1 Organizační úvod

Přesun nebyl odhlasován.

Poznámka (Literatura)

- Engelking: General Topology (spíš taková příručka, hodně obtížná)
- Čech: Bodová topologie
- Kelley: General Topology
- Willard: General Topology

Doporučené jsou poslední dvě.

Poznámka (Podmíny zakončení)
Zkouška (ústní) + úkoly ze cvičení (a účast na cvičení)

2 Úvod

Poznámka (Historie)

- Euler: mosty ve městě Královec (7 mostů, Eulerovský tah)
- Listing (1847): pojem topologie (bez rigorózních definic)
- Poincaré (1895): Analysis Situs (Poincarého hypotéza)
- Fréchet (1906): definuje metrický prostor (až dodnes)
- Hausdorff (1914): tzv. Hausdorffův TP
- Kuratowski (1922): TP, jak jej známe dnes (formálně)

Poznámka (TOPOSYM)
V Praze se každých 5 let koná významná konference topologů – TOPOSYM.

3 Základní pojmy

Topos = umístění (řečtina).

3.1 Topologický prostor, báze, subbáze, váha, charakter

Definice 3.1 (Topologický prostor (TP))

Uspořádaná dvojice $(\mathbb{X}, \tau)$ se nazývá topologický prostor, pokud $\mathbb{X}$ je množina, $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ a platí:
(T1) $\emptyset, \mathbb{X} \in \tau$
(T2) jsou-li $\mathbb{U}, \mathbb{V} \in \tau$, pak $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} \in \tau$
(T3) je-li $\mathcal{U} \in \tau$, pak $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

Definice 3.2 (Topologie)

Systém τ se nazývá topologie na $\mathbb{X}$. Prvky množiny $\mathbb{X}$ se nazývají body. Prvky τ se nazývají otevřené množiny.

Definice 3.3 (Okolí bodu)

Množina $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá okolí bodu x, pokud existuje $\mathbb{U} \in \tau$, že $x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$. Množina všech okolí bodu x značíme $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_\tau(x)$.

Definice 3.4 (Báze a subbáze)

Soubor množin $\mathcal{B} \subseteq \tau$ se nazývá báze topologie τ, pokud pro každé $\mathbb{U} \in \tau$ existuje $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{B}$: $\bigcup \mathcal{U} = \mathbb{U}$. Soubor $\mathcal{S} \subseteq \tau$ se nazývá subbáze topologie τ, pokud $\{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}\text{konečná}\}$ je báze topologie τ.

Tvrzení 3.1 (Charakterizace otevřené množiny pomocí okolí)

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP a $\mathbb{U} \in \mathbb{X}$. Pak $\mathbb{U} \in \tau$, právě když $\forall x \in \mathbb{U} \exists \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{V} \subseteq \mathbb{U}$

Důkaz
Důkaz ($\Longrightarrow$) vidíme $\mathbb{U} = \mathbb{V}$.

Opačně víme $\forall x \in \mathbb{U} \exists \mathbb{V}_x \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{V}_x \subseteq \mathbb{U}$. $\exists \mathbb{W}_x \in \tau : x \in \mathbb{W}_x \subseteq \mathbb{U}_x$. $\mathbb{U} = \bigcup_{x \in \mathbb{U}} \mathbb{W}_x \in \tau$. Tedy $\mathbb{U} \in \tau$. $\square$

Příklad
Je-li $(\mathbb{X}, \varrho)$ metrický prostor (MP), pak soubor všech ϱ-otevřených množin tvoří topologii na množině $\mathbb{X}$.

Definice 3.5 (Metrizovatelný TP)

TP $(\mathbb{X}, \tau)$ se nazývá metrizovatelný, pokud na množině $\mathbb{X}$ existuje metrika ϱ tak, že topologie odvozené z $(\mathbb{X}, \varrho)$ splývá s topologií τ.

Příklad
Je-li $(\mathbb{X}, \varrho)$ MP, pak systém všech otevřených koulí tvoří bázi topologie τ_ϱ.

Například
Všechny otevřené intervaly tvoří bázi topologie na $\mathbb{R}$.

Systém $\{(-\infty, b), (a, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ je subbáze topologie na $\mathbb{R}$.

Příklad (Diskrétní a indiskrétní TP)
Je-li $\mathbb{X}$ množina, pak $(\mathbb{X}, \mathcal{P}(\mathbb{X}))$ je TP, nazývá se diskrétní TP (a vždy je metrizovatelný). Naopak $(\mathbb{X}, \{\emptyset, \mathbb{X}\})$ se nazývá indiskrétní TP. (Pokud $|\mathbb{X}| \geq 2$, pak indiskrétní TP není metrizovatelný.)

Tvrzení 3.2 (Vlastnosti báze)

Je-li $(\mathbb{X}, \tau)$ *TP a* $\mathcal{B}$ *jeho báze, pak*
(B1) $\forall \mathbb{U}, \mathbb{V} \in \mathcal{B} \forall x \in \mathbb{U} \cap \mathbb{V} \exists \mathbb{W} \in \mathbb{B} : x \in \mathbb{W} \subseteq \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$,
(B2) $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{X}$.

Je-li $\mathbb{X}$ *libovolná množina a* $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{X})$ *splňuje podmínky (B1), (B2), pak na* $\mathbb{X}$ *existuje jediná topologie, jejíž báze je* $\mathbb{B}$.

Důkaz
První část je snadná (průnik 2 množin báze je otevřený, tj. prvkem topologie, tedy se dá zapsat jako sjednocení podmnožiny báze).

Druhá část: Mějme tedy $\mathbb{X}$ a $\mathcal{B}$ z věty splňující obě podmínky. Definujme $\tau := \{\bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}\}$. τ je topologie na $\mathbb{X}$ (ověříme, že τ splňuje podmínky topologie).

Zároveň volba τ je jediná množná, jelikož každý její prvek se musí dát vyjádřit jako sjednocení báze a opačně. $\square$

Důsledek
Je-li $\mathbb{X}$ množina, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ a $\bigcup \mathcal{S} = \mathbb{X}$, pak $\mathcal{S}$ je subbáze jednoznačně určené topologie na $\mathbb{X}$.

Důkaz
$\mathcal{B} = \{\cap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}\text{konečná}\}$ splňuje podmínky (B1) a (B2) předchozího tvrzení (B2 definice $\mathcal{S}$, B1 protože $\mathbb{U}, \mathbb{V} \in \mathcal{B}, \mathbb{U} = \bigcup \mathcal{F}_1, \mathbb{V} = \bigcap \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{S}\text{konečné}$. $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \bigcap(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \in \mathcal{B}$. (Dokonce celý průnik je prvkem $\mathcal{B}$, nejenom pro každý prvek existuje množina, která ho obsahuje, je podmnožinou průniku a je v $\mathcal{B}$). □

Tvrzení 3.3 (Vlastnosti systému všech okolí)

Je-li $(\mathbb{X}, \tau)$ *TP, pak soubory všech okolí* $\mathcal{U}_\tau(x), x \in \mathbb{X}$ *splňují*
(U1) $\forall x \in \mathbb{X} : \mathcal{U}(x) \neq \emptyset, x \in \bigcap \mathcal{U}(x)$,
(U2) $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) \forall \mathbb{V} : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{V} \subseteq \mathbb{X} \implies \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x)$,
(U3) $\forall \mathbb{U}, \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{U} \cap \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x)$,
(U4) $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) \exists \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x) \forall y \in \mathbb{V} : \mathbb{U} \in \mathcal{U}(y)$

Je-li $\mathbb{X}$ *množina a systémy množin* $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}), x \in \mathbb{X}$ *splňující podmínky (U1-4), pak na množině* $\mathbb{X}$ *existuje jediná topologie* τ, *že* $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_\tau(x), x \in \mathbb{X}$.

Důkaz
První část snadná. (Domácí cvičení.)

Položme $\tau = \{\mathbb{U} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) : \forall x \in \mathbb{U}, \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x)\}$. τ je topologie na $\mathbb{X}$. Z (U1) a (U2) vyplyne (T1). Atd…

□

Definice 3.6 (Báze okolí)

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP. Systém množin $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ se nazývá báze okolí v bodě x, pokud $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}_\tau(x)$ a pro každé $\mathbb{V} \in \mathcal{U}_\tau(x)$ existuje $\mathbb{U} \in \mathcal{B}(x)$, že $\mathbb{U} \in V$???. Indexovaný soubor $\{\mathcal{B}(x) : x \in \mathbb{X}\}$ se nazývá báze okolí prostoru $\mathbb{X}$, pokud $\forall x \in \mathbb{X} : \mathcal{B}(x)$ je báze okolí v bodě x.

Tvrzení 3.4 (Vlastnosti báze okolí)

Je-li $(\mathbb{X}, \tau)$ *TP a* $\{\mathcal{B}(x) : x \in \mathbb{X}\}$ *báze okolí, pak*
(O1) $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset, x \in \bigcap \mathcal{B}(x), x \in \mathbb{X}$,
(O2) $\forall \mathbb{U}, \mathbb{V} \in \mathcal{B}(x) \exists \mathbb{W} \in \mathcal{B}(x) : \mathbb{W} \subseteq \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$,
(O3) $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{B}(x) \exists \mathcal{B}(x) \forall y \in \mathbb{V} \exists \mathbb{W} \in \mathcal{B}(y) : \mathbb{W} \subseteq \mathbb{U}$.

Je-li $\mathbb{X}$ *množina a* $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}), x \in \mathbb{X}$ *soubory splňující (O1), (O2), (O3), pak na množině* $\mathbb{X}$ *existuje jediná topologie, jejíž báze okolí je* $\{\mathcal{B}(x) : x \in \mathbb{X}\}$.

Důkaz
První část je snadná.

Položme $\mathcal{U}(x) = \{\mathbb{U} \in \mathcal{P}(x) : \exists \mathbb{B} \in \mathcal{B}(x) : \mathbb{B} \subseteq \mathbb{U}\}, x \in \mathbb{X}$. Ověříme, že splňuje (U1-4). (U1) z (O1). (U2) z definice $\mathcal{U}$. (U3) z (O2), (U4) z (O3). □

Definice 3.7 (Váha prostoru)

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP. Pak váha prostoru $(\mathbb{X}, \tau)$ je nejmenší mohutnost báze prostoru $(\mathbb{X}, \tau)$. Značíme ji $\mathrm{w}(\mathbb{X}) = \mathrm{w}(\mathbb{X}, \tau)$

Charakter v bodě x je nejmenší mohutnost báze okolí bodu x. Značíme ho $\chi(x, \mathbb{X})$.

Charakter prostoru $\mathbb{X}$ je $\sup\{\chi(x, \mathbb{X}) : x \in \mathbb{X}\}$.

Například
$\mathrm{w}(\mathbb{R}) = \omega$ ($\mathbb{R}$ má spočetnou bázi).

$\mathrm{w}(\mathbb{X}, \mathcal{P}(\mathbb{X})) = |\mathbb{X}|$ ($\{\{x\} : x \in \mathbb{X}\}$ je báze $(\mathbb{X}, \mathcal{P}(\mathbb{X}))$)

$\mathrm{w}(\mathbb{X}, \{\emptyset, \{\mathbb{X}\}\}) = 1$

Například
Je-li $(\mathbb{X}, \tau)$ metrizovatelný, pak $\chi(x, \mathbb{X}) \leq \omega$

Tvrzení 3.5

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP a $x \in \mathbb{X}$. Pak $\chi(x, \mathbb{X}) \leq \mathrm{w}(\mathbb{X})$

Důkaz
Ať $\mathcal{B}$ je báze $(\mathbb{X}, \tau)$, že $|\mathcal{B}| = \mathrm{w}(\mathbb{X})$. Položme $\mathcal{B}(x) := \{\mathbb{U} \in \mathcal{B} : x \in \mathbb{U}\}$. $\mathcal{B}(x)$ je báze okolí v bodě x.

$|\mathcal{B}(x)| \leq |\mathcal{B}|$, protože $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}$. $\chi(x, \mathbb{X}) \leq |\mathcal{B}(x)| \leq |\mathcal{B}| = \mathrm{w}(\mathbb{X})$. □

3.2 Vnitřek, Uzávěr, hranice

Definice 3.8 (Uzavřená množina)

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP. Množina $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá uzavřená, pokud její doplněk je otevřená množina (neboli $\mathrm{x} \setminus \mathbb{F} \in \tau$).

Definice 3.9 (Obojetná množina (clopen set))

Množina se nazývá obojetná, pokud je uzavřená a otevřená zároveň.

Definice 3.10 (Uzávěr)

Je-li $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$, pak uzávěr $\mathbb{A}$ je $\mathrm{cl}(\mathbb{A}) = \overline{\mathbb{A}} = \bigcap\{\mathbb{F} \subseteq \mathbb{X}, \mathbb{A} \subseteq \mathbb{F}, \mathbb{F}\text{je uzavřená}\}$.

Definice 3.11 (Vnitřek množiny)

Vnitřek množiny $\mathbb{A}$ je $\operatorname{Int}\mathbb{A} = \mathbb{A}^0 = \bigcup\{\mathbb{U} \in \tau : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{A}\}$.

Definice 3.12 (Hranice množiny)

Hranice množiny $\mathbb{A}$ je $\delta\mathbb{A} = \overline{\mathbb{A}} \cap \overline{\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}}$

Tvrzení 3.6 (Vztah vnitřku a uzávěru)

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$, pak $\mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}} = \operatorname{Int}(\mathbb{X} \setminus \mathbb{A})$ a $\mathbb{X} \setminus \operatorname{Int}\mathbb{A} = \overline{\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}}$.

Důkaz

$\setminus\overline{\mathbb{A}}$ je otevřená, navíc $\mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}} \subseteq \mathbb{X} \setminus \mathbb{A}$. Tedy $\mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}} \subseteq \operatorname{Int}(\mathbb{X} \setminus \mathbb{A})$. $\operatorname{Int}(\mathbb{X} \setminus \mathbb{A})\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}$, přechodem k doplňku $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X} \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{X} \setminus \mathbb{A})$. Tedy $\overline{\mathbb{A}} \subseteq \mathbb{X} \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{X})$???. Přechodem k doplňku: $\operatorname{Int}(\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}) \subseteq \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}}$.

Druhou část můžeme dokázat přechodem k doplňku a převedením na první část. □

Tvrzení 3.7 (Charakterizace uzávěru)

Buď $(\mathbb{X}, \tau)$ TP, $x \in \mathbb{X}, \mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ a $\mathcal{B}(x)$ báze okolí v bodě x. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní
1) $x \in \overline{\mathbb{A}}$,
2) $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{U} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$,
3) $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{B}(x) : \mathbb{U} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$.

Důkaz

1) -> 2) sporem: Kdyby pro nějaké $\mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{U} \cap \mathbb{A} = \emptyset$, pak existuje $\mathbb{V}$ otevřené: $x \in \mathbb{V} \subseteq \mathbb{U}$. $\mathbb{V} \cap \mathbb{A} = \emptyset$. $\mathbb{X} \setminus \mathbb{V}$ je uzavřená a $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X} \setminus \mathbb{V}$. Pak $x \in \overline{\mathbb{A}} \subseteq \mathbb{X} \setminus \mathbb{V}$, neobsahuje x.
.

2) -> 3) triviální

3) -> 1) sporem: $x \notin \overline{\mathbb{A}}$ pak $x \in \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}}$. Pak existuje $\mathbb{U} \in \mathcal{B}(x) : x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}}$. Pak ??? □

Jako speciální důsledky dostáváme následující. Je-li $\mathbb{U}$ otevřená, pak $\mathbb{U} \cap \mathbb{A} = \emptyset$ právě když $\mathbb{U} \cap \overline{\mathbb{A}} = \emptyset$. Jsou-li $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$ otevřené disjunktní množiny, pak $\mathbb{U} \cap \overline{\mathbb{V}} = \emptyset = \overline{\mathbb{U}} \cap \mathbb{V}$.

Tvrzení 3.8 (Vlastnosti uzávěru)

Pro množiny $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ *v TP* $(\mathbb{X}, \tau)$ *platí*
(C1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
(C2) $\mathbb{A} \subseteq \overline{\mathbb{A}}$,
(C3) $\overline{\overline{\mathbb{A}}} = \overline{\mathbb{A}}$ *(C4)* $\overline{\mathbb{A} \cup \mathbb{B}} = \overline{\mathbb{A}} \cup \overline{\mathbb{B}}$,
(C5) $\overline{\mathbb{A} \cap \mathbb{B}} \subseteq \overline{\mathbb{A}} \cap \overline{\mathbb{B}}$.

Důkaz
První dvě jsou jednoduché, 3. plyne z uzavřenosti uzávěru. 4. dokážeme inkluzemi. Shrnutím dostaneme (C5). □

Příklad
Zobrazení z podmnožin do podmnožin, které splňuje podmínky (C1-C4) jednoznačně určuje topologii.

Tvrzení 3.9 (Vlastnosti vnitřku)

Obdobně jako vlastnosti uzávěru.

Tvrzení 3.10 (Charakterizace hranice)

Ať $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ *a* $x \in \mathbb{X}$. *Pak* $x \in \delta\mathbb{A}$, *právě když každé okolí bodu* x *protíná jak* $\mathbb{A}$, *tak* $\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}$.

Důkaz
Plyne okamžitě z definice hranice $\delta\mathbb{A} = \overline{\mathbb{A}} \cap \overline{\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}}$ a charakterizace uzávěru. □

Tvrzení 3.11 (Vlastnosti hranice)

12. bodů viz skripta. Stejně tak důkaz.

3.3 Husté a řídké množiny, hromadné a izolované body

Definice 3.13 (Hustá a řídká množina, hustota, separabilní prostor)

Ať $\mathbb{X}$ je TP. Množina $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá hustá (v $\mathbb{X}$), pokud $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{X}$. $\mathbb{A}$ se nazývá řídká, pokud $\mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}}$ je hustá.

Hustota prostoru $\mathbb{X}$ je nejmenší mohutnost husté podmnožiny, značí se $(\mathbb{X})$ (d...density). Prostor se spočetnou hustotou se nazývá separabilní.

Tvrzení 3.12 (Charakterizace hustých a řídkých množin)

Ať $\mathbb{X}$ je TP. Množina $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ je hustá v $\mathbb{X}$, právě když $\forall \mathbb{U}$ otevřená neprázdná v $\mathbb{X}$ protíná $\mathbb{A}$. Množina $\mathbb{A}$ je řídká (v $\mathbb{X}$), právě když $\forall \mathbb{V}$ otevřená neprázdná $\exists \mathbb{U}$ otevřená neprázdná, že $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V} \setminus \mathbb{A}$, což je právě když $\mathrm{Int}(\overline{\mathbb{A}}) = \emptyset$.

Důkaz

Označme $\tau * = \tau \setminus \emptyset$. Z charakterizace uzávěru: $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{X} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{X} \forall \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{V} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$. A je řídká $\Leftrightarrow \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}}$ je hustá $\Leftrightarrow \forall \mathbb{U} \in \tau * : \mathbb{U} \cap (\mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall \mathbb{U} \in \tau * : \mathbb{U} \setminus \overline{\mathbb{A}} \neq \emptyset$.

První část dostaneme ekvivalencí z předchozího: $\forall \mathbb{U} \in \tau * \exists \mathbb{V} \in \tau * : \mathbb{V} \subseteq \mathbb{U} \setminus \overline{\mathbb{A}}$.

Druhá část pak plyne z $\mathrm{Int}\, \overline{A} = \emptyset$ □

Tvrzení 3.13 (Vztah váhy a hustoty)

Ať $\mathbb{X}$ je TP. Pak $(\mathbb{X}) \leq \mathrm{w}(\mathbb{X})$. *Speciálně každý prostor se spočetnou bází je separabilní.*

Důkaz

Ať $\mathcal{B}$ je báze TP $\mathbb{X}$. (BÚNO $\emptyset \notin \mathcal{B}$). $forall \mathbb{B} \in \mathcal{B}$ fixujeme $x_B \in B, \mathbb{D} := \{x_B : B \in \mathcal{B}\}$. Zřejmě $|\mathbb{D}| \leq |\mathcal{B}|$, $\mathbb{D}$ je hustá v $\mathbb{X}$. (Když tedy volíme $\mathcal{B}$ nejmenší, získáme výraz.) □

Poznámka

Pro metrizovatelný TP $\mathbb{X}$ platí $(\mathbb{X}) = \mathrm{w}(\mathbb{X})$.

Definice 3.14 (Izolovaný a hromadný bod)

Ať $\mathbb{X}$ je TP. Bod $x \in \mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá izolovaným bodem množiny A, pokud existuje otevřená množina $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{X}$, že $\mathbb{U} \cap \mathbb{A} = \{x\}$. Bod x se nazývá hromadným bodem množiny $\mathbb{A}$, pokud každé okolí bodu x protíná množinu $\mathbb{A} \subseteq \{x\}$

Například

V diskrétním prostoru jsou všechny body izolované. Naopak je-li $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ a $\mathbb{A} = \mathbb{Q}$, pak každý bod $\mathbb{X}$ je hromadným bodem množiny $\mathbb{A}$. Žádný bod z $\mathbb{A}$ není izolovaným bodem $\mathbb{A}$.

Definice 3.15 (Derivace množiny)

Množina hromadných bodů množiny $\mathbb{A}$ se značí $\mathbb{A}'$. Někdy se nazývá derivace $\mathbb{A}$.

Tvrzení 3.14 (Vlastnosti derivace)

$\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \cup \mathbb{A}'$, $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})' = \mathbb{A}' \cup \mathbb{B}'$

Důkaz
Domácí cvičení (je jednoduchý). □

3.4 Spojitá zobrazení

Definice 3.16 (Spojité zobrazení, homeomorfizmus a spojitost v bodě)

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ a $(\mathbb{Y}, \sigma)$ jsou TP. Ať $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. Zobrazení f se nazývá spojité, pokud $\forall \mathbb{U} \in \sigma : f^{-1}(\mathbb{U}) \in \tau$.

f se nazývá homeomorfizmus, pokud f je bijekce a f i f^{-1} jsou spojitá.

f je spojité v bodě x, pokud $\forall \mathbb{V} \in \mathcal{U}_\sigma(f(x)) \exists \mathbb{U} \in \mathcal{U}_\tau(x) : f(U) \subseteq \mathbb{V}$.

Například
$\mathbb{R}$, $(0, 1)$ jsou homeomorfní (ale nejsou izometrické)

Poznámka
Vlastnosti, TP, které se zachovávají homeomorfizmem se nazývají topologické vlastnosti.

(Úplnost není topologický pojem.)

Například
Zobrazení z diskrétního prostoru je vždy spojité.

Zobrazení do indiskrétního prostoru je taktéž vždy spojité.

Tvrzení 3.15 (Charakterizace spojitých zobrazení)

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$, $(\mathbb{Y}, \sigma)$ jsou TP, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ zobrazení. Pak následující je ekvivalentní:
1) f je spojité
2) vzory množin z nějaké subbáze jsou otevřené
3) vzory množin z nějaké báze jsou otevřené
4) f je spojité v každém bodě
5) vzory uzavřených množin jsou uzavřené
6) $\forall \mathbb{A} \subseteq \mathbb{X} : f(\overline{\mathbb{A}}) \subseteq \overline{f(\mathbb{A})}$
7) $\forall \mathbb{B} \subseteq \mathbb{Y} : \overline{f^{-1}(\mathbb{B})} \subseteq f^{-1}(\overline{\mathbb{B}})$
8) $\forall \mathbb{B} \subseteq \mathbb{Y} : f^{-1}(\operatorname{Int} \mathbb{B}) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(\mathbb{B}))$

Důkaz
1->2 Triviální (z definice).

2->3 Ať $\mathcal{B}$ je nějaká báze. Dle 2 pro nějakou subbázi $\mathcal{S}$ toho $(\mathbb{Y}, \sigma)$ platí, že $f^{-1}(\mathbb{S})$ je otevřená pro $\mathbb{S} \in \mathcal{S}$. Ať $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$. $\mathbb{B}$ lze vyjádřit jako sjednocení konečných průniků prvků $\mathcal{S}$. (Vzor průniku je průnik vzorů, vzor sjednocení je sjednocení vzorů.) $f^{-1}(\mathbb{B})$ je sjednocením konečných průniků prvků tvaru $f^{-1}(\mathbb{S}), \mathbb{S} \in \mathcal{S}$. Tedy $f^{-1}(\mathbb{B})$ je otevřená.

3->4 Ať $x \in \mathbb{X}$, $\mathbb{V}$ okolí bodu $f(x)$. $\mathcal{B}$ báze z 3. podmínky. $\exists \mathbb{B} \in \mathcal{B}$, že $f(x) \in \mathcal{B} \subseteq \mathbb{V}$. $\mathbb{U} = f^{-1}(\mathbb{B})$ otevřená, $x \in \mathbb{U} f(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{B} \subseteq \mathbb{V}$.

4->5 Ať $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{Y}$ je uzavřená. Ať $x \in \overline{f^{-1}(F)}$. Chceme, že $x \in f^{-1}(\mathbb{F})$ (tj. že $f(x) \in \mathbb{F}$). Z 4 pro každé okolí $\mathbb{V}$ bodu $f(x)$ existuje $\mathbb{U}$ okolí x, že $f(x) \subseteq V$. Z definice uzávěru platí, že každé takové $\mathbb{U}$ protíná $f^{-1}(\mathbb{F})$, tedy $f(\mathbb{U}) \cap \mathbb{F} \neq \emptyset$, tedy $\mathbb{V} \cap \mathbb{F} \neq \emptyset$. Tedy podle charakterizace uzávěru $f(x) \in \overline{\mathbb{F}} = \mathbb{F}$.

5->6 $f^{-1}(\overline{f(\mathbb{A})})$ je uzavřená dle 5 a obsahuje $\mathbb{A}$, tedy obsahuje i $\overline{\mathbb{A}}$. Pak $f(\overline{\mathbb{A}}) \subseteq f\left(f^{-1}(\overline{f(\mathbb{A})})\right) \subseteq \overline{f(\mathbb{A})}$.

6->7 Ať $\mathbb{B} \subseteq Y$, $A := f^{-1}(\mathbb{B})$. Dle 6 $f(\overline{f^{-1}(\mathbb{B})}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(\mathbb{B}))} \subseteq \overline{\mathbb{B}}$. $\overline{f^{-1}(\mathbb{B})} \subseteq f^{-1}(\overline{\mathbb{B}})$ (aplikováním vzoru? na předchozí).

7->8 Vztah vnitřku a uzávěru. $f^{-1}(\operatorname{Int} \mathbb{B}) = f^{-1}(\mathbb{Y} \setminus \overline{\mathbb{Y} \setminus \mathbb{B}}) = \mathbb{X} \setminus f^{-1}(\overline{\mathbb{Y} \setminus \mathbb{B}}) \overset{\text{dle 7}}{\subseteq} \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{Y} \setminus \mathbb{B}} = \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{X} \setminus f^{-1}(\mathbb{B})} = \mathbb{X} \setminus (\mathbb{X} \setminus \operatorname{Int} f^{-1}(\mathbb{B})) = \operatorname{Int} f^{-1}(\mathbb{B})$.

8->1 Je-li $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{Y}$ otevřená, pak ze 7: $f^{-1}(\mathbb{V}) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(\mathbb{V}))$. Triviálně $\operatorname{Int} f^{-1}(\mathbb{V}) \subseteq f^{-1}(\mathbb{U})$. Tedy $f^{-1}(\mathbb{V}) = \operatorname{Int} f^{-1}(\mathbb{V})$, tedy $f^{-1}(\mathbb{V})$ je otevřená. □

Tvrzení 3.16 (Skládání spojitých zobrazení)

Ať $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ jsou TP, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}, g : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ zobrazení. Jsou li f, g spojitá, pak $g \circ f : \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ je spojité.

Pokud f je spojité v bodě x a g spojité v $f(x)$, pak $g \circ f$ je spojité v x.

Důkaz
$(g \circ f)^{-1}(\mathbb{V}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathbb{V}))$

Je-li $\mathbb{V}$ okolí $gf(x)$, pak $g^{-1}(\mathbb{V})$ □

3.5 Oddělovací axiomy

Definice 3.17

TP $\mathbb{X}$ se nazývá:

- T_0, pokud $\forall x, y \in \mathbb{X} \exists \mathbb{U}$otevřená : $|U \cap \{x, y\}| = 1$.
- T_1, pokud $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists \mathbb{U}$otevřená : $x \in \mathbb{U}, y \notin \mathbb{U}$.
- T_2 (Hausdorffův), pokud $\forall x, y \in \mathbb{X} \exists \mathbb{U}, V$otevřené disjunktní : $x \in \mathbb{U}, y \in \mathbb{V}$.
- regulární, pokud $\forall \mathbb{F} \subseteq \mathbb{X}$ uzavřenou $\forall \in \mathbb{X} \backslash \mathbb{F} \exists \mathbb{U}, \mathbb{V}$ otevřené disjunktní: $x \in \mathbb{U}, \mathbb{F} \subseteq \mathbb{V}$.
- normální, pokud $\forall \mathbb{E}, \mathbb{F}$ uzavřené disjunktní $\exists \mathbb{U}, \mathbb{V}$ otevřené disjunktní: $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{U}, \mathbb{F} \subseteq \mathbb{V}$.
- úplně regulární, pokud $\forall \mathbb{F} \subseteq \mathbb{X}$ uzavřenou $\forall x \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{F} \exists f : \mathbb{X} \to [0, 1]$ spojitá, že $f(x) = 0, f(\mathbb{F}) \subseteq \{1\}$.
- T_3, pokud je regulární a T_1.
- $T_{3\frac{1}{2}}$ nebo T_π (Tichonovův), pokud je úplně regulární a T_1.
- T_4, pokud je normální a T_1.

Poznámka

$$\text{normální} \implies \text{úplně regulární} \overset{\text{rozpůlení intervalu } [0,1]}{\implies} \text{regulární}$$

$$T_4 \implies T_\pi \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$$

(Platí pouze tímto směrem, ne opačně!)

$$T_0 \not\Longrightarrow T_1 : (\{0, 1\}, \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}) \ldots \text{(Sierpinského TP)}$$

$T_1 \not\Longrightarrow T_2 : (\mathbb{N}, \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{N} \setminus K : K\text{je konečná}\})$ (Topologie kokonečných (doplněk konečných) množin)

Tvrzení 3.17 (Metrizovatelné prostory jsou T_4)

Je-li $\mathbb{X}$ metrizovatelný prostor a $\mathbb{E}, \mathbb{F} \subseteq \mathbb{X}$ uzavřené disjunktní množiny, pak existuje spojitá funkce $f : \mathbb{X} \to [0, 1]$, že $f(\mathbb{E}) \subseteq \{0\}, f(\mathbb{F}) \subseteq \{1\}$.

Důkaz

$\mathbb{X}$ je metrizovatelný, tedy existuje metrika ϱ kompatibilní s topologií na $\mathbb{X}$. Položme $f(x) = \frac{\varrho(x,\mathbb{E})}{\varrho(x,\mathbb{E})+\varrho(x,\mathbb{F})}, x \in \mathbb{X}$. f je dobře definovaná a jistě spojitá. $f(x) = 0, x \in \mathbb{E}$, $f(x) = 1, x \in \mathbb{F}$. □

Lemma 3.18

Ať $\mathbb{X}$ je TP. Pak

a) $\mathbb{X}$ *je* $T_1 \Leftrightarrow$ *každá jednoprvková množina je uzavřená* $\Leftrightarrow$ *každá konečná množina je uzavřená.*

b) $\mathbb{X}$ *je* $T_2 \implies \forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) : y \notin \overline{\mathbb{U}}$.

c) $\mathbb{X}$ *je regulární* $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{X} \forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) \exists \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x) : \overline{\mathbb{V}} \subseteq \mathbb{U}$.

- $\mathbb{X}$ *je normální* $\Leftrightarrow \forall \mathbb{V} \subseteq \mathbb{X} otev\check{r}enou \forall \mathbb{E} \in \mathbb{V} uzav\check{r}enou \exists U \subseteq \mathbb{X} otev\check{r}en\acute{a} : \mathbb{E} \subseteq \mathbb{U} \subseteq \overline{\mathbb{U}} \subseteq V$.

Důkaz
Jednoduché. □

Věta 3.19 (Urysohnovo lemma)

TP $\mathbb{X}$ *je normální* $\Leftrightarrow$ *pro každé dvě disjunktní uzavřené* $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ *existuje spojitá funkce* $f : \mathbb{X} \to [0,1]$, *že* $f(\mathbb{E}) \subseteq \{0\}, f(\mathbb{F}) \subseteq \{1\}$

Důkaz
Implikace zprava doleva je snadná – uvažujeme $\left\{x \in \mathbb{X} : f(x) < \frac{1}{2}\right\}$ a $\left\{x \in \mathbb{X} : f(x) > \frac{1}{2}\right\}$.

$\implies$ Označme $D := \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $D = \{r_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $r_0 = 0, r_1 = 1$ (r_n) prostá posloupnost. Indukcí najdeme otevřené množiny $\mathbb{V}_q : q \in D$, že pro $p, q \in D, p < q \implies \mathbb{V}_p \subseteq \mathbb{V}_q$ a navíc $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1 \subseteq \mathbb{X} \setminus \mathbb{F}$.

Z normality najdeme otevřenou množinu $\mathbb{U}$, že $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{U} \subseteq \overline{\mathbb{U}} \subseteq \mathbb{X} \setminus \overline{r}$. Položíme $\mathbb{V}_0 = \mathbb{U}$, $\mathbb{V}_1 = \mathbb{X} \setminus \mathbb{F}$.

Nyní předpokládejme, že $\mathbb{V}_{r_0}, \mathbb{V}_{r_1}, \ldots, \mathbb{V}_{r_n}, n \geq 1$. Už známe a platí, že pro $p, q \in \{r_0, \ldots, r_n\} : p < q \implies \overline{\mathbb{V}_p} \subseteq \mathbb{V}_q$. Chceme najít $\mathbb{V}_{r_{n+1}}$. Ať $i, j \leq n$ jsou taková, že $r_i = \max\{r_k : r_k < r_{n+1}\}$ a $r_j = \min\{r_k : r_k > r_{n+1}\}$. TODO! Z normality existuje otevřená $\mathbb{V}_{r_{n+1}}$, že $\overline{\mathbb{V}_{r_i}} \subseteq \mathbb{V}_{r_{n+1}} \subseteq \overline{\mathbb{V}_{r_{n+1}}} \subseteq \mathbb{V}_{r_j}$.

Položme $f(x) = 1, x \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{V}_1 | f(x) = \inf r \in D : x \in \mathbb{V}_r, x \in \mathbb{V}_1$. $f : \mathbb{X} \to [0,1]$. Nyní stačí ověřit spojitost: vzory subbázových (nějaké subbáze) podmnožin jsou otevřené. Zvolím si subbázi $\{[0,b), (a,1], a, b \in (0,1)\}$. $f^{-1}([0,b)) = \{x \in \mathbb{X} : f(x) < b\} = \{x \in \mathbb{X} : \exists r < b : x \in \mathbb{V}_r\} = \bigcap_{r<b} \mathbb{V}_r \ldots$ otevřené. $f^{-1}((a,1]) = \{x \in \mathbb{X} : f(x) > a\} = \{x \in \mathbb{X} : \exists r > a :$ $\left\{x \in \mathbb{X} : \exists s > a : x \notin \overline{\mathbb{V}_s}\right\} = \bigcup_{s>a} \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{V}_s} \ldots$ otevřené □

Poznámka ($T_4 \implies T_{3.5}$, normalita $\implies$ úplná regularita)

3.6 Konvergence v topologických prostorech

Definice 3.18 (Usměrněné množiny)

Dvojice $(\mathbb{I}, \leq)$ se nazývá usměrněná množina, pokud $\mathbb{I}$ je množina a $\leq$ je binární relace na $\mathbb{I}$, která je reflexivní, tranzitivní a pro $i, j \in \mathbb{I}$, pak existuje $k \in \mathbb{I}$, že $i \leq k, j \leq k$.

Například
$(\mathbb{N}, \leq)$

Definice 3.19 (Net)

Net v TP $\mathbb{X}$ je libovolné zobrazení z usměrněné množiny do $\mathbb{X}$.

Definice 3.20 (Konvergence netu)

Řekneme, že net $(x_i)_{i\in\mathbb{I}}$ konverguje k bodu x, pokud $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) \exists i_0 \in \mathbb{I} \forall i \in \mathbb{I}, i \geq i_0 : x_i \in \mathbb{U}$. Pokud existuje právě jeden, značíme $x = \lim_{i\in\mathbb{I}} x_i$.

Bod x se nazývá hromadným bodem netu $(x_i)_{i\in\mathbb{I}}$, pokud $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) \forall i \in \mathbb{I} \exists j \geq i : x_j \in \mathbb{U}$.

Tvrzení 3.20 (Jednoznačnost limity netu)

Prostor $\mathbb{X}$ je Hausdorffův $\Leftrightarrow$ každý net má nejvýše jednu limitu.