Příklad (8.1)
Uvažujme pro matici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

lineární operátor f_A na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$. Najděte všechny roviny U, pro které platí, že $f_A(U) = U$ a v každé z těchto rovin najděte takovou bázi B_U, aby matice zúženého lineárního operátoru $[f_A|_U]_{B_U}^{B_U}$ byla Jordanova matice.

Řešení
MATLAB našel vlastní čísla -1 a k němu příslušný vlastní vektor $(1, 0, -1)^T$ a 2 (algebraické násobnosti 2) s vlastním vektorem $(2, -3, -5)^T$. Jelikož charakteristický polynom zúžení $f_A|_U$ dělí charakteristický polynom f_A, tak i f_U musí mít vlastní čísla $1, 2$ nebo vlastní číslo 2 algebraické násobnosti 2. (Musí mít 2 vlastní čísla včetně násobnosti, viz důsledek 9.113.)

Pokud jsou vlastní čísla $1, 2$, pak $U = \mathrm{LO}\left((1, 0, -1)^T, (2, -3, -5)^T\right) = \mathrm{LO}\, B_U$, jelikož aby to byla vlastní čísla, tak musí existovat vlastní vektory jim příslušné. Zároveň

$$[f_A|_U]_{B_U}^{B_U} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pokud je vlastní číslo pouze 2 (a to algebraické násobnosti 2). Tedy ze stejného důvodu musí být $B_U = \left((2, -3, -5)^T, \mathbf{v}\right)$. Matice $[f_A|_U]_{B_U}$ je potom tvaru (po dosazení $(1, 0)^T$, tj. obraz vlastního vektoru příslušného 2, musíme dostat $(2, 0)^T$ a charakteristický polynom musí být $(2 - \lambda)^2 = 0$):

$$[f_A|_U]_{B_U} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$a \neq 0$, protože máme jen „1" vlastní vektor, tj. $\mathbf{v}$ nemůže být vlastní vektor. Tedy hledáme $\mathbf{v}$ tak, aby $(f_A - 2\,\mathrm{id})|_U(\mathbf{v}) = a \cdot (2, -3, -5)^T$, tedy i $(f_A - 2\,\mathrm{id})(\mathbf{v}) = a \cdot (2, -3, -5)^T$. BÚNO $a = 1$ (vydělíme $\mathbf{v}$ číslem a). Řešíme tedy soustavu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 3 & 11 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Tudíž další invariantní podprostory jsou tvaru $\mathrm{LO}\left((2, -3, -5)^T, (3 - \frac{2z+11}{5}, \frac{3z-11}{5}, z)^T\right) = \mathrm{LO}\, B_U$ a

$$[f_A|_U]_{B_U}^{B_U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy v obou případech je matice zúženého zobrazení v Jordanově kanonickém tvaru (v prvních jsou buňky příslušné -1 a 2, v druhé pak jen 2), tj. našli jsme správnou bázi.

Příklad (8.2)
Mějme čtvercovou matici A stupně n nad nějakým tělesem $\mathbb{T}$, definujme podprostor $\mathcal{M}(A) = \mathrm{LO}\left\{A^i | i \geq 0\right\}$ vektorového prostoru všech čtvercových matic stupně n nad tělesem $\mathbb{T}$. Dokažte, že

(a) $\mathcal{M}(A) = \mathrm{LO}\left\{A^0, A^1, \ldots, A^{n-1}\right\}$,

(b) je-li $B \in \mathcal{M}(A)$ regulární, pak $B^{-1} \in \mathcal{M}(A)$,

(c) pro $A = (\max\{0, i - j + 1\})_{i,j\in[5]} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ je posloupnost $N = (A^0, A^1, A^2, A^3, A^4)$ báze $\mathcal{M}(A)$ (nemusíte dokazovat); spočítejte souřadnice $[A^{-1}]_N$.

Důkaz (a)
Nechť $p_A(\lambda)$ je charakteristický polynom A. Potom podle Cayleyho-Hamiltonovy věty je $p_A(A) = 0_{n\times n}$. Zároveň víme, že polynom $p_A(\lambda)$ je stupně n, tedy $p_A(A)$ je lineární kombinací matic $A^0, A^1, \ldots, A^n$, kde u A^n je nenulový člen. Tedy $\exists t_0, \ldots t_n \in \mathbb{T}, t_n \neq 0$, že

$$t_0 A^0 + t_1 A^1 + \ldots + t_n A^n = 0_{n\times n}, \qquad = \frac{t_0}{-t_n} A^0 + \ldots + \frac{t_{n-1}}{-t_n} A_{n-1} = A^n.$$

Tedy A^n je lineární kombinací $A^0, \ldots, A^{n-1}$. Navíc pokud tuto rovnici přenásobíme (je jedno, jestli zleva nebo zprava, A se sebou a „se skaláry“ komutuje) A^i, $i = 0, 1, \ldots$, pak dostaneme A^{i+n} jako lineární kombinaci $A^i, \ldots, A^{i+n-1}$. Tedy indukcí můžeme každou matici A^{i+n} vyjádřit za pomoci $A^0, \ldots, A^{n-1}$ (vyjádřit za pomoci předchozích n, které umíme vyjádřit z indukční podmínky). Z toho už jednoduše plyne, že z A^i nám stačí pro generování $\mathcal{M}(A)$ pouze $A^0, \ldots, A^{n-1}$. □

Důkaz (c)
Jelikož A samo se sebou komutuje a podle Cayleyho-Hamiltonovy věty je (a protože A je dolní trojúhelníková, tedy se můžeme dívat jen na diagonálu):

$$(I_5 - A)^5 = -A^5 + 5A^4 - 10A^3 + 10A^2 - 5A + I_5 = 0_{5\times 5},$$

$$A(A^4 - 5A^3 + 10A^2 - 10A^1 + 5A^0) = I_5.$$

Zřejmě je v závorce A^{-1} (jelikož v součinu s A dává I_5). Tedy $[A^{-1}]_N = (5, -10, 10, 5, 1)$. □

Důkaz (b)
Podle pozorování 9.14 matice B nemá vlastní číslo 0, jelikož je regulární. Tím pádem $p_B(0) \neq 0$ (kde p_B je charakteristický polynom B), tedy p_B má nenulový absolutní člen. Tedy $p_B(\lambda)$ se dá vyjádřit jako $\lambda \cdot p_2(\lambda) + b = 0$, kde $b \neq 0$ a p_2 je polynom. Tedy $B \cdot (p_2(B))/(-b) = I_n$. Teď už stačí dokázat, že $(p_2(B))/(-b) = B^{-1} \in \mathcal{M}(A)$.

Jelikož $B \in \mathcal{M}(A)$, tak B je lineární kombinace $A^0, A^1, \ldots$. Protože lineární kombinace obsahuje pouze konečně mnoho nenulových prvků, tak ji lze samu se sebou vynásobit a výsledek roznásobit. Tedy B^i, $i \geq 0$ vypadá jako konečný součet členů, kde každý člen je součin i prvků $\mathbb{T}$ a i (ne nutně shodných) mocnin matice A. Ale A samo se sebou komutuje (a „komutuje se skaláry“), tak každý člen je tvaru tA^j, kde $t \in \mathbb{T}$, $j \geq 0$. B^i je tedy lineární kombinace mocnin A, tj. $B^i \in \mathcal{M}(A)$ a tedy i $p_2(B)/(-b) = B^{-1} \in \mathcal{M}(A)$ (jelikož je to nejvýše nčlená lineární kombinace B^i). □