Příklad (4. – Fredholm alternative vs Lax-Milgram lemma vs minimum principe)
Consider $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a Lipschitz domain. Let $\mathbb{A} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ be an elliptic matrix. Assume that $\mathbf{c} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ and $b \geqslant 0$. Consider the problem

$$-\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) + bu + \mathbf{c} \cdot \nabla u = f \text{ in } \Omega, \qquad u = u_0 \text{ on } \partial\Omega.$$

a) Consider the case $b = 0$, $\mathbf{c} = \mathbf{o}$ and $f \in L^2(\Omega)$ fulfilling $f \geqslant 0$. Let $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ and denote $m := \operatorname{essinf}_{\partial\Omega} u_0$. Show that the unique weak solution u satisfies $u \geqslant m$ almost everywhere in Ω.

Důkaz
Jak nám napovídá hint, definujeme $\varphi(x) := (u(x) - m)_- = \min(u(x) - m, 0)$. Chceme $\varphi \in W_0^{1,2}$. Víme, že $u \in W^{1,2}$. Nejprve ukážeme „$\varphi \in L_2$“: (φ je zřejmě měřitelná, neboť u je měřitelná a $\min(\text{měřitelná}, \text{měřitelná})$ je měřitelná)

$$\int_\Omega |\varphi|^2 = \int_\Omega |(u-m)_-|^2 \leqslant \int_\Omega |u-m|^2 \leqslant \int_\Omega |u|^2 + |m|^2 = \|u\|_2^2 + |m|^2 \cdot \lambda^d(\Omega) \leqslant \infty,$$

jelikož $u \in L^2$ a Ω je omezená (protože je lipschitzovská).

Na další stráně ukážeme $\nabla\varphi = \chi_{\{u<m\}} \nabla u$. Tedy $\|\nabla\varphi\|_2 = \|\chi\nabla u\|_2 \leqslant \|\nabla u\|_2$ a $\varphi \in W^{1,2}$. Následně „$\operatorname{tr}((u-m)_-) = 0$“: můžeme si všimnout, že $\operatorname{tr}(\min(a, b)) = \min(\operatorname{tr}(a), \operatorname{tr}(b))$ (platí pro $W^{1,2} \cap C(\overline{\Omega})$, a spojitostí tr a min rozšíříme na $W^{1,2}$), tedy

$$\operatorname{tr}((u-m)_-) = \min(\operatorname{tr}(u-m), \operatorname{tr}(0)) = \min(\operatorname{tr}(u) - \operatorname{tr}(m), 0) = \min(\operatorname{tr}(u_0) - \operatorname{tr}(m), 0) \overset{\operatorname{tr}(u_0) \geqslant m}{=} 0.$$

Nyní můžeme použít φ jako testovací funkci:

$$0 \geqslant \int_\Omega \underbrace{f}_{>0} \underbrace{\varphi}_{\leqslant 0} = \int_\Omega \mathbb{A}\nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega \mathbb{A}\nabla u \left(\chi_{\{u<m\}} \nabla u\right) = \int_\Omega \mathbb{A}\nabla u \left(\chi^2_{\{u<m\}} \nabla u\right) =$$

$$= \int_\Omega \mathbb{A}\left(\chi_{\{u<m\}} \nabla u\right)\left(\chi_{\{u<m\}} \nabla u\right) = \int_\Omega \mathbb{A}\nabla\varphi\nabla\varphi \geqslant \int_\Omega C_1 |\nabla\varphi|^2 = C_1 \|\nabla\varphi\|_2^2 \overset{\text{Poincaré s } \alpha_i = 0}{\geqslant}$$

$$\geqslant c\|\varphi\|_{1,2} \geqslant 0.$$

Tedy $\|\varphi\|_{1,2} = 0$, tudíž $\|\varphi\|_2 = 0$, tj. $\varphi = 0$ skoro všude, a proto $u \geqslant m$ skoro všude. □

Důkaz ($\nabla\varphi = \chi_{\{u<m\}}\nabla u$)
Z charakterizace sobolevovských funkcí víme $\exists u_n \in C^\infty(\Omega) : u_n \overset{W^{1,2}}{\to} u$. Tedy $\nabla u_n \overset{L^2}{\to} \nabla u$ a $u_n \overset{L^2}{\to} u$. Navíc z omezenosti Ω a Hölderovi nerovnosti můžeme konvergenci v L^2 nahradit konvergencí v L^1.

Označme $\varphi_n = (u_n - m)_-$. Potom

$$|\varphi_n - \varphi| = |(u_n - m)_- - (u-m)_-| \leqslant |(u_n - m) - (u-m)| = |u_n - u|$$

(třeba rozebráním všech čtyř možností), tedy $\varphi_n \overset{L_1}{\to} 0$. Tudíž

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega) : \int_\Omega \varphi_n \nabla\psi \to \int_\Omega \varphi\nabla\psi \iff \left|\int_\Omega (\varphi_n - \varphi)\nabla\psi\right| \leqslant \|\varphi_n - \varphi\|_1 \cdot \|\nabla\psi\|_\infty.$$

Nyní použijeme na tento integrál per partes (ze spojitosti u_n jsou $\{u_n < m\}$ otevřené a $\partial\{u_n < m\} \subseteq \{u_n = m\}$):

$$\int_\Omega \varphi_n\nabla\psi \leftarrow \int_\Omega \varphi_n\nabla\psi = \int_\Omega (u_n - m)_-\nabla\psi = \int_{\{u_n<m\}} (u_n - m)\nabla\psi + 0 \overset{\text{pp}}{=}$$

$$= \int_{\partial\{u_n<m\}} (u_n - m)\psi - \int_{\{u_n<m\}} \nabla u_n\psi - \int_\Omega \nabla m\psi = 0 - \int_\Omega \chi_{\{u_n<m\}}\nabla u_n\psi - 0 =$$

$$= -\int_\Omega \chi_{u<m}\nabla u_n\psi + \int_\Omega \chi_{\{u<m \wedge u_n \geqslant m\}}\nabla u\psi - \int_\Omega \chi_{\{u<m\wedge u_n\geqslant m\}}(\nabla u - \nabla u_n)\psi.$$

Poslední integrál konverguje k 0, neboť

$$\left|\int_\Omega \chi_{\{u<m\wedge u_n\geqslant m\}}(\nabla u - \nabla u_n)\psi\right| \leqslant \int_\Omega |(\nabla u - \nabla u_n)\psi| \leqslant \|\nabla u - \nabla u_n\|_1 \cdot \|\psi\|_\infty \to 0,$$

druhý jde k 0, protože $u_n \overset{L^1}{\to} u$ nám dává, že pro každé ε je $\lambda^d(\{u_n \geqslant m \wedge u < m - \varepsilon\}) \to 0$. Ale protože $\lambda^d(\{u_n \geqslant m \wedge u < m-\varepsilon\}) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \lambda^d(\{u_n \geqslant m \wedge u < m\})$, tak dostáváme, že $\lambda^d(\{u < m \wedge u_n \geqslant m\}) \to 0$. Tedy integrujeme přes „mizející" množinu.

Nakonec třetí z těch integrálů konverguje k $-\int_\Omega \chi_{u<m}\nabla u\psi$, tedy $\nabla\varphi = \chi_{u<m}\nabla u$, protože

$$\left|\int_\Omega \chi_{u<m}(\nabla u - \nabla u_n)\psi\right| \leqslant \int_\Omega |(\nabla u - \nabla u_n)\psi| \leqslant \|\nabla u - \nabla u_n\|_1 \cdot \|\psi\|_\infty$$

□

b) Consider $b > 0$ and $\mathbf{c}$ arbitrary. Prove that for any $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ and any $f \in L^2(\Omega)$ there exists a weak solution.

Důkaz

Nejprve si podle hintu převedeme úlohu na důkaz tvrzení, že

$$-\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) + bu + \mathbf{c} \cdot \nabla u = 0 \text{ v } \Omega$$

má pouze jedno řešení $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $u = 0$.

Doplňme si do zadání $a_{ij}, b \in L^\infty$. Pak $f - bu_0 - \mathbf{c} \cdot \nabla u_0 + \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) \in L^2$ (z Höldera a $u_0 \in W^{1,2}$, tj. $u_0 \in L^2$ a $\nabla u_0 \in L^2$).

Potom z Fredholmovy alternativy a z tvrzení (pokud tedy platí, což si dokážeme dále) plyne, že problém

$$-\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) + bu + \mathbf{c} \cdot \nabla u = f - bu_0 - \mathbf{c} \cdot \nabla u_0 + \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) \text{ v } \Omega, \qquad u = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

má (právě jedno) řešení $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Pokud tedy zvolíme $\tilde{u} = u + u_0$, pak $\tilde{u}$ je slabé řešení problému

$$-\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla \tilde{u}) + b\tilde{u} + \mathbf{c} \cdot \nabla \tilde{u} = f \text{ v } \Omega, \qquad \tilde{u} = u_0 \text{ na } \partial\Omega,$$

neboť „všechno“ je zde lineární, takže „přičtením“ u_0 k u na levé straně se přičtou odpovídající členy na pravé. □

Důkaz
Mějme u řešící $-\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) + bu + \mathbf{c}\cdot\nabla u = 0$ v Ω.

Nyní dokážeme, že pro nějaké M je $|u| < M$ skoro všude, tedy $u \in L^\infty(\Omega)$ a $\|u\|_{L^\infty} \leqslant M$. Pokud $d = 1$, tak je z věty o vnoření u spojité, takže se omezenost může „rozbíjet" pouze na hranici Ω, ale my víme, že $\operatorname{tr} u = 0$. Pro tuto část důkazu tedy předpokládejme $d > 1$.

Ať $M > 0$ a $\varphi_M := (u - M)_+$. Protože je $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, tak $\varphi_M \in W^{1,2}(\Omega)$ ze stejných důvodů jako v a), $\nabla\varphi_M = \nabla u \cdot \chi_{u\geqslant M}$, a navíc $\varphi_M \in W_0^{1,2}$, neboť u zůstává 0 tam, kde 0 bylo.

Tedy ho můžeme použít jako testovací funkci: $\int \mathbb{A}\nabla u\cdot\nabla\varphi_M + bu\varphi_M + \mathbf{c}\cdot\nabla u\varphi_M = \int 0\cdot\varphi_M$. První a třetí člen už je na $u < M$ stejně nulový, tedy můžeme psát

$$\int \mathbb{A}\nabla\varphi_M\cdot\nabla\varphi_M + bu\varphi_M = -\int \mathbf{c}\cdot\nabla\varphi_M\varphi_M.$$

Levou stranu můžeme zezdola odhadnout pomocí toho, že $b > 0$, $\varphi_M \geqslant 0$ a tam, kde $\varphi_M \neq 0$, $u \geqslant M > 0$. Navíc $\mathbb{A}$ je eliptické, takže

$$c_1\|\nabla\varphi_M\|_2^2 = \int c_1\|\nabla\varphi_M\|_{\mathbb{R}^d}^2 \leqslant \int \mathbb{A}\nabla\varphi_M\cdot\nabla\varphi_M + bu\varphi_M = -\int \mathbf{c}\cdot\nabla\varphi_M\varphi_M.$$

Levou část můžeme shora odhadnout pomocí dvakrát použité Hölderovy nerovnosti:

$$-\int \mathbf{c}\cdot\nabla\varphi_M\varphi_M \leqslant \|\mathbf{c}\|_\infty\cdot\|\nabla\varphi_M\|_2\cdot\|\varphi_M\|_2.$$

Nyní znovu použijeme Hölderovu nerovnost, tentokrát na $\|\varphi_M\|_2$. Protože ψ je na $u < M$ nulové, můžeme psát (jak bylo na přednášce)

$$\|\varphi_M\|_2 = \sqrt{\int \varphi_M^2} = \sqrt{\int \varphi_M^2\chi_{u\geqslant M}} \leqslant \sqrt{\left(\int \varphi_M^{2p}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int \chi_{u\geqslant M}^q\right)^{\frac{1}{q}}} = \|\varphi_M\|_{2p}\cdot\left(\int \chi_{u\geqslant M}\right)^{\frac{1}{2q}}$$

kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avšak musíme použít správné $p \neq 1$ ($p = 1$ nám nedává nic nového), aby $\varphi_M \in L^{2p}$. To můžeme z věty o vnoření Sobolevových prostorů: pokud $d = 2$, tak $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^r$ pro r jakékoliv, takže není co řešit. Pokud $d > 2$, tak můžeme vybrat $2p = r = \frac{d\cdot 2}{d-2} = \frac{2}{1-(2/d)} > 2$ ($p > 1$).

Nakonec $\infty > \int u \geqslant \int_{u>M} u \geqslant \int_{u>M} M$, tedy míra $\{u > M\}$ se musí pro rostoucí M zmenšovat k nule. Takže můžeme zvolit libovolně malé $\left(\int \chi_{u\geqslant M}\right)^{\frac{1}{2q}}$ v nerovnosti:

$$c_1\cdot C\cdot\|\nabla\varphi_M\|_2\cdot\|\varphi_M\|_{2p} \underset{nerov}{\overset{\text{Sob.}}{\leqslant}} c_1\|\nabla\varphi_M\|_2^2 \leqslant -\int \mathbf{c}\cdot\nabla\varphi_M\varphi_M \leqslant \|\mathbf{c}\|_\infty\cdot\|\nabla\varphi_M\|_2\cdot\|\varphi_M\|_{2p}\left(\int \chi_{u\geqslant M}\right)^{\frac{1}{q}},$$

tedy $\|\nabla\varphi_M\|_2 = 0$ (nebo $\|\varphi_M\|_2 = 0$, ale to bychom byli hotovi). Tudíž se nám celá rovnost s testovací funkcí φ_M stala $\int b\cdot u\cdot\varphi_M = 0$, ale $b > 0$, $u > 0$ (kde $\varphi_M \neq 0$), takže musí být $\varphi_M = 0$ skoro všude, tedy $u \leqslant M$ skoro všude. □

Důkaz
Úplně stejně dostaneme $u \geqslant -M'$ pro nějaké $M' > 0$ z $\varphi_{M'} = (u+M)_-$, jelikož pak

$$\int \mathbb{A}\nabla\varphi_{M'} \cdot \nabla\varphi_{M'} + b(-u)(-\varphi_{M'}) = -\int \mathbf{c} \cdot \nabla\varphi_{M'}\varphi_{M'}.$$

má úplně stejné vlastnosti jako rovnice výše, jelikož v prvním členu je druhá mocnina, v druhém je to zase kladné a vpravo omezujeme vlastně absolutní hodnotu (víme, že pravá strana je nezáporná, takže i levá musí být) normami, takže na znamínkách nezáleží. □

Důkaz
Nyní máme tedy dokázáno, že u je „omezená skoro všude", tedy $u \in L^\infty$. Tedy i $u^k \in L^\infty$ pro $k \in \mathbb{N}$, navíc $\nabla u^k = k \cdot u^{k-1}\nabla u$, protože $\nabla(u \cdot \ldots \cdot u) = u\nabla(u \cdot \ldots \cdot u) + (\nabla u)(u \cdot \ldots \cdot u)$ a $u^{k-1} \in L^\infty$, tedy $u^k \in W^{1,2}(\Omega)$. Nakonec $\operatorname{tr} u^k|_{\partial\Omega} = 0$, neboť

$$\operatorname{tr} u^k|_{\partial\Omega} = u^k|_{\partial\Omega} = (u|_{\partial\Omega})^k = (\operatorname{tr} u|_{\partial\Omega})^k = 0^k = 0.$$

Tedy $u^k \in W_0^{1,2}$. Použijme u^k pro k liché jako testovací funkci:

$$\int \mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla u^k = \int k \cdot u^{k-1}\mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla u = \int -bu \cdot u^k - u^k\mathbf{c} \cdot \nabla u.$$

Na levou stranu můžeme použít elipticitu $\mathbb{A}$ (existuje $c_1 > 0$, že $\mathbb{A}\mathbf{v}\mathbf{v} \geqslant c_1|\mathbf{v}|$), napravo je $-bu^{k+1}$ určitě záporné, tedy ji můžeme zvětšit přidáním absolutní hodnoty do části s $\mathbf{c}$ (absolutní hodnotu si hned rozdělíme pro použití v Youngově nerovnosti, použitím faktu $k+1$ a $k-1$ jsou sudá):

$$\int c_1(\nabla u)^2 \cdot k \cdot u^{k-1} = \int k \cdot u^{k-1}\mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla u \leqslant -\int bu^{k+1} + \int |\mathbf{c} \cdot \nabla u| \cdot |u^{(k-1)/2}| \cdot |u^{(k+1)/2}|.$$

Chtěli bychom se zbavit integrálu s $\mathbf{c}$, tedy použijeme Youngovu nerovnost pro koeficienty $p = q = 2$, tj. $\left(|\mathbf{c} \cdot \nabla u| \cdot |u^{(k-1)/2}|/\sqrt{K}\right) \cdot |u^{(k+1)/2}| \cdot \sqrt{K} \leqslant \frac{|\mathbf{c}\cdot\nabla u|^2 \cdot u^{k-1}}{2K} + \frac{K \cdot u^{k+1}}{2}$, kde $K > 0$ libovolné: (na $\mathbf{c} \cdot \nabla u$ navíc použijeme Cauchy-Schwarze)

$$\int c_1(\nabla u)^2 \cdot k \cdot u^{k-1} \leqslant -\int bu^{k+1} + \int |\ldots| \leqslant -\int bu^{k+1} + \int \frac{|\mathbf{c} \cdot \nabla u|^2 \cdot u^{k-1}}{2K} + \frac{u^{k+1} \cdot K}{2},$$

$$\int (c_1 \cdot k - |\mathbf{c}|^2/2K)(\nabla u)^2 \cdot u^{k-1} \leqslant \int (-b + K/2)u^{k+1}.$$

Tím, že $-|\mathbf{c}| \geqslant -\|\mathbf{c}\|_\infty$ a $-b \leqslant -\operatorname{essinf} b$ skoro všude, a Hölderovou nerovností (pro $1, \infty$):

$$(c_1 \cdot k - \|\mathbf{c}\|_\infty^2/2K) \int (\nabla u)^2 \cdot u^{k-1} \leqslant (-\operatorname{essinf} b + K/2) \int u^{k+1}.$$

Volbou $K = \frac{1}{\sqrt{k}}$ dostaneme $\sqrt{k}(c_1 \cdot \sqrt{k} - \|\mathbf{c}\|_\infty^2/2) \int (\nabla u)^2 \cdot u^{k-1} \leqslant (-\operatorname{essinf} b + 1/2\sqrt{k}) \int u^{k+1}$. Pro $k > \|\mathbf{c}\|_\infty^4/4c_1^2$ je levá strana nezáporná. A je-li $\operatorname{essinf} b > 0$, pak pro $k > 4/(\operatorname{essinf} b)^2$ je koeficient vpravo záporný, tedy $\int u^{k+1} = 0$, takže $\|u\|_{k+1} = 0$, tedy $u = 0$. □