1 Úvod

Poznámka (Co je diskrétní matematika)
Protipól matematiky spojité. Souhrnný název pro matematické disciplíny, zabývající se diskrétními objekty.

Poznámka (Co je potřeba)
Cvičení + zkouška z věcí z přednášky.

Poznámka (literatura)
Kapitoly z diskrétní matematiky od Matouška.

Definice 1.1 (Důkaz (neformální))

Rozebírání tvrzení na tvrzení, která už jsou zřejmá.

Definice 1.2 (Definice (neformální))

Definujeme objekty pomocí jednodušších a jednodušších, až axiomů.

Definice 1.3 (Důkaz sporem)

Dokážeme φ tím, že vyvrátíme φ

Definice 1.4 (Důkaz matematickou indukcí)

Dokážeme $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n)$ tak, že dokážeme $\varphi(0) \land (\forall n \in \mathbb{N})(\varphi(n) \implies \varphi(n+1))$

Definice 1.5 (Dolní a horní celá část)

$\lceil x \rceil$ je nejbližší nižší celé číslo k x

$\lfloor x \rfloor$ je nejbližší vyšší celé číslo k x

Definice 1.6 (Sčítání mnoha čísel)

$\sum_{i=13}^{n} x_i = x_{13} + x_{14} + \ldots + x_n =$ Sčítání x od indexu 13 do indexu n

$\sum_{\emptyset} = 0$

Definice 1.7 (Násobení mnoha čísel)

$\prod_{i=13}^{n} x_i = x_{13} \cdot x_{14} \cdot \ldots \cdot x_n =$ Násobení x od indexu 13 do indexu n

$\prod_{\emptyset} = 1$

Poznámka (Klasické množiny)
$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

Poznámka (Klasické množinové operace)

$$x \in A$$
$$A \subseteq B$$
$$A \cap B$$
$$A \cup B$$
$$A \setminus B$$
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \text{disperze}$$
$$2^A = \mathcal{P}(A)$$

Definice 1.8 (Uspořádaná dvojice)

Uspořádaná dvojice je (x, y) nebo $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Vytváří se např. kartézským součinem $A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Uspořádaná trojice je $(x, y, z) = ((x, y), z) = (x, (y, z))$. Atd. pro n-tice.

Definice 1.9 (Relace)

A je (binární) relace mezi množinami X a $Y \equiv A \subseteq X \times Y$.

A je (binární) relace na množině $X \equiv$ je mezi X a X.

Inverze je relace mezi Y a X: $R^{-1} := \{(y, x) | (x, y) \in R\}$.

Skládání: $T = R \circ S := \{(x, z) | \exists y : xRy \wedge ySz\}$.

Diagonála = diagonální relace: $\triangle x := \{(x, x) \in \mathbb{X}\}$.

Definice 1.10 (Funkce = zobrazení)

Funkce z množiny X do množiny Y je relace A mezi X a Y taková, že $\forall x \in X\ \exists! y \in Y : xAy$

Definice 1.11 (Vlastnosti funkcí)

Funkce $f : X \to Y$ je:

- prostá (injektivní) $\equiv \nexists x, x' \in X : x \neq x' \wedge f(x) = f(x')$,
- na Y (surjektivní) $\equiv \forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$,

- vzájemně jednoznačná (bijektivní, 1-1 (jedna ku jedné)) $\forall y \in Y\ \exists! x \in X : f(x) = y$.

Definice 1.12 (Vlastnoti relací)

Relace R na X je:

- reflexivní $\equiv \forall x \in X : xRx$,
- symetrická $\equiv \forall x, y \in X : xRy \implies yRx (\Leftrightarrow R = R^{-1})$,
- antisymetrická $\equiv \forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \implies x = y$,
- tranzitivní $\equiv \forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \implies xRz$.

Definice 1.13 (Ekvivalence)

Relace se nazývá ekvivalence, pokud je tranzitivní, reflexivní a symetrická.

Definice 1.14 (Ekvivalenční třídy)

$$R[x] = \{y \in X | xRy\}$$

Věta 1.1

$$1)\ \forall x \in X : R[x] \neq \emptyset$$
$$2)\ \forall x, y \in X : R[x] = R[Y] \veebar R[x] \cap R[y] = \emptyset$$
$$3)\ \{R[x] | x \in X\}\ \textit{určuje ekvivalenci } R \textit{ jednoznačně}$$

Důkaz
1) triviální.

2) Dokážeme: pokud $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$, pak $R[x] = R[y]$. (Tranzitivita).

3) V přednášce nebyl. □

Definice 1.15 (Rozklad množiny)

Množinový systém $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ je rozklad množiny X tehdy, když
(R1) $\forall A \in \mathcal{S} : A \neq \emptyset$,
(R2) $\forall A, B \in \mathcal{S} : A \neq B \implies A \cap B = \emptyset$,
(R3) $\bigcup_{A \in \mathcal{S}} = X$.

Definice 1.16 (Uspořádání)

Relace R na množině X je uspořádání $\equiv$ R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Poznámka
Někdy se říká částečné uspořádání a částečně uspořádaná množina (ČUM), aby se zdůraznilo, že nemusí být lineární.

Definice 1.17 (Uspořádaná množina)

Dvojice (X, R), kde X je množina a R je uspořádání na ní.

Definice 1.18 (Porovnatelné prvky a lineární uspořádání)

$x, y \in X$ jsou porovnatelné $\equiv xRy \vee yRx$

Uspořádání R je lineární $\equiv \forall x, y \in X : x, y$ jsou porovnatelné.

Definice 1.19 (Ostrá nerovnost)

$(X, \leq)$ ČUM $\rightarrow (X, <) : x < y \equiv x \leq y \wedge x \neq y$

Definice 1.20 (Hasseův diagram)

Poznámka
Splňuje následující:
1. To, co je nahoře je větší než to, co je dole,
2. Nezakreslujeme tranzitivitu.

Definice 1.21 (Bezprostřední předchůdce ($x \lhd y$))

x je bezprostřední předchůdce y v uspořádání $\leq \equiv x < y \wedge (\nexists z : x < z \wedge z < y)$.

V Hasseově diagramu jsou mezi vrcholy (prvky množiny) hrany, pouze pokud dolní vrchol je bezprostředním předchůdcem toho nahoře.

Definice 1.22 (Nejmenší, minimální, největší a maximální prvek)

- $x \in X$ je nemenší $\equiv \forall y \in X : x \leq y$,
- $x \in X$ je minimální $\equiv \nexists y \in X : y < x$,
- $x \in X$ je největší $\equiv \forall y \in X : x \geq y$,

- $x \in X$ je maximální $\equiv \nexists y \in X : y > x$.

Lemma 1.2

Každá konečná neprázdná ČUM má minimální prvek.

Důkaz (Důkazík)
$x_1 \in X$ zvolíme libovolně, pokud x_1 není minimální $\exists x_2 < x_1 ... \exists k \in \mathbb{N} : x_k$ je minimální. $\square$

Definice 1.23 (Řetězec)

Pro $(X, \leq)$ ČUM $A \subseteq X$ je řetězec $\equiv \forall a, b \in A : a, b$ jsou porovnatelné.

Naopak $A \subseteq X$ je antiřetězec (nezávislá množina) $\equiv \nexists a, b \in A$ různé a porovnatelné.

Definice 1.24 (Délka nejdelšího řetězce a velikost největšího antiřetězce)

$$\omega(X, \leq) := \text{maximum z délek řetězců („výška uspořádání“)}$$

$$\alpha(X, \leq) := \text{maximum z „délek“ (velikostí) antiřetězců („šířka uspořádání“)}$$

Věta 1.3 (O dlouhém a Širokém)

$$\forall (X, \leq) \check{C}UM : \alpha(X, \leq) \cdot \omega(X, \leq) \geq |X|$$

(Neboli buď $\alpha \geq \sqrt{|X|}$ nebo $\omega \geq \sqrt{|X|}$.)

Důkaz
Sestrojíme $X_1 := \{x \in X | x \text{ je minimální}\}$.

Když máme $X_1, \ldots, X_i$, $Z_i := X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i} X_j\right)$. Pokud $Z_i = \emptyset$, tak jsme skončili, jinak $X_{i+1} := \{x \in Z_i | x \text{ je minimální v } Z_i\}$.

Přitom $\forall i$ X_i je antiřetězec, $\{X_1, \ldots, X_k\}$ tvoří rozklad X a $\exists \{r_j \in X_j\}_{j=1}^{k}$, $\{r_j\}_{j=1}^{k}$ je řetězec. ($r_k \in X_k$ zvolíme libovolně, $r_j \notin X_{j-1} \implies \exists r_{j-1} \in X_{j-1} : r_{j-1} < r_j$.)

$$|X| = \sum_{i=1}^{k} |X_i| \leq k \cdot \max_{1 \leq i \leq k} |X_i| \leq \omega \cdot \alpha.$$

$\square$

Věta 1.4

$\#f : N \to M = m^n, |N| = n, |M| = m, m > 0, n > 0$

Důkaz (Indukcí)

$$n = 1 : \#f = m = m^1$$

$$n \to n+1 : f \text{ jednoznačně určena } f(x) \text{a} f' : N \setminus \{x\} \to M \implies \#f = m \cdot m^n = m^{n+1}$$

□

Věta 1.5

Je-li N n-prvková množina, pak $\left|2^N\right| = 2^n$.

Důkaz
Charakteristickou funkcí:

$$A \subseteq N \to C_A : N \to \{0,1\}, C_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A. \end{cases}$$

□

Věta 1.6

Nechť $X \neq \emptyset$ je konečná množina, $\mathcal{S} := \{S \subseteq X |\ |S| \text{ je sudá}\}$, $\mathcal{L} := \{L \subseteq X |\ |L| \text{ je lichá}\}$. Potom $|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}| = 2^{n-1}$.

Důkaz
Víme, že $\mathcal{S} \cup \mathcal{L} = 2^X$. Stačí tedy $|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}|$. Zvolíme si $a \in X$. Pak $f(S) := S \triangle \{a\}$ je bijekce z $\mathcal{S}$ do $\mathcal{L}$. □

Věta 1.7

Nechť N je n prvková, M je m-prvková. Potom $\#f : N \to M$ prostých $= m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$.

> *Poznámka* (Možná značení)
>
> $$[n] := \{0, 1, \ldots, \}$$
>
> $$m^{\underline{n}} = \frac{m!}{(m-n)!} \text{ (} m \text{ na } n \text{ klesající)}$$

Poznámka (Kódování funkcemi)

- $X \to \{0,1\} \dots 2^X$
- $\{1,2\} \to X \dots (x,y) \in X^2$
- $\{1,\dots,k\} \to X \dots$ uspořádané k-tice … X^k
- $\mathbb{N} \to X$ … nekonečné posloupnosti prvků X
- permutace na X, tj. počet bijekcí nebo počet lineárních uspořádání na konečném X … $|X|!$ $(0! = 1)$

Definice 1.25 (Kombinační číslo)

Kombinační číslo = binomický koeficient (n nad k) je $\binom{n}{k} := \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Definice 1.26

Pro množinu X a $k \geq 0$ definujeme $\binom{X}{k} := \{A \subseteq X : |A| = k\}$.

Věta 1.8

Pro každou množinu X a $k \geq 0$: $\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$.

Poznámka (Vlastnosti kombinačních čísel)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(Lze upočítat / nebo rozdělit na případ vybereme / nevybereme konkrétní prvek.)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \text{ (BV pro } A = 1,\ B = 1.)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \text{ (BV pro } A = 1,\ B = -1.)$$

Poznámka
Vlastnosti se dají vykoukat v tzv. Pascalově trojúhelníku.

Věta 1.9 (Binomická)

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} A^k \cdot B^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$$

Důkaz
Vybírá se k z n členů, ze kterých bude A... □

Věta 1.10 (Princip inkluze a exkluze)

Pro konečné množiny $A_1 - A_n$:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}\right| = \sum_{k}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Nebo alternativně:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Důkaz
Pro každý prvek $x \in \bigcup_i A_i$ spočítáme příspěvky k levé (vždy 1) a k pravé straně. Nechť x patří právě j množin z $A_1, \ldots, A_n$. Průniky k-tic: (1) $k > j$ přispěje 0. (2) $k \leq j$ přispěje $(-1)^{k+1}\binom{j}{k}$. Součet toho je alternující řada kombinačních čísel „bez 1“, tedy součet je 1. □

Důkaz (Druhý)
Vyjdeme z

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} \prod_{i \in I} x_i.$$

Definujeme si charakteristickou funkci a zjistíme, že ch. f. průniku je součin, ch. f. doplňku je 1-ch. f. původního a ch. f. sjednocení je doplněk průniku doplňků a velikost je součet ch. funkce. Tedy dosadíme za x_i mínus charakteristické funkce (1 nám vypadla z prázdné podmnožiny):

$$1 - c_{\bigcup_i A_i} = \left(\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \cdot c_{\bigcap_{i \in I} A_i} \right) + 1.$$

Následně ještě přeformulujeme do velikostí a získáme princip inkluze a exkluze. □

Příklad (Šatnářka)
Šatnářka náhodně vydala klobouky gentlemanům. Jaká je pravděpodobnost, že se ani jeden klobouk nedostal k majiteli?

Tj. $S_n := \{\pi | \pi \text{ permutace na } \{1, \ldots, n\}\}$, $\pi(i) = i \implies i$ je pevný bod:

$$\check{S}_n := \{\pi \in S_n | \nexists i : \pi(i) = i\} .$$

Příklad se tedy ptá na $\frac{\check{S}_n}{n!}$.

Řešení
Lepší je počítat doplněk $\check{S}_n$: $A := \{\pi \in S_n | \pi \text{ má pevný bod}\}$. Definujeme si množiny $A_i := \{\pi \in S_n | \pi(i) = i\}$. Následně vypozorujeme $A = \bigcup_i A_i$. Očividně $|A_i| = (n-1)!$, $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ $(i \neq j)$, ...

$$|A| = \left| \bigcup_{i=1}^{n} \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{\{1,\ldots,n\}}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{\{1,\ldots,n\}}{k}} (n-k)! =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}$$

$$|A| = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \right)$$

$$\check{S}_n = |A| \to n! \frac{1}{e}$$

2 Odhady

Například

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^n$$

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n$$

$$* \left(\frac{n}{e} \right)^n \leq n! \leq en \cdot \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

$$** \, n! \sim \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

$$\left(\frac{n}{k} \right)^k \leq \binom{n}{k} \leq n^k$$

$$*\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

$$\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$$

$$*\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{2n}}$$

3 Grafy

Definice 3.1 (Graf, vrcholy, hrany)

Graf je uspořádaná dvojice (V, E), kde: V je konečná neprázdná množina vrcholů (vertices) a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran (edges).

Poznámka (Rozšíření)
Orientované, se smyčkami, multigrafy, nekonečné.

Například
Úplný graf (K_n): $V(K_n) := \{1, \ldots, n\}$ a $E(K_n) := \binom{V(K_n)}{2}$.

Prázdný graf (E_n): $V(E_n) := \{1, \ldots, n\}$ a $E(E_n) := \emptyset$.

Cesta (P_n): $V(P_n) := \{0, 1, \ldots, n\}$ a $E(P_n) := \{\{i, i+1\} \,|0 \leq i < n\}$.

Kružnice (C_n): $V(C_n) := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ a $E(C_n) := \{\{i, i+1 \mod n\} \,|0 \leq i \leq n\}$.

Úplný bipartitní graf $(K_{m,n})$:

$$V(K_n) := \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{b_1, \ldots, b_n\} \wedge E(K_n) := \{\{a_i, b_j\} \,|1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Definice 3.2 (Bipartitní graf)

Graf G je bipartitní $\equiv$ $\exists$ rozklad množiny $V(G)$ na X, Y (= partity) tak, že $E(G) \subseteq \{\{x, y\} \,|x \in X, y \in Y\}$. (Lze zapsat i jako $\forall e \in e(G) : |e \cap X| = 1$.)

Definice 3.3 (Isomorfismus grafů)

Grafy G a H jsou isomorfní (značme $G \cong H$) $\equiv$ $\exists f : V(G) \to V(H)$ bijekce tak, že $\forall u, v \in V(G) : (\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H))$.

Poznámka (K nahlédnutí)
Na libovolné množině grafů je $\cong$ ekvivalence.

Definice 3.4 (Stupeň vrcholu)

Stupeň vrcholu v v grafu G je $\deg_G(v) := |\{u \in V(G) | \{u,v\} \in E(G)\}|$.

Definice 3.5 (Regulární graf)

Graf je k-regulární (pro $k \in \mathbb{N}$) $\equiv \forall u \in V(G) : \deg_G(u) = k$.

Graf G je regulární $\equiv \exists k : G$ je k-regulární.

Definice 3.6 (Skóre grafu)

Skóre grafu G je posloupnost stupňů všech vrcholů (až na uspořádání).

Věta 3.1

Pro každý graf (V, E) platí:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

Důsledek (Princip sudosti)
$\sum_v \deg(v)$ je sudé číslo $\implies$ ($\#v \in V$ lichého stupně) je sudý.

Věta 3.2 (O skóre)

Posloupnost $D = d_1 \leq \ldots \leq d_n$ pro $n \geq 2$ je skóre grafu $\Leftrightarrow D' = d'_1, \ldots, d'_{n-1}$ je skóre grafu a $0 \leq d_n \leq n-1$. ($d'_i = d_i$ pro $i < n - d_n$ a $d'_i = d_i - 1$ pro $i \geq n - d_n$.)

Důkaz
($\Longleftarrow$) nechť G' je graf se skóre D' a vrcholy $v_1, \ldots, v_{n-1}$ tak, že $\forall i : \deg_{G'}(v_i) = d'_i$. Vytvořím G doplněním vrcholu v_n a hran $\{v_i, v_n\}$ pro $i \in \{n - d_n, \ldots, n-1\}$. G má skóre D.

($\Longrightarrow$) Lemma: Nechť $\mathcal{G}$ je množina všech grafů se skóre D, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Potom $\exists G \in \mathcal{G} :$ $\{v_n, v_i\} \in E(G)$ pro všechna $i \in \{n - d_n, \ldots, n-1\}$.

Důkaz lemmatu: (Kdyby $d_n = n - 1$, pak zřejmě každý $G \in \mathcal{G}$ splňuje lemma.) Pro $G \in \mathcal{G}$ definujeme $j(G) := \max \{j | \{v_j, v_n\} \notin E(G)\}$ (kdyby $j(g) = n - d_n - 1$, pak jsme vyhráli, jinak G nesplňuje lemma). Najdeme $G \in \mathcal{G}$, jehož $j(G)$ je minimální. Pokračujeme sporem:

Kdyby $j(G) > n - d_n - 1$, musí $\exists i < j : \{v_i, v_n\} \in E(G)$. Následně chceme ukázat, že $\exists k : \{v_i, v_k\} \notin E(G) \wedge \{v_j, v_k\} \in E(G)$, to ukážeme na základě toho, že posloupnost je seřazena, tedy $d_i \leq d_j$ a vrchol v_i je spojen minimálně s jedním vrcholem, se kterým není spojené v_j (v_n). Upravíme graf G na

$$G_\lightning : V(G_\lightning) := V(G), E(G_\lightning) := E(G) \cup \{\{v_i, v_k\}, \{v_j, v_n\}\} \setminus \{\{v_i, v_n\}, \{v_j, v_k\}\}.$$

Ale jelikož jsme vrcholům odstranili stejný počet hran, jako přidali, $G_\lightning \in \mathcal{G}$. Navíc zřejmě $j(G_\lightning) < j(G)$, $\lightning$. $\square$

Příklad (Kolik je grafů na n vrcholech? Kolik je neizomorfních?)
Grafů je tolik, kolik je podmnožin množiny všech hran, tedy $2^{\binom{n}{2}}$.

Izomorfních grafů jednomu grafu nemůže být více než $n!$, tedy neizomorfních bude více jak

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}.$$

Definice 3.7 (Podgraf a indukovaný graf)

Graf $G' = (V', E')$ je podgrafem (značíme $G' \subseteq G$) grafu $G = (V, E) \equiv V' \subseteq V \wedge E' \subseteq E$.

Graf $G' = (V', E')$ je indukovaným (množinou V', značíme $G' = G[V']$) podgrafem grafu $G = (V, E) \equiv V' \subseteq V \wedge E' = E \cap \binom{V'}{2}$.

Definice 3.8 (Cesta v grafu)

Cesta v grafu G je:

1.) $G' \subseteq G : G' \cong P_n$ pro nějaké n.

2.) $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$, kde $v_0, \ldots, v_n$ jsou navzájem různé vrcholy, $e_1, \ldots, e_n$ jsou hrany, $\forall i : e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$.

Definice 3.9 (Kružnice (cyklus) v grafu)

1.) $G' \subseteq G : G' \cong C_n$ pro nějaké n.

2.) $(v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_0)$, kde $v_0, \ldots, v_{n-1}$ jsou navzájem různé vrcholy, $e_1, \ldots, e_{n-1}$ jsou hrany, $\forall i : e_i = \{v_i, v_{(i+1) \bmod n}\}$.

Definice 3.10 (Souvislý graf)

Graf G je souvislý $\equiv \forall u, v \in V(G)$ $\exists$ cesta v G s krajními vrcholy u, v.

Definice 3.11 (Dosažitelnost)

Dosažitelnost v G je binární relace $\sim$ na $V(G)$ taková, že $u \sim v \equiv \exists$ cesta v G s krajními vrcholy u, v.

Lemma 3.3

Relace $\sim$ je ekvivalence.

Důkaz
Reflexivita: $u \sim u$ (existuje triviální cesta).

Symetrie: $u \sim v \Leftrightarrow v \sim u$ (koncové vrcholy cesty jsou neuspořádaná dvojice).

Tranzitivita: $u \sim v \wedge v \sim w \implies u \sim w$ (definice a lemmátko viz dále, $\sim$ můžeme definovat i pomocí sledů, které už lze „slepovat“). $\square$

Definice 3.12 (Komponenty souvislosti)

Komponenty souvislosti jsou podgrafy indukované třídami ekvivalence.

Důsledek
Graf je souvislý $\Leftrightarrow$ má 1 komponentu.

Definice 3.13 (Sled, tah)

Sled (walk) je $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$, kde $v_0, \ldots, v_n$ jsou vrcholy, $e_1, \ldots, e_n$ jsou hrany, $\forall i : e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$.

Tah je $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$, kde $v_0, \ldots, v_n$ jsou vrcholy, $e_1, \ldots, e_n$ jsou navzájem různé hrany, $\forall i : e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$.

Lemma 3.4 (Lemmátko)

$\exists$ cesta mezi $u, v \Leftrightarrow \exists$ sled mezi u, v.

Důkaz
($\implies$) triviální. ($\impliedby$) Uvažujme sled S. Kdyby se v S neopakovaly vrcholy, je to cesta. Pokud $v_k = v_l$, potom $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, (v_k = v_l), e_{l+1}, v_{l+1}, \dots, e_n, v_n)$ je kratší sled, označme ho S. Opakujeme dokud S není cesta. □

Definice 3.14 (Matice sousednosti)

Matice sousednosti $A(G)$ grafu G při očíslování vrcholů $v_1, \dots, v_n \in V(G)$ je

$$A_{ij} := [v_i, v_j \in E] .$$

Poznámka (Značení výše)
$[\varphi]$ dává 1, pokud φ platí, a 0, pokud φ neplatí.

Poznámka (Matice sousednosti)
Je symetrická.

Součty řádků / sloupců jsou stupně vrcholů.

t-tá mocnina udává kolik sledů délky t existuje mezi danými vrcholy. (Důkaz indukcí.)

Příklad
Počet trojúhelníků v grafu.

Řešení
Uzavřený sled délky 3 je trojúhelník. Tedy umocníme A na třetí a podíváme se na diagonálu (sečteme a vydělíme 6).

Definice 3.15 (Vzdálenost (grafová metrika))

$d_G : V^2 \to \mathbb{N}$. $d_G(u, v) :=$ minimum z délek všech cest mezi u, v.

Důkaz (Metrika)
$d(u, v) \geq 0$ (velikosti nezáporné).

$d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ (když jsou totožné, tak cesta neobsahuje žádnou hranu, když nejsou, tak naopak musí obsahovat nějakou hranu).

$d(u, v) = d(v, u)$ (cesta není orientovaná).

$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (slepením dvou cest dostanu sled a ten lze *zmenšit* na cestu) □

Definice 3.16 (Grafové operace)

$G + v$, $G + e$ je přidání vrcholu či hrany. $G - v$, $G - e$ je naopak smazání (v případě mazání vrcholu vytváříme indukovaný podgraf = mažeme i hrany z tohoto vrcholu). $G\%e$ je dělení hrany (vytvořím vrchol „uprostřed“ = hrana $e = \{u, v\} \to$ hrany $\{u, x\}$ a $\{x, v\}$ a vrchol x). $G.e$ je kontrakce hrany („slepíme“ vrcholy hrany).

Poznámka (Pozorování)
Cesty (resp. vrcholy) jde vyrábět postupným dělením P_1 (resp. C_3) a libovolnou cestu (kružnice) lze „zkontrahovat“ do P_1 (C_3).

Definice 3.17 (Eulerovský tah)

Eulerovský tah je takový tah, který obsahuje všechny vrcholy a hrany grafu.

Definice 3.18 (Uzavřený tah)

Tah, ve kterém je první a poslední vrchol totožný.

Definice 3.19 (Eulerovský graf)

Graf je eulerovský $\equiv$ existuje v něm uzavřený eulerovský tah.

Věta 3.5 (O eulerovských tazích)

Graf G je eulerovský $\Leftrightarrow$ G je souvislý $\wedge\ \forall v \in V(G) : \deg_G(v)$ je sudý.

Důkaz
($\implies$) Zřejmé z toho, že mezi každými vrcholy vede tah a že musí do vrcholu „vstupovat“ a „vystupovat“ z něho.

($\impliedby$) Uvažme $T :=$ libovolný nejdelší tah. 1. T je uzavřený (sporem: Krajní vrchol má „použito“ lichý počet hran, tedy existuje ještě jedna hrana jdoucí z tohoto vrcholu. Tu ale můžeme přidat do T, tedy nebyl nejdelší $\lightning$.) 2. T je eulerovský: a) $\{u, v\} \in E(G)$, $u, v \in T \implies \{u, v\} \in T$ (Sporem, kdyby ne, tak při některém „průchodu“ vrcholem u tah T „rozpojíme“ a na konec přidáme $\{u, v\}$, čímž dostaneme větší graf, $\lightning$.) b) T obsahuje všechny vrcholy (Kdyby $\exists u \in V(E) \wedge u \notin T$: zvolíme $v \in T$ libovolně a ze souvislosti G víme, že existuje cesta C mezi u, v. $\exists r, s \in C : r \in T, s \notin T, \{r, s\} \in E(C)$, tedy T „rozpojíme“ v R a prodloužíme o $\{r, s\}$, tedy T není nejdelší $\lightning$.) $\square$

Příklad
G obsahuje otevřený eulerovský tah $\Leftrightarrow$ G je souvislý $\wedge$ právě dva vrcholy mají lichý stupeň.

Poznámka
Věta o eulerovských tazích platí i pro multigrafy. (Smyčky musíme do stupně vrcholu počítat dvakrát. To už musíme pro paritu součtu stupňů.)

3.1 Orientované grafy

Poznámka (Co se změnilo)
Sledy, tahy, cesty, kružnice jsou orientované. Hranám se říká šipky. Matice sousednosti není symetrická. Hlavně se změní souvislost.

Definice 3.20 (Podkladový graf, slabá a silná souvislost)

Pro orientovaný graf $G = (V, E)$ nazveme $G^0 = (V, E^0)$, kde $\{u, v\} \in E^0 \equiv (u, v) \in E \lor (v, u) \in E$, podkladovým grafem.

Graf je slabě souvislý právě tehdy, když jeho podkladový graf je souvislý. Slabě souvislá komponenta je slabě souvislý podgraf / komponenta souvislosti podkladového grafu.

Graf je silně souvislý $\equiv \forall u, v \in V(G)\ \exists$ orientovaná cesta z u do v. Silně souvislá komponenta je silně souvislý podgraf.

*Graf je polosouvislý $\equiv \forall u, v \in V(G)\ \exists$ cesta z u do v nebo z v do u.

Definice 3.21 (Stupně)

$\deg^{in}(v) := \#u : (u, v) \in E$, $\deg^{out}(v) := \#v : (u, v) \in E$. (Občas se používá $\deg^{+}$ a $\deg^{-}$, tam se však nelze shodnout, co je co.)

Definice 3.22

Graf je vyvážený $\equiv \forall v \in V : \deg^{in}(v) = \deg^{out}(v)$.

Věta 3.6

Následující vlastnosti orientovaného grafu G jsou ekvivalentní: 1. G je vyvážený a slabě souvislý, 2. G je eulerovský, 3. G je vyvážený a silně souvislý.

Důkaz
(3 $\implies$ 1) je zřejmé, jelikož silně souvislý graf je i slabě souvislý. (2 $\implies$ 3) $\exists$ orientovaný tah $u \to v \implies \exists$ cesta $u \to v$. (1 $\implies$ 2) analogicky Větě o eulerovských tazích. □

3.2 Stromy

Definice 3.23 (Strom)

Strom je souvislý graf bez kružnic (tzv. acyklický graf).

Definice 3.24 (Les)

Les je acyklický graf. (Jeho komponenty souvislosti jsou stromy.)

Definice 3.25 (List)

List je vrchol stupně 1.

Pozor

Existuje právě jeden strom bez listů (jednovrcholový).

Lemma 3.7 (O koncovém vrcholu)

Každý strom s alespoň 2 vrcholy má alespoň 2 listy.

Důkaz

Uvažme nejdelší cestu ve stromu, potom krajní vrcholy jsou listy (Sporem: kdyby krajní vrchol nebyl list, pak z něj vede hrana, která neleží na cestě a jejíž druhý vrchol buď na této cestě už leží (spor s acykličností), nebo neleží (spor s maximalitou)). $\square$

Lemma 3.8 (Vandalské (trháme listy) a pěstovatelské (necháme je vyrůst))

Nechť v je list grafu G. Pak G je strom $\Leftrightarrow G - v$ je strom.

Důkaz

($\implies$) Odebráním vrcholu nevznikne kružnice, přes list nemohla vést cesta (jelikož je stupně 1).

($\impliedby$) Přidáním vrcholu stupně 1 nevznikne kružnice, z tranzitivity dosažitelnosti vede z libovolného vrcholu do listu cesta. $\square$

Věta 3.9 (O charakterizaci stromů)

Pro graf G jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. *G je souvislý a acyklický.*
2. *$\forall u, v \in V(G) \exists!$ cesta mezi u, v v G (jednoznačně souvislý).*
3. *G je souvislý a $\forall e \in E(G) : G - e$ není souvislý (minimální souvislý).*
4. *G je acyklický a $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G) : G + e$ obsahuje cyklus (maximální acyklický).*
5. *G je souvislý a $|E(G)| = |V(G)| - 1$ (speciální případ Eulerovy formule).*

Důkaz
$G = (V, E)$

($1 \implies 2$) Indukcí podle $|V|$ ... pro $|V| = 1$ zřejmě (2) platí. Pro $|V| = n$: Buď G graf s n vrcholy. Platí li (1), G je strom $\implies \exists l$ list v G, s jediný soused l. $G - l$ je také strom, má $n - 1$ vrcholů, tedy z indukčního předpokladu $G - l$ je jednoznačně souvislý. Nechť $u, v \in V$: a) $u, v \neq l$: $G - l$ obsahuje právě jednu cestu přidáním listu nemohla vzniknout nová, b) $u, v = l$: Triviální, c) BÚNO $u = l, v \neq l$ cesta $v \dots l$ jde přes s, mezi $v, s \exists!$ cesta (z IP) a ta se dá rozšířit do l právě jedním způsobem.

($1 \implies 3$) Jednoduchou indukcí podle $|V|$. ($1 \implies 4$) Jednoduchou indukcí podle $|V|$. ($1 \implies 5$) Jednoduchou indukcí podle $|V|$.

($2 \implies 1$) Dokážeme jako ($\neg 1 \implies \neg 2$), tedy není souvislý nebo není acyklický, pak počet cest mezi nějakými (existují u, v tak, že) u, v není 1. Pokud není souvislý, tak existují vrcholy, mezi kterými nevede hrana, pokud není acyklický, tak existují vrcholy na cyklu a ty mezi sebou mají minimálně 2 cesty.

($3 \implies 1$) dokážeme jako není souvislý nebo obsahuje cyklus, pak není souvislý nebo $\exists e \in E : G - e$ je souvislý. ($4 \implies 1$) dokážeme jako není souvislý nebo obsahuje cyklus, pak obsahuje cyklus nebo $\exists e : G + e$ je acyklický.

($5 \implies 1$) Potřebujeme dokázat lemma $(5) \land |V| \geq 2 \implies \exists l$ list. Poté už dokážeme indukcí podle $|V|$ odebíráním listu. Důkaz lemmatu: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E| = 2n - 2$. Kdyby neexistoval list $\forall v : \deg(v) \geq 1$ a součet stupňů by byl $\geq 2n > 2n - 2$. □

Definice 3.26 (Kostra grafu)

$T \subseteq G$ je kostra grafu $G \equiv T$ je strom $\land |V(T)| = |V(G)|$.

Věta 3.10

Graf má kostru $\Leftrightarrow$ je souvislý.

Důkaz
($\implies$) Zřejmé. ($\impliedby$) Mažeme hrany na cyklech, dokud nebude strom. □

3.3 Kreslení do roviny

Definice 3.27 (Oblouk)

Oblouk je prosté spojité zobrazení $f : [0, 1]$ do $\mathbb{R}^2$, $f(0), f(1)$: krajní body.

Často budeme oblouk říkat obrazu tohoto zobrazení

Definice 3.28 (Topologická kružnice)

Topologická kružnice je spojité zobrazení $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, které je prosté vyjma $f(0) = f(1)$.

Definice 3.29 (Nakreslení grafu do roviny)

Nakreslení grafu $G = (V, E)$ do roviny: a) Vrcholům $v \in V$ přiřadíme navzájem různé body $b(v) \in \mathbb{R}^2$. b) Hranám $e \in E$ přiřadíme oblouky $o(e)$ tak, že je-li $e = \{u, v\}$, pak $b(u), b(v)$ jsou krajní body $o(e)$. c) $\forall v \in V\ \forall e \in E$: pokud $b(v) \in o(e)$, pak $v \in e$. d) $\forall e, f \in E$: pokud $o(e)$ a $o(f)$ mají společný bod, pak to je jejich krajní bod.

Poznámka
Nakreslením cesty je oblouk, nakreslením kružnice je topologická kružnice.

Definice 3.30 (Topologický graf)

Topologický graf := graf + jeho nakreslení.

Definice 3.31 (Oblouková souvislost)

$X \subseteq \mathbb{R}^2$ je obloukově souvislá $\equiv \forall x, y \in X\ \exists$oblouk $\subseteq X$ s krajními body x, y.

Oblouková souvislost nám dává relaci dosažitelnosti (ekvivalence) a ekvivalenční třídy (komponenty obloukové souvislosti).

Definice 3.32 (Stěny nakreslení)

Stěny nakreslení $\equiv$ komponenty obloukové souvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{e \in E} o(e)$.

Pozor
Stěny nejsou vlastností grafu, ale konkrétního nakreslení (tedy též topologického grafu).

Věta 3.11 (Jordanova o kružnici)

Je-li c topologická kružnice v $\mathbb{R}^2$, pak $\mathbb{R}^2 \setminus c$ má právě 2 komponenty obloukové souvislosti: omezenou a neomezenou a c je jejich společnou hranicí.

Důkaz
Bez důkazu. □

Důsledek
K_5 není rovinný.

Důkaz
Vybereme 3 vrcholy jako kružnici z věty a rozebereme možnosti. □

Poznámka
Stejně tak $K_{3,3}$.

Věta 3.12

Hranice každé stěny souvislého topologického grafu je nakreslením uzavřeného sledu.

Důkaz
Indukcí podle #hran. 1. $|E| = |V| - 1$, graf je strom (zřejmé). 2. Indukční krok: graf není strom. Nechť e je hrana na kružnici. e odděluje 2 stěny S_1 a S_2. Tyto stěny spojíme. □

3.4 Kreslení na sféru (povrch koule)

Věta 3.13

Graf má nakreslení na sféru $\Longleftarrow$ *má nakreslení do roviny.*

Důkaz
Stereografickou projekcí. (Spojitá bijekce mezi sférou bez severního pólu a rovinou.) □

Důsledek
Vnější stěnu si lze zvolit.

Poznámka
Dělení i kontrakce hran zachovává nakreslitelnost.

Věta 3.14 (Kuratowského)

Graf není rovinný $\Leftrightarrow$ *obsahuje podgraf isomorfní nějakému dělení* K_5 *nebo* $K_{3,3}$.

Důsledek
G má rovinné nakreslení $\Leftrightarrow$ má nakreslení lomenými čarami $\Leftrightarrow$ má nakreslení úsečkami.

Věta 3.15 (Eulerova formule)

Je-li G *souvislý graf nakreslený do roviny,* $v = |V(G)|$, $e = |E(G)|$, $f = \#$*stěn nakreslení, pak* $v + f = e + 2$.

Důkaz
Indukcí podle e. 1) G je strom: víme $v-1=e\wedge f=1: v+f=v+1=e+2$. 2) Nechť e je hrana na kružnici. $G' := G-e$ souvislý, parametry $v'=v, e'=e-1, f'=f-1 \overset{IP}{\implies} v'+f'=e'+2 \implies v+f-1=e-1+2$. □

Důsledek
Všechna nakreslení téhož grafu mají stejný #stěn.

Definice 3.33 (Maximální rovinný graf)

G je maximální rovinný $\equiv$ G je rovinný $\wedge \forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G) : G+e$ není rovinný.

Věta 3.16

V nakreslení max. rovinného grafu s min. 3 vrcholy jsou všechny stěny $\triangle$.

Důkaz
Nechť G je maximální rovinný s nakreslením. 1) Kdyby nebyl souvislý, pak se jedna jeho komponenta souvislosti nachází uvnitř stěny jiné (té „nejbližší“), takže lze přidat hranu mezi nimi ↯. 2) kdyby existovala stěna ohraničená C_n pro $n>3$, tak do ní lze vložit hranu (pozor, některé vrcholy můžou být spojeny venkem, ale lze sporem dokázat, že v rovinném grafu musí existovat na této kružnici 2, které nejsou spojeny) ↯. 3) jinak jsou stěny ohraničené uzavřenými sledy. Uvažujme jeden takový, co není kružnice. Na něm se minimálně jeden vrchol opakuje, ten odebereme a musí existovat více komponent, kde můžeme zase přidat hranu mezi komponentami. □

Věta 3.17

Nechť G je rovinný s min. 3 vrcholy, $v=|V(G)|$, $e=|E(G)|$. Potom $e\le 3v-6$.

Důkaz
Nechť G je maximální, potom $3f=2e \implies 3v-6=e$

Nechť G' je maximální vzniklý z G přidáním hran. Potom $e\le e'=3v'-6=3v-6$. □

Důsledek (Znovu)
K_5 není rovinný.

Důsledek
Průměrný stupeň vrcholu <6. (Pro $v<3$ triviální, jinak $\sum_w \deg(w)=2e\le 6v-12<6v$)

Důsledek
V každém rovinném grafu $\exists$ vrchol stupně maximálně 5.

Poznámka (Pro grafy bez $\triangle, v \geq 3$ dostáváme)
Hranice stěn jsou C_4, C_5 nebo strom.

$2v - 4 \geq e$

Definice 3.34 (Duální graf)

$G = (V, E)$ se stěnami $F \to G* = (F, E*)$, $\{f_1, f_2\} \in E* \Leftrightarrow f_1, f_2$ sousedí v G (obecně definováno pouze na multigrafech).

3.5 Barvení grafů

Definice 3.35 (Obarvení a barevnost)

Obarvení grafu G k barvami (k-obarvení) je $c : V(G) \to \{1, \dots, k\}$ tak, že kdykoli $\{x, y\} \in E(G)$, pak $c(x) \neq c(y)$.

Barevnost (chromatické číslo, chromatičnost) $\chi(G)$ grafu $G := \min_k \exists k$-obarvení grafu G.

Například

$$\chi(E_n) = 1$$
$$\chi(K_n) = n$$
$$\chi(P_n) = 2, n \geq 1$$
$$\chi(C_{2n}) = 2, \chi(C_{2n+1}) = 3$$

Poznámka (Pozorování)
Pokud $H \subseteq G$, pak $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Definice 3.36 (Klikovost)

Klikovost $\varkappa(G)$ grafu $G := \max_k \exists H \subseteq G, H \cong K_k$.

Poznámka (Pozorování)

$$\chi(G) \geq \varkappa(G)$$

Lemma 3.18 (Pozorování)

Stromy jsou bipartitní (dají se obarvit 2 barvami).

Důkaz
Strom zakořeníme v k a obarvíme v barvou $1+(d(k,v) \mod 2)$. Nebo indukcí přidáváním listů. □

Věta 3.19

$\chi(G) \leq 2 \Leftrightarrow G$ neobsahuje lichou kružnici.

Důkaz
$(\implies)$: už víme.

$(\impliedby)$: barvíme po komponentách – BÚNO G je souvislý. Nechť T je nějaká kostra grafu. Tu obarvíme jako v lemmatu výše.Pro libovolnou hranu mimo kostru si můžeme všimnout, že cesta jdoucí mezi těmito vrcholy po kostře musí mít lichou délku (jinak by graf obsahoval lichou kružnici), takže vrcholy mají jinou barvu. □

Definice 3.37 (Degenerovanost)

Graf G je $k - degenerovan \equiv \exists$ lineární uspořádání $\prec$ na $V(G)$ tak, že $\forall v \in V(G)(\#u \in V(G) : u \prec v \wedge \{u,v\} \in E(G)) \leq k$.

Například
Stromy jsou 1-degenerované, rovinné grafy jsou 5-degenerované, graf je $\triangle$-degenerovaný pro $\triangle := \max_{v \in V(G)} \deg(v)$.

Věta 3.20 (Větička)

Pokud G je k-generovaný, pak $\chi(G) \leq k+1$.

Důkaz
Barvíme v pořadí podle $\prec$, vždy máme 1 volnou barvu. □

Například (Využití)
Přidělování rádiových frekvencí stanicím, které se některé mezi sebou ruší.

Přidělování posluchbáren přednáškám.

Poznámka (Barevnost rovinných grafů)
Už víme: $\chi \leq 6$.

Věta 3.21 (o 4 barvách)

Pro každý rovinný graf G platí $\chi(G) \leq 4$.

Důkaz
Počítačově se rozebere těžce (těžce dokázáno, že to stačí) vybraná množina omezeného počtu případů. □

Věta 3.22 (O 5 barvách)

Pro každý rovinný graf G platí $\chi(G) \leq 5$.

Důkaz (Tzv. Kempeho řetězce)
Indukce podle # vrcholů. a) pokud $|V(G)| \leq 5$, tak je hotovo. b) zvolíme $v : \deg(v) \leq 5$. Obarvíme $G' := G - v$ (obarvení c'). Pokud jsou sousedi v obarveny (v c') nejvýše 4 barvami, pak existuje volná barva pro v, jinak mají sousedi (po řadě v nakreslení: a, b, c, d, e) jiné barvy, takže sestrojíme podgraf A : všech vrcholů dosažitelných z a cestami přes vrcholy barev $c'(a)$, $c'(c)$. Pokud $c \notin A$, tak můžeme graf A přebarvit $c'(a) \to c'(c)$ a $c'(c) \to c'(a)$, následně můžeme v obarvit $c'(a)$. Jinak zkonstruujeme obdobně graf B dosažitelný z b po cestách „složených“ z $c'(b)$ a $c'(d)$. Nyní $d \notin B$, jelikož jinak by nebyl rovinný, tedy přebarvíme B a obarvíme v barvou $c'(b)$. □

Důkaz (Podobná indukce, jinak vyřešíme $\deg(v) = 5$)
Existují 2 sousedé nespojení hranou (x, y). Místo v přidáme hranu $\{x, y\}$ ($G' := G - v + \{x, y\}$). Následně tuto hranu zkontrahujeme, jelikož kontrakce zachovává rovinnost, ($G'' := G'. \{x, y\}$). Tento graf obarvíme dle indukčního předpokladu, obarvíme x i y barvou, kterou dostane vrchol vzniklý kontrakcí $\{x, y\}$, tedy mají stejnou barvu a minimálně 1 barva tak zbývá na v. □

Důkaz (Písní (Kempeho řetězce))
http://jankoweb.wz.cz/blog/pisnicky-odborne/veta-o-peti-barvach-hudba-ruzicka-spiritual-kvintet/ □

4 Teorie pravděpodobnosti

Definice 4.1 (Pravděpodobnostní prostor)

$\Omega :=$ množina elementárních jevů. $\mathcal{F} \subseteq 2^{\omega}$ množina jevů. $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$, $P(\Omega) = 1$ pravděpodobnost.

Definice 4.2 (Diskrétní pravděpodobnostní prostor)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, Ω konečná nebo spočetná, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $P(J) = \sum_{\omega \in J} P(\{\omega\})$.

Definice 4.3 (Konečný PP)

DPP, kde Ω je konečný.

Definice 4.4 (Klasický PP)

KPP, kde $P(\{\omega\})$ je shodná $\forall \omega \in \Omega$.

Příklad (Bertrandův paradox)
Ze tří karet (01, 11, 00) náhodně vybereme a podíváme se na horní stranu. Jaká je pravděpodobnost, že ta druhá je 1, pokud je tato 1?

Řešení
2/3

Definice 4.5

Pro jevy A, B, $P(B) \neq 0$ definujeme podmíněnou pravděpodobnost $P[A|B] := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Věta 4.1 (O úplné pravděpodobnosti)

Pro $A \subseteq \Omega$ a $B_1, \ldots, B_k$ rozklad Ω tak, že $\forall i P(B_i) \neq 0$,

$$P(A) = \sum_i P[A|B_i] \cdot P(B_i).$$

Věta 4.2 (Bayesova)

Pro $A \subseteq \Omega$ a $B_1, \ldots, B_k$ rozklad Ω tak, že $\forall i P(B_i) \neq 0$,

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i] \cdot P(B_i)}{\sum_j P[A|B_j] \cdot P(B_j)}$$

Definice 4.6

Jevy A, B jsou nezávislé $\equiv$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Poznámka
A, B jsou nezávislé, pokud $P(A) = P[A/B] \vee P(B) = 0$.

Definice 4.7

Jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou po dvou nezávislé $\equiv$ $\forall i, j, i \neq j : A_i \text{a} A_j$ jsou nezávislé.

Jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou nezávislé $\equiv \forall I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset : P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Definice 4.8 (Součin diskrétních pravděpodobnostních prostorů)

$$(\Omega_1, 2^{\omega_1}, P_1) \times (\Omega_2, 2^{\Omega_2}, P_2) = (\Omega_1 \times \Omega_2, 2^{\Omega_1 \times \Omega_2}, P),$$

kde $P((\omega_1, \omega_2)) = P_1(\{\omega_1\}) \cdot P_2(\{\omega_2\})$.

Důkaz
$\sum P(\omega) = \sum P_1(\omega_1) \cdot P_2(\omega_2) = \sum P_1(\omega_1) \cdot \sum P_2(\omega_2) = \sum P_1(\omega_1) \cdot 1 = 1$ □

Definice 4.9 (Náhodná veličina (= náhodná proměnná))

Náhodná veličina je funkce $\Omega \to \mathbb{R}$.

Poznámka
Je-li X náhodná veličina, pak $\varphi(X)$ (např. $X > 5$) je jev a můžeme se ptát na $P[\varphi(X)]$.

Definice 4.10 (Střední hodnota)

Střední hodnota (expected value) náhodné veličiny X v diskrétním prostoru je

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X(\omega).$$

(V nekonečných pravděpodobnostních prostorech nemusí existovat.)

Věta 4.3 (O linearitě střední hodnoty)

$\forall X, Y$ *náhodné veličiny* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*:*

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y],$$

$$\mathbb{E}[\alpha \cdot X] = \alpha \cdot \mathbb{E}[X].$$

Důkaz
Triviální rozepsáním. □

Příklad
$\Omega = \{0, 1\}^n, X := \#1$ v posloupnosti. $\mathbb{E}[X] =?$.

Řešení
Zadefinujeme $X_i = 1$, když na i-té pozici je 1, 0 jinak, jako náhodnou veličinu. Následně víme, že $X = \sum_i X_i$ a $\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X]$. Ale $\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Tedy $\mathbb{E}[X] = n \cdot \frac{1}{2}$.

Poznámka
Předchozí řešení využívá tzv. indikátorů (náhodná veličina, která je 1, když jev nastal, a 0, když nenastal).

Definice 4.11 (Rozdělení)

Rozdělení náhodné veličiny X je funkce, která přiřazuje každému reálnému číslo pravděpodobnost, že ho náhodný jev nabývá:

$$Q : \mathbb{R} \to [0, 1], Q(a) := P[X = a] = \sum_{\omega \in \Omega, X(\omega) = a} P(\omega).$$

Hlavně pro spojité prostory se spíše definuje distribuční funkce $D(a) := P[X \leq a]$.

Poznámka
$\mathbb{E}[X] = \sum_\omega X(\omega) \cdot P(\omega) = \sum_{a \in \mathbb{R}} a \cdot P[X = a]$, tj. střední hodnota je jednoznačně dána rozdělením.

Věta 4.4 (Markovova nerovnost)

Je-li $\mathbb{X}$ nezáporná náhodná veličina a $k > 0$, pak

$$P[X \geq k \cdot \mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{k}.$$

Důkaz
Pro libovolné $t > 0$ platí

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{a \in \mathbb{R}} a \cdot P[X = a] = \sum_{a < t} a \cdot P[X = a] + \sum_{a \geq t} a \cdot P[X = a] \geq$$

$$\geq 0 + \sum_{a \geq t} t \cdot P[X = a] = t \cdot \sum_{a \geq t} P[X = a] \implies \frac{\mathbb{E}[x]}{t} \geq P[X \geq t].$$

Zvolíme $t := k \cdot \mathbb{E}[X]$ a dostaneme nerovnost z věty. $\square$