# Organizační úvod

*Poznámka*
Zkouška bude snad ústní.

# Úvod

**Věta 0.1** (Lebesgueova míra)

*Existuje právě jedna borelovská míra $\lambda^n$ v $\mathbb{R}^n$ taková, že*

$$\lambda^n\left(\mathrm{X}_{i=1}^n[a_i,b_i]\right)=\prod_{i=1}^n\left(b_i-a_i\right),-\infty<a_i\le b_i<\infty,1\le i\le n.$$

*Poznámka*
Zúplnění $B^n$ značíme $B_0^n$ a platí $B^n\subsetneq B_0^n\subsetneq\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (pro $n\ge 2$ jednoduché, pro $n=1$ možná někdy příště).

$\lambda^n$ je translačně a rotačně invariantní (posunutím a otočením se nezmění).

$\lambda^n$ je $\sigma$-konečná.

$\lambda^n$ je regulární (můžeme její hodnotu na množině aproximovat jejími hodnotami na otevřené nadmnožině a uzavřené podmnožině[a]).

[a]
$$\forall E\in B_0^n\ \forall\varepsilon>0\ \exists F\subset E\subset G, F \text{ uzavřená}, G \text{ otevřená}, \lambda^n\left(G\setminus F\right)<\varepsilon.$$

**Definice 0.1** (Pramíra)

$\tilde{\mu}:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ je pramíra (premeasure) na algebře $\mathcal{A}$ podmnožin $X$, jestliže:

$$\tilde{\mu}\left(\emptyset\right)=0,$$

$$A_i\in\mathcal{A},\bigcup_i A_i\in\mathcal{A},A_i \text{ po dvou disjunktní} \implies \tilde{\mu}\left(\bigcup_i A_i\right)=\sum_i\tilde{\mu}\left(A_i\right).$$

**Věta 0.2** (Hahn-Kolmogorov (viz dále))

*Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře $\mathcal{A}$. Pak existuje míra $\mu$ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\mu=\tilde{\mu}$ na $\mathcal{A}$. Je-li $\tilde{\mu}$ $\sigma$-konečná, je $\mu$ určená jednoznačně.*

# 1 Konstrukce Lebesgueovy míry z vnější míry

**Definice 1.1** (Vnější míra (outer measure))

Nechť $X \neq \emptyset$. Funkce $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ je vnější míra na $X$, jestliže:

$$\mu^*(\emptyset) = 0,$$

$$A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B), \text{ (monotonie)}$$

$$A_i \subset X \, (i \in \mathbb{N}) \implies \mu^*\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mu^*(A_i). \text{ (spočetná subadivita)}$$

*Například*

$$\mu^* \equiv 0,$$

$$\mu^* = \delta_x, x \in X,$$

$$\mu^*(A) = \operatorname{card} A,$$

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{pokud } A = \emptyset, \\ 1, & \text{pokud } A \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$X = \mathbb{R}, \lambda^*(A) := \inf\left\{\sum_i |I_i|, A \subset \bigcup_i I_i, I_i \text{ otevřené intervaly}\right\}$$

**Definice 1.2** (Měřitelnost vůči vnější míře)

Řekneme, že množina $A \subset X$ je $\mu^*$-měřitelná, jestliže

$$\forall T \subset X : \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A).$$

Značíme $\mathcal{A}_{\mu^*} := \{A \subset X | A \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná}\}$.

*Poznámka*

Ať $\mu^*$ je vnější míra na $X$, $Y \subset X$. Pak restrikce $\mu^*|_Y : A \mapsto \mu^*(A \cap Y)$ je vnější míra a platí:

$$\mathcal{A}_{\mu^*} \subset \mathcal{A}_{\mu^*|_Y}$$

*Důkaz*

$$A \in \mathcal{A}_{\mu^*} : \mu^*|_Y(T) = \mu^*(T \cap Y) = \mu^*(T \cap Y \cap A) + \mu^*((T \cap Y) \setminus A) =$$
$$= \mu^*|_Y \, (T \cap A) + \mu^*|_Y(T \setminus A).$$

$\square$

**Věta 1.1** (Caratheodory)

*$\mathcal{A}_{\mu^*}$ je $\sigma$-algebra na $X$ a $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ je míra. Prostor $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ je úplný.*

*Důkaz*

$\emptyset \in \mathcal{A}_\mu^*$ je zřejmé. Uzavřenost na komplement je také snadná, z definice $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Místo sjednocení ukážeme uzavřenost na konečný průnik: Víme $T \subset X : \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$, $\mu^*(T \cap A) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B)$ a $\mu^*(T \setminus (A \cap B)) = \mu^*((T \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu^*((T \setminus (A \cap B)) \setminus A) = \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A)$.

Tedy $\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \setminus (A \cap B))$. Tudíž $\mathcal{A}_{\mu^*}$ je algebra.

Nyní chceme ukázat, že $\mu^*$ je $\sigma$-aditivní na $\mathcal{A}_{\mu^*}$: Buďte $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ po dvou disjunktní. Volbou $T = A_1 \cup A_2$ dostaneme $\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \implies \mu^*$ je konečně aditivní na $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i) = \lim_{n \to \infty} \mu^* \left( \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \leq \mu^* \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

Opačná nerovnost plyne ze spočetné subaditivity. To znamená, že

$$\mu^* \left( \bigcup_i A_i \right) = \sum_i \mu^* (A_i), A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}, \text{ po dvou disjunktní.}$$

„$\mathcal{A}_{\mu^*}$ je uzavřená na disjunktní spočetné sjednocení“: $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, po dvou disjunktní, $T \subset X$.

$$\mu^*(T) = \mu^* \left( T \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) + \mu^* \left( T \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \geq \mu^* \left( T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + (\mu^*|_T) \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) =$$

$$= \mu^* \left( T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + \sum_{i=1}^{n} (\mu^*|T)(A_i).$$

Limitním přechodem $n \to \infty$ dostaneme

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*|_T)(A_i) = \mu^* \left( T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \right) (\mu^*|_T) \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

Z tohoto všeho plyne, že $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ je míra na $\sigma$-algebře $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Zbývá už jen úplnost:

$$\mu^*(A) = 0, T \subset X \implies \mu^*(T) \geq \mu^*(T \setminus A) = \underbrace{\mu^*(T \cap A)}_{=0} + \mu^*(T \setminus A) \implies A \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

$\square$

**Definice 1.3** (Metrická vnější míra)

Buď $(X, \varrho)$ metrický prostor. Řekneme, že vnější míra $\mu^*$ na $X$ je metrická, jestliže pro dvě množiny $A, B \subset X$ splňující $\operatorname{dist}(A, B) > 0$ platí

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

**Věta 1.2**

*Nechť $\mu^*$ je metrická vnější míra na metrickém prostoru $(X, \varrho)$. Pak $B(X) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$.*

*Důkaz*

Buď $F \subset X$ uzavřená. Ukážeme, že $F \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Označme

$$F_\varepsilon := \{x \in X | \varrho(x, F) \leq \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Nechť je dána $T \subset X$. Ověříme, že

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap F) + \mu^*(T \setminus F).$$

BÚNO $\mu^*(T) < \infty$. Protože $\operatorname{dist}(T \cap F, T \setminus F_\varepsilon) \geq \varepsilon > 0$, tak

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap F) + \mu^*(T \setminus F_\varepsilon, )$$

protože $\mu^*$ je metrická. Nyní stačí $\mu^*(T \setminus F_{\frac{1}{j}}) \overset{j \to \infty}{\to} \mu^*(T \setminus F)$. Označme $D_i := (F_{\frac{1}{i}} \setminus F_{\frac{1}{(i+1)}}) \cap T, i \in \mathbb{N}$. Platí $T \setminus F = (T \setminus F_{\frac{1}{j}}) \cup \bigcup_{i=j}^{\infty} D_i$, a tedy ze spočetné subadivity $\mu^*$ plyne

$$\mu^*(T \setminus F) \leq \mu^*(T \setminus F_{\frac{1}{j}}) + \sum_{i=j}^{\infty} \mu^*(D_i).$$

Je-li $|i - j| > 2$ je $\operatorname{dist}(D_i, D_j) > 0$ a tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^*(D_{2i}) = \mu^* \left( \bigcup_{i=1}^{n} D_{2i} \right) \leq \mu^*(T) < \infty,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^*(D_{2i-1}) = \mu^* \left( \bigcup_{i=1}^{n} D_{2i-1} \right) \leq \mu^*(T) < \infty.$$

Z toho už plyne, že $\sum_{i=j}^{\infty} \mu D_i \overset{j \to \infty}{\to} 0$. $\square$

**Definice 1.4** (Kvádry v $\mathbb{R}^n$, objem kvádru)

Symbolem $\mathcal{O}_n$ budeme značit množinu všech otevřených omezených kvádrů v $\mathbb{R}^n$ (včetně prázdné množiny). Objemem kvádru $I = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \in \mathcal{O}_n$ budeme myslet

$$v(I) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

### Tvrzení 1.3

*Buďte* $I, I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{O}_n$

1. *Je-li* $I \subset \overline{I_1} \cup \ldots \cup \overline{I_k}$, *platí* $v(I) \leq v(I_1) + \ldots + v(I_k)$.
2. *Je-li* $\overline{I} = \overline{I_1} \cup \ldots \cup \overline{I_k}$ *a jsou-li kvádry* $I_{[k]}$ *po dvou disjunktní, platí* $v(I) = v(I_1) + \ldots + v(I_k)$.

*Důkaz*

1. krok: Nechť $I = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, $\mathcal{D}_i$ je dělení intervalu $(a_i, b_i)$, $i \in [n]$ a označme symbolem $\mathcal{J}$ systém všech otevřených kvádrů $J_1 \times \ldots \times J_n$, kde $J_i$ je otevřený interval z dělení $\mathcal{D}_i$. Pak zřejmě

$$\overline{I} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J, \qquad v(I) = \sum_{J \in \mathcal{J}} v(J).$$

2. krok: Jsou-li $I_1, \ldots, I_k$ jako v druhém bodě, převedeme situaci snadno na případ uvažovaný v 1. kroku. Tím je dokázán druhý bod.

3. krok: První bod plyne z druhého, jelikož z libovolného pokrytí kvádru $I$ kvádry $I_1, \ldots, I_k$ snadno vyrobíme disjunktní pokrytí. $\square$

### Definice 1.5

Pro množinu $E \subset \mathbb{R}^n$ klademe

$$\lambda^{n*}(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) | E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \wedge I_i \in \mathcal{O}_n \right\}.$$

Pro $\delta > 0$ definujeme

$$\lambda^{n*}_{\delta}(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) | E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \wedge I_i \in \mathcal{O}_n \wedge \operatorname{diam}(I_i) < \delta \right\}.$$

### Tvrzení 1.4

*Pro* $E \subset \mathbb{R}^n$ *a* $\delta > 0$ *platí* $\lambda^*(E) = \lambda^{n*}_{\delta}(E)$.

*Důkaz*

Nerovnost $\lambda^{n*}(E) \leq \lambda^{n*}_\delta$ je z definice. „$\geq$“ BÚNO $\lambda^{n*}(E) < \infty$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Z definice $\lambda^{n*}(E)$ existují $I_1, \ldots \in \mathcal{O}_n$ takové, že $E \subset \bigcup_i I_i$ a

$$\sum_i v(I_i) < \lambda^{n*}(E) + \varepsilon.$$

Každý z kvádrů $I_i$ můžeme rozdělit na konečný počet disjunktních kvádrů $J_s^{[k(i)]}$ s diametry menšími než $\delta$, přitom $\overline{I_i} = \bigcup \overline{J_i^{[k(i)]}}$. Podle předchozího tvrzení platí $v(I_i) = \sum v(J_i^{[k(i)]})$. Zřejmě existují $I_i^j \in \mathcal{O}_n$ takové že $\overline{J_i^j} \subset I_i^j$, $\operatorname{diam} I_i^j < \delta$ a $v(I_i^j) < v(J_i^j) + \frac{\varepsilon}{k(i)2^i}$. Pak $E \subset \bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{j \in [k(i)]} I_i^j$, a tedy

$$\lambda^{n*}_\delta(E) \leq \sum_{i=1}^\infty \sum_{j \in [k(i)]} v(I_i) + \varepsilon < \lambda^{n*}(E) + 2\varepsilon.$$

Nyní už limitním přechodem $\varepsilon \to 0$ dostaneme $\lambda^{n*}_\delta(E) \leq \lambda^{n*}(E)$. □

## Věta 1.5

*$\lambda^{n*}$ je metrická vnější míra na $\mathbb{R}^n$ a $\forall I \in \mathcal{O}_n$ platí $\lambda^{n*}(I) = v(I)$.*

*Důkaz*
Množinová funkce $\lambda^{n*}$ je zřejmě monotónní a platí $\lambda^{n*}(\emptyset) = 0$. Ukážeme spočetnou subaditivitu. Buďte $E_i \subset \mathbb{R}^n$ a předpokládejme, že $\lambda^{n*}(E_i) < \infty$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle definice $\lambda^{n*}$ existují $I_i^j \in \mathcal{O}_n$ takové, že $E_i \subset \bigcup_j I_i^j$ a $\sum_j v(I_i^j) < \lambda^{n*}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$. Pak ale platí $\bigcup_i E_i \subset \bigcup_{i,j} I_i^j$, a tedy

$$\lambda^{n*}\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_{i,j} v(I_i^j) < \sum_i \lambda^{n*}(E_i) + \varepsilon.$$

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0$ dostáváme spočetnou subaditivitu. $\lambda^{n*}$ je tedy vnější míra.

Dále ukážeme, že $\lambda^{n*}$ je metrická, tedy pro $A, B \subset \mathbb{R}^n$ takové, že $\operatorname{dist}(A, B) > 0$ platí

$$\lambda^{n*}(A \cup B) \geq \lambda^{n*}(A) + \lambda^{n*}(B).$$

Je-li $\lambda^{n*}(A \cup B) = \infty$, nerovnost zřejmě platí. BÚNO ted $\lambda^{n*}(A \cup B) < \infty$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle předchozího tvrzení existují $I_i \in \mathcal{O}_n$ takové že $\operatorname{diam}(I_i) < \frac{\operatorname{dist}(A,B)}{2}$ a $\sum_i v(I_i) < \lambda^{n*}(A \cup B) + \varepsilon$. Označme

$$\mathcal{I}_A := \{i \in \mathbb{N} | I_i \cap A \neq \emptyset\}, \mathcal{I}_B := \{i \in \mathbb{N} | I_i \cap B \neq \emptyset\}.$$

Žádný z kvádrů $I_i$ nemůže zasáhnout obě množiny $A, B$, proto jsou tyto množiny disjunktní. Navíc zřejmě $A \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}_A} I_i$ a $B \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}_B} I_i$. Proto

$$\lambda^{n*}(A) + \lambda^{n*}(B) \leq \sum_{i \in \mathcal{I}_A \cup \mathcal{I}_B} v(I_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) < \lambda^{n*}(A \cup B) + \varepsilon.$$

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0$ dostaneme požadovanou nerovnost.

Zbývá „$\forall I \in \mathcal{O}_n : \lambda^{n*}(I) = v(I)$“. Nerovnost $\lambda^{n*}(I) \leq v(I)$ je zřejmá, stačí zvolit pokrytí $I_1 = I$.

Předpokládejme pro spor, že $\lambda^{n*}(I) < v(I)$. Pak existují $I_i \in \mathcal{O}_i$ takové, že $I \subset \bigcup_i I_i$ a $\sum_i v(I_i) < v(I)$. Zřejmě existuje $J \in \mathcal{O}_n$ takový, že $\overline{J} \subset I$ a $\sum_i v(I_i) < v(J)$. Protože $\overline{J}$ je kompaktní, existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\overline{J} \subset \bigcup I_{[k]}$. Pak ale $v(J) \leq \sum v(I_{[k]})$ podle tvrzení výše, což je spor. □

# 2 Znaménkové míry

**Definice 2.1** (Znaménková míra, náboj)

Řekneme, že funkce $\sigma : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$ je znaménková míra na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$, jestliže

- $\sigma(\emptyset) = 0$,

- $\sigma$ nabývá nejvýše jedné z hodnot $\pm\infty$,
- ($\sigma$-aditivita) pro libovolnou posloupnost po dvou disjunktních množin $A_n \in \mathcal{A}$ platí

$$\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n).$$

Konečná znaménková míra se též nazývá náboj.

**Definice 2.2** (Kladná a záporná množina)

Buď $\sigma$ znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$ Řekneme, že množina $A \in \mathcal{A}$ je kladná pro $\sigma$, jestliže pro každou měřitelnou množinu $E \subset A$ platí $\sigma(E) \geq 0$. Množina $A \in \mathcal{A}$ je záporná pro $\sigma$, jestliže pro každou měřitelnou množinu $E \subset A$ platí $\sigma(E) \leq 0$.

**Tvrzení 2.1**

*Buď $\sigma$ znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$ a $E \in \mathcal{A}$ množina taková, že $0 < \sigma(E) < \infty$. Pak existuje kladná množina $A \subset E$ taková, že $\sigma(A) > 0$.*

*Důkaz*

Kdyby sama $E$ byla kladná, položíme $A := E$. Pokud ne, definujeme

$$t_1 := \inf\{\sigma(B) | B \subset E \wedge B \in \mathcal{A}\} < 0$$

a vybereme $E_1 \subset E$ takovou, že $\sigma(E_1) < \max\left\{\frac{t_1}{2}, -1\right\}$. Platí $\sigma(E \setminus E_1) = \sigma(E) - \sigma(E_1) > \sigma(E) > 0$, a pokud je množina $E \setminus E_1$ již kladná, vybereme ji za $A$ a jsme hotovi.

Pokud ne, pokračujeme stejnou konstrukcí, tedy položíme

$$t_2 := \inf\{\sigma(B) | B \subset E \setminus E_1 \wedge B \in \mathcal{A}\} < 0$$

a zvolíme $E_2 \subset E \setminus E_1$ takovou, že $\sigma(E_2) < \max\left\{\frac{t_2}{2}, -1\right\}$. Tímto způsobem buď po konečném počtu kroků najdeme kladnou množinu $A \subset E$ kladné míry, nebo sestrojíme posloupnost disjunktních měřitelných množin $E_1, E_2, \ldots, \subset E$ a posloupnost záporných čísel $t_1, t_2, \ldots$ takové, že $\sigma(E_i) < \max\left\{\frac{t_i}{2}, -1\right\} < 0$, $i \in \mathbb{N}$.

Položme $A := E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Ze spočetné aditivity dostaneme

$$\sigma(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(E_i) = \sigma(E) > 0,$$

tedy $\sigma(A) > \sigma(E) > 0$ a řada $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(E_i)$ konverguje, tedy nutně $\sigma(E_i) \to 0$. Pak ale i $t_i \to 0$. Ukážeme, že $A$ je kladná: Pro libovolnou $B \subset A$ měřitelnou platí $B \cap E_i = \emptyset$, $i \in \mathbb{N}$, tedy $\sigma(B) \geq t_i$, $i \in \mathbb{N}$ a protože $t_i \to 0$ je $\sigma(B) \geq 0$. $\square$

**Věta 2.2** (Hahn-Banachův rozklad)

*Buď $\sigma$ znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$. Pak existuje rozklad $X = P \cup N$ takový, že $P$ je kladná a $N$ záporná množina pro $\sigma$.*

*Důkaz*

BÚNO $\sigma(E) < \infty$ pro každou $E \in \mathcal{A}$. (Kdyby ne, pracovali bychom s mírou $-\sigma$.) Položme $\lambda := \sup \{\sigma(E) | E \in \mathcal{A} \wedge E$ kladná pro $\sigma\}$. Zřejmě $\lambda \geq 0$ ($\emptyset$ je kladná).

Buďte $A_i \in \mathcal{A}$ kladné takové, že $\sigma(A_i) \to \lambda$ (existence plyne z definice suprema). Pak množina $P := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ je kladná a ze vztahu

$$\sigma(P) = \sigma(A_i) + \sigma(P \setminus A_i) \geq \sigma(A_i), \qquad i \in \mathbb{N},$$

plyne $\sigma(P) = \lambda$. Ukážeme dále, že množina $N := X \setminus P$ je záporná. Nechť $B \subset N$ je měřitelná. Kdyby $\sigma(B) > 0$, pak by podle předchozího tvrzení existovala měřitelná kladná množina $B' \subset B$, pro niž $\sigma(B') > 0$. Pak by ale $P \cup B'$ byla rovněž kladná množina s mírou

$$\sigma(P \cup B') = \sigma(P) + \sigma(B') > \sigma(B) = \lambda,$$

což by byl spor s definicí $\lambda$. □

**Definice 2.3** (Jordanův rozklad)

Buď $\sigma$ znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$. Pak (nezáporné míry) $\sigma_+(\cdot) := \sigma(\cdot \cap P)$ a $\sigma_-(\cdot) := -\sigma(\cdot \cap N)$ nazýváme kladnou a zápornou částí $\sigma$ a platí $\sigma = \sigma_+ - \sigma_-$.

Míru $|\sigma| := \sigma_+ + \sigma_-$ nazýváme totální variací znaménkové míry $\sigma$.

**Tvrzení 2.3**

*Je-li $\sigma = \sigma'_+ - \sigma'_-$ jiný rozklad znaménkové míry $\sigma$ na rozdíl dvou nezáporných měr, pak $\sigma'_+ \geq \sigma_+$ a $\sigma_- \geq \sigma_-$.*

*Důkaz*

Pro libovolnou $E \in \mathcal{A}$ platí

$$\sigma_+(E) = \sigma(E \cap P) = \sigma'_+(E \cap P) - \sigma'_-(E \cap P) \leq \sigma'_+(E \cap P) \leq \sigma'_+(E).$$

Podobně se ukáže, že $\sigma'_-(E) \geq \sigma_-(E)$. □

**Věta 2.4** (Regularita Lebesgueovy míry)

*Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$. Je ekvivalentní:*

1. $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$,
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists F \subset E \subset G$, $F$ *uzavřená*, $G$ *otevřená*, $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$,

*3.* $\exists A \subset E \subset B,\ A, B \in \mathcal{B}^n,\ \lambda^n(B \setminus A) = 0,$

*4.* $E \in \mathcal{B}_0^n$.

*Důkaz*
1 $\implies$ 2: Mějme $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$, $\varepsilon > 0$. Nechť nejprve $\lambda^{n*}(E) < \infty$. Pak $\exists I_i \in O_n$, $E \subset \bigcup_i I_i$, $\sum_i v(I_i) < \lambda^{n*}(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. Položme $G := \bigcup_i I_i$ (otevřená), $E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Je-li $\lambda^{n*}(E) = \infty$, pak ze $\sigma$-konečnosti je $E = \bigcup_m E_m$, $E_m := E \cap [-m, m]^n$. $\lambda^{n*}(E_m) < \infty \implies \exists G_m$ otevřená, $E_m \subset G_m$, $\lambda^n(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$. $G := \bigcup_m G_m$ otevřené, $E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus E) \leq \sum_m \lambda^n(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$E^c \in \mathcal{A}_{\lambda^{m*}} \implies \exists H$ otevřená, $E^c \subset H$, $\lambda^n(H \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. $F := H^c$ uzavřená, $F \subset E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus F) = \lambda^n(G \setminus E) = \lambda^n(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2 $\implies$ 3: Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ splňuje 2.

$$\forall j \in \mathbb{N}\ \exists F_j \subset E \subset G_j, F_j \text{ uzavřená}, G_j \text{ otevřená}, \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}.$$

Položme $A := \bigcup_j F_j$, $B := \bigcap_j G_j$, $A, B \in \mathcal{B}^n$, $A \subset E \subset B$. $\lambda^n(B \setminus A) \leq \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}$ pro libovolné $j \in \mathbb{N}$, tedy $\lambda^n(B \setminus A) = 0$.

3 $\implies$ 4: Jsou-li $A \subset E \subset B$ jako v 3, pak $B \setminus A$ je $\lambda^n$-nulová množina, a tedy $E \in \mathcal{B}_0^n$.

4 $\implies$ 1: $\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ obsahuje $\mathcal{B}^n$ a nulové množiny, tedy obsahuje $\mathcal{B}_0^n$. $\square$

**Věta 2.5** (Luzinova (běžně bývá obecnější))

*Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lebesgueovsky měřitelná. Buď $\varepsilon > 0$. Pak existuje $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená taková, že $\lambda^n(G) < \varepsilon$ a restrikce $f|_{G^c}$ je spojitá.*

*Důkaz*
Buď $U_1, U_2, \ldots$ posloupnost všech otevřených intervalů s racionálními koncovými body. $f$ je lebesgueovsky měřitelná, tedy $\forall j, f^{-1}(U_1) \in \mathcal{B}_0^n$. Podle regularity pak $\exists F_j \subset f^{-1}(U_j) \subset G_j$, $F_j$ uzavřená, $G_j$ otevřená, $\lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$. Položme $G := \bigcup_j (G_j \setminus F_j)$. Zřejmě $G$ je otevřená, $\lambda^n(G) \leq \sum_j \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \varepsilon$.

Pro restrikci $g := F|_{G^c}$ platí:

$$g^{-1}(U_j) = \{x \in G^c : f(x) \in U_j\} = f^{-1}(U_j) \cap G^c = G_j \cap G^c, j \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě $U \subset \mathbb{R}$ otevřená $\implies$ $U = \cup_{U_j \subset U} U_j$, tedy $g^{-1}(U) = \bigcup_{U_j \in U} g^{-1}(U_j)$ otevřená množina v $G^c$, tedy $g$ je spojitá na $G^c$. $\square$

*Poznámka*
Obecně nelze požadovat $\lambda^n(G) = 0$. Např. charakteristická funkce diskontinua kladné míry (podobně jako Cantorovo diskontinuum, ale nenulové míry), které dostaneme tak, že z prostředků intervalů v $i$-tém kroku vždy odebereme intervaly délky $a_i$ tak, aby $a_1 + 2a_2 + 4a_3 + \ldots < 1$. ($G$ z minulé věty pak bude sjednocení malých okolíček krajních bodů odebíraných intervalů.)

# 3 Regularita borelovských měr

**Definice 3.1** (Regulární borelovská míra)

Borelovská míra $\mu$ na topologickém (metrickém) prostoru $X$ je regulární, jestliže $\forall B \in \mathcal{B}(X) : \mu(B) = \inf\{\mu(G) | B \subset G, G \text{ otevřená}\}$.

*Poznámka*
1) Často se hovoří o vnější regularitě (outer regular measure). 2) Pro konečné míry: $\mu$ je regulární $\implies \forall B \in \mathcal{B} : \mu(B) = \sup\{\mu(F) | F \subset B, F \text{ uzavřená}\}$.

**Věta 3.1**

*Každá konečná borelovská míra na metrickém prostoru je regulární.*

*Důkaz*
$(X, \varrho)$ metrický prostor, $\mu$ borelovská míra na $X$, $\mu(X) < \infty$. Označme

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}(X) |\ \varepsilon > 0\ \exists F \subset B \subset G, F \text{ uzavřená}, G \text{ otevřená}, \mu(G \setminus F) < \varepsilon\}.$$

Ukážeme, že $\mathcal{D} := \mathcal{B}(X)$. Nejprve $\mathcal{D}$ obsahuje všechny množiny: $F \subset X$ uzavřená, $F_{<\varepsilon} := \{x \in X |\ \varrho(x, F) < \varepsilon\}$ (otevřená). Zřejmě $F_{<\frac{1}{j}} \searrow F$, $j \to \infty$ z uzavřenosti $F$. $\mu$ konečná $\implies$ (spojitost míry) $\mu\left(F_{<\frac{1}{j}}\right) \to \mu(F)$.

„$\mathcal{D}$ je $\sigma$-algebra“: $\emptyset \in \mathcal{D}$, $D \in \mathcal{D} \implies D^c \in \mathcal{D}$:

$$F \subset D \subset G, \mu(G \setminus F) < \varepsilon \implies G^c \subset D^c \subset F^c, \mu(F^c \setminus G^c) < \varepsilon.$$

„$D_i \in \mathcal{D} \implies \bigcup_i D_i \in \mathcal{D}$“:

$$\exists F_i \subset D_i \subset G_i, \mu(G_i \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} F_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i, N \in \mathbb{N}.$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

□

*Poznámka*
$\sigma$-konečné míry nemusí být regulární, viz prostor spočetně přímek procházejících počátkem v $\mathbb{R}^2$.

**Definice 3.2** (Těsnost (= vnitřní regularita))

Borelovská míra $\mu$ na metrickém (topologickém) prostoru $X$ je těsná (= tight), jestliže $\forall B \in \mathcal{B}(X) : \mu(B) = \sup\{\mu(K) | K \subset B \wedge K \text{ kompaktní}\}$.

*Poznámka*
$\mu$ je Radonova míra, jestliže je těsná a konečná na kompaktech.

Pokud $\mu$ je konečná a těsná, pak už je $\mu$ regulární.

Jestliže $\mu$ je konečná a regulární a $\mu(X) = \sup\{\mu(K) | K \subset X \text{ kompaktní}\}$, pak $\mu$ je těsná.

## Věta 3.2

*Pokud $\mu$ je konečná borelovská míra na úplném separabilním metrickém prostoru, potom už je těsná.*

*Důkaz*
Stačí ukázat $\mu(X) = \sup\{\mu(K) | K \subset X \text{ kompaktní}\}$: $S = \{x_1, x_2, \dots\} \subset X$ hustá spočetná (ze separability). $\forall n \in \mathbb{N} : \bigcup_i \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i) = X$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak $\forall n\ \exists k_n$ : $\mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ (ze spojitosti míry).

Definujeme $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)$ ($\in \mathcal{B}(X)$). $A$ je totálně omezená (tzn. $\forall \varepsilon > 0\ \exists F \subset A$ kompaktní tak, že $A \subset \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x)$). $\overline{A}$ je totálně omezená a uzavřená $\implies$ $\overline{A}$ je úplný MP (+ totálně omezený), tedy $\overline{A}$ je kompaktní.

$$\mu(X \setminus \overline{A}) \leq \mu(X \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)\right)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)\right) < \varepsilon.$$

□

# 4 Věta o rozšíření míry

**Věta 4.1** (Hahn-Kolmogorov)

*Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ $\implies$ existuje míra $\mu$ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\mu = \tilde{\mu}$ na $\mathcal{A}$. Je-li $\tilde{\mu}$ $\sigma$-konečná, je $\mu$ určena jednoznačně.*

*Důkaz*
Pro $E \subset X$ položme $\mu^*(E) := \inf\{\sum_{i=1}^\infty \tilde{\mu}(A_i) | A_i \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i\}$. Ověříme, že $\mu^*$ je vnější míra.

„$\forall A \in \mathcal{A} : \mu^*(A) = \tilde{\mu}(A)$“: Zřejmě $\mu^*(A) \leq \tilde{\mu}(A)$, jelikož můžeme pokrýt $A$ množinami $A, \emptyset, \emptyset, \ldots$. Pro $\geq$ mějme $A \subset \bigcup_i A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$. $B_1 := A_1 \cap A$, $B_2 := (A_2 \cap A) \setminus B_1$, ... O nich víme, že $A = \bigcup_i B_i$, $B_i$ po dvou disjunktní, $B_i \in \mathcal{A}$. $\tilde{\mu}(A) = \sum_i \tilde{\mu}(B_i) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i)$, tedy z definice infima $\tilde{\mu}(A) \leq \inf_{A_i} \sum_i \tilde{\mu}(A_i) = \mu^*(A)$.

Zbývá ukázat, že $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$. Nechť $A \in \mathcal{A}$, $T \subset X$, $\mu^*(T) < \infty$. Stačí ukázat, že $\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$. K danému $\varepsilon > 0$ existuje pokrytí $T \subset \bigcup_i A_i$ množinami $A_i \in \mathcal{A}$ takové že $\sum_i \tilde{\mu}(A_i) < \mu^*(T) + \varepsilon$. Protože $T \cap A \subset \bigcup_i (A_i \cap A)$, $T \setminus A \subset \bigcup_i (A_i \setminus A)$ a množiny $A_i \cap A$ i $A_i \setminus A$ patří do $\mathcal{A}$, platí

$$\mu^*(T \cap A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \cap A), \qquad \mu^*(T \setminus A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \setminus A).$$

Sečtením dostaneme

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \cap A) + \sum_i \tilde{\mu}(A_i \setminus A) = \sum_i \tilde{\mu}(A_i) < \mu^*(T) + \varepsilon,$$

z čehož plyne dokazovaná nerovnost. Podle C. věty je $\mu := \mu^* | A_{\mu^*}$ míra, která navíc podle druhé části důkazu rozšiřuje pramíru $\tilde{\mu}$ a podle třetí je definovaná na $\sigma\mathcal{A}$.

Jednoznačnost: $\mathcal{A}$ uzavřená na konečné průniky, $\tilde{\mu}$ je $\sigma$-konečná $\implies \exists A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \nearrow X, \tilde{\mu}(A_n) < \infty \implies \mu$ je jednoznačně určena (věta o jednoznačnosti míry, TMI1). $\square$

*Poznámka* (Zobecnění příkladu z TMI1)
$E = \text{X}_{i=1}^\infty E_i$, $E_i$ úplné separabilní metrické prostory (např. $E_i = \mathbb{R}$), $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$ ... $E_I = E_i$, $E, E_I$ metrické prostory. $\pi_I : E \to E_I$ kanonická projekce. A následující věta:

## Věta 4.2 (Daniell-Kolmogorov)

*$E_i$ úplné separabilní metrické prostory, $i \in \mathbb{N}$. Nechť pro každou $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$ existuje borelovská pravděpodobnostní míra $\mu_I$ na $E_I$. A nechť je splněna projektivní vlastnost:*

$$\emptyset \neq I \subset J \subset \mathbb{N} \text{ konečná}, \forall B \in \mathcal{B}(E_I) : \mu_I(B) = \mu_J\left(\left(\pi_I^J\right)^{-1}(B)\right),$$

*pak $\exists!$ borelovská míra $\mu$ na $E = \text{X}_{i=1}^\infty E_i$ taková, že $\forall \emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$ konečná, $\forall B \in \mathcal{B}(E_I)$ : $\mu(\pi_I^{-1}(B)) = \mu_I(B)$.*

## Lemma 4.3

$$1) x_n, x \in E : x_n \to x \Leftrightarrow x_n(i) \to x(i), i \in \mathbb{N},$$

$$x_n, x \in E_I : x_n \to x \Leftrightarrow x_n(i) \to x(i), i \in I$$

*2) $\pi_I, \pi_I^J$ jsou spojitá zobrazení.*

*3) $\forall I \in \mathcal{I}_f$: $E_I$ je úplný separabilní MP.*

*4) $\mathcal{B}(E_I) = \otimes_{i\in I}\mathcal{B}(E_i)$.*

*Důkaz*

1 jsme nedokazovali, 2 a 3 jsou triviální.

$$4)\ \otimes_{i\in I} \mathcal{B}(E_i) = \sigma \left\{ \mathrm{X}_{i\in I} B_i | B_i \in \mathcal{B}(E_i) \right\} = \sigma \left\{ \mathrm{X}_{i\in I} G_i | G_i \subset E_i \text{ otevřené} \right\},$$

tedy $\mathrm{X}_{i\in I} G_i$ je otevřená v $E_I \implies \otimes_{i\in I}\mathcal{B}(E_i) \subset \mathcal{B}(E_I)$. Naopak $U \subset E_I$ otevřená $\implies$ $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, kde $U_n = \mathrm{X}\, G_i^n$, $G_i^n \subset E_i$ otevřená $\implies \mathcal{B}(E_I) \subset \otimes_{i\in I}\mathcal{B}(E_i)$. □

**Věta 4.4** (Daniell-Kolmogorov)

*$E_i$ úplné separabilní metrické prostory $i \in \mathbb{N}$. Nechť pro každou $I \in \mathcal{I}_f$ existuje borelovská pravděpodobnostní míra $\mu_I$ na $E_I$. Nechť $I \subset J \wedge I, J \in \mathcal{I}_f \implies \mu_I = \mu_J(\pi_I^J)^{-1}$. Pak existuje právě jedna borelovská pravděpodobnostní míra $\mu$ na $E$ taková, že*

$$\forall I \in \mathcal{I}_f : \mu_I = \mu(\pi_I)^{-1}.$$

*Důkaz*

Položme $\mathcal{A} := \left\{ \pi_I^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}(E_i), I \in \mathcal{I}_f \right\}$. Ukážeme nejprve, že systém $\mathcal{A}$ je algebra. (Prostě se ověří podmínky.)

Definujeme množinovou funkci $\tilde{\mu}$ na $\mathcal{A}$ předpisem

$$\tilde{\mu}(A) = \mu_I(B), A = \pi_I^{-1}(B), B \in \mathcal{B}_I.$$

Ukážeme nejprve konzistenci této definice (dvě vyjádření podle předpokladů dávají stejný výsledek, když se rozepíší).

Dále se ukáže, že $\tilde{\mu}$ je konečně aditivní množinová funkce. (Jednoduché.) Dále dokážeme, že je to pramíra (že splňuje podmínku spojitosti v prázdné množině).

Podle Hahn-Kolmogorovovy věty lze tedy pramíru $\tilde{\mu}$ jednoznačně rozšířit na pravděpodobnostní míru $\mu$ na $\sigma\mathcal{A}$. Zbývá ukázat, že $\sigma\mathcal{A} = \mathcal{B}(E)$. Protože projekce jsou spojité, je vzor každé otevřené množiny otevřená, tedy borelovská množina. Platí tedy $\sigma\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(E)$. Pro opačnou inkluzi si uvědomme, že borelovská $\sigma$-algebra separabilního prostoru $E$ je generována uzavřenými okolími $\overline{U}_\varepsilon(x)$ bodů $x \in E$, $\varepsilon > 0$. Z definice metriky v $E$ a $E_{[n]}$ snadno dostaneme vztah

$$\overline{U}_\varepsilon(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi_{[n]}^{-1}(\overline{U}_\varepsilon(\pi_{[n](x)})),$$

tedy $\overline{U}_\varepsilon(x) \in \sigma\mathcal{A}$. Platí tedy i $\mathcal{B}(E) \subset \sigma\mathcal{A}$ a důkaz je ukončen.

□

# 5 Charakterizace Riemannovsky integrovatelných funkcí

**Věta 5.1**

*Buď $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená. Pak*

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow f \textit{je spojitá v } \lambda^1\textit{-skoro všude na } (a,b).$$

*Důkaz*
$(\mathcal{D}_n)$ posloupnost zjemňujících se dělení intervalu $[a,b]$.

$$\mathcal{D}_n = \left\{a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_{k_n}^{(n)} = b\right\}, n \in \mathbb{N}, ||\mathcal{D}_n|| = \max_{1\le i\le k_n}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Označme $s_n(x) := \inf_{[x^{(n)}{i-1}, x_i^{(n)}} f$, $S_n(x) := \sup_{[x^{(n)}{i-1}, x_i^{(n)}} f$, $x \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$, $n \in \mathbb{N}$ a $S_n(x) := 0$, $S_n(x) := 0$ pro ostatní $x \in \mathbb{R}$. Toto jsou jednoduché měřitelné funkce.

Horní a dolní Riemannův součet splňuje

$$\underline{\int_a^b} f \overset{n\to\infty}{\leftarrow} s(f,\mathcal{D}_n) = \int_a^b s_n d\lambda^1, \overline{\int_a^b} f \overset{n\to\infty}{\leftarrow} S(f,\mathcal{D}_n) = \int_a^b S_n d\lambda^1.$$

$|f| \le M$, tedy $-M \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le f \le \ldots \le S_2 \le S_1 \le M$. Označme $f_1 := \lim_{n\to\infty} s_n$, $f_2 := \lim_{n\to\infty} S_n$ (bodové limity funkcí).

$$-M \ \le s_n \searrow f_1 \le f \le f_2 \nwarrow S_n \le M, \qquad f_1, f_2 \text{ měřitelné.}$$

Ze zobecněné Leviho věty $\int_a^b s_n d\lambda^1 \to \int_a^b f_1 d\lambda^1$, $\int_a^b S_n d\lambda^1 \to \int_a^b f_2 d\lambda^1$.

„ $\Longrightarrow$ “: Nechť $f \in R[a,b]$, tedy $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Proto

$$\int_a^b f_1 d\lambda^1 = \int_a^b f_2 d\lambda^1 \implies \int_a^b (f_2 - f_1) d\lambda^1 = 0 \implies f_1 = f_2 \lambda^1\text{-s.v.}$$

$$N := \{x \in [a,b] | f_1(x) \neq f_2(x)\} \cup \left\{x_i^{(n)} | 0 \le i \le k_n, n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad \lambda^1(N) = 0.$$

Ukážeme, že $f$ je spojitá ve všech bodech množiny $(a,b) \setminus N$: Buď $x \in (a,b) \setminus N$, $\varepsilon > 0$. Potom $f_1(x) = f_2(x) \implies \exists n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) - s_n(x) < \varepsilon$. $I_n$ nechť je otevřený interval dělení $\mathcal{D}_n$, pro nějž $x \in I_n$. Pak

$$s_n(x) \le f(y) \le S_n(x), y \in I_n \implies |f(y) - f(x)| \le 2\varepsilon, y \in I_n \implies f \text{ je spojitá v bodě } x.$$

$\Leftarrow$: Nechť $\lambda^1(\mathcal{D}) = 0$, kde $D := \{x \in (a,b) : \ f$ není spojitá v $x\}$. Ukážeme, že $S_n(x) - s_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} 0$

$$\implies S(f,\mathcal{D}_n) - s(f,\mathcal{D}_n) \to 0 \implies f \in R[a,b].$$

Nechť $x \in (a,b) \setminus \mathcal{D}$, $\varepsilon > 0$. Pak $f$ je spojitá v bodě $x \implies \exists \delta > 0$, $|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Zvolme $n_0$ tak velké, aby $||\mathcal{D}_n|| < \delta$, $n \ge n_0$. Pak

$$S_n(x) - s_n(x) \le 2 \sup\{|f(y) - f(x)| : |y - x| < \delta\} < 2\varepsilon.$$

□

# 6 Pokrývací věty

*Poznámka* (Úmluva)
Koulí se myslí uzavřená koule, $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n | ||y-x|| \leq r\}$, $r > 0$, $\operatorname{rad} B = r$, $t > 0 \implies tB = B(x, t \cdot r)$.

**Lemma 6.1** („5$r$“ covering)

*Nechť $\mathcal{F}$ je systém koulí v $\mathbb{R}^n$ (uzavřené, nedegenerované), $\sup_{B\in\mathcal{F}}(\operatorname{rad} B) < \infty$. Pak existuje disjunktní podsystém $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ takový, že*

$$\forall B \in \mathcal{F}\ \exists B' \in \mathcal{F}' : B \cap B' \neq \emptyset \wedge B \subset 5B.$$

*Důsledek*

$$\bigcup \mathcal{F} \subset \bigcup_{B'\in\mathcal{F}'} 5B'$$

*Důkaz* („5$r$“ covering)
Označme $R := \sup_{B\in\mathcal{F}} \operatorname{rad} B$. $\mathcal{F}_k := \left\{B \in \mathcal{F} | \operatorname{rad} B \in \left(\frac{R}{2^{k+1}}, \frac{R}{2^k}\right]\right\}$, $k = 0, 1, \ldots$ Dále definujeme indukcí systémy $\mathcal{B}_k$, $k = 0, 1, \ldots$: $\mathcal{B}_0$ libovolný maximální disjunktní podsystém $\mathcal{F}_0$. Máme-li $\mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_k$: $\mathcal{B}_{k+1}$ libovolný maximální disjunktní podsystém

$$\{B \in \mathcal{F}_{k+1} | \forall B' \in \mathcal{B}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k : B \cap B' = \emptyset\},$$

$\mathcal{F}' := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k$ disjunktní podsystém $\mathcal{F}$.

Nyní už jen ověříme vztah ze znění: Nechť $B \in \mathcal{F}$, pak $B \in \mathcal{F}_k \implies \exists B' \in \mathcal{B}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$, $B \cap B' \neq \emptyset$ (z maximality). Dále víme, že $\frac{R}{2^{k+1}} < \operatorname{rad} B \leq \frac{R}{2^k}$ a $\frac{R}{2^{k+1}} < \operatorname{rad} B'$, tedy $\operatorname{rad} B < 2 \operatorname{rad} B'$. Navíc $B = B(x,r)$ a $B' = B(x', r')$, $r < 2r'$, $B \cap B' \neq \emptyset$, tedy $||x - x'|| \leq r + r'$, tj. $\forall y \in B : ||y - x'|| \leq ||y - x|| + ||x - x'|| \leq r + r + r' < 5r'$. □

**Definice 6.1** (Vitaliovo pokrytí)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že systém uzavřených koulí $\mathcal{F}$ je Vitaliovým pokrytím (Vitaly Cover) množiny $A$, jestliže

$$\forall a \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{F} : a \in B, \operatorname{rad}\ B < \varepsilon.$$

**Věta 6.2** (Vitaly Covering Theorem)

*Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathcal{F}$ je Vitaliovo pokrytí $A$. Pak existuje disjuktní $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ takový, že $\lambda^n(A \setminus \bigcup \mathcal{F}') = 0$.*

*Důkaz*
BÚNO nechť $\sup_{B \in \mathcal{F}} (\operatorname{rad} B) \leq 1$. „$5r$“ covering lemma nám pak říká, že $\exists \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ disjuktní takový, že platí

$$\forall B \in \mathcal{F}\ \exists B' \in \mathcal{F}' : B \cap B' \neq \emptyset \wedge B \subset 5B.$$

Ukážeme, že $\lambda^n(A \setminus \bigcup \mathcal{F}') = 0$. Označme $Z_r := (A \setminus \bigcup \mathcal{F}') \cap U_r(\mathbf{o})$, $\forall r > 0$. Ukážeme, že $\lambda^n(Z_r) = 0$.

Označme $\mathcal{F}'' := \{B' \in \mathcal{F}' |\ B' \cap U_r(\mathbf{o}) \neq \emptyset\}$ a $\mathcal{F}''_k := \left\{B' \in \mathcal{F}'' | \operatorname{rad} B' \in \left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]\right\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\mathcal{F}'$ je disjuktní, tudíž

$$\sum_{B' \in \mathcal{F}''} \lambda^n(B') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{B' \in \mathcal{F}''_k} \lambda^n(B') \leq \lambda^n(B(0, r+2)) < \infty$$

$\implies$ $\mathcal{F}''_k$ je konečný $\forall k$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \sum_{k > k_0} \sum_{B' \in \mathcal{F}''_k} \lambda^n(B') < \varepsilon.$$

Zvolme pevně $z \in Z_r$. Zřejmě $z \notin \bigcup_{k=0}^{k_0} \bigcup_{B' \in \mathcal{F}''_k} B' =: K$ (kompakt). Z vlastnosti Vitaliova pokrytí pak:

$$\exists B \in \mathcal{F} : B \cap K = \emptyset, z \in B, B \subset U_r(0).$$

Z vlastnosti pokrytí $F'$ zřejmě $B' \in \mathcal{F}''$, $B' \notin \bigcup_{k=0}^{k_0} \bigcup \mathcal{F}''_k$, tj. $z \in 5B' \implies Z_r \subset \bigcup_{k > k_0} \bigcup_{B' \in \mathcal{F}''_k} 5B' \implies \lambda^{n*}(Z_r) \leq \sum_{k > k_0} \sum_{B' \in \mathcal{F}''_k} \lambda^n(5B') < 5^n \varepsilon$. $\varepsilon \to 0$ nám dá $\lambda^n(Z_r) = 0$. $\square$

**Definice 6.2** (Lebesgueova hustota)

Pro $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ definujeme $\Theta^{n*}(A, a) = \limsup_{\varepsilon \to 0_+} \frac{\lambda^{n*}(A \cap B(a,\varepsilon))}{\lambda^n(B(a,\varepsilon))}$ $(\leq 1)$ a $\Theta^n_*(A, a) = \liminf_{\varepsilon \to 0_+} \frac{\lambda^{n*}(A \cap B(a,\varepsilon))}{\lambda^n(B(a,\varepsilon))}$, tzv. horní a dolní hustota množiny $A$ v $a$. Pokud $\Theta^{n*}(A, a) = \Theta^n_*(A, a)$, pak definujeme Lebesgueovu hustotu $A$ v $a$ vztahem $\Theta^n(A, a) = \Theta^{n*}(A, a)$.

**Věta 6.3** (Lebesgueova o hustotě (Lebesgue Density Theorem))

*Pokud $A \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná, potom $\Theta^n(A, \cdot) = \chi_A(\cdot)$ $\lambda^n$-skoro všude.*

*Důkaz*
Stačí ukázat, že $\Theta^n(A, a) = 1$ pro $\lambda^n$-skoro všechna $a \in A$. BÚNO nechť $A$ je omezená (obecně: $A \cap B(0, n)$, $n \to \infty$). Pro číslo $0 < \delta < 1$ označme

$$A_\delta := \left\{ a \in A | \liminf_{r \to 0+} \frac{\lambda^n(A \cap B(a, r))}{\lambda^n(B(a, r))} < \delta \right\}.$$

Ukážeme, že $\lambda^n(A_\delta) = 0$. Z toho pak bude plynout, že $\Theta^n_*(A, a) = 1$, a tedy $\Theta^n(A, a) = 1$, pro skoro všechna $a \in A$.

Nechť pro spor $\lambda^{n*}(A_\delta) > 0$ pro nějaké $\delta < 1$. Z regularity Lebesgueovy míry (nebo z definice vnější míry $\lambda^{n*}$) víme, že existuje otevřená množina $G \supseteq A_\delta$ taková, že $\lambda^n(G) < \delta^{-1} \lambda^{n*}(A_\delta)$. Položme

$$\mathcal{F} := \{ B(a, r) | a \in A_\delta, B(a, r) \subset G, \lambda^n(A \cap B(a, r)) < \delta \lambda^n(B(a, r)) \}.$$

Z definice množiny $A_\delta$, je vidět, že $\mathcal{F}$ je Vitaliovým pokrytím množiny $A_\delta$. Podle Vitaliovy věty tedy existují po dvou disjunktní koule $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$ takové, že $\lambda^n(A_\delta \setminus \bigcup_i B_i) = 0$. Pak ale

$$\lambda^{n*}(A_\delta) = \lambda^{n*}(A_\delta \cap \bigcup_i B_i) \le \sum_i \lambda^{n*}(A_\delta \cap B_i) \le \sum_i \lambda^n(A \cap B_i) <$$

$$< \delta \sum_i \lambda^n(B_i) \le \delta \lambda^n(G) < \lambda^{n*}(A_\delta). \ \lightning.$$

□

# 7 Důkaz věty o substituci

**Věta 7.1**

*Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ lebesgueovsky měřitelná a $f : A \to \mathbb{R}^n$ L-lipschitzovské, platí $\lambda^{n*}(f(A)) \le L^n \lambda^n(A)$.*

*Důkaz*
Je-li $A \subset B = B(x,r)$, pak $f(A) \subset f(B) \subset B(f(x), L \cdot r)$. $\implies \lambda^{n*}(f(A)) \leq L^n \lambda^n(B)$.

Ukážeme, že pro $N \subset \mathbb{R}^n$ nulovou (tj. $\lambda^n(N) = 0$) je $\lambda^n(f(N)) = 0$: $N$ nulová $\implies$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_i$ otevřené kvádry, $N \subset \bigcup_i I_i$, $\sum_i \lambda^n(I_i) < \varepsilon$.

Můžeme zařídit, aby $\frac{r(I_i)}{R(I_i)} \geq \eta > 0$, $i \in \mathbb{N}$, kde $R(I)$ a $r(I)$ jsou poloměry opsané a vepsané koule $I$: Rozdělíme intervaly vůči delší straně.

Když $B_i$ jsou koule opsané $\overline{I_i}$, pak $\lambda^n(B_i) \leq \eta^{-n} \lambda^n(I_i)$ $(B_i' \subset I_i \subset B_i \ldots \lambda^n(I_i) > \lambda^n(B_i') \geq \eta^n \lambda^n\ (B_i))$.

$$\lambda^{n*}(f(N)) \leq \lambda^{n*}\left(\bigcup_i f(I_i)\right) \leq \lambda^{n*}\left(\bigcup_i f(B_i)\right) \leq \sum_i \lambda^{n*}(fB_i) \leq L^n \sum_i \lambda^n(B_i) \leq$$
$$\leq \left(\frac{L}{\eta}\right)^n \sum_i \lambda^n(I_i) < \left(\frac{L}{\eta}\right)^n \varepsilon.$$
$$\varepsilon \to 0 \ldots \lambda^{n*}(f(N)) = 0.$$

$A \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná, $\varepsilon > 0$, BÚNO nechť $\lambda^n(A) < \infty$ (jinak je nerovnost triviálni). $\lambda^n$ regulární $\implies \exists G \supset A$ otevřená, že $\lambda^n(G) < \lambda^n(A) + \varepsilon$. $\mathcal{F} := \{B \text{ uzavřená koule} | B \subset G\}$ Vitaliovo pokrytí $G \implies B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$ disjunktní, $\lambda^n(G \setminus \bigcup_i B_i) = 0$.

$$\lambda^{n*}(f(A)) \leq \lambda^{n*}(f(G)) \leq \lambda^{n*}\left(\bigcup_i f(B_i) \cup f(N)\right) \leq \sum_i \lambda^{n*}(f(B_i)) + \lambda^{n*}(f(N)) \leq$$
$$\leq L^n \sum_i \lambda^n(B_i) = L^n \lambda^n(G) < L^n \lambda^n(G) < L^n \lambda^n(A) + L^n \varepsilon \to L^n \lambda^n(A).$$

□

**Definice 7.1** (Funkcionální norma)

Pro $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineární zobrazení, definujeme $||L|| := \sup_{||u|| \leq 1} ||Lu||$.

*Poznámka*
Označme $\delta(L) := \inf_{||u||=1} ||Lu||$, $L$ regulární $\Leftrightarrow \delta(L) > 0$. Tedy platí

$$\delta(L)||u|| \leq ||Lu|| \leq ||L|| \cdot ||u||, u \in \mathbb{R}^n.$$

## Tvrzení 7.2

*$L, M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dvě regulární lineární zobrazení. Nechť existuje $\gamma > 0$ takové, že $\forall u \in \mathbb{R}^n$ : $||Lu|| \leq \gamma ||Mu||$. Pak $|\det L| \leq \gamma^n |\det M|$.*

*Důkaz*

a) Nechť $M = \text{id}$. Z předpokladů plyne, že pro každou kouli $B = B(O, R)$ je $L(B) \subset \gamma B$, tedy

$$|\det L|\lambda^n(B) = \lambda^n(L(B)) \leq \gamma^n \lambda^n(B) \implies |\det L| \leq \gamma^n.$$

b) Pro $M$ obecné: $(v = Mu)$,

$$||LM^{-1}v|| \leq \gamma ||v||, v \in \mathbb{R}^n \implies |\det LM^{-1}| \leq \gamma^n \implies |\det L| \leq \gamma^n |\det M|.$$

□

*Důkaz* (Věty o substituci)

Ať je dáno $\varepsilon > 0$. $\forall x \in \mathcal{U}\ \exists r_x > 0\ \forall y \in B(x, r_x)$:

$$1. ||Dg(y) - Dg(x)|| < \varepsilon \cdot \delta(Dg(x)) \qquad \text{(ze spojitosti diferenciálu } (Dg(\cdot))\text{)},$$

$$2. ||g(y) - g(x) - Dg(x)(y-x)|| < \varepsilon \cdot \delta(Dg(x))||y-x|| \qquad \text{(ze spojitosti diferenciálu } (Dg(x))\text{)}.$$

Z $\delta(L)||u|| \leq ||Lu|| \leq ||L|| \cdot ||u||$ je

$$1.' ||Dg(y)u - Dg(x)u|| < \varepsilon \cdot ||Dg(x)u||, \qquad u \in \mathbb{R}^n,$$

$$2.' ||g(y) - g(x) - Dg(x)(y-x)|| < \varepsilon \cdot ||Dg(x))(y-x)||.$$

$\exists \{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathcal{U}$ (spočetná) taková, že $\mathcal{U} = \bigcup_i B(x_i, r_{x_i})$. (Neboť existují $K_j$ kompaktní, které $K_j \nearrow \mathcal{U}$.) $B_i := B(x_i, r_{x_i})$, $L_i = Dg(x_i)$, $i \in \mathbb{N}$.

$$1.' \implies 1.''(1-\varepsilon)||L_i u|| \leq ||Dg(x)u|| \leq (1+\varepsilon)||L_i u||, u \in \mathbb{R}^n, x \in B_i, i \in \mathbb{N}.$$

Existuje měřitelný rozklad $U = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} E_{i,j}$ tak, že:

$$(a) E_{i,j} \subset B_i, \qquad (b) \operatorname{diam} E_{i,j} < \frac{1}{j}, \qquad (c) \forall x \in E_{i,j} : r_x > \frac{1}{j}.$$

$$\implies \forall x, y \in E_{i,j} : ||g(y) - g(x)|| \overset{2.'}{\leq} (1+\varepsilon)||Dg(x)(y-x)|| \overset{1''}{\leq} (1+\varepsilon)^2 ||L_i(y-x)||,$$

$$||g(y) - g(x)|| \geq (1-\varepsilon)||Dg(x)(y-x) \geq (1-\varepsilon)^2 ||L_i(y-x)||.$$

$\implies$ zobrazení $g \circ L_i^{-1} : L_i(\mathcal{U}) \to g(\mathcal{U})$ je $(1+\varepsilon)^2$-lipschitzovské, stejně jako zobrazení $L_i \circ g^{-1} : g(\mathcal{U}) \to L_i(\mathcal{U})$ je $(1-\varepsilon)^{-2}$-lipschitzovské. Označme $\eta := \max\{(1+\varepsilon)^2, (1-\varepsilon)^{-2}\}$.

$$\lambda^n(g(A)) = \lambda^n(g(\bigcup_{i,j} E_{i,j})) = \lambda^n(\bigcup_{i,j} g(E_{i,j})) = \sum_{i,j} \lambda^n(g(E_{i,j})) \leq \eta^n \sum_{i,j} \lambda^n(L_i(E_{i,j})) \overset{\text{TMI1}}{=}$$

$$= \eta^n \sum_{i,j} |\det L_i| \lambda^n(E_{i,j}) = \eta^n \sum_{i,j} \int_{E_{i,j}} |\det L_i| dx \leq \eta^{2n} \sum_{i,j} \int_{E_{i,j}} |Jg(x)| dx =$$

$$= \eta^{2n} \int_A |Jg(x)| dx.$$

Podobně

$$\lambda^n(g(A)) \geq \eta^{-n} \sum_{i,j} \lambda^n(L(E_{i,j})) \geq \eta^{-n} \sum_{i,j} \int_{E_{i,j}} \eta^{-n} |Jg(x)| dx = \eta^{-2n} \int_A |Jg(x)| dx.$$

Následně pro $\varepsilon \to 0$ je $\eta \to 1$ a $\lambda^n(g(A)) = \int_A |J(g(x))| dx$. □

# 8 Konvergence posloupnosti funkcí

*Poznámka* (Připomenutí TMI1)
$f_n, f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ jsou měřitelné.

$$f_n \overset{\text{s. v.}}{\to} f \equiv \mu\left\{x | f_n(x) \not\to f(x)\right\} = 0.$$

$$f_n \overset{L^p}{\to} f \equiv ||f_n - f||_p \to 0.$$

$$f_n \overset{\mu}{\to} f \equiv \forall \varepsilon > 0 : \mu\left\{x || |f_n(x) - f(x)|| \geq \varepsilon\right\} \to 0.$$

**Tvrzení 8.1**

$$f_n, f \in L^p(\mu), f_n \overset{L^p}{\to} f \implies f_n \overset{\mu}{\to} f.$$

$$\mu(X) < \infty : f_n \overset{s.\ v.}{\to} \implies f_n \overset{\mu}{\to} f.$$

$$\mu(X) < \infty : f_n \overset{\mu}{\to} f \implies \exists f_{n_k}, f_{n_k} \overset{s.\ v.}{\to} f.$$

$$\mu(X) < \infty : 1 \leq p < q \leq \infty \implies L^p(\mu) \supset L^q(\mu), f_n \overset{L^q}{\to} f \implies f_n \overset{L^p}{\to} f.$$

**Věta 8.2** (Lebesgueova věta + upgrade)
$f_n \overset{s.\ v.}{\to} f$, $\exists g \in L^1(\mu), |f_n| \leq g \ \forall n \implies \int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

*Dokonce* $f_n \overset{L^1}{\to} f$.

*Důkaz*
BÚNO $f_n(x) \to f(x)$, $x \in X$ (například v těch bodech předefinujeme všechny funkce na 0).

$$g_n := \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, h_n := \sup\{f_n, f_{n+1}\}.$$

$$-g \le g_n \le f_n \le h_n \le g, \qquad g_n \nearrow f \swarrow h_n.$$

$$|f_n - f| \le h_n - g_n \le 2g \in L^1(\mu), \qquad h_n - g_n \searrow 0 \overset{\text{Levi}}{\implies} \int (h_n - g_n) d\mu \to 0 \implies$$

$$\implies \int |f_n - f| d\mu \to 0 \Leftrightarrow f_n \overset{L^1}{\to} f.$$

□

*Poznámka*
$f \in L^1(\mu) \implies \lim_{c\to\infty} \int_{x:|f(x)|\le c} |f(x)| d\mu(x) = 0.$

**Definice 8.1** (Stejnoměrně integrovatelná posloupnost)

Řekneme, že posloupnost $(f_n)$ měřitelných funkcí na $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je stejnoměrně integrovatelná (uniformly integrable), jestliže

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n \int_{|f_n|\ge c} |f_n| d\mu = 0.$$

**Tvrzení 8.3**

*$\mu$ konečná, $(f_n)$ stejnoměrně integrovatelná $\implies$ $f_n \in L^1(\mu)$, $\sup_n ||f_n||_1 < \infty$.*

*Důkaz*
$\int |f_n| = \underbrace{\int_{|f_n|<c} |f_n| d\mu}_{\le c\cdot\mu(X)} + \underbrace{\int_{|f_n|>c} |f_n| d\mu}_{<1 \text{ pro } c \text{ dostatečně velké}} \le c\mu(X) + 1$ pro dostatečně velká $c$. □

**Věta 8.4**

*Nechť $\mu(X) < \infty$ a $f_n \overset{\mu}{\to} f$. Pak $f_n \overset{L_1}{\to} f \Leftrightarrow (f_n)$ je stejnoměrně integrovatelná.*

*Důkaz*
„$\Leftarrow$“: Nechť $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $(f_n)$ je stejnoměrně integrovatelná. Pak $f_n \in L^1(\mu)$ a existuje vybraná podposloupnost $(f_{n_j})$, $f_{n_j} \xrightarrow{s.v.} f$.

$$\int |f| d\mu = \int (\lim_{j\to\infty} |f_{n_j}|) d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int |f_{n_j}| d\mu < \infty \implies f \in L^1(\mu).$$

Předpokládejme nejprve, že $\exists c \in \mathbb{R}$, $|f_n| < c$, $|f| \leq c$ skoro všude. Buď $\varepsilon > 0$, položme $\delta := \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}$.

$$\int |f_n - f| d\mu = \int_{\{|f_n - f| \leq \delta\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\{|f_n - f| > \delta\}} |f_n - f| \leq$$

$$\leq \delta\mu(X) + 2c\mu(\{x | |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) \overset{n \geq n_0}{<} \frac{\varepsilon}{2} + 2c\frac{\varepsilon}{4c} < \varepsilon \implies f_n \xrightarrow{L_1} f.$$

Nyní $f_n, f \in L^1$ libovolné, $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $(f_n)$ stejnoměrně integrovatelná, $\varepsilon > 0$.

$$\int |f_n - f| d\mu \leq$$

$$\leq \int_{\{|f_n| \leq c \wedge |f| \leq c\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\{|f_n| > c\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\{|f| > c\}} |f_n - f| d\mu =: I_n^1(c) + I_n^2(c) + I_n^3(c),$$

$$I_n^2(c) \leq$$

$$\leq \int_{\{|f_n| > c\}} |f_n| d\mu + \int_{\{|f_n| > c \wedge |f| \leq c\}} |f| d\mu + \int_{\{|f_n| > c \wedge |f| > c\}} |f| d\mu \leq 2 \int_{\{|f_n| > c\}} |f_n| + \int_{\{|f| > c\}} |f|,$$

$$I_n^3(c) \leq$$

$$\leq \int_{\{|f| > c\}} |f| d\mu + \int_{\{|f_n| > c \wedge |f| > c\}} |f_n| d\mu + \int_{\{|f_n| \leq c \wedge |f| > c\}} |f_n| d\mu \leq \int_{\{|f_n| > c\}} |f_n| + 2 \int_{\{|f| > c\}} |f|,$$

$$I_n^2(c) + I_n^3(c) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \forall c \geq c_0,$$

z první části navíc $I_n^1(c) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_0$. Tedy $\int |f_n - f| d\mu < \varepsilon$.

„$\implies$“ Nechť $f_n \xrightarrow{L_1} f$, $\varepsilon > 0$.

$$\forall c : \int_{\{|f_n| > c\}} |f_n| d\mu \leq \int_{\{|f_n| > c\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\left\{|f_n| > c \wedge |f| \leq \frac{c}{2}\right\}} |f| + \int_{\left\{|f_n| > c \wedge |f| > \frac{c}{2}\right\}} |f| \leq$$

$$\leq \int |f_n - f| d\mu + \frac{c}{2}\mu\left\{x | |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{c}{2}\right\} + \int_{\left\{|f| > \frac{c}{2}\right\}} |f| d\mu \leq 2||f_n - f||_1 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Protože $f \in L^1$, existuje $c_0 > 0$ takové, že $\int_{|f| > \frac{c}{2}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $c > c_0$. Rovněž pro každou funkci $f_1, \ldots, f_{n_0}$ existuje $c_i > 0$ takové, že $\int_{|f_i| > c} |f_i| < \varepsilon$, $c > c_i$, $i \in [n_0]$. Pro $c > \max\left\{c_{[n_0]_0}\right\}$ pak platí $\int_{|f_n| > c} |f_n| < \varepsilon$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tím je dokázána stejnoměrná integrovatelnost $f_n$. □

# A Hausdorffova míra

**Definice A.1** (Hasdorffova míra)

$A \subset \mathbb{R}^n$, $s \geq 0$, $\delta > 0$:

$$\mathcal{H}_\delta(A)^s := \inf_{A \subset \bigcup_i G_i, \operatorname{diam} G_i \leq \delta} \sum_i \omega_s \left( \frac{\operatorname{diam} G_i}{2} \right)^s,$$

kde $\omega s := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}$ a $G_i$ je nejvýše (kvůli $s = 0$) spočetné pokrytí $A$. Hausdorffovu míru pak definujeme jako

$$\mathcal{H}^s := \lim_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

*Poznámka*
Konstanta v $\omega_s$ je zvolena tak, aby $\omega_k = \lambda^k(B(0,1))$ pro $k \in \mathbb{N}$.

**Tvrzení A.1**

*Pro $\mathcal{H}^s$ platí:*

1. $\mathcal{H}^s_\delta, \mathcal{H}^s$ *jsou vnější míry v* $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathcal{H}^s$ *jsou metrické vnější míry* $(s \geq 0)$.
3. $\mathcal{H}^s$ *je borelovsky regulární (tj.* $\forall A \in \mathbb{R}^n \exists B \supset A, B \in \mathcal{B}^n, \mathcal{H}^s(B) = \mathcal{H}^s(A)$*).*
4. $\mathcal{H}^0(A) = \operatorname{card} A$.
5. $\mathcal{H}^s$ *jsou translačně a rotačně invariantní.*

*Důkaz*
1. stejné jako u $\lambda^{n*}$.

2. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\varrho := \operatorname{dist}(A, B) > 0$. Dokážeme, že $\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$. Předpokládejme, že $\mathcal{H}^s(A \cup B) < \infty$, jinak je nerovnost zřejmá. $\mathcal{H}^s$ je limita $\mathcal{H}^s_\delta$, takže stačí zvolit okolí, na kterém počítáme limitu, dostatečně malé (diam $< \frac{\varrho}{2}$) a pak každá množina z pokrytí v $\mathcal{H}^s_\delta$ zasáhne pouze jednu z množinu z $A$, $B$.

3. $A \subset \mathbb{R}^n$. Pokud $\mathcal{H}^s(A) = \infty$, pak volíme $B = \mathcal{R}^n$. Jinak $\forall n$ existuje $A \subset \bigcup_i G_i^n$, $\operatorname{diam} G_i^n \leq \frac{1}{n}$, $\sum_i \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam} G_i^n}{2}\right)^s < \mathcal{H}^s_{\frac{1}{n}}(A) + \frac{1}{n}$.

$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_i \overline{G_i^n} \dots \qquad \text{(borelovská množina).}$$

Zřejmě $A \subset B$. $\mathcal{H}^s_{\frac{1}{n}}(B) \leq \sum_i \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam} \overline{G_i^n}}{2}\right)^s = \sum_i \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam} G_i^n}{2}\right)^s < \mathcal{H}_{\frac{1}{n}}(A) + \frac{1}{n}$. Limitním přechodem $n \to \infty$ pak dostaneme chtěnou nerovnost.

4. $A$ je konečná – při dostatečně malém $\delta$ potřebujeme na pokrytí každého bodu jednu množinu (na bod). Pro nekonečnou množinu plyne z monotonie.

5. 6. plynou přímo z definice. □

## Lemma A.2

$$\mathcal{H}^n \leq \lambda^n$$

*Důkaz*
$G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená $\overline{?} \implies \mathcal{H}^n(G) \leq \lambda^n(G)$.

$$\delta > 0 \dots \mathcal{F} := \{B \subset G | B \text{ uzavřená koule}, \operatorname{diam} B \leq \delta\} \dots \qquad \text{Vitaliovo pokrytí } G.$$

Z Vitaliovy věty plyne, že existuje spočetný disjunktní systém $B_1, B_2, \in \mathcal{F}$, $\lambda^n(G \setminus_i B_i) = 0$.

$$\mathcal{H}^n \ll \lambda^n \implies \mathcal{H}^n(G \setminus \bigcup_i B_i) = 0 \implies \mathcal{H}^n_\delta(G \setminus \bigcup_i B_i) = 0.$$

$$\varepsilon > 0 \implies \exists G \setminus \bigcup_i B_i \subset \bigcup_j D_j, \operatorname{diam} D_j \leq \delta, \sum_j \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} D_j}{2}\right)^n < \varepsilon.$$

$$G \subset \bigcup_i B_i \cup \bigcup_j D_j \implies \mathcal{H}^n_j(G) \leq \sum_i \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} B_i}{2}\right)^n + \sum_j \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} D_j}{2}\right)^n < \lambda^n(G) + \varepsilon.$$

A limitním přechodem jsme vyhráli. S pomocí další věty? □

**Věta A.3** (Izodiametrická nerovnost)

$$\lambda^n(A) \le \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} A}{2}\right)^n, \qquad A \subset \mathbb{R}^n.$$

*Důsledek*

$$\mathcal{H} \ge \lambda^n.$$

*Důkaz*

$$A \subset \bigcup_i G_i \implies \lambda^n(A) \le \sum_i \lambda^n(G_i) \le \sum_i \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} G_i}{2}\right)^n \implies$$
$$\implies \mathcal{H}^n_\delta(A) \ge \lambda^n(A) \forall \delta > 0 \implies \mathcal{H}^n(A) \ge \lambda^n(A).$$

□