Příklad (1.)
In the discussion of compatibility conditions we have used several identities. It remains to prove them. I recall that we have decomposed the displacement gradient to the symmetric and the skew-symmetric part as

$$\nabla \mathbf{U} = \mathbb{\varepsilon} + \mathbb{\omega},$$

and we have also solved the equation

$$(\operatorname{rot} \mathbb{\varepsilon})^T = \nabla \mathbf{a}$$

for the vector field $\mathbf{a}$. Furthermore, using the vector field $\mathbf{a}$ and the concept of the axial vector we have defined the skew-symmetric matrix $\mathbb{A}_{\mathbf{a}}$ such that $\mathbb{A}_{\mathbf{a}} \mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{w}$ holds for any fixed vector $\mathbf{w}$. Show that

$$\operatorname{rot} \mathbb{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla (\operatorname{rot} \mathbf{U}))^T,$$

Důkaz (Z minulého roku)
$\mathbb{\varepsilon}$ je symetrická část $\nabla \mathbf{U}$, tedy $\mathbb{\varepsilon} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{U} + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U})^T$. Tudíž

$$(\operatorname{rot} \mathbb{\varepsilon})_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_{jkl} \frac{\partial \mathbb{\varepsilon}_{il}}{\partial x_k} = \varepsilon_{jkl} \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)}{\partial x_k} =$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_i} = 0 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{jkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \left(\nabla \left(\operatorname{rot} \mathbf{U} \right) \right)_{li} = \frac{1}{2} \left(\left(\nabla \left(\operatorname{rot} \mathbf{U} \right) \right)^T \right)_{il}.$$

$\square$

$$\operatorname{rot} \mathbb{A}_{\mathbf{a}} = (\operatorname{div} \mathbf{a}) \mathbb{I} - (\nabla \mathbf{a})^T.$$

Důkaz (Z minulého roku)
Pro nějaké fixní $\mathbf{w}$ máme ($\mathbb{A}_{\mathbf{a}}^T \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{a}$ díky antisymetrii $\mathbb{A}_{\mathbf{a}}$ a $\times$)

$$(\operatorname{rot} \mathbb{A}_{\mathbf{a}})^T \mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rot}(\mathbb{A}_{\mathbf{a}}^T \mathbf{w}) = \operatorname{rot}(\mathbf{w} \times \mathbf{a}) =$$

(podle vzorců, které jsme dokazovali v třetím domácím úkolu, a linearity div)

$$= \operatorname{div}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{w}) = \operatorname{div}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}) - \operatorname{div}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{w}) = [\nabla \mathbf{w}]\mathbf{a} + \mathbf{w} \operatorname{div} \mathbf{a} - [\nabla \mathbf{a}]\mathbf{w} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{w} =$$

($\mathbf{w}$ je konstantní)

$$= \mathbf{o} + \mathbf{w} \operatorname{div} \mathbf{a} - [\nabla \mathbf{a}]\mathbf{w} + \mathbf{o} = ((\operatorname{div} \mathbf{a}) \cdot \mathbb{I} - (\nabla \mathbf{a}))\, \mathbf{w}.$$

Tedy $\operatorname{rot} \mathbb{A}_{\mathbf{a}} = ((\operatorname{div} \mathbf{a}) \cdot \mathbb{I} - (\nabla \mathbf{a}))^T = (\operatorname{div} \mathbf{a}) \mathbb{I} - (\nabla \mathbf{a})^T.$ $\square$

Příklad (2.)
Show that the Leibniz integral rule (LIR)

$$\frac{d}{dt}\int_{\xi=a(t)}^{b(t)} f(\xi,t)d\xi = \int_{\xi=a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(\xi,t)}{\partial t}d\xi + f(b(t),t)\frac{db}{dt} - f(a(t),t)\frac{da}{dt}$$

where f, a and b are some smooth scalar valued functions, is a special case of Reynolds transport theorem (RTT).

Důkaz (Z minulého roku)
V RTT zvolíme $\forall \mathbf{x}, t : \varphi(\mathbf{x}, t) = 1$, $\chi : [0,1]^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\chi(X_1, X_2, X_3, t) = (a(t) + X_1(b(t) - a(t)), X_2 f(a(t)+X_1(b(t)-a(t)), t), X_3)$, tedy nebudeme integrovat „žádnou funkci“, jen nás zajímá změna objemu, který právě v první souřadnici odpovídá proměnné v LIR, v druhé funkční hodnotě v LIR a ve třetí souřadnici se nemění.

Nejdříve dosadíme a pomocí Gaussovy věty a linearity integrálu převedeme RTT na

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} 1 dv = \int_{V(t)} \frac{d1}{dt} + \int_{\partial V(t)} 1 \cdot (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})ds = 0 + \int_{\partial V(t)} 1 \cdot (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})ds.$$

Dále můžeme použít Lagrangeovo kritérium pro vyjádření $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} dv = \int_{\partial V(t)} \frac{\frac{\partial g}{\partial t}}{|\nabla_x g|}ds,$$

pro diferencovatelnou funkci g, která je na $\operatorname{int} V(t)$ kladná a na $\partial V(t)$ nulová (oproti přednášce je tedy gradient opačný vůči normále, tedy jsme dostali výraz bez mínus).

Teď bychom si chtěli zvolit správnou funkci g. Můžeme využít toho, že nulový činitel nám zaručuje nulový součin, tedy podmínky $x_i \leqslant h$ zapíšeme jako $(h - x_i)$ a vynásobíme:

$$g(x_1, x_2, x_3, t) = (x_1 - a(t)) \cdot (b(t) - x_1) \cdot x_2 \cdot (f(x_1, t) - x_2) \cdot x_3 \cdot (1 - x_3).$$

Teď můžeme spočítat (podle vzorců pro derivování) vyžadované $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\nabla_{\mathbf{x}}$, $g/\ldots$ označuji g bez tohoto členu (tedy v $\ldots = 0$, kde nás tento výraz reálně zajímá, je to dodefinováno intuitivně):

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{da}{dt}\cdot\frac{g}{x_1 - a(t)} + \frac{db}{dt}\cdot\frac{g}{b(t) - x_1} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{g}{f(x_1,t) - x_2},$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} g = \left(\frac{g}{x_1 - a(t)} - \frac{g}{b(t) - x_1} + \frac{\partial f(x_1,t)}{\partial x_1}\cdot\frac{g}{f(x_1,t) - x_2}, \frac{g}{x_2} - \frac{g}{f(x_1,t) - x_2}, \frac{g}{x_3} - \frac{g}{1 - x_3}\right).$$

Teď se zase vrátíme k RTT. Vždy když $g(\mathbf{x}, t) = 0$, tak musí být nulový jeden z činitelů, tedy integrál přes povrch můžeme rozložit na jednotlivé případy:

- $x_3 = 0$, pak $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$, neboť ve všech členech je g nevydělené x_3. Tedy

$$\int_{\partial V(t), x_3=0} \frac{\frac{\partial g}{\partial t}}{|\nabla_x g|} ds = \int 0 = 0.$$

- $x_3 = 1$, pak ze stejného důvodu $\int_{\partial V(t), x_3=1} \frac{\frac{\partial g}{\partial t}}{|\nabla_x g|} ds = 0$.

- $x_2 = 0$ taktéž dává $\int_{\partial V(t), x_2=0} \frac{\frac{\partial g}{\partial t}}{|\nabla_x g|} ds = 0$.

- $x_2 = f(x_1, t)$ je složitější, neboť $\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f(x_1,t)}{\partial t} \frac{g}{f(x_1,t)-x_2}$, jelikož je to zase jediný nenulový člen. Stejně tak $\nabla \mathbf{x} g = (\frac{\partial f(x_1,t)}{\partial x_1} \frac{g}{f(x_1,t)-x_2}, -\frac{g}{f(x_1,t)-x_2}, 0)$. Takže v $\frac{\frac{\partial g}{\partial t}}{|\nabla_x g|}$ můžeme zkrátit $\frac{g}{f(x_1,t)-x_2}$ a zbude nám:

$$\int_{\partial V(t), x_2=f(x_1,t)} \frac{\frac{\partial f(x_1,t)}{\partial t}}{\left|\left(\frac{\partial f(x_1,t)}{\partial x_1}, -1, 0\right)\right|} dv = \int_{\partial V(t), x_2=f(x_1,t)} \frac{\frac{\partial f(x_1,t)}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f(x_1,t)}{\partial x_1}\right)^2 + 1}} dv.$$

  Což můžeme z Fubiniovy věty rozložit na nezajímavý integrál přes z a křivkový integrál přes křivku $f(x_1, t)$ tedy

$$\ldots = \int_0^1 \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\frac{\partial f(x_1,t)}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f(x_1,t)}{\partial x_1}\right)^2 + 1}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f(x_1,t)}{\partial x_1}\right)^2 + 1} dx_1 dx_3 = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x_1,t)}{\partial t} dx_1.$$

- $x_1 = a(t)$, potom (jediné nenulové, Fubini, …)

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial t}}{\nabla_{\mathbf{x}} g} = \frac{-\frac{da}{dt} \cdot \frac{g}{x_1 - a(t)}}{\left|\left(\frac{g}{x-a(t)}, 0, 0\right)\right|} = -\frac{da}{dt} \implies$$

$$\implies \int_{\partial V(t), x_1=a(t)} \frac{\frac{\partial g}{\partial t}}{|\nabla_x g|} ds = \int_0^1 \int_0^{f(x_1,t)} -\frac{da}{dt} dx_2 dx_3 = -\frac{da}{dt} f(a(t), t).$$

- $x_1 = b(t)$, potom úplně stejně jako v předchozím

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial t}}{\nabla_{\mathbf{x}} g} = \frac{\frac{db}{dt} \cdot \frac{g}{b(t)-x_1}}{\left|\left(-\frac{g}{b(t)-x_1}, 0, 0\right)\right|} = -\frac{da}{dt} \implies$$

$$\implies \int_{\partial V(t), x_1=b(t)} \frac{\frac{\partial g}{\partial t}}{|\nabla_x g|} ds = \int_0^1 \int_0^{f(x_1,t)} \frac{db}{dt} dx_2 dx_3 = \frac{db}{dt} f(b(t), t).$$

Tedy máme

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dv = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x_1,t)}{\partial t} dx_1 + \frac{db}{dt} f(b(t), t) - \frac{da}{dt} f(a(t), t),$$

což už je skoro to, co chceme, stačí jen rozložit integrál na levé straně pomocí Fubiniovy věty:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} dv = \frac{d}{dt}\int_0^1 \int_{a(t)}^{b(t)} \int_0^{f(x_1,t)} dx_2 dx_1 dx_3 = \frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x_1,t)dx_1.$$

□

Příklad (3.)
Prove the following lemma. Let ϱ be the Eulerian density field, and let $\varphi(\mathbf{x},t)$ be a sufficiently smooth scalar Eulerian field. Then

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \varrho(\mathbf{x},t)\varphi(\mathbf{x},t)\,dv = \int_{V(t)} \varrho(\mathbf{x},t)\frac{d}{dt}\varphi(\mathbf{x},t)\,dv.$$

Důkaz
Podle Reynolds transport theorem, derivace součinu a Balance of mass:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \varrho(\mathbf{x},t)\varphi(\mathbf{x},t)\,dv = \int_{V(t)} \frac{d\left(\varrho(\mathbf{x},t)\varphi(\mathbf{x},t)\right)}{dt} + \varrho(\mathbf{x},t)\varphi(\mathbf{x},t)\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\,dv =$$

$$= \int_{V(t)} \frac{d\varrho(\mathbf{x},t)}{dt}\varphi(\mathbf{x},t) + \varrho(\mathbf{x},t)\frac{d\varphi(\mathbf{x},t)}{dt} + \varrho(\mathbf{x},t)\varphi(\mathbf{x},t)\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\,dv =$$

$$= \int_{V(t)} 0\cdot\varphi(\mathbf{x},t) + \varrho(\mathbf{x},t)\frac{d}{dt}\varphi(\mathbf{x},t)\,dv = \int_{V(t)} \varrho(\mathbf{x},t)\frac{d}{dt}\varphi(\mathbf{x},t)\,dv$$

□