

Příklad (1)

Lovci Antonín, Bedřich a Cecil spolu loví. Antonín umí zasáhnout zajíce s pravděpodobností 0.2, Bedřich 0.4 a Cecil 0.6. V jednu chvíli všichni tři zamířili na toho samého zajíce a vystřelili. Jakou mají jednotliví lovci podmíněnou pravděpodobnost, že zasáhli cíl, pokud víme, že zajíce zasáhl právě jeden z nich?

┌

Řešení

Nejdříve spočítáme pravděpodobnosti, že zasáhl právě Antonín $P(A)$, právě Bedřich $P(B)$ a právě Cecil $P(C)$. Jeden z nich vždy zasáhne, další dva nezasáhnou, tj. násobíme pravděpodobnost zásahu jednoho s 1 mínus pravděpodobnost druhého a 1 mínus pravděpodobnost třetího (předpokládám, že se navzájem neovlivňují):

$$P(A) = 0.2 \cdot (1 - 0.4) \cdot (1 - 0.6) = 0,048,$$

$$P(B) = (1 - 0.2) \cdot 0.4 \cdot (1 - 0.6) = 0,128,$$

$$P(C) = (1 - 0.2) \cdot (1 - 0.4) \cdot 0.6 = 0,288.$$

Pravděpodobnost $P(Y)$, že byl zasažen právě jedním (což je druhá hodnota pro výpočet podmíněné pravděpodobnosti), je součet těchto pravděpodobností, jelikož je to dělení jevu zasažen právě jednou, tj.

$$P(Y) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,048 + 0,128 + 0,288 = 0,464.$$

Podmíněná pravděpodobnost je pak dána jako $P(X|Y) = \frac{P(X)}{P(Y)}$ (jelikož zde $X \setminus Y = \emptyset$), to jest:

$$P(A|Y) = \frac{0,048}{0,464} \approx 0,10,$$

$$P(B|Y) = \frac{0,128}{0,464} \approx 0,28,$$

$$P(C|Y) = \frac{0,288}{0,464} \approx 0,62.$$

└

Příklad (2)

Koupili jsme si soupravu vláček. Tyto vláčky se spojují pomocí magnetů, tj. mašinka má vzadu magnet, který je otočen ven buď kladným nebo záporným pólem, a vagonky mají podobný magnet na každém svém konci. Máme-li v krabici 1 mašinku a n vagonků, jaká je pravděpodobnost, že nám půjdou pospojovat (tj. ve vlaku vždy navazuje kladný pól na záporný), pokud v továrně přiřazují polarizace magnetů rovnoměrně nezávisle náhodně (ani polarizace magnetů na různých koncích téhož vagonku se nijak neovlivňují), pokud

1. Máme určené pořadí i orientaci jednotlivých vagonků?
2. Máme určené pořadí vagonků?
3. Můžeme vagonky libovolně přeskládat i pootáčet?

Řešení

Ve všech třech případech postavíme vlak tak, že budeme přidávat za lokomotivu vagóny jeden po druhém. Tedy vždy máme danou nějakou polarizaci posledního přidaného vagónu (na začátku lokomotivy) a hledáme pravděpodobnost, s jakou bude mít nějaký magnet „správnou“ (tedy opačnou tomuto) polarizaci. Tu každý z m magnetů nebude mít s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, tedy pravděpodobnost, že žádný z dostupných m magnetů nebude mít správnou polarizaci je $\frac{1}{2^m}$, tudíž pravděpodobnost, že všechny budou mít správnou je $1 - \frac{1}{2^m}$. Tyto pravděpodobnosti budeme násobit, jelikož jsou nezávislé (viz dále).

V prvním případě máme vždy k dispozici jen 1 magnet, tedy pravděpodobnost, že jedno spojení bude fungovat je $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, tedy že budou fungovat všechny je

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}}_{n\text{-krát}} = \frac{1}{2^n}.$$

Jelikož jsou magnety nezávislé a my se ptáme pouze na ten, který hned použijeme, jsou jevy, jež násobíme, opravdu nezávislé.

V případě druhém máme na výběr 2 magnety, tedy pravděpodobnost úspěchu u jednoho spojení je $1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$. Tj. u všech je to

$$\underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4}}_{n\text{-krát}} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

A jelikož jsou vagónky nezávislé a my se vždy ptáme jen na ten, který použijeme, spojení jsou opravdu nezávislá (můžeme předpovědět, jaký magnet bude na konci již spojeného vlaku, ale to nás netrápí, protože je jedno, která polarizace bude „správná“).

V posledním případě máme pro i -té spojení od konce $2i$ magnetů, které můžeme pro toto napojení použít, tedy pravděpodobnost povedeného spojení je $1 - \frac{1}{2^{2i}}$. Pravděpodobnost povedeného vláčku je

$$\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2(n-1)}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right).$$

Spojení jsou tentokrát nezávislá pouze, pokud se předchozí vydařila, ale to stačí. To, že se předchozí vydařila nám ale nedává žádnou informaci o tom, jak bude probíhat toto spojení, protože to, že tam existoval magnet (libovolný, ne náhodně vybraný) správný nám nijak neříká, kolik jich tam bylo.