Příklad (B.3)
Zkusme pro každé $a \in \mathbb{R}$ definovat zobrazení $T : L_5([0,3]) \to L_1([0,3]^2)$ předpisem

$$Tf(x,y) = \frac{f(x)}{(xy)^a}, \qquad f \in L_5([0,3]).$$

Pro jaká $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{5}\right\}$ je zobrazení T dobře definovaným spojitým lineárním operátorem z $L_5([0,3])$ do $L_1([0,3]^2)$?

V případech, kdy $T \in \mathcal{L}(L_5([0,3]), L_1([0,3]^2))$, nalezněte $K > 0$ splňující $||T|| \leq K$.

Řešení
Problém s definicí je zřejmě pouze v tom, zda je obraz prvkem $L_1([0,3]^2)$. Aby byla funkce $g : [0,3]^2 \to \mathbb{R}$ prvkem tohoto prostoru, musí být $\int_{[0,3]^2} |g(x,y)| d\,xy$ definovaný a konečný. Vyšetřujeme tedy (podle Fubiniovy věty):

$$\int_{[0,3]^2} \left|\frac{f(x)}{(xy)^a}\right| d\,xy = \int_0^3 \int_0^3 \left|\frac{f(x)}{(xy)^a}\right| dx\,dy = \left(\int_0^3 \frac{1}{y^a} dy\right) \cdot \left(\int_0^3 \frac{|f(x)|}{|x^a|} dx\right),$$

kde $\int_0^3 |f(x)|^5 dx \in \mathbb{R}$. Pokud je $a \geq 1$, tak je levý integrál nekonečný, tedy i původní integrál je nekonečný, tedy T není dobře definováno.

Pro $a > \frac{4}{5}$ zvolíme $f(x) = \frac{1}{x^{1-a}}$, což je prvek $L_5([0,3])$, jelikož:

$$\int_0^3 |f(x)|^5 dx = \int_0^3 \frac{1}{x^{5\left(\frac{1}{5} - \left(a - \frac{4}{5}\right)\right)}} dx = \int_0^3 \frac{1}{x^{1-5\ldots}} dx \in \mathbb{R}.$$

Obraz ale není prvkem $L_1([0,3]^2)$, neboť druhý z integrálů výše vyjde (první je nenulový):

$$\int_0^3 \left|\frac{f(x)}{x^a}\right| = \int_0^3 \frac{1}{x^{a+1-a}} dx = \int_0^3 \frac{1}{x} dx = +\infty.$$

a tudíž musí být $\leq \frac{4}{5}$.

Pro $a < \frac{4}{5}$ máme (levý integrál spočítáme, pravý odhadneme Hölderovou nerovností):

$$||Tf||_1 = \left(\int_0^3 \frac{1}{y^a} dy\right) \cdot \left(\int_0^3 \frac{|f(x)|}{|x^a|} dx\right) \leq \left((1-a)3^{1-a}\right) \cdot \left(||f||_5 \cdot \sqrt[5/4]{\int_0^3 \frac{1}{x^{a \cdot \frac{5}{4}}} dx}\right) =$$

$$= ||f||_5 \cdot (1-a)3^{1-a} \cdot \sqrt[5/4]{\left(1 - a \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot 3^{1-a\cdot\frac{5}{4}}} = ||f||_5 \cdot (1-a)3^{1-2a} \cdot \sqrt[5/4]{3\left(1 - \frac{5a}{4}\right)}.$$

Tudíž pro $a < \frac{4}{5}$ je $||T||$ odhadnuto shora výrazem za „$||f||_5 \cdot$“, tudíž je T dobře definováno a spojité (prvek $\mathcal{L}(\ldots)$), zatímco pro $a > \frac{4}{5}$ není T do $L_1([0,3]^2)$.