Příklad (2.3)
Nechť S je podrozdělení trojúhelníku T v rovině. Korektní obarvení vrcholů S přiřazuje jednu ze tří barev (modrá, červená a zelená) každému vrcholu z S tak, že všechny tři barvy jsou použité na vrcholech z T. Navíc každý vrchol z S ležící na hraně z T musí mít jednu z barev, kterou má nějaký vrchol této hrany ležící v T. Dokažte, že v každém korektním obarvení S existuje trojúhelníková stěna v S jejíž vrcholy jsou obarveny všemi třemi barvami.

Lemma 0.1

Mějme konečnou posloupnost dvou barev (tj. funkci f z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ do $\{R, G\}$). Víme, že začíná jednou barvou (tj. $f(1) = R$) a končí druhou (tj. $f(n) = G$). Potom existuje místo, kde se sousední prvky posloupnosti liší (tj. ex. i z $\{1, \ldots, n-1\}$, že $f(i) = R$ a $f(i+1) = G$ nebo $f(i) = G$ a $f(i+1) = R$).

Důkaz
Zvolím poslední prvek první barvy (tj. $i = max\{j|f(j) = R\}$). Potom nutně není poslední (tj. $i < n$), neboť poslední prvek je druhé barvy, tedy nutně další prvek je druhé barvy a toto je hledané místo (tj. $f(i) = R$ a $f(i+1) = G$). □

Důkaz
Vybereme jeden z vrcholů T (je jedno který), BÚNO je modrý, označme si ho V_B. Nyní vezměme z S pouze modré vrcholy a označme K_B komponentu souvislosti obsahující V_B. Potom vezměme z S pouze vrcholy, které nepatří do K_B, a označme K_{RG} komponentu souvislosti obsahující zbylé dva vrcholy z T (musí obsahovat oba zároveň, neboť na hraně mezi nimi není modrý vrchol).

Nyní vytvoříme posloupnost vrcholů v K_{RG} „po rozhraní s K_B“: Na hraně v T z V_B do jednoho z dalších vrcholů T, BÚNO červeného (tedy V_R), najdeme bod z K_{RG} nejvzdálenější od V_B, označíme ho V_1'. Jeho soused (značme V_1) na stejné hraně vzdálenější od V_B musí patřit do K_{RB} (neboť všechny vrcholy počínaje tímto sousedem a konče ve V_R (ten je v K_{RG} z definice) nejsou v K_B a sousedí spolu, tedy jsou v K_{RG}).

Máme hranu V_1'—V_1, tedy musí být součástí nějakého trojúhelníku. Tedy existuje V takové, že V—V_1'—V_1 je trojúhelník. Vzhledem k tomu, že z V vede hrana do K_B i K_{RG}, tak musí být v jedné z těchto množin (buď je modrý a pak je v K_B, nebo není modrý, a pak je v K_{RG} z definic těchto množin). Pokud je v K_B, tak ho označme V_2', pokud je v K_{RG}, tak ho označme V_2.

Nyní indukcí: máme hranu V_m'—V_n. Jeden trojúhelník s ní sousedící jsme již řešili. Pokud existuje druhý, tak postupujeme jako v prvním případě (přidáme třetí vrchol jako V_{m+1}' nebo V_{n+1}). Pokud ne, tak jsme „dorazili“ na nějakou hranu T. Hrana mezi červeným a zeleným to být nemůže, protože V' jsou modré. Hrana mezi modrým a červeným to být také nemůže, protože pak jsme rozřízly posloupností $\{V_i\}$ množinu K_B, takže by to nebyla komponenta. Tím pádem je to hrana mezi modrým a zeleným.

Posloupnost $\{V_i\}$ tedy začíná červeným vrcholem (je na hraně T mezi modrým a červeným) a končí zeleným. Tedy existuje i takové, že V_i je červené a V_{i+1} zelené. Navíc existuje j tak, že V_j'—V_i je hrana, při které jsme přidali V_{i+1}, tedy V_{i+1}—V_j'—V_i je trojúhelník a má vrcholy 3 různých barev. $\square$