Příklad (1.)
Ověřte přímým výpočtem Stokesovu větu pro singulární krychli c a formu ω:

$$c : \begin{cases} x = r \cdot s \\ y = s \cdot t \\ z = r \cdot t \\ w = r + s + t \end{cases}, \qquad (r, s, t) \in [0,1]^3, \qquad \omega = w\,dx \wedge dz + z\,dy \wedge dw.$$

Řešení
Stokesova věta pro singulární krychli c a formu ω vypadá následovně

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

Tudíž chceme dokázat, že integrál vlevo se rovná integrálu vpravo. Nejdřív si zvolíme pořadí souřadnic, tj. např. r, s, t a začneme integrálem vlevo:

Chceme spočítat parametrizaci ∂c, a jelikož máme trojrozměrnou parametrizaci c, ∂c je

$$\partial c = -c_{r,s,0} + c_{r,s,1} + c_{r,0,t} - c_{r,1,t} - c_{0,s,t} + c_{1,s,t}$$

$$\int_{\partial c} d\omega = \int_{-c_{r,s,0}} d\omega + \int_{c_{r,s,1}} d\omega + \int_{c_{r,0,t}} d\omega + \int_{-c_{r,1,t}} d\omega + \int_{-c_{0,s,t}} d\omega + \int_{c_{1,s,t}} d\omega$$

$$\int_{\partial c} d\omega = -\int_{c_{r,s,0}} d\omega + \int_{c_{r,s,1}} d\omega + \int_{c_{r,0,t}} d\omega - \int_{c_{r,1,t}} d\omega - \int_{c_{0,s,t}} d\omega + \int_{c_{1,s,t}} d\omega$$

Tedy najdeme parametrizace jednotlivých 'stěn' krychle a následně dosadíme do příslušných integrálů (viz další strana) a vypočítáme

$$\int_{\partial c} d\omega = -0 + \left(-\frac{19}{12}\right) + 0 - \frac{10}{12} - 0 + \frac{25}{12} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Nyní pravý integrál: stačí najít $d\omega$ a poté dosadit do integrálu:

$$d\omega = dw \wedge dx \wedge dz + dz \wedge dy \wedge dw,$$

$$dx = r\,ds + s\,dr, \qquad dy = s\,dt + t\,ds, \qquad dz = r\,dt + t\,dr, \qquad dw = dr + ds + dt,$$

$$d\omega = (dr + ds + dt) \cdot (r\,ds + s\,dr) \cdot (r\,dt + t\,dr) + (r\,dt + t\,dr) \cdot (s\,dt + t\,ds) \cdot (dr + ds + dt) =$$

$$= \left(r^2 - s \cdot r - r \cdot t - r \cdot t - t \cdot s + t^2\right)\, dr \wedge ds \wedge dt,$$

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]^3} \left(r^2 - s \cdot r - r \cdot t - r \cdot t - t \cdot s + t^2\right)\, dr \wedge ds \wedge dt =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, tedy Stokesova věta pro tuto krychli c a tuto formu ω platí.

Řešení (Výpočty levého integrálu)

$$c_{r,s,0} = \begin{cases} x = r \cdot s \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = r + s + 0 \end{cases} , \qquad c_{r,s,1} = \begin{cases} x = r \cdot s & dx = r\,ds + s\,dr \\ y = s & dy = ds \\ z = r & dz = dr \\ w = r + s + 1 & dw = dr + ds \end{cases}$$

$$\int_{c_{r,s,0}} \omega = \int_{c_{r,s,0}} \ldots \ldots \wedge 0 + 0\, 0 \wedge \ldots = 0$$

$$\int_{c_{r,s,1}} \omega = \int_{c_{r,s,1}} (r + s + 1) \cdot (-r) + r \cdot (-1)\, dr \wedge ds = -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{19}{12}$$

$$c_{r,0,t} = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = r \cdot t \\ w = r + 0 + t \end{cases} , \qquad c_{r,1,t} = \begin{cases} x = r & dx = dr \\ y = t & dy = dt \\ z = r \cdot t & dz = r\,dt + t\,dr \\ w = r + 1 + t & dw = dr + dt \end{cases}$$

$$\int_{c_{r,0,t}} \omega = \int_{c_{r,0,t}} \ldots 0 \wedge \ldots + \ldots 0 \wedge \ldots = 0$$

$$\int_{c_{r,1,t}} \omega = \int_{c_{r,1,t}} (r + 1 + t) \cdot (r) + r \cdot t \cdot (-1)\, dr \wedge dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

$$c_{0,s,t} = \begin{cases} x = 0 \\ y = s \cdot t \\ z = 0 \\ w = 0 + s + t \end{cases} , \qquad c_{1,s,t} = \begin{cases} x = s & dx = ds \\ y = s \cdot t & dy = s\,dt + t\,ds \\ z = t & dz = dt \\ w = 1 + s + t & dw = ds + dt \end{cases}$$

$$\int_{c_{0,s,t}} \omega = \int_{c_{0,s,t}} \ldots 0 \wedge 0 + 0 \wedge \ldots = 0$$

$$\int_{c_{1,s,t}} \omega = \int_{c_{1,s,t}} (1 + s + t) \cdot (1) + t \cdot (t - s)\, ds \wedge dt = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

Příklad (2.)
Definujte mapy na Grassmanniánu

$$Gr_{k,n} := \{L \subseteq \mathbb{R}^n | L \text{ podprostor dimenze } k\}$$

a pro $G_{2,3}$ ukažte, že přechodové funkce jsou difeomorfismy. Ukažte, že

$$\dim Gr_{k,n} = k \cdot (n-k).$$

Řešení (Definování map)
Každé $L \in Gr_{k,n}$ má nějakou bázi $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k)$. Jelikož jsou vektory báze lineárně nezávislé, existuje posloupnost $l = (l_i)_{i=1}^k$ přirozených čísel $1 \leq l_1 < l_2 < \ldots < l_k \leq n$ tak, že B lze lineárními kombinacemi převést na B' (bázi, jelikož má k zjevně nezávislých vektorů)

$$B' = (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \ldots, \mathbf{b}'_k) = \left(\begin{pmatrix} c_{1,1} \\ \vdots \\ c_{l_1-1,1} \\ 1 \\ c_{l_1,1} \\ \vdots \\ c_{l_2-2,1} \\ 0 \\ c_{l_2-1,1} \\ \vdots \\ c_{l_k-k,1} \\ 0 \\ c_{l_k-k+1,1} \\ \vdots \\ c_{n-k,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{1,2} \\ \vdots \\ c_{l_1-1,2} \\ 0 \\ c_{l_1,2} \\ \vdots \\ c_{l_2-2,2} \\ 1 \\ c_{l_2-1,2} \\ \vdots \\ c_{l_k-k,2} \\ 0 \\ c_{l_k-k+1,2} \\ \vdots \\ c_{n-k,2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} c_{1,k} \\ \vdots \\ c_{l_1-1,k} \\ 0 \\ c_{l_1,k} \\ \vdots \\ c_{l_2-2,k} \\ 0 \\ c_{l_2-1,k} \\ \vdots \\ c_{l_k-k,k} \\ 1 \\ c_{l_k-k+1,k} \\ \vdots \\ c_{n-k,k} \end{pmatrix} \right), \text{ řádky } \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ l_1-1 \\ l_1 \\ l_1+1 \\ \vdots \\ l_2-1 \\ l_2 \\ l_2+1 \\ \vdots \\ l_k-1 \\ l_k \\ l_k+1 \\ \vdots \\ n \end{matrix}$$

(tedy, že na každém řádku l_i je ve všech vektorech 0 kromě vektoru $\mathbf{b}'_i$, kde je v tomto řádku 1, zbytek míst je vyplněn $c_{\alpha,\beta}$ pro všechna $\alpha = 1, 2, \ldots, n-k$ a $\beta = 1, 2, \ldots, k$).

Pro pevnou posloupnost l a každé L, které lze vyjádřit v tomto tvaru při této volbě l (označme množinu těchto L jako $\mathcal{L}_l$), jsou čísla $c_{\alpha,\beta}$ určena jednoznačně, jelikož kdybychom našli jinou takovou bázi $B'' = (\mathbf{b}''_1, \ldots, \mathbf{b}''_k)$, která splňuje 'polohu' jedniček a nul, tak každý její prvek musí jít vyjádřit jako lineární kombinace prvků B', ale to lze zjevně jen nějako $\mathbf{b}''_i = 1 \cdot \mathbf{b}'_i$ právě díky 'poloze' jedniček a nul. Tudíž můžeme definovat zobrazení $\varphi_l : \mathcal{L}_l \to \mathbb{R}^{k\cdot(n-k)}$:

$$\varphi_l(L) = (c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots, c_{1,k}, c_{2,1}, \ldots, c_{2,k}, \ldots, c_{n-k,1}, \ldots, c_{n-k,k})^T .$$

Mapy tedy budou $(\mathcal{L}_l, \varphi_l)$ a atlas $\{(\mathcal{L}_l, \varphi_l) \,|\, l \text{ jako v prvním odstavci}\}$. (Zde by bylo ještě nutné ověřit, že obrazy průniků $\mathcal{L}$ jsou otevřené a že přechodové funkce jsou difeomorfismy, aby byly mapy kompatibilní, ale jelikož víme, že $\forall L$ existuje l tak, abychom byly schopni získat $c_{\alpha,\beta}$, tak alespoň $\bigcup_l \mathcal{L}_l = Gr_{k,n}$, což je druhá podmínka na atlas...)

Řešení (Difeomorfismy)
Předpokládejme dvě posloupnosti s prvního odstavce definice map λ_1 a λ_2. BÚNO $\lambda_1 = (0,1)$ a $\lambda_2 = (0,2)$. Tedy $L \in \mathcal{L}_{\lambda_1} \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}$ má báze:

$$B_1' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \right) \text{ a } B_2' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Z báze B_1' do báze B_2' lze přejít tak, že k prvnímu vektoru přičteme $-\frac{a}{b}$ násobek druhého a druhý vektor vynásobíme $\frac{1}{b}$ (pokud $b = 0$, tak zjevně B_2' není báze L, tj. $L \notin \mathcal{L}_{\lambda_2}$). Tedy $d = \frac{1}{b}$ a $c = -\frac{a}{b}$ a naopak $b = \frac{1}{d}$ a $a = -\frac{c}{d}$. Tedy přechodová funkce (BÚNO) $\psi = \varphi_{\lambda_2} \circ \varphi_{\lambda_1}^{-1}$ je:

$$\psi((a,b)) = \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b} \right), \qquad \psi^{-1}((c,d)) = \left(-\frac{c}{d}, \frac{1}{d} \right).$$

Tedy je zřejmě prostá (má inverzi) a hladká (derivováním podle b se zvyšuje mocnina u b a přenásobuje se $-1, -2, -3, \ldots$, derivováním podle a se d změní na 0 a c nejdříve na zápornou mocninu b a pak na nulu), stejně tak její inverze.

Řešení (Dimenze)
Zobrazení φ_l je zřejmě na $\mathbb{R}^{k \cdot (n-k)}$, jelikož každá nezávislá množina vektorů určuje nějaký prostor (a nezávislé jsou díky 'jedničkám a nulám'), tedy $Gr_{k,n}$ je dimenze $k \cdot (n-k)$, jelikož mapy jsou této dimenze.

Příklad (3.)
Ukažte, že tečný fibrovaný prostor TX má přirozenou strukturu hladké variety. Definujte mapy na TX a ukažte, že přechodové funkce jsou difeomorfismy.

Řešení
Nechť M je varieta dimenze n. Víme, že $\forall m \in M : T_mX$ je lineární vektorový prostor dimenze n, který pro libovolnou mapu, jež definuje obraz i pro m má bázi $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. Tzn. disjunktní sjednocení T_mX přes nějakou mapu (φ, U) lze ztotožnit s $U \times \mathbb{R}^n$.

Tedy mějme daný atlas na M, libovolnou mapu (U, φ) z něho a pro každý bod $m \in U$ bázi $B_m = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ tečného prostoru T_mX. Zobrazení $\psi_\varphi : \coprod_{m\in U} T_mX \to \mathbb{R}^{2n}$ potom můžeme definovat pro všechna $x \in T_mX$ jako[a]

$$\psi_\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(\pi(x)) \\ [x]_{B_{\pi(x)}} \end{pmatrix} = \left(\varphi_1(\pi(x)), \dots, \varphi_n(\pi(x)), \left([x]_{B_{\pi(x)}}\right)_1, \dots, \left([x]_{B_{\pi(x)}}\right)_n\right)^T$$

(tedy pro bod z T_mX se na prvních n souřadnic zobrazuje m pomocí φ a na dalších n souřadnicích jsou souřadnice tohoto bodu při bázi B_m). $\left(\coprod_{m\in U} T_mX, \psi_\varphi\right)$ je pak zřejmě mapa a lze těmito mapami pokrýt celý TX, jelikož každý bod TX má projekci $m \in M$, která jistě musí být v nějakém U.

Aby byly přechodové funkce difeomorfismy, musí být prosté, na a hladké. Můžeme si všimnout, že pro dvě různé mapy (U_1, φ_1) a (U_2, φ_2) zobrazuje přechodová funkce prvních n souřadnic podle přechodové funkce $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, o níž víme, že je prostá, na a hladká, jelikož M je varieta a toto jsou mapy z jednoho jejího atlasu, tedy musí být kompatibilní.

Naopak druhých n souřadnic je vyjádření v bázi dané derivacemi, tedy se v bodě $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ při přechodové funkcí $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ zobrazuje za pomoci koeficientů Jacobiho matice Φ (vizte skripta):

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^n z_k \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\mathbf{y}), \dots, \sum_{k=1}^n z_k \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(\mathbf{y})\right),$$

což je hladká funkce, protože součty, násobky a derivace hladkých funkcí jsou hladké. Zároveň je prostá a na, jelikož je to v každém bodě $\mathbf{y}$ vlastně násobení maticí $\mathrm{Jac}(\Phi)$, která má nenulový determinant (jelikož Φ je difeomorfismus, tedy Φ^{-1} je hladká), tedy je regulární.

Pro mapy (U_1, ψ_{φ_1}) a (U_2, ψ_{φ_2}) na TX a označení $\Phi(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x_1, \dots, x_n)$ je přechodová funkce (z $\psi_{\varphi_2}(U_2)$ do $\psi_{\varphi_1}(U_1)$) pro všechna $(\mathbf{y}, \mathbf{z})^T \in \psi_{\varphi_2}(U_2) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ ($\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$) tvaru

$$\psi_{\varphi_1} \circ \psi_{\varphi_2}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \psi_{\varphi_1} \circ \psi_{\varphi_2}^{-1}(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n) = \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{y}) \\ (\mathrm{Jac}(\Phi)(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{z} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\Phi_1(\mathbf{y}), \dots, \Phi_n(\mathbf{y}), \sum_{k=1}^n z_k \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k}(\mathbf{y}), \dots, \sum_{k=1}^n z_k \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k}(\mathbf{y})\right),$$

tj. je to hladká prostá funkce na (z předchozích 2 odstavců).

[a] π je projekce $\forall x \in T_mX : \pi(x) = m$ a $[x]_B$ je vyjádření vektoru při bázi B.