Příklad (5.1)
Podrobně odvoďte a sestrojte přirozený kubický spline $S(x)$ interpolující funkci $f(x)$ danou tabulkou

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0	1	0	0

Dále vypočtěte hodnotu $S(1.5)$.

Řešení
Jelikož chceme přirozený spline, tak $S''(x_0) = S''(x_3) = 0$. Z přednášky víme, že

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S''(x_1) \\ S''(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2) \\ f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

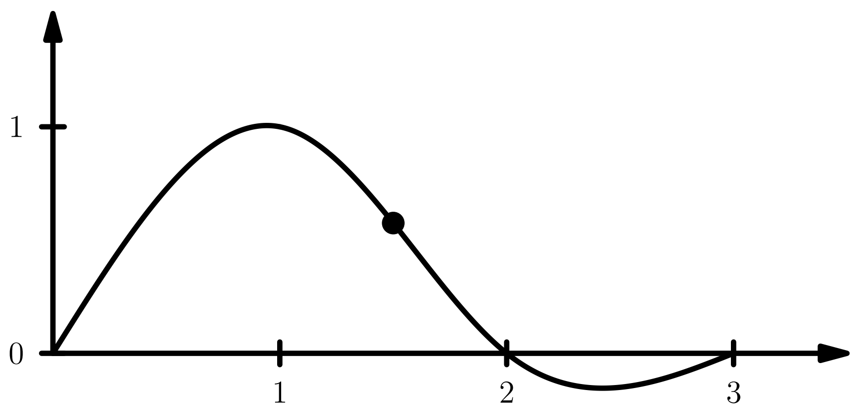
Odečtením čtyřnásobku jedné rovnice od druhé získáme $S''(x_1) = -\frac{18}{5}$ a $S''(x_2) = \frac{12}{5}$. To pak můžeme dosadit do odvození z přednášky:

$$S|_{[x_i,x_{i+1}]} = \frac{(x-x_i)^3}{6h} S''(x_{i+1}) + \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h} S''(x_i) + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{6} \left(S''(x_{i+1}) - S''(x_i) \right) \right) (x - x_i) + f(x_i) - \frac{h^2}{6} S''(x_i)$$

$$S|_{[0,1]} = \frac{(x-0)^3}{6 \cdot 1} \left(-\frac{18}{5} \right) + \frac{(1-x)^3}{6 \cdot 1} 0 + \left(\frac{1-0}{1} - \frac{1}{6} \left(-\frac{18}{5} - 0 \right) \right) (x-0) + 0 - \frac{1^2}{6} 0 = \frac{8}{5} x - \frac{3}{5} x^3$$

$$S|_{[1,2]} = \frac{(x-1)^3}{6 \cdot 1} \frac{12}{5} + \frac{(2-x)^3}{6 \cdot 1} \left(-\frac{18}{5} \right) + \left(\frac{0-1}{1} - \frac{1}{6} \left(\frac{12}{5} + \frac{18}{5} \right) \right) (x-1) + 1 - \frac{1^2}{6} \left(-\frac{18}{5} \right) = x^3 - \frac{24}{5} x^2 + \frac{32}{5} x - \frac{8}{5}$$

$$S|_{[2,3]} = \frac{(x-2)^3}{6 \cdot 1} 0 + \frac{(3-x)^3}{6 \cdot 1} \frac{12}{5} + \left(\frac{0-0}{1} - \frac{1}{6} \left(0 - \frac{12}{5} \right) \right) (x-2) + 0 - \frac{1^2}{6} \frac{12}{5} = -\frac{2}{5} x^3 + \frac{18}{5} x^2 - \frac{52}{5} x + \frac{48}{5}$$



$$S(1.5) = 1.5^3 - \frac{24}{5} 1.5^2 + \frac{32}{5} 1.5 - \frac{8}{5} = \frac{23}{40} = 0.575.$$

Řešení (Odvození)
Jelikož máme málo bodů, můžeme hledat spline přímo (nemusíme zabíhat do obecného vzorce odvozeného pomocí Taylorova polynomu). Chceme kubický spline, tedy na jednotlivých intervalech bude druhá derivace lineární funkce. Navíc $S''(0) = 0 = S''(3)$, tedy jedinou možnost volby máme pro $S''(1)$ a $S''(2)$, volbou těchto dvou bude již S'' dáno. Tedy $S''|_{[0,1]} = S''(1)x$, $S''|_{[1,2]} = (x-1)S''(2) - (x-2)S''(1)$, $S''|_{[2,3]} = -S''(2)(x-3)$. Přidáním integrálu získáme:

$$S'|_{[0,1]} = \frac{x^2}{2}S''(1) + C_1, \qquad S'|_{[1,2]} = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)S''(2) - \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)S''(1) + C_2, \qquad S'|_{[2,3]} = -\left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)S''(2) + C_3.$$

Spline má být $C^2([0,3])$, tedy derivace zleva v bodě se rovná derivaci zprava. Pro body 1 a 2 je to tedy

$$\frac{1}{2}S''(1)x + C_1 = -\frac{1}{2}S''(2) + \frac{3}{2}S''(1) + C_2, \qquad 2S''(1) + \ C_2 = 4S''(2) + C_3.$$

Druhým integrálem dosáhneme

$$S|_{[0,1]} = \frac{x^3}{6}S''(1) + C_1x + \ D_1, \qquad S|_{[1,2]} = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\right)S''(2) - \left(\frac{x^3}{6} - x^2\right)S''(1) + C_2x + D_2, \qquad S|_{[2,3]} = -\left(\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2}\right)S''(2) + C_3x + D_3.$$

Víme, že přírůstek na prvním intervalu je 1, na druhém -1 a na třetím 0, tedy dosadíme krajní body a odečteme

$$\frac{1}{6}S''(1) + C_1 = 1, \qquad \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)S''(2) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{5}{6}\right)S''(1) + C_2 = -1, \qquad -\left(-9 + \frac{14}{3}\right)S''(2) + C_3 = 0.$$

Vyjádříme konstanty:

$$C_1 = 1 - \frac{1}{6}S''(1), \qquad C_2 = -1 + \frac{1}{3}S''(2) - \frac{11}{6}S''(1), \qquad C_3 = -\frac{13}{3}S''(2).$$

A dosadím do podmínek daných rovnostmi prvních derivací:

$$4S''(1) + S''(2) + 12 = 0, \quad S''(1) + 4S''(2) - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad S''(1) = -\frac{18}{5}, \quad S''(2) = \frac{12}{5}.$$

Dosadíme zpět do konstant: $C_1 = \frac{8}{5}$, $C_2 = \frac{32}{5}$, $C_3 = -\frac{52}{5}$.

Nyní můžeme vše dosadit do vyjádření S a doplnit konstanty D_i tak, aby spline procházela chtěnými body:

$$S(0) = D_1 = 0, \qquad S(1) = -\frac{4}{5} - 3 + \frac{32}{5} + D_2 = 1, \qquad S(2) = \frac{56}{5} - \frac{104}{5} + D_2 = 0$$

A získáme

$$S|_{[0,1]} = \frac{8}{5}x - \frac{3}{5}x^3, \qquad S|_{[1,2]} = x^3 - \frac{24}{5}x^2 + \frac{32}{5}x - \frac{8}{5}, \qquad S|_{[2,3]} = -\frac{2}{5}x^3 + \frac{18}{5}x^2 - \frac{52}{5}x + \frac{48}{5}.$$