Poznámka (Úmluva)
Všechny topologické prostory v tomto semestru budou Hausdorffovy (T_2). Tedy regulární jsou automaticky T_3, úplně regulární jsou automaticky T_π a normální jsou T_4.

Speciálně např. kompaktní prostory jsou T_4.

1 Parakompaktní prostory

Poznámka (Připomenutí)
Pokrytí, otevřené pokrytí, podpokrytí.

Definice 1.1 (Zjemnění)

Ať X je množina a $\mathcal{S}$ je pokrytí X. Řekneme, že systém $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(X)$ je zjemnění $\mathcal{S}$, pokud $\mathcal{T}$ je pokrytí a $\forall T \in \mathcal{T}\ \exists S \in \mathcal{S} : T \subseteq S$.

Definice 1.2 (Lokálně konečný systém)

Ať $\mathbb{X}$ je TP, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$. $\mathcal{S}$ se nazývá lokálně konečný, pokud

$$\forall x \in \mathbb{X}\ \exists U \in \mathcal{U}(x) : \{S \in \mathcal{S} | S \cap U \neq \emptyset\} \text{ je konečná.}$$

Systém $\mathcal{S}$ se nazve diskrétní, pokud

$$\forall x \in \mathbb{X}\ \exists U \in \mathcal{U}(x) : |\{S \in \mathcal{S} | S \cap U \neq \emptyset\}| \leq 1.$$

Systém $\mathcal{S}$ se nazve σ-lokálně konečný (resp. σ-diskrétní), pokud $\exists S_n$, že $= \bigcup_{n=1}^{\infty}$, že $\mathcal{S}_n$ jsou lokálně konečné (resp. diskrétní), $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka
Diskrétní systém je lokálně konečný. σ-diskrétní systém je σ-lokálně konečný.

Lemma 1.1 (Uzávěr lokálně konečného prostoru)

Ať $\mathbb{X}$ je TP, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ lokálně konečný systém. Pak $\left\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\right\}$ je opět lokálně konečný a platí $\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \left\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\right\}$.

Důkaz
Ať $x \in \mathbb{X}$ je libovolné. Existuje $U \in \mathcal{U}(x) : \{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$ je konečná. Ať $V = \int U, V \in \mathcal{U}(x)$. $\{A \in \mathcal{A} : A \cap V \neq \emptyset\}$ je zřejmě konečná. $V \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow V \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Tedy $\left\{A \in \mathcal{A} : \overline{A} \cap V \neq \emptyset\right\} = \{A \in \mathcal{A} : A \cap V \neq \emptyset\}$. Tedy $\left\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\right\}$ je konečná.

$\supseteq$: $\bigcup \mathcal{A} \supseteq A, A \in \mathcal{A}$, tedy $\overline{\bigcup \mathcal{A}} \supseteq \overline{A} \implies \overline{\bigcup \mathcal{A}} \supseteq \bigcup \left\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\right\}$.

$\subseteq$: Ať $x \in \overline{\bigcup \mathcal{A}}$. $\exists U \in \mathcal{U}(x)$ otevřená, že $\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq 0\} = \{A_1, \ldots, A_n\}$. $x \in \overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} \overset{\text{konečné}}{=} \overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$. $\exists i \leq n : x \in \overline{A_i}$. □

Definice 1.3 (Parakompaktní)

TP $\mathbb{X}$ se nazývá parakompaktní, pokud každé jeho otevřené pokrytí má lokálně konečné otevřené zjemnění.

Poznámka
Kompaktní $\implies$ parakompaktní (protože podpokrytí je zjemnění a konečné je lokálně konečné).

Diskrétní TP $\implies$ parakompaktní.

Tvrzení 1.2

Uzavřený podprostor parakompaktního TP je parakompaktní.

Důkaz
$\mathbb{X}$ je parakompaktní TP a $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená. Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí F (otevřenými množinami v F). Z definice podprostoru $\forall U \in \mathcal{U}\ \exists V_U$ otevřená v $\mathbb{X} : U = F \cap V_U$. Uvažujme $\mathcal{V} = \{V_U | U \in \mathcal{U}\} \cup \{F \setminus F\}$. $\mathcal{V}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Existuje otevřené lokálně konečné zjemnění $\mathcal{W}$ tohoto $\mathcal{V}$. $\{F \cap W | W \in \mathcal{W}\}$ je otevřené pokrytí F a zároveň lokálně konečné. Navíc je to i zjemnění $\mathcal{U}$. □

Věta 1.3 (Charakterizace parakompaktnosti)

Pro regulární TP $\mathbb{X}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

a) $\mathbb{X}$ je parakompaktní.

b) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má otevřené σ-lokálně konečné zjemnění.

c) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má lokálně konečné zjemnění (libovolnými množinami).

d) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má uzavřené lokálně konečné zjemnění.

Důkaz
a) $\implies$ *b*) : každé lokálně konečné zjemnění je σ-lokálně konečné.

b) $\implies$ *c*) : Ať $\mathbb{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Podle b) existuje otevřené zjemnění $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, $\mathcal{V}_n$ lokálně konečný systém. $W_n := \bigcup \mathcal{V}_n$ je otevřené $\{W_n | n \in \mathbb{N}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Ať $A_n := W_n \setminus \bigcup_{i<n} W_i$. $\{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ je lokálně konečné pokrytí $\mathbb{X}$ (každé $x \in \mathbb{X}$ je v nějakém W_n, takže už není ve větších A_n). $\{A_n \cap V | n \in \mathbb{N}, V \in \mathcal{V}_n\}$ je lokálně konečné zjemnění $\mathcal{U}$.

c) $\implies$ *d*) : Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Pro každé $x \in \mathbb{X}$ existuje $U_x \in U : x \in U_x$. Nyní máme bod v otevřené množině, tedy z regularity existují otevřené množiny $V_x \subseteq \mathbb{X} : x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$. $\mathcal{V} := \{V_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. $\mathcal{V}$ má lokálně konečné zjemnění $\mathcal{W}$ podle *c*). $\left\{\overline{W} | W \in \mathcal{W}\right\}$ je lokálně konečný systém podle lemmatu „Uzávěr lokálně konečného systému“. Navíc je i pokrytí a zjemňuje $\mathcal{U}$.

d) $\implies$ *a*) Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Z d) existuje lokálně konečné uzavřené zjemnění $\mathcal{V}$. Pro $x \in \mathbb{X}$ existuje W_x otevřené okolí x protínající jen konečně mnoho prvků z $\mathcal{V}$. $\mathcal{W} := \{W_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Z d) existuje lokálně konečné uzavřené zjemnění $\mathcal{A}$ toho $\mathcal{W}$. Pro $V \in \mathcal{V}$ označíme $V^* := \mathbb{X} \setminus \bigcup \{A \in \mathcal{A} | A \cap V = \emptyset\}$. Zřejmě $V^* \supseteq V$. Tedy $\{V^* | V \in \mathcal{V}\}$ je otevřené (odčítáme uzavřenou množinu, neboť A jsou uzavřené a množina je lokálně konečná, tedy podle lemmatu … je uzavřené i sjednocení) pokrytí.

Ať $x \in \mathbb{X}$. $\exists U$ okolí x, které protíná jen konečně prvků $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Zřejmě $U \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Každé A_i je podmnožinou nějakého W_y, tj. (podle volby W_y) A_i protíná jen konečně mnoho prvků z $\mathcal{V}$. Navíc je-li $V \in \mathcal{V}$ a $A \in \mathcal{A}$, že $A \cap V = \emptyset$, pak $A \cap V^* = \emptyset$. Tedy každé A_i protíná pouze konečně mnoho prvků V^*, $V \in @V$. Pro každé $V \in @V$ fixujeme $U_v \in \mathcal{U} : V \subseteq U_V$. Zřejmě $V \subseteq U_V \cap V^*$. Pak $\{U_V \cap V^* | V \in \mathcal{V}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$, které je lokálně konečné a které je zjemnění $\mathcal{U}$. □

Důsledek
Každý Lindelöfův regulární prostor je parakompaktní.

Důkaz
Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Z lindolöfovosti existuje spočetné pokrytí $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. $\mathcal{V}$ je σ-lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{U}$. Tedy platí b) z minulé věty. □

Definice 1.4 (Skrčení)

Ať X je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (pokrytí X). Indexovaný systém $\{T_S : S \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se nazývá skrčení systému $\mathcal{S}$, pokud (je to pokrytí) a $T_S \subseteq S, S \in \mathcal{S}$.

Poznámka (Nadmutí)
Skrčení je speciální případ zjemnění.

Podobně jako skrčení lze definovat pojem nadmutí.

Lemma 1.4 (O skrčení)

Ať $\mathbb{X}$ je normální TP. Pak každé lokálně konečné (stačí bodově konečné) otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má uzavřené skrčení, jehož vnitřky tvoří pokrytí.

Důkaz
Ať $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \varkappa\}$, $\varkappa$ kardinál, $\mathcal{U}$ je lokálně kompaktní, otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Nyní $F_0 := \mathbb{X} \setminus \bigcup\{U_\alpha : 0 < \alpha < \varkappa\}$ uzavřená, $F_0 \subseteq U_0$ (z toho, že $\mathcal{U}$ je pokrytí). Z normality existuje otevřená $V_0 \subseteq \mathbb{X} : F_0 \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq U_0$.

Nyní indukcí: Nechť máme zkonstruované $V_\beta : \forall\beta < \alpha < \varkappa$. Označíme $F_\alpha := \mathbb{X} \setminus (\bigcup\{V_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup\{U_\gamma : \alpha < \gamma < \varkappa\})$. Z normality zas $V_\alpha \subseteq \mathbb{X} : F_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$.

$\mathcal{V} = \left\{\overline{V_\alpha} : \alpha < \varkappa\right\}$ je skrčení $\mathcal{U}$, $\operatorname{int}\overline{V_\alpha} \supseteq V_\alpha$ a $\bigcup_{\alpha<\varkappa} V_\alpha = \mathbb{X}$, tedy $\bigcup_{\alpha<\varkappa} \operatorname{int}\overline{V_\alpha} = \mathbb{X}$. □

Definice 1.5 (Kolektivně normální)

TP $\mathbb{X}$ se nazývá kolektivně normální, pokud pro každý diskrétní systém $\mathcal{F}$ z uzavřených množin existuje disjunktní systém otevřených množin $\{U(F) : F \in \mathcal{F}\}$, že $F \subseteq U(F), F \in \mathcal{F}$ (tj. otevřené nadmutí).

Poznámka
Každý kolektivně normální prostor je normální.

Tvrzení 1.5

Každý parakompaktní prostor už je kolektivně normální, tedy i normální.

Důkaz
Ukážeme nejprve, že $\mathbb{X}$ je regulární. Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Pro $y \in F$ existuje otevřené okolí U_y bodu y, že $x \notin \overline{U_y}$. $\mathcal{U} := \{U_y : y \in F\} \cup \{\mathbb{X} \setminus F\}$ otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Ať $\mathcal{V}$ je lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{U}$. $G := \bigcup\{V \in \mathcal{V} : V \cap F \neq \emptyset\}$. Z lemmatu $\overline{G} = \bigcup\left\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}, V \cup F \neq \emptyset\right\} \not\ni x$. $G \supset F$, G otevřená. Tedy $\mathbb{X}$ je regulární.

Ať $\mathcal{F}$ je diskrétní soubor z uzavřených množin. Pro $F \in \mathcal{F}$ uvážíme $\bigcup\{H \in \mathcal{F} : H \neq F\}$ ... uzavřená z lemmatu o uzávěru sjednocení lokálně kompaktního systému. Pro $x \in F$ existuje (z první části důkazu) U_x otevřená, že $x \in U_x$, $\overline{U_x} \cap H = \emptyset$ pro $H \neq F, H \in \mathcal{F}$. $\{U_x : x \in F \in \mathcal{F}\} \cup \{\mathbb{X} \setminus \bigcup F\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Ať $\mathcal{V}$ je otevřené lokálně konečné zjemnění. Pro $F \in \mathcal{F} : V(F) := \{V \in \mathcal{V} : V \cup F \neq \emptyset\} \setminus \bigcup\left\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}, V \cap H \neq \emptyset \text{ pro nějaké } H \in \mathcal{F}, H\right.$ Platí $F \subseteq V(F)$. Pro $F, F' \in \mathcal{F}, F \neq F' \implies V(F) \cap V(F') = \emptyset$. $\{V(F) : F \in \mathcal{F}\}$ je disjunktní otevřené nadmutí $\mathcal{F}$. □

Definice 1.6 (Hvězda)

Ať $\mathbb{X}$ je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$, $x \in \mathbb{X}$, $A \subseteq \mathbb{X}$.

Hvězda bodu x vzhledem k $\mathcal{S}$ je $\mathrm{st}(x, \mathcal{S}) = \bigcup \{S \in \mathcal{S} : x \in S\}$.

Hvězda množiny A vzhledem k @S je $\mathrm{st}(A, \mathcal{S}) = \bigcup_{x \in A} \mathrm{st}(x, \mathcal{S})$.

Definice 1.7 (Barycentrické a hvězdovité zjemnění)

Ať $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou pokrytí $\mathbb{X}$. Řekneme, že $\mathcal{U}$ barycentricky zjemňuje $\mathcal{V}$, pokud $\{\mathrm{st}(x, \mathcal{U}) : x \in \mathbb{X}\}$ zjemňuje $\mathcal{V}$.

Řekneme, že $\mathcal{U}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{V}$, pokud $\{\mathrm{st}(U, \mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$ zjemňuje $\mathcal{V}$.

Například
Ať $(\mathbb{X}, \varrho)$ je MP. Ať $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou pokrytí $\mathbb{X}$ tvořená po řadě všemi $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon$ koulemi ($\varepsilon > 0$ pevné). Pak $\mathcal{U}$ zjemňuje barycentricky $\mathcal{V}$ a hvězdovitě $\mathcal{W}$.

Lemma 1.6 (Dvojité barycentrické zjemnění je hvězdovité)

Ať X je množina, $\mathcal{U}$ pokrytí $\mathcal{X}$, $\mathcal{V}$ barycentrické zjemnění $\mathcal{U}$ a $\mathcal{W}$ barycentrické zjemnění $\mathcal{V}$. Potom $\mathcal{W}$ je hvězdovité zjemnění $\mathcal{U}$.

Důkaz
Mějme $W \in \mathcal{W}$ libovolně. Chceme najít $U \in \mathcal{U} : \mathrm{st}(W, \mathcal{W}) \subseteq U$. $W = \emptyset$ triviální. $W \neq \emptyset$: Fixujeme $x_0 \in W$. Pro každé $x \in \mathbb{X}$ existuje $V_x \in \mathcal{V}$: $\mathrm{st}(x, \mathcal{W}) \subseteq V_x$. Nyní

$$\mathrm{st}(W, \mathcal{W}) = \bigcup \{T \in \mathcal{W} : T \cap W \neq \emptyset\} = \bigcup \{\{T \in \mathcal{W} | x \in T\} \,|x \in W\} = \bigcup \{\mathrm{st}(x, \mathcal{W}) | x \in W\} \subseteq \bigcup \{V$$

protože $W \subseteq V_x$ pro každé $x \in W$. $\mathcal{V}$ barycentricky zjemňuje $\mathcal{U}$, tedy existuje $u \in \mathcal{U}$: $\mathrm{st}(x_0, \mathcal{V}) \subseteq U$. □

Věta 1.7 (Charakterizace parakompaktnosti pomocí hvězdovitých zjemnění)

Pro TP $\mathbb{X}$ je ekvivalentní:

a) $\mathbb{X}$ je parakompaktní.

b) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má barycentrické zjemnění.

c) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má hvězdovité zjemnění.

d) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má otevřené σ-diskrétní zjemnění a $\mathbb{X}$ je regulární.

Důkaz

a) $\implies$ *b)* Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Z a) vyplývá, že existuje jeho lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{V}$. Víme, že $\mathbb{X}$ je parakompaktní, tedy normální. Z lemmatu o skrčení existuje uzavřené pokrytí $\mathcal{W} = \{W_V | V \in \mathcal{V}\}$, $W_V \subseteq V$. $\mathcal{V}$ je lokálně konečné, tedy i $\mathcal{W}$ je lokálně konečné. Pro $x \in \mathbb{X}$ definujeme $A_x = \bigcap\{V | x \in W_V\}$. Jde o konečný průnik (vzhledem k lokální kompaktnosti), tedy A_x je otevřená. Položme $B_x = \bigcup\{W \in \mathcal{W} | x \notin W\}$. Podle lemmatu o sjednocení lokálně konečného systému je B_x uzavřená. Zřejmě $x \in A_x \backslash B_x =: C_x$ je otevřená. Tedy $\mathcal{C} = \{C_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$.

Ukážeme, že $\mathcal{C}$ barycentricky zjemňuje $\mathcal{U}$: Ať $y \in \mathbb{X}$. Chceme najít $V \in \mathcal{U}$: $\mathrm{st}(y, \mathcal{C}) \subseteq V$. Víme, že existuje $V \in \mathcal{V} : y \in W_V$. Ať $x \in \mathrm{st}(y, \mathcal{C})$. Pak $y \in C_x = A_x \setminus B_x$, tedy $y \notin B_x$, tudíž $x \in W_V \subseteq V$ (kdyby ne, pak $W_V \subseteq B_x$, tedy $y \notin C_x$).

b) $\implies$ *c)* k otevřenému pokrytí můžeme najít barycentrické zjemnění, ke kterému můžeme najít barycentrické zjemnění. Pak c) vyplývá z předchozího lemmatu.

c) $\implies$ *d)* $\mathbb{X}$ je regulární: Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Uvažujme otevřené pokrytí $\{\mathbb{X} \setminus F, \mathbb{X} \setminus x\}$. Podle c) existuje otevřené hvězdovité zjemnění $\mathcal{U}$. $\exists U \in \mathcal{U} : x \in U$. Nutně $U \cap F = \emptyset$. Pak $\overline{U} \subseteq \mathrm{st}(U, \mathcal{U}) \subseteq \mathbb{X} \subseteq \mathbb{X} \setminus F$. Tedy $\mathbb{X}$ je regulární.

Ať $\mathcal{U}_0$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Chceme najít σ-diskrétní zjemnění toho $\mathcal{U}_0$. Použijeme podmínku c) spočetně nekonečněkrát, abychom induktivně našli otevřená pokrytí $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$, že $\mathcal{U}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{U}_n$, $n \geq 0$. Oindexujme prvky $\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 = \{U_i | i \in I\}$. Pro $i \in I$ a pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme $U_{i,n} := \{x \in \mathbb{X} | x$ má okolí $V : \mathrm{st}(V, \mathcal{U}_n) \subseteq U_i\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N} : \{U_{i,n} | i \in I\}$ je otevřené zjemnění $\mathcal{U}$, ale ne nutně pokrytí.

Pomocné tvrzení: Pokud $x \in U_{i,n}, u \notin U_{i,n+1}$, pak neexistuje $U \in \mathcal{U}_{n+1}$, že $x, y \in U$. Důkaz: Pro $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ existuje $W \in \mathcal{U}_n : \mathrm{st}(U, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq W$. Tedy pokud $x \in U \cap U_{i,n}$, pak $W \subseteq \mathrm{st}(x, \mathcal{U}_n) \subseteq U_i$. Pak $\mathrm{st}(U, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq U_i$ a $u \subseteq U_{i,n+1}$. Tedy $y \notin U$, protože $y \notin U_{i,n+1}$.

Uvažme dobré uspořádání $<$ na I. Ať $V_{i_0,n} = U_{i_0,n} \setminus \bigcup\{U_{i,n+1} | i < i_0\}$, $i_0 \in I, n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $** = \{V_{i_0,n} | i_0 \in I, n \in \mathbb{N}\}$ je hledané σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{U}_0$. Pro $i_1 \neq i_2, i_1, i_2 \in I$, pak $i_1 < i_2$ nebo naopak. Podle toho buď $V_{i_2,n} \subseteq \mathbb{X} \setminus U_{i_1,n+1}$ nebo $V_{i_1,n} \subseteq \mathbb{X} \setminus U_{i_2,n+1}$. Podle pomocného tvrzení platí, že pokud $x \in V_{i_1,n}$ a $y \in V_{i_2,n}$, pak neexistuje $U \in \mathcal{U}_{n+1}$, že $x, y \in U$. To nám říká, že $\forall n \in \mathbb{N} : \{V_{i,n} | i \in I\}$ je diskrétní. Zbývá už jen ukázat, že $**$ je pokrytí: Ať $y \in \mathbb{X}$. Existuje $<$-nejmenší $i(y) \in I : y \in U_{i(y),n}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Nyní $y \notin U_{i,n+2}$ pro $i < i(y)$. Podle pomocného tvrzení použitého na $n+1$ platí $\mathrm{st}(y, \mathcal{U}_{n+2}) \cap \bigcup\{U_{i,n+1} | i < i(y)\} = \emptyset$. Tedy $y \in V_{i(y)}, n$.

d) $\implies$ *a)* Víme, že $\mathbb{X}$ je regulární, tedy můžeme aplikovat charakterizaci parakompaktnosti z minulého týdne, jelikož σ-diskrétní $\implies$ σ-lokálně konečný. $\square$

Věta 1.8 (Stone)

Každý metrizovatelný prostor je parakompaktní.

Důkaz
Ukážeme, že každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ má barycentrické zjemnění. Fixujeme na nějakém tom prostoru $\mathbb{X}$ kompatibilní metriku $\varrho \leq 1$. Navíc búno $\mathbb{X} \notin \mathcal{U}$. Pro každé $x \in \mathbb{X}$ a $U \in \mathcal{U}$, že $x \in U$, existuje největší možné $\varepsilon_{x,U} > 0$, že $B(x, 5\varepsilon_{x,U})$. Položíme $\mathcal{V} = \{B(x, \varepsilon_{x,U}) | x \in U \in \mathcal{U}\}$. Ověříme, že $\mathcal{V}$ barycentricky zjemňuje $\mathcal{U}$: Ať $x \in \mathbb{X}$. Chceme najít $U \in \mathcal{U} : \operatorname{st}(x, \mathcal{V}) \subseteq U$. Ať $\varepsilon_x = \sup \{\varepsilon_{x,U} | x \in U \in \mathcal{U}\}$. $0 < \varepsilon_x \leq 1$. Existuje $U \in \mathcal{U}$: $\varepsilon_{x,U} \geq \frac{\varepsilon_x}{2}$.

Ukážeme, že $\operatorname{st}(x, \mathcal{V}) \subseteq U$. Ať tedy $x \in B(y, \varepsilon_{y,v})$ pro nějaké $y \in V \in \mathcal{U}$. Chceme $B(y, \varepsilon_{y,v}) \subseteq U$. Máme $B(y, 5\varepsilon_{y,v}) \subseteq V$ a zároveň $\varrho(x, y) < \varepsilon_{U,V}$. Z $\triangle$-nerovnosti: $B(x, 4\varepsilon_{y,V}) \subseteq V$. Z maximality $\varepsilon_{x,V} \geq \frac{1}{5}4\varepsilon_{y,V}$. Také $2\varepsilon_{x,U} > \varepsilon_x \geq \varepsilon_{x,V}$. Dohromady $2\varepsilon_{x,U} > \frac{4}{5}\varepsilon_{y,V}$, tj. $5\varepsilon_{x,U} > 2\varepsilon_{y,V}$. Pro $z \in B(y, \varepsilon_{y,V}) : \varrho(x, z) < 2\varepsilon_{y,V}$, a tedy $\varrho(x, z) < 5\varepsilon_{x,U}$. Proto $z \in U$. Tudíž $B(y, \varepsilon_{y,v}) \subseteq U$. $\square$

Definice 1.8

Pro funkci $f : X \to \mathbb{R}$ značíme $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$.

Věta 1.9 (Rozklad jednotky)

Ať $\mathbb{X}$ je parakompaktní prostor, $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Pak existuje rozklad jednotky podřízený tomuto pokrytí, tj. systém spojitých funkcí $f_i : X \to [0, 1]$, $i \in I$, že $\{\operatorname{supp} f_i : i \in I\}$ je lokálně konečné zjemnění $\mathcal{U}$ a $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1, \forall x \in \mathbb{X}$.

Důkaz
$\mathbb{X}$ parakompaktní, tedy normální. Tedy existuje otevřené pokrytí $\mathcal{W}$ takové, že $\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ zjemňuje $\mathcal{U}$. Ať $\mathcal{V}$ je lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{W}$. Víme, že existuje uzavřené skrčení $\{F_V : V \in \mathcal{V}\}$, $F_V \subseteq V$. Z normality existují spojité funkce $g_V : \mathbb{X} \to [0, 1]$, $g_V|_{F_V} = 1$, $g_V|_{\mathbb{X} \setminus V} = 0$. Položme $g(x) := \sum_{V \in \mathcal{V}} g_V(x)$. Funkce g je spojitá, protože spojitost je lokální pojem a g je lokálně součet konečně mnoha nenulových spojitých funkcí. Navíc zřejmě $g \geq 1$, protože $\{F_V : V \in \mathcal{V}\}$ je pokrytí $\mathbb{X}$. Tedy položme $f_V := \frac{g_V}{g}$. $\square$

Věta 1.10 (Michaelova selekční)

Zdola polospojitá (vícehodnotová) funkce z parakompaktního prostoru do neprázdných uzavřených konvexních podmnožin Banachova prostoru má spojitou selekci.

Věta 1.11 (Dugunjiho)

Ať $\mathbb{X}$ je metrizovatelný a $A \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená. Pak existuje lineární zobrazení $L : C(A, \mathbb{R}) \to C(\mathbb{X}, \mathbb{R})$, že $L(f)$ rozšiřuje f pro $f \in C(A, \mathbb{R})$.

2 Metrizační věty

Poznámka (Opakování)
Uryshonova metrizační věta: Regulární prostor se spočetnou bází je metrizovatelný.

Věta 2.1 (Bing, Nagata, Smirnov)

Pro regulární prostor $\mathbb{X}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

a) $\mathbb{X}$ *je metrizovatelný.*

b) $\mathbb{X}$ *má σ-diskrétní bázi.*

c) $\mathbb{X}$ *má σ-lokálně konečnou bázi.*

Důkaz
$a) \implies b)$: Ať $\mathcal{B}_n$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ koulemi o poloměru $\frac{1}{n}$. $\mathbb{X}$ je parakompaktní podle Stoneovy věty. Z charakterizace parakompaktnosti máme, že $\mathcal{B}_n$ má σ-diskrétní otevřené zjemnění $\mathcal{V}_n$. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ je opět σ-diskrétní, navíc je to báze.

$b) \implies c)$: triviální.

$c) \implies a)$ Ať $B = \bigcup_{n=1}^{\infty}$ je báze $\mathbb{X}$, $\mathcal{B}_n$ lokálně konečný soubor. Uvědomíme si, že $\mathbb{X}$ je parakompaktní: Je-li totiž $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí $\mathbb{X}$, pak $\{B \in \mathcal{B} : \exists U \in \mathcal{U} : B \subseteq U\}$ je zjemnění U a vzhledem k tomu, že B je báze, tak je to i pokrytí. Navíc je σ-lokálně konečné. Tedy z charakterizace parakompaktnosti to máme.

Z parakompaktnosti dostáváme normalitu $\mathbb{X}$. Pro $n, k \in \mathbb{N}$ a $B \in \mathcal{B}_n$ položme $V_{k,n,B} := \bigcup \left\{C \in \mathcal{B}_k : \overline{C} \subseteq B\right\}$. $\mathcal{B}_k$ je lokálně konečný, tedy (z lemmatu o uzávěru lokálně konečného systému) $\overline{V_{k,n,B}} \subseteq B$. Tedy existují (z normality) spojité funkce $f_{k,n,B} : \mathbb{X} \to [0,1]$, $f_{k,n,B}(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{X} \setminus B$ a 1 pro $x \in \overline{V_{k,n,B}}$.

Definujeme $M_{k,n} \subseteq [0,1]^{\mathcal{B}_n}$ následovně $M_{k,n} = \{\varphi : \mathcal{B}_n \to [0,1] : \{B \in \mathcal{B}_n : \varphi(B) \neq 0\}$ je konečná$\}$. Na $M_{k,n}$ uvažme metriku $\varrho_{k,n}\varphi, \psi := \sum_{B\in\mathcal{B}_n} |\varphi(B) - \psi(B)|$. Ať $g_{k,n} : \mathbb{X} \to M_{k,n}$, $g_{k,n} = \triangle_{B\in\mathcal{B}_n} f_{k,n,B}$, $g_{k,n}(x) = (f_{k,n,B}(x))_{B\in\mathcal{B}_n}$.

Ověříme, že $g_{k,n} : \mathbb{X} \to (M_{k,n}, \varrho_{k,n})$ je spojité: Ať $x \in \mathbb{X}$, $\varepsilon > 0$, existuje U okolí x protínající jen konečně prvků $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{B}_n$. $f_{k,n,B_1}, \ldots, f_{k,n,B_m}$ jsou spojitá, tedy existuje $V \subseteq U$ okolí x, že $|f_{k,n,B}(x) - f_{k,n,B_i}(y)| < \frac{\varepsilon}{m}$ pro $i \leq m, y \in V$. Nyní

$$\varrho_{k,n}(g_{k,n}(x), g_{k,n}(y)) = \sum_{i=1}^{m} |g_{k,n}(x)(B_i) - g_{k,n}(y)(V_i)| = \sum |f_{k,n,B}(x) - f_{k,n,B_i}(y)| < m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Pokud systém $\{g_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}\}$ odděluje body a uzavřené množiny, pak $\delta := \triangle_{k,n\in\mathbb{N}} g_{k,n} : \mathbb{X} \to \prod_{k,n\in\mathbb{N}} M_{k,n}$ je vnoření (podle lemmatu o Tichonovově vnoření). Tím jsme vnořili $\mathbb{X}$ do spočetného součinu metrizovatelných prostorů, tedy do metrizovatelného prostoru, tedy $\mathbb{X}$ je metrizovatelné.

$\{g_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}\}$ odděluje body a uzavřené množiny: Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ je uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Existuje $n \in \mathbb{N}$ a $B \in \mathcal{B}_n : x \in B \subseteq X \setminus F$. Z regularity existuje $C \in \mathcal{B}_k, k \in \mathbb{N}$. $g_{k,n}(x)(B) = f_{k,n,B}(x) = 1$ a $g_{k,n}(y)(B) = f_{k,n,B}(y) = 0$ pro $y \in \mathbb{X} \setminus B \supseteq F$. □

Definice 2.1

Ať $\mathbb{X}$ je TP. Posloupnost otevřených pokrytí $\mathcal{V}_n$ prostoru $\mathbb{X}$ se nazývá development, pokud pro každé $x \in \mathbb{X} : \{\mathrm{st}(x, \mathcal{V}_n) | n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí v bodě x.

Poznámka
Je-li (X, ϱ) MP, pak $\mathcal{V}_n := \left\{B(x, \frac{1}{n}) : x \in \mathbb{X}\right\}, n \in \mathbb{N}$ je development $\mathbb{X}$.

Věta 2.2 (Bing)

TP $\mathbb{X}$ je metrizovatelný $\Leftrightarrow$ je kolektivně normální a má development.

Důkaz

$\Longrightarrow$: metrizovatelný $\Longrightarrow$ má development (podle předchozí poznámky) a metrizovatelný $\Longrightarrow$ parakompaktní $\Longrightarrow$ kolektivně normální.

$\Leftarrow$: Dokážeme ve 4 částech:

1. Pro diskrétní soubor $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uzavřených množin v $\mathbb{X}$ existuje diskrétní soubor otevřených množin $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$, že $F_\alpha \subseteq W_\alpha$: Dle kolektivní normality existují otevřené disjunktní $U_\alpha : \alpha \in A, F_\alpha \subseteq U_\alpha$. Položme $F = \bigcup \mathcal{F}$, $Z = \mathbb{X} \setminus \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. F uzavřená (sjednocení lokálního systému uzavřených množin), Z uzavřená. $\mathbb{X}$ je kolektivně normální, tedy speciálně normální, tedy existují otevřené disjunktní V, W, že $Z \subseteq V$ a $F \subseteq W$. Položme $W_\alpha := U_\alpha \cap W$. Systém $\{W_\alpha\}$ už je diskrétní (je-li $x \in Z$, pak $x \in V$ a $V \cap W_\alpha = \emptyset$, je-li naopak x v U_α, pak $U_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$ pro $\beta \neq \alpha$) a $F_\alpha \subseteq W_\alpha$.

2. Ať $\mathcal{V}_n$ je development prostoru $\mathbb{X}$. Buď $\varkappa \geq \omega$ a očíslujme $\mathcal{V}_n = \{V_{\alpha,n} | \alpha < \varkappa\}$ (s případným opakováním prvků). Položme $D_{\alpha,n,k} = \{x \in V_{\alpha,n} | \operatorname{st}(x, V_k) \subseteq V_{\alpha,n}\}$ a $C_{\alpha,n,k} = D_{\alpha,n,k} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} V_{\beta,n}$. $D_{\alpha,n,k}$ (a tudíž i $C_{\alpha,n,k}$) je uzavřená:

Volme $x \in \overline{D_{\alpha,n,k}}$. Pak pro libovolné $V \in \mathcal{V}_k$, že $x \in V$ platí, že existuje $y \in V \cap D_{\alpha,n,k}$. Pak $V \subseteq \operatorname{st}(y, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$. Tedy $\operatorname{st}(x, \mathcal{V}_k) = \bigcup\{V \in \mathcal{V}_k | x \in V\} \subseteq V_{\alpha,n}$. Tedy $x \in D_{\alpha,n,k}$, tudíž $D_{\alpha,n,k}$ je uzavřená.

3. Pro pevná $n, k \in \mathbb{N}$ je $\{C_{\alpha,n,k} | \alpha < \varkappa\}$ diskrétní: Buď $y \in \mathbb{X}$ libovolné. Pak existuje nejmenší $\beta < \varkappa : y \in V_{\beta,n}$. Najděme $V \in \mathcal{V}_k : y \in V$. Pro $\alpha > \beta : V_{\beta,n}$ je disjunktní s $C_{\alpha,n,k}$ a pro $\alpha < \beta : V$ je disjunktní s $C_{\alpha,n,k}$ (kdyby existovalo $z \in V \cap C_{\alpha,n,k}$ pak $\operatorname{st}(z, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$, speciálně $y \in V_{\alpha,n}$, což je spor s minimalitou β). Tedy $V \cap V_{\beta,n}$ je okolí bodu y, které protíná nejvýše jeden prvek systému $\{c_{\alpha,n,k} | \alpha \in A\}$ (a sice prvek $C_{\beta,n,k}$).

4. $\{C_{\alpha,n,k}\}$ je diskrétní soubor uzavřených množin (podle 2, 3). Podle 1 existuje diskrétní soubor otevřených nadmnožin $\{V_{\alpha,n,k} | \alpha < \varkappa\}$. Tedy $\mathcal{V}_{n,k} := \{V_{\alpha,n,k} \cap V_{\alpha,n} | \alpha < \varkappa\}$ je diskrétní (zmenšili jsme jeho množiny). Ukážeme, že $\mathcal{V} := \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_{n,k}$ je báze $\mathbb{X}$:

Ať $U \subseteq \mathbb{X}$ je otevřená, $x \in U$. $\exists n \in \mathbb{N} : \operatorname{st}(x, \mathcal{V}_n) \subseteq U$. Najdeme α nejmenší možné, že $x \in V_{\alpha,n}$. Zřejmě $V_{\alpha,n} \subseteq U$. Opět z vlastností developmentu existuje $k \in \mathbb{N} : \operatorname{st}(x, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$. Nyní $x \in C_{\alpha,n,k}$, tedy $x \in V_{\alpha,n,k} \cap V_{\alpha,n} \subseteq U$. Tudíž $\mathcal{V}$ je báze $\mathbb{X}$.

$\mathcal{V}$ je σ-diskrétní báze $\mathbb{X}$, tedy podle metrizační věty Bing-Nagata-Smirnov je $\mathbb{X}$ metrizovatelný. $\square$

3 Uniformní prostory

Poznámka
Zavedeno např. díky tomu, že stejnoměrnou spojitost nelze charakterizovat pomocí topologie.

Matematici Weil(1936), Tukey(1940) ... prvotní zkoumání UP.

Definice 3.1 (Značení)

Pro množinu $\mathbb{X}$ značíme $\triangle(X) = \{(x,x)|x \in X\}$.

Pro $E \subseteq X \times X$ značíme $E^{-1} = \{(y,x)|(x,y) \in E\}$.

Pro $C, D \in X \times X$ značíme $C \circ D = \{(x,z) \in X \times X|\exists y \in X : (x,y) \in C \wedge (y,z) \in D\}$.

$E[x] = \{y \in X|(x,y) \in E\}$.

Definice 3.2 (Uniformní prostor (UP))

Dvojice $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá uniformní prostor (UP), pokud $\mathbb{X}$ je množina a $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X \times X), \mathcal{D} \neq 0$ splňující

1. $\forall D \in \mathcal{D} : \triangle(\mathbb{X}) \subseteq D$,
2. $\forall C, D \in \mathcal{D} : C \cap D \in \mathcal{D}$,
3. $\forall D \in \mathcal{D}\ \exists C \in \mathcal{D} : C \circ C \subseteq D$,
4. $\forall D \in \mathcal{D} : D^{-1} \in \mathcal{D}$,
5. $\forall D \in \mathcal{D}\ \forall E \subseteq X \times X : D \subseteq E \implies E \in \mathcal{D}$,
6. $\forall x, y \in X : x \neq y \implies \exists D \in \mathcal{D} : (x,y) \notin D$. ($\Leftrightarrow \bigcap \mathcal{D} = \triangle(\mathbb{X})$.)

Prvky systému $\mathcal{D}$ nazýváme okolí diagonály.

Definice 3.3 (Báze uniformity)

Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}^2)$ se nazývá báze uniformity (resp. báze uniformity $\mathcal{D}$), pokud uzavřením $\mathcal{B}$ na nadmnožiny dostaneme $\mathcal{D}$.

Definice 3.4 (Subbáze uniformity)

Systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}^2)$ tvoří subbázi uniformity (resp. uniformity $\mathcal{D}$), pokud uzavřením na konečné průniky dostaneme bázi uniformity (resp. bázi uniformity $\mathcal{D}$).

Definice 3.5 (Uniformní zobrazení)

Jsou-li $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ a $(\mathbb{Y}, \mathcal{E})$ UP, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ se nazývá uniformní (stejnoměrně spojité), pokud $\forall E \in \mathcal{E} : (f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{D}$. ($\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E}\ \exists D \in \mathcal{D} : (f \times f)(D) \subseteq E$.) ($\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E}\ \exists D \in \mathcal{D}\ \forall x, y \in \mathbb{X} : (x, y) \in D \implies (f(x), f(y)) \in E$.)

Definice 3.6 (Uniformní izomorfismus)

Zobrazení f se nazývá uniformní izomorfismus, pokud f je bijekce a f i f^{-1} jsou uniformní.

Lemma 3.1

Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}^2)$ tvoří bázi nějaké uniformity na $\mathbb{X}$, pokud

$$a) \bigcap \mathcal{B} = \triangle(\mathbb{X}),$$

$$b) \forall C, D \in \mathcal{B}\ \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq C \cap D,$$

$$c) \forall D \in \mathcal{B}\ \exists C \in \mathcal{B} : C \circ C \subseteq D,$$

$$d) \forall D \in \mathcal{B}\ \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq D^{-1}.$$

Důkaz

$\mathcal{D} := \{C \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X} | \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq C\}$. Následně ověříme podmínky. □