

Úvod

Poznámka (Motivace)

Hledání řešení diferenciálních rovnic. (Např. nahradíme rovnici definicí operátoru a hledáme, kde je operátor identita. Tedy neřešíme rovnice, ale prostory, na kterých máme funkce.)

Definice 0.1

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} \vee \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

1 Banachovy a Hilbertovy prostory

Definice 1.1 (Normovaný lineární prostor)

Nechť X je vektorový prostor nad \mathbb{K} . Funkci $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ nazveme normou na X , pokud

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{o},$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

$$\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Tvrzení 1.1

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} .

Funkce $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ je translačně invariantní metrika na X .

Norma je 1-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na x .

Zobrazení $+: X \times X \rightarrow X$ a $\cdot: \mathbb{K} \times X \rightarrow X$ jsou spojitá.

┌ *Důkaz*

První část byla na MA3. Druhá: Zvol $x, y \in X$. Pak z trojúhelníkové nerovnosti máme $\|y\| \leq \|x\| + \|x - y\|$, $\|x\| \leq \|y\| + \|x - y\|$, tudíž (podle toho, zda je v absolutní hodnotě kladná nebo záporná hodnota, tak z první/druhé rovnice) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Třetí část: Připomenutí: Součin metrických prostorů s maximovou metrikou je metrický prostor. Důkaz tohoto i třetí části je pak jednoduché cvičení. □

Definice 1.2 (Uzavřená a otevřená koule)

$$B_X(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\}.$$

$$U_X(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\| < r\}.$$

$$S_X(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\| = r\}.$$

$$B_X := B_X(\mathbf{o}, 1).$$

$$U_X := U_X(\mathbf{o}, 1).$$

$$S_X := S_X(\mathbf{o}, 1).$$

Definice 1.3 (Banachův prostor)

Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Dále se opakovaly metrické prostory. Úplnost, kompaktnost a Bairova věta.

Tvrzení 1.2

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor. Potom

- a) Je-li Y Banachův, pak je Y uzavřený v X .*
- b) Pokud je naopak X Banachův, pak Y je Banachův právě tehdy, když je uzavřený.*

Důkaz

Je-li (P, ϱ) úplný, pak $M \subseteq P$ je úplný $\Leftrightarrow M$ je uzavřený. To dává speciálně b).

(P, ϱ) je MP, pak $M \subseteq P$ je úplný $\implies M$ uzavřený. To dává speciálně a). □

Například

$(\mathbb{K}, \|\cdot\|_p)$, $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$, kde funkce je $\Omega \rightarrow \mathbb{K}$ a norma je definována jako p -tá odmocnina z integrálu funkce na p . $l_p(l)$ resp. $l_p(l, \mathbb{K})$ je diskretní verze předchozího (tj. se sumou). $\mathbb{C}(K)$, kde K je hausdorfov a kompaktní TP.

c jsou všechny posloupnosti se supremovou normou, c_0 jsou všechny posloupnosti konvergující k 0 se supremovou normou. c_{00} sestává z těch posloupností, kde je jen konečně mnoho nenulových prvků (norma je maximová), je to lineární prostor, ale není Banachův. $c_0(I)$ je zobecnění z $c_0(\mathbb{N})$ na libovolnou diskretní množinu I , tj. obsahuje „posloupnosti“, kde pro každé ε je pouze konečně mnoho členů větších než ε (pak $(c_0(I), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachův).

$\mathcal{L}^1([0, 1], \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1})$ (prostor hladkých funkcí na intervalu $[0, 1]$), kde $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. $\mathcal{M}(K) = \{\mu : \text{Borel}(K) \rightarrow \mathbb{K} \mid \mu \text{ regulární míra}\}$,

$$\|\mu\| := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(B_i)|, \bigcup B_i = K, B_i \text{ Borelovská} \right\}.$$

Definice 1.4 (Ekvivalentní normy)

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jsou normy na X . Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 1.3

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

┌

Důkaz

Později.

└

□

Lemma 1.4

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X , $B_1 = B_{X, \|\cdot\|_1}$, $B_2 = B_{X, \|\cdot\|_2}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Zvol $x \in aB_1$, pak $\|\frac{x}{a}\|_1 \leq 1 \Rightarrow x \in B_2$. Opačně: Zvol $x \in B_2$, pak $\|x\|_2 \leq 1 \Rightarrow x \in B_1$.

\Leftarrow : Pokud $x = 0$, pak jsou nerovnosti jasné. Zvol $x \neq 0$. Pak $\frac{x}{\|x\|_1} \in B_1$. Pak $\frac{ax}{\|x\|_1} \in B_2 \subset bB_1$.
 $B_1 \subset B_2 \Rightarrow a\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Analogicky pro druhý směr.

└

□

Tvrzení 1.5

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a B_1 a B_2 jako minule. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.
2. Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.
3. Zobrazení $\text{id} : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.
4. Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami $(X, \|\cdot\|_2)$.
5. $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$, právě když $\|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$ pro $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$.

┌ *Důkaz*

$1 \Leftrightarrow 2$ plyne z předchozího lemmatu. $3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$ je lehké a platí ve všech MP. $1 \Rightarrow 5$ jasné.

$5 \Rightarrow 1$: Sporem: Předpokládejme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $x_n, y_n \in X$ splňující $\|x_n - y_n\|_1 > n\|x_n - y_n\|_2$. Položme $z_n = \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|_1}$. Pak $\|z_n\|_1 = 1$, ale $\|z_n\|_2 < \frac{1}{n} \rightarrow 0$.
└ ∇ . □

Definice 1.5 (Konvexní množina)

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Poznámka (Fakt)

Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny. (A naopak každá konvexní množina může být koulí v nějaké normě.)

Definice 1.6 (Konvexní obal)

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu $\text{conv } M = \bigcap \{C \supset M \mid C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 1.6

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak

$$\text{conv } M = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid x_i \in M, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

┌ *Důkaz*

\subseteq : Stačí dokázat, že množina vpravo je konvexní. Přímocharé.

\supseteq : Stačí dokázat, že každý prvek vlevo je v konvexním obalu. Indukcí podle n , přímocharé. □

Definice 1.7

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Poznámka (Fakt)

Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X , která obsahuje $U(x, r)$ respektive $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$ a $r \geq 0$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.

┌
Důkaz
Jednoduchý.
└

□

Definice 1.8

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako

$$\overline{\text{span}} M = \bigcap \{Y \supset M \mid Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$$

a uzavřený konvexní obal jako $\overline{\text{conv}} M = \bigcap \{C \supset M \mid C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}.$

Poznámka (Fakt)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak \overline{Y} je podprostor X a \overline{C} je konvexní množina.

Poznámka (Fakt)

Ať X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\text{span}} M = \overline{\text{span } M}$ a $\overline{\text{conv}} M = \overline{\text{conv } M}$.

Věta 1.7

Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\text{span}(Y \cup Z)$ je uzavřený.

┌
Důkaz

Stačí dokázat pro $\dim Z = 1$ (pak indukci). Ať $Z = \text{span}(e)$, $e \notin Y$. Ověřme, že $\text{span}(Y \cup \{e\}) = \{y + ke \mid k \in \mathbb{K}\}$ je uzavřený: Ať $x_n = y_n + t_n e \rightarrow x \in X$. Chceme $x \in \text{span } Y$.

1. krok: (t_n) je omezená. (Kdyby ne, pak má limitu ∞ a $\|\frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} + e\| = \frac{1}{|t_{n_k}|} \|x_{n_k}\| \rightarrow 0$, tedy $\frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} \rightarrow -e \notin Y$, tedy Y není uzavřená. ∇)

Tedy existuje posloupnost (n_k) , že $t_{n_k} \rightarrow t \in \mathbb{K}$. Pak ale $y_{n_k} = x_{n_k} - t_{n_k} e \rightarrow x - te \in Y$. Tedy $\exists z \in Y : x - te = z$, tj. $x = z + te \in \text{span}(Y \cup \{e\})$.
└

□

Důsledek

Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený.

Definice 1.9 (Konvergence řady v normovaných lineárních prostorech)

Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n$.

Řada je konvergentní, pokud existuje takové x . Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Poznámka (Fakt)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní řada v X . Pak

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Věta 1.8 (Test úplnosti)

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Ať X je Borelovský, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je AK řada. $s_N = \sum_{n=1}^N x_n$. Chceme (s_n) je Cauchy: Buď $\varepsilon > 0$. Ať $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\sum_{n=N}^M \|x_n\| < \varepsilon$, $n_0 \leq N < M$. Pak ale pro $n_0 \leq N < M$ je

$$\|s_N - s_M\| = \left\| \sum_{n=N+1}^M x_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \|x_n\| < \varepsilon.$$

Tedy (s_n) je konvergentní.

\Leftarrow : Ať (x_n) je Cauchyovská. Indukcí najdeme podposloupnost, že $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_1})$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - x_{n_1} + x_{n_1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - x_{n_1}) + \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_1} = z + x_{n_1}.$$

Celkem $\exists (n_k) \nearrow$, že $\lim(x_{n_k})$ existuje. Značme $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Chceme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. V metrickém prostoru konverguje Cauchyovská posloupnost právě tehdy, pokud existuje její konvergentní podposloupnost. \square

Definice 1.10 (Zobecněná řada)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X . Symbol $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou.

Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ . Řekneme, že zobecněná řada ... konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supseteq F : \left\| x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada ... (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní.

Definice 1.11 (Bolzanova-Cauchyova podmínka)

Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ v normovaném lineárním prostoru splňuje BC podmínku, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset : \left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Věta 1.9 (Nutná podmínka konvergence)

Nechť $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X . Pak je její součet určen jednoznačně a $(\|x_\gamma\|)_{\gamma \in \Gamma} \in c_0(\Gamma)$.

┌

Důkaz (Jednoznačnost)

Ať $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma = x \neq y = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$. Pak $\forall \varepsilon > 0$:

$$\exists F_x \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F \supseteq F_x : \|x - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists F_y \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F \supseteq F_y : \|y - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\varepsilon = \|x - y\| \leq \|x - \sum_{F_x \cup F_y} x_\gamma\| + \|\sum_{F_x \cup F_y} x_\gamma - y\| < \varepsilon$. ✎

□

└

┌

Důkaz (Limita)

Chceme $(\|x_\gamma\|) \in c_0(\Gamma)$: Ať $\varepsilon > 0$ libovolné. Najdeme

$$F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \supset F : \|x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\gamma_0 \notin F$ máme

$$\|x_{\gamma_0}\| = \left\| \sum_{\gamma \in F \cup \{\gamma_0\}} x_\gamma - x + x - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma \right\| \leq \|\dots\| + \|\dots\| < \varepsilon.$$

Tedy $\{\gamma \in \Gamma \mid \|x_\gamma\| > \varepsilon\} \subseteq F \in \mathcal{F}(\Gamma) \implies (\|x_\gamma\|) \in c_0(\Gamma)$. (Je tam pouze konečný počet prvků větších než ε .)

□

Věta 1.10

Nechť X je Banachův prostor.

1. Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.
2. Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.
3. Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda \subset \Gamma$, pak je i zobecněná řada

$\sum_{\gamma \in \Lambda} x_\gamma$ konvergentní.

┌

Důkaz (1.)

\Rightarrow : Ať $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ je konvergentní. Zvol $\varepsilon > 0$. Zvolíme

$$F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \supseteq F : \left\| \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\tilde{F} \in \mathcal{F}(\Gamma)$, že $\tilde{F} \cap F = \emptyset$ máme:

$$\left\| \sum_{\gamma \in \tilde{F}} x_\gamma \right\| = \left\| \sum_{\gamma \in F \cup \tilde{F}} x_\gamma - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma + \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma \right\| \leq \|\dots\| + \|\dots\| < \varepsilon.$$

\Leftarrow : Ať $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ splňuje B-C podmínku. Pak najdeme posloupnost $(F_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}(\Gamma)^\mathbb{N}$, že

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \wedge \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F_n = \emptyset : \left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \frac{1}{n}.$$

Označ $y_n = \sum_{\gamma \in F_n} x_\gamma$. 1. krok: (y_n) je cauchyovská. (Dokáže se snadno.) 2. krok: Tedy existuje $y \in X : \lim y_n = y$. Chceme $y = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$: Ať $\varepsilon > 0$.

$$\forall F' \supset F : \left\| y - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| \leq \left\| y_{n_0} - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| + \|y_{n_0} - y\| = \sum_{\gamma \in F' \setminus F_{n_0}} x_\gamma \leq \frac{1}{n_0} + \|y_{n_0} - y\| < \varepsilon.$$

□

└

┌

Důkaz (2.)

Víme, že $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|$ je konvergentní. Dle tvrzení níže tedy

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\| = S = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\| \mid F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\}.$$

Ověříme, že $\sum x_\gamma$ splní B-C podmínku: Ať $\varepsilon > 0$. Ať $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že $S - \varepsilon < \sum_{\gamma \in F} \|x_\gamma\|$. Pak $\forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, že $F' \cap F = \emptyset$:

$$\left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| \leq \sum_{\gamma \in F'} \|x_\gamma\| = \sum_{\gamma \in F' \cup F} \|x_\gamma\| - \sum_{\gamma \in F} \|x_\gamma\| < \varepsilon.$$

□

└

┌

Důkaz (3.)

Snadný důsledek 1., protože B-C podmínka se zjevně dědí na podmnožiny.

□

└

Tvrzení 1.11

Nechť $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$ je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když

$\sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} a_\gamma : F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\} < +\infty$. A navíc platí $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} a_\gamma : F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\}$.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Ať $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$ konverguje. Pak zvolíme $F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \supset F : \left\| \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma - \sum_{\gamma \in F} a_\gamma \right\| < 1$. Pak $\forall H \in \mathcal{F}(\Gamma) : \sum_{\gamma \in H} a_\gamma \leq \sum_{\gamma \in H \cup F} a_\gamma \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma + 1$. Tedy $\sup \dots \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma + 1 < \infty$.

\Leftarrow : Ať $S := \sup \dots < \infty$. Chceme $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = S$. Ať $\varepsilon > 0$. Ať $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$ (z definice suprema) taková, že $S - \varepsilon < \sum_{\gamma \in H} a_\gamma$. Pak pro $F' \supset H$ máme

$$\left| S - \sum_{\gamma \in F'} a_\gamma \right| = S - \sum_{\gamma \in F'} a_\gamma < S - \sum_{\gamma \in H} a_\gamma < \varepsilon.$$

Tedy $\sum a_\gamma = S$.

└

□

Tvrzení 1.12

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Ať $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| =: S < \infty$. Pak

$$\sup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \sum_{n \in F} \|x_n\| \leq \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^N \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = S < \infty,$$

neboť každá konečná množina v přirozených číslech má maximum (a odebráním kladných prvků sumu zmenšíme).

\Leftarrow : Ať $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$ je konvergentní, pak dle předchozího tvrzení

$$S := \sup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \sum_{n \in F} \|x_n\| < \infty.$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n \in [N]} \|x_n\| \leq S < \infty.$$

└

□

Věta 1.13

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v Banachově (pro normovaný lineární prostor je důkaz složitější) prostoru X . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ konverguje (říkáme $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ke stejnému součtu.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

┌
Důkaz

$1 \implies 2$: Ať $\varepsilon > 0$ a $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$. Ať $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňuje, že $\forall F' \supseteq F : \|\sum_{n \in F'} x_n - x\| < \varepsilon$, kde $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N} : F \subseteq \{\pi(1), \dots, \pi(n_0)\}$. Pak $\forall n \geq n_0 : \|\sum_{i=1}^n x_{\pi(i)} - x\| < \varepsilon$. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = x$.

$2 \implies 3$: okamžitě. $3 \implies 1$: Pro spor předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$, ale $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ nesplňuje B-C podmínku. Zvolme $\varepsilon > 0$ svědčící o tom, že B-C podmínka není splněna. Pak existuje $(F_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$, že $F_n \cap F_m = \emptyset \ \forall n \neq m$, $\max F_n < \min F_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\|\sum_{i \in F_n} x_i\| \geq \varepsilon$.

Zvolme $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$ splňující, že existuje $(n_k) \nearrow$ a $(p_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, že

$$\pi(\{n_k, n_k + 1, \dots, n_k + p_k\}) = F_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tedy $\forall k \in \mathbb{N} : \|\sum_{i=n_k}^{n_k+p_k} x_{\pi(i)}\| = \|\sum_{i \in F_k} x_i\| \geq \varepsilon$. To však znamená, že $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ nesplňuje B-C podmínku, tedy není konvergentní. \nmid □

Věta 1.14

Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.

┌
Důkaz

Jasný z minulé věty. □

Navíc v \mathbb{R} platí ekvivalence.

Věta 1.15

Pokud $\dim X = +\infty$, pak $\exists (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ konverguje, ale $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ není konvergentní.

2 Lineární operátory a funkcionály

Poznámka (Opakovali jsme)

Lineární zobrazení (viz lingeбра), dále:

Věta 2.1

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. T je spojitý.
2. T je spojitý v jednom bodě.
3. T je spojitý v 0.
4. $\exists C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X$.
5. T je Lipschitzovské.
6. T je stejnoměrně spojitý.
7. $T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.
8. $T(B_X)$ je omezená.
9. $T(U(0, \delta))$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou $\|T\| = \sup_{x \in B_x} \|T(x)\|$ je normovaný lineární prostor.

Lemma 2.2

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

- $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ pro každé $x \in X$.
- $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$.
- $\|T\| = \inf \{C \geq 0 \mid \|T(x)\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X\}$.

┌

Důkaz

Pro $x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$ platí $\|T(x)\| = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$.

$S_X \subseteq B_X$, tedy $\|T\| \geq \sup_{x \in S_X} \|T(x)\|$. $\forall x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$:

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \sup_{y \in S_X} \|T(y)\|,$$

tedy $\sup_{x \in S_X} \|T(x)\| \geq \sup_{x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} =: S_3$. Pro $x \in U_X \setminus \{\mathbf{o}\}$ platí $\|T(x)\| \leq \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq S_3$, tedy $\sup_{x \in U_X} \|T(x)\| \leq S_3$. Konečně, pro $x \in B_x$: $\|T(x)\| \leftarrow \|T((1 - \frac{1}{n})x)\| \leq \sup_{x \in U_X} \|T(x)\| =: S_4$, tedy $\|T_x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T((1 - \frac{1}{n})x)\| \leq S_4 \implies \sup_{x \in B(x)} \|T(x)\| \leq S_4$.

Dle prvního bodu máme nerovnost „ \geq “. Pro „ \leq “ zvolme $\varepsilon > 0$... ať $\tilde{c} > 0$ je takové, že $\tilde{c} < \inf \{ \dots \} + \varepsilon$. Pak $\|T\| = \sup_{x \in B_x} \frac{\|T_x\|}{\|x\|} \leq \inf \{ \dots \}$. □

Definice 2.1

Nechť X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} . Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X .

Poznámka (Fakt)

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ je posloupnost operátorů konvergující k $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \rightarrow T(x)$ v prostoru Y .

┌

Důkaz (Ze skript)

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \|(T_n - T)(x)\| \leq \|T_n - T\| \cdot \|x\| \rightarrow 0.$$

└

□

Poznámka (Fakt)

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $\|T \circ S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$.

┌

Důkaz

Jednoduchý. □

Věta 2.3

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.

┌ *Důkaz* (Ze skript)

Mějme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{T_n\}$ v $\mathcal{L}(X, Y)$. Pro libovolné pevné $x \in X$ platí

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \cdot \|x\| \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Tedy posloupnost $\{T_n(x)\}$ je cauchyovská v Y a protože Y je úplný, existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, kterou označíme $T(x)$. Nyní stačí dokázat, že je T lineární. Linearita plyne ze spojitosti součtu a násobení.

Navíc pro $x \in B_X$ platí

$$\|T(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| \leq \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \right) \|x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|.$$

Jelikož $\{T_n\}$ je cauchyovská, tak je zřejmě i $\{\|T_n\|\}$ cauchyovská, tudíž omezená, tedy $\|T(x)\|$ je konečné, tedy $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Nakonec je potřeba dokázat $T_n \rightarrow T$ v $\mathcal{L}(X, Y)$. Pro $\varepsilon > 0$ zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ pro každé $n, m \geq n_0$. Pak pro $x \in B_X$ a pevné $n \geq n_0$ máme

$$\begin{aligned} \|T_n(x) - T(x)\| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \\ &\leq \sup_{m \geq n_0} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup_{m \geq n_0} \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ pro libovolné $n \geq n_0$. Proto $T_n \rightarrow T$. □

Věta 2.4

Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^ úplný.*

┌ *Důkaz*

└ Speciální případ předchozí věty. □

Definice 2.2 (Izomorfismus, izomorfismus do, izometrie, izometrie do, izomorfni a izometrické prostory, izomorfně vnořený a izometricky vnořený prostor)

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\text{Rng } T$;
- izometrie X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;

- izometrie X do Y (nebo jen izometrie do), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Dále říkáme, že prostory X a Y jsou izomorfní respektive izometrické, pokud existuje lineární izomorfismus resp. izometrie X na Y .

O prostoru X řekneme, že je izomorfne resp. izometricky vnořen do Y , pokud existuje lineární izomorfismus respektive izometrie X do Y .

Poznámka

Lineární zobrazení T je izometrie do, právě tehdy, když $\forall z : \|Tz\| = \|z\|$.

Tvrzení 2.5

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

1. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.
2. Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, pak je i Y Banachův.
3. Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do, pak $\text{Rng } T$ je uzavřený v Y .

┌

Důkaz (Ze skript)

1. \implies Máme $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ pro každé $x \in X$. Dále $T^{-1} : \text{Rng } T \rightarrow X$ je spojitý, platí tedy pro každé $y \in \text{Rng } T$ nerovnost $\|T^{-1}(y)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|y\|$. Tudíž $\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq \|T^{-1}\| \|T(x)\|$ pro každé $x \in X$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $X \neq \{\mathbf{0}\}$ a tedy $\|T^{-1}\| > 0$. Požadovaná nerovnost tak platí s konstantami $C_1 = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ a $C_2 = \|T\|$.

\Leftarrow Splňují-li kladné konstanty C_1, C_2 požadované nerovnosti, je T spojitý a prostý: Je-li $T(x) = 0$, pak $\|x\| \leq \frac{1}{C_1} \|T(x)\| = 0$, tedy $\text{Ker } T = \{0\}$. Existuje tedy inverzní operátor $T^{-1} : \text{Rng } T \rightarrow X$, který je lineární. Pro libovolné $y \in \text{Rng } T$ máme $\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{C_1} \|T(T^{-1}(y))\| = \frac{1}{C_1} \|y\|$. Tedy T^{-1} je navíc spojitý.

2. Vezmeme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{y_n\}$ v Y . Díky odhadu $\|T^{-1}(y_n) - T^{-1}(y_m)\| \leq \|T^{-1}\| \|y_n - y_m\|$ pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ je cauchyovská i posloupnost $\{T^{-1}(y_n)\}$. Vzhledem k tomu, že X je úplný, konverguje $\{T^{-1}(y_n)\}$ k nějakému $x \in X$. Pak ovšem ze spojitosti operátoru T plyne $y_n = T(T^{-1}y_n) \rightarrow T(x)$, tedy i $\{y_n\}$ je konvergentní. Proto je Y úplný.

└

3. Podle 2. je $\text{Rng } T$ Banachův prostor. Tedy je uzavřený v Y dle tvrzení výše. \square

Poznámka (Fakt)

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do. Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.

Věta 2.6

Nechť X, \hat{X} a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v \hat{X} a Y je úplný. Nechť dále $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\hat{T} \in \mathcal{L}(\hat{X}, Y)$ rozšiřující T , tj. $\hat{T}|_X = T$. Navíc platí $\|\hat{T}\| = \|T\|$.

┌

Důkaz

Jednoduchý.

□

3 Konečně rozměrné prostory

Lemma 3.1 (O skoro kolmici)

Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X , pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že $\text{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

┌

Důkaz (Ze skript)

Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolme $u \in X \setminus Y$ a označme $d = \text{dist}(u, Y)$. Protože Y je uzavřený, je $d > 0$ a můžeme nalézt $\eta > 0$ tak, aby $\frac{d}{d+\eta} > 1 - \varepsilon$. Dále existuje $v \in Y$ takové, že $\|u - v\| \leq d + \eta$. Položme $x = \frac{u-v}{\|u-v\|}$. Pak $x \in S_X$. Je-li $y \in Y$ libovolné, je $v + \|u - v\|y \in Y$, a tedy

$$\|x - y\| = \left\| \frac{u - v}{\|u - v\|} - y \right\| = \frac{\|u - (v + \|u - v\|y)\|}{\|u - v\|} \geq \frac{d}{d + \eta}.$$

Dostáváme tak, že $\text{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| \geq \frac{d}{d + \eta} > 1 - \varepsilon$.

□

Věta 3.2

Nechť X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\dim X < \infty$.
2. Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
3. B_X je kompaktní.
4. Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojitě.
5. Každá lineární forma na X je spojitá.
6. Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

┌ Důkaz (Ze skript)

1. \implies 2.: Necht $\{e_1, \dots, e_n\}$ je nějaká báze X . Definujeme zobrazení $T : \mathbb{K}^n \rightarrow X$ předpisem $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Snadno je vidět, že T je lineární zobrazení a díky vlastnostem báze je to bijekce. Protože „projekce“ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ jsou spojité, ze spojitosti vektorových operací plyne spojitost T .

Ukažme nyní i spojitost inverze T^{-1} . Množina $S = S_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)}$ je kompaktní, neboť je uzavřená a omezená. Protože T je spojitý, je množina $T(S)$ také kompaktní. Norma $\|\cdot\|_X$ je spojitá na X , a tedy nabývá na $T(S)$ minima $C > 0$ ($T(S)$ neobsahuje 0 díky prostotě T). Pro libovolné $y \in X \setminus \{0\}$ je $\frac{T^{-1}(y)}{\|T^{-1}(y)\|_2} \in S$, takže $C \leq \left\| T \left(\frac{T^{-1}(y)}{\|T^{-1}(y)\|_2} \right) \right\|_X = \frac{\|y\|_X}{\|T^{-1}(y)\|_2}$, odkud $\|T^{-1}(y)\|_2 \leq \frac{1}{C} \|y\|_X$.

2. \implies 3.: Je-li $T : \mathbb{K}^n \rightarrow X$ izomorfismus, je $T^{-1}(B_X)$ uzavřená omezená podmnožina $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$, takže je kompaktní. Tedy i $B_X = T(T^{-1}(B_X))$ je kompaktní.

3. \implies 1.: Necht X je nekonečné dimenze. Indukcí najdeme posloupnost prvků $\{x_n\}$ v S_X tak, že $\text{dist}(x_{n+1}, \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}) \geq \frac{1}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$: x_1 zvolíme libovolně, následně $\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ je vždy uzavřený a vlastní (neboť je konečně dimenzionální), tedy podle lemmatu o skoro kolmici najdeme x_{n+1} splňující $\text{dist}(x_{n+1}, \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}) > \frac{1}{2}$. Tedy B_X není kompaktní.

1. \implies 6.: Necht $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X . Zafixujeme nějakou bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru X . Označme eukleidovskou normu na \mathbb{K}^n jako $\|\cdot\|_e$. Necht $T_1 : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_e)$ a $T_2 : (X, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_e)$ jsou izomorfismy z důkazu 1. \implies 2. Pak $T_2^{-1} \circ T_1 = \text{id}_X$ a tedy $\text{id}_X : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ je izomorfismus, tj. normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.

6. \implies 5.: Předpokládejme, že $(X, \|\cdot\|)$ existuje nespojitá lineární forma f . Pro každé $x \in X$ položíme $\|x\|_0 = \|x\| + |f(x)|$. Snadno je vidět, že $\|\cdot\|_0$ je norma na X , která je ovšem neomezená na $B_{(X, \|\cdot\|)}$. Tedy normy $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_0$ nejsou ekvivalentní.

5. \implies 1.: Není-li X konečněrozměrný, má nekonečnou algebraickou bázi $\{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že všechny vektory e_γ mají normu 1. Vybereme nekonečnou spočetnou množinu $\{\gamma_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$ a položíme $f(e_{\gamma_n}) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f(e_\gamma) = 0$ pro $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_n | n \in \mathbb{N}\}$. Pak f lze jednoznačně rozšířit na lineární formu na X , která ovšem není omezená na B_X .

1. \implies 4.: Necht Y je nějaký normovaný lineární prostor a $T : (X, \|\cdot\|) \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Zvolme bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru X a uvažujme normu $\|x\|_1 = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Díky tvrzení 4. stačí dokázat, že $T : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow Y$ je spojitý. To je ale zřejmé z odhadu

$$\|T(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i T(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|T(e_i)\| \leq \max\{\|T(e_1)\|, \dots, \|T(e_n)\|\} \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

└ 4. \implies 5.: Je triviální. □

4 Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Definice 4.1

Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}, & \text{pro } p = \infty. \end{cases}$$

Poznámka (Kvociet)

Nechť X je vektorový prostor nad \mathbb{K} a Y jeho podprostor. Definujeme relaci ekvivalence \sim na X jako $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y$.

Pro $x \in X$ pak definujeme $[x]$ jako třídu ekvivalence obsahující x .

Na množině $X/Y = \{[x] | x \in X\}$ definujeme operace $[x] + [y] = [x + y]$ a $\alpha[x] = [\alpha x]$.

Definice 4.2 (Kvociet)

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme faktoprostorem prostoru X podle Y nebo též kvocientem X podle Y . Dále definujeme tzv. kanonecké kvocientové zobrazení $q : X \rightarrow X/Y$ předpisem $q(x) = [x]$.

Definice 4.3 (Norma na kvocientu)

Buď X normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\|[x]\|_{X/Y} = \inf_{y \in [x]} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \text{dist}(x + Y, 0) = \text{dist}(x, Y).$$

Tato norma se nazývá kanonická kvocientová norma.

┌
Důkaz (Je to norma)
└ Triviální.

□

Tvrzení 4.1

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q : X \rightarrow X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_x) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.

┌
Důkaz
└ Zřejmý.

□

Věta 4.2

Nechť X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.

┌

Důkaz

Přes test úplnosti (X je Banachův, právě když každá abs. konvergentní řada je konvergentní). Ať $\{[x]_n | n \in \mathbb{N}\}$ splňuje $\sum_{n=1}^{\infty} [x]_n < \infty$. Chceme $\sum_n [x]_n$ konverguje. Ať $\{y_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y$ jsou takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + y_n\| < \infty$. Pak $\sum (x_n + y_n)$ je konvergentní (podle testu úplnosti) a je prvkem X , tedy $q(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} q(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} [x]_n$. Tudíž $\sum_{n=1}^{\infty} [x]_n$ je v prostoru $q(X) = X/Y$ konverguje. \square

└

Poznámka (Zajímavosti)

l_{∞}/c_0 je docela zajímavý prostor (Rosemider? + Brech? 2012: Je nerozhodnutelné, zda l_{∞}/c_0 je izometricky univerzální Banachův prostor hustoty $|\mathbb{R}|$. Dokonce je nerozhodnutelné, zda takový prostor existuje.) ($l_{\infty}/c_0 \equiv \mathcal{C}(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$)

Definice 4.4 (Direktní součet)

Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je direktním (též algebraickým) součtem A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{\mathbf{o}\}$ a $X = A + B = \text{span}\{A \cup B\}$.

Definice 4.5 (Projekce)

Nechť X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P : X \rightarrow X$ se nazývá (lineární) projekce, pokud $P^2 := P \circ P = P$.

Tvrzení 4.3 (Fakt)

Nechť X je vektorový prostor.

- Je-li $P : X \rightarrow X$ lineární projekce, pak $P \upharpoonright_{\text{Rng } P} = \text{id}_{\text{Rng } P}$.
- Je-li Y podprostor X a $P : X \rightarrow Y$ lineární zobrazení splňující $P \upharpoonright_Y = \text{id}_Y$, pak P je projekce X na Y .

┌

Důkaz

└ Triviální. \square

Tvrzení 4.4

Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A a P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = \text{id}_X$, $\text{Rng } P_A = A$, $\text{ker } P_A = B$, $\text{Rng } P_B = B$ a $\text{Ker } P_B = A$.

┌ Důkaz

Jednoduchý. □

Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X , pak $X = A \oplus B$, kde $A = \text{Rng } P$, $B = \text{Ker } P$ a $P = P_A$.

┌ Důkaz

Jednoduchý. □

Věta 4.5

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.

- Prostor Y má algebraický doplněk v X .
- Je-li A algebraický doplněk Y v X , je A algebraicky izomorfní s X/Y , speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

┌ Důkaz

Díky Zornovu lemmatu existuje algebraická báze $B \subset Y$ prostoru Y . Stejně tak existuje $B' \supset B$ báze X . Potom $Z = \text{span}(B' \setminus B)$ je algebraický doplněk Y v X , neboli $X = Y \oplus Z$.

Ať $X = Y \oplus A$. Pak chceme $q|_A: A \rightarrow X/Y$ je lineární izomorfismus: Víme q je lineární, q je prosté (ať $x \in A$, $q(x) = 0$, pak $x \in Y$, tedy $x \in A \cap Y = \{0\}$, takže $x = 0$) a q je na (Ať $x = y + a \in X$, pak $q(x) = q(a)$, tedy $q(x) \in q|_A(A)$). □

Definice 4.6 (Kodimenze)

Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak kodimenzi (značíme $\text{codim } Y$) Y rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

Definice 4.7

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B , pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_t B$. Je-li A podprostor X , pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_t B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X . Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

Věta 4.6

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když zobrazení $T: X \rightarrow Y \oplus_1 Z$, $T(x) = (P_Y(x), P_Z(x))$ je izomorfismus.

┌ Důkaz

$\implies : \forall x \in X: \|T(x)\| = \|P_Y x\| + \|P_Z x\| \leq 2 \max(\|P_Y\|, \|P_Z\|) \|x\| \leq \|(P_Y + P_Z)x\| = \|x\|$. Tedy T je izomorfismus.

$\Leftarrow : \forall x \in X: \|P_Y x\| \leq \|P_Y x\| + \|P_Z x\| = \|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$, tedy $\|P_Y\| \leq \|T\|$. \square

Věta 4.7

Nechť X je Banachův prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když Y a Z jsou uzavřené.

┌ Důkaz

Zatím bez důkazu. \square

Věta 4.8

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Pak

- Y je izomorfní komplementovanému podprostoru X , právě když existují lineární operátory $S : X \rightarrow Y$ a $T : Y \rightarrow X$ splňující $S \circ T = \text{id}_Y$.
- Y je isometrické 1-komplementovanému podprostoru X , právě když existují lineární operátory $S : X \rightarrow Y$ a $T : Y \rightarrow X$ splňující $S \circ T = \text{id}_Y$ a $\max\{\|S\|, \|T\|\} \leq 1$.

┌ Důkaz

\Leftarrow : Polož $p := T \circ S : X \rightarrow X$. Pak p je zřejmě lineární a $\|p\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$, navíc $p^2 = (T \circ S) \circ (T \circ S) = p$, tedy p je projekce. Zároveň $p(X) = T(S(X))$, jelikož $S \circ T$ je identita, tak S je na a $p(X) = T(Y) = \text{Rng } T$. Zbývá si uvědomit, že T je izomorfismus (izometrie, pokud $\|S\|, \|T\| \leq 1$): Máme

$$\forall x \in X : \|Sx\| = \|STSx\| \leq \|S\| \cdot \|TSx\|,$$

tedy (protože S je na):

$$\forall y \in Y : \|y\| \frac{1}{\|S\|} \leq \|Ty\|,$$

tudíž T je izomorfismus.

\implies : Ať $P : X \rightarrow X$ je projekce, $L : P(X) \rightarrow Y$ izomorfismus na. Položíme $S := L \circ P$, $T := L^{-1}$, pak $S \circ T = L \circ P \circ L^{-1} = L \circ L^{-1} = \text{id}$. \square

Poznámka (Zajímavosti pro všechny (nezkouší se))

Ví se ($\dim X = +\infty$, X Banach)

- X lze komplementovaně vnořit do $l_p \implies X \cong l_p$, $p \in [1, \infty]$.

- X lze komplementovaně vnořit do $c_0 \implies X \cong l_0$.
- Existuje nespočetně neizomorfních podprostorů L_p , $p \in (1, \infty)$.

Neví se:

- X lze komplementovaně vnořit do $L_1 \implies X \in \{l_1, L_1\}$.
- X lze komplementovaně vnořit do $\mathcal{C}([0, 1]) \implies X \cong \mathcal{C}(k?)$.

Ví se:

- $X \cong l_2 \Leftrightarrow (\forall Z, \dim Z = +\infty, Z \text{ Banach}, Z \hookrightarrow l_2 \implies Z \cong l_2)$.

Neví se, zda platí izometrická varianta předchozího.

5 Hilbertovy prostory

Lemma 5.1

A^\perp je uzavřený podprostor.

┌

Důkaz

Pro $y \in X$ ať $f_y(x) = \langle x, y \rangle$. Pak f_y je lineární a spojitý (z Cauchy-Swartz). $A^\perp = \bigcap_{y \in A} f_y^{-1}(0)$. □

└

Definice 5.1

Prostor se skalárním součinem $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se nazývá Hilbertův prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Například • $l_2 \dots \langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

- $L_2([0, 1]) \dots \langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$.

Tvrzení 5.2

Nechť $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad \mathbb{K} . Pak funkce $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).

┌ Důkaz

└ Přímočarý s použitím Cauchy-Swartze. □

Tvrzení 5.3 (Polarizační vzorec)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

v komplexním.

┌ Důkaz (Reálný případ, v \mathbb{C} analogicky)

$$\begin{aligned} 4\langle x, y \rangle &= 2\langle x, y \rangle - 2\langle x, -y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|-y\|^2 = \\ &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2. \end{aligned}$$

└ □

Důsledek

Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T : X \rightarrow Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in X$.

┌ Důkaz

└ Izometrie zachovává pravé strany v polarizačním vzorci. □

Věta 5.4

$(X, \|\cdot\|)$ je NLP. Pak $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pro nějaký skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle \Leftrightarrow$ platí:

$$\forall x, y \in X : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

┌ *Důkaz* (Reálný případ, komplexní analogicky)

\implies z Polarizačního vzorce. Pro \Leftarrow položíme $\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$, $x, y \in X$.
Následně ověříme podmínky (kromě linearit (speciálně aditivity) je ověření triviální).
Aditivita: Chceme

$$LS = \forall x, y, z \in X : \langle x + y, z \rangle + \langle x - y, z \rangle = 2 \langle x, z \rangle = PS.$$

$$\begin{aligned} LS &= \frac{1}{4} \left(\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 + \|x - y + z\|^2 - \|x - y - z\|^2 \right) \stackrel{\text{z předpokladu}}{=} \\ &= \frac{1}{4} \left(2 (\|x + z\|^2 + \|y\|^2) - 2 (\|x - y\|^2 + \|y\|^2) \right) = \frac{1}{2} (\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2) = PS. \end{aligned}$$

Tuto rovnost aplikujeme na $x = y$: $\langle 2x, z \rangle = 2 \langle x, z \rangle$, a na $\tilde{x} = \frac{1}{2}(x + y)$, $\tilde{y} = \frac{1}{2}(x - y)$:

$$\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 2 \left\langle \frac{1}{2}(x + y), z \right\rangle = \langle x + y, z \rangle.$$

└

□

Věta 5.5 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H . Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \text{dist}(x, C)$.

┌ *Důkaz*

Zvolme $(y_n)_{n=1}^\infty$ posloupnost v C , že $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x\| = d(x, C)$. Chceme, že $(y_n)_{n=1}^\infty$ je cauchyovská. Tedy, protože C je uzavřená, existuje $y \in C : y_n \rightarrow y$. Pak ale $d(x, C) = \|x - y\|$.

Zbývá jednoznačnost: Ať $y, z \in C$ taková, že $\|x - y\| = \|x - z\| = \text{dist}(x, C)$. Pak $\|y - z\|^2 \leq 0$, tedy $y = z$. □

└

Věta 5.6 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \text{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \in Y^\perp$.

┌ *Důkaz*

Jednoduchý. □

└

Věta 5.7 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H . Pak $H = Y \oplus Y^\perp$ a projekce $P_Y : H \rightarrow Y$ příslušná rozkladu $H = Y \oplus Y^\perp$ má následující vlastnosti:

- $\|P_Y(x) - x\| = \text{dist}(x, Y) \leq \|x\|$ pro každé $x \in H$,

- $\|P_Y\| \leq 1$.

┌

Důkaz

$Y \cap Y^\perp = \{0\}$: Ať $x \in Y \cap Y^\perp$. Pak $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$.

$H = Y + Y^\perp$: Zvol $x \in H$. Dle vět výše existuje právě jedno $y \in Y : x - y \in Y^\perp$. Pak $x = y + x - y \in Y + Y^\perp$.

Tedy, $H = Y \oplus Y^\perp$, a zároveň z důkazu víme, že

$P_Y(x) =$ „jediný prvek $y \in Y$, že $x - y \in Y^\perp$ “ = „j. p. $y \in Y$, že $\|x - y\| = d(x, Y)$ “.

Tedy $\|P_Y(x) - x\| = d(x, Y) \leq \|x\|$. Zbývá $\|P_Y\| \leq 1$: Z Pythagorovy věty je:

$$\|P_Y x\|^2 = \|x\|^2 - \|x - P_Y x\|^2 \leq \|x\|^2.$$

└

□

Věta 5.8

Nechť H je Hilbertův prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ je podposloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.

┌

Důkaz

\implies už víme. \Leftarrow : Víme $\sum_{n=1}^\infty x_n$ splňuje B-C podmínku. Tedy pro $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall m > n \geq n_0 : \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| < \varepsilon.$$

Polož $F = \{1, \dots, n_0\}$. Zvol $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) : F' \cap F = \emptyset$. Pak

$$\left\| \sum_{k \in F'} x_k \right\|^2 \stackrel{\text{Pyt. věta}}{=} \sum_{k \in F'} \|x_k\|^2 \leq \sum_{k \in \min F'}^{\max F'} \|x_k\|^2 = \left\| \sum_{\dots}^{\dots} x_k \right\|^2 < \varepsilon.$$

└

□

Definice 5.2 (Ortogonální, ortonormální, maximální ortonormální, úplný ortonormální, ortonormální báze)

Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortogonální, pokud $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$.
- ortonormální, pokud A je ortogonální a $A \subset S_X$.
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A .

- úplný ortonormální, pokud A je ortonormální a $\overline{\text{span}}A = X$.
- ortonormální báze, pokud $A = \{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ .

Tvrzení 5.9 (Fakt)

Je-li A ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak $\|x - y\| = \sqrt{2}$ pro každé dva prvky $x, y \in A$, $x \neq y$.

┌ Důkaz

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

┌ Poznámka

Tedy, pokud X je separabilní se skalárním součinem \implies každý ON-systém je spočetný.

Věta 5.10

Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.

┌ Důkaz

$\mathcal{P} = \{A \subset X | A \text{ je ON-systém}\}$ s uspořádáním inkluzí. Zvol $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$ lineárně uspořádané, pak $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{P}$ je horní závora $\mathcal{O} \implies$ (z Zornova lemmatu) $\exists A \in \mathcal{P}$ maximální. To je hledaný maximální ON-systém.

□

Věta 5.11 (Besselova nerovnost)

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

pro každé $x \in X$.

┌ Důkaz

Ať $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $x_F := \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$. Pak $\|x\|^2 = \|x - x_F\|^2 + \|x_F\|^2$ podle Pythagorovy věty ($x - x_F \perp x_F$: $\forall i \in F: \langle x - x_F, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x_F, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma, e_i \rangle = 0$). Tj. $\|x\|^2 \geq \|x_F\|^2 = \sum_{\gamma \in F} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$. Tedy máme omezení pro všechny konečné součty, tudíž celý součet bude omezen stejně (celý součet je supremum z konečných podle tvrzení někde výše).

□

Věta 5.12

Nechť H je Hilbertův prostor a $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je ortonormální systém v H . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$ pro každé $x \in H$ (tzv. Parsevalova rovnost).
2. $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$ pro každé $x \in H$.
3. $\{e_\gamma\}$ je ortonormální báze.
4. $H = \overline{\text{span}}\{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$.
5. $\{e_\gamma\}$ je maximální ortonormální systém.

Důkaz

1 \implies 2: Necht $\varepsilon > 0$. Zvolíme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$: $\|x\|^2 - \varepsilon < \sum_{\gamma \in F} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$. Zvolíme $F' \supset F$, $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$. Pak

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{\gamma \in F'} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|^2 &\stackrel{\text{cos + Pythagorova věta}}{=} \|x\|^2 + \sum_{\gamma \in F'} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 - 2\Re \left\langle x, \sum_{\gamma \in F'} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma \right\rangle = \\ &= \dots + \dots - 2\Re \sum_{\gamma \in F'} \overline{\langle x, e_\gamma \rangle} \langle x, e_\gamma \rangle = \|x\|^2 - \sum_{\gamma \in F'} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

2 \implies 3: Triviální. 3 \implies 4: Triviální. 4 \implies 1: Necht $x \in H$ a $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, že existuje $\sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma$ splňující $\|x - \sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma\| < \varepsilon$. Položme $y := \sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma$, pak $d(x, y) \leq \|x - \sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma\| < \varepsilon$. (Jelikož $d(x, y) = \|x - \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|$, neboť z lemmatu někde výše stačí ověřit $y \perp x - \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$, tj. stačí $\forall i \in F : \langle x - \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma, e_i \rangle = 0$, což je jednoduché.)

Tedy $\|x\| \leq \varepsilon + \|\sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|$ (z Besselovy nerovnosti víme, že suma konverguje a navíc víme, že v 1 platí \geq , tj. stačí dokázat \leq)

$$\|x\|^2 \leq \left(\varepsilon + \left\| \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma \right\| \right)^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon\|x\| + \sum_{\gamma \in F} \|\langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|^2 \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon\|x\| + \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2.$$

2 \implies 5: Ať $x \in \{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}^\perp$ (chceme, že $x = 0$). Z 2. víme, že $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma = \sum 0 = 0$.

5 \implies 4: Ať $Y = \overline{\text{span}}(e_\gamma, \gamma \in \Gamma)$. Pak $H = Y \oplus Y^\perp$ (zde se používá úplnost jako předpoklad věty, ze které toto plyne). $H = Y \oplus \{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}^\perp \stackrel{5}{=} Y \oplus \{0\}$. \square

Poznámka

Bez úplnosti jsou ekvivalentní 1, 2, 3 a 4 a vyplývá z nich 5.

Věta 5.13 (Ernst Sigismund Fisher (1907), Frigyes Riesz (1907))

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H , je zobrazení $T : H \rightarrow l_2(\Gamma)$, $T(x) =$

$\{\langle x, e_\gamma \rangle\}_{\gamma \in \Gamma}$ izometrie H a $l_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický $l_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ .

┌

Důkaz (Ze skript)

Zjevně T je lineární. Z Parsevalovy rovnosti plyne, že $\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$ pro každé $x \in H$, a tedy T je izometrie do $l_2(\Gamma)$. $\{T(e_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ je množina kanonických bázevých vektorů v $l_2(\Gamma)$. Díky linearitě tedy $\text{Rng } T$ obsahuje všechny vektory v $l_2(\Gamma)$, které mají jen konečně mnoho nenulových souřadnic. Tyto vektory tvoří hustou podmnožinu v $l_2(\Gamma)$. Podle tvrzení ze začátku předměty je Rng uzavřený, tudíž je roven celému $l_2(\Gamma)$. \square

└

Věta 5.14 (Vyjádření ortogonální projekce)

Nechť H je Hilbertův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Nechť $(e_j)_{j \in J}$ je nějaká ortonormální báze prostoru Y . Pak projekci na Y podél Y^\perp (tzv. ortogonální projekci) lze vyjádřit vzorcem

$$Px = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j, \quad x \in H.$$

┌

Důkaz

Dle vět a lemmatu F. Riesz $P_Y x = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j \Leftrightarrow x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j \in Y^\perp$. Tedy stačí

$$\forall x \in H \quad \forall j_0 \in J : \left\langle x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j, e_{j_0} \right\rangle = 0 :$$

$$\begin{aligned} \forall x \in H \quad \forall j_0 \in J : \left\langle x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j, e_{j_0} \right\rangle &= \langle x, e_{j_0} \rangle - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_{j_0} \rangle = \\ &= \langle x, e_{j_0} \rangle - \langle x, e_{j_0} \rangle = 0. \end{aligned}$$

└

\square

Věta 5.15 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))

Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $l : H \rightarrow H^*$, $l(y) = f_y$ je sdruženě lineární ($l(\alpha y) = \bar{\alpha} l(y)$) izometrie H na H^* .

┌ *Důkaz*

$\forall y \in H$ máme: f_y je lineární, $\forall x \in H: f_y(x) \leq \|x\| \cdot \|y\|$, tedy f_y je spojitý a $\|f_y\| \leq \|y\|$,
 $f_y\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle = \|y\| \implies \|f_y\| = \|y\|, y \in H. \implies I$ je izometrie, sdruženě
lineární. Zbývá „na“. To se dokáže z následujícího lemmatu:

Zvol $f \in H^*$, pak $H = \text{Ker } f \oplus (\text{Ker } f)^\perp$. Tedy existuje $z \in (\text{Ker } f)^\perp$ splňující $H = \text{Ker } f \oplus \text{span}\{z\}$. Položme $y := f(z)z$. Pak $I(y) = f$, jelikož:

$$\forall x \in H : I(y)(x) = \langle x, y \rangle = \langle x_{\text{Ker } f} + \alpha_x z, y \rangle = \langle \alpha_x z, y \rangle = \alpha_x \langle z, \overline{f(z)}z \rangle = f(\alpha_x z) = f(x).$$

└

□

Lemma 5.16

Nechť X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \text{Ker } f$. Pak $X = \text{Ker } f \oplus \text{span}\{x\}$. Tedy $\text{codim Ker } f = 1$.

┌ *Důkaz*

$\text{Ker } f \cap \text{span}\{x\} = \{\mathbf{o}\}$: Ať $\alpha \in \mathbb{K}$, pak pokud $\alpha x \in \text{Ker } f$, pak $\alpha f(x) = f(\alpha x) = 0$, tedy $\alpha = \mathbf{o}$.

$$\text{Ať } y \in X. \text{ Pak } y = \left(y - \frac{f(y)}{f(x)}x\right) + \frac{f(y)}{f(x)}x.$$

└

□

Definice 5.3

Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Symbolem X_R označme prostor X uvažovaný jako reálný. Tj. X_R je tatáž množina jako X uvažovaná s operací sčítání jako v X , s násobením reálným číslem jako v X a stejně definovanou normou.

Věta 5.17 (Reálná verze komplexního normovaného lineárního prostoru)

Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Pak platí

1. X_R je reálný normovaný lineární prostor. (Zřejmé.)
2. X_R je úplný, právě když X je úplný. (Norma je pořád tatáž.)
3. $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ je lineární, právě když $\Re \varphi : X_R \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární a $\Im \varphi(x) = -\Re \varphi(ix)$ pro každé $x \in X$. (Z definice linearity.)
4. Je-li $\varphi \in X^*$, pak funkcionál $\psi(x) = \Re \varphi(x)$, $x \in X_R$, patří do $(X_R)^*$ a platí $\|\psi\| = \|\varphi\|$. (Z předchozího bodu.)
5. Je-li $\psi \in (X_R)^*$, pak existuje právě jeden funkcionál $\varphi \in X^*$ takový, že $\psi(x) = \Re \varphi(x)$ pro $x \in X_R$. Je dán vzorcem $\varphi(x) = \psi(x) - i\psi(ix)$ a splňuje $\|\psi\| = \|\varphi\|$. (4., 5.)
6. Prostory $(X_R)^*$ a $(X^*)_R$ jsou izometrické. (Vyplývá z 5.)

Definice 5.4

Nechť X je reálný normovaný lineární prostor. Na $X \times X$ definujeme:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2), & x_1, x_2, y_1, y_2 &\in X, \\ (\alpha_1 + i\alpha_2) \cdot (x_1, x_2) &= (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1), & \alpha_1, \alpha_2 &\in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in X, \\ \|(x_1, x_2)\|_{X_C} &= \sup \{ \|(\cos \alpha)x_1 + (\sin \alpha)x_2\|_X \mid \alpha \in [0, 2\pi) \}, & x_1, x_2 &\in X.\end{aligned}$$

Symbolem $(X_C, \|\cdot\|)$ značíme komplexní normovaný lineární prostor $(X \times X, +, \cdot, \|\cdot\|_{X_C})$.

Věta 5.18 (Komplexifikace)

Je-li X reálný normovaný lineární prostor, pak je $(X_C, \|\cdot\|)$ komplexní normovaný lineární prostor. Je-li navíc X Banachův, pak je X_C Banachův.

Důkaz

Linearitu nebudeme dokazovat (definice je zvolena tak, aby to vycházelo, lehké cvičení). Norma je taktéž jednoduchá, nejtěžší je dokázat, že lze vytýkat konstanty.

X_C je Banachův plyne z toho, že $X \oplus_\infty X$ je Banach a norma $\|\cdot\|_{X_C}$ je ekvivalentní (konstanty 1 a 2) maximové normě, která je v definici součinu metrických prostorů a součin úplných metrických prostorů je úplný. \square

Definice 5.5 (Sublineární funkcionál, pseudonorma)

Nechť X je vektorový prostor nad \mathbb{K} . Funkce $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá sublineární funkcionál, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p : X \rightarrow [0, +\infty)$ se nazývá pseudonorma, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Věta 5.19 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))

Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor.

- *Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F|_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

- Je-li p pseudonorma na X a t je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F|_Y = f$ a $|F(x)| \leq p(x)$, $x \in X$.

┌
Důkaz (1. bod)

1. krok: rozšíříme f o jednu dimenzi, tj. na $Z = Y \oplus \text{span}(x)$, kde $x \notin Y$. Položme $F(y + tx) := f(y) + t\alpha$, $y \in Y$, $t \in \mathbb{R}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je vhodně zvolená: Linearita f vyplývá z definice, tedy stačí $f(y) + t\alpha \leq p(y + tx)$, $y \in Y$, $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall t > 0 : \alpha \leq \frac{1}{t}(p(y + tx) - f(y)) \wedge \forall t < 0 : \alpha \geq \frac{1}{t}(p(y + tx) - f(y)), y \in Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall t > 0 : \alpha \leq p\left(\frac{y}{t} + x\right) - f\left(\frac{y}{t}\right) \wedge \forall t < 0 : \alpha \geq f\left(\frac{-y}{t}\right) - p\left(\frac{-y}{t} - x\right), y \in Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in Y : \alpha \in [f(y) - p(y - x), p(y + x) - f(y)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall y, z \in Y : f(y) - p(y - x) \leq p(z + x) - f(z),$$

tedy máme $f(y) + f(z) = f(y + z) \leq p(y + z) \leq p(y - x) + p(z + x)$. Tedy α můžeme volit libovolně z intervalu $[\sup_y f(y) - p(y - x), \inf_y p(y + x) - f(y)]$.

2. krok: přidáme všechny dimenze (transfinitní) indukci. (Tato věta je dokonce ekvivalentní axiomu výběru, takže předpokládáme, že axiom výběru platí.) □

┌
Důkaz (2. bod)

1. krok: Pro $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ aplikujeme první bod: Víme, že existuje $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineární, že $F|_Y = f$. Pak ale $F(x) \leq p(x)$, $x \in X \wedge -F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x)$, $x \in X \Rightarrow |F(x)| \leq p(x)$, $x \in X$.

2. krok: Pro $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Polož $g = \Re f$. Pak podle 1. části $\exists G : X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ lineární, že $G|_Y = g \wedge |G(x)| \leq p(x)$, $x \in X$. Pak máme $f(x) = g(x) - ig(ix)$, $x \in X$ a položíme $F(x) := G(x) - iG(ix)$, $x \in X$. Pak $f|_Y = f$, F je lineární a pro $x \in X$ máme:

Zvolme $|\lambda| = 1$, $\lambda \in \mathbb{C} : |F(x)| = \lambda F(x)$, pak $|F(x)| = F(\lambda x) = G(\lambda x) - iG(i\lambda x) = G(\lambda x) \leq P(\lambda x) \leq p(x)$. □

Věta 5.20 (Hahnova-Banachova)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F|_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.

┌
Důkaz

Aplikujeme předchozí větu na $p(x) := \|f\| \cdot \|x\|$, $x \in X$. Pak $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| = p(x)$, $x \in Y \Rightarrow \exists F : X \rightarrow \mathbb{K}$ lineární, $F|_Y = f$, $|F| \leq p$. Pak $|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$, $x \in X$, tedy $\|F\| \leq \|f\|$ (opačná nerovnost triviální). □

Důsledek

Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).

┌

Důkaz

Zvol $x \in X$. BÚNO $x \neq \mathbf{0}$. Polož $Y = \text{span}(x)$, $g : Y \rightarrow \mathbb{K}$ definujeme předpisem $g(tx) := t\|x\|$, $\forall t \in \mathbb{K}$. Pak g je zřejmě lineární a $\|g\| = 1$, protože

$$|g(tx)| = |t| \cdot \|x\| = \|tx\|, \forall t \in \mathbb{K}.$$

Podle H-B $\exists f \in X^* : f|_Y = g$, $\|f\| = \|g\| = 1$. Pak $f(x) = \|x\|$.

Ad „speciálně“: Zvol x a y . Najdi $f \in S_{X^*} : f(x - y) = \|x - y\|$, pak $f(x) \neq f(y)$, protože $\|x - y\| \neq 0$. □

Důsledek

Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.

┌

Důkaz

┌ Triviální. □

Důsledek (Oddělování bodu a podprostoru)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f|_Y = 0$ a $f(x) = \text{dist}(x, Y) > 0$.

┌

Důkaz

Zvolme $Z := Y \oplus \text{span}(x) \subset X$. $f(y + \alpha x) := \alpha \text{dist}(x, Y)$, $y \in Y$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f : Z \rightarrow \mathbb{K}$ je lineární. $\|f\| = 1$: $|f(y + \alpha x)| = |\alpha| \text{dist}(x, Y) \leq |\alpha| \cdot \|x + \frac{y}{\alpha}\| = \|\alpha x + y\|$, $y \in Y$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Zvolme $(y_n)_{n=1}^\infty$ v Y , že $d(x, Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\|$. Pak $\frac{|f(y_n + x)|}{\|y_n + x\|} = \frac{d(x, Y)}{\|y_n + x\|} \rightarrow 1$.

Nyní z H-B věty rozšíříme na celé Y : $\exists F \in X^* : F|_Z = f \wedge \|F\| = 1$. □

Věta 5.21 (Oddělování konvexních množin)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení

- Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\Re f(x) < \inf_B \Re f$ pro každé $x \in A$.
- Je-li A otevřená a B kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_A \Re f < \inf_B \Re f$.

┌

Poznámka

┌ Ekvivalentní H-B větě.

┌ *Důkaz*

BÚNO X je nad \mathbb{R} . BÚNO $A \neq \emptyset \neq B$. První bod: Zvolíme $a \in A$, $b \in B$. Polož $w = b - a$ a $C = w + A - B$. Pak $w \notin C$, $0 \in C$, C je konvexní (A i B jsou konvexní, takže i jejich posunutý rozdíl je konvexní) a otevřená (A je otevřená, posunutý rozdíl otevřené a libovolné je otevřená). Položme $p_c(x) := \inf \{t > 0 | x \in tC\}$ (lehce se ověří, že p_c , tzv. Minkowského funkcionál, je sublineární). $p_c(x) < +\infty$ (protože C obsahuje nulu a z otevřenosti i kouli kolem ní a každé x se vejde do dostatečně nafouklé koule). $p_c \leq 1$ na C a $p_c(w) \geq 1$.

Položme $Y := \text{span}(w)$, $g(\alpha w) := \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ (pak $g \leq p_c$). Z H-B tedy plyne:

$$\exists G : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineární, } G|_Y = g, G \leq p_c.$$

Pak $G \in X^*$ protože $G \leq p_c \leq 1$ na C , ale to obsahuje kouli, takže je G omezené na nějaké kouli \implies je spojitý.

Konečně $\forall x \in A \forall y \in B : G(x) = G(y) + G(x - y + w) - G(w) \leq G(y) + 1 - 1 = G(y)$.

Rovnost nemůže nastat, protože A je otevřená. □

└

Důsledek (H-B věty)

X je NLP, $Y \subset X$ podprostor. Buď $\dim Y < \infty$ nebo $\text{codim } Y < \infty$. Pak $Y \xrightarrow{C} X$. (Tj. $\exists P : X \rightarrow Y$ spojitý, že $P|_Y = \text{id}_Y$.)

Důkaz

$\dim Y < \infty$: Ať $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze Y , $\{f_1, \dots, f_n\}$ je duální báze Y . Pak $f_1, \dots, f_n : Y \rightarrow \mathbb{K}$ jsou spojité (Y má konečnou dimenzi). Z H-B $\exists F_1, \dots, F_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ spojité, $\|F_i\| = \|f_i\|$, $F_i \supset f_i$. Definujme $P : X \rightarrow Y$ předpisem $P(x) := \sum_{i=1}^n F_i(x)e_i \in Y$. P je lineární,

$$\|Px\| \leq \sum_{i=1}^n \|F_i(x)\| \cdot \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|F_i\| \cdot \|x\| \cdot \|e_i\| \leq \left(n \cdot \max_{i \in [n]} \|F_i\| \cdot \|e_i\| \right) \cdot \|x\|.$$

P je tedy spojitý. Zbývá ověřit $P_y = \text{id}_n$. $\forall y \in Y$:

$$P(y) = P\left(\sum_{i=1}^n f_i(y)e_i\right) = \sum_{i=1}^n f_i(Y)P(e_i) = \sum_{i=1}^n f_i(y) \sum_{j=1}^n F_j(e_i)e_j = \sum_{i=1}^n f_i(y)e_i = y.$$

$\text{codim } Y < \infty$: ($\text{codim } Y = \dim(X/Y)$) ať $\{q(e_1), \dots, q(e_n)\}$ je báze X/Y ($q : x \mapsto [x]$) a $\{f_1, \dots, f_n\}$ duální funkcionály. Ty jsou spojité. Polož $F_i = f_i \circ q$ ($i \in [n]$), což je složení dvou spojitých funkcionálů, tedy spojitý funkcionál. Definujme $P : X \rightarrow \text{span}(e_1, \dots, e_n)$, $P(x) := \sum_{i=1}^n F_i(x)e_i$, $x \in X$. „ P je lineární“ je jasné, stejně tak spojitost P (podobně jako v první části).

$$P|_{\text{span}(e_1, \dots, e_n)} = \text{id}:$$

$$\forall i \in [n] : P(e_i) = \sum_{j=1}^n F_j(e_i)e_j = \sum_{j=1}^n f_j(q(e_i))e_j = e_i.$$

Tedy P je spojitá lineární projekce a navíc $\text{Ker } P = Y$: $Px = 0 \Leftrightarrow F_i(x) = 0 \forall i \in [n] \Leftrightarrow f_i(q(x)) = 0, \Leftrightarrow q(x) = 0$. Máme $X = \text{Rng } P \oplus_t \text{Ker } P$. Položíme $Q = \text{id} - P$, pak $\text{Rng } Q = \text{Ker } P = Y$, Q spojitá projekce. \square

Definice 5.6

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ definovaný předpisem $T^*f(x) = f(Tx)$ pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá duální (nebo též adjungovaný) operátor k T .

Operátor $(T^*)^*$ značíme T^{**} .

Věta 5.22

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.

1. Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^*f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.
2. Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.
3. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $\text{id}_X^* = \text{id}_{X^*}$.

┌
Důkaz

1. Spojitost T^*f je zřejmá z definice (složení dvou lineárních funkcí), stejně tak linearita T . Dále

$$\forall y^* \in B_{Y^*} : \|T^*y^*\| = \sup_{x \in B_X} |T^*y^*(x)| = \sup_{x \in B_X} |y^*(Tx)| \leq \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \|T\|,$$

tedy $\|T^*\| \leq \|T\|$ a T je spojitý. Zbývá $\|T\| \leq \|T^*\|$. (Dokazujeme opačnou nerovnost k té výše.) Zvolme $x \in B_X$. Najdi (z jednoho z důsledků H-B) $y^* \in S_{Y^*}$. $\|T_x\| = |y^*(Tx)|$. Pak

$$\|Tx\| = |y^*(Tx)| = |T^*y^*(x)| \leq \|T^*\| \cdot \|y^*\| \cdot \|x\| \leq \|T^*\|.$$

Tj. $\|T\| \leq \|T^*\|$.

2. Linearita zobrazení plyne z předpisu a izometrie pak plyne z prvního bodu.

3. $\forall z^* \in Z^* \forall x \in X :$

$$((S \circ T)^*z^*)(x) = z^*(S(T(x))) = S^*z^*(Tx) = (T^*S^*z^*)(x).$$

A to platí pro všechna x a z^* , tedy funkcionály na ně aplikované musí být tytéž. Identita je triviální z definice. □

Věta 5.23

Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^\star \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takový, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y \rangle_{H_1}.$$

Dále platí, že $T^\star = I_1^{-1} \circ T^ \circ I_2$, kde $I_j : H_j \rightarrow H_j^*$, $j = 1, 2$ jsou příslušné sdružené lineární izometrie z věty výše (89 ve skriptech). ($I_i : y \mapsto \langle \cdot, y \rangle \in H_1^*$.)*

┌
Důkaz

Zvol $x \in H_1$, $y \in H_2$. Uvažuj $g \in (H_1)^*$ definované předpisem $\langle Tx, y \rangle_{H_2}$. Dle věty 89 ve skriptech, $\exists! z \in H_1 : g(x) = \langle x, z \rangle$, $x \in H_1$. Tedy rovnost z věty platí $\Leftrightarrow T^\star y = z$. Celkem $\exists! T^\star : H_2 \rightarrow H_1$, pro které platí rovnost ze znění.

Zbývá: $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$ (pak operátor T^\star je lineární a spojitý). Stačí jen, že $I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$ splňuje rovnost ze zadání, protože existuje právě jeden takový operátor. Z definice I_i a přelévání písmenek (definice sdruženého operátoru) tedy:

$$\begin{aligned} \forall x \in H_1 \forall y \in H_2 : \langle x, (I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2)(y) \rangle_{H_1} = \\ (I_1(I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2))(x) = (T^* \circ I_2)(x) = (I_2y)(Tx) = \langle Tx, y \rangle. \end{aligned}$$

□

Definice 5.7 (Hilbertovsky adjungovaný operátor)

Operátor T^\star z předcházející věty nazýváme hilbertovsky adjungovaným operátorem k T .

Věta 5.24

Nechť H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory.

1. Je-li $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, je $T^{\star\star} = (T^\star)^\star = T$.
2. Zobrazení $T \mapsto T^\star$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.
3. Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ a $S \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$. Pak $(S \circ T)^\star = T^\star \circ S^\star$. Dále $(\text{id}_{H_1})^\star = \text{id}_{H_1}$.

┌
Důkaz

1. Máme

$$\forall x \in H_1 \forall y \in H_2 : \langle T^{\star\star}x, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y \rangle_{H_1} = \langle Tx, y \rangle_{H_2}.$$

Tedy pro každé x, y jsou tyto operátory stejné, tedy $T^{\star\star} = T$.

2. Sdružená linearita: Zachování „+“ plyne ze vzorce, „zachování“ „·“:

$$\forall x, y \forall \alpha \in \mathbb{K} : \langle x, T^\star \alpha y \rangle = \langle Tx, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle Tx, y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, T^\star y \rangle$$

.

Izometrie plyne z toho, že T^\star je složení izometrií. To že je na plyne z 1.

$$3. \forall x, y : \langle x, (S \circ T)^\star y \rangle = \langle S(Tx), y \rangle = \langle Tx, S^\star y \rangle = \langle x, T^\star S^\star y \rangle.$$

└

□

Definice 5.8 (Sdružený exponent)

Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme sdruženým exponentem k p , pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Věta 5.25 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)

Nechť $I \neq \emptyset$.

1. Prostor $c_0(I)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $l_1(I)$ pomocí zobrazení $I : l_1(I) \rightarrow c_0(I)^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

2. Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdružený exponent k p , pak prostor $l_p(I)^*$ je lineárně izometrický

s prostorem $l_q(I)$ pomocí zobrazení $I : l_q(I) \rightarrow l_p(I)^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

3. Je-li (Ω, S, μ) libovolný prostor s mírou $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p , pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I : L_q(\mu) \rightarrow L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} f \cdot g d\mu.$$

4. Je-li (Ω, S, μ) prostor se σ -konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_{\infty}(\mu)$ pomocí zobrazení $I : L_{\infty}(\mu) \rightarrow L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} f \cdot g d\mu.$$

┌
Důkaz (1.)
 $\|I\| \leq 1$:

$$\forall y \in l_1(I) \quad \forall x \in c_0(I) \quad \forall F \in \mathcal{F}(I) : \left| \sum_{i \in F} y_i x_i \right| \leq \sum_{i \in F} |y_i x_i| \leq \|x\|_{\infty} \cdot \sum_{i \in F} |y_i| \leq \|x\|_{\infty} \cdot \|y\|_1$$

$$\implies |I(y)(x)| \leq \|x\|_{\infty} \cdot \|y\|_1,$$

takže opravdu $I(y) \in c_0(I)^*$ a navíc $\|I(y)\| \leq \|y\|_1$, tedy I je lineární, dobře definované, $\|I\| \leq 1$.

Izometrie: Zvol $y \in l_1(I)$, zvol $F \in \mathcal{F}(I)$. Polož $x_F := \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|}{y(i)} e_i \in B_{c_0(I)}$. Pak

$$\|I(y)\| \geq |I(y)(x_F)| = \left| \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} y(i) \cdot \frac{|y(i)|}{y(i)} \right| = \sum_{i \in F} |y(i)|.$$

Tedy, protože $\|y\|_1 = \sup_{F \in \mathcal{F}(I)} \sum_{i \in F} y(i)$, dostáváme $\|I(y)\| \geq \|y\|$.

Zbývá už jen „na“: Zvol $f \in c_0(I)^*$. Polož $y(i) := f(e_i)$, $i \in I$. Pak $y \in l_1(I)$: Zvol $F \in \mathcal{F}(I)$. Pak

$$\sum_{i \in F} |y(i)| = \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} y(i) \cdot \frac{|y(i)|}{y(i)} = \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} f(e_i) \cdot \frac{|y(i)|}{y(i)} = f \left(\sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|}{y(i)} \cdot e_i \right) \leq \|f\|.$$

Tudíž $y \in l_1(I)$ (a $\|y\|_1 \leq \|f\|$).

Chceme $I(y) = f$: Máme $\forall i \in I : I(y)(e_i) = y(i) = f(e_i)$. Tedy $I(y) = f$ na e_i , takže z linearit a spojitosti na $\overline{\text{span}}(e_i, i \in I) = c_0(I)$. \square

┌ Důkaz (2.)

Případ $p = 1$: $\|I\| \leq 1$ se dokáže jako v důkazu 1:

$$\forall y \in l_\infty(I) \forall x \in l_1(I) \forall F \in \mathcal{F}(I) : \sum_{i \in F} |y_i x_i| \leq \|y\|_\infty \cdot \|x\|_1.$$

I izometrie: Ať $y \in l_\infty(I)$, pak

$$\forall i \in I : \|I(y)\| \geq |I(y)(e_i)| = |y(i)| \implies \|I(y)\| \geq \sup_i |y(i)| = \|y\|_\infty.$$

I je na: Ať $f \in l_1(I)^*$. Polož $y(i) := f(e_i)$, $i \in I$. Pak $y \in l_\infty(I)$:

$$\forall i \in I : |y(i)| = |f(e_i)| \leq \|f\| \implies \|y\|_\infty \leq \|f\|.$$

$I(y) = f$ je totožné jako v důkazu 1.

2. Případ $p > 1$: $\|I\| \leq 1$ se dokáže podobně jen se použije Hölder:

$$\forall y \in l_q(I) \forall x \in l_p(I) \forall F \in \mathcal{F}(I) : \sum_{i \in F} |y_i x_i| \leq \|y\|_q \cdot \|x\|_p.$$

I izometrie: Ať $y \in l_q(I)$. Polož $x_F = \frac{\sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|}{y(i)} e_i}{\| \text{---} \| \text{---} \|_p} \in S_{l_p(I)}$ (BÚNO $\exists i \in F : y(i) \neq 0$).

$$x_F = \left(\sum |y(i)|^{p(q-1)} \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|^q}{y(i)} e_i$$

a zároveň

$$\|I(y)\| \geq I(y)(x_F) = \left(\sum |y(i)|^{p(q-1)} \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \sum_{i \in F} |y(i)|^q = \|y(i)\|_q.$$

I je na: Ať $f \in l_p(I)^*$. Polož $y(i) := f(e_i)$, $i \in I$. Pak $y \in l_q(I)$: Zvol $F \in \mathcal{F}(I)$. Pak polož $x_F = \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|^q}{y(i)} e_i$.

$$\sum_{i \in F} |y(i)|^q = \sum_{i \in F} f(e_i) x_F(i) = f\left(\sum_{i \in F} x_F(i) \cdot e_i\right) \leq \|f\| \cdot \|x_F\|_p = \|f\| \left(\sum_{i \in F} |y(i)|^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

. Celkem

$$\inf_{F \in \mathcal{F}(I)} \left(\sum_{i \in F} |y(i)|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\|,$$

└ tedy $y \in l_q(I)$ a $\|y\|_q \leq \|f\|$.

□

┌
Důkaz (3, 4)

1. krok μ konečná: I je spojitý, lineární a $\|I\| \leq 1$: $p = 1$:

$$|I(f)(g)| \leq \int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_{\infty} \int_{\Omega} |g| d\mu = \|f\|_{\infty} \cdot \|g\|_1.$$

Tedy I je dobře definované, lineární a $\|I\| \leq 1$. $p > 1$:

$$|I(f)(g)| \leq \int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_q \cdot \|g\|_p.$$

Tedy I je dobře definované, lineární a $\|I\| \leq 1$.

I je izometrie: $p > 1$: Ať $f \in L_q(\Omega)$, BÚNO $f \neq 0$. Zvol

$$g(x) := \frac{\frac{|f(x)|^q}{f(x)} \chi_{\{x|f(x) \neq 0\}}}{\|f\|_q^q} \in S_{L_p(\mu)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^{p(q-1)} dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{|f(x)|^q}{f(x)} \chi_{\{x|f(x) \neq 0\}},$$

$$\|f\|_q \geq \|I(f)\| \geq I(f)(g) = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^q d\mu(x) \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \int_{\Omega} |f(x)|^q d\mu(x) = \|f\|_q.$$

Tedy $\|I(f)\| = \|f\|$ a I je izometrie.

$p = 1$: Ať $f \in L_{\infty}(r)$, BÚNO $f \neq 0$. Zvol $\|f\|_{\infty} > \varepsilon > 0$ je libovolné, ať

$$A = \{x | f(x) > \|f\|_{\infty} - \varepsilon\}.$$

Pak $\mu(A) > 0$. Ať $\mu(A) < \infty$ (v případě σ -konečné míry můžeme A aproximovat). Polož $g(x) := \frac{|f(x)|}{f(x)} \frac{\chi_A}{\mu(A)} \in B_{L_1, \mu}$. Pak

$$\|f\| \geq \|I(f)\| \geq I(f)(g) = \int_{\Omega} |f(x)| \chi_A(x) \cdot \frac{1}{\mu(A)} d\mu(x) > \frac{\|f\|_{\infty} - \varepsilon}{\mu(A)} \int_A 1 d\mu(x) = \|f\|_{\infty} - \varepsilon.$$

I je na: Ať $x^* \in (L_p)^*$. Položme $\nu(A) := x^*(\chi_A)$, $A \in \mathcal{A}$. Pak ν je \mathbb{K} -hodnotová míra: $\nu(\emptyset) = x^*(0) = 0$. Ať $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ posloupnost množin z \mathcal{A} , po 2 disjunktní. Pak

$$\|\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} - \chi_{\bigcup_{j=1}^n A_j}\|_p = \mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= x^*(\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^*(\chi_{\bigcup_{j=1}^n A_j}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^*(\chi_{A_1}) + \dots + x^*(\chi_{A_n}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i). \end{aligned}$$

└

□

┌

Důkaz (Pokračování 3, 4)

Zároveň $\nu \ll \mu$:

$$\mu(A) = 0 \implies \chi_A = 0 \text{ skoro všude} \implies x^*(\chi_A) = 0.$$

Tedy z R-M věty $\exists g \in L_1(\mu)$: $\nu(A) = \int_A g d\mu$, $A \in \mathcal{A}$. Pak $x^*(s) = \int_{\Omega} g \cdot s d\mu$, pro s jednoduchou funkci. Tedy pro $f \in (L_p(\mu))$ najdu $s_k \rightarrow f$, $|s_k| \leq 4f$, s_k jednoduché. Pak ale $s_k \xrightarrow{L_p} f$ (z Lebesgueovy věty, jelikož $5f$ je integrovatelná majoranta). Tedy

$$x^*(f) = \lim_k x^*(s_k) = \lim_k \int_{\Omega} g \cdot s_k d\mu = \int_{\Omega} g \cdot f d\mu.$$

Poslední věc, co zbývá je $g \in L_q(\mu)$: $p = 1$: Chceme $|g(x)| \leq \|x^*\|$ skoro všude. Pokud ne, pak $A = \{x | |g(x)| > \|x^*\|\}$ má kladnou míru. Ať $A_+ = \{x | g(x) > \|x^*\|\}$ má kladnou míru. Pak

$$\|x^*\| \mu(A_+) \leq \left| \int_{A_+} g d\mu \right| = |x^*(\chi_{A_+})| \leq \|x^*\| \mu(A_+). \nabla$$

Podobně pro $A_- := \{x | g(x) < -\|x^*\|\}$. $p > 1$ vynecháme.

Další kroky byly vynechány.

□

Věta 5.26

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Nechť q je sdružený exponent k p . Pak zobrazení $I : X^* \oplus_q Y^* \rightarrow (X \oplus_p Y)^*$ dané předpisem

$$I(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie $X^* \oplus_q Y^*$ na $(X \oplus_p Y)^*$.

┌ *Důkaz*

$I(f, g)$ lineární pro $(f, g) \in X^* \oplus_q Y^*$ lehké. Zvol $(f, g) \in X^* \oplus_q Y^*$. Pak

$$\begin{aligned} \|I(f, g)\| &= \sup_{(x, y) \in B_{X \oplus_p Y}} |f(x) + g(y)| \leq \sup_{(x, y) \in B_{X \oplus_p Y}} (\|f\| \cdot \|x\| + \|g\| \cdot \|y\|) = \\ &= \sup_{(\alpha, \beta) \in B_{(\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_p)}} \tilde{I}(\|f\|, \|g\|)(\alpha, \beta) = \|\tilde{I}(\|f\|, \|g\|)\| = \|(\|f\|, \|g\|)\|_q = \sqrt[q]{\|f\|^q + \|g\|^q} = \\ &= \|(f, g)\|_{X^* \oplus_q Y^*}. \end{aligned}$$

Tedy $\|I\| \leq 1$.

I je izometrie: Ať $(f, g) \in X^* \oplus_q Y^*$, BÚNO $(f, g) \neq 0$. Zvol $\varepsilon > 0$ libovolné. Ať $\eta > 0$ je „dost malé“: Zvolme

$$x \in B_x : |f(x)| > \|f\| - \eta, |\alpha| = 1, |f(x)| = \alpha f(x),$$

$$y \in B_y : |f(y)| > \|f\| - \eta, |\beta| = 1, |f(y)| = \beta f(y).$$

Položme

$$u = \frac{(\|f\|^{q-1} \alpha x, \|g\|^{q-1} \beta y)}{(\|f\|^q + \|g\|^q)^{\frac{1}{p}}} = \frac{\dots}{C}.$$

$$\|u\| = \left(\frac{1}{C} \|f\|^{p(q-1)} \|\alpha x\|^p + \|g\|^{p(q-1)} \|\beta y\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{C} (\|f\|^q + \|g\|^q)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

tedy $u \in B_{\dots}$. Pak ale

$$\begin{aligned} \|I(f, g)\| &\geq I(f, g)(u) = \frac{1}{C} (\|f\|^{q-1} f(\alpha x) + \|g\|^{q-1} g(\beta y)) \geq \\ &\geq \frac{1}{C} (\|f\|^{q-1} (\|f\| - \eta) + \|g\|^{q-1} (\|g\| - \eta)) \rightarrow \frac{1}{C} \cdot (\|f\|^q + \|g\|^q) = \|(f, g)\|. \end{aligned}$$

I je na: Ať $\varphi \in (X \oplus_p Y)^*$. Polož $f(x) := \varphi(x, 0)$, $x \in X$ a $g(y) := \varphi(0, y)$, $y \in Y$. Pak $f \in X^*$, $g \in Y^*$ a $I(f, g) = \varphi$. □

Definice 5.9

Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Věta 5.27 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$)

Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f d\mu$ pro každé $f \in C(K)$.

┌ Důkaz
└ Bez důkazu.

□

Věta 5.28 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$)

Je-li K kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I : M(K) \rightarrow C(K)^*$, $I(\mu)_k = \varphi_k$, kde

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f d\mu.$$

┌ Důkaz
└ Bez důkazu.

□

6 Anihilátory, dualita kvocientů a podprostorů

Definice 6.1 (Horní a dolní anihilátor)

Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. anihilátor množiny A jako

$$A^\perp = \{f \in X^* \mid f(x) = 0 \ \forall x \in A\}.$$

Poznámka

Vlastně je to zobecnění kolmého prostoru (v Hilbertových prostorech je to „totéž“).

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. zpětný anihilátor jako

$$B_\perp = \{x \in X \mid f(x) = 0 \ \forall f \in B\}.$$

Lemma 6.1

Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak

- A^\perp je uzavřený podprostor X^* ,
- B_\perp je uzavřený podprostor,
- $(A^\perp)_\perp = \overline{\text{span}} A$,
- $(B_\perp)^\perp \supset \overline{\text{span}} B$.

┌ Důkaz

└ První dva body triviální cvičení. Další dva body jsou lehké. □

Věta 6.2

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.

1. *Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I : Y^\perp \rightarrow (X/Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f)(\hat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie Y^\perp na $(X/Y)^$.*

2. *Zobrazení $I : X^*/Y^\perp \rightarrow Y^*$ dané předpisem*

$$I(\hat{f}) = f|_Y$$

je lineární izometrie X^/Y^\perp na Y^* .*

┌ Důkaz

1. a) $I(f)$ je dobře definované: Ať $\hat{x} = \hat{y}$, pak $x - y \in Y$ a $f \in Y^\perp$ (tj. $f(x - y) = 0$), tedy $f(x) = f(y)$.

b) Zároveň $\|I(f)\| = \sup_{\hat{x} \in U_{X/Y}} |I(f)(\hat{x})| = \sup_{x \in U_x} |I(f)(\hat{x})| = \sup_{x \in U_x} |f(x)| = \|f\|$, tedy I je spojitá a izometrie (linearita je triviální).

c) Ať $\varphi \in (X/Y)^*$. Pak $\varphi \circ q \in X^*$ a $I(\varphi \circ q) = \varphi \wedge \varphi \circ q \in Y^\perp$: $\forall y \in Y : \varphi(q(y)) = \varphi(\hat{0}) = 0$. Tedy $\varphi \circ q \in Y^\perp$. $\forall \hat{x} \in X/Y : I(\varphi \circ q)(\hat{x}) = (\varphi \circ q)(x) = \varphi(\hat{x})$, tedy $I(\varphi \circ q) = \varphi$.

2. a) $I(\hat{f})$ je dobře definované: Ať $\hat{f} = \hat{g}$, pak $f - g \in Y^\perp$, tedy $f|_Y = g|_Y$.

b) I zřejmě lineární. Zároveň $\|I(\hat{f})\| = \sup_{y \in B_y} \|f(y)\| = \|f|_Y\| \leq \inf_{h \in \hat{f}} \|h\| = \|\hat{f}\|$.

c) I je izometrie: Ať $\hat{f} \in X^*/Y^\perp$. Zvol $g \in X^* : g|_Y = f|_Y \wedge \|g\| = \|f|_Y\|$ z H-B věty. Pak $\hat{g} = \hat{f}$ a $\|I(\hat{f})\| = \|I(\hat{g})\| = \|g|_Y\| = \|g\| \geq \inf_{h \in \hat{f}} \|h\| = \|\hat{f}\|$.

d) I je na: Ať $\varphi \in Y^*$. Z H-B věty existuje $f \in X^* : f|_Y = \varphi$. Pak $I(\hat{f}) = f|_Y = \varphi$. □

Věta 6.3

Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak platí

1. $\text{Ker } T^* = (\text{Rng } T)^\perp$,

2. $\text{Ker } T = (\text{Rng } T^*)_\perp$,

3. $\overline{\text{Rng } T} = (\text{Ker } T^*)_\perp$,

4. T^* je prostý, právě když $\text{Rng } T$ je hustý.

┌

Důkaz

$$1. y^* \in \text{Ker } T^* \Leftrightarrow T^*y^* = 0 \Leftrightarrow y^* \circ T = 0 \Leftrightarrow y^*|_{\text{Rng } T} = 0.$$

$$2. x \in \text{Ker } T \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \forall y^* \in Y^* : y^*(Tx) = 0 \Leftrightarrow \forall y^* \in Y^* : T^*y^*(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (\text{Rng } T^*)^\perp.$$

$$3. \overline{\text{Rng } T} = ((\text{Rng } T)^\perp)^\perp = (\text{Ker } T^*)^\perp.$$

4. T^* prostý $\Leftrightarrow \text{Ker } T = \{\mathbf{o}\}$, ale $\{\mathbf{o}\}^\perp = Y$, tedy dle 3. $\overline{\text{Rng } T} = Y$. Naopak sporem: Ať $\exists x \in Y/\overline{\text{Rng } T}$. Potom dle H-B věty $\exists f \in Y^* : f(x) \neq 0 \wedge f|_{\text{Rng } T} = 0$. Pak ale

$$T^*f(x_0) = f(Tx_0) = 0, \forall x_0 \in X \implies T^*f = 0 \implies f \in \text{Ker } T^* \text{.} \nabla$$

└

□

Definice 6.2 (Druhý duál, evaluační funkcionál)

Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^* . Tento prostor nazýváme druhým duálem.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$. Zobrazení $\varepsilon : X \rightarrow X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá kanonické vnoření X do X^{**} .

Tvrzení 6.4

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon : X \rightarrow X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy navíc X Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**} .

┌

Důkaz

Linearita zřejmá. Izometrie

$$\|\varepsilon_x\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\varepsilon_x(x^*)| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| = \|x\|.$$

└

□

Tvrzení 6.5 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X : X \rightarrow X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \rightarrow Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

┌ Důkaz (Ze skript)

Nechť $x \in X$. Pro každé $f \in Y^*$ platí

$$(\varepsilon_Y(Tx))(f) = f(Tx) = T^*f(x) = (\varepsilon_X(x))(T^*f) = (T^{**}(\varepsilon_X(x)))(f),$$

└ tudíž $\varepsilon_Y(Tx) = T^{**}(\varepsilon_X(x))$. Odtud $\varepsilon_Y \circ T = T^{**} \circ \varepsilon_X$. □

Věta 6.6

Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor.

Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X , pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2 , která je na X identitou.

┌ Důkaz

Položme $\hat{X} = \overline{\varepsilon(X)} \subseteq X^{**}$. Z toho plyne existence.

Pokud X má skalární součin, pak platí rovnoběžníkové pravidlo. To platí i v \hat{X} , tedy \hat{X} je Hilbertův.

Ať $I_1 : X \rightarrow X_1$ je izometrie, $\overline{I_1(X)} = X_1$, $I_2 : X \rightarrow X_2$ je izometrie, $\overline{I_2(X)} = X_2$. Pak $I_1 \circ I_2^{-1}|_{I_2(X)} : I_2(X) \rightarrow X_1$ je spojitý lineární operátor, tedy $\exists! S_1 : X_2 \rightarrow X_1$ spojitý lineární, že $S_1 \supset I_1 \circ I_2^{-1}|_{I_2(X)}$. Obdobně existuje $S_2 : X_1 \rightarrow X_2$. Pak se snadno ověří, že $(S_2 \circ S_1)|_{I_2(X)} = \text{id}|_{I_2(X)}$, tedy $S_2 \circ S_1 = \text{id}$. Analogicky $S_1 \circ S_2 = \text{id}$.

Následně se ukáže, že S_1 je izometrie: Zvol $x \in X_2$, ať pro $(x_n)_{n=1}^\infty$, posloupnost v X , je $I_2(x_n) \rightarrow x$. Pak

$$\|S_1 x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_1(I_2(x_n))\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|I_1(x_n)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

└ Analogicky S_2 je izometrie, tedy X_1, X_2 jsou izometrické. □

Věta 6.7

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

- 1. T je izomorfismus na, právě když T^* je izomorfismus na. V tomto případě navíc platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*
- 2. T je izometrie na, právě když T^* je izometrie na.*

Speciálně, jsou-li X a Y lineárně izometrické, pak jsou také X^ a Y^* lineárně izometrické.*

┌ *Důkaz*

\implies (1.):

$$\forall y^* \in Y^* : ((T^{-1})^* T^*(y^*))(y) = T^* y^*(T^{-1}y) = y^*(TT^{-1}y) = y^*(y).$$

Analogicky $T^* \circ (T^{-1})^* = \text{id } x^*$.

\Leftarrow (1.): Dle první části: T^* je izomorfismus $\implies T^{**}$ je izomorfismus $\implies \varepsilon_Y \circ T$ je izomorfismus $\implies T$ je izomorfismus.

\implies (2.): Dle 1. stačí: T^* je izometrie:

$$\forall y^* \in Y^* : \|T^* y^*\| = \sup_{x \in B_X} |y^*(Tx)| = \sup_{y \in B_Y} |y^*(y)| = \|y^*\|.$$

└ Opačná implikace analogicky jako v 1. □

Definice 6.3 (Reflexivní prostor)

Banachův prostor X se nazývá reflexivní, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Pozor

Existují i prostory, pro které je X izometrické X^{**} , ale ne pomocí ε .

Věta 6.8

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

- *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*
- *Je-li Y uzavřený podprostor X , X reflexivní $\implies Y$ reflexivní.*
- *Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.*
- *Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.*

┌

Důkaz

1. Zvol $y^{**} \in Y^{**}$. Ať $T : Y \rightarrow X$ je izomorfismus. Pak $T^{**}y^{**} \in X^{**} \implies \exists x \in X : \varepsilon_X(x) = T^{**}y^{**}$. Polož $y = T^{-1}x \in Y$. Následně dokážeme, že $\varepsilon_Y(y) = y^{**}$:

$$\begin{aligned} \forall y^* \in Y^* : \varepsilon_Y(y)(y^*) &= y^*(y) = y^*(T^{-1}x) = (T^{-1})^*y^*(x) = T^{**}y^{**}((T^{-1})^*y^*) = \\ &= y^{**}(T^*(T^{-1})^*y^*) = y^{**}(y^*). \end{aligned}$$

2. Zvol $y^{**} \in Y^{**}$ a uvažujme

$$F(X^*) = y^{**}(x^*|_Y), x^* \in X^*.$$

Pak $F \in X^{**}$ (lehké ověřit) $\implies \exists x \in X : F = \varepsilon_X(x)$. $x \in Y$, jelikož: Ať ne, pak (dle H-B) $\exists f \in X^* : 0 \neq f(x) \wedge f|_Y \equiv 0$. Pak $F(f) = y^{**}(0) = 0$, ∇ .

Ted' už jen ověříme, že $\varepsilon_Y(x) = y^{**}$: Zvol $y^* \in Y^*$. Dle H-B existuje $x^* \in X^*$, že $x^*|_Y = y^*$. Pak

$$y^{**}(y^*) = y^{**}(x^*|_Y) = F(x^*) = x^*(x) = \varepsilon_Y(x)(x^*)$$

3. \implies : Zvol $x^{***} \in X^{***}$. Uvažuj $x^* = x^{***} \circ \varepsilon_X \in X^*$. Pak

$$\begin{aligned} \forall x \in X : x^{***}(\varepsilon_X(x)) &= x^*(x) = \varepsilon_X(x)(x^*) = \varepsilon_{X^*}(x^*)(\varepsilon_X(x)) \\ \implies x^{***} &= \varepsilon_{X^*}(x^*), \text{ na } \varepsilon_X(x) = x^{**}. \end{aligned}$$

Ať $\varphi \in (X/Y)^{**}$, pak

$$I^*(\varphi) = (Y^\perp)^* \implies \exists F \in X^{**} : I^*(\varphi) \subset F \implies \exists x \in X : F = \varepsilon_X(x).$$

Potom už jen chceme $\varepsilon_{X/Y}(q(x)) = \varphi$:

$$\begin{aligned} \forall f \in Y^\perp : \varepsilon_{X/Y}(q(x))(I(f)) &= I(f)(q(x)) = f(x) = F(f) = (I^*(\varphi))(f) = \varphi(I f) \implies \\ \implies \varepsilon_{X/Y}(q(x)) &= \varphi. \end{aligned}$$

└

□

Věta 6.9

Banachův prostor X je reflexivní, právě když pro každé $x^ \in X^*$ existuje $x \in B_X$ splňující $\|x^*\| = x^*(x)$.*

┌

Důkaz

└ Bez důkazu.

□

7 Slabá konvergence

Definice 7.1 (Slabá konvergence, s. konvergence s hvězdičkou)

Nechť X je normovaný lineární prostor.

- Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ v prostoru X slabě konverguje k $x \in X$ (značíme $x_n \xrightarrow{w} x$) pokud pro každé $x^* \in X^*$ platí $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$.
- Řekneme, že posloupnost $\{x_n^*\}$ v prostoru X^* slabě s hvězdičkou konverguje k $x^* \in X^*$ (značíme $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$) pokud pro každé $x \in X$ platí $x_n^*(x) \rightarrow x^*(x)$.

Lemma 7.1

Nechť X je normovaný lineární prostor, $\{x_n\}$ posloupnost v X a $\{x_n^*\}$ posloupnost v X^* .

1. Existuje nejvýše jedno $x \in X$ splňující $x_n \xrightarrow{w} w$.
2. Existuje nejvýše jedno $x^* \in X^*$ splňující $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.
3. Pokud $x \in X$ a $x_n \rightarrow x$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$.
4. Pokud $x^* \in X^*$ a $x_n^* \xrightarrow{w} x^*$, pak $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.

┌
Důkaz

└ 1.–4. triviální. □

Věta 7.2

Nechť X je separabilní normovaný lineární prostor a $\{x_n^*\}$ omezená posloupnost v X^* . Pak $\{x_n^*\}$ má w^* -konvergentní podposloupnost.

┌ *Důkaz*

Ať $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq B_x$ hustá v B_x . 1. krok: Najdeme $(x_{n_k}^*)$, že $x_{n_k}^*(x_n)$ je konvergentní pro $n \in \mathbb{N}$: Ať $A_1 \subset \mathbb{N}$ nekonečná. K $((x_k^*)(x_1))_{k \in A_1}$ je konvergentní. Totéž pro A_2 a x_2 , A_3 a x_3 , ... Potom vybereme prvky na diagonále.

2. krok: Pak $x_{n_k}^*(x)$ konverguje pro $x \in B_x$: $\varepsilon > 0$ dáno. Ať $n \in \mathbb{N}$, že $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

$$k_0 \in \mathbb{N} \forall k, l \geq k_0 : |x_{n_k}^*(x_n) - x_{n_l}^*(x_n)| < \varepsilon.$$

Pak

$$\begin{aligned} \forall k, l \geq k_0 : |x_{n_k}^*(x) - x_{n_l}^*(x)| &\leq |x_{n_k}^*(x - x_n)| + |x_{n_k}^*(x_n) - x_{n_l}^*(x_n)| + |x_{n_l}^*(x_n) - x_{n_l}^*(x)| < \\ &< \varepsilon(\|x_{n_k}^*\| + 1 + \|x_{n_l}^*\|). \end{aligned}$$

3. krok: Tedy z linearit $x_{n_k}^*(x)$ konverguje pro $x \in X$: Polož $x^*(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^*(x)$.

└ Pak $x^* \in X^*$ □

Věta 7.3

Banachův prostor X je reflexivní, právě když každá omezená posloupnost $\{x_n\}$ v X má slabě konvergentní podposloupnost.

┌ *Důkaz*

\Leftarrow nebude (teď je těžký, bude ve funkcionální analýze). \Rightarrow plyne z následující věty: Polož $Y = \overline{\text{span}}(x_n) \subset X$, pak Y je separabilní a reflexivní $\Rightarrow Y^*$ je (reflexivní +) separabilní, dle následující věty. $\Rightarrow \exists (x_{n_k}), w^*$ -konvergentní podposloupnost v $Y^{**} \equiv \varepsilon(Y) \Rightarrow \exists y \in Y : \varepsilon(x_{n_k}) \xrightarrow{w^*} \varepsilon(y) \Leftrightarrow x_{n_k} \xrightarrow{w} y$. □

Věta 7.4

Nechť X je normovaný lineární prostor a X^ je separabilní. Pak X je separabilní.*

┌ *Důkaz*

Zvol $\{x_n^* | n \in \mathbb{N}\} \subset S_{X^*}$ hustou podmnožinu (existuje ze separability). Pro $n \in \mathbb{N}$ najdi $x_n \in B_x : x_n^*(x_n) > \frac{1}{2}$. Pak $\overline{\text{span}}\{x_n | n \in \mathbb{N}\} = X$ (a tím bude hotovo, protože $\overline{\text{span}}(x_n) = \overline{\text{span}}_*(x_n)$): Ať ne, pak existuje $f \in S_{X^*} : f|_{\overline{\text{span}}} = 0, f \neq 0$. Zvol $n \in \mathbb{N}$, že $\|x_n^* - f\| < \frac{1}{4}$. Pak

$$0 = |f(x_n)| \geq |x_n^*(x_n)| - |(x_n^* - f)(x_n)| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} > 0. \nabla$$

└ □

8 Omezené operátory v Banachových prostorech

Definice 8.1 (Kompaktní operátor, konečněrozměrný operátor)

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní (tj. její uzávěr je kompaktní) v Y .

Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá konečněrozměrný, pokud $\text{Rng } T$ má konečnou dimenzi.

$\mathcal{F}(X, Y)$ značí množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y .

Poznámka

X je MP, $A \subset X$. Pak

- A je relativně kompaktní \Leftrightarrow z každé posloupnosti v A lze vybrat konvergentní posloupnost v X .
- Pokud X je úplný, pak A je relativně kompaktní $\Leftrightarrow A$ je totálně omezená.

Tvrzení 8.1

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T : X \rightarrow Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. T je kompaktní.
2. $T(B_X)$ je relativně kompaktní.
3. Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X , pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.

┌

Důkaz

1. \Rightarrow 2: triviální. 2. \Rightarrow 3: Ať (x_n) je posloupnost v $B(\mathbf{0}, r)$ (kde $r > 0$). Pak $(\frac{x_n}{r})$ je posloupnost v B_x \Rightarrow dle 2. $\exists (n_k)$, že $T(\frac{x_{n_k}}{r})$ je konvergentní, tedy $T(x_{n_k})$ je konvergentní.

3. \Rightarrow 1.: Ať $A \subset X$ omezená, ať (y_n) je posloupnost v $T(A)$. Pak $\exists x_n \in A : Tx_n = y_n$,
 $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists (n_k) : T_{x_{n_k}}$ je konvergentní v Y . □

└

Věta 8.2

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

1. Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$ pro každé $x \in X$.
2. $\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.
3. $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.
4. Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem (zleva či zprava), dostaneme opět kompaktní operátor.

┌
Důkaz

1. \Leftarrow : Jasné protože pak $\text{Rng } T \subset \text{span} \{y_1, \dots, y_n\}$. \Rightarrow : Ať y_1, \dots, y_n je báze $\text{Rng } T$. Uvažujme $g_i \in (\text{Rng } T)^*$, $g_i(y_j) = \delta_{ij}$. Polož $f_i = g_i \circ T \in X^*$, $i \in [n]$. Pak $T(x) = \sum_{i=1}^n g_i(Tx)y_i = \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$.

2. Ať $S, T \in \mathcal{K}(X, Y)$. Pak $(S + T)(B_X) = S(B_X) + T(B_X) \subseteq \overline{S(B_X)} + \overline{T(B_X)}$, což jsou kompaktní prostory. Protože součet kompaktních je kompaktní (a uzavřený podprostor kompaktního také), $\overline{(S + T)(B_X)}$ je kompaktní. Násobení triviálně.

$T \in \mathcal{F}(X, Y) \Rightarrow \text{Rng } T$ je konečnědimenzionální, tedy uzavřená $\Rightarrow \overline{T(B_X)} \subseteq \text{Rng } T \cong \mathbb{K}^n$. □

┌
Důkaz (Ze skript (vlastními slovy))

3. Necht $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{K}(X, Y)$ konvergující k $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Necht $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dále nalezneme množinu $\{x_1, \dots, x_k\} \subset B_X$ takovou, že $T_n(x_i)$ je konečná $\frac{\varepsilon}{3}$ -sít pro $T_n(B_X)$. $T(x_i)$ je pak konečná ε -sít v $T(B_X)$ neboť $\forall x \in B_X$ nalezneme j tak, že $\|T_n(x) - T_n(x_j)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Potom

$$\|T(x) - T(x_i)\| \leq \|T(x) - T_n(x)\| + \|T_n(x) - T_n(x_j)\| + \|T_n(x_j) - T(x_j)\| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tedy $T(B_X)$ je totálně omezená, a protože Y je úplný, tak je T kompaktní dle předchozího tvrzení.

4. Spojitá zobrazení zachovávají omezenost i relativní kompaktnost, tedy složení s jiným operátorem na něj klade stejné podmínky pro kompaktnost, jako by byl samotný. □

Věta 8.3 (J. P. Schauder, 1930)

Necht X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.

┌ *Důkaz* (Ze skript)

⇐: Položme $K = \overline{T(B_X)}$ a $\mathcal{F} = \{f|_K | f \in B_{Y^*}\}$. Pak K je kompaktní a $\mathcal{F} \subset C(K)$. Dále pro každé $f \in B_{Y^*}$ díky spojitosti f platí

$$\|f|_K\|_{C(K)} = \sup_{y \in K} |f(y)| = \sup_{y \in T(B_X)} |f(y)| = \sup_{x \in B_X} |f(T(x))| \leq \|f\| \cdot \|T\| \leq \|T\|.$$

Tedy $\mathcal{F} \subset C(K)$ je omezená množina stejně spojitých (dokonce 1-lipschitzovských) funkcí na kompaktním prostoru K . Podle Arzeláovy-Ascoliovy věty to znamená, že \mathcal{F} je relativně kompaktní v $C(K)$.

Nechť nyní $\{f_n\}$ je posloupnost v B_{Y^*} . Položme $g_n = f_n|_K$. Pak $\{g_n\}$ je posloupnost v \mathcal{F} , a tedy existuje podposloupnost $\{g_{n_k}\}$ konvergentní v $C(K)$. Tvrdíme, že pak $\{T^*f_n\}$ je cauchyovská: Pro $k, l \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned} \|T^*f_{n_k} - T^*f_{n_l}\| &= \|T^*(f_{n_k} - f_{n_l})\| = \sup_{x \in B_X} |T^*(f_{n_k} - f_{n_l})(x)| = \sup_{x \in B_X} |(f_{n_k} - f_{n_l})(T(x))| \leq \\ &\leq \sup_{z \in K} |(f_{n_k} - f_{n_l})(z)| = \|g_{n_k} - g_{n_l}\|_{C(K)}. \end{aligned}$$

Protože $\{g_{n_k}\}$ je cauchyovská, je i $\{T^*f_{n_k}\}$ cauchyovská, a tedy konvergentní v X^* . Odtud plyne, že $T^*(B_{Y^*})$ je relativně kompaktní v X^* .

⇒ : Nechť $\varepsilon_X : X \rightarrow X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \rightarrow Y^{**}$ jsou kanonická vnoření. Podle první části důkazu je T^{**} kompaktní, takže je kompaktní i $S = T^{**}|_{\varepsilon_X(X)} : \varepsilon_X(X) \rightarrow Y^{**}$. Podprostor $\varepsilon_Y(Y)$ je uzavřený v Y^{**} , tedy S je kompaktní. Podle tvrzení a věty výše je $T = \varepsilon^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$ kompaktní. □

9 Úplnost v Banachových prostorech

Věta 9.1 (Princip stejnoměrné omezenosti)

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $A \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak

$$\sup \{\|T\| \mid T \in A\} < +\infty \Leftrightarrow \forall x \in X : \sup \{\|T(x)\| \mid T \in A\} < +\infty.$$

┌ *Důkaz* (Ze skript)

⇒ : Zřejmé. ⇐ : Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_n = \{x \in X \mid \|T(x)\| \leq n \text{ pro každé } T \in A\}.$$

Pak jsou F_n uzavřené množiny pokrývající celé X . Podle Baireovy věty existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že F_{n_0} má neprázdný vnitřek. Existuje tedy koule $B(x_0, r) \subset F_{n_0}$. Nechť nyní $T \in A$ je libovolný. Pro každé $x \in B_X$ je $x_0 + rx \in B(x_0, r)$, a tedy $\|T(rx)\| = \|T(x_0 + rx - x_0)\| \leq \|T(x_0 + rx)\| + \|T(x_0)\| \leq 2n_0$. Odtud $\|T(x)\| \leq \frac{2n_0}{r}$, což znamená, že $\|T\| \leq \frac{2n_0}{r}$. Proto je $\sup \{\|T\| \mid T \in A\} \leq \frac{2n_0}{r}$. □

Důsledek

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X, Y)$ taková, že $\forall x \in X \exists T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $\|T\| \leq \liminf \|T_n\| \in \mathbb{R}$.

┌

Důkaz (Ze skript)

Nejprve ukážeme, že T je lineární. Zvolme $x, y \in X$ a skalár α libovolně. Pak díky spojitosti vektorových operací platí

$$T(x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + T_n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(y) = T(x) + T(y),$$

$$T(\alpha x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha T_n(x) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \alpha T(x).$$

Dále, pro pevné $x \in X$ ze spojitosti normy plyne $\lim \|T_n(x)\| = \|T(x)\|$, speciálně posloupnost $\{\|T_n(x)\|\}$ je omezená. Z předchozí věty plyne, že posloupnost $\{\|T(x)\|\}$ je omezená. Pak pro libovolné $x \in B_X$ platí

$$\|T(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \in \mathbb{R}.$$

Tedy T je spojitý lineární operátor a $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$. □

Tvrzení 9.2

Nechť X je Banachův prostor, $\{x_n^*\}$ je posloupnost v X^* , $x^* \in X^*$ a $D \subset X$ splňuje $\overline{\text{span}} D = X$. Pak $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, právě když $\{x_n^*\}$ je omezená a $x_n^*(d) \rightarrow x^*(d)$ pro každé $d \in D$.

┌

Důkaz

\Rightarrow : (x^*) je omezená dle principu stejnoměrné omezenosti. \Leftarrow : Víme (aplikace linearity):

$$\forall x \in \text{span } D : x_n^*(x) \rightarrow x^*(x).$$

Nechť $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Ať $x_0 \in \text{span } D : \|x - x_0\| \cdot \sup \{\|x_n^*\| + \|x^*\| \mid n \in \mathbb{N}\} < \frac{\varepsilon}{3}$. Buď $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 |x_n^*(x_0) - x^*(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak $\forall n \geq n_0$:

$$|x_n^*(x) - x^*(x)| \leq \|x_n^*\| \cdot \|x - x_0\| + |x_n^*(x_0) - x^*(x_0)| + \|x^*\| \cdot \|x - x_0\| \leq \varepsilon.$$

└

□

Tvrzení 9.3

Nechť X je Banachův prostor, $\{x_n\}$ je posloupnost v X , $x \in X$ a $D \subset X^*$ splňuje $\overline{\text{span}} D = X^*$. Pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $d(x_n) \rightarrow d(x^*)$ pro každé $d \in D$.

┌

Důkaz

\Rightarrow : $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \varepsilon_X(x_n) \xrightarrow{w^*} \varepsilon_X(x)$. \Rightarrow : Analogicky jako v předchozím tvrzení. Tedy

$x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow \varepsilon_X(x_n)$ je omezená dle předchozího tvrzení, tedy (x_n) je omezená. □

└

Definice 9.1 (Otevřené zobrazení)

Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 9.4 (O otevřeném zobrazení (Juliusz Pawel Schauder 1930))

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.

┌ Důkaz

└ Později. □

Lemma 9.5 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0, s) \subset \overline{T(\mathcal{U}(0, r))}$, pak dokonce $U(0, s) \subset T(\mathcal{U}(0, r))$

┌ Důkaz (První část ze skript)

Nejprve si povšimněme, že lze bez újmy na obecnosti uvažovat pouze případ $r = s = 1$. Vskutku máme-li již dokázané tvrzení v tomto případě a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ splňuje předpoklady pro nějaká $r, s > 0$, pak operátor $\frac{r}{s}T$ splňuje $\mathcal{U}(0, 1) \subset (\frac{r}{s}T)(\mathcal{U}(\mathbf{o}, 1))$, a tedy podle případu $r = s = 1$ platí $\mathcal{U}(\mathbf{o}, 1) \subset (\frac{r}{s}T)(\mathcal{U}(\mathbf{o}, 1))$, odkud $\mathcal{U}(\mathbf{o}, s) \subset T(\mathcal{U}(\mathbf{o}, r))$.

Nechť tedy $r = s = 1$ a nechť je dáno $z \in U_Y$. Najdeme $\delta \in (0, 1)$ takové, že $\|z\| < 1 - \delta$. Ukážeme, že $y = \frac{1}{1-\delta}z \in T(\frac{1}{1-\delta}\mathcal{U}_X)$. Pak totiž $z = (1 - \delta)y \in (1 - \delta)T(\frac{1}{1-\delta}\mathcal{U}_X) = T(\mathcal{U}_X)$. Pomocí matematické indukce najdeme $(y_n)_{n=0}^\infty$ takové, že $y_0 = \mathbf{o}$, $\|y - y_n\| < \delta^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1}\mathcal{U}_x)$: Je $\|y\| < 1$, a tedy volbou $y_0 = \mathbf{o}$ je druhá podmínka splněna (a třetí se 0 netýká). Předpokládejme nyní, že $n \in \mathbb{N}$ a již máme nalezeny prvky y_0, \dots, y_{n-1} . Pak

$$y - y_{n-1} \in \delta^{n-1}\mathcal{U}_Y \subset \delta^{n-1}\overline{T(\mathcal{U}_X)} = \overline{\delta^{n-1}T(\mathcal{U}_X)} = \overline{T(\delta^{n-1}\mathcal{U}_X)},$$

a tedy existuje $w \in T(\delta^{n-1}\mathcal{U}_X)$ splňující $\|y - y_{n-1} - w\| < \delta^n$. Pak $y_n = y_{n-1} + w$ splňuje požadované podmínky.

Z předchozí části $\exists (y_n)_{n=0}^\infty$, že $y_0 = 0$, $\|y - y_n\| < \delta^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1}\mathcal{U}_x)$.

Zvolme $x_n \in \delta^{n-1}\mathcal{U}_x$, že $Tx_n = y_n - y_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n = \frac{1}{1-\delta} < \infty \stackrel{X \text{ je Banachův}}{\implies}$$

$$\implies \exists x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \|x\| < \frac{1}{1-\delta} \implies x \in \frac{1}{1-\delta}\mathcal{U}_x.$$

┌ Zároveň $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - 0 = y$. □

Důkaz (Věty o otevřeném zobrazení)

Úvod: stačí $\exists \delta > 0 : \mathcal{U}(0, \delta) \subset T(\mathcal{U}_x)$: Zvol $G \subset X$ otevřená, $x \in G$. Pak $y = Tx \in T(G)$. G otevřená $\implies \exists R > 0 : \mathcal{U}(x, R) \subset G$. Pak $\mathcal{U}(y, \delta R) = y + R\mathcal{U}(0, \delta) \subset y + RT(\mathcal{U}(0, 1)) = T(\mathcal{U}(x, R)) \subseteq T(G)$.

Stať:

Y úplný \implies z Banachovy věty $\exists n_0 : \text{int}(\overline{T(n_0\mathcal{U}_x)}) \neq \emptyset \implies \overline{n_0\mathcal{U}_x}$ (symetrická, konvexní, uzavřená) obsahuje kouli $\implies \exists \delta > 0 : \mathcal{U}(0, \delta) \subseteq \overline{T(n_0\mathcal{U}_x)}$. Z předchozího lemmatu $\mathcal{U}(0, \delta) \subseteq T(n_0\mathcal{U}_x) = nT(\mathcal{U}_x)$.

Závěr: $\mathcal{U}(0, \frac{\delta}{n_0}) \subset T(\mathcal{U}_x)$. □

Důsledek (S. Banach, 1929)

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y , právě když T je prostý a na.

┌

Důkaz

„ \implies “ jasné. „ \Leftarrow “: T^{-1} je spojitý plyne z předchozí věty ($(T^{-1})^{-1}(O) = T(O)$ je otevřené podle předchozí věty (O otevřená)). □

└

Důsledek

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak platí

- Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \leq c\|y\|$.
- Zobrazení $\hat{T} : X/\text{Ker } T \rightarrow Y$ dané předpisem $\hat{T}(\hat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X/\text{Ker } T$.

┌

Důkaz

První bod: Dle předchozí věty $\exists R > 0 : \mathcal{B}(0, R) \subset T(\mathcal{U}_x)$. Zvolíme $y \in Y \setminus \{0\}$. Pak $\exists x \in \mathcal{U}_x : Tx = \frac{y}{\|y\|} \cdot R \wedge \|\frac{x\|y\|}{R}\| \leq \frac{1}{R}\|y\|$. (Položíme $c = \frac{1}{R}$.)

Druhý bod: 1. krok: Je dobře definovaný: $\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x - y \in \text{Ker } T \Leftrightarrow Tx = Ty$. 2. krok \hat{T} je lineární a spojitý: lineární triviálně, spojitý z normy:

$$\forall \hat{x} \in \mathcal{U}_{X/\text{Ker } T} : \|\hat{T}(\hat{h})\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|\hat{x}\| \implies \|\hat{T}\| \leq \|T\|.$$

3. krok: \hat{T} je na, protože T je na a navíc \hat{T} je prosté, neboť $\hat{T}\hat{x} = 0 \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker } T$. □

└

Definice 9.2 (Graf)

Je-li $f : X \rightarrow Y$ zobrazení množiny X do množiny Y , pak množinu

$$\text{graf } f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f . Říkáme, že zobrazení $f : X \rightarrow Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina graf f je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 9.6 (O uzavřeném grafu (S. Banach, 1932))

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojitý, právě když má uzavřený graf.

┌

Důkaz

„ \implies “ trivální, platí vždy. „ \Leftarrow “: $G := \{(x, Tx) \mid x \in X\} \subset X \oplus_\infty Y$ je uzavřený (tedy Banachův). Ať P_x, P_y jsou kanonické projekce (jsou spojitý: $\|P_x(x, y)\| = \|x\|_x \leq \|(x, y)\|_\infty$).

Uvažujme $S : X \rightarrow G$, $Sx = (x, Tx)$, to je lineární a prosté. Ale nevíme, zda je S spojitý. To dokážeme tak, že dokážeme spojitost S^{-1} a to, že je to izomorfismus. Z toho pak plyne spojitost S i T . $S^{-1} = P_x|_G$ je spojitý, prosté a na, tudíž je izomorfismus z věty výše. Tedy S je spojitý. Tedy je spojitý $T = P_y \circ S$. □

Věta 9.7 (Z dřívějšíka, zopakovaná, důkaz je nový)

Nechť X je Banachův prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když Y a Z jsou uzavřené.

┌

Důkaz

„ P_y spojitá $\implies Y, Z$ uzavřené“: lehké, protože $P_Z = \text{id} - P_y$ spojitá a $Y = \text{Ker } P_Z = P_Z^{-1}(0)$ je uzavřená a $Z = \text{Ker } P_y = P_y^{-1}(0)$ je uzavřená.

Naopak ať Y, Z jsou uzavřené, pak chceme P_y má uzavřený graf (pak aplikujeme předchozí větu): Ať $(y_n, P(x_n)) \rightarrow (x, z) \in Y \oplus_\infty Z \cong X$. Pak $x_n \rightarrow x$, $P_y(x_n) \rightarrow z$. Tedy $x_n - P_y(x_n) \rightarrow x - z \implies x - z \in Z$. Tudíž $x = z + x - z \implies P_y x = z$. Tudíž $(x, z) = (x, P_y x) \in \text{graf } P_y$ □

10 Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

Tvrzení 10.1

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertibilní, právě když T je bijekce.

┌ Důkaz

„ \implies “: „ $TS = \text{id} \implies T$ je na, $ST = \text{id} \implies T$ je prosté.

└ „ \Leftarrow “: Plyne z důsledku výše. □

Tvrzení 10.2

Nechť X je Banachův prosotr.

- Pokud $T \in \mathcal{L}(X)$ a $\|T\| < 1$, pak $\text{id}_X - T$ je invertibilní a platí $(\text{id}_X - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.
- Pokud je T invertovatelný a $\|S - T\| < \frac{1}{\|T\|^{-1}}$, pak S je invertovatelný a $S^{-1} = T^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\text{id} - ST^{-1})^n$. Speciálně, množina všech invertibilních operátorů v $\mathcal{L}(X)$ je otevřená.

┌ Důkaz

1. bod: máme $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|} \implies \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(X)$. Zároveň

$$\forall x \in X : \left((\text{id} - T) \circ \sum_{n=0}^{\infty} T^n \right) (x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} (T^n - T^{n+1})(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x - T^{n+1}(x)) = x.$$

Analogicky $\sum_{n=0}^{\infty} T^n \circ (\text{id} - T) = \text{id}_X$.

2. bod: Idea: $\frac{1}{S} = \frac{1}{S-T+T} = \frac{1}{T(T^{-1}(S-T) + \text{id})}$.

Důkaz: Platí

$$S = S - T + T = T(T^{-1}(S - T) + \text{id}) = T(\text{id} - T^{-1}(T - S))$$

T má inverz, člen za mínus má normu menší 1, tedy id mínus on má inverz dle 1. bodu, tedy S^{-1} existuje a

$$S^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (T^{-1}(T - S))^n \right) \circ T^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\text{id} - T^{-1}S)^n \right) \circ T^{-1} = T^{-1} \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\text{id} - ST^{-1})^n \right).$$

└ □

Definice 10.1 (Vlastní číslo, vlastní prostor, vlastní vektory, bodové spektrum, spektrum operátoru)

Nechť X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T , pokud $\text{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\text{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ . Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ . Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá bodové spektrum operátoru T a značí

se $\sigma_p(T)$.

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertibilní. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Věta 10.3

Nechť X je Banachův nad \mathbb{K} a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina \mathbb{K} splňující $\sigma(T) \subset B_x(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.

┌

Důkaz

„ $\sigma(T) \subset B(0, \|T\|)$ “: Pokud $|\lambda| > \|T\|$, pak $(\lambda I - T) = \lambda(I - \frac{T}{\lambda}) \implies (\lambda I - T)^{-1}$ existuje.

„ $\sigma(T)$ uzavřená“: $\mathbb{K} \setminus \sigma(T)$ je otevřená podle tvrzení výše bod 2.

Důkaz druhé části vynechán (těžký a je potřeba Komplexka). □

└

Věta 10.4

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$. Navíc, pokud je X Hilbertův, pak $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

┌

Důkaz

Plyne z toho, že S^{-1} existuje $\Leftrightarrow (S^*)^{-1}$ existuje a

$$(\lambda I - T)^* = \lambda I - T^*, \quad (\lambda I - T)^\star = \lambda I - T^\star.$$

└

□

Věta 10.5

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$.

1. Jestliže $\text{Rng}(T)$ je uzavřený, pak $\dim \text{Rng}(T) < \infty$.
2. Jestliže $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$
3. Jestliže $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pak $\dim \text{Ker}(\lambda I - T) < \infty$ a $\text{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.

┌ *Důkaz*

1. Máme $T : X \rightarrow \overbrace{\text{Rng } T}^{\text{Banach}}$ je na. Z věty o otevřeném zobrazení $\overline{T(B_X)}_{\text{relativně kompaktní}} \supseteq \mathcal{U}(\mathbf{o}, r) \cap \text{Rng } T \implies B(\mathbf{o}, r) \cap \text{Rng } T$ je kompaktní $\implies \dim \text{Rng } T < \infty$ (je v něm kompaktní koule, tak musí být kompaktní).

2. $0 \notin \sigma(T) \implies \exists T^{-1} \implies \text{id} = T \circ T^{-1} \in \mathcal{K}(X)$. Tedy B_X je kompaktní, a tudíž $\dim X < \infty$.

3. První krok „ $\dim \text{Ker}(\lambda I - T) < \infty$ “: BÚNO $\lambda I - T$ není prostý. Na $\text{Ker}(\lambda I - T)$ máme $T = \lambda I$. Uvažujme $T|_{\text{Ker}(\lambda I - T)}$, to je kompaktní operátor.

$$\implies \overline{T(\text{Ker}(\lambda I - T) \cap B_x)} = \overline{\lambda(\text{Ker}(\lambda I - T) \cap B_x)} = \lambda(\text{Ker}(\lambda I - T) \cap B_x)$$

$\implies \text{Ker}(\lambda I - T)$ je konečnědimenzionální.

Druhý krok: Tedy $\exists Z \subset X$ uzavřený, že $X = \text{Ker}(\lambda I - T) \oplus_t Z$. Polož $S = (\lambda I - T)|_Z$. Pak S je prostý (tam kde není prosté, tak jsme v druhé souřadnici), $\text{Rng } S = \text{Rng}(\lambda I - T)$ („ \subseteq “ zřejmě, „ \supseteq “:

$$\forall x \in X : (\lambda I - T)x = (\lambda I - T)(\underbrace{y}_{\text{Ker}(\lambda I - T)} + \underbrace{z}_Z) = Sz$$

). Zbývá „ S je izomorfismus“ (pak $\text{Rng } S$ je uzavřený): Ať ne, pak $\exists (x_n)_{n=1}^\infty$ v \mathcal{S}_Z , že $\|Sx_n\| \rightarrow 0$. Protože T je kompaktní, existuje $(n_k) \nearrow$ a $x \in X : T(x_{n_k}) \rightarrow x \in X$. Pak ale $\lambda x_{n_k} = (\lambda I - T)(x_{n_k}) + T(x_{n_k}) \rightarrow X$. Tedy $S(x_{n_k}) \rightarrow S(\frac{x}{\lambda}) \implies x = 0$, ale $\|\lambda x_{n_k}\| = |\lambda| \rightarrow \|x\| = 0$, nebo $S(x_{n_k}) \rightarrow 0$. \square

Věta 10.6 (Fredholmova alternativa)

Nechť X je Banachův prostor nad \mathbb{K} , $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.

┌

Důkaz

„ \implies “: Pro spor předpokládejme, že S je prosté, ale není na. Polož $S = \lambda I - T$, $X_0 := X$, $X_{n+1} := S(X_n)$. Pak $X_{n+1} \subsetneq X_n$ (dokáže se indukcí) a X_n je uzavřený (dle předchozí věty bodu 3. Rng S je uzavřený, tedy $S : X \rightarrow \text{Rng } S$ je prostý a na, tj. S je izomorfismus).

Z lemmatu o skoro kolmici najdeme $(x_n)_{n=1}^\infty$ posloupnost ve sféře, že $d(x_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak pro $m < n$:

$$T(x_n) - T(x_m) = \underbrace{\lambda x_n}_{X_n} - \underbrace{\lambda x_m}_{X_{n+1}} - \underbrace{Sx_n}_{\in X_{n+1}} + \underbrace{Sx_m}_{\in X_{n+1}}.$$

Polož $? = \lambda x_n - Sx_n + Sx_m \in X_{m+1}$. Pak

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| = |\lambda| \cdot \|x_n - \frac{?}{\lambda}\| \geq |\lambda| d(x_n, X_{m+1}) \geq \frac{|\lambda|}{2} > 0.$$

„ \Leftarrow “: $\lambda I - T$ je na \implies (z nějaké předchozí věty) $(\lambda I - T)^* = \lambda I - T^*$ je prostý $\implies \lambda I - T^*$ je na $\implies \text{Ker}(\lambda I - T) = (X^*)_\perp = \{0\} \implies \lambda I - T$ je prostý. \square

Důsledek

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_p(T)$.

Lemma 10.7

Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

┌

Důkaz

$n = 1$ jasné, „ $n \implies n + 1$ “: Ať $x_1, \dots, x_{n+1} \in X$ jsou vlastní vektory příslušné vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$. Ať $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$. Pak $0 = T(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i) - \lambda_{n+1}(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) x_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) x_i \implies \alpha_i = 0, i \leq n \implies \alpha_{n+1} = 0$. \square

└

Věta 10.8

Nechť X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| > r\}$ konečná.

┌ *Důkaz*

Pro spor ať ne. Tj. $\exists r > 0 \exists (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ po dvou různých λ_n , $|\lambda_n| > R$, $\lambda_n \in \sigma(T)$. Ať x_n je vlastní vektor příslušný λ_n . Položme $X_n = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Pak dle předchozího lemmatu $X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq X_3 \subsetneq \dots$

Z lemmatu o skoro kolmici najdeme $(z_n)_{n=2}^\infty$, že $z_n \in S_{X_n} \wedge d(z_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Ať $z_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, pak $T(z_n) = \sum_i \alpha_i \lambda_i x_i$, $\lambda_n z_n - T(z_n) = \sum_i d_i (\lambda_i - \lambda_n) x_i = \sum_i^{n-1} \dots \in X_{n-1}$. Tedy

$$\begin{aligned} \forall m > n : \|T(z_m) - T(z_n)\| &= \|\lambda_m z_m - \underbrace{(\lambda_m z_m - T(z_m))}_{\in X_{m-1}} + T(z_n)\| = \\ &= |\lambda_m| \cdot \|z_m - \frac{\dots}{\lambda_m}\| \geq \frac{R}{2} > 0. \end{aligned}$$

└ Tedy jsme našli $\frac{R}{2}$ separovanou množinu, tedy T není kompaktní. \nexists . □

Důsledek

Nechť X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T , přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.

Věta 10.9 (Druhá Fredholmova věta)

Nechť X je Banachův prostor nad \mathbb{K} , $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak

$$\text{Rng}(\lambda I_X - T) = (\text{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*))^\perp,$$

$$\text{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = (\text{Ker}(\lambda I_X - T))^\perp.$$

┌ *Důkaz*

└ Bez důkazu □

Věta 10.10 (Třetí Fredholmova věta)

Nechť X je Banachův prostor, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(\lambda I_X - T) &= \text{codim Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \text{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \\ &= \text{codim Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty. \end{aligned}$$

┌ *Důkaz*

└ Bez důkazu □

Definice 10.2 (Numerický range operátoru)

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Množina $N_T = \{\langle Tx, x \rangle \mid x \in S_H\}$ se nazývá numerický range operátoru T .

Tvrzení 10.11

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$.

1. $N_{\alpha I + \beta T} = \alpha + \beta N_T$ pro libovolná $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
2. $\sigma_p(T) \subset N_T \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$.
3. $\sigma(T) \subset \overline{N_T}$.

┌

Důkaz

$$1. \forall x \in S_H \langle (\alpha I + \beta T)x, x \rangle = \alpha \langle x, x \rangle + \beta \langle Tx, x \rangle = \alpha + \beta \langle Tx, x \rangle.$$

$$2. \sigma_p(T) \subseteq N_T: \text{Ať } \lambda \in \sigma_p(T) \implies \exists x_0 \in S_H : \lambda x_0 = Tx_0.$$

$$= \langle Tx_0, x_0 \rangle = \langle \lambda x_0, x_0 \rangle = \lambda$$

3. Ať $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_z(T)$. 1. případ: Ať $\lambda I - T$ je izomorfismus do (a ne na), pak $\text{Rng}(\lambda I - T) \subsetneq H$ je uzavřený podprostor $\implies \exists x \in S_H \cap (\text{Rng}(\lambda I - T))^\perp$, speciálně $0 = \langle \lambda x - Tx, x \rangle = \lambda - \langle Tx, x \rangle \implies \lambda \in N_T$.

2. případ: $\lambda I - T$ není izomorfismus, pak $\lambda I - T$ není sdola omezený, tedy $\exists (x_n)$ v S_H , že $(\lambda I - T)(x_n) \rightarrow 0$, pak

$$|\lambda - \langle Tx_n, x_n \rangle| = |\langle \lambda x_n - Tx_n, x_n \rangle|$$

└

□

Definice 10.3 (Samoadjungovaný operátor)

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Řekneme, že T je samoadjungovaný, pokud $T = T^\star$.

Věta 10.12

Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ pro každé $x, y \in H$. Pro T samoadjungovaný platí následující tvrzení:

- $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H$.
- $N_T \subset \mathbb{R}$ a označíme-li $m_T = \inf N_T$, $M_T = \sup N_T$, pak $\|T\| = \max\{|m_T|, |M_T|\}$ a $\{m_T, M_T\} \subset \sigma(T) \subset [m_T, M_T]$, a tedy číslo $\|T\|$ nebo $-\|T\|$ leží v $\sigma(T)$.

┌
Důkaz

První bod: Víme $\forall x \in H : \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$. Tedy $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$.

Druhý bod: Položme $M = \sup \{ \|x\| \mid \lambda \in N_T \}$. Chceme $\|T\| = M$. „ \geq “: $\forall x \in S_H : |\langle Tx, x \rangle| \leq \|T\|$, „ \leq “: Pro $x, y \in H$ polož $S(x, y) := \langle Tx, y \rangle$. Pak platí

$$\Re S(x, y) = \frac{1}{4} (S(x + y, x + y) - S(x - y, x - y))$$

Neboť (pravou stranu tupě rozepíšeme dostaneme to, co na levé:)

$$LS = \frac{1}{2} (S(x, y) + \overline{S(x, y)}) = \frac{1}{2} (\langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle).$$

Zvol $x \in S_H$, chceme „ $\|Tx\| \leq M$ “: BÚNO $Tx \neq 0$. Položme $y = \frac{Tx}{\|Tx\|} \in S_H$. Pak $\|Tx\| = \langle Tx, y \rangle = S(x, y) = |\Re S(x, y)| \leq \frac{1}{4} (|S(x + y, x + y)| + |S(x - y, x - y)|) \leq \frac{1}{4} M (\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) = \frac{1}{2} M (\|x\|^2 + \|y\|^2) = M$.

Tedy $\|T\| = \sup \{ \|\lambda\| \mid \lambda \in N_T \} = \max \{ m_T, M_T \}$ (Jelikož $N_T \subseteq \mathbb{R}$ je omezená $\implies \sup \{ \|\lambda\| \mid \lambda \in N_T \} = \max \{ |\inf N_T|, |\sup N_T| \}$).

A tedy $\sigma(T) \subseteq \overline{N_T} \subseteq [m_T, M_T]$. Zbývá „ $\{m_T, M_T\} \subseteq \sigma(T)$ “: Polož $R = T - m_T I$. Pak $R = R^\star$, $N_R = N_T - m_T$, tedy $M_R = M_T - m_T \geq 0 = m_R \implies \|R\| = M_R$. Zvol $(x_n)_{n=1}^\infty$ z S_H , že $\langle Rx_n, x_n \rangle \rightarrow \|R\| = M_R$. Chceme „ $\|R\|I - R$ není izomorfismus“: Máme $\|(\|R\|x_n - Rx_n)\|^2 = \|R\|^2 \|x_n\|^2 + \|Rx_n\|^2 + 2\Re \langle -Rx_n, \|R\|x_n \rangle \leq 2(\|R\|^2 - \|R\|\Re \langle Rx_n, x_n \rangle) = 2\|R\| \cdot (\|R\| - \langle Rx_n, x_n \rangle) \rightarrow 0$. Tedy $\|R\|I - R$ není zdola omezený.

Tedy $M_R = \|R\| \in \sigma(R)$. Pak $M_T \in \sigma(T)$ (neboť máme $M_T I - T = (m_T + M_R)I - (m_T I + R) = M_R I - R$ nemá inverzi).

Zbývá „ $m_T \in \sigma(T)$ “: Máme $N_T = -N_T$, tedy $m_T = \inf N_T = -(\sup(-N_T)) = -M_{-T}$. $-M_{-T}$ je ve spektru (dle již dokázané části), tedy máme $m_T I - T = (-M_{-T} I - T = -(M_{-T} I - (-T)))$ nemá inverzi, tedy $m_T \in \sigma(T)$. □

Definice 10.4 (Invariantní zobrazení)

Nechť A je množina a $f : A \rightarrow A$ je zobrazení. Množina $B \subset A$ se nazývá invariantní vůči f , pokud $f(B) \subset B$, tj. $f|_B : B \rightarrow B$.

Lemma 10.13

Nechť H je Hilbertův prostor a označme

$$SA(H) = \{ T \in \mathcal{L}(H) \mid T = T^* \}.$$

Pak pro $T \in SA(H)$ platí následující tvrzení:

1. $\lambda \in \sigma_p(T)$ právě tehdy, když $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^\star)$. Vlastní prostor T příslušný vlastnímu číslu

λ je shodný s vlastním prostorem T^\star příslušným vlastnímu číslu $\bar{\lambda}$.

2. Pokud λ_1, λ_2 jsou různá vlastní čísla T , pak $\text{Ker}(\lambda_1 I - T) \perp \text{Ker}(\lambda_2 I - T)$.

3. Pokud $\sigma(T) = \{0\}$, pak $T = 0$.

4. $Y \in H$ uzavřený podprostor invariantní vůči T a $T^\star \implies T|_Y$ je samoadjungovaný.

┌
Důkaz

1. Pro $T = T^\star$ je $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ a tedy to je trivialita.

2. Ať $x_1 \in \text{Ker}(\lambda_1 I - T)$, $x_2 \in \text{Ker}(\lambda_2 I - T)$, pak $\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle Tx_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Tx_2 \rangle = \bar{\lambda}_2 \langle x_1, x_2 \rangle$. Tedy $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

3. Plyne ihned z předchozí věty 2. bod.

4. $\forall x, y \in Y$ máme $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$. □

Věta 10.14 (Spektrální rozklad samoadjungovaného kompaktního operátoru (D. Hilbert (1904), Erhard Schmidt (1907)))

Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{K}(H)$ je samoadjungovaný. Pak existuje ortonormální báze B prostoru H tvořená vlastními vektory T . Vektorů z B příslušných nenulovým vlastním číslům T je spočetně mnoho, a seřadíme-li je libovolně do prosté posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^N$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, pak $\{e_n\}$ je ortonormální báze $\overline{\text{Rng } T}$ a pro každé $x \in X$ je

$$Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

kde λ_n je vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru e_n .

┌
Důkaz (Jen za pomoci minulého lemmatu)

Ať B je sjednocením ON bází vlastních podprostorů. Označíme $Y = \overline{\text{span}} B$. Chceme „ $Y^\perp = \{0\}$ “: 1. krok: Y je invariantní vůči T a T^\star . Ať $e_n \in B$, pak $T(e_n) = \lambda_n e_n \in Y$, $T^\star(e_n) = \bar{\lambda}_n e_n \in Y \implies T(\overline{\text{span}}(e_n)) \subseteq Y$ a $T^\star(\overline{\text{span}}(e_n)) \subseteq Y$.

2. krok: Y^\perp je invariantní vůči T a T^\star . Ať $Z \in Y^\perp$, pak

$$\forall y \in Y : \langle Tz, y \rangle = \langle z, T^\star y \rangle = 0, \quad \langle T^\star z, y \rangle = \langle z, Ty \rangle = 0.$$

Dle 1. bodu minulého lemmatu $T|_{Y^\perp}$ je samoadjungovaný a kompaktní. Navíc $\sigma_P(T|_{Y^\perp}) = \emptyset \implies T|_{Y^\perp} = 0$.

3. krok: $Y^\perp \subseteq \text{Ker } T \subseteq Y \implies Y^\perp = Y^\perp \cap Y = \{0\}$. □

11 Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

Definice 11.1

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d a $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$. Konvoluce funkce f s funkcí g je funkce $f * g$ definovaná jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)d\mu(y)$$

pro taková $x \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál konverguje.

Věta 11.1

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d a $f, g, h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$.

1. Operace $*$ je komutativní (funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovný).
2. Operace $*$ je distributivní vzhledem ke sčítání ($(f + g) * h = f * h + g * h$ na definičních oborech pravých stran).

┌

Důkaz

$$1. (f * g)(x) = C \int f(y)g(x - y)dy = C \int f(x - z)g(z)dz = (g * f)(x).$$

$$\begin{aligned} 2. (f * (g + h))(x) &= C \int f(y)(g + h)(x - y)d\lambda^d(y) = \\ &= C \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)d\lambda^d(y) + \int_{\mathbb{R}^d} f(y)h(x - y)d\lambda^d(y) \right) = (f * g)(x) + (f * h)(x) \\ (f + g) * h &= h * (f + g) = h * f + h * g = f * h + g * h. \end{aligned}$$

└

□

Lemma 11.2

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d a $f, g \in L_1(\mu)$. Položíme-li $F(x, y) = f(y)g(x - y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^d$, pak $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

┌

Důkaz

$$\begin{aligned} \int \int |F(x, y)|d(\mu \times \mu)(x, y) &= \int |f(y)| \int |g(x - y)|dxdy = \int |f(y)| \cdot \|g\|_1 dy = \\ &= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \end{aligned}$$

└

□

Definice 11.2 (Posun)

Nechť $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x-y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 11.3

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d a $f \in L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Pak zobrazení $\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow L_p(\mu)$ dané předpisem $\tau(x) = \tau_x f$ je stejnoměrně spojitý.

┌

Důkaz

$$\tau_x f \in L_p : \int |\tau_x f(y)|^p dy = \int |f(x-y)|^p dy = \int |f(z)|^p dz \implies \|\tau_x f\|_p = \|f\|_p.$$

Zvol $\varepsilon > 0$, $f \in L_p$. Ať $g \in \mathcal{L}_C(\mathbb{R}^d)$, že $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Ať $B = B(0, r)$, že $\overline{g \neq 0} \subseteq B(0, r-1)$ (pro nějaké $r > 1$). Protože g je stejnoměrně spojitá na B ,

$$\exists \sigma \in (0, 1) \forall x, y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \varepsilon'.$$

Ať $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\|x - y\| < \delta$. Pak

$$\|\tau_x f - \tau_y f\|_p \leq \|\tau_y(f - g)\| + \|\tau_y g - \tau_x g\| + \|\tau_x(g - f)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|\tau_y g - \tau_x g\| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\|\tau_x g - \tau_y g\|_p^p = \int |g(t-x) - g(t-y)|^p dt = \int |g(z) - g(z+x-y)|^p dz =$$

(Jelikož pokud $g(z) \neq 0$, pak $z+x-y \in B(0, r-1+1) = B$. Obdobné pro $g(z+x-y)$.)

$$= \int_B |g(z) - g(z+x-y)|^p dz \leq (\varepsilon')^p \cdot \mu(B) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

pokud ε' zvolíme jako $\sqrt[p]{\frac{\varepsilon}{3\mu(B)}}$.

□

└

Věta 11.4

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d a $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$.

1. Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \leq p, q \leq \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě \mathbb{R}^d , je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
2. Je-li $f \in L_1^{loc}(\mu)$ a jestliže $g \in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě \mathbb{R}^d , je spojitá a platí $\text{supp } f * g \subset \text{supp } f + \text{supp } g$.^a
3. Jsou-li f, g měřitelné, $D \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f * g$ je definována alespoň na D , pak $f * g$ je měřitelná na D .
4. Jsou-li $f, g \in L_1(\mu)$, pak $f * g$ je definovaná μ -skoro všude na \mathbb{R}^d , $f * g \in L_1(\mu)$ a platí $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

┌
Důkaz

1. $\forall x \in \mathbb{R}^d : |f * g(x)| \leq \int |f(y)g(x-y)|dy \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ z Höldera, pokud $p \neq 1, \infty$,
 $\leq \|g\|_\infty \int |f(y)|dy = \|g\|_\infty \|f\|_1$, pokud $p = 1$ a analogicky, pokud $p = \infty$.

Tedy $f * g$ je definována všude a $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. Zbývá „ $f * g$ je stejnoměrně spojitá“: máme $(h(t) := g(-t), \tau$ jsou správně posuny) pro $p \neq 1$:

$$\begin{aligned} |(f * g)(x) - (f * g)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z)(g(x-z) - g(y-z))dz \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)(h(z-x) - h(z-y))|dz \leq \|f\|_p \cdot \|\tau_x h - \tau_y h\|_q. \end{aligned}$$

Dle předchozí věty je $f * g$ stejnoměrně spojitá ($p \neq 1$). Pro $p = 1$ můžeme použít komutativitu a prohodit p a q .

2. Máme

$$|(f * g)(x)| \leq \int |f(y)g(x-y)|dy = \int_{y \in x-K} |f(y)| \cdot |g(x-y)|dy \leq \|g\|_\infty \int_{y \in x-K} |f(y)|dy < \infty$$

$\implies f * g$ je definovaná všude.

Supporty: Ať $x \notin \overline{\{f \neq 0\}} + \overline{\{g \neq 0\}}$ pak $(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int_{f \neq 0} f(y)g(x-y)dy = 0$. Tedy $\{f * g \neq 0\} \subset \overline{\{f \neq 0\}} + \overline{\{g \neq 0\}}$, tudíž (vpravo je kompakt) $\overline{\{f * g \neq 0\}} \subset \overline{\{f \neq 0\}} + \overline{\{g \neq 0\}}$

Spojitosť: Ať x dáno, $y \in B(x, 1)$. Pak $(h(z) = (\xi_{B(x,1)-K}f))(-z)$, τ jsou správné posuny)

$$\begin{aligned} |(f * g)(x) - (f * g)(y)| &= \left| \int_K g(z)(f(x-z) - f(y-z))dz \right| = \\ &= \left| \int_K g(z)(\tau_x h(z) - \tau_y(h(z)))dz \right| \leq \|g\|_\infty \cdot \|\tau_x h - \tau_y h\|_1. \end{aligned}$$

To je stejnoměrně spojitý a z toho již plyne spojitost $(f * g)$ (v bodě x).

3. Vynechán. 4. (nemusí být ke zkoušce): $F(x, y) = f(y)g(x-y)$. Dle lemmatu výše je $F \in L_1(\mu \times \mu)$, $\|F\| = \|f\| \cdot \|g\|$.

$$\infty > \int_{(\mathbb{R}^d)} F = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dydx \implies |(f * g)(x)| < \infty \text{ skoro všude.}$$

Dále $\|f * g\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |F(x, y)|dydx = \|f\| \cdot \|g\|$. □

a

$$\begin{aligned} L_1^{loc} &\equiv \forall x \in \mathbb{R}^d \exists B(x, r) : \int_{B(x, r)} |f| < \infty \\ &\Leftrightarrow \forall K \subset \mathbb{R}^d \text{ kompaktní} : \int_K |f| < \infty. \end{aligned}$$

└

Definice 11.3 (Multiindex)

Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme multiindexem délky d . Řádem multiindexu α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^d \alpha_i$ a značíme jej $|\alpha|$.

Je-li α multiindex délky d , pak symbolem D^α označíme parciální derivaci řádu $|\alpha|$ danou multiindexem α , tj.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Symbol D^α se též nazývá diferenciální operátor.

Definice 11.4 (Prostor testovacích funkcí)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$. Množina

$$D(A, \mathbb{K}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}) \mid \text{supp } \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } A\}$$

se nazývá prostor testovacích funkcí na A .

Věta 11.5

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d a $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$. Je-li $f \in L_1^{loc}(\mu)$ a $g \in D(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ pro každý multiindex α délky d .

┌

Důkaz

1. Víme $f * D^\alpha g$ je spojitá pro každé α dle předchozí věty bod 2. Tedy stačí $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$. To dokážeme indukcí podle $|\alpha| = k$: Pro $k = 1$ zafixujme $x \in \mathbb{R}^d$, $j \in [d]$. $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x + te_j - y)dy$. Pak $\varphi'(0) = \frac{\partial(f*g)}{\partial x_j}(x)$.

Chceme prohodit integrál a derivaci:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} F(t, y) \right| = \left| y \mapsto f(y) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x + te_j - y) \right| \leq$$

(to je nenula jen na kompaktu K)

$$\leq |\xi_K f| \cdot \left| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right| \in L_1.$$

Ověřili jsme předpoklady o integrálu závislém na parametru, tedy

$$\varphi'(0) = \int f(y) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x - y)dy = \left(f * \frac{\partial g}{\partial x_j} \right)(x).$$

At $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j}$. Pak $D^\alpha(f * g) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f * D^{\alpha - e_j} g) = f * \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j} g = f * D^\alpha$. \square

└

Definice 11.5 (Regularizační jádro)

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d . Funkci $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ budeme nazývat regularizačním jádrem (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

Věta 11.6

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d , g je regularizační jádro na \mathbb{R}^d a $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$. Položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.

1. Pokud je f stejnoměrně spojitá a omezená na \mathbb{R}^d , potom $f * g_n \rightarrow f$ stejnoměrně na \mathbb{R}^d .
2. Pokud $f \in L_p(\mu)$ a $1 \leq p < \infty$, potom $f * g_n \xrightarrow{L_p} f$.

Poznámka

$$\int g_n(x) dx = \int g(y) dy = 1$$

podle věty o substituci.

Důkaz

1. $f \in L_\infty \implies f * g_n$ definována všude (podle předchozí poznámky a tvrzení výše). Zafixujeme $\varepsilon > 0$.

Zvolme $R > 0$, že $\int_{B(0,R)} g > 1 - \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$. Dále $\delta > 0$, že $|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$. n zvolíme tak, že $\frac{R}{n} < \delta$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^d \quad |f * g_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) f(x-y) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) |f(x-y) - f(x)| dy = \\ &= \int_{B(0, \frac{R}{n})} g_n(y) \underbrace{|f(x-y) - f(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} dy + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, \frac{R}{n})} \dots dy \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{B(0, \frac{R}{n})} n^d g(ny) dy + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, \frac{R}{n})} n^d g(ny) dy = \\ &\frac{\varepsilon}{2} \int_{B(0,R)} g(z) dz + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, \frac{R}{2})} g(z) dz < \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Důkaz vynecháme. □

Důsledek

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d , $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $1 \leq p < \infty$. Pak množina $D(\Omega)$ je hustá v prostoru $L_p(\Omega, \mu)$ (ve smyslu restrikce na Ω).

Definice 11.6

Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak Fourierovou transformací funkce f rozumíme funkci $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ definovanou jako

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\lambda_d(x), \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Definice 11.7

(Banachovým) prostorem $C_b(\mathbb{R}^d) = C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na \mathbb{R}^d s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Definice 11.8

(Banachovým) prostorem $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí na \mathbb{R}^d takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in \mathbb{R}^d \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ omezená. Na $C_0(\mathbb{R}^d)$ uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Lemma 11.7 (Georg Friedrich Bernhard Riemann (1835), H. Lebesgue (1903))

Ať $f \in L_1(\mu_d)$. Pak

$$\lim_{\|t\| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = 0$$

┌
Důkaz

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{o}\} : \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} -f(x) e^{-i\langle t, x + \pi \frac{t}{\|t\|^2} \rangle} d\mu_d(x) \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} -f\left(u - \pi \frac{t}{\|t\|^2}\right) e^{-i\langle t, u \rangle} d\mu_d(u) \right|. \end{aligned}$$

Sečtením polovin obou stran rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left(f(x) - f\left(x - \pi \frac{t}{\|t\|^2}\right) \right) e^{-i\langle t, x \rangle} dx \right| &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left| f(x) - f\left(x - \pi \frac{t}{\|t\|^2}\right) \right| dx = \\ &= \frac{1}{2} \|\tau_0 f - \tau_P \pi \frac{t}{\|t\|^2} f\|_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

└

□

Věta 11.8

Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ a $j \in [d]$. Fourierova transformace má následující vlastnosti:

1. $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ a $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Fourierova transformace je tedy spojitě lineární zobrazení z prostoru $L_1(\mathbb{R}^d)$ do prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$.
2. Nechť $y \in \mathbb{R}^d$. Pak $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y, t \rangle} \hat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a naopak pro funkci $h(x) = e^{i\langle y, x \rangle} f(x)$ platí $\hat{h} = \tau_y \hat{f}$.
3. Je-li $c > 0$ a $h(x) = f\left(\frac{x}{c}\right)$, pak $\hat{h}(t) = c^d \hat{f}(ct)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.
4. Je-li $h(x) = \overline{f(-x)}$, pak $\hat{h} = \overline{\hat{f}}$.
5. $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.
6. $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} g d\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f \hat{g} d\mu_d$.
7. Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_j f(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}(t) = \hat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.
8. Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na \mathbb{R}^d a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j \hat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

┌

Důkaz (1.)

Nechť $t \in \mathbb{R}^d$ a $\{t_n\}$ je posloupnost v \mathbb{R}^d konvergující k t . Pak díky spojitosti skalárního součinu pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí $f(x)e^{-i\langle t_n, x \rangle} \rightarrow f(x)e^{-i\langle t, x \rangle}$. Protože $|f(x)e^{-i\langle t_n, x \rangle}| = |f(x)|$, je podle Lebesgueovy věty

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t_n, x \rangle} d\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d = \hat{f}(t).$$

Tedy \hat{f} je spojitá v t . Dále zjevně $|\hat{f}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| d\mu_d(x) = \|f\|_1$. Fakt, že $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ nyní plyne z předchozího lemmatu. Konečně linearita Fourierovy transformace je zřejmá z definice. □

┌

Důkaz (2.)

Z věty o substituci pro $t \in \mathbb{R}^d$:

$$\widehat{\tau_y f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-i\langle t, u \rangle} e^{-i\langle t, y \rangle} d\mu_d(u) = e^{-i\langle y, t \rangle} \hat{f}(t).$$

$$\hat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle y, x \rangle} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t - y, x \rangle} d\mu_d(x) = \hat{f}(t - y) = \tau_y \hat{f}(t).$$

└

□

┌
Důkaz (3.)

Z věty o substituci pro $t \in \mathbb{R}^d$:

$$\hat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{x}{c}\right) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = |c|^d \int_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-i\langle t, cu \rangle} d\mu_d(u) = |c|^d \hat{f}(ct).$$

┐

┌
Důkaz (4.)

Z věty o substituci pro $t \in \mathbb{R}^d$:

$$\hat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)} e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)} e^{-i\langle t, -x \rangle} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \overline{\hat{f}(t)}.$$

┐

┌
Důkaz (5.)

Zvolme pevně libovolné $t \in \mathbb{R}^d$. Dle lemmatu výše je funkce $F(x, y) = f(y)g(x - y)e^{-i\langle t, x \rangle}$ měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. Dále $|F(x, y)| = |f(y)| \cdot |g(x - y)|$ a aplikujeme lemma výše na $|F|$, dostaneme, že $F \in L_1(\mu_d \times \mu_d)$. Můžeme tedy použít Fubiniovu větu a substituci $\varphi(u) = u + y$ k výpočtu

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) d\mu_d(y) \right) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x - y) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) \right) d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(u) e^{-i\langle t, u + y \rangle} d\mu_d(u) \right) d\mu_d(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle t, y \rangle} d\mu_d(y) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g(u) e^{-i\langle t, u \rangle} d\mu_d(u) = \hat{f}(t) \hat{g}(t). \end{aligned}$$

┐

┌
Důkaz (6.)

Položme $F(x, y) = f(y)g(x)e^{-i\langle x, y \rangle}$. Pak F je dle lemmatu výše měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. Máme

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x, y)| d\mu_d(x) \right) d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| d\mu_d(x) \right) d\mu_d(y) = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty,$$

podle Fubiniovy věty, tedy $F \in L_1(\mu_d \times \mu_d)$. Proto můžeme použít Fubiniovu větu ještě jednou k výpočtu

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x) d\mu_d(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle x, y \rangle} d\mu_d(y) \right) g(x) d\mu_d(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle x, y \rangle} g(x) d\mu_d(x) \right) d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \hat{g}(y) d\mu_d(y). \end{aligned}$$

┐

┌
Důkaz (7.)

Zvolme pevně $t \in \mathbb{R}^d$ a položme $\varphi(u) = \hat{f}(t + ue_j)$ pro $u \in \mathbb{R}$. Dále položme $F(u, x) = f(x)e^{-i\langle t+ue_j, x \rangle}$ pro $u \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}^d$ a všimněme si, že $\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^d} F(u, x) d\mu_d(x)$. Pak pro každé $u \in \mathbb{R}$ je funkce $x \mapsto F(u, x)$ měřitelná. Dále pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $u \in \mathbb{R}$ je $\frac{\partial F}{\partial u}(u, x) = -ix_j f(x)e^{-i\langle t+ue_j, x \rangle} = h(x)e^{-i\langle t+ue_j, x \rangle}$, takže $|\frac{\partial F}{\partial u}(u, x)| = |h(x)|$. Dle předpokladu je tedy h integrovatelná majoranta. Konečně, zjevně $x \mapsto F(0, x) \in L_1(\mu_d)$. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru tak máme $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}(t) = \varphi'(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial F}{\partial u}(0, x) d\mu_d(x) = \hat{h}(t)$. \square

┌
Důkaz (8.)

Díky následujícímu lemmatu máme

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\lambda(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (-it_j) e^{-i\langle t, x \rangle} d\lambda(x) = it_j \hat{f}(t).$$

└ \square

Lemma 11.9

Nechť $f \in L_1(\mathbb{R}^d, \lambda)$, $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ je omezená a $j \in [d]$. Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ existují všude na \mathbb{R}^d a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_b(\mathbb{R}^d)$, pak $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j} d\lambda = - \int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial g}{\partial x_j} d\lambda$.

┌
Důkaz (Náznak pro $d = 1$)

Podle předpokladu je funkce fg' spojitá na \mathbb{R} a má konvergentní Lebesgueův integrál. Tedy existuje i konečný Newtonův integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)dx$. Dále si můžeme všimnout, že $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ (jinak by f nebyla z L_1 , důkaz existence je přenechán čtenáři). Podle věty o integraci per partes tedy máme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g(x)dx.$$

┌ Integrál vlevo konverguje dle předpokladů, tedy rovnost platí. \square

Lemma 11.10

Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$. Položme $g_n(x) = n^d \hat{g}(-nx)$ a $h_n(x) = g\left(\frac{x}{n}\right)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) e^{i\langle t, x \rangle} h_n(t) d\mu_d(t)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.

┌ *Důkaz*

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Protože g_n je omezená, je $f * g_n$ definovaná na celém \mathbb{R}^d . Pro libovolné $x \in \mathbb{R}^d$ tedy máme

$$\begin{aligned} (f * g_n)(x) &= (g_n * f)(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g_n(y)d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)n^d\hat{g}(-ny)d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+t)n^d\hat{g}(nt)d\mu_d(t) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \tau_{-x}f(t)\widehat{h_n}(t)d\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\tau_{-x}f}(t)h_n(t)d\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)e^{i\langle x,t \rangle}h_n(t)d\mu_d(t), \end{aligned}$$

└ přičemž při výpočtu jsme použili postupně substituci $\varphi(y) = -y$ a předchozí větu. \square

Věta 11.11 (O inverzi)

Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Je-li $\hat{f} \in L_1(\mu_d)$, pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d$ platí

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)e^{i\langle x,t \rangle}d\mu_d(t) = \hat{\hat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

┌ *Důkaz* (TODO vlastnosti g)

Nechť $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce $g(x) = e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|}$. Pak $x \mapsto \hat{g}(-x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \frac{1}{1+t_j^2}$ je regularizační jádro na \mathbb{R}^d . Všimněme si též, že $g(0) = 1$. Nechť g_n a h_n jsou funkce z předchozího lemmatu. Podle toho pro libovolné $x \in \mathbb{R}^d$ platí, že $(f * g_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)e^{i\langle x,t \rangle}d\mu_d(t)$. Pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ je $h_n(t) \rightarrow g(0) = 1$. Protože $|\hat{f}(t)e^{i\langle x,t \rangle}h_n(t)| \leq |\hat{f}(t)|$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a dle předpokladu $\hat{f} \in L_1(\mu_d)$, můžeme použít Lebesgueovu větu. Dostáváme tak $f * g_n(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)e^{i\langle x,t \rangle}d\mu_d(t)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Na druhou stranu podle věty o regularizačním jádru platí, že $f * g_n \rightarrow f$ v $L_1(\mu_d)$. Existuje tedy posloupnost $\{g_{n_k}\}$ taková, že $(f * g_{n_k})(x) \rightarrow f(x)$ pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d$. Z jednoznačnosti limity pak dostáváme, že $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)e^{i\langle x,t \rangle}d\mu_d(t)$ pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Předpokládejme nyní, že je f navíc spojitá. Protože $x \mapsto \hat{\hat{f}}(-x)$ je spojitá dle věty o vlastnosti FT a $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$ na husté podmnožině \mathbb{R}^d , musejí se tyto funkce rovnat všude. \square

Důsledek

Fourierova transformace $\mathcal{F} : L_1(\mu_d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$ je prosté zobrazení. Je-li $g \in L_1(\mu_d)$ a $\hat{g} \in L_1(\mu_d)$, pak $g \in \text{Rng } \mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \hat{g}(-x)$ pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Důsledek

Jsou-li $f, g \in L_1(\mu_d)$ takové, že $\hat{f}, \hat{g}, f\hat{g}, \widehat{fg} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$.

Definice 11.9 (Schwartzův prostor)

Schwartzův prostor na \mathbb{R}^d je definován následujícím způsobem:

$$\mathcal{S}_d = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \mid PD^\alpha f \text{ je omezená pro každé } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ a každý polynom } P \text{ na } \mathbb{R}^d\}.$$

Lemma 11.12

Pro $N \in \mathbb{N}$ je funkce $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N$ polynom na \mathbb{R}^d . Pro každý polynom P na \mathbb{R}^d existují $N \in \mathbb{N}$ a $C > 0$ taková, že $|P(x)| \leq C(1 + \|x\|^2)^N$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$.

┌

Důkaz (Na přednášce byl pouze náznak)

První tvrzení je vidět z rozpisu $(1 + \|x\|^2)^N = \left(1 + \sum_{j=1}^d x_j^2\right)^N$. Dále necht $P(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| < k} c_\alpha x^\alpha$. Položme $C = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| < k} |c_\alpha|$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $j \in [d]$ máme $|x_j| \leq \|x\| \leq 1 + \|x\|^2$ (neboť $\|x\| \leq 1$ nebo $\|x\| \leq \|x\|^2$). Tedy

$$P(x) \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| < k} |c_\alpha| \cdot |x_1|^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot |x_d|^{\alpha_d} \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| < k} |c_\alpha| (1 + \|x\|^2)^{|\alpha|} \leq C(1 + \|x\|^2)^k.$$

└

□

Lemma 11.13

Necht $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $N > \frac{d}{2p}$ a $h(x) = \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^N}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $h \in L_p(\mu_d)$.

┌

Důkaz (Na přednášce pouze náznak)

Podle věty o substituci použité na sférické souřadnice a dále podle Fubiniovy věty (integrujeme spojitou nezápornou funkci) platí

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{(1 + \|x\|^2)^N} \right)^p d\mu_d &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^{pN}} d\lambda_d = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^{d-1}}{(1 + r^2)^{pN}} \sin^{d-2} \varphi_1 \sin^{d-2} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{d-2} d\varphi_{d-2} \dots d\varphi_1 dr = \\ &= C_d \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{(1 + r^2)^{pN}} dr, \end{aligned}$$

kde konstanta $C_d > 0$ závisí jen na dimenzi d . Poslední integrál ovšem konverguje, neboť $2pN - d + 1 > 1$. □

└

Tvrzení 11.14

Schwartzův prostor má následující vlastnosti:

1. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{1 \leq p < \infty} L_p(\mu_d)$.
2. Je-li $f \in \mathcal{S}_d$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ a $h(x) = f(ax + b)$, pak $h \in \mathcal{S}_d$.

3. Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a α multiindex délky d , pak $D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$.
4. Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a jestliže $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ je omezená a má omezené všechny parciální derivace všech řádů (speciálně, je-li $g \in \mathcal{S}_d$), pak $fg \in \mathcal{S}_d$.
5. Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a $P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ polynom, pak $Pf \in \mathcal{S}_d$.

┌ Důkaz (Pouze 1.)

Vztahy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d)$ již známe. Necht $1 \leq p < \infty$. Podle předchozího lemmatu existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že funkce $x \mapsto \frac{1}{(1+||x||^2)^N}$ leží v $L_p(\mu_d)$. Je-li nyní $f \in \mathcal{S}_d$, pak existuje $C > 0$ takové, že $|f(x)|^p \leq \frac{C^p}{(1+||x||^2)^{pN}}$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$, takže podle srovnávacího kritéria $f \in L_p(\mu_d)$. □

└

Tvrzení 11.15

Necht $f \in \mathcal{S}_d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Pak $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \hat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a $D^\alpha \hat{f} = \widehat{m_\alpha f}$, kde $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

┌ Důkaz

První vzorec plyne snadno indukcí dle $|\alpha|$ z věty o vlastnostech FT, přičemž v indukčním kroku jsou předpoklady splněny, neboť $D^\beta f \in \mathcal{S}_d \subset L_1(\mu_d)$ pro každé $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ dle vlastností Schwartzova prostoru.

Druhý vzorec plyne snadno indukcí dle $|\alpha|$ z věty o vlastnostech FT, přičemž v indukčním kroku jsou předpoklady splněny, neboť $m_\alpha f \in \mathcal{S}_d \subset L_1(\mu_d)$ dle vlastností Schwartzova prostoru. □

└

Definice 11.10

Pro $n \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathcal{S}_d$ položme

$$\nu_N(f) = \max_{|\alpha| \leq N} \left\| x \mapsto (1 + ||x||^2)^N \cdot D^\alpha f(x) \right\|_\infty.$$

Definujeme dále funkci $\sigma : \mathcal{S}_d \times \mathcal{S}_d \rightarrow [0, \infty)$ předpisem

$$\sigma(f, g) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \min \{ \nu_N(f - g), 1 \}, \quad f, g \in \mathcal{S}_d.$$

Věta 11.16

(\mathcal{S}_d, σ) je úplný metrický prostor splňující následující vlastnosti:

1. Je-li (f_n) posloupnost v \mathcal{S}_d a $f \in \mathcal{S}_d$, pak $f_n \xrightarrow{\sigma} f$, právě když pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ platí, že

$$(1 + ||x||^2)^N \cdot D^\alpha f_n(x) \rightarrow (1 + ||x||^2)^N \cdot D^\alpha f(x) \text{ stejnoměrně na } \mathbb{R}^d.$$

2. Jestliže $f_n \rightarrow f$ v prostoru (\mathcal{S}_d, σ) , pak $f_n \rightarrow f$ v $L_p(\mu_d)$ pro každé $1 \leq p < \infty$.

3. Je-li α multiindex délky d , P polynom na \mathbb{R}^d a $g \in \mathcal{S}_d$, pak zobrazení $f \mapsto D^\alpha f$, $f \mapsto Pf$, $f \mapsto gf$ jsou spojitá jakožto zobrazení z (\mathcal{S}_d, σ) do (\mathcal{S}_d, σ) .

┌ Důkaz

└ Vynechán. □

Důsledek

Pro $f, g \in \mathcal{S}_d$ platí $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$. Speciálně, prostor \mathcal{S}_d je uzavřený na konvoluci.

┌ Důkaz

└ Vynechán. □

Věta 11.17

Existuje právě jedna lineární izometrie $F : L_2(\mu_d) \rightarrow L_2(\mu_d)$ na taková, že $F(f) = \hat{f}$ pro každou $f \in L_2(\mu_d) \cap L_1(\mu_d)$.

┌ Důkaz

└ Vynechán. □