Příklad
Dokažte výroky "Má-li relace R na konečné množině vlastnost X, pak má inverzní relace R^{-1} už nutně také vlastnost X," kde $X \in \{$reflexivita, tranzitivita, symetrie, antisymetrie$\}$. Pokud nevíte jak na to, nebojte – podobné příklady budeme dělat na začátku příštího cvika.

Zapišme si definici R^{-1} takto: $\forall x, y : xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x$. A pomocí ní dokážeme, že definice vlastnosti X pro R je ekvivalentní definici vlastnosti X pro R^{-1}.

Důkaz (Reflexivita)

$$(\forall x : xRx) \overset{\boxed{\text{Z definice } R^{-1}\ xRx \Leftrightarrow xR^{-1}x}}{\Longleftrightarrow} (\forall x : xR^{-1}x)$$

□

Důkaz (Tranzitivita)

$$\forall x, y, z : xRy \wedge yRz \implies xRz \overset{\boxed{\text{Z definice } R^{-1}}}{\Longleftrightarrow} \forall x, y, z : yR^{-1}x \wedge zR^{-1}y \implies zR^{-1}xi$$

$$\overset{\boxed{\text{Přeznačíme } x \leftrightarrow z}}{\Longleftrightarrow} \forall x, y, z : yR^{-1}z \wedge xR^{-1}y \implies xR^{-1}z$$

□

Důkaz (Symetrie)

$$\forall x, y : xRy \implies yRx \overset{\boxed{\text{Z definice } R^{-1}}}{\Longleftrightarrow} \forall x, y : yR^{-1}x \implies xR^{-1}y$$

$$\overset{\boxed{\text{Přeznačíme } x \leftrightarrow y}}{\Longleftrightarrow} \forall x, y : xR^{-1}y \implies yR^{-1}x$$

□

Důkaz (Antisymetrie)

$$\forall x, y : xRy \wedge yRx \implies x = y \overset{\boxed{\text{Z definice } R^{-1}}}{\Longleftrightarrow} \forall x, y : yR^{-1}x \wedge xR^{-1}y \implies x = y$$

□