Část I

Definice

Definice 0.1 (Množinová funkce)

Buď X množina a $\mathcal{P}(X)$ její potenční množina, tj. $\mathcal{P}(X) := \{A|A \subset X\}$. Nechť $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Pak zobrazení $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$ se nazývá množinová funkce.

Definice 0.2 (σ-algebra a algebra)

Systém $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ nazveme σ-algebra na X, jestliže

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $A \in \mathcal{A} \implies A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- $A_i \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Jestliže nahradíme třetí podmínku za $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathbb{A}$, pak se systém $\mathcal{A}$ nazývá algebra.

Definice 0.3 ($\sigma\mathcal{S}$)

Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ libovolný množinový systém, pak nejmenší σ-algebru obsahující systém $\mathcal{S}$ označíme $\sigma\mathcal{S}$. (Existence vyplývá z věty o průniku σ-algeber.)

Definice 0.4 (Generátor σ-algebry)

Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ a $\mathcal{A} = \sigma\mathcal{S}$, pak $\mathcal{S}$ nazveme generátor σ-algebry $\mathcal{A}$ (také říkáme, že $\mathcal{A}$ je generováno systémem $\mathcal{S}$).

Definice 0.5 (Borelovská σ-algebra)

Je-li (X, ϱ) metrický prostor a $\mathcal{G}$ systém všech otevřených podmnožin X, pak $\mathcal{B}(X) := \partial\mathcal{G}$ se nazývá borelovská σ-algebra na X.

Definice 0.6 (Měřitelný prostor a měřitelná množina)

Je-li $\mathcal{A}$ σ-algebra na X, pak dvojice $(X, \mathcal{A})$ se nazývá měřitelný prostor. Množiny $A \in \mathcal{A}$ se nazývají $\mathcal{A}$-měřitelné (krátce měřitelné, pokud nehrozí nedorozumění).

Definice 0.7 (Míra, prostor s mírou)

Buď $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. Zobrazení $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ splňující

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(M2) jestliže $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, jsou po dvou disjunktní, pak $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$,

se nazývá míra. (M2 se také nazývá spočetná/sigma aditivita)

Trojice $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá prostor s mírou.

Definice 0.8 (Nulová množina, úplný prostor, zúplnění)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že množina $N \subset X$ je nulová množina, jestliže existuje $A \in \mathcal{A}$ tak, že $N \subset \mathcal{A}$ a $\mu(A) = 0$. Symbolem $\mathcal{N}$ označíme systém všech nulových množin.

Řekneme, že prostor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je úplný, pokud $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$. σ-algebru $\mathcal{A}_0 := \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$ nazveme zúplněním σ-algebry $\mathcal{A}$ vzhledem k míře μ.

Definice 0.9 (Borelovská, konečná, pravděpodobnostní a σ-konečná míra)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že míra μ je:

- borelovská, je-li X metrický prostor a $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$;
- konečná, je-li $\mu(X) < +\infty$;
- pravděpodobnostní, je-li $\mu(X) = 1$;
- σ-konečná, existují-li množiny $X_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, tak, že $\mu(X_i) < +\infty$, $\forall i \in \mathbb{N}$, a $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$.

Definice 0.10 (Lebesgueova míra)

Zúplněné míry $\lambda^n_{\mathcal{B}}$ nazveme Lebesgueovou mírou v $\mathbb{R}^n$ a označíme λ^n.

($\lambda^n_{\mathcal{B}}$ je borelovská míra na $\mathbb{R}^n$ taková, že $\lambda^n_{\mathcal{B}}([a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$.)

Definice 0.11 (Vzor systému)

Ať X, Y jsou množiny, $f : X \to Y$ zobrazení a $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$. Pak $f^{-1}(\mathcal{S}) := \{f^{-1}(S) | S \in \mathcal{S}\}$.

Definice 0.12 (Měřitelné zobrazení, borelovsky měřitelné zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{M})$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ nazýváme měřitelné (vzhledem k $\mathcal{A}$ a $\mathcal{M}$), jestliže $f^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}$. Pak píšeme $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{M})$.

Je-li některý z prostorů X, Y metrický prostor, pak za příslušnou σ-algebru bereme borelovskou σ-algebru (pokud není řečeno jinak). Měřitelné zobrazení mezi dvěma metrickými prostory se nazývá borelovsky měřitelné (stručně borelovské).

Definice 0.13 (Jednoduchá funkce)

Funkce $s : X \to [0, +\infty)$ se nazývá jednoduchá, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Pak platí $s = \sum_{\alpha \in s(x)} \alpha \cdot \chi_{\{s=\alpha\}}$. Součet na pravé straně této rovnosti nazýváme kanonickým tvarem jednoduché funkce s.

Definice 0.14 (Lebesgueův integrál)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

- Je-li $s : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty)$ jednoduchá měřitelná funkce, zapíšeme ji v kanonickém tvaru $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}$, pro $E_j := \{x \in X | s(x) = \alpha_j\}$, a definujeme
$$\int_X s d\mu = \int_X s(x) d\mu(x) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j).$$
- Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ měřitelná funkce, pak definujeme
$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X s d\mu | 0 \leq s \leq f, s \text{ jednoduchá, měřitelná} \right\}.$$
- Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$, pak definujeme
$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu,$$
má-li rozdíl smysl.

Definice 0.15 (Skoro všude)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $V(x)$ vlastnost, kterou bod x může, ale nemusí mít. Je-li $E \in \mathcal{A}$, pak výrok $V(x)$ platí μ-s. v. na E znamená:
$$\exists N \in \mathcal{A} \cap \mathcal{N}, N \subset E \ \forall x \in E \setminus N : V(x).$$

Je-li $E = X$, pak místo μ-s. v. na E píšeme pouze μ-s. v. Pokud nehrozí nedorozumění, o jakou míru se jedná, tak píšeme pouze s. v. místo μ-s. v.

Definice 0.16 (Měřitelná funkce)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že funkce f definovaná na množině $D \in \mathcal{A}$ s hodnotami v $\mathbb{R}^*$ je měřitelná na X, jestliže $\mu(D^c) = 0$ a $\forall$ otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^*$ platí $f^{-1}(G) \cap D \in \mathcal{A}$.

Pro měřitelnou funkci f pak definujeme

$$\int_X f d\mu := \int_X \tilde{f} d\mu, \qquad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \forall x \in D, \\ 0, & \forall x \in D^c. \end{cases}$$

Definice 0.17 ($\mathcal{L}^*$ a $\mathcal{L}^1$)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, pak označujeme

$$\mathcal{L}^*(\mu) := \left\{ f | (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*, f \text{ je měřitelná na } X, \exists \int_X f d\mu \right\},$$

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu) | \int_X |f| d\mu < +\infty \right\}.$$

Definice 0.18 (Dynkinův systém (d-systém))

Systém $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ se nazývá d-systém (nebo Dynkinův systém) na X, jestliže

- $\emptyset \in \mathcal{D}$;
- $D \in \mathcal{D} \implies D^c \in \mathcal{D}$;
- $D_n \in \mathcal{D}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n \cap D_m = \emptyset$ pro $n \neq m \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$.

Definice 0.19 (π-systém)

Je-li systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ uzavřen na konečné průniky (neboli $\forall S, T \in \mathcal{S} : S \cap T \in \mathcal{S}$), pak systém $\mathcal{S}$ nazveme π-systém.

Definice 0.20 (Měřitelný obdélník, součinová σ-algebra, řezy)

Je-li $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, pak množinu $A \times B \subset X \times Y$ nazveme měřitelným obdélníkem. Systém všech měřitelných obdélníků označíme symbolem $\mathcal{O}$.

Součinová σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ na prostoru $X \times Y$ je dána předpisem

$$\mathcal{A} \otimes B := \sigma\mathcal{O}.$$

Pro $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a $x \in X$, $y \in Y$ definujeme řezy E_x, E^y množiny E předpisy

$$E_x := \{y \in Y | [x, y] \in E\}, \qquad E^y := \{x \in X | [x, y] \in E\}.$$

Definice 0.21 (C^1-difeomorfismus)

Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ se nazývá difeomorfismus, je-li prosté, třídy C^1 na G a $\forall x \in G : J\varphi(x) \neq 0$.

Definice 0.22 (Absolutní spojitost měr)

Nechť μ, ν jsou míry na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že míra ν je absolutně spojitá vzhledem k míře μ (a značíme $\nu \ll \mu$), jestliže

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

Definice 0.23 ((Radonova-Nikodymova) hustota / derivace míry)

Funkce f z Radonovy-Nikodymovy věty se nazývá (Radonova-Nikodymova) hustota nebo derivace míry ν vzhledem k míře μ a vztah

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

se někdy zapisuje ve tvaru $d\nu = f d\mu$ nebo také $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Definice 0.24 ((Vzájemně) singulární míry)

Řekneme, že míry μ, ν na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$ jsou vzájemně singulární (a píšeme $\mu \perp \nu$), jestliže

$$\exists S \in \mathcal{A} : \mu(S) = 0 \wedge \nu(X \setminus S) = 0.$$

Definice 0.25 (Distribuční funkce)

Buď μ konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$. Pak funkci

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x\rangle), \qquad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme distribuční funkcí míry μ.

Definice 0.26 (Lebesgueův-Stieltjesův integrál)

Je-li F distribuční funkce konečné borelovské míry μ a $A \subset \mathcal{R}$ borelovská množina, pak

$$\int_A f dF := \int_A f d\mu, \qquad \text{(má-li pravá strana smysl).}$$

Definice 0.27 (Konvergence podle míry)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f, $f_n, n \in \mathbb{N}$, měřitelné funkce na X. Řekneme, že funkce f_n konvergují k funkci f podle míry μ (značení $f_n \xrightarrow{\mu} f$), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Část II

Tvrzení

Věta 0.1 (O průniku σ-algeber)

Nechť $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in I$, jsou σ-algebry na X (kde I je libovolná indexová množina). Pak $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ je σ-algebra na X.

Důkaz

Triviální, přenechán čtenáři. $\square$

Důsledek

Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ libovolný množinový systém, pak existuje nejmenší σ-algebra $\sigma\mathcal{S}$ obsahující systém $\mathcal{S}$.

Důkaz

$$\sigma\mathcal{S} := \bigcap \left\{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) | \mathcal{S} \subset \mathcal{A} \lambda \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra} \right\}.$$

$\square$

Věta 0.2 (Vlastnosti míry)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Pak

1. $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
2. $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$;
3. $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N} \implies \mu\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mu(A_i)$, *(subaditivita míry)*;
4. $A_1 \subset A_2 \subset \dots \implies \mu(A_i) \nearrow \mu\left(\bigcup A_i\right)$;
5. $A_1 \supset A_2 \supset \dots, \mu(A_1) < +\infty \implies \mu(A_i) \searrow \mu\left(\bigcap_i A_i\right)$.

Důkaz

Ad 1.: $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$, $A, B \in \mathcal{A} \implies$

$$\implies A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \implies$$

$$\implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \ldots = \mu(A) + \mu(B)$$

Ad 2.: $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \implies$

$$\implies B = A \cup B \setminus A \implies \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

Ad 3.: $A_i \in \mathcal{A} \forall i \in \mathbb{N}$:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \ldots \implies$$

$$\implies \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \ldots \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots$$

Ad 4.: $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $A_i \in \mathcal{A} \forall i \in \mathbb{N}$

$$\implies A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots \cup (A_k \setminus A_{k-1}) \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2,$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \ldots \implies$$

$$\implies \mu(A_k) = \mu(A_1) + \sum_{i=2}^{k} \mu(A_i \setminus A_{i-1}) \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2,$$

$$\mu\left(\bigcup_{i}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i-1}).$$

Z toho plyne $\mu(A_k) \nearrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$.

Ad 5. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $A_i \in \mathcal{A} \forall i \in \mathbb{N}$, $\mu(A_1) < +\infty$. Položíme $B_i = A_1 \setminus A_i \forall i \in \mathbb{N}$. Pak na posloupnost B_i aplikujeme 4.:

$$\mu(A_1) - \mu(A_i) \nearrow \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \implies -\mu(A_i) \nearrow \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \implies$$

$$\implies \mu(A_i) \searrow \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

□

Věta 0.3 (Zúplnění míry)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Pak platí

1. $\mathcal{A}_0 = \{R \subset X | \exists A, B \in \mathcal{A} \wedge A \subset E \subset B \wedge \mu(B \setminus A) = 0\}$.
2. *Míru μ lze jednoznačně rozšířit na $\mathcal{A}_0$ (rozšířenou míru označíme μ_0).*
3. *Prostor $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ je úplný.*

Důkaz
TODO? □

Věta 0.4 (O míře $\lambda^n_{\mathcal{B}}$)

Existuje právě jedna borelovská míra $\lambda^n_{\mathcal{B}}$ na $\mathbb{R}^n$ taková, že

$$\lambda^n_{\mathcal{B}}([a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \times \ldots \times (b_n - a_n),$$

jestliže $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $\forall i \in [n]$.

Důkaz
V TMI2. □

Věta 0.5 (O zobrazení $f : X \to Y$)

Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \to Y$ zobrazení. Pak platí:

1. *Je-li $\mathcal{M}$ σ-algebra na Y, pak $f^{-1}(\mathcal{M})$ je σ-algebra na X.*
2. *Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak $\sigma(f^{-1}(S)) = f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$.*

Důkaz
Bez důkazu? □

Důsledek
Jsou-li $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{M})$ měřitelné prostory a $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ generátor $\mathcal{M}$, pak $f : X \to Y$ je měřitelné $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$.

Důsledek
Je-li $X, \mathcal{A}$ měřitelný prostor a Y metrický prostor, pak $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ pro všechny otevřené množiny $G \subset Y$.

Důsledek
Každé spojité zobrazení f mezi metrickými prostory je borelovsky měřitelné.

Věta 0.6 (Generátory $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$)

Borelovská σ-algebra B^n je generována:

- *otevřenými intervaly $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, kde $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $i \in [n]$;*
- *systémem $\mathcal{S} := \{(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n) | a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in [n]\}$.*

Důkaz
Bez důkazu? □

Věta 0.7 (O měřitelných zobrazeních)

1. *Jsou-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ a $g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^m$ měřitelné zobrazení, pak $(f, g) : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^{n+m}$ je měřitelné zobrazení.*
2. *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ měřitelná zobrazení, pak $f \pm g$ je měřitelné zobrazení.*
3. *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, pak také funkce $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ jsou měřitelné.*

Důkaz
Bez důkazu? □

Věta 0.8 (O měřitelných funkcích)

Buď $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. Pak platí:

1. *$f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce $\Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}\ \forall a in \mathbb{R}$.*
2. *$f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná funkce $\Leftrightarrow f^{-1}(\langle -\infty, a)) \in \mathcal{A}\ \forall a in \mathbb{R}$.*

Důkaz
Bez důkazu. □

Důsledek
Nechť $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ jsou měřitelné funkce. Pak:

1. Množiny $\{x \in X | f(x) < g(x)\}$, $\{x \in X | f(x) \leq g(x)\}$, $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ jsou měřitelné.
2. $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ jsou měřitelné funkce. (Speciálně funkce $f^+ = \max\{f, 0\}$ a $f^- = \min\{f, 0\}$ jsou měřitelné.)

Věta 0.9 (O měřitelných funkcích podruhé)

Jsou-li funkce $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$, měřitelné, pak i funkce $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ a $\liminf_{n\to\infty} f_n$ měřitelné.

Speciálně bodová limita posloupnosti měřitelných funkcí je měřitelná funkce.

Důkaz
Bez důkazu? □

Věta 0.10 (O nezáporné měřitelné funkci)

Nechť $f : (X, \mathcal{A}) \to \langle 0, +\infty\rangle$ je měřitelná funkce. Pak existují jednoduché nezáporné měřitelné funkce s_n na X, $n \in \mathbb{N}$, tak, že

$$\forall x \in X : s_n(x) \nearrow f(x).$$

Je-li navíc funkce f omezená, pak $s_n \rightrightarrows f$ na X.

Důkaz
TODO!!! □

Věta 0.11 (Levi)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou nezáporné měřitelné funkce na X splňující $f_n \nearrow f$, pak $\int_X f_n d\mu \nearrow \int_X f d\mu$.

Důkaz
TODO? □

Věta 0.12 (Fatouovo lemma)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou nezáporné měřitelné funkce na X, pak

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Důkaz
Buď

$$g_n(x) := \inf\{f_k(x)|k \geq n\}, x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

Pak g_n jsou měřitelné a platí

$$g_n \nearrow g := \lim_{n\to\infty} g_n := \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

Podle Leviho věty $\int_X g_n d\mu \nearrow \int_X g d\mu$. Protože $g_n \leq f_n \forall n \in \mathbb{N}$, tak $\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu \forall n \in \mathbb{N}$. Z uvedeného limitním přechodem dostaneme

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Pravá strana je rovna

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X g d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

□

Lemma 0.13

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f, g jsou měřitelné funkce na X splňující $f = g$ skoro všude, pak $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$, má-li jedna strana rovnosti smysl.

Důkaz
Bez důkazu? □

Věta 0.14 (Linearita integrálu)

Jestliže $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, pak

$$\int_X (\lambda f) d\mu = \lambda \int_X f d\mu,$$

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_x g d\mu, \qquad \text{\textit{má-li pravá strana smysl.}}$$

Důkaz
Bez důkazu? □

Důsledek (Linearity a Leviho)
Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou nezáporné měřitelné funkce na X, pak

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Důkaz
Z předchozí věty máme

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{k} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{k} \int_X f_n d\mu \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Odtud limitním přechodem pro $k \to +\infty$ pomocí Leviho věty dostaneme dané tvrzení. $\square$

Věta 0.15 (Zobecněná Leviho věta)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, měřitelné funkce na X splňující $f_n \nearrow f$ a $\int_X f_1 d\mu > -\infty$, pak

$$\int_X f_n d\mu \nearrow \int_X f d\mu.$$

Důkaz
BÚNO $\int_X f_1 < +\infty$, jinak vztah plyne z monotonie integrálu. Buď $g_n := f_n - f_1$, $n \in \mathbb{N}$, $g := f - f_1$. Pak $g_n \geq 0$, $g_n \nearrow g$ a z Leviho věty dostaneme $\int_X g_n d\mu \nearrow \int_X g d\mu$. Odtud pak, s využitím aditivity integrálu z předpředchozí věty, plyne $\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$. $\square$

Důsledek
Totéž platí pro obrácená znamínka.

Věta 0.16 (Lebesgueova)

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a f, $f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce na X splňující $f_n \to f$ skoro všude. jestliže existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že $|f_n| \leq g$ skoro všude $\forall n \in \mathbb{N}$, pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int_X f_n d\mu \implies \int_X f d\mu$.

Důkaz
TODO!!! $\square$

Důsledek
Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce na X takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje skoro všude. Jestliže existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že $\left| \sum_{n=1}^{k} f_n \right| \leq g$ skoro všude $\forall k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$.

Důkaz
Aplikujeme předchozí větu na posloupnost částečných součtů $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. $\square$

Věta 0.17 (Další vlastnosti integrálů a měřitelných funkcí)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

- *Jestliže f je nezáporná měřitelná funkce na X a $\int_X f d\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.*
- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int_E f d\mu = 0 \ \forall E \in \mathcal{A}$, pak $f = 0$ skoro všude.*
- *Je-li f měřitelná funkce na X, pak*

$$\int_X f d\mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_X |f| d\mu \in \mathbb{R}.$$

- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$.*
- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak f je konečná skoro všude.*

Důkaz

Bez důkazu? □

Věta 0.18 (Vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Jestliže $(R) \int_a^b f$ existuje, pak $\int_a^b f d\lambda^1 \in \mathbb{R}$ a platí

$$(R) \int_a^b f = \int_a^b f d\lambda^1.$$

Důkaz

Bez důkazu? □

Věta 0.19 (Vztah Newtonova a Lebesgueova integrálu)

Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná funkce. Pak $(N) \int_a^b f$ existuje právě tehdy, když $\int_a^b f d\lambda^1 \in \mathbb{R}$.

V takovém případě navíc $(N) \int_a^b = \int_a^b f d\lambda^1$.

Důkaz

Bez důkazu? □

Věta 0.20 (O limitě integrálu závislém na parametru)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, (T, ϱ) metrický prostor, $M \subset T$, $t_0 \in M'$ a $f : X \times T \to \mathbb{R}$. Nechť platí:

- *Pro μ-skoro všechna $x \in X$ existuje*

$$\lim_{t \to t_0, t \in M} f(x,t) =: \varphi(x).$$

- *$\forall t \in M \setminus \{t_0\}$ je funkce $f(\cdot, t)$ μ-měřitelná.*
- *Existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že $|f(x,t)| \le g(x)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$ a $\forall t \in M \setminus \{t_0\}$.*

Pak $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\lim_{t \to t_0, t \in M} \int_X f(x,t) d\mu = \int_X \varphi(x) d\mu$.

Důkaz
K ověření rovnosti integrálů dle Heineho věty stačí dokázat: Je-li $t_n \in M \setminus \{t_0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $t_n \to t_0$, pak $\int_X f(x,t_n) d\mu \to \int_X \varphi(x) d\mu$:

Z první podmínky máme $f(x,t_n)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$. Dále platí (z druhé podmínky) $|f(x,t_n)| \le g(x)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$ a $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tedy rovnost integrálů (a také existence integrálu) plyne z Lebesgueovy věty, položíme-li v ní $f_n(x) := f(x,t_n) \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Věta 0.21 (O spojitosti integrálu závislém na parametru)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, (T, ϱ) metrický prostor, $M \subset T$ a $f : X \times T \to \mathbb{R}$. Nechť platí:

- *Pro μ-skoro všechna $x \in X$ je funkce $f(x, \cdot)$ spojitá na M.*
- *$\forall t \in M$ je funkce $f(\cdot, t)$ μ-měřitelná.*
- *Existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že $|f(x,t)| \le g(x)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$ a $\forall t \in M$.*

Pak funkce $F(t) := \int_X f(x,t) d\mu$, $t \in M$, je spojitá na M.

Důkaz
Dle Heineho věty stačí dokázat: Je-li $t_0 \in M \cap M'$, pak $\lim_{t \to t_0, t \in M} F(t) = F(t_0)$, tj. $\lim_{t \to t_0, t \in M} \int_X f(x,t) d\mu = \int_X f(x,t_0) d\mu$. To ale plyne z předchozí věty. $\square$

Věta 0.22 (O derivaci integrálu podle parametru)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval a $f : X \times I \to \mathbb{R}$. Nechť platí:

- *$\forall t \in I$ je funkce $f(\cdot, t)$ μ-měřitelná.*
- *$\exists N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$, tak, že $\forall x \in X \setminus N$ a $\forall t \in I$ existuje konečná derivace $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$.*

- *Integrál $F(t) := \int_X f(x,t)d\mu$ konverguje alespoň pro jednu hodnotu $t \in I$.*
- $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *tak, že* $\forall x \in X \setminus \mathbb{N}$ *a* $\forall t \in I$ *platí* $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$.

Pak $\forall t \in I$ integrál $F(t)$ konverguje a platí

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu \qquad \forall t \in I.$$

Důkaz
Je-li t, $t+h \in I$, pak $\forall x \in X \setminus N$ dle Lagrangeovy věty dle druhé a čtvrté podmínky platí

$$|f(x,t \ +h) - f(x,t)| = \left|h \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(x, t+\Theta h)\right| \leq |h| \cdot g(x),$$

kde $\Theta \in (0,1)$. Speciálně, je-li $t \in I$ a t_0 onen bod, pro který integrál $F(t)$ konverguje, pak

$$|f(x,t)| \leq |f(x,t_0)| + |t-t_0| \cdot g(x) \forall x \in X \setminus N,$$

odkud plyne, že integrál $F(t)$ konverguje $\forall t \in I$.

Dále, je-li t, $t+h \in I$, $h \neq 0$, pak

$$\frac{1}{h}(F(t+h) - F(t)) = \int_X \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h} d\mu.$$

Protože z nerovnosti výše je

$$\left|\frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t+\Theta h)\right| \leq g(x) \forall x \in X \setminus N, \forall t, t+h \in I, h \neq 0,$$

tedy

$$\lim_{h\to 0} \int_X \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h} d\mu = \int_X \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}\right) d\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) d\mu.$$

□

Věta 0.23 (O průniku d-systémů)

Nechť $\mathcal{D}_\alpha, \alpha \in I$, jsou d-systémy na X (I je libovolná indexová množina). Pak $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{D}_\alpha$ je d-systém na X.

Důkaz
Je triviální a přenechán čtenáři. □

Důsledek
Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ libovolný množinový systém, pak existuje nejmenší d-systém $d\mathcal{S}$ na X obsahující systém $\mathcal{S}$.

Důkaz

$$d\mathcal{S} := \bigcap \{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X) | \mathcal{S} \subset \mathcal{D} \wedge \mathcal{D} \text{ je d-systém}\}.$$

□

Věta 0.24 (O rovnosti $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$)

Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ π-systém, pak $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$.

Důkaz
Z následujících dvou tvrzení. Protože $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je π-systém, tak je $d\mathcal{S}$ π-systém. Protože $d\mathcal{S}$ je také d-systém, tak $d\mathcal{S}$ je σ-algebra na X, která obsahuje $\mathcal{S}$. Proto $\sigma\mathcal{S} \subset d\mathcal{S}$, neboť $\sigma\mathcal{S}$ je nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{S}$. Opačná implikace tj. $d\mathcal{S} \subset \sigma\mathcal{S}$ platí triviálně. Tedy $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$. □

Tvrzení 0.25

Je-li d-systém $\mathcal{D}$ na X π-systém, pak $\mathcal{D}$ je σ-algebra na X.

Důkaz
Je třeba ověřit, že platí $A_k \in \mathcal{D}\ \forall k \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}$. To provedeme v několika krocích:

Platí $A \setminus B \in \mathcal{D}$, je-li $A, B \in \mathcal{D}$, neboť $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ a přitom $A \cap B \subset A$, tedy $A \setminus B \in \mathcal{D}$.

Platí $A \cup B \in \mathcal{D}$, je-li $A, B \in \mathcal{D}$, neboť $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ a přitom $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$, tedy $A \cup B \in \mathcal{D}$.

Je-li $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{D}$, pak $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{D}$ (indukcí s využitím předchozího odstavce).

Nechť tedy $A_k \in \mathcal{D} \forall k \in \mathbb{N}$. Položíme-li $A_0 := \emptyset \in \mathcal{D}$, pak

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left(\bigcup_{i=0}^{k} A_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right) \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k,$$

kde $\tilde{A}_k := \left(\bigcup_{i=0}^{k} A_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i \right) \forall k \in \mathbb{N}$. Protože $\bigcup_{i=0}^{k} A_i \in \mathcal{D} \forall k \in \mathbb{N}_0$, tak $\tilde{A}_k \in \mathcal{D} \forall k \in \mathbb{N}$. Navíc $\tilde{A}_k \cap \tilde{A}_m = \emptyset$ pro $k \neq m$, $k, m \in \mathbb{N}$. Tedy $\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \in \mathcal{D}$, tj. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}$. □

Tvrzení 0.26

Je-li d-systém $\mathcal{D}$ na X π-systémem, pak $\mathcal{D}$ je σ-algebra na X.

Důkaz
TODO!!! $\square$

Věta 0.27 (O jednoznačnosti míry)

Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je π-systém a μ, ν jsou dvě míry na $\sigma\mathcal{S}$ splňující $\mu(S) = \nu(S) \forall S \in \mathcal{S}$. Jestliže existují množiny $X_n \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}$, tak, že $X_n \nearrow X$ a $\mu(X_n) < +\infty \forall n \in \mathbb{N}$, pak $\mu = \nu$ na $\sigma\mathcal{S}$.

Důkaz
TODO!!! $\square$

Věta 0.28 (O součinové σ-algebře $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$)

Je-li $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, pak

- $\forall x \in X : E_x \in \mathcal{B}$, $\forall y \in Y : E^y \in \mathcal{A}$;
- *Funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná na $(X, \mathcal{A})$, funkce $y \mapsto \mu(E^y)$ je měřitelná na (Y, B).*

Je-li funkce $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná, pak $\forall x \in X$ je funkce $f_x : y \mapsto f(x, y)$ měřitelná na (Y, B) a $\forall y \in Y$ je funkce $f^y : x \mapsto f(x, y)$ měřitelná na $(X, \mathcal{A})$.

Důkaz
TODO!!! $\square$

Věta 0.29 (Existence a jednoznačnost součinové míry)

Existuje právě jedna míra $\mu \otimes \nu$ na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (tzv. součinová míra) splňující

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \qquad \forall A \in \mathcal{A}\ \forall B \in \mathcal{B}.$$

Pro tuto míru platí

$$E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies (\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x).$$

Důkaz
TODO!!! $\square$

Věta 0.30 (Fubini)

Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$ *platí*

- *Funkce* $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ *je měřitelná na* X*;*
- *Funkce* $y \mapsto \int_X f(x,y)d\nu(x)$ *je měřitelná na* Y*;*
- $\int_{X\otimes Y} f(x,y)d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y).$

Důkaz
TODO!!! □

Věta 0.31 (Fubiniova věta pro zúplněnou součinovou míru)

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *a* (Y, B, ν) *jsou prostory s úplnými* σ*-konečnými mírami. Je-li* $f \in \mathcal{L}^*(\mu \overset{0}{\times} \nu)$*, pak*

- *Funkce* $f_y : x \mapsto f(x,y)$ *je měřitelná na* X *pro* ν*-skoro všechna* $y \in Y$ *a funkce* $f_x : y \mapsto f(x,y)$ *je měřitelná na* Y *pro* μ*-skoro všechna* $y \in Y$*;*
- *Funkce* $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ *je měřitelná na* X *a funkce* $y \mapsto \int_X f(x,y)d\nu(x)$ *je měřitelná na* Y*;*
- $\int_{X\otimes Y} f(x,y)d(\mu \overset{0}{\otimes} \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y).$

Důkaz
Důkaz se nestíhal, pouze bylo zmíněno, že se použije předchozí věta a následující 2 Lemmata. □

Lemma 0.32

Nechť $(Z, \mathcal{C}, \varrho)$ *je prostor s mírou a* $(Z, \mathcal{C}_0, \varrho_0)$ *jeho zúplnění. Je-li funkce* $f : (Z, \mathcal{C}_0) \to \mathbb{R}^*$ ϱ_0 *měřitelná, pak existuje* ϱ*-měřitelná funkce* $g : (Z, \mathcal{C}) \to \mathbb{R}^*$ *tak, že* $f = g$ ϱ*-skoro všude na* X*.*

Důkaz
Bez důkazu. □

Lemma 0.33

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *a* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *jsou prostory s úplnými* σ*-konečnými mírami. Nechť* h *je* $\mu \overset{0}{\otimes} \nu$*-měřitelná funkce na* $X \times U$ *a* $h = 0$ $\mu \overset{0}{\otimes} \nu$*-skoro všude na* $X \times Y$*. Potom pro* μ*-skoro všechna* $x \in X$ *platí* $h(x,y) = 0$ *pro* ν*-skoro všechna* $y \in Y$*. Speciálně, funkce* h_x *je měřitelná na* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *pro* μ*-skoro všechna* $x \in X$*. (Obdobně pro* h^y*).*

Důkaz
Bez důkazu. □

Věta 0.34 (O míře $\lambda^p \otimes \lambda^q$)

Je-li $p, q \in \mathbb{N}$, pak:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q), \qquad (\textit{tj. } \lambda_{\mathcal{B}}^{p+q} = \lambda_{\mathcal{B}}^p \otimes \lambda_{\mathcal{B}}^q)$$

$$\lambda^{p+q} = \lambda^p \overset{0}{\otimes} \lambda^q.$$

Důkaz
Bez důkazu. □

Věta 0.35 (Fubiniova věta v $\mathbb{R}^{p+q}$)

Je-li $s, q \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^{p+q})$, pak

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f d\lambda^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) d\lambda^q(y) \right) d\lambda^p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) d\lambda^p(x) \right) d\lambda^q(y).$$

Důkaz
Bez důkazu, ale lehký důsledek předchozí věty a Fubiniovy věty. □

Definice 0.28 (Značení)

Je-li $p, q \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, pak definujeme projekce předpisem

$$\pi_1(x,y) := x, \qquad \pi_2(x,y) := y.$$

Důsledek
Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{B}_0^{p+q} := (\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q}))_0$. Jestliže $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^{p+q})$ a množiny $\pi_1 A, \pi_2 A$ jsou měřitelná, pak

$$\int_A f d\lambda^{p+q} = \int_{\pi_1 A} \left(\int_{A_x} f(x,y) d\lambda^q(y) \right) d\lambda^p(x) = \int_{\pi_2 A} \left(\int_{A^y} f(x,y) d\lambda^p(x) \right) d\lambda^q(y).$$

Lemma 0.36

Lebesgueova míra λ^n je translačně invariantní, tzn.

$$\lambda^n(B + r) = \lambda^n(B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}_0^n \ \forall r \in \mathbb{R}^n.$$

Důkaz
Dané tvrzení plyne z věty o jednoznačnosti míry, neboť míry λ^n a $\mu(B) := \lambda^n(B+z)\ \forall B \in \mathcal{B}_0^n$ a pro libovolné pevné $r \in \mathbb{R}^n$ se shodují na systému $\mathcal{B}_0^n$. □

Věta 0.37 (O obrazu míry)

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $(Y, \mathcal{B})$ je měřitelný prostor. Je-li $\varphi : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ měřitelné zobrazení, pak množinová funkce daná předpisem

$$(\varphi(\mu))(B) := \mu\left(\varphi^{-1}(B)\right) \qquad \forall B \in \mathcal{B}$$

je míra na $(Y, \mathcal{B})$ (tzn. obraz míry μ při zobrazení φ) a pro každou měřitelnou funkci f na Y platí

$$\int_Y f d\varphi(\mu) = \int_X (f \circ \varphi) d\mu,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Důkaz
TODO!!! □

Věta 0.38

Buď $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertibilní lineární zobrazení

- *Je-li $\nu(A) := \lambda^n(L(A))\ \forall A \in \mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, pak ν je mír a platí $\nu = |\det L| \cdot \lambda^n$.*
- *Je-li $\mu(A) := |\det L| \lambda^n_{\mathcal{B}}(A)\ \forall A \in \mathcal{B}^n$, pak $L(\mu) = \lambda^n_{\mathcal{B}}$ a pro $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^n_{\mathcal{B}})$ platí*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L) |\det L| d\lambda^n.$$

Důkaz
TODO!!! □

Lemma 0.39

Buď $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzovské zobrazení. Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ lebesgueovsky měřitelná množina, pak také $T(A)$ je lebesgueovsky měřitelná množina.

Důkaz
Vynechán. □

Věta 0.40

Je-li $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertibilní lineární zobrazení, pak

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L) |\det L| d\lambda^n,$$

má-li jedna strana smysl.

Důkaz

Bez důkazu, ale jednoduše vyplývá z předchozího lemmatu a věty. □

Věta 0.41 (O substituci)

Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus. Jestliže $f : \varphi(G) \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce, pak

$$\int_G f(\varphi(x)) |J\varphi(x)| dx = \int_{\varphi(G)} f(y) dy,$$

má-li jedna strana rovnosti smysl.

Důkaz

Bude v TMI2. □

Důsledek

Je-li navíc $M \subset \varphi(G)$ lebesgueovsky měřitelná množina, pak

$$\int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(x)) |J\varphi(x)| dx = \int_M f(y) dy.$$

Lemma 0.42

$$\lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) = 0.$$

Důkaz

Množina $\mathbb{R}^{n-1}$ je λ^n-měřitelná, neboť je uzavřená v $\mathbb{R}^n$. Dále platí $\mathbb{R}^{n-1} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,\varepsilon}$, kde $\varepsilon > 0$ a

$$I_{k,\varepsilon} := (-k, k)^{n-1} \times \left(\frac{-\varepsilon}{(2k)^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^k}, \frac{\varepsilon}{(2k)^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^k} \right) \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$\lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(I_{k,\varepsilon}) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{n-1} \cdot \frac{2\varepsilon}{(2k)^{n-1}} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} = 2\varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, tak $\lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) = 0$. □

TODO!!! (Důkazy)

Lemma 0.43 (O míře s hustotou f)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f nezáporná měřitelná funkce na X. Definujeme-li

$$\nu(A) := \int_A f d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A},$$

pak ν je míra na $\mathcal{A}$ a pro měřitelnou funkci $g : (X, \mathcal{A}) \to \langle 0, +\infty \rangle$ platí

$$\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu.$$

Důkaz

TODO!!! □

Věta 0.44 (Charakterizace faktu $\nu \ll \mu$ pro konečné míry)

Nechť μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$. Pak $\nu \ll \mu$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta \implies \nu(A) < \varepsilon.$$

Důkaz

TODO!!! □

Věta 0.45 (Radonova-Nikodymova)

Jsou-li μ, ν σ-konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ splňující $\mu \ll \nu$, pak existuje nezáporná měřitelná funkce f na X tak, že

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Důkaz

TODO!!! □

Lemma 0.46 (Radonova-Nikodymova věta – baby verze)

Jestliže μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu(A) \leq \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$, pak existuje měřitelná funkce f na X splňující $0 \leq f \leq 1$ μ-skoro všude a

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Důkaz

TODO!!! □

Věta 0.47 (Lebesgueův rozklad míry)

Buď μ míra na (X, d) a ν σ-konečná míra na $(X, \mathcal{A})$. Pak existuje rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$ na σ-konečné míry ν_a a ν_s takový, že $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$, přičemž míry ν_a a ν_s jsou určeny jednoznačně.

Důkaz
TODO!!! □

Lemma 0.48 (O distribuční funkci)

Distribuční funkce F_μ splňuje:

- *F_μ je neklesající;*
- *$F_\mu(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0$, $F_\mu(+\infty) := \lim_{x\to+\infty} F_\mu < \infty$;*
- *F_μ je zprava spojitá.*

Důkaz
TODO!!! □

Věta 0.49 (O Lebesgueově-Stieltjesově míře)

Je-li $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce splňující

- *F je neklesající;*
- *$F_\mu(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0$, $F_\mu(+\infty) := \lim_{x\to+\infty} F_\mu < \infty$;*
- *F_μ je zprava spojitá.*

pak existuje právě jedna konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$ (tzn. Lebesgueova-Stieltjesova míra příslušná funkci F) taková, že $F_\mu = F$.

Důkaz
Bude v TMI2. □

Věta 0.50 (Per partes pro L-S integrál)

Jestliže F, G jsou distribuční funkce a $-\infty < a < b < +\infty$, pak

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_{\langle a,b\rangle} F(x)dG(x) + \int_{\langle a,b\rangle} G(x)dF(x).$$

Důkaz
TODO!!! □

Lemma 0.51 (O $\mu \ll \lambda^1$)

Nechť μ je konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$. Jestliže $F_\mu \in C^1(\mathbb{R})$, pak $\mu \ll \lambda^1$ a $\frac{d\mu}{d\lambda^1} = F'_\mu$. (Tj. platí $\mu(A) = \int_A F'_\mu d\lambda^1 \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.)

Důkaz
Nechť $\mathcal{S}$ je systém, který se skládá z $\emptyset$ a všech intervalů $(a, b\rangle$, kde $-\infty < a < b < +\infty$. Pak $\mathcal{S}$ je π-systém. Buď ν míra daná předpisem

$$\nu(A) := \int_A F'_\mu d\lambda^1 \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Pak $\mu = \nu$ na $\mathcal{S}$, neboť

$$\mu(\emptyset) = 0 = \nu(\emptyset),$$

$$\mu((a,b\rangle) = F_\mu(b) - F_\mu(a) = \int_a^b F'_\mu(x)dx = \int_{(a,b\rangle} F'_\mu d\lambda^1 = \nu((a,b\rangle),$$

je-li $-\infty < a < b < +\infty$.

Dále platí $X_n := (-n, n\rangle \in \mathcal{S}$, $X_n \nearrow X := \mathbb{R}$, $\mu(X_n) < +\infty \forall n \in \mathbb{N}$. Proto, dle věty o jednoznačnosti míry platí $\mu = \nu$ na $\sigma\mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tedy

$$\mu(A) = \nu(A) = \int_A F'_\mu d\lambda^1 \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

tj. $\frac{d\mu}{d\lambda^1} = F'_\mu$. □

Lemma 0.52 (Čebyševova nerovnost)

Je-li $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p(\mu)$ a $c \in (0, +\infty)$, pak

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq c\}) \leq \left(\frac{||f||_p}{c}\right)^p.$$

Důkaz

$$\mu(\overbrace{\{x \in X \mid |f()x| \geq c\}}^{M:=}) = \int_M 1 d\mu \leq \int_M \left(\frac{|f|}{c}\right)^p d\mu \leq \int_X \left(\frac{|f|}{c}\right)^p d\mu = \left(\frac{||f||_p}{c}\right)^p.$$

□

Věta 0.53 (Vztah mezi konvergencí v $L^p(\mu)$ a konvergencí podle míry)

Je-li $1 \leq p \leq +\infty$ *a* $f, f_n \in L^p(\mu)$ *(*$\forall n \in \mathbb{N}$*), pak*

$$f_n \overset{L^p(\mu)}{\to} f \implies f_n \overset{\mu}{\to} f.$$

Důkaz

Je-li $p \in \langle 1, +\infty)$, pak implikace plyne z Čebyševovy nerovnosti. Jinak předpokládejme $f_n \overset{L^p(\mu)}{\to} f$ a $\varepsilon > 0$, pak

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : ||f_n - f||_\infty < \varepsilon,$$

a tedy $\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$. Proto $f_n \overset{\mu}{\to} f$. □

Věta 0.54 (1. vztah mezi konvergencí podle míry a konvergencí skoro všude)

Jestliže $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je prostor s mírou a* $f_n \overset{\mu}{\to} f$*, pak existuje vybraná podposloupnost* $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tak, že* $f_{n_k} \to f$ μ*-skoro všude.*

Důkaz

TODO!!! □

Důsledek

Je-li $1 \leq p \leq +\infty$ a $f_n \overset{L^p(\mu)}{\to} f$, pak

$$\exists \{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : f_{n_k} \to f \mu\text{-skoro všude.}$$

Důkaz

Přímý důsledek předchozích dvou vět. □

Věta 0.55 (2. vztah mezi konvergencí podle míry a konvergencí skoro všude)

Jestliže $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je prostor s konečnou mírou a* $f_n \to f$ μ*-skoro všude, pak* $f_n \overset{\mu}{\to} f$*.*

Důkaz

TODO!!! □

Věta 0.56 (Jegorov)

Jestliže $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je prostor s konečnou mírou,* $\varepsilon > 0$ *a* f*,* $f_n, n \in \mathbb{N}$*, jsou měřitelné funkce splňující* $f_n \to f$ μ*-skoro všude, pak*

$$\exists B \in \mathcal{A}, \mu(B^c) < \varepsilon : f_n \rightrightarrows f \text{ na } B.$$

Důkaz
TODO!!! $\square$