1 plochy

Definice 1.1 (Regulární plocha)

Nechť $k < n$ jsou přirozená čísla. Nechť je φ spojitě diferencovatelné zobrazení otevřené podmnožiny $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^n$. Řekněme, že φ je regulární, pokud je to homeomorfismus $\mathcal{O}$ na $M = \varphi(\mathcal{O})$ a pokud má Jacobiho matice $J\varphi$ hodnost rovnou k ve všech bodech $\mathcal{O}$. Množinu $\varphi(\mathcal{O})$ pak nazveme lokální k-plochou.

Řekněme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je k-plocha pokud pro každý bod $x \in M$ existuje okolí U_x v $\mathbb{R}^n$ takové, že $M \cap U$ je lokální k-plocha.

Podobný začátek jako Analýza na varietách (AnVar).

Definice 1.2 (Difeomorfismus)

Standardně.

Věta 1.1 (Věta o lokálním difeomorfismu)

Pokud je Jakobián nenulový, pak existuje difeomorfní okolí.

Definice 1.3 (Hladký bod hranice)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Označme symbolem $\mathbb{H}^n$ otevřený podprostor. Řekněme, že bod $a \in H(\Omega) = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ je hladký bod hranice, pokud existuje okolí U bodu a a difeomorfismus Φ na? U takový, že

$$\Phi(\Omega \cap U) = \Phi(U) \cap \mathbb{H}^n.$$

(Narovnání hranice pomocí difeomorfismu.)

Množinu všech hladkých bodů hranice značíme $H^*(\Omega)$.

Definice 1.4 (Vnější algebra vektorového prostoru)

Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad reálnými čísly a $\{e_1, \dots, e_n\}$ je jeho pevně zvolená báze. Vnější algebra $\Lambda^*(\mathbf{V})$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je definována jako algebra nad tělesem reálných čísel, jejíž báze je množina

$$\{e_I | I \subseteq \{1, \dots n\}\}.$$

A prvky báze splňují

$$e_I \wedge e_J := \begin{cases} 0 & I \cap J \neq \emptyset \\ \operatorname{sgn} \binom{I,J}{I \cup J} e_{I \cup J} & \end{cases}.$$

Vzhledem k bilinearitě násobení v algebře je tímto výrazem násobení vektorů již plně definováno.

Poznámka
$e_\emptyset$ je podle definice jednotka.

$\Lambda^k(\mathbf{V})$, což je lineární obal bází $\Lambda^*(\mathbf{V})$ velikosti k, se nazývá k-tá vnější algebra a její prvky jsou k-vektory.

Věta 1.2

Pro vektorový prostor $\mathbf{V}$ s bází $e_1, \dots, e_n$ a pro libovolná $k, l \in \{1, \dots, n\}$.

1. $\dim \Lambda^k(\mathbf{V}) = \binom{n}{k}, \dim \Lambda^*(\mathbf{V}) = 2^n$.
2. $\wedge$ *je asociativní.*
3. $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, |I| = k$.
4. *Je-li* $\omega \in \Lambda^k(\mathbf{V}), \tau \in \Lambda^l(\mathbf{V})$, *pak* $\omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega$.
5. *Nechť* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$ *jsou vektory. Potom (matice* V_I *má za sloupce vektory* $\mathbf{v}_i$ *a řádky jsou vybrány pouze ty s indexem* I*)*

$$\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k = \sum_{I \subseteq [n], |I| = k} \det \mathbf{V}_I \cdot e_I.$$

Důkaz
Jednoduchý. (Ve skriptech anvar…). □

Poznámka (Označení)
Nechť $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je diferencovatelné (spojité), pak diferenciál dF je nejlepší lineární přiblížení, tedy $dF : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineární, $||F(x + a) - F(a) - dF_x(a)|| \to 0$.

Věta 1.3 (Diferenciál složeného zobrazení)

Pokud $F : U \to \mathbb{R}^n$, $F : V \to \mathbb{R}^k$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *otevřená,* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *otevřená. Potom*

$$d(F \circ G) = dF_{G(x)} \circ dF_x.$$

Definice 1.5

Je-li $S \subset \mathbb{R}^3$ plocha, $\forall x \in S : T_xS \subseteq \mathbb{R}^3$. Definujeme bilineární formu I_x na T_xS předpisem

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_xS I_x(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

I_x je positivně definitní forma, kterou nazveme první fundamentální forma S.

Vzor I_x, $x = p(\mathbf{u})$, $u \in O$ při zobrazení $d_{|u} : \mathbb{R}^2 \to T_xS$ budeme značit g_u. Je to bilineárně symetrická forma

$$a, b \in \mathbb{R}^2 : g_n(a,b) := I_x(d\shortmid_u(a), d\shortmid_u(b)).$$

Tato forma odpovídá gramově matici (značme ji g_u) $(\shortmid_{u_1}, \shortmid_{u_2})$.

Důsledek (Délka křivky)
$c : I \subseteq \mathbb{R} \to S$, I interval. Potom délka křivky c na ploše je

$$L(c) = \int_I \sqrt{I_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt.$$

Lemma 1.4

$$L(c) = \int_I g_u(d'(t), d'(t)).$$

Lemma 1.5

Je-li $\mathbb{P} : o \to S$ mapa, $W \subseteq \shortmid(o)$ borelovská podmnožina, potom

$$S(W) = \int_{\shortmid^{-1}(W)} \sqrt{\det g_u} du = \int_{\shortmid^{-1}(W)} 1 \cdot dS.$$

1.1 Hladké (diferencovatelné) zobrazení, tečné zobrazení

Definice 1.6

Jsou-li S a S' dvě plochy v $\mathbb{R}^3$ a $\Phi : S \to S'$, řekneme, že Φ je diferencovatelné, jestliže $\Phi \circ \shortmid$ je diferencovatelné $\forall$ mapu $\shortmid$ na S.

Pak definujeme diferenciál Φ v bodě $x \in S$ jako $d\Phi_x := d(\Phi \circ \shortmid)_u \circ (d\shortmid_u)^{-1} : T_xS \to \mathbb{R}^3$.

Definice 1.7

Pokud $\varphi : S \to S'$ je diferencovatelné, pak definujeme $T_S\varphi : T_SS \to T_{\varphi(S)S'}$ tečné zobrazení předpisem $c : (-k, k) \to S$, $c(0) = S$, $c'(0) = \nu$, $\nu \in T_SS$, pak $T_S\varphi(\nu) = \frac{d}{dt}|_0(\varphi \circ c) = w \in T_{\varphi(S)}S'$.

Lemma 1.6

1) $T_S\Phi$ je dobře definované. 2) $T_S\Phi$ je lineární. 3) Pokud $s \in S$ patří do $\shortmid(u)$, $s \in \shortmid(o)$, $\shortmid$ mapa, $\Phi(s) \in S'$ patří do $\shortmid'(o')$, pak matice tečného zobrazení $T_s\Phi$ vzhledem k bázím určeným mapami $\shortmid$ a $\shortmid'$ je Jacobiho matice zobrazení Φ.

Lemma 1.7

Pokud $S \overset{\varphi}{\to} S' \overset{\psi}{\to} S''$, φ, ψ diferencovatelné, pak $\psi \circ \varphi$ je diferencovatelné a $T_S(\psi \circ \varphi) = T_{\varphi(S)}\psi \circ T_S\psi$.

1.2 Normála a druhá fundamentální forma

Poznámka
Budeme předpokládat, že plocha S je orientovaná.

TODO

Definice 1.8

Nechť S je plocha s orientací zadanou (Gaussovým) zobrazením N. Druhá fundamentální forma II je bilineární forma na $T_S S$ zadaná předpisem

$$X, Y \in T_S S : II_S(X, Y) := I_X(-T_S N(X), Y).$$

Věta 1.8

1) II_S je symetrická. 2) Je-li $p : O \to S$ mapa na S, $s \in p(o)$, pak II má v lokálních souřadnicích daných mapou p tvar

$$II(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{2} h_{i,j}\alpha_i\beta_j.$$

Definice 1.9

Matice II vzhledem k bázi $\{p_{u_1}, p_{u_2}\}$ je $h = (h_{i,j})_{i,j}$, kde $h_{i,j} =< w(p_{u^i}), p_{u^j} >$.

Věta 1.9 (Mensier)

Nechť S je orientovaná plocha, $a : I \to S$ regulární, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Nechť $t(s), \varkappa(s), n(s)$ jsou tečný vektor, křivost a vektor hlavní normály. Pak

$$II_{c(s)}(t(s), t(s)) = \varkappa(s), \cos\beta,$$

kde β je úhel mezi $N(c(s))$ a $n(s)$.

1.3 Normálová křivost plochy

Definice 1.10

Normálová křivost orientované plochy S v bodě $s \in S$ se definuje jako

$$ _n(X) := \frac{II(X,X)}{I(X,X)}, \qquad X \in T_s S. $$

Poznámka

$n = N$, potom z Mensierovy věty je $= II(c', c')$ – geometrická interpretace II.

Definice 1.11

Minimum a maximum $_n$ v $s \in S$ se nazývají hlavní křivosti S v s a odpovídající směry se nazývají hlavní směry.

Definice 1.12

V každém bodě S definujeme 1) Gaussovu křivost jako $K =_1 \cdot_2$ (součin hlavních křivostí), 2) Střední křivost $H = (_1 +_2)/2$.

Věta 1.10

Jsou-li $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *dvě řešení* $\det(h_u - \lambda g_u) = 0$ *(*) a* $\zeta_1 \neq \zeta_2$ *odpovídající řešení* $(h_u - \lambda g_u)\zeta = 0$ *(**). Pak* $g_u(\zeta_1, \zeta_2) = 0$.

Hlavní směry jsou vlastní vektory (ζ_1, ζ_2) *Weig. zobrazení* W *a křivosti jsou vlastní čísla* (λ_1, λ_2)*.*

Definice 1.13

Mohou nastat tyto případy: 1) Rovnice (*) má jediné řešení λ_1, pak $\lambda_1 = K_n(x) \forall x \in T_s S$ (každý směr je hlavní směr – $\lambda_1 = 0$, pak je s tzv. planární bod, $\lambda_1 \neq 0$, pak je s tzv. kruhový bod.

2) Rovnice (*) má 2 různá řešení $\lambda_1 < \lambda_2$ hlavní směry x_1, x_2 jsou kolmé – pokud $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, pak s je eliptický bod, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, pak je parabolický, nebo $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, pak je hyperbolický.

Věta 1.11

Je-li $p : O \to S$, $p(u) = s \in S$, *pak 1)* $K(s) = \frac{\det h_u}{\det g_u}$ *a 2)* $H(s) = \frac{g_u^{11} h_u^{22} + g_u^{22} h_u^{11} - 2 g_u^{12} h_u^{12}}{2 \det g_u}$.

Definice 1.14

S je orientovaná plocha, $p : O \to S$ mapa. 1) Křivky $u \mapsto p(u,v)$, v pevné, a $v \mapsto p(u,v)$, u pevné, jsou tzv. parametrické křivky. 2) Regulární křivka $c : I \to S$ je hlavní křivka, pokud $c'(t)$ je hlavní směr $\forall t \in I$. 3) Nenulový vektor $x \in T_S S$ je asymptotický směr na S v s, pokud $II_s(x,x) = 0$. Regulární křivka $c : I \to S$ se nazývá asymptotická křivka, jestliže $c'(t)$ je asymptotický směr $\forall t \in I$.

Věta 1.12

1) Je-li $K(s) > 0$, pak v s neexistuje žádný asymptotický směr.

2) Je-li $K(S) < 0$, pak v s existují právě 2 zřejmě asymptotické směry.

3) Je-li $K(s) = 0$ a $0 = \lambda_1(s) + \lambda_2(s)$, pak $\exists$ právě jeden asymptotický směr a ten je zároveň hlavním.

4) Je-li $K(S) = 0$ a $0 = \lambda_1(s) = \lambda_2(s) = 0$, pak je každý směr asymptotický.

Věta 1.13

Je-li $p : O \to S$ a $c(t) = p(u(t), v(t))$ na S je hlavní křivka $\Leftrightarrow \det(TODO) = 0$,

2) asymptotická křivka $\Leftrightarrow h^{11}(u')^2 + 2h^{12}u'v' + h^{22}(v')^2$.

1.4 Křivky

Poznámka (Značení)

$$\mathbf{p}_1 := \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u^1}.$$
$$a = g^{-1}.$$

Lemma 1.14

1) $\mathbf{p}_{ij} = \sum \Gamma^k_{ij}\mathbf{p}_k + h^{ij}\mathbf{n}$.

2) $\mathbf{n}_i = -\sum\sum h^{il}a^k_l\mathbf{p}_k$.

Definice 1.15 (Christoffelovy symboly)

$\Gamma^k_{ij} = \sum a^{kl}(\mathbf{p}_{ij} \cdot \mathbf{p}_l) = \frac{1}{2}\sum a^{kl}(g^{il}_j + g^{jl}_i - g^{ij}_l)$.

Poznámka

Vnitřní vlastnosti plochy jsou ty, které závisí jen na g^{ij}. (Tedy např. 1. f. f. je, 2. f. f. není.)

Poznámka
Předpokládejme $\mathbf{p}(u^1, u^2)$ má 3 spojité parciální derivace. Potom

$$\mathbf{p}_{ijk} = \mathbf{p}_{ikj}.$$

Důsledkem je $\mathbf{p}_{ij} = \sum \Gamma^k_{ij}\mathbf{p}_k + h^{ij}\mathbf{n}$ a derivací

$$\sum_l ((\Gamma^l_{ij})_k \mathbf{p}_l + \Gamma^l_{ij}\mathbf{p}_{kl}) + h^{ij}_k \mathbf{n} + h^{ij}\mathbf{n}_k =$$

$$\sum_l ((\Gamma^l_{ik})_j \mathbf{p}_l + \Gamma^l_{ik}\mathbf{p}_{jl}) + h^{ik}_j \mathbf{n} + h^{ik}\mathbf{n}_j$$

Rozepsáním a porovnáním koeficientů u báze ($\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{n}$) dostaneme Gaussovu a Codazzi--Mainardovu rovnici.

TODO GCM rovnice.

Věta 1.15 (Bonnet)

Je-li $U \subseteq \mathbb{R}^2$, g, h symetrické 2×2 matice závislé na $u \in U$ takové, že g je positivně definitní a platí GCM rovnice. Pak existuje parametrická plocha $\mathbf{p} : U \to \mathbb{R}^3$, jejíž 1. a 2. f. f. je právě g a h.

$\mathbf{p}$ *je jednoznačně určena až na shodnost.*

Věta 1.16 (Theorema egregium (Skvělá obdivuhodná věta))

Gaussova křivost je vnitřní vlastnost plochy.

Důsledek
Rovina a koule nejsou isometrické.

Tvrzení 1.17

Je-li $S \subset \mathbb{R}^3$ plocha pro kterou $\equiv 0$, pak $\forall s \in S\ \exists u : S$ je isometrická s kusem roviny.

$\exists$ *2 plochy, které mají kladnou v odpovídajících bodech, ale nejsou isometrické.*

1.5 Geodetiky

Definice 1.16

S plocha v $\mathbb{R}^3$. Regulární křivka $c : I \to S$ je geodetika na ploše S, pokud $\forall t \in I$: $\det(c'(t), c''(t), N(c(t))) = 0$.

Poznámka
Bytí geodetikou nezávisí na parametrizaci.

Definice 1.17

Geodetická křivost křivky je

$$_g = \frac{\det(c', c'', N \circ c)}{||c'||^3}, t \in I.$$

Poznámka
c geodetika $\implies {}_g = 0$. ${}_g$ nezávisí na změně parametrizace, pouze na její orientaci.

Věta 1.18

Je-li c regulární křivka na S bez inflexních bodů, pak

$$\cdot \mathbf{n} =_n (\mathbf{t})\mathbf{N} +_g (\mathbf{N} \times \mathbf{t}),$$

$$^2 =^2_n (\mathbf{t}) +^2_g .$$

Definice 1.18

Nechť $c : I \to S$, S orientovaná, $\mathbf{X} : I \to \mathbb{R}^3$ vektorové pole. Pak definujeme kovariantní derivace

$$\frac{\nabla \mathbf{X}}{dt} := \Pi_s(\mathbf{X}'(t)),$$

kde Π_s je ortogonální projekce.

Regulární křivka $c : I \to S$ je parametrizovaná geodetika, pokud

$$\forall t \in I : \frac{\nabla c}{dt} = 0$$

Věta 1.19

Nechť $c : I \to S$ je regulární křivka, S orientovaná plocha. Pak jsou ekvivalentní: 1) c je parametrizovaná geodetika, 2) $c''(t)$ je násobek $N(c(t))$, 3) c je geodetika a $||c'(t)||$ je konstantní.

Věta 1.20

Je-li $\mathbf{v}$ jednotkový tečný vektor v bodě $s \in S$, S orientovaná, pak $\exists!$ geodetika parametrizovaná obloukem, která prochází bodem $s \in S$ a její tečný vektor v bodě s je $\mathbf{v}$.

2 Hyperbolická geometrie

$$\equiv -1$$

Definice 2.1 (Hyperboloid)

$$H_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, x_0) \in \mathbb{R}^3 | x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1 \wedge x_0 > 0 \right\}.$$

$B(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_0 y_0.$

Věta 2.1

Restrikce B na $T_x H_2$ je pozitivně definitní $\forall x \in H_2$.

Poznámka (Značení)

$$SO(2,1) := \left\{ A \in SL(3, \mathbb{R}) | B(AX, AY) = B(X, Y) \forall X, Y \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Věta 2.2

$A \in SO(2,1)$ je izometrie na H_2.