

1 Organizační úvod

Přesun nebyl odhlasován.

Poznámka (Literatura)

- Engelking: General Topology (spíš taková příručka, hodně obtížná)
- Čech: Bodová topologie
- Kelley: General Topology
- Willard: General Topology

Doporučené jsou poslední dvě.

Poznámka (Podmínky zakončení)

Zkouška (ústní) + úkoly ze cvičení (a účast na cvičení)

2 Úvod

Poznámka (Historie)

- Euler: mosty ve městě Královec (7 mostů, Eulerovský tah)
- Listing (1847): pojem topologie (bez rigorózních definic)
- Poincaré (1895): Analysis Situs (Poincarého hypotéza)
- Fréchet (1906): definuje metrický prostor (až dodnes)
- Hausdorff (1914): tzv. Hausdorffův TP
- Kuratowski (1922): TP, jak jej známe dnes (formálně)

Poznámka (TOPOSYM)

V Praze se každých 5 let koná významná konference topologů – TOPOSYM.

3 Základní pojmy

Topos = umístění (řetina).

3.1 Topologický prostor, báze, subbáze, váha, charakter

Definice 3.1 (Topologický prostor (TP))

Uspořádaná dvojice (\mathbb{X}, τ) se nazývá topologický prostor, pokud \mathbb{X} je množina, $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ a platí:

(T1) $\emptyset, \mathbb{X} \in \tau$

(T2) jsou-li $\mathbb{U}, \mathbb{V} \in \tau$, pak $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} \in \tau$

(T3) je-li $\mathcal{U} \in \tau$, pak $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

Definice 3.2 (Topologie)

Systém τ se nazývá topologie na \mathbb{X} . Prvky množiny \mathbb{X} se nazývají body. Prvky τ se nazývají otevřené množiny.

Definice 3.3 (Okolí bodu)

Množina $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá okolí bodu x , pokud existuje $\mathbb{U} \in \tau$, že $x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$. Množina všech okolí bodu x značíme $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_\tau(x)$.

Definice 3.4 (Báze a subbáze)

Soubor množin $\mathcal{B} \subseteq \tau$ se nazývá báze topologie τ , pokud pro každé $\mathbb{U} \in \tau$ existuje $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B} : \bigcup \mathcal{U} = \mathbb{U}$. Soubor $\mathcal{S} \subseteq \tau$ se nazývá subbáze topologie τ , pokud $\{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S} \text{ konečná}\}$ je báze topologie τ .

Tvrzení 3.1 (Charakterizace otevřené množiny pomocí okolí)

Ať (\mathbb{X}, τ) je TP a $\mathbb{U} \in \tau$. Pak $\mathbb{U} \in \tau$, právě když $\forall x \in \mathbb{U} \exists \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{V} \subseteq \mathbb{U}$

┌

Důkaz

Důkaz (\implies) vidíme $\mathbb{U} = \mathbb{V}$.

Opačně víme $\forall x \in \mathbb{U} \exists \mathbb{V}_x \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{V}_x \subseteq \mathbb{U}$. $\exists \mathbb{W}_x \in \tau : x \in \mathbb{W}_x \subseteq \mathbb{U}_x$. $\mathbb{U} = \bigcup_{x \in \mathbb{U}} \mathbb{W}_x \in \tau$. Tedy $\mathbb{U} \in \tau$. □

└

Příklad

Je-li (\mathbb{X}, ϱ) metrický prostor (MP), pak soubor všech ϱ -otevřených množin tvoří topologii na množině \mathbb{X} .

Definice 3.5 (Metrizovatelný TP)

TP (\mathbb{X}, τ) se nazývá metrizovatelný, pokud na množině \mathbb{X} existuje metrika ϱ tak, že topologie odvozené z (\mathbb{X}, ϱ) splývá s topologií τ .

Příklad

Je-li (\mathbb{X}, ϱ) MP, pak systém všech otevřených koulí tvoří bázi topologie τ_ϱ .

┌

Například

Všechny otevřené intervaly tvoří bázi topologie na \mathbb{R} .

└ Systém $\{(-\infty, b), (a, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ je subbáze topologie na \mathbb{R} .

Příklad (Diskrétní a indiskrétní TP)

Je-li \mathbb{X} množina, pak $(\mathbb{X}, \mathcal{P}(\mathbb{X}))$ je TP, nazývá se diskrétní TP (a vždy je metrizovatelný). Naopak $(\mathbb{X}, \{\emptyset, \mathbb{X}\})$ se nazývá indiskrétní TP. (Pokud $|\mathbb{X}| \geq 2$, pak indiskrétní TP není metrizovatelný.)

Tvrzení 3.2 (Vlastnosti báze)

Je-li (\mathbb{X}, τ) TP a \mathcal{B} jeho báze, pak

(B1) $\forall \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{B} \forall x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \exists \mathcal{W} \in \mathcal{B} : x \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$,

(B2) $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{X}$.

Je-li \mathbb{X} libovolná množina a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ splňuje podmínky (B1), (B2), pak na \mathbb{X} existuje jediná topologie, jejíž báze je \mathcal{B} .

┌

Důkaz

První část je snadná (průnik 2 množin báze je otevřený, tj. prvkem topologie, tedy se dá zapsat jako sjednocení podmnožiny báze).

Druhá část: Mějme tedy \mathbb{X} a \mathcal{B} z věty splňující obě podmínky. Definujme $\tau := \{\bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}\}$. τ je topologie na \mathbb{X} (ověříme, že τ splňuje podmínky topologie).

Zároveň volba τ je jediná množná, jelikož každý její prvek se musí dát vyjádřit jako sjednocení báze a opačně. □

└

┌ *Důsledek*

Je-li \mathbb{X} množina, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ a $\bigcup \mathcal{S} = \mathbb{X}$, pak \mathcal{S} je subbáze jednoznačně určené topologie na \mathbb{X} .

┌ *Důkaz*

$\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S} \text{ konečná}\}$ splňuje podmínky (B1) a (B2) předchozího tvrzení (B2 definice \mathcal{S} , B1 protože $\mathbb{U}, \mathbb{V} \in \mathcal{B}, \mathbb{U} = \bigcup \mathcal{F}_1, \mathbb{V} = \bigcap \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{S} \text{ konečné}$. $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \bigcap (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \in \mathcal{B}$. (Dokonce celý průnik je prvkem \mathcal{B} , nejenom pro každý prvek existuje množina, která ho obsahuje, je podmnožinou průniku a je v \mathcal{B}). \square

Tvrzení 3.3 (Vlastnosti systému všech okolí)

Je-li (\mathbb{X}, τ) TP, pak soubory všech okolí $\mathcal{U}_\tau(x), x \in \mathbb{X}$ splňují

- (U1) $\forall x \in \mathbb{X} : \mathcal{U}(x) \neq \emptyset, x \in \bigcap \mathcal{U}(x)$,
- (U2) $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) \forall \mathbb{V} : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{V} \subseteq \mathbb{X} \implies \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x)$,
- (U3) $\forall \mathbb{U}, \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{U} \cap \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x)$,
- (U4) $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) \exists \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x) \forall y \in \mathbb{V} : \mathbb{U} \in \mathcal{U}(y)$

Je-li \mathbb{X} množina a systémy množin $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}), x \in \mathbb{X}$ splňující podmínky (U1-4), pak na množině \mathbb{X} existuje jediná topologie τ , že $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_\tau(x), x \in \mathbb{X}$.

┌ *Důkaz*

První část snadná. (Domácí cvičení.)

Položme $\tau = \{\mathbb{U} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) : \forall x \in \mathbb{U}, \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x)\}$. τ je topologie na \mathbb{X} . Z (U1) a (U2) vyplne (T1). Atd...

\square

Definice 3.6 (Báze okolí)

Ať (\mathbb{X}, τ) je TP. Systém množin $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ se nazývá báze okolí v bodě x , pokud $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}_\tau(x)$ a pro každé $\mathbb{V} \in \mathcal{U}_\tau(x)$ existuje $\mathbb{U} \in \mathcal{B}(x)$, že $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$. Indexovaný soubor $\{\mathcal{B}(x) : x \in \mathbb{X}\}$ se nazývá báze okolí prostoru \mathbb{X} , pokud $\forall x \in \mathbb{X} : \mathcal{B}(x)$ je báze okolí v bodě x .

Tvrzení 3.4 (Vlastnosti báze okolí)

Je-li (\mathbb{X}, τ) TP a $\{\mathcal{B}(x) : x \in \mathbb{X}\}$ báze okolí, pak

- (O1) $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset, x \in \bigcap \mathcal{B}(x), x \in \mathbb{X}$,
- (O2) $\forall \mathbb{U}, \mathbb{V} \in \mathcal{B}(x) \exists \mathbb{W} \in \mathcal{B}(x) : \mathbb{W} \subseteq \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$,
- (O3) $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{B}(x) \exists \mathcal{B}(x) \forall y \in \mathbb{U} \exists \mathbb{W} \in \mathcal{B}(y) : \mathbb{W} \subseteq \mathbb{U}$.

Je-li \mathbb{X} množina a $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}), x \in \mathbb{X}$ soubory splňující (O1), (O2), (O3), pak na množině \mathbb{X} existuje jediná topologie, jejíž báze okolí je $\{\mathcal{B}(x) : x \in \mathbb{X}\}$.

┌ *Důkaz*

První část je snadná.

Položme $\mathcal{U}(x) = \{\mathbb{U} \in \mathcal{P}(x) : \exists \mathbb{B} \in \mathcal{B}(x) : \mathbb{B} \subseteq \mathbb{U}\}$, $x \in \mathbb{X}$. Ověříme, že splňuje (U1-4).
(U1) z (O1). (U2) z definice \mathcal{U} . (U3) z (O2), (U4) z (O3). □

Definice 3.7 (Váha prostoru)

Ať (\mathbb{X}, τ) je TP. Pak váha prostoru (\mathbb{X}, τ) je nejmenší mohutnost báze prostoru (\mathbb{X}, τ) .
Značíme ji $w(\mathbb{X}) = w(\mathbb{X}, \tau)$

Charakter v bodě x je nejmenší mohutnost báze okolí bodu x . Značíme ho $\chi(x, \mathbb{X})$.

Charakter prostoru \mathbb{X} je $\sup \{\chi(x, \mathbb{X}) : x \in \mathbb{X}\}$.

┌ *Například*

$w(\mathbb{R}) = \omega$ (\mathbb{R} má spočetnou bázi).

$$w(\mathbb{X}, \mathcal{P}(\mathbb{X})) = |\mathbb{X}| \quad (\{\{x\} : x \in \mathbb{X}\} \text{ je báze } (\mathbb{X}, \mathcal{P}(\mathbb{X})))$$

$$w(\mathbb{X}, \{\emptyset, \{\mathbb{X}\}\}) = 1$$

┌ *Například*

Je-li (\mathbb{X}, τ) metrizable, pak $\chi(x, \mathbb{X}) \leq \omega$

Tvrzení 3.5

Ať (\mathbb{X}, τ) je TP a $x \in \mathbb{X}$. Pak $\chi(x, \mathbb{X}) \leq w(\mathbb{X})$

┌ *Důkaz*

Ať \mathcal{B} je báze (\mathbb{X}, τ) , že $|\mathcal{B}| = w(\mathbb{X})$. Položme $\mathcal{B}(x) := \{\mathbb{U} \in \mathcal{B} : x \in \mathbb{U}\}$. $\mathcal{B}(x)$ je báze okolí v bodě x .

$$|\mathcal{B}(x)| \leq |\mathcal{B}|, \text{ protože } \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}. \quad \chi(x, \mathbb{X}) \leq |\mathcal{B}(x)| \leq |\mathcal{B}| = w(\mathbb{X}). \quad \square$$

3.2 Vnitřek, Uzávěr, hranice

Definice 3.8 (Uzavřená množina)

Ať (\mathbb{X}, τ) je TP. Množina $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá uzavřená, pokud její doplněk je otevřená množina (neboli $\mathbb{X} \setminus \mathbb{F} \in \tau$).

Definice 3.9 (Obojetná množina (clopen set))

Množina se nazývá obojetná, pokud je uzavřená a otevřená zároveň.

Definice 3.10 (Uzávěr)

Je-li $A \subseteq X$, pak uzavěr A je $\text{cl}(A) = \overline{A} = \bigcap \{F \subseteq X, A \subseteq F, F \text{ je uzavřená}\}$.

Definice 3.11 (Vnitřek množiny)

Vnitřek množiny A je $\text{Int } A = A^0 = \bigcup \{U \in \tau : U \subseteq A\}$.

Definice 3.12 (Hranice množiny)

Hranice množiny A je $\delta A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$

Tvrzení 3.6 (Vztah vnitřku a uzavěru)

Ať (X, τ) je TP, $A \subseteq X$, pak $X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A)$ a $X \setminus \text{Int } A = \overline{X \setminus A}$.

┌

Důkaz

\overline{A} je otevřená, navíc $X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus A$. Tedy $X \setminus \overline{A} \subseteq \text{Int}(X \setminus A)$. $\text{Int}(X \setminus A) \subseteq X \setminus A$, přechodem k doplňku $A \subseteq X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$. Tedy $\overline{A} \subseteq X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$???. Přechodem k doplňku: $\text{Int}(X \setminus A) \subseteq X \setminus \overline{A}$.

└ Druhou část můžeme dokázat přechodem k doplňku a převedením na první část. \square

Tvrzení 3.7 (Charakterizace uzavěru)

Bud' (X, τ) TP, $x \in X, A \subseteq X$ a $\mathcal{B}(x)$ báze okolí v bodě x . Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

- 1) $x \in \overline{A}$,
- 2) $\forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset$,
- 3) $\forall U \in \mathcal{B}(x) : U \cap A \neq \emptyset$.

┌

Důkaz

1) \rightarrow 2) sporem: Kdyby pro nějaké $U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A = \emptyset$, pak existuje V otevřená: $x \in V \subseteq U$. $V \cap A = \emptyset$. $X \setminus V$ je uzavřená a $A \subseteq X \setminus V$. Pak $x \in \overline{A} \subseteq X \setminus V$, neobsahuje x .

.

2) \rightarrow 3) triviální

3) \rightarrow 1) sporem: $x \notin \overline{A}$ pak $x \in X \setminus \overline{A}$. Pak existuje $U \in \mathcal{B}(x) : x \in U \subseteq X \setminus \overline{A}$. Pak ??? \square

Jako speciální důsledky dostáváme následující. Je-li U otevřená, pak $U \cap A = \emptyset$ právě když $U \cap \overline{A} = \emptyset$. Jsou-li U, V otevřené disjunktní množiny, pak $U \cap \overline{V} = \emptyset = \overline{U} \cap V$.

Tvrzení 3.8 (Vlastnosti uzávěru)

Pro množiny A, B v TP (X, τ) platí

$$(C1) \bar{\emptyset} = \emptyset,$$

$$(C2) A \subseteq \bar{A},$$

$$(C3) \overline{\bar{A}} = \bar{A} \quad (C4) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

$$(C5) \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}.$$

┌

Důkaz

První dvě jsou jednoduché, 3. plyne z uzavřenosti uzávěru. 4. dokážeme inkluzemi. Shrnutím dostaneme (C5). □

└

Příklad

Zobrazení z podmnožin do podmnožin, které splňuje podmínky (C1-C4) jednoznačně určuje topologii.

Tvrzení 3.9 (Vlastnosti vnitřku)

Obdobně jako vlastnosti uzávěru.

Tvrzení 3.10 (Charakterizace hranice)

Ať $A \subseteq X$ a $x \in X$. Pak $x \in \delta A$, právě když každé okolí bodu x protíná jak A , tak $X \setminus A$.

┌

Důkaz

Plyne okamžitě z definice hranice $\delta A = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$ a charakterizace uzávěru. □

└

Tvrzení 3.11 (Vlastnosti hranice)

12. bodů viz skripta. Stejně tak důkaz.

3.3 Husté a řídké množiny, hromadné a izolované body

Definice 3.13 (Hustá a řídká množina, hustota, separabilní prostor)

Ať X je TP. Množina $A \subseteq X$ se nazývá hustá (v X), pokud $\bar{A} = X$. A se nazývá řídká, pokud $X \setminus \bar{A}$ je hustá.

Hustota prostoru X je nejmenší mohutnost husté podmnožiny, značí se (X) (d...density). Prostor se spočetnou hustotou se nazývá separabilní.

Tvrzení 3.12 (Charakterizace hustých a řídkých množin)

Ať \mathbb{X} je TP. Množina $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ je hustá v \mathbb{X} , právě když $\forall \mathbb{U}$ otevřená neprázdná v \mathbb{X} protíná \mathbb{A} . Množina \mathbb{A} je řídká (v \mathbb{X}), právě když $\forall \mathbb{V}$ otevřená neprázdná $\exists \mathbb{U}$ otevřená neprázdná, že $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V} \setminus \mathbb{A}$, což je právě když $\text{Int}(\overline{\mathbb{A}}) = \emptyset$.

Důkaz

Označme $\tau^* = \tau \setminus \emptyset$. Z charakterizace uzávěru: $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{X} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{X} \forall \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{V} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$.
 \mathbb{A} je řídká $\Leftrightarrow \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}}$ je hustá $\Leftrightarrow \forall \mathbb{U} \in \tau^* : \mathbb{U} \cap (\mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall \mathbb{U} \in \tau^* : \mathbb{U} \setminus \overline{\mathbb{A}} \neq \emptyset$.

První část dostaneme ekvivalencí z předchozího: $\forall \mathbb{U} \in \tau^* \exists \mathbb{V} \in \tau^* : \mathbb{V} \subseteq \mathbb{U} \setminus \overline{\mathbb{A}}$.

Druhá část pak plyne z $\text{Int} \overline{\mathbb{A}} = \emptyset$

□

Tvrzení 3.13 (Vztah váhy a hustoty)

Ať \mathbb{X} je TP. Pak $(\mathbb{X}) \leq w(\mathbb{X})$. Speciálně každý prostor se spočetnou bází je separabilní.

Důkaz

Ať \mathcal{B} je báze TP \mathbb{X} . (BÚNO $\emptyset \notin \mathcal{B}$). *forall* $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$ fixujeme $x_B \in B$, $\mathbb{D} := \{x_B : B \in \mathcal{B}\}$.
Zřejmě $|\mathbb{D}| \leq |\mathcal{B}|$, \mathbb{D} je hustá v \mathbb{X} . (Když tedy volíme \mathcal{B} nejmenší, získáme výraz.) □

Poznámka

Pro metrizovatelný TP \mathbb{X} platí $(\mathbb{X}) = w(\mathbb{X})$.

Definice 3.14 (Izolovaný a hromadný bod)

Ať \mathbb{X} je TP. Bod $x \in \mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá izolovaným bodem množiny \mathbb{A} , pokud existuje otevřená množina $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{X}$, že $\mathbb{U} \cap \mathbb{A} = \{x\}$. Bod x se nazývá hromadným bodem množiny \mathbb{A} , pokud každé okolí bodu x protíná množinu $\mathbb{A} \subseteq \{x\}$

Například

V diskrétním prostoru jsou všechny body izolované. Naopak je-li $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ a $\mathbb{A} = \mathbb{Q}$, pak každý bod \mathbb{X} je hromadným bodem množiny \mathbb{A} . Žádný bod z \mathbb{A} není izolovaným bodem \mathbb{A} .

Definice 3.15 (Derivace množiny)

Množina hromadných bodů množiny \mathbb{A} se značí \mathbb{A}' . Někdy se nazývá derivace \mathbb{A} .

Tvrzení 3.14 (Vlastnosti derivace)

$$\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \cup \mathbb{A}', (\mathbb{A} \cup \mathbb{B})' = \mathbb{A}' \cup \mathbb{B}'$$

Důkaz

Domácí cvičení (je jednoduchý).

□

3.4 Spojitá zobrazení

Definice 3.16 (Spojité zobrazení, homeomorfismus a spojitost v bodě)

Ať (X, τ) a (Y, σ) jsou TP. Ať $f : X \rightarrow Y$. Zobrazení f se nazývá spojité, pokud $\forall U \in \sigma : f^{-1}(U) \in \tau$.

f se nazývá homeomorfismus, pokud f je bijekce a f i f^{-1} jsou spojitá.

f je spojité v bodě x , pokud $\forall V \in \mathcal{U}_\sigma(f(x)) \exists U \in \mathcal{U}_\tau(x) : f(U) \subseteq V$.

Například

\mathbb{R} , $(0, 1)$ jsou homeomorfní (ale nejsou izometrické)

Poznámka

Vlastnosti, TP, které se zachovávají homeomorfismem se nazývají topologické vlastnosti.

(Úplnost není topologický pojem.)

Například

Zobrazení z diskretního prostoru je vždy spojité.

Zobrazení do indiskretního prostoru je také vždy spojité.

Tvrzení 3.15 (Charakterizace spojitých zobrazení)

Ať (X, τ) , (Y, σ) jsou TP, $f : X \rightarrow Y$ zobrazení. Pak následující je ekvivalentní:

- 1) f je spojité
- 2) vzory množin z nějaké subbáze jsou otevřené
- 3) vzory množin z nějaké báze jsou otevřené
- 4) f je spojité v každém bodě
- 5) vzory uzavřených množin jsou uzavřené
- 6) $\forall A \subseteq X : f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
- 7) $\forall B \subseteq Y : f^{-1}(\overline{B}) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$
- 8) $\forall B \subseteq Y : f^{-1}(\text{Int } B) \subseteq \text{Int } (f^{-1}(B))$

┌
Důkaz

1->2 Triviální (z definice).

2->3 Ať \mathcal{B} je nějaká báze. Dle 2 pro nějakou subbázi \mathcal{S} toho (\mathbb{Y}, σ) platí, že $f^{-1}(\mathbb{S})$ je otevřená pro $\mathbb{S} \in \mathcal{S}$. Ať $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$. \mathbb{B} lze vyjádřit jako sjednocení konečných průniků prvků \mathcal{S} . (Vzor průniku je průnik vzorů, vzor sjednocení je sjednocení vzorů.) $f^{-1}(\mathbb{B})$ je sjednocením konečných průniků prvků tvaru $f^{-1}(\mathbb{S}), \mathbb{S} \in \mathcal{S}$. Tedy $f^{-1}(\mathbb{B})$ je otevřená.

3->4 Ať $x \in \mathbb{X}$, \mathbb{V} okolí bodu $f(x)$. \mathcal{B} báze z 3. podmínky. $\exists \mathbb{B} \in \mathcal{B}$, že $f(x) \in \mathbb{B} \subseteq \mathbb{V}$. $\mathbb{U} = f^{-1}(\mathbb{B})$ otevřená, $x \in \mathbb{U}$, $f(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{B} \subseteq \mathbb{V}$.

4->5 Ať $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{Y}$ je uzavřená. Ať $x \in \overline{f^{-1}(\mathbb{F})}$. Chceme, že $x \in f^{-1}(\mathbb{F})$ (tj. že $f(x) \in \mathbb{F}$). Z 4 pro každé okolí \mathbb{V} bodu $f(x)$ existuje \mathbb{U} okolí x , že $f(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{V}$. Z definice uzávěru platí, že každé takové \mathbb{U} protíná $f^{-1}(\mathbb{F})$, tedy $f(\mathbb{U}) \cap \mathbb{F} \neq \emptyset$, tedy $\mathbb{V} \cap \mathbb{F} \neq \emptyset$. Tedy podle charakterizace uzávěru $f(x) \in \overline{\mathbb{F}} = \mathbb{F}$.

5->6 $f^{-1}(\overline{f(\mathbb{A})})$ je uzavřená dle 5 a obsahuje \mathbb{A} , tedy obsahuje i $\overline{\mathbb{A}}$. Pak $f(\overline{\mathbb{A}}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(\mathbb{A})})) \subseteq \overline{f(\mathbb{A})}$.

6->7 Ať $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{Y}$, $\mathbb{A} := f^{-1}(\mathbb{B})$. Dle 6 $f(\overline{f^{-1}(\mathbb{B})}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(\mathbb{B}))} \subseteq \overline{\mathbb{B}}$. $\overline{f^{-1}(\mathbb{B})} \subseteq f^{-1}(\overline{\mathbb{B}})$ (aplikováním vzoru? na předchozí).

7->8 Vztah vnitřku a uzávěru. $f^{-1}(\text{Int } \mathbb{B}) = f^{-1}(\mathbb{Y} \setminus \overline{\mathbb{Y} \setminus \mathbb{B}}) = \mathbb{X} \setminus f^{-1}(\overline{\mathbb{Y} \setminus \mathbb{B}}) \stackrel{\text{dle 7}}{\subseteq} \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{Y} \setminus \mathbb{B}} = \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{X} \setminus f^{-1}(\mathbb{B})} = \mathbb{X} \setminus (\mathbb{X} \setminus \text{Int } f^{-1}(\mathbb{B})) = \text{Int } f^{-1}(\mathbb{B})$.

8->1 Je-li $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{Y}$ otevřená, pak ze 7: $f^{-1}(\mathbb{V}) \subseteq \text{Int}(f^{-1}(\mathbb{V}))$. Triviálně $\text{Int } f^{-1}(\mathbb{V}) \subseteq f^{-1}(\mathbb{U})$. Tedy $f^{-1}(\mathbb{V}) = \text{Int } f^{-1}(\mathbb{V})$, tedy $f^{-1}(\mathbb{V})$ je otevřená. □

Tvrzení 3.16 (Skládání spojitých zobrazení)

Ať $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ jsou TP, $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}, g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ zobrazení. Jsou-li f, g spojitá, pak $g \circ f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ je spojitá.

Pokud f je spojitá v bodě x a g spojitá v $f(x)$, pak $g \circ f$ je spojitá v x .

┌
Důkaz

$$(g \circ f)^{-1}(\mathbb{V}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathbb{V}))$$

┌ Je-li \mathbb{V} okolí $gf(x)$, pak $g^{-1}(\mathbb{V})$ □

3.5 Oddělovací axiomy

Definice 3.17

TP \mathbb{X} se nazývá:

- T_0 , pokud $\forall x, y \in \mathbb{X} \exists \mathbb{U}$ otevřená : $|U \cap \{x, y\}| = 1$.
- T_1 , pokud $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists \mathbb{U}$ otevřená : $x \in \mathbb{U}, y \notin \mathbb{U}$.
- T_2 (Hausdorffův), pokud $\forall x, y \in \mathbb{X} \exists \mathbb{U}, \mathbb{V}$ otevřené disjunktní : $x \in \mathbb{U}, y \in \mathbb{V}$.
- regulární, pokud $\forall \mathbb{F} \subseteq \mathbb{X}$ uzavřenou $\forall \mathbb{E} \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{F} \exists \mathbb{U}, \mathbb{V}$ otevřené disjunktní : $x \in \mathbb{U}, \mathbb{F} \subseteq \mathbb{V}$.
- normální, pokud $\forall \mathbb{E}, \mathbb{F}$ uzavřené disjunktní $\exists \mathbb{U}, \mathbb{V}$ otevřené disjunktní : $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{U}, \mathbb{F} \subseteq \mathbb{V}$.
- úplně regulární, pokud $\forall \mathbb{F} \subseteq \mathbb{X}$ uzavřenou $\forall x \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{F} \exists f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ spojitá, že $f(x) = 0, f(\mathbb{F}) \subseteq \{1\}$.
- T_3 , pokud je regulární a T_1 .
- $T_{3\frac{1}{2}}$ nebo T_π (Tichonovův), pokud je úplně regulární a T_1 .
- T_4 , pokud je normální a T_1 .

Poznámka

normální \implies úplně regulární $\xrightarrow{\text{rozpůlení intervalu } [0, 1]}$ regulární

$$T_4 \implies T_\pi \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$$

(Platí pouze tímto směrem, ne opačně!)

$$T_0 \not\implies T_1 : (\{0, 1\}, \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}) \dots \text{(Sierpinského TP)}$$

$$T_1 \not\implies T_2 : (\mathbb{N}, \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{N} \setminus K : K \text{ je konečná}\}) \text{(Topologie kokonečných (doplňků konečných) množin)}$$

Tvrzení 3.17 (Metrizovatelné prostory jsou T_4)

Je-li \mathbb{X} metrizovatelný prostor a $\mathbb{E}, \mathbb{F} \subseteq \mathbb{X}$ uzavřené disjunktní množiny, pak existuje spojitá funkce $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$, že $f(\mathbb{E}) \subseteq \{0\}, f(\mathbb{F}) \subseteq \{1\}$.

Důkaz

\mathbb{X} je metrizovatelný, tedy existuje metrika ϱ kompatibilní s topologií na \mathbb{X} . Položme $f(x) = \frac{\varrho(x, \mathbb{E})}{\varrho(x, \mathbb{E}) + \varrho(x, \mathbb{F})}, x \in \mathbb{X}$. f je dobře definovaná a jistě spojitá. $f(x) = 0, x \in \mathbb{E}, f(x) = 1, x \in \mathbb{F}$. \square

Lemma 3.18

Ať \mathbb{X} je TP. Pak

- \mathbb{X} je $T_1 \Leftrightarrow$ každá jednoprvková množina je uzavřená \Leftrightarrow každá konečná množina je uzavřená.
- \mathbb{X} je $T_2 \implies \forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) : y \notin \overline{\mathbb{U}}$.

c) \mathbb{X} je regulární $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{X} \forall U \in \mathcal{U}(x) \exists V \in \mathcal{U}(x) : \bar{V} \subseteq U$.

- \mathbb{X} je normální $\Leftrightarrow \forall V \subseteq \mathbb{X}$ otevřenou $\forall E \in \mathcal{V}$ uzavřenou $\exists U \subseteq \mathbb{X}$ otevřená : $E \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq V$.

┌ Důkaz

└ Jednoduché. □

Věta 3.19 (Urysohnovo lemma)

TP \mathbb{X} je normální \Leftrightarrow pro každé dvě disjunktní uzavřené E, F existuje spojitá funkce $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$, že $f(E) \subseteq \{0\}$, $f(F) \subseteq \{1\}$

┌ Důkaz

Implikace zprava doleva je snadná – uvažujeme $\{x \in \mathbb{X} : f(x) < \frac{1}{2}\}$ a $\{x \in \mathbb{X} : f(x) > \frac{1}{2}\}$.

\Rightarrow Označme $D := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, $D = \{r_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $r_0 = 0, r_1 = 1$ (r_n) prostá posloupnost. Indukcí najdeme otevřené množiny $V_q : q \in D$, že pro $p, q \in D, p < q \Rightarrow V_p \subseteq V_q$ a navíc $E \subseteq V_0, V_1 \subseteq \mathbb{X} \setminus F$.

Z normality najdeme otevřenou množinu U , že $E \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq \mathbb{X} \setminus \bar{r}$. Položíme $V_0 = U$, $V_1 = \mathbb{X} \setminus F$.

Nyní předpokládejme, že $V_{r_0}, V_{r_1}, \dots, V_{r_n}, n \geq 1$. Už známe a platí, že pro $p, q \in \{r_0, \dots, r_n\} : p < q \Rightarrow \bar{V}_p \subseteq V_q$. Chceme najít $V_{r_{n+1}}$. Ať $i, j \leq n$ jsou taková, že $r_i = \max\{r_k : r_k < r_{n+1}\}$ a $r_j = \min\{r_k : r_k > r_{n+1}\}$. $r_i < r_j$. Z 1P: $\bar{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}$. Z normality existuje otevřená $V_{r_{n+1}}$, že $\bar{V}_{r_i} \subseteq V_{r_{n+1}} \subseteq \bar{V}_{r_{n+1}} \subseteq V_{r_j}$.

Položme $f(x) = 1, x \in \mathbb{X} \setminus V_1 | f(x) = \inf r \in D : x \in V_r, x \in V_1$. $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$. Nyní stačí ověřit spojitost: vzory subbázových (nějaké subbáze) podmnožin jsou otevřené. Zvolím si subbázi $\{[0, b), (a, 1], a, b \in (0, 1)\}$. $f^{-1}([0, b)) = \{x \in \mathbb{X} : f(x) < b\} = \{x \in \mathbb{X} : \exists r < b : x \in V_r\} = \bigcup_{r < b} V_r \dots$ otevřené. $f^{-1}((a, 1]) = \{x \in \mathbb{X} : f(x) > a\} = \{x \in \mathbb{X} : \exists r > a : x \in V_r\} = \bigcup_{r > a} V_r \dots$ otevřené. □

Poznámka ($T_4 \Rightarrow T_{3.5}$, normalita \Rightarrow úplná regularita)

3.6 Konvergence v topologických prostorech

Definice 3.18 (Usměrněné množiny)

Dvojice (\mathbb{I}, \leq) se nazývá usměrněná množina, pokud \mathbb{I} je množina a \leq je binární relace na \mathbb{I} , která je reflexivní, tranzitivní a pro $i, j \in \mathbb{I}$, pak existuje $k \in \mathbb{I}$, že $i \leq k, j \leq k$.

┌ *Například*
 (\mathbb{N}, \leq)
└

Definice 3.19 (Net)

Net v TP \mathbb{X} je libovolné zobrazení z usměrněné množiny do \mathbb{X} .

Definice 3.20 (Konvergence netu)

Řekneme, že net $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ konverguje k bodu x , pokud $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) \exists i_0 \in \mathbb{I} \forall i \in \mathbb{I}, i \geq i_0 : x_i \in \mathbb{U}$. Pokud existuje právě jeden, značíme $x = \lim_{i \in \mathbb{I}} x_i$.

Bod x se nazývá hromadným bodem netu $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$, pokud $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) \forall i \in \mathbb{I} \exists j \geq i : x_j \in \mathbb{U}$.

Tvrzení 3.20 (Jednoznačnost limity netu)

Prostor \mathbb{X} je Hausdorffův \Leftrightarrow každý net má nejvýše jednu limitu.

┌ *Důkaz*

(\Rightarrow): Ať $(x_i)_{i \in I}$ je net mající dvě různé limity $x, y \in \mathbb{X}$. \mathbb{X} je Hausdorffův, tedy existuje disjunktní okolí U, V bodů x, y . Pak existuje $i \in I$, že $\forall j \in I, j \geq i : x_j \notin U$ a existuje $k \in I$, že $\forall j \in I, j \geq k : x_j \notin V$. (I, \leq) je usměrněná množina, tedy existuje $l \in I$, že $l \geq i, l \geq k$. $x_l \in U \cap V$. .

Opačně: Ať \mathbb{X} není Hausdorffův. Ať $x, y \in \mathbb{X}$ je dvojice různých bodů, které nejdou oddělit otevřenými disjunktními množinami. Uvažme otevřenou množinu $(\mathcal{U}(x) \times \mathcal{V}(y), \leq)$, kde $(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \leq (\mathbb{U}, \mathbb{V}) \equiv (\mathbb{U} \subseteq \mathbb{U} \wedge \mathbb{V} \subseteq \mathbb{B})$. Pro každé $(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \in \mathcal{U}(x) \times \mathcal{V}(y)$ vezměme nějaký bod $x_{(\mathbb{U}, \mathbb{V})} \in \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$. $(x_{(\mathbb{U}, \mathbb{V})})_{(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \in \mathcal{U}(x) \times \mathcal{U}(y)}$ je net v X , který konverguje k x a zároveň konverguje k y . □

Tvrzení 3.21 (Charakterizace uzávěru pomocí konvergence netů)

Ať \mathbb{X} je TP a $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$. Pak $x \in \overline{\mathbb{A}}$, právě když existuje net $(x_i)_{i \in I}$ tvořený body z \mathbb{A} , který konverguje k x .

┌ *Důkaz*

(\Rightarrow): Ať $x \in \overline{\mathbb{A}}$. $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{U} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$. Fixujme $x_{\mathbb{U}} \in \mathbb{U} \cap \mathbb{A}$, pro $\mathbb{U} \in \mathcal{U}(x)$. (\mathcal{U}, \supseteq) je usměrněná množina. $(x_{\mathbb{U}})_{\mathbb{U} \in \mathcal{U}(x)}$ je net tvořený prvky z \mathbb{A} , který konverguje k x .

(\Leftarrow): Ať $x \in \mathbb{X}$, $(x_i)_{i \in I}$ je net z prvků \mathbb{A} , který konverguje k x . Chceme, $x \in \overline{\mathbb{A}}$. Ať \mathbb{U} je okolí x . Chceme, že $\mathbb{U} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$. (x_i) konverguje k x , tedy existuje $j \in I : x_j \in \mathbb{U}$. Navíc $x_j \in \mathbb{A}$. $x_j \in \mathbb{A} \cap \mathbb{U}$. □

Tvrzení 3.22 (Charakterizace spojitosti pomocí netů)

Ať \mathbb{X}, \mathbb{Y} jsou TP. $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ je zobrazení, $x \in \mathbb{X}$. Pak f je spojitý v bodě x právě tehdy, když pro každý net $(x_i)_{i \in I}$ konvergující k bodu $x \in \mathbb{X}$ konverguje net $(f(x_i))_{i \in I}$ k bodu $f(x)$.

┌
Důkaz

(\Rightarrow): Ať $\mathbb{V} \in \mathcal{U}(f(x))$. Pak ze spojitosti $\exists \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) : f(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{V}$. Net (x_i) konverguje k x , tedy existuje $i_0 \in I$, že pro $i \geq i_0 : x_i \in \mathbb{U}$. Pak zřejmě pro $i \geq i_0 : f(x_i) \in \mathbb{V}$.

(\Leftarrow): Ať f není spojitý v bodě x . Tedy existuje $\mathbb{V} \in \mathcal{U}(f(x))$, že $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) : f(\mathbb{U}) \setminus \mathbb{V} \neq \emptyset$. Zvolme $x_{\mathbb{U}} \in \mathbb{U}$, že $f(x_{\mathbb{U}}) \notin \mathbb{V}$. $(x_{\mathbb{U}})_{\mathbb{U} \in \mathcal{U}(x)}$ je net v \mathbb{X} , zřejmě $(x_{\mathbb{U}})$ konverguje k x . $(f(x_{\mathbb{U}}))_{\mathbb{U} \in \mathcal{U}(x)}$ zřejmě tedy nekonverguje k bodu $f(x)$. □

4 Operace s TP a zobrazeními

4.1 Obecné konstrukce

Definice 4.1 (Větší a menší topologie)

Ať \mathbb{X} je množina, τ, σ dvě topologie na \mathbb{X} . Řekněme, že τ je větší (jemnější, silnější) než σ , pokud $\tau \supseteq \sigma$. Topologie σ se pak nazývá menší (hrubší, slabší).

Poznámka

Topologie τ je větší než $\sigma \Leftrightarrow id_{\mathbb{X}} : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (\mathbb{X}, \sigma)$ je otevřená.

Jsou-li $\tau_i : i \in I$ topologie na \mathbb{X} , pak $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ je opět topologie na \mathbb{X} . Navíc je největší topologií, která je menší než všechny τ_i . $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ je subbáze nějaké topologie, která je nejmenší topologie, která je větší než všechny τ_i .

Definice 4.2 (Projektivní a induktivní vytváření)

Ať \mathbb{X} je množina a $(\mathbb{X}_i, \tau_i), i \in I$, jsou TP a $f_i : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_i$ zobrazení.

Topologie τ na množině \mathbb{X} se nazývá projektivně vytvořená, pokud τ je nejmenší topologie, při níž jsou všechna zobrazení $f_i : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (\mathbb{X}_i, \tau_i)$ spojitá.

Jsou-li $f_i : \mathbb{X}_i \rightarrow \mathbb{X}$ zobrazení, topologie τ na \mathbb{X} se nazývá induktivně vytvořená, pokud τ je největší topologie na \mathbb{X} , při které jsou všechna $f_i : (\mathbb{X}_i, \tau_i) \rightarrow (\mathbb{X}, \tau)$ spojitá.

Věta 4.1 (Charakterizace spojitosti zobrazení do projektivně definovaného TP)

Ať (\mathbb{X}, τ) je projektivně vytvořen souborem zobrazení $f_i : \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X}_i, \tau_i)$. Zobrazení $g : (\mathbb{Y}, \sigma) \rightarrow (\mathbb{X}, \tau)$ je spojitý $\Leftrightarrow \forall i \in I : f_i \circ g : (\mathbb{Y}, \sigma) \rightarrow (\mathbb{X}_i, \tau_i)$ je spojitý.

┌
Důkaz

Doprava je jednoduché, složení spojitých zobrazení je spojitě.

Opačně: Ať τ' je největší topologie na \mathbb{X} , při které je zobrazení g spojitě: $\tau' = \{\mathbb{U} \subseteq \mathbb{X} : g^{-1}(\mathbb{U}) \in \sigma\}$. Stačí, že $\tau \subseteq \tau'$. τ je nejmenší topologie, která obsahuje množiny $f_i^{-1}(\mathbb{V}), \mathbb{V} \in \tau_i, i \in I$. Tedy stačí ukázat, že $f_i^{-1}(\mathbb{V}) \in \tau'$ pro $\mathbb{V} \in \tau_i, i \in I$. $g^{-1}(f^{-1}(\mathbb{V})) = (f_i \circ g)^{-1}(\mathbb{V}) \in \sigma$. Tedy opravdu $f_i^{-1} \in \tau'$. \square
└

4.2 Podprostor, suma, součin, kvocient

Definice 4.3

Je-li (\mathbb{X}, τ) TP a $A \subseteq \mathbb{X}$, pak (A, σ) se nazývá podprostor (\mathbb{X}, τ) , pokud topologie σ je projektivně vytvořená zobrazením identitou na A .

Jsou-li (\mathbb{X}_i, τ_i) TP, pak je jejich součin TP (\mathbb{X}, τ) , kde $X = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$ a τ je projektivně vytvořená zobrazeními $\pi_i : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_i, \pi_i(\dots) = x_i$

Zobrazení $f : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$ se nazývá vnořené zobrazení, pokud f je prosté a topologie τ na \mathbb{X} je projektivně vytvořená zobrazením f .

Poznámka

Ať (\mathbb{X}, τ) je TP. $A \subseteq X$. $\tau_A := \{\mathbb{U} \cap A : \mathbb{U} \in \tau\}$ je topologie podprostoru na A .

Ať (\mathbb{X}_i, τ_i) jsou TP, $i \in I$. Ať $\mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$, součinnová topologie na \mathbb{X} má subbázi: $\mathcal{S} := \{\pi^{-1}(\mathbb{U}) : i \in I, \mathbb{U} \in \tau_i\}$.

Konvergence netů v součinnové topologii: Net $(x_j)_{j \in J}$ konverguje k $x \in X \Leftrightarrow \forall i \in I : (\pi_i(x_j))_{j \in J}$ konverguje k $\pi_i(c)$.

Jsou-li $A_i \subseteq X_i$, pak $\overline{\prod A_i} = \prod \overline{A_i}$.

Příklad

$C([0, 1], \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{[0, 1]} := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ zobrazení}\}$.

Topologie podprostoru $C \dots$ = „topologie bodové konvergence“.

Definice 4.4

Ať (\mathbb{X}, τ) je TP, $E \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ ekvivalence. Uvažme $\mathbb{X} \setminus E = \{[x]_E : x \in \mathbb{X}\}$, $\pi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X} \setminus E, x \rightarrow [x]_E$. Kvocientová topologie na $\mathbb{X} \setminus E$ je induktivně vytvořená zobrazením π .

Jsou-li (\mathbb{X}_i, τ_i) TP, $i \in I$, $(\mathbb{X}_i$ jsou po dvou disjunktní) pak topologie sumy na $\bigcup_{i \in I} \mathbb{X}_i$ je topologie, která je induktivně vytvořena zobrazeními $j_i : \mathbb{X}_i \rightarrow \bigcup_{k \in I} \mathbb{X}_k, j_i(x) = x$. Sumu TP značíme $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{X}_i$.

Zobrazení $f : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$ se nazývá kvocientové, pokud je na a topologie σ je induktivně vytvořená zobrazením f .

Příklad

$\mathbb{X} = \mathbb{R}, E : xEy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. $\mathbb{R} \setminus E$ homeomorfní s kružnicí.

Poznámka

Množina \mathbb{U} v kvocientovém prostoru $\mathbb{X} \setminus E$ je otevřená $\Leftrightarrow \pi^{-1}(\mathbb{U})$ je otevřená v \mathbb{X} .

$$\mathbb{X} = \bigoplus \mathbb{X}_i, \mathbb{U} \subseteq \mathbb{X}. \mathbb{U} \text{ je otevřená} \Leftrightarrow \mathbb{U} \cap \mathbb{X}_i \text{ je otevřená v } \mathbb{X}_i.$$

Příklad

Je-li \mathbb{X} TP a $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}, \mathbb{M} \subseteq \mathbb{Y}$, pak $\overline{\mathbb{M}}^{\mathbb{Y}} = \overline{\mathbb{M}}^{\mathbb{X}} \cap \mathbb{Y}$.

Tvrzení 4.2 (Charakterizace vnoření a kvocientových zobrazení)

Ať (\mathbb{X}, τ) a (\mathbb{Y}, σ) jsou TP a $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ zobrazení. Zobrazení $f : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$ je vnoření $\Leftrightarrow f : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (f(\mathbb{X}), \sigma|_{f(\mathbb{X})})$ je homeomorfismus. Zobrazení $f : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$ je kvocientové zobrazení $\Leftrightarrow f$ je na a $\forall V \subseteq \mathbb{Y} : V \in \sigma \Leftrightarrow f^{-1}(V) \in \tau$.

┌

Důkaz

f je vnoření $\Leftrightarrow f$ je prosté a τ je projektivně vytvořená zobrazením $f : \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma) \Leftrightarrow f : \mathbb{X} \rightarrow f(\mathbb{X})$ je bijekce a obě zobrazení $f : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (f(\mathbb{X}), \sigma|_{f(\mathbb{X})})$ a $f^{-1} : (f(\mathbb{X}), \sigma|_{f(\mathbb{X})}) \rightarrow (\mathbb{X}, \tau)$ jsou spojitá $\Leftrightarrow f : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (f(\mathbb{X}), \sigma|_{f(\mathbb{X})})$ je homeomorfismus.

f je kvocientové zobrazení $\Leftrightarrow f$ je na a $\sigma = \sigma' \rightarrow (f \text{ je na a } \forall V \subseteq \mathbb{Y} : V \in \sigma \Leftrightarrow f^{-1}(V) \in \tau)$. □

└

Tvrzení 4.3 (Postačující podmínka pro kvocientové zobrazení)

Je-li $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ spojitá a otevřená (tj. obraz otevřené je otevřená) (nebo uzavřená, tj. obraz uzavřené je uzavřená) a na, pak f je kvocientové zobrazení.

┌

Důkaz

Použijeme přechodí charakterizaci kvocientového zobrazení. Ať $V \subseteq \mathbb{Y}$. Pak 1) V je otevřená v \mathbb{Y} , pak f^{-1} je otevřená v \mathbb{X} ze spojitosti. 2) $f^{-1}(V)$ otevřená v \mathbb{X} . Pak z otevřenosti zobrazení f máme, že $f(f^{-1}(V)) (= V, \text{ protože } f \text{ je na})$ je otevřená v \mathbb{Y} .

Pro uzavřená zobrazení přes doplňky. □

└

Poznámka

Jsou-li \mathbb{X}, \mathbb{Y} Banachovy prostory a $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ lineární spojité a na, pak f je otevřené.

Tvrzení 4.4 (Charakterizace Hausdorffových prostorů)

$TP \mathbb{X}$ je Hausdorffův $\Leftrightarrow \{(x, x) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}, x \in \mathbb{X}\}$ je uzavřená v $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$.

Poznámka

Operace s TP jsou tranzitivní (součet, součin, kvocient, podprostor, ...).

4.3 Zachovávání konstrukcemi

Definice 4.5

Jsou-li \mathbb{X}_i a \mathbb{Y}_i TP, $i \in I$ a $f_i : \mathbb{X}_i \rightarrow \mathbb{Y}_i$ zobrazení, pak definujeme

$$\bigoplus_{i \in I} f_i : \bigoplus_{i \in I} \mathbb{X}_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Y}_i, x \rightarrow f_i(x), \text{ pokud } x \in \mathbb{X}.$$

$$\prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i \rightarrow \prod_{i \in I} \mathbb{Y}_i, (x_i)_{i \in I} \rightarrow (f_i(x_i))_{i \in I}.$$

Jsou-li $\mathbb{X}_i = \mathbb{X}$, $i \in I$, pak definujeme tzv. diagonální zobrazení

$$\Delta_{i \in I} f_i : \mathbb{X} \rightarrow \prod_{i \in I} \mathbb{Y}_i, x \rightarrow (f_i(x))_{i \in I}.$$

Tvrzení 4.5

Součinnové, součtové a diagonální zobrazení odvozené od spojitých je spojitě.

┌

Důkaz

└ Plyne z charakterizace spojitého zobrazení do projektivně vytvořeného prostoru. □

Důsledek

Ať \mathbb{X} je TP a $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě, pak $f+g, f-g, f \cdot g, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}, |f|, \frac{f}{g} (g \neq 0)$ jsou spojitá.

┌

Důkaz

$f \triangle g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^2, (f \triangle g)(x) = (f(x), g(x))$ je spojitě. Následně toto zobrazení spojíme s $+, -, \dots$, která jsou spojitá, tedy i výsledek je spojitý. □

└

	T_0	T_1	T_2	T_3	T_π	T_4	Separabilní	Spoč. báze	Spoč. charakter
podprostor	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ne	Ne	Ano	Ano
(spoč.) suma	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	(Ano) Ne	(Ano) Ne	Ano
kvocient	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano	Ne	Ne
(spoč.) součin	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ne	(Ano) Ne	(Ano) Ne	(Ano) Ne

Tvrzení 4.6 ((Úplná) regularita se zachovává součinem)

Jsou-li TP X_i , $i \in I$ (úplně) regulární, pak $\prod_{i \in I} X_i$ je (úplně) regulární.

┌

Důkaz

$X := \prod_{i \in I} X_i$. Ať $F \subseteq X$ je uzavřená a $x \in X \setminus F$. Z definice součinné topologie existuje $K \setminus I$ konečná a otevřené $U_i \subseteq X_i$, $i \in K$, že $x \in \bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}(U_i) \subseteq X \setminus F$.

Tedy $x_i \in U_i$, $i \in K$. X_i regulární, tedy existuje $G_i \subseteq X_i$ otevřená, že $x_i \in G_i \subseteq \overline{G_i} \subseteq U_i$. TODO dlouhý vzorec. □

└

4.4 Rozšiřování spojitých funkcí

Tvrzení 4.7

Ať X, Y jsou TP, $f, g : X \rightarrow Y$ spojitá. Pokud Y je Hausdorffův, pak $M := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ je uzavřená v X .

┌

Důkaz

Ať $x \in X \setminus M$. Pak $f(x) \neq g(x) \in Y$. Y je Hausdorffův, tedy existují otevřené disjunktní U, V , že $f(x) \in U, g(x) \in V$. Ať $W := f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ je otevřená množina a $x \in W$. $W \cap M = \emptyset$, protože U a V jsou disjunktní, tedy $X \setminus M$ je otevřená, M je uzavřená. □

└

Poznámka

Je-li $f : X \rightarrow Y$ spoj., Y Hausdorffův a $S \subseteq X$ hustá, pak f má jediné spojitě rozšíření.

Tvrzení 4.8

Je-li X TP a $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ spoj. zobrazení (f_n) konverguje stejnoměrně k $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, pak f je spojitá.

┌

Důkaz

TODO!

└

□

Věta 4.9 (Tietze-Urysohnova)

Je-li \mathbb{X} normální TP a $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, pak lze každou spojitou funkci $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě rozšířit na celé \mathbb{X} , tedy existuje spojitá funkce $\bar{f} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, že $\bar{f}|_F = f$.

┌
Důkaz

Pozorování: Ke každé spojitě funkci $g : F \rightarrow [-c, c]$ existuje spojitá funkce $\bar{g} : X \rightarrow [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$, že $|g(x) - \bar{g}(x)| \leq \frac{2}{3}c$ pro každé $x \in F$.

Důkaz pozorování: Ať $E := \{x \in F : g(x) \leq -\frac{c}{3}\}$ a $H := \{x \in F : g(x) \geq \frac{c}{3}\}$. E, H uzavřené v F a disjunktní. Tedy E, H uzavřené v \mathbb{X} . Tedy z Urysohnova lemmatu existuje spojitá $h : \mathbb{X} \rightarrow [-1, 1]$, že $h(E) \subseteq \{-1\}$, $h(H) \subseteq \{1\}$. Položme $\bar{g} := \frac{c}{3} \cdot h$. Jednoduše nahlédneme, že vzdálenosti z pozorování teď fungují.

Nejprve dokažme pro $f : F \rightarrow [-1, 1]$ (a rozšíříme jí na spoj. $\bar{f} : \mathbb{X} \rightarrow [-1, 1]$). Indukcí najdeme posloupnost spojitých funkcí $g_n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, že $\|g_n\| \leq \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$ a pro každé $x \in F$ a $n \in \mathbb{N} : |f(x) - \sum_{i=1}^n g_i(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$.

Položme $g_1 = \bar{f}$ z pozorování, tedy $g_1 : \mathbb{X} \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Máme-li g_1, \dots, g_n zkonstruované a splňující předpoklady indukce, pak uvažujme funkci $f' := f - \sum_{i=1}^n g_i : F \rightarrow [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ a aplikujeme na ni pozorování, tedy existuje spojitá funkce $g_{n+1} : \mathbb{X} \rightarrow [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$, že $|f'(x) - g_{n+1}(x)| \leq \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n = (\frac{2}{3})^{n+1}$, $x \in F$. Položme $\tilde{f}_n := \sum_{i=1}^n g_i(x)$ a $\tilde{f} := \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(x)$. Stejněměrná konvergence zachovává spojitost. A jelikož \tilde{f}_n z Weierstrassova kritéria konverguje stejnoměrně, tak \tilde{f} je spojitá. Zároveň $|\tilde{f}(x) - f(x)| = 0$, tedy \tilde{f} je rozšířením f .

Ať nyní $f : F \rightarrow \mathbb{R}$. Ať $h : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ je homeomorfismus. $h \circ f : F \rightarrow (-1, 1) \subseteq [-1, 1]$ podle předchozí části existuje spojitě $v : \mathbb{X} \rightarrow [-1, 1]$, že pro $x \in F$ je $v(x) = h \circ f(x)$. Ať $E := v^{-1}(\{-1, 1\})$ uzavřená v \mathbb{X} . E je disjunktní s F . Z Urysohnova lemmatu existuje spojitě $m : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$, $m(E) \subseteq \{0\}$, $m(F) \subseteq \{1\}$. $m \circ v : \mathbb{X} \rightarrow (-1, 1)$. Tudíž $h^{-1} \circ (m \circ v) : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě a navíc $(h^{-1} \circ (m \circ v))(x) = f(x)$ pro $x \in F$. □

5 Kompaktnost

Definice 5.1

Systém množin \mathcal{S} se nazývá pokrytí \mathbb{X} , pokud $\bigcup \mathcal{S} = \mathbb{X}$. Každý podsystem \mathcal{S} , který je také pokrytí, se nazývá podpokrytí.

Pokrytí se nazývá otevřené, pokud všechny jeho prvky jsou otevřené množiny.

TP \mathbb{X} se nazývá kompaktní, pokud každé jeho otevřené pokrytí má konečné podpokrytí.

TP \mathbb{X} se nazývá spočetně kompaktní, pokud každé spočetné pokrytí má konečné podpokrytí.

TP \mathbb{X} se nazývá Lindelöfův, pokud každé otevřené pokrytí má spočetné pokrytí.

Řekneme, že systém $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ je centrovaný, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ je $F_1 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset$.

Věta 5.1 (Charakterizace kompaktnosti)

Pro TP \mathbb{X} je ekvivalentní: a) \mathbb{X} je kompaktní. b) Každý centrovaný systém sestávající z uzavřené množiny má neprázdný průnik. c) Každý net má limitu? TODO

Důkaz

(a \implies b) Ať $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ sestává z uzavřených množin a je centrovaný. Položme $\mathcal{U} := \{\mathbb{X} \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ (systém otevřených množin). Ať pro spor $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Pak \mathcal{U} je pokrytí \mathbb{X} . \mathbb{X} je kompaktní, tedy existuje $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$, že $U_1 \cup \dots \cup U_n = \mathbb{X}$. $U_i = \mathbb{X} \setminus F_i$ pro něj $F_i \in \mathcal{F}$. Pak $\bigcup_{i=1}^n F_i = \emptyset$. Tedy \mathcal{F} není centrovaný, .

(b \implies c) Ať $(x_i)_{i \in I}$ je net v \mathbb{X} , (I, \leq) usměrněná množina. Položme $F_i = \{x_j : j \geq i\}$ je uzavřená, $i \in I$. $\mathcal{F} = \{F_i | i \in I\}$ je centrovaný. Tedy dle b) $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Ať $x_0 \in \bigcap \mathcal{F}$. Pak x_0 je hromadným bodem netu $(x_i)_{i \in I}$.

(c \implies a). Ať \mathcal{U} je otevřená podmnožina \mathbb{X} . Předpokládejme pro spor, že neexistuje konečné pokrytí. Tedy pro $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ konečnou existuje bod $x_{\mathcal{F}} \in \mathbb{X} \setminus \bigcup \mathcal{F}$. $(x_{\mathcal{F}})_{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}}$ je net v \mathbb{X} . Podle c) existuje hromadný bod x tohoto netu. Existuje $U \in \mathcal{U} : x \in U$. Z definice hromadného bodu existuje $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ konečné, že $\mathcal{F} \supseteq \{U\}$ a $x_{\mathcal{F}} \in U$. Ale $x_{\mathcal{F}} \notin \bigcup \mathcal{F}$. To je spor. \square

Tvrzení 5.2 (Zachovávání vlastností)

Kompaktnost, spočetná kompaktnost i lindelöfovost se dědí na uzavřené podprostory a spojité obrazy.

Důkaz

Ukážeme pouze pro kompaktnost: Ať \mathbb{X} je kompaktní a $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená. Ať tedy \mathcal{U} je otevřené pokrytí F . Pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje \tilde{U} otevřená v \mathbb{X} , že $\tilde{U} \cap F = U$. Označme $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{U} : U \in \mathcal{U}\} \cup \{\mathbb{X} \setminus F\}$. $\tilde{\mathcal{U}}$ otevřené pokrytí \mathbb{X} , tedy z kompaktnosti \mathbb{X} existuje konečné podpokrytí $\{\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n, \mathbb{X} \setminus F\}$. Pak $\{U_1, \dots, U_n\}$ je pokrytí F vybrané z \mathcal{U} . Tedy F je kompaktní.

Ať $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ na, spojité a \mathbb{X} kompaktní. Ať \mathcal{U} je otevřené pokrytí \mathbb{Y} . TODO otevřené pokrytí \mathbb{X} . \mathbb{X} je kompaktní, tedy existuje TODO. Pak TODO pokrývá \mathbb{Y} . \square

Důsledek (Nabývání extrému)

Spojité reálné funkce na (spočetně) kompaktním neprázdném prostoru nabývá maxima a minima.

Důkaz

$f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, spojitá, \mathbb{X} spočetně kompaktní. $f(\mathbb{X})$ je spočetně kompaktní \Leftrightarrow kompaktní (v metrických prostorech). Tedy $f(\mathbb{X})$ uzavřená omezená v \mathbb{R} , tedy má minimum a maximum. \square

Věta 5.3 (Postačující podmínky pro normalitu)

Regulární Lindelöfův TP je normální.

Hausdorffův kompaktní TP je normální (tedy T_4).

┌ *Důkaz*

a) Ať E, F jsou uzavřené disjunktní. $\forall x \in E \exists$ otevřené $U_x \in \mathcal{U}(x)$, že $\overline{U_x} \cap F = \emptyset$. $\{U_x : x \in E\}$ je otevřené pokrytí E . Z lindelöfovosti E (uzavřený podprostor \mathbb{X}) existuje $C \subseteq \mathbb{X}$ spočetné, že $\{U_c : c \in C\}$ pokrývá E . Přeindexujeme systém $\{U_c : c \in C\}$ na $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$. Analogicky najdeme $\{V_j : j \in \mathbb{N}\}$ systém otevřených množin pokrývajících F , $\overline{V_j} \cap E = \emptyset$, $k \in \mathbb{N}$. TODO

$U := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i^*$, otevřené. Kdyby $x \in U \cap V$, pak existují $i, j \in \dots \mathbb{N} : x \in U_i^* \cap V_j^*$. Búno: $i \geq j : x \in U_i \setminus \bigcup_{k \leq i} \overline{V_k}$, $x \notin \overline{V_j}$, $x \notin V_j^*$. Tedy \mathbb{X} je normální.

b) Ať \mathbb{X} je Hausdorffův kompaktní. Stačí ukázat, že \mathbb{X} je regulární a použít a). Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ je uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Pro $y \in F$ existují otevřené disjunktní U_y, V_y , že $x \in U_y, y \in V_y$. F je kompaktní, $\{V_y : y \in F\}$ je otevřená podmnožina F . Tedy existuje konečné podpokrytí $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$. $U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$, $V := \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$ otevřené, tedy \mathbb{X} regulární. \square

Tvrzení 5.4

Kompaktní podprostory (\mathbb{K}) jsou uzavřené v Hausdorffových prostorech (\mathbb{X}).

┌ *Důkaz*

Pro $x \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{K}$ fixované a $y \in \mathbb{K}$ existují disjunktní U_y a V_y v \curvearrowright , že $x \in U_y$ a $y \in V_y$. $\{V_y : y \in \mathbb{K}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{K} . \mathbb{K} je kompaktní, tedy *exists* $y_1, \dots, y_n \subseteq \mathbb{K}$, že $V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n} \supseteq \mathbb{K}$. $x \in \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ otevřené je disjunktním s $\bigcup V_{y_i}$, tedy i disjunktním s \mathbb{K} . Tedy $\mathbb{X} \setminus \mathbb{K}$ je otevřená, tj. \mathbb{K} je uzavřená. \square

Tvrzení 5.5 (Automatický homeomorfismus)

Ať \mathbb{X}, \mathbb{Y} jsou kompaktní Hausdorffovy TP a $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ spojitá. a) Pokud je f na, pak f je kvocientové. b) Pokud je f bijekce, pak f je homeomorfismus.

┌ *Důkaz*

a) Stačí ukázat, že f je uzavřené zobrazení. Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ je uzavřená. Pak F je kompaktní, f spojitá, tedy $f(F)$ je kompaktní. Podle předchozího tvrzení je $f(F)$ uzavřená v \mathbb{Y} .

b) Okamžitý důsledek a). \square

Poznámka

Ať τ je kompaktní Hausdorffova topologie na \mathbb{X} . Pak τ je maximální kompaktní topologie a minimální Hausdorffova.

Lemma 5.6 (Alexandrovo)

Ať \mathbb{X} je TP a \mathcal{S} jeho subbáze. Předpokládejme, že z každého pokrytí $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ lze vybrat konečné podpokrytí. Pak \mathbb{X} je kompaktní.

Důkaz (Sporem)

Předpokládejme pro spor, že existuje otevřené pokrytí \mathbb{X} , které nemá konečné podpokrytí. Označme \mathcal{P} množinu všech takových pokrytí. $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Ať $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$ je řetězec vzhledem k \subseteq . Pak $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{P}$: Zřejmě $\bigcup \mathcal{L}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Kdyby existovalo $\mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathcal{L}$ konečné podpokrytí, pak existuje $\mathcal{U} \in \mathcal{L}$, že $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Tedy \mathcal{U} má konečné podpokrytí.

Tedy podle Zormova lemmatu existuje maximální prvek $\mathcal{U} \in \mathcal{P}$. Ukážeme, že $\mathcal{U} \cap \mathcal{S}$ je pokrytí \mathbb{X} : Ať $x \in \mathbb{X}$. Pak existuje $U \in \mathcal{U} : x \in U$. Zároveň existuje $S_1, \dots, S_n, n \in \mathbb{N}$, že $x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subseteq U$. Tvrdíme, že pro nějaké $i \leq n : S_i \in \mathcal{U}$: Kdyby ne, pak $\forall i \leq n : S_i \notin \mathcal{U}$. Tedy $\mathcal{U} \cup \{S_i\} \notin \mathcal{P}$ (\mathcal{U} byl maximální prvek \mathcal{P}). Tedy existuje $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{U}$ konečná, že $\mathcal{F}_i \cap \{S_i\}$ je pokrytí S_i . Pak $\bigcup_{i \leq n} \mathcal{F}_i \cup \{U\}$ je pokrytí \mathbb{X} , je konečné, je to podpokrytí \mathcal{U} . Spor.

Tedy $x \in S_i \in \mathcal{S} \cap \mathcal{U}$. Tedy $\mathcal{U} \cap \mathcal{S}$ je pokrytí \mathbb{X} . Podle předpokladu má $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}$ konečné podpokrytí, tedy \mathcal{U} má konečné podpokrytí. Spor s volbou \mathcal{U} . \square

Věta 5.7 (Tichonova)

Součin kompaktních prostorů je kompaktní.

Důkaz

Ať (\mathbb{X}_i, τ_i) , $i \in I$, jsou kompaktní TP. Ať $\mathbb{X} = \prod \mathbb{X}_i$. τ součinnová topologie na \mathbb{X} . Ať $\mathcal{S} := \{\pi_i^{-1}(U) : U \in \tau_i, i \in I\}$. \mathcal{S} je subbáze τ . Ověříme, že \mathcal{S} splňuje předpoklady Alexandrova lemmatu. Ať $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ je pokrytí \mathbb{X} . Pro $i \in I$ označme $\mathcal{U}_i = \{U \in \tau_i : \pi_i^{-1}(U) \in \mathcal{U}\}$. Tvrdíme, že existuje $i \in I$, že \mathcal{U}_i je pokrytí \mathbb{X}_i : Kdyby ne, pak $\forall i \in I \mathcal{U}_i$ nepokrývá \mathbb{X}_i , tedy existuje $x_i \in \mathbb{X}_i \setminus \bigcup \{V : V \in \mathcal{U}_i\}$. Nyní $x := (x_i)_{i \in I} \in \mathbb{X}$, ale $x \notin \bigcup \mathcal{U}$. Tedy \mathcal{U} nepokrývá \mathbb{X} , spor.

\mathbb{X}_i je kompaktní, tedy existuje $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}_i$ konečná, že $\bigcup \mathcal{K} = \mathbb{X}_i$. Zřejmě $\{\pi_i^{-1}(U) : U \in \mathcal{K}\}$ je konečné podpokrytí \mathbb{X} prvky z \mathcal{U} . Podle Alexandrova lemmatu je \mathbb{X} kompaktní. \square

Tvrzení 5.8 (Spojitý obraz kompaktu nezvýší váhu)

Ať \mathbb{X} je kompaktní a \mathbb{Y} Hausdorffův. Ať $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ je spojitý a na. Potom $w(\mathbb{Y}) \leq w(\mathbb{X})$.

┌ *Důkaz*

Ať \mathcal{B} je báze \mathbb{X} . Můžeme předpokládat, že \mathcal{B} je uzavřená na konečné sjednocení (tím nezvýšíme mohutnost nekonečné báze). Definujeme $\mathcal{C} := \{\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{X} \setminus B) : B \in \mathcal{B}\}$. \mathcal{C} sestává z otevřené množiny. Ukážeme, že \mathcal{C} je báze \mathbb{Y} . Ukážeme, že \mathcal{C} je báze \mathbb{Y} : Ať $y \in \mathbb{Y}$ a $V \in \mathcal{U}(y)$ otevřená, pak $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(V)$. \mathcal{B} je báze, tedy $\forall x \in f^{-1}(y) \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subseteq f^{-1}(V)$. $f^{-1}(y)$ je kompaktní a $\{B_x : x \in f^{-1}(y)\}$ je otevřené pokrytí $f^{-1}(y)$. Tedy existuje $x_1, \dots, x_n \in f^{-1}(y) : B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_n} \supseteq f^{-1}(y)$.

└ Navíc $B \subseteq \text{TODO}$. □

6 Prostory spojitých funkcí na kompaktech

Definice 6.1

Pro TP \mathbb{X} , \mathbb{Y} značíme symbolem $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ množinu všech spojitých funkcí \hookrightarrow do \mathbb{Y} . Pokud $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$, pak píšeme pouze $C(\mathbb{X})$.

Topologie bodové konvergence: $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subseteq \mathbb{Y}^{\mathbb{X}}$ se součinnou topologií.

Pro \mathbb{X} kompaktní je $C(X)$ se supremovou normou Banachův prostor.

Tvrzení 6.1 (Diniho kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)

Ať \mathbb{X} je kompaktní TP a $f_n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá, že $f_{n+1} \geq f_n, n \in \mathbb{N}$ a f_n bodově konverguje ke spojitě funkci f . Pak f_n konverguje stejnoměrně k f .

┌ *Důkaz*

Ať $\varepsilon > 0$ ať $D_n = \{x \in \mathbb{X} : f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$. Pak D_n je otevřená pro $n \in \mathbb{N}$. Navíc z monotonie $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{X}$. \mathbb{X} kompaktní, tedy existuje n_0 , že $D_{n_0} = \mathbb{X}$. Tedy $|f(x) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon$ pro libovolné $x \in \mathbb{X}$. Pak pro $n \geq n_0 : f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_{n_0}(x) < \varepsilon$. □

Lemma 6.2 (O odmocnině)

Existuje posloupnost polynomů, která na intervalu $[0, 1]$ konverguje stejnoměrně k \sqrt{t} .

┌ *Důkaz*

Položme $p_0(t) = 0, p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{t - p_n^2(t)}{2}, n \geq 0$. Každé p_n je polynom v proměnné t . $\forall n \in \mathbb{N} : p_n(t) \leq \sqrt{t}$ a $p_1(t) \leq p_{n+1}(t), t \in [0, 1]$ (dokazatelné indukcí). Tedy pro každé $t \in [0, 1]$ je posloupnost $(p_n(t))_{n=1}^{\infty}$ neklesající a shora omezená, tedy má vlastní limitu $L = L + \frac{t - L^2}{2} \implies L = \sqrt{t}$. □

Definice 6.2

Ať \mathcal{F} je systém funkcí $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$. Řekneme, že \mathcal{F} odděluje body, pokud pro $x, y \in \mathbb{X}, x \neq y$ existuje $f \in \mathcal{F} : f(x) \neq f(y)$. Řekneme, že \mathcal{F} odděluje body a uzavřené množiny, pokud

$\forall F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená $\forall x \in \mathbb{X} \setminus F \exists f \in \mathcal{F} : f(x) \notin \overline{f(F)}$.

Poznámka (Připomínáme svaz a okruh.)

$\emptyset \neq A \subseteq C(K)$, A je okruh $\Leftrightarrow A$ je uzavřená na násobení, sčítání a odčítání funkcí.

A je svaz $\Leftrightarrow A$ je uzavřená na minimum a maximum dvou funkcí.

Věta 6.3 (Stone-Weierstrass)

Ať \mathbb{K} je kompaktní TP a $\mathcal{B} \subseteq C(\mathbb{K})$ je vektorový podprostor obsahující konstanty a oddělující body. Je-li \mathcal{B} okruh nebo svaz, pak \mathcal{B} je hustá v $C(\mathbb{K})$ (s topologií stejnoměrné konvergence).

Důkaz (Svaz)

Pozorování: pro $x, y \in \mathbb{K}, x \neq y, a, b \in \mathbb{R}$ existuje $h \in \mathcal{B} : h(x) = a \wedge h(y) = b$. (\mathcal{B} odděluje body, tedy $\exists u \in \mathcal{B} : u(x) \neq u(y)$. $h(z) := \frac{b-a}{u(y)-u(x)} \cdot (u(z) - u(x)) + a \in \mathcal{B}$.)

Chceme, že \mathcal{B} je hustý. Ať $f \in C(\mathbb{K})$ a $\varepsilon > 0$. Pro každou dvojici $x, y \in \mathbb{K}$ fixujeme $f_{x,y} \in \mathcal{B}$, že $f_{x,y}(x) = f(x)$ a $f_{x,y}(y) = f(y)$ (to můžeme díky pozorování pro $x \neq y$, pro $x = y$ položíme $f_{x,y} = f(x)$.) Ať $x \in \mathbb{K}$ je pevné. $\forall y \in \mathbb{K} \exists$ otevřené $U_y \in \mathcal{U}(y) : |f_{x,y}(z) - f_{x,y}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (ze spojitosti $f_{x,y}$) a zároveň $|f(z) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $z \in U_y$ (ze spojitosti f). Systém $\{U_y : y \in \mathbb{K}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{K} , tedy existuje $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{K} : U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_k} = \mathbb{K}$. Definujeme $f_x := \min \{f_{x,y_1}, \dots, f_{x,y_k}\} \in \mathcal{B}$ (\mathcal{B} je svaz). Navíc $f_x \leq f + \varepsilon$ na celém \mathbb{K} a také $f_x(x) = f(x)$. Nyní $\forall x \in \mathbb{K} \exists$ otevřené $V_x \in \mathcal{U}(x) : |f_x(z) - f_x(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $|f(z) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $z \in V_x$. $\{V_x : x \in \mathbb{K}\}$ otevřené pokrytí \mathbb{K} . Tedy existují $x_1, \dots, x_l : V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_l} = \mathbb{K}$. $g := \max \{f_{x_1}, \dots, f_{x_l}\}, g \in \mathcal{B}$ a $f - \varepsilon \leq g \leq f + \varepsilon$, tj. $\|f - g\| \leq \varepsilon$. \square

Důkaz (Okruh)

Ukážeme, že je-li $\mathcal{A} \subseteq C(\mathbb{K})$ VP a okruh obsahující konstanty a oddělující body, pak $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{A}}$ je svaz. Zřejmě \mathcal{B} je VP obsahující konstanty a odděluje body (je nadmnožinou, proto vše obsahuje). Ukážeme, že pro $f \in \mathcal{B}$ je $|f| \in \mathcal{B}$: f je omezená, tedy existuje $c > 0$, že $c \cdot f^2 : \mathbb{K} \rightarrow [0, 1]$. Z lemmatu o odmocnině existují polynomy $p_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, že p_n stejnoměrně konverguje k odmocnině. Tedy $p_n \circ (c \cdot f^2) \in \overline{\mathcal{A}}$ stejnoměrně konverguje k $\sqrt{c} \cdot |f| \in \overline{\mathcal{A}}$ (z uzávěru se nedá vykonvergovat). Tedy $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$, tedy i $\max \{f, g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}$, tedy $\overline{\mathcal{A}}$ je uzavřená na maxima (minima podobně). Z první části $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = C(\mathbb{K})$, tedy $\overline{\mathcal{A}} = C(\mathbb{K})$. \square