Poznámka
Toto nejsou úplné zápisky z přednášky, toto je jen moje příprava k zápočtovému testu a později ke zkoušce.

1 Markovovy řetězce

Definice 1.1 (Markovův řetězec)

Nechť S je nejvýše spočetná množina. Posloupnost $(X_t)_{t=0}^{\infty}$ náhodných veličin s oborem hodnot v S je Markovův řetězec (s diskrétním časem, s diskrétním prostorem a časově homogenní) pokud pro každé $t \geqslant 0$ a každé $a_0, \ldots, a_{t+1} \in S$ platí

$$P(X_{t+1} = a_{t+1} | X_t = a_t \wedge \ldots \wedge X_0 = a_0) = P(X_{t+1} = a_{t+1} | X_t = a_t) = p_{a_t, a_{t+1}},$$

pokaždé, když $P(X_t = a_t \wedge \ldots \wedge X_0 = a_0) > 0$.

Množině S se říká stavy, budeme předpokládat, že jsou nějak (pevně) očíslované přirozenými čísly (resp. přirozenými čísly s 0). $p_{a_t, a_{t+1}}$ je pravděpodobnost přechodu ze stavu a_t do stavu a_{t+1}

1.1 Přechody

Definice 1.2 (Přechodová matice)

Matice P, jejíž prvek $p_{i,j}$ vyjadřuje pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j.

Důsledek
Každý řádek přechodové matice má součet jeho prvků roven 1. Tj. $P \cdot (1, \ldots, 1)^T = (1, \ldots, 1)^T$.

Definice 1.3 (Přechodový graf/diagram)

Přechodový graf je ohodnocený orientovaný graf se smyčkami, jehož množina vrcholů je S. Hrana mezi vrcholy $i, j \in S$ vede právě tehdy, když $p_{i,j} > 0$ a má váhu $p_{i,j}$.

Definice 1.4 (Pravděpodobnostní rozdělení X)

Nechť $(X_t)_{t=0}$ je Markovův řetězec. Pravděpodobnostní rozdělení X_t budeme značit $\pi_i^{(t)} = P(X_t = i)$ pro každý stav $i \in S$, $t \in \mathbb{N}_0$. $\pi^{(t)}$ pak značí řádkový vektor hodnot $\pi_i^{(t)}$.

Věta 1.1

Pro libovolný Markovův řetězec s pravděpodobnostním rozdělením π a přechodovou maticí P a libovolné $k \geqslant 0$

$$\pi^{(k)} = \pi^{(0)} \cdot P^k.$$

Dokonce obecněji $\pi^{(t+k)} = \pi^{(t)} P^k$.

Důkaz

$$\forall m \in \mathbb{N} : P(X_m = j) = \sum_{i \in S} P(X_{m-1} = i) \cdot P(X_m = j | X_{m-1} = i),$$

$$\pi_j^{(m)} = \sum_{i \in S} \pi_i^{(m-1)} \cdot P_{i,j},$$

$$\pi^{(m)} = \pi^{(m-1)} \cdot P.$$

□

Definice 1.5 (k-krokový přechod)

$$r_{i,j}(k) = P(\text{přechod z } i \text{ do } j \text{ za } k \text{ kroků}) = P(X_k = j | X_0 = i).$$

Důsledek

$$r_{i,j}(k) = P(X_{t+k} = j | X_t = i).$$

Věta 1.2 (Chapman-Kolmogorov)

Pro libovolný Markovův řetězec a libovolné $k, l \in \mathbb{N}_0$ *platí*

- $r_{i,j}(k) = \left(P^{(k)}\right)_{i,j}$;
- $r_{i,j}(k+l) = \sum_{u \in S} r_{i,u}(k) r_{u,j}(l)$;
- $r_{i,j}(k+1) = \sum_{u \in S} r_{i,u}(k) p_{u,j}$.

1.2 Klasifikace stavů

Definice 1.6 (Dosažitelný stav)

Pro stavy i, j Markovova řetězce říkáme, že j je dosažitelný z i (píšeme $j \in A(i)$ nebo $i \to j$), pokud je nenulová pravděpodobnost, že začínaje v i dosáhneme j v konečném čase. Tedy

$$j \in A(i) \equiv \exists t \in \mathbb{N}_0 : P(X_t = j | X_0 = i) > 0.$$

Důsledek

$j \in A(i)$ odpovídá existenci orientované cesty z i do j v přechodovém grafu.

Definice 1.7 (Komutující stavy)

Říkáme, že stavy i, j Markovova řetězce komutují, pokud $i \in A(j)$ a $j \in A(i)$. Píšeme $i \leftrightarrow j$.

Věta 1.3

Pro libovolný Markovův řetězec je relace $\leftrightarrow$ (na S) ekvivalence.

Definice 1.8 (Ireducibilní Markovův řetězec)

Markovův řetězec se nazývá ireducibilní, pokud $\forall i, j \in S : i \leftrightarrow j$.

Definice 1.9 (Rekurentní stav)

Stav $i \in S$ Markovova řetězce se nazývá rekurentní, pokud $\forall j \in A(i) : i \in A(j)$.

Definice 1.10 (Transientní stav)

Stav $i \in S$ Markovova řetězce se nazývá transientní (význam: dočasný, přechodný, pomíjivý), pokud není rekurentní.

Věta 1.4

Pro stav $i \in S$ Markovova řetězce označme $f_{ii} = P(\exists t \in \mathbb{N} : X_t = i | X_0 = i)$. Potom, když $f_{ii} = 1$, tak je stav rekurentní, pokud $f_{ii} < 1$, tak je transientní.

Důkaz

Označme j to $j \in A(i)$, pro které $i \notin A(j)$. Potom $P(\exists t \in \mathbb{N} : X_t = j | X_0 = i) \neq 0$ a zřejmě $P(\exists t \in \mathbb{N}\ \forall 0 < t_1 < t : X_t = j \wedge X_{t_1} \neq i | X_0 = i) \neq 0$ a $P(\exists t_2 > t : X_{t_2} = i | X_t = j) = 0$, tedy $f_{ii} \neq 1$.

Naopak pokud $f_{ii} = 1$, tak $\forall j \in A(i)$ musí být $P(\exists t_2 > t : X_{t_2} = i | X_t = j) \neq 0$, tedy $i \in A(j)$. □

Definice 1.11 (Počet návštěv)

Pro stav $i \in S$ Markovova řetězce označme náhodnou veličinu V_i s oborem hodnot v $\mathbb{N}_0^*$ počet návštěv i, tedy $V_i = |\{t | X_t = i\}|$.

Věta 1.5

Stav $i \in S$ Markovova řetězce je rekurentní $\implies$ $P(V_i = \infty | X_0 = i) = 1$. i je transientní, pokud $V_i|_{X_0 = i} \sim Geo(1 - f_{ii})$.

Definice 1.12 (Stacionární rozložení)

Nechť π je pravděpodobnostní rozložení na stavech S Markovova řetězce. Řekneme, že π je stacionární rozložení, pokud $\pi \cdot P = \pi$, kde π považujeme za řádkový vektor.

Důsledek
Pokud $\pi^{(0)}$ je stacionární rozložení, pak $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \pi^{(k)} = \pi^{(0)}$.

Definice 1.13 (Periodický stav, periodický Markovův řetězec, aperiodický ...)

Stav $i \in S$ Markovova řetězce je periodický, pokud $\exists \Delta \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$P(X_t = i | X_0 = i) > 0 \implies \Delta | t.$$

Markovův řetězec se nazývá periodický, pokud jsou všechny jeho stavy periodické.

Stav nebo Markovův řetězec se nazývá aperiodický, pokud není periodický.

Věta 1.6

Buď $(X_t)_{t=0}^{\infty}$ Markovův řetězec, který je ireducibilní, aperiodický a $|S| < \infty$. Potom $\exists \pi$ stacionární rozložení a

$$\forall j \ \forall i \lim_{k \to \infty} r_{i,j}(k) = \pi_j;$$

navíc π je jednoznačné řešení $\pi \cdot P = \pi$ a $\pi \cdot (1, \dots, 1)^T = 1$.

Definice 1.14 (Absorbující stav)

Stav $a \in S$ Markovova řetězce je absorbující, pokud $p_{a,a} = 1$.

Definice 1.15 (Čas absorbování)

Předpokládejme $A \subseteq S$ neprázdnou množinu absorbujících stavů Markovova řetězce a BÚNO $0 \in A$. Pro každý stav $i \in S$ definujeme μ_i jako střední hodnotu času absorbování z i, tedy

$$\mu_i = \mathbb{E}(T | X_0 = i), \qquad T = \min \{t : X_t \in A\}.$$

Dále a_i buď pravděpodobnost, že začínaje ve stavu i skončíme v stavu 0.

$$a_i = \sum_{t \in \mathbb{N}_0} P(X_t = 0 | X_0 = i).$$

Věta 1.7

Pravděpodobnosti a_i jsou jednoznačné řešení

$$a_0 = 1, \qquad a_i = 0, 0 \neq i \in A, \qquad a_i = \sum_{j \in S} p_{i,j} a_j, i \in (S \backslash A) \cup \{0\}\,.$$

Důkaz
TODO? Jednoduchý, větou o úplné pravděpodobnosti. □

Věta 1.8

Střední hodnoty času (μ_i) jsou jednoznačné řešení

$$\mu_i = 0, i \in A, \qquad \mu_i = 1 + \sum_{j \in S} p_{i,j} \mu_j, i \in S \backslash A.$$

Důkaz
TODO? Jednoduchý, větou o úplné střední hodnotě. □

TODO!!! (SAT)

2 Bayesovská statistika

2.1 Postup

Definice 2.1 (Parametr hledaného rozdělení)

Hledáme rozdělení s parametrem Θ, který budeme považovat za náhodnou veličinu.

Definice 2.2 (Apriorní rozdělení)

Nejprve vybereme apriorní rozdělení s pmf (probability mass function) $p_\Theta(\vartheta)$ nebo pdf (probability density function) $f_\Theta(\vartheta)$ náhodné veličiny Θ nezávisle na datech.

Definice 2.3 (Statistický model)

Potom zvolíme statistický model $p_{X|\Theta}(x|\vartheta)$ (nebo $f_{X|\Theta}(x|\vartheta)$), který popisuje jak jsou (věříme, že jsou) rozděleny data, pokud je Θ rovno nějakému konkrétnímu ϑ.

Definice 2.4 (Posteriorní rozdělení)

Poté, co pozorujeme $X = x$ (více měření považujeme za pozorování jednoho $X = x$ z vícedimenzionálního rozdělení) spočítáme posteriorní rozdělení $f_{\Theta|X}(\vartheta|x)$.

Poznámka
Nakonec najdeme, co potřebujeme vědět, například a, b tak, aby $P(a \leqslant \Theta \leqslant b|X = x) = \int_a^b f_{(\Theta|X)}(\vartheta|x)d\vartheta \geqslant 1 - \alpha$.

2.2 Bayesova věta

Věta 2.1 (Bayesova pro obě diskrétní)

Nechť X, Θ jsou diskrétní náhodné veličiny, pak

$$p_{\Theta|X}(\vartheta|x) = \frac{p_{X|\Theta}(x|\vartheta)p_\Theta(\vartheta)}{\sum_{\vartheta' \in \operatorname{Im}\Theta \setminus \{p_\Theta(\vartheta')=0\}} p_{X|\Theta}(x|\vartheta')p_\Theta(\vartheta')}.$$

Věta 2.2 (Bayesova pro obě spojitá)

Nechť X, Θ jsou spojité náhodné veličiny, pak

$$f_{\Theta|X}(\vartheta|x) = \frac{f_{X|\Theta}(x|\vartheta)f_\Theta(\vartheta)}{\int_{\vartheta' \in \operatorname{Im}\Theta \setminus \{f_\Theta(\vartheta')=0\}} f_{X|\Theta}(x|\vartheta')f_\Theta(\vartheta')}.$$

Věta 2.3 (Bayesova pro diskrétní a spojité)

Nechť X je diskrétní a Θ spojitá náhodná veličina, pak

$$f_{\Theta|X}(\vartheta|x) = \frac{p_{X|\Theta}(x|\vartheta)f_\Theta(\vartheta)}{\int_{\vartheta' \in \operatorname{Im}\Theta \setminus \{f_\Theta(\vartheta')=0\}} p_{X|\Theta}(x|\vartheta')f_\Theta(\vartheta')}.$$

2.3 Bodové odhady

Definice 2.5 (MAP – maximum a-posteriori)

Zvolíme modus Θ.

Poznámka
Tj. maximum $p_{\Theta|X}(\vartheta|x)$, resp $f_{\Theta|X}(\vartheta|x)$.

Definice 2.6 (LMS – least mean square)

Zvolíme střední hodnotu Θ, tedy $\mathbb{E}(\Theta|X = x)$.

Poznámka
Dostaneme nestranný bodový odhad, který minimalizuje $\mathbb{E}((\Theta - \cdot)^2|X = x)$.

Poznámka (Medián)
Obdobně, když vezmeme medián (tj. m tak, že $P(\Theta \leqslant m|X = x) = \frac{1}{2}$), tak minimalizujeme $\mathbb{E}((\Theta - \cdot)|X = x)$, tento přístup však nebudeme dále používat.

TODO? (Zbytek B. statistiky)

3 Stochastické procesy

Poznámka
I Markovovy řetězce jsou vlastně stochastický proces.

3.1 Bernoulliho proces

Definice 3.1 (Bernoulliho proces)

Bernoulliho proces (s parametrem p), píšeme $Bp(p)$, je posloupnost nezávislých náhodných proměnných $(X_t)_{t=1}^{\infty}$, kde $X_t \sim Ber(p)$, tedy $p(X_t = 1) = p$ a $p(X_t = 0) = 1 - p$, $\forall t \in \mathbb{N}$.

Důsledek

$$\{X_t\}_{t=1}^{\infty} \sim Bp(p) \implies \{X_t\}_{t=k}^{\infty} \sim Bp(p), \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\{X_t\}_{t=1}^{\infty} \sim Bp(p) \implies \{X_t\}_{t=N}^{\infty} \sim Bp(p),$$

kde N je náhodná veličina závisející pouze na minulosti.

Definice 3.2 (Čas prvního úspěchu, čas k-tého)

$$T := \min\{t|X_t = 1\}, \qquad T_k := \min\left\{t|\sum_{s=1}^{t} X_s = k\right\}.$$

Důsledek

$$T \sim Geom(p), \qquad \mathbb{E}[T] = \frac{1}{p}, \operatorname{var} T = \frac{1-p}{p^2}.$$

Definice 3.3 (Doba čekání)

$$L_k := T_k - T_{k-1}, \qquad (T_0 = 0).$$

Důsledek

$$L_k \sim T \sim Geom(p).$$

Důkaz
Restartujeme Bernoulliho proces v T_{k-1}. □

Důsledek

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} L_i.$$

$$\mathbb{E}[T_k] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E} L_i = \frac{k}{p}, \qquad \operatorname{var} T_k = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{var} L_i = k \cdot \frac{1-p}{p^2}.$$

$$p(T_k = t) = \binom{t-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{t-k}, \qquad \chi(T_k = t) \sim Pas(p, k),$$

kde $Pas(p, k)$ je tzv. Pascalovo rozdělení (definované právě $p(T_k = t) = \dots$ výše), také nazývané negativní binomické.

Věta 3.1 (Spojování Bernoulliho procesů)

Mějme $\{X_t\}_{t=1}^{\infty} \sim Bp(p)$ *a* $\{Y_t\}_{t=1}^{\infty} \sim Bp(q)$, *pak* $\{X_t \vee Y_t\}_{t=1}^{\infty} \sim Bp(p + q - pq)$.

Věta 3.2 (Rozdělování Bernoulliho procesů)

Mějme $\{Z_t\}_{t=1}^{\infty} \sim Bp(p)$. *Potom* $\{Z_t \cdot Y_t\}_{t=1}^{\infty} \sim Bp(p \cdot q)$, *kde* $Y_t \sim Ber(q)$.

3.2 Poissonův proces

Definice 3.4 (Poissonův proces)

Definujme časy příchodů jako reálná čísla: $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \ldots$. Po Poissonově procesu požadujeme:

1. Pro každou délku intervalu τ chceme, aby pravděpodobnost k příchodů v tomto intervalu byla stejná, označme ji $p(k, \tau)$.
2. Počet příchodů v intervalu $[a, b]$ je nezávislý na počtu příchodů v $[0, a]$.
3. $p(0, \tau) = 1 - \lambda\tau + o(\tau)$, $p(1, \tau) = \lambda\tau + o(\tau)$ ($\implies p(k, \tau) = o(\tau)$, $\forall k \geqslant 2$).

Poissonův proces je tedy posloupnost náhodných reálných veličin $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \ldots$, která splňuje tyto 3 body.

Definice 3.5 (Počet příchodů do času t)

$$N_t := \max k | T_k \leqslant t$$

Věta 3.3

$$N_t \sim Pois(\lambda \cdot t), \qquad p(N_t = k) = e^{-\lambda \cdot t} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!}.$$

Důkaz

Rozdělme si interval $[0, t]$ na l intervalů pro nějaké l velké. Pak délka jednoho intervalu je $\frac{t}{l}$, $p\left(1, \frac{t}{l}\right) = \frac{\lambda \cdot t}{l} + o\left(\frac{t}{l}\right)$ a $p\left(k, \frac{t}{l}\right) = o\left(\frac{t}{l}\right)$. $o\left(\frac{t}{l}\right)$ zanedbáme, tedy máme Binomické rozdělení s parametry l a $\frac{\lambda \cdot t}{l}$, což pro rostoucí l vede k Poissonovu rozdělení s parametrem $\lambda \cdot t$. Tedy

$$p(N_t = k) = e^{-\lambda \cdot t} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!}.$$

□

Definice 3.6 (Čekání na další příchod)

$$L_k := T_k - T_{k-1}.$$

Důsledek

$$p(L_k \geqslant t) = p(0, t) = e^{-\lambda \cdot t}, \qquad p(L_k \leqslant t) = 1 - p(L_k \geqslant t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}.$$
$$L_k \sim Exp(\lambda).$$

Důsledek

$$\mathbb{E}T_k = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}L_i = k \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

$$\operatorname{var} T_k = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{var} L_i = k \cdot \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$f_{T_k}(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda \cdot t}}{(k-1)!}$$

Věta 3.4 (Rozdělování Poissonových procesů)

Mějme $0 < T_1 < T_2 < \dots$ Poissonův proces s parametrem λ a každý příchod nezávisle s pravděpodobností p ponechejme. Pak nová $0 < T_1' < T_2' < \dots$ jsou Poissonův proces s parametrem $\lambda \cdot p$. Odstraněné $0 < \tilde{T}_1 < \tilde{T}_2 < \dots$ jsou Poissonův proces s parametrem $\lambda \cdot (1-p)$. A tyto procesy jsou na sobě nezávislé.

Důkaz

$$p_p(k, \tau) = \sum_{n=k}^{\infty} p(n, \tau) \cdot P(Bin(n, p) = k).$$

Následně se ověří podmínky Poissonova procesu (na přednášce ukázán trochu zjednodušený výpočet).

Nezávislé $\Leftrightarrow P(X = k \wedge Y = l) = P(X = k) \cdot P(Y = l)$. Následně jsme ověřili dosazením. □

Věta 3.5 (Spojování Poissonových procesů)

Nechť $0 < T_1 < T_2 < \dots$ a $0 < S_1 < S_2 < \dots$ jsou Poissonovy procesy s parametry λ, $\varkappa$. Potom jejich sjednocením získáme Poissonův proces $0 < R_1 < R_2 < \dots$ s parametrem $\lambda + \varkappa$. (Případně můžeme spojovat i libovolně mnoho Poissonových procesů do Poissonova procesu s parametrem rovným součtu parametrů původních.)

Důkaz

$$p(R_1 > t) = P(T_1 > t \wedge S_1 > t) = P(T_1 > t) \cdot P(S_1 > t) = e^{-\lambda t} \cdot e^{-\varkappa t} = e^{-(\lambda + \varkappa)t}.$$

Následně restartujeme procesy v R_1 a začínáme nanovo :) □