Organizační úvod

Poznámka

1 Úvod

Definice 1.1 (Diferenciální rovnice)

Diferenciální rovnice je rovnice, která obsahuje derivaci.

Poznámka (Motivace)
Fyzika (např. pružina: $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$), ekonomie (např. rovnice majetku?: $k' = \alpha \cdot k - c(t)$), biologie (např. model dravec-kořist: $d' = \alpha \cdot d \cdot \cdot k - \beta \cdot d \wedge k' = \gamma \cdot k - \delta \cdot d \cdot k$).

Poznámka (Co nás zajímá na DR)
Přesné řešení (často neumíme spočítat), existence a jednoznačnost řešení, jaké vlastnosti má řešení.

Poznámka (Předpoklady)
$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times I$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $x' = f(x,t)$. $I \subset \mathbb{R}$.

Definice 1.2 (Obyčená diferenciální rovnice, řešení)

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice $x' = f(x,t)$ z předchozí poznámky.

Funkce $x : I \to \mathbb{R}^n$ je řešení DR, jestliže

- $\forall t \in I : (x(t),t) \in \Omega$,
- $\forall t \in I$ existuje vlastní derivace $x'(t)$,
- $\forall t \in I$ platí $x'(t) = f(x(t),t)$.

Poznámka
První dvě podmínky jsou jen existenční podmínky k rovnici ve třetím bodě.

Typicky má DR nekonečně mnoho řešení, přidáváme proto počáteční podmínku $(x_0,t_0) \in \Omega$, $t_0 \in I$.

Lemma 1.1

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $x : I \to \mathbb{R}^n$ spojitou a takovou, že graf x ($\{(x(t), t) | t \in I\}$) leží v Ω. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- *x je řešení DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$;*
- *$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds \ \forall t \in I$.*

Důkaz

„$\implies$“: x a f je spojitá, tedy $x' = f(x(t), t)$ je spojitá, tj. $x \in C^1(I) \implies \int_{t_0}^{t} x'(s) ds = x(t) - x(t_0)$.

„$\impliedby$“: jelikož f i s je spojitá, tak integral je diferencovatelný a $x(t)$ je spojitá, tedy

$$x'(t) = 0 + f(x(t), t) \wedge x(t_0) = t_0 + 0.$$

$\square$

Věta 1.2 (Peanova věta o lokální existenci)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $(x_0, t_0) \in \Omega$. Potom $\exists\ \delta > 0$ a funkce $x : B(t_0, \delta) \to \mathbb{R}^n$ taková, která je řešení DR a splňuje počáteční podmínku. (Stačí spojitá f a kompaktní Ω.)

Tvrzení 1.3 (Pomocné tvrzení)

Pokud $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ a f je omezená na Ω, pak $\forall T$ existuje řešení DR x na $[t_0 - T, t_0 + T]$ splňující počáteční podmínku.

Důkaz

Když x_λ je definována na $[t_0 - \lambda, t]$, pak pravá strana má smysl $\forall t \in [t_0, t_0 + \lambda]$ tím pádem pravá strana integrálního tvaru má smysl $\forall t \in [t_0, t+\lambda]$, tím pádem definujeme x_λ na $[t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$.

Nyní definujme $M := \left\{x_n|_{[t_0,t_0+T]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a ověříme, že M splňuje podmínky Arzela-Ascoliho věty:

$$|x_\lambda(t)| \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(x_\lambda(s-\lambda))|ds \leqslant |x_0| + ||f||_\infty \cdot |t - t_0| \leqslant |x_0| + ||f||_a \cdot T,$$

$$|x_\lambda(t) - x_\lambda(\tau)| = \left|\int_{\tau}^{t} f(x_\lambda(s-\lambda), s)ds\right| \leqslant ||f||_\infty \cdot |t - \tau|.$$

Podle AA věty tedy existuje podposloupnost M, která konverguje stejnoměrně. Limitu si označme x, podposloupnost x_{n_k}.

Chceme dokázat, že x je řešení DR: TODO!!!

$$\lambda_k := \frac{1?}{n_k}$$

$\square$

Důkaz

Pro $\overline{K_1} \subset K_2$, $\overline{K_2} \subset \Omega$, $(x_0, t_0) \in K$, K_1 a K_2 kompaktní definujeme

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} 1, & (x,t) \in K_1, \\ 0, & (x,t) \in \Omega \backslash \overline{K_2}, \end{cases}$$

kterou spojitě dodefinujeme, a

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) \cdot \varphi(x,t), & (x,t) \in \Omega \\ 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \Omega. \end{cases}$$

Dle prvního kroku (TODO?) $\exists \tilde{x}(t)$, $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\tilde{x}'(t) = \tilde{f}(\tilde{x}(t), t)$, $\tilde{x}(t_0) = x_0$. $\tilde{x}$ je spojitá funkce $\implies$ $\exists \delta > 0$ tak, že graf funkce $\tilde{x}|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$ leží v K_1. Na K je $\tilde{f} = f$, tedy $\tilde{x}'(t) = f(\tilde{x}(t), t)$, $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. $\square$

1.1 Jednoznačnost řešení

Definice 1.3 (Lokální jednoznačnost, globální jednoznačnost)

Řekneme, že DR má vlastnost

- lokální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení $(x, I), (y, J)$ a $t_0 \in I \cap J$, $x(t_0) = y(t_0)$ pak $\exists \delta > 0 \ \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $x(t) = y(t)$,
- globální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení $(x, I), (y, J)$ a $t_0 \in I \cap J$, $x(t_0) = y(t_0)$, pak $\forall t \in I \cap J : x(t) = y(t)$.

Tvrzení 1.4

Globální jednoznačnost je ekvivalentní lokální jednoznačnosti.

Důkaz

„ $\Longrightarrow$ “ je triviální. „ $\Longleftarrow$ “: Pro spor předpokládejme $\exists t_1 \in I \cap J,\ x(t_1) \neq y(t_1)$. BÚNO $t_1 > t_0$. Definujme

$$M := \{T \in I \cap J, t > t_0, x(t) \neq y(t)\} \neq \varnothing, \qquad t_2 = \inf M.$$

Víme $x(t_2) = \lim_{t \to t_2^-} x(t) = \lim_{t \to t_2^-} y(t) = y(t_2)$. Podíváme se lokální jednoznačností na bod t_2. Tam existuje $\sigma > 0$ tak, že $\forall t \in (t_2 - \sigma, t_2 + \sigma) : x(t) = y(t)$. ↯. □

Definice 1.4 (Lokálně lipschitzovská)

Řekneme, že funkce $f = (x, t)$ je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x, jestliže

$$\forall (x_0, t_0) \in \Omega \ \exists \delta > 0 \ \exists L > 0 \ \forall t \in \mathcal{U}_\delta(t_0) \ \forall x, y \in \mathcal{U}_\delta(x_0) : |f(x, t) - f(y, t)| \leqslant L \cdot |x - y|$$

Věta 1.5 (Peanova věta o jednoznačnosti)

Buď f lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x, pak DR má v Ω vlastnost lokální jednoznačnost.

Důkaz

Ať $x(t), y(t)$ jsou řešení. $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$, $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds$. $x(t) - y(t) = \int_{t_0}^t (f(x(s), s) - f(y(s), s))\, ds$. Vezmeme $\sigma > 0$. Grafy $x|_{[t-\sigma]}, y|_{[t-\delta, t+\delta]}$ leží v δ-okolí (x_0, t_0).

$$\forall s \in [t - \sigma, t_0 + \sigma] : |f(x(s), s) - f(y(s), s)| \leqslant L \cdot |x(s) - y(x)|.$$

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \int_{t_0}^t |f(x(s), s) - f(y(s), s)| ds \leqslant \int_{t_0}^t L \cdot |x(s) - y(s)| ds, \qquad t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$$

$$\leqslant L \max_{s \in [t - \sigma, t + \sigma]} |x(s) - y(s)| \cdot \sigma$$

□

Důsledek
Jestliže f je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x a $(x_0, t_0) \in \Omega$, pak

$$\exists \delta > 0\ \exists! x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n \text{ řešení DR s počáteční podmínkou } x(t_0) = x_0.$$

Důkaz
Peanova věta o jednoznačnosti. □

Tvrzení 1.6

Pokud $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ jsou spojité v Ω, $j \in [n]$, pak f je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x.

Důkaz

$$h(s) := f(x + \ s(y - x), t), s \in [0, 1], h(0) = f(x, t), h(1) = f(y, t).$$

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(s) ds = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x{+}?{-}?) \cdot (y_j - x_j) ds$$

$$\forall (x_0, t_0) \in \Omega\ \exists \mathcal{U}(x_0)\ \exists \mathcal{U}(t_0) M = \overline{\mathcal{U}(x_0)} \times \overline{\mathcal{U}(t_0)} \subset \Omega,$$

M je kompaktní, tedy $\exists K > 0\ \forall (x, t) \in M : \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant K$. Tedy

$$|h(1) - h(0)| \leqslant \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot |(x + s(y - x))| \cdot |y_i - x_i| ds \leqslant nK \cdot \max |y_i - x_i| \leqslant nK|x - y|.$$

□

2 Maximální řešení

Definice 2.1 (Prodloužení řešení, maximální řešení)

Řešení $(\tilde{x}, \tilde{I})$ je prodloužením řešení (x, I), jestliže $\tilde{I} \supset I$ a $\forall t \in I : x(t) - \tilde{x}()$.

Řešení je maximální, pokud neexistuje netriviální prodloužení.

Věta 2.1 (O maximálním prodloužení)

Každé řešení (x, I) má alespoň jedno maximální prodloužení.

Důkaz
Ať M je množina všech prodloužení (x, I). Řekněme, že $(\tilde{x}, \tilde{I}) \leqslant (\hat{x}, \hat{I})$ právě tehdy, když $(\hat{x}, \hat{I})$ je prodloužení $(\tilde{x}, \tilde{I})$.

Ať $N \subset M$ je řetězec (množina, na které je $\leqslant$ lineární). Označme $I_0 = \bigcup_{(\tilde{x},\tilde{I})\in N} \tilde{I}$ a definujme $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ z toho, že $t \in I_0 \implies \exists(\tilde{x}, \tilde{I}) \in N$, $t \in \tilde{I}$, jako $x(t) = \tilde{x}(t)$.

Z Zornova lemmatu pak vyplývá, že existuje maximální řešení. □

Lemma 2.2

(x, I) řeší DR, $I = (a, b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \infty$. Pak řešení x lze prodloužit za bod b, když zároveň

- *$b < \infty$;*
- *$\exists \lim_{t\to b} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$;*
- *$(x_0, b \in \Omega)$.*

Důkaz
„ $\implies$ “ zřejmě, „ $\impliedby$ “: Uvažujme DR s počáteční podmínkou $x(b) = x_0$. Dle Peanovy věty $\exists \tilde{x} : (b - \delta, b + \delta) \to \mathbb{R}^n$. $x_1(t) = x(t)$, pokud $t \in (a, b)$, $\tilde{x}(t)$ jinak. x_1 tedy splňuje DR na (a, b) a $(b, b + \delta)$. Zbývá ověřit, že $x_1'(b) = f(x_1(b), b)$:

- x_1 je spojitá v b, neboť $\lim_{t\to b^-} x_1(t) = x_0 = \lim_{t\to b^+} x_1(t) = \tilde{x}(t)$.
- $\exists \lim_{t\to b^-} x_1'(t) = \lim_{t\to b^-} f(x(t), t) = f(x(b), b) = f(x_0, b)$.
- $\exists \lim_{t\to b^+} x_1'(t) = \lim_{t\to b^+} f(\tilde{x}(t), t) = f(\tilde{x}(b), b) = f(x_0, b_0)$.

□

Věta 2.3 (O opuštění kompaktu)

Buď (x, I) maximální řešení DR. Nechť $K \subset \Omega$ kompaktní a $\exists t_0 : (x(t_0), t_0) \in K$. Pak $\exists t_1 > t_0$, $t_1 \in I$, že $(x(t_1), t_1) \in \Omega \backslash K$. $\exists t_2 \in I_2$, $t_2 < t_0$, že $(x(t_2), t_2) \in \Omega \backslash K$.

Důkaz
Pro spor předpokládejme, že $\forall t_1 > t_0, t_1 \in I : (x(t_1), t_1) \in K$. Podle předchozí věty stačí dokázat $b < \infty$ (kdyby ne, tak K není kompakt), $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \nearrow b$, $\{(x(t_k), t_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ vybereme konvergentní podposloupnost $(x(t_{k_n}), t_{k_n}) \to (x_0, t_0)$. Následně ověříme BC podmínku: víme $x(s) - x(t) = x'(\xi)(s-t), \xi \in (s,t)$, tedy

$$|x(s) - x(t)| \leqslant |x'(\xi)| \cdot |s-t| = |f(x(\xi), \xi)| \cdot |s-t| \leqslant C \cdot |s-t|.$$

Zřejmě $(x_0, b) \in K \subset \Omega$, protože z kompaktu se nedá vykonvergovat. □

3 Závislost řešení na počáteční podmínce

Definice 3.1

Buď f v Ω lokálně Lipschitzovská vzhledem k x_0. Řešící funkcí (DR) nazveme funkci $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n : (t, t_0, x_0) \mapsto x(t)$, kde x je maximální řešení odpovídající DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$.

Věta 3.1 (Granwallovo Lemma)

Nechť $g, w : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g(t), w(t) \geqslant 0$, $\forall t \in I_0$. *Nechť* $t_0 \in I, K \geqslant 0$ *a* $\forall t \in I : w(t) \leqslant K + \left|\int_{t_0}^t w(s)g(s)ds\right|$. *Potom*

$$w(t) \leqslant K \cdot \exp\left(\left|\int_{t_0}^t g(s)ds\right|\right).$$

Důkaz
BÚNO $t > t_0$. Vezmeme $\varepsilon > 0$. Definujeme $\Phi(t) = K + \varepsilon + \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds$. $\Phi'(t) = w(t) \cdot g(t)$.

$$\Phi'(t) \leqslant g(t)\left(K + \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds\right) \leqslant g(t)\Phi(t), \qquad \forall t \in (t_0, \sup I).$$

$$\forall t \in (t_0, \sup I) : \Phi(t) \geqslant 0. \qquad \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leqslant g(t), \qquad \int_{t_0}^t \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)}ds \leqslant \int_{t_0}^t g(s)ds.$$

$$\Phi(t_0) = K + \varepsilon, \qquad \frac{\Phi(t)}{K+\varepsilon} \leqslant \exp\left(\int_{t_0}^t g(s)ds\right),$$

$$\Phi(t) \leqslant (K+\varepsilon)\exp\left(\int_{t_0}^t g(s)ds\right) \qquad \forall \varepsilon > 0 \implies \Phi(t) \leqslant K \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t g(s)ds\right).$$

□

Důsledek
Nechť f je globálně L-lipschitzovská v první souřadnici. Nechť x a y jsou řešení DR na

intervalu I s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Potom

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x_0 - y_0| \cdot e^{L\cdot|t-t_0|}.$$

Důkaz

$$x'(t) = f(x(t), t), \qquad y'(t) = f(y(t), t).$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds, \qquad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s)ds,$$

$$x(t) - y(t) = x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} (f(x(t), t) - f(y(s), s))ds,$$

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x_0 - y_0| + \left|\int_{t_0}^{t} L \cdot (x(s) - y(s))ds\right|,$$

Z Granwallova lemmatu potom $|x(t) - y(t)| \leqslant |x_0 - y_0| \cdot \exp(L \cdot |t - t_0|)$. □

Věta 3.2

Buď G množina z definice řešící funkce, f lokálně lipschitzovská na G. Pak $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ otevřená a φ je spojitá v G.

Důkaz

Vezmeme $(t, t_0, x_0) \in G$. Buď x maximální řešení DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. $\mathcal{D}_x \supset [t_0, t]$. BÚNO $t > t_0$.

$$K_\delta := \left\{(y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} | s \in [t_0 - \delta, t + \delta], |y - x(s)| \leqslant \delta\right\}.$$

Vezmeme $\varepsilon > 0$. Vezmeme $y_0 \in \mathbb{R}^n, s_0 \in \mathbb{R}$, $|y_0 - x_0| < \varepsilon$, $|t_0 - s_0| < \varepsilon$. Definujeme y maximální řešení splňující $y(s_0) = y_0$. Co znamená, že $(\tilde{t}, s_0, y_0) \in G$? $\mathcal{D}_y \supset [s_0, \tilde{t}]$. Potřebujeme dokázat, že y je definováno na K_δ. Odhadneme

$$|y(s_0)-x(s_0)| \leqslant |y(s_0)-x(t_0)|+|x(t_0)-x(s_0)| = |y_0-x_0|+|x(t_0)-x(s_0)| \leqslant \varepsilon+x_0|t_0-s_0| \leqslant \varepsilon\cdot(1+c_0)$$

$$s \geqslant t_0 : |x(s) - y(s)| \leqslant |x(s_0) - y(s_0)|e^{L|s-s_0|} \leqslant \varepsilon(1 + c_0)e^{L\cdot|s-s_0|}.$$

Máme, že $\forall s > t_0 : |x(s) - y(s)| \leqslant \frac{\delta}{2}$, tedy y neopustí K_δ přes hranici $\implies$ y existuje až do času $t + \delta_0$, tj. G je otevřená.

Nyní „Φ je spojitá“: $(t, t_0, x_0), (s, s_0, y_0) \in G$:

$$|\varphi(t, t_0, x_0)-\varphi(s, s_0, y_0)| = |x(t)-y(s)| \leqslant |x(t)-x(s)|+|x(s)-y(s)| \leqslant c_0|t-s|+|x(s_0)-y(s_0)|e^{L\cdot|s-s_0|} \leqslant T$$

□

Věta 3.3 (Věta o derivování řešení v počáteční podmínce?)

Buď f je třídy C^1 vzhledem k x, φ je řešící funkce diferenciální rovnice. Potom $\forall(t, t_0, x_0) \in$

G a $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, |w| = 1$, existuje derivace φ podle x_0 ve směru w v bodě (t, t_0, x_0), tj.

$$D_w\varphi(t, t_0, x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0)}{h}.$$

Označíme-li pro pevné (t_0, x_0): $x(t) := \varphi(t, t_0, x_0)$, $u(t) := D_w\varphi(t, t_0, x_0)$, pak platí

$$u'(t) = [\nabla_x f(x(t), t)]u(t), \qquad \textit{(tzv. rovnice ve variacích)}$$

$$u(t_0) = w.$$

Důkaz
Vezmeme $(x_0, t_0) \in \Omega$. Definujeme $x(t) := \varphi(t, t_0, x_0)$, $y_h(t) := \varphi(t, t_0, x_0 + hw)$. To znamená, že

$$\eta_h(x) = \frac{\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0)}{h} - u(t) = \frac{y_h(t) - x(t)}{h} - u(t).$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds, \qquad y_h(t) = x_0 + h \cdot w + \int_{t_0}^{t} f(y_h(s), s) ds.$$

$$y_h(t) - x(t) = h \cdot w + \int_{t_0}^{t} f(y_h(s), s) - f(x(s), s) ds.$$

Pro nějaké s, h $g(\vartheta) = f(x(s) + \vartheta(y_h(s) - x(s)), s)$, tedy $g(1) = f(y_h(s), s)$, $g(0) = f(x(s), s)$,

$$y_h(t) - x(t) = h \cdot w + \int_{t_0}^{t} g(1) - g(0) ds = h \cdot w + \int_{t_0}^{t} \int_{0}^{1} g'(\vartheta) d\vartheta ds =$$

$$= h \cdot w + \int_{t_0}^{t} \int_{0}^{1} \nabla_x f(x(u) + \vartheta(y_h(s) - x(s)), s) \cdot (y_h(s) - x(s)) d\vartheta ds.$$

Buď $u(t)$ maximální řešení $u'(t) = [\nabla_x f(x(t), t)] u(t), u(t_0) = w$. Tj.

$$u(t) = w + \int_{t_0}^{t} \nabla_x f(x(s), s) u(s) ds = w + \int_{t_0}^{t} \int_{0}^{1} \nabla_x f(x(s), s) u(s) d\vartheta ds.$$

Odečteme od předcházejícího a dostaneme

$$\eta_h(x) = \int_{t_0}^{t} [\nabla_x f(x(s), s)] \eta_h(s) ds + \int_{t_0}^{t} \int_{0}^{1} \left[\nabla_x f(x(s) + \vartheta(y_h(s) - x(s))) - \nabla_x f(x(s), s)\right] (y_h(s) - x(s)) d\vartheta ds$$

$$|\eta_h(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} C \cdot |\eta_h(s)| ds + \max_{\substack{s \in [t_0, t], \\ \vartheta \in [0,1]}} |\nabla_x f(x(s) + \vartheta(y_n(s) - x(s)), s) - \nabla_x f(x(s), s)| \cdot \int_{t_0}^{t} e^{L \cdot s - t_0} ds.$$

Z důsledku předpředchozí věty

$$|y_h(s) - x(s)| \leqslant |y_h(t_0) - x(t_0)| e^{L \cdot |s - t_0|} = |hw| e^{L \cdot |s - t_0|} = |h| e^{L \cdot |s - t_0|}.$$

$$|\eta_h(t)| \leqslant K_h \cdot C_2 + \int_{t_0}^{t} C \cdot (\eta_h(s)) ds,$$

kde $K_h \to 0$. Z G. lemmatu pak plyne $|\eta_h(t) \leqslant K_n \cdot C_2 \cdot \exp[C \cdot |t - t_0|]| \implies \lim_{h \to 0} \eta_h(t) = 0$. □

4 Lineární ODR

Definice 4.1 (Lineární ODR)

$x' = A(t)x + b(t)$, $A : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ spojité funkce.

Věta 4.1

Nechť $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pak existuje právě jedno maximální řešení x (LODR) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. Funkce x je definovaná na (α, β).

Důkaz
Stačí dokázat, že x je definováno na celém (α, β). Předpokládejme, že x je definované na (a, b), BÚNO $b < \beta$, $t_0 \in [a, b]$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + f(s)]\, ds,$$

$$|x(t)| \leqslant |x_0| + \max_{s \in [t_0, f]} |A(s)| \int_{t_0}^{t} |x(s)| ds + \max_{s \in [t_0, b]} |f(s)| \cdot |t - t_0|.$$

Z G. lemmatu plyne $|x(t)| \leqslant (|x_0| + \max_{s \in [t_0, b]} |f_s| \cdot |f - t_0|) e^{\max_{s \in [t_0, b]} |A(s)| \cdot |f - t_0|}$. Pak na intervalu (t_0, b) x neopustí nějaký kompakt. □

Definice 4.2 (Homogenní rovnice)

LODR nazveme homogenní, pokud $b \equiv 0$, tedy $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$.

Věta 4.2

Množina řešení H je vektorový prostor dimenze n.

Důkaz
Součet řešení je řešení zřejmě. Stejně tak násobek. Dimenze n se dokazuje tak, že vezmeme bod a řešení, která mají každé v tomto bodě jednu funkci 1 a ostatní 0. To jsou zřejmě LN řešení a dá se z nich složit libovolné jiné, protože máme jednoznačnost řešení s konkrétní počáteční podmínkou. Takže další řešení poskládáme z těchto. □

Definice 4.3 (Fundamentální řešení)

Fundamentálním řešením homogenní LODR nazveme každou bázi prostoru řešení. Budeme jej značit

$$\Phi(t) = (\varphi(t), \ldots, \varphi(t)).$$

Poznámka
Zřejmě $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.

Definice 4.4 (Wronského determinant (Wronskián))

$$W(t) = \det \Phi(t).$$

Věta 4.3 (Liouvilleova věta)

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s) ds\right).$$

Důkaz
Chceme dokázat, že $W'(t) = W(t) \cdot (\operatorname{tr} A(t))$. Rozepsáním. □

Věta 4.4 (Variace konstant)

Nechť $x' = A(t)x + b(t)$, $A : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ spojité, je LODR, $\Phi(t)$ fundamentální matice homogenní rovnice $x' = A(t)x$. Potom řešení LODR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$) je dáno předpisem

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

Poznámka
Když budeme hledat řešení LODR ve tvaru $\varphi(t) \cdot C(t)$, dostaneme se k tomuto vzorci.

Důkaz
Zderivujeme a s použitím $\Phi'(t) = A(t) \cdot \Phi(t)$:

$$x'(t) = \Phi(t) \cdot \Phi'(t_0) \cdot x_0 + \Phi'(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) \cdot f(s)ds + \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t) \cdot b(t) =$$

$$= A(t)\left(\Phi(t)\Phi^{-1}(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) \cdot f(s)ds\right) + b(t) = A(t)x + b(t).$$

Navíc zjevně $x(t_0) = x_0$. □

5 Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Definice 5.1 (Lineární rovnice s konstantními koeficienty (LODRKK))

$$x' = Ax + b(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n \text{ spojitá.}$$

Poznámka
Ukážeme, že pro $n \in \mathbb{N}$ je řešení homogenní soustavy LODRKK se dá napsat ve tvaru $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$.

Definice 5.2 (Norma matice)

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}. ||A|| := \sup \{|Ax| \mid x \in \mathbb{R}^n, |x| \leqslant 1\}.$$

Věta 5.1

Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak

1. $||A|| \geqslant 0$, $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
2. $||\lambda A|| = |\lambda| \cdot ||A||$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $||A + B|| \leqslant ||A|| + ||B||$;
4. $||AB|| \leqslant ||A|| \cdot ||B||$;
5. $|Av| \leqslant ||A|| \cdot |v|$, $v \in \mathbb{R}^n$;
6. $|Av| \geqslant \frac{|v|}{||A^{-1}||}$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, *je-li A regulární.*

Důkaz
1.–3. za domácí úkol. V 5. se pouze vezme norma, 2. a definice. Pro 4. dvakrát použijeme 5. Nakonec u 6. použijeme $y = Av$, tedy $v = A^{-1}y$, tím dostaneme samé tvrzení jako v 5.. □

Věta 5.2

Funkce $U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k, t \in \mathbb{R}$ je fundamentální matice homogenního řešení LODRKK, $U(\mathbf{o}) = I_0$.

Důkaz
Za prvé řada konverguje, neboť

$$||\frac{1}{k!}t^k A^k|| \leqslant \frac{|t|^k}{k!}||A||^k \wedge \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k}{k!}||A^k||K.$$

Za druhé $[U(t)]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k[A^k]_{ij}$ a poloměr konvergence je ∞, můžeme tedy derivovat člen po členu:

$$\frac{d}{dt}[U(t)]_{ij} = \ldots = A \cdot U(t).$$

□

Věta 5.3

Pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme $e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$. Potom platí:

- $e^{\lambda I} = e^{\lambda}\cdot I$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- *pokud* $AB = BA$, *pak* $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$;
- $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$, *pokud je* C *regulární;*
- $e^{-A} = \left(e^A\right)^{-1}$.

Důkaz
Rozepsáním? TODO □

Věta 5.4

$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, Λ je její Jordanův kanonický tvar, $A = C\Lambda C^{-1}$, a $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ je diagonála Λ. Potom $e^{tA} = Ce^{t\Lambda}C^{-1}$, kde:

$$e^{t\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{t\Lambda_1} & 0 & \ldots & \\ 0 & e^{t\Lambda_2} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & e^{t\Lambda_3} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1},\ldots,e^{t\lambda_n})\cdot P(t), P_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \\ 0 & 1 & t & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Důkaz
Jednoduchý, byl na cvičení. □

Důsledek
Buď $\overline{a} = \max\{\Re\lambda | \lambda \in eig(A)\}$, m je velikost Jordanovy buňky příslušná $\lambda : \Re\lambda = \overline{a}$. Pak $\det(A-\lambda I) = 0$:

$$\exists C > 0 : ||e^{tA}|| \leqslant C\cdot t^{n-1}\cdot e^{\overline{a}t}, \qquad \forall t \geqslant 0.$$

Obdobně když $\underline{a} = \min$, pak

$$\exists C > 0 : ||e^{tA}|| \leqslant C \cdot |t|^{n-1} \cdot e^{\underline{a}t}, \qquad \forall t \leqslant 0.$$

Důkaz
Operátorová norma $||.||$ je ekvivalentní normě $||A||_\infty$. Z toho a předchozí věty už to odhadneme... □

Důsledek
Je-li $\Re\lambda < 0$, $\forall \lambda \in eig(A)$, pak $e^{At}x_0 \to 0$, $t \to +\infty$.

Definice 5.3 (Stabilní, nestabilní a centrální podprostor)

$$\sigma_-(A) = \{\lambda \in eig(A) | \Re\lambda < 0\}, V_- = Lin\left\{v \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda I)^k v = 0, \lambda \in \sigma_-\right\}$$
$$\sigma_+(A) = \{\lambda \in eig(A) | \Re\lambda > 0\}, V_+ = Lin\left\{v \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda I)^k v = 0, \lambda \in \sigma_+\right\}$$
$$\sigma_0(A) = \{\lambda \in eig(A) | \Re\lambda = 0\}, V_0 = Lin\left\{v \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda I)^k v = 0, \lambda \in \sigma_0\right\}.$$

Věta 5.5

$$\exists C > 0, \alpha > 0\ \forall x_0 \in V_- : |e^{tA}x_0| \leqslant Ce^{-\alpha t}|x_0|, \qquad \forall t \geqslant 0.$$
$$\exists C > 0, \beta > 0\ \forall x_0 \in V_+ : |e^{tA}x_0| \geqslant Ce^{\beta t}|x_0|, \qquad \forall t \geqslant 0.$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \forall x_0 \in V_0 : |e^{tA}x_0| \leqslant Ce^{\varepsilon t}|x_0|, \qquad \forall t \geqslant 0.$$

Důkaz

$$x_0 \in V_- : |e^{tA}x_0| = |Ce^{t\Lambda} \cdot C^{-1}x_0| \leqslant ||Ce^{t\Lambda}|_{V_0}|| \leqslant ||C|| \cdot ||e^{t\Lambda}|_{V^{-1}}|| \cdot ||C^{-1}|| \cdot |x_0| \leqslant de^{-\alpha t}|x_0|.$$

TODO!!! (Příště?) □

6 Stabilita řešení

Definice 6.1 (Stabilní řešení, lokální atraktor, asymptotická stabilita)
DR $x' = f(x,t)$. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\{\mathbf{o}\} \times [\tau, +\infty) \subset \Omega$. Buď $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a lokálně lipschitzovská vzhledem k x a $f(0,t) = 0$, $\forall t > \tau$. Značme $I = [\tau, +\infty)$. Nulové řešení DR se nazývá:

- stabilní, jestliže $\forall t_0 \in I\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0 : |x_0| < \delta \implies |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon\ \forall t \geqslant t_0$;
- lokální atraktor, pokud $\forall t_0 \in I\ \exists \eta > 0\ \forall x_0 : |x_0| < \eta \implies \lim_{t \to +\infty} \varphi(t, t_0, x_0) = 0$;

- asymptoticky stabilní, pokud je stabilní a zároveň je lokálním atraktorem;
- uniformě stabilní, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t_0 \in I : |x_0| < \delta \implies |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon\ \forall t \geqslant t_0;$$

- uniformě asymptoticky stabilní, je-li uniformě stabilní a

$$\exists \eta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \tau > 0\ \forall t_0 \in I\ \forall x_0 : |x_0| < \eta \implies |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon\ \forall t \geqslant t_0 + \tau.$$

Důkaz (Předchozí věty)
První bod:

$$e^{tA} x_0 = V e^{tJ} V^{-1} x_0$$

$$x_0 \in X_-(A) \implies V^{-1} x_0 \in V^-(J)$$

TODO (další část jsem nechápal, pravděpodobně to byl důkaz implikace na předchozím řádku)

Z první rovnice:

$$|e^{tA} x_0| \leqslant ||V|| \cdot |e^{tJ}(V^{-1} x_0)| = ||V|| \cdot \left|e^{tJ}|_{X^-(J)} \cdot (V^{-1} x_0)\right| \leqslant ||V|| \cdot ||e^{tJ}|_{X^-(J)}|| \cdot |V^{-1} x_0| \leqslant ||V|| \cdot K \cdot e^{-\alpha t} \cdot ||V^{-1}|$$

Druhý bod: $x_0 \in X_+(A), e^{-At} y_0 = x_0$. $||x_0|| = ||e^{-At} y_0|| \leqslant e^{\beta t} C |y_0|$ podobně jako v prvním bodě. $y_0 = e^{At} x \in X_+(A)$, $t \geqslant 0$.

Třetí bod: $||e^{tJ}|_{X_C(J)}|| \leqslant K \cdot t^m$, m je maximální velikost Jordanovy buňky odpovídající vlastním číslům z $\sigma_0(A)_0$. □

Věta 6.1

Nulové řešení homogenní LODRKK $x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je

- *asymptoticky stabilní* $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(A) : \Re\lambda < 0$;
- *stabilní* $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(A) : \Re\lambda \leqslant 0$ *a Jordanovy buňky příslušné vlastním číslům s* $\Re\lambda = 0$ *mají velikost 0.*

Definice 6.2

x_0 je stabilní řešení $x' = f(x, t) \equiv 0$ je stabilní řešení $y' = g(y(t), t) = f(x_0(t) + y(t), t) - f(x_0(t), t)$. Obdobně pro další typy stability.

Lemma 6.2

Dána rovnice $x' = Ax + g(x, t)$. Nechť $||e^{tA}|| \leqslant K e^{-\alpha t}$, $\forall t \geqslant 0$, g spojitá v $\mathbb{R}^{n+1}$, $|g(x, t)| \leqslant \gamma \cdot |x|$, kde $\gamma < \frac{\alpha}{K}$. Pak nulové řešení je uniformě asymptoticky stabilní.

Důkaz

Buď x řešení, $x'(t) = A\cdot x(t)+g(x(t),t)$, což napíšeme jako $x'(t) = Ax(t)+f(t)$. Použijeme variaci konstant:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s)ds.$$

Odhadneme: $t > t_0 : |x(t)| \leqslant |e^{A(t-t_0)}x_0| + \int_{t_0}^{t} |e^{A(t-s)} f(s)|ds,$

$$|x(t)| \leqslant K \cdot e^{-\alpha(t-t_0)} \cdot |x_0| + K \cdot \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \cdot \gamma|x(s)|ds,$$

$$|e^{\alpha t}x(t)| \leqslant K \cdot e^{\alpha t_0} \cdot |x_0| + K \cdot \int_{t_0}^{t} e^{\alpha s} \cdot \gamma|x(s)|ds.$$

Z G. lemmatu:

$$|e^{\alpha t}x(t)| \leqslant K \cdot e^{\alpha t_0} \cdot |x_0| \cdot e^{K\gamma(t-t_0)},$$

$$|x(t)| \leqslant K \cdot |x_0| \cdot e^{(K\cdot y-\alpha)(t-t_0)}, t \geqslant t_0.$$

Tudíž je uniformě asymptoticky stabilní. □

Věta 6.3 (O linearizované stabilitě)

Dána rovnice (AR) $x' = f(x)$, kde f je třídy C^1 v okolí bodu x_0. Nechť $f(x_0) = 0$ a $A = \nabla f(x)$ splňuje $\Re\lambda < 0$ $\forall\lambda \in \sigma(A)$. Pak $x(t) \equiv x_0$ je uniformě asymptoticky stabilní.

Pokud A splňuje $\exists\lambda \in \sigma(A)$, $\Re\lambda > 0$, pak $x(t) \equiv x_0$ není stabilní.

Důkaz
Vize:

$$x' = f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) = 0 + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0).$$

Búno $x_0 = 0$. $x' = A \cdot x + g(x)$, kde $g(x) = f(x) - Ax_0$.

$$\exists \alpha > 0 \ \forall \lambda \in \sigma(A) : \Re\lambda < -\alpha_0.$$

Pak $|e^{At}| \leqslant K \cdot e^{-\alpha t}$, $\forall t \geqslant 0$. Pro g platí, že $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{|x|} = 0$, tedy $\exists \Delta > 0 : \forall x : |x| < \Delta \implies \frac{|g(x)|}{|x|} < \gamma$, kde $\gamma < \frac{\alpha}{K}$. Máme, že $|g(x)| < \gamma \cdot |x|$, $|x| < \Delta$.

Definujeme (tzv. seřazovací funkci)

$$\eta(s) = \begin{cases} 1, & s < \frac{\Delta}{2}, \\ \eta(s) \text{ spojitá, že} 0 < \eta(s) < 1, & s \in [\frac{\Delta}{2}, \Delta], \\ 0, s > \Delta. \end{cases}$$

Definujeme $h(x) := g(x) \cdot \eta(x)$. Platí, že $|h(x)| \leqslant \gamma \cdot |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Podívejme se na $y' = Ay + h(y)$. To splňuje předpoklady předchozího lemmatu, tudíž nulové řešení je uniformě stabilní, tedy stabilní. Tj. existuje $\delta > 0 : |y(t_0)| < \delta \implies |y(t)| \leqslant \frac{\Delta}{2}$ $\forall t \geqslant t_0$, tedy y splňuje $x' = Ax + g(x)$. A podle předchozí věty je x uniformě asymptoticky stabilní. □

TODO!!!

Definice 6.3

Ať $U_1, \dots, U_k$ jsou první integrály (AR). Řekneme, že jsou LN v bodě $x_0 \in \Omega$, pokud matice $\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)_{j\in[k], i\in[n]}$ má hodnost k.

Věta 6.4

Buďte $U_1, \dots, U_k$ první integrály (AR), LN v bodě x_0. Pak řešení procházející bodem x_0 lze lokálně popsat soustavou $n - k$ DR.

Důkaz
rank $\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_p}\right)_{j\in[k], p\in[n]} = k$. BÚNO rank $\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_p}\right)_{j\in[k], p\in[k]} = k$. $x = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$, $y = (x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$. □

Věta 6.5

$$f(x_0) \neq 0 \implies \exists n - 1 \text{ } LN \text{ prvních integrálů v } x_0.$$

Důkaz
BÚNO $f_n(x_0) \neq 0$. $x_0 = (y, a)$. $x'(t) = f(x(t))$, $x_0 = x(0) = (y, a)$. Chceme $\forall x \in O\ \exists! t\ \exists! z \in \mathbb{R}^{n-1} : \varphi(t, t_0 = 0, (z, a)) = x$.

Definujeme $\psi(t, z_1, \ldots, z_n) = \varphi(t, 0, z_1, \ldots, z_{n-1}, a)$.

TODO!!! □

7 Stabilita a Ljapunovské funkce

Definice 7.1

Mějme DR $x' = f(x, t)$, $f : \Omega \times [T, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $f(0, t) = 0, \forall t \in I$.

Spojitou funkci $\omega : \Omega \to [0, +\infty)$ nazveme pozitivně definitní, je-li $\omega(0) = 0$ a $\forall x \in \Omega \setminus \{\mathbf{o}\} : \omega(x) \neq 0$.

Funkci $V(t, x) : I \times \Omega \to [0, +\infty)$ nazveme ljapunovskou pro DR v Ω, je-li

- V spojitá, $\forall t \in I : V(t, 0) = 0$;
- funkce $t \mapsto V(t, x(t))$ je nerostoucí $\forall x$ řešení DR;
- existuje pozitivně definitní ω, že $V(t, x) \geqslant \omega(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall t \in I$.

Věta 7.1

Nechť DR má ljapunovskou funkci. Potom nulové řešení je stabilní.

Věta 7.2

Nechť DR má v Ω ljapunovskou funkci V, která splňuje následující podmínky: $\exists$ pozitivně definitní funkce ω, λ, η v Ω, že

- $\omega(\zeta) \leqslant V(t, \zeta) \leqslant \lambda(\zeta)\ \forall t \in I\ \forall \zeta \in \Omega$;
- $\frac{d}{dt}[V(t, x(t))] \leqslant -\eta(x(t)) \forall$ *řešení* x *v* Ω.

Potom je řešení $x = 0$ asymptoticky stabilní.

TODO!!!

Důkaz (Předpředchozí věty)
Chceme:

$$\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_0 : |x_0| < \delta \implies |x(t)| < \varepsilon\ \forall t \geqslant t_0.$$

To stačí dokázat pouze pro $\varepsilon > 0$, že $\overline{\mathcal{U}(0,\varepsilon)} \subset \Omega$. ω na $\{\zeta : |\zeta| = \varepsilon\}$ nabývá minima d, neboť je spojitá a to je kompaktní množina.

$V(t_0, 0) = 0$ a V je spojitá, tedy $\exists \delta > 0, \delta \leqslant \varepsilon\ \forall \zeta, |\zeta| < \delta : V(t_0, \zeta) < d$.

Pro spor nechť $\exists t_2 > t_0 : |x(t_2)| > \varepsilon$ a volíme $\forall x_0 : |x_0| < \delta : x(t_0) = x_0 \implies \exists t_1 : t_0 < t_1 < t_2 : |x(t_1) = \varepsilon|$.

$$\alpha > V(t_0, x(t_0)) \geqslant V(t_1, x(t_1)) \geqslant \omega(x(t_1)) \geqslant \alpha, \lightning.$$

□

Lemma 7.3

Buď ω pozitivně definitní funkce na Ω. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}(0,\varepsilon)$, $\overline{U(0,\varepsilon)} \subset \Omega$, $\omega(x_1) \to 0$. Pak $x_n \to 0$.

Důkaz

$$\forall \tilde{\varepsilon} < \varepsilon\ \exists N, x_n \subset U(0, \tilde{\varepsilon})$$

chceme. $K = \overline{\mathcal{U}(0,\varepsilon)} \backslash \mathcal{U}(0,\tilde{\varepsilon})$ je kompakt, tedy funkce ω na něm nabývá minima, $\exists x_0 \in K : \omega(x) \geqslant \omega(x_0) > 0\ \forall x \in K_0 \implies \exists N : \forall n > N : x_n \notin K \implies x_n \in U(0, \tilde{\varepsilon})$. □

Důkaz

$$\exists \varepsilon > 0\ \overline{\mathcal{U}(0,\varepsilon)} \subset \Omega\ \exists \delta > 0, \delta < \varepsilon\ \forall x_0 : |x_0| < \delta \implies |x(t)| < \varepsilon\ \forall t \geqslant t_0.$$

Bereme $\forall x_0 : |x_0| < \delta_0$. Stačí dokázat $x(t) \to 0$: 1. $V(t, x(t)) \searrow \geqslant 0 \implies \exists \lim_{t\to+\infty} V(t, x(t)) = a \geqslant 0$. 2. integrujeme:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds} V(s, x(s)) ds \leqslant -\int_{t_0}^{t} \eta(x(s)) ds, V(t, x(t)) + \int_{t_0}^{t} \eta(x(s)) ds \leqslant V(t_0, x(t_0)).$$

Tedy existuje $\int_{t_0}^{\infty} \eta(x(s)) ds < \infty \implies \exists \{t_k\}_{k=1}^{\infty} \nearrow.\ \eta(x(t_k)) \to 0, |x(t_k)| < \varepsilon (sta?) \implies x(t_k) \to 0$.

$$3. V(t_k, x(t_k)) \leqslant \lambda(x(t_k)) \wedge x(t_k) \to 0 \implies \lambda(x(t_k)) \to 0 \implies V(t_k, x(t_k)) \to 0 \implies a = 0.$$

4. $\omega(x(t)) \leqslant V(t, x(t))\ \forall t \geqslant t_0$. Chceme důkaz, že $\lim_{t\to\infty} \omega(x(t)) = 0$. Berme libovolnou posloupnost $\mathcal{F}_k \nearrow +\infty$. $\omega(x(\tilde{t}_k)) \leqslant V(\tilde{t}_k, x(\tilde{t})k)) \to 9$.

$$\lim_{k\to\infty} \omega(x(\tilde{t}_k)) = 0 \wedge |x(\tilde{t}_k)| < \varepsilon \implies x(\tilde{t}_k) \to 0 \implies \exists \lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

□

Poznámka (Zkouška)
Bude písemná část cca od devíti do půl jedenácté a pak bude od dvanácti.

Věta 7.4

Ať $x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní

- *0 je uniformě asymptoticky stabilní;*
- $\forall \lambda \in \sigma(A) : \Re\lambda < 0$*;*
- $\exists \alpha, c > 0 : ||e^{tA}|| \leqslant ce^{-\alpha t} \forall t \geqslant 0$*;*
- $\exists$ *symetrická pozitivně definitní B, že $A^T B + BA = -I$.*

Důkaz
Bez důkazu. □

8 Šturnova srovnávací věta

Poznámka

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0,$$

$t \in I$, I interval, a_j spojité v I, $a_0(t) \neq 0$, $t \in I$.

Buď $t_0 \in I$, $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R} \implies \exists! x$ splňující předchozí rovnici, $x(t_0) = \eta_0$, $x'(t_0) = \eta_1$.

Problém: rozložení nulových bodů netriviálního řešení.

Lemma 8.1

$x(t)$ netriviální řešení předchozí poznámky na I. Potom

- *je-li $x(t_0) = 0$, pak $x'(t_0) \neq 0$;*
- *je-li $x(t_0) = 0$, $y(t_0) = 0$ (y taktéž řešení), pak $\exists \lambda : y(t) = \lambda x(t)$ $\forall t \in I$;*
- *$N(x) = \{t \in I | x(t) = 0\}$ nemá v I hromadný bod.*

Důkaz
TODO!!! □

Poznámka
Každý kompakt má konečný průnik s $N(x)$, tj. má smysl mluvit o sousedních nulových bodech.

Lemma 8.2

Rovnice z poznámky výše (kde $\exists b'$ spojitá) je převoditelná na tvar $y''(t) + q(t)y(t) = 0$, $q \in C(I)$.

Důkaz

$$x''(t) + b_0(t)x'(t) + b_0(t)x(t) = 0, \qquad b_j = \frac{a_j}{a_0(t))}.$$

$$x(t) = v(t)\cdot y(t) \implies v(t)\cdot y''(t) + y'(t)(2v'(t) + b_1(t)v(t)) + y(t)(\overbrace{v''(t) + b_1(t)v'(t) + b_0(t)v(t)}^{q}) = 0.$$

Chceme vynulovat člen u $y'(t)$, tedy hledáme v, aby

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = -\frac{b_1(t)}{2}, \qquad v(t) = \exp(-\frac{1}{2}\int^t b_1(s)ds).$$

□

Lemma 8.3

Rovnici z poznámky výše lze převést na tvar $(p(t)x')' + q(t)x = 0$, $p \neq 0$, p, q, p' spojité.

Důkaz

$$p \cdot x'' + p'x' + qx = 0, \qquad x'' + \frac{p'}{p}x' + \frac{q}{p}x = 0,$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{a_1(t)}{a_0(t)} =: b_1(t), \qquad p(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t b_1(s)ds\right),$$

$$q(t) := p(t) \cdot \frac{a_2(t)}{a_0(t)}.$$

□

Věta 8.4

$(p(t)x')' + q_1(t)x = 0$, $\quad (p(t)y')' + q_2(t)yt = 0 \qquad$ *p, p', q_1, q_2 spojité v $I, p(t) > 0, q_2(t) \geqslant q_1(t)$ na I.*

Buď $t_1, t_2 \in I$ sousední nulové body x, $t_1 < t_2$, potom buď

$$\exists t_3 \in (t_1, t_2) : y(t_3) = 0,$$

nebo

$$q_1(t) = q_2(t)\ \forall t \in [t_1, t_2] \wedge \exists \lambda : y(t) = \lambda x(t).$$

Důkaz

$$(p(t)x'(t))'y(t) - (p(t)y'(t))'x(t) = (q_2(t) - q_1(t))x(t)y(t) \qquad \int$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [\dots] = \int_{t_1}^{t_2} (q_2(t) - q_1(t))x(t)y(t)dt \text{ per partes:}$$

$$[p(t)x'(t) \cdot y(t)]_{t_1}^{t_2} - [p(t) \cdot y'(t)x(t)]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} 0dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)(q_2(t) \cdot q_1(t))dt$$

$$p(t_2) \cdot x'(t_2) \cdot y(t_2) - p(t_1)x'(t_1)y(t_1) = \int \dots$$

Pro spor předpokládejme $y \neq 0$ na (t_1, t_2), potom BÚNO $y > 0$ na (t_1, t_2). BÚNO také tam $x > 0$. $x'(t_1) > 0$, $x'(t_2) < 0$. Pak

$$p(t_2) \cdot x'(t_2)y(t_2) = 0 \implies y(t_2) = 0 \implies p(y_1)x'(y_1)y(t_1) = 0, q_2(t) = q_1(t) \ \forall t \in (t_1, t_2).$$

□

Věta 8.5 (Šturnova)

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = 0, \qquad p, p', q \textit{ spojité na } I, p \neq 0 \textit{ na } I.$$

$\{u(t), v(t)\}$ *libovolný fundamentální systém funkcí této rovnice. Potom*

$$N(u) \cap N(v) = \emptyset;$$

$$\forall t_1, t_2 \in N(u) \ \exists t_3 \in (t_1, t_2) \cap N(v).$$

Důkaz

1. vztah sporem: $\exists t_0 \in N(u) \cap N(v) \implies u(t_0) = v(t_0) = 0 \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : v(t) = \lambda u(t)$.

2. vztah: předchozí věta: $q_1 = q_2$, $x = u$, $y = v$. Pak $\forall t_1, t_2 \in N(u) \ \exists t_3 \in N(v) : t_3 \in (t_1, t_2)$. □

9 Flaquetova teorie

Lemma 9.1

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det A \neq 0 \implies \exists B \in \mathbb{C}^{n \times n} : e^B = A. \qquad (B = \log A).$$

Důkaz

$$\log(I+M)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n M^n}{n}.$$

Pokud je M horní trojúhelníková s nulami na diagonále, tak je tento součet konečný. Pro obecnou A můžeme A rozdělit na Jordanovu matici a matici přechodů:

$$A=VJV^{-1}=V\cdot D(I+M)V^{-1}\implies \log A:=V(\log D+\log(I+M))V^{-1}$$

kde logaritmus je v komplexním oboru. □

Poznámka
Řešíme rovnici (LRP) $x'=A(t)x+b(t)$, $A\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n\times n})$, $T>0$, $A(t+T)=A(T)$, $b(t)=b(t+T)$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

- $\forall x_0\in\mathbb{R}^n:\exists!$ maximální řešení definované na celém $\mathbb{R}$.
- $x(t)$ je řešení homogenní rovnice $\implies$ $y(t)=x(t+T)$ je řešení homogenní rovnice.
- x je řešení homogenní rovnice, pak x je T-periodické $\Leftrightarrow x(0)=x(T)$.
- $\varphi(t)$ je fundamentální matice homogenní rovnice, $\varphi(0)=I$. x je řešení homogenní rovnice. Pak x je T-periodické $\Leftrightarrow \varphi(T)x_0=x_0$.

Definice 9.1

$C=\varphi(T)$ se nazývá maticí monotonie.

Věta 9.2

$\varphi(t)=Q(t)e^{Bt}$, kde $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $Q\in C(\mathbb{R},\mathbb{C}^{n\times n})$ T-periodická.

Důkaz
$\varphi(T)=C$ regulární, $\exists\tilde{B}:e^{\tilde{B}}=C=e^{TB}$, $B:=\frac{1}{T}\tilde{B}_0$. $\psi(t)=\varphi(t+T)C^{-1}$,

$$\psi'(t)=\varphi'(t+T)C^{-1}=A(t+T)\cdot\varphi'(t+T)C^{-1}=A(t)\cdot\psi(t).$$

$\psi(0)=\varphi(T)\cdot C^{-1}=I$. Z toho $\psi(t)=\varphi(t)$.

$$\varphi(t\ +T)\cdot\varphi(T^{-1})=\psi(t),\forall t,\varphi(t+T)=\varphi(t)\cdot\varphi(T).$$

□

Tvrzení 9.3

Pokud $\sigma(C)\subset\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, pak 0 je asymptoticky stabilním řešením.

Důkaz
TODO? □

Věta 9.4

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- *LRP má právě jedno T-periodické řešení.*
- *Homogenní rovnice má pouze triviální T-periodické řešení.*
- $1 \notin \sigma(C)$.

Důkaz
„Z prvního do druhého bodu“: Pro spor předpokládejme $y' = A(t)y$, $y \neq 0$. Pokud x je řešení LRP, pak $x + y$ je jiné řešení LRP, které je též T-periodické.

„Z druhého do prvního bodu“: Pro spor předpokládejme, že y_1, y_2 jsou T-periodická řešení LRP. Potom $y_1 - y_2$ je netriviální T-periodické řešení homogenní soustavy.

„Ze třetího do druhého bodu“: Pokud x je nenulové řešení homogenní rovnice. x je T-periodické $\Leftrightarrow$ $x(T) = x(0)$. $x(t) = \varphi(t)x_0$, $x_0 = x(T) = \varphi(T)x_0 = Cx_0$. Tedy x_0 je vlastní vektor příslušící vlastnímu číslu 1. $\lightning$.

„Z druhého do třetího bodu“: Kdyby 1 byla vlastní číslo, pak existuje nenulový vlastní vektor matice C jemu příslušející, tedy existuje nenulové řešení. □

Důsledek
Nulové řešení homogenní rovnice je stabilní (asymptoticky stabilní) $\Leftrightarrow$ nulové řešení rovnice $y' = By$ je stabilní (asymptoticky stabilní).

Důkaz
„ $\Longleftarrow$ “: $x(t) = \varphi(t)x_0 = Q(t) \cdot \underbrace{e^{Bt}x_0}_{y(t)}$. $||x(t)|| \leqslant ||Q(t)|| \cdot |y(t)| \leqslant \max_{t \in [0,T]} ||Q(t)|| \cdot ||y(t)|| \leqslant const|y(t)|$.

„ $\Longrightarrow$ “: $y(t) = Q(t)^{-1}x(t) \implies |y(t)| \leqslant \max_{[0,1]} |Q^{-1}(t)| \cdot |x(t)|$. □