*Příklad* (1)
Buď $(\Omega, \mathcal{A}, P) := ((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$.

1. Nechť $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin definovaných na $\Omega$ takových, že $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ a $P(Y_n = 1) = \frac{1}{n}$. Určete $P(\limsup_{n\to\infty}[Y_n > \varepsilon])$ pro $\varepsilon \in (0,1)$. Konverguje tato posloupnost skoro jistě?

*Řešení*
Mějme tedy $\varepsilon \in (0,1)$. Označme si $A_n := [Y_n > \ \varepsilon] = [Y_n = 1]$ jevy z limity ze zadání. Potom víme, že $A_n$ jsou nezávislé, neboť $Y_n$ byly nezávislé, a $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, tedy podle Borelovy věty $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

Jestliže si označíme $B_n := [Y_n < \varepsilon] = [Y_n = 0]$, potom $B_n$ jsou nezávislé, $\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$. Tedy podle Borelovy věty je $P(\limsup_{n\to\infty} B_n) = 1$. Tedy $Y_n$ s pravděpodobností 1 nabývá pro nekonečně $n$ hodnoty 1 a s pravděpodobností 1 nabývá pro nekonečně $n$ hodnoty 0. Tam, kde nabývá nekonečněkrát hodnoty 0 i 1, konvergovat nemůže, tedy konverguje s nulovou pravděpodobností[a], tj. rozhodně nekonverguje skoro jistě.

[a] S pravděpodobností 1 nabývá pro nekonečně $n$ hodnoty 1, tedy z pravděpodobnosti doplňku, nenabývá nekonečněkrát hodnotu 1 s pravděpodobností 0. Stejně tak pro hodnotu 0. A sjednocení dvou nulových množin je pořád nulová.

2. Nechť $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost náhodných veličin definovaná $Z_n(\omega) := \frac{1}{n}(2\omega - 1)$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Jaké má náhodná veličina $Z_n$ rozdělení?

b) Konverguje posloupnost $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ k nule v pravděpodobnosti?

c) Nechť $g(x) := \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Platí $g(Z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} g(0)$?

d) Označme $W_n := g(Z_n)$. Konverguje posloupnost $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v distribuci?

*Řešení* (a))
$Z_n$ má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, neboť

$$F(x) = P(Z_n \leqslant x) = P\left(\frac{1}{n}(2\omega - 1) \leqslant x\right) = P\left(\omega \leqslant \frac{n \cdot x + 1}{2}\right) = \lambda\left(\omega \leqslant \frac{n \cdot x + 1}{2}\right) =$$

$$= \lambda\left((0,1) \cap \left(-\infty, \frac{n \cdot x + 1}{2}\right)\right) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x < -\frac{1}{n}, \\ \frac{n \cdot x+1}{2}, & \text{pokud } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1, & \text{pokud } \frac{1}{n} < x. \end{cases}$$

*Řešení* (b))
Ano, neboť $P(|Z_n - 0| > \varepsilon) = 0$ pro $n > \frac{1}{\varepsilon}$, tedy $\lim_{n\to\infty} P(|Z_n - 0| > \varepsilon) = 0$.

*Řešení* (c))
Ne, protože $g(0) = 0$, ale $\forall \varepsilon \in (0,1)$ :

$$P(|g(Z_n) - 0| > \varepsilon) = P(g(Z_n) = 1) = P(Z_n > 0) = 1 - F(0) = 1 - \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0$$

*Řešení* (d))
Ano, neboť $F_{W_n}(x)$ nezávisí na $n$ a limita konstanty vždy existuje:

$$F_{W_n}(x) = P(W_n \leqslant x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x < 0 \\ P(W_n = 0) = P(Z_n \leqslant 0) = \frac{1}{2}, & \text{pokud } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{pokud } x \geqslant 1. \end{cases}$$

*Příklad*
Při příležitosti mistrovství světa v ledním hokeji vyhlásil nejmenovaný výrobce brambůrek následující soutěž: sáčky brambůrek uvnitř obsahují kartičku s kódem, po jehož zadání na internet se dozvíme, zda je kód výherní. Jedno balení obsahuje právě jeden kód. Výrobce tvrdí, že každý desátý balíček vyhrává.

a) Zformulujte a explicitně ověřte předpoklady limitní věty, která vám pomůže zodpovědět otázky z části b) a c). Jsou tyto předpoklady reálné.

*Řešení* (a))
Tou větou bude třeba[a] centrální limitní věta:

*Buďte* $X_1, X_2, X_3, \ldots$ *nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s* $\mathbb{E}X_1 = \mu \in \mathbb{R}$ *a* $0 < \operatorname{var} X_1 = \sigma^2 < \infty$. *Potom pro* $Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ *platí* $Z_n \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$.

Jednotlivé veličiny budou indikátory, že se v tom daném balení vyskytuje výherní kód. Tvařme se, že jsou nezávislé (k tomu později). Jelikož mezi balíčky není rozdíl, tak jsou stejně rozdělené. A indikátory mají alternativní rozdělení (tj. nabývají omezených hodnot), takže střední hodnota a rozptyl jsou konečné. Navíc je nenulová pravděpodobnost, že v balíčku nebude/bude vyhrávající kartička, tedy rozptyl není 0.

Jak již zaznělo, předpoklad, že jsou stejně rozdělené je reálný. S nezávislostí už to není tak jednoduché, protože balíčků je reálně omezený počet a výrobce do nich neumisťuje odměny tak, že ji tam umístí s pravděpodobností 1 / 10, ale tak, že vezme #balíčků / 10 odměn a ty rozmístí. Takže pokud jsme v jednom balíčku našli odměnu, tak to trochu sníží šanci na nalezení odměny v dalších balíčcích. Ale při obrovském (vůči tomu, kolik jich my koupíme) počtu balíčků to stejně nebude zmenšení, které by měnilo výsledky více než o zaokrouhlovací chybu.

[a] Mohli bychom použít i De Moivre-Laplaceovu centrální limitní větu.

b) S jakou pravděpodobností budete mít po skončení turnaje alespoň sedm výherních kódů, jestliže v průběhu celého turnaje zakoupíte právě 100 sáčků brambůrek (a všechny kódy uplatníte).

*Řešení*
Nahradíme ve větě výše limitu za přibližnou rovnost ($\#_n = \sum_{i=1}^n$ značí počet výher, $X_i$ tedy ty indikátory, $P(X_i = 1)$ je 1 / 10 podle (mírně interpretovaného) zadání, $\mathbb{E} = 0.1$ a $\sigma^2 = 0.1 \cdot 0.9 = 0.09$, jelikož indikátory mají alternativní rozdělení):

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} = \frac{\#_n - n \cdot 0.1}{\sqrt{n \cdot 0.09}} \approx Z \sim N(0,1).$$

Tedy pokud chceme $n = 100$ a $\#_n \geqslant 7$, tak chceme $Z \geqslant \frac{7-10}{\sqrt{9}} = -1$ a $P(Z > -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$.

c) Plánujete pozvat přátele na sledování utkání Česko–Finsko. V rámci občerstvení nakoupíte 36 sáčků brambůrek. Každého kamaráda byste po utkání rádi obdarovali výherním kódem. Kolik kamarádů si můžete pozvat, aby pravděpodobnost výše popsané situace byla alespoň 90 %?

*Řešení*
Víme, že $n = 36$ a $P(\#_{36} \geqslant ?) = 0.9$. My bychom ale chtěli mít v tom porovnání $Z$ a ne $\#_{36}$. Tedy ekvivalentně upravíme:

$$P(\#_{36} \geqslant ?) = P\left(\frac{\# - 36 \cdot 0.1}{\sqrt{36 \cdot 0.09}} \geqslant \frac{? - 36 \cdot 0.1}{\sqrt{36 \cdot 0.09}}\right) \approx P\left(Z \geqslant \frac{? - 3.6}{1.8}\right) = 0.9.$$

Tedy chceme $1 - \Phi\left(\frac{?-3.6}{1.8}\right) = 0.9$ a $\frac{?-3.6}{1.8} = -u_{0.9}$, tj.

$$? = -u_{0.9} \cdot 1.8 + 3.6 \approx -1.282 \cdot 1.8 + 3.6 = 1.2924.$$

Tedy si můžeme pozvat nejvýše jednoho kamaráda.

*Příklad*
Uvažujme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ ze spojitého rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{2M^2}{x^3}\mathbf{1}_{(M,\infty)}(x), \qquad M > 0.$$

1. Uvažujme odhad neznámého parametru $M$ ve tvaru $\hat{M} := \min_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$. Zjistěte, zda je tento odhad:

a) nestranný;

b) asymptoticky nestranný;

c) slabě konzistentní;

d) silně konzistentní.

*Řešení* (a))
Prvně (za pomoci definic, pravděpodobnosti doplňku a nezávislosti $X_i$, tedy $X_i > x$)

$$F_{\hat{M}}(x) = P(\hat{M} \leqslant x) = 1 - P(\hat{M} > x) = 1 - P(\forall i \in [n] : X_i > x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > \ x) =$$

$$= 1 - (P(X_1 > x))^n = \begin{cases} 1 - 1 = 0, & x \leqslant M, \\ 1 - \left(\int_x^\infty \frac{2M^2}{y^3} dy\right)^n = 1 - \left(\frac{M^2}{x^2}\right)^n = 1 - \left(\frac{M}{x}\right)^{2n}, & x > M. \end{cases}$$

$$f_{\hat{M}}(x) = F'_{\hat{M}}(x) = \begin{cases} 0, & x < M, \\ \left(1 - \left(\frac{M}{x}\right)^{2n}\right)' = \frac{2n}{x} \cdot \left(\frac{M}{x}\right)^{2n}, & x > M. \end{cases}$$

Nestranný je právě tehdy, když se střední hodnota odhadu pro libovolné $n$ rovná odhadované hodnotě. Tedy

$$\mathbb{E}\hat{M} = \int x \cdot f_{\hat{M}}(x) dx = \int_M^\infty x \cdot \frac{2n \cdot M^{2n}}{x^{2n+1}} dx = \left[-\frac{2nM^{2n}}{(2n-1) \cdot x^{2n-1}}\right]_M^\infty = M \cdot \frac{2n}{2n-1} \neq M.$$

*Řešení* (b))
Asymptoticky nestranný je, neboť $\mathbb{E}\hat{M} = M \cdot \frac{2n}{2n-1} \to M \cdot 1 = M$.

*Řešení* (c))
Slabě konzistentní je, (protože je silně konzistentní, nebo) protože $\forall \varepsilon > 0$:

$$P(|\hat{M}-M| \leqslant \varepsilon) = P(\hat{M} \leqslant \varepsilon+M) = F_{\hat{M}}(M+\varepsilon) = 1-\left(\frac{M}{M+\varepsilon}\right)^{2n} \to 1. \quad \left(\frac{M}{M+\varepsilon} < 1\right)$$

$$\Big(P(|\hat{M} - M| > \varepsilon) = 1 - P(|\hat{M} - M| \leqslant \varepsilon) \to 0.\Big)$$

*Řešení* (d))
Pokud se nám povede dokázat $P(\limsup_{n\to\infty} \left[X_n < M + \frac{1}{n}\right]) = 1$, tak jsme dokázali, že $\lim_{n\to\infty} \hat{M} = 0$ skoro jistě, neboť s pravděpodobností 1 je pro nekonečně mnoho $n$ je $X_n < M + \frac{1}{n}$, tedy s pravděpodobností 1 najdu pro každé $\varepsilon > 0$ $n$ takové, že $X_n < M + \varepsilon$, tedy $\lim_{n\to\infty} \hat{M} \leqslant M + \varepsilon$.

$\left[X_n < M + \frac{1}{n}\right]$ jsou nezávislé jevy, jelikož $X_n$ jsou nezávislé. Zároveň

$$P\left(X_n < M + \frac{1}{n}\right) = \int_M^{M+\frac{1}{n}} \frac{2M^2}{x^3} dx = \left[-\frac{M^2}{x^2}\right]_M^{M+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{M^2}{\left(M+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{2M}{n} + \frac{1}{n^2}}{\left(M+\ \frac{1}{n}\right)^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(X_n < M + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2M}{n} + \frac{1}{n^2}}{\left(M+\frac{1}{n}\right)^2} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2M}{(M+1)^2} = \frac{2M}{(M+1)^2} \cdot \infty = \infty,$$

tedy podle Borelovy věty je opravdu $P(\limsup_{n\to\infty}[X_n < M + \frac{1}{n}]) = 1$. Tudíž podle začátku řešení $\lim_{n\to\infty} \hat{M} = M$ (víme $\hat{M} > M$ a dostali jsme „$\hat{M} \leqslant M + \varepsilon$“) skoro jistě a odhad je tak silně konzistentní.

2. Upravte odhad $\hat{M}$ z kroku 1. tak, aby byl nestranný. Zůstává i takto upravený odhad silně konzistentní?

*Řešení*
Úprava je zřejmě $\tilde{M} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \hat{M}$, neboť potom (z linearity střední hodnoty)

$$\mathbb{E}\tilde{M} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \mathbb{E}\hat{M} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n-1} M = M.$$

$\tilde{M}$ je silně konzistentní, neboť $\tilde{M} < \hat{M}$ a $\forall \varepsilon > 0$ můžeme najít $n_0$ tak, že $\tilde{M} > \hat{M} - \varepsilon$ (neboť $\frac{2n-1}{2n} \to 1$). Tedy pokud konverguje $\hat{M}$ (k $M$), tak musí konvergovat i $\tilde{M}$ (k $M$).