TODO (Přednáška + první část cvik)

Důsledek
Každý Lindelöfův regulární prostor je parakompaktní.

Důkaz
Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Z lindolöfovosti existuje spočetné pokrytí $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. $\mathcal{V}$ je σ-lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{U}$. Tedy platí b) z minulé věty. $\square$

Definice 0.1 (Skrčení)

Ať X je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (pokrytí X). Indexovaný systém $\{T_S : S \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se nazývá skrčení systému $\mathcal{S}$, pokud (je to pokrytí) a $T_S \subseteq S, S \in \mathcal{S}$.

Poznámka (Nadmutí)
Skrčení je speciální případ zjemnění.

Podobně jako skrčení lze definovat pojem nadmutí.

Lemma 0.1 (O skrčení)

Ať $\mathbb{X}$ je normální TP. Pak každé lokálně konečné (stačí bodově konečné) otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má uzavřené skrčení, jehož vnitřky tvoří pokrytí.

Důkaz
Ať $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \varkappa\}$, $\varkappa$ kardinál, $\mathcal{U}$ je lokálně kompaktní, otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Nyní $F_0 := \mathbb{X} \setminus \bigcup \{U_\alpha : 0 < \alpha < \varkappa\}$ uzavřená, $F_0 \subseteq U_0$ (z toho, že $\mathcal{U}$ je pokrytí). Z normality existuje otevřená $V_0 \subseteq \mathbb{X} : F_0 \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq U_0$.

Nyní indukcí: Nechť máme zkonstruované $V_\beta : \forall \beta < \alpha < \varkappa$. Označíme $F_\alpha := \mathbb{X} \setminus (\bigcup \{V_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup \{U_\gamma : \alpha < \gamma < \varkappa\})$. Z normality zas $V_\alpha \subseteq \mathbb{X} : F_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$.

$\mathcal{V} = \left\{\overline{V_\alpha} : \alpha < \varkappa\right\}$ je skrčení $\mathcal{U}$, $\operatorname{int} \overline{V_\alpha} \supseteq V_\alpha$ a $\bigcup_{\alpha<\varkappa} V_\alpha = \mathbb{X}$, tedy $\bigcup_{\alpha<\varkappa} \operatorname{int} \overline{V_\alpha} = \mathbb{X}$. $\square$

Definice 0.2 (Kolektivně normální)

TP $\mathbb{X}$ se nazývá kolektivně normální, pokud pro každý diskrétní systém $\mathcal{F}$ z uzavřených množin existuje disjunktní systém otevřených množin $\{U(F) : F \in \mathcal{F}\}$, že $F \subseteq U(F), F \in \mathcal{F}$ (tj. otevřené nadmutí).

Poznámka
Každý kolektivně normální prostor je normální.

Tvrzení 0.2

Každý parakompaktní prostor už je kolektivně normální, tedy i normální.

Důkaz
Ukážeme nejprve, že $\mathbb{X}$ je regulární. Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Pro $y \in F$ existuje otevřené okolí U_y bodu y, že $x \notin \overline{U_y}$. $\mathcal{U} := \{U_y : y \in F\} \cup \{\mathbb{X} \setminus F\}$ otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Ať $\mathcal{V}$ je lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{U}$. $G := \bigcup\{V \in \mathcal{V} : V \cap F \neq \emptyset\}$. Z lemmatu $\overline{G} = \bigcup\left\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}, V \cup F \neq \emptyset\right\} \not\ni x$. $G \supset F$, G otevřená. Tedy $\mathbb{X}$ je regulární.

Ať $\mathcal{F}$ je diskrétní soubor z uzavřených množin. Pro $F \in \mathcal{F}$ uvážíme $\bigcup\{H \in \mathcal{F} : H \neq F\}$ … uzavřená z lemmatu o uzávěru sjednocení lokálně kompaktního systému. Pro $x \in F$ existuje (z první části důkazu) U_x otevřená, že $x \in U_x$, $\overline{U_x} \cap H = \emptyset$ pro $H \neq F, H \in \mathcal{F}$. $\{U_x : x \in F \in \mathcal{F}\} \cup \{\mathbb{X} \setminus \bigcup F\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Ať $\mathcal{V}$ je otevřené lokálně konečné zjemnění. Pro $F \in \mathcal{F} : V(F) := \{V \in \mathcal{V} : V \cup F \neq \emptyset\} \setminus \bigcup\left\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}, V \cap H \neq \emptyset\right.$ pro nějaké $H \in \mathcal{F}, H$
Platí $F \subseteq V(F)$. Pro $F, F' \in \mathcal{F}, F \neq F' \implies V(F) \cap V(F') = \emptyset$. $\{V(F) : F \in \mathcal{F}\}$ je disjunktní otevřené nadmutí $\mathcal{F}$. $\square$

Definice 0.3 (Hvězda)

Ať $\mathbb{X}$ je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$, $x \in \mathbb{X}$, $A \subseteq \mathbb{X}$.

Hvězda bodu x vzhledem k $\mathcal{S}$ je $(x, \mathcal{S}) = \bigcup\{S \in \mathcal{S} : x \in S\}$.

Hvězda množiny A vzhledem k @S je $(A, \mathcal{S}) = \bigcup_{x \in A}(x, \mathcal{S})$.

Definice 0.4 (Barycentrické a hvězdovité zjemnění)

Ať $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou pokrytí $\mathbb{X}$. Řekneme, že $\mathcal{U}$ barycentricky zjemňuje $\mathcal{V}$, pokud $\{(x,\mathcal{U}) : x \in \mathbb{X}\}$ zjemňuje $\mathcal{V}$.

Řekneme, že $\mathcal{U}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{V}$, pokud $\{(U,\mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$ zjemňuje $\mathcal{V}$.

Například
Ať $(\mathbb{X}, \varrho)$ je MP. Ať $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou pokrytí $\mathbb{X}$ tvořená po řadě všemi $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon$ koulemi ($\varepsilon > 0$ pevné). Pak $\mathcal{U}$ zjemňuje barycentricky $\mathcal{V}$ a hvězdovitě $\mathcal{W}$.

Lemma 0.3 (Dvojité barycentrické zjemnění je hvězdovité)

Ať X je množina, $\mathcal{U}$ pokrytí $\mathcal{X}$, $\mathcal{V}$ barycentrické zjemnění $\mathcal{U}$ a $\mathcal{W}$ barycentrické zjemnění $\mathcal{V}$. Potom $\mathcal{W}$ je hvězdovité zjemnění $\mathcal{U}$.