后的等式依赖于 $m(\operatorname{supp}\delta) = 0$ 而非其上的代数结构. 以下是一个让幺的支集更大的例子.

- $C_0(X)$, 考虑 $X \in \mathsf{LCHaus} \setminus \mathsf{Cpt}$ 的情形. 则其上无幺. 考虑 X 的单点紧化 X^*, 则 $C(X^*)/C_0(X) \cong \mathbb{C}$. 即 $C_0(X) \oplus \mathbb{C} \cong C(X^*)$. 则

$$\|f\|_{C(X^*)} = \sup |f - f(\infty)| + |f(\infty)|.$$

但其并不是 $C(X^*)$ 上的一致度量, 故不是 C^* 的.

以下是 C* 代数的单位化:

THEOREM 4.8. 由于 $*$ 的延拓是唯一的, 故需要修改的是范数. 存在唯一的范数延拓使得 C^* 代数 $\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}$ 是 C^* 的.

Proof. 由于 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}$ 的理想, 则 $(x,a)\in\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}$ 可视为 $\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 的线性算子 $y\mapsto xy+ay$. 考虑此算子的范数作为 $\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}$ 的范数:

$$\|(x,a)\| \coloneqq \sup\{\, \|xy+ay\| \mid \|y\|\leqslant 1\,\}.$$

则:

- $\|(x,a)(y,0)\|\leqslant(\|x\|+|a|)\|y\|$, 故其是有界的;
- $\|(x,a)\|=0 \implies x=0, a=0$. 若否, 则 $\forall y\in\mathscr{A}$, $xy+ay=0$, 则 $x\neq 0$, 同时 $a\neq 0$. 也即 $-x/a$ 是一个左幺, 而由于 $*$ 是对合的, 则 $(-x/a)^*$ 是一个右幺, 与 $\mathscr{A}$ 无幺矛盾;
- 容易计算得到 $\|\cdot\|_{\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}}|_{\mathscr{A}}=\|\cdot\|_{\mathscr{A}}$, 而 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}$ 的闭理想, 故 $\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}/\mathscr{A}$ 是完备的, 投影映射是 (线性) 连续的, 故保 Cauthy 列. 而 $(x_\bullet,a_\bullet)$ 是 Cauthy 的 $\implies$ $x_\bullet$ 和 $a_\bullet$ 都是 Cauthy 的. 故收敛, 即 $\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}$ 是 Banach 的;
- $\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}$ 是 C* 的. 令 $\|y\|=1$, $\|xy+ay\|>(1-\varepsilon)\|(x,a)\|$. 则

  $$\begin{aligned}(1-\varepsilon)^2\|(x,a)\|^2\leqslant\|xy+ay\|^2&=\|(xy+ay)^*(xy+ay)\|\\&=\|(y^*,0)(x,a)^*(x,a)(y,0)\|\\&\leqslant\|y\|^2\|(x,a)^*(x,a)\|=\|(x,a)^*(x,a)\|.\end{aligned}$$

  故易见是 C* 的 (由 $*$ 的对合可得到反向的不等式).

延拓的唯一性由 C* 代数的范数是唯一确定的得到. □

此时记 $\mathscr{A}$ 的谱其上的乘性线性泛函, 其由一个唯一的延拓:

$$h\mapsto h\oplus\mathrm{id}:(x,a)\mapsto h(x)+a.$$

而 0 的延拓就是投影映射 $\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}\to(\mathscr{A}\oplus\mathbb{C})/\mathscr{A}$. 因此 $\operatorname{spec}\mathscr{A}\cup\{0\}$ 和 $\operatorname{spec}(\mathscr{A}\oplus\mathbb{C})$ 一一对应. 此时 $\operatorname{spec}(\mathscr{A}\oplus\mathbb{C})$ 是 CHaus 的, 故 $\operatorname{spec}\mathscr{A}$ 是 LCHaus 的, $\operatorname{spec}(\mathscr{A}\oplus\mathbb{C})$ 是其单点紧化.

现在考虑 Gel'fand 变换: $(x,0)^\wedge|_{\operatorname{spec}\mathscr{A}}=\hat{x}$. 由 $(x,0)^\wedge(0\oplus\mathrm{id})=0$, 故 $(x,0)^\wedge\in\{\,f\in C(\operatorname{spec}(\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}))\mid f(\infty)=0\,\} \implies \hat{x}\in C_0(\operatorname{spec}\mathscr{A})$. 故在一些定理中将 $C(\operatorname{spec}\mathscr{A})$ 换成 $C_0(\operatorname{spec}\mathscr{A})$ 亦成立.

Theorem 4.9. 定义如上. $\operatorname{spec}\mathscr{A} \in \mathsf{LCHaus}$, $\operatorname{cl}\operatorname{spec}\mathscr{A} = \operatorname{spec}\mathscr{A} \cap \{0\}$. *Gel'fand* 变换是从 $\mathscr{A}$ 到 $C_0(\operatorname{spec}\mathscr{A})$ 的代数同态. 由于 $\{0\}$ 不影响谱半径, 故 $\|\hat{x}\|_{\sup} = \rho(x)$ 亦成立.

同时, 令 $X \in \mathsf{LCHaus} \setminus \mathsf{Cpt}$, 则 X 与 $C_0(X)$ 一一对应.

令 $\mathscr{A}$ 是非含幺的交换 C^* 代数, 则 Γ 是 $\mathscr{A}$ 到 $C_0(\operatorname{spec}\mathscr{A})$ 的等距同构 *(*只需移除 $0 \oplus \mathrm{id}$ 对应的理想 $\mathscr{A}$, $\operatorname{spec}(\mathscr{A} \oplus \mathbb{C})$ 中的 0, $C(\mathscr{A})$ 以及考虑 $(x, a)^\wedge$ 对应 $\hat{x} + a$ 即可*)*. □

4.4 谱定理

给定有限维线性空间 V, 其同构于 $\mathbb{C}^n$, 给定其上的一个自伴随变换 ϕ, 存在酉同构 $U : V \to \mathbb{C}^n$, 满足

$$U\phi U^{-1}x = \langle y, x\rangle.$$

其中 y 是某个 $\mathbb{C}^n$ 中向量, $\langle y, x\rangle$ 是逐点乘积. 亦或是存在投影变换 $P_\bullet$:

$$\phi = \sum_{\operatorname{spec}\phi} \lambda_\bullet P_\bullet.$$

在无穷维的情形, 上式求和应当换成对投影的积分. 同时, 由于投影算子 $\in L(H)$(H 是 Hilbert 空间) 是一个 (可能 C^*) 的代数. 故可以考虑用 CHaus 空间上的连续函数来表示这些算子.

投影算子满足 $P^2 = P$, 对正交投影算子还有 $\ker P \perp \operatorname{im} P$. 前者对应连续函数的平方须是自身, 后者对应 $\langle Pu, v\rangle = \langle u, Pv\rangle$. 故可能连续函数的共轭也是自身. 在抽象空间上的例子自然是 1 和 0. 但考虑一般的情形 $\mathbb{1}_E$ 却并不是连续的, 因此需要研究 $B(\operatorname{spec}\mathscr{A})$(有界可测函数) 到 $L(H)$ 的对应, 其中 $\mathscr{A}$ 是 $L(H)$ 中的某个含幺交换 C^* 子代数. 但前后各自都是完备的, 连续函数在有界可测函数并非稠密, 故需要用到将内积等构造变成容易研究有界性的测度积分, 也就是 Riesz 表示定理.

回忆, 若 $u : H^2 \to \mathbb{C}$ 是双有界, 半双线性的, 则存在有界线性变换 $T \in L(H)$ 满足 $u = \langle T(-), -\rangle$. 以此来诱导内积和线性变换, 测度之间的联系.

现以 $f^\vee$ 记 $f \in C(\operatorname{spec}\mathscr{A}) =: C(\Sigma)$ 的逆 Gel'fand 变换, 则 $f \mapsto \langle f^\vee u, v\rangle \leqslant \|f^\vee\|\|u\|\|v\| = \|f\|_{\sup}\|u\|\|v\|$. 故存在 (由 $C(\Sigma)$ 是紧致的, 故 Radon 测度是正规的) 唯一的正规复 Borel 测度 $\mu_{u,v}$ 满足:

$$\langle f^\vee u, v\rangle = \int f \,\mathrm{d}\mu_{u,v}, \quad \|\mu_{u,v}\| = \|f \mapsto \langle f^\vee u, v\rangle\| \leqslant \|u\|\|v\|.$$

PROPOSITION 4.2. $(u,v)\mapsto\mu_{u,v}$ 是半双线性的, $\mu_{u,v}=\overline{\mu_{v,u}}$, $\mu_{u,u}\geqslant 0$. 也即, $(u,v)\mapsto\mu_{u,v}$ 是测度值内积.

Proof. 半双线性由内积得到. 由于 C^* 代数是对称的, 故 $f^{\vee *}=\overline{f}^{\vee}$, 则

$$\langle f^{\vee}u,v\rangle=\langle u,f^{\vee *}\rangle=\overline{\langle f^{\vee *},u\rangle}=\overline{\langle\overline{f}^{\vee}v,u\rangle}.$$

也即 $\int f\,\mathrm{d}\mu_{u,v}=\overline{\int\overline{f}\,\mathrm{d}\mu_{v,u}}=\int f\,\mathrm{d}\overline{\mu_{u,v}}$. 从而 $\mu_{u,u}$ 是实测度, 令 $f\geqslant 0$, 则 $\sqrt{f}^{\vee *}\sqrt{f}^{\vee}=(\sqrt{f}^{\vee})^2=f^{\vee}$. 故

$$\int f\,\mathrm{d}\mu_{u,u}=\|\sqrt{f}^{\vee}u\|^2\geqslant 0.\qquad\square$$

现在考虑 $f\in B(\Sigma)$, $(u,v)\mapsto\int f\,\mathrm{d}\mu_{u,v}$ 是双有界, 半双线性的. 故 $\exists f^{\vee}\in L(H)$, $\int f\,\mathrm{d}\mu_{u,v}=\langle f^{\vee}u,v\rangle$. 由唯一性可得其在 $C(\Sigma)$ 上的定义与原来一致.

THEOREM 4.10. $f\mapsto f^{\vee}$ 是 $B(\Sigma)\to L(H)$ 的 $*$-同态.

Proof. 连续函数情形显然, 但连续函数在有界函数中并非稠密, 故需要用 Riesz 表示定理. 注意到上述正规 Borel 测度由其在连续函数上的行为唯一决定.

令 $f\in B(\Sigma)$, 则

$$\langle\overline{f}^{\vee}u,v\rangle=\int\overline{f}\,\mathrm{d}\mu_{u,v}=\overline{\int f\,\mathrm{d}\mu_{v,u}}=\overline{\langle f^{\vee}v,u\rangle}=\langle u,f^{\vee}v\rangle=\langle(f^{\vee})^*u,v\rangle.$$

故 $\overline{f}^{\vee}=f^{\vee *}u$.

现在证明 $(fg)^{\vee}=f^{\vee}g^{\vee}$. 对连续函数是成立的, 即:

$$\int f\,\mathrm{d}\mu_{g^{\vee}u,v}=\int fg\,\mathrm{d}\mu_{u,v}=\int f(g\,\mathrm{d}\mu_{u,v})\implies\mathrm{d}\mu_{g^{\vee}u,v}=g\,\mathrm{d}\mu_{u,v},\quad g\in C(\Sigma).$$

故对 $f\in B(\Sigma)$,

$$\int g\,\mathrm{d}\mu_{u,f^{\vee *}v}=\langle g^{\vee}u,f^{\vee *}v\rangle=\langle f^{\vee}g^{\vee}u,v\rangle=\int f\,\mathrm{d}\mu_{g^{\vee}u,v}=\int fg\,\mathrm{d}\mu_{u,v}.$$

故 $\forall f\in B(\Sigma)$, $\mathrm{d}\mu_{u,f^{\vee *}v}=f\,\mathrm{d}\mu_{u,v}$. 故

$$\langle f^{\vee}g^{\vee}u,v\rangle=\langle g^{\vee}u,f^{\vee *}v\rangle=\int g\,\mathrm{d}\mu_{u,f^{\vee *}v}=\int gf\,\mathrm{d}\mu_{u,v}=\langle(fg)^{\vee}u,v\rangle.$$

故 $(fg)^{\vee}=f^{\vee}g^{\vee}$. $\square$

REMARK. 由控制收敛定理 *(D.C.T.)*, 可以得到若 $f_{\bullet}\to f\in B(\Sigma)$, 则 $\langle f_{\bullet}^{\vee}u,v\rangle\to\langle u,v\rangle$. 用连续函数在积分意义下逼近有界函数可以得到 $\operatorname{im}\vee\subset\mathrm{cl}_{w.}\mathscr{A}$. 故实际上是在 $\mathscr{A}$ 的弱闭包下讨论.

现在终于可以考虑 $\mathbb{1}_E^\vee =: P(E)$, 其中 $E \subset \sigma$ 是 Borel 的.

定义投影值测度为 $\nu : (X, \mathcal{M}) \to \{L(H)\text{ 中的正交投影}\}$ 满足以下性质. 其中 $X \in \mathsf{LCHaus}$.

- $\nu(\varnothing) = 0$, $\nu(\Sigma) = \mathrm{id}$;
- $\nu(E \cap F) = \nu(E)\nu(F)$;
- 令不交可数集列 $\{E_\bullet\} \subset \mathcal{M}$, 则 $\nu(\bigsqcup E_\bullet) = \sum \nu(E_\bullet)$, 其中求和以强算子拓扑收敛.
- 若 $\forall u, v \in H$, $E \mapsto \langle \nu(E)u, v\rangle$ 是正规测度, 则称 ν 是正规的.

(其是一种特殊的谱测度) 定义对简单函数的投影值测度积分为满足

$$\int \sum a_\bullet \mathbb{1}_{E_\bullet} \,\mathrm{d}\nu = \sum a_\bullet \nu(E).$$

同时, 对一般的可测函数 f, 定义为满足

$$\left\langle \left(\int f \,\mathrm{d}\nu\right) u, v \right\rangle = \int f(t) \,\mathrm{d}(\langle \nu(t)u, v\rangle), \quad \forall u, v \in H.$$

的有界线性算子 $\int f \,\mathrm{d}\nu$.

Theorem 4.11. 对 $f \in B(X)$, $\int f \,\mathrm{d}P$ 存在, $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\nu$ 是 $B(X)$ 到 $L(H)$ 的 $*$-同态. 对上面的例子来说, $\langle P(E)u, v\rangle = \mu_{u,v}(E)$, 故 P 是正规的投影值测度.

Proof. 对第一款只需证明积分的双有界性. 考虑到 ν 是投影, 记 $\nu_{u,v}(E) = \langle \nu(E)u, v\rangle$, 故 $(u, v) \mapsto \nu_{u,v}$ 可以证明是测度值内积, 故 $\nu_{u,u} \geqslant 0$.

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\nu_{u,u}\right| \leqslant \|f\|_{\sup} |\nu_{u,u}| \leqslant \|f\|_{\sup} \|u\|^2.$$

故是双有界的. $u \neq v$ 的情形可以用极化恒等式:

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\nu_{u,v}\right| \leqslant \frac{\|f\|_{\sup}}{4}\left(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 + \|u+\mathrm{i}v\| + \|u-\mathrm{i}v\|^2\right) \leqslant 4\|f\|_{\sup}\|u\|\|v\|.$$

故积分存在.

$f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\nu$ 的有界线性证毕, 考虑 $f_\bullet \to f$, $g_\bullet \to g$ 是简单函数对可测函数的一致逼近. 则

$$\int f_\bullet g_\bullet \,\mathrm{d}\nu = \left(\int f_\bullet \,\mathrm{d}\nu\right)\left(\int g_\bullet \,\mathrm{d}\nu\right).$$

由定义可得, 同时由有界性和强算子拓扑收敛性:

$$\int fg\,\mathrm{d}\nu \leftarrow \int f_\bullet g_\bullet\,\mathrm{d}\nu = \Big(\int f_\bullet\,\mathrm{d}\nu\Big)\Big(\int g_\bullet\,\mathrm{d}\nu\Big) \to \Big(\int f\,\mathrm{d}\nu\Big)\Big(\int g\,\mathrm{d}\nu\Big).$$

对简单函数 ϕ, $\int \overline{\phi}\,\mathrm{d}\nu = (\int \phi d\nu)^*$ 成立, 由上述逼近得对有界可测函数也成立. 故是 $*$-同态.

现在讨论我们导出的 P. $P(E)$ 是投影算子由 $\mathbb{1}_E^2 = \mathbb{1}_E$ 得到, 其是正交的由 $\overline{\mathbb{1}_E} = \mathbb{1}_E$ 和

$$\ker P(E) = \bigcap_{v\in H} \ker\langle P(E)(-), v\rangle = \bigcap_{v\in H} \ker\langle P(E)^* v, -\rangle = \operatorname{im}(P(E)^*)^\perp = \operatorname{im}(P(E))^\perp.$$

得到. $P(\varnothing) = 0$, $P(\Sigma) = \mathrm{id}$ 显然. $P(E\cap F) = P(E)P(F)$ 由 $\mathbb{1}_{E\cap F} = \mathbb{1}_E\mathbb{1}_F$ 和 $\vee$ 的 $*$-同态性得到. 强算子拓扑收敛性由

$$\|(P(E) - P(E_\bullet))u\|^2 = \|P(E\setminus E_\bullet)u\|^2 = \langle P(E\setminus E_\bullet)u, P(E\setminus E_\bullet)u\rangle.$$

而 $\langle P(E\setminus E_\bullet)u, P(E\setminus E_\bullet)u\rangle = \langle P(E\setminus E_\bullet)^* P(E\setminus E_\bullet)u, u\rangle = \langle P(E\setminus E_\bullet)u, u\rangle = \int \mathbb{1}_{E\setminus E_\bullet}\,\mathrm{d}\mu_{u,u} \xrightarrow{\text{D.C.T.}} 0$. $P_{u,v}(E) = \mu_{u,v}$ 已由上述讨论得到. □

现在考虑对有界函数 f 的积分: $\int f\,\mathrm{d}P$ 满足 $\langle(\int f\,\mathrm{d}P)u, v\rangle = \int f\,\mathrm{d}\mu_{u,v}$. 故 $\int f\,\mathrm{d}P = f^\vee$. 同理, $x\in\mathscr{A} \implies \int \hat{x}\,\mathrm{d}P = x$.

Theorem 4.12 (谱定理). 令 $\mathscr{A}$ 是 $L(H)$ 的交换含幺 C^* 代数. 则存在半有限测度空间 $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, 酉变换 $U : H \to \mathcal{L}^\infty(\mu)$, 等距 $*$-同态 $\phi : \mathscr{A} \to \mathcal{L}^\infty(\mu)$, $x \mapsto \phi_x$ 满足:

- $\forall g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, $x\in\mathscr{A}$ 满足 $UxU^{-1}g = xg$;
- Ω 可以认为是 $\bigsqcup_{i\in I}\Sigma$, 其中 I 是某个指标集. 且 $\phi_x|_{\Sigma_i} = \hat{x}$. 其中指标集 I 的基数由 $\{\mathrm{cl}\,\mathscr{A}v_i\}_{i\in I}$ 极大两两正交决定.

Proof.

Step I. 假设存在 $v\in H$ 满足 $\mathrm{cl}\,\mathscr{A}v = H$. 令 $\mu \coloneqq \mu_{v,v}$ 满足

$$\langle f^\vee v, v\rangle = \int f\,\mathrm{d}\mu_{v,v}.$$

即如之前所定义的. 则 $\forall x \in \mathscr{A}$, $\|xv\|^2 = \langle x^*xv, v\rangle = \int (x^*x)^\wedge\,\mathrm{d}\mu = \int |\hat{x}|^2\,\mathrm{d}\mu$.

故 $xv=yv \implies \hat{x}\overset{\text{a.e.}}{=}\hat{y}$. 故 $xv\mapsto\hat{x}$ 是个合理的映射, 且是等距. 故能延拓到 H 上: $U:H\to\mathcal{L}^2(\Sigma,\mathcal{B}_\Sigma,\mu)$. 由于 H 完备, $\operatorname{im}U$ 在 $\mathcal{L}^2(\mu)$ 中闭, 且 $C(\Sigma)\subset\operatorname{im}U$, 故由 μ 正规得到 $\operatorname{cl}C(\Sigma)=\mathcal{L}^2(\mu)$. 故 U 是同构. 令 $g\in C(\Sigma)$:

$$UxU^{-1}g=Uxg^{\vee}v=(xg^{\vee})^{\wedge}=\hat{x}g.$$

由于等式两边都是连续的, 故对 $g\in\mathcal{L}^2(\mu)$ 中也成立.

STEP II. 若不存在 $v\in H$ 满足 $\operatorname{cl}\mathscr{A}v=H$. 令 $\{v_i\}_{i\in I}$ 是令 $\operatorname{cl}\mathscr{A}v_i$ 两两正交的极大组, 由 Zorn 引理显然存在. 记 $H_\bullet=\operatorname{cl}\mathscr{A}v_\bullet$, 则 $H_\bullet$ 是 $\mathscr{A}$ 不变子空间, 故 $\bigoplus H_\bullet$ 亦然. 令 $u\in(\bigoplus H_\bullet)^\perp$, $v\in\bigoplus H_\bullet$, 则

$$\langle xu,v\rangle=\langle u,x^*v\rangle=0.$$

故 $\mathscr{A}(\bigoplus H_\bullet)^\perp\subset(\bigoplus H_\bullet)^\perp$. 这意味这 $\bigoplus H_\bullet=H$, 否则令 $w\in(\bigoplus H_\bullet)^\perp$, 则 $\mathscr{A}w\perp\bigoplus H_\bullet$, 故 $\operatorname{cl}\mathscr{A}w$ 亦然, 故 $\{v_\bullet\}\cap\{w\}$ 是新的极大组矛盾. 现在考虑 $\mathscr{A}_\bullet=\{\,x|_{H_\bullet}\mid x\in\mathscr{A}\,\}$, $\Upsilon_\bullet=\operatorname{spec}\mathscr{A}_\bullet$. 则考虑组 $(x_\bullet,\mathscr{A}_\bullet,H_\bullet)$ 和 STEP I. 可以得到存在酉变换 $V_\bullet:H_\bullet\to\mathcal{L}^2(\Upsilon_\bullet,\mathcal{B}_{\Upsilon_\bullet},\nu_{v_\bullet,v_\bullet})$. 满足 $\forall x_\bullet\in\mathscr{A}_\bullet, Ux_\bullet U^{-1}g=\Gamma_{\mathscr{A}_\bullet}(x)g$, 其中 $g\in C(\Upsilon_\bullet)$. 令 $\mathcal{N}=\{\,E\mid E\cap\Upsilon_\bullet\in\mathcal{B}_{\Upsilon_\bullet}\,\}$. 只需考虑 $V=\bigoplus V_\bullet:\bigoplus H_\bullet\to\bigoplus L^2(\nu_{\bullet,\bullet})$ 即可: 令 $\nu(E)=\sum\nu_\bullet(E\cap\Upsilon_\bullet)$, 则其是半有限的. $\mathcal{L}^2(\nu)\cong\bigoplus\mathcal{L}^2(\nu_{\bullet,\bullet})$. 故令 $z\in H_i$:

$$VxV^{-1}g(z)=V_ix|_{H_i}H_i^{-1}g(z)=\hat{x}(z)g(z).$$

STEP III. 由于 $\Upsilon_\bullet$ 不一定是 Σ, $\nu_{\bullet,\bullet}$ 也不一定是 $\mathcal{B}_\Sigma$ 上的测度, 依题意, 我们需要将 $(\Upsilon_\bullet,\nu_{\bullet,\bullet},\Gamma_{\mathscr{A}_\bullet})$ 延拓到 $(\Sigma,\mu,\Gamma_{\mathscr{A}})$. 我们只需说明:

- $\operatorname{spec}\mathscr{A}_\bullet\Subset\mathscr{A}$(嵌入意义下); 给定一个乘性线性泛函 f, 令 $\tilde{f}(x)=f(x|_{H_\bullet})$. 由于 H_i 是 $\mathscr{A}$ 不变子空间, 故这个延拓是合理的. 因此可以验证 $\operatorname{spec}\mathscr{A}_\bullet\Subset\mathscr{A}$.
- 在第一款意义下, $\Gamma_{\mathscr{A}_\bullet}(x|_{H_\bullet})=\Gamma(x)|_{\Upsilon_\bullet}$; 由上, $\Gamma_{\mathscr{A}}(x)(\tilde{f})=\Gamma_{\mathscr{A}_\bullet}(x|_{H_\bullet})(f)$, 其中 $f\in\Upsilon_\bullet$.
- 存在测度 $\mu_\bullet(E)\coloneqq\mu_{v_\bullet,v_\bullet}(E)=\nu_{v_\bullet,v_\bullet}(E\cap\Upsilon_\bullet)$. 其中 $\mu_\bullet:\Sigma\to[0,\infty]$. 如下图, 限制映射诱导了 $C(\Sigma)\to C(\Upsilon_\bullet)$ 的满射 (Tietze 延拓定理), 故

诱导了其对偶空间的单拉回:

$$\begin{tikzcd} C(\Sigma) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, two heads, "\mathrm{rest}_{\Upsilon_\bullet}"'] & C(\Sigma)^* \arrow[r, phantom, "\cong"] & M(\Sigma) \\ C(\Upsilon_\bullet) \arrow[r, mapsto] & C(\Upsilon_\bullet)^* \arrow[u, hook, "\mathrm{rest}^*_{\Upsilon_\bullet}"'] \arrow[r, phantom, "\cong"] & M(\Upsilon_\bullet) \end{tikzcd}$$

其次, 这个测度 $\mu_\bullet$ 可以恰好满足 $\langle f^\vee v_\bullet, v_\bullet\rangle = \int_\Sigma f\,\mathrm{d}\mu$:

$$\int_\Sigma f\,\mathrm{d}\mu_\bullet = \langle f^\vee v_\bullet, v_\bullet\rangle = \langle f^\vee|_{H_\bullet} v_\bullet, v_\bullet\rangle = \langle (f|_{H_\bullet})^\vee v_\bullet, v_\bullet\rangle = \int_{\Upsilon_\bullet} f\,\mathrm{d}\nu_{\bullet,\bullet}.$$

故在 STEP II. 中用 $\mu_\bullet$ 替代原来的 $\nu_{\bullet,\bullet}$ 可得到酉同构:

$$U : H \to \mathcal{L}^2(\mu).$$

STEP IV. 令 $\phi : x \mapsto \bigsqcup \hat{x}$. 由 Gel'fand 的 $*$ 性得到其是个 $*$-同态, 最后考虑其范数: 只需验证 $\|x\| = \|\hat{x}\|_{\sup}$ 即可. 而这由 Gel'fand – Naimark 定理得到. 如果我们考虑将 ϕ_x 视为 $L(\mathcal{L}^2(\mu))$ 中元, 则显然 $\|\phi_x\|_{L(\mathcal{L}^2(\mu))} \leqslant \|x\|$. 反之, 给定 $E = \{z \mid |\phi_x(z)| \geqslant \|\phi_x\|_\infty - \varepsilon\}$, 则 $\mu(E) > 0$, 由半有限性, $\exists F \subset E$, $\mu(F) \in (0,\infty)$. 故

$$\|\phi_x \mathbb{1}_F\|_2 \geqslant (\|\phi_x\|_\infty - \varepsilon)^2 \mu(F) = (\|\phi_x\|_\infty - \varepsilon)^2 \|\mathbb{1}\|_2^2.$$

故 $\|\phi_x\|_{L(\mathcal{L}^2(\mu))} \geqslant \|\phi_x\|_\infty - \varepsilon$.

STEP V. 最后按照惯例. 说明对 $f \in B(\Sigma), Uf^\vee U^{-1} g = (\bigsqcup f)g$ 亦成立. 当 $\mathrm{cl}\,\mathscr{A}v = H$ 时, 按第一款, $\|f^\vee v\|^2 = \int |f|^2\,\mathrm{d}\mu$. 故 $U : f^\vee v \mapsto f$, 剩下的情形直接代入即可. 在 STEP II, III. 中, 每一个 Σ 上的 $U_\bullet$ 都满足上面所讨论的, 故同理成立:

$$Uf^\vee U^{-1} g = (\bigsqcup f)g. \qquad \square$$

REMARK. 考虑最喜欢的可分 *Hilbert* 空间, 可以令 $\{v_\bullet\}$ 是稠密集的生成元, 因此其至多可数, 考虑缩放个常数可令 $\sum \|v_\bullet\| = \|\mu\| < \infty$ 有限.

COROLLARY 4.3. 令 $\{f_\bullet\} \xrightarrow{p.b.} f \in B(\Sigma)$, 则 $f_\bullet^\vee \xrightarrow{s.o.t.} f^\vee$.

Proof. 令 $f_n \xrightarrow{\text{p.b.}} f$, 故 $\bigsqcup f_n \xrightarrow{\text{p.b.}} \bigsqcup f$. 由 D.C.T. 直接得到 $\int |(f_n - f)g|^2 \to 0$. 令 $g = Uv$ 得到 $\|(f_n - f)v\| = \|(f_n - f)Uv\|_2 \to 0$. $\square$

考虑正规算子 T 和其生成的 C^* 代数 $\mathscr{A}_T$. 则 $\operatorname{spec}\mathscr{A}_T \cong \operatorname{spec}T$, 同胚由 Gel'fand 变换 $\hat{T}$ 诱导:

$$f \mapsto f(T) \in \operatorname{spec}T.$$

又 $T = \int_{\operatorname{spec}\mathscr{A}_T} \hat{T}\,\mathrm{d}P = \int_{\operatorname{spec}T} \lambda\,\mathrm{d}P_T(\lambda)$, 其中 $P_T(E) = P(\hat{T}^{-1}(E))$. 考虑被积函数非 λ 的情形:

$$\int_{\operatorname{spec}T} \overline{\lambda}\,\mathrm{d}P_T(\lambda) = \int_{\operatorname{spec}\mathscr{A}_T} T^{*\wedge}\,\mathrm{d}P = T^*.$$

故可以定义 $f \in B(\operatorname{spec}T)$, $f(T) \coloneqq \int f\,\mathrm{d}P_T$. 称为 Borel 泛函算子演算.

COROLLARY 4.4 (单正规算子的谱定理). *令 $T \in L(H)$ 正规. 唯一 $*$-同态 $h_T : B(\operatorname{spec}T) \to L(H)$ 满足:*

- $h_T(\mathrm{id}) = T$;
- $f_n \xrightarrow{p.b.} f \implies h_T(f) \xrightarrow{s.o.t.} h_T(f)$.

可认为 $h_T(f) = f(T)$. 以及:

- *令 $\mathscr{A}$ 是含 T 的交换 C^* 代数, 则 $h_T(f) = \int f \circ \Gamma_{\mathscr{A}}(T)\,\mathrm{d}P_{\mathscr{A}}$;*
- *若 $H = \mathcal{L}^2(\mu)$, 则 T 等价于 $\mathcal{L}^2$ 乘子 $\phi_T \in \mathcal{L}^\infty$, 且 $f(T)$ 等价乘子 $f \circ \phi_T$;*
- *若 $S \in L(H)$ 满足 $ST = TS$ 和 $ST^* = T^*S$, 则 $\forall f \in B(\operatorname{spec}T)$, 都有 $Sf(T) = f(T)S$.*

Proof. 令 $h_T(f) = f(T)$, 则前第一款满足; 考虑 $\mathscr{A}_T$, 则 $\int_{\operatorname{spec}\mathscr{A}_T} f\,\mathrm{d}P_{\mathscr{A}} = f^\vee$, 故前第二款满足. $*$-同态由 [**THEOREM 4.11**] 满足.

唯一性: 令 $*$-同态 g_T 也满足此类关系, 令 $\mathcal{C} = \{ f \mid h_T(f) = g_T(f) \}$, 则共轭多项式 $\subset \mathcal{C}$. 只需证明所有有界函数 $f \in B(\operatorname{spec}T)$ 都是共轭多项式的 p.b. 极限即可. 由于 Stone – Weierstraß 定理和 $\operatorname{spec}T$ 紧致, 故 $C(\operatorname{spec}T) \subset \mathcal{C}$. 同时由 Urysohn 引理, $\{ \mathbb{1}_U \mid U \subset \operatorname{spec}T, \text{open} \} \subset \mathcal{C}$. 令 $\mathcal{M} = \{ E \mid \mathbb{1}_E \in \mathcal{C} \}$, 则 $E \in \mathcal{M} \implies 1 - \mathbb{1}_E \in \mathcal{C} \implies E^c \in \mathcal{M}$; 同理由于 $\mathbb{1}_{\bigcap_{\text{finite}} E_\bullet} = \prod \mathbb{1}_{E_\bullet}$ 故 $\mathcal{M}$ 对有限交封闭; $\mathcal{M}$ 对可数交封闭由于可数交的特征函数是有限交情形的 p.b. 极限. 故是含开集的 σ-代数, 即 $\mathcal{B}_{\operatorname{spec}T} \subset \mathcal{M}$, 而用简单函数 p.b. 逼近有界可测函数即得.

下面三个性质的证明: 后第一款来自唯一性, 故不随 C^* 代数选取而改变: 其中满足前第一二款来自 $T = \int_{\operatorname{spec}\mathscr{A}} \Gamma_{\mathscr{A}}(T)\,\mathrm{d}P_{\mathscr{A}}$, [**THEOREM 4.11**] 保证其是 $*$-同态, [**4.3**] 得到前第二款. $\square$

Corollary 4.5 (紧致正规算子的情形). 令 $T \in L(H)$ 紧致正规, 则其谱至多可数, 且存在 H 的正交基包含其特征向量.

Proof. 由于 $\ker(T-\lambda)$ 有限维, 故存在正交基. □

Proof. 令 $E_0 = \{0\}$, $E_n = \{\lambda \in \operatorname{spec} T \mid |\lambda| \in [1/n, 1/(n-1))\}$, $H_n = \operatorname{im} P(E_n) = \operatorname{im} \mathbb{1}_{E_n}^{\vee} = \operatorname{im} \mathbb{1}_{E_n}(T)$. 故由于各 E_n 不交, 则 $H_n \perp H_m$ 且 T-不变. □

5 拓扑群

拓扑群是群上赋予拓扑满足 $(x, y) \mapsto xy$, $x \mapsto x^{-1}$ 连续. 称子集 $A \subset G$ 是对称的当且仅当 $A^{-1} = A$.

Lemma 5.1.
- 给定 U 作为 1 的邻域, 存在对称邻域 V 满足 $VV \subset U$;
- $H \leqslant G \implies \overline{H} \leqslant G$;
- $A, B \Subset G \implies AB \Subset G$.

Proof.
- 由于 $(x, y) \mapsto xy$ 连续, 存在 1 的邻域 A_1, A_2 满足 $A_1A_2 \subset U$, 令 $V = A_1 \cap A_2 \cap A_1^{-1} \cap A_2^{-1}$, 则 $VV \subset A_1 \cap A_2 \subset U$;
- 令 $x_\bullet \to x$, $y_\bullet \to y$, 则 $x_\bullet y_\bullet \to xy$(由于 $(x, y) \mapsto xy$ 连续), x^{-1} 同理, 故 $\overline{H}$ 是子群;
- $A \times B \Subset G \times G \implies AB = (\cdot)(A \times B) \Subset G$. □

赋予 G/H 商拓扑, 则令 $\pi : G \to G/H$, 则:

- $V \subset G/H$ 开 $\iff$ $\pi^{-1}(V)$ 开. 定义;
- $U \subset G$ 开 $\iff$ $\pi(U)$ 开. 由于 $\pi^{-1} \circ \pi(U) = UH = \bigcup_{x \in H} Ux$ 开得到.

Theorem 5.1 (拓扑群的 Hausdorff 化). 令 G 是局部紧群, H 是闭正规子群, 则拓扑群 $G/H \in \mathsf{LCHaus}$. 同时, $\overline{\{1\}}$ 是正规的.

Proof. 令 $\pi(x), \pi(y)$ 是 G/H 中不同两点, 由于 H 闭, 则 xHy^{-1} 闭且不含 1, 否则 $\pi(x) = \pi(y)$. 存在 U 是 1 的对称邻域, 且 $UU \in (xHy^{-1})^{\mathrm{c}}$, 故

$$1 \notin U^{-1}U^{-1}xH^{-1} \implies 1 \notin U^{-1}xH^{-1}U^{-1} = UxHH^{-1}y^{-1}U^{-1} = (UxH)(UyH)^{-1}.$$

故 $1 \in \pi(Ux) \cap \pi(Uy)$. 即是对应的分离两点的开集;

局部紧由投影映射连续, 将紧邻域打到紧邻域得到;

拓扑群的其他特性只需验证两个映射连续: 令 U 是 $\pi(xy)$ 的开邻域, 则 $\pi^{-1}(U)$ 开, 由连续性, 存在 A_1, A_2 是 x, y 的开邻域且 $A_1A_2 \subset \pi^{-1}(U)$. 故 $\pi(A_1)$, $\pi(A_2)$ 是开集且 $\pi(A_1)\pi(A_2) \subset U$. 故乘法连续, 逆连续同理.

最后验证 $\overline{\{1\}}$ 的正规性. 反之, 则存在 g 满足 $g\overline{\{1\}}g^{-1} \neq \overline{\{1\}}$, 但 $g\overline{\{1\}}g^{-1} \neq \overline{\{1\}} \cap \overline{\{1\}}$ 是闭集且真包含于 $\overline{\{1\}}$, 于其是极小含 1 闭集矛盾. □

因此只需商掉 $\overline{\{1\}}$ 便可完成群的 Hausdorff 化.

由于实在抽象的拓扑空间上讨论, 一般会希望其是 σ-紧致的好利用正规 Radon 测度. 而考虑紧邻域的叠加仍是紧邻域, 考虑 $V \Subset G$ 是 1 的对称邻域, 则 $G_0 = \bigcup_{n\geqslant 1} \underbrace{V \cdots V}_{n}$ 是 σ-紧致的, 我们希望他能撑满至少一个连通分支:

Proposition 5.1. 上述考虑的子群是既开又闭的.

Proof. U 的选取可由一般的紧致邻域 K 交上 K^{-1} 得到. 由于 K° 非空, 故 $(\underbrace{V \cdots V}_{n+1})^\circ \setminus (\underbrace{V \cdots V}_{n})$ 非空, 也即是 G_0 是开的, 故是闭的. □

5.1 Haar 测度

Haar 测度是拓扑群上 Borel(左或右) 传递不变的 Radon 测度. 定义传递因子:

$$\mathrm{L}_y f(x) = f(y^{-1}x), \quad \mathrm{R}_y f(x) = f(xy).$$

则 $\mathrm{L}_y\mathrm{L}_z = \mathrm{L}_{yz}, \mathrm{R}_y\mathrm{R}_z = \mathrm{R}_{yz}$.

Proposition 5.2. 令 $f \in C_c(G)$, 则 f 左右一致连续. 其中左右一致连续定义为:

$$\|\mathrm{L}_\bullet f - f\|_{\sup} \to 0, \quad \|\mathrm{R}_\bullet f - f\|_{\sup} \to 0.$$

Proof. 只证明右一致情形. 则 $\forall x \in \operatorname{supp} f$, $\exists U_x$ 是 1 的邻域满足 $y \in U_x \implies |f(xy) - f(x)| < \varepsilon/2$. 则存在对称邻域 V_x 满足 $V_xV_x \subset U_x$. 故由紧致性

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{\text{finite}} x_\bullet V_{x_\bullet}.$$

令 $V = \bigcap V_{x_\bullet}$. 若 $x \in \operatorname{supp} f$, 则 $\exists x_j, x_j^{-1}x \subset V_{x_j}$. 故 $xy \subset x_jU_{x_j}$. 则

$$|f(xy) - f(x)| \leqslant |f(xy) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| < \varepsilon.$$

$x \notin \operatorname{supp} K$ 时, 要么 $xy \in \operatorname{supp} f \implies |f(xy) - f(x)| < \varepsilon$, 要么 $xy \notin \operatorname{supp} K$, 此时两者都为 0. □

Proposition 5.3. 考虑在局部紧群上的 *Haar* 测度, 有:

- μ 左 *Haar* $\iff$ $\mu^{\sim}$ 右 *Haar;*
- μ 左 *Haar* $\iff$ $\forall f \in C_c^+(G)$, $\int \mathrm{L}_\bullet f \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu$.

Proof. 第一款右传递不变性显然, 只需证明其 Radon:

- $E \in \mathcal{B}_G \iff E^{-1} \in \mathcal{B}_G$. 考虑 $\mathscr{A} = \{ E^{-1} \mid E \in \mathcal{B}_G \}$. 则 $\mathscr{A}$ 是 σ-代数. 且易见 $\mathscr{A}$ 含所有开集, 故 $\mathcal{B}_G \subset \mathscr{A}$. 故 $E \in \mathcal{B}_G \iff E^{-1} \in \mathcal{B}_G$.
- Radon 性. 局部有限由 $^{-1}$ 将紧集打到紧集得到. 考虑正规性:

$$\begin{aligned}\mu^{\sim}(A) = \mu(A^{-1}) &= \inf\{ \mu(U) \mid A^{-1} \subset U, U \text{ open} \} \\ &= \inf\{ \mu(U^{-1}) \mid A \subset U, U \text{ open} \}.\end{aligned}$$

  故是外正规的. 内正规性同理.

对第二款考虑 f 是简单函数是成立, 故由积分定义对连续紧支函数成立. 另一个方向来自于 Radon 测度由其在连续紧支函数上的作用直接决定 (Riesz 表示定理). □

Theorem 5.2 (Weyl). 对于局部紧群, 左 *(*或右*)Haar* 测度存在且在相差一个常数下唯一.

Proof. 考虑到复杂的 Radon 性, 直接定义 Haar 测度远比定义在 $C_c^+(G)$ 上的正线性泛函然后再用 Riesz 表示定理还原出测度困难.

定义连续紧支函数的积分的关键是用类似 $\mathbb{1}_U$ 的函数去逼近其: 令 ϕ 的支集很小且 $0 \leqslant \phi \leqslant 1$, 则可以令

$$\begin{aligned}\underline{S}_\phi f &\coloneqq \sup\Big\{ \sum c_\bullet \Bigm| 0 \leqslant \sum c_\bullet \mathrm{L}_\bullet \phi \leqslant f \Big\}, \\ \overline{S}_\phi f &\coloneqq \inf\Big\{ \sum c_\bullet \Bigm| \sum c_\bullet \mathrm{L}_\bullet \phi \geqslant f \Big\}.\end{aligned}$$

作为积分的原型. 我们主要采用后一种, 由于 ϕ 并非特征函数, 因此需要用更大的空间处理 ϕ 从 1 到 0 的过渡区域.

定义这样的积分之后, 我们需要总某个空间里让 ϕ 取极限: 也就是 $\operatorname{supp} \phi \to \{1\}$ 的情形.

为方便, 记 $\overline{S}_\phi f$ 为 $(f \mid \phi)$, 则:

- $(f \mid \phi)$ 左传递不变;
- $(f \mid \phi)$ 次线性;
- $c > 0$, 则 $(cf \mid \phi) = c(f \mid \phi)$;
- $(f \mid \phi) \geqslant \|f\|_{\sup}/\|\phi\|_{\sup}$;
- $(f \mid \phi) \leqslant (f \mid g)(g \mid \phi)$. 由于后者是 $\inf\{\sum_{i,j} b_i c_j \,|\, f \leqslant \sum b_\bullet \mathrm{L}_\bullet g,\ g \leqslant \sum c_\bullet \mathrm{L}_\bullet \phi\}$.

令 f_0 是一个一般的连续紧支函数, 考虑两个覆盖数的比 (归一化):

$$I_\phi(f) \coloneqq \frac{(f \mid \phi)}{(f_0 \mid \phi)}.$$

则容易验证 $I_\phi(f) \in [(f_0 \mid f)^{-1}, (f \mid f_0)]$. 考虑在 $\bigcup_{f \in C_c^+(G)} [(f_0 \mid f)^{-1}, (f \mid f_0)]$ 中取极限, 后者 $\in$ CHaus, 故令 $K_V = \overline{\{I_\phi \,|\, \operatorname{supp}\phi \subset V\}}$. 则其紧致且有限交非空 (只需保证 $1 \in V$). 故

$$\bigcap_{1 \in V} K_V$$

非空. □