Consider a linearised homogeneous isotropic elastic solid, that is a continuous medium where the stress tensor is given by the formula $\boldsymbol{\tau} = \lambda(\operatorname{tr}\mathbb{e})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{e}$, where $\mathbb{e} := \frac{1}{2}\left(\nabla U + (\nabla U)^T\right)$ denotes the linearised strain tensor.

Příklad (1.)
Show that dynamic governing equation $\varrho_R \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}$ in this case reduces to

$$\varrho_R \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} \mathbf{U}) + \mu \Delta \mathbf{U}.$$

Důkaz

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})_j = (\operatorname{div}(\lambda(\operatorname{tr}\mathbb{e})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{e}))_j =$$
$$= \lambda\partial_k \left(\mathbb{I}_{jk} \sum_i \left(\frac{1}{2}\partial_i U_i + \frac{1}{2}\partial_i U_i\right)\right) + 2\mu \left(\frac{1}{2}\sum_i \partial_i(\partial_i U_j) + \frac{1}{2}\sum_i \partial_i(\partial_j U_i)\right) =$$
$$= \lambda\partial_j \left(\sum_i (\partial_i U_i)\right) + \mu \left(\sum_i \partial_i\partial_i U_j + \partial_j \left(\sum_i \partial_i U_i\right)\right) =$$
$$= \lambda(\nabla(\operatorname{div} \mathbf{U}))_j + \mu\Delta U_j + \mu(\nabla(\operatorname{div} \mathbf{U}))_j = ((\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} \mathbf{U}) + \mu\Delta\mathbf{U})_j$$

□

Příklad (2.)
Assume that solution to previous equation has the form of a travelling plane wave, that is $\mathbf{U} = \mathbf{A}\sin(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X} - \omega t)$. Substitute and show that the result can be rewritten in the form

$$\varrho_R c^2 \mathbf{A} = \left[\mu\left(\mathbb{I} - \frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right) + (\lambda+2\mu)\frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right]\mathbf{A}.$$

Důkaz
Levá strana:

$$\varrho_R\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2} = \varrho_R\mathbf{A}\frac{\partial\sin(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X}-\omega t)}{\partial t^2} = \varrho_R\mathbf{A}\frac{\partial(-\omega\cos(K\cdot X-\omega t))}{\partial t} =$$

$$= \varrho_R\mathbf{A} - \omega^2\sin(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X}-\omega t) = \varrho_R c^2\mathbf{A}(-K^2\sin(\ldots)).$$

První člen pravé strany:

$$((\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{U}))_j = (\lambda+\mu)\partial_j\left(\sum_i \partial_i A_i\sin(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X}-\omega t)\right) =$$

$$= (\lambda+\mu)\sum_i \partial_j A_i K_i\cos(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X}-\omega t) = -(\lambda+\mu)\sum_i A_i K_i K_j\sin(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X}-\omega t) =$$

$$= -(\lambda+\mu)(\mathbf{K}\otimes\mathbf{K})\mathbf{A}\sin(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X}-\omega t) = (\lambda+\mu)\left(\frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right)\mathbf{A}(-K^2\sin(\ldots)).$$

Druhý člen pravé strany:

$$\mu\Delta\mathbf{U} = \mu\Delta\left(\mathbf{A}\sin(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X}-\omega t)\right) = \mu\mathbf{A}\Delta\left(\sin(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X}-\omega t)\right) = \mu\mathbf{A}\sum_i K_i^2(-\sin(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X}-\omega t)) =$$

$$= \mu\mathbf{A}(-K^2\cdot\sin(\ldots)).$$

Předpokládáme, že $K \neq 0$, tedy můžeme dělit rovnici K^2 a navíc $\sin(\ldots)$ bude nulový pouze na množině s prázdným vnitřkem, takže rovnici můžeme dodefinovat ze spojitosti a můžeme dělit i $-\sin(\ldots)$:

$$\varrho_R c^2\mathbf{A} = (\lambda+\mu)\left(\frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right)\mathbf{A} + \mu\mathbf{A} = \left[\mu\left(\mathbb{I} - \frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right) + (\lambda+2\mu)\frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right]\mathbf{A}$$

□

This is an eigenvalue problem of the form $c^2\mathbf{A} = \mathbb{A}\mathbf{A}$, where

$$\mathbb{A} := \frac{\mu}{\varrho_R}\left(\mathbb{I} - \frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right) + \frac{\lambda+2\mu}{\varrho_R}\frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}.$$

Příklad (3.)
Show that the displacement in the form $\mathbf{U} := \mathbf{A}\sin(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X} - \omega t)$ is a solution in $\mathbb{R}^3$ provided that either $\mathbf{A}$ is parallel to $\mathbf{K}$ and the speed of propagation is $c_{||} = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho_R}}$ or $\mathbf{A}$ is perpendicular to $\mathbf{K}$ and the speed of propagation is $c_\perp = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho_R}}$.

Důkaz
$\left(\frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right)\mathbf{A} = \frac{\mathbf{K}}{K}\left(\frac{\mathbf{K}}{K}\cdot\mathbf{A}\right)$ je kolmá projekce vektoru $\mathbf{A}$ na $\mathbf{K}$ podle toho, co víme o skalárním součinu (skalární součin s jednotkovým vektorem dává velikost projekce, vynásobením tím samým jednotkovým vektorem získáme pak celou projekci).

Tím pádem $\left(\frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right)\mathbf{A}$ je tedy projekce $\mathbf{A}$ na $\mathbf{K}$ a $(\mathbb{I} - \ldots)\mathbf{A}$ je tedy projekce $\mathbf{A}$ na ortogonální doplněk $\mathbf{K}$. $\mathbf{A}$ tedy násobení maticí $\mathbb{A}$ rozloží na vektor ve směru $\mathbf{K}$, ten vynásobí $\frac{\lambda+2\mu}{\varrho_R}$, a na vektor v kolmém směru, a ten vynásobíme $\frac{\mu}{\varrho_R}$, a pak je zase sečteme.

Na levé straně násobíme skalárem c^2, na což se můžeme podívat jako na rozložení $\mathbf{A}$ na složku ve směru $\mathbf{K}$ a na složku v ortogonálním směru a následně vynásobíme obě části c^2 a sečteme. Tedy

$$c^2\left(\mathbb{I} - \frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right)\mathbf{A} + c^2\left(\frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right)\mathbf{A} = \frac{\mu}{\varrho_R}\left(\mathbb{I} - \frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right)\mathbf{A} + \frac{\lambda+2\mu}{\varrho_R}\left(\frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right)\mathbf{A}.$$

Jelikož jsou podprostory ortogonální, musí rovnost platit v každém z nich, tedy:

$$c^2\left(\mathbb{I} - \frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right)\mathbf{A} = \frac{\mu}{\varrho_R}\left(\mathbb{I} - \frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right)\mathbf{A},$$

$$c^2\left(\frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right)\mathbf{A} = \frac{\lambda+2\mu}{\varrho_R}\left(\frac{\mathbf{K}}{K}\otimes\frac{\mathbf{K}}{K}\right)\mathbf{A}.$$

Tudíž se vždy buď rovnají skaláry, nebo jsou nulové příslušné projekce. Obě projekce být nulové nemohou (součet dává původní vektor a předpokládáme, že $\mathbf{A} \neq \mathbf{o}$). Kdyby obě byly nenulové, tak $\mu = c^2 = \lambda + 2\mu$, tedy $\mu + \lambda = 0 \implies \gamma = +\infty \not\leqslant \frac{1}{2}$. Tedy zbývá možnost, že je právě jedna projekce nenulová.

Když $\mathbf{A}$ je paralelní na $\mathbf{K}$ (projekce na $\mathbf{K}$ je nenulová a druhá je nulová), pak $c^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\varrho_R}$, tj. $c = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho_R}}$, když $\mathbf{A}$ je na $\mathbf{K}$ kolmé, pak $c^2 = \frac{\mu}{\varrho_R}$, tj. $c = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho_R}}$. □