

Organizační úvod

Přednášky budou nahrávány, referáty ne.

Kontaktovat přes e-mail slavikova@karlin.mff.cuni.cz

Teoretické příklady odevzdávat přes Moodle.

1 Prvočísla

Definice 1.1 (Dělitel)

Číslo $d \in \mathbb{Z}$ nazýváme dělitelem čísla $n \in \mathbb{Z}$, značeno $d \div n$, pokud existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující $n = kd$.

Definice 1.2 (Prvočísla)

Řekněme, že $n \in \mathbb{N}$ je prvočíslo, pokud $n > 1$ a jeho jediní kladní dělitelé jsou $1 \geq n$.

┌
Například (Několik prvních prvočísel)
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...
└

Věta 1.1 (Základní věta aritmetiky)

Každé přirozené číslo $n \geq 2$ lze zapsat právě jedním způsobem jako součin prvočísel ve tvaru:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$k \in \mathbb{N}, p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ jsou prvočísla, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$

┌
Například
└

$$2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 (k = 3, p_1 = 2, p_2 = 5, p_3 = 101, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1)$$

┌
Důkaz

1. krok = existence rozkladu (indukcí):

Pro $n = 2$ zjevně platí $2 = 2^1$ ($k = 1, p_1 = 2, \alpha_1 = 1$).

Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna $2 \leq x \leq n$. Pokud je $n + 1$ prvočíslo, pak $n + 1 = (n + 1)^1$ ($k = 1, p_1 = n + 1, \alpha_1 = 1$). Pokud není, pak $n + 1 = a \cdot b$, kde $1 < a \leq b < n + 1$. Podle indukčního předpokladu lze a i b rozložit na prvočísla. Zápis rozkladu $n + 1$ pak bude sjednocením všech prvočísel a součtem příslušných α , pokud se prvočísla vyskytují v a i b . (V přednášce byl zaveden zápis bez mocnin, kde prvočísla nemusí být různá, a pak proveden součin.)

2. krok = jednoznačnost rozkladu:

┌
Lemma 1.2 (Euklidovo lemma (bez důkazu))

Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$ a nechť p je prvočíslo takové, že $p \mid ab$. Pak $p \mid a$ nebo $p \mid b$.

┌
Použijeme důkaz sporem. Předpokládejme, že tvrzení neplatí. Vybereme nejmenší z přirozených čísel, pro které rozklad není jednoznačný. Označme ho n .

$$n = q_1 \cdots q_l = r_1 \cdot r_m \quad (q_1, \dots, q_l, r_1, \dots, r_m \text{ prvočísla})$$

A není pravda, že (r_1, \dots, r_m) je permutací (q_1, \dots, q_l) .

Protože $q_1 \mid n$, pak $q_1 \mid r_1 \cdots r_m$ a podle Euklidova lemmatu q_1 dělí alespoň jedno z čísel r_1, \dots, r_m . BÚNO $q_1 \mid r_1$, tedy $q_1 = r_1$. Vydělením n číslem q_1 dostaneme menší přirozené číslo, které nemá jednoznačný rozklad. ($\frac{n}{q_1} = q_2 \cdots q_l = r_2 \cdots r_m$). □

Věta 1.3

Prvočísel je nekonečně mnoho.

┌
Důkaz

Důkaz sporem. Předpokládejme, že prvočísel je konečně mnoho, a označme p největší prvočíslo. Definujeme:

$$n_p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1$$

Pak $n_p > p$ a n_p dává zbytek 1 po dělení všemi prvočísly, tedy není ani jedním dělitelné. Tedy n_p nemá prvočíselný rozklad. se základní větou aritmetiky. □

┌
Poznámka

Důkaz nedává konstrukci vyššího prvočísla, pouze dokazuje jeho existenci.

┌ *Například*

Mezi 1 a 100 je 25 prvočísel.

└

Mezi 10^7 a $10^7 + 100$ jsou pouze 2 prvočísla.

Označme $\Pi(N)$ počet prvočísel $\leq N$.

Existují konstanty $c_1, c_2 > 0$ takové, že

$$\frac{c_1}{\log N} \leq \frac{\Pi(N)}{N} \leq \frac{c_2}{\log N}$$

┌

Poznámka

Prvočísel je nekonečně mnoho, ale „řádnou“. Musí tedy existovat dlouhé úseky bez prvočísel.

┌

Například

Interval $[n! + 2, \dots, n! + n]$ neobsahuje žádné prvočíslu. (Jelikož k -té číslo je dělitelné $k + 1$.)

└

2 Čísla racionální a iracionální

Definice 2.1 (Racionální a iracionální číslo)

Číslo $x \in \mathbb{R}$ je racionální, pokud ho lze zapsat ve tvaru $x = \frac{p}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$.

Číslo $y \in \mathbb{R}$ je iracionální, pokud není racionální.

Například (\mathbb{Z} přednášky)

$\sqrt{2}$ je iracionální.

Věta 2.1

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je taková, že $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ (tedy n není druhou mocninou přirozeného čísla). Pak \sqrt{n} je iracionální.

Lemma 2.2

Jsou-li p, q nesoudělná, pak p^2, q^2 jsou také nesoudělná.

┌

Důkaz

Dle základní věty aritmetiky každé přirozené číslo lze rozložit na součin prvočísel.

Rozložíme a dokážeme. □

└

┌ *Důkaz* (Sporem)

Předpokládejme, že \sqrt{n} je racionální, ale není to celé číslo. Pak $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla ($q \geq 2$). Umocníme: $n = \frac{p^2}{q^2}$. $q|p$ lightning. \square

Věta 2.3 (Referát 1)

Existují iracionální čísla a, b taková, že a^b je racionální. (Text: skripta z MA, str. 14-15.)

┌ *Důkaz*

Buď $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nebo $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ \square

Příklad (Teoretický příklad 1)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechtě a_1, \dots, a_n jsou kladná reálná čísla, taková, že $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 1$.

Dokažte, že

$$(1 + a_1) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n.$$

Příklad (Teoretický příklad 2)

Nalezněte supremum a infimum množiny

$$\{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor : n \in \mathbb{N}\}$$

3 Mohutnost množin

Definice 3.1

Množiny X, Y mají stejnou mohutnost, pokud existuje bijekce X na Y . Značíme $X \approx Y$.

Množina X má mohutnost menší nebo rovnu mohutnosti Y , pokud existuje prosté zobrazení X do Y . Značíme $X \preceq Y$.

Množina X má menší mohutnost než Y , pokud $X \preceq Y$, ale neplatí $Y \preceq X$. Značíme $X \prec Y$.

Věta 3.1

(Cantor-Bernstein) Nechtě X a Y jsou množiny splňující $X \preceq Y$ a $Y \preceq X$, pak $X \approx Y$.

Lemma 3.2

Nechť \mathbb{X} je množina a $H : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{X})$ je zobrazení splňující podmínku $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) : \mathbb{A} \subset \mathbb{B} \implies H(\mathbb{A}) \subset H(\mathbb{B})$. Pak existuje $\mathbb{C} \subset \mathbb{X}$ takové, že $H(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

┌

Důkaz

Položme $\mathcal{C} = \{\mathbb{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) : \mathbb{A} \subset H(\mathbb{A})\}$. Ukážeme, že $\mathbb{C} = \bigcap \mathcal{C}$ je hledanou množinou. $\mathbb{C} \subset \mathbb{X}$ je zřejmé, $\mathbb{C} \subset H(\mathbb{C})$: Pokud $\mathbb{A} \in \mathcal{C}$, pak $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$, pak z vlastnosti zobrazení plyne $H(\mathbb{A}) \subset H(\mathbb{C})$. Tedy $\mathbb{A} \subset H(\mathbb{A}) \subset H(\mathbb{C})$. Z definice \mathbb{C} dostáváme $\mathbb{C} \subset H(\mathbb{C})$. Nakonec musíme ještě dokázat $H(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$. Z $\mathbb{C} \subset H(\mathbb{C})$ a z vlastnosti zobrazení $H(\mathbb{C}) \subset H(H(\mathbb{C}))$ TODO! $H(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$. □

└

Důkaz

Předpokládáme $\mathbb{X} \preceq \mathbb{Y} \implies$ existuje prosté zobrazení $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ a $\mathbb{Y} \preceq \mathbb{X} \implies$ existuje prosté zobrazení $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$.

Definujeme $H : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{X})$ předpisem $H(\mathbb{A}) = \mathbb{X} \setminus g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{A}))$. (Pozorování, jestliže $f = g^{-1}$ je prosté a na, tak H je identita.) Nyní ověříme předpoklady Lemmatu.

Nechť $\mathbb{U} \subset \mathbb{V} \subset \mathbb{X}$. Pak $f(\mathbb{U}) \subset f(\mathbb{V}) \implies \mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{V}) \subset \mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{U}) \implies g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{V})) \subset g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{U})) \implies \mathbb{X} \setminus g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{U})) \subset \mathbb{X} \setminus g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{V})) \implies H(\mathbb{U}) \subset H(\mathbb{V})$.

Dle lemmatu existuje $\mathbb{C} \subset \mathbb{X}$ takové, že $H(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Pak $\mathbb{C} = H(\mathbb{C}) = \mathbb{X} \setminus g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C}))$, $g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C})) = \mathbb{X} \setminus \mathbb{C}$. Tedy $g|_{\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C})}$ je prosté zobrazení $\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C})$ na $\mathbb{X} \setminus \mathbb{C}$, a tedy $g^{-1}|_{\mathbb{X} \setminus \mathbb{C}}$ je prosté zobrazení $\mathbb{X} \setminus \mathbb{C}$ na $\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C})$. Navíc jistě $f|_{\mathbb{C}}$ je prosté zobrazení \mathbb{C} na $f(\mathbb{C})$.

Definujeme $h(a) = f(a), a \in \mathbb{C} | h(a) = g^{-1}(a), a \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{C}$. Potom h je prosté zobrazení \mathbb{X} na \mathbb{Y} . □

4 Aritmetický, geometrický a harmonický průměr

Definice 4.1

Nechť $x_1, \dots, x_n > 0$. Definujeme jejich

- aritmetický průměr jako $A_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.
- geometrický průměr jako $G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$
- harmonický průměr jako $H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$

Věta 4.1 (AGH nerovnost)

$$A_n \geq G_n \geq H_n$$

┌ *Poznámka* (Pozorování)

Nerovnost $G_n \geq H_n$ snadno plyne z $A_n \geq G_n$, stačí dosadit $x_i = \frac{1}{y_i}$. Stačí ukázat nerovnost $A_n \geq G_n$.

┌ *Důkaz* (1. Zpětnou indukcí)

Dokážeme pro mocniny 2. Následně dosadíme za jedno x geometrický průměr těch ostatních a budeme „indukovat“ zpět. □

┌ *Důkaz* (2. Indukcí)

Dokážeme pro 1.

Chceme odhadnout aritmetický průměr $n + 1$ čísel. Použijeme indukční předpoklad pro n čísel, jejichž aritmetický průměr je stejný. Za tato čísla zvolíme $x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n$, kde x'_n je doplnění, aby byly shodné aritmetické průměry. x'_n vyjádříme. Upravíme, řekneme, že x_n a x_{n+1} jsme zvolili, že budou nejmenší a největší číslo. □

Poznámka (2. referát)

Existuje i aritmeticko-geometrický průměr a aritmeticko-harmonický průměr (je roven geometrickému).

Příklad (3. teoretický)

Najděte všechna celá čísla m splňující

$$(1 + m)^n \geq 1 + mn, \forall n \in \mathbb{N}$$

TODO? (Posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^n$ je rostoucí a shora omezená číslem 3, posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ je naopak klesající).

Definice 4.2 (Aritmeticko-geometrický průměr)

Nechť $0 < b_1 < a_1$. $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ a $b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$. Limita těchto posloupností se nazývá aritmeticko-geometrický průměr.

┌ *Důkaz* (Shodnost a existence limit)

$a_n \geq b_n$ z AG nerovnosti. Dokáže se monotónnost, z toho plyne existence limit. Pak z AL $A = \frac{A+B}{2}$, tedy $A = B$. □

Definice 4.3 (Aritmeticko-harmonický průměr)

Definujeme a dokazujeme obdobně jako výše.

Věta 4.2

Aritmeticko-harmonický průměr je roven geometrickému.

┌

Důkaz

Součin členů se stejným indexem je roven součinu prvních členů, z toho limita součinu je součin prvních členů, z toho vyplývá, že limita činitelů (jelikož je shodná) je odmocninou ze součinu prvních členů (geometrický průměr). □

└

Věta 4.3 (Referáty)

Z množiny hromadných bodů nelze „vykonvergovat“.

O množině hromadných bodů posloupnosti $\{a_n\}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$.

Příklad (Teoretický příklad 5)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost splňující

$$a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}.$$

Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní.

5 Odhady faktoriálu

Tvrzení 5.1

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

┌

Důkaz (První nerovnost)

Označme $\beta_n = \left(\frac{n}{3}\right)^n, n \in \mathbb{N}$. Pak $\left(\frac{n}{3}\right)^n = \beta_n = \beta_1 \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \dots \cdot \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}$. Odhadneme $\frac{\beta_k}{\beta_{k-1}} < k$. Tedy $\beta_n < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$. □

└

┌

Důkaz (Druhá nerovnost)

AG. □

└

Horní odhad lze zlepšit:

Tvrzení 5.2

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n, \quad n \geq 6.$$

┌

Důkaz (Indukcí)

$$n = 6 : 6! = 720 = 9 \cdot 80 < 9 \cdot 81 = 3^6.$$

$(n+1)! = (n+1)n! < (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n \stackrel{?}{<} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$. Stačí ukázat $\frac{n^n}{2^n} < \frac{(n+1)^n}{2^{n+1}}$, tedy $2 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. □

└

Definice 5.1 (e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Tvrzení 5.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

┌

Důkaz

$$\text{Z AL: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e. \quad \square$$

└

Tvrzení 5.4

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^{n+1}, \quad n \geq 2.$$

┌

Důkaz

1. nerovnost stejně jako výše s 3 místo e. Druhá nerovnost indukci. □

└

Poznámka (Stirlingova formule (odhad faktoriálu))

$$n! \approx \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

(Ve smyslu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = 1$.)

Definice 5.2 (Toeplitzova transformace)

$\{c_{n,k}\}_{n=1,k=1}^{\infty, n}$ reálná čísla splňující: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,k} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_{n,k} = 1$, c) existuje $C > 0$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^n |c_{n,k}| \leq C$.

Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost. Zdefinujeme novou posloupnost $\{b_n\}$ vztahem

$$b_n = \sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k, n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Například (Matice (pouze dolní trojúhelník) splňující podmínky TT)
Jednotková matice.

Matice mající na i -tém řádku $\frac{1}{i}$, tedy $c_{n,k} = \frac{1}{n}$. Taková matice zřejmě splňuje podmínky TT a způsobí, že TT převede posloupnost na průměry prvních n členů. (Tj. pokud posloupnost konverguje, tak i průměry prvních n členů konvergují ke stejné limitě).

Důkaz (Toeplitzovy věty)

1. krok (konstantní posloupnost): Nechť $a_n = a, n \in \mathbb{N}$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a \sum_{k=1}^n c_{n,k} \stackrel{\text{z b)}}{=} a$.

2. krok: Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Lze psát $a_n = (a_n - a) + a$. Víme, že pro posloupnost a tvrzení platí, stačí tedy dokázat tvrzení pro posloupnost $a_n - a$, která má limitu 0.

3. krok (nulová limita): Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Pak $\forall m > 1, n \geq m$ platí $|b_n| = |b_n - 0| = |\sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k| \leq \sum_{k=1}^{m-1} |c_{n,k}| \cdot |a_k| + \sum_{k=m}^n |c_{n,k}| \cdot |a_k|$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Protože $a_n \rightarrow 0$, pak $\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1, |a_n| < \frac{\varepsilon}{2C}$, kde C je konstanta z c). $\{a_n\}$ je konvergentní $\implies \{a_n\}$ je omezená $\implies |a_n| \leq D \forall n \in \mathbb{N}$. Z podmínky a) plyne, že $\exists n_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_2 \sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{2D}$.

Nyní použijeme nerovnost výše s $m = n_1$, pro $n \geq \max\{n_1, n_2\}$:

$$|b_n| \leq \sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| \cdot |a_k| + \sum_{k=n_1}^n |c_{n,k}| \cdot |a_k| \leq D \sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2C} \sum_{k=n_1}^n |c_{n,k}| < D \cdot \frac{\varepsilon}{2D} + \frac{\varepsilon}{2C} \cdot C = \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. □

Příklad

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} = a$.

┌
Řešení

AGH nerovnost a věta o dvou strážnících (Výše jsme dokázali, že A konverguje k a a obdobně se dokáže, že převrácená hodnota H konverguje k $\frac{1}{a}$, tedy H konverguje také k a , tedy G konverguje k a).

└

Důsledek

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel, pro kterou $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. Dokažte, že potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

┌
Řešení

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1},$$

což je geometrický průměr posloupnosti $\frac{a_n}{a_{n-1}} \rightarrow a$ rozšířené o 1 člen a_1 , tedy má dle předchozího případu limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

└

Příklad (Teoretický příklad 6)

Platí implikace v předchozím případě i opačně?

Příklad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

┌
Řešení

$$a_n = \frac{n^n}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Tedy $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow e$ podle předchozího důsledku.

└