Příklad (Teoretický příklad 9)
Zkonstruujte funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $\lim_{x\to 0} f(x)f(2x) = 0$, pro kterou $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

Řešení
Nechť

$$\begin{cases} f(x) = 1, & \text{pro } x = 2^{-2n},\ n \in \mathbb{N} \\ f(x) = 0, & \text{jinak} \end{cases}.$$

Potom je jistě $\lim_{x\to 0} f(x)f(2x) = 0$, jelikož dokonce $f(x)f(2x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, protože buď x ani $2x$ není sudou mocninou 2, nebo x (resp. $2x$) je sudou mocninou 2, ale pak dvojnásobek (polovina) je lichou mocninou 2, tedy $f(x) = 0 \vee f(2x) = 0$.

Naopak $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje, jelikož v libovolném $0 < \delta$ okolí bude f nabývat jak 0 (např. v alespoň jednom z bodů $\frac{\delta}{2}$ a $\frac{\delta}{4}$, ze stejného důvodu jako $f(x)f(2x) = 0$) tak 1 (volím $2^{-2n} < \delta$, tedy

$$n = \max\left\{1, \left\lceil \frac{\log_2(\delta)}{-2} \right\rceil\right\},$$

potom $x = 2^{-2n} < \delta$ a $f(x) = f\left(2^{-2n}\right) = 1$).