Organizační úvod

Poznámka (Zápočet)
Za vypracování domácích úloh.

Poznámka (Zkouška)
Písemná, ale Covid?

Úvod

MA je na rovném prostoru ^{n} Naším cílem je vybudovat analýzu na nerovném? prostoru, tzv. varietě.

Poznámka (literatura)
Skripta – Krump, Souček, Těšínský: MA ve varietách
Sborník příkladů – Kopáček: Příklady z matematiky pro fyziky III.

1 Opakování

'Odvozovali' (přes limity velikosti rozdělení jdoucí k nule) jsme si:

Křivkový integrál 1. druhu, křivkový integrál 2. druhu. Integrální věty (pol. 19. stol, moderní formulace Cardan (1945)): Věta o potenciálu, Greenova věta

Plošný integrál 1. druhu, plošný integrál 2. druhu. Integrální věty: Stokesova věta, Gauss-Ostrogradského věta

2 Stokesova věta v ^{n}, diferenciální formy v ^{n}

Věta 2.1 (Moderní (= obecná) formulace Stokesovy věty = Cíl (Cartan 1945))

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

Kde S je buď 'singulární' -plocha v R^n (tato část) nebo -varieta s okrajem (3. část).

2.1 Vnější algebra vektorového prostoru

Motivace: Jak násobit vektory z ^{n}?

Poznámka
Násobení na ^{n} zachovává Eklidovskou normu (tzn. $||x \cdot y = ||x|| \cdot ||y||)$ pouze v dimenzích 1, 2, 4, 8 (= , , kvaterniony, oktocosi).

Definice 2.1 (Algebra)

Algebra nad tělesem k (=) je vektorový prostor nad k s bilineárním zobrazením ....

Algebra je asociativní, jestliže co asi.

Algebra má jednotku, jestliže existuje co asi ;)

Definice 2.2

Nechť Λ je vektorový prostor nad

Poznámka (Vlastnosti vnější algebry)
$\dim \Lambda *() = 2^n$, protože každý vektor je určen bázovými vektory, kterých je jako podmnožin n prvkové množiny

TODO

$$e_I \wedge e_J = 0, \text{je-li} I \cap J \neq \emptyset \qquad = sgn(\text{permutace}) e_{I \cup J}, \text{je-li} I \cap J = \emptyset$$

Je-li $\omega \in \Lambda^k()$ a $\tau \in \Lambda^l()$, potom $\omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega \in \Lambda k + l()$.

Důkaz
(Dokázat, že prohození je právě $k \cdot l$, následně z linearity násobení) □

Věta 2.2

Nechť je vektorový prostor s bází $e_1, \dots e_n$. *Nechť* $v_1, v_2, \dots v_k \in$, *kde* $1 \leq k \leq n$. *Potom* $v_i = \sum_{j=1}^n v_i^j e_j$ *a označme* $= \left(v_i^j\right)_{j=1,\dots,n; i=1,\dots,k}$ *je matice* $n \times k$ *jejich souřadnice (sloupec* i *je vektor* i*). Je-li* J *k-prvková podmnožina* $\{1, \dots, n\}$, *označ* $W_j := (v_i^j)_{j \in I; i=1,\dots,k}$ *(minor* $k \times k$*). Potom* $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots k = \sum_{|J|=k} (\det(W_j)) e_J$.

Důkaz
Posčítáním. A dokázáním, že to je definice determinantu. □

Definice 2.3 (Skalární součin na $\Lambda * ()$)

Nechť je vektorový prostor se skalárním součinem (?, symetrický) $< \cdot, \cdot >$ a $e_1, \ldots, e_n$ je ortonormální báze .

Definujeme skalární součin ve $\Lambda * ()$ jako:

$$\{\ldots\}$$

TODO!

Úmluva
^{n} chápeme jako Euklidovský prostor se standardní bází $e_1, \ldots e_n$ a TODO!

Například
Nechť R je rovnoběžnostěn v ^{n} určený vektory $v_1, \ldots, v_k$, kde $1 \leq k \leq n$. Potom k-dimenzionální objem R je roven:

$$\mathrm{vol}_k(R) = ||v_1 \wedge \ldots \wedge v_k||,$$

kde $||x||$ je euklidovská norma.

Důkaz
TODO! □

TODO TODO!

Definice 2.4 (Vektorový součin v ^{n})

Nechť $v_1, \ldots, v_{n-1} \in^n$. Potom jejich vektorový součin $v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1} \in^n$ je definován jako $*(v_1 \times \cdots \times v_{n-1}) = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$

Poznámka
Ve skriptech označeno $[v_1, \ldots, v_{n-1}]$.

Poznámka (Platí)

$$v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = (-1)^{n-1} * (v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1})(zCv.2TODO)$$

$$\forall \omega \in^n\colon \langle \omega, v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \rangle = \det(\omega | v_1 | cdots | v_{n-1})$$

2.2 Rozložitelné k-vektory

Nechť je vektorový prostor. Nechť $\omega \in \Lambda^k()$. Položme

$$\ker \omega := \{v \in |\omega \wedge v = 0\}.$$

Platí 1. $\ker \omega$ je podprostor

Definice 2.5 (Rozložitelné k-vektory)

$\omega \in \Lambda^k()$ je rozložitelný, pokud existují $v_1, \ldots, v_k \in$ takové, že $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$.

Platí 2. $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0 \Leftrightarrow$ vektory $v_1, \ldots, v_k$ jsou lineárně nezávislé.

Platí 3. Nechť $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0$. Potom

$$\ker \omega = \mathrm{LO}(v_1, \ldots, v_k)$$

Definice 2.6

$$R_k() := \left\{\omega \in \Lambda^k() | \omega \neq 0 \text{rozložitelný}\right\}$$

$$G_k() := \{L | Lk\text{- dimenzionální podprostor }\} \text{ (tzv. Grassmannian)}$$

Platí 4. Zobrazení $\varphi : R_k() \to G_k()$: $\omega \to \ker \omega$ je na, ale není prosté. Skutečně máme

$$\ker \omega = \ker \omega' \Leftrightarrow \exists \alpha \in ? : \omega' = \alpha\omega.$$

Například (Nerozložitelné k-vektory)
Platí 5. Pro $=^n$ jsou všechny 1-vektory, n-vektory i $(n-1)$-vektory rozložitelné.

Příklad
Rozložte $e_{123} + e_{124} + e_{234} \in \Lambda^3(^4)$, kde $e_{123} = e_{\{1,2,3\}}$.

Musíme tedy hledat v ^{4} a „výše“.

Příklad
Najděte nerozložitelný 2-vektor $\omega \in \Lambda^2(^4)$

Poznámka (Projektivní prostor)
Mezi nejdůležitější Grassmanniany patří projektivní prostor:

Nechť je vektorový prostor. Polož $P(V) := \{$1-dimenzionální podprostor $\}$.

Tvrdíme $P() = G_1()$.

TODO?

Věta 2.3 (Plückerovo vnoření)

$$G_k() \to ?P(^{(nnadk)})$$

, *je-li* dim $= n$

2.3 Diferenciální formy

$$x \in \mathbb{R}^n = (x_1, \ldots, x_n)$$

Označme $T * (\mathbb{R}^n)$ reálný vektorový prostor, jehož bázi tvoří symboly $dx_1, \ldots, dx_n$ tj.

$$T * (\mathbb{R}^4) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, dx_i | \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Definice 2.7 (Diferenciální fomrma)

Diferenciální forma ω na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je zobrazení $\omega : \Omega \to \Lambda * (T * (\mathbb{R}^n))$ třídy $\mathcal{S}^\infty$ (= je hladké).

Označme $\mathcal{E} * (\Omega)$ vektorový prostor všech diferenciálních forem na Ω. Každé $a \in \mathcal{E} * (\Omega)$ laze jednoznačně psát jako

$$\omega(x) = \sum_I \omega_I(x) \, dx_I, \tag{1}$$

kde součet je přes všechny $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $\omega_I \in \mathcal{S}^\infty(\Omega)$ a $dx_I = dx_{i_1} \vee \ldots \vee dx_{i_k}$ jsou-li prvky $i_1, \ldots, i_k$ množiny I uspořádány postupně

Definice 2.8 (Stupeň diferenciální formy)

Dále $\omega \in \mathcal{E} * (\Omega)$ má stupeň k (tzv. k-forma), pokud $\omega : \Omega \to \Lambda^k(T * (\mathbb{R}^n))$ je hladké zobrazení. Označme $\mathcal{E}^k(\Lambda)$ vektorový prostor všech k-forem na Ω.

Poznámka

Každá $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ má tvar (1), kde je součet přes všechny $|I| = k$.

Zřejmě $\mathcal{E} * (\Omega) = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{E}^k(\Omega)$ a $\mathcal{E}^0(\Omega) = \mathcal{S}^\infty(\Omega)$.

Definice 2.9 (Vnější násobení)

Na $\mathcal{E} * (\Omega)$ definujeme vnější násobení

$$(\omega \vee \tau)(x) := \omega(x) \vee \tau(x), x \in \Omega, \omega, \tau \in \mathcal{E} * (\Omega).$$

Definice 2.10 (Vnější (de Rhammův) diferenciál)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Potom definujeme zobrazení $d : \mathcal{E}*(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega)$ následovně:
(i)Je-li $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$, potom

$$(df)(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i, x \in \Omega$$

(ii) Nechť $\omega \in \mathcal{E}*(\Omega)$ je tvaru (1). Potom

$$dw := \sum_I (d\omega_I) \vee dx_I$$

Například

$$\omega = e^{xy}\, dx + \cos(x+y)\, dy$$
$$d(e^{xy}) = e^{xy} y\, dx + e^{xy} x\, dy$$
$$(\cos(x+y)) = -\sin(x+y)\, dx - \sin(x+y)\, dy$$
$$d\omega = e^{xy} x\, dy \vee dx - sin(x+y) dx \vee dy = -(xe^{xy} + \sin(x+y))\, dx \vee dy$$

Poznámka
Nechť $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je i-tá souřadnice funkce, tzn. $\varphi_i(x) := x_i$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$d\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\, dx_j = dx_i.$$

Poznámka
V „rovném“ prostoru $\mathbb{R}^n$:

- tečný prostor $T_x(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$.
- kotečný prostor $T_x * (\mathbb{R}^n) := (T_x(\mathbb{R}^n))* \simeq (\mathbb{R}^n)*$

Věta 2.4

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\omega, \tau \in \mathcal{E}*(\Omega)$ a $p = 0, \ldots, n$. Potom platí

(i) $d(\omega + \tau) = d\omega + d\tau$ *a* $\forall \omega \in \mathcal{E}^p(\Omega) : d\omega \in \mathcal{E}^{p+1}(\Omega)$, *kde* $\mathcal{E}^{n+1}(\Omega) := \emptyset$.

(ii) *Je-li* $\omega \in \mathcal{E}^p(\Omega)$, *potom* $d(\omega \vee \tau) = d\omega \vee \tau + (-1)^p \omega \vee d\tau$.

(iii) $d(d\omega) = 0$.

Důkaz (i) plyne z linearity $\vee$ a definice.

(ii) Vzhledem k (i) stačí dokázat pro $\omega = \omega_I \, dx_I$ a $\tau = \tau_J \, dx_J$, kde $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$, I je p-prvková a $I \cap J = \emptyset$.

Potom $d(\omega \vee \tau) = d(\omega_I \tau_J) \vee dx_I \vee dx_J$. Dále $d(\omega_I \tau_J) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\omega_I \tau_J)}{\partial x_i} \, dx_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J + \omega_I \frac{\partial \tau_J}{} \partial x_i \right)$

Tedy $d(\omega \vee \tau) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J \, dx_i \vee dx_I \vee dx_J + \sum_{i=1}^n \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} \, dx_i \vee dx_I \vee dx_J$, kde musím v druhém členu posunout „$d\tau$“, k jeho dx_J

(iii) Pro $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ si to roznásobím a popáruji prohozené bázové vektory.

Díky (i) stačí rozbrat pro $\omega = \omega_I \, dx_I$, kde $I \subset \{1, \ldots, n\}$. Potom $d(d\omega) = d(\omega_I \, dx_I)$, (dvojkou rozepíšu) a z první části a $d1 = 0$ je to rovno 0.

□

2.4 Přenášení diferenciálních forem pomocí zobrazení

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $u = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{R}^k$. V této části předpokládejme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $U \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená a $\varphi : U \to \Omega$ je hladké zobrazení.

Je tedy $x = \varphi(u), u \in U$ a $x_i = \varphi_i(u_1, \ldots, u_k)$, kde φ_i je i-tá složka φ.

Definice 2.11

Za předpokladů výše definujeme zobrazení $\varphi* : \mathcal{E}*(\Omega) \to \mathcal{E}*(U)$ předpisem $\varphi*(\omega) := \sum_I (\omega_I \circ \varphi) \, d\varphi_I$, kde $\omega = \sum_I \omega_I \, dx_I$ je tvaru (1) a $d\varphi_I = d\varphi_{i_1} \vee \ldots \vee d\varphi_{i_k}$, jsou-li prvky $i_1, \ldots, i_k$ uvnitř I uspořádány vzestupně.

Poznámka
V souladu s definicí plošného integrálu 2. druhu.

Věta 2.5

Nechť φ je jako výše a $\omega, \tau \in \mathcal{E}*(\Omega)$. Potom:

(i) $\varphi*(\omega + \tau) = \varphi*(\omega) + \varphi*(\tau)$,

(ii) $\varphi*(\omega \vee \tau) = \varphi*(\omega) \vee \varphi*(\tau)$,

(iii) $\varphi*(d\omega) = d(\varphi*(\omega))$.

(iv) *Je-li $V \subset \mathbb{R}^l$ otevřená a $\psi : V \to U$ je hladká, potom $(\varphi \circ \psi)*(\omega) = (\psi * \circ \varphi*)(\omega)$.*

v *Je-li $k = n$, $\omega \in \mathcal{E}^n(\Omega)$ a $\omega = f \, dx_1 \vee \ldots \vee dx_n$, potom $\varphi*(\omega) = (f \circ \varphi) \det(\operatorname{Jac}\varphi) \, du_1 \vee \ldots \vee du_n$, kde $\operatorname{Jac}\varphi = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ je Jacobiho matice $x = \varphi(u)$.*

Důkaz
Jednoduchý. $\square$

Definice 2.12 (Uzavřené a exaktní formy)

Formule $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ se nazývá uzavřená, je-li $d\omega = 0$ a exaktní, existuje-li $\tau \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ takové, že $d\tau = \omega$.

Poznámka (Platí)
Je-li ω exaktní, potom je uzavřená.

Lemma 2.6 (Poincarého lemma)

Nechť Ω je otevřená koule v $\mathbb{R}^n$. Potom pro $k > 0$ každé $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, která je uzavřená, je i exaktní.

Poznámka
Platí i pro hvězdovité (znáte z analýzy) nebo jednoduše souvislé (dá se stáhnout do bodu) oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Poznámka (Poncarého lemma platí pouze pro dané oblasti)
Nechť $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Potom $\omega := \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ je uzavřená, ale není exaktní.

Definice 2.13 (De Rhanův komplex)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, potom

$$\mathcal{E}^0(\Omega) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(\Omega) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n(\Omega)$$

je komplex (tzn. posloupnost vektorových prostorů a lineární zobrazení mezi nimi s vlastností, že každá složka dvou po sobě jdoucích zobrazení je triviální (zde, $d \circ d = 0$, splněno))

TODO!

2.5 Stokesova věta pro řetězce

Poznámka (Cíl)

$$\int_{C \text{ } k\text{-dim. řet. v } \mathbb{R}^n} d\omega = \int_{\partial C \text{ } (k-1)\text{-dim.}} \omega$$

Definice 2.14

Nechť $E \in \mathbb{R}^k$ (je libovolná). Potom zobrazení $\varphi : E \to \mathbb{R}^k$ nazvěme hladké, pokud existuje otevřená $O \subset \mathbb{R}^k$ a $\Phi \to R\urcorner$ hladké zobrazení takové, že $E \subset O$ a $\varphi = \Phi|_E$. Navíc Φ nazveme hladkým rozšířením φ. ($\leftarrow$ Whitneyho rozšiřovací věta.)

Definice 2.15

Nechť $I_k = [0,1]^k \subset \mathbb{R}^k$. Potom k-dimenzionální singulární krychle v $\mathbb{R}^n$ rozumíme hladké zobrazení $I_k \to \mathbb{R}^n$. Píšeme $\langle \varphi \rangle = \varphi(I_k)$.

Poznámka
$\langle \varphi \rangle$ je 'hladká deformace' k-dimenzionální krychle, může být singulární, např. bod (je-li φ konet).

Definice 2.16

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená.

(i) Nechť $\omega \in {}^n(\Omega)$ a $\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, kde $f \in {}^\infty(\Omega)$. Je-li $E \subset \Omega$, potom definujeme

$$\int_E \omega = \int_E f d\lambda^n,$$

pokud int. vpravo existuje jako Lebesgueův vůči Lebesgueově míře λ^n na $\mathbb{R}^n$.

Pro $n = 0$ definujeme $\int f = 0$

(ii) Nechť $k = 0, \ldots, n$ a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Nechť φ je k-dimenzionální supul? krychle v Ω (tzn. $\langle \varphi \rangle \in \Omega$).

Položme $\int_\varphi \omega := \int_{I_k} \Phi * (\omega)$, je-li $\Phi : O \to \Omega$ hladké rozšíření φ.

Poznámka
Definice (ii) je v pořádku, protože takové Φ vždy existuje (jinak $\varphi|_{\sigma_n \Phi_{-1}(\Omega)}$) a hodnota $\int_\varphi \omega$ nezávisí na hladkém rozšíření φ. Skutečně pro jiné takové hladké rozšíření Φ mějmé?, že

$$\Phi = \varphi = \psi \text{na} I_k^0$$

$$\Phi * (\omega) = \psi * (\omega) \text{na} I_k^0$$

$$\Phi * (\omega) = \psi * (\omega) \text{na} I_k \text{ze spojitosti funkcí } \Phi, \psi \text{ a jejich 1. parciálních derivací.}$$

Úmluva
Často budeme ztotožňovat φ s Φ.

Věta 2.7 (Integrál nezávisí na parametrizaci, jen na orientaci)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Nechť $I_k \subset O, O' \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené a $\alpha : O' \to O$ (na) je hladký difomorfismus (tzn. α i α_{-1} jsou hladká zobrazení), $\alpha(I_k) = I_k$. Nechť $\varphi : O \to \Omega$ je hladké a $\varphi' := \varphi \circ \alpha$.

Potom $\int_{\varphi'} \omega = \Theta \int_{\varphi} \omega$, kde $\Theta = +1$, je-li $J_\alpha := \det(\mathrm{Jac}(\alpha)) > 0 na I_k$, $\Theta = -1$, je-li $J_\alpha := \det(\mathrm{Jac}(\alpha)) < 0 na I_k$.

Důkaz
Víme, že $J_\alpha \neq 0$ na O'. Tedy J_α (spojité funkce) nemění na I_k znaménko. TODO! □

TODO!

Věta 2.8 (Stokes)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Důkaz
Nechť $k = n$ a $C = I_n$. Potom $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\Omega)$ má tvar $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i$, kde $\omega_i = (-1)^{i+1} f_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$ a $f_i \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Potom $d\omega_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \ldots dx_n$ a

$$\int_{I_n} d\omega_i = \int_{[0,1]^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n \overset{\text{Fubki (věta) + newtonův vzorec v } x_i}{=}$$

$$= \int_{[0,1]^{n-1}} (f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n))\, dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n =$$

$$(-1)^{i+1} (\int_{I^n_{(i,1)}} \omega_i - \int_{I^n_{(i,0)}} \omega_i) = \int_{\partial I_n} \omega_i,$$

protože $\int_{I^n_{j,\alpha}} \omega_i = 0$ pro $j \neq i$. Tedy $\int_{I_n} d\omega = \int_{\partial I_n} \omega$.

(2.) Nechť $c = cosi$. Potom cosi □

Příklad (Singulární homologie Ω)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Dokažte, že pro každý k-řetězec $c \in C_k(\Omega)$ je $\partial c \in C_{k-1}(\Omega)$ a $\partial(\partial c) = 0$.

Důkaz
Nahlédneme, že každá část potenciální hranice se jednou „přičte“ a jednou „odečte“. $\square$

Věta 2.9 (De Rhamova (hluboká!))

Máme tedy $C_0(\Omega) \xleftarrow{\partial} C_1(\Omega) \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} C_n(\Omega)$.

Označme

$$Z_k(\Omega) := \{c \in C_k(\Omega) | \partial c = 0\} \text{ tzv. } k\text{-cykly}$$

Poznámka (Ze cvičení)
Nechť S je libovolná množina (i nekonečná). Potom volnou Abelovou grupou $\mathbb{Z}(S)$ generovanou S rozumíme grupu

$$\mathbb{Z}(S) := \{f' : S \to \mathbb{Z} | f(s) \neq 0 \text{pro konečně mnoho } s \in S\}$$

s operací $(f + g)(s) := f(s) + g(s)$, $s \in S$.

Zřejmě každá $f \in \mathbb{Z}(S)$ lze jednoznačně psát jako $f = \sum_{s \in S} n_s z_s$, kde $n_s \in \mathbb{Z}$, $n_s \neq 0$ pro konečně $s \in S$ a $z_s(t) := 1, t = s$ $z_s(t) := 0, t \neq s$. Píšeme často s místo z_s

Poznámka (Ze cvičení)
Nechť S je libovolná množina. Položme $\mathbb{R}(S) := \{f : S \to \mathbb{R} | f(s) \neq 0 \text{pro konečně } s \in S\}$. Potom $\mathbb{R}(S)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ s operacemi $(f+g)(s) := f(s)+g(s)$ a $(r \cdot f)(s) := r \cdot f(s), f, g \in \mathbb{R}(S), s \in S a r \in \mathbb{R}$.

Dále $\mathbb{R}(S)$ má bázi $\{z_s | s \in S\}$, kde $z_s(t) := 1, t = s; z_s(t); = 0, t \neq s$.

3 Variety, Stokesova věta na varietách

3.1 Tenzory

Úmluva
Všechny vektorové prostory budou nad reálnými čísly a konečnědimenzionální.

Definice 3.1

Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor.

Jeho k-tou tenzorovou mocninou $\mathbf{V}^k$ definujeme jako $\mathbf{V}^k := \mathcal{L}(\mathbf{V}*, \dots, \mathbf{V}*)$, kde položíme $\mathbf{V}^0 = \mathbb{R}$ a ztotožňujeme $\mathbf{V}^1 = \mathbf{V} ** $ s $\mathbf{V}$.

Jeho tenzorovou algebru definujeme jako $T(\mathbf{V}) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbf{V}^k$. Násobení $\otimes$ na $T(\mathbf{V})$ definujeme následovně:

a) Je-li $\alpha \in \mathbf{V}^k$ a $\beta \in \mathbf{V}^m$, TODO

b) násobení $\otimes$ rozšíříme na $T(\mathbf{V})$ bilineárně TODO

Tvrzení 3.1 (Vlastnosti $T(\mathbf{V})$)

Je to ∞-dimenzionální, nekomutativní, asociativní algebra s jednotkou $1 \in \mathbf{V}^0 = \mathbb{R}$.

Nechť $\mathbf{V}$ má bázi $e_1, \ldots, e_n$. Pottom $\mathbf{V}^k$ má bázi $e_A := e_{a_1} \otimes \ldots \otimes e_{a_k}$, kde $A = (a_1, \ldots, a_k) \in \{1, 2, \ldots, n\}^k$. Speciálně $\dim \mathbf{V}^k = (\dim \mathbf{V})^k = n^k$.

Důkaz
Triviální.

Nechť $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ je duální báze $\mathbf{V}*$, tzn. $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j = 1, i = j; = 0, i \neq j$.

Nechť $\sum_A \alpha^A e_A = \mathbf{o}$ s $\alpha^A \in \mathbb{R}$. Potom $\mathbf{o} = \sum_A \alpha_A(\varepsilon^{b_1}, \ldots, \varepsilon^{b_k}) = \alpha_B$ TODO. □

Úmluva (Einsteinova sumační konvence)
V tenzorovém počtu vynecháváme symbol $\sum$ pro každý index od 1 do n, který je „nahoře i dole“. Ale příliš ji nebudeme používat.

Tvrzení 3.2 (Změna souřadnic tenzoru při změně báze)

Nechť $e'_1, \ldots, e'_n$ je jiná báze $\mathbf{V}$ a nechť $E = (E^a_b)$ je matice přechodu od $e_1, \ldots, e_n$ k $e'_1, \ldots, e'_n$, tzn.

$$e'_b = E^a_b e_a.$$

Důkaz
Dosadíme (1) a (2) do

$$\alpha'_{b_1,\ldots,b_r}{}^{a_1,\ldots,a_s} = \alpha(\varepsilon'^{a_1}, \ldots, \varepsilon'^{a_s}, e'_{b_1}, \ldots, e'_{b_r})$$

□

Definice 3.2 (Symetrická a vnější algebra)

Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor. Nechť S_k je grupa permutací $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Potom $\alpha \in \mathbf{V}^k$ je symetrický, resp. antisymetrický, pokud $\forall f^1, \ldots, f^k \in \mathbf{V} * \forall \pi \in S_k$: $\alpha(f^{\pi(1)}, \ldots, f^{\pi(k)}) = \alpha(f^1, \ldots, f^k)$ (resp. přenásobené $\operatorname{sgn} \pi$). Označme Sym_k TODO.

Definice 3.3 (Symetrická algebra)

Symetrickou algebrou vektorového prostoru **V** rozumíme algebru $(\mathbf{V}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} {}^{k}(\mathbf{V})$ s násobením definovaným následovně:

Je ... TODO

Definice 3.4 (Vnější algebra podruhé)

TODO

3.2 Topologické prostory

Viz Topologie: Definice topologie, topologie generovaná metrikou, uzavřená množina, okolí, vnitřek, uzávěr, hranice, topologický podprostor, Hausdorffův prostor (a to, že metrický prostor je Hausdorffův), indiskrétní τ_0 a diskrétní τ_1 topologie, τ_0 není pro více jak jednoprvkovou množinu hausdorffova, báze, spojité zobrazení, homeomorfismus, kompaktnost, souvislost, spojitost funkce v bodě, spojitý obraz kompaktního (resp. souvislý) prostoru je kompaktní (resp. souvislý)

3.3 Variety

Definice 3.5 (Varieta)

TODO jestliže

1. $\mathbb{X}$ je lokálně homeomorfní s $\mathbb{R}^n$, tzn. pro každé $x \in \mathbb{X}$ existuje otevřená $x \in U \subset \mathbb{X}$ a homeomorfismus φ množiny U na $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$
2. $\mathbb{X}$ je Hausdorffův a
3. $\mathbb{X}$ má spočetnou bázi a TODO.

Například
Tvorba základních dvourozměrných variet: viz tématko Topologie v M&M.

Definice 3.6 (Mapa)

Nechť $(\mathbb{X}, \tau)$ je topologická varieta dimenze n. Potom mapou (lokálním souřadnicovým systémem) na $(\mathbb{X}, \tau)$ nazveme (U, φ), kde $U \subset \mathbb{X}$ je otevřené a φ homeomorfizmus? TODO.

Nechť (V, ψ) je jiná mapa na $\mathbb{X}$. Potom buď $U \cap V = \emptyset$, nebo $U \cap V \neq \emptyset$ a tzv. přechodové funkce $\psi \circ \varphi^{-1}$ TODO

Definice 3.7 (Atlas)

Systém map $\mathcal{A} = \{\}$ TODO

TODO

Poznámka
Každý topologický prostor $\mathbb{X}$, který se dá pokrýt spočetně mnoha mapami, má spočetnou bázi otevřených množin.

Obecněji: Nechť $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ je varieta dimenze n. Je-li $Y \subset \mathbb{X}$ otevřená, potom

$$\mathcal{A}_Y := \{(U \cap Y, \varphi|_{U \cap Y}) | (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

je atlas na Y a $(Y, \mathcal{A}_Y)$ je varieta dimenze n.

Příklad
Rozmysli si, že 2rozměrné plochy v $\mathbb{R}^3$ zavedené a studované v přednášce z Geometrie v LS jsou příklady hladkých variet dimenze 2. (Ale s trochu jiným pojmem mapy.)