Organizační úvod

Poznámka
Podmínkou zápočtu je splnění 1 domácí práce a 1 písemného testu. Není potřeba docházka.

Bude moodle (přístup dají cvičící). Budou tam poznámky k přednášce, cvičebnice a bude se tam odevzdávat domácí práce.

Je dobré umět míru.

1 Úvod

Poznámka
Pravděpodobnost popisuje modely popisující náhodné jevy.

Statistika se pak snaží popsat reálné věci za pomocí těchto modelů.

Poznámka (Historie)
Klasická pravděpodobnost navazuje na dílo Kolmogorova, který popisoval axiomatickou pravděpodobnost.

2 Pravděpodobnostní prostor

Definice 2.1 (Pravděpodobnostní prostor, pravděpodobnost)

Pravděpodobnostní prostor je trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde Ω je neprázdná množina, $\mathcal{A}$ je σ-algebra a P je pravděpodobnost.

Pravděpodobnost P je množinová funkce $\mathcal{A} \to [0,1]$ splňující:

- $P(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$, (nezápornost)
- $P(\Omega) = 1$, (normovanost)
- jsou-li $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, pak $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. ($\sigma$-aditivita)

Poznámka (Interpretace)
Ω se často nazývá stavový prostor a obsahuje všechny „realizace náhody“ neboli elementární jevy, tj. všechny možnosti, o kterých uvažuji.

$\mathcal{A}$ je σ-algebra náhodných jevů. P pak obsahuje veškerou informaci o té dané náhodné situaci.

Pokud nastal $\omega \in A \in \mathcal{A}$ ($\omega \in \Omega$), pak nastal jev A.

Definice 2.2 (Klasický pravděpodobnostní prostor, diskrétní pravděpodobnostní prostor, spojitý pravděpodobnostní prostor, indikátor)

Ω konečná, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $P(\{a\}) = \frac{1}{n}$ $\forall a \in \Omega$ je klasický pravděpodobnostní prostor.

Ω spočetná (včetně konečná), $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $p : \Omega \to [0, 1]$ je taková, že $p(\omega) \geq 0$ $\forall \omega \in \Omega$ a $\sum_{\omega \in \Omega} = 1$. Položíme $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ nazýváme diskrétní pravděpodobnostní prostor.

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$) a $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ měřitelná, že $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$, pak definujeme $P(B) = \int_B g(x)dx$, $b \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}$ je spojitý pravděpodobnostní prostor. Speciálním případem $g(x) = 1_{[0,1]}(x)$ je pak tzv. indikátor.

Definice 2.3 (Jev jistý, jev nemožný, podjev, zároveň, alespoň jeden, jev opačný, neslučitelné jevy)

Ω je jev jistý, $\emptyset$ je jev nemožný, $A \subset B$ znamená „A je podjev B“, $A \cap B$ znamená „nastal A a zároveň B“, $A \cup B$ znamená „nastal A nebo B“, A^C je jev opačný, $A \cap B = \emptyset$ jsou neslučitelné jevy.

Věta 2.1

Buďte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravděpodobnostní prostor a $A, B, A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in \mathbb{N}$) náhodné jevy. Pak platí:

- $P(\emptyset) = 0$;
- *P je konečně aditivní;*
- $P(A^C) = 1 - P(A)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$; *(monotonie)*
- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \implies P\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_i)$; *(spojitost)*
- $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \implies P\left(\bigcap_{i=1}^\infty A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_i)$; *(spojitost)*
- $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \wedge \bigcap_{i=1}^\infty A_i = \emptyset \implies \lim_{n\to\infty} P(A_i) = 0$; *(spojitost v nule)*
- $B \subset A \implies P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

Důkaz
Vše z míry. Pravdědobnost je konečná, předposlední bod vyplývá z předchozího. □

Poznámka
28. února bude v 17:20 náhradní přednáška za poslední přednášku.

Věta 2.2 (Princip inkluze a exkluze)

Buď $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravděpodobnostní prostor. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každá $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, platí:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

Důkaz
Nebude, v podstatě byl v diskrétce. □

3 Podmíněná pravděpodobnost

Definice 3.1 (Podmíněná pravděpodobnost)

Buďte $A, B \in \mathcal{A}$ takové, že $P(B) > 0$. Definujeme $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ a nazýváme ji podmíněnou pravděpodobností jevu A za podmínky (jevu) B.

Věta 3.1

Buď $B \in \mathcal{A}$ takové, že $P(B) > 0$. Pak zobrazení $P(.|B) : \mathcal{A} \to [0,1]$ splňuje definici pravděpodobnosti.

Důkaz
Ověříme po bodech: zřejmě $P(A|B) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$, $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$ a σ-aditivita plyne ze σ-aditivity $P(. \cap B)$ a deMorganových pravidel ($B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B$), $P(B)^{-1}$ se prostě z obou stran vytkne. □

Pozor
Podmíněná pravděpodobnost nám neříká nic o příčinné souvislosti.

Pozorování (O podmíněné pravděpodobnosti)
Buďte $A, B, C \in \mathcal{A}$ a pravděpodobnost „správných“ jevů nenulová. Pak:

- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$,

- $B \subset A \implies P(A|B) = 1$,
- $A \cap B = \emptyset \implies P(A|B) = 0$,
- $P(A|\ \Omega) = P(A)$,
- pokud $P(\{\omega\}) > 0$, pak $\forall A \in \mathcal{A}$ platí $P(A|\ \{\omega\}) = \delta_\omega(A)$.

Důkaz
Triviální (buď z definice, nebo z toho, že je to pravděpodobnost). □

Pozor (Neplatí!)
$P(A|B \cup C) = P(A|B) + P(A|C)$, ani v případě, že $A \cap B = \emptyset$.

Věta 3.2 (O násobení pravděpodobností)

Buďte $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Pak

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \cdot \ldots \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1).$$

Důkaz
Z $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ plyne, že $P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) > 0$ pro $k \in [n-1]$, pomocí monotonie pravděpodobnosti. Tedy výraz je dobře definován.

Dokážeme indukcí: Pro $n = 2$ platí $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$ z definice. Z $n-1$ na n: $(B := A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(B \cap A_n) \overset{\text{def}}{=} P(A|B) \cdot P(B) \overset{\text{IP}}{=}$$

$$= P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \cdot \ldots \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1).$$

□

Věta 3.3 (O celkové pravděpodobnosti)

Buďte $A, B_1, B_2, \ldots$ náhodné jevy takové, že $P(\bigcup_n B_n) = 1$ a $B_i \cap B_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$ a $P(B_i) > 0$ $\forall i$. Potom $P(A) = \sum_n P(A|B_n) \cdot P(B_n)$.

Důkaz
Víme $P\left(\left(\bigcup_n B_n\right)^c\right) = 0$, a tedy $P(A) = P\left(A \cap \bigcup_n B_n\right) + P\left(A \cap \left(\bigcup_n B_n\right)\right) = P\left(A \cap \bigcup_n B_n\right)$, protože P je konečně-aditivní a platí monotonie. Dle de Morganových pravidel (a toho, že průnik s další množinou zachovává disjunktnost):

$$P(A) = P\left(\bigcup_n (A \cap B_n)\right) = \sum_n P(A \cap B_n) = \sum_n P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$

□

Věta 3.4 (Bayesova)

Za předpokladů věty o celkové pravděpodobnosti a $P(A) > 0$, *platí* $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_n P(A|B_n)P(B_n)}$.

Důkaz
Snadný z definice podmíněné pravděpodobnosti a věty o celkové pravděpodobnosti. □

Příklad (Pólyovo urnové schéma)
Máme v urně n koulí k různých barev. Náhodně taháme z urny. Po vytažení koule do urny vytaženou kouli vrátíme a s ní i Δ (pevný parametr) koulí stejné barvy.

Podle volby Δ máme 2 základní schémata: $\Delta = -1$ (tahání bez vracení) a $\Delta = 0$ (tahání s vracením).

Definice 3.2 (Nezávislé jevy)

Náhodné jevy A a B jsou nezávislé, pokud platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Pozor
Zase to nemá nic do činění s kauzalitou.

Věta 3.5

Jsou-li dva jevy A *a* B *nezávislé, pak jsou i jevy* A *a* B^c *nezávislé.*

Je-li navíc $P(B) > 0$, *pak* $P(A|B) = P(A)$.

Důkaz

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B).$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

□

Definice 3.3 (Vzájemná nezávislost)

Buď $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ systém náhodných jevů. Pak říkáme, že tyto jevy jsou (vzájemně) nezávislé, pokud pro každou konečnou množinu $I \subset \Lambda$ (dále $I \in \mathcal{F}(\Lambda)$) platí $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Věta 3.6

Buď $C = \{B_1, \ldots, B_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, systém nezávislých jevů. Nahradíme-li libovolnou podmnožinu těchto jevů jejich doplňky, dostaneme opět systém nezávislých jevů

Důkaz

Indukcí podle velikosti nahrazované množiny. (Použije se předchozí věta.) □

Věta 3.7

Jsou-li jevy $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ vzájemně nezávislé a $P(B_1 \cap \ldots \cap B_m) > 0$, pak

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n | B_1 \cap \ldots \cap B_m) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Důkaz

Snadný. □

4 Náhodné veličiny

Definice 4.1 (Náhodný element)

Buďte $(\Omega, \mathcal{A})$ a $(\Omega', \mathcal{A}')$ stavové prostory. Pak každé měřitelné zobrazení $X : \Omega \to \Omega'$ nazveme náhodný element z Ω'.

Definice 4.2 (Náhodná veličina)

Měřitelné zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nazveme (reálnou) náhodnou veličinou.

Definice 4.3 (Značení)

Místo $\{\omega \in \Omega |\ X(\omega) \leq a\}$ píšeme $\{X \leq a\}$, místo $P(\{X \leq a\})$ píšeme $P(X \leq a)$.

Definice 4.4

Buď X náhodná veličina. $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ značíme $\sigma(X)$ a nazýváme σ-algebrou náhodných jevů generovaných náhodnou veličinou X (σ-algebra indukovaná X).

Definice 4.5 (Rozdělení náhodné veličiny)

Rozdělením náhodné veličiny $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ rozumíme indukovanou pravděpodobnostní míru P_X na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ definovanou jako

$$P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B)), \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Poznámka (A důkaz, že je to pravděpodobnostní míra)
P_X je obraz míry P v zobrazení X.

Věta 4.1 (O přenosu integrace pro P_X)

Buď X náhodná veličina a buď h měřitelná funkce $(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Pak platí

$$\int_\Omega h(X(\omega))dP(\omega) = \int_\mathbb{R} h(x)dP_X(x),$$

pokud existuje alespoň jedna strana.

Důkaz
Speciální případ věty o obrazu míry z TMI1. □

Definice 4.6 (Hustota náhodné veličiny)

Buď X náhodná veličina, P_X její rozdělení a μ σ-konečná míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ taková, že $P_X \ll \mu$. Potom $f(x) = \frac{dP_X}{d\mu}(x)$ se nazývá hustota náhodné veličiny X vzhledem k míře μ.

Poznámka
$f(x)$ je určena jednoznačně μ-skoro všude. Pokud pro $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ měřitelnou platí

$$\int_\mathbb{R} |g(x)|dP_X(x) < \infty \qquad (\vee g(x) \geq 0 \forall x),$$

pak $\int_\mathbb{R} g(x)dP_X(x) = \int_\mathbb{R} g(x)f(x)d\mu(x)$.

Věta 4.2

Buď X náhodná veličina, pak platí následující rovnosti:

$$P(X \in B) := P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) = \int_\Omega 1_B(X(\omega)) dP(\omega) = \int_\mathbb{R} 1_B(x) dP_X(x) = \int_B dP_X(x) = P_X(B) =$$

$$= \int_\mathbb{R} 1_B(x) dP_X(x) = \int_\mathbb{R} 1_B(x) f(x) d\mu(x) = \int_B f(x) d\mu(x).$$

Důkaz

Je to jen sesypání faktů, které už známe. □

Definice 4.7 (Distribuční funkce)

Mějme náhodnou veličinu $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Funkci $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definovanou jako $F_X(x) = P(X \leq x)$ nazveme distribuční funkce náhodné veličiny X.

Poznámka

Definice se shoduje s distribuční funkcí z TMI1. (A tedy platí věta o vlastnostech distribuční funkce, s tím, že dokonce $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.)

Věta 4.3

Buď $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující vlastnosti distribuční funkce a $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$. Pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a náhodná veličina $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ taková, že $F_X = F$.

Důkaz

Z TMI1 víme, že existuje Lebesgueova-Stieltjesova míra μ, jejíž distribuční funkce je F. Tj. $\mu((-\infty, a]) = F(a)$. Teď chybí jen dodefinovat $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a X. Položíme $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ a $X = \mathrm{id}_\mathbb{R}$. □

Definice 4.8 (Názvosloví: diskrétní náhodná veličina, absolutně spojitá veličina)

Mějme diskrétní náhodnou veličinu $P_X \equiv \mu_d$, tj. existuje nejvýše spočetná $\{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}$ a $\{p_i\}_{i \in I} \subset (0,1]$ takových, že $\sum_{i \in I} p_i = 1$ a platí $P_X = \sum_{i \in I} p_i \delta_{x_i}$.

Potom nutně $F_X(x) = \sum_{i \in I} p_i 1_{[x,\infty)}(x)$ a také platí, že $P_X \ll \nu$, kde ν je čítací míra na $\{x_i\}_{i \in I}$.

(Absolutně) spojitá náhodná veličina je taková, že $P_X = \mu_a \ll \lambda$, takže $P_X(B) \int_B f(x) d\mu$.

Definice 4.9 (Kvantilová funkce)

Buď F_X distribuční funkce náhodné veličiny X. Funkce $F_X^{-1}(u) = \int \{x | F_X(x) \geq u\}$, $u \in (0,1)$ se nazývá kvantilová funkce náhodné veličiny X.

Poznámka
Bude potřeba později. Teď jen: Je neklesající a zleva spojitá. Lze z ní jednoznačně odvodit F_X.

Pozor
Kvantilová funkce obecně není inverzní funkcí k F_X, protože inverzní funkce nemusí existovat. Ale pro F_X rostoucí a spojitou je F_X^{-1} inverzní funkcí k F_X.

4.1 Střední hodnota, rozptyl a momenty náhodné veličiny

Definice 4.10 (Střední hodnota)

Střední hodnota náhodné veličiny X je číslo $\mathbb{E}X$ dané výrazem $\mathbb{E}\,X = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$, pokud má integrál smysl.

Definice 4.11 (Medián)

Medián rozdělení náhodné veličiny X je číslo $q_{\frac{1}{2}}$ splňující $P(X \leq q_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}$ a $P(X \geq q_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}$.

Věta 4.4

Buď X náhodná veličina a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Pak $g(X)$ je také náhodná veličina a $\mathbb{E}g(X) = \int_\mathbb{R} g(x)dP_X(x) = \int_\mathbb{R} g(x)dF_X(x)$, pokud alespoň jeden z výrazů existuje.

Důkaz
Složení 2 měřitelných funkcí je měřitelné, tj. $g(X)$ je opravdu náhodná veličina.

$$\mathbb{E}g(X) = \int_\Omega g(X(\omega)) = dP(\omega) = \int_\mathbb{R} g(x)dP_X(x).$$

Druhá rovnost plyne ze vztahu mezi P_X a její distribuční funkcí. □

Věta 4.5 (Základní vlastnosti $\mathbb{E}X$)

Buďte X, Y náhodné veličiny na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak platí

$$\mathbb{E}(a + bX) = a + b\mathbb{E}\,X, \qquad X \in L^1, a, b \in \mathbb{R},$$

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y, \qquad X, Y \in L^1,$$

$$P(X \geq 0) = 1 \implies \mathbb{E}X \geq 0, \qquad (\textit{obecněji } P(X \in [a, b]) = 1 \implies \mathbb{E}X \in [a, b]),$$

$$X \in L^1 \implies |X| \in L^1,$$

$$X \leq Y, P\textit{-skoro všude} \implies \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y (\textit{pokud existují}).$$

Důkaz
Snadný, aplikace míry. $\square$

Definice 4.12 (Názvosloví: P-skoro jistě)

P-skoro jistě znamená P-skoro všude.

Definice 4.13 ($n - t$ moment)

n-tý moment náhodné veličiny X definujeme jako $\mathbb{E}X^n$, $n \in \mathbb{N}$.

n-tý absolutní moment náhodné veličiny X definujeme jako $\mathbb{E}|X|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

n-tý centrální moment náhodné veličiny X definujeme jako $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^n$, $n \in \mathbb{N}$, pokud $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}$.

n-tý absolutní centrální moment náhodné veličiny X definujeme jako $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^n$, $n \in \mathbb{N}$, pokud $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}$.

Poznámka
1-ní moment je $\mathbb{E}X$. První centrální moment je 0.

Definice 4.14 (Rozptyl)

Rozptyl náhodné veličiny X je definován jako $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$. Značí se $\operatorname{var} X$.

Poznámka
Rozptyl je střední čtvercová odchylka X od $\mathbb{E}X$. $\operatorname{var} X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \geq 0$. $\operatorname{var} X = 0$ právě tehdy, když $X = \mathbb{E}X$ skoro jistě.

Věta 4.6 (Základní vlastnosti rozptylu)

$$\operatorname{var}(a + bX) = b^2 \operatorname{var} X, \qquad a, b \in \mathbb{R} \wedge X \in L^2.$$

Důkaz

$$\operatorname{var}(a+bX) = \mathbb{E}(a+bX-\mathbb{E}(a+bX))^2 = \mathbb{E}(a+bX-a-b\mathbb{E}^X) = \mathbb{E}(bX-b\mathbb{E}X) = \mathbb{E}(b(X-\mathbb{E}X))^2 = b^2\mathbb{E}(X-$$

$\square$

Věta 4.7 (Čebyševova nerovnost)

Buď $X \in L^1$ náhodná veličina. Pak $P(|X - \mathbb{E}X| \geq a) \leq \frac{\operatorname{var} X}{a^2}$, $\forall a > 0$.

Důkaz
Viz TMI1. □

Definice 4.15 (Markovova nerovnost)

Buď $X \in L^n$, $n \in \mathbb{N}$, náhodná veličina. Pak $P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}|X|^n}{a^n}$, $\forall a > 0$.

Důkaz
Obdobně Čebyševově větě. □

Věta 4.8 (Nerovnost mezi L^p normami na pravděpodobnostních prostorech)

Buď X náhodná veličina, $0 < \alpha < \beta \in \mathbb{R}$ a $\mathbb{E}|X|^\beta < \infty$. Pak platí $\sqrt[\alpha]{\mathbb{E}|X|^\alpha} \leq \sqrt[\beta]{\mathbb{E}|X|^\beta}$, a speciálně tedy platí $\mathbb{E}|X| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2}$.

Důkaz

$$\mathbb{E}|X|^\alpha = \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha dP_X(x) = \int_{\mathbb{E}} |x|^\alpha \cdot 1 dP_X(x) \overset{\text{Hölder na } p = \frac{\beta}{\alpha}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^\beta dP_X(x)\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} 1^q dP_X(x)\right)^{\frac{1}{q}} = \ldots \cdot 1.$$

(Integrál napravo je konečný z předpokladů této věty, tedy splňujeme předpoklady Höldera.) Odmocněním α dostáváme přesně chtěnou nerovnost. □

Například (Absolutně spojitá rozdělení)
Rovnoměrné rozdělení intervalu $[a, b]$, $a < b \in \mathbb{R}$ značíme $R([a, b])$ a jeho hustota je až na konstantu Lebesgueova míra: $f_X(x) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(x)$.

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 1, & t \geq b. \end{cases} \qquad \mathbb{E}X = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}, \operatorname{var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ značíme $Exp(\lambda)$. $P(X > t) = e^{-t\lambda}$, $t > 0$. $F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pro $t \geq 0$ a 0 pro $t \leq 0$. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ a $f_X(x) = 0$ jinak. $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$, $\operatorname{var} X = \frac{1}{\lambda^2}$.

Poznámka
Exponenciální rozdělení má vlastnost ztráty paměti, tedy že $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$, $s, t > 0$.

Normální (Gaussovo) rozdělení: Normované $N(0, 1)$ je $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. $F_X(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Tyto F_X a f_X se často značí Φ a φ. $\mathbb{E}X = 0$ ($x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ je lichá funkce), $\operatorname{var} X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 = 1$. $\mathbb{E}X^{2k+1} = 0$.

Obecné $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ má $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Tvrzení 4.9

Buď X nezáporná (tj. $P(X \geq 0) = 1$) absolutně spojitá náhodná veličina, která splňuje $P(X > s+t | X > s) = P(X > \ t)$, $\forall s, t > 0$, pak $X \sim Exp$.

Důkaz
Dělat nebudeme. □

Věta 4.10

$X \sim N(0,1)$ a $Y := \sigma X + \ \mu$, pro $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Pak $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Důkaz
TODO!!! □

Důsledek

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\sigma Z + x \leq t) = P\left(Z \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right).$$

Důsledek

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(\sigma Z + \mu) = \mu + \sigma \mathbb{E}Z = \mu + 0 = \mu.$$
$$\operatorname{var} Y = \operatorname{var}(\sigma Z + \mu) = \sigma^2 \cdot \operatorname{var} Z = \sigma^2.$$

Věta 4.11 (Rozdělení funkce náhodné veličiny)

Buď X náhodná veličina s distribuční funkcí F_X, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Pak $Y = g(X)$ je náhodná veličina s distribuční funkcí $F_Y(y) = \int_{\{x | g(x) \leq Y\}} dF_X(x)$.

Důkaz

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq Y) = P_X(\{x | g(x) \leq y\}) = \int_{\{x|g(x) \leq y\}} dF_X(x).$$

□

5 Náhodné vektory

Definice 5.1 (Náhodný vektor)

Měřitelné zobrazení $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, nazveme náhodným vektorem.

Definice 5.2 (Rozdělení náhodného vektoru)

Rozdělením náhodného vektoru $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ nazveme indukovanou pravděpodobnostní míru $P_\mathbf{X}$ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ definovanou jako $P_\mathcal{X}(B) = P(\{\omega \in \Omega | \mathcal{X}(\omega) \in B\})$, $B \in \mathcal{B}^n$.

Definice 5.3 ((Sdružená) distribuční funkce)

(Sdružená) distribuční funkce náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je definována jako

$$F_\mathbf{X}(\mathbf{x}) = P(\bigcup_{i=1}^{b}(X_i \leq x_i)), \qquad \forall \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Poznámka

$F_\mathbf{X}$ jednoznačně určuje $P_\mathbf{X}$.

Věta 5.1 (O marginální distribuční funkci)

Buď $\mathbf{X}$ n-rozměrný náhodný vektor s distribuční funkcí $F_\mathbf{X}$. Pak pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{x_n \to \infty} F_\mathbf{x}(x_1, \ldots, x_n) = F_{(X_1, \ldots, X_{n-1})^T}(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

kde $F_{(X_1, \ldots, X_{n-1})^T}$ je distribuční funkce náhodného vektoru $(X_1, \ldots, X_{n-1})^T$.

Důkaz

Použijeme Heineho větu: Nechť máme posloupnost čísel $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ takových, že $y_k \to \infty$. Označme $B = \bigcup_{i=1}^{n-1} \{X_i \leq x_i\}$. $B_k = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \{X_i \leq x_i\}\right) \cap \{X_n \leq y_k\}$, $D_k = \left(\bigcup_{l=k}^\infty B_l^c\right)^c$, $k \in \mathbb{N}$. Zřejmě $D_k \subseteq B_k \subset B = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ a $D_k \nearrow B$. Ze spojitosti P máme $\lim_{k\to\infty} P(D_k) = P(B)$. Nakonec z monotonie P máme $P(D_k) \leq P(B_k) \leq P(B)$, tedy ze dvou strážníků $\lim_{k\to\infty} P(B_k) = P(B)$. □

Poznámka

Pro každou permutaci $\pi \in \mathcal{S}_n$ platí

$$F_\mathbf{X}(x_1, \ldots, x_n) = F_{(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)})^T}(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}).$$

Rozdělení $P_\mathbf{Y}$ podvektoru $\mathbf{Y} = (X_j)_{j \in J}$, $J \subset \{1, \ldots, n\} = I$ se nazývá marginální rozdělení (a distribuční funkce se nazývá marginální distribuční funkce).

Rozdělení $(X_1, \ldots, X_n)$ určuje rozdělení $X_1, \ldots, X_n$, ale ne naopak.

Definice 5.4 (Značení)

Mějme dva body $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a buď $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $c_i \in \{a_i, b_i\}, \forall i \in [n]$. Potom

$$\Delta_{n,k} = \{c | c_i = a_i \text{ právě pro } k \text{ indexů}\}, \qquad k \in [n]_0.$$

Věta 5.2 (O vlastnostech sdružené distribuční funkce)

Distribuční funkce náhodného vektoru $\mathbf{X}$ *splňuje:*

1. $\lim_{x_i \to \infty \forall i} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 1$;
2. $\forall j \forall x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n : \lim_{x_j \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0$;
3. $F_{\mathbf{X}}$ *je zprava spojitá v každé proměnné;*
4. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $a_i < b_i$, $\forall i \in [n]$ *platí* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\mathbf{c} \in \Delta_{n,k}} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{c}) \geq 0$. *(„Monotonie".)*

Důkaz

1. Uvědomme si, že $x_i \to \infty, \forall i \in [n] \Leftrightarrow \min_{i \in [n]} x_i \to \infty$. Z monotonie pravděpodobnosti P máme $1 \geq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \geq F_{\mathbf{X}}(\min_i x_i \cdot (1, \dots, 1))$. Stačí ukázat, že pro funkci $H(x) := F_{\mathbf{X}}(x \cdot (1, \dots, 1))$ platí $\lim_{x \to +\infty} H(x) = 1$. $H(x)$ je neklesající funkce x (z monotonie pravděpodobnosti P a definice distribuční funkce) a $H(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Takže musí $\exists \lim_{x \to \infty} \leq 1$ a nutně bude i rovna limitě $\lim_{\mathbb{N} \ni k \to \infty}(k)$. Označme $B_k = (-\infty, k \cdot (1, \dots, 1)]$. Platí $B_k \nearrow \mathbb{R}^n$, takže ze spojitosti pravděpodobnosti $H(k) = P_{\mathbf{X}}(B_k) \to 1$.

2. 3. analogicky (za domácí úkol).

4. (jen pro $n = 2$, pro $n > 2$ je důkaz zbytečně technický):

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\mathbf{c} \in \Delta_{n,k}} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{c}) = F_{\mathbf{X}}(b_1, b_2) - [F_{\mathbf{X}}(b_1, a_2) + F_{\mathbf{x}}(a_1, b_2)] + F_{\mathbf{X}}(a_1, a_2) =$$

$$= [F_{\mathbf{X}}(b_1, b_2) - F_{\mathbf{X}}(b_1, a_2)] - [F_{\mathbf{X}}(a_1, b_2) - F_{\mathbf{x}}(a_1, a_2)] =$$
$$= P(X_1 \leq b_1 \wedge a_2 < X_2 \leq b_2) - P(X_1 \leq a_1 \wedge a_2 < X_2 \leq b_2) =$$
$$= P(a_1 < X_1 \leq b_1 \wedge a_2 < X_2 \leq b_2).$$

□

Poznámka

Pro každý interval $(\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ v $\mathbf{R}^n$ definujeme $\mu_F((\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = 4.$ z předchozího pro F splňující tvrzení předchozí věty. Potom lze rozšířit μ_F na konečnou borelovskou míru na $\mathbb{R}^n$ a té se říká Lebesgueova-Stieltjesova míra příslušná F.

Pokud $F = F_{\mathbf{X}}$ od $\mathbf{X}$ s rozdělením $P_{\mathbf{X}}$, pak nutně $\mu_F = P_{\mathbf{X}}$, neboť se rovnají na intervalech $\{(\mathbf{a}, \mathbf{b}] | \mathbf{a} < \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n\}$, což je systém uzavřený na konečné průniky generující $\mathcal{B}^n$.

Věta 5.3

Nechť F splňuje vlastnosti sdružené distribuční funkce. Pak $\exists$ pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a náhodný vektor $\mathbf{X}$ takový, že $F = F_{\mathbf{X}}$.

Důkaz

Vezměme $\Omega := \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}^n$, $P = \mu_F$ a $\mathbf{X} = \mathrm{id}$. Pak je $\mathbf{X}$ zřejmě měřitelné, tedy je to náhodný vektor. Navíc

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(\{\omega \in \Omega | \omega_i \leq x_i, \forall i \in [n]\}) = \mu_F((-\infty, \mathbf{x}]) = F(\mathbf{x}).$$

$\square$

Definice 5.5 (Diskrétní rozdělení)

Náhodný vektor $\mathbf{X}$ má diskrétní rozdělení, pokud $\exists$ (konečná nebo spočetná) množina $\{\mathbf{x}_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ a hodnoty $\{p_i\}_{i\in I}$ splňující $\forall i \in I : p_i \in (0, 1]$, $\sum_{i\in I} p_i = 1$, tak že $P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i) = p_i$.

Poznámka

Pak nutně $P_{\mathbf{X}} = \sum_{i\in I} p_i \delta_{\mathbf{x}_i}$.

Také zřejmě marginální rozdělení jsou též diskrétní.

Definice 5.6 ((Absolutně) spojité rozdělení)

Náhodný vektor $\mathbf{X}$ má (absolutně) spojité rozdělení, existuje-li nezáporná měřitelná funkce $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taková, že

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{(-\infty,x_1]} \int_{(-\infty,x_2]} \cdots \int_{(-\infty,x_n]} f_{\mathbf{x}}(t_1, \ldots, t_n) dt_n \ldots dt_1, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Poznámka

To nastává právě tehdy, když $P_{\mathbf{x}} \ll \lambda^n$. Potom $f_{\mathbf{x}} = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F_{\mathbf{x}}$ λ^n skoro všude.

Věta 5.4 (O hustotě $P_{\mathbf{X}}$ vzhledem k součinové referenční míře)

Buď $P_{\mathbf{X}}$ rozdělení n-rozměrného náhodného vektoru $\mathbf{X}$. Nechť $P_{\mathbf{X}} \ll \nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_n$ (součin σ-konečných měr na $\mathbb{R}$). Pak $P_{X_i} \ll \nu_i$, $\forall i \in [n]$, a existují nezáporné měřitelné funkce $f_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $f_{x_i} : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $i \in [n]$ takové, že

$$P_{\mathbf{X}}((-\infty, \mathbf{x}]) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{(-\infty,x_1]} \cdots \int_{(-\infty,x_n]} f_{\mathbf{x}}(t_1, \ldots, t_n) d\nu_n(t_n) \ldots d\nu_1(t_1), \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$P_{\mathbf{X}}(B) = \int_B f_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) d(\nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_n)(\mathbf{t}), \qquad \forall B \in \mathcal{B}^n.$$

Navíc pro každé $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in [n]$ platí

$$F_{X_i}(x_i) = \int_{(-\infty, x_i]} f_{x_i}(t) d\nu_i(t),$$

kde $f_{X_i}(y_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{x}}(y_1, \ldots, y_n) d(\nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_{i-1} \otimes \nu_{i+1} \otimes \ldots \otimes \nu_n)(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ *pro* ν_i*-skoro všechna* $y_i \in \mathbb{R}$.

Důkaz

Snadný: existence a tvrzení o $f_{\mathbf{X}}$ plyne z Radon-Nikodymovy věty a přepis v 1. vzorci a tvrzení o f_i plyne z Fubiniovy věty a věty o marginální distribuční funkci. $\square$

6 Nezávislé náhodné veličiny

Definice 6.1 ((Vzájemně) nezávislé náhodné veličiny)

Buď $\{X_i\}_{i \in I}$ systém náhodných veličin na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde $I \neq \emptyset$ je libovolná indexová množina. $\{X_i\}_{i \in I}$ nazveme (vzájemně) nezávislé, pokud $\forall$ konečnou neprázdnou $J \subset I$, platí

$$P(\bigcap_{i \in J} \{X_i \in B_i\}) = \prod_{i \in J} P(X_i \in B_i), \qquad B_i \in \mathcal{B}, i \in J.$$

Poznámka

Pro nezávislé náhodné veličiny jsou jevy $(X_i \in B_i)$ nezávislé.

Věta 6.1 (O rozdělení vektoru s nezávislými složkami)

Buď $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ *náhodný vektro. Pak* $\{X_i\}_{i=1}^n$ *jsou nezávislé náhodné veličiny právě tehdy, když* $P_{\mathbf{X}} = P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_n}$.

Důkaz

„ $\Longleftarrow$ “ zřejmě. „ $\Longrightarrow$ “: $\forall B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ platí $P_{\mathbf{X}}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \prod_{i=1}^n P_{x_i}(B)$ plyne z definice nezávislosti, takže $P_{\mathbf{X}}$ se rovná součinové míře na měřitelných obdélnících $\{B_1 \times \ldots \times B_n | B_i \in \mathcal{B}\}$, ale tento systém je uzavřený na konečné průniky a generuje $\mathcal{B}^n$, tedy z věty o jednoznačnosti míry se $P_{\mathbf{X}}$ a $P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_n}$ rovnají na celém $\mathcal{B}^n$. $\square$

Věta 6.2 (O distribuční funkci náhodného vektoru s nezávislými složkami)

Za předpokladů předchozí věty platí, že $\{X_i\}_{i=1}^n$ *jsou vzájemně nezávislé právě tehdy, když* $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz
„ $\implies$ “ zřejmě neboť $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = P(\bigcup \ldots) = \prod P(X_i \in (-\infty, x_i]) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$.
„ $\impliedby$ “: Množiny $(-\infty, \ldots] \times \ldots$ tvoří systém uzavřený na konečné průniky a generující $\mathcal{B}^n$, tedy z rovnosti $P_{\mathbf{X}}$ a součinové míry na tomto systému už plyne rovnost dvou měr na $\mathcal{B}^n$ (pomocí věty o jednoznačnosti míry). □

Věta 6.3 (O hustotě vektoru s nezávislými složkami)

Buď $P_{\mathbf{X}}$ rozdělení n-rozměrného náhodného vektoru $\mathbf{X}$ splňující $P_{\mathbf{X}} \ll \nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_n$ (součin σ-konečných měr) a buď $f_{\mathbf{X}}$ hustota náhodného vektoru $\mathbf{X}$. Pak náhodné veličiny X_1, …, X_n jsou vzájemně nezávislé $\Leftrightarrow$ $f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$ pro $\nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_n$-skoro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, kde $f_{x_i} = \frac{dP_{X_i}}{d\nu_i}$, $i \in [n]$.

Důkaz
„ $\implies$ “: použijeme charakterizaci nezávislosti složek pomocí distribuční funkce:

$$\int_{(-\infty,\mathbf{x}]} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(t_i) d(\nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_n)(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(t_i) d\nu_n(t_n) \ldots d\nu_1(t_1) = \prod_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_i} f_{x_i}(t_i) d\nu_i(t_i) \prod_{i=}^{n}$$

Takže $f_{\mathbf{x}} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}$ $\nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_n$-skoro všude. „ $\impliedby$ “ dokážeme obdobně obráceným postupem. □

Věta 6.4

Buď $\{X_i\}_{i \in I}$ systém nezávislých náhodných veličin a $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i \in I$ měřitelné funkce. Pak $\{g_i(X_i)\}_{i \in I}$.

Důkaz
Dokážeme z definice: Buď $J \subset I$ konečná neprázdná

$$P(\bigcap_{i \in J} \{g_i(X_i) \in B_i\}) = P(\bigcap_{i \in J} \left\{X_i \in g_i^{-1}(B_i)\right\}) = \prod_{i \in J} P(X_i \in g_i^{-1}(B_i)) = \prod_{i \in J} P(g_i(x_i) \in B_i), \qquad \forall B_i \in$$

□

7 Momenty náhodného vektoru

Definice 7.1 (Notace: střední hodnota náhodného vektoru)

$$\mathbb{E}\mathbf{X} := (\mathbb{E}X_1, \ldots, \mathbb{E}X_n)^T.$$

Definice 7.2 (Kovariance, korelace)

Buďte X, Y náhodné veličiny na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak kovariance X a Y je definovaná jako $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]$. Korelace X a Y je definována jako $\operatorname{cor}(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var} X \cdot \ \operatorname{var} Y}}$, pokud $\operatorname{var} X \cdot \operatorname{var} Y > 0$.

Věta 7.1 (Hölderova nerovnost)

Buďte X_1, X_2 náhodné veličiny na stejném pravděpodobnostním prostoru a nechť $\mathbb{E}|X_1|^p < \infty$, $\mathbb{E}|X_2|^q < \infty$, $p, q > 1$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak $\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2| \leq (\mathbb{E}|X_1|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}|X_2|^q)^{\frac{1}{q}}$, a rovnost nastává, když $X_1 = c \cdot X_2$ skoro jistě.

Důkaz

MA3. □

Důsledek

$\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2| \leq \sqrt{\mathbb{E}X_1^2 \cdot \mathbb{E}X_2^2}$, takže $|\operatorname{cov}(X,Y)| \leq \sqrt{\operatorname{var} X \cdot \operatorname{var} Y}$ a $\operatorname{cor}(X,Y) \in [-1,1]$. Navíc $|\operatorname{cor}(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow X = aY + b$ skoro jistě pro nějaké $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Věta 7.2

Buďte náhodné veličiny X_1 a X_2 nezávislé a $\mathbb{E}|X_i| < \infty$, $i = 1, 2$. Pak $\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2| < \infty$ a platí $\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) = (\mathbb{E}X_1) \cdot (\mathbb{E}X_2)$.

Důkaz

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 \cdot x_2 dP_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 \cdot x_2 d\left(P_{X_1} \otimes P_{X_2}\right)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}} x_1 dP_{x_1} \cdot \int_{\mathbb{R}} x_2 dP_{x_2} = (\mathbb{E}X_1) \cdot (\mathbb{E}X_2),$$

z Fubiniovy věty, pokud $\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2| < \infty$. Uvažujme $\Phi_n(x_1, x_2) = |x_1| \cdot 1_{|x_1| \leq n} \cdot |x_2| 1_{|x_2 \leq n|}$. Pak $\mathbb{E}\Phi_n(X_1, X_2) =$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x_1| \cdot |x_2| 1_{|x_1| \geq n} \cdot 1_{|x_2| \leq n} dP_{X_1} \otimes dP_{X_2}(x_1, x_2) = \mathbb{E}\left(|X_1| 1_{\{X_1 \leq m\}}\right) \cdot \mathbb{E}\left(|X_2| 1_{\{|X_2| \leq n\}}\right) \leq \mathbb{E}|X_1| \cdot \mathbb{E}\ |X_2|.$$

Takže $\Phi_n(X_1, X_2) \nearrow |X_1, X_2|$ z Léviho věty $\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2|$ existuje a z poslední nerovnosti je $\mathbb{E}|X_1, X_2| \leq \mathbb{E}|X_1| \cdot \mathbb{E}|X_2|$. □

Věta 7.3 (P cov a var pro nezávislost náhodných veličin)

Buďte $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé náhodné veličiny, $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$, $\forall i \in [n]$. Pak $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$, $i \neq j$. $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \operatorname{var} X_i$.

Důkaz

$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j)] = \mathbb{E}X_iX_j - \mathbb{E}X_i(\mathbb{E}X_j) - (\mathbb{E}X_i)\mathbb{E}X_j + \mathbb{E}X_i + \mathbb{E}X_k = \mathbb{E}(X_iX_j) - (\mathbb{E}X$

z nezávislosti a předchozí věty.

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i (X_i - \mathbb{E}X_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \operatorname{var} X_i + 2\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n$$

□

Definice 7.3 (Nekorelované náhodné veličiny)

Náhodné veličiny X a Y s $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$ nazveme nekorelované.

Definice 7.4 (Varianční matice, korelační matice)

Varianční matice n-rozměrného náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je matice $n \times n$ s prvky $a_{ij} = \operatorname{cov}(X_i, X_j)$, $i, j \in [n]$, tj.

$$\operatorname{Var} \mathbf{X} = \mathbb{E}(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X})^T.$$

Korelační matice n-rozměrného náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je matice $n \times n$ s prvky $a_{ij} = \operatorname{cov}(X_i, X_j)$, $i, j \in [n]$.

Věta 7.4 (O vlastnostech varianční matice)

Buď $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ náhodný vektor takový, že $\forall i \in [n] : \mathbb{E}(X_i^2) < \infty$. Pak

1. $\operatorname{Var} \mathbf{X}$ *je symetrická a pozitivně semidefinitní;*
2. *pro libovolné $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ a matici B typu $m \times n$ je $\operatorname{Var}(\mathbf{a} + B\mathbf{X}) = B(\operatorname{Var} \mathbf{X})B^T$;*
3. $|\operatorname{cov}(X_i, X_j)| \le \sqrt{\operatorname{var}(X_i) \cdot \operatorname{var}(X_J)}$*, a rovnost nastává právě tehdy, když existují konstanty a, b, že $X_i = a + bX_j$ skoro jistě;*
4. *jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ vzájemně nezávislé, pak $\operatorname{Var} \mathbf{X}$ je diagonální;*
5. $\operatorname{Var} \mathbf{X}$ *je singulární $\Leftrightarrow$ existují $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, alespoň jedno nenulové, taková, že $\sum_{i=1}^n a_i X_i = k$ skoro jistě, kde k je nějaká konstanta.*

Důkaz

1. symetrická zřejmě, pro pozitivní semidefinitnost chceme dokázat, že $\mathbf{a}(\operatorname{Var}\mathbf{X})\mathbf{a}^T \geq 0$ (rozepíšeme jako v minulé větě):

$$\mathbf{a}(\operatorname{Var}\mathbf{X})\mathbf{a}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \operatorname{cov}(X_i, X_j) = \operatorname{var}(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) \geq 0.$$

Ve 2. snadně dokážeme $\mathbb{E}(B\mathbf{X}) = B\mathbb{E}\mathbf{X}$. Tedy

$$\operatorname{Var}(\mathbf{a}+ B\mathbf{X}) = \mathbb{E}(\mathbf{a}+B\mathbf{X}-\mathbb{E}(\mathbf{a}+B\mathbf{X}))(\mathbf{a}+B\mathbf{X}-\mathbb{E}(\mathbf{a}+B\mathbb{X}))^T = \mathbb{E}(B\mathbf{X}-\mathbb{E}(B\mathbf{X}))(B\mathbf{X}-\mathbb{E}(B\mathbf{X}))^T = \mathbb{E}(B($$

3. už jsme ukázali jako důsledek Hölderovy nerovnosti. Bod 4. je zřejmý z věty o kovarianci pro nezávislé náhodné veličiny.

5. $\operatorname{Var}\mathbf{X}$ je singulární $\Leftrightarrow \exists \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ tak, že $\mathbf{a}(\operatorname{Var}\mathbf{X})\mathbf{a}^T = 0$, ale $\mathbf{a}(\operatorname{Var}\mathbf{X})\mathbf{a}^T = \exists(\mathbf{aX} - \mathbb{E}\mathbf{aX})^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{aX} = \mathbb{E}\mathbf{aX}$ skoro jistě. $\square$

Věta 7.5 (O momentech výběrového průměru)

Buďte $X_1, \dots, X_n$ nezávislé (nebo jen nekorelované) náhodné veličiny a buďte $\mathbb{E}X_i = \mu$, $\operatorname{var} X_i = \sigma^2$, $i \in [n]$, kde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$. Pak pro $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ platí $\mathbb{E}\overline{X_n} = \mu$ a $\operatorname{var}\overline{X_n} = \frac{\sigma^2}{n}$.

Důkaz

Rozepsáním z linearity střední hodnoty a z věty o vlastnostech varianční matice bod 2. $\square$

8 Rozdělení transformovaného náhodného vektoru

Věta 8.1

Buďte X, Y nezávislé náhodné veličiny a $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ měřitelná. Pak náhodná veličina $U = \psi(X, Y)$ má distribuční funkci

$$G_U(u) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\{y|\psi(x,y)\leq u\}} dF_Y(y)dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\{y|\psi(x,y)\leq u\}} dP_Y(y)dP_X(x) =$$

$$G_U(u) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\{x|\psi(x,y)\leq u\}} dF_X(x)dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\{x|\psi(x,y)\leq u\}} dP_X(x)dP_Y(y), \qquad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Důkaz
Víme, že $\mathbb{E}U = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x,y) d(P_X \otimes P_Y)(x,y)$. Použijeme Fubiniovu větu a vzorec použijeme pro náhodnou veličinu $\tilde{U}(u) = 1_{(U \leq u)} = 1_{(\psi(X,Y) \leq u)}$. To nám dá

$$G_U(u) = P(U \leq u) = \mathbb{E}1_{(U \leq u)} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{(\psi(x,y) \leq u)} dP_Y(y) dP_X(x).$$

□

Věta 8.2 (O rozdělení součtu)

Buďte X, Y nezávislé náhodné veličiny. Pak náhodná veličina $U = X + Y$ má distribuční funkci

$$F_U(u) = \int_{\mathbb{R}} F_x(u-y) dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_Y(u-x) dF_X(x), \qquad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Důkaz
Dosazením do předchozí věty. □

Definice 8.1 (Konvoluce)

Buď $\psi(x,y) = x + y$. Pak $\psi(P_X \otimes P_Y)$ se nazývá konvoluce pravděpodobnostních rozdělení P_X a P_Y. Buďte F_X a F_Y distribuční funkce. Pak F_U definovaná jako $F_U(u) = \int_{\mathbb{R}} F_X(u - y) dF_y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_y(u-x) dF_X(x)$ se nazývá konvoluce distribučních funkcí. Značíme $P_X * P_Y$, resp. $F_X * F_Y$.

Důsledek (Věty o rozdělení součtu nezávislých náhodných veličin)
Buďte X, Y nezávislé náhodné veličiny a buďte obě absolutně spojité. Pak $U = X + Y$ je také absolutně spojitá s hustotou $f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_X(u-y) dy = \int_{\mathbb{R}} f_Y(u-x) f_X(x) dx$, $u \in \mathbb{R}$.

Důkaz
Dosazením. □

Poznámka
Pro ne-nezávislá X, Y lze snadno odvodit analogický vzorec (s jinou než součinovou mírou).

Věta 8.3

Buďte nezávislé náhodné veličiny X a Y čítací (tj. $P(X \in \mathbb{N}_0) = 1 = P(Y \in \mathbb{N}_0)$). Pak $U = X + Y$ je také čítací náhodná veličina a $P(U = u) = \sum_{n=0}^{u} P(X = n) \cdot P(Y = u - n)$, $u \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz
Snadno z věty o úplné pravděpodobnosti. □

Věta 8.4 (O transformaci hustot)

Buď $\mathbf{X}$ *n-rozměrný absolutně spojitý náhodný vektor s hustotou* $f_{\mathbf{X}}$*. Buď* $S_{\mathbf{X}}$ *otevřená množina taková, že* $P(\mathbf{X} \in S_{\mathbf{X}}) = 1$*, a* $g : S_{\mathbf{X}} \to \mathbb{R}^n$ *difeomorfismus. Pak rozdělení náhodného vektoru* $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$ *má vzhledem k* λ^n *hustotu* $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(g^{-1}(\mathbf{y}) \cdot |\operatorname{Jac} g^{-1}(\mathbf{y})|!_{g(S_{\mathbf{X}})}(\mathbf{y})$*,* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*.*

Důkaz

Z věty o obrazu míry víme, že $P_{\mathbf{X}}(A) = P_{\mathbf{Y}}(g(A))$, $\forall A \in \mathcal{B}^n$, resp. $\forall g(A) \in \mathcal{B}^n$. Pokud existuje hustota $f_{\mathbf{Y}}$, pak je to také rovno $\int_{g(A)} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})d\mathbf{y}$. Z předpokladů máme, že g^{-1} je difeomorfismus na $g(S_{\mathbf{X}})$. Použijeme větu o substituci s volbami $h = f_{\mathbf{X}}$, $\varphi = g^{-1}$, $M = g(S_{\mathbf{x}})$ a $N = A$ a dostaneme

$$P_{\mathbf{X}}(A) = \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{g(A)} f_{\mathbf{X}}(g^{-1}(\mathbf{y}))|\operatorname{Jac} g^{-1}(\mathbf{y})|d\mathbf{y},$$

pro každou $A \subset g^{-1}(g(S_{\mathbf{X}})) = S_{\mathbf{X}}$, resp. $\forall g(A) \subset g(S_{\mathbf{X}})$. Levý integrál zřejmě existuje, tedy existuje i pravý. Z předpokladů víme $\int_{S_{\mathbf{X}}^c} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = P(X \in S_{\mathbf{X}}^c) = 0$ a také $\int_{(g(S_{\mathbf{x}}))^c} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})d\mathbf{y} = 0$ a oba integrály jsou nulové i pro všechny podmnožiny $S_{\mathbf{X}}^c$, resp. $(g(S_{\mathbf{x}}))^c$. Takže $\forall B \in \mathcal{B}^n$ a funkci $f_{\mathbf{y}}$ ze znění dostáváme:

$$P_{\mathbf{Y}}(B) = P_{\mathbf{Y}}(B \cap g(S_{\mathbf{X}})) + P_{\mathbf{Y}}(B \setminus g(S_{\mathbf{X}})) = P_{\mathbf{X}}(g^{-1}(B \cap g(S_{\mathbf{X}}))) + 0 = \int_{B \cap g(S_{\mathbf{X}})} f_{\mathbf{Y}} d\mathbf{y} + 0 = \int_{B \cap g(S_{\mathbf{X}})} f_{\mathbf{Y}} d\mathbf{y} =$$

A tedy $f_{\mathbf{Y}}$ je opravdu hustota $\mathbf{Y}$. □

9 Mnoharozměrné normální rozdělení

Definice 9.1 (Mnoharozměrné normální rozdělení)

Buď $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_r)^T$, $r \in \mathbb{N}$, r-rozměrný váhový vektor, kde Z_i jsou vzájemně nezávislé a $Z_i \sim N(0,1)$, $i \in [r]$. Buď $A_{n \times r}$, $n \in \mathbb{N}$ matice a $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ pevný vektor. Náhodný vektor definovaný jako $\mathbf{X} = A\mathbf{Z} + \mu$ má n-rozměrné normální rozdělení s parametry μ a $\Sigma = AA^T$. Značíme $N_n(\mu, \Sigma)$.

Důsledek

- $\mathbf{Z} \sim N_r(), I_n)$.
- $\mathbb{E}\mathbf{X} = \mu$.
- Pro $k \in \mathbb{N}$ a matici $B_{k \times n}$ platí, že $\mathbf{Y} = B\mathbf{X} \sim N_k(B_\mu, B\Sigma B^T)$.

- Speciálně pro vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ má $\mathbf{cX}$ jednorozměrné normální rozdělení $N(\mathbf{c}\mu, \mathbf{c}\Sigma\mathbf{c}^T)$.

Důkaz
Byl na přednášce, ale jednoduchý. □

Věta 9.1 (O hustotě n-rozměrného normálního rozdělení)

Buď $\mathbf{X}$ náhodný vektor s rozdělením $N_n(\mu, \Sigma)$, kde Σ je regulární matice. Pak $P_\mathbf{X} \ll \lambda^n$ a

$$f_\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Důkaz
Nejdříve buď $\mathbf{X} \sim N_n(0, I_n)$. Pak $X_i = Z_i$ z definice a víme tedy, že $X_i \sim N(0,1)$ a X_i jsou vzájemně nezávislé, tedy

$$f_\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Následně buď Σ pozitivně definitní, $\mu \in \mathbb{R}^n$. Pak $\exists A_{n\times n}$ taková, že $\sigma = AA^T$ a A je regulární. Položme $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \mu$, kde $\mathbf{X}$ je vektor ze začátku důkazu. Tedy $\mathbf{Y} \sim N_n(\mu, A^TA = \Sigma)$. Použijeme větu o transformaci hustot na odvození $f_\mathbf{Y}$:

Mějme zobrazení $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mu$. g je difeomorfismus na $\mathbb{R}^n$, $|\operatorname{Jac} g| = |\det A| \neq 0$, tedy můžeme volit $S_\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$, $g(S_\mathbf{X}) = \mathbb{R}^n$, $g^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}(\mathbf{y} - \mu)$, tedy:

$$f_\mathbf{Y}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{|\det A|} \cdot e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}(\mathbf{y}-\mu))^T(A^{-1}(\mathbf{y}-\mu))} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mu)^T\sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mu)}, \qquad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

□

Důsledek (O marginálních rozděleních v N_n)
Buď $\mathbf{X}$ náhodný vektor $\sim N_n(\mu, \Sigma)$. Pak marginální rozdělení X_i je $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, kde $\sigma_i^2 = \Sigma_{i,i} = \operatorname{var} X_i$. A podvektor $(X_i, X_j)^T$, $i \neq j$, má rozdělení $N_2\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_i^2 & \varrho_{ij}\sigma_i\sigma_j\\ \varrho_{ij}\sigma_i\sigma_j & \sigma_j^2\end{pmatrix}\right)$, kde $\varrho_{ij} = \operatorname{cor}(X_i, X_j)$.

Důkaz
Použijeme předchozí důsledek definice, čtvrtý bod pro první část a třetí bod pro druhou část. □

Tvrzení 9.2

Nechť máme náhodný vektor $(X,Y)^T \sim N_2$. Pak mají X,Y jednorozměrné normální rozdělení. Pokud navíc $\operatorname{cov}(X,Y)=0$, pak jsou X a Y nezávislé.

Definice 9.2 (χ^2-rozdělení)

Buďte $X_1,\dots,X_n$, $n\in\mathbb{N}$ nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $N(0,1)$. Pak náhodná veličina $Y_n=\sum_{i=1}^n X_i^2$ má χ^2-rozdělení o n stupních volnosti (značíme χ^2_n), s hustotou

$$g_n(y)=\frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}e^{-\frac{y}{2}}1_{y>0},\qquad y\in\mathbb{R}.$$

Poznámka

Střední hodnota je n, rozptyl $2n$.

Definice 9.3 (Studentovo rozdělení)

Buďte $X\sim N(0,1)$ a $Y\sim\chi^2_n$ nezávislé náhodné veličiny. Pak náhodná veličina $T=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ má studentovo t_n rozdělení (neboli t-rozdělení o n stupních volnosti) s hustotou

$$h_n(t)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\varphi n}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Poznámka

Střední hodnota je 0, pokud $n>1$. Obecně t_n-rozdělení má konečné momenty až do řádu $(n-1)$ včetně.

Pro $n=1$ se toto rozdělení nazývá Cauchyho rozdělení (protože se chová jinak než ostatní studentova).

10 Limitní věty

Definice 10.1 (Značení)

Buďte $A_1,A_2,\dots$ náhodné jevy ze σ-algebry $\mathcal{A}$. Značíme

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\qquad \liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

Věta 10.1 (Cantelli)

Buďte $A_1, A_2, \dots$ náhodné jevy z $\mathcal{A}$. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, pak $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

Důkaz

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

□

Důsledek

$$P((\limsup_{n\to\infty} A_n)^c) = 1 = P(\liminf_{n\to\infty} A_n^c).$$

Věta 10.2 (Borelova, Borelův 0-1 zákon)

Buďte $A_1, \dots$ nezávislé náhodné jevy z $\mathcal{A}$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Leftrightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Leftrightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Důkaz

Neb nic jiného než $\sum = \infty$ nebo $\sum < \infty$ nastat nemůže, stačí ukázat dvakrát $\implies$. „První $\implies$“ je Cantelliho věta.

„Druhá $\implies$“: Platí $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1 - P((\limsup_{n\to\infty} A_n)^c) = 1 - P(\liminf_{n\to\infty} A_n^c)$. Počítejme

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n^c) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n^c) = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{N} A_n^c) = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} P(A_k^c) \le \lim_{n\to\infty}$$

□

Definice 10.2 (Konvergence v pravděpodobnosti)

Buďte $Y_1, Y_2, \dots$ náhodné veličiny na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Posloupnost $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v pravděpodobnosti k náhodné veličině Y, značíme $Y_n \xrightarrow{P} Y$, pokus $P(|Y_n - Y| > \varepsilon) \to 0$, $\forall \varepsilon > 0$.

Poznámka

Je to konvergence podle míry. Je ekvivalentní

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \mathbb{E}Y| \leq \varepsilon) \to 1?$$

Definice 10.3 (Konvergence skoro jistě)

Buďte $Y_1, \ldots$ náhodné veličiny na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Posloupnost $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje skoro jistě k náhodné veličině Y, značíme $Y_n \overset{\text{s.j.}}{\to} Y$, pokud $P(\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$.

Poznámka

Je to konvergence skoro všude.

Věta 10.3 (O konvergenci v pravděpodobnosti a součtu)

Buďte $Y_1, \ldots$ náhodné veličiny na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ náhodné veličiny a $Z_1, \ldots$ náhodné veličiny také na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak

$$(Y_n \overset{P}{\to} 0) \wedge (Z_n \overset{P}{\to} 0) \implies (Y_n + Z_n \overset{P}{\to} 0).$$

Důkaz

$$P(|Y_n + Z_n| > \varepsilon) \leq P(|Y_n| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Z_n| > \frac{\varepsilon}{2}) \to 0, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

□

Věta 10.4 (O konvergenci v pravděpodobnosti a násobení)

Za stejných předpokladů jako výše s přidáním $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálná omezená posloupnost, je $Y_n \overset{P}{\to} 0 \implies a_n Y_n \overset{P}{\to} 0$.

Důkaz

$$P(|a_n Y_n| > \varepsilon) \leq P(|Y_n| > \frac{\varepsilon}{c}) \to 0.$$

□

Věta 10.5 (O spojité transformaci a konvergence)

Buďte $Y_1, Y_2, \ldots$ n. v. na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce spojitá na otevřené množině S_Y takové, že $P(Y \in S_Y) = 1$. Pak

$$Y_n \overset{P}{\to} Y \implies g(Y_n) \overset{P}{\to} g(Y),$$

$$Y_n \overset{s.\,j.}{\to} Y \implies g(Y_n) \overset{s.\,j.}{\to} g(Y).$$

Důkaz
První implikace viz literatura. Druhá: Buď $N \subset \Omega$ taková, že $Y_n(\omega) \to Y(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega \setminus N$. Označíme $M = (\Omega \setminus N) \cap Y^{-1}(S_Y)$. Pak $P(M) = 1$. A $\forall \omega \in M$ platí, že g je spojitá na otevřeném okolí $Y(\omega)$, a tedy z $Y_n(\omega) \to Y(\omega)$ dostaneme $g(Y_n(\omega)) \to g(Y(\omega))$ z věty o limitě spojitě transformované posloupnosti v $\mathbb{R}$. $\square$

Věta 10.6 (Čebyševův slabý zákon velkých čísel)

Buďte $X_1, X_2, \dots$ vzájemně nezávislé náhodné veličiny definované na tomtéž $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ splňujíxí $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, a $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{var} X_i\right) = 0$. Potom platí

$$|\overline{X\_n} - \overline{\mathbb{E}X_n}| \xrightarrow{P} 0.$$

Důkaz
Buď $\varepsilon > 0$ pevné.

$$P(|\overline{X_n} - \overline{\mathbb{E}X_n}| > \varepsilon) \leq \frac{\operatorname{var}(\overline{X_n} - \overline{\mathbb{E}X_n})}{\varepsilon^2} = \frac{\operatorname{var}\overline{X_n}}{\varepsilon^2} = \frac{\operatorname{var}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2}\frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{var} X_i}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{var} X_i}{\varepsilon^2}$$

$\square$

TODO!!! (Chyběl jsem)

TODO!!! (Chyběl jsem)

Věta 10.7 (Silný zákon velkých čísel pro iid)

Buď $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost iid náhodných veličin. Pak

$$(\exists \mu \overline{X_n} \overset{\text{skoro jistě}}{\to} \mu) \Leftrightarrow \mathbb{E}|X_1| < \infty.$$

Důkaz
„ $\implies$ “: $X_n = n \cdot \overline{X_n} - (n-1) \cdot \overline{X_{n-1}}$, $\forall n \geq 2$,

$$\frac{X_n}{n} = \overline{X_n} - \frac{n-1}{n}\overline{X_{n-1}}.$$

Tedy $\frac{X_n}{n} \to 0$ skoro jistě. Takže $P(\frac{X_n}{n} \geq 1, \text{ pro nekonečně mnoho } n) = P(\limsup \frac{|X_n|}{n} \geq 1) = 0$.

Z Borelovy věty máme, že jevy $|X_n| \geq n$ jsou vzájemně nezávislé, neb $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou vzájemně nezávislé.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq n) < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geq n) < \infty.$$

Nyní z předchozího lemmatu máme $\mathbb{E}|X_1| < \infty$.

Navíc z jednoznačnosti limity skoro jistě máme, že $\mu = \mathbb{E}X_1$. □

Definice 10.4 (Konvergence v distribuci)

Buď Y_n posloupnost náhodných veličin na libovolných pravděpodobnostních prostorech. Řekneme, že náhodné veličiny Y_n konvergujív distribuci (značíme $\xrightarrow{D}$), pokud $\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, které jsou body spojitosti F_Y.

Poznámka
Konvergence v distribuci mluví o konvergenci měr P_{Y_n}, nikoliv Y_n.

Věta 10.8 (Centrální limitní věta (Ljapunov 1901, Lévy, Lindenberg 1922))

Buďte $X_1, X_2, X_3, \ldots$ nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s $\mathbb{E}X_1 = \mu \in \mathbb{R}$ a $0 < \operatorname{var} X_1 = \sigma^2 < \infty$. Potom pro náhodné veličiny $Z_n = \frac{\sum_{n=1}^{n} X_i - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ platí $Z_n \xrightarrow{D} Z$, kde $Z \sim N(0,1)$.

Lemma 10.9 (Ekvivalentní charakterizace $\xrightarrow{D}$)

Posloupnost náhodných veličin $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje $Y_n \xrightarrow{D} Y$ právě tehdy, když $\mathbb{E}h(Y_n) \to \mathbb{E}h(Y)$ pro každou spojitou omezenou funkci $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Důkaz
Důkaz je technický a byl vynechán. □

Důkaz (Centrální limitní věty)
BÚNO $\mathbb{E}X_i = 0$ a $\operatorname{var} X_i = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$, (jinak bychom následující použili pro $\tilde{X}_i = \frac{X_i - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}$).
Z předchozího lemmatu nám stačí ukázat, že $\mathbb{E}h(Z_n) \to \mathbb{E}h(Z)$ $\forall h$ 2krát spojitě diferencovatelné, stejnoměrně spojité a s omezenými prvními a druhými derivacemi.

Buďte $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ nezávislé náhodné veličiny $\sim N(0,1)$ nezávislé s $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$. Pak $T_n = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} Y_n - 0}{\sqrt{n \cdot 1}} \sim N(0,1)$. Teď chceme ukázat $|\mathbb{E}h(Z_n) - \mathbb{E}h(T_n)| \to 0$ pro každé h jako výše.

Označíme si $X_{i,n} = \frac{X_i}{\sqrt{n}}$, $Y_{i,n} = \frac{Y_i}{\sqrt{n}}$, $W_{i,n} = \sum_{j=0}^{i} Y_{j,n} + \sum_{j=i+1}^{n} X_{i,n}$. Platí

$$h(Z_n) - h(T_n) = \sum_{i=1}^{n} (h(W_{i,n} + X_{i,n}) - h(W_{i,n} + Y_{i,n})), \qquad \text{neboť } W_{i,n} + X_{i,n} = W_{i+1,n} + Y_{i-1,n}, \qquad 1 \leq i \leq n$$

Nyní použijeme Taylorův rozvoj na omezení jednotlivých rozdílů. Platí

$$h(W_{i,n} + X_{i,n}) = h(W_{i,n}) + h'(W_{i,n})X_{i,n} + \frac{1}{2}h''(W_{i,n})X_{i,n}^2 + R_{x,i,n},$$

$$R_{x,i,n} = \frac{1}{2X_{i,n}^2(h''(W_{i,n} + \zeta X_{i,n}) - h''(W_{i,n}))}, \qquad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

A také platí $|R_{x,i,n}| \leq X_{i,n}^2 ||h''||_\infty$ a také platí $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |R_{x,i,n}| \leq X_{i,n}^2 \varepsilon$, pro $|X_{i,n}| < \delta$ ze stejnoměrné spojitosti h''. Dohromady $|R_{x,i,n}| \leq X_{i,n}^2(\varepsilon \cdot 1_{(|X_{i,n}| < \delta)} + ||h''||_\infty 1_{(|X_{i,n}| \geq \delta)})$. Obdobně vše pro $Y_{i,n}$.

Dosadíme Taylorův rozvoj a odhady do teleskopické sumy výše a spočítáme střední hodnotu:

$$\mathbb{E}(h(Z_n) - h(T_n)) = \sum_{i=1}^{n} \Big[\mathbb{E}(h(W_{i,n}) - h(W_{i,n})) + \mathbb{E}h'(W_{i,n})(X_{i,n} - Y_{i,n}) + \mathbb{E}\frac{1}{2}h''(W_{i,n})(X_{i,n}^2 - Y_{i,n}^2) + \mathbb{E}R_x$$

neboť první člen je zřejmě nula, druhý člen je střední hodnota součinu nezávislých veličin, tedy součin středních hodnot a X, Y mají stejnou střední hodnotu a střední hodnota $W_{i,n}$ existuje, tedy i druhý člen je 0. Třetí člen je úplně totéž, jen X, Y mají shodný rozptyl.

$$|\mathbb{E}(h(Z_n) - h(T_n))| \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(|R_{x,i,n}| + |R_{y,i,n}|) \leq \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon \mathbb{E}(X_{i,n}^2 + Y_{i,n}^2) + ||h''||_\infty \mathbb{E}(X_{i,n}^2 1_{(|X_{i,n}| \geq \delta)} + Y_{i,n}^2 1_{(|Y_{i,n}| \geq \delta)}))$$

$$= 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} ||h''||_\infty (\mathbb{E}\frac{X_i^2}{n} 1_{|X_i|} > \delta \cdot \sqrt{n} + \mathbb{E}\frac{Y_i^2}{n} 1_{(|Y_i| \geq \delta \cdot \sqrt{n})}) =$$

$$= 2\varepsilon + ||h''||_\infty (\mathbb{E}X_1^2 1_{(|X_1| \geq \delta\sqrt{n}) + \mathbb{E}Y_1^2 1_{(|Y_1| \geq \delta\sqrt{n})}}),$$

A neboť $\mathbb{E}X_1^2 1_{(|X_1| \geq \delta\sqrt{n})} = \mathbb{E}X_1^2 - \mathbb{E}X_1^2 1_{(|X_1| < \delta\sqrt{n})} \to \mathbb{E}X_1^2 - \mathbb{E}X_1^2 = 0$ z Lebesgueovy věty.Tak

$$|\mathbb{E}(h(z_n) - h(t_n))| \to 2\varepsilon.$$

Tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists n : |\mathbb{E}h(Z_n) - \mathbb{E}h(T_n)| < 3\varepsilon$, tedy teleskopická suma jde k nule, tudíž $|\mathbb{E}h(Z_n) - \mathbb{E}h(T_n)| \to 0$ $\forall h$ splňující podmínky výše. $\square$

Věta 10.10 (De Moivre-Laplaceova centrální limitní věta)

Buďte $Y_n \sim \mathrm{Binom}(n,p)$ *náhodné veličiny pro* $n \in \mathbb{N}$ *a* $p \in (0,1)$. *Pak*

$$\frac{Y_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Důkaz (Dá se napočítat a umlátit Stirlingem, ale pro trénink)
Buď $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost iid s $X_i \sim \mathrm{Alt}(p)$. Pak $\sum_{i=1}^n X_i = Y_n \sim \mathrm{Binom}(n,p)$. A také $\{X_i\}$ splňuje předpoklady CLV. A tedy

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - p)}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Tudíž také

$$\frac{-n \cdot p + \sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Takže pro Y_n věta platí. Pro jiné $V_n \sim \mathrm{Binom}(n,p)$ platí toto také, neboť konvergence v distribuci závisí pouze na rozdělení. □

Lemma 10.11 (O spojité transformaci a konvergenci v distribuci)

Buď $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *posloupnost nezávislých veličin taková, že* $X_n \xrightarrow{D} X$, X *náhodná veličina, a* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *buď spojitá funkce. Nechť* $Y_n = g(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *pak* $Y_n \xrightarrow{D} Y$, *kde* $Y = g(X)$.

Důkaz
Použijeme charakterizaci konvergenci v distribuci: ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}h(Y_n) = \mathbb{E}h(y)$ pro každou h omezenou spojitou funkci z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Ale $\mathbb{E}h(Y_n) = \mathbb{E}h(g(X_n))$ a $h \circ g$ je spojitá a omezená funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

Tedy protože $X_n \xrightarrow{D} X$, musí $\mathbb{E}hg(X_n) \to \mathbb{E}h(g(X))$. □

Věta 10.12

Buď $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost náhodných veličin definovaných na* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a* X *náhodná veličina na* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Pak* $(X_n - X) \xrightarrow{P} 0 \implies X_n \xrightarrow{D} X$.

Důkaz
Vynechán (viz TP1). □

Pozor
Obráceně to neplatí.

Věta 10.13 (Cramér-Slucký)

Buďte $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, X *náhodné veličiny a nechť* $X_n \xrightarrow{D} X$ *a* $Y_n \xrightarrow{P} a \in \mathbb{R}$. *Pak*

$$X_n + Y_n \xrightarrow{D} (X + a) \wedge X_n \cdot Y_n \xrightarrow{D} X \cdot a.$$

Důkaz
Vynechán. □

Část I

Statistika

Definice 10.5 (Empirická distribuční funkce)

Empirická distribuční funkce je definována jako $F_n(x, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{(X_k \le x)}(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{(X_k(\omega) \le x)}$.

Definice 10.6 (Náhodný výběr, rozsah výběru)

Buďte $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny se stejným rozdělením P_X s distribuční funkcí F. Pak $(X_1, \ldots, X_n)$ nazveme náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkcí F (resp. z rozdělení P_X). n je tzv. rozsah výběru.

Definice 10.7 (Model)

Modelem pro pozorování $X_1, \ldots, X_n$ rozumíme předem stanovenou množinu rozdělení $\mathcal{F}$, do níž neznámé rozdělení P_X, resp. jeho distribuční funkce F patří.

11 Bodový odhad

Definice 11.1 (Parametrická funkce)

(Máme náhodný výběr $(X_1, \ldots, X_n)$ z modelu $\mathcal{F} = \{F_\vartheta | \vartheta \in \Theta\} = \{P_\vartheta | \vartheta \in \Theta\}$, kde Θ je Borelovská $\subset \mathbb{R}^d$. Chceme odhadnout ϑ nebo $g(\vartheta)$.)

Borelovsky měřitelné zobrazení $g : \vartheta \to \mathbb{R}$ nazveme parametrickou funkcí.

Definice 11.2 (Bodový odhad paramterické funkce)

Bodový odhad φ_n parametrické funkce $g(\vartheta)$ je borelovsky měřitelné zobrazení $\varphi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, jehož předpis nezávisí na ϑ (a tedy ani na P_ϑ či F_ϑ) a jehož definiční obor obsahuje obor hodnot $(X_1, \ldots, X_n)$

Definice 11.3 (Nestranný bodový odhad)

Bodový odhad φ_n parametrické funkce $g(\vartheta)$ se nazývá nestranný, pokud $\forall\vartheta \in \Theta$ platí $\mathbb{E}_\vartheta\varphi_n(X_1,\ldots,X_n) = g(\vartheta)$. ($\mathbb{E}_\vartheta$ značí, že $\mathbb{E}$ počítáme vzhledem k rozdělení P_ϑ^n neboli $X_i \sim P_\vartheta$.)

Definice 11.4 (Silně konzistentní posloupnost bodových odhadů)

Posloupnost bodových odhadů φ_n parametrické funkce $g(\Theta)$ se nazývá silně konzistentní, pokud $\forall\vartheta \in \Theta$ platí $P(\lim_{n\to\infty}\varphi(X_1,\ldots,X_n) = g(\vartheta)) = 1$.