1 Diferencovatelnost – základní pojmy

Definice 1.1 (Směrové derivace)

X, Y Banachovy prostory, $U \subset X$ (otevřená), $f : U \to Y$, $x \in U$, $h \in X$:

$$\partial_h^+ f(x) = \lim_{t \to 0_+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \qquad \partial_h f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t},$$

pokud limita (v Y) existuje. Je-li $\|h\| = 1$, pak je to směrová derivace.

Poznámka
- $\partial_0 f(x) = \partial_0^+ f(x) = 0$;
- $\alpha > 0 \implies \partial_{ah}^+ f(x) = \alpha \cdot \partial_h^+ f(x)$, má-li alespoň jedna strana smysl;
- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \partial_{\alpha \cdot h} f(x) = \alpha \cdot \partial_h f(x)$, má-li alespoň jedna strana smysl;
- $\partial_{-h} f(x) = -\partial_h f(x)$, má-li alespoň jedna strana smysl;
- $\partial_h f(x)$ existuje $\Leftrightarrow \partial_{-h}^+ f(x) = -\partial_h^+ f(x)$.

Definice 1.2 (Gateauxova derivace)

X, Y Banachovy prostory, $U \subset X$ (otevřená), $f : U \to Y$, f má v bodě x Gateauxovu derivaci $\equiv \exists L \in \mathcal{L}(X,Y)\ \forall h \in X : L(h) = \partial_h f(x)$. Píšeme $f_G'(x) = L$.

Poznámka
Stačí $\forall h \in X : L(h) = \partial_h^+ f(x)$. Znamená to, že $h \mapsto \partial_h f(x)$ ($h \mapsto \partial_h^+ f(x)$) je omezený lineární operátor.

Definice 1.3 (Fréchetova derivace)

X, Y Banachovy prostory, $U \subset X$ (otevřená), $f : U \to Y$, f má v bodě x Fréchetovu derivaci, pokud $\exists L \in \mathcal{L}(X,Y) : \lim_{h \to \mathbf{o}} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|_X} = 0$ v Y. Značíme $f_F'(x) = L$.

Důsledek
Pokud $f_F'(x)$ existuje, nutně $f_F'(x) = f_G'(x)$.

Důkaz
$h \in X \setminus \{0\} \implies \lim_{t \to 0_+} \frac{f(x+th) - f(x) - L(th)}{\|th\|} = 0 \implies$

$$\implies \lim_{t \to 0_+} \left(\frac{f(x+th) - f(x)}{t} - L(h) \right) = 0 \implies L(h) = \partial_h^+ f(x).$$

$\square$

Důsledek
$f'_F(x)$ existuje $\Leftrightarrow$ $f'_G(x)$ existuje a zároveň $\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = \partial_h f(x)$ stejnoměrně pro $h \in B_X$ ($h \in S_X$).

Důkaz
„$\implies$": existenci $f'_G(x)$ máme z předchozího důsledku, teď ještě stejnoměrnou konvergenci. $f'_F(x)$ existuje $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall h \in X, \|h\| < \delta : \|f(x+th) - f(x) - \partial_h f(x)\| \leqslant \varepsilon \cdot \|h\|$.

$$h \in B_X, t \in P(0,\delta) \implies \|th\| < \delta,$$

$$\|f(x+th) - f(x) - \partial_{th} f(x)\| \leqslant \varepsilon \cdot \|th\| \left\| \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - \partial_h f(x) \right\| \leqslant \varepsilon \cdot \|h\| \leqslant \varepsilon.$$

„$\impliedby$": Nechť $\forall \varepsilon > 0\ \exists h \in S_X\ \forall t \in P(0,\delta) : \left\| \frac{f(x+th)-f(x)}{t} - \partial_h f(x) \right\| \leqslant \varepsilon$.

$$0 < \|h\| < \delta \implies \frac{h}{\|th\|} \in S_X$$

$$\left\| \frac{f(x+h) - f(x) - \partial_h f(x)}{\|h\|} \right\| = \left\| \frac{f\left(x + \|h\| \cdot \frac{h}{\|h\|}\right) - f(x)}{\|h\|} - \partial_{\frac{h}{\|h\|}} f(x) \right\| \leqslant \varepsilon.$$

□

Důsledek
$X = \mathbb{R} \implies f'_F = f'_G = f'$.

Důsledek
$\exists f'_F(x) \implies f$ je spojitá v x. $\left(\lim_{h\to \mathbf{o}} \frac{f(x+h)-f(x)-f'_F(x)(h)}{\|h\|} = 0 \implies \lim \text{ čitatel } = 0.\right)$

Poznámka
$f'_G(x)$ existuje $\not\Rightarrow$ f je spojitá v x. A to ani když $X = \mathbb{R}^2$ a $Y = \mathbb{R}$ (viz $f(x,y) = 1$, když $x = y^2$, kromě $[0,0]$, $f = 0$ jinak).

Poznámka
$f'_G(x)$ existuje $\not\Rightarrow$ $f'_F(x)$ ani pro spojité funkce (viz $f(x,y) = y$ pro $x = y^2$ a $f(x,y) = 0$ pro $x \leqslant 0$ a $x \geqslant 2y^2$).

Tvrzení 1.1

$\dim X < \infty$, $f : U \to Y$ je lipschitzovská na U. $U \subset X$ otevřená, $x \in U$, $f'_G(x)$ existuje $\implies$ existuje $f'_F(x)$.

Důkaz

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant L \cdot \|x - y\|, \qquad x, y \in U.$$

Nechť existuje $f'_G(x)$. Ať $\varepsilon > 0$ a $h_1, \dots, h_k \in S_X$ je ε-síť. Nechť $\delta > 0$ je takové, že $B(x, \delta) \subset U$ a pokud $0 < |t| < \delta$, pak $\left\| \frac{f(x+th_i)-f(x)}{t} - f'_G(x)(h_i) \right\| < \varepsilon$ ($i \in [k]$).

$h \in S_X$ libovolná, existuje h, že $\|h_i - h\| < \varepsilon$.

$$\left\| \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - f'_G(x)(h) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\left\| \frac{f(x+th) - f(x+th_i)}{t} \right\|}_{\leqslant L \cdot \frac{\|th - th_i\|}{|t|} \leqslant L \cdot \varepsilon} + \underbrace{\left\| \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - f'_G(x)(h_i) \right\|}_{< \varepsilon} + \|f'_G(x)(h_i - h)\| \leqslant$$

$$\leqslant L \cdot \varepsilon + \varepsilon + \|f'_G(x)\| \cdot \|h_i - h\| \leqslant (L + 1 + \|f'_G(x))\|) \cdot \varepsilon.$$

Tedy limita je stejnoměrná pro $h \in S_X$, neboli existuje $f'_F(x)$. □

Poznámka

Stačí, že f je lokálně Lipschitzovská na U.

Tvrzení 1.2

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$, f konvexní. Potom $f'(x)$ ($= f'_F(x) = f'_G(x)$) existuje v každém bodě intervalu (a, b) s výjimkou spočetně mnoha.

Důkaz

1. „$\forall x \in (a, b)$ existuje $f'_+(x)$ vlastní“:

$$f'_+(x) = \lim_{y \to x_+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

je neklesající v y a zdola omezená hodnotou $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ pro nějaké $z < x \implies$ limita existuje.

2. „$x \mapsto f'_+(x)$ je neklesající na (a, b).“

3. „$f'(x)$ neexistuje $\Leftrightarrow$ f'_+ má v bodě x skok (je tam nespojitá)“:

$$f'_-(x) = \lim_{y \to x_-} f'_+(y), \text{ pokud limita existuje a je spojitá v } x_-,$$

tedy skoků může být jen spočetně mnoho. □

Tvrzení 1.3

f konvexní a shora omezená na $B(x,r)$ (X Banach, $x \in X$, $r > 0$) $\implies$ f je lipschitzovská na $B\left(x, \frac{r}{2}\right)$.

Důkaz

1. „$f \leqslant M$ na $B(x,r) \implies f(y) \geqslant 2f(x) - M$ na $B(x,r)$“

$$y \in B(x,r), \qquad z := x + (x-y)$$

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2}(f(y) + f(z))$$
$$f(y) \geqslant 2f(x) - f(z) \geqslant 2f(x) - M.$$

2. Nechť $|f| \leqslant M$ na $B(x,r)$, $v, w \in B\left(x, \frac{r}{2}\right)$, $v \neq w$:

$$z := w + \frac{r}{2} \cdot \frac{w-v}{\|w-v\|} \in B(x,r)$$

$$w\left(1 + \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\|w-v\|}\right) = z + \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\|w-v\|} \cdot v$$
$$f(w) \leqslant \frac{f(z) + \frac{r}{2}\frac{1}{\|w-v\|} f(v)}{1 + \frac{r}{2}\frac{1}{\|w-v\|}}$$
$$f(w) - f(v) \leqslant \frac{f(z) - f(v)}{1 + \frac{r}{2\|w-v\|}}$$
$$\frac{f(w) - f(v)}{\|w-v\|} \leqslant \frac{f(z) - f(v)}{\|w-v\| + \frac{r}{2}} \leqslant \frac{2M}{\frac{r}{2}} = \frac{4}{r} \cdot M.$$

□

Důsledek

$\dim X < \infty$, $U \subset X$ otevřená konvexní, $f : U \to \mathbb{R}$ konvexní. Potom f je lokálně lipschitzovská na U.

Důkaz

BÚNO $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, $x \in U$, existuje r tak, že $\overline{B_{\|\cdot\|_1}(x,r)} \subset U$ a

$$B_{\|\cdot\|_1}(x,r) = \operatorname{conv}\{x \pm r e_i, i \in [n]\}$$

$\implies f \leqslant \max_{i \in [n]} f(x \pm e_i)$ na $B(x,r) \implies$ lipschitzovská na $B\left(x, \frac{r}{2}\right)$. □

Důsledek
$\dim X < \infty$, $U \subset X$ otevřená konvexní, $f : U \to \mathbb{R}$ konvexní, $x \in U$. Pak $f'_F(x)$ existuje $\Leftrightarrow$ $f'_G(x)$ existuje.

Důkaz
„$\implies$“ vždy a „$\impliedby$“ z předchozího důsledku a prvního tvrzení. □

Důsledek
X je obecný Banachův prostor, $U \subset X$ otevřená konvexní, $f : U \to \mathbb{R}$ spojitý konvexní. Potom je f lokálně lipschitzovská na U.

Důkaz
Spojitost implikuje lokální omezenost a ta implikuje (spolu s předchozím tvrzením) lokální lipschitzovskost. □

Poznámka
Pro $\dim X = \infty$ konvexita neimplikuje spojitost, jelikož $\exists$ nespojité lineární funkcionály.

Příklad (TODO?)
Norma daná skalárním součinem má Fréchetovu derivaci v každém bodě kromě nuly.

Příklad (TODO?)
Pro $X = l_1$ Gateauxova derivace normy existuje právě tehdy, když daný bod nemá nulovou složku (a pak je to $(\operatorname{sign} x_n) \in l_\infty$). Zato Fréchetova derivace normy v l_1 neexistuje v žádném bodě.

Příklad (TODO?)
Pro $X = l_1(\Gamma)$, kde Γ je nespočetná, norma nemá Gateauxovu derivaci v žádném bodě.

Příklad (TODO?)
Pro K kompaktní, $|K| \geqslant 2$, $X = (C(K), \|\cdot\|_\infty)$, Gateauxova derivace normy existuje právě tehdy, když absolutní hodnota bodu nabývá svého maxima právě v jednom $t_0 \in K$. Fréchetova derivace normy existuje, když t_0 je izolovaný bod K.

Definice 1.4 (Subdiferenciál)

X Banachův prostor, $U \subset X$ otevřená konvexní. Pro $x \in U$ definujeme subdiferenciál f v bodě x jako $\partial f(x) := \{x^* \in X^* | \forall y \in U : x^*(y - x) \leqslant f(y) - f(x)\}$.

Poznámka
X Banachův prostor, $U \subset X$ otevřená konvexní. Ať f je spojitá a konvexní a $x \in U$. Potom $\forall h \in X$ existuje $\partial_h^+ f(x)$.

Důkaz
$\frac{f(x+th)-f(x)}{t}$ je neklesající funkce t, která je zdola omezená $\frac{f(x-th)-f(x)}{-t}$. □

$$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow \forall h \in X : x^*(h) \leqslant \partial_h^+ f(x).$$

Důkaz
„$\implies$“: $h \in X$, $\exists \delta > 0\ \forall t \in (-\delta, \delta) : x + th \in U$

$$x^*(x + th - x) \leqslant f(x + th) - f(x)$$
$$x^*(h) \leqslant \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \to \partial_h^+ f(x)$$

„$\impliedby$“: $y \in U$, $h = y - x$:

$$f(y) - f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{1} \geqslant \partial_h^+ f(x) \geqslant x^*(h) = x^*(y - x).$$

□

Příklad

$$U = X, f(x) = \|x\| \implies \partial f(x) = \{x^* \in X^* | \|x^*\| \leqslant 1 \wedge x^*(x) = \|x\|\}.$$

Důkaz
TODO? □

$$\partial f(\mathbf{o}) = B_{X^*}, \qquad x \neq 0 : \partial f(x) \subset S_{X^*}.$$

Tvrzení 1.4

X Banachův, $U \subset X$ otevřená konvexní, $f : U \to \mathbb{R}$ je spojitá konvexní. Potom $\forall x \in U$: $\partial f(x)$ je neprázdná, konvexní, w^*-kompaktní.

Důkaz

„$h \mapsto \partial_h^+ f(x)$ je sublineární funkcionál“: $t > 0 : \partial_{th}^+ f(x) = t\partial_h^+ f(x)$ platí obecně,

$$\partial_{h_1+h_2}^+ f(x) = \lim_{t\to 0_+} \frac{f(x+t(h_1+h_2)) - f(x)}{t} \overset{\text{konvexita } f}{\leqslant}$$

$$\leqslant \lim_{t\to 0_+} \left(\frac{f(x+2th_1) - f(x)}{2t} + \frac{f(x+2th_2) - f(x)}{2t} \right) = \partial_{h_1}^+ f(x) + \partial_{h_2}^+ f(x).$$

$\exists r > 0$: f je L-lipschitzovská na $B(x,r)$.

$$|\partial_h^+ f(x)| = \lim_{t\to 0_+} \left| \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \right| \leqslant L \cdot \|h\|.$$

Z Hahnovy-Banachovy věty $\exists x^*$ lineární funkcionál na X: $x^*(h) \leqslant \partial_h^+ f(x)$ pro každé h. Navíc $x^*(h) \leqslant L \cdot \|h\| \implies x^*$ je spojitý $\implies x^* \in \partial f(x)$.

$\partial f(x)$ je omezený tou konstantou L.

„w^*-kompaktnost“: jelikož $\partial f(x)$ je omezená, stačí: „w^*-uzavřenost“:

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* | \forall y \in U : x^*(y-x) \leqslant f(y) - f(x)\} =$$

$$= \bigcap_{y\in U} \{x^* \in X^* | x^*(y-x) \leqslant f(y) - f(x)\}.$$

$x^* \mapsto x^*(y-x)$ je w^*-spojité.

„Konvexita“: $x_1^*, x_2^* \in \partial f(x)$, $\lambda \in <0,1>$.

$$y \in U : (\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*)(y-x) = \lambda x_1^*(y-x) + (1-\lambda)x_2^*(y-x) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda(f(y) - f(x)) + (1-\lambda)(f(y) - f(x)) = f(y) - f(x).$$

□

Tvrzení 1.5

X Banachův prostor, $U \subset X$ otevřená konvexní, f spojitá konvexní, $x \in U$. Pak následující je ekvivalentní:

1. $f'_G(x)$ existuje; 2. $\partial f(x)$ je jednoprvková množina; 3. $\forall h \in X : \partial_h^+ f(x) = -\partial_{-h}^+ f(x)$.

Pak $\partial f(x) = \{f'_G(x)\}$.

Důkaz

„1. $\implies$ 2.“: Nechť $f'_G(x)$ existuje. Pak $\forall h \in X : f'_G(x)(h) = \partial_h^+ f(x)$. Tedy $f'_G(x) \in \partial f(x)$ z důsledku za definicí.

Navíc $x^* \in \partial f(x) \implies \forall h \in X : x^*(h) \leqslant \partial_h^+ f(x) = f'_G(x)(h)$

$$x^*(-h) \leqslant f'_G(x)(-h) \quad \wedge \quad x^*(h) \geqslant f'_G(x)(h) \implies x^* = f'_G(x).$$

Tedy $\partial f(x) = \{f'_G(x)\}$ je jednoprvková.

„2. $\implies$ 3.“: Nechť $\exists h : \partial_h^+ f(x) \neq -\partial_{-h}^+ f(x)$. f konvexní $\implies -\partial_{-h}^+ f(x) \leqslant \partial_h^+ f(x)$. ($\varphi(t) = f(x+th)$ je konvexní, $\varphi'_-(0) \leqslant \varphi'_+(0)$.) $\implies -\partial_{-h}^+ < \partial_h^+ f(x)$.

$$\begin{aligned} x_1^*(th) &:= t \cdot \partial_h^+ f(x), \qquad t \in \mathbb{R} \\ x_2^*(th) &:= -t \cdot \partial_{-h}^+ f(x), \qquad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

x_1^*, x_2^* jsou různé lineární funkcionály na LO $\{h\}$.

$$x_j^*(th) \leqslant \partial_{th}^+ f(x), t \in \mathbb{R}$$

$j = 1$:

$$t \geqslant 0 \implies \partial_{th}^+ f(x) = t \cdot \partial_h^+ f(x) \quad ↯$$

$$t < 0 \implies x_1^*(th) = t \cdot \partial_h^+ f(x) < -t \cdot \partial_{-h}^+ f(x) = \partial_{th}^+ f(x).$$

$j = 2$:

$$t \leqslant 0 \implies -t\partial_{-h}^+ f(x) = \partial_{th}^+ f(x) \quad ↯$$

$$t > 0 \implies x_1^*(th) = -t\partial_{-h}^+ f(x) < t\partial_h^+ f(x) = \partial_{th}^+ f(x).$$

Z Hahnovy–Banachovy věty lze x_1^*, x_2^* rozšířit na lineární funkcionály $x_j^*(h) \leqslant \partial_h^+ f(x)$, $h \in X$. Pak $x_1^*, x_2^* \in \partial f(x)$, $x_1^* \neq x_2^*$ (omezenost jako u předchozího tvrzení).

„3. $\implies$ 1.“: Nechť $\forall h \in X : \partial_h^+ f(x) = -\partial_{-h}^+ f(x)$. Pak víme, že $\varphi(h) = \partial_h^* f(x)$ je sublineární. Navíc $\varphi(-h) = -\varphi(h)$, tedy dohromady je φ lineární, neboť zřejmě $\varphi(th) = t\varphi(h)$ ($t \in \mathbb{R}$) a $\varphi(h_1 + h_2) \leqslant \varphi(h_1) + \varphi(h_2)$, protože

$$\varphi(h_1 + h_2) = -\varphi(-h_1 - h_2) \geqslant -(\varphi(h_1) + \varphi(h_2)) = \varphi(h_1) + \varphi(h_2).$$

Tedy $h \mapsto \partial_h^+ f(x)$ je lineární. Jeho omezenost ukážeme jako v předchozím tvrzení. Tedy je to Gateauxova derivace. □

Důsledek
$f(x) = \|x\|$, $x \in X$. Pak $f'_G(x)$ existuje $\Leftrightarrow \exists! x^* \in B_{X^*} : x^*(x) = \|x\|$.

Toto x^* je pak Gateauxova derivace normy.

Důkaz
Připomeňme, že $\partial f(x) = \{x^* \in B_{X^*} | x^*(x) = \|x\|\}$. Potom stačí použít předchozí tvrzení. □

Příklad
X Hilbertův prostor. Víme $x^* \in X^* \Leftrightarrow \exists y : x^* = \langle \cdot, y \rangle$.

$$x \neq 0, y \in B_H : \langle x, y \rangle = \|x\| \Leftrightarrow y = \frac{x}{\|x\|}.$$

Důkaz
TODO? □

Příklad
TODO? Už tu jednou bylo.

Příklad
Stejně se ukáže pro $l_1(\Gamma)$ (Γ nespočetná).

$$\partial f(x) = \left\{ y \in B_{l_\infty(\Gamma)} | \forall \gamma \in \Gamma : x_\gamma \neq 0 \implies y_\gamma = \operatorname{sign} x_\gamma \right\} \implies$$

$\implies \partial f(x)$ není nikdy jednobodová $(\forall x \exists \gamma : x_\gamma = 0)$.

Příklad
TODO? To už tu také bylo…

Příklad
$X = L_p(\mu)$. Gateauxova derivace vždy? existuje pro $x \neq 0$.

Důkaz
TODO? □

Důsledek
$X = \mathbb{R}^n$. Pak $f'_F(x)$ existuje $\Leftrightarrow$ existují $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i \in [n]$.

Důkaz
„ $\Longrightarrow$ “: jasné. „ $\Longleftarrow$ “: Nechť existují parciální derivace. $x^* \in \partial f(x) \implies$

$$\implies x^*(e_i) \leqslant \partial^+_{e_i} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \wedge x^*(-e_i) \leqslant \partial^+_{-e_i} f(x) = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \implies$$

$\implies \partial f(x)$ je 1 bod, tedy existuje Gateauxova derivace. Navíc f je lokálně Lipschitzovská (konvexní a spojitá?) a X je konečnědimenzionální, tedy existuje Fréchetova derivace. $\square$

Definice 1.5 (Monotónní)

X Banachův prostor. Potom $T : D \to 2^{X^*} \setminus \{\{\}\}$ $(D \subseteq X)$ je monotónní, pokud

$$\forall x, y \in D\ \forall x^* \in Tx\ \forall y^* \in Ty : \langle x^* - y^*, x - y \rangle \geqslant 0.$$

Definice 1.6 (usc (shora polospojitý))

S a T topologické prostory. Potom $\varphi : S \to 2^T$ je usc (shora polospojitý), pokud $\forall U \subset T$ otevřené: $\{x \in S | \varphi(x) \subset U\}$ je otevřená.

Poznámka
Zdola polospojitý (lsc): $\{x \in S | \varphi(x) \cap U \neq \varnothing\}$.

Tvrzení 1.6

X Banachův prostor, $U \subset X$ otevřená konvexní, $f : U \to \mathbb{R}$ spojitá konvexní. Pak $\partial f : U \to 2^{X^*}$ je

1. *monotónní;*
2. *lokálně omezená;*
3. *usc z $\|\cdot\|$ do w^*.*

Důkaz
„1.“: $x, y \in U$, $x^* \in \partial f(x)$, $y^* \in \partial f(y)$

$$x^*(y-x) \leqslant f(y) - f(x), \qquad y^*(x-y) \leqslant f(x) - f(y).$$

Sečteme:

$$x^*(y-x) + y^*(x-y) \leqslant 0 \implies (x^* - y^*)(y-x) \leqslant 0 \implies (x^* - y^*)(x-y) \geqslant 0.$$

„2.“: f lokálně lipschitzovská

$$\implies \forall x \in U\ \exists r, L > 0, B(x,r) \subset U : f \text{ je } L\text{-lipschitzovská na } B(x,r) \implies$$

$$\implies \forall y \in B(x,r) : \partial f(y) \subset L \cdot B_{X^*}.$$

„3.“: Ať $G \subset X^*$ je w^*-otevřená, $x \in U$, $\partial f(x) \subset G$. Chceme $\exists r > 0 : B(x,r) \subset U$ a $\forall y \in B(x,r) : \partial f(y) \subset G$.

Stačí ukázat „$\forall (x_i) \subset U$, $x_n \to x\ \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0\ \partial f(x_n) \subset G$.“: protože můžeme vybrat podposloupnost, stačí $\exists n : \partial f(x_n) \subset G$. A to ukážeme sporem: existuje $(y_n) \subset U$, $y_n \to x$ a přitom $\forall n : \partial f(y_n) \setminus G \neq \emptyset$.

$y_n^* \in \partial f(y_n) \setminus G$. Díky lokální omezenosti je posloupnost (y_n^*) omezená, tj. $\exists R > 0\ \forall n :$ $y_n^* \in \overline{B(0,R)}$ (v X^*) $\implies$ existuje y^*, w^*-hromadný bod posloupnosti (y_n^*). Pak $y^* \notin G$ (G je w^*-otevřená).

Sporem ukážeme, že „$y^* \in \partial f(x)$“: $\exists y \in U : y^*(y-x) > f(y) - f(x)$.

$$\exists \varepsilon > 0 : y^*(y-x) \geqslant f(y) - f(x) + \varepsilon$$

$$y_n^*(y = x) = y_n^*(y - x + y_n - y_n) \leqslant f(y - x + y_n) - f(y_n) \to$$
$$\to f(y) - f(x) \implies y^*(y-x) \leqslant f(y) - f(x) \lightning.$$

□

Definice 1.7 (Maximální monotónní)

X Banachův prostor, $U \subset X$, $T : U \to 2^{X^*}$ je maximální monotónní operátor na U, pokud T je monotónní a graf T je maximální mezi grafy monotónních operátorů na U.

Poznámka (Ekvivalentně)

$$\text{monotónní: } x, y \in U, x^* \in Tx, y^* \in Ty \implies \langle x^* - y^*, x - y \rangle \geqslant 0$$
$$\text{maximalita: } x \in U, x^* \in X^*, \forall y \in U\ \forall y^* \in Ty : \langle x^* - y^*, x - y \rangle \geqslant 0 \implies x^* \in Tx$$

Lemma 1.7

$U \subset X$ otevřená, $T : U \to 2^{X^*}$ monotónní usc z $\|\cdot\|$ do w^* $\forall x \in U : Tx \neq \varnothing$ konvexní, w^*-uzavřená. Pak T je maximální monotónní na U.

Důkaz

$$y \in U, y^* \in X^*, \forall x \in U\ \forall x^* \in Tx : \langle y^* - x^*, y - x\rangle \geqslant 0.$$

Nechť $y^* \notin T_y \implies \exists z \in X : y^*(z) > \sup\langle Ty, z\rangle \implies \forall x^* \in Ty : \langle x^*, z\rangle < \langle y^*, z\rangle$.

$$Ty \subset \{z^* \in X^* | \langle z^*, z\rangle < \langle y^*, z\rangle\} =: V$$

T usc $\implies \exists r > 0 : B(y, r) \subset U$ a $\forall x \in B(y, r) : Tx \subset V$. Speciálně pro $t > 0$ dost malé $T(y + tz) \subset TU$.

$$u^* \in T(y + tz) \implies u^*(z) < y^*(z) \implies \langle u^* - y^*, z\rangle < 0$$

$$\langle u^* - y^*, y + tz - y\rangle = t\langle w^* - y^*, z\rangle \geqslant 0 \qquad ↯.$$

□

Definice 1.8 (Minimální konvexně hodnotové usco)

S topologický prostor, X Banachův, $\varphi : S \to 2^{X^*}$ je minimální konvexně hodnotové usco, pokud

- $\forall x \in S$: $\varphi(x)$ neprázná, w^*-kompaktní, konvexní;
- φ je usc z S do w^*;
- φ je minimální mezi zobrazeními splňujícími první dvě podmínky (ψ splňuje první dvě podmínky, $\forall x : \psi(x) \subset \varphi(x) \implies \psi = \varphi$).

Věta 1.8

$U \subset X$ otevřená konvexní, $f : U \to X$ spojitá konvexní. Pak $\partial f : U \to 2^{X^*}$ je maximální monotónní na U a minimální konvexně hodnotové usco ($\|\cdot\| \to w^*$).

Důkaz

Podle předchozího tvrzení ∂f je monotónní, konvexně hodnotový, hodnoty neprázdné, w^*-kompaktní a je usc z $\|\cdot\|$ do w^*.

Z předchozího lemmatu je ∂f je maximální monotónní na U.

$T \subset \partial f$ (tj. $\forall x \in U : Tx \subset \partial f(x)$) a je to konvexně hodnotové usco (splňuje podmínky výše) T je zřejmě monotónní $\implies$ (z předchozího lemmatu) T je maximální monotónní $\implies T = \partial f$. □

Tvrzení 1.9

$U \subset X$ otevřená konvexní, $f : U \to \mathbb{R}$ spojitá konvexní, $x \in U$. Pak $f'_F(x)$ existuje $\Leftrightarrow \partial f(x)$ je jeden bod a ∂f je v bodě x usc z $\|\cdot\|$ do $\|\cdot\|$ (tj. $\forall G \subset X^*$ $\|\cdot\|$-otevřenou, $\partial f(x) \subset G$, $\exists r > 0 : B(x,r) \subset U$ a $\forall y \in B(x,r) : \partial f(y) \subset G$).

Důkaz

„$\implies$“: $f'_F(x)$ existuje $\implies$ $f'_G(x)$ $\implies$ $\partial f(x)$ je 1 bod (víme).

Pro $\varepsilon > 0$, chceme najít $r > 0$, aby $B(x,r) \subset U$ a $\forall y \in B(x,r) : \partial f(y) \subset B(y^*, \varepsilon)$. Sporem: Nechť existuje $\varepsilon > 0$, $(x_n) \subset U$, $x_n \to x$, $x_n^* \in \partial f(x_n)$, $\|x_n^* - x^*\| > 2\varepsilon$. Pak $\exists h_n \in X$, $\|h_n\| = 1$, že $\langle x_n^+ - x^*, h_n\rangle > 2\varepsilon$.

$$x^* = f'_F(x) \implies \exists \delta > 0\ \forall h \in X, \|h\| \leqslant \delta : f(x+h) - f(x) - x^*(h) \leqslant \varepsilon \cdot \|h\|,$$

$$x_n^* \in \partial f(x_n) \implies x_n^*(x + \delta h_n - x_n) \leqslant f(x + \delta h_n) - f(x_n)$$
$$x^*(\delta h_n) \leqslant f(x + \delta h_n) - f(x) + x_n^*(x_n - x) + f(x) - f(x_n).$$
$$2 \cdot \varepsilon \cdot \delta < \langle x_n^* - x^*, \delta h_n\rangle \leqslant f(x + \delta h_n) - f(x) - x^*(\delta h_n) + f(x) - f(x_n) + x_n^*(x_n - x) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\delta + f(x) - f(x_n) + x_n^*(x_n - x) \implies 2\varepsilon\delta \leqslant \varepsilon\delta \lightning.$$

„$\impliedby$“: $\partial f(x) = \{x^*\}$ už víme, že implikuje $x^* = f'_G(x)$. Ukážeme, že $x^* = f'_F(x)$.

$$\varepsilon > 0 \implies \exists \delta > 0 : B(x,\delta) \subset U \wedge \forall y \in B(x,\delta) : \partial f(y) \subset B(x^*, \varepsilon).$$

$y \in B(x,\delta)$, $y^* \in \partial f(y)$ libovolné. Pak:

$$x^*(y - x) \leqslant f(y) - f(x) \quad \wedge \quad y^*(x - y) \leqslant f(x) - f(y) \implies$$

$$\implies 0 \leqslant f(y) - f(x) - x^*(y - x) \leqslant y^*(y - x) - x^{(}y - x) =$$
$$= (y^* - x^*)(y - x) \leqslant \|y^* - x^*\| \cdot \|y - x\| \leqslant \varepsilon\|y - x\|.$$

□

Tvrzení 1.10

$U_F := \{x \in U | \exists f'_F(x)\}$ je G_δ a $f'_F : U_F \to X^*$ je spojitá z $\|\cdot\|$ do $\|\cdot\|$.

Důkaz

„Spojitost“: přímo z předchozího tvrzení, neboť „$f'_F = \partial f|_{U_F}$“.

$$U_F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ x \in U \middle| \exists V \text{ okolí } x : \operatorname{diam}\{\partial f(y) | y \in V\} \leqslant \frac{1}{n} \right\}}_{\text{otevřená}}$$

□

Důkaz („$\subset$“)
„$\subset$“: Z předchozího tvrzení $f'_F(x)$ existuje $\implies$

$$\implies \forall n\ \exists V \text{ okolí } x \forall\ forall y \in V : \partial f(y) \subset B(f'_F(x), \frac{1}{2n}).$$

□

Důkaz („$\supset$“)
„$\supset$“: V_n okolí příslušné $\frac{1}{n}$

$$\implies \operatorname{diam} \partial f(x) \leqslant \frac{1}{n} (\forall n) \implies \partial f(x) = \{x^*\} \implies$$

$$\implies \forall y \in V_n : \partial f(y) \subset B\left(x^*, \frac{1}{n}\right) \implies x^* = f'_F(x).$$

□

Tvrzení 1.11

$U_G = \{x \in U | \exists f'_G(x)\}$. Pak pokud X je separabilní, potom U_G je G_δ.

Zároveň (X libovolný) $f'_G : U_G \to X^*$ je spojitá z $\|\cdot\|$ do w^*.

Důkaz
„Druhá část“: $U_G = \{x \in U || \partial f(x)| = 1\}$ a $\partial f(x) = \{f'_G(x)\}$ pro $x \in U_G$. Víme, že ∂f je usc $\|\cdot\| \to w^* \implies$ na U_G je „spojitý“.

„První část“: $(x_n) \subset X$ hustá ($\|\cdot\|$-hustá). Pak platí: $\partial f(x)$ je jednobodová $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$: $\{x^*(x_k) | x^* \in \partial f(x)\}$ je jednobodová. („ $\implies$ “ jasné, „ $\impliedby$ “: $x^*, y^* \in \partial f(x), x^* \neq y^* \implies \exists k : x^*(x_k) \neq y^*(x_k)$.) $U_G = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{x \in U | \langle \partial f(x), x_k \rangle$ je jednobodová$\}$ =

$$= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ x \in U | \exists r > 0 : B(x,r) \subset U \wedge \operatorname{diam} \left\langle \bigcup_{y \in B(x,r)} \partial f(y), x_k \right\rangle \leqslant \frac{1}{m} \right\}}_{\text{otevřená}}$$

„$\supset$“: x vpravo $\implies \forall k\ \forall m : \operatorname{diam} \langle \partial f(x), x_k \rangle \leqslant \frac{1}{m}$ a ?.

„$\supset$“: $x \in U_G$, $k, m \in \mathbb{N}$, $\partial f(x) = \{x^*\}$,

$$W := \left\{ y^* \in X^* \middle| |\langle y^* - x^*, x_k \rangle| < \frac{1}{2m} \right\}$$

$\implies W$ je w^*-otevřená, $x^* \in W \implies \partial f(x) \subset W \implies$ (∂f je usc $\|\cdot\| \to w^*$) $\exists r > 0 : B(x,r) \subset U$ a $\bigcup_{y \in B(x,r)} \partial f(y) \subset W \implies \operatorname{diam} \left\langle \bigcap_{y \in B(x,r)} \partial f(y), x_k \right\rangle \leqslant \frac{1}{m}$. □

Poznámka
X není separabilní $\implies$ U_G může být neborelovská. Protipříklady jsou i na neseparabilním Hilbertově prostoru (Holý, Šmídek, Zajíček, …).

2 Asplundovy prostory

Definice 2.1 (Asplundův prostor, Slabě Asplundův prostor, GDS)
X Banachův prostor

- X je Asplundův, pokud $\forall U \subset X$ otevřenou konvexní $\forall f : U \to \mathbb{R}$ spojitou konvexní $\exists G \subset U$ hustá G_δ, že $\forall x \in G$ existuje $f'_F(x)$.
- X je slabě Asplundův, pokud $\forall U \subset X$ otevřenou konvexní $\forall f : U \to \mathbb{R}$ spojitou konvexní $\exists G \subset U$ hustá G_δ, že $\forall x \in G$ existuje $f'_G(x)$.
- X je GDS (Gateaux differentiability space), pokud $\forall U \subset X$ otevřenou konvexní $\forall f : U \to \mathbb{R}$ spojitou konvexní $\exists G \subset U$ hustá, $\forall x \in G$ existuje $f'_G(x)$.

Poznámka
Víme, že U_F je G_δ, tedy v definici Asplundova prostoru stačí „hustá“ místo „hustá G_δ“.

Pro slabé Asplundovy prostory tvrdíme jen, že U_G obsahuje hustou G_δ, sama být G_δ nemusí.

Existují GDS prostory, co nejsou slabě Asplundovy (Moors–Somasundarum, 2002).

Tvrzení 2.1
X separabilní Banachův, M úplný metrický prostor (obecněji M Bairův topologický prostor) $\varphi : M \to 2^{X^*}$ minimální konvexně hodnotové usco. Potom $\{m \in M | |\varphi(m)| = 1\}$ je hustá G_δ podmnožina M.

Důsledek
X separabilní Banachův prostor $\implies$ X je slabě Asplundův. (Aplikujeme předchozí tvrzení na ∂f.) (Otevřená podmnožina X je Bairův prostor, dokonce úplně metrizovatelný).

l_1 je slabě Asplundův (protože je separabilní), ale ne Asplundův ($\|\cdot\|$ není nikde F-diferencovatelná).

$C[0,1]$ totéž.

Důkaz
X separabilní $\implies$ existuje (x_k) hustá v X. Označme $\varphi_k : X^* \to \mathbb{R}$, $\varphi_k(x^*) = x^*(x_k)$, $x^* \in X^*$. Pak φ_k jsou w^*-spojité lineární funkcionály na X^* a platí (*):

$$\forall x^*, y^* \in X^* : (x^* = y^* \Leftrightarrow \forall k : \varphi_k(x^*) = \varphi_k(y^*)) \,.$$

Máme $\varphi : M \to 2^{X^*}$, definujme množiny $G_{n,k} := \left\{m \in M |\, \operatorname{diam} \varphi_k(\varphi(m)) < \frac{1}{n}\right\}$. Pak platí $\bigcap_{n,k} G_{n,k} = \{m \in M || \varphi(m)| = 1\}$ („$\supset$“: jasné a „$\subset$“: m vlevo $\implies \forall k : |\varphi_k(\varphi(m))| = 1 \overset{*}{\implies} |\varphi(m)| = 1$).

Ukážeme, že $G_{n,k}$ jsou otevřené a husté: „$G_{n,k}$ otevřená“:

$$m \in G_{n,k} \implies \operatorname{diam} \varphi_k(\varphi(m)) < \frac{1}{n}$$

$$\implies \varphi_k(\varphi(m)) = [\alpha, \beta], \beta - \alpha < \frac{1}{n} \implies \exists (\alpha', \beta') \supset [\alpha, \beta], \beta' - \alpha' < \frac{1}{n}.$$

$$\varphi_k(\varphi(m)) \subset (\alpha', \beta') \implies \varphi(m) \subset \varphi_k^{-1}((\alpha', \beta')) \quad w^*\text{-otevřená}$$

$\implies$ (φ je usc) $\exists V$ okolí m v M: $\forall m' \in V : \varphi(m') \subset \varphi_k^{-1}((\alpha', \beta')) \implies \varphi_k(\varphi(m')) \subset (\alpha', \beta')$ $\implies \operatorname{diam} \varphi_k(\varphi(m')) < \frac{1}{n}$ $V \subset G_{n,k} \implies G_{n,k}$ otevřená.

„$G_{n,k}$ je hustá“: $m \in M$, U otevřené okolí m v M jako výše $\varphi_k(\varphi(m)) = [\alpha, \beta]$. Zvolme $c > \beta \implies (m) \subset \varphi_k^{-1}((-\infty, c)) \implies$ (φ je usc) $\exists V$ okolí m, $V \subset U$: $\bigcup_{m' \in V} \varphi(m') = \varphi(V) \subset \varphi_k^{-1}((-\infty, c)) \implies \varphi_k(\varphi(V)) \subset (-\infty, c)$.

$d := \sup \varphi_k(\varphi(V))$, $\beta \leqslant d \leqslant c$. Tvrdíme, že $\exists m' \in V : \varphi_k(\varphi(m')) \subset \left(d - \frac{1}{2n}, d\right]$. Nechť ne: $\forall m' \in V : \varphi_k(\varphi(m')) \cap \left(-\infty, d - \frac{1}{2n}\right] \neq \varnothing \implies \varphi(m') \cap \varphi_k^{-1}\left(\left(-\infty, d - \frac{1}{2n}\right]\right) \neq \varnothing$.

Definujeme $\psi : M \to 2^{X^*}$:

$$\psi(m') = \begin{cases} \varphi(m'), & m' \in M \backslash V, \\ \varphi(m') \cap \varphi_k^{-1}\left(\left(-\infty, d - \frac{1}{2n}\right]\right), & m' \in V. \end{cases}$$

Pak: $\forall m' \in M : \psi(m') \neq \varnothing$, konvexní, 2*-kompaktní, ψ je usc v každém bodě (v bodech mimo V to plyne z vlastností φ, v bodech V: $m' \in V$ H w^*-otevřená, $H \supset \varphi(m')$, $\tilde{H} = H \cup \varphi_k^{-1}\left(\left(d - \frac{1}{2n}, +\infty\right)\right) \implies \tilde{H}$ je w^*-otevřená, $\varphi(m') \subset \tilde{H}$; φ je usc $\implies \exists W \subset V$ okolí m': $\varphi(W) \subset \tilde{H}$, pak $\psi(W) \subset H$, což dokazuje, že ψ je usc).

$\implies \psi$ je konvexně hodnotové usco, $\psi \subset \varphi$, φ minimální $\implies \psi = \varphi$.

$$\implies \forall m' \in V : \varphi(m') \subset \varphi_k^{-1}\left(\left(-\infty, d - \frac{1}{2n}\right]\right), \qquad \varphi_k(\varphi(m')) \subset \left(-\infty, d - \frac{1}{2n}\right]$$

(spolu s definicí $d = \sup \varphi_k(\varphi(V))$.) Tedy opravdu $\exists m' \in V : \varphi_k(\varphi(m')) \subset \left(d - \frac{1}{2n}, d\right]$

$$\implies \varphi_k(\varphi(m)) < \frac{1}{2n} \implies m' \in G_{n,k} \cap V.$$

To dokazuje hustotu $G_{n,k}$. Tedy $\bigcap_{n,k} G_{n,k}$ je hustá G_δ množina. □

Příklad
Proto $l_1(\Gamma)$, Γ nespočetná, není slabě Asplundův ani GDS. ($\|\cdot\|$ není Gateaux-diferencovatelná v žádném bodě.)

Poznámka
Stejně lze dokázat: předchozí tvrzení bez konvexně hodnotové.

Důkaz (Viz další tvrzení.)
usco = usc + w^*-kompaktně hodnotové s neprázdnými hodnotami. □

Tvrzení 2.2

M topologický prostor (Baireův), X Banachův.

Je-li $\varphi : M \to 2^{X^*}$ usco (do w^* topologie), pak $\psi(m) := \overline{\text{conv}}^{w^*}\varphi(m)$, $m \in M$, je usco.

Je-li $\psi : M \to 2^{X^*}$ minimální konvexně hodnotové usco, $\varphi : M \to 2^{X^*}$ minimální usco, $\varphi \subset \psi$ ($\forall m : \varphi(m) \subset \psi(m)$). Pak $\forall m \in M : |\varphi(m)| = 1 \Leftrightarrow |\psi(m)| = 1$.

Důkaz
„První bod“: Zřejmě $\forall m \in M : \psi(m) \neq \emptyset$, $\psi(m)$ je konvexní w^*-kompaktní. „usc“: $U \subset X^*$ w^*-otevřené, $m \in M$, $\psi(m) \subset U$, $\exists V w^*$-otevřená : $\psi(m) \subset V \subset \overline{V}^{w^*} \subset U$. (Z regularity w^*-topologie a w^*-kompaktnosti $\psi(m)$.) $x^* \in \psi(m) \implies$ existuje H_{x^*} konvexní w^*-okolí $\mathbf{o}$, že $x^* + 2H_{x^*} \subset V$.

$\varphi(m)$ w^*-kompaktní $\implies \exists x_1^*, \dots, x_n^* \in \psi(m) : \psi(m) \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i^* + H_{x_i^*})$. $H := \bigcap_{i=1}^n H_{x_i^*}$ konvexní w^*-okolí $\mathbf{o}$.

$$\psi(m) + H \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i^* + H_{x_i^*}) + H \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i^* + 2H_{x_i^*}) \subset V.$$

$T_j\psi(m) + H \subset V$. $\psi(m) + H$ je w^*-otevřená konvexní množina obsahující $\psi(m) \supset \varphi(m)$.

φ je usc $\implies \exists W$ okolí m: $\forall m' \in W : \varphi(m') \subset \psi(m) + H$

$$\psi(m') = \overline{\text{conv}}^{w^*}\varphi(m') \subset \overline{\psi(m) + H}^{w^*} \subset \overline{V}^{w^*} \subset U.$$

Tedy ψ je také usc.

„Druhý bod“: $|\psi(m)| = 1 \implies |\varphi(m)| = 1$ ($\varphi(m) \subset \psi(m)$). Obráceně ať $|\varphi(m)| = 1$.

$$\tilde{\psi}(m') = \overline{\text{conv}}^{w^*}\varphi(m'), m' \in M \implies \tilde{\psi} \text{ je usco}, \tilde{\psi} \subset \psi \overset{\psi \text{ minimální}}{\implies} \tilde{\psi} = \psi$$

$$\psi(m) = \tilde{\psi}(m) = \overline{\text{conv}}^{w^*}\varphi(m) \text{ je jednobodová.}$$

□

Poznámka
φ je usco [konvexně hodnotové] $\implies \exists \tilde{\varphi} \subset \varphi$ minimální usco [konvexně hodnotové].

Důkaz
Zornovo l.: $(\varphi_\alpha), \alpha \in A$ je řetězec usco [konvexně hodnotový] $\implies \psi(m) = \bigcap_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(m)$ je usco (dolní závora). (Hodnoty jsou $\neq \varnothing$, jelikož je to průnik řetězce kompaktních neprázdných množin, a jsou kompaktní [konvexní]. usc: $\bigcap_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(m) \subset U$ otevřená $\implies$ $\exists F \subset A$ konečná $\bigcap_{\alpha \in F} \varphi_\alpha(m) \subset U \implies \exists \alpha : \varphi_\alpha(m) \subset U$ atd.)

Pak existují minimální prvky. □

Tvrzení 2.3

X Banachův prostor, X^* separabilní, M Baireův topologický prostor (např. úplný metrický) $\varphi : M \to 2^{X^*}$ minimální konvexně hodnotové usco. Pak

$$\{m \in M | \varphi(m) \text{ je jednobodový a } \varphi \text{ je v bodě } m \text{ usc do } \|\cdot\|\}$$

je hustá G_δ v M.

Důkaz
X^* separabilní, tj. $\{x_k^*, k \in \mathbb{N}\}$ je hustá v X^*.

$$A_n := \left\{ m \in M | \forall U \text{ okolí } m : \operatorname{diam} \varphi(U) > \frac{1}{n} \right\}.$$

$\implies A_n$ je uzavřená, protože $M \setminus A_n$ je otevřená. $M \setminus \bigcup_n A_n$ je množina ze znění.

Ukážeme, že A_n je první kategorie v M.

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}, \qquad A_{n,k} = \left\{ m \in A_n | \operatorname{dist}(\varphi(m), x_k^*) < \frac{1}{8n} \right\}$$

$(m \in A_n \implies \varphi(m) \neq \emptyset$, $\{x_k^*, k \in \mathbb{N}\}$ hustá $\implies \exists k : \operatorname{diam}(\varphi(m), x_n^*) < \frac{1}{8n})$

Ukážeme, že „$A_{n,k}$ je řídká“: $m \in A_{n,k}$ libovolné, U okolí m libovolnéπ. Zvolme $m^* \in \varphi(m)$, aby $\|m^* - x_k^*\| < \frac{1}{8n}$.

$$m \in A_n \implies \exists z_1, z_2 \in U, z_1^* \in \varphi(z_1), z_2^* \in \varphi(z_2) : \|z_1^* - z_2^*\| > \frac{1}{n}.$$

$$\triangle\text{-nerovnost} \implies \exists z \in \{z_1, z_2\} : \|z^* - m^*\| > \frac{1}{2n} \implies \|z^* - x_k^*\| > \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n} > \frac{1}{4n} \implies$$
$$\implies \exists x \in X, \|x\| = 1 : \langle z^* - x_k^*, x \rangle > \frac{1}{4n} \implies \langle z^*, x \rangle > \langle x_k^*, x \rangle + \frac{1}{4n}.$$

„Pak $\exists v \in V \ \forall v^* \in \varphi(v) : \langle v^*, x \rangle > \langle x_k^*, x \rangle + \frac{1}{4n}$.“ Kdyby ne:

$$\forall v \in V : \varphi(v) \cap \underbrace{\left\{ y^* | \langle y^*, x \rangle \leqslant \langle x_k^*, x \rangle + \frac{1}{4n} \right\}}_{=:Y} \neq \emptyset,$$

ale podobně jako v předpřechozím tvrzení to bude spor s minimalitou:

$$\tilde{(}m') = \begin{cases} \varphi(m') \cap Y, & m' \in V, \\ \varphi(m'), & m' \in M \setminus V. \end{cases}$$

Jako v předpředchozím tvrzení $\implies$ $\tilde{\varphi}$ je konvexně hodnotové usco, $\tilde{\varphi} \subset \varphi \implies$ (φ minimální) $\tilde{\varphi} = \varphi \implies \forall v \in V : \varphi(v) \subset Y$, ale pro z to neplatí.

$$\implies \varphi(v) \subset \left\{ y^* | \langle y^*, x \rangle > \langle x_k^*, x \rangle + \frac{1}{4n} \right\} =: Z \implies$$
$$\implies \exists W \text{ okolí } v, W \subset V, \varphi(W) \subset Z \implies W \cap A_{n,k} = \emptyset$$

$(w \in W \implies \forall w^* \in \varphi(w) : \|w^* - x_k^*\| \geqslant \langle w^* - x_k^*, x \rangle > \frac{1}{4n} \implies \operatorname{dist}(\varphi(w), x_n^*) \geqslant \frac{1}{4n} > \frac{1}{8n}.)$

Tedy $A_{n,k}$ řídká $\implies A_n$ 1. kategorie (řídká, protože uzavřená). □

Věta 2.4

Nechť X je separabilní Banachův prostor. Pak X je Asplundův $\Leftrightarrow$ X^* je separabilní.

Důkaz

„$\Longleftarrow$" Z předchozího tvrzení aplikovaného na ∂f. „$\Longrightarrow$": X separabilní a X^* neseparabilní $\implies$ B_{X^*} je neseparabilní $\implies$ existuje $M_0 \subset B_{X^*}$ nespočetná, že existuje $\varepsilon > 0$ $\forall m_1, m_2 \in M_0, m_1 \neq m_2 \implies \|m_1 - m_2\| > \varepsilon$.

„(B_{X^*}, w^*) je kompaktní (Banach–Alaoglu) metrizovatelný (separabilní) prostor $\implies$ $\exists M \subset M_0$ nespočetná bez w^*-izolovaných bodů.":

$$\mathcal{U} = \{U \subset B_{X^*} | U \text{ je } w^*\text{-otevřená (relativně v } B_{X^*}) \ \wedge U \cap M_0 \text{ je spočetná}\}.$$

Pak $\mathcal{U}$ je systém otevřených množin v separabilním metrickém prostoru $\implies$ $\exists \mathcal{V} \cap M_0 = \bigcup \{V \cap M_0 | V \in \mathcal{V}\}$ je spočetná $\implies$ $M_0 \setminus \bigcup \mathcal{U} =: M$ je nespočetná a $\forall U$ w^*-otevřenou: $U \cap M \neq \emptyset \implies U \cap M$ je nespočetná [$U \cap M$ spočetná $\implies$ $U \cap M_0$ spočetná $\implies$ $U \in \mathcal{U}$.] speciálně M nemá w^*-izolované body.

Tedy každá neprázdná relativně w^*-otevřená podmnožina M má diametr $> \varepsilon$.

$$p(x) := \sup \{\langle x^*, x\rangle | x^* \in M\}, x \in X \implies$$

$\implies$ p je spojitá konvexní funkce na X (jelikož $M \subset B_{X^*}$, $p(x) \leqslant \|x\|$, je konvexní, supremum afinních?, spojitá, 1-Lipschitz, supremum 1-Lipschitz).

„p není nikde fréchetovsky diferencovatelná": $x \in X$ libovolné

$$\implies \forall n : \operatorname{diam} \underbrace{\left\{x^* \in M | \langle x^*, x\rangle > p(x) - \frac{\varepsilon}{3n}\right\}}_{=:Y} > \varepsilon \implies$$

$$\implies \exists x_n^*, y_n^* \in Y : \|x_n^* - y_n^*\| > \varepsilon \implies$$
$$\implies \exists x_n \in X, \|x_n\| = 1 : \langle x_n^* - y_n^*, x_n\rangle > \varepsilon.$$

$$p\left(x + \frac{1}{n}x_n\right) + p\left(x - \frac{1}{n}x_n\right) - 2p(x) \geqslant$$
$$\left\langle x_n^*, x + \frac{1}{n}x_n\right\rangle + \left\langle y_n^*, x - \frac{1}{n}x_n\right\rangle - \langle x_n^* + y_n^*, x\rangle - \frac{2\varepsilon}{3n} =$$
$$= \frac{1}{n}\langle x_n^* - y_n^*, x_n\rangle - \frac{2\varepsilon}{3n} > \frac{\varepsilon}{n} - \frac{2\varepsilon}{3n} = \frac{\varepsilon}{3n} \implies$$
$$\implies \frac{\varepsilon}{3} < \frac{p\left(x + \frac{1}{n}x_n\right) + p\left(x - \frac{1}{n}x_n\right) - 2p(x)}{\frac{1}{n}} =$$
$$= \frac{p\left(x + \frac{1}{n}x_n\right) - p(x) - u^*\left(\frac{1}{n}x_n\right)}{\frac{1}{n}} - \frac{p\left(x - \frac{1}{n}x_n\right) - p(x) - u^*\left(-\frac{1}{n}x_n\right)}{-\frac{1}{n}} \to 0 - 0 = 0. \ \lightning.$$

(p fréchetovsky diferencovatelná v X, $u^* = p'_F$.) Tedy Fréchetova derivace neexistuje. □

Například
$\dim X < \infty \implies X$ Asplundův.

X separabilní reflexivní $\implies X$ Asplundův.

$l_p, p \in (1, \infty)$ Asplundovy, stejně tak $L_p(0,1)$.

c_0 je Asplundův ($c_0^* = l_1$, separabilní).

l_1, $\mathcal{C}[0,1]$ nejsou Asplundovy (norma není nikde fréchetovsky diferencovatelná, nebo $l_1^* = l_\infty$ a $\mathcal{C}[0,1]^* = \mathcal{M}([0,1])$ jsou neseparabilní).

Věta 2.5

X Banachův prostor. Pak následující je ekvivalentní:

1. *X je Asplundův.*
2. *Každá ekvivalentní norma na X má alespoň jeden bod fréchetovské-diferencovatelnosti.*
3. *$\forall M \subset X^*$, $M \neq \emptyset$, M omezená, $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X\ \exists c \in \mathbb{R}$: $S_{M,x,c} := \{x^* \in M | x^*(x) > c\}$ je neprázdná a její diametr $< \varepsilon$. ($S_{M,x,c}$ jako slice – krajíc, plátek) „w^*-dualicita“.*
4. *$\forall M \subset X^*$, $M \neq \emptyset$, M omezená, $\forall \varepsilon > 0\ \exists U \subset X^*$ w^*-otevřená: $U \cap M \neq \emptyset$ a $\operatorname{diam}(U \cap M) < \varepsilon$.*
5. *$\forall Y \subset X$ uzavřený podprostor: Y splňuje čtvrtý bod.*
6. *$\forall Y \subset X$ $\forall M$ Baireův topologický prostor $\forall \varphi : M \to 2^{Y^*}$ lokálně omezené minimální usco: $\{m \in M | \varphi(m)$ je jednobodová a φ je v bodě m usc do $\|\cdot\|\}$ je hustá G_δ podmnožina M.*
7. *Totéž jako šestý bod pro konvexně hodnotová usco.*
8. *$\forall Y \subset X$: Y je Asplundův.*
9. *$\forall Y \subset X$ separabilní: Y je Asplundův.*

Důkaz (1. $\implies$ 2.)
Triviální, protože ekvivalentní norma je spojitá konvexní funkce. □

Důkaz (2. $\implies$ 3.)
Obměna: Nechť neplatí 3.: Mějme $M \subset X^*$ neprázdnou omezenou, $\varepsilon > 0$, že každý (neprázdný) slice M má diametr $> \varepsilon$. BÚNO M je konvexní a symetrická ($M_1 := M \cup (-M)$, potom $slice(M_1) = slice(M) \cup slice(-M)$, ta je alespoň jedna neprázdná, tedy diam $> \varepsilon$, $M_2 := \operatorname{conv}(M_1)$ je konvexní symetrická. Pokud poloprostor protíná M_2, protíná i M_1, neboť když $M_1 \subset \{x^* | x^*(x) \leqslant c\}$, tak M_2 také konvexní $\implies$ každý slice M_2 má diam $> \varepsilon$).

BÚNO M je w^*-uzavřená (jinak vezmu $\overline{M}^{w^*}$, pokud w^*-otevřený poloprostor protíná $\overline{M}^{w^*}$, protíná i M, tj. i slice $\overline{M}^{w^*}$ má diam $> \varepsilon$).

Tedy BÚNO M je w^*-kompaktní, konvexní, symetrická. $B := M + B_{X^*} \implies B$ je w^*-kompaktní, konvexní, symetrická, $\|\cdot\|$-okolí $\mathbf{o}$.

$$|||x||| = \max\{f(x) | f \in B\}, x \in X.$$

Pak $|||\cdot|||$ je ekvivalentní norma na X (B konvexní symetrická $\implies$ je to pseudonorma, $B \supset B_{X^*} \implies |||\cdot||| \geqslant \|\cdot\|$, M omezená $\implies B$ omezená $\implies |||\cdot||| \leqslant \text{konst} . \cdot \|\cdot\|$).

Tato norma nemá žádný bod fréchetovské diferencovatelnosti. Použijeme důkaz předchozí věty: stačí ověřit, že každý slice B má diametr $> \varepsilon$.

$$S = \{x^* \in B | x^*(x) > c\} \neq \varnothing$$

$x_0^* \in S \implies x_0^* = b^* + m^*$ ($b^* \in B_{X^*}$, $m^* \in M$), $x_0^*(x) = b^*(x) + m^*(x) \implies m^*(x) = x_0^* - b^*(x) > c - b^*(x) \implies$

$$\implies m^* \in S_{M,x,c-b^*(x)}, \qquad \operatorname{diam} S_{M,x,c-b^*(x)} > \varepsilon \implies$$

$$\implies \exists m_1^*, m_2^* \in S_{M,x,c-b^*(x)} : \|m_1^* - m_2^*\| > \varepsilon \implies$$

$$\implies b^* + m_1^*, b^* + m_2^* \in S$$

(jsou v B a $(b^* + m_1^*)(x) = b^*(x) + m_1^*(x) > b^*(x) + c - b^*(x) = c$).

$$\|(b^* + m_1^*) - (b^* + m_2^*)\| = \|m_1^* - m_2^*\| > \varepsilon.$$

□

Důkaz (3. $\implies$ 4.)
Triviální. □

Důkaz (4. $\implies$ 5.)
$Y \subset X$ podprostor, $\pi : X^* \to Y^*$, $\pi(x^*) = x^*|_Y$, π je w^*-w^* spojité.

$M \subset Y^*$ neprázdná omezená, $\varepsilon > 0$, hledáme w^*-otevřenou $U \subset Y^* : U \cap M \neq \varnothing, \operatorname{diam} U \cap M < \varepsilon$.

BÚNO M je w^*-kompaktní (nahradíme M množinu $\overline{M}^{w^*}$).

$\exists N \subset X^*$ w^*-kompaktní, $\pi(N) = M$ ($y^* \in M \overset{\text{HB}}{\exists} x^* \in X^*, \|x^*\| = \|y^*\|, \pi(x^*) = y^*$, najdeme N_0 omezenou, nahradíme ji $\overline{N_0}^{w^*}$, která je w^*-kompaktní, $\pi(\overline{N_0}^{w^*}) \subseteq \overline{\pi(N_0)}^{w^*} = \overline{M}^{w^*} = M$).

Existuje $\tilde{N} \subset N$ minimální w^*-kompaktní: $\pi(\tilde{N}) = M$ (Zornovo lemma: (N_α) řetězec w^*-kompaktních množin, $\pi(N_\alpha) = M$, potom $\bigcap_\alpha N_\alpha$ je w^*-kompaktní množina a $\pi(\bigcap_\alpha N_\alpha) = M$, neboť $\subset$ je triviální a pro $\supset$: $y^* \in M \implies \pi^{-1}(y^*) \cap N_\alpha \neq \varnothing$ pro každé α).

Existuje $U \subset \tilde{N}$ relativně w^*-otevřená, $U \neq \varnothing$, $\operatorname{diam} U < \varepsilon$. $\tilde{N}$ minimální, $\tilde{N} \setminus U \subsetneq \tilde{N}$ w^*-kompaktní $\implies \pi(\tilde{N} \setminus U) \subsetneq M$ a zároveň $\pi(\tilde{N} \setminus U)$ je w^*-kompaktní

$\implies V := M \setminus \pi(\tilde{N} \setminus U)$ je neprázdná relativně w^*-otevřená podmnožina M. Navíc $V \subset \pi(U)$ $[M = \pi(\tilde{N})]$, $\|\pi\| \leqslant 1 \implies \operatorname{diam} V \leqslant \operatorname{diam} \pi(U) \leqslant \operatorname{diam} U < \varepsilon$. $\square$

Důkaz (5. $\implies$ 6.)
$Y \subset X$ podprostor, $\varphi : M \to 2^{Y^*}$ lokálně omezená minimální usco (do w^*).

$$\{m \in M | |\varphi(m)| = 1 \wedge \varphi \text{je v bodě } m \text{ usc do } \|\cdot\|\} =$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n, \qquad G_n := \left\{ m \in M | \exists U \text{ okolí v } M : \operatorname{diam} \varphi(U) < \frac{1}{n} \right\} =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} G_{n,k}, \qquad G_{n,k} := \left\{ m \in M | \exists U \text{ okolí v } M : \operatorname{diam} \varphi(U) \cap k \cdot B_{Y^*} < \frac{1}{n} \right\}$$

$G_{n,k}$ jsou otevřená. (Důkaz poslední rovnosti: „$\subset$" triviální, „$\supset$": m vpravo, potom z lokální omezenosti existuje V okolí m a $k_0 \in \mathbb{N}$, že $\varphi(V) \subset k_0 B_{Y^*}$, tedy $m \in G_{n,k_0}$, a když vezmeme U z definice G_{n,k_0}, pak $U \cap V$ funguje pro G_n).

„$G_{n,k}$ je hustá": Mějme $m \in M$, U otevřené okolí m:

$$\varphi(m) \cap k \cdot B_{Y^*} = \emptyset \overset{\varphi \text{ je usc}}{\implies} \exists \tilde{U} \text{ okolí } m : \varphi(\tilde{U}) \cap k \cdot B_{Y^*} = \emptyset \implies \tilde{U} \subset G_{n,k};$$

$\varphi(m) \cap k \cdot B_{Y^*} \neq \emptyset \implies \exists w^*$-otevřené $H \subset Y^* : H \cap \varphi(U) \cap k \cdot B_{Y^*} \neq \emptyset$ má diam $< \varepsilon$,

„ $\implies \exists m' \in U : \varphi(m') \subset H$": jinak $\tilde{\varphi}(m) = \begin{cases} \varphi(m') \setminus H, & m' \in U, \\ \varphi(m'), & m' \in M \setminus U. \end{cases} \implies \tilde{\varphi}$ je usco,
$\tilde{\varphi} \subset \varphi \implies$ (φ minimální) $\tilde{\varphi} = \varphi$. A to je spor s $\varphi(U) \cap H = \emptyset$.

$\overset{\varphi \text{ je usc}}{\implies} \exists V \subset U$ otevřené obsahující M: $\varphi(V) \subset H$. Pak $\varphi(V) \cap k \cdot B_{Y^*} = \varphi(V) \cap H \cap k \cdot B_{Y^*} \subset \varphi(U) \cap H \cap k \cdot B_{Y^*}$ a to má diam $< \varepsilon$. $\implies m' \in G_{n,k}$. □

Důkaz (6. $\implies$ 7.)
$Y \subset X$ podprostor, M Baireův topologický prostor $\varphi : M \to 2^{Y^*}$ minimální konvexně hodnotové usco. Nechť $\psi : M \to 2^{Y^*}$ je minimální usco, $\psi \subset \varphi$. Pak víme, že $\forall m \in M$: $\varphi(m) = \overline{\operatorname{conv}}^{w^*} \psi(m)$. Speciálně $|\varphi(m)| = 1 \Leftrightarrow |\psi(m)| = 1$.

Navíc (v bodech jednohodnotnosti)? φ je v m usc do $\|\cdot\| \Leftrightarrow \psi$ je v m usc do $\|\cdot\|$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists U \text{ okolí } m : \psi(U) \subset \psi(m) + \varepsilon \cdot B_{Y^*}$$

a to samé pro φ. „$\varphi(m) = \psi(m)$": $m' \in U$:

$$\varphi(m') \subset \psi(m) + \varepsilon \cdot B_{Y^*} \implies \psi(m') \subset \psi(m) + \varepsilon \cdot B_{Y^*} \implies \varphi(m') \subset \psi(m) + \varepsilon \cdot B_{Y^*}$$

□

Důkaz (7. $\implies$ 8.)
$Y \subset X$, $U \subset Y$ otevřená konvexní, $f : U \to \mathbb{R}$ spojitá konvexní. Pak $\partial f : U \to 2^{Y^*}$ je minimální konvexně hodnotové usco. $\implies$ z 7. je ta množina hustá G_δ v U, a je to přesně množina bodů fréchetovské diferencovatelnosti. □

Důkaz (8. $\implies$ 9.)
Triviální. □

Důkaz (9. $\implies$ 1.)
Obměnou. Nechť X není Asplundův $\implies \exists U \subset X$ otevřená konvexní $\exists f: U \to \mathbb{R}$ spojitá konvexní, že množina bodů fréchetovské diferencovatelnosti není hustá v U.

$$G_n(f) := \left\{ x \in U | \exists \delta > 0 : \sup_{\|y\|=1} \frac{f(x+\delta y) + f(x-\delta y) - 2f(x)}{\delta} < \frac{1}{n} \right\}.$$

„Pak $\bigcap_n G_n(f)$ je množina bodů fréchetovské diferencovatelnosti.“:

„$\supseteq$“: $x^* = f'_F(x) \implies \lim_{h \to \mathbf{o}} \frac{f(x+h)-f(x)-x^*(h)}{\|h\|} = 0 \implies$

$$\implies \exists \delta > 0 \ \forall h \neq 0, \|h\| \leqslant \delta : \left| \frac{f(x+h) - f(x) - x^*(h)}{\|h\|} \right| < \frac{1}{2n} \implies$$

$$\implies \frac{f(x+h) - f(x) - x^*(h)}{\|h\|} < \frac{1}{2n} \wedge \frac{f(x-h) - f(x) + x^*(h)}{\|h\|} < \frac{1}{2n} \implies$$

$$\implies \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{\|h\|} < \frac{1}{n}.$$

„$\subseteq$“: Ta podmínka znamená (kdyby supremum prázdné, pak $\|y\| \leqslant 1$)

$$\lim_{h \to \mathbf{o}} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{\|h\|} = 0.$$

$$0 \leftarrow \frac{f(x+\delta y) + f(x-\delta y) - 2f(x)}{\delta} = \frac{f(x+\delta y) - f(x)}{\delta} - \frac{f(x-\delta y) - f(x)}{-\delta}$$

f je konvexní a výrazy výše jsou tak neklesající v δ, tedy

$$\partial_y^+ f(x) = \lim_{\delta \to 0_+} \frac{f(x+\delta y) - f(x)}{\delta} \wedge \partial_{-y} f(x) = \lim_{\delta \to 0_+} \frac{f(x-\delta y) - f(x)}{\delta} \implies$$

$\implies \partial_y^+ f(x) = -\partial_{-y}^+ f(x) \implies$ existuje Gateauxova derivace. Navíc limity jsou stejnoměrné, tedy existuje i Fréchetova derivace.

„$G_n(f)$ je otevřená“: f je lokálně lipschitzovská, $x \in G_n(X)$, f je L-Lipschitzovská na $B(x,r) \subset U$:

$$\left| \underbrace{\frac{f(x'+\delta y) + f(x-\delta y) - 2f(x)}{\delta}}_{\leqslant c + \frac{4L\eta}{\delta}} - \underbrace{\frac{f(x+\delta y) + f(x-\delta y) - 2f(x)}{\delta}}_{\leqslant -L} \right| \leqslant \frac{4L}{\delta} \|x - x'\|$$

□

Důkaz (9. $\implies$ 1. pokračování)
$\bigcap_n G_n(x)$ není hustá v $U \overset{Baire}{\implies} \exists m : G_m(x)$ není v $U \implies \exists \varnothing \neq V \subset U$ otevřená: $V \cap G_m(x) = \varnothing$. $x_1 \in V \implies \exists y_{1,j}, j \in \mathbb{N} : \|y_{1,j}\| = 1$ a

$$\forall \delta > 0 \ \frac{\sup_j f(x_1 + \delta y_{1,j}) + f(x_1 - \delta y_{1,j}) - 2f(x_1)}{\delta} \geqslant \frac{1}{2m}.$$

$$F_1 := \overline{\mathrm{LO}} \left\{x_1, y_{1,j}, j \in \mathbb{N}\right\},$$

pak F_1 je separabilní, $F_1 \cap V \neq \varnothing$.

Pokud máme F_k separabilní, $F_k \cap V \neq \varnothing$. Potom $\{x_{k,p}, p \in \mathbb{N}\}$ ustá v $F_k \cap V$. $x_{k,p} \in V$, potom $\exists y_{k,p,j}, j \in \mathbb{N} : \|y_{k,p,j}\| = 1$.

$$\forall \delta > 0 : \sup_j \frac{f(x_{k,p} + \delta y_{k,p,j}) + f(x_{k,p} - \delta y_{k,p,j}) - 2f(x_{k,p})}{\delta} \geqslant \frac{1}{2m}.$$

$$F_{k+1} = \overline{\mathrm{LO}}(F_k \cup \{y_{k,p,j}, p, j \in \mathbb{N}\})$$

$F = \overline{\bigcup F_n}$ je separabilní. $\{x_{k,p}, k, p \in \mathbb{N}\}$ je hustá v $F \cap V$. $x_{k,p} \notin G_{2m}(f|_{F \cap U}) \implies G_{2m}(f|_{F \cap u}) \cap V = \varnothing$.

$\implies f|_{F \cap U}$ není fréchetovsky diferencovatelná v žádném bodě $F \cap V \implies F$ není Asplundův. □

Důsledek
X Asplundův $\Leftrightarrow \forall Y \subset X$ separabilní: Y^* separabilní.

Důkaz
Předchozí věta 1. $\Leftrightarrow$ 9. a předchozí tvrzení. □

Důsledek
Podprostor Asplundova prostoru je Asplundův.

Důkaz
Předchozí věta 1. $\implies$ 8.. □

Kvocient Asplundova prostoru je Asplundův.

Důkaz
X Asplundův, $q : X \to Y$ kvocient, $q^* : Y^* \to X^*$ je izometrické (izomorfní) vnoření a w^*-w^* homeomorfní. Pak použijeme předchozí větu 1. $\Leftrightarrow$ 4.. □

Například
Reflexivní prostory jsou Asplundovy. (X reflexivní, $Y \subset X$ separabilní $\implies$ Y reflexivní, Y^* separabilní.)

$C_0(\Gamma)$ je Asplundův pro každé Γ. ($Y \subset C_0(\Gamma)$ separabilní, existuje (y_n) hustá v Y, Spt y_t spočetná $\forall n \implies U_n Spty_n$ spočetná $\implies \exists \Gamma' \subset \Gamma$ spočetná $\forall y \in Y : y|_{\Gamma \setminus \Gamma'} \equiv 0 \implies$ „$Y \subset C_0(\Gamma')$“ $C_0(\Gamma')^* = l_1(\Gamma)$ separabilní $\implies C_0(\Gamma')$ Asplundův $\implies Y$ je Asplundův $\implies c_0(\Gamma)$ je Asplundův.)

Definice 2.2 (Řídce rozložný (scattered))

K je scattered, když každá neprázdná podmnožina K má izolovaný bod.

Věta 2.6

$C(K)$ je Asplundův $\Leftrightarrow$ K je scattered (řídce rozložný).

Důkaz (Jiný „ $\implies$ “)
S použitím předchozí věty (bod 4.): $K \hookrightarrow (C(K)^*, w^*)$ homeomorfně ($x \mapsto \delta_x := f \mapsto f(x)$) navíc $x \neq y \implies \|\delta_x - \delta_y\| = 2$.

$\emptyset \neq A \subset K \implies \delta(A) \subset C(K)^*$ omezená množina. Pokud $C(K)$ je Asplundův, pak (předchozí věta) $\exists U \subset C(K)^*$ w^*-otevřená: $U \cap \delta(A) \neq \emptyset$ $\operatorname{diam} U \cap \delta(A) < 1$ $\implies U \cap \delta(A)$ je jediný bod δ_x. Toto x je izolovaný bod A. □

Důkaz
„ $\Longrightarrow$ “: K není scattered $\Longrightarrow$ $\exists A \subset K$ neprázdná bez izolovaných bodů $\Longrightarrow$ $L := \overline{A}$ také nemá izolované body. Tedy L je kompakt bez izolovaných bodů $\Longrightarrow$ $C(L)$ není Asplundův, protože norma na $C(L)$ nemá žádný bod fréchetovské diferencovatelnosti. Navíc $C(L)$ je kvocient $C(K)$ ($q : C(K) \to C(L)$, $q(f) = f|_L$ je na díky Tietzeho větě). Z předchozího důsledku $C(K)$ také není Asplundův.

„ $\Longleftarrow$ “: Nechť K je scattered kompakt. $X \subset C(K)$ separabilní prostor. $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ hustá v B_X. Definujeme $h : K \to [-1,1]^{\mathbb{N}}$, $h(k)(n) = x_n(k)$ ($k \in K, n \in \mathbb{N}$), tj. $h(k) = \{x_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$.

Dobře definované, neboť $\|x_n\|_\infty \leqslant 1$. h je spojité zobrazení ($\forall n \in \mathbb{N} : k \mapsto h(k)(n) x_n(k)$ spojité na K). $L := h(K)$ je kompakt. L je také metrizovatelný ($L \subset [-1,1]^{\mathbb{N}}$ a tento součin je metrizovatelný).

„Dále je L scattered“: $F \subset L$ neprázdná uzavřená, najdeme $H \subset K$ kompaktní minimální, že $h(H) = F$ ($l \in L$ ... $k_l \in K$, $h(k_l) = l$; $H_0 := \overline{\{k_l, l \in F\}}$ $\Longrightarrow$ $h(H_0) = F$, neboť $\supset$ jasné a $h(H_0) \subseteq \overline{h(\{k_l, l \in F\})} = \overline{F} = F$; dále použijeme Zornovo lemma.)

K scattered $\Longrightarrow$ $\exists k \in H$ izolovaný bod. Pak $h(k)$ je izolovaný bod F ($H \backslash \{k\} \subsetneq H$ uzavřená $\Longrightarrow$ $h(H \backslash \{k\}) \subsetneq F$ a je uzavřená jako spojitý obraz kompaktu $\Longrightarrow$ $h(H \backslash \{k\}) = F \backslash \{h(k)\}$ uzavřená $\Longrightarrow$ $h(k)$ je izolovaný).

L je metrizovatelný a scattered $\Longrightarrow$ spočetný. $L^{(0)} = L$, $L^{\alpha+1} = (L^\alpha)'$ (hromadné body $L^{(\alpha)}$, tj. odstraníme izolované body). A pro limitní ordinál λ: $L^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha<\lambda} L^{(\alpha)}$. Vždy platí $\exists L^{(\alpha+1)} = L^{(\alpha)}$. Tedy L scattered $\Leftrightarrow \exists \alpha : L^{(\alpha)} = \emptyset$.

$L^{(\alpha)}$ je vždy uzavřená množina ($L \backslash L^{(\alpha)}$ je otevřená, $L \backslash L^{\beta} \supset L \backslash L^{(\alpha)}$) $\alpha < \beta \Longrightarrow L^{(\beta)} \subset L^{(\alpha)}$.

$$L \backslash L^{\omega_1} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} (L \backslash L^{(\alpha)}) \Longrightarrow \exists C \subset [0, \omega_1) : L \backslash L^{(\omega_1)} = \bigcup_{\alpha \in C} (L \backslash L^{(\alpha)}).$$
$$\exists \beta < \omega_1 \ \forall \alpha \in C : \alpha < \beta \Longrightarrow L \backslash L^{(\omega_1)} = L \backslash L^{(\beta)},$$

neboli $L^{(\beta)} = L^{\omega_1}$, tedy i $L^{(\beta)} = L^{(\beta+1)}$. L scattered $\Longrightarrow$ $L^{(\beta)} = \emptyset$ $\Longrightarrow$ $L = \bigcup_{\alpha<\beta} \left(L^{(\alpha)} \backslash L^{(\alpha+1)} \right)$, což jsou spočetné body $L^{(\alpha)}$, a tech je spočetně mnoho. Spočetné sjednocení spočetných množin je spočetná.

Tedy L je spočetný. Dále $C(L)^* = \mathcal{M}(L) = l_1(L) = l_1$ separabilní. Izometricky $C(L) \subset C(K)$ ($h : K \overset{\text{na}}{\to} L$ spojité, $f \in C(L) \mapsto f \circ h \in C(K)$, toto je izometrické lineární vnoření, $\|f \circ h\|_\infty = \sup_{k \in K} |f(h(k))| = \sup_{l \in L} |f(l)| = \|f\|_\infty$).

$\forall n : X_n \in$ obraz $C(L)$ v $C(K)$, $h(k) = \{x_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$, $\pi_n = \pi_n|_L \circ h$, $\pi_n|_L : [-1,1]^{\mathcal{N}} \to [-1,1]$ projekce na n-tou složku a ta je spojitá.

$\Longrightarrow X \subset C(L) \Longrightarrow X^*$ separabilní ($C(L)$ uzavřená v $C(K)$, $C(L)^* \to X^*$ aneb ze separabilního do separabilního, $\varphi \mapsto \varphi|_X$ je na z Hahnovy–Banachovy věty). □

3 Fragmentovanost, slabé Asplundovy prostory, atp.

Definice 3.1 (Fragmentovaný metrikou)

Nechť (T, τ) je topologický prostor a ϱ je nějaká metrika na T. Říkáme, že (T, τ) je fragmentovaný metrikou ϱ, pokud

$$\forall \emptyset \neq A \subset T\ \forall \varepsilon > 0\ \exists U \subset T\ \tau - \text{otevřená} : U \cap A \neq \emptyset \wedge \operatorname{diam}_\varrho(U \cap A) < \varepsilon.$$

Poznámka
X je Asplundův $\Leftrightarrow$ omezené množiny v (X^*, w^*) jsou fragmentované normou.

Příklad
Topologický prostor T je scattered $\Leftrightarrow$ T je fragmentovaný diskrétní metrikou.

Tvrzení 3.1

Y topologický prostor fragmentovaný metrikou ϱ, B Baireův topologický prostor a $\varphi : B \to 2^Y$ minimální usco. Potom

$$\exists G \subset B \text{ hustá } G_\delta\ \forall b \in G : |\varphi(b)| = 1 \wedge \varphi \text{ je v bodě } b \text{ usc do } (Y, \varrho).$$

Důkaz

$$G_n := \left\{ b \in B | \exists U \text{ okolí } b : \operatorname{diam}_\varrho \varphi(U) < \frac{1}{n} \right\} \implies G_n \subset B \text{ otevřená.}$$

$G = \bigcap_n G_n$ má ty vlastnosti, je G_δ, zbývá hustota: B Baireův, tedy stačí ukázat, že „$\forall n : G_n$ je hustá“:

Zafixujme $n \in \mathbb{N}$, $V \subset B$ neprázdná otevřená

$$\varphi(V) \neq \emptyset \implies \exists W \subset Y \text{ otevřená} : W \cap \varphi(V) \neq \emptyset \wedge \operatorname{diam}_\varrho(W \cap \varphi(V)) < \frac{1}{n}.$$

Pak $\exists b \in V : \varphi(b) \subset W$ (kdyby ne, pak $\psi(b) = \varphi(b)$, pokud $b \in B \setminus V$ a $\varphi(b) \setminus W$ pro $b \in V$ je usco obsažené v minimálním φ, tedy $\varphi = \psi \implies \forall b \in V : \varphi(b) \cap = \emptyset \implies \varphi(V) \cap W = \emptyset$. ↯.)

φ je usc, tudíž $\exists U$ okolí b, $U \subset V$: $\varphi(U) \subset W$. Pak $\varphi(U) \subset W \cap \varphi(V) \implies \operatorname{diam}_\varrho \varphi(U) < \frac{1}{n} \implies b \in G_n \cap V$. Tedy $V \cap G_n \neq \emptyset$, tedy G_n hustá. □

Věta 3.2

X Banachův prostor. Uvažme následující vlastnosti:

1 (X^*, w^*) *je fragmentovaný nějakou metrikou;*

1' (B_{X^*}, w^*) *je fragmentovaný nějakou metrikou;*

2 $\forall B$ *Baireův topologický prostor* $\forall\varphi : B \to 2^{X^*}$ *minimální usco,* $\exists G \subset B$ *hustá* G_δ*:* $\forall b \in G : |\varphi(b)| = 1$*;*

2' *je totéž jako 2. pro B úplný metrický prostor;*

3 *je totéž jako 2'. (včetně B úplný metrický prostor) pro* $\mathrm{d}(B) \leqslant \mathrm{d}(X)$*;*

4 X *je slabě Asplundův;*

5 $\forall M$ *úplný metrický prostor* $\forall\varphi : M \to 2^{X^*}$ *minimální usco:* $\{m \in M | |\varphi(m)| = 1\}$ *je hustá v* M*;*

5' *je totéž jako 5. (včetně B úplný metrický prostor) pro* $\mathrm{d}(M) \leqslant \mathrm{d}(X)$*;*

6 X *je GDS.*

Pak platí $1. \Leftrightarrow 1'$. *(„$\Longrightarrow$“: triviální, „$\Longleftarrow$“: snadné);* $1'. \Longrightarrow 2.$ *(předchozí tvrzení);* $2. \Leftrightarrow 2'$. *(„$\Longrightarrow$“: triviální, „$\Longleftarrow$“: nebude – Choba–Verderov?);* $2'. \Longrightarrow 3.$ *(triviální);* $3. \Longrightarrow 5'$. *(triviální);* $5. \Leftrightarrow 5'$. *(„$\Longrightarrow$“ triviální, „$\Longleftarrow$“: nebude – Mooretali?)* $3. \Longrightarrow 4.$ *a* $5'. \Longrightarrow 6.$ *(aplikací na ∂f);* $4. \Longrightarrow 6.$ *(triviální).*

Věta 3.3

X kompaktní nebo úplně metrizovatelný, Y kompaktní, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ odděleně spojitá[a]*. Potom $\exists A \subset X$ hustá G_δ, že f je spojitá v každém bodě $A \times Y$.*

[a] $\forall y \in Y : x \mapsto f(x, y)$ spojitá na X a $\forall x \in X : y \mapsto f(x, y)$ spojitá na Y

Důkaz

I. Pro $\varepsilon > 0$ označme $\Omega_\varepsilon := \{(x, y) \in X \times Y | \exists$ okolí bodu $(x, y) : \operatorname{diam} f(U) \leqslant \varepsilon\}$, ta je otevřená v $X \times Y$, a označme $A_\varepsilon := \{x \in X | \{x\} \times Y \subset \Omega_\varepsilon\}$, a ta je otevřená v X.

Fixujeme $\varepsilon > 0$, $U \subset X$ neprázdná otevřená. Chceme: „$U \cap A_\varepsilon \neq \varnothing$“: sporem. Nechť $U \cap A_\varepsilon = \varnothing$. $p : X \times Y \to X$ projekce ($p(x, y) = x$), pak $U \subset p(X \times Y \backslash \Omega_\varepsilon)$ najdeme $F \subset X \times Y \backslash \Omega_\varepsilon$ minimální uzavřenou, že $U \subset p(F)$.

II. Platí (*): $\forall (x_0, y_0) \in F$ $\forall V$ okolí x_0 $\forall W$ okolí y_0:
$$\exists u \in V\ \exists v, w \in W, (u, w) \in F : |f(u, v) - f(u, w)| \geqslant \frac{\varepsilon}{6}.$$

III. Zvolíme (indukcí) $x_i \in U$, $y_i, z_i \in Y$ tak, aby platilo:

1. $(x_i, z_i) \in F$;
2. $|f(x_j, y_i) - f(x_i, y_i)| < \frac{\varepsilon}{18}$, pro $i < j$;
3. $|f(x_i, y_j) - f(x_i, z_i)| < \frac{\varepsilon}{18}$, pro $i < j$;
4. $|f(x_i, z_j) - f(x_i, z_i)| < \frac{\varepsilon}{18}$, pro $i < j$;
5. $|f(x_i, y_i) - f(x_i, z_i)| \geqslant \frac{\varepsilon}{6}$.

$x_0 \in U$ libovolné, $(x_0, y_0) \in F$ $(U \subset p(F))$. (*) na $V = U$, $W = Y$, x_1, y_1, z_1 (tak aby platili 1., 5.)

Mějme $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$, $z_1, \ldots, z_n$ splňující (1.–5.)

$$V_{n+1} = U \cap \left\{ x \in X \middle| |f(x, y_i) - f(x_i, y_i)| < \frac{\varepsilon}{18}, i \leqslant n \right\}$$

$$W_{n+1} := \left\{ w \in Y \middle| |f(x_i, w) - f(x_i, z_i)| < \frac{\varepsilon}{18}, i \leqslant n \right\}$$

otevřené, díky oddělené spojitosti. $x_n \in V_{n+1}$, $z_n \in W_{n+1}$ (z indukčních předpokladů) $\implies$ x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}. Z (*) plyne 1. a 5., z $x_{n+1} \in V_{n+1}$ plyne 2. a z $y_{n+1}, z_{n+1} \in W_{n+1}$ plyne 3. a 4.

IV. $i \neq j \implies |f(x_i, y_j) - f(x_j, y_i)| =$

$$= |f(x_i, y_j) - f(x_i, z_i) + f(x_i, z_i) - f(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) - f(x_j, y_i)| > \frac{\varepsilon}{6} - \frac{\varepsilon}{18} - \frac{\varepsilon}{18} = \frac{\varepsilon}{18}.$$

$F_{x_0, y_0}(x, y) = |f(x_0, y) - f(x, y_0)|$ je spojitá pro každé $(x_0, y_0) \in X \times Y$ posloupnost (x_i, y_i) má hromadný bod v $X \times Y$, označme ho (a, b) (X kompaktní $\implies$ $X \times Y$ kompaktní, X úplný metrický, můžeme zabezpečit, že (x_i) konverguje, stačí aby $\operatorname{diam} V_n \to 0$).

$$\frac{\varepsilon}{18} \leqslant |f(x_i, y_j) - f(x_j, y_i)| \to |f(a, y_j) - f(x_j, b)| \to |f(a, b) - f(a, b)| = 0. ↯.$$

□

Důsledek
E Banachův prostor, $\varnothing \neq K \subset E$ slabě kompaktní. Pak $\mathrm{id} : (K, w) \to (K, \|\cdot\|)$ má bod spojitosti.

Důkaz
$f : (K, w) \times (B_{E^*}, w^*) \to \mathbb{R}$, $f(x, x^*) = x^*(x)$. f je odděleně spojité. Z předchozí věty $\exists x \in K$: f je spojitá v každém bodě $\{x\} \in B + E^*$. Ukážeme, že id je spojitá ($w \to \|\cdot\|$) v bodě x.

$$\varepsilon > 0\ \forall x^* \in B_{E^*}\ \exists U_{x^*}\ w\text{-okolí } x \text{ (v } K)\ \exists V_{x^*}\ w^*\text{-okolí } x^* \text{ (v } B_{E^*}) :$$

$$f(U_{x^*} \times V_{x^*}) \subset B(x^*(x), \varepsilon).$$

V_{x^*} $(x^* \in B_{E^*})$ je otevřené pokrytí $B_{E^*} \implies$ existují $x_1^*, \ldots, x_n^* \in B_{E^*} : B_{E^*} = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i^*}$.

$U := \bigcap_{i=1}^n U_{x_i^*}$ je w-okolí x (v K).

$$y \in U, x^* \in B_{E^*} \implies \exists k : x^* \in U_{x_k^*} : |x^*(y - x)| = |x^*(y) - x^*(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |x^*(y) - x_k^*(x)| + |x_k^*(x) - x^*(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \implies \|y - x\| \leqslant 2\varepsilon$$

□

Důsledek

E Banachův prostor, $K \subset E$ slabě kompaktní $\implies$ (K, w) je fragmentovaný normou.

Důkaz

$\emptyset \neq F \subset K$ slabě uzavřená, $\varepsilon > 0$. Potom z předchozího důsledku $\exists x \in F : \mathrm{id} : (F, w) \to (F, \|\cdot\|)$ je spojitá v bodě $x \implies \exists U$ slabé okolí x: $\mathrm{diam}(U \cap F) < \varepsilon$. □

Definice 3.2

X Banachův prostor patří do třídy $\tilde{\mathcal{F}}$, pokud (B_{X^*}, w^*) je fragmentovaná nějakou metrikou.

Poznámka

- $X \in \tilde{\mathcal{F}} \implies X$ je slabě Asplundův (viz věta a tvrzení ze začátku kapitoly);
- X je Asplundův $\implies X \in \tilde{\mathcal{F}}$ ((B_{X^*}, w^*) je fragmentovaná normou);
- X separabilní $\implies (B_{X^*}, w^*)$ je metrizovatelná, ? fragmentovaná $\implies X \in \tilde{\mathcal{F}}$;
- X je WCG (slabě kompaktně generovaný), tj. $\exists K \subset X$ slabě kompaktní: $\overline{\mathrm{LO}}K = X$, potom je $X \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Definice 3.3

Kompakt K je Eberleinův, pokud existuje X Banachův, že $L \subset X$, že K je homeomorfní (L, w).

Poznámka

Z předchozího důsledku plyne, že Eberleinův kompakt je fragmentovaný nějakou metrikou.

Tvrzení 3.4

X WCG $\implies$ (B_{X^*, w^*}) je Eberleinův. K Eberleinův $\Leftrightarrow$ $C(K)$ je WCG.

Důkaz

X WCG $\implies \exists K \subset X$ slabě kompaktní, $\overline{\mathrm{LO}}K = X$. $T : X^* \to C(K, w)$, $T(x^*) = x^*|_K$ $\implies$ T je omezený lineární operátor, je prostý a je $w^* \to \tau_p$ spojité $\implies$ T zobrazuje homeomorfně do $(C(K), \tau_p)$, a to na omezenou množinu.

Eberlein–Šmulian–Gretherdiech … ten obraz je i slabě kompaktní $\implies$ (B_{X^*}, w^*) je Eberleinův, ale $K \hookrightarrow (B_{C(K)^*}, w^*)$ $\implies$ K Eberleinův.

Obráceně K Eberleinův $\implies$ $C(K)$ je WCG … Stone Weierstrass. □

Například
WCG prostoty jsou například: reflexivní prostory ($K = B_X$), separabilní prostory ($\{x_n\}$ hustá v B_X, $K = \{\mathbf{o}\} \cup \left\{\frac{x_n}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$), $C_0(\Gamma)$ pro Γ libovolné ($K = \{e_\gamma, \gamma \in \Gamma\} \cup \{0\}$), $L_1(\mu)$ pro konečnou míru μ ($K = B_{L_2(\mu)}$, nebo $K = B_{L_\infty}(\mu)$).

Tvrzení 3.5

1) $X \in \tilde{\mathcal{F}}$, $Y \subset X \implies Y \in \tilde{\mathcal{F}}$. *2)* $X \in \tilde{\mathcal{F}}$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\overline{TX} = Y \implies Y \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Důkaz
Důkaz prvního bodu odložíme, druhý bod: $T : X \to Y$, $\overline{TX} = Y$. Uvažme $T^* : Y^* \to X^*$. To je w^*-w^* spojitý. Navíc „je prostý“: $T^*y^* = 0 \implies y^* \circ T = 0 \implies y^*|_{TX} = 0 \implies y^* = 0$. Tedy T^* zobrazuje (B_{Y^*}, w^*) homeomorfně na podmnožinu $(\|T\|B_{X^*}, w^*)$. □

Poznámka (Není známo, zda podprostor slabě Asplundova prostoru je slabě Asplundův.) Také není známo, zda druhý bod platí pro slabě Asplundovy prostory (je známo, že kvocient slabě Asplundův prostor je slabě Asplundův).

Důsledek
X Asplundův, $T : X \to Y$, $\overline{TX} = Y \implies Y \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Definice 3.4 (Asplundovsky generované prostory (AG, GSG))

Prostory Y, pro které $\exists X$ Asplundův a $\exists T : X \to Y$: $\overline{TX} = Y$, se nazývají asplundovsky generované (AG), někdy též GSG (Grothediech–Šmulian generated).

Definice 3.5

X Banachův prostor, $A \subset X$ je Asplundova množina, pokud: $A \neq \emptyset$, A omezená, $\forall M \subset A$ spočetnou je $(X^*, \|\cdot\|_M)$ separabilní, kde $\|x^*\|_M = \sup_{x \in M} |x^*(x)|$ jsou pseudonormy.

Poznámka
X je Asplundův $\Leftrightarrow B_X$ je Asplundova množina. A Asplundova $\implies \overline{\text{aco}}A$ je Asplundova.

Důkaz (První)
„$\Longleftarrow$“: $Y \subset X$ separabilní, $M \subset B_Y$ spočetná, potom „$\|\cdot\|_M = \|\cdot\|_{Y^*}$“, $\|x^*\|_M = \|x^*|_Y\| \implies M \subset B_X$ spočetná, potom $Y = \overline{\text{LO}}M$ je separabilní, Y^* je separabilní a $\|\cdot\|_M \leqslant \|\cdot\|_{B_Y}$, a tedy $(Y^*, \|\cdot\|_M)$ je separabilní. □

Důkaz (Druhý)
$\|\cdot\|_{\overline{\text{aco}}M} = \|\cdot\|_M$, $M \subset \overline{\text{aco}}A$ spočetná $\implies \exists N \subset A$ spočetná: $M \subset \overline{\text{aco}}N$. Na konci ukážeme, že X je AG $\Leftrightarrow$ existuje $A \subset X$ Asplundův, že $\overline{\text{LO}}A = X$. □

Důsledek
Banachův prostor X je WCG $\Leftrightarrow \exists Y$ reflexivní $T : Y \to X$, $\overline{TY} = X$.

Důkaz
„ $\Longleftarrow$ “: Y reflexivní $\implies$: B_Y je slabě kompaktní $T : Y \to X$ omezený $\implies$ T je w-w spojitý ($x^* \in X^* \implies x^* \circ T$ je w-spojitý, ale to je jasné, je to prvek Y^*). Tedy $K = T(B_Y)$ je slabě kompaktní a $\overline{\mathrm{LO}}K = X$.

„ $\implies$ “ X je WCG, potom existuje $K \subset X$ slabě kompaktní $\overline{\mathrm{LO}\,K} = X$. BÚNO K je absolutně konvexní (z Kreinovy věty máme, že $\overline{\mathrm{aco}}K$ je slabě kompaktní). Provedu to konstrukcí. Mám Y, $T : Y \to X$. Z bodu 2 konstrukce máme $T(B_Y) \supset K \implies \overline{TY} = X$, z bodu 5 pak Y je reflexivní. □

Důsledek
Banachův prostor X je AG $\Leftrightarrow \exists A \subset X$ Asplundova: $\overline{\mathrm{LO}}A = X$.

Důkaz
„ $\Longleftarrow$ “ $A \subset X$ Asplundova, $\overline{\mathrm{LO}}A = X$. BÚNO A absolutně konvexní ($\overline{\mathrm{aco}}A$ je Asplundova), provedeme tu konstrukci: Y, $T : Y \to X$. Z bodu 2 je $\overline{TY} = X$ a z bodu 6 je Y Asplundův. Tedy X je AG.

„ $\implies$ “ X je AG $\implies$ $\exists Y$ Asplundův $\exists T : Y \to X$ $\overline{TY} = X$. Pak $A := T(B_Y)$ je Asplundova a $\overline{\mathrm{LO}}A = X$. $C \subset A$ spočetná $\implies$ $\exists D \subset B_Y$ spočetná, že $T(D) = C$. $Y_0 := \overline{\mathrm{LO}}D$ je separabilní podprostor $Y \implies Y_0^*$ je separabilní.

Z toho plyne, že $(X^*, \|\cdot\|_C)$ je separabilní. $T^* : X^* \to Y^*$ je prosté ($T^*x^* = x^* \circ T$, $T^*x^* = 0 \implies x^* \circ T = 0 \implies x^*|_{TY} = 0 \implies x^* = 0$).

$$\|x^*\|_C = \sup_{x \in C} |x^*(x)| = \sup_{y \in D} |x^*(Ty)| = \sup_{y \in D} |T^*x^*(y)| = \|T^*x^*\|_D \leqslant$$

$$\leqslant \|T^*x^*\|_{B_{Y_0}} = \|T^*x^*|_{Y_0}\|_{Y_0^*}.$$

(Y_0^* separabilní $\implies$ $(Y^*, \|\cdot\|_{B_{Y^0}})$ je separabilní $\implies$ $(T^*x^*, \|\cdot\|_{B_{Y_0}})$ je separabilní $\implies$ (T^* prosté) $(X^*, \|\cdot\|_C)$ je separabilní.) □

Definice 3.6 (Radonův–Nikodymův (RN) prostor)

Kompaktní prostor K je Radonův–Nikodymův, pokud existuje X Asplundův, že K je homeomorfní podmnožině (X^*, w^*).

Poznámka
Kompakt K je RN $\Leftrightarrow$ K je fragmenovaný nějakou lsc metrikou na K.

Důkaz
„ $\implies$ “ Z charakterizace Asplundových prostorů víme, že omezené podmnožiny (X^*, w^*) jsou fragmentované normou a $\|\cdot\|$ je w^*-lsc. „ $\Longleftarrow$ “ netriviální (Namioka) □

Kompaktní K je Eberleinův $\implies$ K je RN $\overset{\text{výše}}{\implies}$ K fragmentovaný.

Důkaz
K Eberleinův $\implies$ $\exists X$ Baireův: $K \subset (X, w)$. Vezměme $X_0 = \overline{\mathrm{LO}K} \implies X_0$ je WCG, $K \subset (X_0, w)$.

Krein $\implies$ $L := \overline{\mathrm{aco}}K$ je slabě kompaktní. Konstako $\implies$ $\exists Y$ reflexivní, $T : Y \to X_0$, $T(B_Y) \supset L \supset K$. BÚNO T je prosté (v konstrukci bylo T prosté). B_Y slabě kompaktní a T w-w spojité $\implies$ $T|_{B_y}$ je w-w homeomorfní $\implies$ $T^{-1}(K) \subset B_Y \subset Y$, $T^{-1}(K)$ slabě kompaktní homeomorfismus.

BÚNO X je reflexivní. Pak $(X, w) = (X^{**}, w^*)$ a X^* je Asplundův $\implies$ K je RN. □

Také je: K scattered $\implies$ K je RN.

Důkaz
K scattered $\implies$ $C(K)$ je Asplundův, $K \hookrightarrow (C(K)^*, w^*)$, $x \mapsto \delta_X$.

Nebo jinak: K scattered $\implies$ K je fragmentovaný diskrétní 0–1 metrikou a to je evidentně lsc. □

Tvrzení 3.6

X je AG $\implies$ (B_{X^*}, w^*) je RN kompaktní.

Důkaz
X AG $\implies$ $\exists Y$ Asplundův $T : Y \to X$, $\overline{TY} = X$. $T^* : X^* \to Y^*$ w^*-w^* spojitý a prostý $(\overline{TY} = X)$ $\implies$ $T^*|_{B_{X^*}}$ je w^*-w^* homeomorfismus, tedy (B_{X^*}, w^*) je homeomorfní podmnožině (Y^*, w^*), tedy je to RN kompakt. □

K je RN $\Leftrightarrow$ $C(K)$ je AG.

Důkaz
$C(K)$ je AG $\implies$ $(B_{C(K)^*}, w^*)$ je RN kompakt $\implies$ $K \subset (B_{C(K)^*}, w^*)$ je RN kompakt.

K je RN kompakt $\implies$ $K \subset (Y^*, w^*)$, Y Asplundův. $T : Y \to C(K)$, $T(y) = \varkappa(y)|_K$ $(\varkappa : Y \to Y^{**})$. TY odděluje body K $(k_1 \neq k_2 \implies \exists x \in Y : Tx(k_2) = k_2(x) \neq k_2(x) = Tx(k_2)) \overset{SW}{\implies} \overline{\mathrm{alg}}^{\|\cdot\|}(TY \cup \{1\}) = C(K)$.

Protože TB_y je Asplundova množina, dostaneme generující Asplundovu množinu v prostoru $C(K)$, tedy $C(K)$ je AG. □

Věta 3.7

X Banachův. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. *X je GDS;*
2. *$X \times \mathbb{R}$ je GDS;*
3. *$\forall \varphi$ Minkowského funkcionál na X: φ má hustou množinu bodů gateauxovské diferencovatelnosti;*
4. *každá ekvivalentní norma na X má alespoň jeden bod gateauxovské diferencovatelnosti;*
5. *$\forall K \subset X^*$ konvexní w^*-kompaktní: $K = \overline{co}^{w^*}$ (w^*-exp K).*

Poznámka
Pro slabé Asplundovy prostory analogické charakterizace nejsou známy.

Důkaz
„1. $\implies$ 3. $\implies$ 4.“ triviální. „4. $\implies$ 3.“: φ Minkowského funkcionál $\implies$ $\varphi(x) + \varphi(-x) + \|x\|$ je ekvivalentní norma na X. Ve všech bodech, kde je gateauxovsky diferencovatelná, je gateauxovsky diferencovatelná i φ.

φ konvexní: nechť není gateuaxovsky diferencovatelná v $x \implies \exists$ směr h, že v tomto směru je „zlom“. Když se k tomu přidá konvexní funkce, tak se to nespraví?

„1. $\implies$ 2.“ $D \subset X \times \mathbb{R}$ otevřená konvexní, $f : D \to \mathbb{R}$ spojité konvexní. $(x_0, t_0) \in D$, U okolí (x_0, t_0) v D.

$$U = B(x_0, r) \times [t_0 - \delta, t_0 + \delta], |f| \leqslant M \text{ na } D$$

$$g : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to [-\infty, 0], g(t_0), g \in C^\infty(t_0 - \delta, t_0 + \delta),$$

mimo interval (a v krajních bodech a limity v krajních bodech): $g = -\infty$.

$$h(x) := \sup\{f(x,t) + g(t), t \in \mathbb{R}\}$$

spojitá konvexní funkce na $B(x_0, r) \implies \exists x_1 \in B(x_0, t)$ bod gauteauxovské diferencovatelnosti h.

$$h(x_1) = f(x_1, t_1) + g(t_1), \qquad t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

$\implies f$ je gauteauxovsky diferencovatelná na (x_1, t_1).

$$0 \leqslant f(x_1 + ty, t_1 + ts) + f(x_1 - ty, x_1 - ts) - 2f(x_1, t_1) \leqslant$$

$$\leqslant h(x_1 + ty) + h(x_1 - ty) - 2h(x_1) - (g(x_1 + ts) + g(x_1 - ts) - 2g(t_1)).$$

Vydělíme a spočteme limitu pro $t \to 0_+$. □

Poznámka (Konstrukce generujícího prostoru (důkaz předchozího?))
X Banachův, $K \subset X$ omezená, absolutně konvexní, $\overline{\mathrm{LO}}K = X$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $U_n := 2^n \cdot K + 2^{-n} \cdot B_X$, což je absolutně konvexní omezené okolí $\mathbf{o}$.

$\| \cdot \|_n :=$ Minkowského funkcionál U_n … to je ekvivalentní norma na X. Pro $x \in X$ označme $|x| := (\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2)^{\frac{1}{2}} \in [0, +\infty]$. $Y := \{x \in X | |x| < +\infty\} \implies (Y, |\cdot|)$ je NLP ($|\cdot|$ je „norma“, která nabývá i $+\infty$, je lsc … supremum spojité?).

Označme $T : Y \to X$ přirozenou inkluzi. Pak T je omezený: $\exists c > 0 : K \subset c \cdot B_X \implies U_n \subset (2^n \cdot c + 2^{-n})B_X \implies \| \cdot \|_n \geqslant \frac{1}{2^n c + 2^{-n}} \| \cdot \| \implies |\cdot| \geqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n c + 2^{-n}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \| \cdot \| \implies \|T\| \leqslant \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n c + 2^{-n}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$.

TODO!!!

TODO!!!