Příklad (7.1)
Určete počet

i dvoučlenných posloupností vektorů (tj. posloupností tvaru $(\mathbf{v}_1, v_2)$) v prostoru $\mathbb{Z}_5^2$, které jsou lineárně nezávislé.

ii trojčlenných posloupností vektorů (tj. posloupností tvaru $(\mathbf{v}_1, v_2, v_3)$) v prostoru $\mathbb{Z}_2^3$, které jsou lineárně nezávislé.

Řešení (i)
Dva vektory jsou lineárně nezávislé, když jeden není násobkem druhého. Tedy za první vektor vezmeme libovolný vektor[a] kromě nulového (ten je násobkem libovolného vektoru), tj. máme $5^2 - 1 = 24$ možností. Vektor nad $\mathbb{Z}_5$ má 5 násobků, tedy za druhý vektor vybíráme jeden z $5^2 - 5 = 20$. Dohromady máme tedy $24 \cdot 20 = 480$ posloupností. Počet posloupností až na permutace získáme vydělením počtem permutací (protože prvky posloupnosti nejsou násobky jeden druhého, tak nejsou ani totožné), tedy těch je $\frac{480}{2!} = 240$, to po nás ale zadání nechce.

[a] $\mathbb{Z}_i^j$ má zřejmě i^j prvků, protože j krát vybíráme jeden z i prvků $\mathbb{Z}_i$

Řešení
Nejdříve zjistíme, kolik je dvojčlenných nezávislých posloupností a následně spočítáme kolik vektorů můžeme ke každé takové posloupnosti přidat. Stejně jako výše, vezmeme libovolný vektor (krom nulového) a jeho „nenásobek“, tedy máme $(2^3 - 1) \cdot (2^3 - 2) = 42$. Třetí vektor nemůže být lineární kombinací předchozích dvou, což nad $\mathbb{Z}_2$ znamená, že nemůže být nulový, nemůže to být ani jeden z nich a nemůže to být jejich součet. Tedy máme $2^3 - 4 = 4$ možností, jak volit třetí vektor, nezávisle na tom, jaké jsme zvolili předchozí. Tj. dohromady máme $42 \cdot 4 = 168$ možných trojčlenných posloupností. ($\frac{168}{3!} = 28$ až na permutace.)

Příklad (7.2)
Předpokládejme, že ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ je $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ lineárně nezávislá posloupnost. Dokažte, že posloupnost $(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}+\mathbf{z}, \mathbf{u}+2\mathbf{v}+3\mathbf{w}+\mathbf{z}, \mathbf{u}+3\mathbf{v}+\mathbf{w}+2\mathbf{z})$ je také lineárně nezávislá posloupnost ve $\mathbf{V}$.

Důkaz
Vyjdeme z jedné z ekvivalentních definicí lineární nezávislosti, a to té, že vektory jsou lineárně nezávislé, pokud pouze jejich triviální lineární kombinace je nulový vektor:

$$k_1 \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}+\mathbf{z}) + k_2 \cdot (\mathbf{u}+2\mathbf{v}+3\mathbf{w}+\mathbf{z}) + k_3 \cdot (u+3v+w+2z) = \mathbf{o},$$

$$\mathbf{u} \cdot (k_1+k_2+k_3) + \mathbf{v} \cdot (k_1+2k_2+3k_3) + \mathbf{w} \cdot (k_1+3k_2+k_3) + \mathbf{z} \cdot (k_1+k_2+2k_3) = \mathbf{o}.$$

A jelikož víme, že jediná lineární kombinace $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ dávající $\mathbf{o}$ byla ta triviální, tak koeficienty u vektorů v tomto výrazu musí být rovny 0:

$$k_1+k_2+k_3 = 0,\ k_1+2k_2+3k_3 = 0,\ k_1+3k_2+k_3 = 0,\ k_1+k_2+2k_3 = 0.$$

Z těchto rovnic dostáváme $k_1 = k_2 = k_3 = 0$[a]. Tedy trojčlenná posloupnost ze zadání je lineárně nezávislá. □

[a] Třeba „přičtením“ čtyřnásobku první rovnice ke čtvrté dostaneme $k_3 = 0$, „přičtením“ čtyřnásobku první rovnice ke třetí dostaneme $2k_2 = 0$, tedy $k_2 = 0$ a následně z libovolné rovnice $k_1 = 0$.

Příklad (7.bonus)
Najděte počet l-členných lineárně nezávislých posloupností v prostoru $\mathbb{Z}_p^k$.

Řešení
Lineární kombinace i nezávislých vektorů na $\mathbb{Z}_p$ má p^i členů, jelikož každá (= pro všechny koeficienty $j_1, j_2, \ldots, j_i$ ze $\mathbb{Z}_p$) lineární kombinace je jiným vektorem (z definice nezávislosti). Tedy první člen posloupnosti vybíráme z $\left|\mathbb{Z}_p^k\right| - 1$ prvků, druhý z $\left|\mathbb{Z}_p^k\right| - p$, … , l-tý z $\left|\mathbb{Z}_p^k\right| - p^{l-1}$, jelikož nemůžeme vybrat ty, které jsou lineární kombinací předchozích. Tedy počet nezávislých l-člených posloupností je

$$\prod_{i=1}^{l}(p^k - p^{i-1}).$$