# 1 Řady

## 1.1 Úvod

**Definice 1.1**

Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost. Číslo $s_m = a_1+a_2+\ldots+a_m$ nazveme $m$-tým částečným součtem řady $\sum a_n$. Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, pokud tato limita existuje. Je-li tato limita konečná, pak řekneme, že řada je konvergentní. Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je divergentní. Tuto limitu budeme značit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Věta 1.1** (Nutná podmínka konvergence)

*Jestliže je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

*Důkaz*

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m = s \in \mathbb{R}$. $a_n = s_n - s_{n-1}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$ □

*Pozor*

Tato věta je pouze a jen implikace.

**Věta 1.2** (konvergence součtu řad)

*Nechť $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\cdot a_n$ konverguje.*

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

*Důkaz*

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\exists$ limita z $s_m \to s \in \mathbb{R}$ a to je z AL právě tehdy, když konverguje $\alpha s_m \to \alpha\cdot s \in \mathbb{R}$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\cdot a_n$ konverguje.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma \in \mathbb{R}$ konvergují, tedy konverguje i $s_m + \sigma_m \to s+\sigma \in \mathbb{R}$. □

## 1.2 Řady s nezápornými členy

*Pozorování*

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je řada s nezápornými členy. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, nebo má součet $+\infty$.

*Důkaz*
$s_m = a_1 + \ldots + a_m \le a_1 + \ldots + a_{m+1} = s_{m+1}$. $s_m \ge 0$ neklesající $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m \in [0, \infty]$. □

**Věta 1.3** (Srovnávací kritérium)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ platí $a_n \le b_n$. Pak a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.*

*Důkaz*
a) Označme $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ a $\sigma_n = b_1 + \ldots + b_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ platí

$$s_n = a_1+\ldots+a_{n_0}+a_{n_0+1}+\ldots+a_n \le a_1+\ldots+a_{n_0}+b_{n_0+1}+\ldots+b_n \le a_1+\ldots+a_{n_0}+\sigma_n \le a_1+\ldots+a_{n_0}+\sigma$$

A to je konečné, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tedy $\sigma \in \mathbb{R}$. $s_n$ neklesající a omezená $\implies$ $\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$.

b) Nepřímým důkazem z a). □

**Věta 1.4** (Limitní srovnávací kritérium)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže $A \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Jestliže $A = 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Jestliže $A = \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.*

*Důkaz*
(i) Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in (0, \infty)$ plyne, k $\varepsilon = \frac{K}{2} \exists n_0\ \forall n \ge n_0 : \left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon = \frac{K}{2}$, tedy $\frac{K}{2} \le \frac{a_n}{b_n} \le \frac{3}{2}K$.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\overset{\text{konvergence součtu řad}}{\implies}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}K \cdot b_n$ konverguje $\wedge a_n \le \frac{3}{2}K \cdot b_n \overset{\text{Srov. kritérium}}{\implies}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\wedge \frac{K}{2} \cdot b_n \le a_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{2} \cdot b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

(ii) Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ plyne, k $\varepsilon = 1 \exists n_0\ \forall n \ge n_0 : \left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon = 1$, tedy $a_n < b_n$, a pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle srovnávacího kritéria.

(iii) Úplně stejně jako (ii). □

**Věta 1.5** (Cauchyovo odmocninové kritérium)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, potom*

$$(i) \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(iv) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje,}$$

$$(v) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

*Důkaz*
$(i)$ $b_n = q^n$. Víme, že $a_n < b_n\ \forall n \geq n_0$, tedy použijeme srovnávací kritérium.

$(i) \implies (ii) : b_n = \left\{ \sqrt[n]{a_n}, \sqrt[n+1]{a_n}, \ldots \right\}$. $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}_n < 1$. Nalezneme $q \in \left( \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, 1 \right)$. Z definice $\lim_{n\to\infty} b_n$ pro $\varepsilon = q - \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ je $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : b_n < q$, tedy $\forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q$, tedy podle $(i)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(ii) \implies (iii) : \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \implies \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, tedy podle $(ii)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(iv)$ : podobně jako v $(i) \implies (ii)$ dostaneme $\forall n_0 > n_k : b_{n_0} > q > 1$, tedy $\forall n_0\ \exists n > n_0 : \sqrt[n]{a_n} > q > 1 \implies a_n > 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tedy podle nutné podmínky konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

$(iv) \implies (v) : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. □

**Věta 1.6** (d'Alambertovo podílové kritérium)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Potom:*

$$(i) \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$

$$(iv) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje,}$$

*Důkaz*
$(i)$ Víme indukcí $a_{n_0+k} < q^k a_{n_0}$ a z konvergence geometrické řady $\sum_{k=1}^{\infty} q^k a_n$ konverguje $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(i) \implies (ii)$: $b_n = \sup\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}, \dots\right\}$. $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Zvolíme $q \in (\lim_{n\to\infty} b_n, 1)$. Tedy $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : b_n < q \implies \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, tudíž podle $(i)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(ii) \implies (iii)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, tedy podle $(ii)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(iv)$: Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ definicí limity pro $\varepsilon < \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1$ vyplývá $\exists n_0\ \forall n \geq n_0$ : $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies a_{n+1} > a_n$. Máme rostoucí posloupnost kladných čísel $\implies \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tedy podle nutné podmínky konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. $\square$

**Věta 1.7** (Kondenzační kritérium)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy splňující $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ konverguje.*

*Důkaz*
Pro $k \in \mathbb{N} : s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j\ t_k = \sum_{j=0}^{k} 2^j \cdot a_{2^j}$.

$\Leftarrow$: Označme $A = \sum_{j=0}^{k} 2^j \cdot a_{2^j}$, pak $A \in \mathbb{R}$. Nechť $m \in \mathbb{N}$ a nalezneme $kin\mathbb{N}$, $m < 2^k$. Pak $t_k \leq A$ a:

$$s_m \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + (a_{2^{k-1}} + \ldots + a_{2^k-1}) \leq t_{k-1} \leq A.$$

Tedy $s_m$ je shora omezená a rostoucí $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m \in \mathbb{R} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\implies$ : Označme $B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$ a nalezneme $m \in \mathbb{N}$, aby $2^k \leq m$. Pak $s_m \leq B$ a platí:

$$s_m \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \geq a_1 + \frac{1}{2}(t_k - 1 \cdot a_1) \leq \frac{1}{2} t_k \implies$$

$t_k$ je shora omezená rostoucí posloupnost $\implies \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. $\square$

## 1.3 Neabsolutní konvergence řad

**Definice 1.2**

Nechť pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

**Věta 1.8** (Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci řad)

*Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když je splněna následující podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 : \left| \sum_{n=j}^{m} a_n \right| < \varepsilon.$$

*Důkaz*

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \overset{\text{BC}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 :$ $|s_m - s_{n-1}| < \varepsilon$. Což je přesně výraz (po odečtení $s_m - s_{n-1}$) ve větě. $\square$

**Věta 1.9** (Vztah konvergence a absolutní konvergence)

*Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

*Důkaz*

Z BC podmínky: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 : \sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon$. Chceme dokázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Stačí ověřit BC podmínku. K $\varepsilon > 0$ volme $n_0$ jako výše, pak $\forall m, n \geq n_0 : \left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j| \leq \varepsilon \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. $\square$

**Věta 1.10** (Leibnitzovo kritérium (T5.10))

*Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel, pak $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

*Důkaz*

$\Longrightarrow$ : z nutné podmínky (V5.1) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \cdot a_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\Leftarrow$: $s_{2k+2} - s_{2k} = (-1)^{2k+2} \cdot a_{2k+2} + (-1)^{2k+1} \cdot a_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0 \implies s_{2k}$ je nerostoucí. Obdobně $s_{2k+1} - s_{2k-1} = a_{2k+1} - a_{2k} \geq 0 \implies s_{2k+1}$ je neklesající. Navíc $s_2k = (-a_1 + a_2) + \ldots + (-a_{2k-1} + a_{2k}) \leq 0 + \ldots + 0 = 0$. Analogicky $s_{2k+1} \geq -a_1$.

Nyní $0 \geq s_{2k} = s_{2k+1} + a_{2k+1} \geq -a_1 + a_{2k+1} \geq -a_1$. Analogicky $-a_1 \leq s_{2k+1} \leq 0$. Tedy obě vybrané podposloupnosti jsou omezené a monotónní, tedy konvergují. $\lim_{n\to\infty} s_{2k} = S_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = S_2 \in \mathbb{R}$. Navíc

$$S_2 = \lim_{n\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2k} - a_{2k+1} \stackrel{\text{AL}}{=} S_1 - 0 = S_1.$$

Tedy jelikož existuje limita sudých i lichých členů a rovnají se, existuje i limita $s_n$. □

**Lemma 1.11** (Abelova parciální sumace)

*Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $m \leq n$ a nechť $a_m, \ldots,, a_n, b_m, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Označme $s_k = \sum_{i=m}^{k} a_i$. Pak platí*

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i = \sum_{i=m}^{n} s_i \cdot (b_i - b_{i+1}) + s_n \cdot b_n.$$

*Důkaz*

$$= a_m \cdot b_m + a_{m+1} \cdot b_{m+1} + \ldots + a_n \cdot b_n = s_m \cdot b_m + (s_{m+1} - s_m) \cdot b_{m+1} + \ldots + (s_n - s_{n-1}) \cdot b_n = \sum_{i=m}^{n} s_i \cdot (b_i - b_{i+1}) + s_n \cdot b_n$$

□

**Věta 1.12** (Abel-Dirichletovo kritérium)

*Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

*(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní. (D) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty (tj. $\exists K > 0\ \forall m \in \mathbb{N} : |s_m| = |\sum_{n=1}^{m} a_n| < K$).*

*Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konvergentní.*

*Důkaz*
Podle V 5.8 budeme ověřovat BC podmínku pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$. Označme $s_k = \sum_{n=m}^{k} a_n$. $b_n$ je nerostoucí a $b_n > 0 \implies \forall i : b_i - b_{i+1} \geq 0$ a $\exists K\ \forall n : |b_n| \leq K$.

(A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

$$\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall i \geq m \geq n_0 |\sum_{n=m}^{i} a_n| = |s_i| < \varepsilon.$$

Nyní k $\varepsilon > 0$ volme $n_0$ jako výše a nechť $n \geq m \geq n_0$:

$$|\sum_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i| \overset{\text{Abel PS}}{\leq} \sum_{i=m}^{n-1} |s_i \cdot (b_i - b_{i+1})| + |s_n| \cdot |b_n| \leq \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (b_i - b_{i+1}) + \varepsilon \cdot b_n = \varepsilon \cdot (b_m - b_n) + \varepsilon \cdot b_n \leq \varepsilon \cdot K.$$

A podle BC podmínky máme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konverguje.

(D) Z předpokladů víme, že $\exists M > 0\ \forall i \geq m : |s_i| = |\sum_{n=1}^{i} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n| \leq M$ (volme $M = 2K$). Z $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ k $\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |b_n| < \varepsilon$. Nyní

$$\forall n \geq m \geq n_0 : |\sum_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i| \leq \sum_{i=m}^{n-1} |s_i (b_i - b_{i+1})| + |s_n| \cdot |b_n| \leq \sum_{i=m}^{n-1} M \cdot (b_i - b_{i+1}) + M \cdot b_n = M \cdot (b_m - b_n) + M \cdot b_n \leq$$

A podle BC podmínky máme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konverguje. $\square$

*Příklad*
$\sin n$ a $\cos n$ má omezené částečné součty.

*Důkaz*
Buď sečtením $\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n =$ vzoreček.

Nebo dokážeme dokonce $\forall x \neq 2k\pi$ $\sin nx$ a $\cos nx$ má omezené částečné součty.

$$e^i x = \cos x + i \cdot \sin x \implies \sum_{k=0}^{n} e^{i \cdot k \cdot x} = \sum_{k=0}^{n} \cos k \cdot x + i \cdot \sum_{k=0}^{n} \sin k \cdot x.$$

Z geometrické řady ale víme, že

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i \cdot k \cdot x} = \frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}} = \frac{1 - \cos x \cdot (n+1) - i \cdot \sin x \cdot (n+1)}{1 - \cos x - i \sin x} \cdot \frac{1 - \cos x + i \cdot \sin x}{1 - \cos x + i \cdot \sin x} = \frac{A_n \cdot B}{(1 - \cos x)^2 + (\mathrm{s}}$$

Zřejmě $|A_n| \leq 3$ a $|B| \leq 3$, jmenovatel je nenulový a není závislý na $n$, tedy pro všechna $n$ je výraz omezen konstantou. $\square$

## 1.4 Přerovnání a součin řad

**Definice 1.3** (Přerovnání řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ nazýváme přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Věta 1.13** (O přerovnání absolutně konvergentní řady)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je její přerovnání. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je absolutně konvergentní a má stejný součet.*

*Důkaz*

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje $\implies$ splňuje BC podmínku. Tedy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq m \geq n_0 |\sum_{i=n}^{m} a_i| < \varepsilon \implies \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq \varepsilon.$$

Zvolme $n_0' = \max\{p(1), p(2), \ldots, p(n_0)\}$. Pak $\forall n' \geq n_0' : p^{-1}(n') \geq n_0$. Tedy

$$\forall n' \geq m' \geq n_0' : \sum_{i=m'}^{n'} |a_{p(i)}| \leq \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| < \varepsilon.$$

Tedy podle BC podmínky $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{p(n)}|$ konverguje, tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ konverguje.

Konverguje k tomu samému? $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = A'$. Víme, že k $\varepsilon > 0\ \exists n_0 \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq \varepsilon$. Zvolme $n_0' \geq \max_{i \leq n_0} p(i)$, aby $\sum_{i=n_0'}^{\infty} |a_{p(i)}| \leq \varepsilon$. Pak $|\sum_{i=1}^{n_0} a_i - A| \leq \varepsilon$ a $|\sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)} - A'| \leq \varepsilon$. Nyní

$$|A - A'| \leq |\sum_{i=1}^{n_0} a_i - A| + |\sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)} - A'| + |\sum_{i=1}^{n_0} a_i - \sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)}| \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq 3\varepsilon$$

□

**Věta 1.14** (Rieman)

*Neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat k libovolnému součtu $s \in \mathbb{R}^*$.*

*Důkaz*

Bez důkazu (idea: rozdělíme na kladné a záporné členy (mají součty $+\infty$ a $-\infty$) a jdeme nahoru dolu nahoru dolu (vždy alespoň o 1 prvek), abychom se co nejvíce blížili $s$). □

**Definice 1.4** (Cauchyovský součin)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady. Cauchyovským součinem těchto řad nazveme řadu $\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{k-1} (a_{k-i} \cdot b_i)$.

**Věta 1.15** (O součinu řad)

*Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergují absolutně. Pak* $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)\cdot(\sum_{n=1}^{\infty} b_n) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}(a_{k-i}\cdot b_i)$.

*Důkaz*

Označme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \to A \in \mathbb{R}$, $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \to B \in \mathbb{R}$ a $\varrho_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i}b_i\right) \overset{\text{Chceme}}{\to} A\cdot B \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak $\exists n_0 : \sum_{i=n_0}^{\infty}|a_i| < \varepsilon$ a $\sum_{j=n_0}^{\infty}|b_j| < \varepsilon$ (z BC podmínky) a zároveň $|s_{n_0}\cdot\sigma_{n_0} - A\cdot B| < \varepsilon$. Nechť $n \geq 2n_0$, pak

$$|\varrho_n - A\cdot B| \leq |\varrho_n - s_{n_0}\cdot\sigma_{n_0}| + |s_{n_0}\cdot\sigma_{n_0} - A\cdot B| \leq$$

$$\leq |(a_1b_1)+(a_1b_2+a_2b_1)+\ldots+(a_{n-1}\cdot b_1+\ldots+a_1\cdot b_{n-1})-(a_1+\ldots+a_{n_0})\cdot(b_1+\ldots+b_{n_0})|+\varepsilon \leq$$

$$\leq \sum_{i\geq n_0 \vee j\geq n_0}|a_ib_j| + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\cdot\sum_{j=n_0}^{\infty}|b_j| + \sum_{i=n_0}^{\infty}|a_i|\cdot\sum_{j=1}^{\infty}|b_j| + \varepsilon \leq A\varepsilon + B\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon\cdot\text{konst.}$$

□

## 1.5 Limita posloupnosti a součet řady v $\mathbb{C}$

**Definice 1.5**

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti. Pak $c_n = a_n + ib_n$ je komplexní posloupnost.

Řekneme, že $\lim_{n\to\infty} c_n = A + iB$, pokud existují $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

**Definice 1.6**

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti a $c_n = a_n + ib_n$. Řekneme, že komplexní řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje k $A+iB$, pokud konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$.

**Věta 1.16** (Vztah konvergence a absolutní konvergence pro komplexní řady)

*Nechť* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je komplexní posloupnost a řada* $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ *konverguje. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *konverguje.*

*Důkaz*
Z BC podmínky pro konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m \geq n \geq n_0 : \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon.$$

Víme $c_n = a_n + ib_n$. Nyní $\forall m \geq n \geq n_0$ :

$$\sum_{j=n}^{m} |a_j| \leq \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon \wedge \sum_{j=n}^{m} |b_j| \leq \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ splňují BC podmínku, tedy konvergují. Podle V5.9 (vztah KaAK), tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, tedy konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. □

# 2 Primitivní funkce

## 2.1 Základní vlastnosti

**Definice 2.1** (Primitivní funkce, integrál)

Nechť je funkce $f$ definována na otevřeném intervalu $I$. Řekneme, že funkce $F$ je primitivní funkce k funkci $f$, pokud pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a $F'(x) = f(x)$.

Množinu všech primitivních funkcí k $f$ na $I$ značíme $\int f(x)\,dx$

**Věta 2.1** (O jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu)

*Nechť $F$ a $G$ jsou primitivní funkce k $f$ na otevřeném intervalu $I$. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro všechna $x \in I$.*

*Důkaz*
Označme $H(x) = F(x) - G(x)$. Pak $(H(x))' = (F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$. Tedy (např. z Lagrangeovy věty) $\exists c \in \mathbb{R} : H(x) = c$ na $I$. □

*Poznámka*
Značíme $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Nechť $F$ je primitivní funkce k $f$. Pak $F$ je spojitá (protože má všude vlastní derivaci).

**Věta 2.2** (O vztahu spojitosti a existence primitivní funkce)

*Nechť $I$ je otevřený interval a $f$ je spojitá funkce na $I$. Pak $f$ má na $I$ primitivní funkci.*

*Důkaz*
Později. □

**Věta 2.3** (Linearita primitivní funkce)

*Nechť $f$ má primitivní funkci $F$ a $g$ má primitivní funkci $G$ na otevřeném intervalu $I$ a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ má primitivní funkci $\alpha F + \beta G$.*

*Důkaz*

$$(\alpha \cdot F(x) + \beta \cdot G(x))' \overset{\text{AD}}{=} \alpha \cdot F'(x) + \beta \cdot G'(x) = \alpha \cdot f + \beta \cdot g.$$

□

*Poznámka* (Tabulkové integrály)

- $\int x^n \, dx = \frac{x^n}{n+1} + C, ((x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}) \vee (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}))$.
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + C, (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.
- $\int e^x \, dx = e^x + C, (x \in \mathbb{R})$.
- TODO

**Věta 2.4** (Nutná podmínka existence primitivní funkce)

*Nechť $f$ má na otevřeném intervalu $I$ primitivní funkci. Pak $f$ má na $I$ Darbouxovu vlastnost, tedy pro každý interval $J \subseteq I$ je $f(J)$ interval.*

*Důkaz*
Nechť $J \in I$ je interval. Nechť $y_1, y_2 \in f(J)$ a $y_1 < z < y_2$. Chceme ukázat $z \in f(J)$. Nechť $F$ je primitivní funkce k funkci $f$ na intervalu $I$. Definujeme $H(x) = F(x) - z \cdot x$ pro $x \in I$. Pak $H$ je spojitá na $I$ a $\forall x \in I : (H(x))' = f(x) - z$. Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ tak, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Nechť $x_1 < x_2$, v opačném případě je důkaz analogický. Funkce $H$ je spojitá na $[x_1, x_2]$, a tedy tam nabývá minima.

Víme $H'(x_1) = f(x_1) - z < f(x_1) - y_1 = 0$, tedy $\exists \delta > 0$, že $\forall x \in [x_1, x_1 + \delta], H(x) < H(x_1)$, tedy v $x_1$ není minimum. Obdobně v $x_2$ není minimum. Tedy minimum je v $x_0 \in (x_1, x_2) \overset{\text{Fermat}}{\Longrightarrow} 0 = H'(x_0) = f(x_0) - z$, tj. $f(x_0) = z$. □

**Věta 2.5** (Integrace per partes)

*Nechť $I$ je otevřený interval a funkce $f$ a $g$ jsou spojité na $I$. Nechť $F$ je primitivní k $f$ a $G$ je primitivní k $g$ na $I$. Pak platí $\int g(x) \cdot F(x) \, dx = G(x) \cdot F(x) - \int G(x) \cdot f(x) \, dx$ ne $I$.*

*Důkaz*
$G$ je spojitá, tedy $G(x) \cdot f(x)$ je spojitá (tedy integrál vpravo existuje). Mějme funkci $G \cdot F - H$, kde $H$ je primitivní k $G \cdot f$, pak

$$(G(x) \cdot F(x) - H(x))' = g(x) \cdot F(x) + G(x) \cdot f(x) - G(x) \cdot f(x) = g(x) \cdot F(x),$$

neboli $\int g(x) \cdot F(x)\, dx = G(x) \cdot F(x) - H(x)$. □

**Věta 2.6** (1. o substituci)

*Nechť $F$ je primitivní funkce k $f$ na $a, b$. Nechť $\varphi$ je funkce definovaná na $(\alpha, \beta)$ s hodnotami v intervalu $(a, b)$, která má v každém bodě $(\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t))$ na $(\alpha, \beta)$.*

*Důkaz*
Podle věty o derivaci složené funkce

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \forall t \in (\alpha, \beta).$$

□

**Věta 2.7** (2. o substituci)

*Nechť funkce $\varphi$ má v každém bodě intervalu $\alpha, \beta$ vlastní nenulovou derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce $f$ je definována na intervalu $(a, b)$ a platí $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = G(t)$ ne $(\alpha, \beta)$. Pak $\int f(x)\, dx = G(\varphi^{-1}(x))$ na $(a, b)$.*

*Důkaz*
Podle V6.4 $\varphi'$ nabývá mezihodnot (a je všude nenulová), tudíž $\varphi'$ je na $(\alpha, \beta)$ buď kladná nebo záporná a $\varphi$ je tím pádem ryze monotónní a spojitá. Tedy lze použít větu o derivaci inverzní funkce a dostaneme $(\varphi^{-1}(x)) = \frac{1}{\varphi'(\varphi(x))}$. Nyní na $(a, b)$

$$(G(\varphi^{-1}(x)))' = G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x).$$

□

## 2.2 Integrace racionálních funkcí

**Definice 2.2** (Racionální funkce)

Racionální funkcí rozumíme podíl dvou polynomů $\frac{P}{Q}$, kde $Q$ není nulový polynom.

**Věta 2.8** (Základní věta algebry)

*Nechť* $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 x^0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. *Pak existují* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ *tak, že* $P(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$, $x \in \mathbb{R}$.

**Lemma 2.9** (O komplexních kořenech polynomu)

*Nechť* $P$ *je polynom s reálnými koeficienty a* $z \in \mathbb{C}$ *je kořen* $P$ *násobnosti* $k \in \mathbb{N}$. *Pak i* $\overline{z}$ *je kořen násobnosti* $k$.

*Důkaz*

Nejprve pozorování: $(\overline{z})^k = \overline{z^k}$ (dokážeme přes goniometrický tvar).

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle $k$. $k = 1$: $z$ je kořen, tj. $P(z) = 0 = \overline{P(z)} = \overline{a_n \cdot z^n + \ldots + a_0 z^0} = a_n \overline{z^n} + \ldots + a_0 \overline{z^0} = P(\overline{z}) \implies \overline{z}$ je kořen. Dále předpokládejme, že $z \notin \mathbb{R}$ (jinak je důkaz triviální.)

Nyní nechť tvrzení platí pro $k-1$ a $z$ je kořen násobnosti alespoň $k$, potom z IP víme, že $\overline{z}$ je $k-1$násobný kořen. Tedy $P(x) = (x-z)^{k-1} \cdot (x - \overline{z})^{k-1} \cdot Q(x) = (x^2 - (z + \overline{z}) \cdot x + z \cdot \overline{z})^{k-1} \cdot Q(x)$, tedy $Q$ má reálně koeficienty a $Q(z) = 0$. Podle 1. kroku indukce je tudíž $\overline{z}$ kořenem $Q$, tedy $k$násobným kořenem $P$. □

**Věta 2.10** (O rozkladu na parciální zlomky)

*Nechť* $P$ *a* $Q$ *jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že stupeň* $P$ *je ostře menší než stupeň* $Q$ *a* $Q(x) = a_n \cdot (x - x_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{p_k} \cdot (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$, *kde* $a_n, x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, $p_1, \ldots, p_k, q_1, q_l \in \mathbb{N}$, *žádné dva z mnohočlenů nemají společný kořen a mnohočleny* $x^2 + \alpha_i x + \beta_i$ *nemají reálný kořen.*

*Pak existují jednoznačně určená čísla* $A^i_j \in \mathbb{R}$, $i \in [k]$, $j \in [p_i]$ *a* $B^i_j, C^i_j \in \mathbb{R}$, $i \in [l]$, $j \in [q_i]$ *tak, že platí:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A^1_1}{x - x_1} + \ldots + \frac{A^1_{p_1}}{(x - x_1)^{p_1}} + \ldots + \frac{A^k_1}{x - x_k} + \ldots + \frac{A^k_{p_k}}{(x - x_k)^{p_k}} + \frac{B^1_1 x + C^1_1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^1} + \ldots.$$

*Důkaz*

Bez důkazu (velmi obtížný a docela zbytečný). □

*Poznámka* (Postup při integraci racionální funkce)

1. Vydělit polynomy.

2. Rozklad na parciální zlomky podle předchozí věty.

3. Integrace parciálních zlomků.

## 2.3 Substituce, převádějící na racionální funkce

Viz přednáška. ($R(e^{ax}) \to t = e^{ax}$, $R(\log x) \cdot \frac{1}{x} \to t = \log(x)$).

## 2.4 Integrace trigonometrických funkcí

**Definice 2.3** (Racionálni funkce 2 proměnných)

Racionální funkcí dvou proměnných rozumíme podíl dvou polynomů $R(a,b) = \frac{P(a,b)}{Q(a,b)}$, kde $P(a,b)$ a $Q(a,b)$ jsou polynomy dvou proměnných a $Q$ není identicky nulový.

*Poznámka*
Při integraci funkcí $R(\sin x, \cos x)$ používáme substituce:

- Pokud $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak používáme $t = \cos x$.
- Pokud $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak používáme $t = \sin x$.
- Pokud $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pak používáme $t = \tan x$.
- Vždy funguje $t = \tan \frac{x}{2}$. (Nepoužívat není-li nutné, těžký výpočet!)

## 2.5 Integrace funkcí obsahujících odmocniny

Viz přednáška. ($q \in \mathbb{N}, ad \neq bc, R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}) \to t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}$).

*Poznámka* (Eulerovy substituce)
Nechť $a \neq 0$. Při integraci funkcí typu $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ používáme substituce:

- polynom $ax^2+bx+c$ má dvojnásobný kořen a $a > 0$, pak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-\alpha|$ a řešíme na $x > \alpha$ a $x < \alpha$ jako racionální funkce.
- polynom $ax^2+bx+c$ má dva reálné kořeny $\alpha_1$ a $\alpha_2$. Pak úpravou převedeme na tvar $\sqrt{a\frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}}$ nebo $\sqrt{a \cdot \frac{\alpha_1 - x}{x-\alpha_2}}$.
- polynom $ax^2+bx+c$ nemá reálný kořen a $a > 0$. Pak používáme substituci $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot x + t$.

*Pozor*
Substituce $\tan x$, $\tan \frac{x}{2}$ a poslední předchozí jsou substituce 2. druhu a je vždy potřeba ověřit, že vnitřní funkce je monotónní a na.

# 3 Určitý integrál

## 3.1 Riemannův integrál

**Definice 3.1** (Dělení, zjemnění dělení)

Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme dělením intervalu $[a,b]$, jestliže $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Řekneme, že dělení $D'$ intervalu $[a,b]$ zjemňuje dělení $D$ intervalu $[a,b]$, jestliže každý bod dělení $D$ je i bodem dělení $D'$.

**Definice 3.2** (Horní a dolní součty, Riemanovy integrály)

Nechť $f$ je omezená funkce definovaná na intervalu $[a,b]$ a $D$ je dělení $[a,b]$, definujme horní a dolní součty

$$S(f,d) = \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-i}),$$

$$s(f,d) = \sum_{i=1}^{n} \inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-i}).$$

Horní a dolní Riemannův integrál definujeme jako

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(f,D)|D \text{ je dělení } [a,b]\},$$

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(f,D)|D \text{ je dělení } [a,b]\}.$$

**Definice 3.3**

Řekneme, že $f$ je Riemanovsky integrovatelná, jestliže $(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Tuto hodnotu pak označujeme $(R)\int_a^b f(x)\,dx$.

Množinu funkcí mající Riemannův integrál značíme $R([a,b])$.

*Poznámka*
Omezenost $f$ je nutnou podmínkou.

**Věta 3.1** (O zjemnění dělení)

*Nechť $f$ je omezená funkce na $[a, b]$, $D$ a $D'$ jsou dělení intervalu $[a, b]$ a $D'$ zjemňuje $D$. Pak $s(f, D) \leq s(f, D') \leq S(f, D') \leq (f, D)$.*

*Důkaz*
Prostřední nerovnost je triviální z sup $\geq$ inf.

Předpokládejme, že $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ a $D' = \left\{x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, z, x_{x_j}, \ldots, x_n\right\}$. Pak $\inf\{f(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\} \leq \inf\{f(x), x \in [x_{j-1}, z]\}$ a $\inf\{f(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\} \leq \inf\{f(x), x \in [z, x_j]\}$. Vynásobením $(z - x_{j-1})$ a $(x_j - z)$ dostaneme

$$\inf\{f(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq \inf\{f(x), x \in [x_{j-1}, z]\} \cdot (z - x_{j-1}) + \inf\{f(x), x \in [z, x_j]\} \cdot (x_j - z) =$$

Pokud se $D$ a $D'$ liší o více bodů, pak postupujeme indukcí. Analogicky pro horní součty. □

**Věta 3.2** (O dvou děleních)

*Nechť $f$ je omezená funkce na $[a, b]$ a $D_1, D_2$ jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$.*

*Důkaz*
Nechť $D$ zjemňuje $D_1$ i $D_2$ ($D = D_1 \cup D_2$). Potom $D$ je jemnější než $D_1$ i $D_2$ a podle předchozí věty:

$$s(f, D_1) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq S(f, D_2).$$

□

*Důsledek*
Nechť $f$ je omezená na $[a, b]$, $D_1$ a $D_2$ jsou dělení $[a, b]$, $m = \inf\{f(x) | x \in [a, b]\}$ a $M = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$. Pak:

$$m \cdot (b - a) \leq s(f, D_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq S(f, D_2) \leq M \cdot (b - a).$$

**Definice 3.4** (Norma dělení)

Nechť $D$ je dělení $[a, b]$. Číslo $\ni (D) = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j - x_{j-1}|$ nazveme normou dělení $D$.

**Věta 3.3** (Aproximace R. integrálu pomocí součtů)

*Nechť $f$ je omezená funkce na $[a,b]$ a $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení $[a,b]$ taková, že $\lim_{n\to\infty} \ni (D_n) = 0$. Potom $(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{n\in\mathbb{N}} S(f,D_n)$ a $(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} s(f,D_n)$.*

*Důkaz*

BÚNO $f \geq 0$ (jinak přičteme k $f$ konstantu). Stačí dokázat druhá rovnost, první je analogická. Nechť $D$ je libovolné dělení a $\varepsilon > 0$. Stačí dokázat, že $\exists n_0 : s(f, D_{n_0}) \geq s(f,D) - \varepsilon$. Pak

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_D S(f,D) \geq \sup_{D_n} s(f,D_n) \geq \sup_D (s(f,D) - \varepsilon) = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon.$$

Nechť $0 \leq f \leq K$ a zvolme $n_0$, aby $\ni (D_{n_0}) \leq \frac{\varepsilon}{K\cdot 4\cdot \#\text{intervalů } D}$. Označme $H =$ intervaly vzniklé dělením $P = D \cup D_{n_0}$ a $\gamma =$ intervaly z $P$, v kterých není žádný bod dělení $D$. $P$ je jemnější než $D$, a proto z věty výše dostáváme

$$s(f,D) \leq s(f,P) = \sum_{L\in H} \inf_L f \cdot \text{délka } L = \sum_{L\in\gamma} \inf_L f\cdot\text{délka } L + \sum_{L\in H\setminus\gamma} \inf_L f\cdot\text{délka } L \leq s(f,D_{n_0}) + 2\cdot\#\text{intervalu}$$

□

**Věta 3.4** (Kritérium existence R integrálu)

*Nechť $f$ je omezená funkce na $[a,b]$. Pak $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists$ dělení $D$ intervalu $[a,b]$, že $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$.*

*Důkaz*

$\Longrightarrow$ : Zvolme libovolnou posloupnost dělení, že $\ni |D_n| \to 0$ ($D_{n+1}$ je jemnější než $D_n$). Pak

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n) = (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} s(f,D_n) = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Tedy $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : S(f,D_n) - s(f,D_n) < \varepsilon$.

$\Rightarrow$: Zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu nalezneme $D$ z předpokladu.

$$0 \leq (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon \implies (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

□

**Definice 3.5** (Stejnoměrná spojitost)

Řekneme, že funkce $f$ je stejnoměrně spojitá na intervalu $I$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

**Věta 3.5** (O vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti)

*Nechť $f$ je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak $f$ je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.*

*Důkaz*

Sporem. Nechť $f$ je spojitá na $[a, b]$, ale

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta = \frac{1}{n}\ \exists x_n, y_n \in I : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Interval $a, b$ je omezený, tedy z $x_n$ lze vybrat konvergentní posloupnost podle Weirstrassovy věty. Tedy $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Dále $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$, neboť

$$|y_{n_k} - x_0| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \to 0.$$

Víme, že $f$ je spojitá v $x_0$ (vzhledem k $[a, b]$). Tedy k našemu $\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] : |f(z) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Nalezneme $j \in \mathbb{N}$, aby $x_{n_k}, y_{n_k} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Nyní

$$\varepsilon \leq |f(x_{n_k} - f(y_{n_k}))| \leq |f(x_{n_k} - f(x_0))| + |f(x_0) - f(y_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \lightning$$

□

**Věta 3.6** (O vztahu spojitosti a Riemannovské integrovatelnosti)

*Nechť $f$ je spojitá na omezeném intervalu $[a, b]$, pak $f \in R([a, b])$.*

*Důkaz*

Podle věty ze zimy je spojitá funkce na omezeném intervalu spojitá. Z předchozí věty víme, že $f$ je dokonce stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Pak

$$\exists \delta > 0 : \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Zvolme dělení $D$ intervalu $[a, b]$ tak, že $\ni (D) < \delta$. Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$. Označme $M_j = \sup_{x_j, x_{j+1}} f$, $m_j = \inf_{x_j, x_{j+1}} f$. Pak platí $M_j \leq m_j + \varepsilon \forall j \in [n]$.

$$S(f, D) - s(f, D) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) =$$

Podle věty výše tedy $f \in R([a, b])$. □

**Věta 3.7** (Vztah monotonie a Riemanovské integrovatelnosti)

*Nechť $f$ je (omezená) monotonní funkce na intervalu $[a,b]$. Pak $f \in R([a,b])$.*

*Důkaz*

BÚNO $f$ je neklesající. Budeme kritérium existence R integrálu. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme ekvidistantní dělení $D = \left\{a + (b-a)\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ a volíme $n$, aby $n > \frac{1}{\varepsilon}(b-a)\cdot(f(b)-f(a))$. Nyní

$$S(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\cdot(x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j),$$

$$s(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\cdot(x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}).$$

Odtud

$$S(f,D) - s(f,D) = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) - f(x_{j-1}) \le \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) < \varepsilon.$$

□

**Věta 3.8** (Vlastnosti R integrálu)

*a) Linearita: $f,g \in R([a,b]), \alpha \in \mathbb{R} \implies f+g \in R([a,b]) \wedge \alpha f \in R([a,b])$ a*

$$(R)\int_a^b f+g = (R)\int_a^b f + (R)\int_a^b g \wedge (R)\int_a^b \alpha\cdot f = \alpha\cdot(R)\int_a^b g.$$

*b) Monotonie: $f,g \in R([a,b]), f \le g$, pak $(R)\int_a^b f \le (R)\int_a^b g$.*

*c) Aditivita vzhledem k intervalům: Nechť $a < c < b$. Pak $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow f \in R([a,c]) \wedge f \in R([c,b])$ a platí $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx$.*

*Důkaz*
a) $f, g \in R([a,b]) \implies f$ a $g$ jsou omezené na $[a,b] \implies f+g$ je omezená a $\alpha f$ je omezená na $[a,b]$. Je-li $I \subseteq [a,b]$ interval, pak $\sup_I (f+g) \leq \sup_I f + \sup_I g$, $\inf_I (f+g) \leq \inf_I f + \inf_I g$. Proto pro libovolné dělení $D$ intervalu $[a,b]$ platí

$$s(f,D) + s(g,D) \leq s(f+g,D) \leq S(f+g,D) \leq S(f,D) + S(g,D).$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a,b]$ tak, že $\ni (D_n) \to 0$ (a $D_{n+1}$ jemnější než $D_n$). Podle věty výše

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n) + S(g,D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,dx + (R)\int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} s(f,D_n) + s(g,D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,dx + (R)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Spolu s nerovností výše je to

$$\lim_{n\to\infty} s(f+g,D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f+g,D_n) \overset{\text{POLICIE}}{=} (R)\int_a^b f(x)\,dx + (R)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Tedy podle věty výše $f+g \in R([a,b])$ a $(R)\int_a^b f+g = (R)\int_a^b f + (R)\int_a^b g$. $\square$