Příklad (1)
Rozhodněte, zda existuje graf, jehož skóre je $1, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7$. Pokud takový graf existuje, umíte něco říci o tom, zda může nebo nemusí být souvislý?

Řešení (Existence)
Z věty o skóre víme, že takový graf existuje právě tehdy, když existuje graf se skóre $0, 2, 2, 3, 4, 4, 5$, a ten existuje právě tehdy, když existuje graf se skóre $0, 1, 1, 2, 3, 3$, ..., $0, 1, 0, 1, 2$, což (buď už vidíme, že existuje, nebo) upravíme do $0, 0, 1, 1, 2$, ..., $0, 0, 0, 0$ a ten existuje, jelikož jsou to 4 vrcholy bez hran. Tedy graf ze zadání existuje.

Řešení (Souvislost)
Jelikož v běžné definici grafu dovolujeme nejvýše jednu hranu mezi 2 vrcholy, tak víme, že z vrcholu stupně 7 musí vést hrana do dalších 7 různých vrcholů. A jelikož máme pouze $7 + 1 = 8$ vrcholů, musí z vrcholu se stupněm 7 vést hrana do všech ostatních, takže graf souvislý je, jelikož z každého do každého vrcholu se lze „dostat“ přes ten se stupněm 7.

Příklad (2)
Mějme souvislý graf a dvě různé nejdelší cesty v něm. Dokažte, že tyto dvě cesty mají alespoň jeden společný vrchol.

Důkaz (Sporem)
Nechť A a B jsou dvě různé nejdelší cesty v tomto grafu, které nemají společný bod. Z definice souvislosti existuje mezi libovolnými body cesta, tedy zvolme vrcholy $v_a \in A$ a $v_b \in B$ a označme cestu mezi nimi C. Zvolme „poslední“ vrchol $v_a' \in C$, který leží v A a někde „po něm následuje první“ vrchol $v_b' \in B \cap C$. Označme C' „část“ cesty C „mezi“ vrcholy v_a' a v_b'. Nyní víme, že $A \cap C' = \{v_a'\}$ a $B \cap C' = \{v_b'\}$.

Odstraněním v_a' z A vytvoříme dvě cesty, z nichž jedna (A') má zjevně alespoň polovinu vrcholů, co má $A \backslash \{v_a'\}$, tedy $\left\lceil \frac{|A|-1}{2} \right\rceil$. Stejně tak odstraněním v_b' z B vytvoříme cestu B', kde $|B'| \geq \left\lceil \frac{|B|-1}{2} \right\rceil$. Sjednocení A', B' a C' je jistě cesta, jelikož vrcholy se v ní neopakují, jelikož jsou z toho, jak jsme si je definovali, disjunktní, a navíc existuje hrana mezi krajním bodem A' a C', jelikož daný bod z A' a v_a' (jako krajní bod C') byly původně „vedle sebe“ v cestě A, podobně pro hranu mezi B' a C'.

Tato cesta ($A' \cup B' \cup C'$) má navíc velikost minimálně (A, B jsou disjunktní, tedy C obsahuje alespoň dva body: v_a' a v_b') $\left\lceil \frac{|A|-1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{|B|-1}{2} \right\rceil + 2 \leq \frac{|A|-1}{2} + \frac{|B|-1}{2} + 2 \overset{|A|=|B|}{=} |A| + 1 > |A|$. To je ale spor s tím, že A byla nejdelší cestou, protože $A' \cup C' \cup B'$ je očividně větší. $\square$