Organizační úvod

TODO!!!

Úvod

TODO!!!

Definice 0.1 (Derivace)

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = (d, e)$$

Definice 0.2 (Holomorfní funkce)

Funkce je holomorfní, pokud má derivaci.

TODO!!!

Věta 0.1

Nechť $z = a + bi$, pokud existuje $f'(z)$, je Jacobiho determinant $\tilde{f}$ v bodě (a, b) roven $|f'(z)|^2$.

Důkaz

$$f'(z) = (d, e) \implies |f'(z)|^2 = d^2 + e^2, |D_f| = \begin{vmatrix} t & \\ & -e \\ & e \\ & d \end{vmatrix} = d^2 + e^2.$$

□

Poznámka

Věty o aritmetice a skládání derivací fungují v $\mathbb{C}$ stejně jako v $\mathbb{R}$.

Pokud $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pak $(f(y(x)))' = f'(y(x))(x)$.

Pokud $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v z derivaci, pak je f v z spojitá.

Pokud Ω je otevřená konvexní (souvislost ještě neumíme definovat) množina a pro každé $z \in \Omega$ platí $f'(z) = 0$, pak je f na Ω konstantní.

1 Mocninné řady

Definice 1.1

Nechť $a \in \mathbb{C}$ a $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Nekonečnou řadu funkcí ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

nazveme mocninnou řadou o středu a.

Poloměrem konvergence této řady rozumíme $R \in [0,\infty]$ definované vzorcem $R = \sup\{r \in [0,\infty] | \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n \text{ konverguje}\}$.

Množinu $U(a,R) = \{z \in \mathbb{C} | |z-a| < R\}$ nazveme kruhem konvergence řady.

Věta 1.1

Každá mocninná řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na svém kruhu konvergence.

Důkaz
Podobný jako v normální analýze. □

Věta 1.2

Položme

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Pokud $L > 0$ *pak* $R = \frac{1}{L}$. *Pokud* $L = 0$, *pak* $R = \infty$. *Pokud existuje* $k = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$, *pak* $k = L$.

Důkaz
? □

Pozorování
Řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1} = g(z)$$

a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1} = F(z)$$

mají stejný poloměr konvergence jako

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Věta 1.3

Funkce f z minulého pozorování je holomorfní na $U(a,R)$ a $f'(z) = g(z)$ na $U(a,R)$ a $F'(z) = f(z)$ na $U(a,R)$.

Důkaz

Zase jako v normální analýze. Nezkouší se. □

Definice 1.2 (Exponenciální funkce)

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Poznámka (Vlastnosti)

exp je definovaná na $\mathbb{C}$, je celá, a platí $(\exp(z))' = \exp(z)$.

$$\forall z, w \in \mathbb{C} : \exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

$$\forall b \in \mathbb{R} : e^{ib} = \cos b + \ i \sin b.$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = a + bi : e^z = e^a(\cos b + i \sin b).$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : e^z \neq 0, e^{\overline{z}} = \overline{e^z}, |e^z| = e^{\Re z}.$$

Definice 1.3 (Sin, cos, sinh, cosh)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},$$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$

Definice 1.4 (Log)

Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ položíme $\log z = \{w \in \mathbb{C} | \exp(w) = z\}$.

Věta 1.4 (Vlastnosti logaritmu)

Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *platí:*

$$\log z = \ln |n| + i \arg z,$$

$$\log z = \{(\ln z) + 2k\pi i, k \in z\},$$

$\log z$ *je holomorfní na množině* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ *a platí* $(\log z)' = \frac{1}{z}$.

Důkaz

První a druhá vlastnost jednoduše rozepsáním exponenciely.

□

Definice 1.5 (Obecná mocnina)

$$z^a = \exp(a \log z)$$

2 Křivky a cesty

Definice 2.1 (Křivka)

Křivkou v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení uzavřeného intervalu do $\mathbb{C}$.

Definice 2.2

Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je křivka, pak

- Obrazem křivky rozumíme obor hodnot φ, značíme $< \varphi >$.
- Počáteční bod je $\varphi(a)$, koncový bod je $\varphi(b)$.
- Křivku nazýváme uzavřenou, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- Opačnou křivkou rozumíme křivku $\dot{-}\varphi : [-b, -a] \to \mathbb{C}$, kde $\dot{-}\varphi(t) = \varphi(-t)$.

Definice 2.3 (Spojení)

Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ a $\psi : [c, d] \to \mathbb{C}$ jsou křivky a $\varphi(b) = \psi(c)$. Pak jejich spojením $\varphi \dot{+} \psi$ rozumíme křivku definovanou na $[a, b+d-c]$, kde $\varphi \dot{+} \psi = \varphi(t)$ pro $t \le b$ a $\varphi \dot{+} \psi = \psi(t-b+c)$ jinak.

Definice 2.4 (Cesta)

Cesta je po částech hladká ($= \mathcal{C}^1$) křivka.

Definice 2.5 (Integrál podél cesty a délka křivky)

Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je cesta a f je spojitá funkce na $< \varphi >$. Definujeme integrál z f podél φ jako

$$\int_\varphi f(z)dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Délka křivky φ budeme rozumět

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'|(t)dt$$

Poznámka (Vlastnosti integrálu)

- Změna parametru neovlivňuje integrál: Nechť h je rostoucí zobrazení v $\mathcal{C}^1$ intervalu $[c, d]$ na $[a, b]$. Pak

$$\int_{\varphi \circ h} f(z)dz = \int_\varphi f(z)dz.$$

- Změna znamínka parametru změní znaménko integrálu.

$$\int_{-\varphi} f(z)dz = -\int_\varphi f(z)dz.$$

- $|\int_\varphi f(z)dz| \leq L(\varphi) \max_{z \in <\varphi>} |f(z)|$.

Definice 2.6 (Primitivní funkce)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ otevřená, $f : G \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, $F : G \to \mathbb{C}$ nazveme primitivní funkcí k f na G, pokud $F'(z) = f(z)$ pro každé $z \in G$.

Věta 2.1

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá a F je primitivní k f na G. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je cesta tak, že $< \varphi > \subset G$. Potom

$$\int_\varphi f(z) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Pokud φ je uzavřená, pak $\int_\varphi f(z)dz = 0$.

Důkaz

Přímočarý. □