Příklad (4.1 – Střední hodnota versus pravděpodobnost)
Bob navrhne Alici následující hru: „Tady mám minci, která není spravedlivá – pravděpodobnost, že na ní padne hlava je $p \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Tvůj počáteční vklad je 100 Kč a pokaždé, když na minci padne hlava, tvůj kapitál zdvojnásobím. Pokud padne orel, tak mi naopak dáš polovinu svého kapitálu. Označme X_n hodnotu tvého kapitálu po n-tém hodu mincí. Je zřejmé, že $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \infty$, takže očekávaná hodnota tvého kapitálu poroste nade všechny meze."

Je pro Alici výhodné takovou hru hrát? Ověřte Bobovo tvrzení a ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$ skoro jistě.

Řešení
Označme si Y_n jako indikátor, že v n-tém hodu padla hlava. Potom můžeme vyjádřit $X_{n+1} = \frac{X_n}{2} + Y_{n+1} \cdot X_n \cdot \frac{3}{2}$. Střední hodnotu X_n pak spočítáme z linearity střední hodnoty:

$$\mathbb{E}X_n = \frac{\mathbb{E}X_{n-1}}{2} + \frac{3}{2} \cdot \mathbb{E}(Y_n \cdot X_{n-1}) = \frac{\mathbb{E}X_{n-1}}{2} + \frac{3}{2} \cdot \mathbb{E}Y_n \cdot \mathbb{E}X_{n-1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}p\right) \mathbb{E}X_{n-1}$$

Neboť Y_n a X_{n-1} jsou zřejmě nezávislé. To, co nám vyšlo, je ale geometrická posloupnost s koeficientem $q = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}p > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, tedy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = 100 \cdot q^n = \infty$. Tím jsme dokázali, že Bob říká pravdu.

Jelikož X_n jsou nezáporná, tak $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ je ekvivalentní $\limsup_{n\to\infty} X_n = 0$ („$0 \le \liminf \le \limsup$", tedy „$\liminf = \limsup$", tj. „$\limsup = \lim$"). Ze spojitosti pravděpodobnosti je „$\limsup_{n\to\infty} X_n = 0$ skoro jistě" totéž co

$$\forall \varepsilon > 0 : P(\limsup_{n\to\infty} X_n \le \varepsilon) = 1.$$

A protože $X_n \ge 0$, tak můžeme místo X_n psát $|X_n|$. Navíc se můžeme podívat na jevy $\{|X_n| > \varepsilon\}$. Jejich doplněk je $\{|X_n| \le \varepsilon\}$ a průnik toho od k do ∞ je $\left\{\sup_{n\ge k} |X_n| \le \varepsilon\right\}$. Sjednocení přes n je pak $\{\limsup_{n\to\infty} |X_n| \le \varepsilon\}$, tedy

$$P(\limsup_{n\to\infty} X_n \le \varepsilon) = P(\liminf_{n\to\infty} \{|X_n| > \varepsilon\}^C).$$

Z důsledku Cantelliho věty nám tedy stačí dokázat $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < \infty$, pak už bude výraz výše opravdu roven 1.

$P(|X_n| > \varepsilon)$ můžeme podle Markovovy nerovnosti odhadnout jako $P(|X_n| > \varepsilon) \le \frac{\mathbb{E}|X_n|}{\varepsilon} = \frac{\mathbb{E}X_n}{\varepsilon}$. A to s použitím výše spočítaného $\mathbb{E}X_n = 100 \cdot q^n$ sečíst na:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cdot q^n}{\varepsilon} = \frac{100}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{1-q} < \infty.$$

Příklad (4.2 – Konvergence v distribuci pro diskrétní náhodné veličiny)
Buďte X_n, $n \in \mathbb{N}$, a X náhodné veličiny na stejném pravděpodobnostním prostoru, které nabývají skoro jistě hodnot ze $\mathbb{Z}$. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $X_n \xrightarrow{D} X$;
2. $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k), \forall k \in \mathbb{Z}$,
3. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |P(X_n = k) - P(X = k)| = 0$.

Důkaz („1. $\implies$ 2.“)
Jelikož X_n a X nabývají skoro jistě celých čísel, mění distribuční funkce těchto veličin hodnotu pouze v celých číslech a mezi nimi je konstantní, tedy také spojitá. Navíc je distribuční funkce zprava spojitá, tedy na celých číslech je rovna svým hodnotám na jejich pravém okolí. Tedy $\sum_{k=-\infty}^{z} P(X_n = z) = F_n(z) = F_n(y) \forall y \in [z, z+1), z \in \mathbb{Z}$ a obdobně pro F, kde F_n je distribuční funkce X_n a F distribuční funkce X.

Tedy z konvergence v distribuci víme, že $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (jelikož tam jsou F_n a F spojité). A protože víme $P(X_n = k) = F_n(k+0.5) - F_n(k-0.5)$ a totéž pro $P(X = k)$, tak $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$. □

Důkaz („2. $\implies$ 3.“)
Využijeme toho, že $\sum_{i=0}^{\infty} P(X = i+1) + P(X = i) = 1$. To totiž znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ můžeme vybrat I tak, že $\sum_{i=0}^{I} P(X = i+1) + P(X = i) > 1 - \varepsilon$. Dále z 2. můžeme pro každé $j \in [-I, I+1]$ vybrat n_0 tak, že $\forall n > n_0 : |P(X_n = j) - P(X = j)| < \frac{\varepsilon}{2I+2}$.
Potom

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0)\ \forall n > n_0 : \sum_{k\in\mathbb{Z}} |P(X_n = k) - P(X = k)| =$$

$$= \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}\cap((-\infty,-I)\cup(I+1,+\infty))} |P(X_n = k) - P(X = k)|}_{A} + \underbrace{\sum_{k=-I}^{I+1} |P(X_n = k) - P(X = k)|}_{B},$$

kde v B máme každý z $2I+2$ členů odhadnutý shora $\frac{\varepsilon}{2I+2}$, tedy $A < (2I+2) \cdot \frac{\varepsilon}{2I+2} = \varepsilon$. B můžeme nejprve díky trojúhelníkové nerovnosti rozdělit na

$$\sum_{k\in\ldots} |P(X = k)| = 1 - \sum_{i=0}^{I} P(X = i+1) + P(X = i) < 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon$$

a $\sum_{k\in\ldots} |P(X_n = k)| = 1 - \sum_{i=-I}^{I+1} P(X_n = i) \leq 1 - \sum_{k=-I}^{I+1} P(X_n = k) - P(X = k) + P(X = k) \leq$

$$1 + \sum_{k=-I}^{I+1} |-P(X_n = k) + P(X = k)| - \sum_{k=-I}^{I+1} |P(X = k)| < 1 + \varepsilon - (1 - \varepsilon) = 2\varepsilon.$$

Tedy $A + B < 3\varepsilon$ a tak dostáváme výše definici limity z 3. □

Důkaz („3. $\implies$ 1.“)
V prvním důkazu jsme si řekli, že $F_n(y) = \sum_{i=-\infty}^{\lfloor y \rfloor} P(X_n = i)$ a obdobně pro F. A jelikož víme, že $\sum_{i=-\infty}^{\lfloor y \rfloor} P(X_n = i)$ konvergují k $\sum_{i=-\infty}^{\lfloor y \rfloor} P(X = i)$, neboť

$$\sum_{i=-\infty}^{\lfloor y \rfloor} |P(X_n = i) - P(X = i)| \leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |P(X_n = i) - P(X = i)|$$

ze 3., tak i $F_n(y)$ konvergují k $F(y)$, tedy X_n konvergují v distribuci k X. $\square$