Příklad (6. General boundary condition for the parabolic equation)
Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be a Lipschitz domain, $T > 0$ be given and denote $Q := (0,T) \times \Omega$. Assume that $\mathbb{A} \in L^\infty(Q; \mathbb{R}^{d\times d}_{sym})$ be elliptic matrix and $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, $b \in L^2(0,T; L^\infty(\partial\Omega))$ and $g \in L^2(0,T; L^2(\partial\Omega))$ be given. Consider the problem

$$\begin{aligned} \partial_t u - \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) &= f && \text{in } Q, \\ \mathbb{A}\nabla u \nu + bu &= g && \text{on } \Gamma := (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0) := u(0,x) &= u_0(x) && \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

where $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Goal 1: Define a notion of a weak solution for general setting. Assume that $b \geqslant 0$ and prove the existence and the uniqueness of the weak solution.

Řešení
Zvolíme nám již známou Gelfandovu trojici $V := W^{1,2}(\Omega) \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H := L^2(\Omega) \simeq H^* \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} V^*$. Potom řekneme, že u je slabé řešení, pokud $u \in L^2(0,T;V) \cap W^{1,2}(0,T;V^*)$, $u(0,\cdot) = u_0$ (z předchozího $C([0,T];V^*)$, tedy to dává smysl) a $\forall w \in V$ a skoro všechna $t \in (0,T)$:

$$\Big\langle \underbrace{\partial_t u}_{\in V^*}, w \Big\rangle_V + \int_\Omega \mathbb{A}\nabla u \nabla w + \int_{\partial\Omega} b \cdot u \cdot w = \Big\langle \underbrace{f}_{\in V^*}, w \Big\rangle_V + \Big\langle \underbrace{g}_{\in (L^2(\partial\Omega))^*}, w \Big\rangle_{L^2(\partial\Omega)}$$

Důkaz (Pro dostatečně hladké u je to totéž jako klasické řešení)
Pokud u je dostatečně hladké = dvakrát spojitě diferencovatelné, můžeme na prostřední člen vlevo použít per partes:

$$\int_\Omega \mathbb{A}\nabla u \nabla w = \int_{\partial\Omega} \mathbb{A}\nabla u \nu w - \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) w =$$

$$= (\mathbb{A}\nabla u\nu, w)_{L^2(\partial\Omega)} - (\operatorname{div}(\mathbb{A})\nabla u, w)_H = \langle \mathbb{A}\nabla u\nu, w\rangle_{L^2(\partial\Omega)} - \langle \operatorname{div}(\mathbb{A})\nabla u, w\rangle_V .$$

Stejně tak $\int_{\partial\Omega} b \cdot u \cdot w = \langle bu, w\rangle_{L^2(\partial\Omega)}$. Tedy když to rozdělíme, tak slabá formulace pro toto u je totéž jako $u(0) = u_0$ a:

$$\langle \partial_t u - \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) - f, w\rangle_V + \langle \mathbb{A}\nabla u\nu + bu - g, w\rangle_{L^2(\partial\Omega)} = 0.$$

Tedy pokud u je klasickým řešením, tak tyto rovnosti hned dostáváme, pokud je naopak slabým řešením, tak dosazením $w = 0$ na $\partial\Omega$ a potom obecného w nám vypadnou přesně zadané rovnice. □

Důkaz (Jednoznačnost)
$\forall t \in (0,T) : v(t) := u_1(t) - u_2(t) \in V$, tedy můžeme „otestovat $u(t)$“, tj. pro skoro všechna $t \in (0,T)$ dostaneme ze slabé formulace (a linearity aplikace duálu / integrálů)

$$0 = \langle \partial_t v(t), v(t) \rangle_V + \int_\Omega \mathbb{A} \nabla v(t) \nabla v(t) + \int_{\partial\Omega} b(t) \cdot v^2(t) \geqslant \langle \partial_t v(t), v(t) \rangle_V + \int_\Omega \mathbb{A} \nabla v(t) \nabla v(t).$$

S použitím elipticity $\mathbb{A}$ dostáváme

$$0 \geqslant \langle \partial_t v(t), v(t) \rangle_V + \int_\Omega \mathbb{A} \nabla v(t) \nabla v(t) \geqslant \langle \partial_t v(t), v(t) \rangle_V + \int_\Omega c_1 |\nabla v(t)|^2 \geqslant \langle \partial_t v(t), v(t) \rangle_V$$

Aplikujeme $\int_0^{t_1}$ na obě strany a použijeme integraci per partes pro Sobolevovy–Bochnerovy funkce a $v(0) = u_1(0) - u_2(0) = u_0 - u_0 = 0$:

$$\int_0^{t_1} 0 = 0 \geqslant \int_0^{t_1} \langle \partial_t v(t), v(t) \rangle = \frac{1}{2} \left((v(t_1), v(t_1))_H - (v(t_0), v(t_0))_H \right) = \frac{1}{2} \|v(t_1)\|^2_{L^2(\Omega)} + 0.$$

Tedy pro všechna t_1 je $\|v(t_1)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, tudíž $v = 0$ a $u_1 = u_2$. □

Důkaz (Existence)
Už víme, že $\exists$ báze $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ prostoru V, která je ortogonální ve V, ortonormální v $L^2(\Omega)$, tak, že pro pro projekci $P^N v = \sum_{j=1}^N a_j w_j := \sum_{j=1}^N \left(\int_\Omega v w_j \right) w_j$ platí, že $\|P^N v\|_V \leqslant c \cdot \|v\|_V$ (a $P^N v \to v$ pro $N \to \infty$). Hledáme „řešení“ ve tvaru $u^n(t,x) :=$„$P^n u(t)$“$= \sum_{j=1}^n a_j^n(t) w_j(x)$.

Počáteční podmínka nám říká, že $u^n(0) = P^n u_0$. Když dosadíme do rovnice slabého řešení, „otestujeme $w = w_j$“, dosadíme z definice u^n a použijeme ortogonálnost a ortonormálnost (a jejich kombinace) dostaneme (pro každé $j \in [n]$)

$$\partial_t a_j^n + \sum_k a_k^n \int_\Omega \mathbb{A} \nabla w_k \nabla w_j + \sum_k a_k^n \int_{\partial\Omega} b \cdot w_k \cdot w_j = \langle f, w_j \rangle_V + \langle g, w_j \rangle_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Pokud si to představíme jako $\partial_t a_j^n = f(t, \mathbf{a}^n(t))$, je f zřejmě spojité vůči $\mathbf{a}^n$ (dokonce lineární) a měřitelné vůči t (neboť všechny funkce jsou z měřitelných prostorů). Navíc (z Höldera, linearity integrálu a Trace theorem) $\int_{t_1}^{t_2} |f(t, \mathbf{y})| \leqslant$

$$\leqslant \sum_k y_k \cdot \Big(\|A\|_{L^\infty(Q)} \cdot \|\nabla w_k\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla w_j\|_{L^2(\Omega)} + \underbrace{\big\| \|b\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \big\|_{L^1(t_1,t_2)}}_{\leqslant \big\| \|b\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \big\|_{L^2(t_1,t_2)}} \cdot \underbrace{\|w_k\|_{L^2(\partial\Omega)}}_{\leqslant \|w_k\|_{L^2(\Omega)}} \cdot \underbrace{\|w_j\|_{L^2(\partial\Omega)}}_{\leqslant \|w_j\|_{L^2(\Omega)}} \Big) +$$

$$+ \underbrace{\big\| \|f\|_{V*} \big\|_{L^1(t_1,t_2)}}_{\leqslant \| \|f\|_{V*} \|_{L^2(t_1,t_2)}} \cdot \|w_j\|_V + \underbrace{\big\| \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \big\|_{L^1(t_1,t_2)}}_{\leqslant \big\| \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \big\|_{L^2(t_1,t_2)}} \cdot \underbrace{\|w_j\|_{L^2(\partial\Omega)}}_{\leqslant \|w_j\|_{L^2(\Omega)}} < \infty.$$

Takže f má integrovatelnou majorantu, tudíž z Carathéodorovy teorie existuje řešení $\mathbf{a}^n$ v nějakém (pravém) okolí libovolného počátečního bodu, takže buď $\mathbf{a}^n \to \infty$ (vyloučeno dalšími odhady nutnými i ke konvergenci těchto „řešení“) nebo existuje řešení $\mathbf{a}^n$ na $[0,T)$ ($\mathbf{a}_0$ je z $P^n u_0$), tj. $\exists u^n(t,x)$, tak že „platí slabá formulace“ pro $w \in \mathrm{LO}(w_1, \dots, w_n)$. □

Důkaz (Existence (pokračování): odhad)
Když rovnice z předchozí části vynásobíme a_j^n a sečteme, dostaneme:

$$\frac{1}{2}\partial_t \|u^n\|_2^2 + \int_\Omega \mathbb{A}\nabla u^n \nabla u^n + \int_{\partial\Omega} b\cdot (u^n)^2 = \langle f, u^n\rangle_V + \langle g, u^n\rangle_{L^2(\partial\Omega)} = (f, u^n)_H + \langle g, u^n\rangle_{L^2(\partial\Omega)}\,.$$

Člen s b je kladný, tedy ho můžeme „vynechat“ a $\mathbb{A}$ odhadneme elipticitou:

$$\partial_t \|u^n\|_2^2 + 2\cdot c_1 \|\nabla u^n\|_2^2 \leqslant 2\cdot \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u^n\|_{L^2(\Omega)} + 2\cdot \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \cdot \|u^n\|_{L^2(\partial\Omega)} \overset{\text{Young}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + 2\cdot \|u^n\|_2^2. \qquad (*)$$

Nyní když vlevo zapomeneme na druhý člen (je kladný), tak z Grönwallova lemmatu máme ($\forall t \in [0,T]$):

$$\|u^n(t)\|_2^2 \leqslant e^{2t} \cdot \left(\|u^n(0)\|_2^2 + \int_0^t \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant e^{2T} \cdot \left(\|u_0\|_2^2 + \big\| \|f\|_{L^2(\Omega)} \big\|^2_{L^2(0,T)} + \big\| \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \big\|^2_{L^2(0,T)} \right) < \infty$$

Odhad závisí na je nezávislý na t, takže $\mathbf{a}^n \nrightarrow \infty$. Tedy u^n opravdu existují.

Odhad je také nezávislý na n a můžeme ho dosadit zpět do $(*)$ a zintegrovat podle času, čímž omezíme nezávisle na n i všechny prostorové derivace u.

Potom stejně jako v přednášce omezíme ($\|P^n\varphi\|_V \leqslant c\cdot \|\varphi\|_V$ nezávisle na n)

$$\|\partial_t u^n(t)\|_{V*} \leqslant c\cdot \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1, \varphi\in \mathrm{LO}(w_1,\dots,w_n)} -\int_\Omega \mathbb{A}\nabla u^n \nabla\varphi - \int_{\partial\Omega} b\cdot u^n \cdot \varphi + \langle f,\varphi\rangle_V + \langle g, \varphi\rangle_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant c\cdot \tilde{c} \cdot \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1, \varphi\in \mathrm{LO}(w_1,\dots,w_n)} (\|\nabla u^n\|_2 \cdot \|\nabla\varphi\|_2 + \|b\|_\infty \cdot \|u^n\|_2 \cdot \|\varphi\|_2 + \|f\|_{V*}\|\varphi\|_V + \|g\|_2 \|\varphi\|_2) \leqslant$$

$$\leqslant C\cdot \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1, \varphi\in \mathrm{LO}(w_1,\dots,w_n)} \|\varphi\| \cdot (\|u^n\|_V + \|f\|_{V*} + \|g\|_2) \leqslant C\cdot (\|u^n\|_V + \|f\|_{V*} + \|g\|_2).$$

Zintegrováním a dosazením předchozích odhadů (u^n a ∇u^n) dostaneme uniformní omezenost ∂u^n, tedy máme omezenou posloupnost v reflexivním prostoru, tudíž můžeme vybrat slabě konvergentní podposloupnost. A poté postupujeme stejně jako na přednášce. (Abychom dokázali, že slabá formulace pro u^{n_k} $\forall n_k$ už nám dává slabou formulaci pro jejich slabou limitu.) □

Goal 2: Assume that $b \geqslant \varepsilon > 0$ almost everywhere on Γ and $f \in L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega))$, $b \in L^2_{loc}(0,\infty; L^\infty(\partial\Omega))$, $g \in L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\partial\Omega))$ and satisfies for some $\tau > 0$ that f, b and g are time periodic with the period τ (i. e. $\dots(t,x) = \dots(t+\tau, x)$ for almost every $(t,x) \in (0,\infty)\times\dots$). Show that there exists unique $u_0 \in L^2(\Omega)$ (i.e. unique initial data), for which, the weak solution u is τ-periodic.

Důkaz
Omezme se prozatím na interval $(0, \tau)$, tak dostaneme stejný problém jako v části 1. Tedy víme, že pro každou počáteční podmínku (z $L^2(\Omega)$) má právě jedno řešení. Budeme chtít ukázat, že $F : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $u(\tau) \mapsto u(0)$ je kontrakce.

Mějme tedy dvě počáteční podmínky $u_{01}, u_{02} \in L^2(\Omega)$ a jim odpovídající řešení $u_1, u_2 \in u \in L^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V^*)$. Stejně jako v důkazu existence výše máme pro $v := u_1 - u_2$:

$$\forall w \in V : \langle \partial_t v, w \rangle_V + \int_\Omega \mathbb{A} \nabla v \nabla w - \int_{\partial\Omega} b \cdot v \cdot w = 0.$$

Nyní budeme chtít pro dva časy $t_1 < t_2 \in [0, \tau]$ odhadnout $\|v(t_2)\|_2 - \|v(t_1)\|_2$. Pro to použijeme integraci per partes pro Gelfandovu trojici a použijeme předchozí rovnost s $w = v \in V$ (následně použijeme elipticitu $\mathbb{A}$ a $b \geqslant \varepsilon$ a nakonec Poincarého nerovnost s $\beta_1 = b > 0$):

$$(\|v(t_2)\|_2 - \|v(t_1)\|_2) \cdot (\|v(t_2)\|_2 + \|v(t_1)\|_2) = \|v(t_2)\|_2^2 - \|v(t_1)\|_2^2 =$$

$$= (v(t_2), v(t_2))_H - (v(t_1), v(t_1))_H = 2 \cdot \int_{t_1}^{t_2} \langle \partial_t v, v \rangle_V = \int_{t_1}^{t_2} - \underbrace{\int_\Omega \mathbb{A} \nabla v \nabla v}_{\geqslant c_2 \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} b \cdot v \cdot v}_{\geqslant \varepsilon \cdot \|v\|_{L^2(\partial\Omega)^2}} \leqslant$$

$$\leqslant - \int_{t_1}^{t_2} \left(c_2 \cdot \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \cdot \|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right) \leqslant - \int_{t_1}^{t_2} c_{Poin1} \cdot \min(\varepsilon, c_2) \cdot \|v\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant - \int_{t_1}^{t_2} k \cdot \|v\|_2^2.$$

Máme $k > 0$, to znamená, že $t \mapsto \|v(t)\|_2$ je nerostoucí funkce, tedy $\|v(t)\|_2 \geqslant \|v(\tau)\|_2$. Pro $t_1 = 0$ a $t_2 = \tau$ tak máme:

$$\|v(\tau)\|_2^2 - \|v(0)\|_2^2 \leqslant - \int_0^\tau k \cdot \|v\|_2^2 \leqslant -\tau \cdot k \cdot \|v\|_2^2,$$

$$\|v(\tau)\|_2^2 \cdot (1 - \tau \cdot k) \leqslant \|v(0)\|_2^2, \qquad \|v(\tau)\|_2 \leqslant \frac{\|v(0)\|_2}{\sqrt{1 + \tau \cdot k}}.$$

F je tedy kontrakce (s konstantou $1/\sqrt{1 + \tau \cdot k}$), takže podle Banachovy věty o kontrakci (L^2 je úplný) existuje $u_0 \in L^2$ tak, že pro odpovídající řešení u platí $u(\tau) = u(0) = u_0$.

Navíc pokud vezmeme interval $(0, 2 \cdot \tau)$, pak u_0 odpovídá z prvního cíle i nějaké slabé řešení $\tilde{u}$, které se z jednoznačnosti musí na $(0, \tau)$ shodovat s u a zároveň se musí na $(\tau, 2 \cdot \tau)$ shodovat s o τ posunutým u, neboť $\tilde{u}(\tau) = u(\tau) = u_0$, tedy máme celý problém posunutý o τ.

Nyní můžeme celou situaci posouvat o τ a tak získat řešení na celém $(0, \infty)$, které je v 0 rovno u_0 a v libovolném jiném bodě platí slabá formulace, neboť je to nějaký vnitřní bod intervalu $(0 + n \cdot \tau, 2\tau + n \cdot \tau)$. □

Goal 3: Improve the result of Goal 1 and prove the existence and the uniqueness without the assumption $b \geqslant 0$ and for arbitrary $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ and $g \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; L^2(\partial\Omega))$.

Důkaz (Gelfandova trojice a existence)
Gelfandova trojice zůstává stejná, jelikož „prostorové“ prostory zůstali stejné. Začátek důkazu existence je stejný, neboť tam jsme nepotřebovali $b \geqslant 0$, a použili dokonce jen $f, g \in L^1$. Pro odhady začneme s nerovnicí

$$(\partial_t \|u^n\|_2) \cdot \|u^n\|_2 + c_1 \|\nabla u^n\|_2^2 \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u^n\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \cdot \|u^n\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|b\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \cdot \|u^n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Tentokrát však nepoužijeme Youngovu nerovnost, ale zapomeneme na člen s c_1 rovnou, vydělíme $\|u^n\|_2$ a použijeme Grönwalla:

$$\|u^n(t)\|_2 \leqslant \exp\left(\int_0^t \|b\|_\infty\right) \cdot \left(\|u^n(0)\|_2 + \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant e^{\|\|b\|_\infty\|_1} \cdot \left(\|u_0\|_2 + \|\|f\|_2\|_1 + \|\|g\|_2\|_{4/3}\right).$$

Následně zase dosadíme zpět a zintegrujeme, což nám dá uniformní odhad na normu ∇u. Dále pokračujeme jako v cíli 1. $\square$

Důkaz (Jednoznačnost)
Začneme stejně jako v jednoznačnosti cíle 1, akorát se z elipticity zbavíme členu s $\mathbb{A}$, takže nám zůstane:

$$\langle \partial_t v(t), v(t) \rangle_V \leqslant -\int_{\partial\Omega} b(t) \cdot v(t)^2 \leqslant \|b(t)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \cdot \|v(t)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant \|b(t)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \cdot \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nyní na levou stranu použijeme $\partial_t \int_0^t = \mathrm{id}$ a per partes pro Sobolevovy–Bochnerovy funkce:

$$2 \cdot \langle \partial_t v(t), v(t) \rangle = \partial_t 2 \int_0^t \langle \partial_t v(\tau), v(\tau) \rangle = \partial_t \left(\|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|v(0)\|_{L^2(\Omega)}^2\right) = \partial_t \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Tedy z Grönwallova lemmatu je $\|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant \|v(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \cdot \exp\left(\int_0^t \|b(t))\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right) = 0$. Tedy $v = 0$ a $u_1 = u_2$. $\square$

Then consider $f = 0$, $g = 1$, $b = 1$ and look for the behaviour of $u(t)$ as $t \to \infty$.

Řešení
Vezmeme stejný odhad jako v existenci, akorát si uvědomíme, že nemusíme brát $\|b\|_\infty$, ale můžeme vzít -1. Tak dostaneme odhad

$$\|u\|_2 \leqslant e^{-1t} \cdot (\|u_0\|_2 + 0 + t \cdot \lambda(\Omega)) \to 0.$$