Příklad (10.1)

Uvažujme reálnou matici $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Spočítejte singulární rozklady matic A, A^T, AA^T a A^TA.

Řešení (Počítáno Wolfram + Matlab)
Nejdříve spočítáme singulární rozklad matice $A^* = A^T$: Spočítáme vlastní čísla a vlastní vektory AA^T, vlastní čísla jsou $4, 4, 28$, tedy jejich odmocniny jsou $2, 2, 2\sqrt{7}$, odpovídající vlastní vektory (normované k 1) pak $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ a $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^T$. To je druhá báze. První spočítáme jako obrazy (násobení maticí) této vynásobené příslušnými odmocninami vlastních čísel, tedy $\frac{5}{2\sqrt{21}}(1, 1, 1, 3/5)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1, 0)$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0)$.

První matice přechodu báze má ve sloupcích prostě vektory báze, diagonální matice má na diagonále odmocniny a druhá matice přechodu je inverzní matice k matici, která má ve sloupcích vektory báze. Tedy

$$A^T = A^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{2\sqrt{21}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{2\sqrt{21}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{2\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{21}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} = UDV.$$

Rozklad matice A je pak jednoduše $\left(A^T\right)^T = (UDV)^T = V^TDU^T$.

Příklad (9.2)
TODO!