Organizační úvod

Poznámka
Jako vždycky, jen v implikacích u zkoušky budou i pojmy z předchozích semestrů.

1 Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

1.1 Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

Definice 1.1

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť máme funkce $f : J \to \mathbb{R}$ a $f_n : J \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$

- konverguje bodově k f na J, pokud $\forall x \in J : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, neboli:
$$\forall x \in J \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$
- konverguje stejnoměrně k f na J (značíme $f_n \rightrightarrows f$ na J), pokud
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$
- konverguje lokálně stejnoměrně, pokud pro každý omezený uzavřený $[a, b] \subset J$ platí $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ (značíme $f_n \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} f$ na J).

Věta 1.1 (Kritérium stejnoměrné konvergence)

Nechť $f, f_n : J \to \mathbb{R}$, pak
$$f_n \rightrightarrows f \ \text{na } J \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Důkaz
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 : \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$
$\square$

Poznámka (Pro spojité funkce)

$$\Leftrightarrow ||f_n - f||_{\mathcal{C}(J)} \to 0 \Leftrightarrow f_n \overset{\mathcal{C}(J)}{\to} f.$$

Věta 1.2 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)

Nechť $f_n : J \to \mathbb{R}$, pak

$$(\exists f : f_n \rightrightarrows f \text{ na } J) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

Důkaz

„ $\implies$ “: Víme $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Tedy

$$\forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon.$$

„ $\impliedby$ “: Víme $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Toto použijeme pro pevné $x \in J$. Pro posloupnost $a_n = f_n(x)$ máme splněnou BC podmínku pro posloupnost reálných čísel, tj. $a_n \to a \in \mathbb{R}$.

Označíme si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Nyní v BC podmínce provedeme limitu $n \to \infty$. Tím dostaneme přesně definici stejnoměrné konvergence. □

Věta 1.3 (Moore-Osgood)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je krajní bod intervalu J. Nechť $f_n, f : J \to \mathbb{R}$ splňují

- $f_n \rightrightarrows f$ *na* J,
- *existuje* $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Pak existují $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *a jsou si rovny.*

Důkaz

Příště. □

Důsledek

Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na I a nechť f_n jsou spojité na I. Pak f je spojitá na I.

Poznámka

Obdobně lze definovat stejnoměrnou spojitost i pro libovolnou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ a $f_n : A \to \mathbb{R}$ a platí, že stejnoměrná limita je spojitá (stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá).

Důkaz (Moore-Osgood)
Z BC podmínky

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Provedeme $\lim_{x \to x_0}$ a dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Tedy a_n splňuje BC podmínku, a tudíž $\exists \lim_{n \to \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

Nechť $\varepsilon \geq 0$. Z definice $f_n \rightrightarrows f$

$$\exists n_0\ \forall x \in J : |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zároveň předpokládejme $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$ (zvolíme si n_0 jako maximum). Máme pevnou funkci f_{n_0} a $\lim_{x \to x_0} f_{n_0}(x) = a_{n_0}$. Tedy

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in P(x_0, \delta) \cap J : |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Nyní $\forall x \in P(x_0, \delta) \cap J$ platí

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| \leq \varepsilon + \varepsilon + \ \varepsilon = 3\varepsilon.$$

$\square$

Věta 1.4 (O záměně limity a derivace)

Nechť funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na intervalu (a, b) a nechť

- $\exists x_0 \in (a, b) : \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje,*
- *pro derivace f_n' platí $f_n' \overset{Loc}{\rightrightarrows}$ na (a, b).*

Potom existuje funkce f tak, že $f_n \overset{Loc}{\rightrightarrows} f$ na (a, b), f má vlastní derivaci a platí $f_n' \overset{Loc}{\rightrightarrows} f'$ na (a, b).

Důkaz

Nechť $x_0 \in [c,d] \subset (a,b)$. Víme $f_n' \rightrightarrows$ na $[c,d]$. Chceme ukázat $f_n \rightrightarrows f$ na $[c,d]$ ($\Longrightarrow$ $f_n \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} f$ na (a,b)). Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $f_n' \rightrightarrows$

$$\exists n_0 \ \forall m,n \geq n_0 \ \forall x \in [c,d] : |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$$

a zároveň $\forall m,n \geq n_0 : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$. Nyní $\forall x \in [c,d]$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq$$

$$\leq |h(x) - h(x_0)| + \varepsilon \leq |x - x_0| \cdot |h'(\xi)| + \varepsilon \leq (d-c) \cdot \varepsilon + \varepsilon,$$

kde $h = f_n - f_m$ a $\xi \in (x_0, x)$ resp. (x, x_0) z Lagrangeovy věty (cvičení: předpoklady jsou splněné).

Zbývá dokázat „$f_n' \rightrightarrows f'$ na $[c,d]$“: Zvolme $z \in [c,d]$ a položme $\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x-z}$ pro $x \in [c,d] \setminus \{z\}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $f_n' \rightrightarrows$

$$\exists n_0 \ \forall n,m \geq n_0 \ \forall x \in [c,d] : |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon.$$

Podobně jako v první části důkazu

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(z) - f_m(z))| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x-z| < \varepsilon \cdot |x-z|.$$

Nyní $\forall m,n \geq n_0 \ \forall x \in [c,d] \setminus \{z\}$:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \left| \frac{f_n(x) - f_m(z) - (f_m(x) - f_m(z)}{x-z} \right| < \frac{\varepsilon \cdot |x-z|}{|x-z|} = \varepsilon.$$

Podle BC $\varphi_n \rightrightarrows$ na $[c,d] \setminus \{z\}$. Tedy φ_n splňuje předpoklady Moore-Osgoodovy věty ($\lim_{x\to z} \varphi_n(x) = \lim_{x \to z} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x-z} = f'(z)$). Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to z} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x-z} = \lim_{x\to z} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x-z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n'(z) = \lim_{x\to z} \frac{f(x) - f(z)}{x-z} = f'(z).$$

A jelikož víme, že $f_n' \rightrightarrows$, tak $f_n' \to f' \implies f_n' \rightrightarrows f'$. □

1.2 Stejnoměrná konvergence řady funkcí

Definice 1.2

Řekněme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na intervalu J, pokud posloupnost částečných součtů $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na J.

Věta 1.5 (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *je řada funkcí definovaných na intervalu* J*. Pokud* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ *na* J*, pak posloupnost funkcí* $u_n(x) \rightrightarrows 0$ *na* J*.*

Důkaz

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 \ \forall x \in J : |s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$$

speciálně pro $m = n + 1$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in J : |\sum_{i=1}^{n+1} u_i - \sum_{i=1}^{n} u_i| = |u_{n+1}(x)| < \varepsilon \implies u_n \rightrightarrows 0.$$

□

Věta 1.6 (Weierstrassovo kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *je řada funkcí definovaných na intervalu* J*. Pokud pro*

$$\sigma_n = \sup \{|u_n|(x) : x \in J\}$$

platí, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ *konverguje, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ *na* J*.*

Důkaz

Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro konečnou $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$

$$\exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0, m > n : |\sum_{k=n+1}^{m} \sigma_k| < \varepsilon.$$

Chceme ověřit BC podmínku pro $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$:

$$\forall m, n \geq n_0, m > n \ \forall x \in J : |s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{m} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sigma_k < \varepsilon.$$

Tedy podle BC podmínky $\sum u_k \rightrightarrows$. □