Příklad
Ukažte, že matice

$$A(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3\cos 2t - 1 & 4 - 3\sin 2t \\ -4 - 3\sin 2t & -1 - 3\cos 2t \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{7}i)$ pro každé t.

Důkaz
Chceme aby determinant $(A - \lambda I)$ byl nulový. Ten je roven

$$0 = \left(\frac{1}{4}(3\cos 2t - 1) - \lambda\right)\left(\frac{1}{4}(-1 - 3\cos 2t) - \lambda\right) - \frac{1}{16}(4 - 3\sin 2t)(-4 - 3\sin 2t) =$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\cos^2 2t - \frac{9}{16}\sin^2 2t + 1 = \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16} + \frac{7}{16}.$$

To má řešení $\frac{-\frac{1}{2} \pm i\sqrt{2 - \frac{1}{4}}}{2} = \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{7})$ $\square$

Příklad
Ukažte, že $e^{\frac{t}{2}}\binom{-cost}{\sin t}$ je řešením rovnice $x' = A(t)x$.

Důkaz
Prostě dosadíme:

$$x' = \frac{e^{\frac{t}{2}}}{2}\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + e^{\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \frac{e^{\frac{t}{2}}}{4}\begin{pmatrix} -2\cos t + 4\sin t \\ 2\sin t + 4\cos t \end{pmatrix}.$$

$$A(t)x = \frac{e^{\frac{t}{2}}}{4}\begin{pmatrix} -3\cos t\cos 2t + \cos t + 4\sin t - 3\sin 2t\sin t \\ +4\cos t + 3\cos t\sin 2t - \sin t - 3\sin t\cos 2t \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{e^{\frac{t}{2}}}{4}\begin{pmatrix} -3\cos^3 t + 3\cos t\sin^2 t + \cos t + 4\sin t - 6\sin^2 t\cos t \\ 4\cos t + 6\sin t\cos^2 t - \sin t + 3\sin^3 t - 3\sin t\cos^2 t \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{e^{\frac{t}{2}}}{4}\begin{pmatrix} -2\cos t + 4\sin t \\ 2\sin t + 4\cos t \end{pmatrix}$$

$\square$

Příklad
Najděte řešení rovnice $x' = A(0)x$ (pro nějakou počáteční podmínku) a ukažte, že se vzdaluje od počátku v místech poblíž osy x.

Řešení
Řešením je například (spočítal jsem rozklad matice, maticovou exponenciálu a tak jsem došel k tomuto řešení)

$$e^{-\frac{t}{4}}\begin{pmatrix}\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t + \sqrt{7}\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t\\ \cos\frac{\sqrt{7}}{4}t - \sqrt{7}\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t\end{pmatrix}.$$

Pokud je řešení v ose x, pak je $e^{-\frac{t}{4}}\left(\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t - \sqrt{7}\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) = 0$. Navíc pokud bude znamínko derivace v první souřadnici odpovídat znamínku první souřadnice, tak se řešení vzdaluje od počátku (druhá souřadnice v ose x nemá vliv). Tato derivace je

$$-\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}\cdot\left(\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t + \sqrt{7}\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + e^{-\frac{t}{4}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t + \frac{7}{4}\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) =$$

$$= e^{-\frac{t}{4}}\left(\frac{3}{2}\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t - \frac{\sqrt{7}}{2}\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) \overset{*}{=} e^{-\frac{t}{4}}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right).$$

Kde $*$ je podle toho, že druhá souřadnice je rovna 0. Stejně tak první souřadnice je rovna

$$e^{-\frac{t}{4}}\left(\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t + \sqrt{7}\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) \overset{*}{=} \left(1+\sqrt{7}\right)e^{-\frac{t}{4}}\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t.$$

Tedy (v ose x) znamínko derivace první souřadnice řešení sedí s jeho znamínkem, tedy se zde řešení opravdu vzdaluje.