

1 Skalární součin

Definice 1.1 (Standardní skalární součin)

Budte $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. Pak standardní skalární součin \mathbf{u} a \mathbf{v} definujeme jako $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{u_1} \cdot v_1 + \dots + \overline{u_n} \cdot v_n$.

Definice 1.2 (Euklidovská norma)

Nechť \cdot je standardní skalární součin na \mathbf{V} . Potom $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ definujeme euklidovskou normu jako $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$.

Definice 1.3 (Skalární součin)

Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad \mathbb{C} . Skalární součin je zobrazení $\cdot : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}$, které ($\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ a $\forall t \in \mathbb{C}$) splňuje:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}, \text{ (Symetričnost)}$$

$$\mathbf{u} \cdot (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}), \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}, \text{ (Linearita)}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0 \wedge (\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}).$$

Definice 1.4 (Hermitovsky sdružená matice)

Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, potom hermitovsky sdružená matice je $A^* = (\overline{a_{ji}})$.

Čtvercová matice je Hermitovská, pokud je rovna své hermitovsky sdružené matici.

Definice 1.5

Buď $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ nebo \mathbb{C} a buď $A = T^{n \times n}$. Pak A je pozitivně definitní, pokud je hermitovská a platí

$$\mathbf{u} * A\mathbf{u} \geq 0 \wedge (\mathbf{u} * A\mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}).$$

Důsledek

$\langle \cdot, \cdot \rangle_A = \cdot^* A \cdot$ je skalární součin, právě když A je pozitivně definitní.

Definice 1.6 (Norma)

Buď \mathbf{V} VP nad \mathbb{R} nebo \mathbb{C} se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pak normou vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ rozumíme $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.

Tvrzení 1.1 (Vlastnosti normy)

$$\|\mathbf{u}\| \geq 0 \wedge (\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}).$$

$$\forall t \in \mathbb{T} : \|t\mathbf{u}\| = |t| \cdot \|\mathbf{u}\|.$$

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2.$$

$$\Re(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2.$$

Věta 1.2 (Cauchy-Schwarzova nerovnost)

Bud' $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ nebo \mathbb{C} , \mathbf{V} VP nad \mathbb{T} se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pak platí $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$: $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$. Rovnost platí právě tehdy, pokud (\mathbf{u}, \mathbf{v}) je lineárně závislá.

┌

Důkaz

Případ 1): (\mathbf{u}, \mathbf{v}) je LZ: Bud' $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$: $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = |\langle \mathbf{u}, t \cdot \mathbf{u} \rangle| = |t| \cdot |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| = |t| \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

Případ 2): (\mathbf{u}, \mathbf{v}) je LN: Víme, že $\|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 > 0$. Zvolme t tak, aby $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = 0$. (To lze, protože $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - t\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - t\|\mathbf{v}\|^2 \implies t = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}$.) $0 < \|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle - \bar{t} \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} = \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} = \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2}.$

└

Tj. $0 < \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 - |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2$, tedy $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$. □

Důsledek (Trojúhelníková nerovnost)

Bud' $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ nebo \mathbb{C} , \mathbf{V} VP nad \mathbb{T} se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pak platí $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. Rovnost platí právě tehdy, pokud (\mathbf{u}, \mathbf{v}) je lineárně závislá.

┌

Důkaz

$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\Re(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2 \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2.$ □

└

Definice 1.7 (Kolmost)

Bud' \mathbf{V} VP se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Řekneme, že \mathbf{u} a \mathbf{v} jsou kolmé, značíme $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, pokud $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Poznámka

Ze skoro symetrie (SSS) plyne, že relace jsou kolmé je symetrická.

Definice 1.8 (Kolmost množin)

Množina nebo posloupnost M vektorů VP \mathbf{V} s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se nazývá ortogonální, pokud každá dvojice různých prvků M je kolmá. Nazývá se ortonormální, pokud je ortogonální a každý prvek má normu 1.

Důsledek

Kanonická báze je ortonormální. Normovaná (tj. každý prvek vydělíme normou) ortogonální množina / posloupnost je ortonormální.

Tvrzení 1.3 (Pythagorova věta)

V vektorový prostor se $\langle \cdot, \cdot \rangle$, buďte $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ kolmé vektory. Pak

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

┌

Důkaz

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 0 + 0 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

└

□

Důsledek

Je-li $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ ortogonální posloupnost, pak $\|\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_k\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{v}_k\|^2$.

┌

Důkaz

└ Indukcí triviálně.

□

Tvrzení 1.4

Buď **V** vektorový prostor s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ ortogonální posloupnost nenulových vektorů. Pak je $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ LN.

┌

Důkaz

Předpokládejme, že $0 = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_k \mathbf{v}_k$, kde $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{T}$ ($\mathbb{T} = \mathbb{R} \vee \mathbb{T} = \mathbb{C}$). Chceme ukázat, že $a_1 = \dots = a_k = 0$.

$$\forall i \in [k] : 0 = \langle v_i, \mathbf{o} \rangle = \langle \mathbf{v}_i, a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_k \mathbf{v}_k \rangle = a_1 \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1 \rangle + \dots + a_k \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k \rangle = a_i \cdot \|\mathbf{v}_i\|^2 \implies a_i = 0.$$

└

□

1.1 Ortonormální báze a vyjádření vektorů vzhledem k nim

Tvrzení 1.5

V VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ortonormální báze. Pak pro každý $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ platí:

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{v}_n.$$

To jest

$$[\mathbf{u}]_B = (\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle, \dots, \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u} \rangle)^T.$$

Důkaz

Vezmeme $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{T}$ tak, aby $\mathbf{u} = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n$. Máme $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}_i, a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n \rangle = a_1 \cdot 0 + \dots + a_i + \dots + a_n \cdot 0 = a_i$. \square

Poznámka

Kdyby B byla jen ortogonální, pak $[\mathbf{u}]_B = (\frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|}, \dots, \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_k\|})^T$.

Poznámka

a_1, \dots, a_n se někdy nazývají Fourierovy koeficienty.

Tvrzení 1.6

\mathbf{V} VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ortonormální báze, $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$. Pak $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = [\mathbf{u}]_B^* [\mathbf{w}]_B = [\mathbf{u}]_B^* [\mathbf{w}]_B$.

Důkaz

Buď $[\mathbf{u}]_B = (a_1, \dots, a_n)^T$, $[\mathbf{w}]_B = (b_1, \dots, b_n)^T$. Pak $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n, b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_n \mathbf{v}_n \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_i} \cdot b_j \cdot \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i \cdot \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = [\mathbf{u}]_B^* [\mathbf{w}]_B$. \square

1.2 Kolmost množin

Definice 1.9 (Kolmost množin)

\mathbf{V} VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $M, N \subseteq \mathbf{V}$. Pak řekneme, že \mathbf{v} je kolmý k M , značíme $\mathbf{v} \perp M$, pokud $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \forall \mathbf{w} \in M$, a řekneme, že M je kolmá k N , značíme $M \perp N$, pokud $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \forall \mathbf{v} \in M \forall \mathbf{w} \in N$.

Definice 1.10

Buď \mathbf{V} VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a buď $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$. Je-li $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, ortogonální projekcí vektoru \mathbf{v} na podprostor \mathbf{W} rozumíme vektor \mathbf{w} takový, že $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ a $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{W}$.

Věta 1.7

Buď \mathbf{V} VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$, buď $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ ortogonální projekce \mathbf{v} na \mathbf{W} . Potom pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ různý od \mathbf{w} platí: $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$.

Speciálně existuje-li ortogonální projekce \mathbf{v} na \mathbf{W} , pak je určena jednoznačně.

┌ *Důkaz*

Z předpokladu \mathbf{w}, \mathbf{u} , a tedy i $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ jsou vektory \mathbf{W} . Tudíž $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{w} - \mathbf{u}$ ($\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{W}$).

Z Pythagorovy věty: $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{w} - \mathbf{u}\|^2 > \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2$. □

Tvrzení 1.8

Bud' \mathbf{V} VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a bud'te $M, N \subseteq \mathbf{V}$. Pak $M \perp N \Leftrightarrow M \perp \text{LO}(N)$ ($\Leftrightarrow \text{LO}(M) \perp \text{LO}(N)$).

┌ *Důkaz*

\Leftarrow : Triviální (protože $N \subseteq \text{LO}(N)$).

\Rightarrow : Předpokládejme, že $M \perp N$. Vezměme $\mathbf{v} \in M$ a $\mathbf{w} = a_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_n \mathbf{w}_n \in \text{LO}(N)$.

Pak $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a_1 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle + \dots + a_n \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_n \rangle = 0$. □

Tvrzení 1.9

Bud' \mathbf{V} VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$, který má ortonormální bázi $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$. Pak pro libovolné $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ je

$$\mathbf{w} := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{u}_k$$

ortogonální projekcí do \mathbf{W} .

┌ *Důkaz*

Zjevně $\mathbf{w} \in \text{LO}(B) = \mathbf{W}$. Chceme ukázat, že $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{W}$. Podle tvrzení výše stačí ukázat, že $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{u}_i, \forall i \in [k]$. Označme $a_i := \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle$.

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} - a_1 \mathbf{u}_1 - a_2 \mathbf{u}_2 - \dots - a_k \mathbf{u}_k \rangle = a_i - a_1 \cdot 0 - \dots - a_i \cdot 1 - \dots - a_k \cdot 0 = 0.$$

└ □

Definice 1.11 (Gramova-Schmidtova ortogonalizace)

Postup, který vezme LN posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ z VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a vytvoří ortonormální posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ taková, že $\forall i \in [k] : \text{LO}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\} = \text{LO}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i\}$.

1) $\mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$. 2) Pro každé $i = 2, \dots, k$ spočítáme $\mathbf{w}_i = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_i \rangle \cdot \mathbf{u}_1 + \dots + \langle \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}_i \rangle \cdot \mathbf{u}_{i-1}$ a položíme $\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i\|}$.

┌
Důkaz

To, že $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i)$ je ortonormální $\forall i \in [k]$ dokážeme triviálně indukci.

Stejně tak, že $\text{LO}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\} = \text{LO}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i\}$.

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\dots\|} - \frac{\mathbf{w}_i}{\|\dots\|}, \frac{\mathbf{w}_i}{\|\dots\|} \in \text{LO}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}\} \stackrel{\text{IP}}{=} \text{LO}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}\}.$$

\mathbf{v}_i také z definice.

Nakonec musíme ukázat, že nikdy nedělíme nulou (naopak, pokud dostaneme špatný (= LZ) vstup, tak dělíme). Ukáže se, že kdybychom dělili, tak nějaké $\mathbf{u}_i \in \text{LO}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}\}$.

└

□

Věta 1.10

Máme-li \mathbf{V} VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a aplikujeme-li GS ortogonalizaci na LN posloupnost vektorů z \mathbf{V} , pak dostaneme ortonormální posloupnost, že se jejich LO rovnají.

┌
Důkaz

Viz předchozí důkaz.

□

Důsledek

Každý konečně generovaný VP se skalárním součinem má ortonormální bázi.

Důsledek

Máme-li \mathbf{V} konečně generovaný VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a ortonormální posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$, můžeme ji doplnit na ortonormální bázi.

┌
Důkaz

Doplníme na bázi a aplikujeme GS ortogonalizaci, kde si rozmyslíme, že nám nezmění původní posloupnost.

□

Důsledek

Je-li \mathbf{V} konečně generovaný VP s ortonormální bází $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ a s $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pak existuje isomorfismus $\mathbf{V} \rightarrow T^n$ takový, že $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = f(\mathbf{v}) \cdot f(\mathbf{w})$.

Poznámka

Aplikováním GS ortogonalizace na T^n dostaneme tzv. QR - rozklad matice, kde $A = Q \cdot R$ a A má za sloupce původní vektory, Q má ortonormální posloupnost sloupců a R je horní trojúhelníková s nezápornými reálnými čísly na diagonále.

1.3 Ortogonální doplněk, Gramova matice

Definice 1.12

Buď \mathbf{V} VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nad $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ nebo \mathbb{C} . Je-li $M \subseteq \mathbf{V}$ množina vektorů, pak ortogonálním doplňkem k M ve \mathbf{V} , rozumíme

$$M^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid \mathbf{v} \perp M\} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid (\forall \mathbf{u} \in M : \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0)\}.$$

Důsledek

$M \perp M^\perp$ a M^\perp je největší taková množina vzhledem k inkluzi.

Tvrzení 1.11

\mathbf{V} VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $M \subseteq \mathbf{V}$. Pak $M^\perp = (\text{LO } M)^\perp$, M^\perp je podprostor \mathbf{V} , $M \subseteq N \implies N^\perp \subseteq M^\perp$.

┌

Důkaz

$$\mathbf{v} \in M^\perp \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp M \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \text{LO } M \Leftrightarrow \mathbf{v} \in (\text{LO } M)^\perp.$$

Vezmeme $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in M^\perp$ a $t \in \mathbb{T}$, pak $\forall \mathbf{v} \in M : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle = 0 + 0 = 0$ a $\langle \mathbf{v}, t \cdot \mathbf{w}_1 \rangle = t \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle = t \cdot 0 = 0 \implies \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, t \cdot \mathbf{w}_1 \in M^\perp$.

└

Ať $M \subseteq N$. Pak $\mathbf{v} \in N^\perp \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp N \implies \mathbf{v} \perp M \Leftrightarrow \mathbf{v} \in M^\perp$. □

Věta 1.12

Buď \mathbf{V} VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nad \mathbb{R} nebo \mathbb{C} . Buď $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ konečně generovaný. Pak platí:

$$1) \mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^\perp.$$

$$2) (\mathbf{W}^\perp)^\perp = \mathbf{W}.$$

3) Každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ má (jednoznačnou) ortogonální projekci jak na \mathbf{W} , tak na \mathbf{W}^\perp .

4) Je-li \mathbf{V} konečně generovaný dimenze n , pak $n = \dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{W}^\perp$.

┌ *Důkaz*

1) Triviálně $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^\perp = \{\mathbf{o}\}$. Navíc použitím toho, že existuje ortogonální projekce (a toho, že je kolmá) na \mathbf{W} máme, že $\mathbf{W} + \mathbf{W}^\perp = \mathbf{V}$.

2) $\mathbf{W} \subseteq (\mathbf{W}^\perp)^\perp$: je-li $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, pak $\mathbf{w} \perp (\mathbf{W}^\perp)$, tj. $\mathbf{w} \in (\mathbf{W}^\perp)^\perp$. Naopak $(\mathbf{W}^\perp)^\perp \subseteq \mathbf{W}$: vezměme $\mathbf{v} \in (\mathbf{W}^\perp)^\perp$. Uvažujme ortogonální projekci \mathbf{v} na \mathbf{W} :

$$(\mathbf{W}^\perp)^\perp \ni \mathbf{v} = \mathbf{w} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v} - \mathbf{w} \in (\mathbf{W}^\perp)^\perp \implies (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \perp (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \implies \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{o} \implies \mathbf{v} = \mathbf{w} \in \mathbf{W}.$$

Víme, že ortogonální projekce na \mathbf{W} existuje. Je-li tedy $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, pak můžeme psát $\mathbf{v} = \mathbf{w} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = (\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{w}$, potom $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \in \mathbf{W}^\perp$ je podle definice ortogonální projekce na \mathbf{W}^\perp . ($\mathbf{w} \in (\mathbf{W}^\perp)^\perp$.)

Použijeme 1) a větu o dimenzi součtu a průniku podprostorů. □

Definice 1.13 (Gramova matice)

Buď \mathbf{V} VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nad \mathbb{R} nebo \mathbb{C} . Buď $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ posloupnost vektorů. Pak Gramovu matici posloupnosti $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ definujeme jako:

$$(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle)_{k \times k}.$$

Tvrzení 1.13

Buď \mathbf{V} VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ posloupnost vektorů \mathbf{V} , B Gramova matice. Vezměme $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a $\mathbf{w} = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_k \mathbf{u}_k \in \mathbf{W} := \text{LO} \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \}$. Pak následující je ekvivalentní:

- 1) \mathbf{w} je ortogonální projekce \mathbf{v} na \mathbf{W} .
- 2) $B \cdot (a_1, \dots, a_k)^T = (\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle, \dots, \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \rangle)$.

┌ *Důkaz*

$$1) \Leftrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{W} \Leftrightarrow \forall i \in [k] : \Leftrightarrow \mathbf{u}_i \perp \mathbf{v} - \mathbf{w} \Leftrightarrow \forall i \in [k] : \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall [k] : \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle \Leftrightarrow \forall i \in [k] : \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_1 \rangle \cdot a_1 + \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle \cdot a_k = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle \Leftrightarrow 2). \quad \square$$

Důsledek

Buď A matice typu $n \times k$ nad \mathbb{R} nebo \mathbb{C} . Buď $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ nebo \mathbb{C}^n a $x \in \mathbb{C}^k$ nebo \mathbb{R}^k . Pak následující je ekvivalentní:

- 1) Ax je ortogonální projekce \mathbf{v} na $\Im A$.
- 2) $A^* A \cdot x = A^* \cdot \mathbf{v}$.

Tvrzení 1.14 (8.80)

Buď $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ posloupnost vektorů ve VP \mathbf{V} s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a buď $B \in T^{k \times k}$ gramova matice. Pak platí:

- 1) B je regulární $\Leftrightarrow (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ LN.
- 2) B je hermitovská (v reálném případě symetrická).
- 3) Je-li $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ LN, pak B je pozitivně definitní.

┌
Důkaz

1) aplikujeme tvrzení výše na $\mathbf{v} = \mathbf{o}$. První podmínka se přepíše na $0 = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_k \mathbf{u}_k \Leftrightarrow B \cdot (a_1, \dots, a_k)^T = \mathbf{o} \Leftrightarrow (a_1, \dots, a_k)^T \in \text{Ker } B$. Ale jádro je $\{\mathbf{o}\} \Leftrightarrow B$ je regulární.

2) Plyne z rovnosti: $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle}$.

3) Vezměme ortonormální bázi C prostoru $\text{LO} \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ a položme $A = ([\mathbf{u}_1]_C | \dots | [\mathbf{u}_k]_C)$.
Pak A je regulární, tj. $A^* A$ je pozitivně definitní. □

└

1.4 Unitární a ortogonální matice

Definice 1.14 (Unitární a ortogonální matice)

Čtvercová matice nad \mathbb{R} se nazývá ortogonální, pokud má ortonormální posloupnost sloupců vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Čtvercová matice nad \mathbb{C} se nazývá unitární, pokud má ortonormální posloupnost sloupců vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Tvrzení 1.15

Bud Q čtvercová komplexní matice řádu n . Pak následující je ekvivalentní: 1) Q je unitární, 2) $Q^* \cdot Q = I_n$, 3) Q^* je unitární, 4) $Q \cdot Q^* = I_n$, 5) Q^T je unitární, 6) f_Q zachovává standardní skalární součin, tj. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Speciálně je každá unitární matice regulární a $Q^{-1} = Q^*$.

┌
Důkaz

1) \Leftrightarrow 2), 3) \Leftrightarrow 4): z definice. 2) \Rightarrow 4): 2) $\Rightarrow Q$ má levou inverzi $Q^* \Rightarrow Q$ regulární a $Q^{-1} = Q^* \Rightarrow Q \cdot Q^{-1} = Q \cdot Q^* = I_n$. 4) \Rightarrow 2): analogicky.

3) \Leftrightarrow 5): 5) říká, že Q má ortonormální posloupnost řádků, 3) říká, že když komplexně sdružíme všechny prvky Q , pak dostaneme ortonormální posloupnost řádků. Z toho to už jednoduše dostaneme.

2) \Rightarrow 6): Předpokládejme 2), uvažujme $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. Pak $f_Q(\mathbf{u}) \cdot f_Q(\mathbf{v}) = (Q\mathbf{u})^*(Q\mathbf{v}) = \mathbf{u}^*(Q^*Q)\mathbf{v} = \mathbf{u}^*\mathbf{v}$.

6) \Rightarrow 1) $Q = (f_Q(e_1) | \dots | f_Q(e_n)) \Rightarrow (f_Q(e_1), \dots, f_Q(e_n))$ ortonormální $\Rightarrow Q$ unitární. □

└

Důsledek

Součin unitárních matic stejného řádu je unitární matice.

┌ Důkaz

$$(AB)^*(AB) = B^*A^*AB = B^*B = I_n.$$

□

Tvrzení 1.16

Je-li A regulární komplexní matice a $Q_1R_1 = A = Q_2R_2$ jsou 2 QR rozklady, pak nutně $Q_1 = Q_2$ a $R_1 = R_2$.

┌ Důkaz

Z regularity $Q_1R_1 = Q_2R_2 \implies Q_2^*Q_1 = Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1} =: (\mathbf{c}_1 | \dots | \mathbf{c}_n)$. Chceme ukázat, že $\mathbf{c}_i = e_i \forall i$. To ukážeme indukcí podle i . Víme, že $R_2R_1^{-1}$ je horní trojúhelníková, tedy každé \mathbf{c}_i musí mít kladný prvek na i -té pozici a zároveň všude výše musí mít nulu, aby byl kolmý ke všem předchozím (o kterých z IP víme, že jsou to jednotkové vektory). □

Definice 1.15

Buď \mathbf{V} komplexní VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{V}}$ a \mathbf{W} komplexní VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{W}}$. Pak lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ se nazývá unitární, pokud $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} : \langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{W}} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}}$.

Tvrzení 1.17

Buď $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ lineární zobrazení, \mathbf{V}, \mathbf{W} komplexní VP se skalárním součinem, pak následující je ekvivalentní: 1) f je unitární, 2) $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} : \|f(\mathbf{u})\|_{\mathbf{W}} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}$ (f zachovává normu), 3) f zobrazí každou ortonormální posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ na ortonormální posloupnost $(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k))$, 4) f zobrazuje jednotkové vektory na jednotkové vektory.

Speciálně: každé unitární zobrazení je prosté.

┌ Důkaz

Ve skriptech. Dodatek plyne z 2) a f prosté $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{\mathbf{o}\}$. 1) \implies 2) \implies 4), 1) \implies 3) \implies 4) jednoduché. 4) \implies 2): $\mathbf{o} \neq \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, pak $\mathbf{v} = t\mathbf{u}$ pro $t = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}$, \mathbf{u} jednotkový. $\|f(\mathbf{v})\|_{\mathbf{W}} = t \cdot \|f(\mathbf{u})\|_{\mathbf{W}} = t = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}$.

$$2) \implies 1): \text{Polarizační identity: } \Re \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \Im \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2}(\dots).$$

□

Poznámka

Unitární zobrazení může zobrazovat i do prostoru větší dimenze.

1.5 Přibližné řešení SLR metodou nejmenších čtverců

Definice 1.16

Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$ je přibližné řešení SLR $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ metodou nejmenších čtverců, pokud

$$\|A\mathbf{c} - \mathbf{b}\| = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|.$$

Důsledek

\mathbf{c} je ortogonální projekce \mathbf{b} do $\text{Im } A$.

Poznámka

Používá se například, když chybou měření soustava nemá řešení, ale my víme, že řešení mít má.

Jmenuje se podle čtverců ve výpočtu normy.

Tvrzení 1.18

\mathbf{c} je přibližné řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ metodou nejmenších čtverců, právě když $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$.

2 Lineární dynamické systémy, vlastní čísla a vlastní vektory

Definice 2.1 (Vlastní čísla a vlastní vektory)

Bud \mathbb{T} těleso, A čtvercová matice řádu n (tj. máme $f_a : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$). $\lambda \in \mathbb{T}$ se nazývá vlastní číslo matice A , pokud $\exists \mathbf{v} \in \mathbb{T}^n, \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ takový, že $A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Je-li $\lambda \in \mathbb{T}$ vlastní číslo matice A , pak $\mathbf{w} \in \mathbb{T}^n$ je vlastním vektorem příslušným k λ , pokud $A \cdot \mathbf{w} = \lambda \cdot \mathbf{w}$.

Definice 2.2 (Vlastní čísla a vlastní vektory)

Bud \mathbb{T} těleso, \mathbf{V} VP nad \mathbb{T} a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor. $\lambda \in \mathbb{T}$ se nazývá vlastní číslo operátoru f , pokud $\exists \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ takový, že $f(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Je-li $\lambda \in \mathbb{T}$ vlastní číslo operátoru f , pak $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ je vlastním vektorem příslušným k λ , pokud $f(\mathbf{w}) = \lambda \cdot \mathbf{w}$.

Pozorování

A má vlastní číslo 0 $\Leftrightarrow \text{Ker } A \neq \{\mathbf{o}\} \Leftrightarrow$ (pro čtvercové) A je singulární $\Leftrightarrow \det A = 0$.

f má vlastní číslo 0 $\Leftrightarrow \text{Ker } f \neq \{\mathbf{o}\}$.

Navíc množina vlastních vektorů příslušných k 0 je přesně $\text{Ker } A$ ($\text{Ker } f$).

Pozorování

A má vlastní číslo $\lambda \Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\mathbf{o}\} \Leftrightarrow A - \lambda I_n$ singulární $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$.

f má vlastní číslo $\lambda \Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}_V) \neq \{\mathbf{o}\}$.

Navíc množina M_λ vlastních vektorů A (resp. f) příslušných k λ je v tom případě rovna $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ (resp. $\text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}_V)$). Speciálně $M_\lambda \leq \mathbb{T}^n$ (resp. $M_\lambda \leq \mathbf{V}$).

Definice 2.3 (Charakteristický polynom)

Buď A čtvercová matice nad \mathbb{T} . Potom charakteristickým polynomem A rozumíme polynom v λ :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Tvrzení 2.1

Buď $A = (a_{ij})$ matice řádu n nad \mathbb{T} . A $p_A(\lambda)$ charakteristický polynom. Pak

1. $p_A(\lambda)$ je polynom stupně n .
2. Koeficient u λ^n je roven $(-1)^n$.
3. Koeficient u λ^{n-1} je roven $(-1)^{n-1} \cdot (a_{11} + \dots + a_{nn})$ (tzv. stopa matice $\cdot (-1)^{n-1}$).
4. Absolutní člen je roven $\det A$.

Definice 2.4 (Podobné matice)

Čtvercové matice X a Y jsou podobné, pokud $Y = R X R^{-1}$ pro R regulární.

Tvrzení 2.2

X, Y podobné $\implies p_X(\lambda) = p_Y(\lambda)$.

Definice 2.5 (Diagonalizovatelný operátor)

\mathbb{T} těleso, \mathbf{V} konečně generovaný vektorový prostor. $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor. Pak f je diagonalizovatelný, pokud \exists báze B prostoru \mathbf{V} taková, že $[f]_B^B$ je diagonální.

Poznámka (Značení)

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Tvrzení 2.3

Bud' $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném VP \mathbf{V} nad \mathbb{T} a bud' $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ nějaká báze. Pak:

$$[f]_B^B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Leftrightarrow \forall i : \mathbf{v}_i \text{ je vlastní vektor příslušný k } \lambda_i.$$

Důsledek

Za stejných předpokladů: f diagonalizovatelný $\Leftrightarrow \mathbf{V}$ má bázi z vlastních vektorů f .

Definice 2.6 (Diagonalizovatelnost pro matice)

Bud' \mathbb{T} těleso a A čtvercová matice řádu n nad \mathbb{T} . Pak A je diagonalizovatelná, pokud je $f_A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ diagonalizovatelný lineární operátor.

Důsledek

A je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow \mathbb{T}^n$ má bázi z vlastních vektorů A .

Tvrzení 2.4

Bud' $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. A je diagonalizovatelná.
2. \mathbb{T}^n má bázi z vlastních vektorů matice A .
3. A je podobná diagonální matici.

2.1 Lineární nezávislost vlastních vektorů

Věta 2.5

Bud' \mathbb{T} těleso a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na VP \mathbf{V} nad \mathbb{T} . Je-li $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ posloupnost vlastních vektorů f popořadě příslušných k vlastním číslům $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou po dvou různá, pak je $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ LN.

┌

Důkaz

Indukcí podle n . $n = 1$ je triviální ($\mathbf{v}_1 \neq 0$). $n > 1$: Uvažujme $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{T}$ taková, že $a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. $a_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + a_n f(\mathbf{v}_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n a_n \mathbf{v}_n = 0$. Také můžeme původní rovnici vynásobit λ_n : $\lambda_n a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n a_n \mathbf{v}_n = 0$. Následně můžeme odečíst tyto rovnice od sebe a dostaneme $(\lambda_1 - \lambda_n) a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) a_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} = 0$. Ale z IP $(\lambda_1 - \lambda_n) a_1 = \dots = (\lambda_{n-1} - \lambda_n) a_{n-1} = 0$. Ale vlastní čísla jsou po dvou různá, tedy $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$. □

└

Důsledek

Má-li lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na prostoru dimenze n po 2 různých vlastních čísel, pak je f diagonalizovatelný.

Má-li čtvercová matice A řádu n po 2 různých vlastních čísel, pak je A diagonalizovatelná.

2.2 Geometrická násobnost vlastních čísel

Definice 2.7 (Geometrická násobnost)

Buď A čtvercová matice řádu n nad \mathbb{T} , $\lambda \in \mathbb{T}$ vlastní číslo. Uvažujme podprostor

$$M_\lambda := \{\mathbf{v} \in \mathbb{T}^n \mid A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\} \leq \mathbb{T}^n.$$

Pak geometrickou násobností λ rozumíme $\dim M_\lambda$.

Tvrzení 2.6

Máme-li lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru \mathbf{V} nad \mathbb{T} a máme-li vlastní číslo λ operátoru f , pak geometrická násobnost $\lambda \leq$ algebraická násobnost λ .

Tvrzení 2.7 (Pomocné tvrzení o determinantech)

Buď \mathbb{T} těleso, $1 \leq k < n$ a buď A matice blokově trojúhelníkové tvaru, tj. $a_{ij} = 0$ pro $i > k \geq j$. Pak $\det A = (\det B) \cdot (\det D)$, kde B je prvních k sloupců a řádků, D je posledních $n - k$ sloupců a řádků.

┌

Důkaz

Indukcí podle k : $k = 1$: Rozvoj $\det A$ podle 1. sloupce nám dá chtěnou rovnost. $k > 1$: taktéž vezmeme rozvoj podle prvního sloupce: $\det A = a_{11} \det M_{11} - a_{21} \det M_{21} + \dots$

M_{ij} jsou ale takové matice pro $k \leftarrow k-1$. Tedy je spočítáme: $\det A = a_{11}(\det B_{11})(\det D) - a_{21}(\det B_{21})(\det D) + \dots = (\det B) \cdot (\det D)$. □

└

┌ *Důkaz*

Buď k geometrická násobnost vlastního čísla λ . Tj. $\dim M_\lambda = k$, kde $M_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid f(v) = \lambda\mathbf{v}\} \leq \mathbf{V}$. Vezmeme si bázi $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ prostoru M_λ a doplníme na bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} . $A = [f]_B^B$ splňuje předpoklady předchozího tvrzení ($B = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$). Tedy $\det A - \mu \cdot I_n = (\lambda - \mu)^k \cdot \det D$. Tedy λ je minimálně k -násobným kořenem $\det A - \mu \cdot I_n$, tedy má algebraickou násobnost \geq geometrické. □

└

Věta 2.8

Buď $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na VP dimenze n nad \mathbb{T} . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. f je diagonalizovatelný.
2. f má n vlastních čísel včetně algebraických násobností a současně geometrická násobnost každého vlastního čísla je rovna jeho algebraické násobnosti.

Důkaz

1) \implies 2): f je diagonalizovatelný, tedy máme bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ z vlastních vektorů. Řekněme, že $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m_1}$ jsou vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_1 , ..., $\mathbf{v}_{m_1+m_2+\dots+m_{k-1}+1}, \dots, \mathbf{v}_{v_n}$ jsou vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_k . $\forall i \in [k]$: Geometrická násobnost i algebraická násobnost λ_i je $\geq m_i$. Na druhou stranu součet algebraických násobností je nejvýše n , tedy násobnosti λ_i jsou m_i .

2) \implies 1): Buďte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ po dvou různá vlastní čísla, m_i algebraická (tj. i geometrická) násobnost $\lambda_i = \dim M_{\lambda_i}$ a $n = m_1 + \dots + m_k$. Zvolme si bázi M_{λ_i} $B_i = (\mathbf{v}_1^i, \dots, \mathbf{v}_{m_i}^i)$. Ukáže se, že $B = (\mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_{m_k}^k)$ je báze \mathbf{V} . B má $n = \dim \mathbf{V}$ prvků, tedy stačí dokázat, že B je LN. Uvažujme $0 = a_1^1 \mathbf{v}_1^1 + \dots + a_{m_k}^k \mathbf{v}_{m_k}^k$. Součty násobků prvků jednotlivých prostorů M_{λ_i} jsou zase v M_{λ_i} , takže jsou (až na právě ty nulové) LN, protože jsou to vlastní vektory příslušné po dvou různým vlastním číslům. Tedy musí být všechny nulové, ale v jednotlivých M_{λ_i} byla $(\mathbf{v}_1^i, \dots, \mathbf{v}_{m_i}^i)$ báze, tedy všechny koeficienty musí být nulové. \square

Poznámka

Dále se probírali lineární systémy v \mathbb{R}^2 . Viz přednáška.

2.3 Jordanův kanonický tvar

Definice 2.8 (Jordanova buňka)

Buď \mathbb{T} těleso, $k \geq 1$ a $\lambda \in \mathbb{T}$. Pak Jordanovou buňkou řádu k příslušnou k prvku λ rozumíme matici:

$$J_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \lambda \\ 0 & & & & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definice 2.9

Řekneme, že čtvercová matice J nad tělesem \mathbb{T} je v Jordanově kanonickém tvaru, pokud je

blokově diagonální a čtvercové bloky na diagonále jsou Jordanovy buňky. Tj.

$$J = \text{diag}(J_{\lambda_1, k_1}, \dots, J_{\lambda_s, k_s}).$$

Definice 2.10 (Zobecnění diagonalizovatelnosti)

Buď $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném VP nad \mathbb{T} . Řekneme, že existuje Jordanův kanonický tvar (operátoru f), pokud existuje báze B prostoru \mathbf{V} taková, že $[f]_B^B$ je v Jordanově tvaru.

Podobně je-li A čtvercová matice nad \mathbb{T} , pak A má Jordanův kanonický tvar, pokud pro f_A existuje Jordanův kanonický tvar.

Pozorování

A má jordanův kanonický tvar $\Leftrightarrow \exists$ matice v Jordanově tvaru, která je podobná matici A .

Tvrzení 2.9 (Mocnění matice v J. tvaru)

Buď \mathbb{T} těleso a $J = \text{diag}(J_{\lambda_1, k_1}, \dots, J_{\lambda_s, k_s})$ matice v Jordanově tvaru.

Pozorování

$$J^n = \text{diag}(J_{\lambda_1, k_1}^n, \dots, J_{\lambda_s, k_s}^n).$$

Tvrzení 2.10 (Mocnění Jordanovy buňky příslušné k 0)

$$\text{Pro } m < k: J_{0,k}^m = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \text{diag} & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pro } m \geq k: J_{0,k}^m = 0.$$

Tvrzení 2.11 (Mocniny obecné Jordanovy buňky)

$$J_{\lambda,k}^m = (\lambda \cdot I_k + J_{0,k})^m \stackrel{\text{Binomická věta, komutativita } I_k}{=} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \lambda^i \cdot J_{0,k}^{m-i}.$$

Definice 2.11 (Jordanův řetízek, zobecněné vlastní vektory)

Buď $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na VP \mathbf{V} , buď λ vlastní číslo f a buď $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ posloupnost vektorů. Řekneme, že $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ je Jordanův řetízek délky k příslušný vlastnímu číslu λ s počátkem \mathbf{v}_1 , pokud

$$\mathbf{v}_k \xrightarrow{f-\lambda \text{ id}} \mathbf{v}_{k-1} \xrightarrow{f-\lambda \text{ id}} \dots \xrightarrow{f-\lambda \text{ id}} \mathbf{v}_1 \xrightarrow{f-\lambda \text{ id}} \mathbf{0}.$$

Vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ se pak nazývají zobecněné vlastní vektory příslušné λ .

Tvrzení 2.12

Bud' $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném VP \mathbf{V} s bází $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ pak $[f]_B^B = J_{\lambda,k} \Leftrightarrow B$ je Jordanův řetízek délky k příslušný λ s počátkem ve \mathbf{v}_1 .

Tvrzení 2.13

Bud' $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném VP \mathbf{V} a B báze \mathbf{V} , pak $[f]_B^B = \text{diag}(J_{\lambda_1,k_1}, \dots, J_{\lambda_s,k_s})$, právě když $B = B_1 \dots B_s$ je spojením Jordanových řetízků B_1, \dots, B_s , kde B_i je délky k_i a příslušný λ_i .

Důsledek

$f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ má Jordanův kanonický tvar právě tehdy, když existuje báze B prostoru \mathbf{V} , která je spojením Jordanových řetízků.

Věta 2.14

Bud' \mathbb{T} těleso, $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na VP \mathbf{V} nad \mathbb{T} . Budte B_1, \dots, B_s jordanovy řetízky popořadě délek k_1, \dots, k_s příslušné vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Předpokládejme, že $\forall \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ je posloupnost počátků těch B_i , které jsou příslušné λ , LN. Pak už je spojení $B_1 \dots B_s$ LN.

┌

Důkaz

Označme $B_i = (\mathbf{v}_1^i, \dots, \mathbf{v}_{k_i}^i)$, $(f - \lambda_i \text{id})(\mathbf{v}_j^i) = \mathbf{v}_{j-1}^i$ ($\mathbf{v}_0^i := \mathbf{o}$ kvůli značení). $B := B_1 \dots B_s$. Indukce podle délky B , tj. podle $k = k_1 + k_2 + \dots + k_s$. Příklad $k = 1$: Máme nutně $s = 1$, $B = B_1 = (\mathbf{v}_1^1)$, z předpokladu $\mathbf{v}_1^1 \neq \mathbf{o}$, tedy B je LN.

Pro $k > 1$: BÚNO $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r, \forall i > r : \lambda_i \neq \lambda_1$. Uvažujme lineární kombinaci $a_1^1 \mathbf{v}_1^1 + \dots + a_n^{a_{ks}^s} \mathbf{v}_{k_s}^s = \mathbf{o}$. Na ní aplikujeme $f - \lambda_1 \text{id}_{\mathbf{V}} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$. \mathbf{o} zobrazí na \mathbf{o} , prvních \mathbf{v}_1^i pro $i \leq r$ zobrazí také na \mathbf{o} a \mathbf{v}_j^i , kde $i \leq r$ a $1 < j$, zobrazí na \mathbf{v}_{j-1}^i . Ostatní \mathbf{v}_j^i zobrazí na $\lambda_i \mathbf{v}_j^i + \mathbf{v}_{j-1}^i - \lambda_1 \mathbf{v}_j^i$. Tedy dostaneme lineární kombinaci vektorů z řetízků, ale ubrali jsme vektor řetízků příslušících λ_1 , tedy můžeme použít IP.

Takto se můžeme zbavit všech členů, kromě: $a_1^1 \mathbf{v}_1^1 + a_1^2 \mathbf{v}_1^2 + \dots + a_1^r \mathbf{v}_1^r + \dots + a_1^s \mathbf{v}_1^s$. BÚNO shlukneme jednotlivá vlastní čísla. Stejně tak shlukneme vlastní vektory příslušící jednomu vlastnímu číslu, tedy $\mathbf{w}_k = a_1^i \mathbf{v}_1^i + \dots$ jsou vlastní vektory příslušné po dvou různým vlastním číslům (nebo \mathbf{o}). Podle věty výše jsou takové vlastní vektory nezávislé, tedy \mathbf{o} . Tudíž $a_i^j = 0$. □

└

Věta 2.15 (Kritérium existence jordanova kanonického tvaru)

Bud' $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na prostoru dimenze n nad \mathbb{T} . Pak následující je ekvivalentní: 1. pro $f \exists$ Jordanův kanonický tvar a 2. f má $n = \dim \mathbf{V}$ vlastních čísel včetně algebraické násobnosti.

Důsledek

$\mathbb{T} = \mathbb{C}$: Jordanův kanonický tvar vždy existuje (ze základní věty algebry).

3 Invariantní podprostory lineárního operátoru

Definice 3.1 (Invariantní podprostor)

Buď $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na vektorovém prostoru \mathbf{V} nad \mathbb{T} . Pak řekneme, že $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ je invariantním podprostorem operátoru f , pokud $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{W} : f(\mathbf{v}) \in \mathbf{W}$ (jinými slovy $f(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{W}$).

Například (Vždy invariantní podprostory)

$\{\mathbf{o}\}, \mathbf{V}, \text{Ker } f, \Im f, \text{uvlastní vektor} \implies \text{LO } \{\mathbf{u}\}, (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) \text{Jordanův řetízek} \implies \text{LO } \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}.$

┌
Důkaz

└ \implies viz přednáška. (Nebude u zkoušky?) □

Pozorování

$\text{id}_{\mathbf{V}}$, a dokonce $\text{id}_{\mathbf{V}} \cdot \lambda$ mají (\mathbf{V} má při těchto zobrazení) všechny podprostory invariantní.

Tvrzení 3.1

Buď $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor a buďte $\mathbf{U}, \mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ invariantní podprostory f . Pak i $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ jsou invariantní podprostory f .

┌
Důkaz

Pro $\mathbf{U} + \mathbf{W}$: každý vektoru z $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ je tvaru $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Potom $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \in \mathbf{U} + \mathbf{W}$.

└ Pro $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$: Buď $\mathbf{v} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, tj. $\mathbf{v} \in \mathbf{U} \wedge \mathbf{v} \in \mathbf{W} \implies f(\mathbf{v}) \in \mathbf{U}, \mathbf{W}$, tj. $f(\mathbf{v}) \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$. □

Důsledek

LO spojení (konečně mnoha) Jordanových řetízků f je vždy invariantní podprostor f .

Tvrzení 3.2

Buď $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně dimenzionálním VP \mathbf{V} nad \mathbb{T} , buď $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ invariantní podprostor a $g = f|_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$. Pak $p_g(\lambda)$ dělí $p_f(\lambda)$.

Důkaz

Zvolíme bázi $C = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ prostoru \mathbf{W} . C rozšíříme na bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} . Uvažujme $G := [f]_B^B = ([f(\mathbf{v}_1)]_B | \dots | [f(\mathbf{v}_k)]_B | [f(\mathbf{v}_{k+1})]_B | \dots | [f(\mathbf{v}_n)]_B)$. Prvních k vektorů je z $[\mathbf{W}]_B$, tedy G je blokově horní trojúhelníková, přičemž levý horní blok je $A = [g]_C^C$. Tedy $p_f(\lambda) = \det(G - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_k) \cdot \det(F - \lambda I_{n-k}) = p_g(\lambda) \cdot \dots$ (Podle lemma o blokově trojúhelníkové matici. F je pravá dolní matice...) \square

Důsledek

Buď $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, \mathbf{V} konečně generovaný, $n = \dim \mathbf{V}$. $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ invariantní podprostor, $g = f|_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$, $m = \dim \mathbf{W} (\leq n)$. Má-li f n vlastních čísel včetně algebraické násobnosti, pak g má m vlastních čísel včetně algebraické násobnosti.

Důkaz (Stručně)

Ekvivalentně dokazujeme: $p_f(\lambda)$ je součinem lineárních polynomů, tedy $p_g(\lambda)$ musí být také součinem lineárních polynomů (viz Algebra), jelikož dělí $p_f(\lambda)$. \square

Tvrzení 3.3

Buď \mathbf{V} VP a $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ podprostor. Pak jsou-li $f, g : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ takové, že \mathbf{W} je invariantním podprostorem f i g , pak \mathbf{W} je invariantním podprostorem $f + g$. Je-li \mathbf{W} invariantním podprostorem f a $t \in \mathbb{T}$, pak \mathbf{W} je invariantním podprostorem $t \cdot f$.

Důkaz

$(f + g)(\mathbf{w}) = f(\mathbf{w}) + g(\mathbf{w}) \in \mathbf{W}$, tj. \mathbf{W} je invariantním podprostorem $f + g$. Druhá část je analogicky. \square

Důsledek

Buď $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor, $\lambda \in \mathbb{T}$ a $g = f - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbf{V}}$. Pak f a g mají stejnou množinu invariantních podprostorů.

Důkaz (Kritérium existence jordanova kanonického tvaru)

\Leftarrow : (Nebude u zkoušky?) Položme $n = \dim \mathbf{V}$. Následuje indukce podle n : $n = 1$ jasné, $n > 1$: Vezměme $\lambda \in \mathbb{T}$ vlastní číslo f (z předpokladů druhé části věty existuje) a položme $g = f - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}}$. Pak máme podprostory g (tedy i f): $\text{Ker } g$, $\dim \text{Ker } g = k > 0$, $\text{Im } g$, $\dim \text{Im } g = n - k =: m < n$. $h := f|_{\mathbf{W}}$ splňuje předpoklad, tedy podle IP má bázi vzniklou spojením Jordanových řetízků.

Máme tedy řetízky h příslušné nějakému vlastnímu číslu λ , řekněme, že jich je r . Po-

třebujeme doplnit vektory do k . Doplníme je tedy dalšími vlastními vektory. Pak vše jen dáme dohromady a ověříme, že je to báze. \square

4 Cayleyho-Hamiltonova věta

Poznámka

Buď \mathbf{V} VP nad \mathbb{T} a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor. Máme VP $\text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ nad \mathbb{T} , jehož prvky jsou lineární operátory: $f, g \in \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) \implies f + g : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}, \mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$ a $f \in \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V}), t \in \mathbb{T} \implies tf : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}, \mathbf{v} \mapsto t \cdot f(\mathbf{v}), \mathbf{o} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{o}$.

Je-li $g(x) = \sum c_i x^i$ polynom, definujeme operátor $g(f) = \sum c_i \cdot f^i : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}, \mathbf{v} \mapsto \sum c_i f^i(\mathbf{v})$.

Je-li $\dim \mathbf{V} = n$, pak $\dim \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = n^2$. (Zvolíme-li $B(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ bázi \mathbf{V} , dostaneme izomorfismus: $\text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) \rightarrow \mathbb{T}^{n \times n}, f \mapsto [f]_B^B$).

Pozorování

Jsou-li $g(x), h(x)$ polynomy nad \mathbb{T} , $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ operátor a je-li $h(x) = g(x) \cdot r(x)$, pak $h(f) = g(f) \circ r(f)$ a $h(f), g(f), r(f) : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$.

┌

Důkaz

$g(x) = \sum c_i x^i, r(x) = d_j x^j, c_i, d_j \in \mathbb{T}$, potom $h(x) = g(x) \cdot r(x) = \sum_{k=0}^{d+l} (\sum_{i+j=k} c_i d_j) \cdot x^k$. Dosadí se $h(f)$ a $g(f) \cdot r(f)$ a vyjdou stejné operátory. \square

Věta 4.1 (Cayleyho-Hamiltonova)

\mathbb{T} je těleso, \mathbf{V} konečně generovaný VP nad \mathbb{T} a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor. Pak

$$p_f(f) = 0.$$

┌

Důkaz

Budeme požadovat, aby p_f byl součinem lineárních polynomů, tj. $p_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_r - \lambda)^{k_r}$, $k_i \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{T}$ (tj. aby měl f Jordanův kanonický tvar). V případě potřeby budeme pracovat nad rozkladovým tělesem, viz Algebra.

Buď B báze vzniklá spojením Jordanových řetízků, tj. $[f]_B^B = \text{diag}(J_{\lambda_1, k_1}, \dots, J_{\lambda_r, k_r})$, $p_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_r - \lambda)^{k_r}$. Všimněme si, že z mocnění Jordanových buněk plyne, že $(J_{\lambda_i, k_i} - \lambda_i \cdot I_{k_i})^{k_i} = 0_{k_i \times k_i}$, tedy $p_f(J_{\lambda_i, k_i}) = 0_{k_i \times k_i}$. Tedy $[p_f(f)]_B^B = p_f([f]_B^B) = 0_{r \times r}$, jelikož mocnění a násobení blokově diagonální matice odpovídá mocnění a násobení bloků. \square

Poznámka

Dále se pokračovalo vysvětlováním LA v Googlu ;)

5 Unitární diagonalizovatelnost

Definice 5.1

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ čtvercová komplexní matice řádu n . Pak A je unitárně diagonalizovatelná, pokud existuje ortonormální báze B prostoru \mathbb{C}^n taková, že $[f]_B^B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ je diagonální ($\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ jsou vlastní čísla).

Definice 5.2

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ čtvercová reálná matice řádu n . Pak A je ortogonálně diagonalizovatelná, pokud existuje ortonormální báze B prostoru \mathbb{R}^n taková, že $[f]_B^B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ je diagonální ($\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ jsou vlastní čísla).

Definice 5.3

Matice $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jsou unitárně podobné, pokud $\exists U$ unitární matice taková, že $Y = U^* X U (= U^{-1} X U)$.

Definice 5.4

Matice $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou ortogonálně podobné, pokud $\exists U$ ortogonální matice taková, že $Y = U^* X U (= U^{-1} X U)$.

Tvrzení 5.1

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Pak následující je ekvivalentní: 1. A je unitárně diagonalizovatelná. 2. \mathbb{C}^n má ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů A . 3. A je unitárně podobná diagonální matici (v tom případě jsou na diagonále takové diagonální matice vlastní čísla A , včetně násobnosti).

┌ Důkaz

└ Cvičení / opakování. □

Věta 5.2

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Pak NTJE: 1. A je unitárně diagonalizovatelná, 2. Platí současně, že A má n vlastních čísel včetně algebraické násobnosti (pro \mathbb{C} splněno automaticky), geometrická násobnost každého čísla je rovna algebraické a \forall dvojici různých vlastních čísel λ a μ , $\lambda \neq \mu$, platí, že $M_\lambda \perp M_\mu$.

┌ *Důkaz*

$1 \implies 2$: První dvě vlastnosti plynou z dřívější věty o diagonalizovatelnosti. Navíc z této věty víme, že ortonormální báze B z vlastních vektorů A , kterou nám dává předpoklad 1, je tvaru $B = B_1 \dots B_k$, kde B_i je (nutně ortonormální) báze M_{λ_i} , $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechna po 2 různá vlastní čísla A . Navíc $B_i \perp B_j \forall i \neq j$, tj. $M_{\lambda_i} = \text{LO}\{B_i\} \perp \text{LO}\{B_j\} = M_{\lambda_j}$.

$2 \implies 1$: Ať $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechna vlastní čísla A , po 2 různá. Zvolíme $\forall i$ ortonormální bázi B_i podprostoru M_{λ_i} , položíme $B = B_1 \dots B_k \implies B$ je ortonormální báze (je to báze ze zmiňované věty), $[f_A]_B^B$ je diagonální. \square

└

Pozorování

Buď $x \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^n, A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Pak platí $x \cdot (Ay) = (A^*x) \cdot y$. (\cdot je skalární součin.)

┌ *Důkaz*

$$x \cdot Ay = x^*(Ay) = (x^* A^{**})y = (A^*x)^*y = A^*x \cdot y.$$

\square

└

6 Spektrální věty

Definice 6.1 (Normální matice)

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je normální, pokud $A^*A = AA^*$.

Poznámka (Vlastnosti)

A normální, $t \in \mathbb{C} \implies t \cdot A$ normální, A^* normální.

Normální jsou matice: diagonální, Hermitovské, Antihermitovské, Unitární, ...

Tvrzení 6.1

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Pak λ je vlastní číslo $A \Leftrightarrow \bar{\lambda}$ je vlastní číslo A^* .

┌ *Důkaz*

λ je vlastní číslo $A \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$ není invertibilní $\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)^* = A^* - \bar{\lambda} I_n$ není invertibilní $\Leftrightarrow \bar{\lambda}$ je vlastní číslo A^* . \square

└

Tvrzení 6.2

Buď A normální komplexní matice řádu n . Pak

1) $\forall t \in \mathbb{C} : A - t \cdot I_n$ je normální.

2) $\forall U$ unitární: UAU^* je normální.

┌

Důkaz

$$1)(A-t \cdot I_n)^*(A-t \cdot I_n) = (A^* - \bar{t} \cdot I_n)(A-t \cdot I_n) = A^*A - t \cdot A^* - \bar{t} \cdot A + |t|^2 I_n = \dots = (A-t \cdot I_n)(A-t \cdot I_n)^*.$$

$$2)(UAU^*)^*(UAU^*) = (UA^*U^*)(UAU^*) = UA^*U^*UAU^* = UA^*AAU^* = UAA^*U^* = \dots = (UAU^*)(UAU^*)^*.$$

└

□

Tvrzení 6.3

Je-li A normální řádu n , pak $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : \|A \cdot \mathbf{v}\| = \|A^* \mathbf{v}\|$.

┌

Důkaz

$$\|A\mathbf{v}\|^2 = A\mathbf{v} \cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{v})^*(A\mathbf{v}) = \mathbf{v}^* A^* A \mathbf{v} = \mathbf{v}^* A A^* \mathbf{v} = (A^* \mathbf{v})^*(A^* \mathbf{v}) = A^* \mathbf{v} \cdot A^* \mathbf{v} = \|A^* \mathbf{v}\|^2.$$

└

□

Poznámka

$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : \|A \cdot \mathbf{v}\| = \|A^* \mathbf{v}\|$ je ekvivalentní normalitě.

Tvrzení 6.4

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normální, buď $\lambda \in \mathbb{C}$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. Pak

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \Leftrightarrow A^* \mathbf{v} = \bar{\lambda} \mathbf{v}$$

čili množiny vlastních vektorů A a A^* jsou stejné.

┌

Důkaz

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \|(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \|(A - \lambda I_n)^* \mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)^* \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A^* - \bar{\lambda} I_n) \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A^* \mathbf{v} = \bar{\lambda} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

└

□

Věta 6.5 (Spektrální věta pro normální matice)

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Pak A je normální $\Leftrightarrow A$ je unitárně diagonalizovatelná.

┌ *Důkaz*

⇐: Buď tedy $A = UDU^*$, D diagonální. Pak D je normální a A je normální podle tvrzení výše bod 2.

⇒: Důkaz indukcí podle n . $n = 1$: A je diagonální a není co dokazovat. $n > 1$: Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normální a λ vlastní číslo A a $\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_1 \in \mathbb{C}^n$ příslušný vlastní vektor. BÚNO $\|\mathbf{v}_1\| = 1$, můžeme doplnit na ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbb{C}^n . Označme $X = [f_A]_B^B$, tj. X je unitárně podobná A , speciálně normální. X má v prvním sloupci i řádku první prvek λ , jinak 0 (jelikož $\mathbf{v}_1 \cdot A\mathbf{v}_i = A^*\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i = \lambda(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i) = \lambda \cdot 0 = 0$). Tedy na její minor použijeme IP, tj. A je unitárně diagonalizovatelná. □

6.1 Přehled spektrálních vět

Poznámka

V10.13: A normální $\Leftrightarrow A$ unitárně diagonalizovatelná.

V10.15: A Hermitovská $\Leftrightarrow A$ unitárně diagonalizovatelná a vlastní čísla jsou reálná.

Důsl10.16: A symetrická $\Leftrightarrow A$ ortogonálně diagonalizovatelná.

V10.20: A pozitivně definitní $\Leftrightarrow A$ unitárně diagonalizovatelná a vlastní čísla jsou kladná reálná.

V10.20: A pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow A$ unitárně diagonalizovatelná a vlastní čísla jsou nezáporná reálná.

V10.23: A unitární $\Leftrightarrow A$ unitárně diagonalizovatelná a $\forall \lambda$ vlastní číslo platí $|\lambda| = 1$.

Pozorování

Buď $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ libovolná matice, pak $B = A^*A$ je vždy pozitivně semidefinitní.

┌ *Důkaz*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{v}^* B \mathbf{v} = \|A\mathbf{v}\|^2 \geq 0.$$

□

Tvrzení 6.6

*Tvrdí to samé, co předchozí pozorování plus: Každá pozitivně semidefinitní matice $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je tvaru $B = A^*A$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Je-li B pozitivně definitní, je nutně A regulární.*

┌ *Důkaz*

Víme ze spektrálních vět, že $B = UOU^*$, kde U je unitární, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Označíme $\sqrt{D} := \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Pak $B = (U\sqrt{D}^*)(\sqrt{D}U^*) = A^*A$.

Je-li B pozitivně definitní, pak $\lambda_i > 0$. Tj. D , \sqrt{D} jsou regulární, tím pádem je $A = \sqrt{D}U^*$ regulární. \square

Tvrzení 6.7

Ortogonalní operátor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je vždy buď reflexe ($\det[f]_B^B = -1$ pro libovolnou bázi) nebo otočení ($\det[f]_B^B = 1$ pro libovolnou bázi).

┌ *Důkaz*

Je-li f_A ortogonální, je A ortogonální matice (speciálně je A unitární nad \mathbb{C}), tedy $A = U \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \cdot U^*$, U unitární, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Tedy buď $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, potom λ_1, λ_2 mají různá znaménka, pak je to reflexe, když $\lambda_1 = \lambda_2$, pak je to otočení o 0 nebo π .

Nebo $\lambda_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi$ a $\lambda_2 = \cos \varphi - i \sin \varphi$ a vlastní vektory \mathbf{v} a $\mathbf{v}_2 = \bar{\mathbf{v}}$. Vezmeme bázi $B = (\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}}), \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}))$. Tato báze je ortonormální a $[f_A]_B^B$ je matice otočení. \square

Poznámka

V \mathbb{R}^3 máme minimálně 1 reálný kořen, zbytek je jako v předchozím, tedy v \mathbb{R}^3 jsou to zase rotace a reflexe, tentokrát však i rotace s reflexí.

6.2 Singulární rozklad matice nad \mathbb{R} nebo \mathbb{C} (SVD)

Věta 6.8

Komplexní verze: Buď A komplexní matice typu $m \times n$ a hodnosti r . Pak existují ortonormální báze $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbb{C}^n a $C = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ prostoru \mathbb{C}^m a $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ kladná reálná čísla taková, že

$$[f_A]_C^B = (\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) | 0).$$

Reálná verze: Buď A reálná matice typu $m \times n$ a hodnosti r . Pak existují ortonormální báze $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbb{R}^n a $C = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ prostoru \mathbb{R}^m a $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ kladná reálná čísla taková, že

$$[f_A]_C^B = (\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) | 0).$$

Maticové verze: Viz skriptu.

Pozorování

Buď $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ lineární operátor a B ortonormální báze \mathbb{C}^n a C ortonormální báze \mathbb{C}^m . Uvažujme $f_{A^*} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$. Pak $[f_{A^*}]_B^C = ([f_A]_C^B)^*$.

┌
Důkaz

$$A = [f_A]_K^K = [\text{id}]_K^C [f_A]_C^B [\text{id}]_B^K,$$

$$A^* = [f_{A^*}]_K^K = [\text{id}]_K^B [f_{A^*}]_B^C [\text{id}]_C^K.$$

Jelikož jsou báze ortogonální, tak matice přechodu jsou k sobě hermitovsky sdružené:
└ $[f_A]_C^B = U^* A V$, $[f_{A^*}] = V^* A^* U = (U^* A V)^* = [f_A]_C^B$. □

Definice 6.2

Buď $A \in 2C^{m \times n}$. Pak singulárními hodnotami matice A rozumíme druhé odmocniny vlastních čísel matice $A^* A$.

Důkaz (Věty výše)

Označme $\text{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = (\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) | 0)$. Uvažujme vlastní čísla $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \lambda_n$ matice $A^* A$ řádu n . Za bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ zvolíme ortonormální bázi vlastních vektorů $A^* A$, kde \mathbf{v}_i je příslušný λ_i . Tedy $[f_{A^* A}]_B^B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$.

Pro $i \in [r]$ položíme $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. Aby mohl platit závěr věty, musí být $\forall i \in [r] : A \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$. Čili pro $i \in [r]$ položíme $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A \mathbf{v}_i$. Ověříme, že $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ je ortonormální:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \left(\frac{1}{\sigma_i} A \mathbf{v}_i \right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma_j} A \mathbf{v}_j \right) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} (A \mathbf{v}_i \cdot A \mathbf{v}_j) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} ((A^* A) \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} (\lambda_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j).$$

Jelikož B je ortogonální, tak výsledkem tohoto bude nula, pokud $i \neq j$, a $\frac{\lambda_i}{\sigma_i^2} = 1$, pokud $i = j$. Následně doplníme $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ na ortonormální bázi $C = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ prostoru \mathbb{C}^m . Tedy pro $i \leq r : f_A(\mathbf{v}_i) = \sigma_i \mathbf{u}_i$. Pro $i > r : [f_A(\mathbf{v}_i)]_C = 0$. Tedy $[f_A]_C^B = \text{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$. □

Pozorování

Je-li A normální, pak singulární hodnoty jsou $\sigma_i = |\mu_i|$, kde μ_1, \dots, μ_r jsou nenulová vlastní čísla A . Je-li navíc A pozitivně definitní, pak jsou tato všechna vlastní čísla.

6.3 Aplikace SVD

Definice 6.3 (Spektrální norma matice)

Mějme $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $f_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$. Potom

$$\|A\| := \max \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{o}\} \right\} = \max \{ \|A\mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbf{y}\| = 1 \}$$

se nazývá spektrální norma matice.

Tvrzení 6.9

Bud' $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ (nebo $\mathbb{R}^{m \times n}$). Pak $\forall \mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \|A\mathbf{x}\| \leq \sigma_1 \|\mathbf{x}\|$, kde σ_1 je největší singulární hodnota A , rovnost nastane přesně pro vlastní vektory \mathbf{x} matice A^*A příslušné σ_1^2 . Speciálně $\|A\| = \sigma_1$.

┌

Důkaz

Bud' $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, položme $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$, $[f_A]_C^B = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, B, C ortonormální. Pak

$$\|A\mathbf{y}\| = \|[A]C^B \cdot [y]_B\| = \|\sigma_1 y_1 + \dots + \sigma_r y_r\| \leq \|\sigma_1 y_1 + \dots + \sigma_1 y_r\| = \sigma_1 \|\mathbf{y}\|.$$

└

□

7 Bilineární a kvadratické formy

Definice 7.1 (Bilineární forma)

Bud' \mathbf{V} vektorový prostor nad tělesem \mathbb{T} . Bilineární formou na \mathbf{V} rozumíme zobrazení $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$, které splňuje:

$$(BL1) \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V} \forall t \in \mathbb{T} : f(t\mathbf{v}, \mathbf{w}) = t \cdot f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}, t\mathbf{w}),$$

$$(BL2) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V} : f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \wedge f(\mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + f(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

Definice 7.2 (Kvadratická forma)

Bud' \mathbf{V} vektorový prostor nad tělesem \mathbb{T} a $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ bilineární forma. Pak kvadratickou formou na \mathbf{V} vytvořenou bilineární formou f (též příslušnou formě f) rozumíme zobrazení $f_2 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$, $\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}, \mathbf{v})$

7.1 Matice bilineární formy

Definice 7.3

Bud' \mathbf{V} konečně generovaný vektorový prostor nad \mathbb{T} s bází $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Bud' $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ bilineární forma. Bud' $\mathbf{u} = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n$, $\mathbf{w} = y_1 \mathbf{v}_1 + \dots + y_n \mathbf{v}_n$. Potom $f(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ lze vyjádřit maticí $(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i y_j)$. Této matici říkáme matice bilineární formy f vzhledem k bázi B . $([f]_B = (f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j))_{i,j})$.

Tvrzení 7.1

Bud' $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ bilineární forma na konečně generovaném vektorovém prostoru \mathbf{V} nad \mathbb{T} a bud' $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ báze \mathbf{V} . Pak

$$1) \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V} : f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = [\mathbf{u}]_B^T [f]_B [\mathbf{w}]_B,$$

$$2) A \in \mathbb{T}^{n \times n} \wedge \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V} : f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = [\mathbf{u}]_B^T A [\mathbf{w}]_B \implies A = [f]_B.$$

┌
Důkaz

└ Viz přednáška. □

Tvrzení 7.2

\mathbf{V} konečně generovaný VP s bází $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Je-li $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$, $n = \dim \mathbf{V}$, pak zobrazení:

$$f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}, (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \mapsto [\mathbf{u}]_B^T A [\mathbf{w}]_B$$

je bilineární formou a $[f]_B = A$.

┌
Důkaz

└ To, že f je bilineární, plyne z vlastností maticového násobení. □

Poznámka (Terminologie)

Rozepsání bilineární formy na $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$ se nazývá analytické vyjádření f .

Tvrzení 7.3

Buď \mathbf{V} konečně generovaný VP s bázemi B a C . Buď $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ bilineární forma. Potom

$$[f]_C = P^T [f]_B P, \text{ kde } P = [\text{id}]_B^C.$$

┌
Důkaz

Buďte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$. Pak $[\mathbf{x}]_B = [\text{id}]_B^C [\mathbf{x}]_C = P [\mathbf{x}]_C$, $[\mathbf{y}]_B = [\text{id}]_B^C [\mathbf{y}]_C = P [\mathbf{y}]_C$. Odtud

$$(P [\mathbf{x}]_B)^T [f]_B (P [\mathbf{y}]_C) = [\mathbf{x}]_B^T (P^T [f]_B P) [\mathbf{y}]_C = [\mathbf{x}]_B^T [f]_B [\mathbf{y}]_B = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_C^T [f]_C [\mathbf{y}]_C.$$

Jelikož toto platí $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, tak z jednoznačnosti matice f vzhledem k C dostaneme $[f]_C = P^T [f]_B P$. □

7.2 Symetrické a antisymetrické bilineární formy

Definice 7.4

Buď $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ bilineární forma na libovolném VP nad \mathbb{T} . Řekneme, že

- f je symetrická, pokud $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V} : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
- f je antisymetrická, pokud $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V} : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Tvrzení 7.4

Bud' \mathbf{V} konečně generovaný VP s bází B , bud' $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ bilineární forma. Pak 1) f je symetrická $\Leftrightarrow [f]_B$ je symetrická matice, 2) f je antisymetrická $\Leftrightarrow [f]_B$ je antisymetrická matice.

┌ Důkaz

$$1) \Rightarrow : f \text{ symetrická} \Rightarrow [f]_B^T = (f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j))_{n \times n}^T = (f(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i))_{n \times n} = (f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j))_{n \times n} = [f]_B.$$

$$\Leftarrow : [f]_B \text{ symetrická matice} \Rightarrow f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\mathbf{y})_B^T [f]_B [\mathbf{x}]_B = ([\mathbf{y}]_B^T [f]_B [\mathbf{x}]_B)^T = [\mathbf{x}]_B^T [f]_B^T [\mathbf{y}]_B = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

└ 2) analogicky. □

Tvrzení 7.5

Bud' \mathbf{V} vektorový prostor nad tělesem charakteristiky $\neq 2$. Pak každá bilineární forma $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ lze jednoznačně zapsat jako $f = f_s + f_a$, kde $f_s : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ je symetrická a $f_a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ je antisymetrická.

$$\text{Navíc } f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{2} \text{ a } f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{2}.$$

┌ Důkaz

Jednoduše $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V} : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_s(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f_a(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ pro f_s, f_a jako ve znění.

Kdyby $f = f_s + f_a = g_s + g_a$, pak $h := f_s - g_s = g_a - f_a \Rightarrow \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} : h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} : 2h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Rightarrow \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} : h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Tedy $f_s = g_s$, $f_a = g_a$. □

Pozorování

\mathbf{V} konečně generovaný s bází B , $f, g : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ bilineární, $t \in \mathbb{T}$. Pak $[f+g]_B = [f]_B + [g]_B$, $[tf]_B = t[f]_B$.

7.3 Kvadratické formy

Tvrzení 7.6

Bud' \mathbb{T} těleso charakteristiky $\neq 2$. Máme-li bilineární formy $f, g : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$, \mathbf{V} vektorový prostor nad \mathbb{T} , pak $f_2 = g_2 \Leftrightarrow f_s = g_s$. ($f_2, g_2 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$.)

$$\text{Navíc platí } \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V} : f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f_2(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{y})).$$

┌ *Důkaz*

⇐: Předpokládejme, že $f_s = g_s$, kde $f = f_s + f_a$, $g = g_s + g_a$. Pak $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V} : f_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f_a(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = g_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \dots = g_2(\mathbf{x})$, jelikož antisymetrie nám říká, že $f_a(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -f_a(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

⇒ : plyne z toho, že $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f_2(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{y})) &= \frac{1}{2}(f_s(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) - f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f_s(\mathbf{y}, \mathbf{y})) = \\ &= \frac{1}{2}(f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_s(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f_s(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f_s(\mathbf{y}, \mathbf{y})) = \frac{1}{2}(f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_s(\mathbf{y}, \mathbf{x})) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

└

□

Definice 7.5 (f -ortogonální)

Buď \mathbf{V} vektorový prostor nad \mathbb{T} , $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ symetrická bilineární forma. Řekneme, že vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ jsou f -ortogonální, pokud $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ ($= f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$). Značíme $\mathbf{v} \perp_f \mathbf{w}$.

Posloupnost (nebo báze) vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} je f -ortogonální, pokud $\mathbf{v}_i \perp_f \mathbf{v}_j \forall i \neq j$.

Definice 7.6 (Hodnost bilineární formy)

Buď \mathbf{V} konečně generovaný VP, B, C báze, $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ symetrická bilineární forma. Pak $[f]_C = P^T[f]_B P$, kde $P = [\text{id}]_B^C$ je regulární. Tj. $\text{rank}([f]_C) = \text{rank}([f]_B)$. Hodnost f potom definujeme jako hodnost $[f]_B$ vzhledem k libovolné bázi B (značíme $\text{rank } f$).

Hodnost kvadratické formy $g : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ definujeme jako hodnost příslušné symetrické bilineární formy (značíme $\text{rank } g$).

Pokud je $[f]_B$ regulární, pak řekneme, že f je regulární / nedegenerovaná (podobně pro g).

Věta 7.7

Buď \mathbb{T} těleso charakteristiky $\neq 2$. Je-li \mathbf{V} konečně generovaný vektorový prostor a $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ symetrická bilineární forma, pak existuje f -ortogonální báze B (tj. $[f]_B$ je diagonální).

┌ *Důkaz*

Vezmeme nejprve libovolnou bázi C prostoru \mathbf{V} , označíme $A = [f]_C$ (symetrická matice řádu $n = \dim \mathbf{V}$). Najdeme regulární matici G takovou, že $D = GAG^T$ je diagonální, tak, že provedeme něco jako Gaussovu eliminaci se symetrickými úpravami. (Pokud máme prvek v aktuálním levonahoře nenulový, tak ho odečteme od ostatních v řádku / sloupci jsou na diagonále nenulové prvky, tak je prohodíme, jinak něco přičteme.)

└

□

Tvrzení 7.8

Buď A symetrická matice nad tělesem \mathbb{T} charakteristiky $\neq 2$. Předpokládejme, že při Gaussově eliminaci A nemusíme proházovat řádky. Pak \exists dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{T}^{n \times n}$ a diagonální matice $D \in \mathbb{T}^{n \times n}$ taková, že $A = LDL^T$.

┌

Důkaz

Provedeme Gaussovu eliminaci A . Úpravy se vynásobí na dolní trojúhelníkovou matici. Symetrické úpravy pak dají horní trojúhelníkovou a zbude diagonální. \square

└

Pozorování

\mathbb{T} je těleso charakteristiky $\neq 2$, $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}$ symetrická bilineární forma. $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ báze \mathbf{V} nad \mathbb{T} . Předpokládejme, že $[f]_B = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Vezměme $C = (t_1 \mathbf{v}_1, \dots, t_n \mathbf{v}_n)$, kde $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$. Potom $[f]_C = (f(t_i \mathbf{v}_i, t_j \mathbf{v}_j))_{i,j} = (t_i t_j f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j))_{i,j} = \text{diag}(t_1^2 a_1, \dots, t_n^2 a_n)$.

Pozorování

Je-li $\mathbb{T} = \mathbb{C}$, můžeme pro každé $a_i \neq 0$ vzít $t_i \in \mathbb{C} : t_i^2 a_i = 1$. Pro každou symetrickou bilineární formu nad \mathbb{C} na konečně generovaném VP \mathbf{V} existuje báze B prostoru \mathbf{V} taková, že $[f]_B = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

Pozorování

Je-li $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, můžeme pro každé $a_i \neq 0$ vzít $t_i \in \mathbb{R} : t_i = \sqrt{\frac{1}{a_i}}$. Pro každou symetrickou bilineární formu nad \mathbb{R} na konečně generovaném VP \mathbf{V} existuje báze B prostoru \mathbf{V} taková, že $[f]_B = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$.

Věta 7.9 (Zákon setrvačnosti reálných kvadratických forem)

Buď \mathbf{V} konečně dimenzionální reálný VP, $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ symetrická bilineární forma a $C = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ taková báze \mathbf{V} , že $[f]_C = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$ (k, l, m jedniček, mínus jedniček a nul), $C' = (\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_{k'}, \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_{l'}, \mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{m'})$ taková báze \mathbf{V} , že $[f]_{C'} = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$. Pak nutně $k = k', l = l', m = m'$.

┌

Důkaz

Víme $m = m' = \dim \mathbf{V} - \text{rank}(f)$. Buď pro spor $k > k'$ (případ $k < k'$ analogicky). Položme $\mathbf{U} = \text{LO} \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \} \leq \mathbf{V}$, $\mathbf{W} = \text{LO} \{ \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_{l'}, \mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{m'} \}$.

Pozorování: $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} \neq \{\emptyset\}$, totiž $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) > k' + l' + m' - n = 0$. Vezměme tedy $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W} = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_k \mathbf{u}_k = b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_{l'} \mathbf{v}'_{l'} + c_1 \mathbf{w}'_1 + \dots + c_{m'} \mathbf{w}'_{m'}$.

Tudíž $f_2(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_C^T [f]_C [\mathbf{x}]_C = 1 \cdot a_1^2 + \dots + 1 \cdot a_k^2 > 0$ a $f_2(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{C'}^T [f]_{C'} [\mathbf{x}]_{C'} = -1 \cdot b_1^2 + \dots + (-1) \cdot b_{l'}^2 + 0 \cdot c_1^2 + \dots + 0 \cdot c_{m'}^2 \leq 0$. \square

└

Poznámka

$k =: n_+(f)$ je pozitivní index setrvačnosti, $l =: n_f(f)$ je negativní index setrvačnosti a $m =: n_0(f)$ se nazývá nulita f . Dohromady se nazývají signatura $f: (n_0(f), n_+(f), n_-(f))$.

Definice 7.7 (Pozitivně semidefinitní reálné symetrické bilineární (a kvadratické) formy)

\mathbf{V} reálný VP, $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}$ symetrická bilineární forma. Pak řekneme, že f je pozitivně definitní, pokud $\forall 0 \neq \mathbf{x} \in \mathbf{V}: f_2(\mathbf{x}) > 0$. A je pozitivně semidefinitní, pokud $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}: f_2(\mathbf{x}) \geq 0$.

Pozorování

Buď \mathbf{V} konečně generovaný a B jeho báze. Pak f je pozitivně (semi)definitní symetrická bilineární forma $\Leftrightarrow [f]_B$ je pozitivně (semi)definitní matice.

┌ *Důkaz*

Plyne okamžitě z toho, že $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}: f_2(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_B^T [f]_B [\mathbf{x}]_B$. □

Poznámka

Skalární součin je totéž co pozitivně definitní symetrická bilineární forma.

Tvrzení 7.10

Buď \mathbf{V} VP nad \mathbb{R} dimenze n a buď $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ symetrická bilineární forma. Pak f je pozitivně definitní $\Leftrightarrow n_+(f) = n$. Navíc f je pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow n_-(f) = 0$.

┌ *Důkaz*

Najdeme bázi B prostoru \mathbf{V} takovou, že $[f]_B = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$. Vše pak plyne z toho, že pro $[\mathbf{x}]_B = (x_1, \dots, x_n)^T$ platí $f(x) = x_1^2 + \dots + x_{n_+(f)}^2 - x_{n_+(f)+1}^2 - \dots - x_{n_+(f)+n_-(f)}^2 + 0 + \dots + 0$. □

7.4 Charakterizace pozitivně definitních matic

Věta 7.11

Buď A reálná symetrická matice řádu n . Pak NTJE:

1. A je pozitivně definitní.
2. (Sylvestrovo kritérium) $\forall i \in [n]: \det A_i > 0$, kde A_i je prvních i sloupců a řádků A .
3. Gaussova eliminace A proběhne bez prohazování řádků a všechny pivoty jsou kladné.

4. Existuje vyjádření $A = LDL^T$, kde L je dolní Δ s 1 na diagonále a D je diagonální a má kladné prvky na diagonále.

5. (Choleského rozklad) $\exists R$ dolní Δ regulární taková, že $A = RR^T$.

┌

Důkaz

1 \implies 2: Máme-li $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tvaru $\mathbf{o} \neq (x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0)^T$ a označíme-li $\mathbf{y} = (x_1, \dots, x_i)^T \in \mathbb{R}^i$ a je-li A pozitivně definitní, pak $0 < \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T A_i \mathbf{y} \implies A_i$ pozitivně definitní $\forall i$. Podle důsledku o ortogonální diagonalizaci $\exists U_i$ ortogonální : $U_i^T A_i U_i = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_i)$, ale $\det A_i = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_i$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_i > 0$ podle jedné ze spektrálních vět.

2 \implies 3: Předpokládejme, že $\forall i \in [n] : \det A_i > 0$. Dokážeme indukcí podle n : Vynulujeme první sloupec a symetricky první řádek (krom $a_{1,1}$). A bez prvního řádku a sloupce je potom pozitivně definitní (jen jsme změnili bázi).

3 \implies 4: Přesně tvrzení výše.

4 \implies 5: $A = LDL^T$, položíme $R = L\sqrt{D} \implies RR^T = L\sqrt{D}(L\sqrt{D})^T = LDL^T = A$.

5 \implies 1: Bylo $\forall \mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T R R^T \mathbf{x} = R^T \mathbf{x} \cdot R^T \mathbf{x} > 0$. □

└