Organizační úvod

Poznámka
Jako vždycky, jen v implikacích u zkoušky budou i pojmy z předchozích semestrů.

1 Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

1.1 Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

Definice 1.1

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť máme funkce $f : J \to \mathbb{R}$ a $f_n : J \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$

- konverguje bodově k f na J, pokud $\forall x \in J : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, neboli:

$$\forall x \in J \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

- konverguje stejnoměrně k f na J (značíme $f_n \rightrightarrows f$ na J), pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

- konverguje lokálně stejnoměrně, pokud pro každý omezený uzavřený $[a, b] \subset J$ platí $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ (značíme $f_n \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} f$ na J).

Věta 1.1 (Kritérium stejnoměrné konvergence)

Nechť $f, f_n : J \to \mathbb{R}$, pak

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } J \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Důkaz

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

□

Poznámka (Pro spojité funkce)

$$\Leftrightarrow ||f_n - f||_{\mathcal{C}(J)} \to 0 \Leftrightarrow f_n \overset{\mathcal{C}(J)}{\to} f.$$

Věta 1.2 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)

Nechť $f_n : J \to \mathbb{R}$, pak

$$(\exists f : f_n \rightrightarrows f \text{ na } J) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

Důkaz

„ $\Longrightarrow$ “: Víme $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Tedy

$$\forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon.$$

„ $\Longleftarrow$ “: Víme $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Toto použijeme pro pevné $x \in J$. Pro posloupnost $a_n = f_n(x)$ máme splněnou BC podmínku pro posloupnost reálných čísel, tj. $a_n \to a \in \mathbb{R}$.

Označíme si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Nyní v BC podmínce provedeme limitu $n \to \infty$. Tím dostaneme přesně definici stejnoměrné konvergence. $\square$

Věta 1.3 (Moore-Osgood)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je krajní bod intervalu J. Nechť $f_n, f : J \to \mathbb{R}$ splňují

- $f_n \rightrightarrows f$ *na* J,
- *existuje* $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Pak existují $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *a jsou si rovny.*

Důkaz

Příště. $\square$

Důsledek

Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na I a nechť f_n jsou spojité na I. Pak f je spojitá na I.

Poznámka

Obdobně lze definovat stejnoměrnou spojitost i pro libovolnou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ a $f_n : A \to \mathbb{R}$ a platí, že stejnoměrná limita je spojitá (stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá).

Důkaz (Moore-Osgood)
Z BC podmínky

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 \ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Provedeme $\lim_{x \to x_0}$ a dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Tedy a_n splňuje BC podmínku, a tudíž $\exists \lim_{n \to \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

Nechť $\varepsilon \geq 0$. Z definice $f_n \rightrightarrows f$

$$\exists n_0 \ \forall x \in J : |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zároveň předpokládejme $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$ (zvolíme si n_0 jako maximum). Máme pevnou funkci f_{n_0} a $\lim_{x \to x_0} f_{n_0}(x) = a_{n_0}$. Tedy

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in P(x_0, \delta) \cap J : |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Nyní $\forall x \in P(x_0, \delta) \cap J$ platí

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| \leq \varepsilon + \varepsilon + \ \varepsilon = 3\varepsilon.$$

□

Věta 1.4 (O záměně limity a derivace)

Nechť funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na intervalu (a, b) a nechť

- $\exists x_0 \in (a, b) : \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje,*
- *pro derivace f_n' platí $f_n' \overset{Loc}{\rightrightarrows}$ na (a, b).*

Potom existuje funkce f tak, že $f_n \overset{Loc}{\rightrightarrows} f$ na (a, b), f má vlastní derivaci a platí $f_n' \overset{Loc}{\rightrightarrows} f'$ na (a, b).

Důkaz
Nechť $x_0 \in [c,d] \subset (a,b)$. Víme $f_n' \rightrightarrows$ na $[c,d]$. Chceme ukázat $f_n \rightrightarrows f$ na $[c,d]$ ($\implies f_n \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} f$ na (a,b)). Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $f_n' \rightrightarrows$

$$\exists n_0\ \forall m,n \geq n_0\ \forall x \in [c,d] : |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$$

a zároveň $\forall m,n \geq n_0 : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$. Nyní $\forall x \in [c,d]$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq$$

$$\leq |h(x) - h(x_0)| + \varepsilon \leq |x - x_0| \cdot |h'(\xi)| + \varepsilon \leq (d-c) \cdot \varepsilon + \varepsilon,$$

kde $h = f_n - f_m$ a $\xi \in (x_0, x)$ resp. (x, x_0) z Lagrangeovy věty (cvičení: předpoklady jsou splněné).

Zbývá dokázat „$f_n' \rightrightarrows f'$ na $[c,d]$“: Zvolme $z \in [c,d]$ a položme $\varphi_n(x) = \frac{f_n(x)-f_n(z)}{x-z}$ pro $x \in [c,d] \setminus \{z\}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $f_n' \rightrightarrows$

$$\exists n_0\ \forall n,m \geq n_0\ \forall x \in [c,d] : |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon.$$

Podobně jako v první části důkazu

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(z) - f_m(z))| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - z| < \varepsilon \cdot |x - z|.$$

Nyní $\forall m,n \geq n_0\ \forall x \in [c,d] \setminus \{z\}$:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \left| \frac{f_n(x) - f_m(z) - (f_m(x) - f_m(z)}{x - z} \right| < \frac{\varepsilon \cdot |x-z|}{|x-z|} = \varepsilon.$$

Podle BC $\varphi_n \rightrightarrows$ na $[c,d] \setminus \{z\}$. Tedy φ_n splňuje předpoklady Moore-Osgoodovy věty ($\lim_{x\to z} \varphi_n(x) = \lim_{x \to z} \frac{f_n(x)-f_n(z)}{x-z} = f'(z)$). Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to z} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} = \lim_{x\to z} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n'(z) = \lim_{x\to z} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = f'(z).$$

A jelikož víme, že $f_n' \rightrightarrows$, tak $f_n' \to f' \implies f_n' \rightrightarrows f'$. □

1.2 Stejnoměrná konvergence řady funkcí

Definice 1.2

Řekněme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na intervalu J, pokud posloupnost částečných součtů $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na J.

Věta 1.5 (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaných na intervalu J. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ na J, pak posloupnost funkcí $u_n(x) \rightrightarrows 0$ na J.

Důkaz

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 \ \forall x \in J : |s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$$

speciálně pro $m = n + 1$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in J : |\sum_{i=1}^{n+1} u_i - \sum_{i=1}^{n} u_i| = |u_{n+1}(x)| < \varepsilon \implies u_n \rightrightarrows 0.$$

□

Věta 1.6 (Weierstrassovo kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaných na intervalu J. Pokud pro

$$\sigma_n = \sup \{|u_n|(x) : x \in J\}$$

platí, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ na J.

Důkaz

Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro konečnou $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$

$$\exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0, m > n : |\sum_{k=n+1}^{m} \sigma_k| < \varepsilon.$$

Chceme ověřit BC podmínku pro $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$:

$$\forall m, n \geq n_0, m > n \ \forall x \in J : |s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{m} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sigma_k < \varepsilon.$$

Tedy podle BC podmínky $\sum u_k \rightrightarrows$. □

Věta 1.7 (O spojitosti a derivování řady funkcí)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu (a, b).

- *Nechť u_n jsou spojité na (a, b) a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{Loc}{\rightrightarrows}$ na (a, b). Pak $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je spojitá na (a, b).*
- *Nechť funkce u_n, $n \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na (a, b) a nechť $\exists x_0 \in (a, b)$:*

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ *konverguje a* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{Loc}{\rightrightarrows}$ *na* (a,b). *Pak je funkce* $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *dobře definovaná a diferencovatelná na* (a,b) *a navíc* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{Loc}{\rightrightarrows} F(x)$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{Loc}{\rightrightarrows} F(x)$ *na* (a,b).

Důkaz

„První bod": Funkce $s_n(x) = \sum_{n=1}^{k} u_n(x)$ jsou spojité a $s_k \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows}$ na (a,b). Tedy podle důsledku věty z dřívějška (stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá) je jejich limita lokálně spojitá, tedy spojitá.

„Druhý bod": Na s_k použijeme větu z dřívějška (pokud mají derivace stejnoměrnou limitu, pak i funkce ji mají a shoduje se až na derivaci). Ověříme podmínky, tedy že $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} u_n(x)$ konverguje a $s_k' = \sum_{n=1}^{k} u_k' \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows}$ na (a,b). Podle tamté věty tedy $\exists F(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ a tato funkce je diferencovatelná a

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} F(x) \quad \wedge \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} F'(x) \qquad \text{na } (a,b).$$

□

Věta 1.8 (Abel-Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)

Nechť $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost funkcí definovaných na intervalu* J *a nechť* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost funkcí na* J *taková, že* $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq 0$. *Jestliže je splněna některá z následujících podmínek, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) \rightrightarrows$ *na* J.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \rightrightarrows$ *na* J *a* b_1 *je omezená.*

(D) $b_n \rightrightarrows 0$ *na* J *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *má omezené částečné součty, tedy*

$$\exists K > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \forall x \in J : |s_n(x)| = \left| \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \right| < K.$$

Důkaz
„Dirichlet“: Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme n_0 $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in J : |f_n(x)| < \varepsilon$. Nechť $m, n \geq n_0$. Označme $\sigma_i(x) := \sum_{j=m}^{i} a_j(x)$. Pak

$$|\sigma_i(x)| \leq \left| \sum_{j=1}^{i} a_j(x) - \sum_{j=1}^{n_0-1} a_j(x) \right| \leq K + \ K.$$

$$\forall m, n \geq n_0 \ \forall x \in J : \left| \sum_{j=n}^{m} a_j(x) \cdot b_j(x) \right| = |a_n \cdot b_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) b_{n+1} + \ldots + (\sigma_m - \sigma_{m-1}) b_m| \leq \sup_{j=n,\ldots,m} |\sigma$$

A z BC podmínky už $\sum a_i(x) b_i(x) \rightrightarrows$ na J.

„Abel“: Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $\rightrightarrows$

$$\exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 : \left| \sum_{j=n}^{m} a_j(x) \right| < \varepsilon.$$

Tedy pro $\sigma_1(x) = \sum_{j=n}^{m} a_j(x)$ platí $|\sigma_i(x)| < \varepsilon$. Analogicky odhadu výše

$$\left| \sum_{j=n}^{m} a_j(x) \cdot b_j(x) \right| \leq \sup_{j=n,\ldots,m} |\sigma_j(x)| \cdot |b_n(x)| \leq \varepsilon \sup_{x \in J}(b_1(x)) \leq \varepsilon \cdot K.$$

Tedy $\sum a_i(x) \cdot b_i(x)$ splňuje BX podmínku. □

2 Mocninné řady

Definice 2.1 (Mocninná řada)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ nazýváme mocninnou řadou s koeficienty a_n a středem x_0.

Definice 2.2 (Poloměr konvergence)

Poloměrem konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ nazveme

$$R = \sup \left\{ r \in [0, \infty) | \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ konverguje } \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \right\}.$$

Věta 2.1 (O poloměru konvergence mocninné řady)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ je mocninná řada a $R \in [0, \infty]$ je její poloměr konvergence. Pak řada konverguje absolutně $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ a diverguje $\forall x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + r, +\infty)$. Navíc platí $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Pokud existuje $Q = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, potom $R = Q$.

Důkaz
Položme $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Pak pro $x : |x - x_0| < R$ platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot (x-x_0)^n|} = |x-x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-x_0|}{R} < 1 \implies \text{řada konverguje absolutně.}$$

Pro $|x - x_0| > R$ dostaneme úplně stejně > 1, tedy řada diverguje.

Nechť existuje $Q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} \cdot (x-x_0)^{n+1}|}{|a_n \cdot (x-x_0)^n|} = |x-x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = |x-x_0| \cdot \frac{1}{Q}.$$

Pro $|x - x_0| < \frac{1}{Q}$ řada konverguje, pro $|x - x_0| > \frac{1}{Q}$ řada diverguje, tedy $\frac{1}{Q}$ je poloměr konvergence. $\square$

Věta 2.2 (O steejnoměrné konvergenci mocninné řady)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ je mocninná řada a $R \in (0,\infty]$ je její poloměr konvergence. Pak řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Důkaz
Nechť $0 < r < R$. Podle předchozí věty $\sum_{a_n} \cdot r^n$ konverguje absolutně. Nyní

$$\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] : |a_n (x-x_0)^n| \le |a_n| \cdot r^n.$$

Víme, že $\sum |a_n| r^n$ konverguje, tedy podle Weierstrassova kritéria $\sum a_n(x-x_0)^n \rightrightarrows$ na $[x_0 - r, x_0 + r]$. Tedy konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$. $\square$

Věta 2.3 (O derivaci mocninné řady)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1}$ je také mocninná řada se stejným středem a s poloměrem konvergence R.

Navíc pro $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ platí $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1}$.

Důkaz
Položme $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Nyní poloměr konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_i \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1} \overset{x \neq x_0}{=} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_i \cdot n \cdot (x-x_0)^n}{x-x_0}$ je podle věty výše

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n| \cdot n}} = R \cdot \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n}} = R.$$

Následně použijeme větu o derivaci a stejnoměrné konvergenci (v bodě $x = x_0$ řada jistě konverguje a z předchozí věty řada derivací konverguje lokálně stejnoměrně) $\square$

Důsledek (O integrování mocninné řady)
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

je mocninná řada se stejným poloměrem konvergence. Navíc platí

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1} + C \text{ na } (x_0 - R, x_0 + R).$$

Důkaz (Hint k důkazu)
Mocninou řadu vpravo zderivujeme. □