1 Skalární součin

Definice 1.1 (Standardní skalární součin)

Buďte $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. Pak standardní skalární součin $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ definujeme jako $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{u_1} \cdot v_1 + \ldots + \overline{u_n} \cdot v_n$.

Definice 1.2 (Euklidovská norma)

Nechť $\cdot$ je standardní skalární součin na $\mathbf{V}$. Potom $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ definujeme euklidovskou normu jako $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$.

Definice 1.3 (Skalární součin)

Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Skalární součin je zobrazení $\cdot : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{C}$, které ($\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ a $\forall t \in \mathbb{C}$) splňuje:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}, \text{ (Symetričnost)}$$

$$\mathbf{u} \cdot (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}), \ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}, \text{ (Linearita)}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0 \wedge (\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}).$$

Definice 1.4 (Hermitovsky sdružená matice)

Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, potom hermitovsky sdružená matice je $A^* = (\overline{a_{ji}})$.

Čtvercová matice je Hermitovská, pokud je rovna své hermitovsky sdružené matici.

Definice 1.5

Buď $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a buď $A = T^{n \times n}$. Pak A je pozitivně definitní, pokud je hermitovská a platí

$$\mathbf{u} * Au \geq 0 \wedge (\mathbf{u} * Au = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}).$$

Důsledek

$\langle \cdot, \cdot \rangle_A = \cdot^* A \cdot$ je skalární součin, právě když A je pozitivně definitní.

Definice 1.6 (Norma)

Buď $\mathbf{V}$ VP nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pak normou vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ rozumíme $||\mathbf{u}|| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.

Tvrzení 1.1 (Vlastnosti normy)

$$||\mathbf{u}|| \geq 0 \wedge (||\mathbf{u}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}).$$

$$\forall t \in \mathbb{T} : ||t\mathbf{u}|| = |t| \cdot ||\mathbf{u}||.$$

$$||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||^2 = 2||\mathbf{u}||^2 + 2||\mathbf{v}||^2.$$

$$\Re(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2}||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 - ||\mathbf{u}||^2 - ||\mathbf{v}||^2.$$

Věta 1.2 (Cauchy-Schwarzova nerovnost)

Buď $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *nebo* $\mathbb{C}$*,* $\mathbf{V}$ *VP nad* $\mathbb{T}$ *se skalárním součinem* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*. Pak platí* $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$: $| \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle | \leq ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||$*. Rovnost platí právě tehdy, pokud* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *je lineárně závislá.*

Důkaz
Případ 1): $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je LZ: Buď $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$: $| \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle | = | \langle \mathbf{u}, t \cdot \mathbf{u} \rangle | = |t| \cdot | \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle | = |t| \cdot ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||$.

Případ 2): $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je LN: Víme, že $||\mathbf{u} - t\mathbf{v}||^2 > 0$. Zvolme t tak, aby $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = 0$. (To lze, protože $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - t \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - t||\mathbf{v}||^2 \implies t = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{||\mathbf{v}||^2}$.) $0 < ||\mathbf{u} - t\mathbf{v}||^2 = \langle \mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle - \overline{t} \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = ||\mathbf{u}||^2 - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{||\mathbf{v}||^2} = ||\mathbf{u}||^2 - \frac{\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{||\mathbf{v}||^2} = ||\mathbf{u}||^2 - \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{||\mathbf{v}||^2}$.

Tj. $0 < ||\mathbf{u}||^2 \cdot ||\mathbf{v}||^2 - | \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle |^2$, tedy $| \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle | \leq ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||$. □

Důsledek (Trojúhelníková nerovnost)
Buď $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, $\mathbf{V}$ VP nad $\mathbb{T}$ se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pak platí $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$: $||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$. Rovnost platí právě tehdy, pokud $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je lineárně závislá.

Důkaz
$||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = ||\mathbf{u}||^2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + ||\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + 2\Re(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) + ||\mathbf{v}||^2 \leq ||\mathbf{u}||^2 + 2| \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle | + ||\mathbf{v}||^2 \leq ||\mathbf{u}||^2 + 2 \cdot ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{v}||^2 = (||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||)^2$. □

Definice 1.7 (Kolmost)

Buď $\mathbf{V}$ VP se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Řekneme, že $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou kolmé, značíme $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, pokud $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Poznámka
Ze skoro symetrie (SSS) plyne, že relace jsou kolmé je symetrická.

Definice 1.8 (Kolmost množin)

Množina nebo posloupnost M vektorů VP $\mathbf{V}$ s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se nazývá ortogonální, pokud každá dvojice různých prvků M je kolmá. Nazývá se ortonormální, pokud je ortogonální a každý prvek má normu 1.

Důsledek
Kanonická báze je ortonormální. Normovaná (tj. každý prvek vydělíme normou) ortogonální množina / posloupnost je ortonormální.

Tvrzení 1.3 (Pythagorova věta)

$\mathbf{V}$ *vektorový prostor se* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, *buďte* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *kolmé vektory. Pak*

$$||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2.$$

Důkaz

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 0 + 0 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2.$$

□

Důsledek
Je-li $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ ortogonální posloupnost, pak $||\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k||^2 = ||\mathbf{v}_1||^2 + \ldots + ||\mathbf{v}_k||^2$.

Důkaz
Indukcí triviálně. □

Tvrzení 1.4

Buď $\mathbf{V}$ *vektorový prostor s* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *a* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *ortogonální posloupnost nenulových vektorů. Pak je* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *LN.*

Důkaz
Předpokládejme, že $0 = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k$, kde $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{T}$ ($\mathbb{T} = \mathbb{R} \vee \mathbb{T} = \mathbb{C}$). Chceme ukázat, že $a_1 = \ldots = a_k = 0$.

$$\forall i \in [k] : 0 = \langle v_i, \mathbf{o} \rangle = \langle \mathbf{v}_i, a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k \rangle = a_1 \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1 \rangle + \ldots + a_k \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k \rangle = a_i \cdot ||\mathbf{v}_i||^2 \implies a_i = 0.$$

□

1.1 Ortonormální báze a vyjádření vektorů vzhledem k nim

Tvrzení 1.5

$\mathbf{V}$ *VP s* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *ortonormální báze. Pak pro každý* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ *platí:*

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{v}_1 + \ldots + \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{v}_n.$$

To jest

$$[\mathbf{u}]_B = (\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}\rangle, \ldots, \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u}\rangle)^T.$$

Důkaz

Vezmeme $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{T}$ tak, aby $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$. Máme $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{v}_i, a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n\rangle = a_1 \cdot 0 + \ldots + a_i + \ldots + a_n \cdot 0 = a_i$. □

Poznámka

Kdyby B byla jen ortogonální, pak $[\mathbf{u}]_B = (\frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}\rangle}{||\mathbf{v}_1||}, \ldots, \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u}\rangle}{||\mathbf{v}_k||})^T$.

Poznámka

$a_1, \ldots, a_n$ se někdy nazývají Fourierovy koeficienty.

Tvrzení 1.6

$\mathbf{V}$ VP s $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ortonormální báze, $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$. Pak $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = [\mathbf{u}]_B \cdot [\mathbf{w}]_B = [\mathbf{u}]_B^*[\mathbf{w}]_B$.

Důkaz

Buď $[\mathbf{u}]_B = (a_1, \ldots, a_n)^T$, $[\mathbf{w}]_B = (b_1, \ldots, b_n)^T$. Pak $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n, b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_n\mathbf{v}_n\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_i} \cdot b_j \cdot \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i \cdot \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle = [\mathbf{u}]_B^*[\mathbf{w}]_B$. □

1.2 Kolmost množin

Definice 1.9 (Kolmost množin)

$\mathbf{V}$ VP s $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $M, N \subseteq \mathbf{V}$. Pak řekneme, že $\mathbf{v}$ je kolmý k M, značíme $\mathbf{v} \perp M$, pokud $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}\ \forall \mathbf{w} \in M$, a řekneme, že M je kolmá k N, značíme $M \perp N$, pokud $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}\ \forall \mathbf{v} \in M\ \forall \mathbf{w} \in N$.

Definice 1.10

Buď $\mathbf{V}$ VP s $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a buď $\mathbf{W} \leq \mathbf{v}$. Je-li $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, ortogonální projekcí vektoru $\mathbf{v}$ na podprostor $\mathbf{W}$ rozumíme vektor $\mathbf{w}$ takový, že $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ a $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{w}$.

Věta 1.7

Buď $\mathbf{V}$ VP s $\langle\cdot,\cdot\rangle$, buď $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ ortogonální projekce $\mathbf{v}$ na $\mathbf{W}$. Potom pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ různý od $\mathbf{w}$ platí: $||\mathbf{v} - \mathbf{w}|| < ||\mathbf{v} - \mathbf{u}||$.

Speciálně existuje-li ortogonální projekce $\mathbf{v}$ na $\mathbf{W}$, pak je určena jednoznačně.

Důkaz
Z předpokladu $\mathbf{w}, \mathbf{u}$, a tedy i $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ jsou vektory $\mathbf{W}$. Tudíž $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{w} - \mathbf{u}$ ($\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{W}$). Z Pythagorovy věty: $||\mathbf{v} - \mathbf{u}||^2 = ||\mathbf{v} - \mathbf{w}||^2 + ||\mathbf{w} - \mathbf{u}||^2 > ||\mathbf{v} - \mathbf{w}||^2$. □

Tvrzení 1.8

Buď $\mathbf{V}$ VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a buďte $M, N \subseteq \mathbf{V}$. Pak $M \perp N \Leftrightarrow M \perp \mathrm{LO}(N)$ ($\Leftrightarrow \mathrm{LO}(M) \perp \mathrm{LO}(N)$).

Důkaz
$\Leftarrow$: Triviální (protože $N \subseteq \mathrm{LO}(N)$).

$\implies$: Předpokládejme, že $M \perp N$. Vezměme $\mathbf{v} \in M$ a $\mathbf{w} = a_1\mathbf{w}_1 + \ldots + a_n\mathbf{w}_n \in \mathrm{LO}(N)$. Pak $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \rangle + \ldots + a_n \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n \rangle = 0$. □

Tvrzení 1.9

Buď $\mathbf{V}$ VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$, který má ortonormální bázi $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Pak pro libovolné $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ je

$$\mathbf{w} := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_2 + \ldots + \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{u}_k$$

ortogonální projekcí do $\mathbf{W}$.

Důkaz
Zjevně $\mathbf{w} \in \mathrm{LO}(B) = \mathbf{W}$. Chceme ukázat, že $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{W}$. Podle tvrzení výše stačí ukázat, že $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{u}_i, \forall i \in [k]$. Označme $a_i := \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle$.

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} - a_1\mathbf{u}_1 - a_2\mathbf{u}_2 - \ldots - a_k\mathbf{u}_k \rangle = a_i - a_1 \cdot 0 - \ldots - a_i \cdot 1 - \ldots - a_k \cdot 0 = \mathbf{o}.$$

□

Definice 1.11 (Gramova-Schmidtova ortogonalizace)

Postup, který vezme LN posloupnost $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ z VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a vytvoří ortonormální posloupnost $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ taková, že $\forall i \in [k] : \mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i\} = \mathrm{LO}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i\}$.

1) $\mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||}$. 2) Pro každé $i = 2, \ldots, k$ spočítáme $\mathbf{w}_i = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_i \rangle \cdot \mathbf{u}_1 + \ldots + \langle \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}_i \rangle \cdot \mathbf{u}_{i-1}$ a položíme $\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i}{||\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i||}$.

Důkaz
To, že $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i)$ je ortonormální $\forall i \in [k]$ dokážeme triviálně indukcí.

Stejně tak, že $\mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\} = \mathrm{LO}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i\}$.

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{||\dots||} - \frac{\mathbf{w}_i}{||\dots||}, \frac{\mathbf{w}_i}{||\dots||} \in \mathrm{LO}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}\} \stackrel{\mathrm{IP}}{=} \mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}\}.$$

$\mathbf{v}_i$ také z definice.

Nakonec musíme ukázat, že nikdy nedělíme nulou (naopak, pokud dostaneme špatný (= LZ) vstup, tak dělíme). Ukáže se, že kdybychom dělili, tak nějaké $\mathbf{u}_i \in \mathrm{LO}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}\}$. □

Věta 1.10

Máme-li $\mathbf{V}$ VP s $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a aplikujeme-li GS ortogonalizaci na LN posloupnost vektorů z $\mathbf{V}$, pak dostaneme ortonormální posloupnost, že se jejich LO rovnají.

Důkaz
Viz předchozí důkaz. □

Důsledek
Každý konečně generovaný VP se skalárním součinem má ortonormální bázi.

Důsledek
Máme-li $\mathbf{V}$ konečně generovaný VP s $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a ortonormální posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$, můžeme ji doplnit na ortonormální bázi.

Důkaz
Doplníme na bázi a aplikujeme GS ortogonalizaci, kde si rozmyslíme, že nám nezmění původní posloupnost. □

Důsledek
Je-li $\mathbf{V}$ konečně generovaný VP s ortonormální bází $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ a s $\langle\cdot,\cdot\rangle$, pak existuje isomorfismus $\mathbf{V} \to T^n$ takový, že $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = f(\mathbf{v}) \cdot f(\mathbf{w})$.

Poznámka
Aplikováním GS ortogonalizace na $\mathbb{T}^n$ dostaneme tzv. QR - rozklad matice, kde $A = Q \cdot R$ a A má za sloupce původní vektory, Q má ortonormální posloupnost sloupců a R je horní trojúhelníková s nezápornými reálnými čísly na diagonále.

1.3 Ortogonální doplněk, Gramova matice

Definice 1.12

Buď $\mathbf{V}$ VP s $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nad $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Je-li $M\subseteq\mathbf{V}$ množina vektorů, pak ortogonálním doplňkem k M ve $\mathbf{V}$, rozumíme

$$M^{\perp}=\{\mathbf{v}\in\mathbf{v}|\mathbf{v}\perp M\}=\{\mathbf{v}\in\mathbf{V}|(\forall\mathbf{u}\in M:\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle=0)\}\,.$$

Důsledek
$M\perp M^{\perp}$ a $M^{\perp}$ je největší taková množina vzhledem k inkluzi.

Tvrzení 1.11

$\mathbf{V}$ *VP s* $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $M\subseteq\mathbf{V}$. *Pak* $M^{\perp}=(\mathrm{LO}\,M)^{\perp}$, $M^{\perp}$ *je podprostor* $\mathbf{V}$, $M\subseteq N\implies N^{\perp}\subseteq M^{\perp}$.

Důkaz

$$\mathbf{v}\in M^{\perp}\Leftrightarrow\mathbf{v}\perp M\Leftrightarrow\mathbf{v}\perp\mathrm{LO}\,M\Leftrightarrow\mathbf{v}\in(\mathrm{LO}\,M)^{\perp}.$$

Vezmeme $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in M^{\perp}$ a $t\in\mathbb{T}$, pak $\forall\mathbf{v}\in M:\langle\mathbf{v},\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\rangle=\langle\mathbf{v},\mathbf{w}_1\rangle+\langle\mathbf{v},\mathbf{u}_2\rangle=0+0=0$ a $\langle\mathbf{v},t\cdot\mathbf{w}_1\rangle=t\cdot\langle\mathbf{v},\mathbf{w}_1\rangle=t\cdot 0=0\implies\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2,t\cdot\mathbf{w}_1\in M^{\perp}$.

Ať $M\subseteq N$. Pak $\mathbf{v}\in N^{\perp}\Leftrightarrow\mathbf{v}\perp N\implies\mathbf{v}\perp M\Leftrightarrow\mathbf{v}\in M^{\perp}$. □

Věta 1.12

Buď $\mathbf{V}$ *VP s* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *nad* $\mathbb{R}$ *nebo* $\mathbb{C}$. *Buď* $\mathbf{W}\leq\mathbf{V}$ *konečně generovaný. Pak platí:*

$$1)\mathbf{V}=\mathbf{W}\oplus\mathbf{W}^{\perp}.$$

$$2)(\mathbf{W}^{\perp})^{\perp}=\mathbf{W}.$$

3) Každý vektor $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ *má (jednoznačnou) ortogonální projekci jak na* $\mathbf{W}$, *tak ne* $\mathbf{W}^{\perp}$.
4) Je-li $\mathbf{V}$ *konečně generovaný dimenze* n, *pak* $n=\dim\mathbf{W}+\dim\mathbf{W}^{\perp}$.

Důkaz
1) Triviálně $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^{\perp} = \{\mathbf{o}\}$. Navíc použitím toho, že existuje ortogonální projekce (a toho, že je kolmá) na $\mathbf{W}$ máme, že $\mathbf{W} + \mathbf{W}^{\perp} = \mathbf{V}$.

2) $\mathbf{W} \subseteq (\mathbf{W}^{\perp})^{\perp}$: je-li $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, pak $w \perp (\mathbf{W}^{\perp})$, tj. $w \in (\mathbf{w}^{\perp})^{\perp}$. Naopak $(\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} \subseteq \mathbf{W}$: vezměme $\mathbf{v} \in (\mathbf{W}^{\perp})^{\perp}$. Uvažujme ortogonální projekci $\mathbf{v}$ na $\mathbf{W}$:

$$(\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} \ni \mathbf{v} = \mathbf{w} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v} - \mathbf{w} \in (\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} \implies (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \perp (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \implies \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{o} \implies \mathbf{v} = \mathbf{w} \in \mathbf{W}.$$

Víme, že ortogonální projekce na $\mathbf{W}$ existuje. Je-li tedy $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, pak můžeme psát $\mathbf{v} = \mathbf{w} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = (\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{w}$, potom $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \in \mathbf{W}^{\perp}$ je podle definice ortogonální projekce na $\mathbf{W}^{\perp}$. ($\mathbf{w} \in (\mathbf{W}^{\perp})^{\perp}$.)

Použijeme 1) a větu o dimenzi součtu a průniku podprostorů. □

Definice 1.13 (Gramova matice)

Buď $\mathbf{V}$ VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Buď $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ posloupnost vektorů. Pak Gramovu matici posloupnosti $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ definujeme jako:

$$(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle)_{k \times k}.$$

Tvrzení 1.13

Buď $\mathbf{V}$ VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ posloupnost vektorů $\mathbf{V}$, B Gramova matice. Vezměme $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a $\mathbf{w} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k \in \mathbf{W} := \mathrm{LO}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. Pak následující je ekvivalentní:
1) $\mathbf{w}$ je ortogonální projekce $\mathbf{v}$ na $\mathbf{W}$.
2) $B \cdot (a_1, \ldots, a_k)^T = (\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle, \ldots, \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \rangle)$.

Důkaz
1) $\Leftrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{W} \Leftrightarrow \forall i \in [k] :\Leftrightarrow \mathbf{u}_i \perp \mathbf{v} - \mathbf{w} \Leftrightarrow \forall i \in [k] : \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall [k] : \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle \Leftrightarrow \forall i \in [k] : \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_1 \rangle \cdot a_1 + \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle \cdot a_k = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle \Leftrightarrow 2)$. □

Důsledek
Buď A matice typu $n \times k$ nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Buď $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$ a $x \in \mathbb{C}^k$ nebo $\mathbb{R}^k$. Pak následující je ekvivalentní:
1) Ax je ortogonální projekce $\mathbf{v}$ na $\Im A$.
2) $A^*A \cdot x = A^* \cdot \mathbf{v}$.

Tvrzení 1.14 (8.80)

Buď $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ posloupnost vektorů ve VP $\mathbf{V}$ s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a buď $B \in T^{k \times k}$ gramova matice. Pak platí:
1) B je regulární $\Leftrightarrow (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ LN.
2) B je hermitovská (v reálném případě symetrická). 3) Je-li $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ LN, pak B je pozitivně definitní.

Důkaz
1) aplikujeme tvrzení výše na $\mathbf{v} = \mathbf{o}$. První podmínka se přepíše na $0 = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k \Leftrightarrow B \cdot (a_1, \ldots, a_k)^T = \mathbf{o} \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_k)^T \in \operatorname{Ker} B$. Ale jádro je $\{\mathbf{o}\} \Leftrightarrow B$ je regulární.

2) Plyne z rovnosti: $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle}$.

3) Vezměme ortonormální bázi C prostoru LO $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ a položme $A = ([\mathbf{u}_1]_C | \ldots | [\mathbf{u}_k]_C)$. Pak A je regulární, tj. A^*A je pozitivně definitní. $\square$

1.4 Unitární a ortogonální matice

Definice 1.14 (Unitární a ortogonální matice)

Čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ se nazývá ortogonální, pokud má ortonormální posloupnost sloupců vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Čtvercová matice nad $\mathbb{C}$ se nazývá unitární, pokud má ortonormální posloupnost sloupců vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Tvrzení 1.15

Buď Q čtvercová komplexní matice řádu n. Pak následující je ekvivalentní: 1) Q je unitární, 2) $Q^* \cdot Q = I_n$, 3) Q^* je unitární, 4) $Q \cdot Q^* = I_n$, 5) Q^T je unitární, 6) f_Q zachovává standardní skalární součin, tj. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Speciálně je každá unitární matice regulární a $Q^{-1} = Q^*$.

Důkaz
1) $\Leftrightarrow$ 2), 3) $\Leftrightarrow$ 4): z definice. 2) $\implies$ 4): 2) $\implies$ Q má levou inverzi Q^* $\implies$ Q regulární a $Q^{-1} = Q^* \implies Q \cdot Q^{-1} = Q \cdot Q^* = I_n$. 4) $\implies$ 2): analogicky.

3) $\Leftrightarrow$ 5): 5) říká, že Q má ortonormální posloupnost řádků, 3) říká, že když komplexně sdružíme všechny prvky Q, pak dostaneme ortonormální posloupnost řádků. Z toho to už jednoduše dostaneme.

2) $\implies$ 6): Předpokládejme 2), uvažujme $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. Pak $f_Q(\mathbf{u}) \cdot f_Q(\mathbf{v}) = (Q\mathbf{u})^*(Q\mathbf{v}) = \mathbf{u}^*(Q^*Q)\mathbf{v} = \mathbf{u}^*\mathbf{v}$.

6) $\implies$ 1) $Q = (f_Q(e_1) | \ldots | f_Q(e_n)) \implies (f_Q(e_1), \ldots, f_Q(e_n))$ ortonormální $\implies Q$ unitární. $\square$

Důsledek
Součin unitárních matic stejného řádu je unitární matice.

Důkaz
$(AB)^*(AB) = B^*A^*AB = B^*B = I_n$. □

Tvrzení 1.16

Je-li A regulární komplexní matice a $Q_1R_1 = A = Q_2R_2$ jsou 2 QR rozklady, pak nutně $Q_1 = Q_2$ a $R_1 = R_2$.

Důkaz
Z regularity $Q_1R_1 = Q_2R_2 \implies Q_2^*Q_1 = Q_2^{-1}Q_1 = R_2R^{-1} =: (\mathbf{c}_1|\dots|\mathbf{c}_n)$. Chceme ukázat, ze $\mathbf{c}_i = e_i \forall i$. To ukážeme indukcí podle i. Víme, že $R_2R_1^{-1}$ je horní trojúhelníková, tedy každé $\mathbf{c}_i$ musí mít kladný prvek na i-té pozici a zároveň všude výše musí mít nulu, aby byl kolmý ke všem předchozím (o kterých z IP víme, že jsou to jednotkové vektory). □

Definice 1.15

Buď $\mathbf{V}$ komplexní VP s $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{V}}$ a $\mathbf{W}$ komplexní VP s $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{W}}$. Pak lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ se nazývá unitární, pokud $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} : \langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})\rangle_{\mathbf{W}} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbf{V}}$.

Tvrzení 1.17

Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineární zobrazení, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ komplexní VP se skalárním součinem, pak následující je ekvivalentní: 1) f je unitární, 2) $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} : ||f(\mathbf{u})_{\mathbf{W}} = ||\mathbf{u}||_{\mathbf{V}}$ (f zachovává normu), 3) f zobrazí každou ortonormální posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ na ortonormální posloupnost $(f(\mathbf{u}_1, \dots, f(\mathbf{u}_k)))$, 4) f zobrazuje jednotkové vektory na jednotkové vektory.

Speciálně: každé unitární zobrazení je prosté.

Důkaz
Ve skriptech. Dodatek plyne z 2) a f prosté $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\}$. 1) $\implies$ 2) $\implies$ 4), 1) $\implies$ 3) $\implies$ 4) jednoduché. 4) $\implies$ 2): $\mathbf{o} \neq \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, pak $\mathbf{v} = t\mathbf{u}$ pro $t = ||\mathbf{v}||_{\mathbf{V}}$, $\mathbf{u}$ jednokový. $||f(\mathbf{v})||_{\mathbf{W}} = t \cdot ||f(\mathbf{u})||_{\mathbf{W}} = t = ||\mathbf{v}||_{\mathbf{V}}$.

2) $\implies$ 1): Polarizační identity: $\Re\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle, \Im\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \frac{1}{2}(\dots)$. □

Poznámka
Unitární zobrazení může zobrazovat i do prostoru větší dimenze.

1.5 Přibližné řešení SLR metodou nejmenších čtverců

Definice 1.16

Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$ je přibližné řešení SLR $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ metodou nejmenších čtverců, pokud

$$||A\mathbf{c} - \mathbf{b}|| = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n} ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||.$$

Důsledek
$\mathbf{c}$ je ortogonální projekce $\mathbf{b}$ do $\operatorname{Im} A$.

Poznámka
Používá se například, když chybou měření soustava nemá řešení, ale my víme, že řešení mít má.

Jmenuje se podle čtverců ve výpočtu normy.

Tvrzení 1.18

$\mathbf{c}$ *je přibližné řešení* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *metodou nejmenších čtverců, právě když* $A^* A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$.

2 Lineární dynamické systémy, vlastní čísla a vlastní vektory

Definice 2.1 (Vlastní čísla a vlastní vektory)

Buď $\mathbb{T}$ těleso, A čtvercová matice řádu n (tj. máme $f_a : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$). $\lambda \in \mathbb{T}$ se nazývá vlastní číslo matice A, pokud $\exists \mathbf{v} \in T^n, \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ takový, že $A \cdot \mathbf{V} = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Je-li $\lambda \in \mathbb{T}$ vlastní číslo matice A, pak $\mathbf{w} \in \mathbb{T}^n$ je vlastním vektorem příslušným k λ, pokud $A \cdot \mathbf{w} = \lambda \cdot \mathbf{w}$.

Definice 2.2 (Vlastní čísla a vlastní vektory)

Buď $\mathbb{T}$ těleso, $\mathbf{V}$ VP nad $\mathbb{T}$ a $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor. $\lambda \in \mathbb{T}$ se nazývá vlastní číslo operátoru f, pokud $\exists \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ takový, že $f(\mathbf{V}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Je-li $\lambda \in \mathbb{T}$ vlastní číslo operátoru f, pak $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ je vlastním vektorem příslušným k λ, pokud $f(\mathbf{w}) = \lambda \cdot \mathbf{w}$.

Pozorování
A má vlastní číslo 0 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} A \neq \{\mathbf{o}\} \Leftrightarrow$ (pro čtvercové) A je singulární $\Leftrightarrow \det A = 0$.

f má vlastní číslo 0 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \neq \{\mathbf{o}\}$.

Navíc množina vlastních vektorů příslušných k 0 je přesně $\operatorname{Ker} A$ ($\operatorname{Ker} f$).

Pozorování
A má vlastní číslo $\lambda \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(A-\lambda I_n) \neq \{\mathbf{o}\} \Leftrightarrow A-\lambda I_n$ singulární $\Leftrightarrow \det(A-\lambda I_n)=0$.

f má vlastní číslo $\lambda \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f-\lambda\cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}}) \neq \{\mathbf{o}\}$.

Navíc množina M_λ vlastních vektorů A (resp. f) příslušných k λ je v tom případě rovna $\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)$ (resp. $\operatorname{Ker}(f-\lambda\cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}})$). Speciálně $M_\lambda \leq \mathbb{T}^n$ (resp. $M_\lambda \leq \mathbf{V}$).

Definice 2.3 (Charakteristický polynom)

Buď A čtvercová matice nad $\mathbb{T}$. Potom charakteristickým polynomem A rozumíme polynom v λ:

$$p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n).$$

Tvrzení 2.1

Buď $A=(a_{ij})$ matice řadu n nad $\mathbb{T}$. A $p_A(\lambda)$ charakteristický polynom. Pak

1. *$p_A(\lambda)$ je polynom stupně n.*
2. *Koeficient u λ^n je roven $(-1)^n$.*
3. *Koeficient u λ^{n-1} je roven $(-1)^{n-1}\cdot(a_{11}+\ldots+a_{nn})$ (tzv. stopa matice $\cdot(-1)^{n-1}$).*
4. *Absolutní člen je roven* $\det A$.

Definice 2.4 (Podobné matice)

Čtvercové matice X a Y jsou podobné, pokud $Y=RXR^{-1}$ pro R regulární.

Tvrzení 2.2

X,Y podobné $\implies p_X(\lambda)=p_Y(\lambda)$.

Definice 2.5 (Diagonalizovatelný operátor)

$\mathbb{T}$ těleso, $\mathbf{V}$ konečně generovaný vektorový prostor. $f:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ lineární operátor. Pak f je diagonalizovatelný, pokud $\exists$ báze B prostoru $\mathbf{V}$ taková, že $[f]_B^B$ je diagonální.

Poznámka (Značení)

$$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \ldots & \\ & \lambda_2 & \ldots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Tvrzení 2.3

Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném VP $\mathbf{V}$ nad $\mathbb{T}$ a buď $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ nějaká báze. Pak:

$$[f]_B^B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Leftrightarrow \forall i : \mathbf{v}_i \text{ je vlastní vektor příslušný k } \lambda_i.$$

Důsledek
Za stejných předpokladů: f diagonalizovatelný $\Leftrightarrow$ $\mathbf{V}$ má bázi z vlastních vektorů f.

Definice 2.6 (Diagonalizovatelnost pro matice)

Buď $\mathbb{T}$ těleso a A čtvercová matice řádu n nad $\mathbb{T}$. Pak A je diagonalizovatelná, pokud je $f_A : \mathbb{T}^n \to T^n$ diagonalizovatelný lineární operátor.

Důsledek
A je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ $\mathbb{T}^n$ má bázi z vlastních vektorů A.

Tvrzení 2.4

Buď $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *A je diagonalizovatelná.*
2. *$\mathbb{T}^n$ má bázi z vlastních vektorů matice A.*
3. *A je podobná diagonální matici.*

2.1 Lineární nezávislost vlastních vektorů

Věta 2.5

Buď $\mathbb{T}$ těleso a $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na VP $\mathbf{V}$ nad $\mathbb{T}$. Je-li $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ posloupnost vlastních vektorů f popořadě příslušných k vlastním číslům $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou po dvou různá, pak je $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ LN.

Důkaz
Indukcí podle n. $n = 1$ je triviální ($\mathbf{v}_1 \neq 0$). $n > 1$: Uvažujme $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{T}$ taková, že $a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{o}$. $a_1 f(\mathbf{v}_1) + \ldots + a_n f(\mathbf{v}_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 a_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n a_n \mathbf{v}_n = 0$. Také můžeme původní rovnici vynásobit λ_n: $\lambda_n a_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n a_n \mathbf{v}_n = 0$. Následně můžeme odečíst tyto rovnice od sebe a dostaneme $(\lambda_1 - \lambda_n) a_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) a_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} = 0$. Ale z IP $(\lambda_1 - \lambda_n) a_1 = \ldots = (\lambda_{n-1} - \lambda_n) a_{n-1} = 0$. Ale vlastní čísla jsou po dvou různá, tedy $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$. □

Důsledek
Má-li lineární operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na prostoru dimenze n n po 2 různých vlastních čísel, pak je f diagonalizovatelný.

Má-li čtvercová matice A řádu n n po 2 různých vlastních čísel, pak je A diagonalizovatelná.

2.2 Geometrická násobnost vlastních čísel

Definice 2.7 (Geometrická násobnost)

Buď A čtvercová matice řádu n nad $\mathbb{T}$, $\lambda \in \mathbb{T}$ vlastní číslo. Uvažujme podprostor

$$M_\lambda := \{\mathbf{v} \in \mathbb{T}^n | A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\} \leq \mathbb{T}^n.$$

Pak geometrickou násobností λ rozumíme $\dim M_\lambda$.

Tvrzení 2.6

Máme-li lineární operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbb{T}$ a máme-li vlastní číslo λ operátoru f, pak geometrická násobnost $\lambda \leq$ algebraická násobnost λ.

Tvrzení 2.7 (Pomocné tvrzení o determinantech)

Buď $\mathbb{T}$ těleso, $1 \leq k < n$ a buď A matice blokově trojúhelníkovéůo tvaru, tj. $a_{ij} = 0$ pro $i > k \geq j$. Pak $\det A = (\det B) \cdot (\det D)$, kde B je prvních k sloupců a řádků, D je posledních $n - k$ sloupců a řádků.

Důkaz
Indukcí podle k: $k = 1$: Rozvoj $\det A$ podle 1. sloupce nám dá chtěnou rovnost. $k > 1$: taktéž vezmeme rozvoj podle prvního sloupce: $\det A = a_{11} \det M_{11} - a_{21} \det M_{21} + \dots$. M_{ij} jsou ale takové matice pro $k \leftarrow k-1$. Tedy je spočítáme: $\det A = a_{11}(\det B_{11})(\det D) - a_{21}(\det B_{21})(\det D) + \ldots = (\det B) \cdot (\det D)$. $\square$

Důkaz
Buď k geometrická násobnost vlastního čísla λ. Tj. $\dim M_\lambda = k$, kde $M_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} | f(v) = \lambda\mathbf{v}\} \leq \mathbf{V}$. Vezmeme si bázi $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ prostoru M_λ a doplníme na bázi $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ prostoru $\mathbf{V}$. $A = [f]^B_B$ splňuje předpoklady předchozího tvrzení ($B = \operatorname{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$). Tedy $\det A - \mu \cdot I_n = (\lambda - \mu)^k \cdot \det D$. Tedy λ je minimálně k-násobným kořenem $\det A - \mu \cdot I_n$, tedy má algebraickou násobnost $\geq$ geometrické. $\square$

Věta 2.8

Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na VP dimenze n nad $\mathbb{T}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *f je diagonalizovatelný.*
2. *f má n vlastních čísel včetně algebraických násobností a současně geometrická násobnost každého vlastního čísla je rovna jeho algebraické násobnosti.*

Důkaz
1) $\implies$ 2): f je diagonalizovatelný, tedy máme bázi $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ z vlastních vektorů. Řekněme, že $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m_1}$ jsou vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_1, ..., $\mathbf{v}_{m_1+m_2+\ldots+m_{k-1}+1}, \ldots, \mathbf{v}_{v_n}$ jsou vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_k. $\forall i \in [k]$: Geometrická násobnost i algebraická násobnost λ_i je $\geq m_i$. Na druhou stranu součet algebraických násobností je nejvýše n, tedy násobnosti λ_i jsou m_i.

2) $\implies$ 1): Buďte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ po dvou různá vlastní čísla, m_i algebraická (tj. i geometrická) násobnost $\lambda_i = \dim M_{\lambda_i}$ a $n = m_1 + \ldots + m_k$. Zvolme si bázi M_{λ_i} $B_i = (\mathbf{v}_1^i, \ldots, \mathbf{v}_{m_i}^i)$. Ukáže se, že $B = (\mathbf{v}_1^1, \ldots, v_{m_k}^k)$ je báze $\mathbf{V}$. B má $n = \dim \mathbf{V}$ prvků, tedy stačí dokázat, že B je LN. Uvažujme $0 = a_1^1 \mathbf{v}_1^1 + \ldots + a_{m_k}^k \mathbf{v}_{m_k}^k$. Součty násobků prvků jednotlivých prostorů M_{λ_i} jsou zase v M_{λ_i}, takže jsou (až na právě ty nulové) LN, protože jsou to vlastní vektory příslušné po dvou různým vlastním číslům. Tedy musí být všechny nulové, ale v jednotlivých M_{λ_i} byla $(\mathbf{v}_1^i, \ldots, \mathbf{v}_{m_i}^i)$ báze, tedy všechny koeficienty musí být nulové. $\square$

Poznámka
Dále se probírali lineární systémy v $\mathbb{R}^2$. Viz přednáška.

2.3 Jordanův kanonický tvar

Definice 2.8 (Jordanova buňka)

Buď $\mathbb{T}$ těleso, $k \geq 1$ a $\lambda \in \mathbb{T}$. Pak Jordanovou buňkou řádu k příslušnou k prvku λ rozumíme matici:

$$J_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \ldots & 0 \\ & \lambda & 1 & \ldots & \\ & & \ddots & ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definice 2.9

Řekneme, že čtvercová matice J nad tělesem $\mathbb{T}$ je v Jordanově kanonickém tvaru, pokud je blokově diagonální a čtvercové bloky na diagonále jsou Jordanovy buňky. Tj.

$$J = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1,k_1}, \dots, J_{\lambda_s,k_s}).$$

Definice 2.10 (Zobecnění diagonalizovatelnosti)

Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném VP nad $\mathbb{T}$. Řekneme, že existuje Jordanův kanonický tvar (operátoru f), pokud existuje báze B prostoru $\mathbf{V}$ taková, že $[f]_B^B$ je v Jordanově tvaru.

Podobně je-li A čtvercová matice nad $\mathbb{T}$, pak A má Jordanův kanonický tvar, pokud pro f_A existuje Jordanův kanonický tvar.

Pozorování
A má jordanův kanonický tvar $\Leftrightarrow$ $\exists$ matice v Jordanově tvaru, která je podobná matici A.

Tvrzení 2.9 (Mocnění matice v J. tvaru)

Buď $\mathbb{T}$ těleso a $J = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1,k_1}, \dots, J_{\lambda_s,k_s})$ matice v Jordanově tvaru.

Pozorování
$J^n = \operatorname{diag}(J^m_{\lambda_1,k_1}, \dots, J^m_{\lambda_s,k_s})$.

Tvrzení 2.10 (Mocnění Jordanovy buňky příslušné k 0)

Pro $m < k$: $J^m_{0,k} = \begin{pmatrix} & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & \text{diag} & \vdots \\ 0 \mid \mid & 0 & \dots & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$.

Pro $m \geq k$: $J^m_{0,k} = 0$.

Tvrzení 2.11 (Mocniny obecné Jordanovy buňky)

$$J^m_{\lambda,k} = (\lambda \cdot I_k + J_{0,k})^m \overset{\text{Binomická věta, komutativita } I_k}{=} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \lambda^i \cdot J^{m-i}_{0,k}.$$

Definice 2.11 (Jordanův řetízek, zobecněné vlastní vektory)

Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na VP $\mathbf{V}$, buď λ vlastní číslo f a buď $(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ posloupnost vektorů. Řekneme, že $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ je Jordanův řetízek délky k příslušný vlastnímu číslu λ s počátkem $\mathbf{v}_1$, pokud

$$\mathbf{v}_k \xrightarrow{f-\lambda\,\mathrm{id}} \mathbf{v}_{k-1} \xrightarrow{f-\lambda\,\mathrm{id}} \dots \xrightarrow{f-\lambda\,\mathrm{id}} \mathbf{v}_1 \xrightarrow{f-\lambda\,\mathrm{id}} \mathbf{o}.$$

Vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ se pak nazývají zobecněné vlastní vektory příslušné λ.

Tvrzení 2.12

Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném VP $\mathbf{V}$ s bází $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ pak $[f]_B^B = J_{\lambda,k} \Leftrightarrow B$ je Jordanův řetízek délky k příslušný k λ s počátkem ve $\mathbf{v}_1$.

Tvrzení 2.13

Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném VP $\mathbf{V}$ a B báze $\mathbf{V}$, pak $[f]_B^B = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1,k_1}, \dots, J_{\lambda_s,k_s})$, právě když $B = B_1 \dots B_s$ je spojením Jordanových řetízků $B_1, \dots, B_s$, kde B_i je délky k_i a příslušný λ_i.

Důsledek
$f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ má Jordanův kanonický tvar právě tehdy, když existuje báze B prostoru $\mathbf{V}$, která je spojením Jordanových řetízků.

Věta 2.14

Buď $\mathbb{T}$ těleso, $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na VP $\mathbf{V}$ nad $\mathbb{T}$. Buďte $B_1, \dots, B_s$ jordanovy řetízky popořadě délek $k_1, \dots, k_s$ příslušné vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Předpokládejme, že $\forall \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ je posloupnost počátků těch B_i, které jsou příslušné λ, LN. Pak už je spojení $B_1 \dots B_s$ LN.

Důkaz
Označme $B_i = (\mathbf{v}_1^i, \dots, \mathbf{v}_{k_i}^i)$, $(f - \lambda_i \operatorname{id})(\mathbf{v}_j^i) = \mathbf{v}_{j-1}^i$ ($\mathbf{v}_0^i := \mathbf{o}$ kvůli značení). $B := B_1 \dots B_s$. Indukce podle délky B, tj. podle $k = k_1 + k_2 + \dots + k_s$. Případ $k = 1$: Máme nutně $s = 1$, $B = B_1 = (\mathbf{v}_1^1)$, z předpokladu $\mathbf{v}_1^1 \neq \mathbf{o}$, tedy B je LN.

Pro $k > 1$: BÚNO $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r$, $\forall i > r : \lambda_i \neq \lambda_1$. Uvažujme lineární kombinaci $a_1^1\mathbf{v}_1^1 + \dots + a_n^{a_{k_s}^s \mathbf{v}_{k_s}^s} = \mathbf{o}$. Na ní aplikujeme $f - \lambda_1 \operatorname{id}_{\mathbf{V}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. $\mathbf{o}$ zobrazí na $\mathbf{o}$, prvních $\mathbf{v}_1^i$ pro $i \leq r$ zobrazí také na $\mathbf{o}$ a $\mathbf{v}_j^i$, kde $i \leq r$ a $1 < j$, zobrazí na $\mathbf{v}_{j-1}^i$. Ostatní $\mathbf{v}_i^j$ zobrazí na $\lambda_i \mathbf{v}_j^i + \mathbf{v}_{j-1}^i - \lambda_1 \mathbf{v}_j^i$. Tedy dostaneme lineární kombinaci vektorů z řetízků, ale ubrali jsme vektor řetízků příslušících λ_1, tedy můžeme použít IP.

Takto se můžeme zbavit všech členů, kromě: $a_1^1\mathbf{v}_1^1 + a_1^2\mathbf{v}_1^2 + \dots + a_1^r\mathbf{v}_1^r + \dots + a_1^s\mathbf{v}_1^s$. BÚNO shlukneme jednotlivá vlastní čísla. Stejně tak shlukneme vlastní vektory příslušící jednomu vlastnímu číslu, tedy $\mathbf{w}_k = a_1^i\mathbf{v}_1^i + \dots$ jsou vlastní vektory příslušné po dvou různým vlastním číslům (nebo $\mathbf{o}$). Podle věty výše jsou takové vlastní vektory nezávislé, tedy $\mathbf{o}$. Tudíž $a_i^j = 0$. $\square$

Věta 2.15 (Kritérium existence jordanova kanonického tvaru)

Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na prostoru dimenze n nad $\mathbb{T}$. Pak následující je ekvivalentní: 1. pro f $\exists$ Jordanův kanonický tvar a 2. f má $n = \dim \mathbf{V}$ vlastních čísel včetně algebraické násobnosti.

Důsledek
$\mathbb{T} = \mathbb{C}$: Jordanův kanonický tvar vždy existuje (ze základní věty algebry).

3 Invariantní podprostory lineárního operátoru

Definice 3.1 (Invariantní podprostor)

Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbb{T}$. Pak řekneme, že $\mathbf{W} \le \mathbf{V}$ je invariantním podprostorem operátoru f, pokud $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{W} : f(\mathbf{v}) \in \mathcal{W}$ (jinými slovy $f(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{W}$).

Například (Vždy invariantní podprostory)

$$\{\mathbf{o}\}, \mathbf{V}, \operatorname{Ker} f, \Im f, u \text{vlastní vektor} \implies \text{LO}\{\mathbf{u}\}, (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)\text{Jordanův řetízek} \implies \text{LO}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}.$$

Důkaz
$\implies$ viz přednáška. (Nebude u zkoušky?) □

Pozorování
$\mathrm{id}_{\mathbf{V}}$, a dokonce $\mathrm{id}_{\mathbf{V}} \cdot \lambda$ mají ($\mathbf{V}$ má při těchto zobrazení) všechny podprostory invariantní.

Tvrzení 3.1

Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor a buďte $\mathbf{U}, \mathbf{W} \le \mathbf{V}$ invariantní podprostory f. Pak i $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ jsou invariantní podprostory f.

Důkaz
Pro $\mathbf{U}+\mathbf{W}$: každý vektoru z $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ je tvaru $\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Potom $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$.

Pro $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$: Buď $\mathbf{v} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, tj. $\mathbf{v} \in \mathbf{U} \wedge \mathbf{v} \in \mathbf{W} \implies f(\mathbf{V}) \in \mathbf{U}, \mathbf{W}$, tj. $f(\mathbf{v}) \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$. □

Důsledek
LO spojení (konečně mnoha) Jordanových řetízků f je vždy invariantní podprostor f.

Tvrzení 3.2

Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně dimenzionálním VP $\mathbf{V}$ nad $\mathbb{T}$, buď $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ invariantní podprostor a $g = f|_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \to \mathbf{W}$. Pak $p_g(\lambda)$ dělí $p_f(\lambda)$.

Důkaz

Zvolíme bázi $C = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ prostoru $\mathbf{W}$. C rozšíříme na bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru $\mathbf{V}$. Uvažujme $G := [f]_B^B = ([f(\mathbf{v}_1)]_B | \dots |[f(\mathbf{v}_k)]_B|[f(\mathbf{v}_{k+1})]_B| \dots |[f(\mathbf{v}_n)]_B)$. Prvních k vektorů je z $[\mathbf{W}]_B$, tedy G je blokově horní trojúhelníková, přičemž levý horní blok je $A = [g]_C^C$. Tedy $p_f(\lambda) = \det(G - \lambda I_n) = \det(A = \lambda I_k) \cdot \det(F - \lambda I_{n-k}) = p_g(\lambda) \cdot \dots$. (Podle lemma o blokově trojúhelníkové matici. F je pravá dolní matice…) $\square$

Důsledek

Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $\mathbf{V}$ konečně generovaný, $n = \dim \mathbf{V}$. $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ invariantní podprostor, $g = f_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \to \mathbf{W}$, $m = \dim \mathbf{W} (\leq n)$. Má-li f n vlastních čísel včetně algebraické násobnosti, pak g má m vlastních čísel včetně algebraické násobnosti.

Důkaz (Stručně)

Ekvivalentně dokazujeme: $p_f(\lambda)$ je součinem lineárních polynomů, tedy $p_g(\lambda)$ musí být také součinem lineárních polynomů (viz Algebra), jelikož dělí $p_f(\lambda)$. $\square$

Tvrzení 3.3

Buď $\mathbf{V}$ VP a $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ podprostor. Pak jsou-li $f, g : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ takové, že $\mathbf{W}$ je invariantním podprostorem f i g, pak $\mathbf{W}$ je invariantním podprostorem $f + g$. Je-li $\mathbf{W}$ invariantním podprostorem f a $t \in \mathbb{T}$, pak $\mathbf{W}$ je invariantním podprostorem $t \cdot f$.

Důkaz

$(f+g)(\mathbf{w}) = f(\mathbf{w}) + g(\mathbf{w}) \in \mathbf{W}$, tj. $\mathbf{W}$ je invariantním podprostorem $f + g$. Druhá část je analogicky. $\square$

Důsledek

Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor, $\lambda \in \mathbb{T}$ a $g = f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$. Pak f a g mají stejnou množinu invariantních podprostorů.

Důkaz (Kritérium existence jordanova kanonického tvaru)

$\Leftarrow$: (Nebude u zkoušky?) Položme $n = \dim \mathbf{V}$. Následuje indukce podle n: $n = 1$ jasné, $n > 1$: Vezměme $\lambda \in \mathbb{T}$ vlastní číslo f (z předpokladů druhé části věty existuje) a položme $g = f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$. pak máme podprostory g (tedy i f): $\mathrm{Ker}\, g, \dim \mathrm{Ker}\, g = k > 0$, $\mathrm{Im}\, g$, $\dim \mathrm{Im}\, g = n - k =: m < n$. $h := f|_{\mathbf{W}}$ splňuje předpoklad, tedy podle IP má bázi vzniklou spojením Jordanových řetízků.

Máme tedy řetízky h příslušné nějakému vlastnímu číslu λ, řekněme, že jich je r. Potřebujeme doplnit vektory do k. Doplníme je tedy dalšími vlastními vektory. Pak vše jen dáme dohromady a ověříme, že je to báze. □

4 Cayleyho-Hamiltonova věta

Poznámka
Buď $\mathbf{V}$ VP nad $\mathbb{T}$ a $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor. Máme VP $Hom(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ nad $\mathbb{T}$, jehož prvky jsou lineární operátory: $f, g \in Hom(\mathbf{V}, \mathbf{V}) \implies f + g : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$ a $f \in Hom(\mathbf{V}, \mathbf{V}), t \in \mathbb{T} \implies tf : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \mathbf{v} \mapsto t \cdot f(\mathbf{v})$, $\mathbf{o} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{o}$.

Je-li $g(x) = \sum c_i x^i$ polynom, definujeme operátor $g(f) = \sum c_i \cdot f^i : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \mathbf{v} \mapsto \sum c_i f^i(\mathbf{v})$.

Je-li $\dim \mathbf{V} = n$, pak $\dim Hom(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = n^2$. (Zvolíme-li $B(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ bázi $\mathbf{V}$, dostaneme izomofrismus: $Hom(\mathbf{V}, \mathbf{V}) \to \mathbb{T}^{n \times n}, f \mapsto [f]^B_B$).

Pozorování
Jsou-li $g(x), h(x)$ polynomy nad $\mathbb{T}$, $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ operátor a je-li $h(x) = g(x) \cdot r(x)$, pak $h(f) = g(f) \circ r(f)$ a $h(f), g(f), r(f) : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Důkaz
$g(x) = \sum c_i x^i$, $r(x) = d_j x^j$, $c_i, d_j \in \mathbb{T}$, potom $h(x) = g(x) \cdot r(x) = \sum_{k=0}^{d+l} (\sum_{i+j=k} c_i d_j) \cdot x^k$. Dosadí se $h(f)$ a $g(f) \cdot r(f)$ a vyjdou stejné operátory. □

Věta 4.1 (Cayleyho-Hamiltonova)
$\mathbb{T}$ *je těleso,* $\mathbf{V}$ *konečně generovaný VP nad* $\mathbb{T}$ *a* $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární operátor. Pak*

$$p_f(f) = 0.$$

Důkaz
Budeme požadovat, aby p_f byl součinem lineárních polynomů, tj. $p_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_r - \lambda)^{k_r}$, $k_i \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{T}$ (tj. aby měl f Jordanův kanonický tvar). V případě potřeby budeme pracovat nad rozkladovým tělesem, viz Algebra.

Buď B báze vzniklá spojením Jordanových řetízků, tj. $[f]^B_B = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1,k_1}, \dots, J_{\lambda_r,k_r})$, $p_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_r - \lambda)^{k_r}$. Všimněme si, že z mocnění Jordanových buněk plyne, že $(J_{\lambda_i,k_i} - \lambda_i \cdot I_{k_i})^{k_i} = 0_{k_i \times k_i}$, tedy $p_f(J_{\lambda_i,k_i}) = o_{k_i \times k_i}$. Tedy $[p_f(f)]^B_B = p_f([f^B_B]) = 0_{r \times r}$, jelikož mocnění a násobení blokově diagonální matice odpovídá mocnění a násobení bloků. □

Poznámka
Dále se pokračovalo vysvětlováním LA v Googlu ;)

5 Unitární diagonalizovatelnost

Definice 5.1

Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ čtvercová komplexní matice řádu n. Pak A je unitárně diagonalizovatelná, pokud existuje ortonormální báze B prostoru $\mathbb{C}^n$ taková, že $[f]_B^B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ je diagonální ($\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ jsou vlastní čísla).

Definice 5.2

Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ čtvercová reálná matice řádu n. Pak A je ortogonálně diagonalizovatelná, pokud existuje ortonormální báze B prostoru $\mathbb{R}^n$ taková, že $[f]_B^B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ je diagonální ($\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ jsou vlastní čísla).

Definice 5.3

Matice $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jsou unitárně podobné, pokud $\exists U$ unitární matice taková, že $Y = U^*XU (= U^{-1}XU)$.

Definice 5.4

Matice $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou ortogonálně podobné, pokud $\exists U$ ortogonální matice taková, že $Y = U^*XU (= U^{-1}XU)$.

Tvrzení 5.1

Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak následující je ekvivalentní: 1. A je unitárně diagonalizovatelná. 2. $\mathbb{C}^n$ má ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů A. 3. A je unitárně podobná diagonální matici (v tom případě jsou na diagonále takové diagonální matice vlastní čísla A, včetně násobnosti).

Důkaz

Cvičení / opakování. □

Věta 5.2

Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak NTJE: 1. A je unitárně diagonalizovatelná, 2. Platí současně, že A má n vlastních čísel včetně algebraické násobnosti (pro $\mathbb{C}$ splněno automaticky), geometrická násobnost každého čísla je rovna algebraické a $\forall$ dvojici různých vlastních čísel λ a μ, $\lambda \neq \mu$, platí, že $M_\lambda \perp M_\mu$.

Důkaz
1 $\implies$ 2: První dvě vlastnosti plynou z dřívější věty o diagonalizovatelnosti. Navíc z této věty víme, že ortonormální báze B z vlastních vektorů A, kterou nám dává předpoklad 1, je tvaru $B = B_1 \dots B_k$, kde B_i je (nutně ortonormální) báze M_{λ_i}, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechna po 2 různá vlastní čísla A. Navíc $B_i \perp B_j \forall i \neq j$, tj. $M_{\lambda_i} = \mathrm{LO}\{B_i\} \perp \mathrm{LO}\{B_j\} = M_{\lambda_j}$.

2 $\implies$ 1: Ať $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechna vlastní čísla A, po 2 různá. Zvolíme $\forall i$ ortonormální bázi B_i podprostoru M_{λ_i}, položíme $B = B_1 \dots B_k \implies B$ je ortonormální báze (je to báze ze zmiňované věty), $[f_A]^B_B$ je diagonální. □

Pozorování
Buď $x \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^n, A \in C^{m\times n}$. Pak platí $x \cdot (Ay) = (A^*x) \cdot y$. ($\cdot$ je skalární součin.)

Důkaz
$x \cdot Ay = x^*(Ay) = (x^*A^{**})y = (A^*x)^*y = A^*x \cdot y.$ □

6 Spektrální věty

Definice 6.1 (Normální matice)

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je normální, pokud $A^*A = AA^*$.

Poznámka (Vlastnosti)

$$A \text{ normální}, t \in \mathbb{C} \implies t \cdot A \text{ normální}, A^* \text{ normální}.$$

Normální jsou matice: diagonální, Hermitovské, Antihermitovské, Unitární, …

Tvrzení 6.1

Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Pak λ je vlastní číslo $A \Leftrightarrow \overline{\lambda}$ je vlastní číslo A^*.

Důkaz
λ je vlastní číslo $A \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$ není invertibilní $\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)^* = A^* - \overline{\lambda} I_n$ není invertibilní $\Leftrightarrow \overline{\lambda}$ je vlastní číslo A^*. □

Tvrzení 6.2

Buď A normální komplexní matice řádu n. Pak

$$1)\forall t \in \mathbb{C} : A - t \cdot I_n \text{ je normální.}$$

$$2)\forall U \text{ unitární} : UAU^* \text{ je normální.}$$

Důkaz

1)$(A-t\cdot I_n)^*(A-t\cdot I_n) = (A^*-\bar{t}\cdot I_n)(A-t\cdot I_n) = A^*A-t\cdot A^*-\bar{t}\cdot A+|t|^2 I_n = \ldots = (A-t\cdot I_n)(A-t\cdot I_n)^*$.

2)$(UAU^*)^*(UAU^*) = (UA^*U^*)(UAU^*) = UA^*U^*UAU^* = UA^*AAU^* = UAA^*U^* = \ldots = (UAU^*)(UA$

$\square$

Tvrzení 6.3

Je-li A normální řádu n, pak $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : ||A \cdot \mathbf{v}|| = ||A^*\mathbf{v}||$.

Důkaz

$||A\mathbf{v}||^2 = A\mathbf{v}\cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{v})^*(A\mathbf{v}) = \mathbf{v}^*A^*A\mathbf{v} = \mathbf{v}^*AA^*\mathbf{v} = (A^*\mathbf{v})^*(A^*\mathbf{v}) = A^*\mathbf{v}\cdot A^*\mathbf{v} = ||A^*\mathbf{v}||^2$.

$\square$

Poznámka
$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : ||A \cdot \mathbf{v}|| = ||A^*\mathbf{v}||$ je ekvivalentní normalitě.

Tvrzení 6.4

Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normální, buď $\lambda \in \mathbb{C}$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. Pak

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow A^*\mathbf{v} = \overline{\lambda}\mathbf{v}$$

čili množiny vlastních vektorů A a A^* jsou stejné.

Důkaz

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (A-\lambda I_n)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{o} \Leftrightarrow ||(A-\lambda I_n)\cdot\mathbf{v}|| = 0 \Leftrightarrow ||(A-\lambda I_n)^*\mathbf{v}|| = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A-\lambda I_n)^*\mathbf{v} = \mathbf{o} \Leftrightarrow (A^*-\overline{\lambda} I_n)\mathbf{v} = \mathbf{o} \Leftrightarrow A^*\mathbf{v} = \overline{\lambda}\mathbf{v}.$$

$\square$

Věta 6.5 (Spektrální věta pro normální matice)

Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak A je normální $\Leftrightarrow$ A je unitárně diagonalizovatelná.

Důkaz
$\Leftarrow$: Buď tedy $A = UDU^*$, D diagonální. Pak D je normální a A je normální podle tvrzení výše bod 2.

$\Longrightarrow$: Důkaz indukcí podle n. $n = 1$: A je diagonální a není co dokazovat. $n > 1$: Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normální a λ vlastní číslo A a $\mathbf{o} \neq \mathbf{v}_1 \in \mathbb{C}^n$ příslušný vlastní vektor. BÚNO $||\mathbf{v}_1|| = 1$, můžeme doplnit na ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ prostoru $\mathbb{C}^n$. Označme $X = [f_A]_B^B$, tj. X je unitárně podobná A, speciálně normální. X má v prvním sloupci i řádku první prvek λ, jinak 0 (jelikož $\mathbf{v}_1 \cdot A\mathbf{v}_i = A^*\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i = \lambda(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i) = \lambda \cdot 0 = 0$). Tedy na její minor použijeme IP, tj. A je unitárně diagonalizovatelná. $\square$

6.1 Přehled spektrálních vět

Poznámka
V10.13: A normální $\Leftrightarrow$ A unitárně diagonalizovatelná.

V10.15: A Hermitovská $\Leftrightarrow$ A unitárně diagonalizovatelná a vlastní čísla jsou reálná.

Důsl10.16: A symetrická $\Leftrightarrow$ A ortogonálně diagonalizovatelná.

V10.20: A pozitivně definitní $\Leftrightarrow$ A unitárně diagonalizovatelná a vlastní čísla jsou kladná reálná.

V10.20: A pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow$ A unitárně diagonalizovatelná a vlastní čísla jsou nezáporná reálná.

V10.23: A unitární $\Leftrightarrow$ A unitárně diagonalizovatelná a $\forall\lambda$ vlastní číslo platí $|\lambda| = 1$.

Pozorování
Buď $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ libovolná matice, pak $B = A^*A$ je vždy pozitivně semidefinitní.

Důkaz

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{v}^* B \mathbf{v} = ||A\mathbf{v}||^2 \geq 0.$$

$\square$

Tvrzení 6.6

Tvrdí to samé, co předchozí pozorování plus: Každá pozitivně semidefinitní matice $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je tvaru $B = A^*A$ pro nějakou matici $A = \mathbb{C}^{n\times n}$. Je-li B pozitivně definitní, je nutně A regulární.

Důkaz
Víme ze spektrálních vět, že $B = UOU^*$, kde U je unitární, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Označíme $\sqrt{D} := \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Pak $B = (U\sqrt{D}^*)(\sqrt{D}U^*) = A^*A$.

Je-li B pozitivně definitní, pak $\lambda_i > 0$. Tj. D, $\sqrt{D}$ jsou regulární, tím pádem je $A = \sqrt{D}U^*$ regulární. □

Tvrzení 6.7

Ortogonální operátor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je vždy buď reflexe ($\det[f]_B^B = -1$ pro libovolnou bázi) nebo otočení ($\det[f]_B^B = 1$ pro libovolnou bázi).

Důkaz
Je-li f_A ortogonální, je A ortogonální matice (speciálně je A unitární nad $\mathbb{C}$), tedy $A = U \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \cdot U^*$, U unitární, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Tedy buď $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, potom λ_1, λ_2 mají různá znaménka, pak je to reflexe, když $\lambda_1 = \lambda_2$, pak je to otočení o 0 nebo π.

Nebo $\lambda_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi$ a $\lambda_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi$ a vlastní vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}}$. Vezmeme bázi $B = (\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{v} + \overline{\mathbf{v}}), \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}))$. Tato báze je ortonormální a $[f_A]_B^B$ je matice otočení. □

Poznámka
V $\mathbb{R}^3$ máme minimálně 1 reálný kořen, zbytek je jako v předchozím, tedy v $\mathbb{R}^3$ jsou to zase rotace a reflexe, tentokrát však i rotace s reflexí.

6.2 Singulární rozklad matice nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ (SVD)

Věta 6.8

Komplexní verze: Buď A komplexní matice typu $m \times n$ a hodnosti r. Pak existují ortonormální báze $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ prostoru $\mathbb{C}^n$ a $C = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ prostoru $\mathbb{C}^m$ a $\sigma_1, ., \sigma_r$ kladná reálná čísla taková, že

$$[f_A]_C^B = (\operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)|0)\,.$$

Reálná verze: Buď A reálná matice typu $m \times n$ a hodnosti r. Pak existují ortonormální báze $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ a $C = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ prostoru $\mathbb{R}^m$ a $\sigma_1, ., \sigma_r$ kladná reálná čísla taková, že

$$[f_A]_C^B = (\operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)|0)\,.$$

Maticové verze: Viz skripta.

Pozorování
Buď $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ lineární operátor a B ortonormální báze $\mathbb{C}^n$ a C ortonormální báze $\mathbb{C}^m$. Uvažujme $f_{A^*} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$. Pak $[f_{A^*}]_B^C = \left([f_A]_C^B\right)^*$.

Důkaz

$$A = [f_A]_K^K = [\mathrm{id}]_K^C [f_A]_C^B [\mathrm{id}]_B^K,$$
$$A^* = [f_{A^*}]_K^K = [\mathrm{id}]_K^B [f_{A^*}]_B^C [\mathrm{id}]_C^K.$$

Jelikož jsou báze ortogonální, tak matice přechodu jsou k sobě hermitovsky sdružené: $[f_A]_C^B = U^*AV$, $[f_{A^*}] = V^*A^*U = (U^*AV)^* = [f_A]_C^B$. □

Definice 6.2

Buď $A \in 2C^{m\times n}$. Pak singulárními hodnotami matice A rozumíme druhé odmocniny vlastních čísel matice A^*A.

Důkaz (Věty výše)
Označme $\mathrm{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = (\mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)|0)$.Uvažujme vlastní čísla $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \lambda_n$ matice A^*A řádu n. Za bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ zvolíme ortonormální bázi vlastních vektorů A^*A, kde $\mathbf{v}_i$ je příslušný λ_i. Tedy $[f_{A^*A}]_B^B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$.

Pro $i \in [r]$ položíme $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. Aby mohl platit závěr věty, musí být $\forall i \in [r] : A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$. Čili pro $i \in [r]$ položíme $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i$. Ověříme, že $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ je ortonormální:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = (\frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i) \cdot (\frac{1}{\sigma_j} A\mathbf{v}_j) = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}(A\mathbf{v}_i \cdot A\mathbf{v}_j) = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}((A^*A)\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j) = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}(\lambda_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j).$$

Jelikož B je ortogonální, tak výsledkem tohoto bude nula, pokud $i \neq j$, a $\frac{\lambda_i}{\sigma_i^2} = 1$, pokud $i = j$. Následně doplníme $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ na ortonormální bázi $C = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ prostoru $\mathbb{C}^m$. Tedy pro $i \leq r : f_A(\mathbf{v}_i) = \sigma_i \mathbf{u}_i$. Pro $i > r : [f_A(\mathbf{v}_i)]_C = 0$. Tedy $[f_A]_C^B = \mathrm{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$. □

Pozorování
Je-li A normální, pak singulární hodnoty jsou $\sigma_i = |\mu_i|$, kde $\mu_1, \dots, \mu_r$ jsou nenulová vlastní čísla A. Je-li navíc A pozitivně definitní, pak jsou toto všechna vlastní čísla.

6.3 Aplikace SVD

Definice 6.3 (Spektrální norma matice)

Mějme $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$. Potom

$$||A|| := \max\left\{\frac{||A\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||} | \mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{o}\}\right\} = \max\{||A\mathbf{y}|| : \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n, ||\mathbf{y}|| = 1\}$$

se nazývá spektrální norma matice.

Tvrzení 6.9

Buď $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ (nebo $\mathbb{R}^{m\times n}$). Pak $\forall \mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : ||A\mathbf{x}|| \leq \sigma_1||\mathbf{x}||$, kde σ_1 je největší singulární hodnota A, rovnost nastane přesně pro vlastní vektory $\mathbf{x}$ matice A^*A příslušné σ_1^2. Speciálně $||A|| = \sigma_1$.

Důkaz

Buď $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, položme $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$, $[f_A]_C^B = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, B, C ortonormální. Pak

$$||A\mathbf{y}|| = ||[A]C^B \cdot [y]_B|| = ||\sigma_1 y_1 + \ldots + \sigma_r y_r|| \leq ||\sigma_1 y_1 + \ldots + \sigma_1 y_r|| = \sigma_1||\mathbf{y}||.$$

□

7 Bilineární a kvadratické formy

Definice 7.1 (Bilineární forma)

Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$. Bilineární formou na $\mathbf{V}$ rozumíme zobrazení $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{T}$, které splňuje:

$$(BL1)\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}\ \forall t \in \mathbb{T} : f(t\mathbf{v}, \mathbf{w}) = t \cdot f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}, t\mathbf{w}),$$

$$(BL2)\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{W} : f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \wedge f(\mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + f(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

Definice 7.2 (Kvadratická forma)

Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a $f : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \to \mathbb{T}$ bilineární forma. Pak kvadratickou formou na $\mathbf{V}$ vytvořenou bilineární formou f (též příslušnou formě f) rozumíme zobrazení $f_2 : \mathbf{V} \to \mathbb{T}$, $\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}, \mathbf{v})$

7.1 Matice bilineární formy

Definice 7.3

Buď $\mathbf{V}$ konečně generovaný vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ s bází $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Buď $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{T}$ bilineární forma. Buď $\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, $\mathbf{w} = y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_n\mathbf{v}_n$. Potom $f(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ lze vyjádřit maticí $(\sum_{i=1}^n a_{ij}x_iy_j)$. Této matici říkáme matice bilineární formy f vzhledem k bázi B. $([f]_B = (f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j))_{i,j})$.