Organizační úvod

Poznámka
Zkouška bude snad ústní.

Úvod

Věta 0.1 (Lebesgueova míra)

Existuje právě jedna borelovská míra λ^n v $\mathbb{R}^n$ taková, že

$$\lambda^n\left(^n_{i=1}[a_i,b_i]\right)=\prod_{i=1}^n(b_i-a_i)\,,-\infty<a_i\leq b_i<\infty,1\leq i\leq n.$$

Poznámka
Zúplněnou σ-algebru značíme B_0^n a platí $B^n\subsetneq B_0^n$ (pro $n\geq 2$ jednoduché, pro $n=1$ možná někdy příště).

λ^n je translačně a rotačně invariantní (posunutím a otočením se nezmění).

λ^n je σ-konečná.

λ^n je regulární (můžeme její hodnotu na množině aproximovat jejími hodnotami na otevřené nadmnožině a uzavřené podmnožině[a]).

[a]
$$\forall E\in B_0^n\ \forall\varepsilon>0\ \exists F\subset E\subset G, F \text{ uzavřená}, G \text{ otevřená}, \lambda^n(G\setminus F)<\varepsilon.$$

Definice 0.1

$\tilde{\mu}:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ je pramíra (premeasure) na algebře $\mathcal{A}$ podmnožin X, jestliže:

$$\tilde{\mu}(\emptyset)=0,$$

$$A_i\in\mathcal{A},\bigcup_i A_i\in\mathcal{A},A_i \text{ po dvou disjunktní} \implies \tilde{m}u\left(\bigcup_i A_i\right)=\sum_i\tilde{\mu}(A_i)\,.$$

Věta 0.2 (Hahn-Kolmogorov)

Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře $\mathcal{A}$. Pak existuje míra μ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\mu=\tilde{\mu}$ na $\mathcal{A}$. Je-li $\tilde{\mu}$ σ-konečná, je μ určená jednoznačně.

1 Konstrukce Lebesgueovy míry z vnější míry

Definice 1.1 (Vnější míra (outer measure))

Nechť $X \neq \emptyset$. Funkce $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ je vnější míra na X, jestliže:

$$\mu^*(\emptyset) = 0,$$

$$A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B), \text{ (monotonie)}$$

$$A_i \subset X \, (i \in \mathbb{N}) \implies \mu^*\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mu^*(A_i). \text{ (spočetná subadivita)}$$

Například

$$\mu^* \equiv 0,$$

$$\mu^* = \delta_x, x \in X,$$

$$\mu^*(A) = A,$$

$$\mu * (A) := 0, A = \emptyset, \mu * (A) := 1, A \neq \emptyset,$$

$$X = \mathbb{R}, \lambda^*(A) := \inf\left\{\sum_i |I_i|, A \subset \bigcup_i I_i, I_i \text{ otevřené intervaly}\right\}$$

Definice 1.2 (Měřitelnost vůči vnější míře)

Řekneme, že množina $A \subset X$ je μ^*-měřitelná, jestliže

$$\forall T \subset X : \mu^*(T) = \mu * (T \cap A) + \mu^*(T \setminus A).(*)$$

Značíme $\mathcal{A}_{\mu^*} := \{A \subset X | A \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná}\}$.

Poznámka

Ať μ^* je vnější míra na X, $Y \subset X$. Pak restrikce $\mu^*|_Y : A \mapsto \mu^*(A \cap Y)$ je vnější míra a platí:

$$\mathcal{A}_{\mu^*} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}|_Y$$

Důkaz

$$A \in \mathcal{A}_{\mu^*} : \mu^*|_Y(T) = \mu^*(T \cap Y) = \mu^*(T \cap Y \cap A) + \mu^*((T \cap Y) \setminus A) =$$
$$= \mu^*|_Y \, (T \cap A) + \mu^*|_Y(T \setminus A).$$

□

Věta 1.1 (Caratheodory)

$\mathcal{A}_{\mu^*}$ je σ-algebra na X a $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ je míra. Prostor $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ je úplný.

Důkaz

$\emptyset \in \mathcal{A}_\mu^*$ je zřejmé. Uzavřenost na komplement je také snadná, z definice $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Místo sjednocení ukážeme uzavřenost na konečný průnik: Víme $T \subset X : \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$, $\mu^*(T \cap A) = \mu^*(T \cup A \cup B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B)$ a $\mu^*(T \setminus (A \cap B)) = \mu^*((T \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu^*((T \setminus (A \cap B)) \setminus A) = \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A)$.

Tedy $\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \setminus (A \cap B))$. Tudíž $\mathcal{A}_{\mu^*}$ je algebra.

Nyní chceme ukázat, že μ^* je σ-aditivní na $\mathcal{A}_{\mu^*}$: Buďte $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ po dvou disjunktní. Volbou $T = A_1 \cup A_2$ dostaneme $\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \implies \mu^*$ je konečně aditivní na $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i) = \lim_{n \to \infty} \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \leq \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

Opačná nerovnost plyne ze spočetné subaditivity. To znamená, že $\mu^* \left(\bigcup_i A_i \right) = \sum_i \mu^* (A_i)$, $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, po dvou disjunktní.

$\mathcal{A}_{\mu^*}$ je uzavřená na disjunktní spočetné sjednocení: $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, po dvou disjunktní, $T \subset X$.

$$\mu^*(T) = \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) + \mu^* \left(T \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \geq \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) + (\mu^*|_T) \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = TODO$$

Limitním přechodem $n \to \infty$ dostaneme

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*|_T)(A_i) = \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \right) (\mu^*|_T) \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

Z tohoto všeho plyne, že $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ je míra na σ-algebře $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Zbývá už jen úplnost:

$$\mu^*(A) = 0, T \subset X \implies \mu^*(T) \geq \mu^*(T \setminus A) = \underbrace{\mu^*(T \cap A)}_{=0} + \mu^*(T \setminus A) \implies A \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

$\square$

TODO!!!

Věta 1.2 (Regularita Lebesgueovy míry)

Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$. Je ekvivalentní:

1. $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$,

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists F \subset E \subset G$, *$F$ uzavřená, G otevřená,* $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$,

3. $\exists A \subset E \subset B$, $A, B \in \mathcal{B}^n$, $\lambda^n(B \setminus A) = 0$,

4. $E \in \mathcal{B}_0^n$.

Důkaz

$1 \implies 2$: Mějme $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$, $\varepsilon > 0$. Nechť nejprve $\lambda^{n*}(E) < \infty$. Pak $\exists I_i \in O_n$, $E \subset \bigcup_i I_i$, $\sum_i v(I_i) < \lambda^{n*}(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. Položme $G := \bigcup_i I_i$ (otevřená), $E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Je-li $\lambda^{n*}(E) = \infty$, pak ze σ-konečnosti je $E = \bigcup_m E_m$, $E_m := E \cap [-m, m]^n$. $\lambda^{n*}(E_m) < \infty \implies \exists G_m$ otevřená, $E_m \subset G_m$, $\lambda^n(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$. $G := \bigcup_m G_m$ otevřené, $E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus E) \leq \sum_m \lambda^n(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$E^c \in \mathcal{A}_{\lambda^{m*}} \implies \exists H$ otevřená, $E^c \subset H$, $\lambda^n(H \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. $F := H^c$ uzavřená, $F \subset E$, $\lambda^n(E \setminus F) = \lambda^n(E \setminus H^c) = \lambda^n(H \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. TODO

$2 \implies 3$: Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ splňuje 2.

$$\forall j \in \mathbb{N}\ \exists F_j \subset E \subset G_j, F_j \text{ uzavřená}, G_j \text{ uzavřená}, \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}.$$

Položme $A := \bigcup_j F_j$, $B := \bigcap_j G_j$, $A, B \in \mathcal{B}^n$, $A \subset E \subset B$. $\lambda^n(B \setminus A) \leq \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}$ pro libovolné $j \in \mathbb{N}$, tedy $\lambda^n(B \setminus A) = 0$.

$3 \implies 4$: Jsou-li $A \subset E \subset B$ jako v 3, pak $B \setminus A$ je λ^n-nulová množina, a tedy $E \in \mathcal{B}_0^n$.

$4 \implies 1$: $\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ obsahuje $\mathcal{B}^n$ a nulové množiny, tedy obsahuje $\mathcal{B}_0^n$. □

Věta 1.3 (Luzinova (běžně bývá obecnější))

Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lebesgueovsky měřitelná. Buď $\varepsilon > 0$. Pak existuje $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená taková, že $\lambda^n(G) < \varepsilon$ a restrikce $f|_{G^c}$ je spojitá.

Důkaz

Buď $U_1, U_2, \dots$ posloupnost všech otevřených intervalů s racionálními koncovými body. f je lebesgueovsky měřitelná, tedy $\forall j, f^{-1}(U_1) \in \mathcal{B}_0^n$. Podle regularity pak $\exists F_j \subset f^{-1}(U_j) \subset G_j$, F_j uzavřená, G_j otevřená, $\lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$. Položme $G := \bigcup_j (G_j \setminus F_j)$. Zřejmě G je otevřená, $\lambda^n(G) \leq \sum_j \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \varepsilon$.

Pro restrikci $g := F|_{G^c}$ platí:

$$g^{-1}(U_j) = \{x \in G^c : f(x) \in U_j\} = f^{-1}(U_j) \cap G^c = G_j \cap G^c, j \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě $U \subset \mathbb{R}$ otevřená $\implies U = \cup_{U_j \subset U} U_j$, tedy $g^{-1}(U) = \bigcup_{U_j \in U} g^{-1}(U_j)$ otevřená množina v G^c, tedy g je spojitá na G^c. □

Poznámka
Obecně nelze požadovat $\lambda^n(G) = 0$. Např. charakteristická funkce diskontinua kladné míry (podobně jako Cantorovo diskontinuum, ale nenulové míry), které dostaneme tak, že z prostředků intervalů v i-tém kroku vždy odebereme intervaly délky a_i tak, aby $a_1 + 2a_2 + 4a_3 + \ldots < 1$. ($G$ z minulé věty pak bude sjednocení malých okolíček krajních bodů odebíraných intervalů.)

2 Regularita borelovských měr

Definice 2.1 (Regulární borelovská míra)

Borelovská míra μ na topologickém (metrickém) prostoru X je regulární, jestliže $\forall B \in \mathcal{B}(X) : \mu(B) = \inf\{\mu(G) | B \subset G, G \text{ otevřená}\}$.

Poznámka
1) Často se hovoří o vnější regularitě (outer regular measure). 2) Pro konečné míry: μ je regulární $\implies \forall B \in \mathcal{B} : \mu(B) = \sup\{\mu(F) | F \subset B, F \text{ uzavřená}\}$.

Věta 2.1

Každá konečná borelovská míra na metrickém prostoru je regulární.

Důkaz
(X, ϱ) metrický prostor, μ borelovská míra na X, $\mu(X) < \infty$. Označme

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}(X) | \ \varepsilon > 0 \ \exists F \subset B \subset G, F \text{ uzavřená}, G \text{ otevřená}, \mu(G \setminus F) < \varepsilon\}.$$

Ukážeme $\mathcal{D} := \mathcal{B}(X)$. $\mathcal{D}$ obsahuje všechny množiny: $F \subset X$ uzavřená, $F_{<\varepsilon} := \{x \in X | \ \varrho(x, F) < \varepsilon\}$ (otevřená). Zřejmě $F_{<\frac{1}{j}} \searrow F$, $j \to \infty$ z uzavřenosti F. μ konečna $\implies$ (spojitost míry) $\mu F_{<\frac{1}{j}} \to \mu(F)$.

$\mathcal{D}$ je σ-algebra: $\emptyset \in \mathcal{D}$, $D \in \mathcal{D} \implies D^c \in \mathcal{D}$:

$$F \subset D \subset G, \mu(G \setminus F) < \varepsilon \implies G^c \subset D^c \subset F^c, \mu(F^c \setminus G^c) < \varepsilon.$$

$D_i \in \mathcal{D} \implies \bigcup_i D_i \in \mathcal{D}$:

$$\exists F_i \subset D_i \subset G_i, \mu(G_i \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

$$TODO!$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} F_i \subset \cup_{i=1}^{\infty} D_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i, N \ \in \mathbb{N}.$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \setminus \bigcup_{i=1}^{F} i$$

$\square$

Poznámka
σ-konečné míry nemusí být regulární, viz prostor spočetně přímek procházejících počátkem v $\mathbb{R}^2$.

Definice 2.2 (Těsnost (= vnitřní regularita))

Borelovská míra μ na metrickém (topologickém) prostoru X je těsná (= tight), jestliže $\forall B \in \mathcal{B}(X) : \mu(B) = \sup\{\mu(K) | K \subset B \text{ kompaktní}\}$.

Poznámka
μ je Radonova míra, jestliže je těsná a konečná na kompaktech.

Pokud μ je konečná a těsná, pak už je *mu* regulární.

Jestliže μ je konečná a regulární a $\mu(X) = \sup\{\mu(K) | K \subset X \text{ kompaktní}\}$, pak μ je těsná.

Věta 2.2

Pokud μ je konečná borelovská míra na úplném separabilním metrickém prostoru, potom už je těsná.

Důkaz
Stačí ukázat $\mu(X) = \sup\{\mu(K)|K \subset X \text{ kompaktní}\}$: $S = \{x_1, x_2, \dots\} \subset X$ hustá spočetná (ze separability). $\forall n \in \mathbb{N} : \bigcup_i \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i) = X$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak $\forall n\ \exists k_n$: $\mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ (ze spojitosti míry).

Definujeme $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)$ ($\in \mathcal{B}(X)$). A je totálně omezená (tzn. $\forall \varepsilon > 0\ \exists F \subset A$ kompaktní tak, že $A \subset \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x)$). $\overline{A}$ je totálně omezená a uzavřená $\implies$ $\overline{A}$ je úplný MP (+ totálně omezený), tedy $\overline{A}$ je kompaktní.

$$\mu(X \setminus \overline{A}) \leq \mu(X \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)\right)\right).$$

□

3 Věta o rozšíření míry

Věta 3.1 (Hahn-Komogorov)

Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ $\implies$ existuje míra μ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\mu = \tilde{\mu}$ ne $\mathcal{A}$. Je-li $\tilde{\mu}$ σ-konečná, je μ určena jednoznačně.

Důkaz
Pro $E \subset X$ položme $\mu^*(E) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)|A_i \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}$. Ověříme, že μ^* je vnější míra.

$\forall A \in \mathcal{A} : \mu^*(A) = \tilde{\mu}(A)$. Zřejmě $\mu^*(A) \leq \tilde{\mu}(A)$, jelikož můžeme pokrýt A množinami $A, \emptyset, \emptyset, \dots$. Pro $\geq$ mějme $A \subset \bigcup_i A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$. $B_1 := A_1 \cap A$, $B_2 := (A_2 \cap A) \setminus B_1$, … O nich víme, že $A = \bigcup_i B_i$, B_i po dvou disjunktní, $B_i \in \mathcal{A}$. $\tilde{\mu}(A) = \sum_i \tilde{\mu}(B_i) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i)$, tedy z definice infima $\tilde{\mu}(A) \leq \inf_{A_i} \sum_i \tilde{\mu}(A_i) = \mu^*(A)$.

Zbývá ukázat, že $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$. TODO.

Jednoznačnost: $\mathcal{A}$ uzavřená na konečné průniky, $\tilde{\mu}$ je σ-konečná $\implies$ $\exists A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \nearrow X, \tilde{\mu}(A_n) < \infty$ $\implies$ μ je jednoznačně určena (věta o jednoznačnosti míry, TMI1). □

Poznámka (Zobecnění příkladu z TMI1)
$E =_{i=1}^{\infty} E_i$, E_i úplné separabilní metrické prostory (např. $E_i = \mathbb{R}$), $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$ … $E_I = E_i$, E, E_I metrické prostory. $\pi_I : E \to E_I$ kanonická projekce. A následující věta:

Věta 3.2 (Daniell-Koleuogorov)

E_i úplné separabilní metrické prostory, $i \in \mathbb{N}$. Nechť pro každou $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$ existuje borelovská pravděpodobnostní míra μ_I na E_I. A nechť je splněna projektivní vlastnost:

$$\emptyset \neq I \subset J \subset \mathbb{N} \text{ konečná}, \forall B \in \mathcal{B}(E_I) : \mu_I(B) = \mu_J\left(\left(\pi_I^J\right)^{-1}(B)\right),$$

pak $\exists!$ borelovská míra μ na $E =_{i=1}^{\infty} E_i$ taková, že $\forall \emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$ konečná, $\forall B \in \mathcal{B}(E_I)$: $\mu(\pi_I^{-1}(B) = \mu_I(B))$.