

Úvod

Poznámka

Mluvílo se o historii \mathbb{C} .

Definice 0.1 (Prostor \mathbb{C})

Prostor \mathbb{C} komplexních čísel je prostor \mathbb{R}^2 , v němž navíc definujeme násobení:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

Ztotožníme $(x, 0) = x$, neboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Značíme $i := (0, 1)$ (imaginární jednotka).

Definice 0.2 (Značení (komplexně sdružené číslo, reálná a imaginární složka))

$$z = x + i \cdot y \in \mathbb{C} \implies \bar{z} := x - i \cdot y \wedge \Re z := x, \Im z := y.$$

Definice 0.3 (Modul / absolutní hodnota)

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Tvrzení 0.1 (Vlastnosti)

- $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, potom $z = x + i \cdot y$ a $(\pm i)^2 = -1$.
- Násobení $\cdot : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ je asociativní, komutativní a distributivní (vzhledem k $+$). Navíc \cdot zahrnuje i násobení v \mathbb{R} a násobení skalárem.
- $|z|^2 = z\bar{z}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $z + \bar{z} = 2\Re z$, $z - \bar{z} = 2i\Im z$, $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0 : \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : zz^{-1} = 1$, konkrétně $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je komutativní těleso.

Pozor

\mathbb{C} nelze „rozumně“ lineárně uspořádat.

Poznámka (Lineární zobrazení)

Lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (\mathbb{R} -lineární zobrazení) jsou reálné matice řádu 2. Lineární zobrazení $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (\mathbb{C} -lineární) jsou komplexní čísla.

Lineární zobrazení $L = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ je tedy \mathbb{C} -lineární právě tehdy, když $a = d$ a $b = -c$.

Poznámka (Úmluva)

„Funkce“ znamená funkci z \mathbb{C} do \mathbb{C} , není-li řečeno jinak.

Definice 0.4 (Značení (okolí, prstencové okolí))

$$z_0 \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0 : \mathcal{U}(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}, \mathcal{P}(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Definice 0.5 (Limita, spojitost)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w \in \mathbb{C} \equiv \forall \varepsilon \exists \delta > 0 \forall z \in \mathbb{C} : z \in \mathcal{P}(z_0, \delta) \implies f(z) \in \mathcal{U}(w, \varepsilon).$$

f je spojitá v z_0 , jestliže $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Definice 0.6 (Derivace)

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je v bodě $z_0 \in \mathbb{R}^2$ \mathbb{R} -diferencovatelná, jestliže existuje \mathbb{R} -lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - Lh}{|h|} = 0$$

Značíme $L =: df(z_0)$.

$$df(z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{bmatrix}$$

$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ \mathbb{C} -diferencovatelná, jestliže existuje

$$f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}.$$

f' nazýváme komplexní derivace funkce.

Poznámka

Pro $(f \pm g)', (f \cdot g)', (f/g)', (f \circ g)'$ platí stejné vzorce jako pro funkce $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Věta 0.2 (Cauchy-Riemann)

Nechť f je komplexní funkce definovaná na nějakém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- Existuje $f'(z_0)$.
- Existuje $df(z_0)$ a $df(z_0)$ je \mathbb{C} -lineární.

- Existuje $df(z_0)$ a platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0), \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0).$$

(Tzv. Cauchy-Riemannova podmínka.)

┌
Důkaz

Druhý a třetí bod je ekvivalentní z poznámky o lineárních zobrazeních.

$w = f'(z_0) \Leftrightarrow 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - wh}{h}$. Vynásobíme $\frac{h}{|h|}$:

$$\Leftrightarrow 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - wh}{|h|} \Leftrightarrow df(z_0)h = wh.$$

└

□

Poznámka

Existuje-li $f'(z_0)$, pak $df(z_0)h = f'(z_0)h$, $h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.

Cauchy-Riemannova podmínka je ekvivalentní $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

Definice 0.7 (Holomorfní funkce)

Nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená a $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Potom f je holomorfní na G , pokud je f \mathbb{C} -diferencovatelná v každém bodě G .

Definice 0.8 (Exponenciála)

$$\exp(z) := e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y), z = x + y \cdot i \in \mathbb{C}.$$

Tvrzení 0.3 (Vlastnosti exponenciály)

$\exp|_{\mathbb{R}}$ je reálná exponenciála, $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$, $\exp'(z) = \exp(z)$ ($z \in \mathbb{C}$), $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, \exp není prostá na \mathbb{C} a je 2π periodická, dokonce $\exp(z) = \exp(w) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : w = z + 2k\pi \cdot i$, nechť $P := \{z \in \mathbb{C} | \Im z \in (-\pi, \pi]\}$, potom $\exp|_P$ je prostá a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definice 0.9 (Logaritmus a hlavní hodnota logaritmu)

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Položme

$$\text{Log} z := \{w \in \mathbb{C} | \exp w = z\},$$

$$\log z := \log |z| + i \cdot \arg z. \quad (\text{Hlavní hodnota logaritmu.})$$

Tvrzení 0.4 (Vlastnosti logaritmu)

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom

- $\text{Log} z = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\log = (\exp|_D)^{-1}$
- \log není spojitá na žádném $z \in (-\infty, 0]$, ale $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$. Navíc $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$
- $\log(1 - z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$.

Pozor

Neplatí $\log \exp z = z$ a $\log(z \cdot w) = \log z + \log w$!

Definice 0.10

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom hlavní hodnotou α -té mocniny z definujeme

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log z).$$

Položme

$$M_\alpha(z) := \{\exp(\alpha \cdot w) \mid w \in \text{Log} z\}.$$

Tvrzení 0.5 (Vlastnosti mocniny)

- $e^z = \exp(z \cdot \log e) = \exp(z)$.
- Je-li $z > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom z^α je definována stejně jako v MA.
- $M_\alpha(z) = \{z^\alpha \cdot e^{2k\pi \cdot i \cdot \alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z \neq 0$.
- $(z^\alpha)' = \alpha \cdot z^{\alpha-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$, kde

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Poznámka (Zápočet)

Zápočet dostaneme za aktivní účast na cvičení

Poznámka

Je-li $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, potom

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

tedy f lze rozložit na sudou a lichou část.

Sudá část exponenciely je \cosh a lichá \sinh .

Definice 0.11 (Goniometrické funkce)

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z,$$

kde

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tvrzení 0.6 (Vlastnosti)

- \cos i \sin jsou rozšířením funkcí $z \in \mathbb{R}$ do \mathbb{C} .
- $\sin' z = \cos z$, $\cos' z = -\sin z$.
- \sin i \cos jsou 2π periodické funkce, ale nejsou omezené, platí, že $\sin \mathbb{C} = \mathbb{C} = \cos \mathbb{C}$.
- Platí $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

1 Křivkový integrál

Definice 1.1 (Značení)

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$. Potom φ je křivka, pokud je φ spojitý, φ je regulární křivka, pokud je φ po částech spojitě diferencovatelný tzn. φ je spojitý na $[\alpha, \beta]$ a existuje dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ takové, že $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ je diferencovatelný.

Úsečka: Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, potom $\varphi(t) = a + t \cdot (b - a)$, $t \in [0, 1]$ je úsečka z a do b . Značíme $[a, b]$.

Řekneme, že křivka φ je lomená čára v \mathbb{C} , existují-li $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ taková, že

$$\varphi = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + \dots + [z_{k-1}, z_k].$$

Poznámka (Úmluva)

Pokud neřekneme něco jiného, křivkou budeme rozumět regulární křivku v \mathbb{C} .

Definice 1.2 (Délka křivky)

$$V(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt,$$

je-li φ regulární.

Definice 1.3

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je regulární křivka a $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá. Potom definujeme

$$\int_{\varphi} f := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Poznámka

Křivkový integrál konverguje jako Riemannův.

$$\int_{\varphi} f(z) dz,$$

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0, +\infty)$ a $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom

$$\int_{\varphi} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot i \cdot r \cdot e^{it} dt = i \cdot r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt =$$

$2\pi i$, pokud $n = -1$, 0, pokud $n \in \mathbb{Z}$ a $n \neq -1$.

Tvrzení 1.1 (Vlastnosti křivkového integrálu)

Je-li φ křivka, f a g jsou spojitě funkce na $\langle \varphi \rangle$ a $A \in \mathbb{C}$, potom

$$\int_{\varphi} (Af + g) = A \int_{\varphi} f + \int_{\varphi} g.$$

Je-li φ křivka a f je spojitá funkce na $\langle \varphi \rangle$, potom

$$\left| \int_{\varphi} f \right| \leq \max_{\langle \varphi \rangle} |f| \cdot V(\varphi).$$

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$ a $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$. Potom

$$\int_{\varphi \oplus \psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f \wedge \int_{\ominus \varphi} f = - \int_{\varphi} f,$$

kde $(\Theta\varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$ je opačná křivka k φ .

Křivkový integrál nezávisí na parametrizaci křivky: Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je křivka, $\omega : [\gamma, \delta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ je spojitě diferencovatelné s $\omega' > 0$ a $\psi = \varphi \circ \omega$. Potom $\int_{\psi} f = \int_{\varphi} f$.

┌ Důkaz

└ Jednoduchý, ukázán na přednášce pro některé body. □

Definice 1.4 (Primitivní funkce)

Řekneme, že funkce f má na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ primitivní funkci F , pokud $F' = f$ na G .

Věta 1.2 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce)

Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f má na G primitivní funkci F . Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ je regulární křivka a f je spojitá^a na $\langle \varphi \rangle$. Potom

$$\int_{\varphi} f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)),$$

je-li navíc φ uzavřená, tzn. $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, pak

$$\int_{\varphi} f = 0.$$

┌ Důkaz

└ Z Cauchy-Riemannovy věty plyne, že

$$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = \frac{\partial F}{\partial x}\varphi'_1 + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi'_2 = F'\varphi'_1 + iF'\varphi'_2 = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Tato rovnost platí až na konečně mnoho $t \in [\alpha, \beta]$, neboli $F \circ \varphi$ je zobecněná primitivní funkce k integrandu. Máme tedy

$$\int_{\varphi} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}(F(\varphi(t)))dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

□

^aTohle je zbytečný předpoklad, ale to ještě neumíme dokázat.

Věta 1.3

Funkce f je konstantní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, právě když $f' = 0$ na G .

┌
Důkaz

„ \implies “: Jasně. „ \impliedby “: Necht $z, w \in G$ a φ je lomená čára v G spojující z a w . Potom $f(w) - f(z) = \int_{\varphi} f' = 0$, protože f je primitivní funkcí k f' na G . \square

└

Důsledek

Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, potom existuje $c \in \mathbb{C}$ tak, že $F_2 = F_1 + c$

┌
Důkaz

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0$$

└

\square

Věta 1.4 (O existenci primitivní funkce)

Necht $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je spojitá na G , tak následující je ekvivalentní

1. f má na G primitivní funkci;
2. $\int_{\varphi} f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G ;
3. $\int_{\varphi} f$ nezávisí v G na křivce φ , tzn. pro každé dvě křivky $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow G$, $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow G$ takové, že $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$ a $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$ platí $\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$.

┌ *Důkaz*

„1. \implies 2.“: Víme z věty o výpočtu integrálu pomocí primitivní funkce.

„2. \implies 3.“: Položme $\tau := \varphi + (-\psi)$. Potom je τ uzavřená a z 2. dostaneme

$$0 = \int_{\tau} f = \int_{\varphi} f - \int_{\psi} f.$$

„3. \implies 1.“: Volme $z_0 \in G$ pevně. Pro každé $z \in G$ najdeme lomenou čáru φ_z v G , která začíná v z_0 a končí v z . Definujeme $F(z) := \int_{\varphi_z} f$, $z \in G$. Definice F je korektní z 3. Ukážeme, že F je hledaná primitivní funkce k f na G . Necht $z_1 \in G$. Dokážeme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. Volme $r > 0$, aby $U(z_1, r) \subset G$. Je-li $|h| < r$, potom

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_{\varphi_{z_1+h}} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f,$$

kde $u = [z_1; z_1 + h]$ je úsečka. Tedy

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_u f = \int_0^1 f(z_1 + th) h dt,$$

$$\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) = \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) dt \rightarrow 0,$$

neboť $\left| \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) dt \right| \leq \max_{z \in [z_1; z_1+h]} |f(z) - f(z_1)| \rightarrow 0$ ze spojitosti f v z_1 . \square

Poznámka (Značení)

Řekněme, že $M \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá, pokud existuje $z_0 \in M$ (tzv. střed hvězdovitosti), pro který $[z_0; z] \subset M$ pro každé $z \in M$.

┌ *Poznámka*

└ Konvexní \subsetneq hvězdovitá.

Řekneme, že $\Delta \subset \mathbb{C}$ je trojúhelník s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{C}$, pokud

$$\Delta := \{\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\},$$

a značíme $\partial\Delta := [a; b] + [b; c] + [c; a]$.

Tvrzení 1.5 (Dodatek)

Necht f je spojitá funkce na hvězdovité oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Je-li

$$\int_{\partial\Delta} f = 0,$$

pro každý trojúhelník $\Delta \subset G$, potom f má na G primitivní funkci.

┌ *Důkaz*

Nechť z_0 je střed hvězdovitosti G . Pro každé $z \in G$ položme $\varphi_z := [z_0; z]$ a $F(z) := \int_{\varphi_z} f$. □

└

Poznámka (Cauchyho věty)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a φ je uzavřená křivka v G . Potom Cauchyho věty nám říkají, za jakých podmínek na G a φ je $\int_{\varphi} f = 0$.

Věta 1.6 (Goursatovo lemma (Cauchyho věta pro Δ))

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a Δ je trojúhelník v G . Potom

$$\int_{\partial\Delta} f = 0.$$

┌ *Důkaz*

Označme $\varphi_0 := \partial\Delta$. Sporem: Předpokládejme, že $|\int_{\varphi_0} f| =: K > 0$. Zřejmě Δ je nede-
generovaný. V Δ vedme střední příčky a označme $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ obvody čtyř vzniklých
trojúhelníků. Obvody vnitřních trojúhelníků ψ_1 (vlevo dole), ψ_2 (vpravo dole), ψ_3 (nahore)
a ψ_4 (uprostřed) probíháme proti směru hodinových ručiček. Potom

$$\int_{\varphi_0} f = \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f + \int_{\psi_3} f + \int_{\psi_4} f.$$

Ex. $j_1 = 1, \dots, 4$ tak, že $|\int_{\psi_{j_1}} f| \geq \frac{K}{4}$ a $V(\psi_{j_1}) = \frac{V(\varphi)}{2}$. Označme $\varphi_1 = \psi_{j_1}$. Indukcí
sestrojíme posloupnost trojúhelníků tak, že

$$\left| \int_{\varphi_j} f \right| \geq \frac{K}{4^j} \wedge V(\varphi_j) = \frac{V(\varphi)}{2^j}.$$

Máme, že $\bigcup_{j=0}^{\infty} \Delta_j = \{z_0\} \subset G$, protože $\text{diam}(\Delta_j) \rightarrow 0$. Položme

$$\varepsilon(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0), & z \in G \setminus \{z_0\}, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Potom ε je spojitá na G a máme pro $j \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_{\varphi_j} f(z) dz = \int_{\varphi_j} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) dz + \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0) dz,$$

kde první integrand vpravo má primitivní funkci na \mathbb{C} a první integrál je roven 0. Pro
každé $j \in \mathbb{N}_0$ dostaneme

$$0 < \frac{K}{4^j} \leq \left| \int_{\varphi_j} f \right| = \left| \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0) \right| \leq V^2(\varphi_j) \cdot \max_{\langle \varphi_j \rangle} |\varepsilon| = \frac{V^2(\varphi)}{4^j} \cdot \max_{\langle \varphi_j \rangle} |\varepsilon|,$$

kde třetí nerovnost platí díky tomu, že $|z - z_0| \leq V(\varphi_j)$. Z předchozího tedy máme (po
vynásobení 4^j):

$$0 < K \leq V^2(\varphi) \cdot \max_{\langle \varphi_j \rangle} |\varepsilon| \rightarrow 0,$$

└ protože ε je spojitá v z_0 a $\varepsilon(z_0) = 0$. ζ . □

Věta 1.7 (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti)

*Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má na G primitivní funkci.
(Ekvivalentně: $\int_{\varphi} f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G .)*

┌ *Důkaz*

└ Z Goursatova lemmatu a dodatku. □

Poznámka

Goursatovo lemma a tedy i předchozí věta platí i pro funkci f , která je spojitá na G a holomorfní na $G \setminus \{z_0\}$ pro nějaké $z_0 \in G$.

┌

Důkaz

Nechť \triangle je nedegenerovaný trojúhelník v G . Pak rozebereme případy kde leží z_0 . □

Věta 1.8 (O derivování podle komplexního parametru)

Nechť φ je křivka v \mathbb{C} a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Nechť $F(z, s)$ a komplexní derivace $\frac{\partial F}{\partial s}(z, s)$ jsou spojitě komplexní funkce na $\langle \varphi \rangle \times \Omega$. Pro každé $s \in \Omega$ položíme $\Phi(s) := \int_{\varphi} F(z, s) dz$. Potom $\Phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $\Phi'(s) = \int_{\varphi} \frac{\partial F}{\partial s}(z, s) dz$, $s \in \Omega$.

┌

Důkaz

Pro $s = s_1 + is_2 = (s_1, s_2) \in \Omega$ máme $\Phi(s) = \int_{\alpha}^{\beta} F(\varphi(t), (s_1, s_2)) \varphi'(t) dt$. Podle vět o spojitosti a derivování integrálu závislého na parametru máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_j}(s) = \int_{\varphi} \frac{\partial F}{\partial s_j}(z, s) dz,$$

pro $s \in \Omega$ a $j \in [2]$. Navíc jsou tyto parciální derivace spojitě a splňují podmínky Cauchy-Riemannovy věty, tedy Φ je komplexně diferencovatelná a komplexní derivace se rovná derivaci vzhledem k té první proměnné. □

Definice 1.5 (Index bodu křivky)

Nechť φ je uzavřená křivka v \mathbb{C} a $s \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Potom číslo

$$\text{ind}_{\varphi} s := \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z - s}$$

nazveme indexem bodu s vzhledem ke křivce φ .

Poznámka

Ukážeme si, že ind_{φ} se rovná počtu oběhů φ kolem s v kladném směru (tzn. proti směru hodinových ručiček).

Věta 1.9 (O základních vlastnostech indexu)

Nechť φ je uzavřená křivka v \mathbb{C} a $G := \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Potom G je otevřena, funkce $s \mapsto \text{ind}_{\varphi} s$ je konstantní na každé komponentě G a na jediné její neomezené komponentě je nulová.

┌ *Důkaz*

Podle předchozí věty je $\Phi(s) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z-s}$, $s \in G$ holomorfní a pro každé $s \in G$ je $\Phi'(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{(z-s)^2} = 0$, protože $f(z) := \frac{1}{(z-s)^2}$ má primitivní funkci na $\mathbb{C} \setminus \{s\}$. Tedy Φ je konstantní na každé komponentě G .

Volíme $R > 0$, aby $\langle \varphi \rangle \subset U(0, R)$. Potom $\mathbb{C} \setminus U(0, R)$ je obsaženo v jediné neomezené komponentě G_0 množiny G . Navíc pro $s \in \mathbb{C} \setminus U(0, R)$ je funkce $g(z) := \frac{1}{z-s}$, $z \in U(0, R)$ holomorfní a dle Cauchyho věty pro hvězdovitou oblast je $\Phi(s) = 0$. □

Věta 1.10 (Cauchyův vzorec na kruhu)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřené a $f \in \mathcal{H}(G)$. Nechť $\overline{U(z_0, r)} \subset G$ a $\varphi(t) = z_0 + r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-s} dz &= f(s), & |s - z_0| < r; \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-s} dz &= 0, & |s - z_0| > r; \end{aligned}$$

┌ *Důkaz*

1. Nechť $|s - z_0| < r$. Volme $R > r$, aby $U(z, R) \subset G$. Položme

$$h(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(s)}{z-s}, & z \in U(z_0, R) \setminus \{s\}; \\ f'(s), & z = s. \end{cases}$$

Zřejmě $h \in \mathcal{H}(U(z_0, R) \setminus \{s\})$ je spojitá hvězdovitá oblast $U(z_0, R)$. Z Cauchyho věty je

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)dz}{z-s} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z-s} \cdot f_s.$$

2. Nechť $|s - z_0| > r$. Volme $R \in (r, |z_0 - s|)$, aby $U(z_0, R) \subset G$. Potom

$$g(t) := \frac{f(z)}{z-s} \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$$

a z Cauchyho věty je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} g = 0.$$

└ □

Důsledek

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má komplexní derivace libovolného řádu všude na G .

Tedy necht $U(z_0, r) \subset G$ a φ je jako v předchozím. Potom

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)dz}{(z-s)^{k+1}} = f^{(k)}(s), |s-z_0| < r, k \in \mathbb{N}.$$

Zde $f^{(0)} := f$ a k -tá komplexní derivace $f^{(k)}$ je definovaná jako $f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$, má-li pravá strana smysl.

┌

Důkaz

Z věty o derivaci integrálu podle komplexního parametru a předchozí věty, protože

$$\frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{1}{z-s} \right) = \frac{k!}{(z-s)^{k+1}}, \quad z \neq s.$$

└

□

Věta 1.11 (Morera)

Necht f je spojitá funkce na otevřené $G \subset \mathbb{C}$. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$, právě když

$$\int_{\partial\Delta} f = 0, \quad \forall \Delta \subset G \text{ trojúhelník.}$$

┌

Důkaz

„ \implies “: Goursat. „ \impliedby “: Necht $U := U(z_0, R) \subset G$. Protože f je spojitá na hvězdovité oblasti U a platí pro ni rovnost výše, má f na U primitivní funkci F , tzn. $f = F'$ na U . Protože $F \in \mathcal{H}(U)$, máme $f' = F''$ na U , tudíž $f \in \mathcal{H}(U)$. Tedy i $f \in \mathcal{H}(G)$. □

└

Věta 1.12 (Cauchyho odhady)

Necht $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0, +\infty)$ a f je holomorfní funkce na otevřené množině obsahující $\overline{U(z_0, r)}$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je

CO1 $\forall s \in U := U(z_0, r)$:

$$|f^{(k)}(s)| \leq \frac{(k!)r}{(d(s))^{k+1}} \cdot \max_{\partial U} |f|,$$

kde $d(s) := \text{dist}(s, \partial U)$;

CO2 $\forall s \in U(z_0, \frac{r}{2})$:

$$|f^{(k)}(s)| \leq \frac{k!2^{k+1}}{r^k} \cdot \max_{\partial U} |f|;$$

CO3 $|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \cdot \max_{\partial U} |f|.$

┌ *Důkaz (CO1)*

Z věty výše (pro φ stejné jako tam)

$$\int_{\Omega} \partial_t(u - u_d)$$

$$|f^{(k)}(z)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)ds}{(z-s)^{k+1}} \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot 2\pi r \max_{<\varphi>} |f| \frac{1}{(d(s))^{k+1}},$$

└ protože $|z-s| \geq d(s) \ \forall z \in <\varphi>$. □

┌ *Důkaz (CO2 a CO3)*

Plyne z CO1, neboť $d(s) \geq \frac{r}{2} \ \forall s \in U(z_0, \frac{r}{2})$ a $d(z_0) = r$. □

Věta 1.13 (Liouville)

Je-li f holomorfní a omezená funkce na \mathbb{C} , potom je f konstantní.

┌ *Důkaz*

Ukážeme, že $f' = 0$ na \mathbb{C} : Označme $M := \sup_{\mathbb{C}} |f| < +\infty$. Necht $z_0 \in \mathbb{C}$. Z CO3 pro každé $r > 0$ platí

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r} \rightarrow 0,$$

└ tudíž $f'(z_0) = 0$. □

Důsledek (Základní věta algebry)

V \mathbb{C} má každý polynom stupně alespoň 1 vždy alespoň jeden kořen.

┌ *Důkaz*

Necht $p(z) := a_n z^n + \dots + a_0 z^0$, kde $a_j \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ a $a_n \neq 0$. Sporem: Předpokládejme, že $p \neq 0$ na \mathbb{C} . Potom $f := \frac{1}{p}$ je holomorfní a omezená na \mathbb{C} . Z Liouvilleovy věty je konstantní, tedy i $p = \frac{1}{f}$ je konstantní a $p' = 0 = p^{(n)} = a_n \cdot n! \implies a_n = 0$. ✗. □

Lemma 1.14

Necht φ je křivka v \mathbb{C} , f_i jsou spojité funkce na $<\varphi>$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f_i \rightrightarrows f$ na $<\varphi>$. Potom f je spojitá na $<\varphi>$ a

$$\int_{\varphi} f_n \rightarrow \int_{\varphi} f.$$

┌
Důkaz
Platí

$$\left| \int_{\varphi} f_i - \int_{\varphi} f \right| = \left| \int_{\varphi} (f_n - f) \right| \leq V(\varphi) \cdot \max_{\langle \varphi \rangle} |f_n - f| \rightarrow 0.$$

└

□

Věta 1.15 (Weierstrass)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f_n \in \mathcal{H}(G)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \xrightarrow{loc.} f$ na G . Potom $f \in \mathcal{H}(G)$ a $f_n^{(k)} \xrightarrow{Loc.} f^{(k)}$ na G pro každé $k \in \mathbb{N}$.

┌
Důkaz

1. Zřejmě f je spojitá na G . Nechť Δ je trojúhelník v G . Potom

$$0 \stackrel{\text{Goursat}}{=} \int_{\partial \Delta} f_n \rightarrow \int_{\partial \Delta} f = 0.$$

Z Morera je $f \in \mathcal{H}(G)$.

2. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $z_0 \in G$. Volme $r > 0$, aby $\overline{U(z_0, r)} \subset G$. Z CO2 máme, že $\forall s \in U(z_0, \frac{r}{2})$:

$$|f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s)| = |(f_n - f)^{(k)}(s)| \leq \frac{k! 2^{k+1}}{r^k} \cdot \max_{\partial U(z_0, r)} |f_n - f| \rightarrow 0.$$

└

□

2 Mocninné řady

Definice 2.1 (Mocninná řada)

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

je mocninná řada s koeficienty $\{a_n\}$ a středem z_0 .

Poznámka (Vlastnosti)

- Konvergence: Existuje $R \in [0, +\infty]$ takové, že řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $U(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ a řada diverguje pro $|z - z_0| > R$. Číslo R se nazývá poloměr konvergence a platí, že

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde $\frac{1}{0} = +\infty$ a $\frac{1}{+\infty} = 0$.

- Označíme-li součet řady na $U(z_0, R)$ jako f , potom $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (z-z_0)^{n-k}, \quad z \in U(z_0, R),$$

speciálně $a_k = f^{(k)}(z)/k!$.

Plyne z Weierstrassovy věty pro

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Zřejmě $S_N \xrightarrow{\text{loc.}} f$ na $U(z_0, R)$, tudíž $S_N^{(k)} \xrightarrow{\text{loc.}} f^{(k)}$ na $U(z_0, R)$, tudíž rovnost výše platí. Dosadíme-li do ní $z = z_0$, dostaneme

$$f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k!.$$

Věta 2.1 (O rozvoji holomorfní funkce do mocninné řady na kruhu)

Nechť $R \in (0, +\infty]$ a $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$. Potom existuje jediná mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, která má na $U(z_0, R)$ součet f . Navíc platí, že $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

┌

Důkaz

Jednoznačnost plyne ze vzorce. Existence: Nechť $z \in U(z_0, R)$. Volme $r > 0$, aby $|z-z_0| < r < R$. Potom z Cauchyho věty je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)dw}{w-z},$$

kde $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pro každé $w \in \langle \varphi \rangle$ máme

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{w-z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}},$$

což konverguje stejnoměrně pro $w \in \langle \varphi \rangle$. Dosadíme:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} f(w)dw = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \cdot \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \end{aligned}$$

└

□

Věta 2.2 (O nulovém bodě)

Nechť f je holomorfní funkce na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z_0) = 0$. Potom buď $\exists r > 0 : f = 0$ na $U(z_0, r)$; nebo $\exists r > 0 : f \neq 0$ na $P(z_0, r) := U(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

V druhém případě existuje jediné $p \in \mathbb{N}$ tak, že

$$f(z_0) = 0 = f'(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0), f^{(p)}(z_0) \neq 0.$$

Číslo p je tzv. násobnost nulového bodu z_0 funkce f .

Navíc z_0 je nulový bod f násobnosti $p \in \mathbb{N}$, právě když existuje $r > 0$ a $g \in \mathcal{H}(U(z_0, r))$ tak, že $\forall z \in U(z_0, r)$:

$$g(z) \neq 0 \wedge f(z) = (z - z_0)^p g(z).$$

┌

Důkaz

Máme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z \in U(z_0, R)$. Pokud nenastane první případ, potom existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \neq 0$. Zvolme nejmenší $p \in \mathbb{N}$, aby $0 \neq a_p = f^{(p)}(z_0)/p!$. Potom platí rovnost pro druhý případ a $\forall z \in U(z_0, R)$:

$$f(z) = a_p(z - z_0)^p = \dots = (z - z_0)^p \underbrace{\sum_{n=p}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-p}}_{=:g(z)}.$$

Zřejmě $g \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$. Protože $g(z_0) = a_p \neq 0$, $\exists r > 0$ tak, že $g \neq 0$ na $U(z_0, r)$. Tudíž $f(z) = (z - z_0)^p \cdot g(z) \neq 0$ na $P(z_0, r)$. Obrácené tvrzení plyne stejně snadno. \square

└

Věta 2.3 (O jednoznačnosti pro holomorfní funkce)

Nechť $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f, g \in \mathcal{H}(G)$. Následující je ekvivalentní

1. $f = g$ na G ;
2. $M := \{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$ má v G hromadný bod, tzn. existuje z_0 tak, že $P(z_0, r) \cap M \neq \emptyset \forall r > 0$;
3. Existuje $z_0 \in G$ tak, že

$$f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

┌ *Důkaz*

BÚNO předpokládejme, že $g = 0$, jinak uvažujme $f - g$. „1 \implies 2 a 2 \implies 3“: Necht $z_0 \in G$ je hromadný bod $M := \{z \in G \mid f(z) = 0\}$. Zřejmě $f(z_0) = 0$ a z předchozí věty je $f = 0$ na nějakém okolí z_0 .

„3 \implies 1“: Uvažme $N := \{z \in G \mid \forall k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(z) = 0\}$. Potom $\emptyset \neq N$ a N je uzavřená v G , protože všechny $f^{(k)}$ jsou spojité. Navíc N je otevřená. Necht $z_1 \in N$. Podle věty o nulovém bodě existuje $r > 0$ tak, že $f = 0$ na $U(z_1, r)$. Tedy $U(z_0, r) \subset N$. Protože G je oblast (tj. je souvislá, tedy neexistuje vlastní obojetná podmnožina), je $N = G$. \square

└

Věta 2.4 (Princip maxima modulu)

Necht $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f je na G konstantní, pokud $|f|$ nabývá v G lokální maximum, tzn. existuje $z_0 \in G$ a $r > 0$, že $\forall z \in U(z_0, r) \subset G : |f(z)| \leq |f(z_0)|$.

┌ *Důkaz*

Necht to platí. Potom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, z \in U(z_0, r).$$

Necht $0 < \varrho < r$. Potom

$$\begin{aligned} |a_0|^2 &= |f(z_0)|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \varrho e^{it})|^2 dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varrho^n e^{int} \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \overline{a_m} \varrho^m e^{-imt} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{a_n} \varrho^{2n} \implies a_m = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

└ \square

3 Riemannova sféra

Definice 3.1 (Riemannova sféra (\mathbb{S}))

Označme $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a definujeme okolí v ∞ následovně: Pro každou $\varepsilon > 0$ položme

$$P(\infty, \varepsilon) := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\varepsilon} \right\}, \quad U(\infty, \varepsilon) := P(\infty, \varepsilon) \cup \{\infty\}.$$

Definice 3.2 (Limita na \mathbb{S})

Je-li $z_0, L \in \mathbb{S}$, potom $L = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

$$z \in P(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(L, \varepsilon).$$

Tvrzení 3.1 (Vlastnosti limity na \mathbb{S})

- $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$, má-li alespoň jedna strana smysl.
- Následující je ekvivalentní: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$.
- Počítání s ∞ : $\frac{a}{\infty} = 0 \ \forall a \in \mathbb{C}$, $\frac{a}{0} = \infty \ \forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$, $a \pm \infty = \infty \ \forall a \in \mathbb{C}$, $a \cdot \infty = \infty \ \forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$. Nedefinujeme $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$. Potom platí i v \mathbb{S} aritmetika limit.
- \mathbb{S} je jednobodovou kompaktifikací \mathbb{C} .
- \mathbb{S} je homeomorfní s jednotkovou sférou $S^2 := \{[\alpha, \beta, \gamma] \in \mathbb{R}^3 | \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\}$, speciálně \mathbb{S} je kompaktní.

4 Izolované singularity

Definice 4.1

Nechť f je holomorfní funkce na $P(z_0) = P(z_0, r)$. Potom f má v z_0 :

- odstranitelnou singularitu, existuje-li $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$;
- pól, je-li $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$;
- podstatnou singularitu, pokud $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ neexistuje v \mathbb{S} .

Věta 4.1 (O odstranitelné singularitě)

Nechť f je holomorfní funkce na $P(z_0)$. Následující je ekvivalentní:

1. z_0 je odstranitelná singularita f .
2. Existuje $r > 0$ tak, že f je omezená na $P(z_0, r)$.
3. Existuje $F \in \mathcal{H}(U(z_0))$ tak, že $F = f$ na $P(z_0)$.

┌
Poznámka (Úmluva)

Každá odstranitelná singularita se považuje za odstraněnou (tj. bereme F místo f).

└

┌ *Důkaz*

„1. \implies 2., 2. \implies 3.“: Položme

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & z \in P(z_0), \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Potom $g \in \mathcal{H}(U(z_0))$, protože

$$g'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{(z - z_0)}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{f(z)}_{\text{omezená}} = 0.$$

Dále (pro „3. \implies 1.“) $\forall z \in U(z_0)$:

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \cdot F(z),$$

kde $F(z) := \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2}$. Potom $F \in \mathcal{H}(U(z_0))$ a $\forall z \in P(z_0)$:

$$(z - z_0)^2 \cdot f(z) = (z - z_0)^2 \cdot F(z).$$

└

□

Poznámka

Píšeme $f(z) \sim g(z)$ pro $z \rightarrow z_0$, pokud $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Věta 4.2 (O póle)

Nechť f je holomorfní funkce na $P(z_0)$. Následující je ekvivalentní:

1. z_0 je pól f .
2. $h := \frac{1}{f}$ (po dodefinování $h(z_0) = 0$) má v z_0 nulový bod násobnosti $p \in \mathbb{N}$.
3. Existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Tedy $f(z) \sim \frac{1}{(z - z_0)^p}$ pro $z \rightarrow z_0$.)
4. Existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) \begin{cases} = \infty, & \text{je-li } k < p, \\ \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, & k = p, \\ 0, & k > p. \end{cases}$$

┌ *Důkaz*

„1. \implies 2.“: Protože $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, je $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Po odstranění singularity, tzn. po dodefinování $h(z_0) = 0$, má $h = \frac{1}{f}$ nulový bod v z_0 konečné násobnosti $p \in \mathbb{N}$.

„2. \implies 3.“: Existuje $r > 0$ a $g \in \mathcal{H}(U(z_0, r))$ tak, že $g \neq 0$ na $U(z_0, r)$ a

$$h(z) = (z - z_0)^p \cdot g(z), \quad z \in U(z_0, r).$$

Potom $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(z_0)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

„3. \implies 4.“: Máme

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{(z - z_0)^{k-p}}_{\rightarrow 0, k > p/1, k=p/\infty, k < p} \cdot \underbrace{(z - z_0)^p f(z)}_{\rightarrow \dots \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}.$$

„4. \implies 1.“: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)|_{k=0} = \infty$. □

Definice 4.2 (Násobnost pólu)

Číslo p je určeno jednoznačně a nazývá se násobnost pólu z_0 funkce f .

Věta 4.3 (Casorati-Weierstrass)

Nechť f je holomorfní na $P(z_0)$. Následující je ekvivalentní:

1. z_0 je podstatná singularita f .

2. $\forall r > 0 : \overline{f(P(z_0, r))} = \mathbb{C}$.

Poznámka (Velká Picardova věta)

Platí dokonce (i když je to těžké dokázat)

$$\forall r > 0 : \mathbb{C} \setminus f(P(z_0, r))$$

je nejvýše jednobodová.

┌ *Důkaz*

„2. \implies 1.“ jasné, použije se definice limity.

„1. \implies 2.“ (konkrétně ukážeme $\neg 2. \implies \neg 1.$): Předpokládejme, že existuje $r > 0$, že $\mathbb{C} \setminus \overline{f(P(z_0, r))} \neq \emptyset$ a $f \in \mathcal{H}(P(z_0, r))$. Potom existuje $U(u_0, \beta) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f(P(z_0, r))}$, speciálně $0 < |z - z_0| < r \implies |f(z) - u_0| \geq \beta$.

Definujeme

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - u_0}, \quad z \in P(z_0, r).$$

Zřejmě je g holomorfní a $|g| \leq \frac{1}{\beta}$ na $P(z_0, r)$. Tedy z_0 je odstranitelná singularita g a $\exists L := \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \in \mathbb{C}$. Potom

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{1}{g(z)} + u_0 \right) \begin{cases} \in \mathbb{C}, & L \neq 0, \\ \infty, & L = \infty. \end{cases}$$

└ Tedy f má v z_0 buď pól nebo odstranitelnou singularitu. Nikdy podstatnou. □

5 Laurentovy řady

Definice 5.1 (Laurentova řada (LŘ), regulární část, hlavní část, konvergence LŘ)

Nechť $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

je Laurentova řada s koeficienty $\{a_n\}$ a středem z_0 . První řada na pravé straně je tzv. regulární část, druhá je pak hlavní část. Řekneme, že řada konverguje, pokud obě řady na pravé straně konvergují.

Tvrzení 5.1 (Vlastnosti)

- *Konvergence:* Existují jediná $r, R \in [0, +\infty]$ tak, že regulární část konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $|z - z_0| < R$ a diverguje na $|z - z_0| > R$; hlavní část konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $|z - z_0| > r$ a diverguje pro $|z - z_0| < r$.

R je zřejmé, pro získání r dosadíme $w := (z - z_0)^{-1}$ a vezmeme 1 / poloměr konvergence vyšle mocninné řady.

- *Součet:* Nechť $0 \leq r < R \leq +\infty$. Pak Laurentova řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na vnitřku mezikruží dané r a R (značíme $P(z_0, r, R)$) a bude divergovat mimo něj (na hranici nevíme).

Označíme-li součet jako f , potom $f \in \mathcal{H}(P(z_0, r, R))$ a řadu derivujeme člen po členu.

Lemma 5.2

Nechť f je holomorfní funkce na $P(z_0, r, R) =: P$, kde $0 \leq r < R \leq +\infty$. Pro každé $\varrho \in (r, R)$ označíme $\varphi_\varrho(t) := z_0 + \varrho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ a $J(\varrho) := \int_{\varphi_\varrho} f$. Potom J je konstantní na (r, R) .

┌

Důkaz

BÚNO: Nechť $z_0 = 0$. Nechť $\varrho \in (r, R)$. Potom

$$J(\varrho) = i \int_0^{2\pi} f(\varrho e^{it}) \varrho e^{it} = i \int_0^{2\pi} g(\varrho e^{it}) dt,$$

kde $g(z) := f(z) \cdot z$, $z \in P$.

Dále $J'(\varrho) \stackrel{?}{=} \frac{i}{\varrho} \int_0^{2\pi} g'(\varrho e^{it}) \varrho e^{it} dt = \frac{1}{\varrho} \int_{\varphi_\varrho} g' = 0$, protože g' má primitivní funkci g na P .

? platí, protože

$$\frac{d}{d\varrho} g(\varrho e^{it}) = \frac{\partial g}{\partial x} \cos t + \frac{\partial g}{\partial y} \sin t = g' \cos t + i g' \sin t = \varrho e^{it} = (\varrho \cos t, \varrho \sin t).$$

└

□

Věta 5.3 (Cauchyho vzorec na mezikruží)

Nechť $f \in \mathcal{H}(P)$, $P := P(z_0, r, R)$. Nechť $r < r_0 < R_0 < R$ a $s \in P(z_0, r_0, R_0)$. Potom platí

$$f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z) dz}{z - s} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z) dz}{z - s},$$

kde φ_ϱ je jako v předchozím lemmatu.

┌

Důkaz

Pro $z_0 \in P$ položíme $h(z) := \frac{f(z) - f(s)}{z - s}$, $z \neq s$, a $h(z) := f'(s)$, $z = s$. Potom $h \in \mathcal{H}(P)$, protože h má v s „odstraněnou“ singularitu.

Podle předchozího lemmatu máme

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{\varphi_{R_0}} h}_{=} &= \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z) dz}{z - s} - f(s) \cdot \int_{\varphi_{R_0}} \frac{dz}{z - s} \\ \underbrace{\int_{\varphi_{r_0}} h}_{=} &= \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z) dz}{z - s} - f(s) \cdot \int_{\varphi_{r_0}} \frac{dz}{z - s} = \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z) dz}{z - s} - 0. \end{aligned}$$

└

□

Věta 5.4 (O Laurentově rozvoji holomorfní funkce na mezikruží)

Nechť $P := P(z_0, r, R)$, kde $0 \leq r < R \leq \infty$. Nechť $f \in \mathcal{H}(P)$. Pak existuje jediná Laurentova řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

která má na P součet f .

Navíc platí $a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\varrho} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{m+1}}$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a φ_ϱ je jako výše.

┌

Důkaz (Jednoznačnost)

Nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, $z \in P$. Nechť $\varrho \in (r, R)$ a $m \in \mathbb{Z}$. Potom

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_\varrho} f(z) (z - z_0)^{-(m+1)} dz &= \int_{\varphi_\varrho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m-1} dz = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\varphi_\varrho} (z - z_0)^{n-m-1} dz = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2\pi \operatorname{ind}_{\varphi_\varrho} z_0, & m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

└

□

Věta 5.5 (O Laurentově rozvoji kolem izolované singularity)

Nechť $f \in \mathcal{H}(P(z_0, r))$ a $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, $z \in P(z_0, r)$. Potom

- f má v z_0 odstranitelnou singularitu $\Leftrightarrow \forall n < 0 : a_n = 0$;
- f má v z_0 pól násobnosti $p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{-p} \neq 0$ a $\forall n < -p : a_n = 0$;
- f má v z_0 podstatnou singularitu $\Leftrightarrow a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$.

┌

Důkaz

Odstranitelná je jasná. f má v z_0 pól násobnosti p právě když $g(z) := (z - z_0)^p f(z)$ má v z_0 odstranitelnou singularitu a po jejím odstranění je $g(z_0) \neq 0$. Neboli $(z - z_0)^p f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$, $z \in P(z_0, r)$ a $b_0 = g(z_0) \neq 0$, tzn.

$$f(z) = \frac{b_0}{(z - z_0)^p} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{p-1}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-p}, z \in P(z_0, r).$$

Z prvních dvou vidíme, že f nemá v z_0 podstatnou singularitu, právě když $a_n \neq 0$ pro konečně mnoho $n < 0$.

└

□

Věta 5.6 (Rozklad holomorfní funkce s konečně mnoha izolovanými singularitami)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřena, $M \subset F$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \setminus M)$. Pro každé $s \in M$ označme H_s

součet hlavní části Laurentova rozvoje funkce f kolem s . Potom existuje jediná $h \in \mathcal{H}(G)$ tak, že $f = \sum_{s \in M} H_s + h$ na $G \setminus M$.

┌
Důkaz

Zřejmě $\forall s \in M : H_s \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{s\})$. Funkce $h := f - \sum_{s \in M} H_s$ je holomorfní na $G \setminus M$ a v bodech $s \in M$ má odstranitelné singularity. Skutečně, nechť $s_0 \in M$, potom existuje $r_0 > 0$ tak, že $P(s_0, r_0) \subseteq G \setminus M$ a $f = R_{s_0} + H_{s_0}$ na $P(s_0, r_0)$, kde R_{s_0} je součet regulární části Laurentova rozvoje f kolem s_0 a $R_{s_0} \in \mathcal{H}(U(s_0, r_0))$. Tedy na $P(s_0, r_0)$ máme

$$h = R_{s_0} + H_{s_0} - \sum_{s \in M} H_s = R_{s_0} - \sum_{s \neq s_0, s \in M} H_s \in \mathcal{H}(U(s_0, r_0)).$$

└

□

5.1 Reziduum

Definice 5.2 (Reziduum)

Nechť $f \in \mathcal{H}(P(z_0))$ a nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z \in P(z_0)$. Potom reziduem f v z_0 nazveme číslo $\text{res}_{z_0} f := a_{-1}$.

Věta 5.7 (Reziduová na hvězdovitých oblastech)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast, $M \subset G$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \setminus M)$. Nechť φ je uzavřená křivka v $G \setminus M$. Potom máme

$$\int_{\varphi} f = 2\pi i \sum_{s \in M} \text{res}_s f \cdot \text{ind}_{\varphi} s.$$

┌
Poznámka

Pro $M = \emptyset$ dostaneme Cauchyho větu.

┌
Důkaz

Podle předchozí věty existuje $h \in \mathcal{H}(G)$ tak, že $f = \sum_{s \in M} H_s + h$ na $G \setminus M$. Potom máme $\int_{\varphi} f = \sum_{s \in M} \int_{\varphi} H_s$, protože $\int_{\varphi} h = 0$ z Cauchyho věty pro hvězdovité oblasti. Pro každé $s \in M$:

$$\int_{\varphi} H_s(z) dz = \int_{\varphi} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}^s \frac{1}{(z-s)^n} dz = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}^s \int_{\varphi} \frac{dz}{(z-s)^n} = 2\pi i \cdot \text{res}_s f \cdot \text{ind}_{\varphi} s,$$

jelikož suma konverguje stejnoměrně na $\langle \varphi \rangle$ a poslední integrál je roven 0 pro $n \neq 1$ (jinak má integrand primitivní funkci, a tudíž je \oint nulový) a $2\pi i \cdot \text{ind}_{\varphi} s$, je-li $n = 1$. □

5.2 Speciální typy integrálů

Věta 5.8

Nechť $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, které nemají společné kořeny a platí $Q \neq 0$ na \mathbb{R} a $\text{st}(Q) \geq \text{st}(P) + 2$, kde $\text{st}(Q)$ je stupeň polynomu Q . Potom

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2i\pi \cdot \sum_{Q(s)=0, \Im(s)>0} \text{res}_s R.$$

┌

Důkaz

Integrál konverguje, právě když platí podmínky (cvičení). Nechť $r > 0$ a $\varphi_r := \varphi_r^1 + \varphi_r^2$, kde $\varphi_r^1(t) := t$, $t \in [-r, r]$ a $\varphi_r^2(t) := re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Je-li $r > 0$ tak velké, aby uvnitř φ_r ležely všechny póly R z horní poloroviny, potom

$$2i\pi \sum_{Q(s)=0, \Im(s)>0} \text{res}_s R = \int_{\varphi_r} R = \int_{\varphi_r^1} R + \int_{\varphi_r^2} R.$$

Máme

$$\int_{\varphi_r^1} R = \int_{-r}^r R \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} R.$$

Protože $\int_{\varphi_r^2} \rightarrow 0$, dostaneme, že věta platí, neboť existuje $C > 0$, $r_0 > 0$ tak, že $|R(z)| \leq \frac{C}{r^2}$, je-li $|z| = r \geq r_0$. Máme totiž

$$|R(z)| = \left| \frac{a_0 z^n + \dots + a_n z^0}{b_0 z^m + \dots + b_m z^0} \right| = \frac{1}{|z|^2} |z|^{n-m+2} \cdot \left| \frac{a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}}{b_0 + \frac{b_1}{z} + \dots + \frac{b_m}{z}} \right|.$$

Tedy

$$\left| \int_{\varphi_r^2} R \right| \leq V(\varphi_r^2) \cdot \max_{<\varphi_r^2>} |R| \leq r\pi \frac{C}{r^2} \rightarrow 0.$$

└

□

Věta 5.9

Nechť $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, které nemají společné kořeny a platí $Q \neq 0$ na \mathbb{R} a $\text{st}(Q) \geq \text{st}(P) + 1$. Nechť $a > 0$. Potom

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx = 2i\pi \cdot \sum_{Q(s)=0, \Im(s)>0} \text{res}_s (R(z) e^{iaz}).$$

┌ *Důkaz* (Cvičení)

Newtonův integrál konverguje právě za těchto podmínek, jak spočteme tento integrál pro $a < 0$?

Jako v předešlé větě integrujeme podél φ_r funkci $R(z)e^{iaz}$ a pošleme $r \rightarrow +\infty$. Platí, že

$$\int_{\varphi_r^2} R(z)e^{iaz} dz \rightarrow 0$$

z Jordanova Lemmatu, z podmínky na stupně totiž máme, že $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$. □

TODO!!!

6 Výpočet indexu

Poznámka (Úmluva)

Bod, pro který počítáme index, je 0.

Definice 6.1 (Jednoznačná větev argumentu (j. v. a.), jednoznačná větev logaritmu (j. v. l.))

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je spojitá.

┌ *Poznámka*

Víme: $0 \neq z = |z|e^{i\theta} = e^\Phi$, kde $\theta \in \text{Arg}(z)$ a $\Phi := \log|z| + i\theta \in \text{Log}z$.

Tedy $\forall t \in [\alpha, \beta] : 0 \neq \varphi(t) = |\varphi(t)| \cdot e^{i\theta(t)} = e^{\Phi(t)}$, kde $\theta(t) \in \text{Arg}(\varphi(t))$ a $\Phi(t) := \log|\varphi(t)| + i\theta(t) \in \text{Log}(\varphi(t))$

Řekněme, že $\theta : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\Phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$) je jednoznačná větev argumentu (respektive jednoznačná větev logaritmu) křivky φ , pokud je θ (resp. Φ) spojitá na $[\alpha, \beta]$ a $\forall t \in [\alpha, \beta] : \theta(t) \in \text{Arg}(\varphi(t))$ (resp. $\Phi(t) \in \text{Log}(\varphi(t))$).

Věta 6.1 (O jednoznačnosti j. v. a. a j. v. l.)

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je spojitá. Potom Φ je j. v. l. φ , právě když $\Re \Phi = \log|\varphi|$ a $\Im \Phi$ je j. v. a. φ .

Jsou-li θ_1, θ_2 j. v. a. φ , potom existuje $k \in \mathbb{Z}$ tak, že

$$\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi \quad \text{na } [\alpha, \beta].$$

┌ *Důkaz*

j. v. l. z definice. „j. v. a.“: Pro každé $t \in [\alpha, \beta]$ existuje $k(t) \in \mathbb{Z}$ tak, že

$$\theta_2(t) = \theta_1(t) + 2k(t)\pi.$$

Protože $k : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{Z}$ je spojitá, je k na $[\alpha, \beta]$ konstantní. □

Věta 6.2 (O existenci j. v. logaritmu pro regulární křivky)

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je regulární křivka. Potom existuje j. v. l. Φ křivky φ a platí, že

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{z} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Navíc $\Im \Phi$ je j. v. a. φ .

┌ *Důkaz*

Hledáme spojitou Φ takovou, že $\varphi = e^{\Phi}$. Zřejmě

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{z} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi'(t)}{\varphi} dt, \quad \Phi_0(s) := \int_{\alpha}^s \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt, \quad s \in [\alpha, \beta].$$

Potom Φ_0 je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a $\Phi'_0 = \frac{\varphi'}{\varphi}$ na $[\alpha, \beta] \setminus K$, kde K je konečná.

Potom na $[\alpha, \beta] \setminus K$ platí

$$(\varphi \cdot e^{-\Phi_0})' = (\varphi' - \varphi \cdot \Phi'_0) \cdot e^{-\Phi_0} = 0,$$

tudíž existuje $c \in \mathbb{C}$, že $\varphi \cdot e^{-\Phi_0} = e^c$ na $[\alpha, \beta]$. Stačí položit $\Phi := \Phi_0 + c$. □

Věta 6.3 (O výpočtu indexu)

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je regulární uzavřená křivka a $s \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Nechť $\tilde{\varphi} := \varphi - s$ a θ je j. v. a. $\tilde{\varphi}$. Potom

$$\text{ind}_{\varphi} s = \text{ind}_{\tilde{\varphi}} 0 = \frac{\theta(\beta) - \theta(\alpha)}{2\pi}.$$

Speciálně $\text{ind}_{\varphi} s \in \mathbb{Z}$.

┌ *Důkaz*

Platí $\text{ind}_{\varphi} s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - s} dt = \text{ind}_{\tilde{\varphi}} 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\varphi}} \frac{dz}{z} =$

$$= \frac{1}{2\pi i} (\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)) = \frac{1}{2\pi i} (i\Im \Phi(\beta) - \Im \Phi(\alpha)) = \frac{\theta(\beta) - \theta(\alpha)}{2\pi} \in \mathbb{Z},$$

kde θ je j. v. l. $\tilde{\varphi}$, $\Re \Phi(\beta) = \log |\tilde{\varphi}(\beta)| = \log |\tilde{\varphi}(\alpha)| = \Re \Phi(\alpha)$ a $\theta := \Im \Phi$ je j. v. a. $\tilde{\varphi}$. □

6.1 Obecná Cauchyho a reziduální věta pro cykly

Definice 6.2 (Cyklus)

Konečnou posloupnost $\Gamma := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jsou uzavřené (regulární) křivky v \mathbb{C} budeme nazývat cyklus.

Definice 6.3

Označíme:

- $\langle \Gamma \rangle := \bigcup_{k=1}^n \langle \varphi_k \rangle$ graf Γ ;
- $V(\Gamma) := \sum_{k=1}^n V(\varphi_k)$ délka Γ ;
- $\int_{\Gamma} f := \sum_{k=1}^n \int_{\varphi_k} f$, je-li f spojitá na $\langle \Gamma \rangle$;
- $\text{ind}_{\Gamma} z_0 := \sum_{k=1}^n \text{ind}_{\varphi_k} z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$;
- $\text{int } \Gamma := \{z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle \mid \text{ind}_{\Gamma} z_0 \neq 0\}$ vnitřek Γ ;
- $\text{ext } \Gamma := \{z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle \mid \text{ind}_{\Gamma} z_0 = 0\}$ vnějšek Γ .

Poznámka (Úmluva)

Uzavřenou křivku φ chápeme jako cyklus.

Věta 6.4 (Reziduová pro cykly)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, Γ je cyklus v G a $\text{int } \Gamma \subset G$. Nechť $K \subset G \setminus \langle \Gamma \rangle$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \setminus K)$. Potom platí

$$\int_{\Gamma} f = 2\pi i \cdot \sum_{s \in K} \text{res}_s f \cdot \text{ind}_{\Gamma} s.$$

┌
Důkaz

Zcela analogický jako pro RV na hvězdovitých oblastech. □

Věta 6.5 (Obecná Cauchyho pro cykly)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a Γ je cyklus v G , tzn. $\langle \Gamma \rangle \subset G$. Potom platí, že

$$\int_{\Gamma} f = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(G),$$

právě když $\text{int } \Gamma \subset G$.

┌
Důkaz

„ \implies “ Ať platí $\forall f \in \mathcal{H}(G) : \int_{\Gamma} f = 0$. Je-li $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$, pak $f(z) := \frac{1}{z-z_0} \in \mathcal{H}(G)$, a tedy $\text{ind}_{\Gamma} z_0 = 0$, neboli $z \in \text{ext } \Gamma$.

„ \impliedby “: Nechť $\text{int } \Gamma \subset G$ a $f \in \mathcal{H}(G)$. Nejdříve dokážeme, že

$$\forall \xi \in G \setminus \langle \Gamma \rangle : \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z-\xi} = f(\xi) \cdot \text{ind}_{\Gamma} \xi,$$

což je ekvivalentní s

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) - f(\xi)}{z-\xi} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z-\xi} - f(\xi) \cdot \text{ind}_{\Gamma} \xi.$$

$$g(z, \xi) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi}, & \text{pro } z \neq \xi, (z, \xi) \in G \times G, \\ f'(z), & \text{pro } z = \xi, (z, \xi) \in G \times G. \end{cases}$$

Potom a) je spojitá na $G \times G$ a b) $\forall z \in G : g(z, \cdot) \in \mathcal{H}(G)$. Dále zvolme $\xi \in G \setminus \langle \Gamma \rangle$ a položíme $f_1(z) := (z - \xi)f(z)$, $z \in G$. Pomocí rovnosti ze začátku důkazu dostáváme:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} \frac{f_1(z)dz}{z-\xi} = 2\pi i \cdot f_1(\xi) \cdot \text{ind}_{\Gamma} \xi = 0.$$

└

┌
Důkaz (a)

Jasně v bodech (z, ξ) , $z \neq \xi$. Nechť $z_0 \in G$. Dokážeme, že g je spojitá v (z_0, z_0) . Nechť $\varepsilon > 0$. Protože f' je spojitá v $z_0 \in G$, existuje $r > 0$ takové, že $U(z_0, r) \subset G$ a

$$\forall z \in U(z_0, r) : |f'(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon.$$

Je-li $z, \xi \in U(z_0, r)$ a $z \neq \xi$, potom pro úsečku $\varphi(t) := \xi + t(z - \xi)$, $t \in [0, 1]$ platí

$$f(z) - f(\xi) = \int_{\varphi} f' = \int_0^1 f'(\varphi(t)) \cdot (z - \xi) dt = (z - \xi) \cdot \int_0^1 f'(\varphi(t)) dt \implies$$

$$\implies |g(z, \xi) - g(z_0, z_0)| = \left| \int_0^1 (f'(\varphi(t)) - f'(z_0)) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Pro $z \in U(z_0, r)$ je $|g(z, z) - g(z_0, z_0)| = |f'(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon$.
└

□

┌ *Důkaz* (b)

Jasně pro $\xi \neq z$. V $\xi = z$ je ale odstranitelná singularita. Položme

$$h(\xi) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z, \xi) dz, \quad \xi \in G.$$

Podle následující věty $h \in \mathcal{H}(G)$. Je-li $\xi \in G \cap \text{ext } \Gamma$, potom máme $h(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-\xi} dz$. Položme

$$h(\xi) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-\xi} dz, \quad \xi \in \text{ext } \Gamma \setminus G.$$

Potom h je holomorfní na G i na $\text{ext } \Gamma$, tedy i na celém $\mathbb{C} = G \cup \text{ext } \Gamma$. Ukážeme, že h je omezená. Potom z Liouvillovy věty plyne, že h je konstantní. Skutečně, máme $\lim_{\xi \rightarrow \infty} h(\xi) = 0$. To plyne takto: Necht $\langle \Gamma \rangle \subset U(0, R)$. Je-li $|\xi| > R$, potom

$$|h(\xi)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot V(\Gamma) \cdot \max_{\langle \Gamma \rangle} |f| \cdot \frac{1}{|\xi| - R} \rightarrow 0,$$

protože $|z - \xi| \geq |\xi| - |z| \geq |\xi| - R$. Tedy $h = 0$ na \mathbb{C} , speciálně platí rovnost ze začátku důkazů. ┐

Věta 6.6 (O derivování integrálu podle komplexního parametru)

Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a Γ je cyklus. Necht g je spojitá funkce na $\langle \Gamma \rangle \times G$ a $\forall z \in \langle \Gamma \rangle : g(z, \cdot) \in \mathcal{H}(G)$. Potom je funkce

$$h(\xi) := \int_{\Gamma} g(z, \xi) dz, \quad \xi \in G$$

holomorfní na G .

┌ *Důkaz*

Zřejmě je h spojitá na G . Necht Δ je trojúhelník v G . Potom

$$\int_{\partial \Delta} h(\xi) d\xi = \int_{\partial \Delta} \left(\int_{\Gamma} g(z, \xi) dz \right) d\xi = \int_{\Gamma} \underbrace{\left(\int_{\partial \Delta} g(z, \xi) d\xi \right)}_{\stackrel{\text{Goursat}}{=} 0} dz = 0.$$

┌ Z Morerovy věty plyne, že $h \in \mathcal{H}(G)$. ┐

Věta 6.7

Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Potom platí $\text{int } \Gamma \subset G$ pro každý cyklus Γ v G , právě když $\mathbb{S} \setminus G$ je souvislá.

┌
Důkaz

„ \implies “ Těžký. Bude v komplexce 1.

„ \impliedby “: Necht Γ je cyklus v G . Položme $\text{ind}_\Gamma \infty = 0$. Potom zřejmě $\text{ind}_\Gamma : \mathbb{S} \setminus \langle \Gamma \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$ je spojitá, tudíž konstantní na každé komponentě $\mathbb{S} \setminus \langle \Gamma \rangle$. Speciálně máme $\forall s \in \mathbb{S} \setminus G : \text{ind}_\Gamma s = 0$, tedy $\text{int } \Gamma \subset G$.
└ □

Definice 6.4 (Jednoduše souvislá (j. s.))

Oblast $G \subset \mathbb{C}$ se nazývá jednoduše souvislá, pokud $\mathbb{S} \setminus G$ je souvislá.

Poznámka

Hvězdovité oblasti jsou jednoduše souvislé oblasti, ale ne naopak.

Je-li $G \subset \mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, potom v Cauchyově a reziduové větě je podmínka $\text{int } \Gamma \subset G$ splněna automaticky, je-li Γ cyklus v G .

Definice 6.5 (Jordanova křivka)

Řekneme, že uzavřená spojitá křivka $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je Jordanova, pokud $\varphi|_{[\alpha, \beta]}$ je prosté zobrazení.

Poznámka

Pojem indexu, vnitřku a vnějšku lze zobecnit i pro spojitě uzavřené křivky.

Věta 6.8

Necht φ je Jordanova křivka v \mathbb{C} . Potom $\text{int } \varphi$ a $\text{ext } \varphi$ jsou oblasti a $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle = \text{int } \varphi \cup \text{ext } \varphi$. Navíc buď $\forall s \in \text{int } \varphi : \text{ind}_\varphi s = 1$, nebo $\forall s \in \text{int } \varphi : \text{ind}_\varphi s = -1$.

┌
Důkaz

└ Těžký. Nebude. □

Poznámka

Bavili jsme se o tom, co bylo v předchozí přednášce a o zkouškách (+ cvičení z indexu).

Poznámka (Písemka)

Teorie (60 minut) + příklady (75 minut) s krátkou přestávkou. Výsledky hned ten den.