# Organizační úvod

*Poznámka* (Zápočet)
Za vypracování domácích úloh.

*Poznámka* (Zkouška)
Písemná, ale Covid?

# Úvod

MA je na rovném prostoru $\mathbb{R}^n$ Naším cílem je vybudovat analýzu na nerovném? prostoru, tzv. varietě.

*Poznámka* (literatura)
Skripta – Krump, Souček, Těšínský: MA ve varietách
Sborník příkladů – Kopáček: Příklady z matematiky pro fyziky III.

# 1 Opakování

'Odvozovali' (přes limity velikosti rozdělení jdoucí k nule) jsme si:

Křivkový integrál 1. druhu, křivkový integrál 2. druhu. Integrální věty (pol. 19. stol, moderní formulace Cardan (1945)): Věta o potenciálu, Greenova věta

Plošný integrál 1. druhu, plošný integrál 2. druhu. Integrální věty: Stokesova věta, Gauss-Ostrogradského věta

# 2 Stokesova věta v $\mathbb{R}^n$, diferenciální formy v $\mathbb{R}^n$

**Věta 2.1** (Moderní (= obecná) formulace Stokesovy věty = Cíl (Cartan 1945))

---

$$\int_S d\omega = \int_{\delta S} \omega$$

*Kde $S$ je buď 'singulární' ⅂-plocha v $R^n$ (tato část) nebo ⅂-varieta s okrajem (3. část).*

## 2.1 Vnější algebra vektorového prostoru

Motivace: Jak násobit vektory z $\mathbb{R}^n$?

*Poznámka*
Násobení na $\mathbb{R}^n$ zachovává Eklidovskou normu (tzn. $||x \cdot y = ||x|| \cdot ||y||$) pouze v dimenzích 1, 2, 4, 8 (= $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, kvaterniony, oktocosi).

**Definice 2.1** (Algebra)

Algebra nad tělesem k (= $\mathbb{R}$) je vektorový prostor $\mathbb{A}$ nad k s bilineárním zobrazením ....

Algebra je asociativní, jestliže co asi.

Algebra má jednotku, jestliže existuje co asi ;)

**Definice 2.2**

Nechť $\Lambda$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$

*Poznámka* (Vlastnosti vnější algebry)
$\dim \Lambda * (\mathbb{V}) = 2^n$, protože každý vektor je určen bázovými vektory, kterých je jako podmnožin $n$ prvkové množiny

TODO

$$e_I \wedge e_J = 0, \text{je-li} I \cap J \neq \emptyset \qquad = sgn(\text{permutace}) e_{I \cup J}, \text{je-li} I \cap J = \emptyset$$

Je-li $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ a $\tau \in \Lambda^l(\mathbb{V})$, potom $\omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega \in \Lambda k + l(\mathbb{V})$.

*Důkaz*
(Dokázat, že prohození je právě $k \cdot l$, následně z linearity násobení) □

**Věta 2.2**

*Nechť $\mathbb{V}$je vektorový prostor s bází $e_1, \dots e_n$. Nechť $v_1, v_2, \dots v_k \in \mathbb{V}$, kde $1 \leq k \leq n$. Potom $v_i = \sum_{j=1}^n v_i^j e_j$ a označme $\mathbb{W} = \left(v_i^j\right)_{j=1,\dots,n; i=1,\dots,k}$ je matice $n \times k$ jejich souřadnice (sloupec i je vektor i). Je-li $J$ k-prvková podmnožina $\{1, \dots, n\}$, označ $W_j := (v_i^j)_{j \in I; i=1,\dots,k}$ (minor $k \times k$). Potom $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots k = \sum_{|J|=k} (\det(W_j)) e_J$.*

*Důkaz*
Posčítáním. A dokázáním, že to je definice determinantu. □

**Definice 2.3** (Skalární součin na $\Lambda * (\mathbb{V})$)

Nechť $\mathbb{V}$je vektorový prostor se skalárním součinem (?, symetrický) $< \cdot, \cdot >$ a $e_1, \ldots, e_n$ je ortonormální báze $\mathbb{V}$.

Definujeme skalární součin ve $\Lambda * (\mathbb{V})$ jako:

$$\{\ldots\}$$

TODO!

*Úmluva*
$\mathbb{R}^n$ chápeme jako Euklidovský prostor se standardní bází $e_1, \ldots e_n$ a TODO!

*Například*
Nechť $R$ je rovnoběžnostěn v $\mathbb{R}^n$ určený vektory $v_1, \ldots, v_k$, kde $1 \leq k \leq n$. Potom $k$-dimenzionální objem $R$ je roven:

$$\mathrm{vol}_k(R) = ||v_1 \wedge \ldots \wedge v_k||,$$

kde $||x||$ je euklidovská norma.

*Důkaz*
TODO! □

TODO TODO!

**Definice 2.4** (Vektorový součin v $\mathbb{R}^n$)

Nechť $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Potom jejich vektorový součin $v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ je definován jako $*(v_1 \times \cdots \times v_{n-1}) = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$

*Poznámka*
Ve skriptech označeno $[v_1, \ldots, v_{n-1}]$.

*Poznámka* (Platí)

$$v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = (-1)^{n-1} * (v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1})(zCv.2TODO)$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^n : \langle \omega, v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \rangle = \det(\omega | v_1 | cdots | v_{n-1})$$

## 2.2 Rozložitelné $k$-vektory

Nechť $\mathbb{V}$je vektorový prostor. Nechť $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{V})$. Položme

$$\ker \omega := \{v \in \mathbb{V} | \omega \wedge v = 0\}.$$

Platí 1. $\ker \omega$ je podprostor

**Definice 2.5** (Rozložitelné $k$-vektory)

$\omega \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ je rozložitelný, pokud existují $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{V}$ takové, že $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$.

Platí 2. $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0 \Leftrightarrow$ vektory $v_1, \ldots, v_k$ jsou lineárně nezávislé.

Platí 3. Nechť $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0$. Potom

$$\ker \omega = \mathrm{LO}(v_1, \ldots, v_k)$$

**Definice 2.6**

$$R_k(\mathbb{V}) := \left\{\omega \in \Lambda^k(\mathbb{V}) | \omega \neq 0 \text{rozložitelný}\right\}$$

$$G_k(\mathbb{V}) := \{L | L k\text{- dimenzionální podprostor } \mathbb{V}\} \text{ (tzv. Grassmannian)}$$

Platí 4. Zobrazení $\varphi : R_k(\mathbb{V}) \to G_k(\mathbb{V})$: $\omega \to \ker \omega$ je na, ale není prosté. Skutečně máme

$$\ker \omega = \ker \omega' \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}? : \omega' = \alpha\omega.$$

*Například* (Nerozložitelné $k$-vektory)
Platí 5. Pro $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ jsou všechny 1-vektory, $n$-vektory i $(n-1)$-vektory rozložitelné.

*Příklad*
Rozložte $e_{123} + e_{124} + e_{234} \in \Lambda^3(\mathbb{R}^4)$, kde $e_{123} = e_{\{1,2,3\}}$.

Musíme tedy hledat v $\mathbb{R}^4$ a „výše“.

*Příklad*
Najděte nerozložitelný 2-vektor $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$

*Poznámka* (Projektivní prostor)
Mezi nejdůležitější Grassmanniany patří projektivní prostor:

Nechť $\mathbb{V}$je vektorový prostor. Polož $P(V) := \{$1-dimenzionální podprostor $\mathbb{V}\}$.

Tvrdíme $P(\mathbb{V}) = G_1(\mathbb{V})$.

TODO?

**Věta 2.3** (Plückerovo vnoření)

$$G_k(\mathbb{V}) \to ?P(\mathbb{R}^{(nnadk)})$$

, *je-li* $\dim \mathbb{V} = n$

# 3 Variety, Stokesova věta na varietách