

*Poznámka (Úmluva)*

Všechny topologické prostory v tomto semestru budou Hausdorffovy ( $T_2$ ). Tedy regulární jsou automaticky  $T_3$ , úplně regulární jsou automaticky  $T_\pi$  a normální jsou  $T_4$ .

Speciálně např. kompaktní prostory jsou  $T_4$ .

# 1 Parakompaktní prostory

*Poznámka (Připomenutí)*

Pokrytí, otevřené pokrytí, podpokrytí.

## Definice 1.1 (Zjemnění)

Ať  $X$  je množina a  $\mathcal{S}$  je pokrytí  $X$ . Řekneme, že systém  $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(X)$  je zjemnění  $\mathcal{S}$ , pokud  $\mathcal{T}$  je pokrytí a  $\forall T \in \mathcal{T} \exists S \in \mathcal{S} : T \subseteq S$ .

## Definice 1.2 (Lokálně konečný systém)

Ať  $\mathbb{X}$  je TP,  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ .  $\mathcal{S}$  se nazývá lokálně konečný, pokud

$$\forall x \in \mathbb{X} \exists U \in \mathcal{U}(x) : \{S \in \mathcal{S} | S \cap U \neq \emptyset\} \text{ je konečná.}$$

Systém  $\mathcal{S}$  se nazve diskrétní, pokud

$$\forall x \in \mathbb{X} \exists U \in \mathcal{U}(x) : |\{S \in \mathcal{S} | S \cap U \neq \emptyset\}| \leq 1.$$

Systém  $\mathcal{S}$  se nazve  $\sigma$ -lokálně konečný (resp.  $\sigma$ -diskrétní), pokud  $\exists \mathcal{S}_n$ , že  $\mathcal{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ , že  $\mathcal{S}_n$  jsou lokálně konečné (resp. diskrétní),  $n \in \mathbb{N}$ .

*Poznámka*

Diskrétní systém je lokálně konečný.  $\sigma$ -diskrétní systém je  $\sigma$ -lokálně konečný.

## Lemma 1.1 (Uzávěr lokálně konečného prostoru)

Ať  $\mathbb{X}$  je TP,  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  lokálně konečný systém. Pak  $\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\}$  je opět lokálně konečný a platí  $\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\}$ .

*Důkaz*

Ať  $x \in \mathbb{X}$  je libovolné. Existuje  $U \in \mathcal{U}(x) : \{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$  je konečná. Ať  $V = \bigcup U, V \in \mathcal{U}(x)$ .  $\{A \in \mathcal{A} : A \cap V \neq \emptyset\}$  je zřejmě konečná.  $V \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow V \cap \bar{A} \neq \emptyset$ . Tedy  $\{A \in \mathcal{A} : \bar{A} \cap V \neq \emptyset\} = \{A \in \mathcal{A} : A \cap V \neq \emptyset\}$ . Tedy  $\{\bar{A} | A \in \mathcal{A}\}$  je konečná.

$$\supseteq: \bigcup \mathcal{A} \supseteq A, A \in \mathcal{A}, \text{ tedy } \overline{\bigcup \mathcal{A}} \supseteq \bar{A} \Rightarrow \overline{\bigcup \mathcal{A}} \supseteq \bigcup \{\bar{A} | A \in \mathcal{A}\}.$$

$\subseteq$ : Ať  $x \in \overline{\bigcup \mathcal{A}}$ .  $\exists U \in \mathcal{U}(x)$  otevřená, že  $\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\} = \{A_1, \dots, A_n\}$ .  $x \in \overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} \stackrel{\text{konečné}}{=} \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}$ .  $\exists i \leq n : x \in \bar{A}_i$ .  $\square$

### Definice 1.3 (Parakompaktní)

TP  $\mathbb{X}$  se nazývá parakompaktní, pokud každé jeho otevřené pokrytí má lokálně konečné otevřené zjemnění.

*Poznámka*

Kompaktní  $\Rightarrow$  parakompaktní (protože podpokrytí je zjemnění a konečné je lokálně konečné).

Diskrétní TP  $\Rightarrow$  parakompaktní.

### Tvrzení 1.2

*Uzavřený podprostor parakompaktního TP je parakompaktní.*

*Důkaz*

$\mathbb{X}$  je parakompaktní TP a  $F \subseteq \mathbb{X}$  uzavřená. Ať  $\mathcal{U}$  je otevřené pokrytí  $F$  (otevřenými množinami v  $F$ ). Z definice podprostoru  $\forall U \in \mathcal{U} \exists V_U$  otevřená v  $\mathbb{X} : U = F \cap V_U$ . Uvažujme  $\mathcal{V} = \{V_U | U \in \mathcal{U}\} \cup \{F \setminus F\}$ .  $\mathcal{V}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Existuje otevřené lokálně konečné zjemnění  $\mathcal{W}$  tohoto  $\mathcal{V}$ .  $\{F \cap W | W \in \mathcal{W}\}$  je otevřené pokrytí  $F$  a zároveň lokálně konečné. Navíc je to i zjemnění  $\mathcal{U}$ .  $\square$

### Věta 1.3 (Charakterizace parakompaktnosti)

*Pro regulární TP  $\mathbb{X}$  jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- $\mathbb{X}$  je parakompaktní.
- Každé otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$  má otevřené  $\sigma$ -lokálně konečné zjemnění.
- Každé otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$  má lokálně konečné zjemnění (libovolnými množinami).
- Každé otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$  má uzavřené lokálně konečné zjemnění.

┌  
Důkaz

$a) \implies b)$  : každé lokálně konečné zjemnění je  $\sigma$ -lokálně konečné.

$b) \implies c)$  : Ať  $\mathcal{U}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Podle b) existuje otevřené zjemnění  $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ ,  $\mathcal{V}_n$  lokálně konečný systém.  $W_n := \bigcup \mathcal{V}_n$  je otevřené  $\{W_n | n \in \mathbb{N}\}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Ať  $A_n := W_n \setminus \bigcup_{i < n} W_i$ .  $\{A_n | n \in \mathbb{N}\}$  je lokálně konečné pokrytí  $\mathbb{X}$  (každé  $x \in \mathbb{X}$  je v nějakém  $W_n$ , takže už není ve větších  $A_n$ ).  $\{A_n \cap V | n \in \mathbb{N}, V \in \mathcal{V}_n\}$  je lokálně konečné zjemnění  $\mathcal{U}$ .

$c) \implies d)$  : Ať  $\mathcal{U}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Pro každé  $x \in \mathbb{X}$  existuje  $U_x \in \mathcal{U} : x \in U_x$ . Nyní máme bod v otevřené množině, tedy z regularity existují otevřené množiny  $V_x \subseteq \mathbb{X} : x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$ .  $\mathcal{V} := \{V_x | x \in \mathbb{X}\}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ .  $\mathcal{V}$  má lokálně konečné zjemnění  $\mathcal{W}$  podle c).  $\{\overline{W} | W \in \mathcal{W}\}$  je lokálně konečný systém podle lemmatu „Uzávěr lokálně konečného systému“. Navíc je i pokrytí a zjemňuje  $\mathcal{U}$ .

$d) \implies a)$  Ať  $\mathcal{U}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Z d) existuje lokálně konečné uzavřené zjemnění  $\mathcal{V}$ . Pro  $x \in \mathbb{X}$  existuje  $W_x$  otevřené okolí  $x$  protínající jen konečně mnoho prvků z  $\mathcal{V}$ .  $\mathcal{W} := \{W_x | x \in \mathbb{X}\}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Z d) existuje lokálně konečné uzavřené zjemnění  $\mathcal{A}$  toho  $\mathcal{W}$ . Pro  $V \in \mathcal{V}$  označíme  $V^* := \mathbb{X} \setminus \bigcup \{A \in \mathcal{A} | A \cap V = \emptyset\}$ . Zřejmě  $V^* \supseteq V$ . Tedy  $\{V^* | V \in \mathcal{V}\}$  je otevřené (odčítáme uzavřenou množinu, neboť  $A$  jsou uzavřené a množina je lokálně konečná, tedy podle lemmatu ... je uzavřené i sjednocení) pokrytí.

Ať  $x \in \mathbb{X}$ .  $\exists U$  okolí  $x$ , které protíná jen konečně prvků  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ . Zřejmě  $U \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ . Každé  $A_i$  je podmnožinou nějakého  $W_y$ , tj. (podle volby  $W_y$ )  $A_i$  protíná jen konečně mnoho prvků z  $\mathcal{V}$ . Navíc je-li  $V \in \mathcal{V}$  a  $A \in \mathcal{A}$ , že  $A \cap V = \emptyset$ , pak  $A \cap V^* = \emptyset$ . Tedy každé  $A_i$  protíná pouze konečně mnoho prvků  $V^*, V \in @V$ . Pro každé  $V \in @V$  fixujeme  $U_v \in \mathcal{U} : V \subseteq U_v$ . Zřejmě  $V \subseteq U_v \cap V^*$ . Pak  $\{U_v \cap V^* | V \in \mathcal{V}\}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ , které je lokálně konečné a které je zjemnění  $\mathcal{U}$ .  $\square$

Důsledek

Každý Lindelöfov regulární prostor je parakompaktní.

┌  
Důkaz

Ať  $\mathcal{U}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Z lindelöfovosti existuje spočetné pokrytí  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ .  $\mathcal{V}$  je  $\sigma$ -lokálně konečné otevřené zjemnění  $\mathcal{U}$ . Tedy platí b) z minulé věty.  $\square$

## Definice 1.4 (Skrčení)

Ať  $X$  je množina a  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  (pokrytí  $X$ ). Indexovaný systém  $\{T_S : S \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$  se nazývá skrčení systému  $\mathcal{S}$ , pokud (je to pokrytí) a  $T_S \subseteq S, S \in \mathcal{S}$ .

Poznámka (Nadmutí)

Skrčení je speciální případ zjemnění.

Podobně jako skrčení lze definovat pojem nadmutí.

### Lemma 1.4 (O skrčení)

*Ať  $\mathbb{X}$  je normální TP. Pak každé lokálně konečné (stačí bodově konečné) otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$  má uzavřené skrčení, jehož vnitřky tvoří pokrytí.*

*Důkaz*

Ať  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ ,  $\kappa$  kardinál,  $\mathcal{U}$  je lokálně kompaktní, otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Nyní  $F_0 := \mathbb{X} \setminus \bigcup \{U_\alpha : 0 < \alpha < \kappa\}$  uzavřená,  $F_0 \subseteq U_0$  (z toho, že  $\mathcal{U}$  je pokrytí). Z normality existuje otevřená  $V_0 \subseteq \mathbb{X} : F_0 \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq U_0$ .

Nyní indukci: Nechť máme zkonstruované  $V_\beta : \forall \beta < \alpha < \kappa$ . Označíme  $F_\alpha := \mathbb{X} \setminus (\bigcup \{V_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup \{U_\gamma : \alpha < \gamma < \kappa\})$ . Z normality zas  $V_\alpha \subseteq \mathbb{X} : F_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$ .

$\mathcal{V} = \{\overline{V_\alpha} : \alpha < \kappa\}$  je skrčení  $\mathcal{U}$ ,  $\text{int } \overline{V_\alpha} \supseteq V_\alpha$  a  $\bigcup_{\alpha < \kappa} V_\alpha = \mathbb{X}$ , tedy  $\bigcup_{\alpha < \kappa} \text{int } \overline{V_\alpha} = \mathbb{X}$ .  $\square$

### Definice 1.5 (Kolektivně normální)

TP  $\mathbb{X}$  se nazývá kolektivně normální, pokud pro každý diskrétní systém  $\mathcal{F}$  z uzavřených množin existuje disjunkttní systém otevřených množin  $\{U(F) : F \in \mathcal{F}\}$ , že  $F \subseteq U(F)$ ,  $F \in \mathcal{F}$  (tj. otevřené nadmutí).

*Poznámka*

Každý kolektivně normální prostor je normální.

### Tvrzení 1.5

*Každý parakompaktní prostor už je kolektivně normální, tedy i normální.*

*Důkaz*

Ukážeme nejprve, že  $\mathbb{X}$  je regulární. Ať  $F \subseteq \mathbb{X}$  uzavřená,  $x \in \mathbb{X} \setminus F$ . Pro  $y \in F$  existuje otevřené okolí  $U_y$  bodu  $y$ , že  $x \notin \overline{U_y}$ .  $\mathcal{U} := \{U_y : y \in F\} \cup \{\mathbb{X} \setminus F\}$  otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Ať  $\mathcal{V}$  je lokálně konečné otevřené zjemnění  $\mathcal{U}$ .  $G := \bigcup \{V \in \mathcal{V} : V \cap F \neq \emptyset\}$ . Z lemmatu  $\overline{G} = \bigcup \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}, V \cup F \neq \emptyset\} \not\ni x$ .  $G \supset F$ ,  $G$  otevřená. Tedy  $\mathbb{X}$  je regulární.

Ať  $\mathcal{F}$  je diskrétní soubor z uzavřených množin. Pro  $F \in \mathcal{F}$  uvažíme  $\bigcup \{H \in \mathcal{F} : H \neq F\}$  ... uzavřená z lemmatu o uzávěru sjednocení lokálně kompaktního systému. Pro  $x \in F$  existuje (z první části důkazu)  $U_x$  otevřená, že  $x \in U_x$ ,  $\overline{U_x} \cap H = \emptyset$  pro  $H \neq F, H \in \mathcal{F}$ .  $\{U_x : x \in F \in \mathcal{F}\} \cup \{\mathbb{X} \setminus \bigcup F\}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Ať  $\mathcal{V}$  je otevřené lokálně konečné zjemnění. Pro  $F \in \mathcal{F} : V(F) := \{V \in \mathcal{V} : V \cup F \neq \emptyset\} \setminus \bigcup \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}, V \cap H \neq \emptyset \text{ pro nějaké } H \in \mathcal{F}, H \neq F\}$ . Platí  $F \subseteq V(F)$ . Pro  $F, F' \in \mathcal{F}, F \neq F' \implies V(F) \cap V(F') = \emptyset$ .  $\{V(F) : F \in \mathcal{F}\}$  je disjunkttní otevřené nadmutí  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**Definice 1.6** (Hvězda)

Ať  $\mathbb{X}$  je množina a  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ ,  $x \in \mathbb{X}$ ,  $A \subseteq \mathbb{X}$ .

Hvězda bodu  $x$  vzhledem k  $\mathcal{S}$  je  $\text{st}(x, \mathcal{S}) = \bigcup \{S \in \mathcal{S} : x \in S\}$ .

Hvězda množiny  $A$  vzhledem k  $\mathcal{S}$  je  $\text{st}(A, \mathcal{S}) = \bigcup_{x \in A} \text{st}(x, \mathcal{S})$ .

**Definice 1.7** (Barycentrické a hvězdovité zjemnění)

Ať  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  jsou pokrytí  $\mathbb{X}$ . Řekneme, že  $\mathcal{U}$  barycentricky zjemňuje  $\mathcal{V}$ , pokud  $\{\text{st}(x, \mathcal{U}) : x \in \mathbb{X}\}$  zjemňuje  $\mathcal{V}$ .

Řekneme, že  $\mathcal{U}$  hvězdovitě zjemňuje  $\mathcal{V}$ , pokud  $\{\text{st}(U, \mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$  zjemňuje  $\mathcal{V}$ .

*Například*

Ať  $(\mathbb{X}, \varrho)$  je MP. Ať  $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$  jsou pokrytí  $\mathbb{X}$  tvořená po řadě všemi  $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon$  koulemi ( $\varepsilon > 0$  pevné). Pak  $\mathcal{U}$  zjemňuje barycentricky  $\mathcal{V}$  a hvězdovitě  $\mathcal{W}$ .

**Lemma 1.6** (Dvojitě barycentrické zjemnění je hvězdovité)

Ať  $X$  je množina,  $\mathcal{U}$  pokrytí  $X$ ,  $\mathcal{V}$  barycentrické zjemnění  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{W}$  barycentrické zjemnění  $\mathcal{V}$ . Potom  $\mathcal{W}$  je hvězdovité zjemnění  $\mathcal{U}$ .

┌

*Důkaz*

Mějme  $W \in \mathcal{W}$  libovolně. Chceme najít  $U \in \mathcal{U} : \text{st}(W, \mathcal{W}) \subseteq U$ .  $W = \emptyset$  triviální.  $W \neq \emptyset$  :  
Fixujeme  $x_0 \in W$ . Pro každé  $x \in \mathbb{X}$  existuje  $V_x \in \mathcal{V} : \text{st}(x, \mathcal{W}) \subseteq V_x$ . Nyní

$$\text{st}(W, \mathcal{W}) = \bigcup \{T \in \mathcal{W} : T \cap W \neq \emptyset\} = \bigcup \{\{T \in \mathcal{W} | x \in T\} | x \in W\} = \bigcup \{\text{st}(x, \mathcal{W}) | x \in W\} \subseteq \bigcup \{V_x | x \in W\}$$

protože  $W \subseteq V_x$  pro každé  $x \in W$ .  $\mathcal{V}$  barycentricky zjemňuje  $\mathcal{U}$ , tedy existuje  $u \in \mathcal{U} : \text{st}(x_0, \mathcal{V}) \subseteq U$ . □

└

**Věta 1.7** (Charakterizace parakompaktnosti pomocí hvězdovitých zjemnění)

Pro TP  $\mathbb{X}$  je ekvivalentní:

- $\mathbb{X}$  je parakompaktní.
- Každé otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$  má barycentrické zjemnění.
- Každé otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$  má hvězdovité zjemnění.
- Každé otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$  má otevřené  $\sigma$ -diskrétní zjemnění a  $\mathbb{X}$  je regulární.

┌ *Důkaz*

a)  $\implies$  b) Ať  $\mathcal{U}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Z a) vyplývá, že existuje jeho lokálně konečné otevřené zjemnění  $\mathcal{V}$ . Víme, že  $\mathbb{X}$  je parakompaktní, tedy normální. Z lemmatu o skrčení existuje uzavřené pokrytí  $\mathcal{W} = \{W_V | V \in \mathcal{V}\}$ ,  $W_V \subseteq V$ .  $\mathcal{V}$  je lokálně konečné, tedy i  $\mathcal{W}$  je lokálně konečné. Pro  $x \in \mathbb{X}$  definujeme  $A_x = \bigcap \{V | x \in W_V\}$ . Jde o konečný průnik (vzhledem k lokální kompaktnosti), tedy  $A_x$  je otevřená. Položme  $B_x = \bigcup \{W \in \mathcal{W} | x \notin W\}$ . Podle lemmatu o sjednocení lokálně konečného systému je  $B_x$  uzavřená. Zřejmě  $x \in A_x \setminus B_x =: C_x$  je otevřená. Tedy  $\mathcal{C} = \{C_x | x \in \mathbb{X}\}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ .

Ukážeme, že  $\mathcal{C}$  barycentricky zjemňuje  $\mathcal{U}$ : Ať  $y \in \mathbb{X}$ . Chceme najít  $V \in \mathcal{U}$ :  $\text{st}(y, \mathcal{C}) \subseteq V$ . Víme, že existuje  $V \in \mathcal{V}$ :  $y \in W_V$ . Ať  $x \in \text{st}(y, \mathcal{C})$ . Pak  $y \in C_x = A_x \setminus B_x$ , tedy  $y \notin B_x$ , tudíž  $x \in W_V \subseteq V$  (kdyby ne, pak  $W_V \subseteq B_x$ , tedy  $y \notin C_x$ ).

b)  $\implies$  c) k otevřenému pokrytí můžeme najít barycentrické zjemnění, ke kterému můžeme najít barycentrické zjemnění. Pak c) vyplývá z předchozího lemmatu.

c)  $\implies$  d)  $\mathbb{X}$  je regulární: Ať  $F \subseteq \mathbb{X}$  uzavřená,  $x \in \mathbb{X} \setminus F$ . Uvažujme otevřené pokrytí  $\{\mathbb{X} \setminus F, \mathbb{X} \setminus x\}$ . Podle c) existuje otevřené hvězdovité zjemnění  $\mathcal{U}$ .  $\exists U \in \mathcal{U} : x \in U$ . Nutně  $U \cap F = \emptyset$ . Pak  $\bar{U} \subseteq \text{st}(U, \mathcal{U}) \subseteq \mathbb{X} \subseteq \mathbb{X} \setminus F$ . Tedy  $\mathbb{X}$  je regulární.

Ať  $\mathcal{U}_0$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Chceme najít  $\sigma$ -diskrétní zjemnění toho  $\mathcal{U}_0$ . Použijeme podmínku c) spočetně nekonečněkrát, abychom induktivně našli otevřená pokrytí  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ , že  $\mathcal{U}_{n+1}$  hvězdovitě zjemňuje  $\mathcal{U}_n$ ,  $n \geq 0$ . Oindexujeme prvky  $\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 = \{U_i | i \in I\}$ . Pro  $i \in I$  a pro  $n \in \mathbb{N}$  uvažujme  $U_{i,n} := \{x \in \mathbb{X} | x \text{ má okolí } V : \text{st}(V, \mathcal{U}_n) \subseteq U_i\}$ . Pro každé  $n \in \mathbb{N} : \{U_{i,n} | i \in I\}$  je otevřené zjemnění  $\mathcal{U}$ , ale ne nutně pokrytí.

Pomocné tvrzení: Pokud  $x \in U_{i,n}$ ,  $u \notin U_{i,n+1}$ , pak neexistuje  $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ , že  $x, y \in U$ . Důkaz: Pro  $U \in \mathcal{U}_{n+1}$  existuje  $W \in \mathcal{U}_n : \text{st}(U, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq W$ . Tedy pokud  $x \in U \cap U_{i,n}$ , pak  $W \subseteq \text{st}(x, \mathcal{U}_n) \subseteq U_i$ . Pak  $\text{st}(U, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq U_i$  a  $u \subseteq U_{i,n+1}$ . Tedy  $y \notin U$ , protože  $y \notin U_{i,n+1}$ .

Uvažme dobré uspořádání  $<$  na  $I$ . Ať  $V_{i_0,n} = U_{i_0,n} \setminus \bigcup \{U_{i,n+1} | i < i_0\}$ ,  $i_0 \in I, n \in \mathbb{N}$ . Ukážeme, že  $** = \{V_{i_0,n} | i_0 \in I, n \in \mathbb{N}\}$  je hledané  $\sigma$ -diskrétní zjemnění  $\mathcal{U}_0$ . Pro  $i_1 \neq i_2, i_1, i_2 \in I$ , pak  $i_1 < i_2$  nebo naopak. Podle toho buď  $V_{i_2,n} \subseteq \mathbb{X} \setminus U_{i_1,n+1}$  nebo  $V_{i_1,n} \subseteq \mathbb{X} \setminus U_{i_2,n+1}$ . Podle pomocného tvrzení platí, že pokud  $x \in V_{i_1,n}$  a  $y \in V_{i_2,n}$ , pak neexistuje  $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ , že  $x, y \in U$ . To nám říká, že  $\forall n \in \mathbb{N} : \{V_{i,n} | i \in I\}$  je diskrétní. Zbývá už jen ukázat, že  $**$  je pokrytí: Ať  $y \in \mathbb{X}$ . Existuje  $<$ -nejmenší  $i(y) \in I : y \in U_{i(y),n}$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$ . Nyní  $y \notin U_{i,n+2}$  pro  $i < i(y)$ . Podle pomocného tvrzení použitého na  $n+1$  platí  $\text{st}(y, \mathcal{U}_{n+2}) \cap \bigcup \{U_{i,n+1} | i < i(y)\} = \emptyset$ . Tedy  $y \in V_{i(y),n}$ .

d)  $\implies$  a) Víme, že  $\mathbb{X}$  je regulární, tedy můžeme aplikovat charakterizaci parakompaktности z minulého týdne, jelikož  $\sigma$ -diskrétní  $\implies \sigma$ -lokálně konečný.  $\square$

## Věta 1.8 (Stone)

*Každý metrizovatelný prostor je parakompaktní.*

*Důkaz*

Ukážeme, že každé otevřené pokrytí  $\mathcal{U}$  má barycentrické zjemnění. Fixujeme na nějakém tom prostoru  $\mathbb{X}$  kompatibilní metriku  $\varrho \leq 1$ . Navíc bůno  $\mathbb{X} \notin \mathcal{U}$ . Pro každé  $x \in \mathbb{X}$  a  $U \in \mathcal{U}$ , že  $x \in U$ , existuje největší možné  $\varepsilon_{x,U} > 0$ , že  $B(x, 5\varepsilon_{x,U})$ . Položíme  $\mathcal{V} = \{B(x, \varepsilon_{x,U}) | x \in U \in \mathcal{U}\}$ . Ověříme, že  $\mathcal{V}$  barycentricky zjemňuje  $\mathcal{U}$ : Ať  $x \in \mathbb{X}$ . Chceme najít  $U \in \mathcal{U} : \text{st}(x, \mathcal{V}) \subseteq U$ . Ať  $\varepsilon_x = \sup \{\varepsilon_{x,U} | x \in U \in \mathcal{U}\}$ .  $0 < \varepsilon_x \leq 1$ . Existuje  $U \in \mathcal{U} : \varepsilon_{x,U} \geq \frac{\varepsilon_x}{2}$ .

Ukážeme, že  $\text{st}(x, \mathcal{V}) \subseteq U$ . Ať tedy  $x \in B(y, \varepsilon_{y,v})$  pro nějaké  $y \in V \in \mathcal{U}$ . Chceme  $B(y, \varepsilon_{y,v}) \subseteq U$ . Máme  $B(y, 5\varepsilon_{y,v}) \subseteq V$  a zároveň  $\varrho(x, y) < \varepsilon_{U,V}$ . Z  $\Delta$ -nerovnosti:  $B(x, 4\varepsilon_{y,V}) \subseteq V$ . Z maximality  $\varepsilon_{x,V} \geq \frac{1}{5}4\varepsilon_{y,V}$ . Také  $2\varepsilon_{x,U} > \varepsilon_x \geq \varepsilon_{x,V}$ . Dohromady  $2\varepsilon_{x,U} > \frac{4}{5}\varepsilon_{y,V}$ , tj.  $5\varepsilon_{x,U} > 2\varepsilon_{y,V}$ . Pro  $z \in B(y, \varepsilon_{y,V}) : \varrho(x, z) < 2\varepsilon_{y,V}$ , a tedy  $\varrho(x, z) < 5\varepsilon_{x,U}$ . Proto  $z \in U$ . Tudíž  $B(y, \varepsilon_{y,v}) \subseteq U$ .  $\square$

## Definice 1.8

Pro funkci  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  značíme  $\text{supp } f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$ .

## Věta 1.9 (Rozklad jednotky)

Ať  $\mathbb{X}$  je parakompaktní prostor,  $\mathcal{U}$  otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Pak existuje rozklad jednotky podřízený tomuto pokrytí, tj. systém spojitých funkcí  $f_i : X \rightarrow [0, 1]$ ,  $i \in I$ , že  $\{\text{supp } f_i : i \in I\}$  je lokálně konečné zjemnění  $\mathcal{U}$  a  $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1, \forall x \in \mathbb{X}$ .

*Důkaz*

$\mathbb{X}$  parakompaktní, tedy normální. Tedy existuje otevřené pokrytí  $\mathcal{W}$  takové, že  $\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$  zjemňuje  $\mathcal{U}$ . Ať  $\mathcal{V}$  je lokálně konečné otevřené zjemnění  $\mathcal{W}$ . Víme, že existuje uzavřené skrčení  $\{F_V : V \in \mathcal{V}\}$ ,  $F_V \subseteq V$ . Z normality existují spojitě funkce  $g_V : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ ,  $g_V|_{F_V} = 1$ ,  $g_V|_{\mathbb{X} \setminus V} = 0$ . Položme  $g(x) := \sum_{V \in \mathcal{V}} g_V(x)$ . Funkce  $g$  je spojitá, protože spojitost je lokální pojem a  $g$  je lokálně součet konečně mnoha nenulových spojitých funkcí. Navíc zřejmě  $g \geq 1$ , protože  $\{F_V : V \in \mathcal{V}\}$  je pokrytí  $\mathbb{X}$ . Tedy položíme  $f_V := \frac{g_V}{g}$ .  $\square$

## Věta 1.10 (Michaelova selekční)

Zdola polospojité (vícehodnotová) funkce z parakompaktního prostoru do neprázdných uzavřených konvexních podmnožin Banachova prostoru má spojitou selekci.

## Věta 1.11 (Dugunjiho)

Ať  $\mathbb{X}$  je metrizovatelný a  $A \subseteq \mathbb{X}$  uzavřená. Pak existuje lineární zobrazení  $L : C(A, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ , že  $L(f)$  rozšiřuje  $f$  pro  $f \in C(A, \mathbb{R})$ .

# 2 Metrizační věty

*Poznámka (Opakování)*

Uryshonova metrizační věta: Regulární prostor se spočetnou bází je metrizable.

### **Věta 2.1** (Bing, Nagata, Smirnov)

---

*Pro regulární prostor  $X$  jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- a)  $X$  je metrizable.*
- b)  $X$  má  $\sigma$ -diskrétní bázi.*
- c)  $X$  má  $\sigma$ -lokálně konečnou bázi.*



┌ *Důkaz*

a)  $\implies$  b): Ať  $\mathcal{B}_n$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$  koulemi o poloměru  $\frac{1}{n}$ .  $\mathbb{X}$  je parakompaktní podle Stoneovy věty. Z charakterizace parakompaktnosti máme, že  $\mathcal{B}_n$  má  $\sigma$ -diskrétní otevřené zjemnění  $\mathcal{V}_n$ .  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$  je opět  $\sigma$ -diskrétní, navíc je to báze.

b)  $\implies$  c): triviální.

c)  $\implies$  a) Ať  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty}$  je báze  $\mathbb{X}$ ,  $\mathcal{B}_n$  lokálně konečný soubor. Uvědomíme si, že  $\mathbb{X}$  je parakompaktní: Je-li totiž  $\mathcal{U}$  otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ , pak  $\{B \in \mathcal{B} : \exists U \in \mathcal{U} : B \subseteq U\}$  je zjemnění  $\mathcal{U}$  a vzhledem k tomu, že  $B$  je báze, tak je to i pokrytí. Navíc je  $\sigma$ -lokálně konečné. Tedy z charakterizace parakompaktnosti to máme.

Z parakompaktnosti dostáváme normalitu  $\mathbb{X}$ . Pro  $n, k \in \mathbb{N}$  a  $B \in \mathcal{B}_n$  položme  $V_{k,n,B} := \bigcup \{C \in \mathcal{B}_k : \overline{C} \subseteq B\}$ .  $\mathcal{B}_k$  je lokálně konečný, tedy (z lemmatu o uzávěru lokálně konečného systému)  $\overline{V_{k,n,B}} \subseteq B$ . Tedy existují (z normality) spojitě funkce  $f_{k,n,B} : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ ,  $f_{k,n,B}(x) = 0$  pro  $x \in \mathbb{X} \setminus B$  a 1 pro  $x \in \overline{V_{k,n,B}}$ .

Definujeme  $M_{k,n} \subseteq [0, 1]^{\mathcal{B}_n}$  následovně  $M_{k,n} = \{\varphi : \mathcal{B}_n \rightarrow [0, 1] : \{B \in \mathcal{B}_n : \varphi(B) \neq 0\} \text{ je konečná}\}$ . Na  $M_{k,n}$  uvažme metriku  $\varrho_{k,n}\varphi, \psi := \sum_{B \in \mathcal{B}_n} |\varphi(B) - \psi(B)|$ . Ať  $g_{k,n} : \mathbb{X} \rightarrow M_{k,n}$ ,  $g_{k,n} = \bigtriangleup_{B \in \mathcal{B}_n} f_{k,n,B}$ ,  $g_{k,n}(x) = (f_{k,n,B}(x))_{B \in \mathcal{B}_n}$ .

Ověříme, že  $g_{k,n} : \mathbb{X} \rightarrow (M_{k,n}, \varrho_{k,n})$  je spojitě: Ať  $x \in \mathbb{X}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existuje  $U$  okolí  $x$  protínající jen konečně prvků  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}_n$ .  $f_{k,n,B_1}, \dots, f_{k,n,B_m}$  jsou spojitá, tedy existuje  $V \subseteq U$  okolí  $x$ , že  $|f_{k,n,B}(x) - f_{k,n,B_i}(y)| < \frac{\varepsilon}{m}$  pro  $i \leq m, y \in V$ . Nyní

$$\varrho_{k,n}(g_{k,n}(x), g_{k,n}(y)) = \sum_{i=1}^m |g_{k,n}(x)(B_i) - g_{k,n}(y)(B_i)| = \sum_{i=1}^m |f_{k,n,B}(x) - f_{k,n,B_i}(y)| < m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Pokud systém  $\{g_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}\}$  odděluje body a uzavřené množiny, pak  $\delta := \bigtriangleup_{k,n \in \mathbb{N}} g_{k,n} : \mathbb{X} \rightarrow \prod_{k,n \in \mathbb{N}} M_{k,n}$  je vnoření (podle lemmatu o Tichonovově vnoření). Tím jsme vnořili  $\mathbb{X}$  do spočetného součinu metrizablečních prostorů, tedy do metrizablečního prostoru, tedy  $\mathbb{X}$  je metrizableční.

$\{g_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}\}$  odděluje body a uzavřené množiny: Ať  $F \subseteq \mathbb{X}$  je uzavřená,  $x \in \mathbb{X} \setminus F$ . Existuje  $n \in \mathbb{N}$  a  $B \in \mathcal{B}_n : x \in B \subseteq \mathbb{X} \setminus F$ . Z regularity existuje  $C \in \mathcal{B}_k, k \in \mathbb{N}$ ,  $g_{k,n}(x)(B) = f_{k,n,B}(x) = 1$  a  $g_{k,n}(y)(B) = f_{k,n,B}(y) = 0$  pro  $y \in \mathbb{X} \setminus B \supseteq F$ .  $\square$

## Definice 2.1

Ať  $\mathbb{X}$  je TP. Posloupnost otevřených pokrytí  $\mathcal{V}_n$  prostoru  $\mathbb{X}$  se nazývá development, pokud pro každé  $x \in \mathbb{X} : \{\text{st}(x, \mathcal{V}_n) | n \in \mathbb{N}\}$  je báze okolí v bodě  $x$ .

### Poznámka

Je-li  $(X, \varrho)$  MP, pak  $\mathcal{V}_n := \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}, n \in \mathbb{N}$  je development  $X$ .

## Věta 2.2 (Bing)

$TP \mathbb{X}$  je metrizovatelný  $\Leftrightarrow$  je kolektivně normální a má development.

┌

Důkaz

$\Rightarrow$  : metrizovatelný  $\Rightarrow$  má development (podle předchozí poznámky) a metrizovatelný

$\Rightarrow$  parakompaktní  $\Rightarrow$  kolektivně normální.

$\Leftarrow$ : Dokážeme ve 4 částech:

1. Pro diskrétní soubor  $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$  uzavřených množin v  $\mathbb{X}$  existuje diskrétní soubor otevřených množin  $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , že  $F_\alpha \subseteq W_\alpha$ : Dle kolektivní normality existují otevřené disjunktní  $U_\alpha : \alpha \in A, F_\alpha \subseteq U_\alpha$ . Položme  $F = \bigcup \mathcal{F}$ ,  $Z = \mathbb{X} \setminus \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ .  $F$  uzavřená (sjednocení lokálního systému uzavřených množin),  $Z$  uzavřená.  $\mathbb{X}$  je kolektivně normální, tedy speciálně normální, tedy existují otevřené disjunktní  $V, W$ , že  $Z \subseteq V$  a  $F \subseteq W$ . Položme  $W_\alpha := U_\alpha \cap W$ . Systém  $\{W_\alpha\}$  už je diskrétní (je-li  $x \in Z$ , pak  $x \in V$  a  $V \cap W_\alpha = \emptyset$ , je-li naopak  $x$  v  $U_\alpha$ , pak  $U_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$  pro  $\beta \neq \alpha$ ) a  $F_\alpha \subseteq W_\alpha$ .

2. Ať  $\mathcal{V}_n$  je development prostoru  $\mathbb{X}$ . Buď  $\kappa \geq \omega$  a očísľujme  $\mathcal{V}_n = \{V_{\alpha,n} | \alpha < \kappa\}$  (s případným opakováním prvků). Položme  $D_{\alpha,n,k} = \{x \in V_{\alpha,n} | \text{st}(x, V_k) \subseteq V_{\alpha,n}\}$  a  $C_{\alpha,n,k} = D_{\alpha,n,k} \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} V_{\beta,n}$ .  $D_{\alpha,n,k}$  (a tudíž i  $C_{\alpha,n,k}$ ) je uzavřená:

Volme  $x \in \overline{D_{\alpha,n,k}}$ . Pak pro libovolné  $V \in \mathcal{V}_k$ , že  $x \in V$  platí, že existuje  $y \in V \cap D_{\alpha,n,k}$ . Pak  $V \subseteq \text{st}(y, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$ . Tedy  $\text{st}(x, \mathcal{V}_k) = \bigcup \{V \in \mathcal{V}_k | x \in V\} \subseteq V_{\alpha,n}$ . Tedy  $x \in D_{\alpha,n,k}$ , tudíž  $D_{\alpha,n,k}$  je uzavřená.

3. Pro pevná  $n, k \in \mathbb{N}$  je  $\{C_{\alpha,n,k} | \alpha < \kappa\}$  diskrétní: Buď  $y \in \mathbb{X}$  libovolné. Pak existuje nejmenší  $\beta < \kappa : y \in V_{\beta,n}$ . Najdeme  $V \in \mathcal{V}_k : y \in V$ . Pro  $\alpha > \beta : V_{\beta,n}$  je disjunktní s  $C_{\alpha,n,k}$  a pro  $\alpha < \beta : V$  je disjunktní s  $C_{\alpha,n,k}$  (kdyby existovalo  $z \in V \cap C_{\alpha,n,k}$  pak  $\text{st}(z, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$ , speciálně  $y \in V_{\alpha,n}$ , což je spor s minimalitou  $\beta$ ). Tedy  $V \cap V_{\beta,n}$  je okolí bodu  $y$ , které protíná nejvýše jeden prvek systému  $\{C_{\alpha,n,k} | \alpha \in A\}$  (a sice prvek  $C_{\beta,n,k}$ ).

4.  $\{C_{\alpha,n,k}\}$  je diskrétní soubor uzavřených množin (podle 2, 3). Podle 1 existuje diskrétní soubor otevřených nadmnožin  $\{V_{\alpha,n,k} | \alpha < \kappa\}$ . Tedy  $\mathcal{V}_{n,k} := \{V_{\alpha,n,k} \cap V_{\alpha,n} | \alpha < \kappa\}$  je diskrétní (zmenšili jsme jeho množiny). Ukážeme, že  $\mathcal{V} := \bigcup_{n,k \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_{n,k}$  je báze  $\mathbb{X}$ :

Ať  $U \subseteq \mathbb{X}$  je otevřená,  $x \in U$ .  $\exists n \in \mathbb{N} : \text{st}(x, \mathcal{V}_n) \subseteq U$ . Najdeme  $\alpha$  nejmenší možné, že  $x \in V_{\alpha,n}$ . Zřejmě  $V_{\alpha,n} \subseteq U$ . Opět z vlastností developmentu existuje  $k \in \mathbb{N} : \text{st}(x, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$ . Nyní  $x \in C_{\alpha,n,k}$ , tedy  $x \in V_{\alpha,n,k} \cap V_{\alpha,n} \subseteq U$ . Tudíž  $\mathcal{V}$  je báze  $\mathbb{X}$ .

$\mathcal{V}$  je  $\sigma$ -diskrétní báze  $\mathbb{X}$ , tedy podle metrizační věty Bing-Nagata-Smirnov je  $\mathbb{X}$  metrizovatelný. □

└

## 3 Uniformní prostory

### *Poznámka*

Zavedeno např. díky tomu, že stejnoměrnou spojitost nelze charakterizovat pomocí topologie.

Matematici Weil(1936), Tukey(1940) ... prvotní zkoumání UP.

### **Definice 3.1** (Značení)

Pro množinu  $\mathbb{X}$  značíme  $\Delta(X) = \{(x, x) | x \in X\}$ .

Pro  $E \subseteq X \times X$  značíme  $E^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in E\}$ .

Pro  $C, D \in X \times X$  značíme  $C \circ D = \{(x, z) \in X \times X | \exists y \in X : (x, y) \in C \wedge (y, z) \in D\}$ .

$E[x] = \{y \in X | (x, y) \in E\}$ .

### **Definice 3.2** (Uniformní prostor (UP))

Dvojice  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  se nazývá uniformní prostor (UP), pokud  $\mathbb{X}$  je množina a  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ ,  $\mathcal{D} \neq \emptyset$  splňující

1.  $\forall D \in \mathcal{D} : \Delta(\mathbb{X}) \subseteq D$ ,
2.  $\forall C, D \in \mathcal{D} : C \cap D \in \mathcal{D}$ ,
3.  $\forall D \in \mathcal{D} \exists C \in \mathcal{D} : C \circ C \subseteq D$ ,
4.  $\forall D \in \mathcal{D} : D^{-1} \in \mathcal{D}$ ,
5.  $\forall D \in \mathcal{D} \forall E \subseteq X \times X : D \subseteq E \implies E \in \mathcal{D}$ ,
6.  $\forall x, y \in X : x \neq y \implies \exists D \in \mathcal{D} : (x, y) \notin D$ . ( $\Leftrightarrow \bigcap \mathcal{D} = \Delta(\mathbb{X})$ .)

Prvky systému  $\mathcal{D}$  nazýváme okolí diagonály.

### **Definice 3.3** (Báze uniformity)

Systém  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X^2)$  se nazývá báze uniformity (resp. báze uniformity  $\mathcal{D}$ ), pokud uzavřením  $\mathcal{B}$  na nadmnožiny dostaneme  $\mathcal{D}$ .

### **Definice 3.4** (Subbáze uniformity)

Systém  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X^2)$  tvoří subbázi uniformity (resp. uniformity  $\mathcal{D}$ ), pokud uzavřením na konečné průniky dostaneme bázi uniformity (resp. bázi uniformity  $\mathcal{D}$ ).

### Definice 3.5 (Uniformní zobrazení)

Jsou-li  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  a  $(\mathbb{Y}, \mathcal{E})$  UP,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  se nazývá uniformní (stejněměrně spojitě), pokud  $\forall E \in \mathcal{E} : (f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{D}$ . ( $\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E} \exists D \in \mathcal{D} : (f \times f)(D) \subseteq E$ .) ( $\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E} \exists D \in \mathcal{D} \forall x, y \in \mathbb{X} : (x, y) \in D \implies (f(x), f(y)) \in E$ .)

### Definice 3.6 (Uniformní izomorfismus)

Zobrazení  $f$  se nazývá uniformní izomorfismus, pokud  $f$  je bijekce a  $f$  i  $f^{-1}$  jsou uniformní.

### Lemma 3.1

Systém  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}^2)$  tvoří bázi nějaké uniformity na  $\mathbb{X}$ , pokud

$$a) \bigcap \mathcal{B} = \Delta(\mathbb{X}),$$

$$b) \forall C, D \in \mathcal{B} \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq C \cap D,$$

$$c) \forall D \in \mathcal{B} \exists C \in \mathcal{B} : C \circ C \subseteq D,$$

$$d) \forall D \in \mathcal{B} \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq D^{-1}.$$

┌ Důkaz

└  $\mathcal{D} := \{C \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X} \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq C\}$ . Následně ověříme podmínky. □

### Tvrzení 3.2 (Vytvoření UP z MP a TP z UP)

Je-li  $(\mathbb{X}, \varrho)$  metrický prostor a  $D_\varepsilon = \{(x, y) \mid \varrho(x, y) < \varepsilon\}$ , potom  $\{D_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$  je báze nějaké uniformity na  $\mathbb{X}$  – značíme ji  $\mathcal{D}_\varrho$ . Tato uniformita se nazývá generovaná metrikou  $\varrho$ .

Je-li  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  UP, pak systém  $\tau_{\mathcal{D}} = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A \exists D \in \mathcal{D} : D[x] \subseteq A\}$  je topologie na  $\mathbb{X}$  a pro každé  $x \in \mathbb{X}$  tvoří systém  $\mathcal{B}(x) := \{D[x] \mid D \in \mathcal{D}\}$  bázi okolí v bodě  $x$ . Topologie  $\tau_{\mathcal{D}}$  se nazývá generovaná uniformitou  $\mathcal{D}$ .

Pokud místo systému  $\mathcal{D}$  použijeme v definici topologie  $\tau_{\mathcal{D}}$  nějakou bázi  $\mathcal{D}$ , pak dostaneme stejnou topologii. Zároveň také  $\tau_{\mathcal{D}_\varrho}$  je systém všech otevřených množin v  $(\mathbb{X}, \varrho)$ .

┌ Důkaz

└ Ověříme definice. □

### Definice 3.7

UP  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  se nazývá metrizable, pokud existuje metrika  $\varrho$  na  $\mathbb{X}$ , že  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\varrho$ . TP  $(\mathbb{X}, \tau)$  se nazývá metrizable, pokud existuje uniformita  $\mathcal{D}$  na  $\mathbb{X}$ , že  $\tau = \tau_{\mathcal{D}}$

### Definice 3.8

Ať  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ ,  $A \subseteq \mathbb{X}$ , pak značíme  $\text{st}(A, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap A \neq \emptyset\}$ .  $\mathcal{U}^* = \{\text{st}(U, \mathcal{U}) \mid U \in \mathcal{U}\}$ .

Pro  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  pokrytí  $\mathbb{X}$ , definujeme jejich společné zjemnění  $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$ .

*Poznámka*

Pro  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  pokrytí množiny  $\mathbb{X}$ :  $\mathcal{U}$  hvězdovitě zjemňuje  $\mathcal{V}$ , pokud  $\mathcal{U}^*$  zjemňuje  $\mathcal{V}$ .

### Definice 3.9

Ať  $\mathbb{X}$  je množina,  $\mathbf{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$  se nazývá pokrývací uniformita na  $\mathbb{X}$ , pokud:

- $\forall \mathcal{U} \in \mathbf{U} : \mathcal{U}$  je pokrytí  $\mathbb{X}$ ,
- Je-li  $\mathcal{U} \in \mathbf{U}$ ,  $\mathcal{V}$  pokrytí  $\mathbb{X}$  a  $\mathcal{U}$  zjemňuje  $\mathcal{V}$ , pak  $\mathcal{V} \in \mathbf{U}$ ,
- $\forall \mathcal{U} \in \mathbf{U} \exists \mathcal{V} \in \mathbf{U} : \mathcal{V}$  hvězdovitě zjemňuje  $\mathcal{U}$ ,
- $\forall \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathbf{U} : \mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \in \mathbf{U}$ ,
- $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists \mathcal{U} \in \mathbf{U} \forall U \in \mathcal{U} : |\{x, y\} \cap U| \leq 1$ .

Prvky systému  $\mathbf{U}$  se nazývají uniformní pokrytí.

Je-li  $\mathbf{U}$  pokrývací uniformita na  $\mathbb{X}$ , pak položíme

$$\mathcal{D}_{\mathbf{U}} := \{D \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbf{U} \forall u \in \mathcal{U} : U \times U \subseteq D\}.$$

Je-li  $\mathcal{D}$  (diagonální) uniformita na  $\mathbb{X}$ , pak položíme

$$\mathcal{U}_{\mathcal{D}} := \{\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{X})) \mid \exists D \in \mathcal{D} : \{D[x] \mid x \in \mathbb{X}\} \text{ zjemňuje } \mathcal{U}\}.$$

Přiřazení  $\mathbf{U} \mapsto \mathcal{D}_{\mathbf{U}}$  a  $\mathcal{D} \mapsto \mathbf{U}_{\mathcal{D}}$  jsou navzájem inverzní bijekce systému všech pokrývacích uniformit na  $\mathbb{X}$  a systém všech uniformit.

### Lemma 3.3 (O pseudometrice)

Ať  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  je UP a  $D_i \in \mathcal{D}$ ,  $D_i = D_i^{-1}$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ ,  $D_0 = \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ ,  $D_{i+1} \circ D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$ . Pak existuje pseudometrika  $d$  na  $\mathbb{X}$ , že pro každé  $i \geq 1$ :  $\{(x, y) : d(x, y) < \frac{1}{2^i}\} \subseteq D_i \subseteq \{(x, y) \mid d(x, y) \leq \frac{1}{2^i}\}$ .

*Důkaz*

Položme  $d(x, y) := \inf \left\{ \frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \dots + \frac{1}{2^{i_k}} \mid x_0, \dots, x_k \in \mathbb{X} \wedge (x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j} \wedge x = x_0, y = x_k \right\}$ .  
 $d(x, y)$  je pseudometrika na  $\mathbb{X}$ .  $D_i \subseteq \left\{ (x, y) \mid d(x, y) \leq \frac{1}{2^i} \right\}$  vidíme z toho, že pro  $(x, y) \in D_i$  zvolíme  $k = 1$ . Zbývá dokázat  $\left\{ (x, y) \mid d(x, y) < \frac{1}{2^i} \right\} \subseteq D_i$ . Tedy chceme, že  $d(x, y) < \frac{1}{2^i}$ , pak  $(x, y) \in D_i$ , tj. že pro každou posloupnost  $x_0, \dots, x_k$ , kde  $(x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j}$ : pokud  $\frac{1}{2^{i_1}} + \dots + \frac{1}{2^{i_k}} < \frac{1}{2^i}$ , pak  $(x_0, x_k) \in D_i$ . To dokážeme indukcí podle  $k$ :

Pro  $k = 1 : \frac{1}{2^{i_1}} < \frac{1}{2^i}$ , tj.  $i < i_1$ , tedy  $(x_0, x_k) \in D_{i_1} \subseteq D_i$ . Nyní předpokládejme, že  $m > 1$  a pro všechna  $k < m$  uvedené tvrzení platí. Uvažme posloupnost  $x_0, \dots, x_m$ , že  $(x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j}, j = 1, \dots, m$ , a  $\frac{1}{2^{i_1}} + \dots + \frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^i}$ . Zřejmě buď  $\frac{1}{2^{i_1}} < \frac{1}{2^{i+1}}$ , nebo  $\frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^{i+1}}$ . Ze symetrie obou případů můžeme BÚNO předpokládat platnost první nerovnosti.

Ať  $n \leq m - 1$  je největší takové, že  $\frac{1}{2^{i_1}} + \dots + \frac{1}{2^{i_n}} < \frac{1}{2^{i+1}}$ . Pokud  $n < m - 1$ , pak  $\frac{1}{2^{i+1}} + \dots + \frac{1}{2^{i_{n+1}}} \geq \frac{1}{2^{i+1}}$ , tedy  $\frac{1}{2^{i_{n+1}}} + \dots + \frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^{i+1}}$ . Podle indukčního předpokladu  $x_0, n \in D_{i+1}$ ,  $(x_{n+1}, x_m) \in D_{i+1}$ . Navíc  $\frac{1}{2^{i_{n+1}}} < \frac{1}{2^i}$ , tedy  $i < i_{n+1}$ ,  $i + 1 \leq i_{n+1}$ ,  $D_{i_{n+1}} \subseteq D_{i+1}$ .  $(x_0, x_m) = (x_0, x_n) \circ (x_n, x_{n+1}) \circ (x_{n+1}, x_m) \in D_{i+1} \circ D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$ .

Pokud  $n = m - 1$ , pak podle IP  $x_0, x_{m-1} \in D_{i+1}$ , a jelikož  $\frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^i}$ , tak  $(x_{m-1}, x_m) \in D_{i_m} \subseteq D_{i+1}$ . Tedy  $(x_0, x_m) \in D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$ .  $\square$

### Věta 3.4 (Metrizovatelnost UP)

$UP(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  je metrizovatelný, právě když má spočetnou bázi uniformity.

*Důkaz*

( $\implies$ ): Ať  $d$  je metrika na  $\mathbb{X}$  generující  $\mathcal{D}$ . Pak  $\left\{ \left\{ (x, y) : d(x, y) < \frac{1}{n} \right\} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  je báze  $\mathcal{D}$ .

( $\impliedby$ ): Ať  $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  je báze  $\mathcal{D}$ . Indukcí najdeme posloupnost  $D_n \in \mathcal{D}$ , že jsou splněny předpoklady předchozího lemmatu. A že  $D_i \subseteq C_i$ : Předpokládejme, že  $D_0, \dots, D_n$  máme ( $D_0 = \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ ), pak víme, že  $\exists E : E \circ E \subseteq D_n$ ,  $\exists F : F \circ F \subseteq E$ . Tedy  $F \circ F \circ F \subseteq D_n$ . Ať  $D_{n+1} := (F \cap C_{i+1}) \cap (F \cap C_{i+1})^{-1}$ . Tedy  $D_{n+1} \circ D_{n+1} \circ D_{n+1} \subseteq D_n$ ,  $D_{n+1} \subseteq C_{i+1}$ . Tedy podle lemmatu o pseudometrice existuje pseudometrika  $d$  na  $\mathbb{X}$ , že

$$\left\{ (x, y) \mid d(x, y) < \frac{1}{2^i} \right\} \subseteq D_i \subseteq \left\{ (x, y) \mid d(x, y) \leq \frac{1}{2^i} \right\}.$$

Pro  $x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists C \in \mathcal{D} : (x, y) \notin C$ .  $\exists i \in \mathbb{N} : C_i \subseteq C$ .  $D_i \subseteq C_i$ .  $(x, y) \notin D_i$ . Tedy  $d(x, y) \geq \frac{1}{2^i} > 0$ . Tedy  $d$  je metrika.  $d$  generuje uniformitu  $\mathcal{D}$ : Tj. pro  $\varepsilon > 0 \left\{ (x, y) \mid d(x, y) < \varepsilon \right\} \in \mathcal{D}$ . To platí díky vlastnosti z předchozího lemmatu. A pro  $D \in \mathcal{D} \exists \varepsilon > 0 : \left\{ (x, y) \mid d(x, y) < \varepsilon \right\} \subseteq D$ .  $D \in \mathcal{D}$  dané  $\exists i \in \mathbb{N} : C_i \subseteq D$ ,  $D_i \subseteq C_i \subseteq D$ .  $\varepsilon := \frac{1}{2^i}$ . To máme také díky vlastnosti z předchozího lemmatu.  $\square$

### Věta 3.5 (Jemná uniformita)

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  je TP. Všechny otevřené podmnožiny  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$  obsahující  $\delta(\mathbb{X})$  tvoří bázi nějaké uniformity na  $\mathbb{X}$  právě tehdy, když  $\mathbb{X}$  je parakompaktní.

*Poznámka (Reformulace)*

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  je TP. Všechna otevřená pokrytí  $\mathbb{X}$  tvoří bázi nějaké pokrývací uniformity na  $\mathbb{X}$ , právě když  $\mathbb{X}$  je parakompaktní.

*Důkaz*

Pokud všechna otevřená pokrytí  $\mathbb{X}$  tvoří bázi pokrývací uniformity, pak speciálně každé otevřené pokrytí má hvězdovité otevřené zjemnění. Tedy podle charakterizační věty je  $\mathbb{X}$  parakompaktní.

Je-li  $\mathbb{X}$  parakompaktní, tak podle charakterizační věty má každé otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$  otevřené hvězdovité zjemnění a snadno se ověří, že  $\{\mathcal{U} | \mathcal{U} \text{ je pokrytí } \mathbb{X}, \text{ které je zjemňované nějakým otevřeným zjemněním}\}$  je pokrývací uniformita na  $\mathbb{X}$ .  $\square$

### Věta 3.6 (Uniformizovatelnost TP)

*TP je uniformizovatelný (tj. generován nějakou uniformitou), právě když je Tichonovův.*

*Důkaz*

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  je generovaný uniformitou  $\mathcal{D}$ . Buď  $F \subseteq \mathbb{X}$  uzavřená,  $x \in \mathbb{X} \setminus F$ . Pak existuje  $D \in \mathcal{D} : D[x] \subseteq \mathbb{X} \setminus F$ . Ať  $d$  je pseudometrika z předchozího lemmatu, kde volíme  $D_1 = D$ . Pak  $B_d(x, \frac{1}{2}) \subseteq D[x]$ . Definujeme  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(y) = d(x, y)$ ,  $0 \leq f \leq 1$ ,  $f(x) = 0$  a  $f$  je spojitá. Pro  $y \in F : f(y) \geq \frac{1}{2}$ . Tedy  $\mathbb{X}$  je  $T_\pi$ .

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  je Tichonovův. Pak uvažme  $\beta\mathbb{X}$ .  $\beta\mathbb{X}$  je (para)kompaktní. Tedy na  $\beta\mathbb{X}$  máme jemnou uniformitu, která generuje topologii na  $\beta\mathbb{X}$ . Tuto jemnou uniformitu na  $\beta\mathbb{X}$  můžeme zúžit na  $\mathbb{X}$  a ta již generuje topologii  $\tau$ .  $\square$

## 3.1 Operace s uniformními prostory

### Definice 3.10

Ať  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  je UP,  $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ . Pak uniformní podprostor  $(\mathbb{Y}, \mathcal{D}_{\mathbb{Y}})$  je definován následovně  $\mathcal{D}_{\mathbb{Y}} := \{D \cap (\mathbb{Y} \times \mathbb{Y}) | D \in \mathcal{D}\}$ .

Jsou-li  $(\mathbb{X}_i, \mathcal{D}_i)$  UP, pak suma těchto UP je definována jako  $(\bigcup \mathbb{X}_i, \{\bigcup D_i | D_i \in \mathcal{D}_i\})$ . Součin pak jako  $(\prod \mathbb{X}_i | \{\prod D_i | D_i \in \mathcal{D}_i, \text{Fin}(D_i \neq \mathbb{X}_i \times \mathbb{X}_i)\})$ . (Tedy jsou různé od identity jen v konečně mnoha případech.)

## 3.2 Úplnost a totální omezenost

### Definice 3.11 (Net)

Net  $(x_i)_{i \in I}$  UP  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  se nazývá cauchyovský, pokud  $\forall D \in \mathcal{D} \exists i_0 \in I \forall i, j \geq i_0 : (x_i, x_j \in D)$ .

**Definice 3.12** (Úplný a totálněomezený prostor)

$UP(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  se nazývá úplný, pokud každý cauchyovský net v  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  je konvergentní v  $(\mathbb{X}, \tau_{\mathcal{D}})$ .

$UP(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  se nazývá totálně omezený, pokud  $\forall E \in \mathcal{D} \exists K \subseteq \mathbb{X}$  konečná:  $E[K] = \mathbb{X}$ .

*Poznámka*

MP je totálně omezený (úplný)  $\Leftrightarrow$  UP jím generovaný je totálně omezený (úplný).

*Poznámka*

$UP(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  je totálně omezený  $\Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{D} \exists$  konečné pokrytí  $U_1, \dots, U_n$  prostoru  $\mathbb{X}$ , že  $(U_1 \times U_1) \cup \dots \cup (U_n \times U_n) \subseteq D$ .

**Věta 3.7**

Bud'  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  UP. Pak  $(\mathbb{X}, \tau_{\mathcal{D}})$  je kompaktní  $\Leftrightarrow (\mathbb{X}, \mathcal{D})$  je úplný a totálně omezený.

┌

*Důkaz*

$\Rightarrow$  Je-li  $D \in \mathcal{D}$ , pak  $\{\text{int } D[x] \mid x \in \mathbb{X}\}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Tedy z kompaktnosti existuje konečné podpokrytí  $\{\text{int } D[x_1], \dots, \text{int } D[x_n]\}$ . Tedy pro  $K := \{x_1, \dots, x_n\}$  je  $D[K] = \bigcup D[x_i] \supseteq \bigcup \text{int } D[x_i] = \mathbb{X}$ .

Ať  $(x_i)_{i \in I}$  je cauchyovský net v  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ . Z charakterizace kompaktnosti víme, že  $(x_i)_{i \in I}$  má hromadný bod – řekněme  $x$ . Ukážeme, že  $x$  je limitou netu  $x_i$  (tj.  $x_i$  konverguje k  $x$ ). Ať  $U$  je okolí  $x$ . Pak existuje symetrické  $D \in \mathcal{D} : (D \circ D)[x] \subseteq U$ . Z cauchyovskosti existuje  $i_0$ , že pro  $i, j \geq i_0 : (x_i, x_j) \in D$

└

□

TODO

## 4 Topologické grupy

**Definice 4.1** (Topologická grupa)

$(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$  se nazývá topologická grupa (TG), pokud  $(\mathbb{G}, \cdot)$  je grupa,  $(\mathbb{G}, \tau)$  je TP a  $\cdot : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$  je spojitý,  $^{-1} : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$  je spojitý.

*Pozorování*

Ať  $\mathbb{G}$  je TG. Pak:

- $^{-1}$  je homeomorfismus.
- $\forall g \in \mathbb{G} : L_g : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}, L_g(h) := g \cdot h$  (tzv. levá translace) je homeomorfismus.



$$(L_g^{-1} = L_{g^{-1}}.)$$

- $\forall x, y \in \mathbb{G} \exists h : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$  homeomorfismus:  $h(x) = y$ . ( $L_{yx^{-1}}(x) = y$ .)
- $\forall U$  okolí  $e \exists V$  okolí  $e$ :  $V \cdot V^{-1} := \{u \cdot v^{-1} | u \in V, v \in V\} \subseteq U$ .
- Pro  $U$  otevřenou v  $\mathbb{G}$  a  $M \subseteq \mathbb{G}$  libovolnou  $M \cdot U$  je otevřené.
- Uzávěr podgrupy  $H \leq \mathbb{G}$  je opět grupa.
- Uzávěr normální (algebraicky) podgrupy je normální (algebraicky) podgrupa.
- Je-li  $H$  podgrupa  $\mathbb{G}$  s neprázdným vnitřkem, pak je obojetná.
- Součin TG se součinovou topologií a operací po složkách je TG.

#### Tvrzení 4.1 (Uniformita na TG)

Ať  $\mathbb{G}$  je TG. Pak systém  $\{D_U | U \text{ je okolí } e\}$ , kde  $D_U = \{(x, y) | x \cdot y^{-1} \in U\}$ , je bázi nějaké uniformity na  $\mathbb{G}$ . (Tzv. pravá uniformita na  $\mathbb{G}$ ). Tato uniformita je kompatibilní s topologií  $\mathbb{G}$ .

┌

*Důkaz*

$\delta(G) \subseteq D_u$ . Ať  $U$  je okolí  $e$ . Chceme najít  $V$  okolí  $e$  :  $D_V \circ D_V \subseteq D_U$ . Uvažme spojitě zobrazení  $(x, y) \mapsto x \cdot y$ ,  $x, y \in \mathbb{G}$ .  $(e, e) \rightarrow e$ .

Tedy existuje  $V$  okolí  $e$ :  $V \cdot V \subseteq U$ . Nyní  $D_V \circ D_V \subseteq D_u$ : Ať  $(a, b) \in D_V \circ D_V$ . Pak existuje  $c \in G$  :  $(a, c) \in D_V$ ,  $(c, b) \in D_V$ .  $a \cdot c^{-1} \in V$  a  $cb^{-1} \in V$ , tedy  $a \cdot c^{-1} \cdot c \cdot b^{-1} \in V \cdot V \subseteq U$ .  $a \cdot b^{-1} \in U$ .  $(a, b) \in D_U$ . Pro  $V, W$  okolí  $e$ :  $D_V \cap D_W \supseteq D_{V \cap W}$ . Tedy  $\{D_U | U \text{ okolí } e\}$  tvoří bázi uniformity.

Tato uniformita je kompatibilní s původní topologií na  $\mathbb{G}$ : Ať  $V$  okolí  $e$ ,  $x \in \mathbb{G}$ .  $D_V[x] = \{y \in \mathbb{G} | xy^{-1} \in V\} = \{y \in \mathbb{G} | y \in V^{-1} \cdot x\}$  i =  $V^{-1} \cdot x$  je okolí  $x$ . □

└

#### Věta 4.2

*Každá TG je Tichonovova.*

┌

*Důkaz*

Ať  $(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$  je TG. Ať  $\mathcal{D}$  je pravá uniformita na  $(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$ . Víme, že  $(\mathbb{G}, \tau_{\mathcal{D}})$  je Tichonovův. Předchozí tvrzení dává, že  $\tau_{\mathcal{D}} = \tau$ . □

└

#### Věta 4.3 (Metrizovatelnost TG)

*TG je metrizovatelná, právě když má spočetný charakter.*

┌ *Důkaz*

$\implies$  : Triviální (každý met. prostor má spočetný charakter).  $\Leftarrow$ : Ať  $(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$  má spočetný charakter. Ať  $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  je báze okolí v  $e$ .  $D_n := \{(x, y) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G} \mid xy^{-1} \in U_n\}$ ,  $\{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  je báze pravé uniformity  $\mathcal{D}$ . Tedy  $\mathcal{D}$  má spočetnou bázi. Tedy  $(\mathbb{G}, \mathcal{D})$  je metrizovatelný, tedy  $(\mathbb{G}, \tau)$  je metrizovatelný.  $\square$

*Poznámka* (Informativně)

Věta (Birkhoff Kahutani): Každá metrizovatelná grupa má zleva (zprava) invariantní metriku, tj. metrika  $\varrho$ , že  $\varrho(x, y) = \varrho(c \cdot x, c \cdot y)$ ,  $\forall c, x, y \in \mathbb{G}$ .

#### **Tvrzení 4.4** (Spojitost homomorfismu)

Ať  $\mathbb{G}, \mathbb{H}$  jsou TG.  $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$  je homomorfismus grup.  $f$  je spojitý  $\Leftrightarrow f$  je spojitý v  $e \in \mathbb{G}$ .

┌ *Důkaz*

$\implies$  : zřejmě.  $\Leftarrow$ : Ať  $x \in \mathbb{G}$ ,  $(x_i)_{i \in I}$  je net v  $\mathbb{G}$ , který konverguje k  $x$ . Chceme, že  $(f(x_i))_{i \in I}$  konverguje k  $f(x)$  v  $\mathbb{H}$ .  $(x_i \cdot x^{-1})_{i \in I}$  je net v  $\mathbb{G}$ , konverguje k  $x \cdot x^{-1} = e \in \mathbb{G}$ .  $f$  spojitý v  $e$ , tedy  $f(x_i \cdot x^{-1})$  konverguje k  $f(e) = e \in \mathbb{H}$ . Tudíž  $f(x_i) \cdot (f(x))^{-1} \rightarrow e \in \mathbb{H}$ . Tudíž (po vynásobení  $f(x)$ )  $f(x_i) \rightarrow f(x)$ . Tedy  $f$  spojitý v  $x$ .  $x \in \mathbb{G}$  libovolné. Tedy  $f$  je spojitý.  $\square$

#### **Věta 4.5** (Faktor TG)

Bud  $N$  uzavřená normální podgrupa TG  $\mathbb{G}$ . Pak faktogrupa  $\mathbb{G}/N$  s kvocientovou topologií je TG a přirozená projekce (= kvocientové zobrazení)  $\pi : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}/N$ ,  $\pi(g) := g \cdot N$ , je spojitý a otevřený homeomorfismus.

┌ *Důkaz*

Víme:  $\pi$  je spojitý homeomorfismus.  $\pi$  je otevřený: je-li  $U \subseteq \mathbb{G}$  otevřený, pak  $\pi(U) = \{xN : x \in U\} \subseteq G/N$ ,  $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cdot N$  je otevřením. Tedy z definice kvocientové topologie je  $\pi(U)$  otevřená množina.

$\mathbb{G}/N$  je TG: Násobení je spojitý:  $f : \mathbb{G} \times G \rightarrow \mathbb{G}/N$ ,  $f(g, h) := g \cdot h \cdot N$  je spojitý, jelikož je to složení součinu a kvocientového zobrazení. Poznamenejme, že můžeme přirozeně identifikovat  $\mathbb{G} \times \mathbb{G}/N \times N$  a  $(\mathbb{G}/N) \times (\mathbb{G}/N)$ . Operace součinu na  $G/N$  je kvocientem spojitého zobrazení  $f$ . Tedy je také spojitý podle charakterizace spojitosti a projektivně vytvořeného prostoru.

Spojitosť  $^{-1}$  se ukáže obdobně.

Zbývá ověřit, že  $\mathbb{G}/N$  je Hausdorffův. Stačí ověřit, že je  $T_1$ .  $N$  je uzavřená, tedy  $G \setminus N$  je otevřená.  $\pi^{-1}(G/N \setminus \{N\}) = G \setminus N$  je otevřená. Tedy z definice kvocientové topologie  $G/N \setminus \{N\}$  je otevřená v  $G/N$ , ...  $\square$

#### **Tvrzení 4.6** (O homomorfismu)

Ať  $\mathbb{G}, \mathbb{H}$  jsou TG a  $f : G \rightarrow H$  spojitý homomorfismus. Pak  $N := f^{-1}(e)$  je normální (uzavřená) podgrupa  $G$  a existuje spojitý homomorfismus  $\bar{f} : G/N \rightarrow H$ , že  $\bar{f}\pi = f$  (kde  $\pi : G \rightarrow G/N$  je přirozená projekce).

┌ Poznámka  
└  $\bar{f}$  nemusí být vnoření topologických prostorů.

┌ Důkaz  
└ Bez důkazu. □

#### **Tvrzení 4.7** (O izomorfismu)

Ať  $\mathbb{G}$  je TG,  $K \subseteq H$  její uzavřené normální podgrupy. Pak  $H/K$  je uzavřenou normální podgrupou  $G/K$  a  $(G/K)/(H/K)$  je izomorfně homeomorfní s  $G/H$ .

┌ Důkaz  
└ Bez důkazu. □

## 5 Souvislé prostory

### **Definice 5.1**

TP se nazývá souvislý, pokud je neprázdný a nelze ho vyjádřit jako sjednocení dvou disjunktních otevřených neprázdných množin. (Tj. obsahuje právě dvě obojetné množiny, sám sebe a prázdný prostor.)

### **Tvrzení 5.1**

Pro neprázdný TP  $\mathbb{X}$  je ekvivalentní: a)  $\mathbb{X}$  je souvislý, b)  $Je-li \mathbb{X} = A \cup B$  a  $\bar{A} \cap B = \emptyset = \bar{B} \cap A$ , pak  $A = \emptyset$  nebo  $B = \emptyset$ . c)  $\mathbb{X}$  neobsahuje vlastní obojetnou podmnožinu. d) Každé spojitě zobrazení  $f : \mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$  je konstantní.

┌ Důkaz  
└ Přímočaré. □

### **Tvrzení 5.2**

Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý.

┌  
Důkaz

Ať  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  je spojitě zobrazení,  $\mathbb{X}$  souvislé,  $f$  na. Sporem.  $\mathbb{Y}$  není souvislý. Potom z minulého tvrzení  $\exists g : \mathbb{Y} \rightarrow \{0, 1\}$  spojitý nekonstantní. Potom ale  $g \circ f : \mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$  je spojitě a nekonstantní  $\implies \mathbb{X}$  není souvislý.  $\nabla$  □

└

### **Tvrzení 5.3** (Sjednocení souvislých množin)

Ať  $C_i \subseteq \mathbb{X}$ ,  $C_i$  souvislé,  $i \in I$ ,  $0 \in I$ ,  $C_i \cap C_0 \neq \emptyset$  pro  $i \in I$ . Pak  $\bigcup C_i$  je souvislé.

┌  
Důkaz

Ať  $O$  je neprázdná obojetná množina v  $\bigcup C_i$ . Existuje  $j \in I$ ,  $C_j \cap O \neq \emptyset$ .  $C_j \cap O$  je obojetná v  $C_j$ ,  $C_j$  je souvislá, tedy  $C_j \subseteq O$ . Tedy  $C_0 \cap O \neq \emptyset$ , tj.  $C_0 \subseteq O$ . Je-li  $i \in I$  libovolná, pak  $C_i \cap O \neq \emptyset$  a opět  $C_i \subseteq O$ . Tudíž  $O = \bigcup C_i$ , tj.  $\bigcup C_i$  je souvislá. □

└

Důsledek

Jsou-li  $C_i$  souvislé v TP  $\mathbb{X}$ ,  $i \in I$  a  $\bigcap C_i \neq \emptyset$ , pak  $\bigcup_{i \in I} C_i$  je souvislá.

┌  
Důkaz

Předchozí s  $C_0 := \{x_0\} \subseteq \bigcap C_i$ . □

└

Důsledek

Je-li  $A \subseteq \mathbb{X}$  souvislá a  $A \subseteq M \subseteq \overline{A}$ , pak  $M$  je souvislá.

┌  
Důkaz

$C_a := A \cup \{a\}$  pro  $a \in M \setminus A$ . Vzhledem k předchozímu stačí ověřit, že  $C_a$  je souvislá ( $M = \bigcup_{a \in M \setminus A} C_a$ ). □

└

### **Věta 5.4**

Buď  $\mathbb{X}$  Tichonovův prostor. Pak  $\mathbb{X}$  je souvislý  $\Leftrightarrow \beta\mathbb{X}$  je souvislý.

┌  
Důkaz

$\implies$  :  $\overline{\mathbb{X}} = \beta\mathbb{X}$ ,  $\mathbb{X}$  je souvislá  $\implies \overline{\mathbb{X}}$  je souvislá  $\implies \beta\mathbb{X}$  je souvislá.

$\Leftarrow$  : Ať  $\beta\mathbb{X}$  je souvislý. Ať  $f : \mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$  je spojitě zobrazení. Z vlastností  $\beta\mathbb{X}$  existuje spojitě rozšíření  $\bar{f} : \beta\mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$ .  $\beta\mathbb{X}$  je souvislý  $\implies \bar{f}$  je konstantní  $\implies f$  je konstantní  $\implies \mathbb{X}$  je souvislý. □

└

### **Věta 5.5** (Součin souvislých prostorů)

Ať  $\mathbb{X}_i : i \in I$  jsou TP. Pak  $\prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$  je souvislý  $\Leftrightarrow \forall i \in I : \mathbb{X}_i$  je souvislý.

┌ *Důkaz*

Pokud některý  $\mathbb{X}_i = \emptyset$ , tvrzení platí. Dále ať  $\mathbb{X}_i \neq \emptyset$ ,  $i \in I$ .  $\implies$  : Je-li  $\prod \mathbb{X}_i$  souvislý,  $\pi_j : \prod \mathbb{X}_i \rightarrow \mathbb{X}_j$  je spojitý a na, tedy i  $\mathbb{X}_j$  je souvislý.

$\Leftarrow$  : Nejprve pro dva prostory  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ :  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y} = (\{x_0\} \times \mathbb{Y}) \cup \bigcup_{y \in \mathbb{Y}} \mathbb{X} \times \{y\}$ . Tedy podle tvrzení výše je  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  souvislý. Indukcí dokážeme pro konečně mnoho. Obecně:  $\forall i \in I$  fixujeme bod  $x_i \in \mathbb{X}_i$ .

$$M := \left\{ (y_i)_{i \in I} \in \prod \mathbb{X}_i : y_i = x_i \text{ pro všechna } i \in I \text{ až na konečně mnoho výjimek} \right\}.$$

$$M = \bigcup_{K \subseteq I \text{ konečná}} \left( \prod_{i \in K} \mathbb{X}_i \times \prod_{i \in I \setminus K} \{x_i\} \right).$$

To znamená, že  $M$  je souvislé, protože je sjednocením souvislých množin s průnikem obsahujícím  $(x_i)_{i \in I}$ . Ale  $M$  je hustá v  $\prod \mathbb{X}_i$ .  $\overline{M}$  je souvislá, tedy  $\prod \mathbb{X}_i$  je souvislá.  $\square$

## Definice 5.2 (Komponenta souvislosti)

Ať  $\mathbb{X}$  je TP,  $x \in \mathbb{X}$ , pak komponenta souvislosti bodu  $x$  je největší souvislá množina, která  $x$  obsahuje. Značíme ji  $C_x$ .

┌ *Důkaz (Existence)*

Plyne z jednoho z důsledků:  $\bigcup \{C \mid x \in C \wedge C \text{ je souvislá}\}$  je souvislá a maximální. Navíc je to vždy uzavřená množina.  $\square$

┌ *Poznámka*

Komponenty souvislosti tvoří rozklad, tj.  $C_x = C_y$  nebo  $C_x \cap C_y = \emptyset$ .

## Tvrzení 5.6

Jsou-li  $\mathbb{X}_i$  TP a  $x_i \in \mathbb{X}_i$ ,  $C_i$  komponenta bodu  $x_i$  v  $\mathbb{X}_i$ . Pak  $\prod C_i$  je komponenta  $(x_i)_{i \in I}$  v  $\prod \mathbb{X}_i$ .

┌ *Důkaz*

┌ Cvičení.  $\square$

## Definice 5.3 (Kvazikomponenty)

Ať  $\mathbb{X}$  je TP. Množina  $Q \subseteq \mathbb{X}$  se nazývá kvazikomponenta bodu  $x \in \mathbb{X}$  v prostoru  $\mathbb{X}$ , pokud  $Q = \bigcap \{Z \mid x \in Z \wedge Z \text{ obojetná}\}$ . Značíme ji  $Q_x$ .

┌ *Poznámka*

$\forall x \in \mathbb{X} : C_x \subseteq Q_x$ . Navíc  $Q_x$  je uzavřená. A opět tvoří rozklad prostoru  $\mathbb{X}$ .

*Například (TP  $\mathbb{X}$ , že  $C_x \neq Q_x$ )*

$\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^2$  skládající se ze 2 bodů  $x, y$  a úseček k nim konvergujícím ( $:|| \quad | \quad |$ ).  $C_x = \{x\}$ ,  $Q_x = \{x, y\}$ .

### Lemma 5.7 (O průniku v kompaktu)

*Bud'  $\mathbb{X}$  kompaktní TP,  $\mathcal{A}$  soubor uzavřených množin v  $\mathbb{X}$ .  $U \subseteq \mathbb{X}$  otevřená a  $\bigcap \mathcal{A} \subseteq U$ . Pak existuje konečný systém  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} : \bigcap \mathcal{F} \subseteq U$ .*

┌

*Důkaz*

Kdyby ne, pak  $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$  konečné:  $\bigcap \mathcal{F} \setminus U \neq \emptyset$ . Tedy  $\mathcal{A} \cup \{\mathbb{X} \setminus U\}$  má konečnou průnikovou vlastnost.  $\mathbb{X}$  kompaktní:  $\bigcap \mathcal{A} \cap (\mathbb{X} \setminus U) \neq \emptyset$ . Tedy  $\bigcap \mathcal{A} \not\subseteq U$ .  $\nabla$ . □

└

### Věta 5.8

*V kompaktním TP komponenty a kvazikomponenty splývají.*

┌

*Důkaz*

Ať  $x \in \mathbb{X}$ .  $C_x \subseteq Q_x$ . Pro  $Q_x \subseteq C_x$  stačí dokázat, že  $Q_x$  je souvislá. Předpokládejme  $E \cup F$ ,  $E, F$  uzavřené (v  $Q_x$ , a tedy i v  $\mathbb{X}$ ) disjunktní množiny. BÚNO  $x \in E$ .  $\mathbb{X}$  je normální, tedy existují otevřené disjunktní množiny  $U, V$ :  $E \subseteq U$ ,  $F \subseteq V$ .  $Q_x = E \cup F \subseteq U \cup V$ . Podle předchozího lemmatu existují obojetné množiny  $Q_1, \dots, Q_n : Q_1 \cap \dots \cap Q_n \subseteq U \cup V$ . Otevřené  $O \cap U = O \setminus V$  uzavřené, tedy  $x \in O \cap U$ , tedy  $Q_x \subseteq O \cap U$ . Tedy  $F = \emptyset$ . Proto  $Q_x$  je souvislá. □

└

### Definice 5.4 (Křivková a oblouková souvislost)

TP  $\mathbb{X}$  se nazývá obloukově (resp. křivkově) souvislý, pokud  $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists f : [0, 1] \rightarrow f([0, 1])$  homeomorfní (resp.  $f$  spojitě), že  $f(0) = x$ ,  $f(1) = y$ .

┌

*Poznámka*

Obecně je mezi nimi rozdíl, v Hausdorffových prostorech je to totéž.

└

## 6 Kontinua

### Definice 6.1 (Kontinuum)

Kontinuum je kompaktní souvislý prostor.

Jednoprvkové kontinuum se nazývá degenerované, ostatní nedegenerovaná.

### **Tvrzení 6.1**

*Ať  $K_n$  je klesající (vzhledem k inkluzi) posloupnost kontinuí, pak  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$  je opět kontinuum.*

┌ *Důkaz*

$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$  je zřejmě kompaktní. Předpokládejme, že  $K = E \cup F$ , kde  $E, F$  jsou uzavřené disjunktní. Chceme  $E = \emptyset$  nebo  $F = \emptyset$ .  $K_1$  je normální, tedy existují otevřené disjunktní  $U, V$ , že  $E \subseteq U$  a  $F \subseteq V$ . Podle lemmatu o průniku v kompaktu existuje  $n \in \mathbb{N}$ , že  $K_n \subseteq U \cup V$ , tedy  $K_1 = (K_n \cap U) \cup (K_n \cap V)$ .  $K_n$  je sovislá, tedy  $K_n \cap U = \emptyset$  nebo  $K_n \cap V = \emptyset$ . Tedy  $E = \emptyset$  nebo  $F = \emptyset$ . □

└

### **Tvrzení 6.2** (Bum do hranice (Boundary bumping theorem))

*Ať  $\mathbb{X}$  je kontinuum,  $A$  vlastní uzavřená podmnožina  $\mathbb{X}$ . Pak každá komponenta množiny  $A$  protíná hranici  $A$ .*

┌ *Důkaz*

$A = \emptyset$  nemá žádnou komponentu. Tedy  $A \neq \emptyset, x \in A, C_x \dots$  komponenta bodu  $x$  v  $A$ . Pro spor předpokládejme, že  $C_x \cap \partial A = \emptyset$ .  $A \subset \mathbb{X}$ ,  $\mathbb{X}$  je kontinuum, tedy  $\partial A \neq \emptyset$ . Víme, že  $C_x$  je kvazikomponenta  $\mathbb{X}$ ,  $C_x \subseteq A \setminus \partial A$ . Tedy podle lemmatu o průniku v kompaktu existuje obojetná množina  $Z$  v  $A$ , že  $C_x \subseteq Z \subseteq A \setminus \partial A$ .  $Z$  je uzavřená v  $\mathbb{X}$ , neprázdná, vlastní. Navíc  $Z$  je otevřená v  $A$  a neprotíná hranici, tedy  $Z$  je otevřená v  $\mathbb{X}$  ( $Z$  je otevřená v otevřené  $A \setminus \partial A$ ).  $Z$  je tedy obojetná vlastní podmnožina v  $\mathbb{X}$ ,  $\nabla$ . □

└

### **Věta 6.3** (Sierpinski)

*Ať  $\mathbb{X}$  je kontinuum,  $X_n, n \in \mathbb{N}$  po dvou disjunktní uzavřené množiny v  $\mathbb{X}$ , že  $X = \bigcup X_n$ . Pak všechna  $X_n = \emptyset$  až na jednu výjimku.*

┌ *Důkaz*

Je-li kontinuum  $\mathbb{D}$  spočetným sjednocením uzavřených neprázdných disjunktních množin  $Y_i, i \in \mathbb{N}$ , pak pro každé  $i \in \mathbb{N}$  existuje kontinuum  $C \subseteq \mathbb{D}$ , které je disjunktní s  $Y_i$ , ale není obsaženo v žádném  $Y_j, j \in \mathbb{N}$  (protíná alespoň 2). Důkaz:

Fixujeme  $j \neq i$ : existují disjunktní otevřené  $U, V: Y_j \subseteq U, Y_i \subseteq V$ . Buď  $C$  komponenta libovolného bodu z  $Y_j$  v množině  $\bar{U}$ . Podle b.m. do hranice víme, že  $C \cap \partial \bar{U} \neq \emptyset$ . Tj.  $\partial \bar{U} \cap Y_j = \emptyset$ , tedy  $C \not\subseteq Y_j$ .  $C \subseteq \bar{U} \subseteq \mathbb{D} \setminus V$ , tedy  $C \cap Y_i = \emptyset$ .

Důkaz věty: Sporem: Existují alespoň dva indexy  $n \neq m : X_n \neq \emptyset \neq X_m$ . Kdyby  $\{k \in \mathbb{N} : X_k \neq \emptyset\}$  byla konečná, pak  $\mathbb{X}$  je sjednocením konečně mnoha disjunktních uzavřených neprázdných množin, tyto množiny by již byly obojetné, spor se souvislostí  $\mathbb{X}$ .

BÚNO (vyházíme prázdné a přeindexujeme)  $X_n \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$ . Indukcí najdeme posloupnost kontinuí  $C_n$ , že  $C_{n+1} \subseteq C_n \wedge C_n \cap X_n = \emptyset \wedge C_n$  není obsaženo v žádném  $X_i, i \in \mathbb{N}$ . Podle prvního odstavce  $\mathbb{X} = \mathbb{D}, X_j = Y_j, i = 1$  existuje  $C = C_j$ . Dále uvažme  $C_1$ . To protíná nekonečně mnoho z množin  $X_i$ . V druhém kroku indukce použijeme první odstavec na  $\mathbb{D} = C_1, \{Y_i | i \in \mathbb{N}\} = \{C_1 \cap X_i | C_1 \cap X_i \neq \emptyset\}, \dots$

└  $\bigcap C_n \neq \emptyset$ , ať tedy  $c \in \bigcap C_n$ .  $c \notin \bigcup X_n = \mathbb{X}$ .  $\nexists$ .

□

## Definice 6.2 (Rozložitelné a nerozložitelné kontinuum)

Kontinuum  $\mathbb{X}$  se nazývá rozložitelné, pokud existují dvě vlastní podkontinua  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$  (ne nutně disjunktní), že  $\mathbb{X} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ . Jinak je nerozložitelné.

## Věta 6.4 (Charakterizace nerozložitelnosti)

*Kontinuum  $\mathbb{X}$  je nerozložitelné, právě když každé jeho vlastní podkontinuum je v něm řídké (tj. uzávěr má prázdný vnitřek).*

┌ *Důkaz*

$\Leftarrow$  Kdyby  $X = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ ,  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$  vlastní podkontinua, pak  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$  řídké.  $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$  je řídká v  $\mathbb{X}$ ,  $\nexists$ .

$\Rightarrow$  : Ať  $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$  je vlastní podkontinuum  $\mathbb{X}$ ,  $\text{int } \mathbb{Y} \neq \emptyset$ . Ať  $M = \overline{\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}}$ . Pak  $M$  je souvislá:  $\mathbb{X} = M \cup \mathbb{Y}$  a  $M$  je kontinuum, tedy  $\mathbb{X}$  je rozložitelné. Nebo  $M$  je nesouvislá:  $M = E \cup F$ , kde  $E, F$  jsou uzavřené disjunktní neprázdné podmnožiny v  $M$ . Potom  $(\mathbb{Y} \cup E) \cup (\mathbb{Y} \cup F)$ . Ale tyto dvě množiny jsou vlastní uzavřené podmnožiny  $\mathbb{X}$ , které jsou souvislé (neboť každá komponenta  $E$  nebo  $F$  protíná jejich hranici a ta je podmnožinou  $\mathbb{Y}$  a sjednocení souvislých protínajících se ve stejném bodě je souvislé). □

## 7 Nesouvislost (absence souvislosti)



## Definice 7.1

TP  $\mathbb{X}$  se nazývá

- dědičně nesouvislý, pokud jeho jediné souvislé podprostory jsou jednobodové (tj. komponenty bodů jsou jednoprvkové).
- totálně nesouvislý, jestliže  $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y, \exists$  obojetná  $Z \subseteq \mathbb{X} : x \in Z \wedge y \notin Z$ .
- nulldimenzionální, pokud  $\mathbb{X}$  má bázi tvořenou obojetnými množinami (tj. pro  $x \in \mathbb{X}$ ,  $U$  okolí  $x$  existuje obojetná  $Z \subseteq \mathbb{X} : x \in Z \subseteq U$ ).
- silně nulldimenzionální, pokud  $\mathbb{X}$  je normální a pro uzavřené disjunktní  $E, F \subseteq \mathbb{X}$  existuje obojetná  $Z \subseteq \mathbb{X} : E \subseteq Z \subseteq \mathbb{X} \setminus F$ .

### Poznámka

Definici silné nulldimenzionality lze zobecnit na Tichonovovy prostory: Tichonovův prostor  $\mathbb{X}$  se nazve silně nulldimenzionální, pokud  $\forall E, F \subseteq \mathbb{X}, E, F$  funkcionálně oddělené množiny (tj.  $\exists f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá, že  $E \subseteq f^{-1}(0), F \subseteq f^{-1}(1)$ ) existuje obojetná  $Z \subseteq \mathbb{X} : E \subseteq Z \subseteq \mathbb{X} \setminus F$ .

## Tvrzení 7.1

*Silně nulldimenzionální  $\implies$  nulldimenzionální  $\implies$  totálně nesouvislý  $\implies$  dědičně nesouvislý.*

┌

*Důkaz*

└ Snadné cvičení. □

### Poznámka

Obecně nelze žádnou z výše uvedených implikací obrátit.

## Věta 7.2

*Ať  $\mathbb{X}$  je kompaktní TP. Pak je ekvivalentní:*

1.  $\mathbb{X}$  je dědičně nesouvislý.
2.  $\mathbb{X}$  je totálně nesouvislý.
3.  $\mathbb{X}$  je nulldimenzionální.
4.  $\mathbb{X}$  je silně nulldimenzionální.

*Důkaz*

Implikace směrem nahoru už máme, tedy stačí  $1) \implies 4)$ . Ale ukážeme nejprve  $1) \implies 3)$  a pak  $3) \implies 4)$ . Ať  $x \in \mathbb{X}$ ,  $U$  okolí  $x$ . Víme, že  $C_x = \{x\}$ . V kompaktním prostoru splývají komponenty a kvazikomponenty:  $C_x = Q_x = \bigcap \{Z : x \in Z, Z \text{ je obojetná v } \mathbb{X}\}$ . Podle lemmatu o průniku v kompaktu existují obojetné  $Z_1, \dots, Z_n$ , že  $x \in \bigcap Z_i$ ,  $x \in \bigcap Z_i \subseteq U$ . Tedy  $1) \implies 3)$ .

Zbývá  $3) \implies 4)$ : Kompaktní prostor je normální. Ať  $E, F$  jsou uzavřené disjunktní. Pro každé  $x \in E$  existuje obojetná  $Z_x \subseteq \mathbb{X}$ , že  $x \in Z_x \subseteq X \setminus F$ , díky nulldimensionalitě.  $\{Z_x | x \in E\}$  je otevřené pokrytí  $E$ .  $E$  uzavřená v  $\mathbb{X}$ , tedy  $E$  kompaktní.  $\exists x_1, \dots, x_n \in E : E \subseteq Z_{x_1} \cup \dots \cup Z_{x_n}$ , což je obojetná  $\subseteq \mathbb{X} \setminus F$ . Tedy  $\mathbb{X}$  je silně nulldimensionalní.  $\square$

### Věta 7.3 (Nulldimensionalita v $\beta\mathbb{X}$ )

*Bud'  $\mathbb{X}$  je Tichonoviův prostor. Pak  $\beta\mathbb{X}$  je nulldimensionalní, právě když  $\mathbb{X}$  je silně nulldimensionalní.*

*Důkaz*

$\implies$  :  $\beta\mathbb{X}$  je kompaktní, tedy  $\beta\mathbb{X}$  je silně nulldimensionalní. Ať  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá. Chceme, že  $f^{-1}$  a  $f^{-1}(1)$  oddělíme obojetnou: Existuje spojitě rozšíření  $\bar{f} : \beta\mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$  funkce  $f$ .  $\bar{f}^{-1}(0)$ ,  $\bar{f}^{-1}(1)$  funkcionálně oddělené v  $\beta\mathbb{X}$ . Tedy existuje obojetná  $Z \subseteq \beta\mathbb{X}$ , že  $\bar{f}^{-1}(0) \subseteq Z \subseteq \beta\mathbb{X} \setminus \bar{f}^{-1}(1)$ . Nyní  $Z \cap \mathbb{X}$  obojetná v  $\mathbb{X}$ .  $f^{-1}(0) = \bar{f}^{-1}(0) \cap \mathbb{X} \subseteq Z \cap \mathbb{X} \subseteq \mathbb{X} \setminus f^{-1}(1)$ .  $Z \cap \mathbb{X}$  je obojetná a odděluje  $f^{-1}(0)$  a  $f^{-1}(1)$ .

$\Leftarrow$ :  $\beta\mathbb{X}$  je kompaktní, tedy stačí ukázat (díky předchozí větě), že  $\mathbb{X}$  je totálně nesouvislý. Ať  $a, b \in \mathbb{X}$ ,  $a \neq b$ . Existuje spojitá funkce  $f : \beta\mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ ,  $f(a) = 0$ ,  $f(b) = 1$ .  $A := f^{-1}([0, \frac{1}{3}))$ ,  $B := f^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$ . Jistě  $a \in A$  a  $b \in B$ .  $A, B$  jsou funkcionálně oddělené v  $\beta\mathbb{X}$ , otevřené. Tj.  $A \cap \mathbb{X}$ , resp.  $B \cap \mathbb{X}$ , je hustá v  $A$ , resp.  $B$ . Navíc jsou oddělené v  $\mathbb{X}$ . Ze silné nulldimensionality  $\mathbb{X}$  existuje obojetná  $Z \subseteq \mathbb{X} : A \cap \mathbb{X} \subseteq Z \subseteq \mathbb{X} \setminus B$ . Uvažujme spojitou funkce  $g : \mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $g|_Z = 0$ ,  $g|_{\mathbb{X} \setminus Z} = 1$ .  $g$  lze spojitě rozšířit na  $\bar{g} : \beta\mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$ . Ať  $W := \bar{g}^{-1}(0)$ .  $W \supseteq Z$ ,  $W$  obojetná,  $W \cap B = \emptyset$ .  $W \supseteq A$ .  $a \in W$ ,  $b \notin W$ .  $\square$

*Poznámka*

Podprostor nulldimensionalního prostoru je nulldimensionalní. Součin nulldimensionalních je nulldimensionalní. Tedy  $\{0, 1\}^{\mathbb{X}}$  je vždy nulldimensionalní.

### Tvrzení 7.4

*Každý nulldimensionalní prostor  $\mathbb{X}$  lze vnořit do  $\{0, 1\}^A$ , kde za  $A$  lze volit váhu (nebo bázi)  $\mathbb{X}$ .*

┌ *Důkaz*

Ať  $\mathcal{B}$  je báze  $X$ , která je tvořena obojetnými množinami, pro kterou je  $|\mathcal{B}| = w(\mathbb{X})$ . Pro  $B \in \mathcal{B}$  uvažme  $f_B(x) = 0, x \in B$  a 1 jinak.  $\{f_B | B \in \mathcal{B}\}$  odděluje body a uzavřené množiny, tedy podle lematu o Tichonovově vnoření je  $\Delta_{B \in \mathcal{B}} : x \in \mathbb{X} \mapsto (f_B(x))_{B \in \mathcal{B}}$  je vnoření  $\mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathcal{B}}$ . □

*Důsledek*

Každý kompaktní metrický (má spočetnou váhu) nuldimenzionální prostor lze vnořit do Cantorova diskontinua.

### Věta 7.5 (Topologická charakterizace Cantorova diskontinua)

*Každý neprázdný nuldimenzionální kompaktní metrizable prostor je homeomorfní Cantorovu diskontinuu.*

┌ *Důkaz*

└ Bez důkazu. □

*Poznámka* (Stonova dualita)

Kompaktní nuldimenzionální TP se spojitými zobrazeními se dají přiřadit Booleovým algebrám s homomorfismy

## 8 Topologická dimenze

### Definice 8.1 (Malá induktivní dimenze, Menger-Urysohn)

Pro  $\mathbb{X}$  regulární definujeme

- $\text{ind } \emptyset = -1$ .
- $\text{ind } \mathbb{X} \leq n \geq 0$ , pokud  $\forall x \in \mathbb{X} \forall U$  okolí  $x \exists$  otevřená  $V : x \in V \subseteq U : \text{ind}(\partial V) \leq n-1$ .
- $\text{ind } \mathbb{X} = n$ , pokud  $\text{ind } \mathbb{X} \leq n$  a neplatí  $\text{ind } \mathbb{X} \leq n-1$ .
- $\text{ind } \mathbb{X} = \infty$ , pokud  $\forall n \in \mathbb{N} : \text{ind } \mathbb{X} \not\leq n$ .

*Poznámka*

$\text{ind } \mathbb{X} = -1 \Leftrightarrow X = \emptyset$ .  $\text{ind } \mathbb{X} \leq 0 \Leftrightarrow \mathbb{X}$  je nuldimenzionální ( $\partial V = \emptyset \Leftrightarrow V$  je obojetná).  $\text{ind}([0, 1]) = 1$  (není nuldimenzionální).  $\text{ind}[0, 1]^n \leq n$  indukci. (Naopak už pro  $n = 2$  se těžko dokazuje, že platí rovnost. Viz dále.)

**Definice 8.2** (Velká induktivní dimenze, Brouwer-čech)

Pro  $\mathbb{X}$  normální definujeme

- $\text{Ind } \emptyset = -1$ .
- $\text{Ind } \mathbb{X} \leq n \geq 0$ , pokud  $\forall E \subseteq \mathbb{X}$  uzavřenou a  $\forall U$  otevřenou:  $E \subseteq U \exists V$  otevřená:  $E \subseteq V \subseteq U$  a  $\text{Ind}(\partial V) \leq n - 1$ .
- $\text{Ind } \mathbb{X} = n$ , pokud  $\text{Ind } \mathbb{X} \leq n$  a neplatí  $\text{Ind } \mathbb{X} \leq n - 1$ .
- $\text{Ind } \mathbb{X} = \infty$ , pokud  $\forall n \in \mathbb{N} : \text{ind } \mathbb{X} \not\leq n$ .

*Poznámka*

$\text{Ind } \mathbb{X} \leq 0 \Leftrightarrow \mathbb{X}$  je silně nulldimensionální.

**Definice 8.3** (Pokrývací dimenze, Čech-Lebesgue)

Říkáme, že systém  $\mathcal{A}$  podmnožin množiny  $X$  je řádu  $n$ , pokud  $n$  je největší přirozené číslo pro které existují po dvou různé  $A_1, \dots, A_{n+1} \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ .

Pro normální prostor  $\mathbb{X}$  definujeme

- $\dim \emptyset = -1$ .
- $\dim \mathbb{X} \leq n \geq 0$ , pokud každé konečné otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$  má konečné otevřené zjemnění řádu nejvýše  $n$ .
- $\dim \mathbb{X} = n$ , pokud  $\dim \mathbb{X} \leq n$  a neplatí  $\dim \mathbb{X} \leq n - 1$ .
- $\dim \mathbb{X} = \infty$ , pokud  $\forall n \in \mathbb{N} : \dim \mathbb{X} \not\leq n$ .

**Věta 8.1**

*Ať  $\mathbb{X}$  je normální TP. Pak  $\dim \mathbb{X} \leq 0 \Leftrightarrow \mathbb{X}$  je silně nulldimensionální.*

┌ *Důkaz*

$\Rightarrow$  : Ať  $E, F$  jsou uzavřené disjunktní. Ať  $\mathcal{U} = \{\mathbb{X} \setminus E, \mathbb{X} \setminus F\}$  otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ .  $\exists$  konečné otevřené zjemnění  $\mathcal{V}$  toho  $\mathcal{U}$ , které má řád  $\leq 0$ , tedy prvky  $\mathcal{V}$  jsou navzájem disjunktní. Tedy každé  $V \in \mathcal{V}$  je obojetná,  $\bigcup \{V \in \mathcal{V} \mid V \subseteq \mathbb{X} \setminus F\}$  obojetná, obsahující  $E$  (protože pokud  $V \cap E \neq \emptyset$  pro  $V \in \mathcal{V}$ , pak  $V \subseteq \mathbb{X} \setminus F$ ) a disjunktní s  $F$ .

$\Leftarrow$  : Ať  $\mathcal{U}$  je otevřené konečné pokrytí  $\mathbb{X}$ . Podle lemmatu o skrčení existuje uzavřené  $F_U : U \in \mathcal{U}, F_U \subseteq U, \bigcup \{F_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ .  $\mathbb{X}$  silně nuldimenzionální, tedy  $\exists$  obojetné  $C_U : F_U \subseteq C_U \subseteq U, U \in \mathcal{U}$ .  $\{C_U \mid U \in \mathcal{U}\}$  je konečné obojetné pokrytí  $\mathbb{X}$  zjemňující  $\mathcal{U}$ . Toto pokrytí můžeme „rozdisjunktnit“ a dostaneme disjunktní otevřené (obojetné) konečné pokrytí řádu 0 (zjemnění  $\mathcal{U}$ ).  $\square$

└

*Poznámka*

$\dim[0, 1] = 1$ .  $\dim[0, 1]^n = n$  (zase dosti těžké dokázat).

## **Tvrzení 8.2** (Dimenze (uzavřeného) podprostoru)

*Je-li  $\mathbb{X}$  regulární a  $A \subseteq \mathbb{X}$ , pak  $\text{ind } A \leq \text{ind } \mathbb{X}$ .*

*Je-li  $\mathbb{X}$  normální a  $A \subseteq \mathbb{X}$  uzavřená, pak  $\text{Ind } A \leq \text{Ind } \mathbb{X}$  a  $\dim A \leq \dim \mathbb{X}$ .*

┌ *Důkaz*

Indukcí podle  $\text{ind } \mathbb{X}$  ( $\text{Ind } \mathbb{X}, \dim \mathbb{X}$ ): Pokud  $\text{ind } \mathbb{X} = -1$ , pak  $\mathbb{X} = \emptyset = A$ ,  $\text{ind } A = -1$ . Předpokládejme, že pro všechny regulární prostory  $\mathbb{Y}$ , kde  $\text{ind } \mathbb{Y} \leq n - 1$ , a  $B \subseteq \mathbb{Y}$  je  $\text{ind}(B) \leq \text{ind}(\mathbb{Y})$ .  $\text{ind } \mathbb{X} = n$ ,  $A \subseteq \mathbb{X}$ : chceme  $\text{ind } A \leq n$ . Ať  $x \in A$ ,  $U$  okolí  $x$  v  $A$ . Existuje  $W$  okolí  $x$  v  $\mathbb{X}$  takové, že  $W \cap A = U$ .  $\exists V$  otevřené okolí  $x$  v  $\mathbb{X}$ :  $\text{ind}(\partial V) \leq n - 1$ ,  $x \in V \subseteq W$ .  $x \in V \cap A \subseteq U$ ,  $V \cap A$  otevřená v  $A$  a  $\partial_A(V \cap A) \subseteq \partial_{\mathbb{X}} V$ , tedy podle indukčního předpokladu  $\text{ind } \partial_A(V \cap A) \leq \text{ind } \partial_{\mathbb{X}} V \leq n - 1$ , tj.  $\text{ind } A \leq n$ . Ostatní 2 dimenze analogicky.  $\square$

└

## **Věta 8.3** (Charakterizace pokrývací dimenze)

*Pro normální prostor  $\mathbb{X}$  je ekvivalentní:*

1.  $\dim \mathbb{X} \leq n$ .
2. Každé konečné otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$  má otevřené skrčení řádu  $\leq n$ .
3. Každé konečné otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$  má uzavřené skrčení řádu  $\leq n$ .
4. Každé konečné otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$  má konečné uzavřené zjemnění řádu  $\leq n$ .

┌ *Důkaz*

1)  $\implies$  2): Ať  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$  otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Dle 1) existuje  $\mathcal{V}$  konečné otevřené zjemnění toho  $\mathcal{U}$  řádu nejvýše  $n$ .  $V'_i := \bigcup \{V \in \mathcal{V} \mid V \subseteq U_i \wedge V \not\subseteq \bigcup V'_j : j < i\}$ .  $\mathcal{V}' = \{V'_i \mid i \in [n]\}$  je skrčení  $\mathcal{U}$  řádu  $\leq n$ .

2)  $\implies$  3) je z lemmatu o skrčení. 3)  $\implies$  4) je triviální.

4)  $\implies$  1): Ať  $\mathcal{U}$  je konečné otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$  a  $\mathcal{F}$  je jeho uzavřené konečné zjemnění řádu  $\leq n$ .  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ . Pro  $i \leq m$  fixujeme  $U_i \in \mathcal{U} : F_i \subseteq U_i$ . Indukcí najdeme  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$ , že  $F_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$ , že řád  $\mathcal{V} \leq n$ . Ať  $A_1 = \bigcup \{H_1 \cap \dots \cap H_{n+1} \mid H_i \in \mathcal{F} \setminus \{F_1\}, H_i \text{ jsou po dvou různé}\}$ .  $A_1$  uzavřená. Navíc  $A_1 \cap F_1 = \emptyset$ , protože řád  $\mathcal{F} \leq n$ . Ať  $V_1$  je otevřená, že  $F_1 \subseteq V_1$  a  $\overline{V_1} \cap A_1 = \emptyset$ . Nyní  $\{\overline{V_1}, F_2, F_3, \dots, F_m\}$  má řád nejvýše  $n$ .

Předpokládejme, že máme otevřené  $V_1, \dots, V_{j-1}$ , že  $F_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$ ,  $i \leq j-1$  a systém  $\{\overline{V_1}, \overline{V_2}, \dots, \overline{V_{j-1}}, F_j, F_{j+1}, \dots, F_m\}$  má řád  $\leq n$ . Hledáme  $V_j$ . Ať  $A_j$  je sjednocením průniků  $n+1$  různých množin vybraných ze systému  $\{\overline{V_1}, \overline{V_2}, \dots, \overline{V_{j-1}}, F_{j+1}, F_{j+2}, \dots, F_m\}$ .  $A_j$  je uzavřená a disjunktní s  $F_j$ . Opět z normality existuje otevřená  $V_j : F_j \subseteq V_j \subseteq \overline{V_j} \subseteq U_j \setminus A_j$ . Řád  $\{\overline{V_1}, \dots, \overline{V_j}, F_{j+1}, \dots, F_m\} \leq n$ .

└  $\mathcal{V} := \{V_1, \dots, V_m\}$  je otevřené zjemnění  $\mathcal{U}$  řádu  $\leq n$ . □

### Věta 8.4 (Součtová pro dim)

*Je-li  $\mathbb{X}$  normální TP a  $F_i \subseteq \mathbb{X}$  uzavřené,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\dim F_i \leq n$  a  $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$ , pak  $\dim \mathbb{X} \leq n$ .*

### Tvrzení 8.5

*Pro normální TP  $\mathbb{X}$ :  $\text{ind } \mathbb{X} \leq \text{Ind } \mathbb{X}$ .*

┌ *Důkaz*

└ Přímočarý, indukci podle  $\text{Ind } \mathbb{X}$ . □