Příklad (2.)
Consider the following problem:

$$-(1+|x|^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - (4-|x|^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial\sqrt{1-|x|}}{\partial x_1} \qquad \text{in } \Omega$$

$$(2x_1 - x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + (x_1+3x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega,$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is a unit ball centered at zero. Write down the weak formulation of the above problem. Show that if the weak solution is smooth then it satisfies the above problem.

Řešení
Přepíšeme zadání do maticového zápisu $Lu := -\operatorname{div}(A\nabla u) + \mathbf{c}\cdot\nabla u = f$ v Ω a $A\nabla u\cdot\mathbf{n} = g$ na $\partial\Omega$ (máme neumannovskou okrajovou podmínku). Zřejmě $a_{11} = 1+|x|^2$ a $a_{22} = 4-|x|^2$. S a_{12} a a_{22} to není tak jednoduché, protože s první rovnice bychom řekli, že $a_{12} = a_{21} = 0$, ale to by nám pak nevyšla okrajová podmínka. Jak tedy vypadá okrajová podmínka. Normála $\mathbf{n}$ v bodech $\partial\Omega$ je rovna (x_1, x_2), neboť Ω je jednotkový kruh. To znamená, že potřebujeme, aby na $\partial\Omega$ bylo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

S $a_{11} = 1+|x|^2 = 1+1 = 2$ a $a_{22} = 4-|x|^2 = 4-1 = 3$ máme štěstí a můžeme si všimnout, že $a_{12} = 1$ a $a_{21} = -1$ nám nevadí ani na Ω, neboť když bude u dostatečně hladké ($u \in C^2$), pak dostaneme $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$.

Dobře, to je matice A. Kromě toho nám z derivace součinu v $-\operatorname{div}(A\nabla u)$ vypadnou členy

$$-\frac{\partial(1+|x|^2)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial(4-|x|^2)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2} = -2x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + 2x_2\frac{\partial u}{\partial x_2},$$

které jsme tam předtím neměli. Proto musíme ještě zvolit $\mathbf{c} = (2x_1, -2x_2)^T$. Nakonec zřejmě $g = 0$ a místo f použijeme $\tilde{f}(x) := \sqrt{1-|x|}$, kde $f = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}$. Neboť pak (pro dostatečně hladké φ):

$$\int_\Omega f\varphi = \int_\Omega \frac{\partial\sqrt{1-|x|}}{\partial x_1}\varphi \overset{\text{per partes}}{=} \int_{\partial\Omega}\sqrt{1-|x|}\varphi\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_1 - \int_\Omega \sqrt{1-|x|}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \int_{\partial\Omega} 0\cdot\ldots - \int_\Omega \tilde{f}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}.$$

Tedy můžeme jako na přednášce zadefinovat slabé řešení pomocí

bilineární formy: $B_L(u,\varphi) = \int A\nabla u\cdot\nabla\varphi - \mathbf{c}\cdot\nabla u\,\varphi$ a aplikace $\tilde{f}$: $\left\langle \tilde{f}, \varphi \right\rangle = -\int_\Omega \tilde{f}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$

jako $u \in W^{1,2}(\Omega)$, splňující $\forall\varphi \in W^{1,2}(\Omega) : B_L(u,\varphi) = \left\langle \tilde{f}, \varphi \right\rangle$ neboli

$$\forall\varphi \in W^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega \begin{pmatrix} 1+|x|^2 & 1 \\ -1 & 4-|x|^2 \end{pmatrix}\nabla u\,\nabla\varphi - \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}\cdot\nabla u\,\varphi\,dx = -\int_\Omega \sqrt{1-|x|}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$$

Důkaz (Smooth weak solution is classical solution)
Nechť tedy $u \in C^2(\overline{\Omega})$, potom $\forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \subset W^{1,2}(\Omega)$: pravá strana je rovna $\int_\Omega f\varphi$, jak už jsme ukázali. Levá strana:

$$B_L(u,\varphi) \overset{\text{per partes}}{=} \int_{\partial\Omega} A\nabla u\,\mathbf{n}\varphi - \int_\Omega \operatorname{div}(A\nabla u)\varphi - \mathbf{c}\cdot\nabla u\,\varphi =$$

$$= \int_{\partial\Omega} ((1+|x|^2)x_1 - x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\varphi + (x_1 + (4-|x|^2)x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\varphi\,dx +$$

$$+ \int_\Omega -(1+|x|^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\varphi - 2x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\varphi - (4-|x|^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\varphi + 2x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\varphi +$$

$$+2x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\varphi - 2x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\varphi\,dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} (2x_1 - x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\varphi + (x_1 + 3x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\varphi\,dx + \int_\Omega -(1+|x|^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\varphi - (4-|x|^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\varphi\,dx.$$

Ta je tedy rovna pravé ($\int_\Omega f\varphi = \int_\Omega \frac{\partial\sqrt{1-|x|}}{\partial x_1}\varphi$), tedy podle fundamentální věty (formálně nejprve aplikujeme na $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ čímž dostaneme první rovnost, tu dosadíme a pro $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ nám vypadne druhá)

$$\begin{aligned} -(1+|x|^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - (4-|x|^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial\sqrt{1-|x|}}{\partial x_1} && \text{na } \Omega \\ (2x_1 - x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + (x_1 + 3x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} &= 0 && \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

□