Příklad (7. Finite speed of propagation of WS to linear hyperbolic equation of 2nd order) Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be an open set fulfilling $B_1(0) \subset \Omega$. Assume that $\mathbb{A} \in L^\infty(\Omega) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d\times d}_{sym})$ be elliptic and that u is weak solution to

$$\partial_{tt} u - \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) = 0 \qquad \text{in } Q := (0,T) \times \Omega,$$

i. e.,

$$u \in L^2\left(0,T; W^{1,2}(\Omega)\right) \cap W^{1,2}\left(0,T; L^2(\Omega)\right) \cap W^{2,2}\left(0,T; \left(W^{1,2}_0(\Omega)\right)^*\right)$$

satisfies for almost all $t \in (0,T)$ and all $w \in W^{1,2}_0(\Omega)$

$$\langle \partial_{tt} u, w\rangle + \int_\Omega \mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla w = 0.$$

Find proper/optimal relation between $\Omega_0 \subset B_1(0)$ and $Q_0 \subset Q$ such that the following implication holds true

$$u(0) = \partial_t u(0) = 0 \text{ in } \Omega_0 \qquad \Longrightarrow \qquad u = 0 \text{ in } Q_0.$$

Subgoal1 : Show the result for constant matrix $\mathbb{A}$.

Subgoal2 : Show it for general $\mathbb{A}$.

Řešení (První odhad)
Z rovnosti $\partial_{tt}u - \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) = 0$ můžeme vynásobením $\partial_t u$ a za pomoci

$$\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u \partial_t u) = \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u)\partial_t u + (\mathbb{A}\nabla u)\nabla(\partial_t u)$$

dostat $\partial_{tt}u \cdot \partial_t u - \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u \partial_t u) + (\mathbb{A}\nabla u)\nabla(\partial_t u) = 0$.

Můžeme použít derivaci druhé mocniny a $\partial_t(\mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla u) = 0 + 2 \cdot \mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla(\partial_t u)$

$$\frac{1}{2}\partial_t \left((\partial_t u)^2 + \mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla u\right) - \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u \partial_t u) = 0.$$

Integrujeme přes „nějaké dobře zvolené“ Q_0 a zapíšeme ve formě $d+1$ divergence (a použijeme divergence theorem):

$$\int_{Q_0} \operatorname{div}_{d+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}\mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla u \\ -\mathbb{A}\nabla u \partial_t u \end{pmatrix} = \int_{\partial Q_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}\mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla u \\ -\mathbb{A}\nabla u \partial_t u \end{pmatrix} \cdot \nu_{d+1} = \int_{\partial Q_0 \setminus \Omega_0} \dots .$$

Zřejmě můžeme počítat s $(Q_0 \cap \{t = 0\}) \setminus \Omega_0$ je nulová. Nyní předpokládejme, že $\nu_t > 0$, neboť $\nu_t = 0$ znamená, že se vlny nešíří, což je nesmysl pro eliptické $\implies$ nenulové $\mathbb{A}$. Při $\nu_t < 0$ by dokonce vlny zanikali. Tudíž můžeme rovnost zapsat jako

$$\int_{\partial Q_0 \setminus \Omega_0} \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}\mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla u = \int_{\partial Q_0 \setminus \Omega_0} \mathbb{A}\nabla u \partial_t u \frac{\nu_d}{\nu_t} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\partial Q_0 \setminus \Omega_0} \left|\mathbb{A}\nabla u \cdot \frac{\nu_d}{\nu_t}\right| \cdot |\partial_t u| \overset{\text{Young}}{\leqslant} \frac{1}{2} \int_{\partial Q_0 \setminus \Omega_0} \frac{\left|\mathbb{A}\nabla u \cdot \frac{\nu_d}{\nu_t}\right|^2}{(1-\varepsilon)^2} + (\partial_t u)^2 \cdot (1-\varepsilon)^2.$$

Tím se dokážeme zbavit $(\partial_t u)^2$ na pravé straně. Nyní potřebujeme

$$\frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \left|\mathbb{A}\nabla u \cdot \frac{\nu_d}{\nu_t}\right|^2 < |\mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla u|, \qquad \forall \nabla u \neq 0,$$

abychom se zbavili i druhého členu na pravé straně. Na ε můžeme zapomenout (prostě ho zvolíme správně velké). Zároveň můžeme znormovat ∇u, jelikož na obou stranách vystupuje v druhé mocnině: $|\mathbb{A}(\nabla u)_{norm}(\nu_d/\nu_t)|^2 < |\mathbb{A}(\nabla u)_{norm} \cdot (\nabla u)_{norm}|$.

To potřebujeme pro libovolné nenulové ∇u, tedy levou stranu můžeme nahradit minimem (c_1 z elipticity $\mathbb{A}$) a na levé straně můžeme naopak potkat tu největší hodnotu (c_2 z omezenosti $\mathbb{A}$). Tedy $\|\nu_d/\nu_t\| < \sqrt{c_1}/c_2$ nám implikuje že (pro kladná K_1, K_2) $\int_{\partial Q_0 \setminus \partial \Omega} K_1 \cdot (\partial_t u)^2 + K_2 \cdot \|\nabla u\|^2 \leqslant 0$, tj. $\partial_t u = 0$ a $\nabla u = \mathbf{o}$ skoro všude na $\partial Q_0 \setminus \Omega_0$. To je to, co potřebujeme, neboť zvýšením sklonu ∂Q_0 budeme tím spíše dodržovat tuhle rovnost, tedy uvnitř „kuželu“ určeném rovností v předchozí nerovností budou všechny derivace u nulové a tedy u bude konstantně 0 ($u = 0 = \partial_t u$ na Ω_0).

Jestliže místo předchozí nerovnosti budeme mít rovnost, pak takové Q_0 je sjednocením kuželů $(1-\varepsilon) \cdot \|x - x_0\| + \frac{c_2}{\sqrt{c_1}} \cdot t - r \leqslant 0$, kde x_0 jsou postupně všechny body Ω_0 a r je takové, že $B_\Omega(x_0, r) \setminus \Omega_0$ je nulová množina (a vrchol kužele je nejvýše v T) a $1 > \varepsilon > 0$ je libovolně malé.

Řešení (Rigorózní důkaz)
Zvolme libovolný takový kužel Q_1 a označme $g := \min\left(0, (1-\varepsilon)\cdot\|x-x_0\| + \frac{c_2}{\sqrt{c_1}}\cdot t - r\right)$. g je zřejmě lipschitzovská funkce, která je pro každý vnitřní bod Q_1 nenulová, a jinde nulová, na Q_1 má časovou derivaci $\frac{c^2}{\sqrt{c_1}}$ a prostorové derivace splňující $\|\nabla g\| = (1-\varepsilon)$ (samozřejmě ve vnitřních bodech kužele, jinde jsou derivace 0).

Začneme zintegrováním rovnosti ze zadání podle času s w nezávislým na t (a použitím IBP pro Gelfandovu trojici):

$$\int_0^\tau \langle \partial_{tt}u, w\rangle + \int_0^T \int_{\Omega_0} \mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla w = 0,$$
$$(\partial_t u(\tau), w)_2 - (\partial_t u(0), w)_2 + \int_0^T \int_{\Omega_0} \mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla w = 0.$$

Nyní za w zvolíme $u(\tau)\cdot g(\tau)$, což víme, že je $W_0^{1,2}(\Omega)$ (neboť je to součin $W^{1,2}(\Omega)$ funkce a $g(\tau)$ je na $\partial\Omega$ nulová). Nyní je v 0 nulová buď u nebo g (tj. i w), tedy člen s mínus odpadá. První rozepíšeme z definice a derivace druhé mocniny. Třetí přes Fubiniovu větu prohodíme integrály, z linearity integrálu i $\mathbb{A}$ (a konstantnosti $\mathbb{A}$ v čase) dáme integrál dovnitř, nakonec ještě použijeme derivaci součinu.

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\partial_t u^2)(\tau)\cdot g(\tau) - 0 + \int_\Omega \mathbb{A}\left(\int_0^\tau \nabla u\right)\cdot(g\cdot\nabla u + u\cdot\nabla g).$$

Následně použijeme (první IBP, druhé z derivace součinu, derivace integrálu podle horní meze a symetrie $\mathbb{A}$):

$$\int_0^T \int_\Omega (\partial_t u^2)(\tau)\cdot g(\tau) = \int_\Omega (\partial_t u^2)(T)\cdot \underbrace{g(T)}_{=0} - \int_\Omega \underbrace{(\partial_t u^2)(0)\cdot g(0)}_{=0} - \int_0^T \int_\Omega u^2(\tau)(\partial_t g)(\tau),$$
$$\partial_\tau\left(\mathbb{A}\left(\int_0^\tau \nabla u\right)\cdot\left(\int_0^\tau \nabla u\right)\cdot g(\tau)\right) =$$
$$= 2\cdot\mathbb{A}\left(\int_0^\tau \nabla u\right)\cdot(\nabla u(\tau))\cdot g(\tau) + \mathbb{A}\left(\int_0^\tau \nabla u\right)\cdot\left(\int_0^\tau \nabla u\right)\cdot(\partial_t g)(\tau).$$

Zároveň využijeme, že g a derivace g jsou nulové na doplňku Q_1

$$\frac{1}{2}\int_{Q_1} u^2(\tau)(\partial_t g)(\tau) = \int_{Q_1}\mathbb{A}\left(\int_0^\tau \nabla u\right)\cdot\nabla g\cdot u + \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^T \partial_\tau\left(\mathbb{A}\left(\int_0^\tau \nabla u\right)\cdot\left(\int_0^\tau \nabla u\right)g(\tau)\right) -$$
$$- \frac{1}{2}\int_{Q_1}\mathbb{A}\left(\int_0^\tau \nabla u\right)\cdot\left(\int_0^\tau \nabla u\right)\cdot(\partial_t g)(\tau),$$
$$\int_{Q_1}\left(u^2(\tau) + \mathbb{A}\left(\int_0^\tau \nabla u\right)\cdot\left(\int_0^\tau \nabla u\right)\right)\cdot(\partial_t g)(\tau) =$$
$$= 2\cdot\int_{Q_1}\mathbb{A}\left(\int_0^\tau \nabla u\right)\cdot\nabla g\cdot u + \int_\Omega \underbrace{\ldots\cdot g(T) - \ldots\int_0^0}_{0}.$$

Řešení
Z Youngovy nerovnosti (a $z \leqslant |z|$)

$$\int_{Q_1} 2 \cdot \mathbb{A}\left(\sqrt[4]{c_1} \cdot \int_0^\tau \nabla u\right) \cdot \nabla g \cdot \frac{u}{\sqrt[4]{c_1}} \leqslant \int_{Q_1} c_2 \cdot \left(\sqrt{c_1} \cdot \left|\int_0^\tau \nabla u\right|^2 + \frac{|u|^2}{\sqrt{c_1}}\right) \cdot \|\nabla g\|, \text{ navíc}$$

$$\int_{Q_1} \left(u^2(\tau) + \mathbb{A}\left(\int_0^\tau \nabla u\right) \cdot \left(\int_0^\tau \nabla u\right)\right) \cdot \frac{c_2}{\sqrt{c_1}} \geqslant \int_{Q_1} \left(\frac{u^2(\tau)}{\sqrt{c_1}} + \sqrt{c_1}\left|\int_0^\tau \nabla u\right|^2\right) \cdot c_2$$

Tedy $\int_{Q_1}(\ldots) \leqslant \int_{Q_1}(\ldots) \cdot (1-\varepsilon)$. Tudíž $\ldots \leqslant 0$, ale zároveň víme, že $\ldots \geqslant 0$, tedy $\ldots = 0$ a $u = 0$ skoro všude na Q_1.