Příklad (3.1)
Označme $\partial^{(2)} : \mathcal{C}_2(\Omega) \to \mathcal{C}_1(\Omega)$; $\partial^{(2)}(c) = \partial c$ a $\partial^{(1)} : \mathcal{C}_1(\Omega) \to \mathcal{C}_0(\Omega)$; $\partial^{(1)}(c) = \partial c$ zobrazení, které danému řetězci přiřadí jeho hranici.

1. Napište explicitní tvar řetězce ∂I_2 a ∂I_1.
2. Napište explicitní tvar řetězce $\partial^{(2)}\varphi$, resp. $\partial^{(1)}$ pro $\varphi \in S_2(\Omega)$, resp. pro $\varphi \in S_1(\Omega)$.
3. Ukažte, že $\partial^{(2)} \circ \partial^{(1)}$ je triviální zobrazení.

Řešení
1. Postupujeme přesně podle definice:

$$\partial I_2 = \sum_{j=1}^{2} (-1)^j (I^2_{(j,0)-I^2_{j,1}}) = -I^2_{(1,0)} + I^2_{(1,1)} + I^2_{(2,0)} - I^2_{(2,1)},$$

$$\partial I_1 = -I^1_{(1,0)} + I^1_{(1,1)}.$$

2. Podle definice je $\partial\varphi := \varphi \circ \partial I_k$, tedy

$$\partial^{(2)}\varphi = \varphi \circ \partial I_2 = -\varphi \circ I^2_{(1,0)} + \varphi \circ I^2_{(1,1)} + \varphi \circ I^2_{(2,0)} - \varphi \circ I^2_{(2,1)},$$

resp.

$$\partial^{(1)}\varphi = \varphi \circ \partial I_1 = -\varphi \circ I^1_{(1,0)} + \varphi \circ I^1_{(1,1)}.$$

3. Mějme tedy $c \in C_2(\Omega)$. Víme, že $\partial c := \sum_{i \in A} n_i \partial \varphi_i$, tedy hranice můžeme počítat pro každou singulární plochu zvlášť. Nechť je tedy $\varphi \in S_2(\Omega)$. Za pomoci 2. a definice získáme:

$$\partial^{(2)} \circ \partial^{(1)}(\varphi) = \partial^{(1)} \left(-\varphi \circ I^2_{(1,0)} + \varphi \circ I^2_{(1,1)} + \varphi \circ I^2_{(2,0)} - \varphi \circ I^2_{(2,1)}\right) =$$

$$= -\varphi \circ I^2_{(1,0)} \circ \partial I_1 + \varphi \circ I^2_{(1,1)} \circ \partial I_1 + \varphi \circ I^2_{(2,0)} \circ \partial I_1 - \varphi \circ I^2_{(2,1)} \circ \partial I_1 =$$

Nyní si můžeme všimnout, že každý člen se nám v rovnici vyskytuje 2 krát:

$$(-1)^{j+k+1+1} \varphi \circ I^2_{(1,j)} \circ I^1_{(1,k)} + (-1)^{j+k+2+1} \varphi \circ I^2_{(2,k)} \circ I^1_{(1,j)} = 0.$$

Takto se odečtou všechny členy, tj. $\partial^{(2)} \circ \partial^{(1)}(\varphi) = 0$.

Příklad (3.2)
Ukažte, že platí Stokesova věta pro řetězce: Je-li $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ a $c \in C_k(\Omega)$, pak

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

Důkaz
Integrál na řetězcích jsme si definovali jako lineární zobrazení, tedy stačí větu dokázat na singulárních plochách (prvky báze $\mathcal{C}_k(\omega)$). Mějme tedy $\varphi \in S_k$, potom z definic:

$$\int_\varphi d\omega = \int_{\operatorname{int} I_k} \varphi^*(d\omega) = \int_{\operatorname{int} I_k} d\varphi^*(\omega) = \int_{\operatorname{int} I_k} \frac{\partial \varphi^*(\omega)}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi^*(\omega)}{\partial x_k} dx_k.$$

A následně z linearity integrálu a Newtonovy formule:

$$\int_\varphi d\omega = \int_{\operatorname{int} I_k} \frac{\partial \varphi^*(\omega)}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \int_{\operatorname{int} I_k} \frac{\partial \varphi^*(\omega)}{\partial x_k} dx_k =$$

$$= \int_{\operatorname{int} I^k_{(1,1)}} \varphi^*(\omega) - \int_{\operatorname{int} I^k_{(1,0)}} \varphi^*(\omega) - \int_{\operatorname{int} I^k_{(2,1)}} \varphi^*(\omega) + \int_{\operatorname{int} I^k_{(2,0)}} \varphi^*(\omega) \ldots =$$

$$= \int_{\partial I_k} \varphi^*(\omega) = \int_{\partial \varphi} \omega.$$

$\square$

Příklad (3.3)
Ukažte, že zobrazení $\{c \in \mathcal{C}_k(\Omega), \omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)\} \mapsto \int_c \omega$ je dualita, tj. bilineární zobrazení součinu $\mathcal{C}_k(\Omega) \times \mathcal{E}^k(\Omega)$ do $\mathbb{R}$ a že Stokesova věta říká, že zobrazení, že zobrazení ∂ a d jsou duální operátory vzhledem k této dualitě.

Důkaz
Integrál je lineární zobrazení vzhledem k $c \in \mathcal{C}_k(\Omega)$ přímo z definice. Linearitu vzhledem k $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ dokážeme zase pro singulární plochu (a pak linearitou v mezích rozšíříme):

$$\varphi \in S_k(\Omega), \qquad \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{C}_k(\Omega):$$

$$\int_\varphi (a\omega_1 + \omega_2) = \int_{I_k} \varphi^*(a\omega_1 + \omega_2) = \int_{I_k} \varphi^*(a\omega_1) + \varphi^*\omega_2 =$$

$$\int_{I_k} \det(\operatorname{Jac}\varphi)(a\omega_1\varphi)dx_1 \ldots + \int_{I_k} \varphi^*\omega_2 = a\int_{I_k} \det(\operatorname{Jac}\varphi)(\omega_1\varphi)dx_1 \ldots + \int_\varphi \omega_2 =$$

$$= a\int_{I_k} \varphi^*\omega_1 + \int_\varphi \omega_2 = a\int_\varphi \omega_1 + \int_\varphi \omega_2.$$

Stokesova věta nám potom říká, že když aplikujeme ∂ na c. pak dostaneme přesně stejný obraz, jako když aplikujeme d na ω. $\square$

Příklad
Ukažte, že pro $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ jsou prostory $H_1(\Omega)$ a $H^1_{dR}(\Omega)$ netriviální. De Rhamovy kohomologické grupy se definují takto:

$$H^1_{dR}(\Omega) = \left\{\omega \in \mathcal{E}^1(\Omega) | d\omega = 0\right\} / \left\{\omega \in \mathcal{E}^1(\Omega) | \exists f \in \mathcal{E}^0(\Omega), \omega = df\right\}.$$

Důkaz
K důkazu použijeme $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ a $\varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, $t \in [1,1]$, $\varphi \in S_1(\Omega)$. Nejprve hranice a diferenciál:

$$\partial\varphi = \varphi \circ \partial I_1 = \varphi \circ („1“ - „0“) = (\cos(2\pi), \sin(2\pi)) - (\cos(0), \sin(0)) = 0,$$

$$d\varphi = \left(-2x\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\right) + \frac{1}{x^2+y^2}\right) dy \wedge dx - \left(\frac{1}{x^2+y^2} - 2y\left(\frac{y}{(x^2+y^2)^2}\right)\right) dx \wedge dy =$$

$$= -2\frac{1}{x^2+y^2} dx \wedge dy + \frac{2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy = 0.$$

Tedy $\omega \in \{f \in \mathcal{E}^1(\Omega) | df = 0\}$ a $\varphi \in \{c \in \mathcal{C}_1(\Omega) | \partial c = 0\}$.

Následně integrál:

$$\int_\varphi \omega = \int_{I_1} \frac{\cos(2\pi t)(2\pi\cos(2\pi t)dt) - \sin(2\pi t)(-2\pi\sin(2\pi t)dt)}{\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)} = \int_{I_1} 2\pi\frac{1}{1}dt = 2\pi.$$

Ale podle Stokesovy věty, kdyby existovalo $f \in \mathcal{E}^0(\Omega), df = \omega$, nebo $c \in \mathcal{C}_2(\Omega), \partial c = \varphi$, potom

$$\int_{\partial\varphi} f = \int_\varphi df = \int_\varphi \omega = 2\pi,$$

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = \int_\varphi \omega = 2\pi,$$

ale víme, že složení operátoru hranice (resp. diferenciál) se sebou je triviální, tedy vlevo je integrál z 0 nebo přes 0, tedy 0. Tudíž takové f, c neexistuje, tedy dostáváme, že $\varphi \notin \{f \in \mathcal{E}^1(\Omega) | \exists g \in \mathcal{E}^0(\Omega), f = dg\}$ a $phi \notin \{c \in \mathcal{C}_1(\Omega) | \exists e \in \mathcal{C}_2, \partial e = c\}$. Tudíž $H_1(\Omega)$ a $H^1_{dR}(\Omega)$, jakožto podíly různých grup, jsou netriviální. $\square$