Příklad (3.1 – Proces obnovy (třeba žárovek))
Buď $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s $\mathbb{E}L_i \in \mathbb{R}^+$. Náhodnou veličinu L_i můžeme interpretovat jako dobu životnosti i-té žárovky (která, když přestane fungovat, je okamžitě nahrazena novou žárovkou). Pro $t > 0$ definujeme

$$N_t = \sup\left\{N \geq 0 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{N} L_i \leq t\right\},$$

počet žárovek použitých do času t. Dokažte, že $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}L_1}$ skoro jistě.

Co tento výsledek říká pro případ Poissonova procesu?

Řešení
Jelikož L_i jsou doby, můžeme předpokládat, že jsou nezáporné. Pak můžeme použít SZVČ pro stejně rozdělené náhodné veličiny, jelikož $\mathbb{E}|L_i| = \mathbb{E}L_i \in \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, L_i jsou nezávislé a stejně rozdělené. Tedy $\frac{\sum_{i=1}^n L_i}{n} \to \mathbb{E}L_1$ skoro jistě. Tudíž $\exists M : P(M) = 1$, že $\forall \omega \in M$: $\frac{\sum_{i=1}^n L_i(\omega)}{n} \to \mathbb{E}L_1(\omega)$. Z definice limity dostaneme

$$\forall \omega \in M \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : \left|\frac{\sum_{i=1}^n L_i}{n} - \mathbb{E}L_1\right| < \varepsilon,$$

po vynásobení n: $|\sum_{i=1}^n L_i - n \cdot \mathbb{E}L_1| < n \cdot \varepsilon$.

Pro libovolné dostatečně malé ε a libovolné dostatečně velké[a] t můžeme pak omezit $N_t \in [n_-, n_+]$, kde n_- je nejmenší n takové, že pro větší n už se započítáním maximální „chyby“ může $\sum_{i=1}^n L_i$ překonat t (menší n to být nemohou, protože N_t je supremum z těch n, kdy $\sum_{i=1}^n L_i$ nepřekoná t). Obdobně n_+ je největší n, pro které i se započítáním „chyby“ $\sum_{i=1}^n L_i$ ještě nepřekoná t. Tedy

$$n_- = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (1+n)\mathbb{E}L_1 + \varepsilon \cdot (n+1) > t\} = \min\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; (1+n) > \frac{t}{\varepsilon + \mathbb{E}L_1}\right\},$$

$$n_+ = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n\mathbb{E}L_1 - \varepsilon \cdot n < t\} = \max\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; n < \frac{t}{-\varepsilon + \mathbb{E}L_1}\right\}.$$

Tj. $N_t \in \left[\frac{t}{\varepsilon+\mathbb{E}L_1} - 1, \frac{t}{-\varepsilon+\mathbb{E}L_1}\right]$, tudíž $\frac{N_t}{t} \in \left[\frac{1}{\varepsilon+\mathbb{E}L_1} - \frac{1}{t}, \frac{1}{-\varepsilon+\mathbb{E}L_1}\right]$. Tedy (za předpokladu, že limita existuje[b]) $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \in \left[\frac{1}{\varepsilon+\mathbb{E}L_1}, \frac{1}{-\varepsilon+\mathbb{E}L_1}\right]$, jelikož t můžeme volit libovolně velké. Nakonec protože můžeme volit libovolně malé $\varepsilon > 0$, tak $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \in \left[\frac{1}{\mathbb{E}L_1}, \frac{1}{\mathbb{E}L_1}\right]$, tudíž

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}L_1}.$$

Pro Poissonův proces to znamená, že jeho intenzita je převrácenou hodnotou střední hodnoty délky čekání na další změnu.

[a] Například můžeme brát $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\mathbb{E}L_1$ a $t \geq \frac{n_0}{2}\mathbb{E}L_1$, kde n_0 je už pro to dané ε.

[b] Existuje, protože místo limity můžeme vzít lim sup a lim inf a stejně jako pro limitu pro ně dokázat, že se rovnají $\frac{1}{\mathbb{E}L_1}$.

Příklad (3.2 – Paradox doby čekání)
Buď $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ stejně jako v předchozí úloze. (V kontextu paradoxu doby čekání mohou L_i reprezentovat doby čekání na příjezd dalšího autobusu do zastávky.) Pro $s > 0$ označme $L_{(s)}$ dobu životnosti součástky fungující v čase s. Dokažte následující tvrzení:

Pro každou měřitelnou funkci $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, pro kterou je $\mathbb{E}(L_1 \cdot g(L_1)) \in \mathbb{R}$, platí

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t g(L_{(s)})ds = \frac{\mathbb{E}(L_1 \cdot g(L_1))}{\mathbb{E}L_1} \qquad \text{skoro jistě.}$$

Pro $g = \mathrm{id}$ to speciálně znamená, že pro velké t doba životnosti součástky kontrolované v náhodném okamžiku v intervalu $[0, t]$ je přibližně rovna $\frac{\mathbb{E}L_1^2}{\mathbb{E}L_1}$, což je větší než $\mathbb{E}L_1$ (pokud tedy L_1 není konstanta skoro jistě). Porovnejte tento výsledek s příkladem ze sedmého prosemináře, kde $L_i \sim \mathrm{Exp}$.

Důkaz
Z definic a toho, že g je nezáporná (speciálně zmenšením horní meze se integrál nezvětší a zvětšením horní meze se nezmenší) víme, že

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t} L_i g(L_i) \le \frac{1}{t}\int_0^t g(L_{(s)})ds \le \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t+1} L_i g(L_i).$$

Také si můžeme všimnout, že $\lim_{N_t\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N_t} L_i g(L_i)}{N_t} = \mathbb{E}(L_1 g(L_1))$ skoro jistě, neboť $L_i g(L_i)$ jsou nezávislé (a nezáporné) stejně rozdělené náhodné veličiny s existující střední hodnotou (tedy i existující střední hodnotou absolutní hodnoty těchto veličin), takže z SZVČ pro stejně rozdělené náhodné veličiny rovnost platí.

Z předchozí úlohy, aritmetiky limit a limity složené funkce (tedy spíše nějaké triviální epsilon delta gymnastiky, protože máme diskrétní hodnoty) máme (skoro jistě, protože předchozí úloha i SZVČ má limitu skoro všude a průnik dvou jistých jevů je jev jistý)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N_t} L_i g(L_i)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N_t} L_i g(L_i)}{N_t} = \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \cdot \lim_{N_t\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N_t} L_i g(L_i)}{N_t} = \frac{\mathbb{E}(L_1 g(L_1))}{\mathbb{E}L_1}.$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t+1}{t} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N_t+1} L_i g(L_i)}{N_t+1} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{N_t}{t} + \frac{1}{t}\right) \cdot \lim_{N_t\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N_t} L_i g(L_i)}{N_t} = \frac{1}{\mathbb{E}L_1} \cdot \mathbb{E}(L_1 g(L_1)).$$

Tedy podle věty o dvou strážnících máme $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t g(L_{(s)})ds = \frac{\mathbb{E}(L_1 \cdot g(L_1))}{\mathbb{E}L_1}$ skoro jistě. □

Řešení (Porovnání)
Na rozdíl od výsledku v příkladu ze sedmého prosemináře nezáleží jen na střední hodnotě, ale záleží i na rozptylu (/ druhém momentu). Speciálně pro „placaté“ rozdělení budeme ve střední hodnotě čekat na autobus velmi dlouho, i když má krátkou střední hodnotu intervalu.