Příklad (10.1)
O lineárním zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ máme následující informace:

$$f \circ f = f \text{ a } f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Určete obraz vektoru $(x, y)^T$ při zobrazení f (v závislosti na x a y).

Řešení
Jelikož $f \circ f = f$, tak $f\left(f\binom{1}{2}\right) = f\binom{1}{2}$, tj. $f\binom{-1}{1} = f\binom{1}{2}$. Protože f je lineární zobrazení mezi prostory dimenze 2, můžeme f zadefinovat pomocí matice typu 2×2:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a + 2b \\ 1c + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1a + 1b \\ -1c + 1d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vyřešíme jednoduchou soustavu 4 lineárních rovnic o 4 neznámých (nebo v podstatě 2 soustavy rovnic o 2 rovnicích a 2 neznámých, jež jsou až na znaménka totožné) a získáme $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$, $d = \frac{2}{3}$. Tedy hledané zobrazení je dané maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

tj. obraz vektoru $\binom{x}{y}$ je:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{3} - \frac{2y}{3} \\ -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2y - x \end{pmatrix}.$$

Příklad (10.2)
Matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ vzhledem ke kanonickým bázím je

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte nějakou bázi B prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ takovou, že matice f vzhledem k B a B je

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení
Ze skládání lineárních zobrazení víme, že (K značí kanonickou bázi):

$$[id]_K^B \cdot [f]_B^B = [f]_K^B = [f]_K^K \cdot [id]_K^B.$$

Tj. hledáme e, f, g, h tak, aby:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Z definice maticového násobení a rovnosti matic:

$$2e + 0f = 4e + 4g, \qquad 1e + 2f = 4f + 4h,$$
$$2g + 0h = 4e + 0g, \qquad 1g + 2h = 4f + 0h.$$

Aby výsledek byl maticí přechodu od báze k bázi, musí být matice $[id]_K^B$ regulární. To splňuje například řešení $e = f = h = 1$, $g = 2$. Tudíž matice přechodu může být

$$[id]_K^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = ([\mathbf{b}_1]_K | [\mathbf{b}_2]_K),$$

a báze B tedy:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Příklad (10.*)
Existuje zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ splňuje $f(x+y) = f(x) + f(y)$, jiné než zobrazení tvaru $f(x) = kx$ (pro $k \in \mathbb{R}$)? Existuje takové spojité zobrazení?

Řešení
Dosazením $x = y = 0$ dostaneme $f(0) = 0$. Následně dosazením $y = -x$ dostaneme $f(-x) = -f(x)$. Použitím tohoto a dosazováním $y = xn, n \in \mathbb{N} (\implies f(x(n+1)) = (n+1)f(x)$ získáme $f(zx) = zf(x)$ pro všechna $z \in \mathbb{Z}$. Dosazením $x' = xz$ do předchozího vztahu nám dá $\frac{f(x')}{z} = f(\frac{x'}{z})$ a zkombinováním těchto vztahů získáme $f(qx) = qf(x)$ pro všechna $q \in \mathbb{Q}$.

Začněme spojitým zobrazením. Pokud zvolíme $f(1) = k$, pak dostáváme $f(q) = qk$ pro všechna $q \in \mathbb{Q}$. Ale jelikož je $\mathbb{R}$ (jako obraz f) Hausdorffův prostor a $\mathbb{Q}$ (jako obor hodnot f) husté v $\mathbb{R}$ (jako množině, na kterou chceme rozšířit obor hodnot f), tak zobrazení f má jediné rozšíření na reálná čísla, jež je zřejmě $f(x) = kx$. Tj. jiné zobrazení neexistuje.

Pokud hledáme ne nutně spojité zobrazení, pak nechť B je báze $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$. Zřejmě je báze víceprvková[a], jelikož $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. Pokud každé „souřadnici“ $\mathbf{b}$ (prvku) báze B přiřadíme $f(\mathbf{b}) = k_{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}$, potom můžeme zobrazení f definovat jako $f(\sum_{\mathbf{b} \in B} x_{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{b}) = \sum_{\mathbf{b} \in B} k_{\mathbf{b}} \cdot x_{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{b}$ a z jednoznačnosti vyjádření v bázi ověříme, že $f(x+y) = f(x) + f(y)$, tedy opravdu f je hledané zobrazení, které rozhodně není (pokud jsme všechna $k_{\mathbf{b}}$ nevolili totožná) shodné s žádným $f'(x) = kx$. Tj. zobrazení ze zadání existuje.

[a] dokonce B je nespočetná, jelikož $\mathbb{Q}$ je spočetná, tedy pokud by B byla spočetná, pak $B \times \mathbb{Q}$ by byla spočetná, ale $\mathbb{R} \cong \mathbb{Q} \times B$ je nespočetná.