Příklad (Teoretický příklad 10)
Nechť
$$f(x) = \lfloor x^2 \rfloor \sin(\pi x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Ve kterých bodech je f spojitá a ve kterých nespojitá?

Řešení
Nejdříve ukážeme, že je funkce lichá:
$$f(-x) = \lfloor (-x)^2 \rfloor \sin(\pi(-x)) = \lfloor x^2 \rfloor \cdot (-\sin(\pi x)) = -\lfloor x^2 \rfloor \cdot \sin(\pi x) = -f(x),$$
tudíž spojitost řešíme jen pro $x \in \mathbb{R}_0^+$, na záporné poloose bude symetricky.

Pro lepší popis nespojitostí zadefinujme (pro nezáporná y)
$$g(y) = f(\sqrt{y}) = \lfloor y \rfloor \cdot (-\sin(\pi\sqrt{y}))\,,$$
tj. g je spojitá v y právě tehdy, když f je spojitá v $\sqrt{y}$. Nyní je zřejmé, že g je na intervalech $(k, k+1)$ pro $k \in \mathbb{N}_0$ spojitá, jelikož $\forall y \in (k, k+1)$ je $g(y) = k \cdot \sin(\pi\sqrt{y})$ a odmocnina, konstanta i sinus jsou spojité funkce, tedy jejich složení / násobení je také spojité. Zároveň pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je g v bodě k spojitá zprava ze stejného důvodu.

Nás tedy zajímá pouze spojitost zleva v bodech $k \in \mathbb{N}$, jelikož jinak je g spojitá. Na levém $\varepsilon < 1$ okolí k je
$$g(y) = (k-1) \cdot \sin(\pi \cdot \sqrt{y}) \xrightarrow{y \to k} (k-1) \cdot \sin(\pi \cdot \sqrt{k}).$$
Tudíž spojitá bude právě v těch bodech k, kde $(k-1) \cdot \sin(\pi \cdot \sqrt{k}) = g(k) = k \cdot \sin(\pi \cdot \sqrt{k})$. Vytknutím sinu dostaneme $(k - k - 1)\sin(\pi \cdot \sqrt{k}) = \sin(\pi \cdot \sqrt{k}) = 0$. Ale my víme, že $\sin(z) = 0$ nastává právě v případě, že $z = l\pi, l \in \mathbb{Z}$. Tedy g bude spojitá právě v těch k, kde $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$.

Funkce f je tedy spojitá na všech bodech $\mathbb{R}$, kromě $\pm\sqrt{k} \notin \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$ (v nule je spojitá, protože je spojitá zprava a lichá, tedy i spojitá zleva).