Příklad (5.1)
Pro každé přirozené číslo n najděte inverzní matici k reálné matici

$$G = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n & n \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení
Jsou dvě možnosti. Buď budeme hledat inverzní matici přes řádkové úpravy[a] nebo si představíme, jak probíhá maticové násobení.

Chceme, aby vyšla jednotková matice. Tedy v „pravém dolním rohu“ musí vyjít jednička a matice G má v posledním řádku jen jedničku v prvním sloupci, jinak jsou tam nuly. Tedy G^{-1} musí mít v „pravém horním rohu“ jedničku.

Nad jedničkou v jednotkové matici je nula. Kdežto v předposledním řádku matice G jsou v prvních dvou sloupcích dvojky a v ostatních nuly. Abychom dostali chtěnou jedničku, musíme na druhý řádek posledního sloupce matice G^{-1} dosadit takové x, aby výsledek skalárního součinu posledního sloupce matice G^{-1} s předposledním řádkem matice G (tedy z definice maticového násobení poslední sloupec předposlední řádek matice GG^{-1}) byl 0. Tedy $2 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot \_ + 0 \cdot \_ + \ldots = 0$, tj. $x = -1$.

Můžeme si všimnout, že zbytek tohoto sloupce již můžeme vyplnit nulami, jelikož $i \cdot 1 + i \cdot (-1) + i \cdot 0 + i \cdot 0 + \ldots + 0 \cdot 0 + \ldots = i - i = 0$. Navíc, abychom v matici GG^{-1} v posledním řádku dostali nuly, nesmí již jednička z matice G ovlivňovat výsledek, tj. v prvním řádku matice G^{-1} budou v ostatních sloupcích nuly. Tím dostáváme matici:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \_ & \_ & \_ & \cdots & \_ & -1 \\ \_ & \_ & \_ & \cdots & \_ & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \_ & \_ & \_ & \cdots & \_ & 0 \\ \_ & \_ & \_ & \cdots & \_ & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní si můžeme uvědomit, že když zapomeneme na první sloupec matice (násobí se v následujícím postupu jen nulami) a poslední řádek (kde už jsou jen nuly) G, na poslední sloupec a první řádek matice G^{-1} a poslední řádek a poslední sloupec matice GG^{-1}, dostaneme podobnou úlohu, jen v posledním řádku bude 2, tedy nám místo 1 a -1 vyjde $\frac{1}{2}$ a $-\frac{1}{2}$. Můžeme takhle pokračovat a v každém i-tém kroku nám vyjdou samé nuly krom $\frac{1}{i}$ a $-\frac{1}{i}$.

Výsledná matice je tedy:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[a] Což je docela přímočaré, stačí každý řádek vydělit tak, abychom dostali jen samé jedničky a následně druhý řádek odečteme od prvního, třetí od druhého, ..., n-tý od $n-1$-tého. Následně si docela snadno rozmyslíme, že tato matice bude vypadat jako ta výše.

Příklad (5.2)
Rozhodněte, pro které trojice x, y, z je následující matice regulární

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}.$$

Řešení
(Čtvercová) matice je regulární právě tehdy, když po úpravě do odstupňovaného tvaru má alespoň jeden nulový řádek. Budeme tedy postupovat standardně Gaussovou eliminační metodou. Nejdříve odečteme $x$násobek druhého řádku od třetího a $x$násobek prvního řádku od druhého. To můžeme udělat pouze tehdy, je-li $x \neq 0$. Tedy vyřešme případ $x = 0$: odečteme $y$násobek druhého řádku od třetího. To můžeme udělat pouze tehdy, když není $y \neq 0$. Nechť tedy je $y = 0$. Potom matice R není regulární, jelikož buď $z = 0$, tedy má nulový řádek bez úprav, nebo odečtu $z$násobek druhého řádku od třetího, načež třetí řádek bude nulový, tedy $Rnenregulrn$.

Nyní už můžeme při $x = 0$ odečíst $y$násobek druhého řádku od třetího. První řádek je jistě nenulový (obsahuje jedničky), druhý řádek je nenulový, jelikož $y \neq 0$ a na třetím řádku je $(00z(z - y))$, tedy (jelikož pokud by bylo $z = 0$, pak můžeme prohodit sloupce s y a se z, čímž se regularita nezmění a dostaneme již probíraný případ) při $x = 0$ a $y \neq 0$ je matice regulární právě tehdy, když $0 \neq z \neq y$.

V tuto chvíli už můžeme předpokládat $x \neq 0$. Úpravou matice získáme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y - x & z - x \\ 0 & y \cdot (y - x) & z \cdot (z - x) \end{pmatrix}.$$

Pokud $y = 0$, pak jsme mohli na začátku prohodit x a y a vrátit se tak k minulému a předminulému odstavci, kde x bylo nula, tedy $y = 0$ nám dává regulární matice pouze při ($y = 0$, $0 \neq x \neq z \neq 0$). Teď už zbývá vyřešit jen $x \neq 0$, $y \neq 0$, doupravíme matici výše:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y - x & z - x \\ 0 & 0 & (z - y) \cdot (z - x) \end{pmatrix}.$$

Tato matice je regulární, pokud $y \neq x$ a $x \neq z \neq y$. Tedy matice je regulární právě tehdy, když ani jeden z x, y, z není nulový a navzájem se nerovnají, nebo když je právě jeden nulový a další dva se nerovnají. To lze zkrátit na podmínku: *Matice R je regulární právě tehdy, když $x \neq y \neq z \neq x$.*

Příklad (5.bonus)
Pro danou matici A najděte regulární matici X a diagonální matici D tak, aby platilo $A = XDX^{-1}$. Použijte tento rozklad k nalezení explicitního vzorce pro n-tou mocninu matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení

Nejdříve rovnici ze zadání vynásobíme zprava maticí X, čímž dostaneme $AX = XD$. Označme si prvky matic, ať s nimi můžeme pracovat (diagonální má mimo diagonálu nuly) a zapišme rovnici násobení

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \beta \cdot b \\ \alpha \cdot c & \beta \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + c & 2b + d \end{pmatrix}.$$

Matice se rovnají, pokud se rovnají jejich prvky. Tedy dostáváme

$$\alpha \cdot a = a + 2c, \qquad \alpha \cdot c = 2a + c,$$
$$\beta \cdot b = b + 2d, \qquad \beta \cdot d = 2b + d,$$

což můžeme „upravit“ sečtením a odečtením rovnic do tvaru

$$\alpha \cdot (a - c) = -a + c, \qquad \alpha \cdot (a + c) = a + c,$$
$$\beta \cdot (b - d) = b - d, \qquad \beta \cdot (b + d) = b + d.$$

Takže buď $a = c$ nebo $a = -c$, stejně tak $b = d$ nebo $b = -d$. Pokud by u obou nastala první (resp. druhá) možnost, po odečtení (resp. sečtení) řádků v X nám vyjde nulový řádek, takže by X nebylo regulární. Ze zbylých dvou možností si můžeme (TODO rozmyslet si proč) vybrat. Tedy BÚNO $a = c$ a $b = -d$, tj. $\alpha = 3$ a $\beta = -1$.

Následně snadno dopočítáme inverzní matici $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2b} & \frac{-1}{2b} \end{pmatrix}$, tj. hledaná rovnice bude ($a \neq 0 \neq b$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2b} & \frac{-1}{2b} \end{pmatrix} = XDX^{-1}.$$

Mocninu matice A vypočítáme podle tohoto jednoduše, protože při rozepsání na násobení se nám mnoho $x^{-1}X$ vynásobí na I a diagonální matice se umocňuje jednoduše. Výsledkem tedy bude

$$A^n = AAAA \dots A = XDX^{-1}XDX^{-1} \dots XDX^{-1} = XDIDI \dots IDX^{-1} = XD^nX^{-1},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2b} & \frac{-1}{2b} \end{pmatrix},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n + (-1)^n}{2} & \frac{3^n - (-1)^n}{2} \\ -\frac{3^n + (-1)^n}{2} & \frac{3^n + (-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$