1 Řady

1.1 Úvod

Definice 1.1

Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost. Číslo $s_m = a_1+a_2+\ldots+a_m$ nazveme m-tým částečným součtem řady $\sum a_n$. Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, pokud tato limita existuje. Je-li tato limita konečná, pak řekneme, že řada je konvergentní. Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je divergentní. Tuto limitu budeme značit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 1.1 (Nutná podmínka konvergence)

Jestliže je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m = s \in \mathbb{R}$. $a_n = s_n - s_{n-1}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$ $\square$

Pozor

Tato věta je pouze a jen implikace.

Věta 1.2 (konvergence součtu řad)

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\cdot a_n$ konverguje.

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\exists$ limita z $s_m \to s \in \mathbb{R}$ a to je z AL právě tehdy, když konverguje $\alpha s_m \to \alpha\cdot s \in \mathbb{R}$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\cdot a_n$ konverguje.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma \in \mathbb{R}$ konvergují, tedy konverguje i $s_m + \sigma_m \to s+\sigma \in \mathbb{R}$. $\square$

1.2 Řady s nezápornými členy

Pozorování

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je řada s nezápornými členy. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, nebo má součet $+\infty$.

Důkaz
$s_m = a_1 + \ldots + a_m \leq a_1 + \ldots + a_{m+1} = s_{m+1}$. $s_m \geq 0$ neklesající $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m \in [0,\infty]$. □

Věta 1.3 (Srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

Důkaz
a) Označme $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ a $\sigma_n = b_1 + \ldots + b_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$s_n = a_1+\ldots+a_{n_0}+a_{n_0+1}+\ldots+a_n \leq a_1+\ldots+a_{n_0}+b_{n_0+1}+\ldots+b_n \leq a_1+\ldots+a_{n_0}+\sigma_n \leq a_1+\ldots+a_{n_0}+\sigma$$

A to je konečné, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tedy $\sigma \in \mathbb{R}$. s_n neklesající a omezená $\implies$ $\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$.

b) Nepřímím důkazem z a). □

Věta 1.4 (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže $A \in (0,\infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Jestliže $A = 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Jestliže $A = \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Důkaz
(i) Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in (0,\infty)$ plyne, k $\varepsilon = \frac{K}{2} \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon = \frac{K}{2}$, tedy $\frac{K}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}K$.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\overset{\text{konvergence součtu řad}}{\implies}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}K \cdot b_n$ konverguje $\wedge a_n \leq \frac{3}{2}K \cdot b_n \overset{\text{Srov. kritérium}}{\implies}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\wedge \frac{K}{2} \cdot b_n \leq a_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{2} \cdot b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

(ii) Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ plyne, k $\varepsilon = 1 \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon = 1$, tedy $a_n < b_n$, a pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle srovnávacího kritéria.

(iii) Úplně stejně jako (ii). □

Věta 1.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy, potom*

$$(i) \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$

$$(iv) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje,}$$

$$(v) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje.}$$

Důkaz

(i) $b_n = q^n$. Víme, že $a_n < b_n\ \forall n \geq n_0$, tedy použijeme srovnávací kritérium.

$(i) \implies (ii)$: $b_n = \left\{ \sqrt[n]{a_n}, \sqrt[n+1]{a_n}, \dots \right\}$. $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Nalezneme $q \in \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, 1 \right)$. Z definice $\lim_{n\to\infty} b_n$ pro $\varepsilon = q - \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ je $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : b_n < q$, tedy $\forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q$, tedy podle (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(ii) \implies (iii)$: $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \implies \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, tedy podle (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(iv) : podobně jako v $(i) \implies (ii)$ dostaneme $\forall n_0 > n_k : b_{n_0} > q > 1$, tedy $\forall n_0\ \exists n > n_0 : \sqrt[n]{a_n} > q > 1 \implies a_n > 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tedy podle nutné podmínky konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

$(iv) \implies (v)$: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. □

Věta 1.6 (d'Alambertovo podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy. Potom:*

$$(i) \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$

$$(iv) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje,}$$

Důkaz

(i) Víme indukcí $a_{n_0+k} < q^k a_{n_0}$ a z konvergence geometrické řady $\sum_{k=1}^{\infty} q^k a_n$ konverguje $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(i) \implies (ii)$: $b_n = \sup\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}, \dots\right\}$. $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Zvolíme $q \in (\lim_{n\to\infty} b_n, 1)$. Tedy $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : b_n < q \implies \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, tudíž podle (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(ii) \implies (iii)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, tedy podle (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(iv): Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ definicí limity pro $\varepsilon < \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1$ vyplývá $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies a_{n+1} > a_n$. Máme rostoucí posloupnost kladných čísel $\implies \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tedy podle nutné podmínky konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. □

Věta 1.7 (Kondenzační kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy splňující* $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ *konverguje.*

Důkaz

Pro $k \in \mathbb{N} : s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$ $t_k = \sum_{j=0}^{k} 2^j \cdot a_{2^j}$.

$\Leftarrow$: Označme $A = \sum_{j=0}^{k} 2^j \cdot a_{2^j}$, pak $A \in \mathbb{R}$. Nechť $m \in \mathbb{N}$ a nalezneme $kin\mathbb{N}$, $m < 2^k$. Pak $t_k \leq A$ a:

$$s_m \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + (a_{2^{k-1}} + \ldots + a_{2^k - 1}) \leq t_{k-1} \leq A.$$

Tedy s_m je shora omezená a rostoucí $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m \in \mathbb{R} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\implies$: Označme $B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$ a nalezneme $m \in \mathbb{N}$, aby $2^k \leq m$. Pak $s_m \leq B$ a platí:

$$s_m \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \geq a_1 + \frac{1}{2}(t_k - 1 \cdot a_1) \leq \frac{1}{2} t_k \implies$$

t_k je shora omezená rostoucí posloupnost $\implies \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. □

1.3 Neabsolutní konvergence řad

Definice 1.2

Nechť pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Věta 1.8 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci řad)

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když je splněna následující podmínka:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 : \left| \sum_{n=j}^{m} a_n \right| < \varepsilon.$$

Důkaz

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \overset{\text{BC}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 :$ $|s_m - s_{n-1}| < \varepsilon$. Což je přesně výraz (po odečtení $s_m - s_{n-1}$) ve větě. $\square$

Věta 1.9 (Vztah konvergence a absolutní konvergence)

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Důkaz

Z BC podmínky: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 : \sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon$. Chceme dokázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Stačí ověřit BC podmínku. K $\varepsilon > 0$ volme n_0 jako výše, pak $\forall m, n \geq n_0 : \left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j| \leq \varepsilon \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. $\square$

Věta 1.10 (Leibnitzovo kritérium (T5.10))

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel, pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz

$\implies$: z nutné podmínky (V5.1) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \cdot a_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\Leftarrow$: $s_{2k+2} - s_{2k} = (-1)^{2k+2} \cdot a_{2k+2} + (-1)^{2k+1} \cdot a_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0 \implies s_{2k}$ je nerostoucí. Obdobně $s_{2k+1} - s_{2k-1} = a_{2k+1} - a_{2k} \geq 0 \implies s_{2k+1}$ je neklesající. Navíc $s_2k = (-a_1 + a_2) + \ldots + (-a_{2k-1} + a_{2k}) \leq 0 + \ldots + 0 = 0$. Analogicky $s_{2k+1} \geq -a_1$.

Nyní $0 \geq s_{2k} = s_{2k+1} + a_{2k+1} \geq -a_1 + a_{2k+1} \geq -a_1$. Analogicky $-a_1 \leq s_{2k+1} \leq 0$. Tedy obě vybrané podposloupnosti jsou omezené a monotónní, tedy konvergují. $\lim_{n\to\infty} s_{2k} = S_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = S_2 \in \mathbb{R}$. Navíc

$$S_2 = \lim_{n\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2k} - a_{2k+1} \overset{\text{AL}}{=} S_1 - 0 = S_1.$$

Tedy jelikož existuje limita sudých i lichých členů a rovnají se, existuje i limita s_n. □

Lemma 1.11 (Abelova parciální sumace)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $m \leq n$ a nechť $a_m, \ldots,, a_n, b_m, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Označme $s_k = \sum_{i=m}^{k} a_i$. Pak platí

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i = \sum_{i=m}^{n} s_i \cdot (b_i - b_{i+1}) + s_n \cdot b_n.$$

Důkaz

$$= a_m \cdot b_m + a_{m+1} \cdot b_{m+1} + \ldots + a_n \cdot b_n = s_m \cdot b_m + (s_{m+1} - s_m) \cdot b_{m+1} + \ldots + (s_n - s_{n-1}) \cdot b_n = \sum_{i=m}^{n} s_i \cdot (b_i - b_{i+1}) + s_n \cdot b_n$$

□

Věta 1.12 (Abel-Dirichletovo kritérium)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní. (D) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty (tj. $\exists K > 0\ \forall m \in \mathbb{N} : |s_m| = |\sum_{n=1}^{m} a_n| < K$).

Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konvergentní.

Důkaz
Podle V 5.8 budeme ověřovat BC podmínku pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$. Označme $s_k = \sum_{n=m}^{k} a_n$. b_n je nerostoucí a $b_n > 0 \implies \forall i : b_i - b_{i+1} \geq 0$ a $\exists K\ \forall n : |b_n| \leq K$.

(A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

$$\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall i \geq m \geq n_0 |\sum_{n=m}^{i} a_n| = |s_i| < \varepsilon.$$

Nyní k $\varepsilon > 0$ volme n_0 jako výše a nechť $n \geq m \geq n_0$:

$$|\sum_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i| \overset{\text{Abel PS}}{\leq} \sum_{i=m}^{n-1} |s_i \cdot (b_i - b_{i+1})| + |s_n| \cdot |b_n| \leq \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (b_i - b_{i+1}) + \varepsilon \cdot b_n = \varepsilon \cdot (b_m - b_n) + \varepsilon \cdot b_n \leq \varepsilon \cdot K.$$

A podle BC podmínky máme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konverguje.

(D) Z předpokladů víme, že $\exists M > 0\ \forall i \geq m : |s_i| = |\sum_{n=1}^{i} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n| \leq M$ (volme $M = 2K$). Z $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ k $\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |b_n| < \varepsilon$. Nyní

$$\forall n \geq m \geq n_0 : |\sum_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i| \leq \sum_{i=m}^{n-1} |s_i (b_i - b_{i+1})| + |s_n| \cdot |b_n| \leq \sum_{i=m}^{n-1} M \cdot (b_i - b_{i+1}) + M \cdot b_n = M \cdot (b_m - b_n) + M \cdot b_n \leq$$

A podle BC podmínky máme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konverguje. □

Příklad
$\sin n$ a $\cos n$ má omezené částečné součty.

Důkaz
Buď sečtením $\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n =$ vzoreček.

Nebo dokážeme dokonce $\forall x \neq 2k\pi$ $\sin nx$ a $\cos nx$ má omezené částečné součty.

$$e^i x = \cos x + i \cdot \sin x \implies \sum_{k=0}^{n} e^{i\cdot k\cdot x} = \sum_{k=0}^{n} \cos k \cdot x + i \cdot \sum_{k=0}^{n} \sin k \cdot x.$$

Z geometrické řady ale víme, že

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i\cdot k\cdot x} = \frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}} = \frac{1-\cos x\cdot(n+1) - i\cdot\sin x\cdot(n+1)}{1-\cos x - i\sin x} \cdot \frac{1-\cos x + i\cdot\sin x}{1-\cos x + i\cdot\sin x} = \frac{A_n \cdot B}{(1-\cos x)^2 + (\mathrm{s}}$$

Zřejmě $|A_n| \leq 3$ a $|B| \leq 3$, jmenovatel je nenulový a není závislý na n, tedy pro všechna n je výraz omezen konstantou. □

1.4 Přerovnání a součin řad

Definice 1.3 (Přerovnání řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ nazýváme přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 1.13 (O přerovnání absolutně konvergentní řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je její přerovnání. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je absolutně konvergentní a má stejný součet.

Důkaz

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje $\implies$ splňuje BC podmínku. Tedy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq m \geq n_0 |\sum_{i=n}^{m} a_i| < \varepsilon \implies \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq \varepsilon.$$

Zvolme $n_0' = \max\{p(1), p(2), \ldots, p(n_0)\}$. Pak $\forall n' \geq n_0' : p^{-1}(n') \geq n_0$. Tedy

$$\forall n' \geq m' \geq n_0' : \sum_{i=m'}^{n'} |a_{p(i)}| \leq \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| < \varepsilon.$$

Tedy podle BC podmínky $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{p(n)}|$ konverguje, tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ konverguje.

Konverguje k tomu samému? $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = A'$. Víme, že k $\varepsilon > 0\ \exists n_0 \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq \varepsilon$. Zvolme $n_0' \geq \max_{i \leq n_0} p(i)$, aby $\sum_{i=n_0'}^{\infty} |a_{p(i)}| \leq \varepsilon$. Pak $|\sum_{i=1}^{n_0} a_i - A| \leq \varepsilon$ a $|\sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)} - A'| \leq \varepsilon$. Nyní

$$|A - A'| \leq |\sum_{i=1}^{n_0} a_i - A| + |\sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)} - A'| + |\sum_{i=1}^{n_0} a_i - \sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)}| \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq 3\varepsilon$$

□

Věta 1.14 (Rieman)

Neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat k libovolnému součtu $s \in \mathbb{R}^*$.

Důkaz

Bez důkazu (idea: rozdělíme na kladné a záporné členy (mají součty $+\infty$ a $-\infty$) a jdeme nahoru dolu nahoru dolu (vždy alespoň o 1 prvek), abychom se co nejvíce blížili s). □

Definice 1.4 (Cauchyovský součin)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady. Cauchyovským součinem těchto řad nazveme řadu $\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{k-1} (a_{k-i} \cdot b_i)$.

Věta 1.15 (O součinu řad)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergují absolutně. Pak* $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)\cdot(\sum_{n=1}^{\infty} b_n) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}(a_{k-i}\cdot b_i)$.

Důkaz

Označme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \to A \in \mathbb{R}$, $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \to B \in \mathbb{R}$ a $\varrho_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i}b_i\right) \overset{\text{Chceme}}{\to} A \cdot B \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak $\exists n_0 : \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| < \varepsilon$ a $\sum_{j=n_0}^{\infty} |b_j| < \varepsilon$ (z BC podmínky) a zároveň $|s_{n_0}\cdot\sigma_{n_0} - A\cdot B| < \varepsilon$. Nechť $n \geq 2n_0$, pak

$$|\varrho_n - A\cdot B| \leq |\varrho_n - s_{n_0}\cdot\sigma_{n_0}| + |s_{n_0}\cdot\sigma_{n_0} - A\cdot B| \leq$$

$$\leq |(a_1b_1)+(a_1b_2+a_2b_1)+\ldots+(a_{n-1}\cdot b_1+\ldots+a_1\cdot b_{n-1})-(a_1+\ldots+a_{n_0})\cdot(b_1+\ldots+b_{n_0})|+\varepsilon \leq$$

$$\leq \sum_{i\geq n_0 \vee j\geq n_0} |a_ib_j| + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\cdot\sum_{j=n_0}^{\infty}|b_j| + \sum_{i=n_0}^{\infty}|a_i|\cdot\sum_{j=1}^{\infty}|b_j| + \varepsilon \leq A\varepsilon + B\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon\cdot\text{konst.}$$

□

1.5 Limita posloupnosti a součet řady v $\mathbb{C}$

Definice 1.5

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti. Pak $c_n = a_n + ib_n$ je komplexní posloupnost.

Řekneme, že $\lim_{n\to\infty} c_n = A + iB$, pokud existují $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

Definice 1.6

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti a $c_n = a_n + ib_n$. Řekneme, že komplexní řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje k $A+iB$, pokud konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$.

Věta 1.16 (Vztah konvergence a absolutní konvergence pro komplexní řady)

Nechť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je komplexní posloupnost a řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ *konverguje. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *konverguje.*

Důkaz
Z BC podmínky pro konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m \geq n \geq n_0 : \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon.$$

Víme $c_n = a_n + ib_n$. Nyní $\forall m \geq n \geq n_0 :$

$$\sum_{j=n}^{m} |a_j| \leq \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon \wedge \sum_{j=n}^{m} |b_j| \leq \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ splňují BC podmínku, tedy konvergují. Podle V5.9 (vztah KaAK), tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, tedy konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. □

2 Primitivní funkce

2.1 Základní vlastnosti

Definice 2.1 (Primitivní funkce, integrál)

Nechť je funkce f definována na otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je primitivní funkce k funkci f, pokud pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a $F'(x) = f(x)$.

Množinu všech primitivních funkcí k f na I značíme $\int f(x)\, dx$

Věta 2.1 (O jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu)

Nechť F a G jsou primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro všechna $x \in I$.

Důkaz
Označme $H(x) = F(x) - G(x)$. Pak $(H(x))' = (F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$. Tedy (např. z Lagrangeovy věty) $\exists c \in \mathbb{R} : H(x) = c$ na I. □

Poznámka
Značíme $\int f(x)\, dx = F(x) + C$. Nechť F je primitivní funkce k f. Pak F je spojitá (protože má všude vlastní derivaci).

Věta 2.2 (O vztahu spojitosti a existence primitivní funkce)

Nechť I je otevřený interval a f je spojitá funkce na I. Pak f má na I primitivní funkci.

Důkaz
Později. $\square$

Věta 2.3 (Linearita primitivní funkce)

Nechť f má primitivní funkci F a g má primitivní funkci G na otevřeném intervalu I a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ má primitivní funkci $\alpha F + \beta G$.

Důkaz

$$(\alpha \cdot F(x) + \beta \cdot G(x))' \stackrel{\text{AD}}{=} \alpha \cdot F'(x) + \beta \cdot G'(x) = \alpha \cdot f + \beta \cdot g.$$

$\square$

Poznámka (Tabulkové integrály)

- $\int x^n \, dx = \frac{x^n}{n+1} + C, ((x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}) \vee (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}))$.
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + C, (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.
- $\int e^x \, dx = e^x + C, (x \in \mathbb{R})$.
- TODO

Věta 2.4 (Nutná podmínka existence primitivní funkce)

Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Pak f má na I Darbouxovu vlastnost, tedy pro každý interval $J \subseteq I$ je $f(J)$ interval.

Důkaz
Nechť $J \in I$ je interval. Nechť $y_1, y_2 \in f(J)$ a $y_1 < z < y_2$. Chceme ukázat $z \in f(J)$. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I. Definujeme $H(x) = F(x) - z \cdot x$ pro $x \in I$. Pak H je spojitá na I a $\forall x \in I : (H(x))' = f(x) - z$. Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ tak, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Nechť $x_1 < x_2$, v opačném případě je důkaz analogický. Funkce H je spojitá na $[x_1, x_2]$, a tedy tam nabývá minima.

Víme $H'(x_1) = f(x_1) - z < f(x_1) - y_1 = 0$, tedy $\exists \delta > 0$, že $\forall x \in [x_1, x_1 + \delta], H(x) < H(x_1)$, tedy v x_1 není minimum. Obdobně v x_2 není minimum. Tedy minimum je v $x_0 \in (x_1, x_2) \stackrel{\text{Fermat}}{\Longrightarrow} 0 = H'(x_0) = f(x_0) - z$, tj. $f(x_0) = z$. $\square$

Věta 2.5 (Integrace per partes)

Nechť I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I. Nechť F je primitivní k f a G je primitivní k g na I. Pak platí $\int g(x) \cdot F(x) \, dx = G(x) \cdot F(x) - \int G(x) \cdot f(x) \, dx$ ne I.

Důkaz

G je spojitá, tedy $G(x) \cdot f(x)$ je spojitá (tedy integrál vpravo existuje). Mějme funkci $G \cdot F - H$, kde H je primitivní k $G \cdot f$, pak

$$(G(x) \cdot F(x) - H(x))' = g(x) \cdot F(x) + G(x) \cdot f(x) - G(x) \cdot f(x) = g(x) \cdot F(x),$$

neboli $\int g(x) \cdot F(x)\, dx = G(x) \cdot F(x) - H(x)$. $\square$

Věta 2.6 (1. o substituci)

Nechť F je primitivní funkce k f na a, b. Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t))$ na (α, β).

Důkaz

Podle věty o derivaci složené funkce

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \forall t \in (\alpha, \beta).$$

$\square$

Věta 2.7 (2. o substituci)

Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu α, β vlastní nenulovou derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = G(t)$ ne (α, β). Pak $\int f(x)\, dx = G(\varphi^{-1}(x))$ na (a, b).

Důkaz

Podle V6.4 φ' nabývá mezihodnot (a je všude nenulová), tudíž φ' je na (α, β) buď kladná nebo záporná a φ je tím pádem ryze monotónní a spojitá. Tedy lze použít větu o derivaci inverzní funkce a dostaneme $(\varphi^{-1}(x)) = \frac{1}{\varphi'(\varphi(x))}$. Nyní na (a, b)

$$(G(\varphi^{-1}(x)))' = G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x).$$

$\square$

2.2 Integrace racionálních funkcí

Definice 2.2 (Racionální funkce)

Racionální funkcí rozumíme podíl dvou polynomů $\frac{P}{Q}$, kde Q není nulový polynom.

Věta 2.8 (Základní věta algebry)

Nechť $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 x^0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. *Pak existují* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ *tak, že* $P(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$, $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 2.9 (O komplexních kořenech polynomu)

Nechť P *je polynom s reálnými koeficienty a* $z \in \mathbb{C}$ *je kořen* P *násobnosti* $k \in \mathbb{N}$. *Pak i* $\overline{z}$ *je kořen násobnosti* k.

Důkaz

Nejprve pozorování: $(\overline{z})^k = \overline{z^k}$ (dokážeme přes goniometrický tvar).

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. $k = 1$: z je kořen, tj. $P(z) = 0 = \overline{P(z)} = \overline{a_n \cdot z^n + \ldots + a_0 z^0} = a_n \overline{z^n} + \ldots + a_0 \overline{z^0} = P(\overline{z}) \implies \overline{z}$ je kořen. Dále předpokládejme, že $z \notin \mathbb{R}$ (jinak je důkaz triviální.)

Nyní nechť tvrzení platí pro $k-1$ a z je kořen násobnosti alespoň k, potom z IP víme, že $\overline{z}$ je $k-1$násobný kořen. Tedy $P(x) = (x-z)^{k-1} \cdot (x - \overline{z})^{k-1} \cdot Q(x) = (x^2 - (z + \overline{z}) \cdot x + z \cdot \overline{z})^{k-1} \cdot Q(x)$, tedy Q má reálně koeficienty a $Q(z) = 0$. Podle 1. kroku indukce je tudíž $\overline{z}$ kořenem Q, tedy $k$násobným kořenem P. □

Věta 2.10 (O rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P *a* Q *jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že stupeň* P *je ostře menší než stupeň* Q *a* $Q(x) = a_n \cdot (x - x_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{p_k} \cdot (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$, *kde* $a_n, x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, $p_1, \ldots, p_k, q_1, q_l \in \mathbb{N}$, *žádné dva z mnohočlenů nemají společný kořen a mnohočleny* $x^2 + \alpha_i x + \beta_i$ *nemají reálný kořen.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A^i_j \in \mathbb{R}$, $i \in [k]$, $j \in [p_i]$ *a* $B^i_j, C^i_j \in \mathbb{R}$, $i \in [l]$, $j \in [q_i]$ *tak, že platí:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A^1_1}{x - x_1} + \ldots + \frac{A^1_{p_1}}{(x - x_1)^{p_1}} + \ldots + \frac{A^k_1}{x - x_k} + \ldots + \frac{A^k_{p_k}}{(x - x_k)^{p_k}} + \frac{B^1_1 x + C^1_1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^1} + \ldots.$$

Důkaz

Bez důkazu (velmi obtížný a docela zbytečný). □

Poznámka (Postup při integraci racionální funkce)

1. Vydělit polynomy.

2. Rozklad na parciální zlomky podle předchozí věty.

3. Integrace parciálních zlomků.

2.3 Substituce, převádějící na racionální funkce

Viz přednáška. ($R(e^{ax}) \to t = e^{ax}$, $R(\log x) \cdot \frac{1}{x} \to t = \log(x)$).

2.4 Integrace trigonometrických funkcí

Definice 2.3 (Racionálni funkce 2 proměnných)

Racionální funkcí dvou proměnných rozumíme podíl dvou polynomů $R(a,b) = \frac{P(a,b)}{Q(a,b)}$, kde $P(a,b)$ a $Q(a,b)$ jsou polynomy dvou proměnných a Q není identicky nulový.

Poznámka
Při integraci funkcí $R(\sin x, \cos x)$ používáme substituce:

- Pokud $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak používáme $t = \cos x$.
- Pokud $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak používáme $t = \sin x$.
- Pokud $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pak používáme $t = \tan x$.
- Vždy funguje $t = \tan\frac{x}{2}$. (Nepoužívat není-li nutné, těžký výpočet!)

2.5 Integrace funkcí obsahujících odmocniny

Viz přednáška. ($q \in \mathbb{N}, ad \neq bc, R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}) \to t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}$).

Poznámka (Eulerovy substituce)
Nechť $a \neq 0$. Při integraci funkcí typu $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ používáme substituce:

- polynom ax^2+bx+c má dvojnásobný kořen a $a > 0$, pak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-\alpha|$ a řešíme na $x > \alpha$ a $x < \alpha$ jako racionální funkce.
- polynom ax^2+bx+c má dva reálné kořeny α_1 a α_2. Pak úpravou převedeme na tvar $\sqrt{a\frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}}$ nebo $\sqrt{a\cdot\frac{\alpha_1-x}{x-\alpha_2}}$.
- polynom ax^2+bx+c nemá reálný kořen a $a > 0$. Pak používáme substituci $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x + t$.

Pozor
Substituce $\tan x$, $\tan \frac{x}{2}$ a poslední předchozí jsou substituce 2. druhu a je vždy potřeba ověřit, že vnitřní funkce je monotónní a na.

3 Určitý integrál

3.1 Riemannův integrál

Definice 3.1 (Dělení, zjemnění dělení)

Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme dělením intervalu $[a,b]$, jestliže $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Řekneme, že dělení D' intervalu $[a,b]$ zjemňuje dělení D intervalu $[a,b]$, jestliže každý bod dělení D je i bodem dělení D'.

Definice 3.2 (Horní a dolní součty, Riemanovy integrály)

Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a,b]$ a D je dělení $[a,b]$, definujme horní a dolní součty

$$S(f,d) = \sum_{i=1}^{n} \sup \{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-i}),$$

$$s(f,d) = \sum_{i=1}^{n} \inf \{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-i}).$$

Horní a dolní Riemannův integrál definujeme jako

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf \{S(f,D)|D \text{ je dělení } [a,b]\},$$

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup \{s(f,D)|D \text{ je dělení } [a,b]\}.$$

Definice 3.3

Řekneme, že f je Riemanovsky integrovatelná, jestliže $(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Tuto hodnotu pak označujeme $(R)\int_a^b f(x)\,dx$.

Množinu funkcí mající Riemannův integrál značíme $R([a,b])$.

Poznámka
Omezenost f je nutnou podmínkou.

Věta 3.1 (O zjemnění dělení)

Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$, D a D' jsou dělení intervalu $[a,b]$ a D' zjemňuje D. Pak $s(f,D) \leq s(f,D') \leq S(f,D') \leq (f,D)$.

Důkaz
Prostřední nerovnost je triviální z $\sup \geq \inf$.

Předpokládejme, že $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ a $D' = \left\{x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, z, x_{x_j}, \ldots, x_n\right\}$. Pak $\inf\{f(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\} \leq \inf\{f(x), x \in [x_{j-1}, z]\}$ a $\inf\{f(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\} \leq \inf\{f(x), x \in [z, x_j]\}$. Vynásobením $(z - x_{j-1})$ a $(x_j - z)$ dostaneme

$$\inf\{f(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq \inf\{f(x), x \in [x_{j-1}, z]\} \cdot (z - x_{j-1}) + \inf\{f(x), x \in [z, x_j]\} \cdot (x_j - z) =$$

Pokud se D a D' liší o více bodů, pak postupujeme indukcí. Analogicky pro horní součty. □

Věta 3.2 (O dvou děleních)

Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Pak $s(f,D_1) \leq S(f,D_2)$.

Důkaz
Nechť D zjemňuje D_1 i D_2 ($D = D_1 \cup D_2$). Potom D je jemnější než D_1 i D_2 a podle předchozí věty:

$$s(f,D_1) \leq s(f,D) \leq S(f,D) \leq S(f,D_2).$$

□

Důsledek
Nechť f je omezená na $[a,b]$, D_1 a D_2 jsou dělení $[a,b]$, $m = \inf\{f(x) | x \in [a,b]\}$ a $M = \sup\{f(x) | x \in [a,b]\}$. Pak:

$$m \cdot (b-a) \leq s(f,D_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f,D_2) \leq M \cdot (b-a).$$

Definice 3.4 (Norma dělení)

Nechť D je dělení $[a,b]$. Číslo $\ni (D) = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j - x_{j-1}|$ nazveme normou dělení D.

Věta 3.3 (Aproximace R. integrálu pomocí součtů)

Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení $[a,b]$ taková, že $\lim_{n\to\infty} \ni (D_n) = 0$. Potom $(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{n\in\mathbb{N}} S(f,D_n)$ a $(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} s(f,D_n)$.

Důkaz

BÚNO $f \geq 0$ (jinak přičteme k f konstantu). Stačí dokázat druhá rovnost, první je analogická. Nechť D je libovolné dělení a $\varepsilon > 0$. Stačí dokázat, že $\exists n_0 : s(f,D_{n_0}) \geq s(f,D) - \varepsilon$. Pak

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_D S(f,D) \geq \sup_{D_n} s(f,D_n) \geq \sup_D (s(f,D) - \varepsilon) = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon.$$

Nechť $0 \leq f \leq K$ a zvolme n_0, aby $\ni (D_{n_0}) \leq \frac{\varepsilon}{K\cdot 4\cdot \#\text{intervalů } D}$. Označme H = intervaly vzniklé dělením $P = D \cup D_{n_0}$ a γ = intervaly z P, v kterých není žádný bod dělení D. P je jemnější než D, a proto z věty výše dostáváme

$$s(f,D) \leq s(f,P) = \sum_{L\in H} \inf_L f\cdot \text{délka } L = \sum_{L\in\gamma} \inf_L f\cdot \text{délka } L + \sum_{L\in H\setminus\gamma} \inf_L f\cdot \text{délka } L \leq s(f,D_{n_0}) + 2\cdot\#\text{intervalu}$$

□

Věta 3.4 (Kritérium existence R integrálu)

Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Pak $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists$ dělení D intervalu $[a,b]$, že $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Zvolme libovolnou posloupnost dělení, že $\ni |D_n| \to 0$ (D_{n+1} je jemnější než D_n). Pak

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n) = (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} s(f,D_n) = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Tedy $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : S(f,D_n) - s(f,D_n) < \varepsilon$.

$\Rightarrow$: Zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu nalezneme D z předpokladu.

$$0 \leq (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon \implies (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

□

Definice 3.5 (Stejnoměrná spojitost)

Řekneme, že funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu I, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Věta 3.5 (O vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti)

Nechť f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak f je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.

Důkaz

Sporem. Nechť f je spojitá na $[a, b]$, ale

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta = \frac{1}{n} \; \exists x_n, y_n \in I : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Interval a, b je omezený, tedy z x_n lze vybrat konvergentní posloupnost podle Weirstrassovy věty. Tedy $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0$. Dále $\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = x_0$, neboť

$$|y_{n_k} - x_0| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \to 0.$$

Víme, že f je spojitá v x_0 (vzhledem k $[a, b]$). Tedy k našemu $\varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tak, že $\forall z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] : |f(z) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Nalezneme $j \in \mathbb{N}$, aby $x_{n_k}, y_{n_k} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Nyní

$$\varepsilon \leq |f(x_{n_k} - f(y_{n_k}))| \leq |f(x_{n_k} - f(x_0))| + |f(x_0) - f(y_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \lightning$$

□

Věta 3.6 (O vztahu spojitosti a Riemannovské integrovatelnosti)

Nechť f je spojitá na omezeném intervalu $[a, b]$, pak $f \in R([a, b])$.

Důkaz

Podle věty ze zimy je spojitá funkce na omezeném intervalu spojitá. Z předchozí věty víme, že f je dokonce stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Pak

$$\exists \delta > 0 : \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Zvolme dělení D intervalu $[a, b]$ tak, že $\ni (D) < \delta$. Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^{n}$. Označme $M_j = \sup_{x_j, x_{j+1}} f$, $m_j = \inf_{x_j, x_{j+1}} f$. Pak platí $M_j \leq m_j + \varepsilon \forall j \in [n]$.

$$S(f, D) - s(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) =$$

Podle věty výše tedy $f \in R([a, b])$. □

Věta 3.7 (Vztah monotonie a Riemanovské integrovatelnosti)

Nechť f je (omezená) monotonní funkce na intervalu $[a,b]$. Pak $f \in R([a,b])$.

Důkaz

BÚNO f je neklesající. Budeme kritérium existence R integrálu. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme ekvidistantní dělení $D = \left\{a + (b-a)\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ a volíme n, aby $n > \frac{1}{\varepsilon}(b-a) \cdot (f(b) - f(a))$. Nyní

$$S(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j),$$

$$s(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}).$$

Odtud

$$S(f,D) - s(f,D) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) - f(x_{j-1}) \leq \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

□

Věta 3.8 (Vlastnosti R integrálu)

a) Linearita: $f, g \in R([a,b]), \alpha \in \mathbb{R} \implies f + g \in R([a,b]) \wedge \alpha f \in R([a,b])$ a

$$(R)\int_a^b f + g = (R)\int_a^b f + (R)\int_a^b g \wedge (R)\int_a^b \alpha \cdot f = \alpha \cdot (R)\int_a^b g.$$

b) Monotonie: $f, g \in R([a,b]), f \leq g$, pak $(R)\int_a^b f \leq (R)\int_a^b g$.

c) Aditivita vzhledem k intervalům: Nechť $a < c < b$. Pak $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow f \in R([a,c]) \wedge f \in R([c,b])$ a platí $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx$.

Důkaz (a)
$f, g \in R([a,b]) \implies f$ a g jsou omezené na $[a,b] \implies f+g$ je omezená a αf je omezená na $[a,b]$. Je-li $I \subseteq [a,b]$ interval, pak $\sup_I(f+g) \le \sup_I f + \sup_I g$, $\inf_I(f+g) \le \inf_I f + \inf_I g$. Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a,b]$ platí

$$s(f,D) + s(g,D) \le s(f+g,D) \le S(f+g,D) \le S(f,D) + S(g,D).$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a,b]$ tak, že $\ni (D_n) \to 0$ (a D_{n+1} jemnější než D_n). Podle věty výše

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n) + S(g,D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,dx + (R)\int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} s(f,D_n) + s(g,D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,dx + (R)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Spolu s nerovností výše je to

$$\lim_{n\to\infty} s(f+g,D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f+g,D_n) \overset{\text{POLICIE}}{=} (R)\int_a^b f(x)\,dx + (R)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Tedy podle věty výše $f+g \in R([a,b])$ a $(R)\int_a^b f+g = (R)\int_a^b f + (R)\int_a^b g$.

Je-li $f \in R([a,b])$, $\alpha \ge 0$, je $\alpha \cdot f$ omezená na $[a,b]$. Pro každý interval $I \subseteq [a,b]$

$$\sup_I \alpha \cdot f = \alpha \cdot \sup_I f, \qquad \inf_I \alpha \cdot f = \alpha \cdot \inf_I f \implies$$

$$S(\alpha f, D) = \alpha \cdot S(f,D), \qquad s(\alpha \cdot f, D) = \alpha \cdot s(f,D).$$

Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení $[a,b]$, že $\nu|D_n| \to 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n. Pak

$$\lim_{n\to\infty} S(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot S(f,D_n) = \alpha \cdot (R)\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} s(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot s(f,D_n) = \alpha \cdot (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Podle věty výše je pro $\alpha f : \alpha f \in R([a,b])$ a $(R)\int_a^b \alpha f = \alpha (R)\int_a^b f$.

Zbývá $\alpha < 0$. Stačí $\alpha = -1$ (jelikož pak můžeme násobit kladným). Pak $\forall$ interval I $\sup_I(-f) = -\inf_I f$ a $\inf_I(-f) = -\sup_I f$. Tedy $\forall$ posloupnost dělení $\{D_n\}$, kde $\nu(D_n) \to 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n:

$$\lim_{n\to\infty} S(-f,D_n) = \lim_{n\to\infty} -s(f,D_n) = -(R)\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} s(-f,D_n) = \lim_{n\to\infty} -S(f,D_n) = -(R)\int_a^b f(x)\,dx,$$

tudíž $-f \in R([a,b])$ a $(R)\int_a^b (-f) = -(R)\int_a^b f$. $\square$

Důkaz (b)
Nechť D_n je posloupnost dělení, $\nu(D_n) \to 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n. Pak $\sup_I f \leq \sup_I g$. Tedy víme, že

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n) \leq \lim_{n\to\infty} S(g, D_n) = (R)\int_a^b g(x)\,dx.$$

□

Důkaz (c)
Nechť $\{D_n^1\}$ a $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení $[a,c]$ respektive $[c,b]$ splňující $\nu(D_n^1) \to 0$ a $\nu(D_n^2) \to 0$ a D_{n+1}^1 je jemnější než D_n^1 a D_{n+1}^2 je jemnější než D_n^2. Nechť $D_n = D_n^1 \cup D_n^2$. Pak D_n je dělení $[a,b]$ a $\nu(D_n) \to 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n.

Nechť $f \in R([a,c])$ a $f \in R([c,b])$. Pak podle věty výše

$$\lim_{n\to\infty} S(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} s(f, D_n^1) = (R)\int_a^c f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} S(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} s(f, D_n^2) = (R)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} S(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n^1) + S(f, D_n^2) = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} s(f, D_n^1) + s(f, D_n^2) = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Podle věty výše je $f \in R([a,b])$ a $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx$.

Nechť $f \in R([a,b])$. Pak

$$0 \leq S(f,D_n^1) - s(f,D_n^1) \leq S(f,D_n^1) - s(f,D_n^1) + S(f,D_n^2) - s(f,D_n^2) = S(f,D_n) - s(f,D_n) \to 0 \implies$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} S(f,D_n^1) - s(f,D_n^1) = 0 \implies f \in R([a,c]).$$

Analogicky $f \in R([c,b])$. Rovnost $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx$ plyne z předchozí části důkazu. □

Poznámka (Úmluva)
1. Nechť $b < a$, pak definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Věta 3.9 (O derivaci integrálu podle horní meze)

Nechť J je neprázdný interval a $f \in R([\alpha,\beta])$ pro každé $\alpha, \beta \in J$. Nechť $c \in J$ je libovolný pevný bod. Definujme na J funkci $F(x) = (R)\int_c^x f(t)\,dt$. Pak platí: 1) F je spojitá na J, *2) je-li f spojitá v $x_0 \in J$, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Důsledek
Je-li f spojitá na (a, b), pak má na (a, b) primitivní funkci.

Důsledek
Nechť f je spojitá na $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

$$(R)\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to\beta-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x),$$

kde F je primitivní funkce k f na (α, β).

Důkaz (Věty o defivaci integrálu ...)
1) Nechť $y_0 \in J$ není pravým krajním bodem J. Chceme dokázat $\lim_{y\to y_0+} F(y) = F(y_0)$. Nyní

$$F(y) - F(y_0) = (R)\int_c^y f(t)\,dt - (R)\int_c^{y_0} f(t)\,dt = (R)\int_{y_0}^y f(t)\,dt \le |y - y_0|K \to 0,$$

jelikož f je Riemannovsky integrovatelná, tedy je omezená $f(t) < K$. Policií dokážeme $F(y) - F(y_0) \to 0$. Analogicky pro limitu zleva.

2) Víme

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(R)\int_0^{x_0+h} f(t)\,dt - (R)\int_0^{x_0} f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt.$$

Nyní

$$\frac{1}{h}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0) = \frac{1}{h}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ tak, že $\forall t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ platí $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Pak platí

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt\right| \le \frac{1}{h}\cdot\varepsilon\cdot h = \varepsilon.$$

Tedy $F'(x_0) - f(x_0) = 0$ z policie. $\square$

3.2 Newtonův integrál

Definice 3.6 (Newtonův integrál)

Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) Newtonův integrál, jestliže má na (a, b) primitivní funkci F a existují $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$ vlastní. Hodnotou Newtonova integrálu rozumíme číslo

$$(N)\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Množinu funkcí mající Newtonův integrál značíme $N(a,b)$.

Důsledek
Je-li f spojitá na $[a,b]$, pak existují oba (v budoucnu všechny) integrály a rovnají se.

Existují i funkce integrovatelné pouze N a pouze R: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ a $\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x\,dx$.

Věta 3.10 (Per partes pro určitý integrál)

Nechť f, f', g, g' jsou spojité na intervalu $[a,b]$. Potom $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f\cdot g]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$, kde $[fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ a obecněji $\lim_{x\to b_+} f(x)g(x) - \lim_{x\to a_-} f(x)g(x)$.

Důkaz
Víme, že f je primitivní k f' a g je primitivní k g'. Tedy pro primitivní funkci platí $\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$. Dále $\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = Primit(b) - Primit(a) = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$. Všechny integrály existují ze spojitosti. □

Věta 3.11 (O substituci pro určitý integrál)

Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ je funkce, která má na $[\alpha,\beta]$ spojitou první derivaci. Pak

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi\alpha}^{\varphi\beta} f(x)\,dx.$$

Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ je na a má na $[\alpha,\beta]$ vlastní spojitou nenulovou derivaci. Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\Phi(\varphi^{-1}(t))]_a^b = [\Phi(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

kde Φ je primitivní funkce k $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

Důkaz
Bez důkazu. □

Pozorování
Nechť f je spojitá na (a, b) a $a < c < b$. Pak

$$1) f \in N(a, c) \wedge f \in N(c, b) \implies f \in N(a, b).$$

$$2) f \in N(a, b) \implies f \in N(a, c).$$

3.3 Konvergence integrálu

Věta 3.12 (Srovnávací kritérium pro konvergenci integrálů)

Nechť $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť jsou funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ spojité na $[a, b)$ a nechť $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b)$. Pak $g \in N(a, b) \implies f \in N(a, b)$.

Důkaz
Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce k f a g. BÚNO $G(c) = F(c)$ (jinak odečti konstantu). $(G-F)'(x) = (g-f)(x) \geq 0$ na $[c, b) \implies G-F$ je neklesající na $[c, b)$. Dále $G(c) = F(c) \implies \forall x \in [c, b) : G(x) \geq F(x)$. Dále $G' = g \geq 0$ a $F' = f \geq 0$, tedy jsou neklesající. $g \in N(a, b) \implies \lim_{x \to b_-} G(x) \in \mathbb{R}$. F je neklesající a omezená $\lim_{x \to b_-} G(x)$, tedy $\lim_{x \to b_-} F(x) \in \mathbb{R} \implies f \in N(c, b)$. f je spojitá na $[a, c]$, tj. $f \in N(a, c)$. Tudíž $f \in N(a, b)$. $\square$

Poznámka
Platí analogie pro $(a, b]$.

Věta 3.13 (Limitní srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu)

Nechť $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť jsou funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ spojité a nezáporné na $[a, b)$. Jestliže existuje $\lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $g \in N(a, b) \Leftrightarrow f \in N(a, b)$.

Důkaz
Označme $A = \lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Z definice limity pro

$$\varepsilon = \frac{A}{2} \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in P_-(b, \delta) : |\frac{f(x)}{g(x)} - A| < \varepsilon = \frac{A}{2}.$$

Neboli $\exists x_0 \in (a, b)$ $\forall x \in [x_0, b] : \frac{3}{2}A \geq \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}A$. Tudíž $\frac{3}{2}A \cdot g(x) \geq f(x) \geq \frac{1}{2}A \cdot g(x)$. $g \in N(a, b) \implies \frac{2}{3}A \cdot g(x) \in N(a, b) \implies \frac{3}{2}A \cdot g(x) \in N(x_0, b) \implies f \in N(x_0, b)$ podle předchozí věty. f je spojitá na $[a, x_0]$, tedy $f \in N(a, x_0) \implies f \in N(a, b)$.

Pokud naopak $f \in N(a, b)$, pak $f(x) \in N(x_0, b) \implies \frac{1}{2}A \cdot g(x) \in N(x_0, b) \implies g(x) \in N(x_0, b)$. g je spojitá na $[a, x_0]$, tedy $g \in N(a, x_0) \implies g \in N(a, b)$. $\square$

Poznámka
Platí i analogie pro $(a, b]$.

Lemma 3.14 (Odhad Newtonova integrálu součinu dvou funkcí)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g : [a, b] \in \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom $g(a) \cdot \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,dt \le \int_a^b f(t) \cdot g(t)\,dt \le g(a) \cdot \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,dt$.

Speciálně platí $|\int_a^b f(t) \cdot g(t)\,dt| \le g(a) \cdot \sup_{x\in[a,b]} \cdot | \int_a^x f(t)\,dt|$.

Věta 3.15 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence integrálu)

Nechť $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k f na (a, b). Dále nechť $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ je na $[a, b]$ monotónní a spojitá. Pak platí:

(A) Je-li $f \in N(a, b)$ a g je omezená, pak $f \cdot g \in N(a, b)$.

(D) Je-li $F(x)$ omezená na (a, b) a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0$, pak $f \cdot g \in N(a, b)$.

Důkaz (Odhad Newtonova integrálu součinu dvou funkcí)
Dokážeme druhou nerovnost (první je analogická). Nechť $\varepsilon > 0$. Z V7.5 (spojitost na kompaktu a stejnoměrná spojitost) plyne stejnoměrná spojitost f a $f \cdot g$ na $[a, b]$.

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in [a, b] : |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon \wedge |f(x)\cdot g(x)-f(y)\cdot g(y)| < \varepsilon.$

Označme $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, x \in [a, b]$. Pak $F(a) = 0$. Zvolme dělení D intervalu $[a, b]$ s normou $< \delta$. Ze stejnoměrné spojitosti $\forall i \in \{1, \dots, n\}\ \forall t \in [x_{i-1}, x_i] : f(t) \ge f(x_{i-1}) - \varepsilon$. Tedy $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \ge f(x_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}) - \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1}))$. Analogicky z $f(t) \cdot g(t) \le f(x_{i-1}) \cdot g(x_{i-1}) + \varepsilon$ dostaneme $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,dt \le f(x_{i-1}) \cdot g(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1})$. Nyní aplikujeme předchozí nerovnost:

$$\le g(x_{i-1}) \cdot \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt + \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1}) \right) + \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1}) \le$$

g nerostoucí

$$\le g(x_{i-1}) \cdot \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \right) + g(a) \cdot \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1}) + \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1}) \le g(x_{i-1}) \cdot \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \right) + \frac{x_i - x_{i-1}}{a-b} \tilde{\varepsilon},$$

kde $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(g(a) + 1) \cdot (b - a)$.

Nyní

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t)\,dt = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) \cdot g(t)\,dt \le \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} + \tilde{\varepsilon} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \cdot (F(x_i) - F(x_{i-1})) + \tilde{\varepsilon}.$$

Přes Abelovu parciální sumaci:

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i) \cdot (g(x_{i-1} - g(x_i))) + g(x_{n-1}) \cdot F(x_n) + \tilde{\varepsilon} \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} F(t) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i) + g(x_{n-1})) + \tilde{\varepsilon} = g(a) \cdot \sup_{t\in[a,b]} F(t) + \varepsilon \cdot (g(a)+1) \cdot (b-a).$$

Toto platí $\forall \varepsilon > 0$, tedy požadovaná nerovnost platí. □

Důkaz (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence integrálu)
$f \cdot g$ spojitá na $(a, b) \implies \exists$ primitivní funkce H. BÚNO je g nerostoucí. Jinak vezmeme $-g$ a konvergence $\int f \cdot g$ se nezmění.

(A) BÚNO $g \geq 0$: víme, že g je omezená $\exists K > 0\ \forall x \in [a, b) : |g(x)| < K$. Vezmeme funkci $g(x)+K \geq 0$ a konvergence se nám nezmění. $g \geq 0$ omezená, tedy $\exists c > 0\ \forall x \in [a, b) : 0 \leq g(x) < c$. $f \in N(a, b) \implies \lim_{x\to b_-} F(x) \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z Bolzano-Cauchyovy podmínky pro limitu funkce k tomuto

$$\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in P_-(b, \delta) : -\varepsilon < F(x) - F(y) < \varepsilon.$$

Nechť $x, y \in P_-(b, \delta)$, podle lemmatu:

$$H(y)-H(x) = \int_x^y f(t)\cdot g(t)\, dt \leq g(x)\cdot \sup_{z\in[x,y]} \int_x^s f(t)\, dt = g(x)\cdot \sup_{z\in[x,y]} (F(z)-F(x)) \leq g(x)\cdot\varepsilon \leq c\cdot\varepsilon.$$

$$H(y)-H(x) = \int_x^y f(t)\cdot g(t)\, dt \geq g(x)\cdot \inf_{z\in[x,y]} \int_x^s f(t)\, dt = g(x)\cdot \inf_{z\in[x,y]} (F(z)-F(x)) \geq -g(x)\cdot\varepsilon \geq -c\cdot\varepsilon.$$

Tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_-(b, \delta) : |H(x) - H(y)| < c \cdot \varepsilon$. Tedy z BC podmínky pro limitu funkce $\exists \lim_{x\to b_-} H(x)$. Nechť $u \in (a, b)$, $f \cdot g$ je spojitá na $[a, u] \implies f \cdot g \in N(a, c)$. H je spojitá v $u \implies \exists \lim_{x\to u_-} H(x) \implies f \cdot g \in N(u, b)$. Tudíž $f \cdot g \in N(a, b)$.

(D) Víme g nerostoucí a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0 \implies g \geq 0$. $F(x)$ omezená, tj. $\exists K > 0\ \forall x \in (a, b) : |F(x)| \leq K$. Nechť $\varepsilon > 0$:

$$\text{Z } \lim_{x\to b_-} g(x) = 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_-(b, \delta) : |g(x)| < \varepsilon.$$

Nyní $\forall x, y \in P_-(b, \delta)$, $x < y$ platí

$$H(y)-H(x) = \int_x^y f(t)g(t)\, dt \leq g(x)\cdot \sup_{z\in[x,y]} \int_x^z f(t)\, dt = g(x)\cdot \sup_{z\in[x,y]} (F(z)-F(x)) \leq \varepsilon\cdot \sup_{z\in[x,y]} F(z)-F(x) \leq$$

Analogicky

$$H(y)-H(x) = \int_x^y f(t)g(t)\,dt \geq g(x)\cdot \inf_{z\in[x,y]} \int_x^z f(t)\,dt = g(x)\cdot \inf_{z\in[x,y]} (F(z)-F(x)) \geq \varepsilon\cdot \inf_{z\in[x,y]} F(z)-F(x) \geq$$

Tedy H splňuje BC podmínku a $\exists \lim_{x\to b_-} H(x)$. A z toho dostaneme $f\cdot g \in N(a,b)$. $\square$