1 Úvod

Poznámka (Domluva)
$\mathbb{N}$ jsou přirozená čísla s 0. n značí přirozené číslo.

Dále se probírali základy značení a teorie množin.

Definice 1.1 (Základy)

Základem výrokové logiky je 5 symbolů (2 hodnoty + 3 logické spojky): $\top\bot\neg\wedge\vee$ = pravda, lež, negace, a, nebo.

Dále jsou to výrokové atomy z nějaké abecedy. Libovolný výrok je pak konečným aplikováním logických spojek.

Definice 1.2 (Pravdivostní ohodnocení)

Pravděpodobnostní ohodnocení je zobrazení t z prvovýroků do $\{0, 1\}$. Toto zobrazení lze jednoznačně rozšířit na t' na všechny výroky:

$$t'(\top) = 1, t'(\bot) = 0, t'(\neg a) = 1-t'(a), t'(a\vee b) = \max\{t'(a), t'(b)\}, t'(a\wedge b) = \min\{t'(a), t'(b)\}$$

Definice 1.3

Pomocí pravdivostního ohodnocení můžeme zavést implikaci (spojka mezi premisou (antecedent) a závěrem (konsekvent)).

Definice 1.4 (Tautologie)

p je tautologie (notace $\models p$) $\equiv t(p) = 1$ pro všechna $t : A \to \{0, 1\}$. p je splnitelné $\equiv$ existuje $t : A \to \{0, 1\}$ takové, že $t(p) = 1$.

Lemma 1.1 (Zákony inempotence, komutativity, asociativity, distributivity, absorbce, DeMorganovy)

Viz skripta.

Definice 1.5 (Model)

Model (koho, čeho) Σ (výrokové teorie) je každé pravděpodobnostní ohodnocení t, které přiřazuje 1 všem výrokům ze Σ. Říkáme, že p je tautologický důsledek Σ (píšeme $\Sigma \models p$, říkáme p vyplývá ze Σ) $\equiv t(p) = 1$ pro všechny modely t (koho čeho) Σ.

Poznámka
$\models p$ je totéž, co $\emptyset \models p$.

Lemma 1.2

Vlastnosti $\models$. Viz skripta.

Definice 1.6 (Arita)

Mějme množinu symbolů F a zobrazení $a : F \to \mathbb{N}$. Říkáme, že symbol $f \in F$ má aritu n $\equiv a(f) = n$.

Řekněme, že slovo je přijatelné $\equiv$ TODO.

Definice 1.7 (Arita logických symbolů)

Aritu symbolů ar definujeme pro $F = A \cup \{\top, \bot, \neq, \vee, \wedge\}$ jako $ar(x) = 0, x \in A \cup \{\top, \bot\}$, $ar(\neq) = 1$, $ar(\vee, \wedge) = 2$.

Lemma 1.3

Buďte $t_1, \ldots, t_m$ a $u_1, \ldots, u_n$ jsou přijatelná slova a w libovolné slovo tak, že $t_1 \ldots t_m w = u_1$–u_n. Potom $m \leq n$, $t_i = u_i$ pro $i \in [m]$ a $w = u_{m+1} \ldots u_n$.

Důkaz
Indukcí podle velikosti $u_1 \ldots u_n$. □

Definice 1.8 (Modus Ponens (= MP = odvozovací pravidla))

Z p a $p \implies q$, odvodíme q.

Definice 1.9 (Důkaz)

Formální důkaz (či důkaz) p z Σ je sekvence $p_1, \ldots, p_n$, kde $n \geq 1$ a $p_n = p$ tak, že $\forall k \in [n]$: buď $p_k \in Sigma$, nebo p_k je výrokový axiom (viz skripta), nebo $\exists i, j \in [k-1]$ tak, že p_k lze odvodit pravidlem MP z p_i a p_j.

Říkáme, že p je dokazatelné ze Σ, a značíme $\Sigma \vdash p$

Tvrzení 1.4

Pokud $\Sigma \vdash p$, pak $\Sigma \models p$.

Důkaz
Jednoduchý. □

Věta 1.5 (O úplnosti (1. znění))

$$\Sigma \vdash p \Leftrightarrow \Sigma \models p.$$

Věta 1.6 (Kompaktnost logiky)

Pokud $\Sigma \models p$*, pak existuje konečná podmnožina* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *tak, že* $\Sigma_0 \models p$*.*

Důkaz
Vyplývá z předchozí věty □

Definice 1.10 (Konzistentnost)

Říkáme, že Σ je nekonzistentní, pokud $\Sigma \vdash \bot$, jinak (pokud $\Sigma \nvdash \bot$) je konzistentní.

Věta 1.7 (O úplnosti (2. znění))

Σ *je konzistentní právě tehdy, když má model.*

Důsledek
Σ má model $\Leftrightarrow$ každá konečná podmnožina Σ má model.

Lemma 1.8 (Dedukce)

Předpokládejme $\Sigma \cup \{p\} \vdash q$*. Potom* $\Sigma \vdash p \implies q$*.*

Důkaz (Indukcí)
Pokud je q výrokový axiom, pak $\Sigma \vdash q$ a jelikož $q \implies (p \implies q)$ je výrokový axiom, MP říká $\Sigma \vdash p \implies q$. Pokud $q \in \Sigma \cup \{p\}$, pak buď TODO □

Důsledek
$\Sigma \vdash p$ tehdy a pouze tehdy, když $\Sigma \cup \{\neg\}$ je nekonzistentní.

Důkaz
$\implies$: Předpokládejme, že $\Sigma \vdash p$. Jelikož $p \implies (\neg p \implies \bot)$ je výrokový axiom, můžeme 2krát použít MP a získat $\Sigma \cup \{p\}$ TODO □

Důsledek
Z druhého znění věty o úplnosti vyplývá první znění.

Definice 1.11

Říkáme, že Σ je kompletní (úplná, ale s větou o úplnosti nemá nic společného), pokud Σ je konzistentní a pro všechna p je buď $\Sigma \vdash p$ nebo $\Sigma \vdash \neg p$.

Lemma 1.9 (Lindenbaum)

Nechť Σ je konzistentní. Pak existuje kompletní Σ' tak, že $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

Důkaz
Zornovo lemma. TODO. Pokud je axiomů konečně, tak můžeme udělat důkaz bez Zornova lemmatu. □

Definice 1.12 (Pravdivostní ohodnocení v závislosti na Σ)

$t_\Sigma : A \to \{0, 1\}$, $t_\Sigma(a) = 1$, pokud $\Sigma \vdash a$, jinak $t_\Sigma(a) = 0$.

Lemma 1.10

Předpokládejme, že Σ je kompletní, potom pro každé p máme

$$\Sigma \vdash p \Leftrightarrow t_\Sigma(p) = 1.$$

Nevoli t_Σ je model Σ.

Důkaz
Indukcí podle počtu spojek. TODO. □

2 Predikátorová logika

Definice 2.1 (Jazyk)

Jazyk (L) je disjoin sjednocení množiny relací (L^r) (každé relaci $R \in L^r$ přiřadíme aritu $a(R) \in \mathbb{N}$) a množiny funkčních symbolů (L^f) ($F \in L^f$ má aritu $a(F) \in \mathbb{N}$).

Definice 2.2 (Struktura)

Struktura $\mathcal{A}$ pro L je trojice $(A, (R^{\mathcal{A}})_{R \in L^r}, (F^{\mathcal{A}}_{F \in L^f}))$ sestávající z množiny A (tzv. nosič), pro každou m-ární relaci $R \in L^r$ máme její vyjádření $R_A \in A^m$.

Definice 2.3 (Podstruktura, zúžení)

$\mathcal{X}$ je podstruktura struktury $\mathcal{Y}$, značíme $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, pokud $X \subseteq Y$ a všechny operace jsou uzavřené na relace i funkce. Taktéž říkáme, že $\mathcal{Y}$ je rozšíření $\mathcal{A}$.

Zúžení funkce F na podstrukturu $\mathcal{X}$, značené $F|_{\mathcal{X}}$ je, jak bychom čekali.

Definice 2.4 (Homomorfismus)

Ať $\mathcal{A}$ a a $\mathcal{B}$ jsou struktury (pro tentýž jazyk). Homomorfismus $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je zobrazení $h : A \to B$ tak, že $\forall m$-nární $R \in L^r$ a každé $(a_1, \ldots, a_m) \in A^m$ máme $(a_1, \ldots, a_m) \in R^{\mathcal{A}} \implies (ha_1, \ldots, ha_m) \in R^{\mathcal{B}}$. $\forall n$-nární $F \in L^f$ a každé $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ je $h(F^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = F^{\mathcal{B}}(ha_1, \ldots, ha_n)$.

Definice 2.5 (Silný homomorfismus)

Pokud nahradíme implikaci v předchozí definici ekvivalencí, dostaneme tzv. silný homomorfismus. Speciálním případem je tzv. vnoření, TODO.

Definice 2.6 (Kongruence)

Kongruence je ekvivalence taková, že pokud jsou v relaci nějaké prvky, tak jsou v relaci i kongruentní prvky. Stejně tak obraz kongruentních prvků je kongruentní prvek k obrazu původních.

Definice 2.7 (Kvocient / faktorstruktura)

Nechť $\mathcal{A}$ je struktura a $\sim$ kongruence. Potom $\mathcal{A}/\sim$, tzv. faktostruktura, je struktura, kde nosná množina je $A/\sim$ a relace a funkce jsou přepsané tak, aby nové prvky byly v relaci právě tehdy, pokud byly jim odpovídající původní prvky.

2.1 Proměnné a formule

Definice 2.8 (Proměnné)

Proměnné: $Var = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ je spočetná (nekonečná) množina.

Poznámka
Většinou by nevadila ani nespočetná. Naopak se spočetná by nám rozbíjela skládání výroků.

Definice 2.9 (Termy)

L-term je slovo na abecedě $L^f \cup Var$ získané jako: každá proměnná je L-term a kdykoliv je $F \in L^f$ n-nární relace a $t_1, \ldots, t_n$ L-termy, pak je $Ft_1 \ldots t_n$ L-term.

Definice 2.10 (Uzavřený term)

Uzavřený term se nazývá ten term, který neobsahuje proměnné.

Definice 2.11 (Generátory)

Mějme strukturu a množinu (oindexovanou) prvků z ní. Pokud tuto množinu uzavřeme na relace a funkce, pak dostaneme podstrukturu, která se nazývá generovaná danou množinou prvků (a ty se nazývají generátory).

Definice 2.12 (Symboly)

V predikátorové logice máme: $\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, =, \forall, \exists$.

Definice 2.13 (Atomická formule)

Atomická L-formule je slovo z abecedy $L \cup Var \cup \{\top, \bot, =\}$, které je tvaru buď $\top, \bot$, nebo termy jsou v relaci ($Rt_1 \dots t_m$, kde $R \in L^r$ je m-nární relace a $t_1, \dots, t_m$ jsou L-termy), nebo $= t_1 t_2$ (kde t_1 a t_2 jsou L-termy).

Definice 2.14 (Formule)

L-formule je slovo na abecedě $L \cup Var \cup \{\top, \bot, \neg, \vee, \wedge, =, \exists, \forall\}$, které je buď atomická formule, nebo $\neg\varphi, \vee\varphi\psi, \wedge\varphi\psi$, kde φ a ψ jsou L-formule, nebo $\exists x\varphi, \forall x\varphi$, kde φ je formule a x je proměnná.

Definice 2.15 (Podformule)

Podformule je podslovo formule, které je také formule.

Definice 2.16 (Vázaný a volný výskyt)

Pokud se proměnná vyskytuje v podformuli tvaru $\exists x\varphi$ nebo $\forall x\varphi$, pak se nazývá vázaná (má na tomto místě vázaný výskyt), pokud se vyskytuje jinde, pak je volná (volný výskyt).

Definice 2.17 (Sentence (= uzavřená formule))

Sentence je formule, kde všechny výskyty proměnné jsou vázané.

Poznámka

Píšeme $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, abychom zvýraznili, že právě proměnné $x_1, \dots, x_n$ jsou volné v φ.

Do formule dosazujeme ($\varphi(t_1/x_1, \dots, t_n/x_n)$) naráz a nahrazujeme všechny volné výskyty dané proměnné.

Místo $\varphi(t_1/x_1, \dots, t_n/x_n)$ budeme psát $\varphi(t_1, \dots, t_n)$.

Lemma 2.1

Nechť φ je L-formule, $x_1, \ldots, x_n$ různé proměnné a $t_1, \ldots, t_n$ jsou L-termy. Potom $\varphi(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n)$ je L-formule. Pokud $t_1, \ldots, t_n$ nemají volné proměnné a $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, potom $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ je L-sentence.

Definice 2.18

Jazyk rozšiřujeme o tzv. jména, tj. konstantní symboly reprezentující prvky, o kterých se chceme bavit. Tzv. expanze struktury.

Definice 2.19 (Pravdivost (Tarského definice splňování))

L_A-sentence σ je pravdivá v L-struktuře A (píšeme $A \models \sigma$ a čteme σ je pravdivá / splněna v A) takto:

- $A \models \top$ a $A \not\models \bot$,
- $A \models Rt_1 \ldots t_m$ právě tehdy, pokud $(t_1^A, \ldots, t_m^A) \in R^A$ pro m-nární relaci $R \in L^r$ a L_A termy bez volných proměnných $t_1, \ldots, t_m$,
- $A \models t_1 = t_2$ právě tehdy, když $t_1^A = t_2^A$ pro L_A-termy bez volných proměnných t_1, t_2,
- $\sigma = \neg\sigma_1$, potom $A \models \sigma$ právě tehdy, pokud $A \not\models \sigma_1$,
- $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2$, potom $A \models \sigma$ právě tehdy, pokud $A \models \sigma_1$ nebo $A \models \sigma_2$,
- $\sigma = \sigma_1 \wedge \sigma_2$, potom $A \models \sigma$ právě tehdy, pokud $A \models \sigma_1$ a $A \models \sigma_2$,
- $\sigma = \exists x \varphi(x)$, potom $A \models \sigma$ tehdy a jen tehdy, když $A \models \varphi(\underline{a})$ pro nějaké $a \in A$,
- $\sigma = \forall x \varphi(x)$, potom $A \models \sigma$ tehdy a jen tehdy, když $A \models \varphi(\underline{a})$ pro všechna $a \in A$,

Definice 2.20

$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ definuje množinu $\varphi^A = \{(a_1, \ldots, a_n) : A \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)\}$.

Pokud existuje L-formule definující $S \subseteq A^n$, potom říkáme, že formule je 0-definovatelná v A.

Definice 2.21

Formule se nazývá pozitivní, pokud neobsahuje negaci ($\neg$).

Definice 2.22

Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dvě L-struktury, $C \subseteq A$ a $h : C \to B$ zobrazení. Řekneme, že h je $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-podobnost, pokud pro každou L_C-sentenci σ platí $A \models \sigma \Leftrightarrow B \models \sigma_h$. Existuje-li nějaká

$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-podobnost (kde $C \neq \emptyset$), říkáme, že $\mathcal{A}$ je elementárně ekvivalentní s $\mathcal{B}$, píšeme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Je-li dokonce $C = A$, říkáme, že h je elementární vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$.

Tvrzení 2.2

Buďte $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dvě L-struktury a $h : A \to B$ izomorfismus. Pak h je elementární vnoření.

Důkaz

Již víme, že $h(t^{\mathcal{A}}) = t_h^{\mathcal{B}}$ pro každý uzavřený L_A-term t. Tvrzení dokážeme indukcí... $\square$

Definice 2.23

Říkáme, že $\mathcal{A}$ je model Σ, když $\mathcal{A} \mapsto \sigma$ pro všechny $\sigma \in \Sigma$.

Definice 2.24

Říkáme, že σ vyplývá z Σ (píšeme $\Sigma \models \sigma$), pokud σ je pravdivý v každém modelu (koho, čeho) Σ.

Definice 2.25

Formule σ je validní v $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \varphi$, jestliže všechny $\mathcal{A}$-instance jsou pravdivé v $\mathcal{S}$.

Definice 2.26 (Axiomy predikátorové logiky)

TODO

Definice 2.27 (Axiomy rovnítka)

TODO

Definice 2.28

t je substituovatelný za y v φ, jestliže žádná proměnná (žádný její výskyt) v t se nestane vázanou.

Definice 2.29

Qvantifikátorové axiomy v L jsou formule $\varphi(t/y) \implies \exists y \varphi$ a $\forall y \varphi \implies \varphi(t/y)$.

Věta 2.3 (O korektnosti predikátorového počtu)

Každý logický axiom v L je validní v každé L-struktuře.

Lemma 2.4

Mějme nějaké atomy $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, které nejsou v L, a buďte $\varphi_i = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$, $\forall 1 \leq i \leq n$. Definujeme pravdivostní ohodnocení $t : \{\alpha_1, \ldots, \alpha\} \to \{0, 1\}$ tak, že $t(\alpha_i) = 1$ pokud $\mathcal{A} \models_i (a_1, \ldots, a_m)$. Potom $p(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ je L-formule a TODO.

Definice 2.30 (L-tautologie)

L-tautologie je formule tvaru $p(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ pro nějakou tautologii $p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Prop\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ a formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Definice 2.31 (Logická pravidla)

Modus Ponens (MP): z φ a $\varphi \implies \psi$ odvodíme ψ.

Generalizační pravidla (G): pokud se proměnná x nevyskytuje volně v φ, potom z $\varphi \implies \psi$ odvodíme $\varphi \implies x\psi$ a z $\psi \implies \varphi$ odvodíme $\exists x\psi \implies \varphi$.

Definice 2.32 (Důkaz)

Formální důkaz, nebo prostě důkaz φ z Σ je posloupnost $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ formulí, kde $n \geq 1$ a $\varphi_n = \varphi$, takových, že $\forall k \in [n]$: je buď $\varphi_k \in \Sigma$ nebo φ_k je logický axiom, nebo φ_k může být odvozen z φ_i a φ_j (φ_j) pomocí MP (G), pro nějaké i, j. Značíme $\Sigma \vdash \varphi$.

Věta 2.5 (Kompletnost predikátorové logiky)

$$\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models \varphi.$$

Věta 2.6 (Kompaktnost)

Pokud $\Sigma \models \sigma$, pak existuje konečná podmnožina Σ_0 (koho, čeho) Σ, že $\Sigma_0 \models \sigma$.

Definice 2.33

Σ je konzistentní, pokud $\Sigma \nvdash \bot$, jinak (pokud $\Sigma \vdash \bot$) ji nazýváme nekonzistentní.

Lemma 2.7

Ať $\Sigma \vdash \varphi$. Potom $\Sigma \vdash \forall x\varphi$..

Důkaz (Náznak)
Použijeme MP a G na konkrétní L-tautologie. □

Lemma 2.8 (Dedukce)

Nechť $\Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \varphi$, potom $\Sigma \vdash \sigma \implies \varphi$.

Důkaz
Indukcí. □

Věta 2.9

Pokud každá konečná podmnožina (koho, čeho) Σ má model, pak i Σ má model.

Lemma 2.10

Předpokládejme $\Sigma \vdash \varphi$ a t je substituovatelné za x v φ. Potom $\Sigma \vdash \varphi(t/x)$.

Důkaz

MP $\Sigma \vdash \forall x \varphi$ s $\forall x \varphi \implies \varphi(t/x)$. □

Lemma 2.11 (Důsledky axiomů rovnosti)

TODO.

Definice 2.34

Ať L_T je množina L-termů bez proměnných. Definujeme binární relaci $\sim_\Sigma$ na T_L:

$$t_1 \sim_\Sigma t_2 \Leftrightarrow \Sigma \vdash t_1 = t_2.$$

Lemma 2.12

$\sim_\Sigma$ je relace ekvivalence.

Definice 2.35 (Kanonická struktura pro Σ)

$A_\Sigma := T_L / \sim_\Sigma$. R^{A_Σ} nebo F^{A_Σ} je potom relace nebo funkce, přijímající bloky ekvivalence.

Definice 2.36

Kompletní teorie je konsistentní a pro každou σ lze v této teorii dokázat σ nebo $\neg\sigma$.

Lemma 2.13 (Lindenbaum)

Ať Σ je konzistentní. Potom $\Sigma \subseteq \Sigma'$ pro nějaké úplné Σ'.

Definice 2.37

Σ (henkinovský) svědek sentence $\exists x \varphi(x)$ je konstantní term $t \in T_L$ tak, že $\Sigma \vdash \varphi(t)$. Říkáme, že Σ je henkinovská teorie (má svědky), jestliže existuje svědek pro každou sentenci $\exists x \varphi(x)$.

Věta 2.14

Nechť L má konstantní symbol a předpokládejme Σ je konzistentní. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní: 1) $\forall\sigma$ máme $\Sigma \vdash \sigma \Leftrightarrow \mathcal{A}_\Sigma \models \sigma$ a 2) Σ je kompletní a má svědky.

Lemma 2.15

Ať Σ je množina L-sentencí a c je konstantní symbol, který není v jazyku L. Definujme $L_c = L \cup \{c\}$. Potom když $\varphi(y)$ je L-formule a $\Sigma \vdash_{L_c} \varphi(c)$, tak $\Sigma \vdash_L \varphi(y)$.

Lemma 2.16

Nechť Σ je konzistentní a $\Sigma \vdash \exists y\varphi(y)$. Ať c je konstanta, která není v L. Položme $L_c := L \cup \{c\}$. Potom $\Sigma \cup \{\varphi(c)\}$ je konzistentní množina L_c-sentencí. Obdobně pro více c_i.

Lemma 2.17 (Rozšíření teorie o svědky)

TODO!

Lemma 2.18

Pokud máme jazyky $L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots$ a konzistentní teorie $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \dots$. Potom sjednocení Σ_∞ je konzistentní množina L_∞-sentencí.

2.2 Prenexní tvar

TODO?

Definice 2.38 (Prenexní tvar)

Formule je v prenexním tvaru, pokud je tvaru $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\varphi$, kde $x_1, \dots, x_n$ jsou různé proměnné, $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ a φ je bez kvantifikátorů.

3 Trochu teorie modelů

Věta 3.1 (Löwenheim-Skolem (spočetná verze))

Nechť L je spočetný jazyk a Σ má model. Potom Σ má spočetný model.

Důkaz
Jelikož množina proměnných je spočetná a L je spočetný, tak i množina L-sentencí je spočetná. Tedy i
$$L \cup \{c_\sigma | \Sigma \vdash \sigma \wedge \sigma = \exists x \varphi(x)\}$$
je spočetný, tedy přidání svědků nezvětší L nad spočetnost. To znamená, že množina L_∞-termů je spočetná, tj. $\mathcal{A}_{\Sigma_\infty}$ je spočetná a $\mathcal{A}_{\Sigma_\infty}|_L$ je spočetný model Σ. □

Tvrzení 3.2 (Vaughtův test)

Nechť L je spočetné a Σ má model a všechny spočetné modely Σ jsou isomorfní. Pak Σ je kompletní.

Důkaz
Kdyby nebyla kompletní, pak existuje σ tak, že $\Sigma \nvdash \sigma$ a $\Sigma \nvdash \neg\sigma$. Potom z Löwenheim--Skolemovy věty existují 2 spočetné modely, ve kterých je σ (v prvním) a $\neg\sigma$ (ve druhém), které z Σ dostaneme tak, že přihodíme $\neg\sigma$ a σ. Tedy máme 2 izomorfní modely, v nichž v jednom je $\neg\sigma$ a v druhém σ. Spor. □

Věta 3.3 (Löwenheim-Skolem (obecná verze))

Nechť L je jazyk mohutnosti $\varkappa$ a Σ má nekonečný model. Potom Σ má model mohutnosti $\varkappa$.

Důkaz
Podobně jako předchozí, jen přidáme $c_\lambda \neq c_\mu$, abychom měli právě mohutnost $\varkappa$. □

Tvrzení 3.4 (Vaughtův test)

Nechť L je mohutnosti nejvýše $\varkappa$, Σ má model, všechny modely jsou nekonečné, a všechny modely Σ mohutnosti $\varkappa$ jsou isomorfní. Pak Σ je kompletní.

Definice 3.1

Σ' se nazývá konzervativní nad Σ, pokud pro každou L-sentenci σ je
$$\Sigma' \vdash_{L'} \sigma \Leftrightarrow \Sigma \vdash_L \sigma.$$

Tvrzení 3.5

Pokud $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ je L-formule. f_φ je n-ární funkční symbol, který není v L a pro který položíme $L' := L \cup \{f_\varphi\}$ a
$$\Sigma' := \Sigma \cup \left\{\forall x_1 \ldots \forall x_n (\exists y \varphi(x_1, \ldots, x_n, y) \implies \varphi(x_1, \ldots, x_n, f_{\varphi(x_1,\ldots,x_n)}))\right\}$$

TODO?

Definice 3.2 (Presburgerova aritmetika)

Uvažujme jazyk $K = \{0, S, +\}$, kde 0 je konstantní symbol, S je unární funkční a + binární funkční symbol. Presburgerova aritmetika je K-teorie obsahující právě následující axiomy:

1. $Sx \neq 0$;
2. $Sx = Sy \implies x = y$;
3. $x \neq 0 \implies \exists y : x = Sy$;
4. $x + 0 = x$;
5. $x + Sy = S(x + y)$;

a navíc schéma axiomů indukce (pro každou K-formuli φ):

$$(\varphi(0/x) \wedge \forall x(\varphi(x) \implies \varphi(Sx/x))) \implies \forall x\varphi.$$

Věta 3.6

Presburgerova aritmetika je kompletní.

Definice 3.3 (Robinsonova a Peanova aritmetika (tj. včetně $\cdot$))

Rozšíříme K na $L = K \cup \{\cdot\}$, kde $\cdot$ je binární funkční symbol, a přidejme k předchozím axiomům navíc $x \cdot 0 = 0$ a $x \cdot Sy = x \cdot y + x$. Navíc schéma indukce nyní uvažujme pro všechny L-formule. Výsledné L-teorii se říká Peanova aritmetika (P nebo PA). Její (konečnou) podteorii, která vznikne vypuštěním všech axiomů indukce, nazýváme Robinsonova aritmetika (Q či RA).

Poznámka
V RA nelze dokázat ani asociativitu, ani komutativitu + a $\cdot$, ani vztah $\forall x : x \neq Sx$.

Definice 3.4

Buďte x, y dvě různé proměnné a φ nějaká L-formule. Formuli $\forall x(x \leq y \implies \varphi)$ zkráceně zapisujeme jako $\forall x \leq y\varphi$. Formuli $\exists x(x \leq y \implies \varphi)$ zkráceně zapisujeme jako $\exists x \leq y\varphi$. Formuli nazveme omezenou, pokud se v rámci její rekurzivní definice v kvantivikačním kroku používá místo $\forall v\varphi$, resp. $\exists v\varphi$, kde v je proměnná, pouze omezená kvantifikace $\forall v \leq z\varphi$ resp. $\exists v \leq z\varphi$, kde z je nějaká proměnná různá od v.

Formuli nazveme Σ_1-formulí, je-li tvaru $\exists x\psi$, kde ψ je omezená.

Věta 3.7 (Σ_1-úplnost RA)

je-li φ uzavřená Σ_1-formule taková, že $\mathbb{N} \models \varphi$, pak $RA \vdash \varphi$.

3.1 Gödelovské kódování

Kóduje veškeré formule do přirozených čísel. (Např. v PA.)

Definice 3.5

Teorii T nazýváme Σ_1-teorií, pokud existuje Σ_1-formule $\tau(x)$ taková, že $\sigma \in T$ právě tehdy, když $N \models \tau(\sigma/x)$.

Věta 3.8 (Autoreferenční lemma)

Nechť $\varphi(y)$ je L-formule. Pak existuje L-sentence psi taková, že $RA \vdash \psi \Leftrightarrow \varphi(\psi/y)$.

TODO Věty o neúplnosti.