

Organizační úvod

Poznámka (složení předmětu)

Předmět má přednášku, cvičení a proseminář z Matematické analýzy.

Poznámka (Motivace)

TODO

Poznámka (Jak studovat)

Studujte průběžně, ptejte se...

Poznámka (Literatura)

- skriptá – viz homepage
- příklady – Koláček & spol. – Příklady z matematické analýzy pro fyziky 1, 2, 3
- další příklady – viz homepage

Motivace

Poznámka (Používá se v)

- Fyzice (viz pohyb planet, např. Proč obíhají planety po elipsách?)
- Ekonomii (viz úroky, např. Lze předpovědět změny úroků v ekonomice a na burze?)
- Meteorologii (např. Jak ovlivňují teplé mořské proudy počasí v Evropě?)
- Lékařství (např. Jak dlouho bude koncentrace léku v krvi na účinné úrovni?)
- Epidemiologie (např. Proč se epidemie šíří nejprve rychle a potom pomalu?)
- Architektura (viz mosty (vibrace), např. Jak se ujistit, že most nespadne v bouři?)
- Inženýrství (viz letadla, např. Jak zkonstruovat nové křídlo pro letadlo? (Většina peněz i času při konstrukci jsou simulace.))

- Informatika (viz MP3, JPEG, např. Jak uchovat informaci o dané funkci v co nejmenším počtu čísel? (Používá se Fourierova transformace = převod funkce na siny a cosiny))

Poznámka (Proč se analýzu učíme my?)

- Abychom uměli látku (hledat extrémy funkcí, umět integrovat)
- Měli solidní matematické základy
- Přečíst návod, jak používat nějaké matematické modely (např. Uplatnění v bance – MFF nese mnoho peněz (nejvíce žádané práce jsou práce stylu statistik))
- Myslet, analyzovat, nedělat chyby (nezapomínat na další možnosti)
- Abychom se naučili způsob myšlení – matematici / matematicky dělají činnosti lépe (ze dvou lidí, co ji neumí, je matematik ten, kdo ji zvládne lépe, nikoliv ten druhý.)

1 Úvod

Dosti možná spíše opakování střední

1.1 Výroky

Definice 1.1 (Výrok)

Tvrzení, o kterém má smysl říct, že je pravdivé, či ne.

┌

Například

„Obloha je modrá.“

└ „Vídeň je hlavní město ČR.“

Poznámka (Vytváření nových výroků)

Děje se pomocí spojek a, nebo, implikací, ekvivalencí, atd.

A	B	konjunkce $A \& B$	disjunkce $A \vee B$	implikace $A \implies B$	ekvivalence $A \Leftrightarrow B$	negace A $\neg A$
0	0	0	0	1!	1	1
0	1	0	1	1!	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

$A \implies B = A$ je postačující podmínka pro $B = B$ je nutná podmínka pro A .

┌

Například (Pravdivé výroky)

$$1 = 2 \implies 2 = 3$$

já jsem papež \implies všechna letadla jsou modrá

└

┌

Příklad

•

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg B \implies \neg A)$$

•

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg(A \& \neg B))$$

•

$$\neg(A \& B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

•

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \& \neg B)$$

•

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \implies B) \& (B \implies A))$$

└

Definice 1.2 (Kvantifikátory)

Dále existují tzv. kvantifikátory: Obecný (= pro všechna) \forall a Existenční (= existuje) \exists .

Úmluva

$\forall x \in \mathbb{N}, x > 10 \ A(x)$ značí $\forall x \in \mathbb{N}(x > 10 \implies A(x))$

Například

- Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$ je: $\forall x \in M : A(x)$
- Existuje $x \in M$ tak, že platí $A(x)$ je $\exists x \in M : A(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} \ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m$

Například (Negace výroků)

- $\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$

- $\neg(\exists x \in M : A(x) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x))$
- $\neg(\text{Nikdo mě nemá rád.}) \Leftrightarrow \text{Existuje alespoň jeden člověk, který mě má rád.}$
- $\neg(\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$

$$\exists n \in \mathbb{N} \neg(\forall m \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \neg(\exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n + m$$

Pozor

Na pořadí kvantifikátorů záleží!

┌

Například

M...Muži

Ž...Ženy

L(m, ž)...muži m se líbí žena ž

$$\forall m \in M \exists \in : L(m,)$$

$$\exists \in \forall m \in M : L(m,)$$

První je, že pro každého muže existuje nějaká žena, která se mu líbí, naopak druhá říká, že existuje žena, která se líbí všem mužům.

└

1.2 Metody důkazů tvrzení

Definice 1.3 (Důkaz sporem)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow \neg(A \& \neg B)$$

┌

Například ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

($A : x = \sqrt{2}, B : x \notin \mathbb{Q}$)

┌

Důkaz (Důkaz sporem:)

Nechť $x = \sqrt{2}$ a $x \in \mathbb{Q}$. $x \in \mathbb{Q} \implies x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$, nesoudělná.

$$x^2 = 2, 2 = x^2 = \frac{p^2}{q^2} \implies 2q^2 = p^2 \implies p = 2k \implies 2q^2 = 4k^2 \implies q^2 = 2k^2 \implies q = 2l$$

$$p = 2k \& q = 2l \implies p \text{ a } q \text{ soudělná. } \nexists$$

□

└

Definice 1.4 (Přímý důkaz)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (A \implies C_1 \implies C_2 \implies \dots \implies C_n \implies B)$$

┌
Například

$$n^2 \text{liché} \implies n \text{liché}$$

┌
Důkaz

$$\begin{aligned} n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k &\implies n^2 = p_1^2 \cdot \dots \cdot p_k^2 \\ n^2 \text{liché} &\implies 2 \nmid p_1 \ \& \ \dots \ \& \ 2 \nmid p_k \implies n \text{liché} \end{aligned}$$

└

□

Definice 1.5 (Nepřímý důkaz)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg B \implies \neg A)$$

┌
Například

$$n^2 \text{liché} \implies n \text{liché}$$

┌
Důkaz

$$n \text{sudé} \Leftrightarrow n = 2k \implies n^2 = 4k^2 \implies n^2 \text{sudé}$$

└

□

Definice 1.6 (Matematická indukce)

$$(\forall n \in \mathbb{N} : V(n)) \Leftrightarrow (V(1) \ \& \ \forall n \in \mathbb{N} : V(n) \implies V(n+1))$$

┌
Například

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n \cdot (n + 1)$$

┌
Důkaz

1. $n = 1$: $1 = \frac{1}{2}1 \cdot 2$

2.

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n \cdot (n + 1) \implies \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}n \cdot (n + 1) + (n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1) \cdot (n + 2)$$

┐
┐
┐
□

┌
Příklad

Všechna auta mají stejnou barvu.

┌
Důkaz

1. $n = 1$: Jedno auto má stejnou barvu jako ono samo.

2. $n \rightarrow n + 1$: vezmu prvních n aut, ty mají stejnou barvu, vezmu posledních n aut, ty mají také stejnou barvu. Tedy dohromady mají stejnou barvu. □

┐
(Spoiler: $n = 2$)
┐

1.3 Množina reálných čísel

Poznámka (Množiny čísel)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

Definice 1.7 (Omezená množina)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Řekněme, že M je omezená shora (omezená zdola), jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ = horní (dolní) závora tak, že pro všechna $x \in M$ platí $x \leq a$ ($x \geq a$).

Definice 1.8 (Supremum a infimum)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je shora (zdola) omezená. Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazýváme supremem (infimem) M , pokud:

$$\forall x \in M : x \leq s (s \geq x)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < s(y > s) \exists x \in M, y < x(x > y)$$

┌ *Například* • $\sup[0, 1] = 1$ (dokázat obě podmínky pro 1 (x z druhé podmínky volím 1)...)
 • $\sup(0, 1) = 1$ (taktéž dokázat obě podmínky pro 1 (pozor na záporná y) (x z druhé podmínky zvolíme často $\frac{s+y}{2}$))
 └

Definice 1.9 (Reálná čísla)

Na množině \mathbb{R} je dána relace \leq ($\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), operace sčítání $+$ a operace násobení \cdot a množina \mathbb{R} obsahuje prvky 0 a 1 tak, že platí:

Viz skripta (takové ty tělesové / grupové podmínky, podmínky uspořádání a *existence suprema*)

Věta 1.1 (o existenci infima)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje $\inf M$.

┌ *Důkaz*

Označme $-M = \{x \in \mathbb{R} : -x \in M\}$. Zřejmě $M \neq \emptyset$. M je zdola omezená $\implies -M$ je shora omezená. ($\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M x > K \implies \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in -M x < -K$). Z axiomů \mathbb{R} tedy existuje $s = \sup -M$. Položme $i = -s$. Tvrdím $i = \inf M$. (Dokážeme z definice suprema a infima, viz skripta). □

└

Věta 1.2 (Archimedova vlastnost)

Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x < n$

┌ *Důkaz (Sporem)*

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} x \geq n$$

Tedy \mathbb{N} je omezená podmnožina \mathbb{R} . Tedy existuje $x' \in \mathbb{R}, x' = \sup \mathbb{N}$. Tedy $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq x'$. Pak také $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 \leq x'$. To ale tvrdí, že $x' - 1$ je také $\sup \mathbb{N}$. To je ale spor, protože můžeme zvolit $y = x' - \frac{1}{2}$, pak $y < x'$, tedy z druhé vlastnosti suprema $\exists n \in \mathbb{N} : x' - \frac{1}{2} < n$, ale zároveň už víme, že $\forall n \in \mathbb{N} : n < x' - 1$. □

└

Věta 1.3 (Hustota \mathbb{Q} a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Pak existují $q \in \mathbb{Q}$ a $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tak, že $q \in (a, b)$ a $r \in (a, b)$.

Důkaz

Podle $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{b-a} < n$, tedy $\frac{1}{n} < b-a$. Zvolme $q = \frac{\lceil an \rceil + 1}{n}$, pak jistě $a < q < b$ a $q \in \mathbb{Q}$.

Poté použijeme $q_1 \in (a, b)$ a $q_2 \in (q_1, b)$. Zvolme $r = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}}$. Pak (jelikož druhá část je kladná) $r > q_1$. A $r < q_2 \Leftrightarrow q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}} < q_2 \Leftrightarrow \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}} < q_2 - q_1$.

Tedy $r \in (a, b)$ a $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, jelikož $r = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}} = p \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{2} = \frac{q_2 - q_1}{p - q_1}$, ale levá strana je jistě iracionální a pravá racionální. Spor. \square

Věta 1.4 (O n -té odmocnině (BD = bez důkazu))

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, \infty)$, pak existuje právě jedno $y \in [0, \infty)$ tak, že $y^n = x$.

Důkaz

Idea: Položme $M = \{z \in \mathbb{R}\}$. Ukážeme, že $M \neq \emptyset$ shora omezená $\implies \exists s = \sup M$. Nyní ukážeme $s^n = x$. \square

1.4 Krátký výlet do nekonečna

Definice 1.10 (Mohutnost množin)

Řekněme, že množiny \mathbb{A} a \mathbb{B} mají stejnou mohutnost, pokud existuje bijekce $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$. Značíme $\mathbb{A} \approx \mathbb{B}$.

Řekněme, že množina \mathbb{A} má mohutnost menší, nebo rovnu mohutnosti \mathbb{B} , pokud existuje prosté zobrazení $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$. Značíme $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$.

Řekněme, že množina \mathbb{A} má menší mohutnost než \mathbb{B} , pokud $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, ale neplatí $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$. Značíme $\mathbb{A} \prec \mathbb{B}$.

┌

Například

- 1) \mathbb{N}, \mathbb{Z} : $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$ (prosté z \mathbb{N} do \mathbb{Z} je triviální, opačně si očísľuji \mathbb{Z})
- 2) \mathbb{N}, \mathbb{Q} : $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ (obdobně, čísluji diagonálně)
- 3) \mathbb{N}, \mathbb{R} : $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ (důkaz sporem, přes diagonálu, vezmu první desetinou cifru z $f(1)$, druhou z $f(2)$... a pozměním je...)

└

Tvrzení 1.5 (Viz proseminář)

$\mathbb{A} \preceq \mathbb{B} \wedge \mathbb{B} \preceq \mathbb{A} \implies \mathbb{A} \approx \mathbb{B}$

Definice 1.11

Řekněme, že množina \mathbb{A} je konečná, má-li konečný počet prvků.

Řekněme, že \mathbb{A} je spočetná, jestliže $\mathbb{A} \approx \mathbb{N}$, nebo je \mathbb{A} konečná.

Řekněme, že \mathbb{A} je nespočetná, jestliže $\mathbb{N} \prec \mathbb{A}$.

Tvrzení 1.6 (Cantor)

Nechť X je množina, pak $X \prec \mathcal{P}(X)$, kde $\mathcal{P}(X)$ je množina všech podmnožin X .

┌
Důkaz

Zobrazení $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definované $\varphi(x) = \{x\}$ je prosté.

Tvrdím, že neplatí, že $X \approx \mathcal{P}(X)$. Důkaz sporem: Nechť existuje bijekce $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Označme $A = \{x \in X : x \notin \varphi(x)\}$. φ je bijekce $\implies \exists a \in X : \varphi(a) = A$.

└ Nyní buď a) $a \in A \implies a \notin \varphi(a) = A$ nebo b) $a \notin A \implies a \in \varphi(a) = A$. □

Poznámka („Nebrali jsme“ Hypotéza kontinua)

Otázka: Existuje $A \subset \mathbb{R}$, že $\mathbb{N} \prec A$ a $A \prec \mathbb{R}$?

Odpověď: Může a nemusí. (Hypotéza kontinua je ze standardních axiomů teorie množin tzv. nerozhodnutelná.)

Tvrzení 1.7

Nechť $A_n, n \in \mathbb{N}$, jsou spočetné množiny, pak:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

je spočetná.

┌
Důkaz

└ Napíšu si množiny A_i do matice a očísloji po diagonálách. Tím získám $\mathbb{N} \succeq A$. □

2 Posloupnost

2.1 Úvod

Definice 2.1

Jestliže ke každému $n \in \mathbb{N}$ je přiřazeno $a_n \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ je posloupnost reálných čísel.

- ┌ *Například*
- $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$
 - $\{2^n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, 8, \dots\}$
 - $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n^2 + 1$ (rekurentně zadaná posloupnost)
- └

Definice 2.2

Řekněme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je:

- neklesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- nerostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- klesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- rostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$

┌ *Například*

$\{\frac{1}{n}\}$ je klesající a nerostoucí

$\{2^n\}$ je rostoucí a neklesající

└

Definice 2.3

Řekněme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, jestliže množina členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená podmnožina \mathbb{R} . Analogicky definujeme omezenost shora a omezenost zdola.

┌ *Například*

$\{\frac{1}{n}\}$ je omezená

$\{2^n\}$ je pouze omezená zdola

└

2.2 Vlastní limita posloupnosti

Definice 2.4 (Limita)

Nechť $A \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Řekněme, že A je (vlastní) limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon$$

Značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

┌ *Například*

Ve videu, při pochopení limity nejsou moc zajímavé.

└

Příklad ($\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$)

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \Leftrightarrow n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} + \dots \geq 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} a_n^2$$

$$\frac{2(n-1)}{n \cdot (n-1)} \geq a_n^2 \implies \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \geq a_n \geq 0$$

Věta 2.1 (Jednoznačnost vlastní limity (2.1))

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

┌

Důkaz (Sporem)

Nechť tedy existuje více limit. Dvě z nich označme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$, $A > B$. Zvolme $\varepsilon = \frac{A-B}{3}$. Z definice limity k našemu ε existují $n_A, n_B \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_A |a_n - A| < \varepsilon$ a $\forall n \geq n_B |a_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Z trojúhelníkové nerovnosti^a $|A - B| = |(A - a_{n_0}) + (a_{n_0} - B)| \leq |A - a_{n_0}| + |a_{n_0} - B| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}(A - B)$. \square

^a $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$

Věta 2.2 (O omezenosti konvergentní posloupnosti)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu. Pak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená.

┌

Důkaz

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = 1$. K tomuto $\varepsilon = 1 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) = (A - 1, A + 1)$. Množina $\{a_n | n = 1, 2, \dots, n_0\}$ je konečná, tedy omezená. Položme $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, |A| + 1\}$. Potom jistě $\forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq K$ (protože $\forall n \leq n_0 |a_n| \leq \max\{|a_i|; i \leq n_0\}$ a $\forall n > n_0 a_n \in (A - 1, A + 1) \implies |a_n| \leq |A| + 1 \leq K$). \square

Příklad

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R} \implies \exists n_0 \forall n > n_0 a_n \text{ je monotónní}$$

Definice 2.5 (Vybraná podposloupnost)

Řekněme, že posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $b_n = a_{k_n}$

Věta 2.3 (o limitě vybrané podposloupnosti)

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a nechť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$

┌
Důkaz

K $\varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$. Chceme dokázat $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

K $\varepsilon > 0$ zvolme k_0 , kde n_0 je z definice $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Necht $k \geq k_0$, pak $n_k \geq k \geq k_0 \geq n_0$.
Tedy $|b_k - A| = |a_{n_k} - A| < \varepsilon$ □

Věta 2.4 (Aritmetika limit)

Necht $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$. Pak platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = A \cdot B$$

$$\forall b_n \neq 0 \wedge B \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

┌
Důkaz

Necht $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \exists n_A \in \mathbb{N} \forall n > n_A |a_n - A| < \varepsilon$, z $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \exists n_B \in \mathbb{N} \forall n > n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max \{n_A, n_B\}$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí $|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. (A tady se použije lemmátka, které jsem ani nepsal a které je o tom, že ε můžeme na konci definice limity vynásobit libovolnou konstantou.)

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \xrightarrow{2.2} b$ je omezená, tedy $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |b_n| \leq K$. Necht $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \exists n_A \in \mathbb{N} \forall n > n_A |a_n - A| < \varepsilon$, z $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \exists n_B \in \mathbb{N} \forall n > n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max n_A, n_B$. Pak $\forall n > n_0$ platí $|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - b_n A + b_n A - AB| \leq |a_n b_n - b_n A| + |b_n A - AB| \leq |a_n - A| |b_n| + |b_n - B| |A| \leq \varepsilon \cdot K + \varepsilon \cdot |A| = \varepsilon \cdot (K + |A|)$.

K $\varepsilon_1 = \frac{|B|}{2}$ z $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n > n_1 |a_n - A| < \varepsilon_1 = \frac{|B|}{2} \implies |b_n| > \frac{|B|}{2}$. Necht $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \exists n_A \in \mathbb{N} \forall n > n_A |a_n - A| < \varepsilon$, z $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \exists n_B \in \mathbb{N} \forall n > n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max n_A, n_B, n_1$. Pak $\forall n > n_0$ platí $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}| = \frac{|a_n B - AB + AB - b_n A|}{|b_n| \cdot |B|} \leq \frac{|a_n B - AB|}{|b_n| \cdot |B|} + \frac{|A - B - b_n A|}{|b_n| \cdot |B|} = \frac{|a_n - A| \cdot |B|}{|b_n| \cdot |B|} + \frac{|A| \cdot |B - b_n|}{|b_n| \cdot |B|} < \varepsilon \cdot (\frac{2}{|B|} + \frac{|A|}{|B|} \cdot \frac{2}{|B|})$. □

Věta 2.5 (Limita a uspořádání)

Necht $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

Jestliže $A < B$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n < b_n$.

Jestliže $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n > n_0$ platí $a_n \geq b_n$, pak $A \geq B$

┌ *Důkaz*

Položme $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$. Z existence limit vyplývá $\exists n_A \forall n \geq n_A |a_n - A| < \varepsilon \implies a_n < A + \varepsilon = A + \frac{B-A}{2} = \frac{B+A}{2}$ a $\exists n_B \forall n \geq n_B |b_n - B| < \varepsilon \implies b_n > B - \varepsilon = B - \frac{B-A}{2} = \frac{B+A}{2}$. Zvolme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí $b_n > \frac{A+B}{2} > a_n$.

Sporem. Necht $A < B$. Pak podle předchozí části $\exists n_1 \forall n > n_1 a_n < b_n$. Zároveň z předpokladu $\forall n \geq n_0 a_n \geq b_n$. Pak pro libovolné $n \geq n_1$ a $n \geq n_0$ platí $(a_n < b_n) \wedge (b_n < a_n)$ □

Věta 2.6 (O dvou strážnících)

Necht $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty, \{c_n\}_{n=1}^\infty$ jsou posloupnosti splňující $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \in \mathbb{R}$.

Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$.

┌ *Důkaz*

Necht ε je kladné. Potom $\exists n_A \forall n \geq n_A |a_n - A| < \varepsilon$ a $\exists n_B \forall n \geq n_B |b_n - A| < \varepsilon$, tedy zvolme $n_C = \max\{n_A, n_B\}$, tudíž $\forall n \geq n_C c_n \in (a_n, b_n) \subseteq (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. □

Věta 2.7 (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)

Necht $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$.

┌ *Důkaz*

Posloupnost $\{b_n\}$ je omezená $\implies \exists K > 0 \forall n \in \mathbb{N} |b_n| \leq K$. Z $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ k zadanému $\varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |a_n - 0| < \varepsilon$. K tomuto $\varepsilon > 0$ volme stejné n_0 , pak $\forall n \geq n_0 |a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| \leq |a_n| \cdot |b_n| \leq \varepsilon \cdot K$ □

┌ *Například*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice 2.6 (Nevlastní limita)

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ má (nevlastní) limitu $+\infty$ (respektive $-\infty$), pokud

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K$$

(

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n < K$$

)

┌ *Například*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

Tvrzení 2.8

Věty: jednoznačnost limity (2.1), limita vybrané posloupnosti (2.3), limita a uspořádání (2.5), o dvou strážnících (2.6, stačí jeden z nich).

┌ *Důkaz*

└ Analogicky

□

Definice 2.7 (Rozšířená reálná osa)

Rozšířená reálná osa je množina $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. S následujícími vlastnostmi:

- Uspořádání: $\forall a \in \mathbb{R} : -\infty < a < +\infty$
- Absolutní hodnota: $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$
- Sčítání: $\forall a \in \mathbb{R} * \setminus \{-\infty\} : +\infty + a = +\infty$
 $\forall a \in \mathbb{R} * \setminus \{+\infty\} : -\infty + a = -\infty$
- Násobení: $\forall a \in \mathbb{R} * a > 0 : a(\pm\infty) = \pm\infty$
 $\forall a \in \mathbb{R} * a < 0 : a(\pm\infty) = \mp\infty$
- Dělení: $\forall a \in \mathbb{R} : \frac{a}{\pm\infty} = 0$.
- Výrazy $-\infty + \infty, 0(\pm\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{\text{cokoliv}}{0}$ nejsou definovány (z dobrého důvodu!).

Poznámka (Rozšířená definice suprema a infima)

Je-li $\mathbb{A} \neq \emptyset$ shora neomezená, pak definujeme $\sup \mathbb{A} = +\infty$.

Je-li $\mathbb{A} \neq \emptyset$ zdola neomezená, pak definujeme $\inf \mathbb{A} = -\infty$.

$$\sup \emptyset = -\infty, \inf \emptyset = +\infty$$

Věta 2.9 (Aritmetika limit podruhé (L2.4))

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Pak platí:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$, pokud je výraz $A + B$ definován.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$, pokud je výraz $A \cdot B$ definován.
3. Pokud $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ a $B \neq 0$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz $\frac{A}{B}$ definován.

┌
Důkaz (Část)

1. $A, B \in \mathbb{R}$ víme. $A = +\infty, B \in \mathbb{R}$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ libovolně. Z toho, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B \in \mathbb{R}$ k $\varepsilon = 1 \exists n_1 \forall n \geq n_1 |b_n - B| < 1 \implies b_n > B - 1$. Z $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ plyne, že k $K' = K - B + 1 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n > K' = K - B + 1$. Pak $\forall n \geq n'_0 = \max\{n_0, n_1\} : a_n + b_n > K - B + 1 + B - 1 = K$. □

Věta 2.10 (Limita typu $\frac{A}{0}$)

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*, A > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ a $\exists n_0 \forall n \geq n_0$ platí $b_n > 0$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

┌
Důkaz

Zvolme $K \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \begin{cases} A = +\infty : \exists n_1 \forall n \geq n_1 a_n > 1 \\ A \in \mathbb{R} : \varepsilon = \frac{A}{2} \exists n_1 \forall n \geq n_1 |a_n - A| < \varepsilon = \frac{A}{2} \implies a_n > \frac{A}{2} \end{cases}$$

Tedy položíme $\tilde{A} = \min\{1, \frac{A}{2}\}$. Pak $\forall n \geq n_1 : a_n > \tilde{A}$. Z $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ k $\varepsilon = \frac{\tilde{A}}{K} \exists n_2 \forall n \geq n_2 |b_n - 0| < \frac{\tilde{A}}{K} \implies 0 < b_n < \frac{\tilde{A}}{K}$.

Položíme $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ pak

$$\forall n \geq n_3 \frac{a_n}{b_n} > \tilde{A} \cdot \frac{K}{\tilde{A}} = K$$

└

□

2.4 Hlubší věty o limitách

Věta 2.11 (O limitě monotónní posloupnosti (L2.9))

Každá monotónní posloupnost má limitu.

┌
Důkaz

BÚNO a_n je neklesající. Označme $A = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$.

1. $A = +\infty$. Nechť $K \in \mathbb{R}, \sup\{a_n\} = +\infty \implies a_n$ není shora omezená $\implies \exists n_0 a_{n_0} > K$. a_n je neklesající $\implies \forall n \geq n_0 a_n \geq a_{n_0} > K$. To je ale definice $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

2. $A \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0 A - \varepsilon < A$. Z definice suprema musí existovat $n_0 : a_{n_0} > A - \varepsilon$. Jelikož a_n je neklesající, je $\forall n \geq n_0 a_n \geq a_{n_0} > A - \varepsilon$. Z definice suprema $a_n \leq A < A + \varepsilon$, tedy $\forall n \geq n_0 |a_n - A| < \varepsilon$. □

└

Poznámka

Monotónní posloupnost: neklesající (shora omezená = vlastní limita, shora neomezená = limita $+\infty$), nerostoucí (sdola omezená = vlastní limita, sdola neomezená = limita $-\infty$).

Příklad

$$a_1 = 10, a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$$

Řešení

Napíšu prvních pár členů a tipneme, že je klesající a $a_n \geq 5$. Pak vše dokážeme. A použijeme aritmetiku limit.

Pozor

V předchozím příkladu je použití věty 2.9 nutné!

Věta 2.12 (Cantorův princip vložených intervalů)

Nechť $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost uzavřených intervalů splňující $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0$. Pak je množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ jednobodová.

Důkaz

Z první podmínky na interval vidíme $a_{n+1} \geq a_n$ a $b_{n+1} \leq b_n$. Navíc a_n je shora omezená b_1 a b_n je sdola omezená a_1 . Podle V2.9 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B - A \implies A = B$$

Tedy $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{A\}$. □

Věta 2.13 (Bolzano-Weierstrass)

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

┌ *Důkaz* (Tzv. půlením intervalu)

$\{a_n\}$ je omezená, tedy $\exists c_1, d_1 \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} c_1 \leq a_n \leq d_1$. Zvolme $a_{n_1} \in [c_1, d_1]$ libovolně. Rozdělme $[c_1, d_1]$ na $[c_1, \frac{c_1+d_1}{2}]$ a $[\frac{c_1+d_1}{2}, d_1]$. V alespoň jednom tomto intervalu je ∞ mnoho a_n . Pokud $\#\{n : a_n \in [c_1, \frac{c_1+d_1}{2}]\} = +\infty$, položme $c_2 = c_1, d_2 = \frac{c_1+d_1}{2}$. Jinak $\#\{n : a_n \in [\frac{c_1+d_1}{2}, d_1]\} = +\infty$, položme $c_2 = \frac{c_1+d_1}{2}, d_2 = d_1$. Nalezneme $n_2 > n_1$ a $a_{n_2} \in [c_2, d_2]$. Dále pokračujeme indukcí.

Nechť $\#\{n : a_n \in [c_k, d_k]\} = +\infty$. Rozdělme $[c_k, d_k]$ na $[c_k, \frac{c_k+d_k}{2}]$ a $[\frac{c_k+d_k}{2}, d_k]$. V alespoň jednom tomto intervalu je ∞ mnoho a_n . Pokud $\#\{n : a_n \in [c_k, \frac{c_k+d_k}{2}]\} = +\infty$, položme $c_{k+1} = c_k, d_{k+1} = \frac{c_k+d_k}{2}$. Jinak $\#\{n : a_n \in [\frac{c_k+d_k}{2}, d_k]\} = +\infty$, položme $c_{k+1} = \frac{c_k+d_k}{2}, d_{k+1} = d_k$. Nalezneme $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}]$.

Nyní máme posloupnost intervalů $[c_k, d_k]$ a $a_{n_k} \in [c_k, d_k]$. Víme, že $[c_{k+1}, d_{k+1}] \subset [c_k, d_k]$ a $d_{k+1} - c_{k+1} = \frac{d_k - c_k}{2} = \frac{d_1 - c_1}{2^k}$, tedy $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k - c_k = 0$.

Podle V2.10 $\exists A = \bigcap_{k=1}^{\infty} [c_k, d_k]$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = A = \lim_{k \rightarrow \infty} d_k$. Nyní n_k je rostoucí posloupnost, tedy a_{n_k} je vybraná podposloupnost z $\{a_n\}$. Víme, že $a_{n_k} \in [c_k, d_k] \Leftrightarrow c_k \leq a_{n_k} \leq d_k$ a podle Věty o dvou strážnících je $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A \in \mathbb{R}$. □

Definice 2.8 (Limes superior)

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a označme $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ a $c_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$. (Pak b_n je nerostoucí a c_n je neklesající.)

Je-li $\{a_n\}$ shora neomezená, pak klademe $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$. Je-li $\{a_n\}$ sdola neomezená, pak klademe $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$.

Číslo $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ nazýváme limes superior posloupnosti $\{a_n\}$ a značíme $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. Číslo $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ nazýváme limes inferior posloupnosti $\{a_n\}$ a značíme $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

┌ *Důkaz*

Existence limit je zaručena V 2.9 (o limitě monotónní posloupnosti). □

┌ *Poznámka*

Zřejmě $\forall c_n \leq a_n \leq b_n$.

┌ *Například*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$$

Věta 2.14 (Vztah limity, limes superior a limes inferior (T2.12))

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

Důkaz

Důkaz jen pro $A \in \mathbb{R}$. Jinak by byl podobný.

\Rightarrow $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, tedy posloupnost je omezená dle věty 2.2. Můžeme tedy definovat b_n a $c_n \in \mathbb{R}$. Posloupnosti b_n a c_n jsou monotónní a platí $c_n \leq b_n$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z definice $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |a_n - A| < \varepsilon$, tj. $\forall n_0 b_n = \sup \{a_n, a_{n+1}, \dots\} \leq A + \varepsilon$ a $\forall n_0 c_n = \inf \{a_n, a_{n+1}, \dots\} \geq A - \varepsilon$.

Podle V 2.5 o limitě a uspořádání $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \in [A - \varepsilon, A + \varepsilon]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in [A - \varepsilon, A + \varepsilon]$, pro libovolné ε .

\Leftarrow Podle definice b_n a c_n je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená, tedy můžeme definovat b_n a c_n . Z poznámky víme, že $c_n \leq a_n \leq b_n$ a podle věty o dvou strážnících tedy $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. \square

Příklad

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Definice 2.9 (Hromadná hodnota)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Řekněme, že A je hromadná hodnota posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Množinu hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\})$.

Například

$$H(\{(-1)^n\}) = \{0, 1\}$$

Věta 2.15 (O hromadných hodnotách posloupnosti)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, potom $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ jsou hromadnými hodnotami posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a pro každou hromadnou hodnotu $A \in \mathbb{R}^*$ této posloupnosti platí $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq A \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

┌
Důkaz

Opět pouze pro $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Pak a_n je shora omezená. Označme b_n jako vždy, b_n je nerostoucí a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

Z $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ $\varepsilon = 1$ $\exists m_1$ tak, že $|b_{m_1} - A| < 1$. Nyní z $b_{m_1} = \sup \{a_{m_1}, a_{m_1+1}, \dots\}$ existuje $n_1 \geq m_1$ tak, že $b_{m_1} - 1 < a_{n_1} \leq b_{m_1} \implies |a_{n_1} - b_{m_1}| < 1 \implies |a_{n_1} - A| \leq |a_{n_1} - b_{m_1}| + |b_{m_1} - A| < 2$. Dále indukcí.

Mějme m_1, \dots, m_k a n_1, \dots, n_k . Z $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A, \varepsilon = \frac{1}{k+1} \exists m_k > n_k |b_{m_k} - A| < \frac{1}{n+1}$. Z $b_{m_{k+1}} = \sup \{a_{m_{k+1}}, \dots\} \exists n_{k+1} \geq m_{k+1}$ tak, že $b_{m_{k+1}} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} \leq b_{m_{k+1}} \implies |a_{n_{k+1}} - b_{m_{k+1}}| < \frac{1}{k+1} \implies |a_{n_{k+1}} - A| \leq |a_{n_{k+1}} - b_{m_{k+1}}| + |b_{m_{k+1}} - A| < \frac{2}{k+1}$.

Tedy jsme dostali rostoucí posloupnost n_k tak že $|a_{n_k} - A| < \frac{2}{k} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Tedy $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in H(\{a_n\})$.

Úplně stejně pro $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Stačí dokázat $\forall A \in H(\{a_n\}) \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq A \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. Necht n_k je rostoucí posloupnost taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Z poznámky víme $c_{n_k} \leq a_{n_k} \leq b_{n_k}$, tedy podle V2.5 $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

└

Důsledek

Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Pak

- $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$,
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \min H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}), \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \max H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$,
- Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, pak $H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{A\}$.

Věta 2.16 (Bolzano-Cauchyova podmínka (T2.14))

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku, tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

┌ *Důkaz*

\implies : Z $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ vyplývá $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| \leq |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Opačná implikace: Nechť $\{a_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$. Toto použijí pro $m = n_0$ a dostanu $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$. Tedy a_n je omezená posloupnost a definujeme $b_n = \sup \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ a $c_n = \inf \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$. Z definice b_n a c_n dostaneme $\forall n > n_0 : a_{n_0} - \varepsilon \leq c_n \leq b_n \leq a_{n_0} + \varepsilon$. Tedy podle věty o uspořádání a ..., $a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon$.

Odtud $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n - \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 2\varepsilon$. Toto platí $\forall \varepsilon > 0$, tedy $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$.

Podle V2.12 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$. □

Poznámka (Organizační věci ke zkoušce)

Písemná část (příklady, stačí udělat jednou i na více pokusů, 50b, minimum 25, libovolná literatura, žádná elektronika) \rightarrow ústní část (teoretická, 40b (+10 pro jedničkáře), minimum 25b, lze se na ni dostat nejenom s úspěšnou písemnou částí, ale i s 3 neúspěšnými písemnými částmi).

3 pokusy. (Jeden termín i v září.) Nezapomenout si s sebou doklad totožnosti.

RADA 1 (písemná): Začněte příklady 1 (limita posloupnosti 10b), 2 (limita funkce 10b), 3 (průběh funkce 20b), až potom udělat 4 (teoretický příklad, 10b).

Ústní část = klíčový pojem (0b), 3 definice nebo znění vět ($3 \times 4b = 12b$), LV+důkaz ($4+8b = 12b$), TV+důkaz ($4+12 = 16b$). Nemá časový limit.

RADA 2 (ústní): Musím umět důkazy? ANO! Stačí lehké? ANO!

$< 50b$: (, [50, 59) (3), $\geq 60b$ (bonusová otázka 10b): $\geq 70b$ (2), $\geq 85b$ (1).

3 Funkce jedné reálné proměnné - limita a spojitost

3.1 Základní definice

Definice 3.1 (Funkce jedné reálné proměnné)

Funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, kde $M \subseteq \mathbb{R}$.

Definice 3.2 (Sudá, lichá a periodická funkce)

Řekněme, že funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$ je sudá, jestliže $\forall x \in M : (-x \in M) \wedge (f(x) = f(-x))$, je lichá, jestliže $\forall x \in M : (-x \in M) \wedge (f(x) = -f(-x))$, je periodická, jestliže $\exists p > 0, \forall x \in M : (x + p \in M) \wedge (f(x) = f(x + p))$.

Definice 3.3 (Funkce omezená, omezená shora, omezená zdola)

Řekněme, že funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$, je omezená (omezená shora, omezená zdola), jestliže $f(M)$ je omezená (omezená shora, omezená zdola).

Definice 3.4 (Prstencové okolí bodu, okolí bodu (+ levé a pravé))

Nechť $\delta > 0$ a $a \in \mathbb{R}$. Prstencové okolí bodu $P(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, $P(+\infty, \delta) = (\frac{1}{\delta}, +\infty)$, $P(-\infty, \delta) = (-\infty, -\frac{1}{\delta})$.

Pravé a levé prstencové okolí bodu a je $P_+(a, \delta) = (a, a + \delta)$, $P_-(a, \delta) = (a - \delta, a)$.

Okolí bodu $B(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$, $B(+\infty, \delta) = (\frac{1}{\delta}, +\infty)$, $B(-\infty, \delta) = (-\infty, -\frac{1}{\delta})$.

Pravé a levé okolí bodu a je $B_+(a, \delta) = [a, a + \delta)$, $B_-(a, \delta) = (a - \delta, a]$.

Definice 3.5 (Limita funkce)

Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon),$$

značíme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

┌

Poznámka

Pro reálné a lze zapsat definici podobně jako limitu posloupnosti.

Definici lze také zapsat jako $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(P(a, \delta)) \subseteq B(A, \varepsilon)$.

└

Definice 3.6 (Limita zprava / zleva)

Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu zprava (zleva) rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in P_{+(-)} : f(x) \in B(A, \varepsilon),$$

značíme $\lim_{x \rightarrow a_{+(-)}} f(x) = A$.

Poznámka

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A \wedge \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$$

Definice 3.7 (Spojitost v bodě (+ zprava a zleva))

Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in M$. Řekneme, že f je v bodě $a \in \mathbb{R}$ spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva), jestliže

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \left(\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a) \right)$$

Například

$f(x) = x$ je spojitá. Dirichletova funkce ($D(x)$ je 1 pro $x \in \mathbb{Q}$, je 0 pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) není spojitá (a nemá nikde limitu). Riemannova funkce ($(R(x))$ je $\frac{1}{q}$ pro $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ nesoudělná, je 0 pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) je spojitá v každém iracionálním čísle a nespojitá v každém racionálním.

3.2 Věty o limitách

Věta 3.1 (Heineho věta (T3.1))

Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a f je definována na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$. Následující podmínky jsou ekvivalentní (NPJE):

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$,
- (ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Důkaz

(\Rightarrow): Mějme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující předpoklady bodu (ii). Nechť $\varepsilon > 0$ Podle (i) $\exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon)$. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, tedy k tomuto $\delta > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in B(c, \delta)$. Dále $x_n \neq a$, tedy $x_n \in P(a, \delta)$. Tudíž dostáváme $f(x_n) \in B(A, \varepsilon)$. (\Leftarrow): Dokažme $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$. $\neg(i) : \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in P(a, \delta) : \neg(f(x) \in B(A, \varepsilon))$. Toto použijeme pro $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dostaneme $\exists x_n \in P(a, \frac{1}{n}) : f(x_n) \notin B(A, \varepsilon)$. Nyní $x_n \rightarrow a$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq a \Rightarrow \{x_n\}$ splňuje podmínky (ii) a dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Toto je spor s $f(x_n) \notin B(A, \varepsilon)$. \square

Poznámka

Existují i varianty pro limitu zprava a zleva a pro Spojitost

Věta 3.2 (O jednoznačnosti limity)

Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.

┌ *Důkaz*

Sporem. Necht $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$, $A \neq B$. Podle Heineho věty $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$. Toto je spor s jednoznačností limity posloupnosti. \square

Věta 3.3 (limita a omezenost)

Necht f má vlastní limitu v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že f je na $P(a, \delta)$ omezená.

┌ *Důkaz*

Označme $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Víme $A \in \mathbb{R}$. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ tak, že

$$\forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in B(A, 1) = (A - 1, A + 1).$$

Tedy $f(P(a, \delta)) \subseteq (A - 1, A + 1)$. Z toho plyne, že f je na $P(a, \delta)$ omezená. \square

Věta 3.4 (O aritmetice limit)

Necht $a \in \mathbb{R}^$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak platí (má-li pravá strana smysl):*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

┌ *Důkaz*

┌ Heineho věta. \square

Důsledek

Necht jsou funkce f a g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak jsou funkce $f + g$, $f \cdot g$ spojité v a . Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak f/g je spojitá v a .

Speciálně polynomy jsou spojité na \mathbb{R} a racionální lomené funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ jsou spojité ve všech $x : Q(x) \neq 0$.

Věta 3.5 (O limitě a uspořádání a o dvou policajtech)

Necht $a \in \mathbb{R}^$. Necht $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Pak existuje prstencové okolí $P(a, \delta)$ tak, že $\forall x \in P(a, \delta) : f(x) > g(x)$.*

Necht existuje prstencové okolí bodu $P(a, \delta)$ tak, že $\forall x \in P(a, \delta) : f(x) \leq g(x)$. Necht existují $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Potom platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Necht na nějakém prstencovém okolí $P(a, \eta)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Necht $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Pak existuje $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ a rovná se jím.

┌

Důkaz

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x) \implies f(x) > g(x)$ na $P(a, \delta)$. Označme $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a $B = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Víme $A > B$. Nalezneme $\varepsilon > 0$ tak, aby $B(A, \varepsilon) \cap B(B, \varepsilon) = \emptyset$. Navíc $\forall c \in B(A, \varepsilon) \forall d \in B(B, \varepsilon)$ platí $c > d$. K tomuto ε nalezneme $\delta_1 > 0$ a $\delta_2 > 0$ tak, že $\forall x \in P(c, \delta_1) : f(x) \in B(A, \varepsilon)$ a $\forall x \in P(c, \delta_2) : g(x) \in B(B, \varepsilon)$. Položme $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Pak $\forall x \in P(c, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon)$ a $g(x) \in B(B, \varepsilon) \implies f(x) > g(x)$.

Sporem z první části.

Označme $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Nechť nejprve $A \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 > 0$ tak, že $\forall x \in P(a, \delta_1)$ platí $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, $A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon$. Nechť $\delta = \min \{\delta_1, \eta\}$. Pak $\forall x \in P(a, \delta) : h(x) \in B(a, \varepsilon)$.

└

Pro $A = \pm\infty$ obdobně.

□

Věta 3.6 (Limita složené funkce)

Nechť funkce f a g splňují $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ a $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$. Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek: (S) f je spojitá v A , (P) $\exists \eta > 0 \forall x \in P(a, \eta) : g(x) \neq A$. Pak platí $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$.

┌

Důkaz

(S) Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$. $\exists \psi > 0$ tak, že $f(P(A, \psi)) \subseteq B(B, \varepsilon)$. f je spojitá v $A \implies B = \lim_{y \rightarrow A} f(y) = f(A) \implies$ dokonce $f(B(A, \psi)) \subseteq B(B, \varepsilon)$.

K našemu $\psi > 0$ z $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \exists \delta > 0 : g(P(a, \delta)) \subseteq B(A, \psi)$. Nyní $f(g(P(a, \delta))) \subseteq f(B(A, \psi)) \subseteq B(B, \varepsilon) \implies \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$.

(P) Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$. $\exists \psi > 0$ tak, že $f(P(A, \psi)) \subseteq B(B, \varepsilon)$. K $\psi > 0$ z $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \exists \delta > 0 : g(P(a, \delta)) \subseteq B(A, \psi)$. BÚNO $\delta < \eta$. Z (P) $g(x) \neq A \forall x \in P(a, \delta) \subseteq P(a, \eta)$. Tedy dokonce $g(P(a, \delta)) \subseteq P(A, \psi)$.

└

Nyní $f(g(P(a, \delta))) \subseteq f(P(A, \psi)) \subseteq B(B, \varepsilon) \implies \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$.

□

Věta 3.7 (Limita monotónní funkce)

Nechť f je monotónní na intervalu (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}^*$. Potom existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$.

┌
Důkaz

Nechť f je neklesající, pro nerostoucí je důkaz analogický. Označme $m = \inf_{x \in (a,b)} f(x)$. Dokážeme $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = m$ v případě $m \in \mathbb{R}$. Příklad $m = -\infty$ a důkaz pro $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \sup_{x \in (a,b)}$ je analogický.

Nechť $\varepsilon > 0$. Z vlastnosti infima $\exists y \in f((a,b))$ tak, že $y < m + \varepsilon$. Z definice $f((a,b)) \exists x' \in (a,b) : f(x') = y$. f je neklesající, a proto $\forall x \in (a, x') : f(x) \leq f(x') = y < m + \varepsilon$. m je také dolní závora $f((a,b))$ tedy $\forall x \in (a,b) : m - \varepsilon < m \leq f(x)$.

Celkem $\forall x \in (a, x') : m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon$. Tedy $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = m$. □

Věta 3.8 (T3.8, Bolzano-Cauchyova podmínka pro funkce)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a $\delta_0 > 0$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na $P(a, \delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzano-Cauchyova) podmínka:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in P(a, \delta) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

┌
Důkaz

(\Rightarrow) Nechť $\varepsilon > 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Z definice limity $\exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon)$. Toto δ použijeme pro BC podmínku a $\forall x, y \in P(a, \delta) : |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Toto je ekvivalentní BC podmínce.

(\Leftarrow) Použijeme BC podmínku pro posloupnosti a Heineho větu. Víme BC a chceme $\exists A \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. Z heineho věty je tato „limita“ ekvivalentní s $\forall x_n \rightarrow a, x_n \neq a : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Nechť tedy $x_n \rightarrow a, x_n \neq a$. Tvrdím, že $a_n = f(x_n)$ splňuje BC podmínku pro posloupnost. Nechť $\varepsilon > 0$, nalezneme $\delta > 0$ z BC podmínky pro funkci. K tomuto $\delta > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in P(a, \delta)$, neboť $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, tedy $\forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| = |f(x_n) - f(x_m)| \stackrel{\text{z BC podmínky}}{<} \varepsilon$. Tedy $a_n = f(x_n)$ splňuje BC podmínku pro posloupnosti, tedy $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \in \mathbb{R}$.

Nyní nechť $x_n \rightarrow a, x_n \neq a$ a $y_n \rightarrow a, y_n \neq a$. Podle předchozího $\exists A, B \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = B$. Nechť $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ je nová posloupnost splňující podmínky. Pak existuje její limita $\Rightarrow A = B$ podle věty o limitě podposloupností. □

3.3 Funkce spojitá na intervalu (3.3)

Definice 3.8 (Vnitřní body)

Vnitřními body intervalu J rozumíme ty body J , které nejsou krajními.

Definice 3.9 (Funkce spojitá na intervalu)

Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je spojitá na J , jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě. Je-li počáteční bod J prvkem J , tak požadujeme i spojitost zprava v tomto

bodě. Analogicky pro koncový bod požadujeme spojitost zleva.

Definice 3.10 (Darboux)

Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a platí $f(a) < f(b)$. Pak pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $f(x_0) = y$.

Poznámka

Pro $f(a) > f(b)$ platí analogie.

Důkaz

Nechť $y \in (f(a), f(b))$ a položme $M = \{z \in [a, b] : f(z) < y\}$. Množina M je neprázdná (obsahuje např. a), shora omezená (b), tedy existuje $x_0 = \sup M$. Zřejmě $x_0 \in [a, b]$. Dokážeme, že $f(x_0) = y$ vyloučením případů:

$f(x_0) > y$, potom ze spojitosti ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) > y$) plyne $\exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f(x) > y$ ($0 < \varepsilon < f(x_0) - y$). Tedy z definice M , že $(x_0 - \delta, x_0)$ neleží v $M \implies x_0$ není nejmenší horní závora M , .

$f(x_0) < y$, potom ze spojitosti plyne $\exists \delta \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) < y$, tedy $\exists x > x_0 : f(x) < y$, tedy x není horní závora, .

Tedy $f(x_0) = y$ (zřejmě $b \neq x_0 \neq a$, tedy $x_0 \in [a, b]$). □

Důsledek

Nechť J je interval a funkce $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Pak je $f(J)$ interval.

Definice 3.11 (Maximum (minimum))

Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}, m \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $a \in M$ maxima (resp. minima, ostrého maxima, ostrého minima) na M , jestliže $\text{forall } x \in M : f(x) \stackrel{(\geq, <)}{\leq} f(a)$ (samozřejmě při ostrých $x \neq a$).

Řekneme, že f nabývá v bodě $a \in M$ lokálního maxima (ostrého lokálního maxima, ostrého lokálního minima, lokálního minima), jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že f nabývá na $M \cap B(a, \delta)$ svého maxima (...).

Věta 3.9 (Spojitost funkce a nabývání extrémů)

Nechť f je spojitá na $[a, b]$. Pak f nabývá na $[a, b]$ svého maxima a minima.

┌
Důkaz

Použijeme Bolzano-Weierstrassovu větu a Heineho větu pro spojitost.

Označme $G = \sup f([a, b])$. Z definice suprema $\exists y_n \in f([a, b])$ tak, že $y_n \rightarrow G$. Z definice $f([a, b]) \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) = y_n$. Podle Bolzano-Weierstrass $\exists x_{n_k} \rightarrow x^* \in [a, b]$ (díky strážníkům). Podle Heineho věty (pro spojitost) $x_{n_k} \rightarrow x^* \implies f(x_{n_k}) = y_{n_k} \rightarrow f(x^*)$. Ale $y_n \rightarrow G \implies y_{n_k} \rightarrow G$.

Tedy $G = f(x^*) \implies$ v x^* je nabyto maximum. Minimum lze dokázat analogicky. \square
└

Důsledek

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Pak funkce f je na $[a, b]$ omezená.

Definice 3.12 (Prostá a inverzní funkce na intervalu)

Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je prostá na J , jestliže pro všechna $x, y \in J$ platí $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$.

Pro prostou funkci $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme funkci $f^{-1} : f(J) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Věta 3.10 (O inverzní funkci)

Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J . Potom je f^{-1} spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

┌
Důkaz

BÚNO f je spojitá a rostoucí. Víme, že f^{-1} je definováno na $f(J)$. Tvrdím, že f^{-1} je rostoucí: Sporem: Nechť $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$, ale $f^{-1}(y_1) = x_1 \geq f^{-1}(y_2) = x_2$. Pak ale $x_1 \geq x_2 \xrightarrow{f \text{ rostoucí}} f(x_1) = y_1 \geq f(x_2) = y_2$.

$y_0 \in f(J)$ vnitřní bod: spojitost: Víme, že $f^{-1}(y_0) = x_0$ a x_0 je vnitřní bod J . Nechť $\varepsilon > 0$. Existují $x_1, x_2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap J$. Pak $f(x_1) < f(x_0) = y_0 < f(x_2)$. Zvolme $\delta = \min \{f(x_2) - f(x_0), f(x_0) - f(x_1)\}$. Pak $B(f(x_0), \delta) = B(y_0, \delta) \subseteq (f(x_1), f(x_2))$. Nyní $f^{-1}(B(y_0, \delta)) \subseteq (x_1, x_2) \subseteq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \implies \lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$.

$y_0 \in f(J)$ levý krajní bod: spojitost zprava: $f^{-1}(y_0) = x_0$ a x_0 je levý krajní bod J . Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $x_1 \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ tak, že $x_0 < x_1 \implies f(x_0) < f(x_1)$. Položme $\delta = f(x_1) - f(x_0)$, pak $B_+(y_0, \delta) = [y_0, y_0 + \delta) = [y_0, f(x_1))$. Nyní $f^{-1}(B_+(y_0, \delta)) = [x_0, x_1) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

$y_0 \in f(J)$ pravý krajní bod: spojitost zleva: Analogicky. \square
└

Například

Funkce $x \rightarrow x^n$ je spojitá a rostoucí na $[0, \infty)$, proto je i funkce $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ spojitá a rostoucí na $[0, \infty)$.

3.4 Elementární funkce (3.4)

Věta 3.11 (Zavedení exponenciely)

Existuje funkce $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující: a) $\exp(x)$ je rostoucí na \mathbb{R} , b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$, c) $\exp(0) = 1$, d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$, e) $\exp(x)$ je spojitá na \mathbb{R} .

┌

Poznámka (Další možnosti zavedení)

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{y} dy$$

$$e^x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

└

Důkaz

Položme $\exp x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!}$. Nejdříve chceme ukázat $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Necht x je pevné.^a

Podle věty Bolzano-Cauchyova podmínka pro posloupnost stačí ověřit BC podmínku. Necht $\varepsilon > 0$, zvolme $n_0 \geq 2k_0 \wedge \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, kde $k_0 = \lfloor |x| \rfloor + 1$. Necht $m, k \geq n_0$. BÚNO $m > k$:

$$\left| \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=k+1}^m \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=k+1}^m \left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=k+1}^m |x|^{k_0+2} \cdot \frac{1}{n \cdot (n-1)} = |x|^{k_0+2} \cdot \frac{1}{k} < |x|^{k_0+2} \cdot \varepsilon,$$

což je přesně BC podmínka, tedy naše posloupnost je dobře definována.

$$\text{a) } 0 \leq x \leq y \implies \frac{x^n}{n!} \leq \frac{y^n}{n!} \implies \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^k \frac{y^n}{n!} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{y^n}{n!} \implies \exp x \leq \exp y.$$

$$x \leq y \leq 0 \implies -x \geq -y \geq 0 \implies \exp(-x) \geq \exp(-y) \stackrel{\text{z b), viz dále}}{\implies} \exp x = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{\exp(-y)} = \exp y.$$

$$x \leq 0 \leq y \implies \exp x \leq \exp 0 \leq \exp y$$

$$\text{b) }^b \text{ Označme } s_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} x^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s = \exp x, \sigma_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} y^j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma = \exp y, \varrho_n = \sum_{k=0}^n \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{x^{k-j}}{(k-j)!} \cdot \frac{y^j}{j!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varrho = \exp(x+y).$$

Necht $\varepsilon > 0$. Pak z BC podmínky $\exists n_0$, že $\sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{|x|^i}{i!} < \varepsilon$, $\sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{|y|^j}{j!} < \varepsilon$ a zároveň $|s_{n_0} \cdot \sigma_{n_0} - s \cdot \sigma| < \varepsilon$. Necht $n \geq 2n_0$, pak

$$|\varrho_n - s \cdot \sigma| \leq |\varrho_n - s_{n_0} \sigma_{n_0}| + |s_{n_0} \sigma_{n_0} - s \cdot \sigma| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \cdot \frac{|y|^i}{i!} + \sum_{j=n_0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \cdot \frac{|y|^i}{i!} + \varepsilon \leq,$$

jelikož všechny členy, které se neodečetly, mají alespoň jeden index $\geq n_0$ jinak se vyskytují v $s_{n_0} \sigma_{n_0}$. Pokračujeme:

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \cdot \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{|y|^i}{i!} + \sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|y|^i}{i!} + \varepsilon < e^{|x|} \cdot \varepsilon + \varepsilon e^{|y|} + \varepsilon.$$

$$\text{c) } \exp 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{0^n}{n!} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \right) \stackrel{\text{další rovnost}}{=} 1$$

$$\left| x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \right| \stackrel{|x| \leq 1}{\leq} |x| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq |x| \cdot e \rightarrow 0$$

$$\text{e) } \text{Chceme } \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x+h) = \exp x \text{ (tj. spojitost v } x \text{).}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x) \cdot \exp(h) - \exp x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp x \cdot 1$$

^a $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{k} = 1$. Pak existuje $k_0 > |x|$ ($k_0 = \lfloor |x| \rfloor + 1$). $\forall n \geq 2k_0$ platí

Poznámka (Vlastnosti exp)

- $\exp(n \cdot x) = (\exp x)^n$ (Matematická indukce).
- $\exp x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ($\exp x = (\exp \frac{x}{2})^2 \geq 0$, kdyby $\exp x = 0$, pak $\exp \frac{x}{2} = 0 \implies \exp 0 = 0$).
- Z a) je exponenciála rostoucí rostoucí $\implies \lim_{x \rightarrow \infty} \exp x$ existuje. $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp 1)^n = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} \exp(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ ($= \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) \cdot \frac{\exp -x}{\exp -x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\exp 0}{\exp -x} = \frac{1}{+\infty} = 0$).
- $\exp \mathbb{R} = (0, \infty)$ (funkce nabývá mezhodnot).

Řešení

Nechť pro spor $e = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{N}$ nesoudělná.

$$\sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} < e = \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)!} \cdot \frac{1}{(q+1)^{n-(q+1)}} = \frac{1}{(q+1)!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^j} = \frac{1}{(q+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + \frac{1}{q! \cdot q} \cdot \left(\frac{1}{q+1} \right).$$

$$m < pq! < m + 1, \quad m \in \mathbb{N}, \quad .$$

Definice 3.13 (Logaritmus)

Funkci inverzní k exponenciále (\exp) je logaritmus (\log)

Věta 3.12 (Vlastnosti logaritmu)

Funkce \log splňuje: a) $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a rostoucí funkce, b) $\forall x, y > 0 : \log(x \cdot y) = \log x + \log y$, c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

┌ *Důkaz*

a) \exp je spojitá a rostoucí \implies existuje inverzní funkce, $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \implies \log(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Podle věty o inverzní funkci je \log spojitá a rostoucí funkce.

b) $\log x = A, \log y = B \Leftrightarrow \exp A = x, \exp B = y$. Z definice exponenciely $x \cdot y = \exp A \cdot \exp B = \exp(A + B) \implies \log(x \cdot y) = A + B = \log x + \log y$.

c) označme $f(y) = \frac{\exp y - 1}{y}, y \neq 0$ a $g(x) = \log x$, pak $g(x) \neq 0 \forall x \neq 1$ víme $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$ z definice exponenciely $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$. Podle VOLS F (P) dostaneme $1 = \lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\exp(\log x) - 1}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\log x}$. \square

Definice 3.14

Nechť $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$. Pak definujeme $a^b = \exp(b \log(a))$. Je-li $b > 0$, pak definujeme $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$.

┌ *Poznámka*

$x \cdot x = x^2 = x^2 = \exp(2 \cdot \log x) = \exp(\log x) \cdot \exp(\log x) = x \cdot x$. Obdobně pro $x^n, n \in \mathbb{N}$.

Příklad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{\text{Heine}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \log(1+x)} \stackrel{\text{VOLS F (S)}}{=} e^1 = e.$$

Věta 3.13 (Zavedení sinu a cosinu)

Existují funkce $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující: a) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$, b) existuje kladné číslo π tak, že \sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$ a $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

┌ *Důkaz* (Bez důkazu, jen nástřel)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot (-1)^n. \quad \square$$

Definice 3.15 (tan a cotg)

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ a $y \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ definujeme funkce tangens a cotangens předpisem

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cotg x = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Věta 3.14 (Spojitost sinu a cosinu)

Funkce \sin, \cos, \tan, \cotg jsou spojitě na svém definičním oboru.

Důkaz

a) \sin , pak b) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ a složení spojitých funkcí je spojitá funkce, c) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$ jsou spojité z aritmetiky limit.

a) $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$: 1. v 0: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot x \stackrel{\text{AL}}{=} 1 \cdot 0 = \sin 0$. 2. $\lim_{x \rightarrow a} (\sin x - \sin a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) 2 \cdot \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \stackrel{\text{AL}}{=} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} \stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} 2 \cdot 0 \cdot \cos a = 0$. \square

Definice 3.16 (Inverzní funkce)

Nechť $\sin * x = \sin x$ pro $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nechť $\cos * x = \cos x$ pro $x \in [0, \pi]$. Nechť $\tan * x = \tan x$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Nechť $\cotg * x = \cotg x$ pro $x \in (0, \pi)$.

Definujeme arcsin (respektive arccos, arctan, arccotg) jako inverzní funkce k $\sin *$ (respektive $\cos *$, $\tan *$, $\cotg *$).

3.5 Derivace a Taylorův polynom

Definice 3.17 (Derivace)

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak derivací f v bodě a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

derivací f v bodě a zprava budeme rozumět

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a derivací f v bodě a zleva budeme rozumět

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Poznámka

Limita buď existuje a pak je vlastní nebo nevlastní, nebo vůbec neexistuje.

Ekvivalentní definice je

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$f'(a) = A \Leftrightarrow (f'_+(a) = A \wedge f'_-(a) = A).$$

Věta 3.15 (Vztah derivace a spojitosti)

Nechť má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}$. Pak je f v bodě a spojitá.

┌
Důkaz

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) \stackrel{\text{AL}}{=} f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a).$$

└

□

Věta 3.16 (Aritmetika derivací (T4.2))

Nechť $f'(a)$ a $g'(a)$ existují. Pak (pokud mají pravé strany smysl)

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Nechť g je spojitá v a , pak

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Nechť je g spojitá v a a $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

┌
Důkaz

$$(f+g)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) + g'(a)$$

$$(f \cdot g)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a+h) + f(a) \cdot g(a+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h}$$

Víme, že $g(a) \neq 0$ a g je spojitá v a . Tedy $\exists \delta > 0$ tak, že $g(a+h) \neq 0 \forall h \in B(0, \delta)$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h) - \frac{f(a)}{g(a)}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a+h)}{g(a+h) \cdot g(a) \cdot h} \stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(a+h) \cdot g(a)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a)}{h}$$

└

□

Věta 3.17 (Derivace složené funkce)

Nechť má f derivaci v bodě y_0 , g má derivaci v x_0 , je v x_0 spojitá a $y_0 = g(x_0)$. Pak (je-li pravá strana definována)

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

┌ *Důkaz*

Myšlenka:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}.$$

Funkce f má v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$ derivaci, a proto je f definována na jistém okolí $B(y_0, \eta)$. Funkce g je spojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x_0) = y_0$, a proto je funkce $f(g(x))$ definována na jistém okolí $B(x_0, \delta)$.

1. Předpokládejme nejprve, že $f'(y_0) \in \mathbb{R}$. Definujeme pomocnou funkci $S(y) = f'(y_0)$, $y = y_0$ a $S(y) = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}$, $y \in D(f) \setminus \{y_0\}$. Platí $\lim_{y \rightarrow y_0} S(y) = S(y_0)$, tedy S je v bodě y_0 spojitá. Pro $x \in D(f \circ g)$ platí

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = S(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \text{ (Získáme z } 0 = 0 \text{ a rozšíření jinak.)}$$

Odtud z VOLSF s podmínkou (S)

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} S(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = S(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

2. Nechť nyní $f'(y_0) = \pm\infty$. Pak ale $g(x_0) \neq 0$, aby byl výraz vpravo definován. Pak existuje $\tilde{\eta} > 0$ tak, že $\forall x \in P(x_0, \eta) : \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \neq 0$. Takže $\forall x \in P(x_0, \tilde{\eta}) : g(x) \neq g(x_0)$, odtud

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} S(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0),$$

└ kde jsme použili VOLSF s podmínkou (P). □

Věta 3.18 (Derivace inverzní funkce)

Nechť f je na intervalu (a, b) spojitá a rostoucí (resp. klesající). Nechť f má navíc v bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

┌ *Poznámka*

Existují i varianty pro $f'(x_0) = 0$ a $f'(x_0) = \pm\infty$.

┌
Důkaz

Z věty o inverzní funkci víme, že f^{-1} existuje a je spojitá na $f((a, b))$ a y_0 je vnitřní bod $f((a, b))$. Víme, že $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ a $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$ + víme podmínku (P), neboť f^{-1} je rostoucí. Podle VOLSF s podmínkou (P) dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(f^{-1}(y)) - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}.$$

Odtud

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

└

□

Poznámka (Derivace elementárních funkcí)

- $(\text{const})' = 0$
- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $(\log x)' = \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)$
- $(\exp x)' = \exp x, x \in \mathbb{R}$
- $(a^x)' = a^x \log a, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+$
- $(\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R}$
- $(\cos x)' = -\sin x, x \in \mathbb{R}$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(\tan)$
- $(\cotg x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}, x \in D(\cotg)$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$
- $(\text{arccotg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$

Věta 3.19 (Fermatova (L4.5))

Nechť $a \in \mathbb{R}$ je bod lokálního extrému funkce f na M . Pak $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.

┌ *Důkaz*

Sporem. Necht a je bod lokálního extrému f na M , $\exists f'(a)$, ale $f'(a) \neq 0$. BÚNO $f'(a) > 0$. Pak $\exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in P(a, \delta) : \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Nyní $a < x \implies f(x) > f(a)$ a $a > x \implies f(x) > f(a)$ (obojí na intervalu $x \in P(a, \delta)$). Tedy zde není ani maximum, ani minimum, tj. není zde extrém. \square

└

Věta 3.20 (Rolleova)

Necht f je spojitá na intervalu $[a, b]$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (a, b)$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $\zeta \in (a, b)$ tak, že $f'(\zeta) = 0$.

┌ *Důkaz*

Je-li $f(x) = f(a) \forall x \in (a, b)$, volme ζ libovolně v (a, b) .

Necht $\exists x \in (a, b) f(x) \neq f(a) = f(b)$. BÚNO $f(x) > f(a)$. Podle věty o spojitosti funkce a nabývání extrémů existuje bod $\zeta \in [a, b]$ tak, že $f(\zeta) = \max \{f(x), x \in [a, b]\}$ $f(x_0) > f(a) \implies \zeta \neq a, \zeta \neq b \implies \zeta \in (a, b)$. Víme, že $\exists f'(\zeta)$, protože $f'(x)$ existuje všude na (a, b) . Podle Fermatovy věty je $f'(\zeta) = 0$. \square

└

Věta 3.21 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

Necht je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) . Pak existuje $\zeta \in (a, b)$ tak, že $f'(\zeta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

┌ *Důkaz*

Položme $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$. Pak F je spojitá na $[a, b]$ (součet spojitých funkcí) $F(a) = 0 = F(b)$. Dále $\exists F'(a) \forall x \in (a, b)$. Tudíž podle Rolleovy věty $\exists \zeta \in (a, b)$ tak, že $F'(\zeta) = 0$. Nyní $0 = F'(\zeta) = f'(\zeta) - 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \implies f'(\zeta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. \square

└

Důsledek

Necht $f'(x) = 0$ pro všechny $x \in (a, b)$. Pak je f konstantní na (a, b) . ($\forall x, y \in (a, b) \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\zeta) = 0$.)

Definice 3.18 (Vnitřek intervalu)

Necht J je interval. Množinu všech vnitřních bodů J nazýváme vnitřek J a značíme $\text{Int } J$.

Věta 3.22 (O vztahu derivace a monotonie)

Necht $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval a f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J má derivaci.

a) Je-li $f'(x) > 0$ na $\text{Int } J$, pak je f rostoucí na J . b) Je-li $f'(x) < 0$ na $\text{Int } J$, pak je f klesající na J . c) Je-li $f'(x) \geq 0$ na $\text{Int } J$, pak je f neklesající na J . d) Je-li $f'(x) \leq 0$ na $\text{Int } J$, pak je f nerostoucí na J .

┌ *Důkaz*

a) Necht $a, b \in J, a < b$. Pak f je na $[a, b]$ spojitá a existuje $f'(x) \forall x \in (a, b)$. Podle Lagrangeovy věty $\exists \zeta \in (a, b) \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\zeta) > 0 \implies f(b) > f(a)$.

└ Ostatní body analogicky. □

Věta 3.23 (Cauchyova věta o střední hodnotě)

Necht f, g jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ takové, že f má v každém bodě (a, b) derivaci a g má v každém bodě (a, b) vlastní derivaci různou od nuly. Pak existuje $\zeta \in (a, b)$ tak, že $\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

┌ *Důkaz*

Tvrdíme, že $f(b) - g(a) \neq 0$, jinak by podle Rolleovy věty $\exists \zeta \in (a, b), g'(\zeta) = 0$.

Definujme $H(x) = [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)]$. Pak H je spojitá na $[a, b]$ a $H(a) = 0 \cdot [g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)] \cdot 0 = 0$. Dále $H(b) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)] = 0$. Podle Rolleovy věty $\exists \zeta \in (a, b)$ tak, že $0 = H'(\zeta) = f'(\zeta) \cdot [g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)] \cdot g'(\zeta)$. Tj.

$$\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

└ □

Věta 3.24 (l'Hospitalovo pravidlo)

1. Necht $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$ a necht existuje $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. 2. Necht $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow a+} |g(x)| = +\infty$ a necht existuje $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

┌ *Poznámka*

└ Platí i pro $\lim_{x \rightarrow a-}$ a $\lim_{x \rightarrow a}$.

Důkaz

1. „ $\frac{0}{0}$ “, tj. „ $f(a) = g(a) = 0$ “: a) $a \in \mathbb{R}$. Víme $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Tedy $\exists \delta > 0 \forall x \in P_+(a, \delta) : g'(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) \in \mathbb{R}$. Definujeme $f(a) = g(a) = 0$. Pak f a g jsou spojité na $[a, a + \delta)$ a existují tam f' a g' . Jsou splněny předpoklady (V 4.9.) na intervalu $[a, x] \forall x \in (a, a + \delta)$. Existuje tedy $\zeta(x) \in (a, x)$ tak, že

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\zeta(x))}{g'(\zeta(x))}.$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ existuje $0 < \delta_0 < \delta$ tak, že $\forall y \in (a, a + \delta_0) : \frac{f'(y)}{g'(y)} \in B(A, \varepsilon)$. Nyní $\forall x \in (a, a + \delta_0)$ máme $\zeta(x) \in (a, x) \subset (a, a + \delta_0)$, tedy $\frac{f'(\zeta(x))}{g'(\zeta(x))} \in B(A, \varepsilon)$, a tedy díky výrazu kus výše $\frac{f(x)}{g(x)} \in B(A, \varepsilon) \implies \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

b) $a = -\infty$ ($a = +\infty$ analogicky) Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = B \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow 0+} h\left(-\frac{1}{y}\right) = B$. Zavedeme pomocné funkce $F(y) = f\left(-\frac{1}{y}\right)$ a $G(y) = g\left(-\frac{1}{y}\right)$, pak na jistém $P_+(0, \delta)$ platí $F'(y) = f'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-1}{y^2}$ a $G'(y) = g'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-1}{y^2}$. Nyní $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{F(y)}{G(y)}$ a

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{f'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-1}{y^2}}{g'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-1}{y^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Nyní z části 1. a) pro bod 0, F a G dostaneme $A = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$.

2. Dokážeme pouze v případě $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta_1 > 0$, že $\forall z \in P_+(a, \delta_1) : \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - A \right| < \varepsilon$. Zafixujme si $y \in P_+(a, \delta_1)$. Zvolme $0 < \delta_2 < \delta_1$, že $\forall x \in P_+(a, \delta_2) : \frac{1}{|g(x)|} (|f(y)| + |g(y)|(|A| + \varepsilon)) < \varepsilon$. Zvolme libovolně $x \in P_+(a, \delta_2) \cup (a, y)$. Na intervalu $[x, y]$ jsou splněny předpoklady V4.9, tj. $\exists \zeta \in (x, y)$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \implies$$

$$f(y) - f(x) = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \cdot g(y) - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \cdot g(x) \implies$$

$$\frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \implies$$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \right| = \left| \frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} \right| \leq \frac{|f(y)|}{|g(x)|} + \left| \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \right| \cdot \frac{|g(y)|}{|g(x)|} \leq \frac{|f(y)|}{|g(x)|} + (|A| + \varepsilon) \cdot \frac{|g(y)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon.$$

Dále můžeme pokračovat v odhadech:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \right| + \left| \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - A \right| < \varepsilon + \varepsilon.$$

□

Věta 3.25 (derivace a limita derivace)

Nechť je funkce f spojitá zprava v a a nechť existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak $f'_+(a) = A$.

┌

Důkaz

Z definice derivace

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{„0/0“}{=} \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{1} = A.$$

└

□

3.6 Konvexní a konkávní funkce

Definice 3.19

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a nechť f má vlastní n -tou derivaci na okolí bodu a . Pak $(n+1)$ -ní derivací v bodě a budeme rozumět $f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}$.

Definice 3.20

Funkce f na intervalu I nazveme konvexní (konkávní), jestliže $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ (\geq).

Funkci nazveme ryze konvexní (ryze konkávní), jsou-li příslušné nerovnosti ostré.

Poznámka

Ekvivalentně lze definovat, že funkce f je na I konvexní, pokud $\forall x, y \in I, x < y \forall \alpha \in (0, 1) :$

$$f(\alpha \cdot x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha \cdot f(x) + (1 - \alpha) \cdot f(y).$$

Lemma 3.26 (Lemmátko)

Nechť je funkce f na intervalu I konvexní, pak

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Platí i pro ryze konvexní případ (jen s ostrými nerovnostmi).

┌ *Důkaz*

$$\frac{1}{x_3 - x_1} \cdot (f(x_3) - f(x_1)) = \frac{1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2) + f(x_2) - f(x_1)) \geq \frac{1}{x_3 - x_1} \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right) \cdot (x_3 - x_1)$$

└ Druhá nerovnost se ukáže analogicky. □

Věta 3.27 (Vztah druhé derivace a konvexity (konkávity))

Nechť f má na intervalu (a, b) spojitou první derivaci.

Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$, pak f je ryze konvexní na intervalu (a, b) . Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$, pak f je ryze konkávní na intervalu (a, b) .

Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$, pak f je konvexní na intervalu (a, b) . Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) \leq 0$, pak f je konkávní na intervalu (a, b) .

┌ *Důkaz* (Třetí část, zbytek analogicky)

Z $f''(x) \geq 0$ a věty 4.8 (vztah derivace a monotonie) máme f' je neklesající na (a, b) . Zvolme $x_1 < x_2 < x_3 \in (a, b)$. Podle věty 3.7 (Lagrange) $\exists \zeta_1 \in (x_1, x_2), \zeta_2 \in (x_2, x_3) :$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\zeta_1) \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\zeta_2)$$

$$\zeta_1 < \zeta_2 \xrightarrow{f' \text{ neklesající}} f'(\zeta_1) \leq f'(\zeta_2) \implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

└ □

Věta 3.28 (Konvexita a jednostranné derivace)

Nechť f je konvexní na otevřeném J a $a \in \text{Int } J$. Pak $f'_+(a) \in \mathbb{R}$ a $f'_-(a) \in \mathbb{R}$.

┌ *Důkaz*

Z definice $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Nechť $a < x_1 < x_2$. Z lemmatu víme, že $\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \leq \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a}$. Tedy funkce $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ je klesající. Podle věty 3.7 (limita monotónní funkce) tedy $\exists \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}^*$.

Zvolme $y \in J, y < a, y$ pevné. Nyní $\forall x \in J, x > a$, platí

$$\frac{f(a) - f(y)}{a - y} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Tedy $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ je zdola omezená na jistém $P^+(a, \delta) \implies f'_+(a) \in \mathbb{R}$. □

Věta 3.29 (Konvexita a spojitost)

Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J . Pak f je spojitá na J .

┌ *Důkaz*

$a \in J \implies a \in \text{Int } J \implies \exists f'_+(a) \in \mathbb{R} (\exists f'_-(a) \in \mathbb{R})$. Z analogie věty 4.1 pro jednostranné limity je, jelikož má vlastní derivaci v a , f spojitá zleva (zprava) v bodě a . \square

Definice 3.21 (Tečna, inflexní bod)

Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Označme $T_a^f = \{[x, y] : x \in \mathbb{R}, y = f(a) + f'(a)(x - a)\}$.

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$, $x \in D_f$ leží nad (pod) tečnou T_a^f jestliže platí $f(x) \stackrel{(<)}{>} f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$.

Funkce f má v bodě a inflexi (a je inflexní bod), jestliže $f'(a) \in \mathbb{R}$ a existuje $\Delta > 0$ tak, že:

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a) : [x, f(x)]$ leží nad tečnou,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta) : [x, f(x)]$ leží pod tečnou,

nebo

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a) : [x, f(x)]$ leží pod tečnou,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta) : [x, f(x)]$ leží nad tečnou,

Věta 3.30 (Nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $f''(a) \neq 0$. Pak a není inflexní bod funkce f .

┌ *Důkaz*

BÚNO $f''(a) > 0$, tedy $f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0$. Standardním způsobem odvodíme $\exists \Delta > 0 \forall h \in P(0, \Delta) : \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0$. Tj.

$$\forall x \in (a, a + \Delta) : f'(x) > f'(a) \quad \forall x \in (a - \Delta, a) : f'(x) < f'(a)$$

Pro $y \in (a, a + \Delta)$ platí podle Lagrangeovy věty 4.7 $\frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(\zeta) > f'(a)$. Odtud $f(y) - f(a) > f'(a) \cdot (y - a) \implies f(y) > f(a) + f'(a) \cdot (y - a)$. Analogicky pro $y \in (a - \Delta, a)$ platí $f(y) > f(a) + f'(a) \cdot (y - a)$. Tedy a není inflexní bod. \square

Věta 3.31 (Postačující podmínka pro inflexi)

Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) . Nechť $z \in (a, b)$ a platí

$$\forall x \in (a, z) : f''(x) > 0 \wedge \forall x \in (z, b) : f''(x) < 0.$$

Pak z je inflexní bod.

┌ *Důkaz*

Podle V 4.8 (derivace a monotonie) víme, že f' klesá na $[z, b)$. Podle věty 4.7 (Lagrange o střední hodnotě) pro $x \in [z, b)$ nalezneme $\zeta \in (z, x) : \frac{f(x)-f(z)}{x-z} = f'(\zeta)$. Tj. $f(x) = f(z) + f'(\zeta)(x-z) < f(z) + f'(z) \cdot (x-z)$. Analogicky $\forall x \in (a, z] : f(x) > f(z) + f'(z) \cdot (x-z)$. Tj. z je inflexní bod f . \square

┌ *Poznámka*

Platí analogicky pro $f'' < 0$ na (a, z) a $f'' > 0$ na (z, b) .

3.7 Průběh funkce

Definice 3.22

Řekneme, že funkce $ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ je asymptota funkce f v $+\infty$ (resp. $-\infty$) jestliže $\lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Věta 3.32 (Tvar asymptoty)

Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $ax + b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$.

┌ *Poznámka*

Věta platí analogicky i pro $-\infty$.

┌ *Důkaz*

(\Rightarrow)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{a} \stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + b}{x} = \frac{0}{+\infty} + a = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax \stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) + \lim_{x \rightarrow +\infty} b = 0 + b = b$$

(\Leftarrow)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] \stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) + \lim_{x \rightarrow +\infty} (-b) = b + (-b) = 0$$

\square

Poznámka (Průběh funkce)

Vyšetřujeme:

- Určíme definiční obor a obor spojitosti.
- Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.

- Zjistíme symetrii funkce: lichost, sudost, periodicitu.
- Dopočítáme limity v „krajních bodech“ definičního oboru.
- Spočteme první derivaci (i jednostranné v problematických bodech).
- Určíme intervaly monotonie a nalezneme extrémy (lokální i globální).
- Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce konvexní / konkávní, určíme inflexní body.
- Vypočteme asymptoty funkce.
- Načrtneme graf funkce a určíme obor hodnot.

3.8 Taylorův polynom

Definice 3.23

Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní n -tá derivace f v bodě a . Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + f''(a) \cdot \frac{(x - a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x - a)^n}{n!}$$

nazýváme Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a .

Poznámka

Stupeň $T_n^{f,a}(x) \leq n$.

$$(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f,a}.$$

Věta 3.33 (O nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n . Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0 \Leftrightarrow P(x) = T_n^{f,a}.$$

┌ Důkaz

(\Leftarrow) MI: $n = 1$: $T_1^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0.$$

$n - 1 \rightarrow n$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x - a)^n} \stackrel{\text{L'Hospital}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - (T_n^{f,a}(x))'}{n \cdot (x - a)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - (T_{n-1}^{f,a}(x))'}{n \cdot (x - a)^{n-1}} \stackrel{\text{IP}}{=} 0.$$

(\Rightarrow)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x - a)^n} \stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - f(x)}{(x - a)^n} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x - a)^n} = 0 + 0 = 0.$$

└ Podle následujícího lemmatu (stupeň $P - T_n^{f,a} \leq n$) $P - T_n^{f,a} = 0$. □

Lemma 3.34 (K důkazu výše)

Nechť Q je polynom, $a \in \mathbb{R}$, $\deg(Q) \leq n$ a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak $Q(x) = 0$.

┌ Důkaz (Indukcí)

$n = 1$: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{x-a} = 0 \stackrel{\text{Je definováno}}{\implies} Q(a) = 0 \implies Q(x) = c(x - a)$. Nyní $\lim_{x \rightarrow a} \frac{c(x-a)}{(x-a)} = c = 0 \implies Q(x) = 0$.

$n - 1 \rightarrow n$: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0 \implies Q(a) = 0 \implies Q(x) = (x - a) \cdot R(x)$, kde stupeň $R \leq n - 1$. Tedy $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)R(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}} \stackrel{\text{ind. předpoklad}}{\implies} R(x) = 0 \implies Q(x) = 0$. □

Věta 3.35 (Taylor)

Nechť má funkce f vlastní $(n + 1)$ -ní derivaci v intervalu $[a, x]$ a nechť φ je spojitá funkce v $[a, x]$ a má vlastní derivaci v (a, x) , která je v každém bodě tohoto intervalu nenulová. Pak existuje $\zeta \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\zeta)} \cdot f^{(n+1)}(\zeta) \cdot (x - \zeta)^n.$$

Definice 3.24

$R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme zbytek po Taylorově polynomu stupně n .

Důsledek (Lagrangeův tvar zbytku)

Speciálně existuje $\zeta_1 \in (a, x)$ tak, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\zeta_1) \cdot (x - a)^{n+1}$.

┌

Důkaz

Položme $\varphi(t) = (x - t)^{t+1}$, pak $\varphi'(t) = (n + 1)(n - t)^n(-1)$, tedy

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{0 - (x - a)^n + 1}{(n + 1)(x - \zeta)^n} \cdot f^{(n+1)}(\zeta_1) \cdot (x - \zeta_1)^n.$$

└

□

Důsledek (Cauchyův tvar zbytku)

Speciálně existuje $\zeta_2 \in (a, x)$ tak, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\zeta_2) \cdot (x - \zeta_2)^n \cdot (x - a)$.

┌

Důkaz

Položme $\varphi(t) = t$.

└

□

Poznámka (Taylorovy řady elementárních funkcí)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Důkaz (Taylor)

Definujeme pro $t \in [a, x]$:

$$F(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right].$$

Platí F je spojitá na $[a, x]$ ($\exists f^{(n+1)}$ vlastní $\implies f^{(n)}$ spojitá). $F(x) = 0$. $F(a) = f(x) -$

$T_n^{f,a}(x) \cdot \exists F'$ na (a, x) .

Podle Cauchyovy věty o střední hodnotě $\exists \zeta \in (a, x)$:

$$\frac{0 - (f(x) - T_n^{f,a}(x))}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}.$$

Nyní

$$F'(\zeta) = 0 - \left[f'(\zeta) - f'(\zeta) + f''(\zeta) \cdot (x - \zeta) - f''(\zeta) \frac{2(x - \zeta)}{2} + f'''(\zeta) \frac{(x - \zeta)^2}{2!} + \dots - f^{(n)}(\zeta) \frac{n \cdot (x - \zeta)^{n-1}}{n!} \right]$$

Tedy

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = -F'(\zeta) \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\zeta)} = f^{(n+1)}(\zeta) \frac{(x - \zeta)^n}{n!} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\zeta)}.$$

□

Definice 3.25

Nechť f, g jsou funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a malé o od g , jestliže platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Píšeme $f(x) = o(g(x))$ pro $x \rightarrow a$.

Poznámka

Ukazovala se vzorová písemná zkouška.