Poznámka
Stručný obsah: Diferencovatelnost v Banachových prostorech; Asplundovy prostory; slabé Asplundovy prostory; fragmentovanost a oddělovací spojitost; atd.

1 Diferencovatelnost

1.1 Základní pojmy

Poznámka
Většina by fungovala i pro NLP, ale my se pro jednoduchost zaměříme na Banachovy prostory.

Definice 1.1

X, Y reálné Banachovy prostory, $U \subset X$ otevřená, $f : U \to Y$, $x \in U$, $h \in X$:

$$\partial_h^+ f(x) = \lim_{t \to 0_+} \frac{f(x + t \cdot h) - f(x)}{t} \in Y, \text{ pokud existuje,}$$

$$\partial_h f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot h) - f(x)}{t} \in Y, \text{ pokud existuje.}$$

Poznámka
$\partial_{\mathbf{o}}^+ f(x) = \partial_{\mathbf{o}} f(x) = 0$. Pokud $\|h\| = 1$, pak je to směrová derivace.

Pokud $\alpha > 0$, pak $\partial_{\alpha h}^+ f(x) = \alpha \partial_h^+ f(x)$, má-li alespoň jedna strana smysl. Podobně pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je $\partial_{\alpha h} f(x) = \alpha \partial_h f(x)$, má-li alespoň jedna strana smysl (speciálně $\alpha = -1$).

$$\exists \partial_h f(x) \Leftrightarrow \exists \partial_{-h}^+ f(x) = -\partial_h^+ f(x).$$

Definice 1.2 (Gateauxova derivace)

X, Y reálné Banachovy prostory, $U \subset X$ otevřená, $f : U \to Y$, $x \in U$, $h \in X$: Pokud $\exists L \in \mathcal{L}(X, Y)$, že $\forall h \in X : L(h) = \partial_h f(x)$, značíme $f_g'(x) = L$.

Poznámka
Stačí, aby $\forall h \in X : L(h) = \partial_u^+ f(a)$. Znamená to, že $h \mapsto \partial_h^{(+)} f(x)$ je omezený lineární operátor.

Definice 1.3 (Fréchetova derivace)

f má v bodě $x \in U$ Fréchetovu derivaci, pokud $\exists L \in \mathcal{L}(X, Y)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Poznámka
Pokud takové L existuje, nutně platí $L = f'_g(x)$. Fréchetovu derivaci značíme $f'_F(x)$.

Poznámka

$$\exists f'_F(x) \Leftrightarrow \exists f'_g(x) \wedge \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \partial_h f(x) \text{ stejnoměrně pro } h \in B_X \text{ (resp. } h \in S_X).$$

Důkaz
$f'_F(x)$ existuje $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall h \in X, \|h\| < \delta : \|f(x+h) - f(x) - \partial_h f(x)\| \leqslant \varepsilon \cdot \|h\|$$

Existenci $f'_g(x)$ máme, tedy: $\varepsilon > 0$ ... najdeme to $\delta > 0$: $h \in B_x$, $t \in \mathbb{R}$, $0 < |t| < \delta$ $\implies$ $\|t \cdot h\| < \delta$:

$$\|f(x+th) - f(x) - \partial_{t \cdot h} f(x)\| \leqslant \varepsilon \|t \cdot h\| = \varepsilon \cdot |t|$$

$$\|\frac{f(x+th) - f(x)}{t} - \partial_h t(x)\| \leqslant \varepsilon$$

to dává stejnoměrnou konvergenci „ $\implies$ “.

„ $\impliedby$ “: Nechť $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall h \in \{x | \forall t \in P(\mathbf{o}, \delta)\}$:

$$\|\frac{f(x + t \cdot h) - f(x)}{t} - \partial_h f(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ ... najdeme to $\delta > 0$: Zvolíme $h \in X$, $0 < \|h\| < \delta \implies \frac{h}{\|h\|} \in S_X \implies$

$$\implies \|\frac{f(x+h) - f(h)}{\|h\|} - \frac{\partial_h f(x)}{\|h\|}\| \leqslant \varepsilon \implies$$

$$\implies \frac{\|f(x+h) - f(x) - \partial_h f(x)\|}{\|h\|} < \varepsilon.$$

□

Poznámka

1. $X = \mathbb{R}$, pak je F. derivace, G. derivace a běžná derivace to samé.

2. TODO?

3. TODO?

Tvrzení 1.1

$\dim X < \infty$, $U \subset X$ *otevřená;* $f : U \to Y$ *lipschitzovská,* $x \in U$, $f'_g(x)$ *existuje* $\implies$ $f'_F(x)$ *existuje.*

Důkaz

f lipschitzovská $\implies$ existuje $L > 0 : \|f(x) - f(y)\| \leqslant L \cdot \|x - y\|$ $(x, y \in U)$. Nechť existuje $f'_g(x)$. Potom $\forall \varepsilon > 0$ existuje $h_1, \ldots, h_N \in S_X$ ε-síť. Nechť $\delta > 0$ je takové, že $B(x, \delta) \subset U$ a $0 < |t| < \delta \implies \|\frac{f(x+th_i)-f(x)}{t} - f'_g(x)(h_i)\| < \varepsilon$.

Vezmeme $h \in S_X$ libovolné, $0 < |t| < \delta$. Existuje i, že $\|h - h_i\| < \varepsilon$:

$$\|\frac{f(x+t\cdot h)-f(x)}{t} - f'_g(x)(h)\| \leqslant \|\frac{f(x+t\cdot h)-f(x+t\cdot h_i)}{t}\| + \|\frac{f(x+t\cdot h_i)-f(x)}{t} - f'_g(x)(h_i)\| + \|f'_g(x$$

□

Poznámka

Stačí lokálně lipschitzovská.