Z poznámek spolužáků

Vstupní informace

Věta 0.1 (Lebesgue)

TODO?

Věta 0.2 (Luzinova)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *měřitelná,* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Pak* $\forall \varepsilon > 0\ \exists U \subseteq \Omega, |U| \leqslant \varepsilon : f \in C(\Omega \backslash U)$.

Věta 0.3 (Egorova)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *měřitelná,* $f_n, f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $f_n \to f$ *v* $L^1_{loc}(\Omega)$. *Pak* $\forall \varepsilon > 0\ \exists U \subseteq \Omega, |U| < \varepsilon : f_n \to f$ *v* $C(\Omega \backslash U)$.

Věta 0.4 (Lebesgueova o majorantě)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *měřitelná,* $f_n \to f$ *skoro všude na* Ω, $g \in L^1(\Omega)$ *taková, že* $|f_n| \leqslant g$ *skoro všude na* Ω. *Pak* $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n = \int_\Omega f$.

Věta 0.5 (Vitali)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *měřitelná a omezená,* $f_n \to f$ *skoro všude na* Ω, $\{f_n\}$ *stejnoměrně equi-integrovatelná*[a]. *Pak* $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n = \int_\Omega f$.

[a] $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall n\ \forall U \subset \Omega, |U| < \delta : \int_U |f_n| \leqslant \varepsilon$.

Věta 0.6 (Fatou)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *měřitelná a omezená,* $f_n \to f$ *skoro všude na* Ω, $\{f_n\}$ *stejnoměrně equi-integrovatelná,* $f_n \geqslant 0$. *Pak* $\liminf \int_\Omega f_n \geqslant \int_\Omega f$.

Definice 0.1 (Regularizační jádro, regularizace funkce)

$\mu \in C_0^\infty(B_1(\mathbf{o}))$ nezáporná, radiálně symetrická, $\int_{B_1(\mathbf{o})} \mu(x)dx = 1$.

$\mu_\varepsilon(x) \coloneqq \frac{1}{\varepsilon^d}\mu\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

$f \in L^p(\Omega)$, f rozšíříme hodnotou 0 na $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$. Pak definujeme $f_\varepsilon \coloneqq \mu_\varepsilon * f = \int_{\mathbb{R}^d} \mu_\varepsilon(x-y)f(y)dy$.

Důsledek
$f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $f_\varepsilon \to L^p(\Omega)$ pro $p \in [1, \infty)$.

Pro $p = \infty$ je $f_\varepsilon \to f$ skoro všude a $f_\varepsilon \rightharpoonup^* f$ v $L^\infty(\Omega)$.

Věta 0.7 (Reflexivní, separabilní, slabá a slabá* konvergence)

$L^p(\Omega)$ je Banachův, separabilní pro $p \in [1,\infty)$, reflexivní pro $p \in (1,\infty)$.

Pro $\{f_n\}$ omezenou v $L^p(\Omega)$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ měřitelnou platí:

- *$p \in (1,\infty)$: Pak $\exists$ podposloupnost f_{n_k} a f tak, že $f_{n_k} \rightharpoonup f$ v $L^p(\Omega)$.*
- *$p = \infty$: Pak $\exists$ podposloupnost a f tak, že $f_{n_k} \rightharpoonup^* f$ v $L^\infty(\Omega)$.*
- *$p = 1$: Pak $\exists$ podposloupnost a f tak, že $f_{n_k} \rightharpoonup^* f$ v $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$.*

Věta 0.8 (Shauderova o pevném bodu)

$F : X \to X$, kde X je Banachův prostor a F spojitá a kompaktní, U konvexní, neprázdná a uzavřená v X tak, že $F(U) \subset U$. Pak $\exists x \in U : F(x) = x$.

Věta 0.9 (Brouwerova o pevném bodu)

$F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ spojitá, $U \subseteq \mathbb{R}^d$ uzavřená konvexní neprázdná tak, že $F(U) \subseteq U$. Pak $\exists x \in U : F(x) = x$.

Věta 0.10 (Nemytskii)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $N \in \mathbb{N}$, $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Caratheodorova funkce[a] taková, že

$$|f(x,y)| \leqslant g(x) + c \cdot \sum_{i=1}^N |y_i|^{p_i/p}, \qquad p_i, p \in [1,\infty), g \in L^p(\Omega).$$

Pak $\forall \mathbf{u} : (u_1, \dots, u_N)$, $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$ je funkce $f(x, \mathbf{u}(x))$ měřitelná a $u \mapsto f(\cdot, \mathbf{u}(\cdot))$ je spojitá z $L^{p_1} \times \dots \times L^{p_N}(\Omega)$ do $L^p(\Omega)$.[b]

Důkaz

TODO? (Nemusíme umět? Jen důkaz nějakého výsledku někde dále…) □

[a] $f(\cdot, y)$ měřitelná $\forall y \in \mathbb{R}^N$, $f(x,\cdot)$ spojitá pro skoro všechna $x \in \Omega$.

[b] Tj. pokud $\forall i : u_i^n \to u_i$ v L^{p_i}, pak $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f(\cdot, u_1^n(\cdot), \dots, u_N^n(\cdot)) - f(\cdot, u_1(\cdot), \dots, u_N(\cdot))|^p = 0$.

Poznámka

f_n omezená posloupnost v $L^1(\Omega)$, pak následující je ekvivalentní:

- $\exists n_k : f_{n_k} \rightharpoonup f$ v $L^1(\Omega)$;
- $\{f_n\}$ stejnoměrně equi-integrovatelná;
- $\exists F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, že $\frac{F(s)}{s} \to \infty$ pro $s \to \infty$ a $\sup_n \int_\Omega F(f_n(x))dx < \infty$.

Věta 0.11 (Rademacher)

Lipschitzovské funkce mají derivaci skoro všude.

1 Sobolevovy prostory

Věta 1.1 (Lokální aproximace $W^{k,p}$ hladkými funkcemi)

$p \in [1, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *otevřená*, $f \in W^{k,p}(\Omega)$. *Nechť* $\Omega_\varepsilon \coloneqq \{x \in \Omega : B(x, \varepsilon) \subseteq \Omega\}$. *Pak*

1. $D^\alpha(f_\varepsilon) = (D^\alpha f)_\varepsilon$ *v* Ω_ε, $\forall |\alpha| \leqslant k$;
2. $\forall \Omega' \subseteq \overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ *otevřenou:* $f_\varepsilon \to f$ *v* $W^{k,p}(\Omega')$.

Důkaz (1.)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f_\varepsilon(x)) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_\Omega \mu_\varepsilon(x-y) f(y) dy\right) \overset{\text{Lebesgue major.}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu_\varepsilon(x-y) f(y)) dy =$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu_\varepsilon(x-y)) dy = -\int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\partial}{\partial y_i}(\mu_\varepsilon(x-y)) dy =$$
$$= -\int_{B_\varepsilon(x)} f(y) \frac{\partial}{\partial y_i}(\mu_\varepsilon(x-y)) dy = -\int_\Omega f(y) \frac{\partial}{\partial y_i}(\mu_\varepsilon(x-y)) dy \overset{\text{def}}{=}$$
$$= \int_\Omega \mu_\varepsilon(x-y) \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) dy = \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)_\varepsilon (x).$$

□

Důkaz (2.)

Nechť $\varepsilon_0 > 0$. $\forall \varepsilon < \varepsilon_0 : \Omega' \subseteq \Omega_\varepsilon$. Pak $f_\varepsilon \to f$ v $L^p(\Omega_{\varepsilon_0})$, tedy i v $L^p(\Omega')$. Navíc $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\varepsilon = \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} \to \frac{\partial f}{\partial x_i}$ v $L^p(\Omega_{\varepsilon_0})$, tedy i v $L^p(\Omega')$. □

Poznámka

Pro $p = \infty$ v důkazu výše selhává argument $u_\varepsilon \to u$ v $L^\infty(\Omega)$. Neboť limita hladkých musí být hladká, ale $L^\infty(\Omega)$ obsahuje i nehladké funkce.

Věta 1.2 (Skládání lipschitzovské a sobolevovské funkce)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *otevřená, omezená,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *lipschitzovská,* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *kde* $p \in [1, \infty]$. *Pak* $(f(u) - f(0)) \in W^{1,p}(\Omega)$ *a* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(u) = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \chi_{\{x : u(x) \notin S_f\}}$, *kde* $S_f \coloneqq \{t \in \mathbb{R} | \nexists f'(t)\}$ *jsou singulární body* f.

Poznámka
Z PDR1 víme, že $f \circ u \in W^{1,2}$, neboť $\frac{1}{h^2}|f(u(x+h\cdot e_i)) - f(u(x))|^2 \leqslant \frac{L^2}{h^2}|u(x+h\cdot e_i) - u(x)|^2$, která je podle PDR1 integrovatelná.

Důkaz ($f \in C^1$)
Definujme $f_{LIP} \coloneqq \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} < \infty$. Platí $\sup|f'(x)| \leqslant f_{LIP}$. Pak $|f(x) - f(0)| \leqslant f_{LIP} \cdot |u(x) - 0|$ a $\int_\Omega |f(x) - f(0)|^p \leqslant \int_\Omega f_{LIP}^p |u-0|^p < \infty$. Tedy $f(u) - f(0) \in L^p(\Omega)$.

Ukážeme $\frac{\partial f(u)}{\partial x_i} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}$ (řetízkové pravidlo pro C^1, kde ale u není nutně C^1). Z toho pak

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial f(u)}{\partial x_i}\right|^p = \int_\Omega |f'(u)|^p \cdot \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p \leqslant f_{LIP}^p \int_\Omega |\nabla u|^p < \infty,$$

tedy $f(u) - f(0) \in W^{1,p}$. □

Důkaz (Řetízkové pravidlo)
u_ε hladká, tedy $\frac{\partial f(u_\varepsilon)}{\partial x_i} = f'(u_\varepsilon) \cdot \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}$ v Ω_ε. $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varepsilon_0 > 0$ tak, že $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \Omega_{\varepsilon_0}$. Pak

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega f(u_\varepsilon)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega f'(u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\varphi dx \overset{\text{Vitali}}{=} \\ &= -\int_\Omega f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi dx.\end{aligned}$$

□

Důkaz ($f(u) = u_+ \coloneqq \max(0,u)$)
Definujme $f_\varepsilon(u) = \sqrt{u^2+\varepsilon^2} - \varepsilon$ (pouze v tomto důkazu) pro $u \geqslant 0$ a nula jinak. Pak $f_\varepsilon(u) \to f(u)$ v $L^p(\Omega)$ a navíc $f_\varepsilon'(u) = \frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}} \to 1$, je-li $u > 0$ a 0 jinak. Dále

$$\frac{\partial f_\varepsilon(u)}{\partial x_i} = f_\varepsilon'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}\chi_{\{u>0\}} = \frac{\partial u_+}{\partial x_i}.$$

Platí $\int_\Omega f_\varepsilon(u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega f_\varepsilon'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi$.

$$\int_\Omega f(u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_\Omega f_\varepsilon(u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_\Omega f_\varepsilon'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\chi_{\{u>0\}}\varphi \implies$$

$$\implies \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}\chi_{\{u>0\}} \implies \nabla u_+ = \nabla u \chi_{\{u>0\}}$$

analogicky $\nabla u_- = \nabla u \chi_{u<0}$. $\nabla u = \nabla u_+ + \nabla u_- = \nabla\chi_{u\neq 0} \implies \nabla u = 0$ skoro všude na $\{u=0\} \implies \nabla u = 0$ skoro všude na $\{u=c\}$ $\forall c \in \mathbb{R}$. □

Důkaz (f obecná)
$f_\varepsilon \in C^1$, $f_\varepsilon \to f$ v $C(\mathbb{R})$, $f'_\varepsilon(s) \to f'(s)$ $\forall s \notin S_f$ a $\|f'_\varepsilon\|_\infty \leqslant f_{LIP}$. Platí

$$\int_\Omega f(u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} f_\varepsilon(u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_\Omega \underbrace{f'_\varepsilon(u)}_{\in L^\infty}\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\varphi}_{\in L^1} = -\int_\Omega f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\chi_{u\notin S_f}.$$

(Platí $f'_\varepsilon(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \to f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\chi_{u\notin S_f}$, neboť pro $u \notin S_f$ je to jasné, pro S_f spočetnou rozepsáním na sumu přes $u^{-1}(c)$ pro $c \in S_f$: $\int_\Omega f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\chi_{u\in S_f} = 0$ a pro S_f nespočetnou neřešíme (viz další poznámku)). □

Poznámka ($|\nabla u| \cdot \chi_{\{u\in S_f\}} = 0$ skoro všude)
Idea: v 1D cca:

$$\int_0^x u'(t)\chi_{\{u\in S_f\}}dt =: F(x)\text{"} = \text{"}\int \chi_{u\in S_f}du = 0 \implies$$

$\implies F(x) = 0 \implies u'\chi = 0$ skoro všude.

Obecný případ: $u \in W^{1,1}(\Omega) \implies u(x_1,\dots,x_{d-1},s)$ je AC vzhledem k s dle Bepa–Levi charakterizace.

Věta 1.3 (Charakterizace $W^{1,p}$ pomocí diferencí)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *omezená a otevřená*, $\Omega_\delta := \{x \in \Omega | B(x,\delta) \subset \Omega\}$, $u_i^n(x) := \frac{1}{n}(u(x + h\cdot e_i) - u(x))$, $p \in [1,\infty]$. *Pak*

1. $u \in W^{1,p}(\Omega) \implies \forall\delta\ \forall h < \frac{\delta}{2} : \|u_i^h\|_{L^p(\Omega_\delta)} \leqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)} \leqslant k$;
2. $p \in (1,\infty]$ *a* $\sup_{\delta>0}\sup_{h<\frac{\delta}{2}}\|u_i^h\|_{L^p(\Omega_\delta)} \leqslant K \implies \exists\frac{\partial u}{\partial x_i} \wedge \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)} \leqslant K$;
3. $p \in [1,\infty)$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Pak* $u_i^h \xrightarrow{h\to 0_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ *v* $L^1_{loc}(\Omega)$.

Důkaz (2.)
Fix $\Omega' \subseteq \overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ $(\exists_\delta : \Omega' \subset \Omega_\delta)$. Dle předpokladu $\|u_i^n\|_{L^p(\Omega')} \leqslant K$. Pokud je $p \in (1,\infty)$, pak L^p je reflexivní, tedy existuje k_n, že $u_i^{k_n} \rightharpoonup \overline{u_i}$ v $L^p(\Omega')$. Jinak $(p = \infty)$ má L^∞ separovatelný preduál $\implies \exists k_n : u_i^{k_n} \rightharpoonup^* \overline{u_i}$ v $L^\infty(\Omega')$.

Norma v Banachově prostoru je lsc $\implies \|\overline{u_i}\|_{L^p(\Omega')} \leqslant \liminf \|u_i^{k_n}\|_{L^p(\Omega')} \leqslant K$. Limitou $\Omega' \nearrow \Omega$ dostaneme $\|\overline{u_i}\|_{L^p(\Omega)} \leqslant K$ (Ω' zmenšíme spočetněkrát a při každém zmenšení vybereme z $u_i^{k_n}$ konvergující podposloupnost, tedy stále $u_i^{k_n} \to \overline{u_i}$).

„$\overline{u_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$“: zvolme $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ a nalezněme h_0: $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_{h_0}$, že $h \leqslant \frac{h_0}{2}$, pak

$$\int_\Omega \overline{u_i}(x)\varphi(x)dx \overset{\text{slabé limity}}{=} \lim_{h_n \to 0} \int_\Omega \frac{u(x + h_n \cdot e_i) - u(x)}{h_n}\varphi(x)dx =$$

$$= -\lim \int_\Omega \frac{\varphi(x) - \varphi(x - h_n \cdot e_i)}{h_n} u(x)dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

□

Důkaz (1)
Ať $u \in W^{1,p}(\Omega)$. $u_\varepsilon \to u$ v $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ pro $p \neq \infty$ a $u_\varepsilon \rightharpoonup^* u$ v $W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$ pro $p = \infty$. Dále platí $D^\alpha u_\varepsilon = (D^\alpha u)_\varepsilon$ v Ω_ε a $D^\alpha u_\varepsilon \to D^\alpha u$ v $L^\infty_{loc}(\Omega)$ pro $p \neq \infty$.

„$p \neq \infty$“: pro $x \in \Omega_\varepsilon$, $h \leqslant \frac{\delta}{2}$:

$$\frac{u_\varepsilon(x + h \cdot e_i) - u_\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{dt} u_\varepsilon(x + h \cdot t \cdot e_i)dt =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x + h \cdot t \cdot e_i) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(x_i + ht) = \int_0^1 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x + h \cdot e_i \cdot t)dt. \qquad (*)$$

Pak

$$\int_{\Omega_\delta} \left|\frac{\partial u_\varepsilon(x + h \cdot e_i) - u_\varepsilon(x)}{h}\right|^p dx \leqslant \int_{\Omega_\delta} \left|\int_0^1 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x + h \cdot e_i \cdot t)dt\right|^p dx \overset{\text{Jensen}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \int_{\Omega_\delta}\int_0^1 \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x + h \cdot e_i \cdot t)\right|^p dtdx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \int_{\Omega_\delta} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x + h \cdot e_i \cdot t)\right|^p dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \int_{\Omega_{\delta/2}} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x)\right|^p dxdt.$$

$$\varepsilon \to 0_+ \overset{\text{Lebesgue}}{\implies} \int_{\Omega_\delta} \left|\frac{u(x + h \cdot e_i) - u(x)}{u}\right|^p \leqslant \int_{\Omega_{\delta/2}} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx \leqslant \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx.$$

„$p = \infty$“: p výše pošleme do $\infty \implies \|u_i^h\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} \leqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\Omega)}$. □

Důkaz (3)
Stačí u_i^h Cauchy v $L^p_{loc}(\Omega)$.

$$u_i^{h_m}(x) - u_i^{h_n}(x) \overset{*}{=} \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + h_m \cdot t \cdot e_i) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + h_n \cdot e_i \cdot t)dt.$$

Pak

$$\int_{\Omega_\delta} |u_i^{h_m}(x) - u_i^{h_n}(x)|^p dx \overset{\text{Jensen + Fubini}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \int_0^1 \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + h_m \cdot t \cdot e_i) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + h_n \cdot t \cdot e_i) \right|^p dxdt \leqslant \varepsilon$$

pro dostatečně malá h_m a h_n (Lebesgueova o majorantě). □

1.1 Vlastnosti až k hranici

Lemma 1.4 (Rozklad jednotky I)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $\{V_i\}_{i\in I}$ (I obecně nespočetná) otevřené pokrytí Ω. Pak $\exists$ spočetný systém funkcí $\{\varphi\}$ tak, že:

- $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$;
- $\forall j \; \exists i : \operatorname{supp} \varphi_j \subset V_i$;
- $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$;
- $\forall x \in \Omega : \sum_j \varphi_j(x) = 1$.

Lemma 1.5 (Rozklad jednotky II)

$\overline{\Omega}$ kompaktní $\{V_i\}_{i=1}^N$ otevřené pokrytí $\overline{\Omega}$. Pak $\exists \varphi_i \in C_0^\infty(V_i)$, $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1$ tak, že $\forall x \in \Omega$: $\sum_1^N \varphi_i(x) = 1$.

Věta 1.6 (Aproximace hladkými funkcemi)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a omezená, $p \in [1, \infty)$. Pak $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$:

1. *$\exists \{u_n\} \subset C^\infty(\Omega)$: $u_n \to u$ v $W^{1,p}(\Omega)$;*
2. *pokud navíc $\Omega \in C^0$, pak $\exists \{u_n\} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$: $u_n \to u$ ve $W^{1,p}(\Omega)$.*

Důkaz (1.)
Definujme $\Omega_i := \left\{x \in \Omega | \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\right\}$, pak Ω_i je otevřená, $\forall i \leqslant j : \Omega_i \subseteq \Omega_j$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i = \Omega$.

Definujme $V_i := \Omega_{i+2} \setminus \overline{\Omega_i} = \{x \in \Omega | \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \in (1/(i+2), 1/i)\}$. A protože Ω_1 není pokryta, přidejme ještě otevřenou $V_0 \subset \overline{V_0} \subset \Omega$ takovou, že $\bigcup_{i=0}^{\infty} V_i = \Omega$.

Ať $u_j = u \cdot \varphi_j$, kde φ_j jsou z Rozkladu jednotky I. Pak $\exists i : \operatorname{supp} u_j \subset V_i$. Z lokální aproximace hladkými funkcemi existují $u_j^n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) : \|u_j - u_j^n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant \frac{1}{n \cdot 2^j}$.

Definujme $u_n = \sum_{j=0}^{\infty} u_j^n$. Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní, pak

$$\|u - u_n\|_{W^{1,p}(K)} = \left\| \sum_j u\varphi_j - \sum_j u_j^n \right\|_{W^{1,p}(K)} = \left\| \sum_j (u_j - u_j^n) \right\|_{W^{1,p}(K)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \|u_j - u_j^n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant \sum_j \frac{1}{n \cdot 2^j} \leqslant \frac{2}{n}.$$

To nezávisí na K, tedy pro $K \nearrow \Omega$ dostáváme $\|u - u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant \frac{2}{n}$, tedy $u_n \to u$ v $W^{1,p}(\Omega)$. □

Důkaz (2.)
$\tilde{V}_n = T_n(V_n^+ \cup \Lambda_n \cup V_n^-)$ dohromady pokrývají hranici a zbytek pokryjeme pomocí $\tilde{V}_{M+1} \subset \overline{\tilde{V}_{m+1}} \subset \Omega$. Tedy $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{n=1}^{M+1} \tilde{V}_n$.

Definujme $u_i = u\varphi_i \in W^{1,p}(\Omega)$, kde φ_i jsou z Rozkladu jednotky II. Pak $u = \sum_1^{M+1} u_i$.

Nyní je cílem $\forall \varepsilon > 0$ najít $u_i^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$ takové, že $\|u_i - u_i^\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant \frac{\varepsilon}{M+1}$. (Potom $u_\varepsilon = \sum_{i=1}^{M+1} u_i^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$ a $\|u - u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant \sum \|u_i - u_i^\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$.)

BÚNO $T_i = \mathrm{id}$.

- $u_{M+1} := u \cdot \varphi_{M+1} \in W^{1,p}(\Omega)$, neb $\operatorname{supp} \varphi_{M+1} \subset \tilde{V}_{M+1} \subset \overline{V_{M+1}} \subset \Omega$ a $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Pak definujeme $u_{M+1}^\varepsilon = u_{M+1} * \mu_\delta$, kde δ je z druhé části lokální aproximace hladkými funkcemi.
- $u_i := u \cdot \varphi_i$. Definujme $u_i^h(x', x_d) := u_i(x', x_d + h)$. Vezměme $h > 0$ tak malé, abychom se nedostali mimo $\operatorname{supp} \varphi_i$ a že $\|u_i^h - u_i\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u_i^n - u_i\|_{W^{1,p}(V_1^+)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$.

  Definujme $u_i^\varepsilon := u_i^h * \mu_\delta$, kde δ je takové, abychom nevyjeli mimo $\operatorname{supp} u_i^h$ a aby $\|u_i^\varepsilon - u_i^h\|_{W^{1,p}(V_1^+)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$. Pak $\|u_i^\varepsilon - u_i\| \leqslant \|u_i^\varepsilon - u_i^h\| + \|u_i^h - u_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(M+1)} \cdot 2$.

  (Volba δ: stačí, aby pro $(x', x_d) \in \Lambda_1$ platilo: $(y', y_d) \in B(x', x_d, \delta) \implies a(y') > y_d - h$:

  $$a(y') \geqslant a(x') - |a(x') - a(y')| = x_d - |a(x') - a(y')| \geqslant y_d - (|a(x') - a(y')| + |y_d - x_d|)$$

  $> y_d - h$ pro vhodné δ tak, aby $|x - y| < \delta$, které existuje, neboť a a vzdálenost jsou spojité.) □

Věta 1.7 (Extension theorem)

$\Omega \in C^{0,1}$, $p \in [1, \infty]$. *Pak* $\exists$ *spojitý lineární operátor* $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ *a* $c > 0$ *tak, že* $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$*:*

1. $Eu = u$ *skoro všude na* Ω*;*
2. $\exists B_R \subset \mathbb{R}^d : Eu = 0$ *na* $\mathbb{R}^d \setminus B_R$*, tedy* Eu *má kompaktní support;*
3. $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Důkaz
Jako dříve $u = \sum_1^{M+1} u_n$, kde $u_n = u \cdot \varphi_n \in W^{1,p}$. u_{M+1} rozšíříme na $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ hodnotou 0 (u_{M+1} má kompaktní nosič v Ω, tedy $u = 0$ na $\partial\Omega$).

Pro u_i: BÚNO $T_i = \text{id}$. Máme $u_i \in W^{1,p}(V_i^+)$. Definujeme $F_i : V_i \to \tilde{V}_i$, $F_i(x', x_d) \coloneqq (x', x_d - a_i(x')) = (y', y_d)$. Platí $F_i(\Lambda_i) = (x_d, 0)$. Navíc $\det F_i = 1 = \det F_i^{-1}$.

Definujme $v_i(y) = u(F_i^{-1}(y)) \in W^{1,p}(\tilde{V}_1^+)$ (neb $\nabla v_i(y)$ se chová stejně jako $\nabla u(F_i^{-1}(y)) \cdot \nabla F_i^{-1}(y))$, navíc $\|v_i\|_{W^{1,p}(\tilde{V}_i^+)} \leqslant c_1 \cdot \|u\|_{W^{1,p}(V_i^+)}$.

Nyní mějme $Ev_i(y) = v_i(y)$ pro $y_d > 0$ a $Ev_i(y) = v_i(y', -y_d)$ pro $y_d < 0$. Ukážeme, že $Ev_i \in W^{1,p}(\tilde{V}_i)$ a $\|Ev_i\|_{W^{1,p}(\tilde{V}_i)} \leqslant c_2 \cdot \|v\|_{W^{1,p}(\tilde{V}_i^+)}$. (Pak $Eu_i(x) \coloneqq Ev_i(F_i(x))$ a $\|Eu_i\| \leqslant c_2 \cdot \|Ev\| \leqslant c \cdot \|u\|$.)

Už víme, že platí $Ev_i \in W^{1,p}(\tilde{V}_i^+)$, $\|Ev_i\|_{W^{1,p}(\tilde{V}_i^-)} = \|Ev_i\|_{W^{1,p}(\tilde{V}_i^-)}$, tedy $\|Ev_i\|_{W^{1,p}(\tilde{V}_i)} = 2^{\frac{1}{p}} \|Ev_i\|_{W^{1,p}(\tilde{V}_i^+)}$. Stačí ověřit:

$$\frac{\partial Ev_i}{\partial y_j}(y) = \begin{cases} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j}, & y_d > 0, \\ \frac{\partial v_i(y', -y_d)}{\partial y_j}, & y_d < 0, \end{cases} \qquad \frac{\partial Ev_i(y)}{\partial y_d} = \begin{cases} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_d}, & y_d > 0, \\ -\frac{\partial v(y', -y_d)}{\partial y_d}, & y_d < 0. \end{cases}$$

(To pak dává $Ev_i \in W^{1,p}(\tilde{V}_i)$.)

Uvažujme sudou hladkou funkci $\tau_\varepsilon(s)$, která je rovna 1 pro $|s| \geqslant 2\varepsilon$ a je nulová pro $|s| \leqslant \varepsilon$ a $|\tau_\varepsilon'| \leqslant \frac{c}{\varepsilon}$. Platí $\operatorname{supp} \tau_\varepsilon' \subset [-2\varepsilon, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 2\varepsilon]$.

Zvolme $\varphi \in C_0^\infty(\tilde{V}_1)$. Pak φ je lipschitzovská a

$$\int_{\tilde{V}_1} \frac{\partial Ev_i(y)}{\partial y_d} \varphi(y) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \cdot \int_{\tilde{V}_i^+} \frac{\partial Ev_i(y)}{\partial y_d} \varphi(y) \tau_\varepsilon(y_d) + \int_{\tilde{V}_i^-} \frac{\partial Ev_i(y)}{\partial y_d} \varphi(y) \tau_\varepsilon(y_d) \overset{\text{definice derivace}}{=}$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\tilde{V}_i^+} Ev_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_d} \tau_\varepsilon - \int_{\tilde{V}_i^-} Ev_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_d} \tau_\varepsilon - \lim_{\varepsilon \to 0_+} \underbrace{\int_{\tilde{V}_i^+} Ev_i \varphi \varphi \tau_\varepsilon' + \int_{\tilde{V}_i^-} Ev_i \varphi \tau_\varepsilon'}_{=: I}.$$

Stačí $I \to 0$:

$$I = \underbrace{\int_{\tilde{V}_i^+} v_i(y', y_d) \frac{\varphi(y', y_d) + \varphi(y', -y_d)}{2} \tau_\varepsilon'(y_d) dy}_{A} + \underbrace{\int_{\tilde{V}_i^+} v_i(y', y_d) \frac{\varphi(y', y_d) - \varphi(y', -y_d)}{2} \tau_\varepsilon'(y_d) dy}_{B} +$$

$$+ \int_{\tilde{V}_i^-} v_i(y', -y_d) \frac{\varphi(y', y_d) + \varphi(y', -y_d)}{2} \tau_\varepsilon'(y_d) dy + \int_{\tilde{V}_i^-} v_i(y', -y_d) \frac{\varphi(y', y_d) - \varphi(y', -y_d)}{2} \tau_\varepsilon'(y_d) dy =$$
$$= A + B + TODO!!!$$

TODO!!! (str. 13). □

Lemma 1.8 (Morey I)

$u \in W^{1,1}(B_R)$, $\mathbf{o}$ je Lebesgueův bod funkce u. Pak

$$\forall A \in (0,1) : \left| \fint_{B_R} u(x)dx - u(\mathbf{o}) \right| \leqslant C(d,A) \cdot R^A \cdot \sup_{0<\varrho\leqslant R} \int_{B_\varrho} \frac{|\nabla u|}{\varrho^{d-1+A}} dx.$$

Důkaz

$$\fint_{B_R} udx - u(\mathbf{o}) = \lim_{r\to 0_+} \left(\fint_{B_R} u - \fint_{B_r} u \right) = \lim_{r\to 0_+} \int_r^R \frac{d}{d\varrho} \fint_{B_\varrho} u(x)dxd\varrho =$$

$$= \lim_{r\to 0_+} \int_r^R \frac{d}{d\varrho} \fint_{B_1} u(\varrho x)dxd\varrho = \lim_{r\to 0_+} \int_r^R \fint_{B_1} \nabla u(\varrho x) \cdot xdx \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{r\to 0_+} \int_r^R \fint_{B_1} |\nabla u(\varrho x)|dxd\varrho = \lim_{r\to 0_+} \int_r^R \fint_{B_\varrho} |\nabla u|dxd\varrho =$$

$$= \lim_{r\to 0_+} \int_r^R \int_{B_\varrho} \frac{|\nabla u(x)|}{\varrho^{d-1+A}} \varrho^{d-1+A} \frac{\varkappa(d)^{-1}}{\varrho^d} = \lim_{r\to 0_+} \underbrace{c(d)}_{\varkappa(d)^{-1}} \int_r^R \varrho^{A-1} \int_{B_\varrho} \frac{|\nabla u|}{\varrho^{d-1+A}} d\varrho \leqslant$$

$$\leqslant c(d) \left(\sup_{\varrho\in(0,R]} \int_{B_\varrho} \frac{|\nabla u|}{\varrho^{d-1+A}} \right) \cdot \underbrace{\int_0^R \varrho^{A-1} d\varrho}_{R^A}.$$

□

Lemma 1.9 (Morey II)

$u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$, x, y Lebesgueovy body u, $R \coloneqq |x-y|$. Pak

$$\forall A \in (0,1) : |u(x) - u(y)| \leqslant \tilde{c}(d,A) \cdot |x-y|^A \cdot \sup_{\varrho\leqslant\mathbb{R}, z\in[x,y]} \int_{B_\varrho(z)} \frac{|\nabla u|}{\varrho^{d-1+A}} dx.$$

Důkaz

$$|u(x)-u(y)| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\fint_{B_R(x)} u(z)dz - u(x)\right| + \left|\fint_{B_R(y)} u(z)dz - u(y)\right| + \left|\fint_{B_R(x)} u(z)dz - \fint_{B_R(y)} u(z)dz\right| \overset{\text{Morey I}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \underbrace{c(d,A)R^A \left(\sup_{\varrho\leqslant R}\int_{B_\varrho(x)} \frac{|\nabla u|}{\varrho^{d-1+A}}dx + \sup_{\varrho\leqslant R}\int_{B_\varrho(y)} \frac{|\nabla u|}{\varrho^{d-1+A}}dx\right)}_{B} + \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\fint_{B_R(tx+(1-t)y)} u(z)dzdt\right| =$$

$$= B + \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\fint_{B_R(\mathbf{o})} u(tx+(1-t)y+z)dzdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant B + \left|\int_0^1 \fint_{B_R(\mathbf{o})} \nabla u(tx+(1-t)y+z)\cdot(x-y)dzdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant B + \int_0^1 \int_{B_R(tx+(1-t)y)} \varkappa(d)^{-1}R^{-d}\cdot R\cdot|\nabla u|\cdot\frac{R^A}{R^A}dzdt \leqslant \tilde{c}(d,A)R^A \sup_{\varrho\leqslant R, z\in[x,y]}\int_{B_\varrho(z)} \frac{|\nabla u|}{\varrho^{d-1+A}}dx.$$

□

Lemma 1.10 (Gagliardo)

Mějme $u_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ pro $i \in [d]$, kde $d \geqslant 2$. Definujme

$$v_i(x_1,\dots,x_d) = u_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_d).$$

Pak

$$\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{i=1}^d |v_i(x)|dx \leqslant \prod_{i=1}^d \|u_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Důkaz

Indukcí dle d. „$d = 2$“:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v_1(x)| \cdot |v_2(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^2} |u_1(x_2)| \cdot |u_2(x_1)| dx_1 dx_2 = \|u_1\|_1 \cdot \|u_2\|_1.$$

„$d \to d+1$“:

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \prod_{i=1}^{d+1} |v_i(x)| dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |v_{d+1}(x)| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{d} |v_i(x)| dx_{d+1} \right) dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_d \overset{\text{Hölder}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v_{d+1}(x)|^d dx_1 \ldots dx_d \right)^{\frac{1}{d}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{d} |v_i(x)| dx_{d+1} \right)^{d'} dx_1 \ldots dx_d \right)^{\frac{1}{d'}} \leqslant$$

$$\leqslant \|u_{d+1}\|_{L^d(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\left(\prod_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} |v_i|^d dx_{d+1} \right)^{\frac{1}{d}} \right)^{d'} dx_1 \ldots dx_d \right)^{\frac{1}{d'}} \leqslant$$

$$\leqslant \|u_{d+1}\|_{L^d(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{d} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |v_i|^d dx_{d+1} \right)^{\frac{1}{d-1}}}_{=:z_i} dx_1 \ldots dx_d \right)^{\frac{1}{d'}} \leqslant$$

$$\leqslant \|u_{d+1}\| \left(\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{d} |z_i| dx \right)^{\frac{1}{d'}} \overset{\text{IP}}{\leqslant} \|u_{d+1}\|_d \left(\prod_{i=1}^{d} \|z_i\|_{d+1} \right)^{\frac{1}{d'}} =$$

$$= \|u_{d+1}\|_d \prod_{i=1}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}} |v_i|^d dx_{d+1} \right|^{\frac{d-1}{d-1}} dx_1 \ldots dx_d \right)^{\frac{1}{d}} = \prod_{i=1}^{d+1} \|u_i\|_{L^d}.$$

□

Věta 1.11 (Vnoření)

$\Omega \in C^{0,1}$, $p \in [1, \infty)$. *Pak platí*

$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow$

- $L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)$ *pro* $p < d$;
- $L^q(\Omega)$ *pro* $p = d$ *a* $\forall q$;
- $C^{0,1-\frac{d}{p}}(\overline{\Omega})$ *pro* $p > d$;
- $L^\infty(\Omega)$ *pro* $p > d$ *(vyplývá z předchozího).*

$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow$

- $L^q(\Omega)$ *pro* $p < d$ *a* $\forall q \in \left[1, \frac{dp}{d-p}\right)$ *,* $p < d$*;*

- $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ *pro* $p > d$ *a* $\forall \beta < 1 - \frac{d}{p}$*;*

- $L^\infty(\Omega)$ *pro* $p > d$ *(vyplývá z předchozího).*

Důkaz ($W^{1,p} \hookrightarrow C^{0,1-\frac{d}{p}}$ pro $p > d$)
Chceme $\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant C \cdot \|u\|_{1,p}$ pro $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Pro $u \in W^{1,p}(\Omega)$ plyne z aproximace hladkými funkcemi.

Extension theorem (pro R z něho) $\implies$

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} = \|Eu\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant \|Eu\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B_R})} \overset{*}{\leqslant} C(\overline{B_R}, p, d)\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant c(\overline{B_R}, p, d, \Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

„$*$“: Neboť $u \in C_0^1(\overline{B_R})$ (píšeme pro jednoduchost u místo Eu), pak

$$\sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^A} \leqslant \sup_{x \neq y} c(d, A) \sup_{\varrho \leqslant R, z \in [x,y]} \int_{B_\varrho(z)} \frac{|\nabla u|}{\varrho^{d-1+A}} \leqslant$$

$$\leqslant c(d, A) \sup_{\varrho \leqslant R, z \in \overline{B_R}} \int_{B_\varrho(z)} \frac{|\nabla u| \cdot 1}{\varrho^{d-1+A}} \overset{\text{Hölder}}{\leqslant}$$

$$\leqslant c(d, A) \cdot \sup_{z \in \overline{B_R}, \varrho \leqslant R} \frac{1}{\varrho^{d-1+A}} \left(\int_{B_\varrho(z)} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_\varrho(z)} 1^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant c_2(d, A)\|\nabla u\|_{L^p} \sup_{\varrho \leqslant R} \varrho^{\frac{d}{p'}} \cdot \frac{1}{\varrho^{d-1+A}} \overset{A := 1 - \frac{d}{p}}{=} c_2(d, p)\|\nabla u\|_{L^p},$$

tedy $\sup_{x \neq y} \frac{|y(x)-y(y)|}{|x-y|^{1-\frac{d}{p}}} \leqslant \text{konst}(d, p)\|\nabla u\|_{L^p(\overline{B_R})}$. Pro $x \in \overline{B_R}$:

$$|u(x)| = \fint_{\overline{B_R}} |u(x)| dy \leqslant \int_{\overline{B_R}} |u(x) - u(y)| + |u(y)| dy \leqslant c(d, p, R)(\|\nabla u\|_{L^p} + \|u\|_{L^1(\overline{B_R})}) \leqslant$$

$$\leqslant c(R, d, p)\|u\|_{W^{1,p}(\overline{B_R})} \implies \sup_{x \in \overline{B_R}} |u| \leqslant c(R, d, p)\|u\|_{W^{1,p}(\overline{B_R})}.$$

□

Důkaz ($W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)$ pro $p < d$)
Chceme $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)} \leqslant c(d,p)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ (speciální případ Gagliardovy–Nirenbergovy nerovnosti) (z toho plyne vše potřebné).

„Stačí dokázat pro $p = 1$“: mějme $q > 1$, $v \coloneqq |u|^q$. Případ pro $p = 1 \implies$

$$\|v\|_{\frac{d}{d-1}} \leqslant c(d) \cdot \|\nabla v\|_1 = c(d) \int_{\mathbb{R}^d} q|u|^{q-1} \cdot |\nabla u| \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} c(d,q)\|\nabla u\|_{L^p} \cdot \|u\|_{p'(q-1)}^{q-1}.$$

Hodilo by se $\frac{q \cdot d}{d-p} = p' \cdot (q-1)$, nechť tedy $q = \frac{p \cdot (d-1)}{d-p}$. Pak

$$\|v\|_{\frac{d}{d-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\frac{dp}{d-p}}\right)^{\frac{d-1}{d}} \leqslant c(d,p)\|\nabla u\|_{L^p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\frac{dp}{d-p}}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Načež to vydělíme integrálem na pravé straně a platí $\frac{d-1}{d} - \frac{1}{p'} = \frac{d-p}{dp}$, čímž jsme to dokázali pro $p \neq 1$.

„$p = 1$“: chceme $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ $\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant c(d)\|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$:

$$\forall i \in [d]\colon |u(x)| \overset{u \in C_0^\infty}{=} \left|\int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_d) ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_d)| ds$$

$$\implies |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leqslant \prod_{i=1}^{d} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_d)|\right)^{\frac{1}{d-1}} \implies$$

$$\implies \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{d} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_d) ds\right)^{\frac{1}{d-1}}}_{\eqqcolon v_i \text{ nezávisí na } x_i} dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{d} |v_i| \leqslant \prod_{i=1}^{d} \|v_i\|_{L^{d-1}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_d)| ds\right)^{\frac{1}{d-1}}\right)^{d-1}\right)^{\frac{1}{d-1}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u| dx\right)^{\frac{1}{d-1}} = \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d}{d-1}}.$$

□

Důkaz ($W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pro $p = d$ a $\forall q \geqslant 1$)
Pro $q < p$ plyne z $L^p \hookrightarrow L^q$ (Höldera) jinak

$$\text{Hölder} \implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p-\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{d\cdot(p-\varepsilon)}{d-(p-\varepsilon)}}(\Omega), \qquad \varepsilon\colon \frac{d(d-\varepsilon)}{d-(d-\varepsilon)} = q.$$

□

Důkaz ($W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q$ pro $p < d$ a $\forall q < \frac{dp}{d-p}$)
„Stačí ukázat $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^1(\Omega)$“: pak platí $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q < \frac{dp}{d-p}$, neboť †.

†: „$\forall p \leqslant q \leqslant r\ \exists \alpha : \|u\|_{L^q} \leqslant \|u\|_{L^p}^{\alpha} \cdot \|u\|_{L^r}^{(1-\alpha)}$“: ať[a] $1 = \frac{\alpha\cdot q}{p} + \frac{(1-\alpha)\cdot q}{z} = \left(\frac{p}{\alpha\cdot q}\right)^{-1} + \left(\frac{z}{(1-\alpha)\cdot q}\right)^{-1}$ a $\alpha \in [0,1]$. Potom

$$\int_\Omega |u|^q = \int_\Omega |u|^{\alpha\cdot q} \cdot |u|^{(1-\alpha)\cdot q} \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \left(\int_\Omega |u|^{\alpha q \cdot \frac{p}{\alpha q}}\right)^{\frac{\alpha q}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |u|^{(1-\alpha)q\cdot \frac{r}{(1-\alpha)q}}\right)^{\frac{(1-\alpha)q}{r}} =$$

$$= \|u\|_p^{\alpha q} \cdot \|u\|_r^{(1-\alpha)q} \qquad \implies \qquad \|u\|_q \leqslant \|u\|_p^{\alpha} \cdot \|u\|_r^{(1-\alpha)}.$$

Nechť S omezená v $W^{1,p}(\Omega)$, chceme

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \{u_i\}_{i=1}^N \subseteq W^{1,p}(\Omega)\ \forall u \in S : \min_{i\in[N]} \|u - u_i\|_{L^q} < \varepsilon.$$

$\hookrightarrow\hookrightarrow L^1$ dává $\forall \tilde{\varepsilon} > 0\ \exists \{u_i\}_{i=1}^N \subset W^{1,p} : \min \|u - u_i\|_{L^1} \leqslant \tilde{\varepsilon}$.

$$1 \leqslant q < \frac{dp}{d-p} \implies \|u - u_i\|_{L^q} \overset{\dagger}{\leqslant} \|u - u_i\|_{L^1}^{\alpha} \cdot \|u - u_i\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}}^{1-\alpha} \overset{W^{1,p}\hookrightarrow L^{\frac{dp}{d-p}}}{\leqslant}$$

$$\leqslant c \cdot \|u - u_i\|_{L^1}^{\alpha} \|u - u_i\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{1-\alpha} \leqslant c(\Omega, p, S) \cdot \|u - u_i\|_{L^1(\Omega)}^{\alpha} \leqslant c(\Omega, p, S)\tilde{\varepsilon}^{\alpha} \leqslant \varepsilon.$$

„$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^1(\Omega)$“: TODO!!! (str 19). □

[a] To lze neboť $1 = \alpha\frac{q}{p} - \alpha\frac{q}{r} + \frac{q}{r} \Leftrightarrow \alpha \cdot \frac{q(r-p)}{pr} = 1 - \frac{q}{r} = \frac{r-q}{r} \Leftrightarrow \alpha = \frac{pr}{q(r-p)} \cdot \frac{r-q}{r} = \frac{p(r-q)}{q(r-p)} \in [0,1]$.

Důkaz ($W^{1,p}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\beta}, p > d, \beta < 1 - \frac{d}{p}$)
Analogicky pomocí interpolace (postup jako †). □

Poznámka (Trace theorem na krychli)
TODO!!! (str 20).

Věta 1.12 (Trace theorem)

$\Omega \in C^{0,1}$, $p \in [1, d)$. *Pak* $\exists \operatorname{tr} : W^{1,p}(\Omega) \to L^{\frac{(d-1)\cdot p}{d-p}}(\partial\Omega)$ *lineární omezený operátor takový, že*

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\colon\ \operatorname{tr} u = u|_{\partial\Omega} \wedge \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} \operatorname{tr} u \cdot n_i ds$$

Poznámka
Pro $p > d$ to víme, neboť $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Důkaz (Komentář)
$C^1(\overline{\Omega})$ hustá v $W^{1,p}(\Omega)$. Nechť $u_n \in C^1$, $u_n \to u$ v $W^{1,p}(\Omega)$.

$$\|u_n - u_m\|^q_{L^q(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} |u_n - u_m|^q \leqslant c(\Omega) \int_{(-\alpha,\alpha)^{d-1}} |u_n(T_i(y)) - u_m(T_i(y))|^q \overset{\text{krychle}}{\leqslant}$$

$$\leqslant c(\Omega) \|u_n(T_i) - u_m(T_i)\|^q_{W^{1,p}((-\alpha,\alpha)^{d-1}\times(0,1))} \leqslant c(\Omega)\|u_n - u_m\|^q_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

□

Definice 1.1 (Sobolevův–Slobodeckijův prostor $W^{s,p}$)

Nechť $s \in (0,1)$. Sobolevův–Slobodeckijův prostor $W^{s,p}$ obsahuje ty funkce $u \in L^p(\Omega)$, že $\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{d+s\cdot p}} dxdy < \infty$.

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{d+s\cdot p}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definice 1.2 (Nikolkiův prostor $N^{s,p}(\Omega)$)

Nechť $s \in (0,1]$, $p \in [1,\infty]$. Nikolkiův prostor $N^{s,p}(\Omega)$ obsahuje ty u, pro které

$$\forall \varphi \text{ s kompaktním supportem} : \sup_{h>0,i} \int_{\Omega_h} \frac{|u(x + h\cdot e_i) - u(x)|^p}{h^{p\cdot s}} \varphi dx < \infty.$$

Věta 1.13 (Inverse trace theorem)

$\Omega \in C^{0,1}$, $p \in (1,\infty]$, $s \in \left(\frac{1}{p}, 1\right]$. *Pak* tr *je omezený lineární operátor* $W^{s,p}(\Omega) \to W^{s-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$.

Navíc $\exists \operatorname{tr}^{-1} : W^{s-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \to W^{s,p}(\Omega)$ *takový, že* $\operatorname{tr}(\operatorname{tr}^{-1}(u)) = u$ *na* $\partial\Omega$.

Lemma 1.14

$$\forall \varepsilon > 0 : W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow N^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s-\varepsilon,p}(\Omega).$$

Důkaz
Bez důkazu. □

2 Nelineární eliptické rovnice jako kompaktní perturbace

Lemma 2.1

Je-li $\Omega \in C^{0,1}$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *Caratheodorova funkce a* $|f(x, u, \xi)| \leqslant C$ *pro* $\forall u \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$ *a skoro všechna* $x \in \Omega$, *pak*

$$\exists u \in W_0^{1,2}(\Omega)\ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f(\cdot, u, \nabla u) \cdot \varphi.$$

Důkaz
Definujme zobrazení $M : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$, $v \mapsto u$, kde u splňuje[a]

$$\forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f(\cdot, v, \nabla v) \cdot \varphi.$$

Hledáme pevný bod M, tedy budeme ověřovat podmínky Schaudera:

- Nalezneme vhodnou $U \neq \emptyset$ konvexní množinu v $W_0^{1,2}$, že $M(U) \subseteq U$: Volme $\varphi = u$. Pak
$$c_1 \|u\|_{1,2}^2 \leqslant \|\nabla u\|_2^2 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u = \int_\Omega f(\cdot, v, \nabla v) \cdot u \leqslant C \cdot \int_\Omega |u| \cdot 1 \leqslant \tilde{C}(\Omega) \|u\|_{1,2}.$$
Tedy $\|u\|_{1,2} \leqslant \frac{\tilde{C}(\Omega)}{c_1} = \tilde{\tilde{C}}(\Omega)$ nezávisle na v. Volme $U \coloneqq \left\{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \middle| \|u\|_{1,2} \leqslant \tilde{\tilde{C}}\right\}$.
- M je spojitý kompaktní operátor: dle FA stačí sekvenciální kompaktnost: Nechť $v_n \rightharpoonup v$ v $W_0^{1,2}(\Omega)$, $u_n \coloneqq M(v_n)$. Chceme $\exists n_k : u_{n_k} \to u$ v $W_0^{1,2}(\Omega)$ a víme $\|u_n\|_{1,2} \leqslant \tilde{\tilde{C}}$. $W_0^{1,2}$ je reflexivní, tedy $\exists n_k : u_{n_k} \rightharpoonup u$ v $W_0^{1,2}(\Omega)$. Navíc $W^{1,2} \hookrightarrow\hookrightarrow L^2 \implies \exists n_k : u_{n_k} \to u$ v $L^2(\Omega)$.

  Volme $\varphi \coloneqq u_{n_k} - u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Pak
$$\lim_{n_k \to \infty} \|u_{n_k} - u\|_{1,2}^2 \leqslant \lim c \cdot \|\nabla u_{n_k} - \nabla u\|_2^2 =$$
$$= c \cdot \lim \int_\Omega \nabla u_{n_k} (\nabla u_{n_k} - \nabla u) - c \lim \int_\Omega \nabla u (\nabla u_{n_k} - \nabla u) =$$
$$= c \cdot \lim \int_\Omega f(\cdot, v_{n_k}, \nabla v_{n_k}) \cdot (u_{n_k} - u) \leqslant c' \cdot \lim \|u_{n_k} - u\|_1 \overset{\text{Hölder}}{=} 0.$$
  Tedy $\lim_{n_k \to \infty} \|u_{n_k} - u\|_{1,2} = 0$, což jsme chtěli.

□

[a] Nemitskii říká, že pro každé v existuje právě jedno u.

Poznámka (†)
Máme-li v předpokladech $|f(x, u, \xi|) \leqslant c \cdot (g(x) + |u|^\alpha + |\xi|^\alpha)$, pro $\alpha \in [0, 1)$ a $g \in L^2$, pak lze postup výše upravit (konkrétně apriorní odhad) a dostaneme tentýž výsledek.

TODO? (příklad, když odhady selžou)

Lemma 2.2

$p < \frac{2d}{d-2}$. *Pak* $\exists \lambda > 0$ $\exists u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *taková, že* $-\Delta u = \lambda |u|^{p-2} \cdot u$ *v* Ω.

Důkaz
PDR1 $\implies$ minimalizujeme $\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2}$ přes $S := \left\{u \in W_0^{1,2}(\Omega), \|u\|_p = 1\right\}$.

$$\lambda := \inf_{u \in S} \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{2} \text{ pro vhodná } u_n \in S.$$

$\liminf \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{2} \geqslant \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2}$, neboť u_n jsou v $W_0^{1,2} \implies u_n \rightharpoonup u$ v $W_0^{1,2}(\Omega)$ a $\hookrightarrow\hookrightarrow \implies u_n \to u$ v $L^p(\Omega)$, tedy $u \in S$.

Nalezli jsme minimizér u. Euler-Lagrangeovy rovnice:

$$\lambda = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} \leqslant \int_\Omega \frac{1}{2} \left| \frac{\nabla(u + \varepsilon\varphi)}{\|u + \varepsilon\varphi\|_p} \right|^2 \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega), \varepsilon > 0$$

$$\implies \lambda \cdot \|u + \varepsilon\varphi\|_p^2 \leqslant \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} + \nabla u \varepsilon \nabla\varphi + \frac{\varepsilon^2 |\nabla\varphi|^2}{2} = \lambda + \varepsilon \int_\Omega (\nabla u \nabla\varphi + \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\varphi|^2) \implies$$

$$\implies \lambda \frac{\|u + \varepsilon\varphi\|_p^2 - 1}{\varepsilon} \leqslant \int_\Omega (\nabla u \nabla\varphi + \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\varphi|^2) \implies$$

FIXME?

$$\implies \lim_{\varepsilon\to 0_+} \lambda \frac{\|u + \varepsilon \cdot \varphi\|_p^2 - \|u\|_p^2 + \|u\|_p^2 - 1}{\varepsilon} \leqslant \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \implies \lambda \cdot \|u^{p-2}\varphi\|_1 \leqslant \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi.$$

□

TODO? (Příklad $-\Delta u + u^{35} = f$ v Ω a $u = 0$ na $\partial\Omega$.)

TODO?

TODO? (Treshold for u.)

TODO? (Příklad $-\Delta u + u = |\nabla u|^p + f$ na Ω, $u = 0$ na $\partial\Omega$. $p < 1$ lze vymyslet tím, co známe, $p = 1$ bychom měli umět, $p \in (1,2)$ je těžší, $p = 2$ kritický růst, $p > 2$ nelze obecně nic říct.)

3 Nelineární eliptické rovnice, teorie monotónních operátorů

Poznámka
Otec teorie: Minty.

TODO? (Motivace.)

Definice 3.1 (Monotónní, ryze monotónní)

$E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je monotónní, pokud

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : (E(x) - E(y)) \cdot (x - y) \geqslant 0,$$

a ryze monotónní, pokud

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y : (E(x) - E(y)) \cdot (x - y) > 0.$$

Věta 3.1 (p-laplacian jei ryze monotónní)

$E(x) = (\delta + |x|^2)^{\frac{p-2}{2}} \cdot x$ je ryze monotónní operátor pro $\delta \geqslant 0$ a $p > 1$.

Důkaz

$$(E(x) - E(y)) \cdot (x - y) = \Big((\delta + |x|^2)^{p-2}x - (\delta + |y|^2)^{\frac{p-2}{2}} y\Big) \cdot (x - y) =$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}\Big((\delta + |tx + (1-t)y|^2)^{\frac{p-2}{2}}(tx + (1-t)y) \cdot (x - y)\Big)\, dt =$$

$$= \int_0^1 (\delta+|tx+(1-t)y|^2)^{\frac{p-2}{2}}|x-y|^2 + \frac{p-2}{2}(\delta+|tx+(1-t)y|^2)^{\frac{p-4}{2}} \cdot 2|(tx+(1-t)y)\cdot(x-y)|^2 \geqslant$$

$$p \geqslant 2 : \qquad \geqslant \int_0^1 (\delta + |tx + (1-t)y|^2)^{\frac{p-2}{2}} dt |x - y|^2 > 0.$$

$$p \in (1,2) : \overset{\text{Cauchy–Schwartz}}{\geqslant} \int_0^1 \ldots + (p-2)(\delta + |tx + (1-t)y|^2)^{\frac{p-2}{2}} |x - y|^2 =$$

$$= (p - 1) \cdot \int_0^1 \ldots > 0.$$

□

Věta 3.2

$E(x) = a(|x|) \cdot x$, kde $a \geqslant 0$. Pak E monotónní $\Leftrightarrow$ $s \mapsto a(s) \cdot s$ neklesající.

Důkaz

Zřejmě platí „ $\implies$ “. „ $\impliedby$ “:

$$(a(|x|)x - a(|y|)y)(x - y) = a(|x|)|x|^2 + a(|y|)|y|^2 - (a(|x|) + a(|y|)) \cdot x \cdot y \geqslant$$

$$\geqslant a(|x|) \cdot |x|^2 + a(|y|) \cdot |y|^2 - (a(|x|) + a(|y|)) \cdot |x| \cdot |y| = (a(|x|) \cdot |x| - a(|y|) \cdot |y|)(|x| - |y|).$$

□

Definice 3.2 (Problém)

Data: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega \in C^{0,1}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $B : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\Gamma_D, \Gamma_N \subset \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N} = \partial\Omega$, $u_0 : \Gamma_D \to \mathbb{R}$, $g : \Gamma_N \to \mathbb{R}$.

Rovnice: Najít $u : \Omega \to \mathbb{R}$ takové, že $-\operatorname{div}(A(x, u, \nabla u)) + B(x, u, \nabla u) = f(x)$ na Ω, $u = u_0$ na Γ_D, $A(x, u, \nabla u) \cdot \nu = g$ na Γ_N.

Slabá formulace: A, B Caratheodorovy funkce,

$$\exists c_2 \in \mathbb{R}, c_1 \in L^{p'} : |A(x, u, \xi)| + |B(x, u, \xi)| \leqslant c_2(|u|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + c_1(x)),$$

$f \in L^{p'}(\Omega)$ (nebo $\{W^{1,p}(\Omega)| = 0 \text{ na } \Gamma_D\}^*$), $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Gamma_N)$.

Pak $u \in W^{1,p}(\Omega)$ je slabé řešení problému, pokud $u = u_0$ na Γ_D (ve smyslu stop) a $\forall \varphi \in W^{1,p}(\Omega), \varphi = 0$ na Γ_D, platí:

$$\int_\Omega A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla \varphi + B(x, u, \nabla u) \cdot \varphi = \int_\Omega f\varphi + \int_{\Gamma_N} g\varphi.$$

Důsledek
1. Slabá formulace je smysluplná (vše dobře definované). 2. Jsou-li data a funkce u dostatečně hladké, pak u je klasickým řešením.

Důkaz
Nemitskii + podobně jako v PDR1. □

3.1 Předpoklady

Definice 3.3 (Koercivita)

$\exists \alpha > 0, \beta \in L^1(\Omega)$ $\forall u \in \mathbb{R}$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$ a pro skoro všechna $x \in \Omega$:

$$A(x, u, \xi) \cdot \xi + B(x, u, \xi)u \geqslant \alpha \cdot |\xi|^p - \beta(x).$$

Definice 3.4 (Monotónnost vůdčího výrazu = A monotónní vůči ξ)

Pro skoro všechna $x \in \Omega$ a všechna $u \in \mathbb{R}$ je $A(x, u, \cdot)$ monotónní.

Definice 3.5 (Ryzí monotónnost vůdčího výrazu=A ryze monotónní vůči ξ)

Pro skoro všechna $x \in \Omega$ a všechna $u \in \mathbb{R}$ je $A(x, u, \cdot)$ ryze monotónní.

Definice 3.6 ((Ryzí) monotónnost celého operátoru)

Pro skoro všechna $x \in \Omega$, $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^d$:

$$(A(x, u_1, \xi_1) - A(x, u_2, \xi_2))(\xi_1 - \xi_2) + (B(x, u_1, \xi_1) - B(x, u_2, \xi_2))(u_1 - u_2) \geqslant 0 \qquad (> 0)$$

Lemma 3.3

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spojitá, $R > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n, |x| \geqslant R : F(x) \cdot x \geqslant 0$. Pak $\exists x \in \overline{B_R(\mathbf{o})} : F(x) = 0$.

Důkaz

Pro spor $\forall x \in \overline{B_R(\mathbf{o})} : F(x) \neq \mathbf{o}$. Definujme $x \mapsto -\frac{R \cdot F(x)}{|F(x)|}$ spojitá $\overline{B_R(\mathbf{o})} \to \overline{B_R(\mathbf{o})}$.

$$\text{Brouwer} \implies \exists x \in \overline{B_R(\mathbf{o})} : x = -\tfrac{R \cdot F(x)}{|F(x)|} \implies |x| = R. \text{ Vynásobíme obě strany } x\text{:}$$

$$0 < |x|^2 = R^2 = -\frac{x \cdot F(x)}{|F(x)|} \leqslant 0.$$

□

Lemma 3.4 (Galerkinova aproximace)

Ať $\exists c_2 \in \mathbb{R}$ a $\exists c_1 \in L^{p'}(\Omega)$, že:

$$|A(x, u, \xi)| + |B(x, u, \xi)| \leqslant c_2(|u|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + c_1(x)),$$

a je splněna koercivita. Navíc nechť $p \in (1, \infty)$ (separabilita $W^{1,p}$).

Potom existují $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ lineárně nezávislá hustá a $u_n \coloneqq u_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n \omega_i(x)$ ($\alpha_i^n \in \mathbb{R}$) taková, že

$$\forall j \in [n] : \int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla \omega_j + B(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \omega_j = \langle f, \omega_j \rangle . \qquad ((GA)^n)$$

Důkaz
$W_0^{1,p}(\Omega)$ separabilní $\implies \exists \{\omega_j\}_{j=1}^\infty \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ lineárně nezávislá, hustá.

Definujme $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jako

$$[F(\alpha^n)]_j \coloneqq \int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla\omega_j + B(x, u_n, \nabla u_n)\omega_j - \langle f, \omega_j \rangle .$$

Chceme nulový bod F, tedy ověříme předpoklady předchozího lemmatu: F spojitá z prvního předpokladu a Lebesgueovy věty o majorantě. Nyní už zbývá jen „$\exists R > 0\ \forall \alpha \in \overline{B_R(\mathbf{o})} : F(\alpha) \cdot \alpha \geqslant 0$“:

$$F(\alpha) \cdot \alpha = \sum_{i=1}^n (F(\alpha))_i \cdot \alpha_i = \sum_{i=1}^n \int_\Omega A(\cdot, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla(\alpha_i\omega_i) + B(\cdot, u_n, \nabla u_n)\alpha_i\omega_i - \langle f, \alpha_i\omega_i \rangle =$$

$$= \int_\Omega A(\cdot, u_n, \nabla u_n)\nabla(u_n - u_0) + B(\cdot, u_n, \nabla u_n)(u_n - u_0) - \langle f, u_n - u_0 \rangle \geqslant$$

$$\geqslant \int_\Omega A(\cdot, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n + B(\cdot, u_n, \nabla u_n)u_n - \int_\Omega (|A(\cdot, u_n, \nabla u_n)| \cdot |\nabla u_0| + |B(\cdot, u_n, \nabla u_n)| \cdot |u_0|) -$$

$$-\|f\|_{(W_0^{1,2})^*} \cdot \|u_n - u_0\|_{1,p} \overset{\text{koercivita, Hölder}}{\geqslant}$$

$$\geqslant c_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^p - \beta(x)dx - \|A\|_{p'} \cdot \|\nabla u_0\|_p - \|B\|_{p'} \cdot \|u_0\|_p - \|f\| \cdot \|u_n - u_0\|_{1,p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{c_1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_0|^p - c \cdot \int_\Omega \beta + |\nabla u_0|^p - c \cdot \|u_0\|_{1,p} \cdot \left(\int_\Omega (1 + |u_n|^{p-1} + |\nabla u_n|^{p-1})^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} -$$

$$-\|f\| \cdot \|u_n - u_0\|_{1,p} \overset{\text{Poincaré}}{\geqslant}$$

$$\geqslant \tilde{c}\|u_n - u_0\|_{1,p}^p - c(1 + \|u_0\|_{1,p}) \cdot (1 + \|u_n\|_p^{p-1} + \|\nabla u_n\|_p^{p-1}) - \|f\| \cdot \|u_n - u_0\|_{1,p} \geqslant$$

$$\geqslant \tilde{c}\|u_n - u_0\|_{1,p}^p - c \cdot \|u_n - u_0\|_{1,p}^{p-1} - c \cdot \|u_n - u_0\|_{1,p}^{p-1} - c \cdot \|u_n - u_0\|_{1,p} - C.$$

Tento odhad nezávisí na α, tedy můžeme zvolit $R_0 > 0 : \|u_n - u_0\|_{1,p} \geqslant R_0 \implies F(\alpha) \cdot \alpha \geqslant 0$. Jelikož pracujeme v konečné dimenzi, jsou všechny normy ekvivalentní:

$$\frac{1}{K_1(n)} \cdot |\alpha| \leqslant \|u_n - u_0\|_{1,p} \leqslant K_1(n) \cdot |\alpha|,$$

takže zvolíme $R \coloneqq R_0 K_1(n)$. □

Lemma 3.5 (Stejnoměrné odhady)

Nechť u_n jsou jako v předchozím a $\exists c_2 \in \mathbb{R}$ a $\exists c_1 \in L^{p'}(\Omega)$, že:

$$|A(x, u, \xi)| + |B(x, u, \xi)| \leqslant c_2(|u|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + c_1(x)),$$

a platí koercivita.

Pak $\|u_n\|_{1,p} \leqslant K$.

Důkaz
i-tou rovnici v $(GA)^n$ přenásobíme α_i^n a rovnice sečteme (navíc platí $u_n - u_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^n \omega_i$):

$$\int_\Omega A(\cdot, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla(u_n - u_0) + B(\cdot, u_n, \nabla u_n) \cdot (u_n - u_0) - \langle f, u_n - u_0 \rangle = 0 \overset{\text{předpoklady}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \|u_n - u_0\|_{1,p}^p \leqslant C(1 + \|u_n - u_0\|_{1,p}^{p-1} + \|u_n - u_0\|_{1,p}) \overset{*}{\leqslant}$$
$$\leqslant c \cdot (C_1 + Q\|u_n - u_0\|_{1,p}^p).$$
$$\Longrightarrow \|u_n - u_0\|_{1,p} \leqslant \frac{\tilde{K}(f, \Omega, p)}{Q} \Longrightarrow \|u_n\|_{1,p} \leqslant K.$$

„*“: Young $\frac{\|u_n - u_0\|_{1,p}^{p-1}}{z} \cdot z \leqslant \frac{\|u_n - u_0\|^p}{z} + c(z, p)$. Obdobně pro $\|u_n - u_0\|^1$. A najdeme z, respektive dohromady Q, tak, aby $1 - Q \geqslant 0$. □

Důsledek

$$\|A(\cdot, u_n, \nabla u_n)\|_{p'}, \|B(\cdot, u_n, \nabla u_n)\|_{p'} \leqslant \text{const}$$

Lemma 3.6 (Limitní přechod)

TODO!!!

Důkaz
Víme $W^{1,p}$, L^p reflexivní. V celém důkazu: BÚNO(podposloupnost). Stejnoměrné odhady dávají $u_n \rightharpoonup u$ v $W_0^{1,p}(\Omega)$, tedy $u_n - u_0 \rightharpoonup u - u_0$ v $W_0^{1,p}(\Omega)$, $A(\cdot, u_n, \nabla u_n) \rightharpoonup \overline{A}$ v $L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ a $B(\cdot, u_n, \nabla u_n) \rightharpoonup \overline{B}$ v $L^{p'}(\Omega)$.

i-tá rovnice v $(GA)^n$:

$$\int_\Omega \underbrace{A(\cdot, u_n, \nabla u_n)}_{\rightharpoonup \overline{A} \text{ v } L^{p'}} \cdot \underbrace{\nabla \omega_i}_{\in L^p} + \underbrace{B(\cdot, u_n, \nabla u_n)}_{\rightharpoonup \overline{B} \text{ v } L^{p'}} \cdot \underbrace{\omega_i}_{\in L^p} = \langle f, \omega_i \rangle \implies$$

$$\implies \forall i \in \mathbb{N} : \int_\Omega \overline{A} \cdot \nabla \omega_i + \overline{B} \omega_i = \langle f, \omega_i \rangle \implies$$

$$\implies \forall \omega \in W_0^{1,p} \int_\Omega \overline{A} \nabla \omega + \overline{B} \omega = \langle f, \omega \rangle \tag{$**$}$$

†: „$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega A(\cdot, u_n, \nabla u_n) \nabla u_n + B(\cdot, u_n, \nabla u_n) u_n = \int_\Omega \overline{A} \nabla u + \overline{B} u$“:

$$\int_\Omega A(\cdot, u_n, \nabla u_n) \nabla u_n + B(\cdot, u_n, \nabla u_n) \cdot u_n =$$

$$= \int_\Omega A(\cdot, u_n, \nabla u_n) \nabla (u_n - u_0) + B(\cdot, u_n, \nabla u_n)(u_n - u_0) +$$

$$+ \int_\Omega A(\cdot, u_n, \nabla u_n) \nabla u_0 + B(\cdot, u_n, \nabla u_n) u_0 =$$

$$\overset{**}{=} \int_\Omega \overline{A} \nabla (u - u_0) + \overline{B}(u - u_0) + \overline{A} \nabla u_0 + \overline{B} u_0 = \int_\Omega \overline{A} \nabla u + \overline{B} u.$$

Nyní stačí ukázat $\overline{A} = A(\cdot, u, \nabla u)$ skoro všude a $\overline{B} = B(\cdot, u, \nabla u)$ skoro všude. □

Důkaz (Celý operátor je monotónní)
Nechť $v \in L^p(\Omega)$, $\mathbf{v} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Pak

$$0 \leqslant \int_\Omega (A(\cdot, u_n, \nabla u_n) - A(\cdot, v, \mathbf{v}))(\nabla u_n - \mathbf{v}) + (B(\cdot, u_n, \nabla u_n) - B(\cdot, v, \mathbf{v}))(u_n - \mathbf{v}) =$$

$$= \underbrace{\int_\Omega A(\cdot, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n + B(\cdot, u_n, \nabla u_n) u_n +}_{\dagger}$$

$$\underbrace{\int_\Omega -A(\cdot, u_n, \nabla u_n)\mathbf{v} - A(\cdot, v, \mathbf{v})(\nabla u_n - \mathbf{v}) - B(\cdot, u_n, \nabla u_n) v - B(\cdot, v, \mathbf{v})(u_n - v)}_{\text{slabá konvergence}} \to$$

$$\to \int_\Omega \overline{A}\nabla u + \overline{B} u + \int_\Omega -\overline{A}\mathbf{V} - A(\cdot, v, \mathbf{v})(\nabla u - \mathbf{v}) - \overline{B} v - B(\cdot, v, \mathbf{v})(u - v) =$$

$$= \int_\Omega (\overline{A} - A(\cdot, v, \mathbf{v}))(\nabla u - \mathbf{v}) + (\overline{B} - B(\cdot, v, \mathbf{v}))(u - v)$$

Volme $v = u - \varepsilon w$, $\mathbf{v} = \nabla u - \varepsilon \mathbf{w}$ a podělme ε:

$$0 \leqslant \int_\Omega (\overline{A} - A(\cdot, u - \varepsilon w, \nabla u - \varepsilon \mathbf{w}))\mathbf{w} + (\overline{B} - B(\cdot, u - \varepsilon w, \nabla u - \varepsilon \mathbf{w}))w.$$

$$\varepsilon \to 0_+ \overset{\text{Nemytskii}}{\Longrightarrow} 0 \leqslant \int_\Omega (\overline{A} - A(\cdot, u, \nabla u))\mathbf{w} + (\overline{B} - B(\cdot, u, \nabla u))w \qquad \forall w, \mathbf{w}.$$

$$\mathbf{w} = -\frac{\overline{A} - A(\cdot, u, \nabla u)}{1 + |\overline{A} - A(\cdot, u, \nabla u)|}, \qquad w = -\frac{\overline{B} - B(\cdot, u, \nabla u)}{1 + |\overline{B} - B(\cdot, u, \nabla u)|} \implies$$

$$\implies \int_\Omega \frac{|\overline{A} - A(\cdot, u, \nabla u)|^2}{1 + |\overline{A} - A(\cdot, u, \nabla u)|} + \frac{|\overline{B} - B(\cdot, u, \nabla u)|^2}{1 + |\overline{B} - B(\cdot, u, \nabla u)|} \leqslant 0 \implies$$

$\implies$ $\overline{A} = A(\cdot, u, \nabla u)$ skoro všude a $\overline{B} = B(\cdot, u, \nabla u)$ skoro všude. □

Poznámka (Minty trick)
Odvodit podobnou nerovnost, přejít k limitě, šikovně zvolit $v, \mathbf{v}$ (obvykle $v = u - \varepsilon \cdot w$, $\mathbf{v} = \nabla u - \varepsilon \mathbf{w}$ pro libovolné $w \in L^p(\Omega)$, $\mathbf{w} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $\varepsilon > 0$). A nakonec zlimitit (podělit ε, $\varepsilon \to 0_+$ a šikovná volba $w, \mathbf{w}$).

Důkaz (A monotónní vzhledem k ξ, B lineární vzhledem k ξ)
Tj. $B(\cdot, u, \xi) = \sum_{i=1}^{d} b_i(\cdot, u) \cdot \xi_i$.

$$u_n \rightharpoonup u \text{ v } W^{1,p} \implies u_n \overset{L^p}{\to} u \qquad \Longleftarrow W^{1,p} \hookrightarrow\hookrightarrow L^p \quad (\forall d).$$

Tedy $B(\cdot, u_n, \nabla u_n) \rightharpoonup B(\cdot, u, \nabla u)$ a $\overline{B} = B(\cdot, u, \nabla u)$. Zbývá $\overline{A} = A(\cdot, u, \nabla u)$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega A(\cdot, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \int_\Omega A(\cdot, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n + B(\cdot, u_n, \nabla u_n)u_n}_{**} -$$

$$- \underbrace{\lim_{n\to\infty} \int_\Omega B(\cdot, u_n, \nabla u_n)(u_n - u)} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \int_\Omega B(u_n, \nabla u_n)u}_{\to \int_\Omega \overline{B}u} = \int_\Omega \overline{A}\nabla u + \overline{B}u - \overline{B}u - 0 = \int_\Omega \overline{A}\nabla u,$$

$$\text{protože } \int_\Omega B(\cdot, u_n, \nabla u_n)(u_n - u) \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|B(\cdot, u_n, \nabla u_n)\|_p \cdot \|u_n - u\|_p \leqslant c \cdot \|u_n - u\|_p \to 0.$$

Minty trick: $\forall \mathbf{v} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$, A monotónní v ξ:

$$0 \leqslant \int_\Omega (A(\cdot, u_n, \nabla u_n) - A(\cdot, u_n, \mathbf{v}))(\nabla u_n - \mathbf{v}) =$$

$$= \int_\Omega A(\cdot, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n - \int_\Omega A(\cdot, u_n, \mathbf{v})(\nabla u_n - \mathbf{v}) + A(u_n, \nabla u_n)\mathbf{v} \to$$

$$\to \int_\Omega \overline{A}\nabla u - \int_\Omega \overline{A}\mathbf{v} - \int_\Omega A(\cdot, u, \mathbf{v})(\nabla u - \mathbf{v}) - 0, \text{ protože}$$

$$\left| \int_\Omega (A(\cdot, u_n, \mathbf{v}) - A(\cdot, u, \mathbf{v}))(\nabla u_n - \mathbf{v}) \right| \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|\nabla u_n - \mathbf{v}\|_p \cdot \|A(\cdot, u_n, \mathbf{v}) - A(\cdot, u, \mathbf{v})\|_{p'} \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot \|A(\cdot, u_n, \mathbf{v})\|_{p'} \overset{\text{Nemytskii}}{\to} 0.$$

Máme $0 \leqslant \int_\Omega (\overline{A} - A(\cdot, u, \mathbf{v}))(\nabla u - \mathbf{v})$. Minty trick: $\mathbf{v} = \nabla u + \varepsilon \mathbf{w}$ a vydělit ε:

$$0 \geqslant \int_\Omega (\overline{A} - A(\cdot, u, \nabla u + \varepsilon \mathbf{w}))\mathbf{w} \to \int_\Omega (\overline{A} - A(\cdot, u, \nabla u)) \cdot \mathbf{w},$$

$$\mathbf{w} = -\frac{(\overline{A} - A(\cdot, u, \nabla u))}{1 + |\overline{A} - A(\cdot, u, \nabla u)|} \implies \overline{A} = A(u, \nabla u) \text{ skoro všude.}$$

□

Důkaz (Ta limita s Nemytskiim)
Platí $|A(\cdot, u_n, \mathbf{v}) - A(\cdot, u, \mathbf{v})|^{p'} \to 0$ skoro všude (neb A je Caratheodorova funkce). Plyne z Vitaliho, ověříme předpoklady:

$$\int_U |A(\cdot, u_n, \mathbf{v}) - A(\cdot, u, \mathbf{v})|^{p'} \leqslant c \cdot \int_U |u_n|^p + |\mathbf{v}|^p + |u|^p + g \leqslant c \cdot \int_U |\mathbf{v}|^p_| u|^p + g + c \cdot \int_U |u_n|^p.$$

První člen nezávisí na n a zřejmě je malý pro malé U. Víme $W^{1,p} \hookrightarrow L^{p+\delta}$ pro $\delta > 0$

$$\implies \int_U |u_n|^p \cdot 1 \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \left(\int_U |u_n|^{p+\delta} \right)^{\frac{p}{p+\delta}} \cdot \left(\int_U 1^{\frac{p+\delta}{\delta}} \right)^{\frac{\delta}{p+\delta}} \leqslant c \cdot |U|^{\frac{\delta}{p+\delta}}.$$

□

Důkaz (A ryze monotónní vzhledem k ξ)
Ukážeme, že $u_n \to u$ skoro všude a že $\nabla u_n \to u$ skoro všude, z čehož pak budeme mít $\overline{B} = B(\cdot, u, \nabla u)$ skoro všude (neboť $B(\cdot, u_n, \nabla u_n) \rightharpoonup B(\cdot, u, \nabla u)$ v $L^{p'}$ z Vitaliho a $B(\cdot, u_n, \nabla u_n) \to B(\cdot, u, \nabla u)$ v L^q pro každé $q < p'$) a z toho i $\overline{A} = A(\cdot, u, \nabla u)$ skoro všude (důkaz předchozí podmínky).

$u_n \to u$ skoro všude, neb $W^{1,p} \hookrightarrow\hookrightarrow L^p$ (BÚNO podposloupnost).

„$\nabla u_n \to \nabla u$ skoro všude“: Víme

$$0 \leqslant \int_\Omega (A(\cdot, u_n, \nabla u_n) - A(\cdot, u_n, \mathbf{v}))(\nabla u_n - \mathbf{v}) \to$$

$$\to \int_\Omega (\overline{A} - A(u, \mathbf{v}))(\nabla u - \mathbf{v}) = \int_\Omega (A(u, \nabla u) - A(u, \mathbf{v}))(\nabla u - \mathbf{v}).$$

Volbou $\mathbf{v} \coloneqq \nabla u$ dostáváme

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (A(\cdot, u_n, \nabla u_n) - A(\cdot, u_n, \nabla u))(\nabla u_n - \nabla u) =$$

$$= \int_\Omega (A(u, \nabla u) - A(u, \nabla u))(\nabla u - \nabla u) = 0,$$

tedy $(A(\cdot, u_n, \nabla u_n) - A(\cdot, u_n, \nabla u))(\nabla u_n - \nabla u) \to 0$ v L^1 silně.

Dále víme $u_n \to u$ silně v L^1. Egorov $\implies$ $\exists \varepsilon\ \exists \Omega_\varepsilon : |\Omega \backslash \Omega_\varepsilon| < \varepsilon$, $u_n \to u$ v $C(\Omega_\varepsilon)$ a $(A(\cdot, u_n, \nabla u_n) - A(\cdot, u_n, \nabla u))(\nabla u_n - \nabla u) \to 0$ v $C(\Omega_\varepsilon)$, tedy „skoro všude na Ω_ε“:

Pro spor předpokládejme $\nabla u_n \nrightarrow \nabla u$. Z ryzí monotonie A však plyne $(A(\cdot, u, \mathbf{v}_1) - A(\cdot, u, \mathbf{v}_2))(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, tedy $\nabla u_n \to \nabla u$ skoro všude na Ω_ε, tedy i na Ω (neboť $|\Omega \backslash \Omega_\varepsilon| \leqslant \varepsilon \to 0$). □

Věta 3.7

$\Omega \in \mathbb{R}^d$, $\Omega \in C^{0,1}$, $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, $p(1, \infty)$, A a B Caratheodorovy funkce, které splňují předpoklady z definice slabého řešení, $\Gamma_D = \partial\Omega$, $f \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$, A a B jsou koercivní, A

monotónní vzhledem k ξ a alespoň jedna z následujících podmínek je splněna:

- *celý operátor je monotónní;*
- *B je lineární vzhledem k ξ;*
- *A je ryze monotónní vzhledem k ξ.*

Pak $\exists u \in W^{1,p}(\Omega)$ slabé řešení. Navíc pokud je celý operátor ryze monotónní, pak u je jednoznačná.

Důkaz (Jednoznačnost)
Nechť jsou $u_1 \neq u_2$ (na nenulové podmnožině Ω) slabá řešení, pak $\varphi = u_1 - u_2 \in W^{1,2}(\Omega)$, $\varphi = 0$ na Γ_D, a $0 =$

$$\int_\Omega (A(x,u_1,\nabla u_1) - A(x,u_2,\nabla u_2))(\nabla u_1 - \nabla u_2) + (B(x,u_1,\nabla u_1) - B(x,u_2,\nabla u_2))(u_1 - u_2) > 0.$$

□

Důkaz (Existence)
Předchozí lemmata. □

TODO? (příklad $-\operatorname{div}(\operatorname{arctg}(1+|\nabla u|^2)\nabla u) + |u|^{98}u = f$ na Ω a $\ldots \cdot \nu = 0$ na $\partial\Omega$.)

TODO? (příklad ohledně reprezentace $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$.)

4 Minimum (konvexní) funkce vs. teorie monotónních operátorů

Definice 4.1 (Předpoklady)

1. F je Caratheodoryho funkce;
2. F je koercivní (tj. $F(x,u,\xi) \geqslant c_1 \cdot |\xi|^p - c_2(x)$, kde $c_2 \in L^1$, $p \in (1,\infty), c_1 > 0$);
3. $f \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$.

Definice 4.2 (Konvexní funkce)

F je konvexní vzhledem k ξ, pokud

$$\forall \lambda \in [0,1], \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^d\colon F(x,u,\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) \leqslant \lambda \cdot F(x,u,\xi_1) + (1-\lambda)F(x,u,\xi_2).$$

Věta 4.1 (Fundamental theorem of calculus of variations)

Nechť platí 1., 2. a 3. a F je konvexní vzhledem k ξ. Pak $\exists u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ minimalizující výraz $\int_\Omega F(\cdot, v, \nabla v) - \langle f, v\rangle$ přes $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Důkaz
$I \coloneqq \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)} \left(\int_\Omega F(\cdot, u, \nabla u) - \langle f, u\rangle\right)$. Z definice infima nalezneme $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ taková, že $\int_\Omega F(\cdot, u_n, \nabla u_n) - \langle f, u_n\rangle \to I$.

Navíc zvolme n_0 tak, aby $\forall n > n_0 : \int_\Omega F(u_n, \nabla u_n) - \langle f, u_n\rangle \leqslant I+1$ $(\leqslant \int_\Omega F(\cdot, 0, \mathbf{o})+1 < \infty)$. Pak

$$c_1 \cdot \int_\Omega |\nabla u_n|^p \overset{2.}{\leqslant} \int_\Omega c_2(x) + I + 1 + \langle f, u_1\rangle \leqslant \tilde{c}(1 + \|f\| \cdot \|u_n\|_{1,p}) \overset{\text{Young + Poincaré}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \tilde{c}(1 + \|f\|^{p'}) + \frac{c_1}{2} \cdot \|\nabla u_n\|_p^p \implies \|u_n\|_{1,p} \overset{\text{Poincaré}}{\leqslant} c \cdot \|\nabla u_n\|_p^p \leqslant \tilde{\tilde{c}}(1 + \|f\|^{p'}) \implies$$

$$\implies u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ v } W_0^{1,p}(\Omega), \quad \hookrightarrow\hookrightarrow \implies u_{n_k} \to u \text{ v } L^p(\Omega).$$

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega F(\cdot, u_n, \nabla u_n) - \langle f, u_n\rangle \overset{\text{další lemma}}{\geqslant} \int_\Omega F(\cdot, u, \nabla u) - \langle f, u\rangle \geqslant I.$$

Tedy u je minimizér. □

Lemma 4.2 (Konvexní funkce je slabě lsc)

$z_n \to z$ v $L^1(\Omega, \mathbb{R}^M)$, $\xi_n \rightharpoonup \xi$ v $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. $F : \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Caratheodorova funkce konvexní vzhledem k $\xi \in \mathbb{R}^N$. $F(x, z_n(x), \xi_n(x)) \geqslant c(x)$, kde $c \in L^1(\Omega)$.

Pak $\int_\Omega F(x, z(x), \xi(x))dx \leqslant \liminf \int_\Omega F(x, z_n(x), \xi_n(x))dx$.

Důkaz
Nebudeme dělat v plné obecnosti, předpokládejme $A \coloneqq \frac{\partial F}{\partial \xi} : \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je Caratheodorova funkce.

Egorov $\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists \Omega_\varepsilon : |\Omega \backslash \Omega_\varepsilon| < \varepsilon \wedge z_n \to z$ v $C(\Omega_\varepsilon)$, $|\xi| \leqslant \frac{c}{\varepsilon}$ na Ω_ε.

$$\int_\Omega F(\cdot, z_n, \xi_n) = \int_\Omega F(\cdot, z_n, \xi_n) - c(x) + \int_\Omega c(x) \geqslant \int_{\Omega_\varepsilon} F(\cdot, z_n, \xi_n) - c(x) + \int_\Omega c(x) =$$

$$= \int_{\Omega_\varepsilon} F(\cdot, z_n, \xi) + \int_{\Omega_\varepsilon} F(\cdot, z_n, \xi_n) - F(\cdot, z_n, \xi) + \int_{\Omega \backslash \Omega_\varepsilon} c(x) \overset{\text{další lemma}}{\geqslant}$$

$$\geqslant \int_{\Omega_\varepsilon} F(\cdot, z_n, \xi) + \int_{\Omega \backslash \Omega_\varepsilon} c(x) + \int_{\Omega_\varepsilon} A(\cdot, z_n, \xi)(\xi_n - \xi).$$

Fatou $+\ z_n \to z$ v $C(\Omega_\varepsilon) + F$ Caratheodorova $\implies \liminf \int_{\Omega_\varepsilon} F(\cdot, z_n, \xi) \geqslant \int_{\Omega_\varepsilon} F(\cdot, z, \xi)$.

$\|A(\cdot, z_n, \xi) - A(\cdot, z, \xi)\|_\infty \to 0$, neboť A je spojitá vzhledem k z, ξ a $z_n \to z$ v $C(\Omega_\varepsilon)$ a ξ je omezená na Ω_ε. Pak

$$\int_{\Omega_\varepsilon} A(\cdot, z_n, \xi)(\xi_n - \xi) = \int_{\Omega_\varepsilon} A(\cdot, z, \xi)(\xi_n - \xi) + \int_{\Omega_\varepsilon} (A(\cdot, z_n, \xi) - A(\cdot, z, \xi))(\xi_n - \xi) \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot \|A(\cdot, z_n, \xi) - A(\cdot, z, \xi)\|_\infty \to 0$$

$$\implies \liminf \int_\Omega F(\cdot, z_n, \xi_n) \geqslant \int_{\Omega_\varepsilon} F(\cdot, z, \xi) + \int_{\Omega \backslash \Omega_\varepsilon} c(x) \to \int_\Omega F(\cdot, z, \xi).$$

□

Lemma 4.3

$F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spojité funkce, $A(\xi) = \frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi)$. Pak

1. *F (ryze) konvexní $\Leftrightarrow$ A (ryze) monotónní;*
2. *pro F konvexní $F(\xi_1) - F(\xi_2) \geqslant A(\xi_2) \cdot (\xi_1 - \xi_2)$ $(\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N)$.*

Důkaz
$\varphi_w(t) = F(u + t \cdot w)$, kde $t \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{R}^N$. Pak $\varphi'_w(t) = \frac{\partial F}{\partial \xi}(u + t \cdot w) \cdot w = A(u + t \cdot w) \cdot w$.

„1. $\implies$“: F (ryze) konvexní $\implies$ φ_w (ryze pro $w \neq \mathbf{o}$) konvexní $\implies$ $\varphi'_w(1) - \varphi'_w(0) \geqslant 0$ (> 0) $\implies$ $A(u + w) \cdot w - A(u) \cdot w \geqslant 0$ (> 0).

$$w \coloneqq v - u \implies (A(v) - A(u))(v - u) \geqslant 0 \quad (> 0) \qquad \forall u, v.$$

„1. $\impliedby$ + 2.“: Nechť $t_1 \geqslant t_2$:

$$\varphi'_w(t_1) - \varphi'_w(t_2) = A(u + t_1 w)w - A(u + t_2 w)w \overset{\text{nebo rovnou } \geqslant 0}{=}$$

$$= \frac{1}{t_1 + t_2}(A(u + t_1 w) - A(u + t_2 w))((u + t_1 w) - (u + t_2 w)) \geqslant 0 \implies$$

$$\implies F(u + w) - F(w) = \varphi_w(1) - \varphi_w(0) = \int_0^1 \varphi'_w(t) \geqslant \int_0^1 \varphi'_w(0) = \varphi'_w(0) = A(u) \cdot w.$$

$$w \coloneqq v - u \implies F(v) - F(u) \geqslant A(u) \cdot (v - u) \implies 2.$$

Nechť $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in (0, 1)$, $z = \lambda \xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2$. Platí

$$F(\xi_1) - F(z) \geqslant A(z)(\xi_1 - z) \wedge F(\xi_2) - F(z) \geqslant A(z)(\xi_2 - z) \implies$$

$$\lambda F(\xi_1) - \lambda F(z) \geqslant A(z)(\lambda \xi_1 - \lambda z \wedge (1 - \lambda)F(\xi_2) - (1 - \lambda)F(z) \geqslant A(z)((1 - \lambda)\xi_2 - (1 - \lambda)z))$$

$$\overset{+}{\implies} \lambda F(\xi_1) + (1 - \lambda)F(\xi_2) - F(z) \geqslant A(z)(\lambda \xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2 - z) = A(z) \cdot 0 = 0 \implies$$

$$\implies F(z) \leqslant \lambda F(\xi_1) + (1 - \lambda)F(\xi_2).$$

□

TODO? (příklad $\min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \int_\Omega a(u) \frac{|\nabla u|^p}{p} - \langle f, u \rangle$, kde $a \in C^1(\mathbb{R})$, $0 < c_1 \leqslant a(u) \leqslant c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $(f \in W_0^{1,p}(\Omega))^*$.)

TODO? (příklad $F(u, \xi) = \frac{|\xi|^p}{p} + \frac{|u|^q}{q}$.)

TODO? (příklad, stejný jako předpředchozí, jen minimalizujeme přes

$$V \coloneqq \left\{ v \in W^{1,p}(\Omega) | v \geqslant 0, v = 1 \text{ na } \partial\Omega \right\})$$

TODO? (příklad TODO!)

Lemma 4.4

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *A, B Caratheodorovy funkce $\frac{\partial A_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial A_j}{\partial \xi_i}$ a $\frac{\partial B_i}{\partial \xi_i} = \frac{\partial A_i}{\partial u}$;*

2. *$\exists F$ Caratheodorova funkce taková, že $\frac{\partial F}{\partial \xi} = A$ a $\frac{\partial F}{\partial u} = B$.*

Důkaz
„2. $\implies$ 1.“: Jen A, pro B analogicky:

$$\frac{\partial A_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_j}\right) = \frac{\partial A_j}{\partial \xi_i}.$$

„1. $\implies$ 2.“:

$$F(u,\xi) \coloneqq \int_0^1 A(tu,t\xi)\cdot \xi dt + \int_0^1 B(tu,t\xi) u dt.$$

Pak

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,\xi) = \int_0^1 \frac{\partial A}{\partial (tu)}(tu,t\xi)\cdot t\xi dt + \int_0^1 \frac{\partial B}{\partial (tu)}(tu,t\xi)\cdot tu dt + \int_0^1 B(tu,t\xi) dt.$$

Platí

$$\frac{d}{dt}B(tu,t\xi) = \frac{\partial B}{\partial (tu)}(tu,t\xi)\cdot u + \frac{\partial B}{\partial (t\xi)}(tu,t\xi)\xi \overset{1.}{=} \frac{\partial B}{\partial (tu)}(tu,t\xi)u + \frac{\partial A}{\partial (tu)}(tu,t\xi)\cdot \xi \implies$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,\xi) = \int_0^1 t\frac{\partial A}{\partial (tu)}(tu,t\xi)\cdot\xi - \int_0^1 t\frac{\partial A}{\partial (tu)}(tu,t\xi)\cdot\xi + \int_0^1 t\cdot\frac{d}{dt}(B(tu,t\xi)) + \int_0^1 B(tu,t\xi) =$$

$$\overset{\text{PP}}{=} [tB(tu,t\xi)]_0^1 = B(u,\xi).$$

Pro $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ analogicky. □

Lemma 4.5

A, B Caratheodorovy funkce, celý operátor je monotónní, $\frac{\partial A_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial A_j}{\partial \xi_i}$, $\frac{\partial B}{\partial \xi_i} = \frac{\partial A_i}{\partial u}$. Pak za vhodných growth assumptions[a] *máme u slabé řešení $-\operatorname{div} A(u,\nabla u) + B(u,\nabla u) = f \Leftrightarrow u$ minimalizuje $\int_\Omega F(u,\nabla u) - \langle f, u\rangle$.*

Důkaz
Nechť $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\int_\Omega A(u, \nabla u)\nabla v + B(u, \nabla u)v = \langle f, v\rangle\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ $(*)$.

„u je minimizér“: chceme $\int_\Omega F(v, \nabla v) - F(u, \nabla u) \geqslant \langle f, v - u\rangle\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Z předchozího lemmatu máme $\exists F : A = \frac{\partial F}{\partial \xi}$, $B = \frac{\partial F}{\partial u}$.

Platí (z lemmatu před tím)

$$\int_\Omega F(v, \nabla v) - F(u, \nabla u) \geqslant \int_\Omega A(u, \nabla u)(\nabla v - \nabla u) + B(u, \nabla u)(v - u) \overset{*}{=} \langle f, v - u\rangle .$$

Jen je problém, že u nemusí být L^∞ (např. pro $F \sim |\xi|^p + |u|^p$ funguje). Obecně definujme $T_k(s) \coloneqq \operatorname{sign}(s) \cdot \min\{|s|, k\}$ a uvažujme $T_k(u)$ místo u. Pak $\int_\Omega F(v, \nabla v) \geqslant$

$$\geqslant \int_\Omega F(T_k(u), \nabla T_k(u)) + A(T_k(u), \nabla T_k(u))\nabla(v - T_k(u)) + B(T_k(u), \nabla T_k(u))(v - T_k(u)) =$$

$$= \int_\Omega F(T_k(u), \nabla T_k(u)) + \langle f, v - T_k(u)\rangle +$$

$$\underbrace{\int_\Omega (A(T_k(u), \nabla T_k(u)) - A(u, \nabla u))\nabla(v - T_k(u)) + (B(T_k(u), \nabla T_k(u)) - B(u, \nabla u))(v - T_k(u))}_{\overset{?}{\to} 0}.$$

Nyní použijeme něco jako Fatou, Nemitskii, … □

[a] Zde předpokládejme $A(u, \xi)\xi \geqslant c_1|\xi|^p - c_2$, $|A(u, \xi)| \leqslant c \cdot (|\xi|^{p-1} + 1)$, $|B(u, \xi)| \leqslant c(|u|^p + |\xi|^p)$.

4.1 Duální přístup

Věta 4.6

$p \in (1, \infty)$, $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi) = A(\xi)$, F (ryze) konvexní, A (ryze) monotónní,

$$F(0) = 0, \qquad A(0) = 0, \qquad F(\xi) \leqslant c \cdot (1 + |\xi|^p), \qquad |A(\xi)| \leqslant c \cdot (1 + |\xi|^{p-1}),$$

$$F(\xi) \geqslant c_1|\xi|^p - c_2, \qquad A(\xi) \cdot \xi \geqslant c_1|\xi|^p - c.$$

$$u_0 \in W^{1,p}(\Omega), \qquad g \in L^p(\Gamma_N), \qquad \Gamma_N \subset \partial\Omega, \qquad |\partial\Omega \backslash \Gamma_N| > 0, \qquad \Gamma_D = \partial\Omega \backslash \Gamma_N.$$

Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. *u je slabé řešení problému $-\operatorname{div}(A(\nabla u)) = f$ na Ω, $u - u_0$ na Γ_D a $A(\nabla u) \cdot \nu = g$ na Γ_N;*[a]

2. *u minimalizuje*

$$\min_{v \in W^{1,p}(\Omega), v = u_0 \text{ na } \Gamma_d} \left(\int_\Omega F(\nabla v) - \langle f, v\rangle - \int_{\Gamma_N} g \cdot v \right);$$

3. $\xi \coloneqq A(\nabla u)$*, pak* ξ *minimalizuje* $\min_{\mu \in K} \int_\Omega F^*(\mu) - \nabla u_0 \cdot \mu$*, kde*

$$K \coloneqq \left\{ \mu \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^d) \;\middle|\; \forall v \in W^{1,p}(\Omega), v = 0 \text{ na } \Gamma_D\colon \int_\Omega \mu \nabla v = \langle f, v \rangle + \int_{\Gamma_N} gv \right\},$$

$$F^*(z) \coloneqq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} (\xi \cdot z - F(\xi)) \textit{ je tzv. konvexně sdružené k } F.$$

Poznámka

Platí $\xi \cdot z \leqslant F(\xi) + F^*(z)$, další vlastnosti v následujícím lemmatu.

[a] Tzn. $\forall v \in W^{1,p}(\Omega), v = 0$ na $\Gamma_D : \int_\Omega A(\nabla u)\nabla v = \langle f, v \rangle + \int_{\Gamma_N} g \cdot v$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u = u_0$ na Γ_D.

Důkaz (2. $\implies$ 1.)

Odvodíme Eulerovy–Lagrangeovy rovnice. Vynecháno (umíme si to sami rozmyslet.) □

Důkaz (1. $\implies$ 2.)

Máme

$$\forall v \in W^{1,2}(\Omega), v = 0 \text{ na } \Gamma_D\colon \int_\Omega A(\nabla u)\nabla v - \langle f, v \rangle - \int_{\Gamma_N} gv = 0 \implies$$

$$\implies \int_\Omega F(\nabla v) - F(\nabla u) - \langle f, v - u \rangle - \int_{\Gamma_N} g(v - u) \overset{\text{lemma výše}}{\geqslant}$$

$$\geqslant \int_\Omega A(\nabla u)(\nabla v - \nabla u) - \langle f, v - u \rangle - \int_{\Gamma_N} g(v - u) \overset{w = v - u}{=} 0.$$

□

Důkaz (3 ⇔ 1 (s pomocí dalšího lemmatu))
První krok – jednoznačnost minimizátoru: pro spor $\xi_1, \xi_2 \in K$ jsou oba minimizéry, $\xi_1 \neq \xi_2$ na množině kladné míry. Vezměme $\xi \coloneqq \frac{\xi_1+\xi_2}{2} \in K$:

$$\int_\Omega F^*(\xi) - \nabla u_0 \xi \overset{(P1)}{<} \int_\Omega \frac{F^*(\xi_1)}{2} + \frac{F^*(\xi_2)}{2} - \nabla u_0 \frac{\xi_1+\xi_2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega F^*(\xi_1) - \nabla u_0 \xi_1 + \frac{1}{2}\int_\Omega F^*(\xi_2) - \nabla u_0 \xi_2 = \min_{\mu \in K} \int_\Omega F^*(\mu) - \nabla u_0 \mu.$$

Druhý krok – existuje minimizér:

$$I \coloneqq \inf_{\mu \in K} \int_\Omega F^*(\mu) - \nabla u_0 \mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega F^*(\xi_n) - \nabla u_0 \xi_n.$$

$K \neq \emptyset$, neboť $\tilde{\xi} = A(\nabla u) \in K$. $\exists n_0\ \forall n \geqslant n_0$:

$$\int_\Omega F^*(\xi_n) - \nabla u_0 \xi_n \leqslant \int_\Omega F^*(\tilde{\xi}) - \nabla u_0 \tilde{\xi} + 1 \leqslant c \cdot (\|u\|_{1,p} \cdot \|u_0\|_{1,p}).$$

Navíc

$$\int_\Omega F^*(\xi_n) - \nabla u_0 \xi_n \overset{\text{Hölder + (P4)}}{\geqslant} c_1 \|\xi_n\|_{p'}^{p'} - c(\Omega) - \|\xi_n\|_{p'} \cdot \|\nabla u_0\|_p \overset{\text{Young}}{\geqslant}$$

$$\geqslant c_1 \|\xi_n\|_{p'}^{p'} - c(\Omega) - \frac{c_1}{2}\|\xi_n\|_{p'}^{p'} - \tilde{\|}\nabla u_0\|_p^p \implies$$

$\implies \|\xi_n\|_{p'}^{p'}$ omezená $\implies$ (BÚNO podposloupnost) $\xi_n \rightharpoonup \xi$ v $L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

$$I \leftarrow \int_\Omega F^*(\xi_n) - \nabla u_0 \xi_n \geqslant \int_\Omega F^*(\xi) - \nabla u_0 \xi \implies \xi \text{ je minimizér.}$$

Třetí krok – $\xi = A(\nabla u)$ je minimizér: Nechť $\tilde{\xi} \in K$, potom

$$\int_\Omega (F^*(\tilde{\xi}) - \nabla u_0 \tilde{\xi}) - \int_\Omega (F^*(\xi) - \nabla u_0 \xi) = \int_\Omega F^*(\tilde{\xi}) - F^*(\xi) - \nabla u_0(\tilde{\xi} - \xi) \overset{\text{(P1) + lemma výše}}{\geqslant}$$

$$\geqslant \int_\Omega \frac{\partial F^*}{\partial \xi}(\xi)(\tilde{\xi} - \xi) - \nabla u_0(\tilde{\xi} - \xi) \overset{\text{P3}}{=} \int_\Omega (A^{-1}(\xi) - \nabla u_0)(\tilde{\xi} - \xi) = \int_\Omega (\nabla u - \nabla u_0)(\tilde{\xi} - \xi) =$$

$$= \langle f, \nabla u - \nabla u_0 \rangle + \int_{\Gamma_N} g(\nabla u - \nabla u_0) - \langle f, \nabla u - \nabla u_0 \rangle - \int_{\Gamma_N} g(\nabla u - \nabla u_0) = 0.$$

□

Lemma 4.7

Za předpokladů předchozí věty platí následující:

(P1): $F^*(\mathbf{o}) = 0$, *F^* je ryze konvexní;*

(P2): $\exists A^{-1}$*;*

(P3): $\frac{\partial F^*}{\partial \xi}(\xi) = A^{-1}(\xi)$*;*

(P4): $|F^*(\xi)| \leqslant \tilde{c}(1 + |\xi|^{p'})$, $|F^*(\xi)| \geqslant \tilde{c}_1|\xi|^{p'} - c_2$*;*

(P5): $F^{**} \leqslant F \ \forall F : \frac{F(\xi)}{\xi} \xrightarrow{|\xi|\to\infty} \infty$, $F^{**} = F \Leftrightarrow F$ *konvexní.*

Důkaz (P1)
$\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in (0,1)$, $z \coloneqq \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2$. Pak

$$F^*(z) = \sup_{w\in\mathbb{R}^d}(w \cdot z - F(w)) = \sup_{w\in\mathbb{R}^d}(\lambda w\xi_1 - \lambda F(w) + (1-\lambda)w\xi_2 - (1-\lambda)F(\omega)) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \sup_{w\in\mathbb{R}^d}(w\xi_1 - F(w)) + (1-\lambda)\sup_{w\in\mathbb{R}^d}(w\xi_2 - F(w)) = \lambda F^*(\xi_1) + (1-\lambda)F^*(\xi_2).$$

($F^*(\mathbf{o}) = 0$, neboť $F(\mathbf{o}) = 0$.) □

Důkaz (P2)
Ukážeme $\forall z \ \exists! \xi : A(\xi) = z$: Definujme $M : \xi \mapsto A(\xi) - z$. Pak

$$M(\xi)\cdot\xi = A(\xi)\cdot\xi - z\cdot\xi \geqslant c_1|\xi|^p - c_2 \cdot z\cdot\xi \geqslant 0 \text{ pro } |\xi| > R \text{ a vhodné } R.$$

Z lemmatu výše tedy víme $\exists\xi : M(\xi) = 0 \implies A(\xi) = z$.

A je ryze monotónní $\implies$ pro ξ_1, ξ_2 je $(A(\xi_1) - A(\xi_2))(\xi_1 - \xi_2) = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = \xi_2$, tudíž ξ je jednoznačné. □

Důkaz (P3)
$F^*(\xi) = \sup_{z\in\mathbb{R}^d}(z\cdot\xi - F(z)) = \max_{z\in\mathbb{R}^d}(z\cdot\xi - F(z))$. Nabývá-li se maxima v z_0, pak $\frac{\partial}{\partial z}(z\cdot\xi - F(z))|_{z_0} = 0 \implies$

$$\xi \cdot \frac{\partial F}{\partial z}(z_0) = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{\partial F}{\partial z}(z_0) = A(z_0) \Leftrightarrow A^{-1}(\xi) = z_0$$

$$\implies F^*(\xi) = z_0\cdot\xi - F(z_0) = A^{-1}(\xi)\cdot\xi - F(A^{-1}(\xi)) \implies F^*(A(z_0)) = z_0\cdot A(z) - F(z_0).$$

Z definice máme $F^*(\xi) + F(z) - z\cdot\xi \geqslant 0$. $\varphi : \xi \mapsto F^*(\xi) + F(z) - z\cdot\xi$ je tedy nezáporné zobrazení a pokud $z = A^{-1}(\xi)$, pak $F^*(\xi) + F(z) - z\cdot\xi = 0$.

Tedy ξ je takové, že $z = A^{-1}(\xi)$ je minimizér zobrazení φ, tudíž pro $\xi = A(z) : \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(\xi) = \frac{\partial F^*}{\partial\xi}(\xi) - z = 0$, tj. $\frac{\partial F^*}{\partial\xi}(\xi) = z = A^{-1}(\xi)$. □

Důkaz (P4)

$$F^*(\xi) = \sup_{z\in\mathbb{R}^d}(z\cdot\xi - F(z)) \overset{z:=\varepsilon\cdot|\xi|^{p'-2}\xi}{\geqslant} \varepsilon|\xi|^{p'} - F(\varepsilon\cdot|\xi|^{p'-2}\xi) \geqslant \varepsilon|\xi|^{p'} - c\cdot(1+(\varepsilon|\xi|^{p'-2})^p) =$$
$$= |\xi|^{p'}(\varepsilon - c\cdot|\xi|^p) - c = \varepsilon|\xi|^{p'} = \varepsilon|\xi|^{p'}(1-c\cdot\varepsilon^{p-1}) - c \geqslant \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{p'} - c.$$

$$F^*(\xi) = \sup_z(z\cdot\xi - F(z)) \leqslant \sup_z(z\cdot\xi - (c_1|z|^p - c_2)) = \sup_z\left(c_1^{\frac{1}{p}} z\cdot\frac{\xi}{c_1^{\frac{1}{p}}} - c_1|z|^p + c_2\right) \overset{\text{Young}}{\leqslant}$$

$$\sup_z(c_1|z|^p + \frac{|\xi|^{p'}}{c_1^{\frac{p'}{p}}} - c_2|z|^p + c_2) \leqslant \tilde{c}(|\xi|^{p'}+1).$$

□

Důkaz (P5)

$$F^{**}(\xi) = \sup_z(z\cdot\xi - F^*(z)) = \sup_z(z\cdot\xi - \sup_a(a\cdot z - F(a))) =$$
$$= \sup_z \inf_a(z\cdot\xi + a\cdot z - F(a)) \leqslant \sup_z F(\xi) = F(\xi).$$

Nechť $G \coloneqq F^*$. Pak $G^* = F^{**}$. $B \coloneqq \frac{\partial F^*}{\partial\xi} = \frac{\partial G}{\partial\xi}$. (P3) $\implies B^{-1} = \frac{\partial G^*}{\partial\xi}$. Navíc:

$$B = \frac{\partial F^*}{\partial\xi} = A^{-1}(\xi) \implies \frac{\partial F}{\partial\xi} = A = (A^{-1})^{-1} = B^{-1} = \frac{\partial G^*}{\partial\xi}$$

$\implies F = F^{**}$ pro F konvexní. □

TODO? (příklad $F(\xi) = |\xi|^p\ln(1+|\xi|^2)$, $p>1$.)

TODO? (poznámky k DÚ1.)

TODO? (regularita řešení, ke zkoušce ji není třeba umět.)

5 Nelineární parabolické rovnice

Lemma 5.1 (Ehringovo lemma)

Nechť V_1, V_2, V_3 *Banachovy prostory,* V_1 *a* V_2 *reflexivní,* $V_1 \hookrightarrow\hookrightarrow V_2 \hookrightarrow V_3$.

Pak $\forall\varepsilon\ \exists c(\varepsilon)\ \forall u\in V_1 : \|u\|_{V_2} \leqslant \varepsilon\|u\|_{V_1} + c(\varepsilon)\|u\|_{V_3}$.

Důkaz
Pro spor:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists u_n \in V_1 : \|u_n\|_{V_2} > \varepsilon \|u_n\|_{V_1} + n \cdot \|u_n\|_{V_3}, \qquad \text{BÚNO: } \|u_n\|_{V_2} = 1.$$

Pak u_n je omezená v V_1. V_1 a V_2 jsou reflexivní, tudíž $u_{n_k} \rightharpoonup u$ ve V_1. Navíc $V_1 \hookrightarrow\hookrightarrow V_2$, tedy $u_{n_k} \to u$ ve V_2. $\|u\|_{V_2} = 1 \implies u \neq 0$. Z nerovnice pak máme $u_{n_k} \to 0$ v V_3, tedy $v = 0$. □

Lemma 5.2 (Aubinovo–Lionsovo lemma (zjednodušená verze))

Nechť $p \in [1, \infty)$, V_1, V_2, V_3 Banachovy prostory, V_1 a V_2 reflexivní, $V_1 \hookrightarrow\hookrightarrow V_2 \hookrightarrow V_3$. Pak $U = \{u \in L^p(0,T;V_1) \mid \partial_t u \in L^1(0,T;V_3)\} \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(0,T;V_2)$.

Důkaz
Ukážeme způsobem: $M \subset U$ je omezená (tzn. $\exists c > 0 \forall u \in M : \int_0^T \|u\|_{V_1}^p + \|\partial_t u\|_{V_3} \leqslant c$) a chceme M prekompaktní v $L^p(0,T;V_2)$. □

Důkaz (Zhlazení vzhledem k času)
Rozšiřme $u \in M$ na $\tilde{u}(t) = u(2T - t)$ pro $t \in (T, 2T)$. Pak $\|\tilde{u}\|_{L^p(0,2T;V_1)} \leqslant c \cdot \|u\|_{L^p(0,T;V_1)}$ a $\|\partial_t \tilde{u}\|_{L^1(0,2T;V_3)} \leqslant c \cdot \|\partial_t u\|_{L^1(0,T;V_3)}$.

Pro $0 < \delta < T$ definujme $u_\delta(t) = \int_0^\delta \tilde{u}(t+s)\varphi_\delta(s)ds$, kde $\varphi_d(t) = \frac{1}{\delta}\varphi\left(\frac{t}{\delta}\right)$ a $\varphi \geqslant 0$ je takové, že $\varphi \in C_0^\infty((0,1))$, $\int_0^1 \varphi(s)ds = 1$.

Zřejmě platí $u_\delta(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(t+s)\varphi_\delta(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(s)\varphi_\delta(s-t)ds$. Platí

$$\|u_\delta(t)\|_{V_1}^p \leqslant c \cdot \int_{\mathbb{R}} \|\tilde{u}(s)\|_{V_1}^p \varphi_\delta(s-t)ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\delta}\int_0^{2T} \|\tilde{u}\|_{V_1}^p dt \leqslant \frac{\tilde{c}}{\delta}\|u\|_{L^p(0,T;V_1)}.$$

$$\implies \partial_t u_\delta(t) = -\int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(s)\varphi_\delta'(s-t)ds,$$

pak

$$\|\partial_t u_\delta(t)\|_{V^1}^p = \|\int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(s)\varphi_\delta'(s-t)ds\|_{V_1}^p \leqslant \|\varphi_\delta'\|_{L^\infty(0,t)} \int_0^{2T} \|\tilde{u}\|_{V_1}^p \leqslant c(\delta)\int_0^{2T} \|\tilde{u}\|_{V_1}^p \overset{\|\tilde{u}\| \leqslant c \cdot \|u\|}{\leqslant}$$

$$\leqslant \tilde{c}(\delta)\int_0^T \|u\|_{V_1}^p \implies \|u_\delta\|_{C^1(0,T;V_1)} \leqslant c(\delta)\|u\|_{L^p(0,T;V_1)} \quad \text{(omezená, neboť } M \text{ je omezená)} \tag{$*$}$$

Arzela–Ascoli pro Banach valued funkce $\implies C_1(0,T;V_1) \hookrightarrow\hookrightarrow C(0,T;V_2)$ (†). □

Důkaz (Zkreslení je „blízko“ původní funkci)

$$u(t) - u_\delta(t) = u(t) - \int_0^\delta \tilde{u}(t+s)\varphi_\delta(s)ds =$$

$$= -\int_0^\delta (u(t) - \tilde{u}(t+s)) \left(\frac{d}{ds} \int_s^\delta \varphi_\delta(\tau)d\tau \right) ds \overset{\text{PP}}{=} -\int_0^\delta \partial_t \tilde{u}(t+s) \left(\int_s^\delta \varphi_\delta(\tau)d\tau \right) ds \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= -\int_0^\delta \int_0^\tau \partial_t \tilde{u}(t+s)\varphi_s(\tau)dsd\tau \implies$$

$$\implies \|u(t) - u_0(t)\|_{V_3} \leqslant \int_0^\delta \int_0^\tau \|\partial_t \tilde{u}(t+s)\|_{V_3} ds\varphi_\delta(\tau)d\tau.$$

□

Důkaz (L^∞ odhad)

$$\sup_{t\in(0,T)} \|u(t)-u_\delta(t)\|_{V_3} \leqslant \sup_{t\in(0,T)} \int_0^\delta \int_0^\tau \|\partial_t \tilde{u}(t+s)\|_{V_3} ds\varphi_\delta(\tau)d\tau \leqslant c\cdot\|\partial_t u\|_{L^1(0,T;V_3)} \cdot \int_0^\delta \varphi_\delta(\tau)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot \|\partial_t u\|_{L^1(0,T;V_3)} \qquad \text{omezená, neboť } M \text{ je omezená.}$$

□

Důkaz (L^1 odhad)

$$\int_0^T \|u(t) - u_\delta(t)\|_{V_3} dt \leqslant \int_0^T \int_0^\delta \int_0^\tau \|\partial_t \tilde{u}(t+s)\|_{V_3} ds\varphi_\delta(\tau)d\tau dt \overset{\text{substituce: } z=t+s}{\leqslant}$$

$$\leqslant \int_0^{2T} \|\partial_t \tilde{u}(t)\|_{V_3} dt \cdot \int_0^\delta \int_0^\delta \varphi_\delta(\tau)d\tau ds \leqslant c\cdot\|\partial_t u\|_{L^1(0,T;V_3)} \int_0^\delta \int_0^\delta \varphi_\delta(s)dsdt = c\cdot\delta\|\partial_t u\|_{L^1(0,T;V_3)}.$$

□

Důkaz (L^p odhad)

$$\int_0^T \|u(t) - u_\delta(t)\|_{V_3}^p dt \leqslant \int_0^T \|u(t) - u_\delta(t)\|_{V_3} \cdot \|u(t) - u_\delta(t)\|_{V_3}^{p-1} dt \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot \|\partial_t u\|_{L(0,T;V_3)}^{p-1} \int_0^T \|u(t) - u_\delta(t)\|_{V_3} \leqslant c \cdot \delta \|\partial_t u\|_{L^1(0,T;V_3)}^p.$$

□

Důkaz (Použití Ehringova lemmatu)
Chceme M prekompaktní v $L^p(0,T;V_2)$, tzn. chceme $\forall \varepsilon \ \exists \{w_k\}_1^N \subset L^p(0,T;V_2)$: $\forall u \in M$: $\min_k \int_0^T \|w_k - u\|_{V_2}^p dt \leqslant \varepsilon$.

Nechť $\varepsilon > 0$, $u \in M$ a $w \in U$, pak

$$\int_0^T \|u-w\|_{V^2}^p dt \overset{\text{Ehring}}{\leqslant} \varepsilon_0 \int_0^T \|u-w\|_{V_1}^p dt + c(\varepsilon_0) \int_0^T \|u-w\|_{V_3}^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_0 \int_0^T \|u-w\|_{V_1}^p dt + c(\varepsilon_0) \int_0^T \|u-u_\delta\|_{V_3}^p dt + c(\varepsilon_0) \int_0^T \|u_\delta - w\|_{V_3}^p dt \overset{V_2 \hookrightarrow V_3}{\leqslant}$$

$$\leqslant \varepsilon_0 \int_0^T \|u-w\|_{V_1}^p dt + \tilde{c}(\varepsilon_0)\delta \|\partial_t u\|_{L^1(0,T;V_3)}^p + \tilde{\tilde{c}}(\varepsilon_0) \int_0^T \|u_\delta - w\|_{V_2}^p dt \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Lze zvolit δ a ε_0 tak, aby poslední nerovnost platila (u $*$ nevadí, že konstanta závisí na δ, neboť δ je tu teď fixní.) Zbývá naleznout $\{w_k\}_1^N$ taková, že $\min_K \tilde{\tilde{c}}(\varepsilon_0) \int_0^T \|u_\delta - w_k\|_{V_2}^p dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. To uděláme pomocí (†) a $*$. □

Definice 5.1 (Problém)

$\partial_t u - \operatorname{div} A(u, \nabla u) + B(u, \nabla u) = f$ na $\Omega \times (0,T)$, $u = u_D$ na $\partial\Omega \times (0,T)$, $u(0) = u_0$ na Ω.

Poznámka
Lze řešit i složitější okrajové podmínky než u_D.

Data/předpoklady: A, B Caratheodorovy funkce, $p \in (1, \infty)$. Growth assumptions:

$$|A(u,\xi)| + |B(u,\xi)| \leqslant c(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}).$$

Koercivita: $A(u,\xi)\xi + B(u,\xi)u \geqslant c_1|\xi|^p - c_2(|u|^q + 1)$, kde $q \leqslant \max(2, p - \varepsilon)$.

Věta 5.3

$\Omega \in C^{0,1}$, $f \in L^{p'}(0,T;(W_0^{1,p}(\Omega))^*)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_D = 0$, předpokládejme problém výše a předpokládejme alespoň jednu z následujících podmínek:

1. *celý operátor je monotónní;*
2. *A je monotónní vzhledem k ξ, B je lineární vzhledem k ξ;*
3. *A ryze monotónní vzhledem k ξ.*

Pak $\exists$ slabé řešení problému.

Poznámka
To znamená $\exists u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ takové, že $\partial_t u \in L^{p'}(0,T;(W_0^{1,p}(\Omega))^*)$, $u(0) = u_0$ na Ω a

$$\forall v \in V \text{ a skoro všechna } t \in (0,T): \langle \partial_t u, v \rangle_V + \int_\Omega A(u,\nabla u)\nabla v + B(u,\nabla u)v = \langle f, v \rangle,$$

kde $V \coloneqq W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Poznámka
Platí $u \in L^p(0,T;V)$, $\partial_t u \in L^{p'}(0,T;V^*)$ a $V \overset{\text{hustě}}{\hookrightarrow} L^2 \hookrightarrow V^*$ Gelfandova trojice. Z PDR1 máme $u \in C([0,T],L^2(\Omega)) \implies$ má smysl mluvit o $u(0)$.

V PDR1 jsme obdobnou větu dokazovali pomocí Galerkinovy aproximace. Ta by šla použít, ale bylo by třeba vyřešit několik problematických částí. Zde použijeme jinou metodu. (Obě metody mají svá úskalí. Někdy je lepší použít jednu, jindy druhou.)

Použijeme tedy Rothe metodu:

Důkaz (Definice $\{u_k\}_{k=1}^n$)
Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme $\tau = \frac{T}{n}$, $t_0 = 0$, $t_0 = 0$, $t_{n+1} = t_n + \tau$ (rozřežeme $[0,T]$ na n stejných intervalů).

Ať $f_k \coloneqq \fint_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt$. u_0 dáno daty úlohy. Induktivně tedy dodefinujeme další u_k (pro $k \in [n]$).

Předpokládejme, že máme $u_k \in L^2(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Pak $u_{k+1} \in L^2(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \eqqcolon V$ takové, že $\forall \omega \in V$:

$$\int_\Omega u_{k+1}\omega + \tau \int_\Omega A(u_{k+1},\nabla u_{k+1})\nabla\omega + B(u_{k+1},\nabla u_{k+1})\omega = \tau \langle f_{k+1}, \omega \rangle + \int_\Omega u_k \cdot \omega \qquad (\dagger)$$

existuje, neboť je to eliptický případ. □

Důkaz (Odhady nezávislé na n, resp. τ)
† a $\omega = u_{k+1}$ nám dává

$$\int_\Omega u_{k+1}^2 - u_{k+1}u_k + \tau \int_\Omega A(u_{k+1}, \nabla u_{k+1})\nabla u_{k+1} + B(u_{k+1}, \nabla u_{k+1})u_{k+1} = \tau \langle f_{k+1}, u_{k+1} \rangle .$$

+ koercivita:

$$\int_\Omega u_{k+1}^2 \quad - u_{k+1}u_k + \tau c_1 \cdot \underbrace{\|\nabla u_{k+1}\|_p^p}_{\text{Poincaré}} \leqslant \tau \underbrace{\|f_{k+1}\|_{V*} \cdot \|u_{k+1}\|_V}_{\text{Young + Poincaré}} + c_2\tau(\|u_{k+1}\|_2^2 + \underbrace{\|u_{k+1}\|_{p-\varepsilon}^{p-\varepsilon}}_{\text{Young + Hölder}} \;+1)$$

$$\implies \int_\Omega \frac{(u_{k+1} - u_k)^2}{2} - \frac{u_{k+1}^2}{2} - \frac{u_k^2}{2} + \tau \cdot \tilde{c}_1 \|u_{k+1}\|_{1,p}^p \leqslant c \cdot \tau(1 + \|f_{k+1}\|_{V*}^{p'} + \|u_{k+1}\|_2^2).$$

Posčítáme od 0 do $n \leqslant n - 1$:

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\|u_{k+1} - u_k\|_2^2}{2} + \frac{\|u_{N+1}\|_2^2}{2} + c_1 \cdot \tau \sum_{k=0}^{N} (1 + \|f_{k+1}\|_{V*}^{p'} + \|u_{k+1\|_2^2}) \qquad (\triangle)$$

□

Důkaz (Definice časově závislé funkce)

$$u_n(t) \coloneqq u_k \text{ pro } t \in (t_{k-1}, t_k), \qquad \tilde{u}_n(t) \coloneqq \frac{1}{\tau}(t - t_{k-1})u_k + \frac{1}{\tau}(t_k - t)u_{k-1} \text{ pro } t \in (t_{k-1}, t_k).$$

$$A_n(t) \coloneqq A(u_n(t), \nabla u_n(t)), \quad B_n(t) \coloneqq B(u_n(t), \nabla u_n(t)), \qquad f_n(t) \coloneqq f_k \text{ pro } t \in (t_{k-1}, t_k).$$

Platí $\partial_t \tilde{u}_n(t) = \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau}$. S tímto značením † vypadá takto

$$\forall \omega \in V \text{ a skoro všechna } t \in (0,T) : \int_\Omega \partial_t \tilde{u}_n(t)\omega + A_n(t)\nabla\omega + B_n(t)\omega = \langle f_n(t), \omega \rangle_V \quad (\dagger\dagger)$$

$$\triangle \implies \underbrace{\frac{\|u_n(N\cdot\tau)\|_2^2}{2}}_{g'(N\cdot\tau)} + c_1 \int_0^{N\cdot\tau} \|u_n\|_{1,p}^p dt \leqslant c \cdot \left(\int_0^{N\cdot\tau} \|f_n\|_{V*}^{p'} + 1 + \|u_n(t)\|_2^2 dt \right),$$

kde $\frac{\|u_0\|_2^2}{2}$ se schovalo do konstanty. Grönwallovo lemma nám dává

$$\|u_n(t)\|_2^2 \leqslant c \cdot \left(\|u_n(0)\|_2^2, \int_0^T \|f_n\|_{V*}^{p'} \right) \leqslant c \cdot (\text{data}).$$

Kromě Grönwalla dostáváme také

$$\int_0^T \|u_n\|_{1,p}^p dt \leqslant c \cdot \left(\int_0^T \|f_n\|_{V*}^{p'} + 1 + \|u_n(t)\|_2^2 dt \right) \leqslant c \cdot (\text{data})$$

$$+ \text{ growth assumptions } \implies \int_0^T \int_\Omega |A_n(t)|^{p'} + |B_n(t)|^{p'} \leqslant c \cdot (\text{data}).$$

$$\|\partial_t \tilde{u}_n(t)\|_{V*} = \sup_{\omega \in \overline{B_V(1)}} \langle \partial_t \tilde{u}_n(t), \omega \rangle = \sup_{\omega \in \overline{B_V(1)}} \int_\Omega \partial_t \tilde{u}_n(t)\omega \overset{\dagger\dagger}{=}$$

$$= \sup_{\omega \in \overline{B_V(1)}} \left(\langle f_n(t), \omega \rangle - \int_\Omega A_n(t)\nabla\omega + B_n(t)\omega \right) \overset{\|\omega\|_V \leqslant 1,\ \text{Hölder}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \|f_n(t)\|_{V*} + \|A_n(t)\|_{p'} + \|B_n(t)\|_{p'} \implies$$

$$\implies \int_0^T \|\partial_t \tilde{u}_n\|_{V*}^{p'} \leqslant \int_0^T (\|f_n(t)\|_{V*} + \|A_n(t)\|_{p'} + \|B_n(t)\|_{p'})^{p'} \leqslant c \cdot (\text{data}).$$

□

Důkaz (Limitní přechod)
TODO!!! (str. 66–68) □

TODO!!!