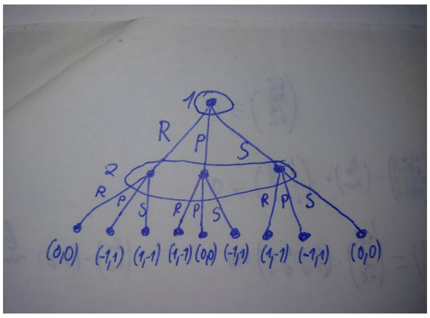
Příklad (4.1)
Zkonstruujte rozšířenou formu hry Kámen-nůžky-papír z Tabulky 1 a určete její sekvenční formu a lineární program k nalezení Nashových ekvilibrií této hry.

	Kámen	Nůžky	Papír
Kámen	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
Nůžky	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
Papír	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$

Tabulka 1: Hra Kámen-nůžky-papír v normálním tvaru

Řešení (Rozšířená forma)
Díváme se na hru, jako by nejdříve volil jeden (BÚNO první) hráč a pak druhý (v rozšířené formě stejně má hráč informaci jen o tom, co dělal on).



Řešení (Sekvenční forma)
Sekvenční forma je čtveřice hráči-sekvence–užitek-omezení. Hráči jsou jasní, máme dva (BÚNO 1 a 2). Posloupnosti získáme přímočaře, množiny posloupností obou hráčů musí obsahovat prázdnou množinu a „poté co hráči zatím nic nezahráli“ (prázdná množina) si mohou vybrat buď kámen (K), nůžky (N) nebo papír (P). Potom už hra skončila, takže žádný další člen do posloupnosti. Tedy $S_1 = S_2 = \{\varnothing, K, N, P\}$.

Užitkovou funkci udáme jako matice A a B mající v řádcích sekvence prvního hráče a ve sloupcích sekvence druhého. Řídíme se přesně listy v rozšířené formě (žádné listy = 0 nechávám prázdné, listy $(0,0)$ značím 0):

$$A = \begin{array}{c} \\ \varnothing \\ K \\ N \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varnothing & K & N & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & \\ & 0 & 1 & -1 \\ & -1 & 0 & 1 \\ & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \varnothing \\ K \\ N \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varnothing & K & N & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & \\ & 0 & -1 & 1 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Poslední člen čtveřice jsou podmínky na plán realizace. Víme $x(\varnothing) = y(\varnothing) = 1$. To pak rozdělujeme mezi možné tři stavy, takže

$$y(K) + y(N) + y(P) = y(\varnothing) = x(\varnothing) = x(K) + x(N) + x(P). \qquad x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0.$$

Řešení (Lineární program)
Podmínky přepíšeme do maticového tvaru:

$$E \cdot \mathbf{x} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} =: \mathbf{e}, \qquad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}.$$

Stejně tak F a $\mathbf{f}$, tedy $E = F$ a $\mathbf{e} = \mathbf{f}$ a $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$. Nyní už máme vše, co je potřeba k lineárnímu programu uvedenému ve skriptech:

$$\max_{\mathbf{v},\mathbf{x}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \text{ za podmínek } E\mathbf{x} = \mathbf{e} \wedge F^T\mathbf{v} - A^T\mathbf{x} \leqslant \mathbf{0} \wedge \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}.$$

(První a třetí podmínku máme z postupu výše, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ nám říká, že bereme užitek v kořeni a druhá podmínka vlastně říká to, jak se šíří užitek z listů, kde ho známe, směrem ke kořeni.)

Příklad (4.2)
Předpokládejme, že v aukci prodáváme k identických položek celkem $n > k$ kupujícím. Předpokládejme, že každý kupující může získat nanejvýš jednu položku. Jak vypadá příslušná varianta Vickreyovy aukce? Dokažte, že je DSIC.

Řešení
Zřejmě chceme prodat k nejvyšším nabídkám, protože chceme aby Vickreyova aukce byla awesome (tj. podle bodu dva musíme maximalizovat sociální zisk). Inspirujeme se u $k = 1$, kde prodáváme nejvyšší nabídce za druhou nejvyšší nabídku. Budeme tedy prodávat za $k+1$-ní nejvyšší nabídku (za jednu z vyšších cen by se mohlo vyplatit vsázet méně než na kolik si to cením) k nejvyšším nabídkám.

Zřejmě užitek každého, kdo vsadí svoji hodnotu, je nezáporný, jelikož $k+1$-ní nabídka je nejvýše taková, jako k nejvyšších. Takže druhý bod definice DSIC je splněna.

Teď už zbývá, že vsadit svoji hodnotu je dominantní strategie. To znamená, že v žádném případě není lepší jiná strategie. Jiné strategie jsou dvě: vsadit méně a vsadit více. Pokud vsadím méně, tak svůj užitek nezvýším, neboť buď jsem už se svou hodnotou předmět nezískal, takže ho s menší nabídkou nezískám také (tj. z 0 na nulu), nebo jsem ho získal, ale za na mé nabídce nezávislou cenu, takže ho leda můžu nezískat (tj. z nezáporného na nulu).

Pokud nabídnu výše, tak pokud jsem předmět získal za svoji hodnotu, tak ho získám i za vyšší, ale za na mé nabídce nezávislou cenu, takže se užitek nezmění. Pokud jsem ho za svoji hodnotu nezískal, tak zvýšením nabídky tak, abych ho získal (pokud ho nezískám, tak z 0 na 0), způsobím to, že se $k+1$-ní nabídkou stane ta, která byla k-tá. Ta ale byla vyšší než (rovna) moje hodnota draženého předmětu, takže užitek nebude kladný (tj. z 0 na nekladno). Tím je hotovo.

Příklad (4.3)
Nechť F je uniformní rozdělení pravděpodobnosti na $[0,1]$. Uvažte 1-položkovou aukci se dvěma kupujícími 1 a 2, kteří mají rozdělení $F_1 = F$ a $F_2 = F$. Dokažte, že střední hodnota zisku obdrženého při Vickreyho aukci s rezervou 1/2 se rovná 5/12.

Důkaz (Přímo)
Pokud jeden hráč nabídne více než 1/2, dostaneme automaticky první polovinu intervalu $[0,1]$. To se stane s pravděpodobností $1 - 1/2^2 = 3/4$ (doplněk k pravděpodobnosti, že oba nabídnou měně než 1/2). Každou další „nekonečně malou" část „v x" intervalu $[0,1]$ dostaneme, pokud oba vsadí více (tj. menší nabídka je více), tedy s pravděpodobností $(1-x)^2$. Tj.

$$\mathbb{E}_v \sum_i p_i(v) = 1/2 \cdot 3/4 + \int_{1/2}^{1} (1-x)^2 = 1/2 \cdot 3/4 + \int_0^{1/2} x^2 = 1/2 \cdot 3/4 + 1/24 - 0 = 5/12.$$

□

Důkaz (Přes naší teorii)
Vick. aukce je DISC, tedy podle věty o maximalizaci střední hodnoty zisku, kde

$$\varphi_i(v_i) = v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)} = v_i - \frac{1 - v_i}{1} = 2v_i - 1,$$

máme

$$\mathbb{E}_v \sum_i p_i(v) = \mathbb{E}_v \sum_i \varphi_i(v_i) \cdot x_i(v) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left((2x-1)\chi_{\{x>y \wedge x>1/2\}} + (2y-1)\chi_{\{y>x \wedge y>1/2\}}\right) \cdot 1 dx dy =$$

$$= 2 \cdot \int_{1/2}^{1} \int_0^z (2z-1) d\zeta dz = 2 \cdot \int_{1/2}^{1} (2z-1) \cdot z \, dz = 2 \cdot \left[\frac{2z^2}{3} - \frac{z^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{12}.$$

□

Příklad (4.4)
Spočítejte virtuální ohodnocení následujících rozdělení pravděpodobnosti a rozhodněte, která z nich jsou regulární: Rozdělení $F(z) = 1 - \frac{1}{(z+1)^c}$ na $[0, \infty)$, kde $c > 0$ je nějaká konstanta.

Řešení

$$f(z) = F'(z) = c \cdot \frac{1}{(z+1)^{c+1}}.$$

$$\varphi(z) = z - \frac{1 - F(z)}{f(z)} = z - \frac{1/(z+1)^c}{c/(z+1)^{c+1}} = z - \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{z+1}.$$

To je neklesající (tj. regulární) pro všechna c, neboť z roste a $\frac{1}{z+1}$ klesá (pro rostoucí z), nebo protože je derivace kladná: $\varphi'(z) = 1 + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} \geqslant 1 > 0$.

Uvažte rozdělení F z předchozí části pro $c = 1$. Ukažte, že když kupující vybírají svá ohodnocení podle F, pak nemusí platit, že střední hodnota zisku se rovná střední hodnotě virtuálního sociálního přebytku. Abyste uvedli na pravou míru tento výsledek s větou z přednášky o maximalizaci střední hodnoty zisku, ukažte, jaký předpoklad této věty není splněn.

Řešení
Uvažujme aukci dvou hráčů, kde vyšší nabídka bere. Potom

$$\mathbb{E}_{x,y}(\varphi_1(x) \cdot x_1(x,y) + \varphi_2(x) \cdot x_2(x,y)) = 2 \cdot \int_0^\infty \varphi(z) \cdot F(z) \cdot f(z) dz =$$

$$= 2 \cdot \int_0^\infty \left(z - \frac{1}{z+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{1}{(z+1)^2} dz = 2 \int_0^\infty \frac{z-1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^4} dz =$$

$$= \infty - 4 + \frac{2}{3} = \infty.$$

Řekněme, že to bude běžná Vick. aukce, tedy platí se druhá nabídka (to lze formálně vykoukat z $p_i(b_i; b_{-i}) = \ldots$ ve skriptech), tedy (předpokládejme, že hráč nenabízí více než svoji hodnotu)

$$\mathbb{E}_{x,y}(p_1(x,y) + p_2(x,y)) \leqslant 2 \cdot \int_0^\infty z \cdot (1 - F(z)) \cdot f(z) dz = 2 \cdot \int_0^\infty z \cdot \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} dz =$$

$$= 2 \cdot \int_1^\infty \frac{z-1}{z^3} dz = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Zřejmě tedy $\mathbb{E}\varphi \cdot x \neq \mathbb{E}p$. Oproti větě, která nám v předchozím dává rovnost, zde není splněno, že f_i má support v $[0, v_{max}]$, kde v_{max} je konečné.