Příklad (7.1)
Matice lineárního operátoru f ne $\mathbb{R}^8$ vzhledem k bázi $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_8)$ je matice v Jordanově tvaru s dvěma buňkami příslušnými vlastnímu číslu 0 řádů 3 a 5. Pro každé $i, j \in \mathbb{N}$ určete dimenzi a najděte pomocí báze B nějakou bázi prostoru $(\operatorname{Ker} f^i) \cap (\operatorname{Im} f^j)$.

Řešení
Mocniny Jordanových buněk příslušných 0 jsme viděli na přednášce a z té také víme, že matice v Jordanově tvaru se mocní „po buňkách“. Tedy zřejmě (při označení $A = [f]_B^B$):

$$A = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Další mocniny již budou zřejmě nulové. Dále můžeme zjistit báze jader a obrazů a to tak, že báze obrazu jsou nenulové sloupce (jelikož jsou to po dvou různé vektory B, tedy jsou nezávislé, pro dostatečný počet vizte dále) a báze jádra jsou vektory odpovídající prázdným sloupcům (jelikož jsou to taktéž po dvou různé vektory B), protože dohromady jich je vždy $8 = \dim \operatorname{Ker} A^i + \dim \operatorname{Im} A^i$, tedy dostáváme tak opravdu báze celých těchto prostorů.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} A = \operatorname{LO}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7\} &\implies \operatorname{Im} f = \operatorname{LO}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6, \mathbf{b}_7\},\\
\operatorname{Ker} A = \operatorname{LO}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4\} &\implies \operatorname{Ker} f = \operatorname{LO}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_4\},\\
\operatorname{Im} A^2 = \operatorname{LO}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\} &\implies \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{LO}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6\},\\
\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{LO}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\} &\implies \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{LO}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5\},\\
\operatorname{Im} A^3 = \operatorname{LO}\{\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\} &\implies \operatorname{Im} f^3 = \operatorname{LO}\{\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5\},\\
\operatorname{Ker} A^3 = \operatorname{LO}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\} &\implies \operatorname{Ker} f^3 = \operatorname{LO}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6\},\\
\operatorname{Im} A^4 = \operatorname{LO}\{\mathbf{e}_4\} &\implies \operatorname{Im} f^4 = \operatorname{LO}\{\mathbf{b}_4\},\\
\operatorname{Ker} A^4 = \operatorname{LO}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7\} &\implies \operatorname{Ker} f^4 = \operatorname{LO}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6, \mathbf{b}_7\},\\
\forall i > 4 : \operatorname{Im} A^i = \{\emptyset\} \implies \operatorname{Im} f^i = \{\emptyset\}, &\qquad \operatorname{Ker} A^i = \mathbb{R}^8 \implies \operatorname{Ker} f^i = \mathbb{R}^8.
\end{aligned}$$

Nyní si stačí všimnout, že pokud prvek báze „přidává“ nějaký vektor, potom v bázi bez tohoto prvku nelze tento vektor získat, tedy stačí proniknout báze (tabulka je ve tvaru `dimenze: báze`):

$i\backslash j$	1	2	3	4	> 4
1	2: $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_4)$	2: $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_4)$	1: $(\mathbf{b}_4)$	1: $(\mathbf{b}_4)$	0: $\emptyset$
2	4: $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$	3: $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$	2: $(\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$	1: $(\mathbf{b}_4)$	0: $\emptyset$
3	6: $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$	4: $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$	2: $(\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$	1: $(\mathbf{b}_4)$	0: $\emptyset$
4	7: $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6, \mathbf{b}_7)$	4: $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$	2: $(\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$	1: $(\mathbf{b}_4)$	0: $\emptyset$
> 4	7: $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6, \mathbf{b}_7)$	4: $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$	2: $(\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$	1: $(\mathbf{b}_4)$	0: $\emptyset$

Příklad (7.2)
Označme $\mathbf{V}$ vektorový prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše 2 s běžnými operacemi. Lineární operátor φ na $\mathbf{V}$ je definovaný vztahem $\varphi(p) = -p' - x^2p''$. Najděte matici J v Jordanově tvaru a bázi B prostoru $\mathbf{V}$ tak, aby $[\varphi]_B^B = J$.

Řešení
Víme, že báze $\mathbf{V}$ je například $B_0 = (1, x, x^2)$ a že $1' = 0$, $1'' = 0$, $x' = 1$, $x'' = 0$, $\left(x^2\right)' = 2x$, $\left(x^2\right)'' = 2$, tedy $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x) = -1$ a $\varphi(x^2) = -2x - 2x^2$. Dostáváme

$$[\varphi]_{B_0}^{B_0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom $[\varphi]_{B_0}^{B_0}$ je $(0-\lambda)(0-\lambda)(-2-\lambda)$, tedy vlastní čísla jsou -2 algebraické násobnosti 1 a 0 algebraické násobnosti 2. Následně najdeme vlastní vektory jako jádra příslušných matic (např. Gaussovou eliminací) jako

$$\operatorname{Ker}\left([\varphi]_{B_0}^{B_0} - 0 \cdot I_3\right) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\operatorname{Ker}\left([\varphi]_{B_0}^{B_0} - 2 \cdot I_3\right) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Nyní vidíme, že 2 je algebraické i geometrické násobnosti 1, tedy pro $\lambda = 2$ máme hotovo (algebraická $\geq$ geometrická). Naopak 0 je algebraické násobnosti 2, ale geometrické jen 1. Tedy 0 bude mít Jordanův řetízek délky 2 a tedy chceme ještě najít 3. vektor $\mathbf{v}$, pro který bude $([\varphi]_{B_0}^{B_0} - 0 \cdot I_3)(\mathbf{v}) = (1, 0, 0)^T$. Takovým vektorem (nezávislým na obou předchozích) je např. $(0, -1, 0)$.

Tedy (ze vztahu Jordanových řetízků a matice v Jordanově tvaru) je

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = (2x^2 + 2x + 1, 1, -x).$$