

Poznámka (Úmluva)

Všechny topologické prostory v tomto semestru budou Hausdorffovy (T_2). Tedy regulární jsou automaticky T_3 , úplně regulární jsou automaticky T_π a normální jsou T_4 .

Speciálně např. kompaktní prostory jsou T_4 .

1 Parakompaktní prostory

Poznámka (Připomenutí)

Pokrytí, otevřené pokrytí, podpokrytí.

Definice 1.1 (Zjemnění)

Ať X je množina a \mathcal{S} je pokrytí X . Řekneme, že systém $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(X)$ je zjemnění \mathcal{S} , pokud \mathcal{T} je pokrytí a $\forall T \in \mathcal{T} \exists S \in \mathcal{S} : T \subseteq S$.

Definice 1.2 (Lokálně konečný systém)

Ať \mathbb{X} je TP, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$. \mathcal{S} se nazývá lokálně konečný, pokud

$$\forall x \in \mathbb{X} \exists U \in \mathcal{U}(x) : \{S \in \mathcal{S} | S \cap U \neq \emptyset\} \text{ je konečná.}$$

Systém \mathcal{S} se nazve diskrétní, pokud

$$\forall x \in \mathbb{X} \exists U \in \mathcal{U}(x) : |\{S \in \mathcal{S} | S \cap U \neq \emptyset\}| \leq 1.$$

Systém \mathcal{S} se nazve σ -lokálně konečný (resp. σ -diskrétní), pokud $\exists \mathcal{S}_n$, že $\mathcal{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$, že \mathcal{S}_n jsou lokálně konečné (resp. diskrétní), $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka

Diskrétní systém je lokálně konečný. σ -diskrétní systém je σ -lokálně konečný.

Lemma 1.1 (Uzávěr lokálně konečného prostoru)

Ať \mathbb{X} je TP, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ lokálně konečný systém. Pak $\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\}$ je opět lokálně konečný a platí $\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\}$.

Důkaz

Ať $x \in \mathbb{X}$ je libovolné. Existuje $U \in \mathcal{U}(x) : \{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$ je konečná. Ať $V = \bigcup U, V \in \mathcal{U}(x)$. $\{A \in \mathcal{A} : A \cap V \neq \emptyset\}$ je zřejmě konečná. $V \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow V \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Tedy $\{A \in \mathcal{A} : \bar{A} \cap V \neq \emptyset\} = \{A \in \mathcal{A} : A \cap V \neq \emptyset\}$. Tedy $\{\bar{A} | A \in \mathcal{A}\}$ je konečná.

$$\supseteq: \bigcup \mathcal{A} \supseteq A, A \in \mathcal{A}, \text{ tedy } \overline{\bigcup \mathcal{A}} \supseteq \bar{A} \Rightarrow \overline{\bigcup \mathcal{A}} \supseteq \bigcup \{\bar{A} | A \in \mathcal{A}\}.$$

\subseteq : Ať $x \in \overline{\bigcup \mathcal{A}}$. $\exists U \in \mathcal{U}(x)$ otevřená, že $\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\} = \{A_1, \dots, A_n\}$. $x \in \overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} \stackrel{\text{konečné}}{=} \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}$. $\exists i \leq n : x \in \bar{A}_i$. \square

Definice 1.3 (Parakompaktní)

TP \mathbb{X} se nazývá parakompaktní, pokud každé jeho otevřené pokrytí má lokálně konečné otevřené zjemnění.

Poznámka

Kompaktní \Rightarrow parakompaktní (protože podpokrytí je zjemnění a konečné je lokálně konečné).

Diskrétní TP \Rightarrow parakompaktní.

Tvrzení 1.2

Uzavřený podprostor parakompaktního TP je parakompaktní.

Důkaz

\mathbb{X} je parakompaktní TP a $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená. Ať \mathcal{U} je otevřené pokrytí F (otevřenými množinami v F). Z definice podprostoru $\forall U \in \mathcal{U} \exists V_U$ otevřená v $\mathbb{X} : U = F \cap V_U$. Uvažujme $\mathcal{V} = \{V_U | U \in \mathcal{U}\} \cup \{F \setminus F\}$. \mathcal{V} je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Existuje otevřené lokálně konečné zjemnění \mathcal{W} tohoto \mathcal{V} . $\{F \cap W | W \in \mathcal{W}\}$ je otevřené pokrytí F a zároveň lokálně konečné. Navíc je to i zjemnění \mathcal{U} . \square

Věta 1.3 (Charakterizace parakompaktnosti)

Pro regulární TP \mathbb{X} jsou následující podmínky ekvivalentní:

- \mathbb{X} je parakompaktní.
- Každé otevřené pokrytí \mathbb{X} má otevřené σ -lokálně konečné zjemnění.
- Každé otevřené pokrytí \mathbb{X} má lokálně konečné zjemnění (libovolnými množinami).
- Každé otevřené pokrytí \mathbb{X} má uzavřené lokálně konečné zjemnění.

Důkaz

$a) \implies b)$: každé lokálně konečné zjemnění je σ -lokálně konečné.

$b) \implies c)$: Ať \mathcal{U} je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Podle b) existuje otevřené zjemnění $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, \mathcal{V}_n lokálně konečný systém. $W_n := \bigcup \mathcal{V}_n$ je otevřené $\{W_n | n \in \mathbb{N}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Ať $A_n := W_n \setminus \bigcup_{i < n} W_i$. $\{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ je lokálně konečné pokrytí \mathbb{X} (každé $x \in \mathbb{X}$ je v nějakém W_n , takže už není ve větších A_n). $\{A_n \cap V | n \in \mathbb{N}, V \in \mathcal{V}_n\}$ je lokálně konečné zjemnění \mathcal{U} .

$c) \implies d)$: Ať \mathcal{U} je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Pro každé $x \in \mathbb{X}$ existuje $U_x \in \mathcal{U} : x \in U_x$. Nyní máme bod v otevřené množině, tedy z regularity existují otevřené množiny $V_x \subseteq \mathbb{X} : x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$. $\mathcal{V} := \{V_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} . \mathcal{V} má lokálně konečné zjemnění \mathcal{W} podle c). $\{\overline{W} | W \in \mathcal{W}\}$ je lokálně konečný systém podle lemmatu „Uzávěr lokálně konečného systému“. Navíc je i pokrytí a zjemňuje \mathcal{U} .

$d) \implies a)$ Ať \mathcal{U} je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Z d) existuje lokálně konečné uzavřené zjemnění \mathcal{V} . Pro $x \in \mathbb{X}$ existuje W_x otevřené okolí x protínající jen konečně mnoho prvků z \mathcal{V} . $\mathcal{W} := \{W_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Z d) existuje lokálně konečné uzavřené zjemnění \mathcal{A} toho \mathcal{W} . Pro $V \in \mathcal{V}$ označíme $V^* := \mathbb{X} \setminus \bigcup \{A \in \mathcal{A} | A \cap V = \emptyset\}$. Zřejmě $V^* \supseteq V$. Tedy $\{V^* | V \in \mathcal{V}\}$ je otevřené (odčítáme uzavřenou množinu, neboť A jsou uzavřené a množina je lokálně konečná, tedy podle lemmatu ... je uzavřené i sjednocení) pokrytí.

Ať $x \in \mathbb{X}$. $\exists U$ okolí x , které protíná jen konečně prvků $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Zřejmě $U \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$. Každé A_i je podmnožinou nějakého W_y , tj. (podle volby W_y) A_i protíná jen konečně mnoho prvků z \mathcal{V} . Navíc je-li $V \in \mathcal{V}$ a $A \in \mathcal{A}$, že $A \cap V = \emptyset$, pak $A \cap V^* = \emptyset$. Tedy každé A_i protíná pouze konečně mnoho prvků $V^*, V \in @V$. Pro každé $V \in @V$ fixujeme $U_v \in \mathcal{U} : V \subseteq U_v$. Zřejmě $V \subseteq U_v \cap V^*$. Pak $\{U_v \cap V^* | V \in \mathcal{V}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} , které je lokálně konečné a které je zjemnění \mathcal{U} . \square

Důsledek

Každý Lindelöfův regulární prostor je parakompaktní.

Důkaz

Ať \mathcal{U} je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Z lindelöfovosti existuje spočetné pokrytí $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. \mathcal{V} je σ -lokálně konečné otevřené zjemnění \mathcal{U} . Tedy platí b) z minulé věty. \square

Definice 1.4 (Skrčení)

Ať X je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (pokrytí X). Indexovaný systém $\{T_S : S \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se nazývá skrčení systému \mathcal{S} , pokud (je to pokrytí) a $T_S \subseteq S, S \in \mathcal{S}$.

Poznámka (Nadmutí)

Skrčení je speciální případ zjemnění.

Podobně jako skrčení lze definovat pojem nadmutí.

Lemma 1.4 (O skrčení)

Ať \mathbb{X} je normální TP. Pak každé lokálně konečné (stačí bodově konečné) otevřené pokrytí \mathbb{X} má uzavřené skrčení, jehož vnitřky tvoří pokrytí.

┌

Důkaz

Ať $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$, κ kardinál, \mathcal{U} je lokálně kompaktní, otevřené pokrytí \mathbb{X} . Nyní $F_0 := \mathbb{X} \setminus \bigcup \{U_\alpha : 0 < \alpha < \kappa\}$ uzavřená, $F_0 \subseteq U_0$ (z toho, že \mathcal{U} je pokrytí). Z normality existuje otevřená $V_0 \subseteq \mathbb{X} : F_0 \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq U_0$.

Nyní indukci: Nechť máme zkonstruované $V_\beta : \forall \beta < \alpha < \kappa$. Označíme $F_\alpha := \mathbb{X} \setminus (\bigcup \{V_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup \{U_\gamma : \alpha < \gamma < \kappa\})$. Z normality zas $V_\alpha \subseteq \mathbb{X} : F_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$.

$\mathcal{V} = \{\overline{V_\alpha} : \alpha < \kappa\}$ je skrčení \mathcal{U} , $\text{int } \overline{V_\alpha} \supseteq V_\alpha$ a $\bigcup_{\alpha < \kappa} V_\alpha = \mathbb{X}$, tedy $\bigcup_{\alpha < \kappa} \text{int } \overline{V_\alpha} = \mathbb{X}$. \square

└

Definice 1.5 (Kolektivně normální)

TP \mathbb{X} se nazývá kolektivně normální, pokud pro každý diskrétní systém \mathcal{F} z uzavřených množin existuje disjunkttní systém otevřených množin $\{U(F) : F \in \mathcal{F}\}$, že $F \subseteq U(F)$, $F \in \mathcal{F}$ (tj. otevřené nadmutí).

Poznámka

Každý kolektivně normální prostor je normální.

Tvrzení 1.5

Každý parakompaktní prostor už je kolektivně normální, tedy i normální.

┌

Důkaz

Ukážeme nejprve, že \mathbb{X} je regulární. Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Pro $y \in F$ existuje otevřené okolí U_y bodu y , že $x \notin \overline{U_y}$. $\mathcal{U} := \{U_y : y \in F\} \cup \{\mathbb{X} \setminus F\}$ otevřené pokrytí \mathbb{X} . Ať \mathcal{V} je lokálně konečné otevřené zjemnění \mathcal{U} . $G := \bigcup \{V \in \mathcal{V} : V \cap F \neq \emptyset\}$. Z lemmatu $\overline{G} = \bigcup \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}, V \cup F \neq \emptyset\} \not\ni x$. $G \supset F$, G otevřená. Tedy \mathbb{X} je regulární.

Ať \mathcal{F} je diskrétní soubor z uzavřených množin. Pro $F \in \mathcal{F}$ uvažíme $\bigcup \{H \in \mathcal{F} : H \neq F\}$... uzavřená z lemmatu o uzávěru sjednocení lokálně kompaktního systému. Pro $x \in F$ existuje (z první části důkazu) U_x otevřená, že $x \in U_x$, $\overline{U_x} \cap H = \emptyset$ pro $H \neq F, H \in \mathcal{F}$. $\{U_x : x \in F \in \mathcal{F}\} \cup \{\mathbb{X} \setminus \bigcup F\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Ať \mathcal{V} je otevřené lokálně konečné zjemnění. Pro $F \in \mathcal{F} : V(F) := \{V \in \mathcal{V} : V \cup F \neq \emptyset\} \setminus \bigcup \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}, V \cap H \neq \emptyset \text{ pro nějaké } H \in \mathcal{F}, H \neq F\}$. Platí $F \subseteq V(F)$. Pro $F, F' \in \mathcal{F}, F \neq F' \implies V(F) \cap V(F') = \emptyset$. $\{V(F) : F \in \mathcal{F}\}$ je disjunkttní otevřené nadmutí \mathcal{F} . \square

└

Definice 1.6 (Hvězda)

Ať \mathbb{X} je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$, $x \in \mathbb{X}$, $A \subseteq \mathbb{X}$.

Hvězda bodu x vzhledem k \mathcal{S} je $\text{st}(x, \mathcal{S}) = \bigcup \{S \in \mathcal{S} : x \in S\}$.

Hvězda množiny A vzhledem k \mathcal{S} je $\text{st}(A, \mathcal{S}) = \bigcup_{x \in A} \text{st}(x, \mathcal{S})$.

Definice 1.7 (Barycentrické a hvězdovité zjemnění)

Ať \mathcal{U}, \mathcal{V} jsou pokrytí \mathbb{X} . Řekneme, že \mathcal{U} barycentricky zjemňuje \mathcal{V} , pokud $\{\text{st}(x, \mathcal{U}) : x \in \mathbb{X}\}$ zjemňuje \mathcal{V} .

Řekneme, že \mathcal{U} hvězdovitě zjemňuje \mathcal{V} , pokud $\{\text{st}(U, \mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$ zjemňuje \mathcal{V} .

Například

Ať (\mathbb{X}, ϱ) je MP. Ať $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ jsou pokrytí \mathbb{X} tvořená po řadě všemi $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon$ koulemi ($\varepsilon > 0$ pevné). Pak \mathcal{U} zjemňuje barycentricky \mathcal{V} a hvězdovitě \mathcal{W} .

Lemma 1.6 (Dvojitě barycentrické zjemnění je hvězdovité)

Ať X je množina, \mathcal{U} pokrytí X , \mathcal{V} barycentrické zjemnění \mathcal{U} a \mathcal{W} barycentrické zjemnění \mathcal{V} . Potom \mathcal{W} je hvězdovité zjemnění \mathcal{U} .

┌

Důkaz

Mějme $W \in \mathcal{W}$ libovolně. Chceme najít $U \in \mathcal{U} : \text{st}(W, \mathcal{W}) \subseteq U$. $W = \emptyset$ triviální. $W \neq \emptyset$:
Fixujeme $x_0 \in W$. Pro každé $x \in \mathbb{X}$ existuje $V_x \in \mathcal{V} : \text{st}(x, \mathcal{W}) \subseteq V_x$. Nyní

$$\text{st}(W, \mathcal{W}) = \bigcup \{T \in \mathcal{W} : T \cap W \neq \emptyset\} = \bigcup \{\{T \in \mathcal{W} | x \in T\} | x \in W\} = \bigcup \{\text{st}(x, \mathcal{W}) | x \in W\} \subseteq \bigcup \{V_x | x \in W\}$$

protože $W \subseteq V_x$ pro každé $x \in W$. \mathcal{V} barycentricky zjemňuje \mathcal{U} , tedy existuje $u \in \mathcal{U} : \text{st}(x_0, \mathcal{V}) \subseteq u$.
└ □

Věta 1.7 (Charakterizace parakompaktnosti pomocí hvězdovitých zjemnění)

Pro TP \mathbb{X} je ekvivalentní:

- \mathbb{X} je parakompaktní.
- Každé otevřené pokrytí \mathbb{X} má barycentrické zjemnění.
- Každé otevřené pokrytí \mathbb{X} má hvězdovité zjemnění.
- Každé otevřené pokrytí \mathbb{X} má otevřené σ -diskrétní zjemnění a \mathbb{X} je regulární.

┌ *Důkaz*

a) \implies b) Ať \mathcal{U} je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Z a) vyplývá, že existuje jeho lokálně konečné otevřené zjemnění \mathcal{V} . Víme, že \mathbb{X} je parakompaktní, tedy normální. Z lemmatu o skrčení existuje uzavřené pokrytí $\mathcal{W} = \{W_V | V \in \mathcal{V}\}$, $W_V \subseteq V$. \mathcal{V} je lokálně konečné, tedy i \mathcal{W} je lokálně konečné. Pro $x \in \mathbb{X}$ definujeme $A_x = \bigcap \{V | x \in W_V\}$. Jde o konečný průnik (vzhledem k lokální kompaktnosti), tedy A_x je otevřená. Položme $B_x = \bigcup \{W \in \mathcal{W} | x \notin W\}$. Podle lemmatu o sjednocení lokálně konečného systému je B_x uzavřená. Zřejmě $x \in A_x \setminus B_x =: C_x$ je otevřená. Tedy $\mathcal{C} = \{C_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} .

Ukážeme, že \mathcal{C} barycentricky zjemňuje \mathcal{U} : Ať $y \in \mathbb{X}$. Chceme najít $V \in \mathcal{U}$: $\text{st}(y, \mathcal{C}) \subseteq V$. Víme, že existuje $V \in \mathcal{V}$: $y \in W_V$. Ať $x \in \text{st}(y, \mathcal{C})$. Pak $y \in C_x = A_x \setminus B_x$, tedy $y \notin B_x$, tudíž $x \in W_V \subseteq V$ (kdyby ne, pak $W_V \subseteq B_x$, tedy $y \notin C_x$).

b) \implies c) k otevřenému pokrytí můžeme najít barycentrické zjemnění, ke kterému můžeme najít barycentrické zjemnění. Pak c) vyplývá z předchozího lemmatu.

c) \implies d) \mathbb{X} je regulární: Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Uvažujme otevřené pokrytí $\{\mathbb{X} \setminus F, \mathbb{X} \setminus x\}$. Podle c) existuje otevřené hvězdovité zjemnění \mathcal{U} . $\exists U \in \mathcal{U} : x \in U$. Nutně $U \cap F = \emptyset$. Pak $\bar{U} \subseteq \text{st}(U, \mathcal{U}) \subseteq \mathbb{X} \subseteq \mathbb{X} \setminus F$. Tedy \mathbb{X} je regulární.

Ať \mathcal{U}_0 je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Chceme najít σ -diskrétní zjemnění toho \mathcal{U}_0 . Použijeme podmínku c) spočetně nekonečněkrát, abychom induktivně našli otevřená pokrytí $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$, že \mathcal{U}_{n+1} hvězdovitě zjemňuje \mathcal{U}_n , $n \geq 0$. Oindexujeme prvky $\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 = \{U_i | i \in I\}$. Pro $i \in I$ a pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme $U_{i,n} := \{x \in \mathbb{X} | x \text{ má okolí } V : \text{st}(V, \mathcal{U}_n) \subseteq U_i\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N} : \{U_{i,n} | i \in I\}$ je otevřené zjemnění \mathcal{U} , ale ne nutně pokrytí.

Pomocné tvrzení: Pokud $x \in U_{i,n}$, $u \notin U_{i,n+1}$, pak neexistuje $U \in \mathcal{U}_{n+1}$, že $x, y \in U$. Důkaz: Pro $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ existuje $W \in \mathcal{U}_n : \text{st}(U, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq W$. Tedy pokud $x \in U \cap U_{i,n}$, pak $W \subseteq \text{st}(x, \mathcal{U}_n) \subseteq U_i$. Pak $\text{st}(U, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq U_i$ a $u \subseteq U_{i,n+1}$. Tedy $y \notin U$, protože $y \notin U_{i,n+1}$.

Uvažme dobré uspořádání $<$ na I . Ať $V_{i_0,n} = U_{i_0,n} \setminus \bigcup \{U_{i,n+1} | i < i_0\}$, $i_0 \in I, n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $** = \{V_{i_0,n} | i_0 \in I, n \in \mathbb{N}\}$ je hledané σ -diskrétní zjemnění \mathcal{U}_0 . Pro $i_1 \neq i_2, i_1, i_2 \in I$, pak $i_1 < i_2$ nebo naopak. Podle toho buď $V_{i_2,n} \subseteq \mathbb{X} \setminus U_{i_1,n+1}$ nebo $V_{i_1,n} \subseteq \mathbb{X} \setminus U_{i_2,n+1}$. Podle pomocného tvrzení platí, že pokud $x \in V_{i_1,n}$ a $y \in V_{i_2,n}$, pak neexistuje $U \in \mathcal{U}_{n+1}$, že $x, y \in U$. To nám říká, že $\forall n \in \mathbb{N} : \{V_{i,n} | i \in I\}$ je diskrétní. Zbývá už jen ukázat, že $**$ je pokrytí: Ať $y \in \mathbb{X}$. Existuje $<$ -nejmenší $i(y) \in I : y \in U_{i(y),n}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Nyní $y \notin U_{i,n+2}$ pro $i < i(y)$. Podle pomocného tvrzení použitého na $n+1$ platí $\text{st}(y, \mathcal{U}_{n+2}) \cap \bigcup \{U_{i,n+1} | i < i(y)\} = \emptyset$. Tedy $y \in V_{i(y),n}$.

d) \implies a) Víme, že \mathbb{X} je regulární, tedy můžeme aplikovat charakterizaci parakompaktnosti z minulého týdne, jelikož σ -diskrétní $\implies \sigma$ -lokálně konečný. \square

Věta 1.8 (Stone)

Každý metrizovatelný prostor je parakompaktní.

Důkaz

Ukážeme, že každé otevřené pokrytí \mathcal{U} má barycentrické zjemnění. Fixujeme na nějakém tom prostoru \mathbb{X} kompatibilní metriku $\varrho \leq 1$. Navíc bůno $\mathbb{X} \notin \mathcal{U}$. Pro každé $x \in \mathbb{X}$ a $U \in \mathcal{U}$, že $x \in U$, existuje největší možné $\varepsilon_{x,U} > 0$, že $B(x, 5\varepsilon_{x,U})$. Položíme $\mathcal{V} = \{B(x, \varepsilon_{x,U}) | x \in U \in \mathcal{U}\}$. Ověříme, že \mathcal{V} barycentricky zjemňuje \mathcal{U} : Ať $x \in \mathbb{X}$. Chceme najít $U \in \mathcal{U} : \text{st}(x, \mathcal{V}) \subseteq U$. Ať $\varepsilon_x = \sup \{\varepsilon_{x,U} | x \in U \in \mathcal{U}\}$. $0 < \varepsilon_x \leq 1$. Existuje $U \in \mathcal{U} : \varepsilon_{x,U} \geq \frac{\varepsilon_x}{2}$.

Ukážeme, že $\text{st}(x, \mathcal{V}) \subseteq U$. Ať tedy $x \in B(y, \varepsilon_{y,v})$ pro nějaké $y \in V \in \mathcal{U}$. Chceme $B(y, \varepsilon_{y,v}) \subseteq U$. Máme $B(y, 5\varepsilon_{y,v}) \subseteq V$ a zároveň $\varrho(x, y) < \varepsilon_{U,V}$. Z Δ -nerovnosti: $B(x, 4\varepsilon_{y,V}) \subseteq V$. Z maximality $\varepsilon_{x,V} \geq \frac{1}{5}4\varepsilon_{y,V}$. Také $2\varepsilon_{x,U} > \varepsilon_x \geq \varepsilon_{x,V}$. Dohromady $2\varepsilon_{x,U} > \frac{4}{5}\varepsilon_{y,V}$, tj. $5\varepsilon_{x,U} > 2\varepsilon_{y,V}$. Pro $z \in B(y, \varepsilon_{y,V}) : \varrho(x, z) < 2\varepsilon_{y,V}$, a tedy $\varrho(x, z) < 5\varepsilon_{x,U}$. Proto $z \in U$. Tudíž $B(y, \varepsilon_{y,v}) \subseteq U$. \square

Definice 1.8

Pro funkci $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ značíme $\text{supp } f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$.

Věta 1.9 (Rozklad jednotky)

Ať \mathbb{X} je parakompaktní prostor, \mathcal{U} otevřené pokrytí \mathbb{X} . Pak existuje rozklad jednotky podřízený tomuto pokrytí, tj. systém spojitých funkcí $f_i : X \rightarrow [0, 1]$, $i \in I$, že $\{\text{supp } f_i : i \in I\}$ je lokálně konečné zjemnění \mathcal{U} a $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1, \forall x \in \mathbb{X}$.

Důkaz

\mathbb{X} parakompaktní, tedy normální. Tedy existuje otevřené pokrytí \mathcal{W} takové, že $\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ zjemňuje \mathcal{U} . Ať \mathcal{V} je lokálně konečné otevřené zjemnění \mathcal{W} . Víme, že existuje uzavřené skrácení $\{F_V : V \in \mathcal{V}\}$, $F_V \subseteq V$. Z normality existují spojitě funkce $g_V : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$, $g_V|_{F_V} = 1$, $g_V|_{\mathbb{X} \setminus V} = 0$. Položme $g(x) := \sum_{V \in \mathcal{V}} g_V(x)$. Funkce g je spojitá, protože spojitost je lokální pojem a g je lokálně součet konečně mnoha nenulových spojitých funkcí. Navíc zřejmě $g \geq 1$, protože $\{F_V : V \in \mathcal{V}\}$ je pokrytí \mathbb{X} . Tedy položíme $f_V := \frac{g_V}{g}$. \square

Věta 1.10 (Michaelova selekční)

Zdola polospojité (vícehodnotová) funkce z parakompaktního prostoru do neprázdných uzavřených konvexních podmnožin Banachova prostoru má spojitou selekci.

Věta 1.11 (Dugunjiho)

Ať \mathbb{X} je metrizaovatelný a $A \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená. Pak existuje lineární zobrazení $L : C(A, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{X}, \mathbb{R})$, že $L(f)$ rozšiřuje f pro $f \in C(A, \mathbb{R})$.

2 Metrizační věty

Poznámka (Opakování)

Uryshonova metrizační věta: Regulární prostor se spočetnou bází je metrizable.

Věta 2.1 (Bing, Nagata, Smirnov)

Pro regulární prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní:

- a) X je metrizable.*
- b) X má σ -diskrétní bázi.*
- c) X má σ -lokálně konečnou bázi.*

┌ *Důkaz*

a) \implies b): Ať \mathcal{B}_n je otevřené pokrytí \mathbb{X} koulemi o poloměru $\frac{1}{n}$. \mathbb{X} je parakompaktní podle Stoneovy věty. Z charakterizace parakompaktnosti máme, že \mathcal{B}_n má σ -diskrétní otevřené zjemnění \mathcal{V}_n . $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ je opět σ -diskrétní, navíc je to báze.

b) \implies c): triviální.

c) \implies a) Ať $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ je báze \mathbb{X} , \mathcal{B}_n lokálně konečný soubor. Uvědomíme si, že \mathbb{X} je parakompaktní: Je-li totiž \mathcal{U} otevřené pokrytí \mathbb{X} , pak $\{B \in \mathcal{B} : \exists U \in \mathcal{U} : B \subseteq U\}$ je zjemnění \mathcal{U} a vzhledem k tomu, že B je báze, tak je to i pokrytí. Navíc je σ -lokálně konečné. Tedy z charakterizace parakompaktnosti to máme.

Z parakompaktnosti dostáváme normalitu \mathbb{X} . Pro $n, k \in \mathbb{N}$ a $B \in \mathcal{B}_n$ položme $V_{k,n,B} := \bigcup \{C \in \mathcal{B}_k : \overline{C} \subseteq B\}$. \mathcal{B}_k je lokálně konečný, tedy (z lemmatu o uzávěru lokálně konečného systému) $\overline{V_{k,n,B}} \subseteq B$. Tedy existují (z normality) spojitě funkce $f_{k,n,B} : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$, $f_{k,n,B}(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{X} \setminus B$ a 1 pro $x \in \overline{V_{k,n,B}}$.

Definujeme $M_{k,n} \subseteq [0, 1]^{\mathcal{B}_n}$ následovně $M_{k,n} = \{\varphi : \mathcal{B}_n \rightarrow [0, 1] : \{B \in \mathcal{B}_n : \varphi(B) \neq 0\} \text{ je konečná}\}$. Na $M_{k,n}$ uvažme metriku $\varrho_{k,n}\varphi, \psi := \sum_{B \in \mathcal{B}_n} |\varphi(B) - \psi(B)|$. Ať $g_{k,n} : \mathbb{X} \rightarrow M_{k,n}$, $g_{k,n} = \Delta_{B \in \mathcal{B}_n} f_{k,n,B}$, $g_{k,n}(x) = (f_{k,n,B}(x))_{B \in \mathcal{B}_n}$.

Ověříme, že $g_{k,n} : \mathbb{X} \rightarrow (M_{k,n}, \varrho_{k,n})$ je spojitě: Ať $x \in \mathbb{X}$, $\varepsilon > 0$, existuje U okolí x protínající jen konečně prvků $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}_n$. $f_{k,n,B_1}, \dots, f_{k,n,B_m}$ jsou spojitá, tedy existuje $V \subseteq U$ okolí x , že $|f_{k,n,B}(x) - f_{k,n,B_i}(y)| < \frac{\varepsilon}{m}$ pro $i \leq m, y \in V$. Nyní

$$\varrho_{k,n}(g_{k,n}(x), g_{k,n}(y)) = \sum_{i=1}^m |g_{k,n}(x)(B_i) - g_{k,n}(y)(B_i)| = \sum_{i=1}^m |f_{k,n,B}(x) - f_{k,n,B_i}(y)| < m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Pokud systém $\{g_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}\}$ odděluje body a uzavřené množiny, pak $\delta := \Delta_{k,n \in \mathbb{N}} g_{k,n} : \mathbb{X} \rightarrow \prod_{k,n \in \mathbb{N}} M_{k,n}$ je vnoření (podle lemmatu o Tichonovově vnoření). Tím jsme vnořili \mathbb{X} do spočetného součinu metrizablečních prostorů, tedy do metrizablečního prostoru, tedy \mathbb{X} je metrizableční.

$\{g_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}\}$ odděluje body a uzavřené množiny: Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ je uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Existuje $n \in \mathbb{N}$ a $B \in \mathcal{B}_n : x \in B \subseteq \mathbb{X} \setminus F$. Z regularity existuje $C \in \mathcal{B}_k, k \in \mathbb{N}$, $g_{k,n}(x)(B) = f_{k,n,B}(x) = 1$ a $g_{k,n}(y)(B) = f_{k,n,B}(y) = 0$ pro $y \in \mathbb{X} \setminus B \supseteq F$. \square

Definice 2.1

Ať \mathbb{X} je TP. Posloupnost otevřených pokrytí \mathcal{V}_n prostoru \mathbb{X} se nazývá development, pokud pro každé $x \in \mathbb{X} : \{\text{st}(x, \mathcal{V}_n) | n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí v bodě x .

Poznámka

Je-li (X, ϱ) MP, pak $\mathcal{V}_n := \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}, n \in \mathbb{N}$ je development X .

Věta 2.2 (Bing)

$TP \mathbb{X}$ je metrizovatelný \Leftrightarrow je kolektivně normální a má development.

┌

Důkaz

\Rightarrow : metrizovatelný \Rightarrow má development (podle předchozí poznámky) a metrizovatelný

\Rightarrow parakompaktní \Rightarrow kolektivně normální.

\Leftarrow : Dokážeme ve 4 částech:

1. Pro diskrétní soubor $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uzavřených množin v \mathbb{X} existuje diskrétní soubor otevřených množin $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$, že $F_\alpha \subseteq W_\alpha$: Dle kolektivní normality existují otevřené disjunktní $U_\alpha : \alpha \in A, F_\alpha \subseteq U_\alpha$. Položme $F = \bigcup \mathcal{F}$, $Z = \mathbb{X} \setminus \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. F uzavřená (sjednocení lokálního systému uzavřených množin), Z uzavřená. \mathbb{X} je kolektivně normální, tedy speciálně normální, tedy existují otevřené disjunktní V, W , že $Z \subseteq V$ a $F \subseteq W$. Položme $W_\alpha := U_\alpha \cap W$. Systém $\{W_\alpha\}$ už je diskrétní (je-li $x \in Z$, pak $x \in V$ a $V \cap W_\alpha = \emptyset$, je-li naopak x v U_α , pak $U_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$ pro $\beta \neq \alpha$) a $F_\alpha \subseteq W_\alpha$.

2. Ať \mathcal{V}_n je development prostoru \mathbb{X} . Buď $\kappa \geq \omega$ a očísľujme $\mathcal{V}_n = \{V_{\alpha,n} | \alpha < \kappa\}$ (s případným opakováním prvků). Položme $D_{\alpha,n,k} = \{x \in V_{\alpha,n} | \text{st}(x, V_k) \subseteq V_{\alpha,n}\}$ a $C_{\alpha,n,k} = D_{\alpha,n,k} \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} V_{\beta,n}$. $D_{\alpha,n,k}$ (a tudíž i $C_{\alpha,n,k}$) je uzavřená:

Volme $x \in \overline{D_{\alpha,n,k}}$. Pak pro libovolné $V \in \mathcal{V}_k$, že $x \in V$ platí, že existuje $y \in V \cap D_{\alpha,n,k}$. Pak $V \subseteq \text{st}(y, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$. Tedy $\text{st}(x, \mathcal{V}_k) = \bigcup \{V \in \mathcal{V}_k | x \in V\} \subseteq V_{\alpha,n}$. Tedy $x \in D_{\alpha,n,k}$, tudíž $D_{\alpha,n,k}$ je uzavřená.

3. Pro pevná $n, k \in \mathbb{N}$ je $\{C_{\alpha,n,k} | \alpha < \kappa\}$ diskrétní: Buď $y \in \mathbb{X}$ libovolné. Pak existuje nejmenší $\beta < \kappa : y \in V_{\beta,n}$. Najdeme $V \in \mathcal{V}_k : y \in V$. Pro $\alpha > \beta : V_{\beta,n}$ je disjunktní s $C_{\alpha,n,k}$ a pro $\alpha < \beta : V$ je disjunktní s $C_{\alpha,n,k}$ (kdyby existovalo $z \in V \cap C_{\alpha,n,k}$ pak $\text{st}(z, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$, speciálně $y \in V_{\alpha,n}$, což je spor s minimalitou β). Tedy $V \cap V_{\beta,n}$ je okolí bodu y , které protíná nejvýše jeden prvek systému $\{C_{\alpha,n,k} | \alpha \in A\}$ (a sice prvek $C_{\beta,n,k}$).

4. $\{C_{\alpha,n,k}\}$ je diskrétní soubor uzavřených množin (podle 2, 3). Podle 1 existuje diskrétní soubor otevřených nadmnožin $\{V_{\alpha,n,k} | \alpha < \kappa\}$. Tedy $\mathcal{V}_{n,k} := \{V_{\alpha,n,k} \cap V_{\alpha,n} | \alpha < \kappa\}$ je diskrétní (zmenšili jsme jeho množiny). Ukážeme, že $\mathcal{V} := \bigcup_{n,k \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_{n,k}$ je báze \mathbb{X} :

Ať $U \subseteq \mathbb{X}$ je otevřená, $x \in U$. $\exists n \in \mathbb{N} : \text{st}(x, \mathcal{V}_n) \subseteq U$. Najdeme α nejmenší možné, že $x \in V_{\alpha,n}$. Zřejmě $V_{\alpha,n} \subseteq U$. Opět z vlastností developmentu existuje $k \in \mathbb{N} : \text{st}(x, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$. Nyní $x \in C_{\alpha,n,k}$, tedy $x \in V_{\alpha,n,k} \cap V_{\alpha,n} \subseteq U$. Tudíž \mathcal{V} je báze \mathbb{X} .

\mathcal{V} je σ -diskrétní báze \mathbb{X} , tedy podle metrizační věty Bing-Nagata-Smirnov je \mathbb{X} metrizovatelný. □

└

3 Uniformní prostory

Poznámka

Zavedeno např. díky tomu, že stejnoměrnou spojitost nelze charakterizovat pomocí topologie.

Matematici Weil(1936), Tukey(1940) ... prvotní zkoumání UP.

Definice 3.1 (Značení)

Pro množinu \mathbb{X} značíme $\Delta(X) = \{(x, x) | x \in X\}$.

Pro $E \subseteq X \times X$ značíme $E^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in E\}$.

Pro $C, D \in X \times X$ značíme $C \circ D = \{(x, z) \in X \times X | \exists y \in X : (x, y) \in C \wedge (y, z) \in D\}$.

$E[x] = \{y \in X | (x, y) \in E\}$.

Definice 3.2 (Uniformní prostor (UP))

Dvojice $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá uniformní prostor (UP), pokud \mathbb{X} je množina a $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$ splňující

1. $\forall D \in \mathcal{D} : \Delta(\mathbb{X}) \subseteq D$,
2. $\forall C, D \in \mathcal{D} : C \cap D \in \mathcal{D}$,
3. $\forall D \in \mathcal{D} \exists C \in \mathcal{D} : C \circ C \subseteq D$,
4. $\forall D \in \mathcal{D} : D^{-1} \in \mathcal{D}$,
5. $\forall D \in \mathcal{D} \forall E \subseteq X \times X : D \subseteq E \implies E \in \mathcal{D}$,
6. $\forall x, y \in X : x \neq y \implies \exists D \in \mathcal{D} : (x, y) \notin D$. ($\Leftrightarrow \bigcap \mathcal{D} = \Delta(\mathbb{X})$.)

Prvky systému \mathcal{D} nazýváme okolí diagonály.

Definice 3.3 (Báze uniformity)

Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X^2)$ se nazývá báze uniformity (resp. báze uniformity \mathcal{D}), pokud uzavřením \mathcal{B} na nadmnožiny dostaneme \mathcal{D} .

Definice 3.4 (Subbáze uniformity)

Systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X^2)$ tvoří subbázi uniformity (resp. uniformity \mathcal{D}), pokud uzavřením na konečné průniky dostaneme bázi uniformity (resp. bázi uniformity \mathcal{D}).

Definice 3.5 (Uniformní zobrazení)

Jsou-li $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ a $(\mathbb{Y}, \mathcal{E})$ UP, $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ se nazývá uniformní (stejněměrně spojitě), pokud $\forall E \in \mathcal{E} : (f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{D}$. ($\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E} \exists D \in \mathcal{D} : (f \times f)(D) \subseteq E$.) ($\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E} \exists D \in \mathcal{D} \forall x, y \in \mathbb{X} : (x, y) \in D \implies (f(x), f(y)) \in E$.)

Definice 3.6 (Uniformní izomorfismus)

Zobrazení f se nazývá uniformní izomorfismus, pokud f je bijekce a f i f^{-1} jsou uniformní.

Lemma 3.1

Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}^2)$ tvoří bázi nějaké uniformity na \mathbb{X} , pokud

$$a) \bigcap \mathcal{B} = \Delta(\mathbb{X}),$$

$$b) \forall C, D \in \mathcal{B} \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq C \cap D,$$

$$c) \forall D \in \mathcal{B} \exists C \in \mathcal{B} : C \circ C \subseteq D,$$

$$d) \forall D \in \mathcal{B} \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq D^{-1}.$$

┌ Důkaz

└ $\mathcal{D} := \{C \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X} \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq C\}$. Následně ověříme podmínky. □

Tvrzení 3.2 (Vytvoření UP z MP a TP z UP)

Je-li (\mathbb{X}, ϱ) metrický prostor a $D_\varepsilon = \{(x, y) \mid \varrho(x, y) < \varepsilon\}$, potom $\{D_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ je báze nějaké uniformity na \mathbb{X} – značíme ji \mathcal{D}_ϱ . Tato uniformita se nazývá generovaná metrikou ϱ .

Je-li $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ UP, pak systém $\tau_{\mathcal{D}} = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A \exists D \in \mathcal{D} : D[x] \subseteq A\}$ je topologie na \mathbb{X} a pro každé $x \in \mathbb{X}$ tvoří systém $\mathcal{B}(x) := \{D[x] \mid D \in \mathcal{D}\}$ bázi okolí v bodě x . Topologie $\tau_{\mathcal{D}}$ se nazývá generovaná uniformitou \mathcal{D} .

Pokud místo systému \mathcal{D} použijeme v definici topologie $\tau_{\mathcal{D}}$ nějakou bázi \mathcal{D} , pak dostaneme stejnou topologii. Zároveň také $\tau_{\mathcal{D}_\varrho}$ je systém všech otevřených množin v (\mathbb{X}, ϱ) .

┌ Důkaz

└ Ověříme definice. □

Definice 3.7

UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá metrizable, pokud existuje metrika ϱ na \mathbb{X} , že $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\varrho$. TP (\mathbb{X}, τ) se nazývá metrizable, pokud existuje uniformita \mathcal{D} na \mathbb{X} , že $\tau = \tau_{\mathcal{D}}$

Definice 3.8

Ať $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$, $A \subseteq \mathbb{X}$, pak značíme $\text{st}(A, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap A \neq \emptyset\}$. $\mathcal{U}^* = \{\text{st}(U, \mathcal{U}) \mid U \in \mathcal{U}\}$.

Pro \mathcal{U}, \mathcal{V} pokrytí \mathbb{X} , definujeme jejich společné zjemnění $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$.

Poznámka

Pro \mathcal{U}, \mathcal{V} pokrytí množiny \mathbb{X} : \mathcal{U} hvězdovitě zjemňuje \mathcal{V} , pokud \mathcal{U}^* zjemňuje \mathcal{V} .

Definice 3.9

Ať \mathbb{X} je množina, $\mathbf{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$ se nazývá pokrývací uniformita na \mathbb{X} , pokud:

- $\forall \mathcal{U} \in \mathbf{U} : \mathcal{U}$ je pokrytí \mathbb{X} ,
- Je-li $\mathcal{U} \in \mathbf{U}, \mathcal{V}$ pokrytí \mathbb{X} a \mathcal{U} zjemňuje \mathcal{V} , pak $\mathcal{V} \in \mathbf{U}$,
- $\forall \mathcal{U} \in \mathbf{U} \exists \mathcal{V} \in \mathbf{U} : \mathcal{V}$ hvězdovitě zjemňuje \mathcal{U} ,
- $\forall \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathbf{U} : \mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \in \mathbf{U}$,
- $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists \mathcal{U} \in \mathbf{U} \forall U \in \mathcal{U} : |\{x, y\} \cap U| \leq 1$.

Prvky systému \mathbf{U} se nazývají uniformní pokrytí.

Je-li \mathbf{U} pokrývací uniformita na \mathbb{X} , pak položíme

$$\mathcal{D}_{\mathbf{U}} := \{D \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbf{U} \forall u \in \mathcal{U} : U \times U \subseteq D\}.$$

Je-li \mathcal{D} (diagonální) uniformita na \mathbb{X} , pak položíme

$$\mathcal{U}_{\mathcal{D}} := \{\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{X})) \mid \exists D \in \mathcal{D} : \{D[x] \mid x \in \mathbb{X}\} \text{ zjemňuje } \mathcal{U}\}.$$

Přiřazení $\mathbf{U} \mapsto \mathcal{D}_{\mathbf{U}}$ a $\mathcal{D} \mapsto \mathbf{U}_{\mathcal{D}}$ jsou navzájem inverzní bijekce systému všech pokrývacích uniformit na \mathbb{X} a systém všech uniformit.

Lemma 3.3 (O pseudometrice)

Ať $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je UP a $D_i \in \mathcal{D}$, $D_i = D_i^{-1}$, $i \in \mathbb{N}_0$, $D_0 = \mathbb{X} \times \mathbb{X}$, $D_{i+1} \circ D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$. Pak existuje pseudometrika d na \mathbb{X} , že pro každé $i \geq 1$: $\{(x, y) : d(x, y) < \frac{1}{2^i}\} \subseteq D_i \subseteq \{(x, y) \mid d(x, y) \leq \frac{1}{2^i}\}$.

Důkaz

Položme $d(x, y) := \inf \left\{ \frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \dots + \frac{1}{2^{i_k}} \mid x_0, \dots, x_k \in \mathbb{X} \wedge (x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j} \wedge x = x_0, y = x_k \right\}$.
 $d(x, y)$ je pseudometrika na \mathbb{X} . $D_i \subseteq \left\{ (x, y) \mid d(x, y) \leq \frac{1}{2^i} \right\}$ vidíme z toho, že pro $(x, y) \in D_i$ zvolíme $k = 1$. Zbývá dokázat $\left\{ (x, y) \mid d(x, y) < \frac{1}{2^i} \right\} \subseteq D_i$. Tedy chceme, že $d(x, y) < \frac{1}{2^i}$, pak $(x, y) \in D_i$, tj. že pro každou posloupnost x_0, \dots, x_k , kde $(x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j}$: pokud $\frac{1}{2^{i_1}} + \dots + \frac{1}{2^{i_k}} < \frac{1}{2^i}$, pak $(x_0, x_k) \in D_i$. To dokážeme indukcí podle k :

Pro $k = 1 : \frac{1}{2^{i_1}} < \frac{1}{2^i}$, tj. $i < i_1$, tedy $(x_0, x_k) \in D_{i_1} \subseteq D_i$. Nyní předpokládejme, že $m > 1$ a pro všechna $k < m$ uvedené tvrzení platí. Uvažme posloupnost x_0, \dots, x_m , že $(x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j}, j = 1, \dots, m$, a $\frac{1}{2^{i_1}} + \dots + \frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^i}$. Zřejmě buď $\frac{1}{2^{i_1}} < \frac{1}{2^{i+1}}$, nebo $\frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Ze symetrie obou případů můžeme BÚNO předpokládat platnost první nerovnosti.

Ať $n \leq m - 1$ je největší takové, že $\frac{1}{2^{i_1}} + \dots + \frac{1}{2^{i_n}} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Pokud $n < m - 1$, pak $\frac{1}{2^{i+1}} + \dots + \frac{1}{2^{i_{n+1}}} \geq \frac{1}{2^{i+1}}$, tedy $\frac{1}{2^{i_{n+1}}} + \dots + \frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Podle indukčního předpokladu $x_0, n \in D_{i+1}$, $(x_{n+1}, x_m) \in D_{i+1}$. Navíc $\frac{1}{2^{i_{n+1}}} < \frac{1}{2^i}$, tedy $i < i_{n+1}$, $i + 1 \leq i_{n+1}$, $D_{i_{n+1}} \subseteq D_{i+1}$. $(x_0, x_m) = (x_0, x_n) \circ (x_n, x_{n+1}) \circ (x_{n+1}, x_m) \in D_{i+1} \circ D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$.

Pokud $n = m - 1$, pak podle IP $x_0, x_{m-1} \in D_{i+1}$, a jelikož $\frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^i}$, tak $(x_{m-1}, x_m) \in D_{i_m} \subseteq D_{i+1}$. Tedy $(x_0, x_m) \in D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$. \square

Věta 3.4 (Metrizovatelnost UP)

$UP(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je metrizovatelný, právě když má spočetnou bázi uniformity.

Důkaz

(\implies): Ať d je metrika na \mathbb{X} generující \mathcal{D} . Pak $\left\{ \left\{ (x, y) : d(x, y) < \frac{1}{n} \right\} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ je báze \mathcal{D} .

(\impliedby): Ať $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je báze \mathcal{D} . Indukcí najdeme posloupnost $D_n \in \mathcal{D}$, že jsou splněny předpoklady předchozího lemmatu. A že $D_i \subseteq C_i$: Předpokládejme, že D_0, \dots, D_n máme ($D_0 = \mathbb{X} \times \mathbb{X}$), pak víme, že $\exists E : E \circ E \subseteq D_n$, $\exists F : F \circ F \subseteq E$. Tedy $F \circ F \circ F \subseteq D_n$. Ať $D_{n+1} := (F \cap C_{i+1}) \cap (F \cap C_{i+1})^{-1}$. Tedy $D_{n+1} \circ D_{n+1} \circ D_{n+1} \subseteq D_n$, $D_{n+1} \subseteq C_{i+1}$. Tedy podle lemmatu o pseudometrice existuje pseudometrika d na \mathbb{X} , že

$$\left\{ (x, y) \mid d(x, y) < \frac{1}{2^i} \right\} \subseteq D_i \subseteq \left\{ (x, y) \mid d(x, y) \leq \frac{1}{2^i} \right\}.$$

Pro $x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists C \in \mathcal{D} : (x, y) \notin C$. $\exists i \in \mathbb{N} : C_i \subseteq C$. $D_i \subseteq C_i$. $(x, y) \notin D_i$. Tedy $d(x, y) \geq \frac{1}{2^i} > 0$. Tedy d je metrika. d generuje uniformitu \mathcal{D} : Tj. pro $\varepsilon > 0 \left\{ (x, y) \mid d(x, y) < \varepsilon \right\} \in \mathcal{D}$. To platí díky vlastnosti z předchozího lemmatu. A pro $D \in \mathcal{D} \exists \varepsilon > 0 : \left\{ (x, y) \mid d(x, y) < \varepsilon \right\} \subseteq D$. $D \in \mathcal{D}$ dané $\exists i \in \mathbb{N} : C_i \subseteq D$, $D_i \subseteq C_i \subseteq D$. $\varepsilon := \frac{1}{2^i}$. To máme také díky vlastnosti z předchozího lemmatu. \square

Věta 3.5 (Jemná uniformita)

Ať (\mathbb{X}, τ) je TP. Všechny otevřené podmnožiny $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ obsahující $\delta(\mathbb{X})$ tvoří bázi nějaké uniformity na \mathbb{X} právě tehdy, když \mathbb{X} je parakompaktní.

┌ *Poznámka (Reformulace)*

At (\mathbb{X}, τ) je TP. Všechna otevřená pokrytí \mathbb{X} tvoří bázi nějaké pokrývací uniformity na \mathbb{X} , právě když \mathbb{X} je parakompaktní.

┌ *Důkaz*

Pokud všechna otevřená pokrytí \mathbb{X} tvoří bázi pokrývací uniformity, pak speciálně každé otevřené pokrytí má hvězdovité otevřené zjemnění. Tedy podle charakterizační věty je \mathbb{X} parakompaktní.

Je-li \mathbb{X} parakompaktní, tak podle charakterizační věty má každé otevřené pokrytí \mathbb{X} otevřené hvězdovité zjemnění a snadno se ověří, že $\{\mathcal{U}|\mathcal{U} \text{ je pokrytí } \mathbb{X}, \text{ které je zjemňované nějakým otevřeným zjemněním}\}$ je pokrývací uniformita na \mathbb{X} . □

Věta 3.6 (Uniformizovatelnost TP)

TP je uniformizovatelný (tj. generován nějakou uniformitou), právě když je Tichonovův.

┌ *Důkaz*

At (\mathbb{X}, τ) je generovaný uniformitou \mathcal{D} . Buď $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Pak existuje $D \in \mathcal{D} : D[x] \subseteq \mathbb{X} \setminus F$. At d je pseudometrika z předchozího lemmatu, kde volíme $D_1 = D$. Pak $B_d(x, \frac{1}{2}) \subseteq D[x]$. Definujeme $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = d(x, y)$, $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 0$ a f je spojitá. Pro $y \in F : f(y) \geq \frac{1}{2}$. Tedy \mathbb{X} je T_π .

At (\mathbb{X}, τ) je Tichonovův. Pak uvažme $\beta\mathbb{X}$. $\beta\mathbb{X}$ je (para)kompaktní. Tedy na $\beta\mathbb{X}$ máme jemnou uniformitu, která generuje topologii na $\beta\mathbb{X}$. Tuto jemnou uniformitu na $\beta\mathbb{X}$ můžeme zúžit na \mathbb{X} a ta již generuje topologii τ . □