1 Skalární součin

Definice 1.1 (Standardní skalární součin vektorů)

Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ je definován jako $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Definice 1.2 (Skalární součin nad $\mathbb{R}$)

Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Pak skalární součin je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V}^2 \to \mathbb{R}$, splňující pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \text{a rovnost nastane jen pro } \mathbf{x} = \mathbf{o},$$

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle,$$
$$\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

Definice 1.3 (Komplexně sdružené číslo)

Komplexně sdružené číslo k $a + bi \in \mathbb{C}$ je číslo $\overline{a + bi} = a - bi$.

Definice 1.4 (Skalární součin nad $\mathbb{C}$)

Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Pak skalární součin je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V}^2 \to \mathbb{C}$, splňující pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \text{a rovnost nastane jen pro } \mathbf{x} = \mathbf{o},$$

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle,$$
$$\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Poznámka

Skalární součin je bilineární (nad $\mathbb{C}$ se ale musí komplexně sdružovat druhá složka), tudíž je dán hodnotami pro báze (všechny dvojice bází).

Definice 1.5 (Norma indukovaná skalárním součinem)

Norma indukovaná skalárním součinem je definovaná jako

$$||\mathbf{x}|| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}, \text{ kde } \mathbf{x} \in \mathbf{V}.$$

Definice 1.6 (Kolmost)

Vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ jsou kolmé, pokud $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Značíme: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Věta 1.1 (Pythagorova)

Pokud $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *jsou kolmé, tak*

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y^2||.$$

Důkaz

$$||x+y||^2 = \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = ||x||^2 + 0 + 0 + ||y^2|| = ||x||^2 + ||y^2||.$$

□

Poznámka

Pro reálná čísla platí i zpětná implikace, pro komplexní obecně ne.

Věta 1.2 (Cauchyho-Schwartzova nerovnost)

Pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *platí*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||.$$

Důkaz

Pro $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ platí, tak předpokládejme $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$. Uvažujme funkci

$$f(t) = \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle \geq 0.$$

Pak

$$f(t) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + t \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + t \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2t \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle t^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq 0.$$

Což je kvadratická funkce, která je všude nezáporná, tedy nemůže mít 2 kořeny, tedy má nekladný diskriminant:

$$4 \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^2 - 4 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \leq 0.$$

Odtud $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ a odmocněním $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$. □

Důsledek (Trojúhelníková nerovnost)

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||.$$

Důkaz
Nejprve připomeňme, že pro každé $z = a + bi \in \mathbb{C}$ platí $z + \overline{z} = 2a = 2\Re(z)$, a dále $a \leq |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Nyní můžeme odvodit (obě strany jsou nezáporné):

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\Re(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \leq \langle$$

□

1.1 Norma obecně

Definice 1.7 (Norma)

Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Pak norma zobrazení $||\cdot|| : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, splňující (pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$):

$$||\mathbf{x}|| \geq 0 \text{ a rovnost nastává pouze pro } \mathbf{x} = \mathbf{o},$$

$$||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha| \cdot ||\mathbf{x}||,$$

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||.$$

Tvrzení 1.3

Norma indukovaná skalárním součinem je normou.

Důkaz
Triviální. □

Například
Pro $p = 1, 2, \ldots, \infty$ definujeme p-normu vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jako

$$||\mathbf{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definice 1.8 (Jednotková koule)

Jednotková koule je množina vektorů, které mají normu nanejvýš 1, a tedy jsou od počátku vzdáleny maximálně 1:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{V} : ||x|| \leq 1\}.$$

Poznámka
Jednotková koule je vždy uzavřená, omezená, symetrická dle počátku, konvexní a počátek leží v jejím vnitřku.

Definice 1.9 (Metrika generovaná normou)

Každá norma určuje metriku (vzdálenost) předpisem $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$.