1 Úvod

Definice 1.1 (Metrika, metrický prostor)

M množina, $d : M \times M \to [0, \infty)$ je metrika, pokud $\forall x, y, z \in M$ platí:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$d(y, x) = d(x, y),$$
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Dvojice (M, d) se pak nazývá metrický prostor.

Definice 1.2 (Norma a normovaný lineární prostor (NLP))

Ať $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, pak $||\cdot|| : \mathbf{V} \to [0, \infty)$ je norma, pokud $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$

$$||\mathbf{x}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o},$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{F} : ||\lambda \mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||,$$
$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||.$$

Dvojice $(\mathbf{V}, ||\cdot||)$ se pak nazývá normovaný lineární prostor.

Definice 1.3 (Otevřená a uzavřená koule)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP, $x \in \mathbb{M}$, $r > 0$. Pak otevřená koule o středu x a poloměru r je množina $\mathrm{B}(x, r) := \{y \in \mathbb{M}; d(x, y) < r\}$. Uzavřená koule o středu x a poloměru r je množina $\overline{\mathrm{B}}(x, r) := \{y \in \mathbb{M}; d(x, y) \leq r\}$.

Věta 1.1

$(\mathbb{R}^d, ||\cdot||_p)$ je NLP pro $d \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$.

Důkaz
1. krok: $B = \left\{x \in \mathbb{R}^d; ||x||_p \leq 1\right\}$ je konvexní množina (tj. $\forall \lambda \in (0,1)\ \forall x, y \in B : \lambda x + (1-\lambda)y \in B$). Pro $p = \infty$:

$$\forall i \in [d] : |\lambda x_i + (1-\lambda)y_i| \leq \lambda |x_i| + (1-\lambda)|y_i| \leq \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1$$

Pro $p < \infty$:

$$\forall i \in [d] : |\lambda x_i + (1-\lambda)y_i|^p \leq \lambda |x_i|^p + (1-\lambda)|y_i|^p,$$

protože $t \mapsto t^p$ je konvexní funkce. Dopočítáním obou nerovností získáme, že je to opravdu konvexní množina.

2. krok: Pokud $|| \cdot ||$ splňuje $(i) + (ii)$ a B je konvexní, pak $|| \cdot ||$ je norma. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, BÚNO $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, položme $\tilde{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$, $\tilde{\mathbf{y}} := \frac{\mathbf{y}}{||\mathbf{y}||}$, tedy:

$$\frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||} = \frac{||\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||}\tilde{\mathbf{x}} + \frac{||\mathbf{y}||}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||}\tilde{\mathbf{y}} \in B \text{ (zlomky jsou } \lambda, 1-\lambda).$$

$$\left|\left|\frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||}\right|\right| \leq 1 \implies \frac{||\mathbf{x} + \mathbf{y}||}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||} \leq 1.$$

3. $|| \cdot ||_p$ zřejmě splní $(i) + (ii)$ a B je konvexní podle 1. kroku. Tedy $|| \cdot ||_p$ je norma. □

Poznámka (Značení)

$$l_p^d := \left(\mathbb{R}^d, || \cdot ||_p\right).$$

Definice 1.4 (Konvergence)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost v $\mathbb{M}$, $x \in \mathbb{M}$. Pak (x_n) konverguje k x pokud $d(x_m, x)$ konverguje k 0. Píšeme $x_n \to x$ nebo také $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

2 Otevřené a uzavřené množiny

Definice 2.1 (Vnitřek, vnějšek, hranice)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP. $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak $x_0 \in \mathbb{M}$ je vnitřní bod $A \equiv \exists r > 0 : \mathrm{B}(x_0, r) \subseteq A$. Dále vnitřek (interior) množiny A je množina

$$\operatorname{int}(a) = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je vnitřní bod } A\}.$$

Dále $x_0 \in \mathbb{M}$ je vnější bod $A \equiv \exists r > 0 : \mathrm{B}(x_0, r) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$. Vnějšek (exterior) množiny A je množina

$$\operatorname{ext}(a) = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je vnější bod } A\}.$$

Nakonec $x_0 \in \mathbb{M}$ je hraniční bod $A \equiv x \in \mathbb{M} \setminus (\text{int}(A) \cup \text{ext}(A))$. Hranice množiny A je množina

$$\partial A = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je hraniční bod } A\}.$$

Pozorování
Zřejmě $\text{int}(A) \subseteq A$.

Zřejmě $\text{ext}(A) = \text{int}(\mathbb{M} \setminus A) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$.

Definice 2.2 (Otevřená a uzavřená množina)

Buď $(\mathbb{M}, d)$ MP a $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak A je otevřená $\equiv A \cap \partial A = \emptyset$.

Dále uzávěr množiny A je množina $\overline{A} = A \cup \partial A$. Množina A je poté uzavřená $\equiv \partial A \subseteq A$.

Pozorování
Zřejmě A je otevřená $\Leftrightarrow A = \text{int}(A)$.

Otevřená koule je otevřená množina.

Lemma 2.1

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subseteq N \times A : x_n \to x$. Zároveň následující podmínky jsou ekvivalentní:

$$a) A \text{ je uzavřená}, \qquad b) A = \overline{A}, \qquad \forall (x_n \in A) : x_n \to x \in \mathbb{M} \implies x \in A.$$

Důkaz
$\implies$: Ať $x \in \overline{A}$. Pokud $x \in A$, polož $x_n = x$. Pokud $x \notin A$, pak $x \in \partial A$, tedy $\forall n\ \exists x_n \in \text{B}(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Pak $x_n \to x$ $(0 \leq d(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0)$.

$\Leftarrow$ Ať (x_n) je posloupnost v A, $x_n \to x$. Pokud $x \in A$, jsme hotovi. Pokud $x \notin A$, pak $\forall \varepsilon > 0\ \exists r_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in \text{B}(x, \varepsilon) \cap A$. Tedy $x \in \overline{A}$.

a) $\Leftrightarrow$ *b)* A je uzavřená $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \partial A \subseteq A \Leftrightarrow A = A \cup \partial A = \overline{A}$.

b) $\implies$ *c)* $\implies$ *a)* $A = \overline{A} \implies \forall (x_n) : x_n \to x \implies x \in A$ $\overline{\text{První část}} \implies \partial A \subseteq A$. ∎

Věta 2.2 (Základní vlastnosti otevřených množin)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP. Pak

(i) $\mathbb{M}$ a $\emptyset$ jsou otevřené.

(ii) Sjednocení libovolně mnoha otevřených je otevřený.

(iii) Průnik konečně mnoha otevřených je otevřený.

Důkaz

(i) Triviální. (ii) $x \in \bigcup_i M_i$, pak $\exists j : x \in M_j$. Potom M_j je otevřená, tedy existuje $r > 0 :$ $\mathrm{B}(x, r) \subseteq M_j \subseteq \bigcup_i M_i$. Tedy $\bigcup_i M_i$ je otevřená. (iii) $x \in \bigcap_i M_i$, pak $\forall i\ \exists r_i : \mathrm{B}(x, r_i) \subseteq M_i$. Polož $r = \min_i r_i > 0$ (protože i je z konečné množiny, tedy existuje minimum a to je jistě jeden z těch poloměrů, tedy > 0), pak $\mathrm{B}(x, r) \subseteq \bigcap_i M_i$. Tedy $\bigcap_i M_i$ je otevřená. □

Věta 2.3 (Vztah otevřená a uzavřené množiny)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ *je MP,* $A \subseteq M$*. Pak* A *je otevřená* $\Leftrightarrow$ $\mathbb{M} \setminus A$ *je uzavřená.*

Důkaz

$\Longrightarrow$: Zvol (x_n) posloupnost v $\mathbb{M} \setminus A$, $x_n \to x$. Sporem. Nechť $x \in A$. Potom $\exists \varepsilon > 0 :$ $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \subseteq A$, ale pak $\exists n : x_n \in A$. ↯.

$\Rightarrow$: Zvol $x \in A$. Protože $\mathbb{M} \setminus A$ je uzavřená, tedy $\partial(\mathbb{M} \setminus A) \subseteq \mathbb{M} \setminus A)$, $x \notin \partial(\mathbb{M} \setminus A)$, tedy $\exists \varepsilon > 0 : \mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ (to nelze) nebo $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{M} \setminus A) = \emptyset$. Tedy $\exists \varepsilon > 0 :$ $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{M} \setminus A) = \emptyset$, tj. $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \subseteq A$, tedy A je otevřená. □

Věta 2.4 (Základní vlastnosti uzavřených množin)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ *je MP,* $A \subseteq \mathbb{M}$*. Pak*

(i) $\mathbb{M}$ *a* $\emptyset$ *jsou uzavřené.*

(ii) Průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřený.

(iii) Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřené.

Důkaz

Plyne z věty výše a de-Morganových pravidel. □

Věta 2.5

Ať $(\mathbb{M}, d)$ *je MP,* $A \subseteq \mathbb{M}$*. Pak* $\operatorname{int}(A) = \bigcup\{G \subseteq A | G \text{ otevřené}\}$. $\overline{A} = \bigcap\{F \supseteq A | F \text{ uzavřené}\}$.

Důkaz
$\subseteq$: $x \in \operatorname{int}(A) \implies \exists \varepsilon > 0 : \mathrm{B}(x, \varepsilon) \subseteq A$, stačí položit $G = \mathrm{B}(x, \varepsilon)$.

$\supseteq$: Ať $G \subseteq A$ otevřená, pak $G = \operatorname{int}(G) \subseteq \operatorname{int}(A)$.

$\subseteq$: $x \in \overline{A}$, pak $\exists (x_n)$ v A: $x_n \to x$. Zvol $F \supseteq A$ uzavřená, pak $x_n \to x \in F$ (z uzavřené se nedá vykonvergovat).

$\supseteq$: Položme $F = \overline{A} \supseteq A$. □

3 Spojitost v metrických prostorech

Definice 3.1 (Spojitost v bodě, spojitost, k-Lipschitzovskost, Lipschitzovskost)

Ať $(\mathbb{M}, d), (\mathbb{N}, e)$ jsou MP, $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{M}$. Potom f je spojitá v $a \equiv \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{M} : d(x, a) < \delta \implies e(f(x), f(a) < \varepsilon)$.

f je spojitá na $\mathbb{M} \equiv \forall a \in \mathbb{M} : f$ je spojitá v a.

f je k-Lipschitzovská $(k > 0) \equiv \forall x, y \in \mathbb{M} : e(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$.

f je Lipschitzovská $\equiv \exists k > 0 : f$ je k-Lipschitzovská.

Pozorování
f je k-Lipschitzovská $\implies$ f je spojitá.

Definice 3.2 (Značení)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$, $x \in \mathbb{M}$. Pak $\operatorname{dist}(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$.

Lemma 3.1

Ať $(\mathbb{M}, d)$ *je MP,* $A \subseteq \mathbb{M}$. *Pak*

$$(i) \forall x \in \mathbb{M} : d(x, A) = d(x, \overline{A}),$$

$$(ii) \forall x \in \mathbb{M} : d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A},$$

$$(iii)\operatorname{dist}(\cdot, A) : \mathbb{M} \to \mathbb{R} \text{ je 1-Lipschitzovská.}$$

Důkaz

(*i*) $\geq$: Jasné (infimum přes menší množinu). $\leq$: Pro $n \in \mathbb{N}$ zvolme $y_n \in \overline{A}$: $d(x, y_n) < \operatorname{dist}(x, \overline{A}) + \frac{1}{n}$. Zvolme dále $x_n \in \mathrm{B}\left(y_n, \frac{1}{n}\right) \cap A$, pak $\operatorname{dist}(x, A) \leq d(x, x_n) \leq d(x, y_n) + d(y_n, x_n) < \operatorname{dist}(x, \overline{A}) + \frac{1}{n}$, celkem $\forall n \in \mathbb{N} : \operatorname{dist}(x, A) < \operatorname{dist}(x, \overline{A}) + \frac{2}{n} \implies \operatorname{dist}(x, A) \leq \operatorname{dist}(x, \overline{A})$.

(*ii*): BÚNO A je uzavřená (jinak podle (*i*)). $\Rightarrow$: Jasné (do inf dosadíme x). $\Rightarrow \forall n \, \exists x_n \in \mathrm{B}(x, \frac{1}{n}) \cap A$ protože $d(x, A) = 0$. Pak ale $x_n \to x$, tedy $x \in A$ z uzavřenosti.

(*iii*): Zvolme $x, y \in \mathbb{M}$. BÚNO $d(x, A) \geq d(y, A)$. Fixujeme $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $y_n \in A : d(y, y_n) < \operatorname{dist}(y, A) + \frac{1}{n}$. Pak

$$|d(x, A) - d(y, A)| = d(x, A) - d(y, A) < d(x, y_n) - \left(d(y, y_n) - \frac{1}{n}\right) \overset{\triangle}{\leq} \frac{1}{n} + d(x, y).$$

$\implies$ (n bylo libovolné, přejdeme k limitě) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq 1 \cdot d(x, y)$. $\square$

Lemma 3.2

Ať $(\mathbb{M}, d)$ *je MP. Pak*

$$(i) \forall x \neq y \in \mathbb{M} \; \exists f : \mathbb{M} \to \mathbb{R} \text{ 1-Lipschitzovská, že } f(x) \neq f(y),$$

(*ii*) *Projekce* $\pi_i : (\mathbb{R}^d, ||\cdot||_p) \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_d) \mapsto x_i$ *jsou Lipschitzovské,* $d \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$.

Důkaz

(*i*) Zvol $f := d(\cdot, \{x\})$.

(*ii*) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d : |\pi_i(x_1, \ldots, x_d) - \pi_i(y_1, \ldots, y_d)| = |x_i - y_i|$

$$\leq \begin{cases} p = \infty : & ||\vec{x} - \vec{y}||_\infty \\ p \neq \infty : & \sqrt[p]{\sum_{j=1}^d |x_j - y_j|^p} \end{cases}.$$

$\square$

Tvrzení 3.3

Ať $(\mathbb{M}, d)$, $(\mathbb{N}, e)$ *jsou MP,* $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(*i*) f *je spojitá,*

(*ii*) $f^{-1}(U)$ *je otevřená, kdykoliv* $U \subseteq \mathbb{N}$ *je otevřená,*

(*iii*) $f^{-1}(F)$ *je uzavřená, kdykoliv* $F \subseteq \mathbb{N}$ *je uzavřená.*

Důkaz
(ii) ⇔ (iii): Z věty o doplňcích a toho, že $f^{-1}(\mathbb{N} \setminus U) = \mathbb{M} \setminus f^{-1}(U)$.

(i) $\implies$ (ii): Nechť $U \subseteq \mathbb{N}$ otevřená, $x \in f^{-1}(U)$. Pak $f(x) \in U \implies \exists \varepsilon > 0 : \mathrm{B}(f(x), \varepsilon) \subseteq U$. $\implies$ (f spojitá) $\exists \delta > 0 : y \in \mathrm{B}(x, \delta) \implies f(y) \in \mathrm{B}(f(x), \varepsilon) \subseteq U$, pak $\mathrm{B}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.

(ii) $\implies$ (i): Nechť $x \in \mathbb{M}, \varepsilon > 0$. Pak $f^{-1}(\mathrm{B}(f(x), \varepsilon))$ je otevřená dle (ii). $\implies \exists \delta > 0 : \mathrm{B}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(\mathrm{B}(f(x), \varepsilon))$. Tedy $d(x, y) < \delta \implies f(y) \in \mathrm{B}(f(x), \varepsilon)$. $\square$

Definice 3.3 (Stejnoměrná spojitost)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ a $(\mathbb{N}, e)$ jsou MP, $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$. Pak f je stejnoměrně spojitá, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in \mathbb{M} : d(x, y) < \delta \implies e(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Důsledek
f je stejnoměrně spojitá $\implies$ f je spojitá. (Ale naopak to neplatí.)

f je Lipschitzovská $\implies$ f je stejnoměrně spojitá. (Stejně tak tohle naopak neplatí.)

Definice 3.4 (Izometrie)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ a $(\mathbb{N}, e)$ jsou MP, $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$. Pak f je izometrie, pokud $\forall x, y \in \mathbb{M} : d(x, y) = e(f(x), f(y))$.

Důsledek
Izometrie je 1-Lipschitzovská. (Ale ne naopak.)

Definice 3.5 (Homeomorfismus)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ a $(\mathbb{N}, e)$ jsou MP, $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$. Pak f je homeomorfismus, pokud f je spojitá bijekce a f^{-1} je spojitá.

Důsledek
Izometrie na je homeomorfismus. (Ale opačně to neplatí.)

Lemma 3.4

I interval, $f : I \to \mathbb{R}$, že $|f'(x)| \le C, \forall x \in \operatorname{int}(I) \implies f$ je C-Lipschitzovská.

Důkaz
Ať $a < b \in I \implies$ (Lagrange) $\exists \zeta \in (a, b) : |\frac{f(b)-f(a)}{b-a}| = |f'(\zeta)| \le C$, tj. $|f(b) - f(a)| \le C|b - a|$. $\square$

Definice 3.6 (Topologicky ekvivalentní)

Řekneme, že σ a σ_1 jsou topologicky ekvivalentní, pokud

$$\{A \subseteq \mathbb{Y} : A \text{ je otevřená v } (\mathbb{Y}, \sigma)\} = \{A \subseteq \mathbb{Y} : A \text{ je otevřená v } (\mathbb{Y}, \sigma_1)\}.$$

Tvrzení 3.5

Buďte $(\mathbb{X}, \varrho)$, $(\mathbb{Y}, \sigma)$ MP, $f : (\mathbb{X}, \varrho) \to (\mathbb{Y}, \sigma)$ homeomorfismus. Definujeme pro všechna $y, y' \in \mathbb{Y}$ zobrazení $\sigma_1 \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \to [0, \infty)$ předpisem

$$\sigma_1(y, y') = \varrho(f^{-1}(y), f^{-1}(y')).$$

Pak σ_1 je metrika na $\mathbb{Y}$, $f : (\mathbb{X}, \varrho) \to (\mathbb{Y}, \sigma_1)$ je izometrie a metriky σ a σ_1 jsou topologicky ekvivalentní.

Důkaz

Metrika: Banální, cvičení pro nás. Izometrie: Nechť $x, x' \in \mathbb{X}$ jsou libovolné body.

$$\sigma_1(f(x), f(x')) = \varrho\left(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(x'))\right) = \varrho(x, x'),$$

a tedy f je izometrie.

Topologická ekvivalence: Nechť $U \subseteq \mathbb{Y}$ je otevřená vzhledem k σ. Pak $f^{-1}(U)$ je otevřená (f je homeomorfismus), ale f je izometrie, tedy f^{-1} je izometrie, tudíž f^{-1} je spojitá. Tj.

$$U = f\left(f^{-1}(U)\right) = \left(f^{-1}\right)^{-1}\left(f^{-1}(U)\right) \text{ je otevřená.}$$

Podobně pokud U je σ_1-otevřená, je σ-otevřená. □

Věta 3.6

Buďte ϱ_1, ϱ_2 metriky na $\mathbb{X}$. Pak ϱ_1 a ϱ_2 jsou topologicky ekvivalentní $\Leftrightarrow$

$$(\forall x \in \mathbb{X}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in \mathbb{X} : \varrho_1(x, y) < \delta \implies \varrho_2(x, y) < \varepsilon) \wedge (\forall x \in \mathbb{X}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in \mathbb{X} : \varrho_2(x, y)$$

Důkaz

Snadné cvičení. □

Definice 3.7 (Diametr, omezená množína)

Buď $(\mathbb{X}, \varrho)$ MP, $A \subseteq \mathbb{X}$. Definujeme $\operatorname{diam}_\varrho(A) = \sup\{\varrho(x, y) : x, y \in A\}$.

Řekneme, že A je omezená, pokud $\operatorname{diam}_\varrho(A) < \infty$.

Definice 3.8 (Omezená metrika)

ϱ je na $\mathbb{X}$ omezená pokud $\mathbb{X}$ je omezená.

4 Operace s metrickými prostory

Definice 4.1 (Operace)

Je-li $(\mathbb{X}, \varrho)$ MP, $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$, pak metrický prostor $(\mathbb{Y}, \varrho|_{\mathbb{Y}\times\mathbb{Y}})$ nazýváme podprostorem prostoru $(\mathbb{X}, \varrho)$, značíme $(\mathbb{Y}, \varrho)$.

Důkaz

Že $(\mathbb{Y}, \varrho)$ je MP je zřejmé. □

Tvrzení 4.1

Buď $(\mathbb{X}, \varrho)$ MP, $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$. Pak:

1) Pokud $G \subseteq \mathbb{X}$ je otevřená v $(\mathbb{X}, \varrho)$, pak $G' = G \cap \mathbb{Y}$ je otevřená v $(\mathbb{Y}, \varrho)$.

2) Pokud $G' \subseteq \mathbb{Y}$ je otevřená v $(\mathbb{Y}, \varrho)$, pak $\exists G \subseteq \mathbb{X}$ otevřená v $(\mathbb{X}, \varrho) : G' = G \cap \mathbb{Y}$.

Důkaz

1) Nechť $y \in G'$. Protože G je otevřená v $\mathbb{X}$, tak $\exists r > 0 : \mathrm{B}_{\mathbb{X},\varrho}(y, r) \subseteq G$. Tedy $\mathrm{B}_{\mathbb{Y},\varrho}(y, r) = \mathrm{B}_{\mathbb{X},\varrho}(y, r) \cap \mathbb{Y} \subseteq G \cap \mathbb{Y} = G'$.

2) Nechť je dána G' otevřená v $(\mathbb{Y}, \varrho)$. Pak $\forall x \in G'\ \exists \varepsilon(x) > 0 : \mathrm{B}_{\mathbb{Y},\varrho}(x, \varepsilon(x)) \subseteq G'$. Zřejmě $G' = \bigcup_{x\in G'} \mathrm{B}_{\mathbb{Y},\varrho}(x, \varepsilon(x))$.

Položme $G = \bigcup_{x\in G'} \mathrm{B}_{\mathbb{X},\varrho}(x, \varepsilon(x))$. Potom je $G \cap \mathbb{Y} = G'$. G je otevřená, jelikož je sjednocením otevřených množin. □

Definice 4.2 (Součet MP)

Mějme MP $\{\mathbb{X}_\alpha, \varrho_\alpha\}_{\alpha\in I}$, které splňují $\forall \alpha \in I\ \forall x, y \in \mathbb{X}_\alpha : \varrho_\alpha(x, y) \leq 1$. Sumou prostorů $(\mathbb{X}_\alpha, \varrho_\alpha)$ nazýváme prostor

$$\sum_{\alpha\in I} (\mathbb{X}_\alpha, \varrho) = (\mathbb{X}, \varrho),$$

kde

$$\mathbb{X} = \coprod_{\alpha\in I} \mathbb{X}_\alpha = \{(x, \alpha) | x \in \mathbb{X}_\alpha, \alpha \in I\},$$

$$\varrho((x, \alpha), (y, \beta)) = 1,\ \text{pokud}\ \alpha \neq \beta, \varrho_\alpha(x, y),\ \text{pokud}\ \alpha = \beta.$$