Příklad (1.)
Let $\mathbb{T}_R$ and $\mathbb{T}$ denote the first Piola–Kirchhoff tensor and the Cauchy stress tensor respectively. Show that

$$\operatorname{div}_{\mathbf{X}} \mathbb{T}_R = (\det \mathbb{F}) \operatorname{div} \mathbb{T},$$

or, in detail, that

$$\operatorname{div}_{\mathbf{X}} \mathbb{T}_R(\mathbf{X}, t) = (\det \mathbb{F}(\mathbf{X}, t))(\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbb{T}(\mathbf{x}, t))|_{\mathbf{x}=\chi(\mathbf{X},t)},$$

where $\mathbb{F}$ denotes the deformation gradient and $\chi(\mathbf{X}, t)$ is the deformation.

Důkaz
Přidáme integrál a použijeme Stokesovu větu:

$$\int LHS = \int_{V(t_0)} \operatorname{div}_{\mathbf{X}} \mathbb{T}_R(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\partial V(t_0)} \mathbb{T}_R(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{S}.$$

Z přednášky víme, že $\mathbb{T}_R = \det \mathbb{F}(\mathbf{X}, t)\mathbb{T}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\chi(\mathbf{X},t)} F^{-T}(\mathbf{X}, t)$:

$$\int LHS = \int_{\partial V(t_0)} \big(\det \mathbb{F}(\mathbf{X}, t)\mathbb{T}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\chi(\mathbf{X},t)} F^{-T}(\mathbf{X}, t)\big) \cdot d\mathbf{S}.$$

Také víme, že $(\det \mathbb{F}(\mathbf{X}, t))F^{-T}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{S} = d\mathbf{s}$ a že $\det \mathbb{F}(\mathbf{X}, t)$ je skalár, tj. je komutativní, tedy můžeme psát:

$$\int LHS = \int_{\partial V(t_0)} \mathbb{T}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\chi(\mathbf{X},t)} \cdot (\det \mathbb{F}(\mathbf{X}, t)\mathbb{F}^{-T}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{S}) = \int_{\partial V(t)} \mathbb{T}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{s}.$$

Nyní použijeme znovu Stokesovu větu a znalost z přednášky, že $dv = (\det \mathbb{F}(\mathbf{X}, t))dV$:

$$\int LHS = \int_{V(t)} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbb{T}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{V(t_0)} (\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbb{T}(\mathbf{x}, t))|_{\mathbf{x}=\chi(\mathbf{X},t)} (\det \mathbb{F}(\mathbf{X}, t)) dV = \int RHS,$$

neboť $\det \mathbb{F}(\mathbf{X}, t)$ je zase skalár. Použitím lokalizačního lemmatu dostáváme chtěnou rovnost:

$$\operatorname{div}_{\mathbf{X}} \mathbb{T}_R(\mathbf{X}, t) = (\det \mathbb{F}(\mathbf{X}, t))(\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbb{T}(\mathbf{x}, t))|_{\mathbf{x}=\chi(\mathbf{X},t)}.$$

$\square$