Úvod

Poznámka (Historie)
MP zavedl Maurice Fréchet na podnět Felixe Hausdorffa.

Poznámka
Dále se opakovali metrické prostory.

Definice 0.1 (Baireův prostor)

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \frac{1}{k}$, kde k je první index, že $x_k \neq y_k$.

Poznámka
V Bairově prostoru platí $d(x, y) \leqslant \max(d(x, z), d(z, y))$. Metriky s touto vlastností se nazývají ultrametriky (dříve archimédovské metriky).

Definice 0.2 (Peadická metrika)

(Q, d_p), kde p je prvočíslo:

$$d_p(a, b) = p^{-n}, \frac{a}{b} = p^n \cdot c.$$

Definice 0.3 (Stejnoměrně ekvivalentní)

Metriky jsou stejnoměrně ekvivalentní, jestliže identická zobrazení ($(X, d) \mapsto (X, e)$ a opačně) jsou stejnoměrně spojitá.

Definice 0.4 (Hölderovské zobrazení)

Nechť $\alpha \geqslant 0$. Říkáme, že zobrazení $f : (X, d) \to (Y, e)$ je hölderovské stupně α (nebo α-hölderovské), jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x, y \in X$ platí

$$e(f(x), f(y)) \leqslant k \cdot d^\alpha(x, y)$$

Hölderovské zobrazení stupně 1 se nazývá lipschitzovské. Lipschitzovské zobrazení s konstantou $k < 1$ se nazývá kontrakce.

Tvrzení 0.1

Je-li $f : (X, d) \to (Y, e)$ α-hölderovské pro $\alpha > 0$, pak je f stejnoměrně spojité.

Důkaz
Máme
$$e(f(x), f(y)) \leqslant K d^\alpha(x, y).$$
Chceme
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (d(x, y) < \delta \implies e(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$
Zvolíme $\delta = \sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{K}}$. □

Tvrzení 0.2

Složení f α-hölderovské a g β-hölderovské je $\alpha \cdot \beta$-hölderovská funcke.

Důkaz
$$\varrho(g(f(x)), g(f(y))) \leqslant K e^\beta(f(x), f(y)) \leqslant K(L d^\alpha(x, y))^\beta = K \cdot L^\beta d^{\alpha \cdot \beta}(x, y).$$
□

Důsledek
Složení lipschitzovských zobrazení je lipschitzovské. Z důkazu pak i složení kontrakcí je kontrakce.

Definice 0.5 (Pseudonorma funkce)

Nechť $f : (X, d) \to (Y, e)$. Označíme
$$|f|_\alpha = \inf\{K, e(f(x), f(y)) \leqslant K d^\alpha(x, y)\} = \sup\left\{\frac{e(f(x), f(y))}{d^\alpha(x, y)} | x \neq y\right\}$$

Věta 0.3

Nechť (X, d) je omezený prostor a $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Pak každé α-hölderovské zobrazení na (X, d) je β-hölderovské.

Důkaz
$$e(x, y) \leqslant K d^\alpha(f(x), f(y)) = K d^\beta(x, y) \cdot d^{\alpha - \beta}(x, y) \leqslant K \cdot (\operatorname{diam} f(x))^{\alpha - \beta} d^\beta(x, y).$$
□

Tvrzení 0.4

$f : J \to \mathbb{R}$, J interval v $\mathbb{R}$, $J = (a, b)$, $a \neq -\infty$. Potom
$$f \text{ je stejnoměrně spojitá } \implies \exists F : [a, b) \to \mathbb{R}, \text{ stejnoměrně spojitá}, F|_{(a,b)} = f.$$

Důkaz
Dokázáno na přednášce (jednoduché). □

Věta 0.5

1. *Je-li f α-hölderovská pro $\alpha > 1$ je konstantní.*
2. *Má-li f derivaci, pak je f lipschitzovská právě když je její derivace omezená.*
3. *Lipschitzovská funkce je absolutně spojitá.*

Důkaz

„1.)“$|f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|^\alpha \implies |\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant K|x-y|^{\alpha-1} \implies f'(x) = 0 \implies f = \text{konst}\,.$

$$„2.) \implies “\exists f' na J \wedge |f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y| \implies |\frac{f(x)-f(y)}{x-y}| \leqslant K.$$

$$„2.) \impliedby “|f'(x)| \leqslant K \forall x \in J \implies |f(x)-f(y)| = |f'(c)| \cdot |x-y| \leqslant K(x-y).$$

„3.)“f abs. spoj. : $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : (\forall a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n < b_n \leqslant b : \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta \implies \sum_{i=}^{n}$

f je lips. $\implies |f(x)-f(y)| \leqslant K \cdot |x-y| \implies \sum_{i=1}^{n} |f(a_i)-f(b_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} K(b_i - a_i) = K \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < K\delta < \varepsilon.$

□

Definice 0.6 (Lipschitzovsky ekvivalentní metriky)

Metriky d, e na X se nazývají lipschitzovsky ekvivalentní, jestliže obě identická zobrazení jsou lipschitzovské.

Poznámka
To je ekvivalentní

$$\exists K, L > 0\ \forall x, y \in X : Kd(x,y) < e(x,y) < Ld(x,y).$$

Věta 0.6

Buď $p > 0$. Funkce x^p na $J \subseteq [0, +\infty)$ je lipschitzovská, právě když buď $0 < a < b < +\infty$ nebo $a = 0$ a $p \geqslant 1$ nebo $b = +\infty$ a $p \leqslant 1$.

Věta 0.7

Nechť $\alpha \in (0, 1]$. Pak x^α je α-hölderovská na $[0, +\infty)$.

Důkaz

$$|x^\alpha - y^\alpha| \leqslant K|x-y|^\alpha, \qquad y_0 \geqslant 0, x \geqslant y_0, g(x) = (x-y_0)^\alpha - (x^\alpha - y_0^\alpha) na[y_0, +\infty), g(y_0) = 0,$$

$$g'(x) = \alpha(x-y_0)^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha\left((x-y_0)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}\right) \geqslant 0 \implies \forall x \geqslant y_0 : x^\alpha - y^\alpha \leqslant (x-y)^\alpha.$$

□

Věta 0.8

$$|x^\alpha|_\alpha = \frac{b^\alpha - a^\alpha}{(b-a)^\alpha}, \qquad \alpha \in [0, 1].$$

Důkaz

$\alpha = 0 \implies |x^\alpha|_\alpha = 0$. $a = 0 \overset{?}{\implies} |x^\alpha|_\alpha = 1$. $b = +\infty \overset{?}{\implies} |x^\alpha|_\alpha = 1$. □