Organizační úvod

Poznámka

1 Úvod

Definice 1.1 (Diferenciální rovnice)

Diferenciální rovnice je rovnice, která obsahuje derivaci.

Poznámka (Motivace)
Fyzika (např. pružina: $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$), ekonomie (např. rovnice majetku?: $k' = \alpha \cdot k - c(t)$), biologie (např. model dravec-kořist: $d' = \alpha \cdot d \cdot \cdot k - \beta \cdot d \wedge k' = \gamma \cdot k - \delta \cdot d \cdot k$).

Poznámka (Co nás zajímá na DR)
Přesné řešení (často neumíme spočítat), existence a jednoznačnost řešení, jaké vlastnosti má řešení.

Poznámka (Předpoklady)
$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $(x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times I$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $x' = f(x, t)$. $I \subset \mathbb{R}$.

Definice 1.2 (Obyčená diferenciální rovnice, řešení)

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice $x' = f(x, t)$ z předchozí poznámky.

Funkce $x : I \to \mathbb{R}^n$ je řešení DR, jestliže

- $\forall t \in I : (x(t), t) \in \Omega$,
- $\forall t \in I$ existuje vlastní derivace $x'(t)$,
- $\forall t \in I$ platí $x'(t) = f(x(t), t)$.

Poznámka
První dvě podmínky jsou jen existenční podmínky k rovnici ve třetím bodě.

Typicky má DR nekonečně mnoho řešení, přidáváme proto počáteční podmínku $(x_0, t_0) \in \Omega$, $t_0 \in I$.

Lemma 1.1

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $x : I \to \mathbb{R}^n$ spojitou a takovou, že graf x ($\{(x(t), t) | t \in I\}$) leží v Ω. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- *x je řešení DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$;*
- *$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds\ \forall t \in I$.*

Důkaz

„ $\implies$ “: x a f je spojitá, tedy $x' = f(x(t), t)$ je spojitá, tj. $x \in C^1(I) \implies \int_{t_0}^{t} x'(s) ds = x(t) - x(t_0)$.

„ $\impliedby$ “: jelikož f i s je spojitá, tak integral je diferencovatelný a $x(t)$ je spojitá, tedy

$$x'(t) = 0 + f(x(t), t) \wedge x(t_0) = t_0 + 0.$$

$\square$

Věta 1.2 (Peanova věta o lokální existenci)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $(x_0, t_0) \in \Omega$. Potom $\exists\ \delta > 0$ a funkce $x : B(t_0, \delta) \to \mathbb{R}^n$ taková, která je řešení DR a splňuje počáteční podmínku. (Stačí spojitá f a kompaktní Ω.)

Tvrzení 1.3 (Pomocné tvrzení)

Pokud $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ a f je omezená na Ω, pak $\forall T$ existuje řešení DR x na $[t_0 - T, t_0 + T]$ splňující počáteční podmínku.

Důkaz
Když x_λ je definována na $[t_0 - \lambda, t]$, pak pravá strana má smysl $\forall t \in [t_0, t_0 + \lambda]$ tím pádem pravá strana integrálního tvaru má smysl $\forall t \in [t_0, t + \lambda]$, tím pádem definujeme x_λ na $[t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$.

Nyní definujme $M := \left\{x_n|_{[t_0, t_0+T]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a ověříme, že M splňuje podmínky Arzela--Ascoliho věty:

$$|x_\lambda(t)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(x_\lambda(s - \lambda))| ds \leq |x_0| + ||f||_\infty \cdot |t - t_0| \leq |x_0| + ||f||_a \cdot T,$$

$$|x_\lambda(t) - x_\lambda(\tau)| = \left| \int_{\tau}^{t} f(x_\lambda(s - \lambda), s) ds \right| \leq ||f||_\infty \cdot |t - \tau|.$$

Podle AA věty tedy existuje podposloupnost M, která konverguje stejnoměrně. Limitu si označme x, podposloupnost x_{n_k}.

Chceme dokázat, že x je řešení DR: TODO!!!

$$\lambda_k := \frac{1?}{n_k}$$

□

Důkaz
Pro $\overline{K_1} \subset K_2$, $\overline{K_2} \subset \Omega$, $(x_0, t_0) \in K$, K_1 a K_2 kompaktní definujeme

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} 1, & (x, t) \in K_1, \\ 0, & (x, t) \in \Omega \setminus \overline{K_2}, \end{cases}$$

kterou spojitě dodefinujeme, a

$$\tilde{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t) \cdot \varphi(x, t), & (x, t) \in \Omega \\ 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dle prvního kroku (TODO?) $\exists \tilde{x}(t)$, $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\tilde{x}'(t) = \tilde{f}(\tilde{x}(t), t)$, $\tilde{x}(t_0) = x_0$. $\tilde{x}$ je spojitá funkce $\implies$ $\exists \delta > 0$ tak, že graf funkce $\tilde{x}|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]}$ leží v K_1. Na K je $\tilde{f} = f$, tedy $\tilde{x}'(t) = f(\tilde{x}(t), t)$, $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. □

1.1 Jednoznačnost řešení

Definice 1.3 (Lokální jednoznačnost, globální jednoznačnost)

Řekneme, že DR má vlastnost

- lokální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení $(x, I), (y, J)$ a $t_0 \in I \cap J$, $x(t_0) = y(t_0)$ pak $\exists \delta > 0\ \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $x(t) = y(t)$,
- globální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení $(x, I), (y, J)$ a $t_0 \in I \cap J$, $x(t_0) = y(t_0)$, pak $\forall t \in I \cap J : x(t) = y(t)$.

Tvrzení 1.4

Globální jednoznačnost je ekvivalentní lokální jednoznačnosti.

Důkaz

„ $\Longrightarrow$ “ je triviální. „ $\Longleftarrow$ “: Pro spor předpokládejme $\exists t_1 \in I \cap J,\ x(t_1) \neq y(t_1)$. BÚNO $t_1 > t_0$. Definujme

$$M := \{T \in I \cap J, t > t_0, x(t) \neq y(t)\} \neq \emptyset, \qquad t_2 = \inf M.$$

Víme $x(t_2) = \lim_{t \to t_2^-} x(t) = \lim_{t \to t_2^-} y(t) = y(t_2)$. Podíváme se lokální jednoznačností na bod t_2. Tam existuje $\sigma > 0$ tak, že $\forall t \in (t_2 - \sigma, t_2 + \sigma) : x(t) = y(t)$. ↯. □

Definice 1.4 (Lokálně lipschitzovská)

Řekneme, že funkce $f = (x, t)$ je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x, jestliže

$$\forall (x_0, t_0) \in \Omega\ \exists \delta > 0\ \exists L > 0\ \forall t \in \mathcal{U}_\delta(t_0)\ \forall x, y \in \mathcal{U}_\delta(x_0) : |f(x, t) - f(y, t)| \leq L \cdot |x - y|$$

Věta 1.5 (Peanova věta o jednoznačnosti)

Buď f lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x, pak DR má v Ω vlastnost lokální jednoznačnost.

Důkaz

Ať $x(t)$, $y(t)$ jsou řešení. $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds$, $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s) ds$. $x(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t} (f(x(s), s) - f(y(s), s))\, ds$. Vezmeme $\sigma > 0$. Grafy $x|_{[t-\sigma]}, y|_{[t-\delta, t+\delta]}$ leží v δ-okolí (x_0, t_0).

$$\forall s \in [t - \sigma, t_0 + \sigma] : |f(x(s), s) - f(y(s), s)| \leq L \cdot |x(s) - y(x)|.$$

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x(s), s) - f(y(s), s)| ds \leq \int_{t_0}^{t} L \cdot |x(s) - y(s)| ds, \qquad t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$$

$$\leq L \max_{s \in [t - \sigma, t + \sigma]} |x(s) - y(s)| \cdot \sigma$$

□

Důsledek
Jestliže f je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x a $(x_0, t_0) \in \Omega$, pak

$$\exists \delta > 0\ \exists! x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n \text{ řešení DR s počáteční podmínkou } x(t_0) = x_0.$$

Důkaz
Peanova věta o jednoznačnosti. □

Tvrzení 1.6

Pokud $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ jsou spojité v Ω, $j \in [n]$, pak f je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x.

Důkaz

$$h(s) := f(x + \ s(y - x), t), s \in [0, 1], h(0) = f(x, t), h(1) = f(y, t).$$

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(s) ds = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + ? - ?) \cdot (y_j - x_j) ds$$

$$\forall (x_0, t_0) \in \Omega\ \exists \mathcal{U}(x_0)\ \exists \mathcal{U}(t_0) M = \overline{\mathcal{U}(x_0)} \times \overline{\mathcal{U}(t_0)} \subset \Omega,$$

M je kompaktní, tedy $\exists K > 0\ \forall (x, t) \in M : \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq K$. Tedy

$$|h(1) - h(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |(x + s(y - x))| \cdot |y_i - x_i| ds \leq nK \cdot \max |y_i - x_i| \leq nK|x - y|.$$

□

2 Maximální řešení

Definice 2.1 (Prodloužení řešení, maximální řešení)

Řešení $(\tilde{x}, \tilde{I})$ je prodloužením řešení (x, I), jestliže $\tilde{I} \supset I$ a $\forall t \in I : x(t) - \tilde{x}()$.

Řešení je maximální, pokud neexistuje netriviální prodloužení.

Věta 2.1 (O maximálním prodloužení)

Každé řešení (x, I) má alespoň jedno maximální prodloužení.

Důkaz
Ať M je množina všech prodloužení (x, I). Řekněme, že $(\tilde{x}, \tilde{I}) \leq (\hat{x}, \hat{I})$ právě tehdy, když $(\hat{x}, \hat{I})$ je prodloužení $(\tilde{x}, \tilde{I})$.

Ať $N \subset M$ je řetězec (množina, na které je $\leq$ lineární). Označme $I_0 = \bigcup_{(\tilde{x}, \tilde{I}) \in N} \tilde{I}$ a definujme $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ z toho, že $t \in I_0 \implies \exists (\tilde{x}, \tilde{I}) \in N$, $t \in \tilde{I}$, jako $x(t) = \tilde{x}(t)$.

Z Zornova lemmatu pak vyplývá, že existuje maximální řešení. □

Lemma 2.2

(x, I) řeší DR, $I = (a, b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \infty$. Pak řešení x lze prodloužit za bod b, když zároveň

- $b < \infty$*;*
- $\exists \lim_{t \to b} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$*;*
- $(x_0, b \in \Omega)$.

Důkaz
„ $\implies$ “ zřejmě, „ $\impliedby$ “: Uvažujme DR s počáteční podmínkou $x(b) = x_0$. Dle Peanovy věty $\exists \tilde{x} : (b - \delta, b + \delta) \to \mathbb{R}^n$. $x_1(t) = x(t)$, pokud $t \in (a, b)$, $\tilde{x}(t)$ jinak. x_1 tedy splňuje DR na (a, b) a $(b, b + \delta)$. Zbývá ověřit, že $x_1'(b) = f(x_1(b), b)$:

- x_1 je spojitá v b, neboť $\lim_{t \to b^-} x_1(t) = x_0 = \lim_{t \to b^+} x_1(t) = \tilde{x}(t)$.
- $\exists \lim_{t \to b^-} x_1'(t) = \lim_{t \to b^-} f(x(t), t) = f(x(b), b) = f(x_0, b)$.
- $\exists \lim_{t \to b^+} x_1'(t) = \lim_{t \to b^+} f(\tilde{x}(t), t) = f(\tilde{x}(b), b) = f(x_0, b_0)$.

□

Věta 2.3 (O opuštění kompaktu)

Buď (x, I) maximální řešení DR. Nechť $K \subset \Omega$ kompaktní a $\exists t_0 : (x(t_0), t_0) \in K$. Pak $\exists t_1 > t_0$, $t_1 \in I$, že $(x(t_1), t_1) \in \Omega \setminus K$. $\exists t_2 \in I_2$, $t_2 < t_0$, že $(x(t_2), t_2) \in \Omega \setminus K$.

Důkaz
Pro spor předpokládejme, že $\forall t_1 > t_0, t_1 \in I : (x(t_1), t_1) \in K$. Podle předchozí věty stačí dokázat $b < \infty$ (kdyby ne, tak K není kompakt), $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \nearrow b$, $\{(x(t_k), t_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ vybereme konvergentní podposloupnost $(x(t_{k_n}), t_{k_n}) \to (x_0, t_0)$. Následně ověříme BC podmínku: víme $x(s) - x(t) = x'(\xi)(s-t), \xi \in (s,t)$, tedy

$$|x(s) - x(t)| \leq |x'(\xi)| \cdot |s-t| = |f(x(\xi), \xi)| \cdot |s-t| \leq C \cdot |s-t|.$$

Zřejmě $(x_0, b) \in K \subset \Omega$, protože z kompaktu se nedá vykonvergovat. □

3 Závislost řešení na počáteční podmínce

Definice 3.1

Buď f v Ω lokálně Lipschitzovská vzhledem k x_0. Řešící funkcí (DR) nazveme funkci $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n : (t, t_0, x_0) \mapsto x(t)$, kde x je maximální řešení odpovídající DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$.

Věta 3.1 (Granwallovo Lemma)

Nechť $g, w : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g(t), w(t) \geq 0$, $\forall t \in I_0$. Nechť $t_0 \in I, K \geq 0$ a $\forall t \in I : w(t) \leq K + \left|\int_{t_0}^t w(s)g(s)ds\right|$. Potom

$$w(t) \leq K \cdot \exp\left(\left|\int_{t_0}^t g(s)ds\right|\right).$$

Důkaz
BÚNO $t > t_0$. Vezmeme $\varepsilon > 0$. Definujeme $\Phi(t) = K + \varepsilon + \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds$. $\Phi'(t) = w(t) \cdot g(t)$.

$$\Phi'(t) \leq g(t)\left(K + \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds\right) \leq g(t)\Phi(t), \qquad \forall t \in (t_0, \sup I).$$

$$\forall t \in (t_0, \sup I) : \Phi(t) \geq 0. \qquad \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq g(t), \qquad \int_{t_0}^t \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} ds \leq \int_{t_0}^t g(s)ds.$$

$$\Phi(t_0) = K + \varepsilon, \qquad \frac{\Phi(t)}{K+\varepsilon} \leq \exp\left(\int_{t_0}^t g(s)ds\right),$$

$$\Phi(t) \leq (K+\varepsilon)\exp\left(\int_{t_0}^t g(s)ds\right) \qquad \forall \varepsilon > 0 \implies \Phi(t) \leq K \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t g(s)ds\right).$$

□

Důsledek

Nechť f je globálně L-lipschitzovská v první souřadnici. Nechť x a y jsou řešení DR na intervalu I s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Potom

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot e^{L \cdot |t - t_0|}.$$

Důkaz

$$x'(t) = f(x(t), t), \qquad y'(t) = f(y(t), t).$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds, \qquad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s) ds,$$

$$x(t) - y(t) = x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} (f(x(t), t) - f(y(s), s)) ds,$$

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \left| \int_{t_0}^{t} L \cdot (x(s) - y(s)) ds \right|,$$

Z Granwallova lemmatu potom $|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot \exp(L \cdot |t - t_0|)$. □

Věta 3.2

Buď G množina z definice řešící funkce, f lokálně lipschitzovská na G. Pak $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ otevřená a φ je spojitá v G.

Důkaz

Vezmeme $(t, t_0, x_0) \in G$. Buď x maximální řešení DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. $\mathcal{D}_x \supset [t_0, t]$. BÚNO $t > t_0$.

$$K_\delta := \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} | s \in [t_0 - \delta, t + \delta], |y - x(s)| \leq \delta \right\}.$$

Vezmeme $\varepsilon > 0$. Vezmeme $y_0 \in \mathbb{R}^n, s_0 \in \mathbb{R}$, $|y_0 - x_0| < \varepsilon$, $|t_0 - s_0| < \varepsilon$. Definujeme y maximální řešení splňující $y(s_0) = y_0$. Co znamená, že $(\tilde{t}, s_0, y_0) \in G$? $\mathcal{D}_y \supset [s_0, \tilde{t}]$. Potřebujeme dokázat, že y je definováno na K_δ. Odhadneme

$$|y(s_0) - x(s_0)| \leq |y(s_0) - x(t_0)| + |x(t_0) - x(s_0)| = |y_0 - x_0| + |x(t_0) - x(s_0)| \leq \varepsilon + x_0 |t_0 - s_0| \leq \varepsilon \cdot (1 + c_0)$$

$$s \geq t_0 : |x(s) - y(s)| \leq |x(s_0) - y(s_0)| e^{L |s - s_0|} \leq \varepsilon (1 + c_0) e^{L \cdot |s - s_0|}.$$

Máme, že $\forall s > t_0 : |x(s) - y(s)| \leq \frac{\delta}{2}$, tedy y neopustí K_δ přes hranici $\implies$ y existuje až do času $t + \delta_0$, tj. G je otevřená.

Nyní „Φ je spojitá“: $(t, t_0, x_0), (s, s_0, y_0) \in G$:

$$|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(s, s_0, y_0)| = |x(t) - y(s)| \leq |x(t) - x(s)| + |x(s) - y(s)| \leq c_0 |t - s| + |x(s_0) - y(s_0)| e^{L \cdot |s - s_0|} \leq T$$

□