1 Preliminaries

Definice 1.1 (Slabá derivace)

Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Říkáme, že $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ je slabou derivací f podle i-té proměnné, pokud platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\partial_i\varphi d\lambda^n = -\int_{\mathbb{R}^n} g\varphi d\lambda^n \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Definice 1.2 (Značení)

$$\partial_i f(x) = \lim_{h\to\mathbf{o}} \frac{f(x+e_ih)-f(x)}{h}, \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix},$$

$$D_i f \text{ slabá derivace dle } i\text{-té proměnné}, \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ Dnf(x) \end{pmatrix},$$

$D\cdot$ bude také značit derivaci distribuce? (Distribuční derivaci?)

$f \in Lip(X,Y)$ jsou všechny Lipschitzovská zobrazení (tj. $\varrho_Y(f(a), f(b)) \leqslant lip(f)\cdot \varrho_X(a,b)$) z X do Y.

$A\triangle B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ (symetrický rozdíl množin).

Definice 1.3 (Lebesgueova–Stieltjesova míra)

μ míra vytvořená $M : I(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ pomocí Caratheodorovy konstrukce se nazývá Lebesgueova–Stieltjesova míra.

Definice 1.4 (Radonova míra)

$\mathcal{M}^+_{loc}(\Omega)$ je prostorem všech Borelovských měr na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, které jsou vnitřně regulární ($\mu(E) = \sup\{\mu(K)|K \subset E\}$), lokálně kompaktní.

Pokud navíc $|\mu| < \infty$, pak je to prostor $\mathcal{M}^+$. $\mathcal{M}_{loc}(\Omega) = \mu^+ - \mu^-$.

Definice 1.5 (?)

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

$$\psi_k(x) = k^n\psi(kx)$$

Poznámka

$$\int |\Psi| = 1, \qquad \psi(x) = \psi(x'), |x| = |x'|, \qquad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$\psi_k(x) > 0 \implies |x| < \frac{1}{k}$$

Věta 1.1 (Lebesgueova o derivaci 1)

Nechť $1 \leqslant p < \infty$*. Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *otevřená. A nechť* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$*. Potom pro skoro všechna* $x \in \Omega$*:*

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p d\lambda^n(x) = 0.$$

Důkaz

Bez důkazu. □

Definice 1.6 (Lebesgueův bod)

Každý takový bod se nazývá (p) Lebesgueův bod.

Definice 1.7 (Konvoluce)

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Za podmínek, kdy pravá strana existuje. g může být i míra.

Poznámka

Je-li $f * g \in L^1$ pak $f * g = g * f$. (Z Fubiniovy věty.)

Tvrzení 1.2

Nechť $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*. Pak* $\psi_k * u(x)$ *je definováno* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *a* $\forall k \in \mathbb{N}$*.*

Důkaz

Nebyl. Viz Funkcionalka. □

Věta 1.3

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*. Pak* $\psi_k * u \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *a* $\partial_i(\psi_k * u) = \partial_i \psi_k * u$*.*

Důkaz

Nebyl. Viz Funkcionalka. □

Lemma 1.4

Nechť $f \in L^p$. *Potom* $\psi_k * f \in L^p$ $p \in [1, \infty]$. *Navíc* $\|\psi_k * f\|_p \leqslant \|f\|_p$.

Důkaz
Nebyl. Viz Funkcionalka. □

Věta 1.5

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *nechť* x *je Lebesgueův bod* f (*a* $f(x) = \lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} f$) *pak* $\psi_k * f(x) \xrightarrow{k} f(x)$.

Důkaz
Nebyl. □

Věta 1.6

Nechť $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Potom* $\psi_k * f \rightrightarrows f$ *na* $\mathbb{R}^n$.

Důkaz
Nebyl. □

Lemma 1.7

Pro $p \in [1, \infty)$ *platí* $\overline{\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{L^p} = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz
Nebyl. (Docela jednoduchý.) □

Věta 1.8

$1 \leqslant p < \infty$: $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \implies \psi_k * f \to f$ *v* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz
Nebyl. □

Poznámka
$(\psi_1 * f \xrightarrow{w} f$ v $L^\infty)$

Věta 1.9

Nechť $u \in Lip(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. *Pak* u *je slabě diferencovatelná na* $\mathbb{R}^n$ *a* $\|Du\|_{L^\infty} \leqslant lip(u)$.

Důkaz
Nechť $x, z \in \mathbb{R}^n$.

$$|\psi_k * u(z) - \psi_k * u(x)| = \left| \int (u(z-y) - u(x-y))\psi_k(y) d\lambda^n \right| \leqslant lip(u)|z-x|.$$

$lip(u_k) := lip(\psi_k * u) \leqslant lip(u)$. Nechť B je koule v $\mathbb{R}^n$. $\{\nabla u_k\}$ je omezená v $L^2(B)$ slabě konverguje k $g \in L^2(B, \mathbb{R}^n)$.

$\{f \in L^2(B) : \|f\|_\infty \leqslant c\}$ konvexní a uzavřená $\implies$ slabě uzavřená $\implies$ $\|g\|_\infty \leqslant lip(u)$. Tedy

$$\int_B u\nabla\varphi \leftarrow \int_B u_k \nabla\varphi = -\int_B \nabla u_k \varphi \to -\int_B g\varphi.$$

□

Lemma 1.10

Nechť $E \subset \Omega$ a pro nějaké $r > 0$: $E + B(\mathbf{o}, r) \subset \Omega$. Potom $\exists \eta \in \mathcal{D}(\Omega)$, že $\eta = 1$ na E.

Důkaz
$E + B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset\subset \Omega$. Najdeme k, že $\frac{1}{k} < \frac{r}{2}$. Potom $\psi_k * \chi_{E+B\left(0,\frac{r}{2}\right)}$ je hledaná funkce. □

2 Absolutně spojité funkce

Poznámka (V této kapitole vždy)
$I = (a_0, b_0)$ je interval. $\mathbb{D}(I)$ bude množina všech konečných dělení ($a_0 < x_0 < \ldots < x_n < b_0$) intervalu.

Definice 2.1 (Variace funkce)

Nechť $D = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_m\} \in \mathbb{D}(I)$ a $u : I \to \mathbb{R}$. Potom variace u podle dělení D je $V(u, D) = \sum_{i=1}^n |u(x_i) - u(x_{i-1})|$.

Variace u je $V(u, I) = \sup_{D \in \mathbb{D}(I)} V(u, D)$.

Je-li $V(u, I) < \infty$ pak říkáme, že u má konečnou variaci na I.

Definice 2.2 (Absolutně spojité funkce)

Nechť $u : I \to \mathbb{R}$. Říkáme, že u je (klasicky) absolutně spojité na I, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^m$ po dvou disjunktní $\sum_{i=1}^m b_i - a_i < \delta$ je $\sum_{i=1}^n |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$.

Definice 2.3

Nechť $u : (a_0, b_0) \to \mathbb{R}$. Říkáme, že $u \in W^{1,1}(I) \Leftrightarrow u \in L^1(I)$ a $\exists Du \in L^1(I)$. ($Du = f d\lambda^1, f \in L^1$.)

Věta 2.1

Nechť $T \in \mathcal{D}^*(I)$ a $\langle T, \varphi' \rangle = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$. Then $\exists c \in \mathbb{R}$, $T = c(d\lambda^1)$ (tj. $\langle T, \varphi \rangle = \int c\varphi$).

Důkaz

Nechť $\eta \in \mathcal{D}(I) : \int_I \eta = 1$. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ a $\lambda = \langle 1, \varphi \rangle = \int_I \varphi$. Označme $c := \langle T, \eta \rangle$. Zadefinujeme $\Phi(x) = \int_{a_0}^x \varphi - \lambda\eta$, $\Phi(b_0) = 0$, $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$.

$$0 = \langle T, \Phi' \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \lambda \langle T, \eta \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \lambda c = \langle T, \varphi \rangle - \int c\varphi \implies$$

$$\implies \langle T, \varphi \rangle = \int c\varphi.$$

□

Věta 2.2

Nechť $f : I = (a_0, b_0) \to \mathbb{R}$, $f \in L^1(I)$. Potom

1. *$\exists!$(až na aditivní c) u: $u(b) - u(a) = \int_a^b f$ (pro $a_0 < a < b < b_0$);*
2. *u má slabou derivaci a $Du = f$;*
3. *$\exists! T \in \mathcal{D}^*(I)$ (až na aditivní c), že $T' = f$;*
4. *$T = u d\lambda^1 + c d\lambda^1$;*
5. *u je absolutně spojitá;*

Důkaz

„1.“ $u(x) = \int_{a_0}^x f(t)dt$.

„2.“ $\int_I u(x)\varphi'(x)dx = \int_I \varphi'(x) \int_{a_0}^x f(t)dtdx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{a_0}^x f(t) \int_I \varphi'(x)dxdt = -\int_I \varphi(t)f(t)dt$. Tedy $Du = f$ na I.

„3.“ a „4.“ jednoduché.

„5.“: $f \in L^1 \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \subset I$ měřitelná a $\mathcal{L}^1(A) < \delta$: $\int_A |f| < \varepsilon$. Nechť $[a_i, b_i]$ po dvou disjunktní, $i \in [n]$, $\sum b_i - a_i < \delta \implies \sum |u(b_i) - u(a_i)| \leqslant \int_{\bigcup(a_i,b_i)} |f| < \varepsilon$. □

Věta 2.3

Nechť u je absolutně spojitá na $I = (a_0, b_0)$. Potom

1. *u je spojitá a lze ji spojitě dodefinovat na $\overline{I}$;*
2. *$V(u, I) < \infty$ a $V(u, (a_0, x])$ je absolutně spojitá;*
3. *u je rozdílem 2 neklesajících funkcí;*
4. *$\exists! f \in L^1 : u(b) - u(a) = \int_a^b f$;*
5. *$\exists u'$ skoro všude, $u'(x) = f(x)$ skoro všude;*
6. *$Du = u' d\lambda^1$ na I;*
7. *$u(b) - u(a) = \int_a^b u'(x)$.*

Důkaz
„1.“ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \varepsilon_k = 2^{-k} \dots \delta_k$. $x_k \in (a_0, a_0 + \delta_k)$.

$$\sum_{k=n}^{\infty} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| < 2^{-n+1}.$$

Značme $u(a_0)$ jakoukoliv limitu $u(x_k)$. Potom $|u(a_0) - u(x)| < 2\varepsilon_k$ jakmile $x \in (a_0, a_0 + \delta_k)$.

„2.“ $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$. $\lambda^1(I) = b_0 - a_0$. Najdeme $N \in \mathbb{N}$, že $N \geqslant \frac{b_0 - a_0}{\delta}$. D je dělení I. $v(u, D) \leqslant N$. $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $V(u, (a_0, x]) := g(x)$ mějme konečné intervaly $\lambda^1(\bigcup [a_i, b_i]) < \delta$ $\implies \sum |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$.

„3.“: $v(x) = V(u, [a_0, x])$ a $v(x) - u(x)$ jsou hledané funkce. ($V(u, [a_0, x]) + V(u, (x, y)) = TODO$)

„4.“: (z 3. předpokládejme, že u je neklesající) Caratheodorovou konstrukcí nalezneme míru: $M((a, b)) = u(b) - u(a)$ a ukážeme o ní, že je spojitá (pak je to Lebesgue-Stieltjesova míra, tedy platí $M((a, b)) = \int_a^b f$). Nechť $\lambda^1(N) = 0$. $\forall \delta > 0$ najdu $G \supset N$ $\lambda^1(G) < \delta$, G otevřená, tedy $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$. $\mu(G) = \sum_{i=1}^{m} |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$.

$$\frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y) dy \overset{\delta \to 0^+}{f} (x).$$

□

Věta 2.4

Nechť u je spojitá na I. Pak NÁPOJE:

- *u je absolutně spojitá na I;*

- $u \in W^{1,1}(I)$;
- $\exists f \in L^1(I) : Du = f d\lambda^1$;
- *Du má* L^1 *reprezentanta* $u(b) - u(a) = \int_a^b Du$;
- $\exists u'$ *skoro všude,* $u' \in L^1$ *a* $u(b) - u(a) = \int_a^b u'$;
- $\exists f \in L^1 : u(b) - u(a) = \int_a^b$;
- $\exists g \in L^1 : |u(b) - u(a)| \leqslant \int_a^b g$.

Důkaz
Máme vše kromě „poslední bod $\implies$ první“: $\lambda^1(\bigcup(a_i, b_i)) < \delta \implies \sum |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$. □

Definice 2.4

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená:

$$W^{1,1}_{loc}(\Omega) := \left\{u \in L^1_{loc}(\Omega) | \forall i \in [n]\ \exists D_i u \in L^1_{loc}(\Omega)\right\},$$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,1}_{loc} \middle| \|u\|_{1,p} < \infty\right\},\ \text{kde } \|u\|_{1,p} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \int_\Omega |D_i u|^p + \int_\Omega |u|^p},$$

$$W^{1,p}_c(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega) \middle| \exists K \subset \Omega : \{u \neq\ 0\} \subset K\right\},$$

$$p \in [1, \infty) : W^{1,p}_0(\Omega) = \overline{W^{1,p}_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}, \qquad p = \infty : W^{1,p}_0(\Omega) = \overline{W^{1,\infty}(\Omega) \cap C_0(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}.$$

Věta 2.5

$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ je Banachův prostor.

Důkaz
Linearita a funkčnost normy je zřejmá. Jak je to s úplností? u_k cauchyovská v $\|\cdot\|_{1,p}$. $W^{1,p} \hookrightarrow L^p \implies u_k$ cauchyovská v $L^p \implies \exists u \in L^p : u_k \to u$ v L^p.

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_\Omega u \partial_i \varphi \leftarrow \int_\Omega u_k \partial_i \varphi = -\int_\Omega D_i u_k \varphi \to -\int g\varphi.$$

Poslední konvergence z $\exists g : D_i u_k \to g$ v L^p a $D_i u = g \in L^p$. □

Věta 2.6 (Rieszova pro $W^{1,p}$)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená. $1 \leqslant p < \infty$, $p' = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$. Pak pro každý $L \in (W^{1,p}(\Omega))^*$ existuje $f \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ takové, že $L(u) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega f^i D_i u + \int_\Omega f^{n+1} u$ a navíc $\|L\|_{(W^{1,p})^*} = \|f\|_{L^p}$.

Důkaz
Definujeme $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$, $u \mapsto (D_1 u, \dots, D_n u, u)$. $TW^{1,p}(\Omega) \Subset L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$. Díky HB větě každý $L \in (W^{1,p}(\Omega))^*$ lze rozšířit na $L^1 \in (L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}))^* = L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$. □

Poznámka
$f, h \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ jsou takové, že

$$\sum_i \int f^i D_i u + \int f^{n+1} u = \sum_i \int h^i D_i u + \int h^{n+1} u.$$

$\operatorname{div} h = \operatorname{div} f$ na Ω a $f \cdot \nu = h \cdot \nu$ na $\partial\Omega$. $\Delta u = f$.

Poznámka
$u_k \to u$ v $W^{1,p} \Leftrightarrow \|u_k - \|_{1,p} \to 0$.

Pro $p = \infty$

Věta 2.7

Nechť 1. $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, *nebo 2.* $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \psi_k * u \xrightarrow{*} u$ *v* $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, *potom* $\|\psi_k * u - u\|_{1,p} \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Důkaz
Víme $\int |\psi_k * D_i u - D_i u|^p \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Stačí dokázat $\psi_k * D_i u = D_i(\psi * u) = \partial_i(\psi_k * u)$. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, pak

$$-\int_{\mathbb{R}^n} D_i(\psi_k * u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k * u \partial\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x-y) u(y) dy \partial_i \varphi(x) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y-x) \partial_i \varphi(x) dx u(y) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k * \partial_i \varphi(y) u(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \partial(\psi_k * \varphi) u(y) =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} (\psi_k * \varphi) D_i u = \int_{\mathbb{R}^n} (\psi_k * D_i u)\varphi.$$

Tedy $\psi_k * D_i u = D_i(\psi_k * u)$. □

Věta 2.8

$$\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}^{W^{1,p}} = W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Důkaz
Definujeme $\eta(x) = 1$ na $B(0,1)$, $\eta(x) = 0$ na $\mathbb{R}^n \backslash B(0,2)$, $\eta(x) \in [0,1]$ in $\mathbb{R}^n$ a $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$u_k(x) = u(x)\eta(x/k)$. $u_k(x) = u(x)$ na $B(0,k)$, $u_k(x) = 0$ na $\mathbb{R}^n \backslash B(0,2k)$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_k - u|^p \leqslant \int_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,k)} |2u|^p \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

$$D_i u_k = D_i u(x) \eta\left(\frac{x}{k}\right) = (D_i u(x))\eta\left(\frac{x}{k}\right) + u(x) D_i \eta \left(\frac{x}{k}\right).$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D_i u_k - D_i u|^p \leqslant \int_{\mathbb{R} \backslash B(0,k)} \left| 2D_i u + u(x) \frac{\|\nabla \eta\|_\infty}{k} \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot \int_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,k)} |D_i u|^p + |u|^p \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

□

Věta 2.9

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ jsou slabě $*$ sekvenciálně husté v $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. (Jinak řečeno, pro každé $u \in W^{1,\infty}$ najdeme $\varphi_k \subset \mathcal{D}$, $\varphi_k \overset{*}{\to} u$ v $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$).

Důkaz
$u \in W^{1,\infty}$, $u_k(x) = u(x)\eta\left(\frac{x}{k}\right)$. Zvolme $f \in L^1$.

$$\int D_i u_k f = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(0,2k)\backslash B(0,k)} \frac{\partial_i \eta(\frac{x}{k})}{k} u(x) f(x) + \int_? \eta\left(\frac{x}{k}\right) D_i u f(x) = \int_{B(0,k)} D_i u f(x) \to \int D_i u f.$$

□