1 Úvod aneb Projektivní přímka a rovina

Poznámka (O čem to bude)
Nevlastní body, homogenní souřadnice. Projektivní geometrie = „geometrie polohy“, tj. neměří se vzdálenosti ani úhly. Máme pojmy (v rovině) bod, přímka, incidence ($X \in p$).

Inspirováno perspektivou v malířství (realismus, 17. století).

Klíčové pojmy: nevlastní body („body v nekonečnu“), princip duality.

Poznámka (Možné přístupy ke geometrii)
Axiomatický (jen axiomy, bez obrázků) (dnes), syntetický (důraz kladen na obrázky, bez souřadnic) (tento semestr), analytický (souřadnice, bez obrázků) (příští semestr).

1.1 Axiomatika projektivní geometrie (v rovině)

Poznámka (Primitivní pojmy)
Bod, přímka, incidence.

Definice 1.1 (Axiom A1)

Ke každým dvěma (různým) bodům ∃! přímka s oběma body incidentní. (Přímce říkáme *spojnice* daných bodů.)

Definice 1.2 (Axiom A2)

Ke každým dvěma (různým) přímkám ∃! bod s oběma přímkami incidentní. (Bodu říkáme *průsečík* daných přímek.)

Poznámka
A2 vzniklo z A1 záměnnou pojmů bod a přímka. V EG neplatí, ale v PG chceme mít Princip duality.

Definice 1.3 (Princip duality)

Veškerá tvrzení zůstávají v platnosti, pokud v nich zaměníme pojmy bod a přímka, incidence (prochází bodem a leží na přímce, průsečík a spojnice), a pojmy z nich odvozené.

Definice 1.4 (Nevlastní bod, vlastní bod)

Máme-li dvě rovnoběžky v EG, pak za jejich průsečík v PG označíme společný směr (bez orientace), neboli nevlastní bod (značíme X_∞, atd.).

Původní body v rovině budeme nazývat vlastní.

Definice 1.5 (Nevlastní přímka, vlastní přímka)

Nevlastní přímka (n_∞) = množina všech nevlastních bodů.

Poznámka
S nevlastními body a přímkou splňuje rovina A1 i A2.

Definice 1.6 (Axiom A3)

Existují alespoň 4 body, z nichž každé 3 jsou nekolineární.

Poznámka („A4“)
Duální tvrzení k A3 už je dokazatelné z A1 až A3.

Definice 1.7 (Projektivní rovina)

Rovina s nevlastními body a nevlastní přímkou splňuje i A3. Takové rovině ($\mathbb{R}^2 \cup n_\infty$) budeme říkat projektivní rovina a značit ji $\mathbb{R}P^2$ nebo P^2.

Poznámka (Idea: existující různé geometrie)
Euklidovská geometrie (EG) (body, přímky, incidence, vzdálenosti, úhly), Afinní geometrie (AG) (body, přímky, incidence, rozlišení rovnoběžek a různoběžek, případně vlastních a nevlastních bodů), Projektivní geometrie (PG) (body, přímky, incidence).

(Hyperbolická geometrie = Lobačevského geometrie (body, přímky, incidence, jiné vzdálenosti, jiné úhly))

1.2 Afinní geometrie

Poznámka
Body $A, B, \dots$ a vektory $u, v, \dots$.

$\rightarrow$ přímky, vzájemné polohy přímek (ale ne kolmost).

Poznámka (Lze zavést střed úsečky:)
$\vec{AS} = \frac{1}{2}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{SA} = -\vec{SB}$.

Definice 1.8 (Dělící poměr)

Dělící poměr 3 bodů A, B, C na (jedné) přímce je číslo $\lambda = (ABC)$ splňující $C - A = \lambda(C - B)$.

Poznámka
Odsud lze odvodit Euklidovskou definici dělícího poměru: $|\lambda| = \frac{\|C-A\|}{\|C-B\|}$.

A, B, C různé, pak λ nenabývá hodnot 0 $(A = C)$, 1 $(A = B)$ a ∞ $(B = C)$.

C je středem úsečky AB, právě když $(ABC) = -1$.

Dělící poměr jako graf funkce (A, B pevné, C proměnné) je hyperbola.

Pro každé dva body $A \neq B$ a $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, existuje právě jedno C, že $(ABC) = \lambda$.

Konstrukce: dány úsečky délek 1 a λ, a body A, B.

Pokud $\lambda = (ABC)$, tak $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$, $(ACB) = 1 - \lambda$, $(BCA) = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, $(CAB) = \frac{1}{1-\lambda}$, $(CBA) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$. Tyto permutace se některé rovnají pro λ z trojice $(0, 1, \infty)$ (každé tam bude dvakrát), z trojice $(-1, 2, 1/2)$ (také každé dvakrát) a z dvojice $(1/2 + i\sqrt{3}/2, 1/2 - i\sqrt{3}/2)$ (každé třikrát).

Poznámka (Role zobrazení v jednotlivých geometriích)
V EG: posunutí, otáčení a osová souměrnost (tj. shodnosti) zachovávají délky a úhly (tj. (pro zajímavost) jsou to invarianty euklidovské grupy).

V AG: isomorfismy (lineární zobrazení na) zachovávají dělící poměr.

1.3 Projektivní přímka

Definice 1.9 (Označení)

Je-li $v = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, označíme $\langle v \rangle$ = lineární obal v = přímka generovaná v (procházející počátkem). Tedy $\langle (x_0, x_1) \rangle = \langle v \rangle = \langle av \rangle = \langle ax_0, ax_1 \rangle$ pro $\forall a \neq 0, a \in \mathbb{R}$.

Definice 1.10 (Projektivní přímka $\mathbb{R}P^1$, geometrický bod, aritmetický zástupce, homogenní souřadnice)

Projektivní přímka je množina $\mathbb{R}P^1 = \{\langle v \rangle | v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ = množina všech přímek v $\mathbb{R}^2$ (procházejících počátkem). Prvek $\langle v \rangle \in \mathbb{R}P^2$ nazýváme geometrický bod, vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nazýváme jeho aritmetickým zástupcem.

Poznámka
Tedy každý geometrický bod má nekonečně mnoho aritmetických zástupců (a ti se všichni liší jen nenulovým násobkem).

Je-li $v = (x_0, x_1)$, píšeme $\langle v \rangle = [x_0 : x_1]$. Tomuto se říká homogenní souřadnice geometrického bodu.

Poznámka
Jsou určeny až na nenulový násobek.

Definice 1.11 (Kanonické vnoření afinní přímky $\mathbb{R}$ do projektivní přímky $\mathbb{R}P^1$)

Kanonické vnoření afinní přímky $\mathbb{R}$ do projektivní přímky $\mathbb{R}P^1$ je zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}P^1$, bod $x \mapsto [1 : x]$ (body vlastní) a vektor $1 \mapsto [0 : 1]$ (bod nevlastní).

První souřadnice je tzv. rozlišovací souřadnice (1 znamená vlastní, 0 nevlastní).