Příklad (2.1)
Najděte všechna řešení soustavy rovnic v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{C}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -i & a & 2-4i & 0 \\ 1 & 2i & b & 0 \\ i & -2 & i & -1 \end{array}\right)$$

Řešení
Upravíme Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -i & a & 2-4i & 0 \\ 1 & 2i & b & 0 \\ i & -2 & i & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & ai & 2i+4 & 0 \\ 1 & 2i & b & 0 \\ 1 & 2i & 1 & i \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & ai & 2i+4 & 0 \\ 0 & i(2-a) & b-(2i+4) & 0 \\ 0 & 0 & 1-b & i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2i & 1 & i \\ 0 & i(2-a) & -2i-3 & i \\ 0 & 0 & 1-b & i \end{array}\right)$$

Nyní vidíme, že pokud $b = 1$, vychází $0 = i$ (soustava nemá řešení), dále tedy $b \neq 1$. Zároveň pokud $a = 2$, pak z rovnosti pravých stran vychází $1 - b = -3 - 2i$, tj. $b = 4 + 2i$ (tedy v případě $a = 2$ a $b \neq 4 + 2i$ soustava nemá řešení).

Pokud $a = 2$ a $b = 4 + 2i$, pak $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_3 \cdot (1 - 4 - 2i) = i \Leftrightarrow x_3 = \frac{i(-3+2i)}{9+4} = -\frac{2+3i}{13}$ a $x_1 = i - x_3 - 2i \cdot x_2 = \frac{2+16i}{13} - 2i \cdot x_2$. Tedy řešením je

$$\left\{ \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2+16i \\ 0 \\ -2-3i \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Nakonec, pokud $a \neq 2$, dostáváme právě jedno řešení $x_3 = \frac{i}{1-b}$, $x_2 = \frac{i+(2i+3)x_3}{(2-a)i} = \frac{(1-b)+(2i+3)}{(1-b)(2-a)} = \frac{4-b+2i}{(1-b)(2-a)}$ a $x_1 = i - x_3 - 2i \cdot x_2 = \frac{(1-b)(2-a)i - i(2-a) - 2i\cdot(4-b+2i)}{(1-b)(2-a)} = \frac{2i-2bi+abi-ai-2i+ai-8i+2bi+4}{(1-b)(2-a)} = \frac{abi-8i+4}{(1-b)(2-a)}$.

Příklad (2.2)
Uvažujme přímku p v $\mathbb{R}^3$ zadanou parametricky jako

$$p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Pro která $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ obsahuje rovina s obecnou rovnicí $ax + by + cz = d$ přímku p.

b) Najděte nějakou soustavu 2 lineárních rovnic o 3 neznámých, jejichž množina všech řešení je rovna p.

Řešení (a)
Chceme, aby po dosazení přímky do rovnice roviny tato rovnice „vycházela“. Tedy máme:

$$(1-t)a + 2b + (3+t)c = d$$

t je parametr, kdežto vše ostatní konstanty, tedy jelikož rovnice musí „vycházet“ pro všechna t, musí se t na levé straně „odečíst“, tudíž $a = c$. Konstanty následně „vychází“ $a + 2b + 3a = d$, tj. $d = 4a + 2b$. Zároveň chceme vyloučit případ $\{a, b, c, d\} = \{0\}$, jelikož tomu odpovídá celý prostor a ne jen rovina. Řešením potom je

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \\ 4\alpha + 2\beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge (\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0) \right\}$$

Řešení (b)
Rozepíšeme si přímku soustavou rovnic:

$$x = 1 - t, y = 2, z = 3 + t, t \in \mathbb{R}$$

A následně sečteme 1. a 3. rovnici, tím odstraníme t a dostaneme tak soustavu 2 lineárních rovnic o 3 neznámých.

$$x + z = 4, y = 2$$

$$x + 0y + z = 4, 0x + y + 0z = 2$$