Příklad (1.7)
Nalezněte všechny shodnosti v $\mathbb{R}^2$, které zobrazují přímku $3x+4y-5=0$ na osu „x“ a bod $[2,1]$ na některý bod osy „y“.

Řešení
Z přednášky víme, že všechny shodnosti v $\mathbb{R}^2$ lze napsat jako ($\mathbf{z}\in\mathbb{R}^2$):

$$\mathbf{z}\mapsto A\mathbf{z}+\mathbf{b}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\mathbf{z}+\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}.$$

Z první podmínky (zobrazení bodů $\left[x,-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}\right]$ na osu „x“, tj. na body $[\ldots,\ 0]$):

$$a_{21}x+a_{22}\left(-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}\right)+b_2=0.$$

Tedy (protože rovnice musí platit pro všechna $x\in\mathbb{R}$, tedy toto víme např. z rovnosti polynomů).

$$a_{21}=\frac{3}{4}a_{22},\qquad b_2=-\frac{5}{4}a_{22}.$$

Z druhé podmínky (zobrazení bodu $[2,1]$ na osu „y“, tj. na bod $[0,\ldots]$):

$$2a_{11}+1a_{12}+b_1=0.$$

Tudíž lze pro libovolné a_{11} a a_{12} vybrat b_1 (konkrétně $b_1=-2a_{11}-a_{12}$), aby byla druhá podmínka splněna.

Zbývá ještě jedna podmínka, která nám vznikla během řešení – matice musí být ortonormální (aby to bylo shodné zobrazení), tj.

$$A^2=I\Leftrightarrow a_{11}^2+a_{12}\cdot a_{21}=1\wedge a_{12}\left(a_{11}+a_{22}\right)=0=a_{21}\left(a_{11}+a_{22}\right)\wedge a_{22}^2+a_{12}\cdot a_{21}=1.$$

Nyní máme 2 možnosti:

- $a_{12}=0=a_{21}$, pak ale $0=a_{22}=\pm1$ z rovnic $a_{22}^2+a_{12}\cdot a_{21}=1$ a $a_{21}=\frac{3}{4}a_{22}$. To však není možné, tedy tato možnost nedává žádné řešení.
- $a_{11}+a_{22}=0$, což odpovídá řešení (pro $a_{11}=c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ libovolné, pro $a_{11}=0$ nemá řešení)
$$\mathbf{z}\mapsto\begin{pmatrix}c & \frac{4}{3}c-\frac{4}{3c}\\ -\frac{3}{4}c & -c\end{pmatrix}\mathbf{z}+\begin{pmatrix}-\frac{10}{3}c+\frac{4}{3c}\\ \frac{5}{4}c\end{pmatrix}.$$