Příklad (8.1)
V prostoru $\mathbf{V}$ reálných polynomů jedné proměnné x stupně nejvýše 3 (s běžnými operacemi) uvažujme podprostor $\mathbf{W}$ určený množinou

$$\mathbf{W} = \{f \in \mathbf{V} : f(-2) = 0\}.$$

Najděte nějakou bázi prostoru $\mathbf{W}$.

Řešení
Každý polynom proměnné x je dělitelný všemi $x - r$, kde r je kořen, tedy každý náš polynom $f(x)$ můžeme vyjádřit jako $(x+2)g(x)$, kde $g(x) = \frac{f(x)}{x+2}$ je polynom stupně nejvýše 2 (pokud by měl větší stupeň, tak po vynásobení $(x+2)$ dostaneme polynom stupně větší než 3). Prostor polynomů stupně nejvýše dva má bázi například $(1, x, x^2)$ (z definice polynomu), tedy každý polynom (a naopak žádné jiné) $f(x) = (x+2)g(x)$ vyjádříme právě jedním způsobem jako lineární kombinaci $((x+2), x(x+2), x^2(x+2)) = ((x+2, x^2+2x, x^3+2x^2))$, tedy tato posloupnost je báze.

Příklad (8.2)
Ve vektorovém prostoru $\mathbf{V} \leq \mathbb{Z}_5^{2\times 2}$ máme báze B a C. Určete bázi C, víte-li, že matice přechodu od báze B k bázi C je A a platí

$$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 02 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 11 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 30 & \end{pmatrix}, \mathbf{V} = \mathrm{LO}\left\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\right\},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení
Podle definice 5.78 je matice přechodu od báze B k bázi C definována jako $A = [id]_C^B = ([\mathbf{v}_1]_C | [\mathbf{v}_2]_C | [\mathbf{v}_3]_C)$. Tedy při značení $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ získáváme:

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$$