Příklad (2.1)
Vydělte polynom $f = x^4+x^3+2x^2+4x-2$ se zbytkem polynomem $g = x^2-x+1$ v oborech $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$ a $\mathbb{Z}_5[x]$.

Řešení
Postupujeme podle standardního algoritmu (vydělíme vedoucí členy, odečteme tento násobek a opakujeme) v $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$ vyřešíme z výsledku předchozího):

$$\frac{f}{g} = x^2+\frac{0+2x^3+x^2+4x-2}{g} = x^2+2x+\frac{0+3x^2+2x-2}{g} = x^2+2x+3+\frac{0+5x-5}{g}.$$

Tudíž f/g je x^2+2x+3 a zbytek $5x-5$. Jelikož jsme neprováděli žádnou operaci specifickou pro $\mathbb{Z}$, výsledek funguje i v $\mathbb{Z}_3$: $f/g = x^2+2x$ a zbytek $2x+1$ a v $\mathbb{Z}_5$: $f/g = x^2+2x+3$ a zbytek 0.

Příklad (2.2)
Spočítejte největší společný dělitel polynomů $f = x^3+x^2-2x$ a $g = x^3-x^2-x+1$ v oborech $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{Z}_3[x]$.

Řešení
Prostě budeme postupovat podle eukleidova algoritmu ($\mathbb{Z}_3$ je těleso, takže dělení číslem nesoudělným s 3 je definováno):

$$(x^3+x^2-2x)-(x^3-x^2-x+1) = 2x^2-x-1,$$

$$(x^3-x^2-x+1)-\frac{x}{2}\left(2x^2-x-1\right) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+1,$$

$$\left(2x^2-x-1\right)+4\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+1\right) = -3x+3,$$

(Zde končí algoritmus pro $\mathbb{Z}_3$, dále můžeme dělit i násobky 3.)

$$-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+1-\frac{x}{6}(-3x+3) = -x+1,$$

$$(-3x+3)-3(-x+1) = 0.$$

Tudíž $\operatorname{NSD}(f,g) = x-1$ (vynásobil jsem -1, abych získal monický polynom, tím jsem jistě nerozbil dělitelnost, jelikož $-1||1$) v $\mathbb{R}$ a $\operatorname{NSD}(f,g) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+1 = x^2+x+1$ v $\mathbb{Z}_3$.

Příklad (2.3)
Určete poslední dvě cifry čísla $97^{47^{49}}$.

Řešení
Hledat poslední dvě cifry čísla odpovídá hledání zbytku po dělení 100. Tj. řešíme úlohu $97^{47^{49}} \equiv x (\mathrm{mod}\ 100)$. Jelikož umocňujeme, pravděpodobně chceme použít Eulerovu větu. Víme, že pro $y = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$ je $\varphi(y) = p_1^{k_1-1}(p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n-1}(p_n - 1)$, tedy $\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = 2^1 \cdot 1 \cdot 5^1 \cdot 4 = 40$. Tudíž, jelikož 97 je prvočíslo, tedy je nesoudělné s 100, $97^{40} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 100)$, neboli $97^{40l+m} \equiv 97^m (\mathrm{mod}\ 100)$, $l, m \in \mathbb{N}$. Tedy nás zajímá zbytek po dělení 47^{49} číslem 40.

Provedeme stejnou proceduru: $\varphi(40) = \varphi(2^3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 1 \cdot 5^0 \cdot 4 = 16$, z Eulerovy věty (47 je prvočíslo $\implies$ nesoudělné s 40) $47^{16 \cdot 3+1} = 47^{49} \equiv 47^1 (\mathrm{mod}\ 40)$. Tj. $47^{49} \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 40)$.

Nyní už máme jen $97^7 \equiv x (\mathrm{mod}\ 100)$, což je zřejmě ($97 \equiv -3 (\mathrm{mod}\ 100)$) to samé jako $(-3)^7 = -2187 \equiv x (\mathrm{mod}\ 100)$, tudíž $x = 13$.

Příklad (2.4)
Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $4x \equiv 8 (\mathrm{mod}\ 16)$, $2x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ a $x + 3 \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 5)$.

Řešení
To úplně zavání Čínskou zbytkovou větou. Nejprve podle vlastností kongruence upravíme do tvaru potřebného pro Čínskou zbytkovou větu (první vydělím 4 i s modulem, k druhému přičtu $0 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 3)$ a vydělím 2, která je nesoudělná s modulem a od třetího odečtu $3 \equiv 3$):

$$x \equiv 2(\bmod 4), \qquad x \equiv 2(\bmod 3), \qquad x \equiv 1(\bmod 5).$$

Jelikož 4, 5 a 3 jsou po dvou nesoudělná čísla, pak z Čínské zbytkové věty existuje jediné takové $x_0 \in \{0, \ldots, 5 \cdot 3 \cdot 4\}$. Víme, že číslo dává zbytek 1 po dělení 5 a 2 po dělení 4 (tj. je sudé), takže druhá cifra je 6. Prozkoušíme všech 6 čísel končících na 6 a získáme $x_0 = 26$.

Nyní od všech kongruencí výše odečteme $k \cdot 60 \equiv 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Budeme tedy hledat $x - k \cdot 60 \in \{0, \ldots, 60\}$ (každé celé číslo bude odpovídat nějakému $x - k \cdot 60 \in \{0, \ldots, 60\}$). To jsme však už udělali a víme tedy, že $x - k \cdot 60 = 26$, tj. řešení je $\{26 - 60k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.