Příklad (5.)
Let Ω be Lipschitz and $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ be such that $|\Gamma_1| > 0$. Assume that $\mathbf{g} \in L^3(\partial\Omega;\mathbb{R}^N)$, where $N \in \mathbb{N}$ is given, and define the set S as

$$S \coloneqq \left\{ \mathbb{A} \in L^3(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N}) \;\middle|\; \forall \mathbf{v} \in V\colon \int_\Omega \mathbb{A} : \nabla \mathbf{v} = \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma_1} \mathbf{g}\cdot\mathbf{v} \right\}$$

and

$$V \coloneqq \left\{ \mathbf{v} \in W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega;\mathbb{R}^N) \;\middle|\; \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\}.$$

Consider the problem: Find $\mathbb{A} \in S$ such that for all $\mathbb{B} \in S$ there holds

$$\int_\Omega \frac{|\mathbb{A}|^3}{3} + |\mathbb{A} - \mathbb{C}|^2 \leqslant \int_\Omega \frac{|\mathbb{B}|^3}{3} + |\mathbb{B} - \mathbb{C}|^2,$$

where $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^{d\times N}$ is given.

1) Show that there exists unique $\mathbb{A}$ solving the problem.

Důkaz
Zřejmě je S konvexní (rovnice v S je lineární) a uzavřená (příslušný integrál zachovává limitu). Označme si $G(\xi) = \frac{|\xi|^3}{3} + |\xi - \mathbb{C}|^2$ pro $\xi \in S$. Stačí nám tedy ukázat, že G je (ryze[a]) konvexní, $|G(\xi)| \geqslant c_1|\xi|^3 - c_2$ a $|G(\xi)| \leqslant \tilde{c}_1(|\xi|^3 + 1)$.

$|\mathbb{X}|^2$ je zřejmě ryze konvexní, neboť se na to můžeme podívat po složkách a pak sečíst. Ryze konvexní je taktéž $x^{1.5}$ ($x \geqslant 0$), tedy i $|\mathbb{X}|^3$. Navíc $|\lambda\mathbb{X}|^a = \lambda^a|\mathbb{X}|^a$. Tedy pro $\lambda \in (0,1)$ (pro to $\lambda^b < \lambda$ a $(1-\lambda)^b < (1-\lambda)$ pro $b \geqslant 1$) a $\xi_1 \neq \xi_2 \in S$

$$G(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) = \frac{|\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2|^3}{3} + |\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 - \underbrace{\mathbb{C}}_{=\lambda\mathbb{C}+(1-\lambda)\mathbb{C}}|^2 <$$
$$< \lambda^3\frac{|\xi_1|^3}{3} + (1-\lambda)^3\frac{|\xi_2|^3}{3} + \lambda^2|\xi_1 - \mathbb{C}|^2 + (1-\lambda)^2|\xi_2 - \mathbb{C}|^2 <$$
$$< \lambda\frac{|\xi_1|^3}{3} + (1-\lambda)\frac{|\xi_2|^3}{3} + \lambda|\xi_1 - \mathbb{C}|^2 + (1-\lambda)|\xi_2 - \mathbb{C}|^2 = \lambda\cdot G(\xi_1) + (1-\lambda)G(\xi_2).$$

Tudíž G je ryze konvexní.

$$|G(\xi)| = \frac{|\xi|^3}{3} + |\xi - \mathbb{C}|^2 \leqslant \frac{|\xi|^3}{3} + |\xi|^2 + |\mathbb{C}|^2 \leqslant \frac{|\xi|^3}{3} + (|\xi|^3 + 1) + C \leqslant \underbrace{\max\left(\frac{4}{3}, 1 + C\right)}_{=\tilde{c}_1}(|\xi|^3 + 1),$$
$$|G(\xi)| = \frac{|\xi|^3}{3} + |\xi - \mathbb{C}|^2 \geqslant \frac{|\xi|^3}{3} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{=c_1}|\xi|^3 - \underbrace{0}_{=c_2}.$$

□

[a] Z toho plyne jednoznačnost, jak jsme ukázali na přednášce.

2) Derive the Euler–Lagrange equations.

Řešení

Mějme množinu

$$S_2 := \left\{ \xi \in L^3(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N}) \;\middle|\; \forall \mathbf{v} \in V\colon \int_\Omega \xi : \nabla \mathbf{v} = 0 \right\}.$$

Potom $\forall \mathbb{A} \in S\ \forall \xi \in S_2\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}\colon \mathbb{A} + \varepsilon \cdot \xi \in S$. A jestliže $\mathbb{A}$ splňuje minimalizační podmínku ze zadání, pak:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \int_\Omega \frac{|\mathbb{A} - \varepsilon \cdot \xi|^3}{3} + |\mathbb{A} - \varepsilon \cdot \xi - \mathbb{C}|^2 = 0.$$

$$\int_\Omega \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot |\mathbb{A} + 0 \cdot \xi| \cdot (0 \cdot \sum_{ij} \xi_{ij} + 2\mathbb{A} : \xi) + 0 \cdot \sum_{ij} \xi_{ij} + 2(\mathbb{A} - \mathbb{C}) : \xi = 0.$$

$$\int_\Omega |\mathbb{A}| \cdot \mathbb{A} : \xi + 2(\mathbb{A} - \mathbb{C}) : \xi = 0.$$

Což se za předpokladu dostatečně velké S_2 (což se mi nepodařilo dokázat) dá přepsat ze základní věty na

$$|\mathbb{A}| \cdot \mathbb{A} + 2(\mathbb{A} - \mathbb{C}) = \mathbb{O}.$$

3) Find the corresponding primary formulation – the corresponding system of PDE's and show the equivalence of primary and dual formulation.

Řešení

Minimalizace

$$\int_\Omega \frac{|\mathbb{A}|^3}{3} + |\mathbb{A}-\mathbb{C}|^2 = \int_\Omega \frac{|\mathbb{A}|^3}{3} + |\mathbb{A}|^2 - 2\mathbb{A}:\mathbb{C} + |\mathbb{C}|^2$$

je totožná s minimalizací (neboť $|\mathbb{C}|$ je konstanta)

$$\int_\Omega \frac{|\mathbb{A}|^3}{3} + |\mathbb{A}|^2 - 2\mathbb{A}:\mathbb{C} = \int_\Omega \left(\frac{|\mathbb{A}|^3}{3} + |\mathbb{A}|^2\right) - 2\mathbb{A}:\nabla u_0.$$

Označme $F^*(\xi) = \frac{|\xi|^3}{3} + |\xi|^2$. Jelikož F^* je konvexní a platí $\frac{F^*(\xi)}{|\xi|} = \frac{|\xi|^2}{3} + |\xi| \to \infty$ pro $\xi \to \infty$ máme $((F^*)^*)^* = F^*$, tedy budeme hledat F, „konvexní předadjunkci“ F^*, jako konvexní adjunkci F^*. To je z definice:

$$(F^*)^*(\xi) = \sup_{z\in\mathbb{R}^{d\times N}} (\xi : z - F^*(z)).$$

Jelikož F^* roste rychleji než z, tak je supremum nabyto a tehdy je derivace vnitřku podle z libovolným směrem nulová. Tedy

$$\mathbb{O} = \xi - \frac{\partial F^*}{z}(z) = \xi - |z|\cdot z - 2\cdot z = \xi - (|z|+2)\cdot z \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \frac{\xi}{2+|z|}$$

Znormováním pravé rovnosti dostaneme $|z| = \frac{|\xi|}{2+|z|}$, tedy $|z| = -1 + \sqrt{1+|\xi|}$. Pronásobením $:z$ levé pak $\xi : z = |z|^3 + 2|z|^2$. To můžeme dosadit:

$$F(\xi) = z:\xi - F(z) = |z|^3 + 2|z|^2 - \frac{|z|^3}{3} - |z|^2 = \frac{2}{3}|z|^3 + |z|^2.$$

Stejně jako na přednášce, pak můžeme najít

$$A(\xi) \coloneqq \frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi) = (2|z|^2 + 2|z|)\frac{\partial |z|}{\partial \xi} = 2|z|\cdot(|z|+1)\frac{\partial\left(-1+\sqrt{1+|\xi|}\right)}{\partial \xi} =$$

$$= 2|z|\cdot\left(\sqrt{1+|\xi|}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+|\xi|}}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{\xi}{|\xi|} = |z|\cdot\frac{\xi}{|\xi|} = \left(-1+\sqrt{1+|\xi|}\right)\frac{\xi}{|\xi|}.$$

Náš problém (původní formulaci) je tedy při označení $A(\xi) \coloneqq \left(-1+\sqrt{1+|\xi|}\right)\frac{|\xi|}{|\xi|}$

$$-\operatorname{div}(A(\nabla\mathbf{u})) = \mathbf{o} \text{ na } \Omega, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 := \mathbf{x}^T\cdot\mathbb{C} \text{ na } \Gamma_1, \qquad A(\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ na } \partial\Omega\backslash\Gamma_1.$$

Důkaz (Ekvivalence formulací)
Tomuto problému odpovídá slabá formulace $\exists \mathbf{u} \in W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ takové, že $\mathbf{u}-\mathbf{u}_0 = 0$ na Γ_1 a že $\forall \mathbf{v} \in W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ na Γ_1:

$$\int_\Omega A(\nabla \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Má-li tento problém řešení $\mathbf{u}$, pak definujme $\mathbb{A} = A(\nabla \mathbf{u})$. Zřejmě $\mathbb{A} \in L^3(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (tak jsme volili prostor pro $\mathbf{u}$) a ze slabé formulace $\mathbb{A} \in S$. Nyní chceme: $\int_\Omega F^*(\mathbb{B}) + \mathbb{B} : \mathbb{C} \geqslant \int_\Omega F^*(\mathbb{A}) + \mathbb{A} : \mathbb{C}$, tedy ekvivalentně:

$$0 \overset{?}{\leqslant} \int_\Omega F^*(\mathbb{B}) - F^*(\mathbb{A}) + (\mathbb{B} - \mathbb{A}) : \mathbb{C} \overset{\text{konvexita}}{\geqslant} \frac{\partial F^*(\xi)}{\partial \xi}(\mathbb{A}) : (\mathbb{B} - \mathbb{A}) + (\mathbb{B} - \mathbb{A}) : \nabla \mathbf{u}_0 \overset{\text{přednáška}}{=}$$

$$= (\mathbb{B} - \mathbb{A}) : \nabla(\underbrace{\mathbf{u} - \mathbf{u}_0}_{\in V}) \overset{S}{=} \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) - \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = 0.$$

Naopak, pokud $\mathbb{A}$ splňuje minimalizační podmínku, pak definujeme[a] $\nabla \mathbf{u} = A^{-1}(\mathbb{A})$. Potom $\mathbf{u}$ splňuje slabou formulaci, protože $\mathbb{A} \in S$ a $A(\nabla \mathbf{u}) = A(A^{-1}(\mathbb{A})) = \mathbb{A}$. Také $\mathbf{u} \in W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Tedy zbývá $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0 = 0$ na Γ_1.

Z Eulerových–Lagrangeových rovnic (ještě před odebráním integrálu) dostaneme dosazením (to je i hezká zkouška, že nám A vyšlo správně)

$$\forall \xi \in S_2 : \int_\Omega 2\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) : \xi = 0.$$

Vzhledem k obecnosti S_2 až na podmínku $\forall \mathbf{v} \in V : \int_\Omega \nabla \mathbf{v} : \xi = 0$ musí být $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \in V$, což je přesně to, co jsme chtěli. ▫

[a] Konvexní adjunkce ryze konvexní funkce je ryze konvexní, tedy její derivace je ryze monotónní, tudíž můžeme definovat inverzi.