# Organizační úvod

*Poznámka* (složení předmětu)
Předmět má přednášku, cvičení a proseminář z Matematické analýzy.

*Poznámka* (Motivace)
TODO

*Poznámka* (Jak studovat)
Studujte průběžně, ptejte se…

*Poznámka* (Literatura)

- skripta – viz homepage
- příklady – Koláček & spol. – Příklady z matematické analýzy pro fyziky 1, 2, 3
- další příklady – viz homepage

# Motivace

*Poznámka* (Používá se v)

- Fyzice (viz pohyb planet, např. Proč obíhají planety po elipsách?)
- Ekonomii (viz úroky, např. Lze předpovědět změny úroků v ekonomice a na burze?)
- Meteorologii (např. Jak ovlivňují teplé mořské proudy počasí v Evropě?)
- Lékařství (např. Jak dlouho bude koncentrace léku v krvi na účinné úrovni?)
- Epidemiologie (např. Proč se epidemie šíří nejprve rychle a potom pomalu?)
- Architektura (viz mosty (vibrace), např. Jak se ujistit, že most nespadne v bouři?)
- Inženýrství (viz letadla, např. Jak zkonstruovat nové křídlo pro letadlo? (Většina peněz i času při konstrukci jsou simulace.))

- Informatika (viz MP3, JPEG, např. Jak uchovat informaci o dané funkci v co nejmenším počtu čísel? (Používá se Fourierova transformace = převod funkce na siny a cosiny))

*Poznámka* (Proč se analýzu učíme my?)

- Abychom uměli látku (hledat extrémy funkcí, umět integrovat)
- Měli solidní matematické základy
- Přečíst návod, jak používat nějaké matematické modely (např. Uplatnění v bance – MFF nese mnoho peněz (nejvíce žádané práce jsou práce stylu statistik))
- Myslet, analyzovat, nedělat chyby (nezapomínat na další možnosti)
- Abychom se naučili způsob myšlení – matematici / matematičky dělají činnosti lépe (ze dvou lidí, co ji neumí, je matematik ten, kdo ji zvládne lépe, nikoliv ten druhý.)

# 1 Úvod

Dosti možná spíše opakování střední

## 1.1 Výroky

**Definice 1.1** (Výrok)

Tvrzení, o kterém má smysl říct, že je pravdivé, či ne.

*Například*
„Obloha je modrá.“
„Vídeň je hlavní město ČR.“

*Poznámka* (Vytváření nových výroků)
Děje se pomocí spojek a, nebo, implikací, ekvivalencí, atd.

| $A$ | $B$ | konjunkce $A\&B$ | disjunkce $AvB$ | implikace $A \implies B$ | ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ | negace $A$ $\neg A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1! | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1! | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$A \implies B = A$ je postačující podmínka pro $B = B$ je nutná podmínka pro $A$.

*Například* (Pravdivé výroky)
$1 = 2 \implies 2 = 3$
já jsem papež $\implies$ všechna letadla jsou modrá

*Příklad*

- $$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg B \implies \neg B$$
- $$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg(A \& \neg B))$$
- $$\neg(A \& B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$
- $$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \& \neg B)$$
- $$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \implies B) \& (B \implies A)$$

**Definice 1.2** (Kvantifikátory)

Dále existují tzv. kvantifikátory: Obecný (= pro všechna) $\forall$ a Existenční (= existuje) $\exists$.

*Úmluva*
$\forall x \in \mathbb{N}, x > 10\ A(x)$ značí $\forall x \in \mathbb{N}(x > 10 \implies A(x))$

*Například*

- Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$ je: $\forall x \in M : A(x)$
- Existuje $x \in M$ tak, že platí $A(x)$ je $\exists x \in M : A(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m$

*Například* (Negace výroků)

- $\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$

- $\neg(\exists x \in M : A(x) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$
- $\neg$(Nikdo mě nemá rád.) $\Leftrightarrow$ Existuje alespoň jeden člověk, který mě má rád.
- $\neg(\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \neg(\forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$$

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \neg(\exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$$
$$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n + m)$$

*Pozor*
Na pořadí kvantifikátorů záleží!

*Například*
M…Muži
Ž…Ženy
L(m, ž)…muži m se líbí žena ž

$$\forall m \in M\ \exists \in\ : L(m, )$$

$$\exists \in\ \forall m \in M : L(m, )$$

První je, že pro každého muže existuje nějaká žena, která se mu líbí, naopak druhá říká, že existuje žena, která se líbí všem mužům.

## 1.2 Metody důkazů tvrzení

**Definice 1.3** (Důkaz sporem)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow \neg(A \& \neg B)$$

*Například* ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)
($A : x = \sqrt{2}$, $B : x \notin \mathbb{Q}$)

*Důkaz* (Důkaz sporem:)
Nechť $x = \sqrt{2}$ a $x \in \mathbb{Q}$. $x \in \mathbb{Q} \implies x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$, nesoudělná.
$x^2 = 2$, $2 = x^2 = \frac{p^2}{q^2} \implies 2q^2 = p^2 \implies p = 2k \implies 2q^2 = 4k^2 \implies q^2 = 2k^2 \implies q = 2l$
$p = 2k\ \&\ q = 2l \implies p$ a $q$ soudělná. ↯ $\square$

**Definice 1.4** (Přímý důkaz)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (A \implies C_1 \implies C_2 \implies \ldots \implies C_n \implies B)$$

*Například*

$$n^2\text{liché} \implies n\text{liché}$$

*Důkaz*

$$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k \implies n^2 = p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_k^2$$
$$n^2\text{liché} \implies 2 \nmid p_1 \;\&\; \ldots \;\&\; 2 \nmid p_k \implies n\text{liché}$$

□

**Definice 1.5** (Nepřímý důkaz)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg B \implies \neg A)$$

*Například*

$$n^2\text{liché} \implies n\text{liché}$$

*Důkaz*

$$n\text{sudé} \Leftrightarrow n = 2k \implies n^2 = 4k^2 \implies n^2\text{sudé}$$

□

**Definice 1.6** (Matematická indukce)

$$(\forall n \in \mathbb{N} : V(n)) \Leftrightarrow (V(1) \;\&\; \forall n \in \mathbb{N} : V(n) \implies V(n+1))$$

*Například*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} n \cdot (n+1)$$

*Důkaz*
1. $n = 1$: $1 = \frac{1}{2} 1 \cdot 2$
2.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \implies \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) + (n+1) = \frac{1}{2} (n+1) \cdot (n+2)$$

$\square$

*Příklad*
Všechna auta mají stejnou barvu.

*Důkaz*
1. $n = 1$: Jedno auto má stejnou barvu jako ono samo.
2. $n \to n+1$: vezmu prvních $n$ aut, ty mají stejnou barvu, vezmu posledních $n$ aut, ty mají také stejnou barvu. Tedy dohromady mají stejnou barvu. $\square$

(Spoiler: $n = 2$)

## 1.3 Množina reálných čísel

*Poznámka* (Množiny čísel)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Definice 1.7** (Omezená množina)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Řekněme, že $M$ je omezená shora (omezená zdola), jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ = horní (dolní) závora tak, že pro všechna $x \in M$ platí $x \leq a$ ($x \geq a$).

**Definice 1.8** (Supremum a infimum)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je shora (zdola) omezená. Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazýváme supremem (infimem) $M$, pokud:

$$\forall x \in M : x \leq s (s \geq x)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < s (y > s) \exists x \in M, y < x (x > y)$$

*Například*

- $\sup [0,1] = 1$ (dokázat obě podmínky pro 1 ($x$ z druhé podmínky volím 1)...)
- $\sup(0,1) = 1$ (taktéž dokázat obě podmínky pro 1 (pozor na záporná y) ($x$ z druhé podmínky zvolíme často $\frac{s+y}{2}$))

**Definice 1.9** (Reálná čísla)

Na množině $\mathbb{R}$ je dána relace $\leq$ ($\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), operace sčítání $+$ a operace násobení $\cdot$ a množina $\mathbb{R}$ obsahuje prvky 0 a 1 tak, že platí:

Viz skripta (takové ty tělesové / grupové podmínky, podmínky uspořádání a *existence suprema*)

**Věta 1.1** (o existenci infima)

*Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje* $\inf M$.

*Důkaz*

Označme $-M = \{x \in \mathbb{R} : -x \in M\}$. Zřejmě $M \neq \emptyset$. $M$ je zdola omezená $\implies$ $-M$ je shora omezená. ($\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M x > K \implies \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in -M x < -K$). Z axiomů $\mathbb{R}$ tedy existuje $s = \sup -M$. Položme $i = -s$. Tvrdím $i = \inf M$. (Dokážeme z definice suprema a infima, viz skripta). $\square$

**Věta 1.2** (Archimedova vlastnost)

*Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x < n$*

*Důkaz* (Sporem)

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} x \geq n$$

Tedy $\mathbb{N}$ je omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Tedy existuje $x' \in \mathbb{R}, x' = \sup \mathbb{N}$. Tedy $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq x'$. Pak také $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 \leq x'$. To ale tvrdí, že $x' - 1$ je také $\sup \mathbb{N}$. To je ale spor, protože můžeme zvolit $y = x' - \frac{1}{2}$, pak $y < x'$, tedy z druhé vlastnosti suprema $\exists n \in \mathbb{N} : x' - \frac{1}{2} < n$, ale zároveň už víme, že $\forall n \in \mathbb{N} : n < x' - 1$. $\square$

**Věta 1.3** (Hustota $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

*Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Pak existují $q \in \mathbb{Q}$ a $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tak, že $q \in (a, b)$ a $r \in (a, b)$.*

*Důkaz*
Podle $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{b-a} < n$, tedy $\frac{1}{n} < b - a$. Zvolme $q = \frac{\lceil an \rceil + 1}{n}$, pak jistě $a < q < b$ a $q \in \mathbb{Q}$.

Poté použijeme $q_1 \in (a, b)$ a $q_2 \in (q_1, b)$. Zvolme $r = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}}$. Pak (jelikož druhá část je kladná) $r > q_1$. A $r < q_2 \Leftrightarrow q_1 + \frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}} < q_2 \Leftrightarrow \frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}} < q_2 - q_1$.

Tedy $r \in (a, b)$ a $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, jelikož $r = q_1 + \frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}} = p \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{2} = \frac{q_2-q_1}{p-q_1}$, ale levá strana je jistě iracionální a pravá racionální. Spor. □

**Věta 1.4** (O $n$-té odmocnině (BD = bez důkazu))

*Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, \infty)$, pak existuje právě jedno $y \in [0, \infty)$ tak, že $y^n = x$.*

*Důkaz*
Idea: Položme $M = \{z \in \mathbb{R}\}$. Ukážeme, že $M \neq \emptyset$ shora omezená $\implies \exists s = \sup M$. Nyní ukážeme $s^n = x$. □

## 1.4 Krátký výlet do nekonečna

**Definice 1.10** (Mohutnost množin)

Řekněme, že množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ mají stejnou mohutnost, pokud existuje bijekce $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$. Značíme $\mathbb{A} \approx \mathbb{B}$.

Řekněme, že množina $\mathbb{A}$ má mohutnost menší, nebo rovnu mohutnosti $\mathbb{B}$, pokud existuje prosté zobrazení $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$. Značíme $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$.

Řekněme, že množina $\mathbb{A}$ má menší mohutnost než $\mathbb{B}$, pokud $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, ale neplatí $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$. Značíme $\mathbb{A} \prec \mathbb{B}$.

*Například*
1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$ (prosté z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}$ je triviální, opačně si očísluji $\mathbb{Z}$)
2) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$: $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ (obdobně, čísluji diagonálně)
3) $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$: $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ (důkaz sporem, přes diagonálu, vezmu první desetinou cifru z $f(1)$, druhou z $f(2)$… a pozměním je…)

**Tvrzení 1.5** (Viz proseminář)

$\mathbb{A} \preceq \mathbb{B} \land \mathbb{B} \preceq \mathbb{A} \implies \mathbb{A} \approx \mathbb{B}$

**Definice 1.11**

Řekněme, že množina $\mathbb{A}$ je konečná, má-li konečný počet prvků.

Řekněme, že $\mathbb{A}$ je spočetná, jestliže $\mathbb{A} \approx \mathbb{N}$, nebo je $\mathbb{A}$ konečná.

Řekněme, že $\mathbb{A}$ je nespočetná, jestliže $\mathbb{N} \prec \mathbb{A}$.

**Tvrzení 1.6** (Cantor)

*Nechť $X$ je množina, pak $X \prec \mathcal{P}(X)$, kde @$P(X)$ je množina všech podmnožin $X$.*

*Důkaz*
Zobrazení $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$ definované $\varphi(x) = \{x\}$ je prosté.

Tvrdím, že neplatí, že $X \approx \mathcal{P}(X)$. Důkaz sporem: Nechť existuje bijekce $\varphi : X \to \mathrm{P}(X)$. Označme $A = \{x \in X : x \notin \varphi(x)\}$. $\varphi$ je bijekce $\implies \exists a \in X : \varphi(a) = A$.

Nyní buď a) $a \in A \implies a \notin \varphi(a) = A$ nebo b) $a \notin A \implies a \in \varphi(a) = A$ . □

*Poznámka* („Nebrali jsme“ Hypotéza kontinua)
Otázka: Existuje $A \subset \mathbb{R}$, že $\mathbb{N} \prec A$ a $A \prec \mathbb{R}$?

Odpověď: Může a nemusí. (Hypotéza kontinua je ze standardních axiomů teorie množin tzv. nerozhodnutelná.)

**Tvrzení 1.7**

*Nechť $A_n, n \in \mathbb{N}$, jsou spočetné množiny, pak:*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

*je spočetná.*

*Důkaz*
Napíšu si množiny $A_i$ do matice a očísluji po diagonálách. Tím získám $\mathbb{N} \succeq A$. □

# 2 Posloupnost

## 2.1 Úvod

**Definice 2.1**

Jestliže ke každému $n \in \mathbb{N}$ je přiřazeno $a_n \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ je posloupnost reálných čísel.

*Například*

- $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$
- $\{2^n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, 8, \ldots\}$
- $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ (rekurentně zadaná posloupnost)

### Definice 2.2

Řekněme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je:

- neklesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- nerostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- klesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- rostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$

*Například*
$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je klesající a nerostoucí
$\{2^n\}$ je rostoucí a neklesající

### Definice 2.3

Řekněme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, jestliže množina členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Analogicky definujeme omezenost shora a omezenost zdola.

*Například*
$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je omezená
$\{2^n\}$ je pouze omezená zdola

## 2.2 Vlastní limita posloupnosti

### Definice 2.4 (Limita)

Nechť $A \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Řekněme, že $A$ je (vlastní) limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon$$

Značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

*Například*
Ve videu, při pochopení limity nejsou moc zajímavé.

*Příklad* ($\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$)

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \Leftrightarrow n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} + \ldots \geq 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} a_n^2$$

$$\frac{2(n-1)}{n \cdot (n-1)} \geq a_n^2 \implies \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \geq a_n \geq 0$$

**Věta 2.1** (Jednoznačnost vlastní limity (2.1))

*Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

*Důkaz* (Sporem)
Nechť tedy existuje více limit. Dvě z nich označme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = B$, $A > B$. Zvolme $\varepsilon = \frac{A-B}{3}$. Z definice limity k našemu $\varepsilon$ existují $n_A, n_B \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_A |a_n - A| < \varepsilon$ a $\forall n \geq n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Z trojúhelníkové nerovnosti[a] $|A - B| = |(A - a_{n_0}) + (a_{n_0} - B)| \leq |A - a_{n_0}| + |a_{n_0} - B| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}(A - B)$. □

[a] $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$

**Věta 2.2** (O omezenosti konvergentní posloupnosti)

*Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu. Pak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená.*

*Důkaz*
Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = 1$. K tomuto $\varepsilon = 1 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) = (A - 1, A + 1)$. Množina $\{a_n | n = 1, 2, \ldots, n_0\}$ je konečná, tedy omezená. Položme $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |A| + 1\}$. Potom jistě $\forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq K$ (protože $\forall n \leq n_0 |a_n| \leq \max\{|a_i|; i \leq n_0\}$ a $\forall n > n_0 a_n \in (A - 1, A + 1) \implies |a_n| \leq |A| + 1 \leq K$). □

*Příklad*

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \implies \exists n_0 \forall n > n_0 a_n \text{ je monotónní}$$

**Definice 2.5** (Vybraná podposloupnost)

Řekněme, že posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $b_n = a_{k_n}$

**Věta 2.3** (o limitě vybrané podposloupnosti)

*Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a nechť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak $\lim_{n\to\infty} b_n = A$*

*Důkaz*
K $\varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$. Chceme dokázat $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

K $\varepsilon > 0$ zvolme $k_0$, kde $n_0$ je z definice $\lim_{n\to\infty} a_n$. Nechť $k \geq k_0$, pak $n_k \geq k \geq k_0 \geq n_0$. Tedy $|b_k - A| = |a_{n_k} - A| < \varepsilon$ □

**Věta 2.4** (Aritmetika limit)

*Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$. *Pak platí:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = A \cdot B$$
$$\forall b_n \neq 0 \land B \neq 0 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

*Důkaz*
Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = A \exists n_A \in \mathbb{N} \forall n > n_A |a_n - A| < \varepsilon$, z $\lim_{n\to\infty} b_n = B \exists n_B \in \mathbb{N} \forall n > n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí $|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. (A tady se použije lemmátko, které jsem ani nepsal a které je o tom, že $\varepsilon$ můžeme na konci definice limity vynásobit libovolnou konstantou.)

$\exists \lim_{n\to\infty} b_n = B \overset{V2.2}{\implies}$ b je omezená, tedy $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |b_n| \leq K$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = A \exists n_A \in \mathbb{N} \forall n > n_A |a_n - A| < \varepsilon$, z $\lim_{n\to\infty} b_n = B \exists n_B \in \mathbb{N} \forall n > n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max n_A, n_B$. Pak $\forall n > n_0$ platí $|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - b_n A + b_n A - AB| \leq |a_n b_n - b_n A| + |b_n A - AB| \leq |a_n - A||b_n| + |b_n - B||A| \leq \varepsilon \cdot K + \varepsilon \cdot |A| = \varepsilon \cdot (K + |A|)$.

K $\varepsilon_1 = \frac{|B|}{2}$ z $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = B \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n > n_A |a_n - A| < \varepsilon_1 = \frac{|B|}{2} \implies |b_n| > \frac{|B|}{2}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = A \exists n_A \in \mathbb{N} \forall n > n_A |a_n - A| < \varepsilon$, z $\lim_{n\to\infty} b_n = B \exists n_B \in \mathbb{N} \forall n > n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max n_A, n_B, n_1$. Pak $\forall n > n_0$ platí $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}| = \frac{|a_n B - AB + AB - b_n A|}{|b_n| \cdot |B|} \leq \frac{|a_n B - AB|}{|b_n| \cdot |B|} + \frac{|A - B - b_n A|}{|b_n| - |B|} = \frac{|a_n - A| \cdot |B|}{|b_n| \cdot |B|} + \frac{|A| \cdot |B - b_n|}{|b_n| \cdot |B|} < \varepsilon \cdot (\frac{2}{|B|} + \frac{|A|}{|B|} \cdot \frac{2}{|B|})$. □

**Věta 2.5** (Limita a uspořádání)

*Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

*Jestliže* $A < B$, *pak existuje* $n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n < b_n$.

*Jestliže* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že* $\forall n > n_0$ *platí* $a_n \geq b_n$, *pak* $A \geq B$

*Důkaz*
Položme $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$. Z existence limit vyplývá $\exists n_A \forall n \geq n_A |a_n - A| < \varepsilon \implies a_n < A + \varepsilon = A + \frac{B-A}{2} = \frac{B+A}{2}$ a $\exists n_B \forall n \geq n_B |b_n - B| < \varepsilon \implies b_n > B - \varepsilon = B - \frac{B-A}{2} = \frac{B+A}{2}$. Zvolme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí $b_n > \frac{A+B}{2} > a_n$.

Sporem. Nechť $A < B$. Pak podle předchozí části $\exists n_1 \forall n > n_1 a_n < b_n$. Zároveň z předpokladu $\forall n \geq n_0 a_n \geq b_n$. Pak pro libovolné $n \geq n_1$ a $n \geq n_0$ platí $(a_n < b_n) \wedge (b_n < a_n)$ □

**Věta 2.6** (O dvou strážnících)

*Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti splňující* $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$ *a* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \in \mathbb{R}$.

*Pak* $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

*Důkaz*
Nechť $\varepsilon$ je kladné. Potom $\exists n_A \forall n \geq n_A |a_n - A| < \varepsilon$ a $\exists n_B \forall n \geq n_B |b_n - A| < \varepsilon$, tedy zvolme $n_C = \max\{n_A, n_B\}$, tudíž $\forall n \geq n_C c_n \in (a_n, b_n) \subseteq (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. □

**Věta 2.7** (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)

*Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a* $\{b_n\}$ *je omezená. Pak* $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

*Důkaz*
Posloupnost $\{b_n\}$ je omezená $\implies \exists K > 0 \forall n \in \mathbb{N} |b_n| \leq K$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ k zadanému $\varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |a_0 - 0| < \varepsilon$. K tomuto $\varepsilon > 0$ volme stejné $n_0$, pak $\forall n \geq n_0 |a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| \leq |a_n| \cdot |b_n| \leq \varepsilon \cdot K$ □

*Například*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

## 2.3 Nevlastní limita posloupnosti

**Definice 2.6** (Nevlastní limita)

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, má (nevlastní) limitu $+\infty$ (respektive $-\infty$), pokud

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K$$

(

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n < K$$

)

*Například*

$$\lim_{n \to \infty} n = +\infty$$

**Tvrzení 2.8**

*Věty: jednoznačnost limity (2.1), limita vybrané posloupnosti (2.3), limita a uspořádání (2.5), o dvou strážnících (2.6, stačí jeden z nich).*

*Důkaz*
Analogicky □

**Definice 2.7** (Rozšířená reálná osa)

Rozšířená reálná osa je množina $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. S následujícími vlastnostmi:

- Uspořádání: $\forall a \in \mathbb{R} : -\infty < a < +\infty$
- Absolutní hodnota: $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$
- Sčítání: $\forall a \in \mathbb{R}* \setminus \{-\infty\} : +\infty + a = +\infty$
  $\forall a \in \mathbb{R}* \setminus \{+\infty\} : -\infty + a = -\infty$
- Násobení: $\forall a \in \mathbb{R}* \, a > 0 : a(\pm\infty) = \pm\infty$
  $\forall a \in \mathbb{R}* \, a < 0 : a(\pm\infty) = \mp\infty$
- Dělení: $\forall a \in \mathbb{R} : \frac{a}{\pm\infty} = 0$.
- Výrazy $-\infty + \infty, 0(\pm\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{\text{cokoliv}}{0}$ nejsou definovány (z dobrého důvodu!).

*Poznámka* (Rozšířená definice suprema a infima)
Je-li $\mathbb{A} \neq \emptyset$ shora neomezená, pak definujeme $\sup \mathbb{A} = +\infty$.

Je-li $\mathbb{A} \neq \emptyset$ zdola neomezená, pak definujeme $\inf \mathbb{A} = -\infty$.

$\sup \emptyset = -\infty, \inf \emptyset = +\infty$

**Věta 2.9** (Aritmetika limit podruhé (L2.4))

*Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}*$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}*$. *Pak platí:*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován.*
2. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$, *pokud je výraz* $A \cdot B$ *definován.*
3. *Pokud* $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *a* $B \neq 0$, *pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, *pokud je výraz* $\frac{A}{B}$ *definován.*

*Důkaz* (Část)
1. $A, B \in \mathbb{R}$ víme. $A = +\infty, B \in \mathbb{R}$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ libovolně. Z toho, že $\lim_{n\to\infty} = B \in \mathbb{R}$ k $\varepsilon = 1 \exists n_1 \forall n \geq n_1 |b_n - B| < 1 \implies b_n > B - 1$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ plyne, že k $K' = K - B + 1 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n > K' = K - B + 1$. Pak $\forall n \geq n_0' = \max\{n_0, n_1\}$ : $a_n + b_n > K - B + 1 + B - 1 = K$. $\square$

**Věta 2.10** (Limita typu $\frac{A}{0}$)

*Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}*, A > 0$*,* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a* $\exists n_0 \forall n \geq n_0$ *platí* $b_n > 0$*. Pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

*Důkaz*
Zvolme $K \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \left\langle \begin{array}{l} A = +\infty : \exists n_1 \forall n \geq n_1 a_n > 1 \\ A \in \mathbb{R} : \varepsilon = \frac{A}{2} \exists n_1 \forall n \geq n_1 |a_n - A| < \varepsilon = \frac{A}{2} \implies a_n > \frac{A}{2} \end{array} \right.$$

Tedy položme $\tilde{A} = \min\left\{1, \frac{A}{2}\right\}$. Pak $\forall n \geq n_1 : a_n > \tilde{A}$. Z $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ k $\varepsilon = \frac{\tilde{A}}{K} \exists n_2 \forall n \geq n_2 |b_n - 0| < \frac{\tilde{A}}{K} \implies 0 < b_n < \frac{\tilde{A}}{K}$.

Položme $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ pak

$$\forall n \geq n_3 \frac{a_n}{b_n} > \tilde{A} \cdot \frac{K}{\tilde{A}} = K$$

$\square$

## 2.4 Hlubší věty o limitách

**Věta 2.11** (O limitě monotónní posloupnosti (L2.9))

*Každá monotónní posloupnost má limitu.*

*Důkaz*
BÚNO $a_n$ je neklesající. Označme $A = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\}$.

1. $A = +\infty$. Nechť $K \in \mathbb{R}$, $\sup\{a_n\} = +\infty \implies a_n$ není shora omezená $\implies \exists n_0 a_{n_0} > K$. $a_n$ je neklesající $\implies \forall n \geq n_0 a_n \geq a_{n_0} > K$. To je ale definice $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

2. $A \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0 A - \varepsilon < A$. Z definice suprema musí existovat $n_0 : a_{n_0} > A - \varepsilon$. Jelikož $a_n$ je neklesající, je $\forall n \geq n_0 a_n \geq a_{n_0} > A - \varepsilon$. Z definice suprema $a_n \leq A < A + \varepsilon$, tedy $\forall n \geq n_0 |a_n - A| < \varepsilon$. $\square$

*Poznámka*
Monotónní posloupnost: neklesající (shora omezená = vlastní limita, shora neomezená = limita $+\infty$), nerostoucí (sdola omezená = vlastní limita, sdola neomezená = limita $-\infty$).

*Příklad*

$$a_1 = 10, a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$$

*Řešení*
Napíšu prvních pár členů a tipneme, že je klesající a $a_n \geq 5$. Pak vše dokážeme. A použijeme aritmetiku limit.

*Pozor*
V předchozím příkladu je použití věty 2.9 nutné!.

**Věta 2.12** (Cantorův princip vložených intervalů)

*Nechť* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost uzavřených intervalů splňující* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$. *Pak je množina* $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ *jednobodová.*

*Důkaz*
Z první podmínky na interval vidíme $a_{n+1} \geq a_n$ a $b_{n+1} \leq b_n$. Navíc $a_n$ je shora omezená $b_1$ a $b_n$ je sdola omezená $a_1$. Podle $V2.9 \exists \lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

$$0 = \lim_{n\to\infty} b_n - a_n \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = B - A \implies A = B$$

Tedy $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{A\}$. $\square$

**Věta 2.13** (Bolzano-Weirstrass)

*Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

*Důkaz* (Tzv. půlením intervalu)
$\{a_n\}$ je omezená, tedy $\exists c_1, d_1 \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} c_1 \leq a_n \leq d_1$. Zvolme $a_{n_1} \in [c_1, d_1\}$ libovolně. Rozdělme $[c_1, d_1]$ na $\left[c_1, \frac{c_1+d_1}{2}\right]$ a $\left[\frac{c_1+d_1}{2}, d_1\right]$. V alespoň jednom tomto intervalu je $\infty$ mnoho $a_n$. Pokud $\#\left\{n : a_n \in \left[c_1, \frac{c_1+d_1}{2}\right]\right\} = +\infty$, položme $c_2 = c_1, d_2 = \frac{c_1+d_1}{2}$. Jinak $\#\left\{n : a_n \in \left[\frac{c_1+d_1}{2}, d_1\right]\right\} = +\infty$, položme $c_2 = \frac{c_1+d_1}{2}, d_2 = d_1$. Nalezneme $n_2 > n_1$ a $a_{n_2} \in [c_2, d_2]$. Dále pokračujeme indukcí.

Nechť $\#\{n : a_n \in [c_k, d_k]\} = +\infty$. Rozdělme $[c_k, d_k]$ na $\left[c_k, \frac{c_k+d_k}{2}\right]$ a $\left[\frac{c_k+d_k}{2}, d_k\right]$. V alespoň jednom tomto intervalu je $\infty$ mnoho $a_n$. Pokud $\#\left\{n : a_n \in \left[c_k, \frac{c_k+d_k}{2}\right]\right\} = +\infty$, položme $c_{k+1} = c_k, d_{k+1} = \frac{c_k+d_k}{2}$. Jinak $\#\left\{n : a_n \in \left[\frac{c_k+d_k}{2}, d_k\right]\right\} = +\infty$, položme $c_{k+1} = \frac{c_k+d_k}{2}, d_{k+1} = d_k$. Nalezneme $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}]$.

Nyní máme posloupnost intervalů $[c_k, d_k]$ a $a_{n_k} \in [c_k, d_k]$. Víme, že $[c_{k+1}, d_{k+1}] \subset [c_k, d_k]$ a $d_{k+1} - c_{k+1} = \frac{d_k - c_k}{2} = \frac{d_1 - c_1}{2^k}$, tedy $\lim_{k\to\infty} d_k - c_k = 0$.

Podle V2.10 $\exists A = \bigcap_{k=1}^{\infty} [c_k, d_k]$ a $\lim_{k\to\infty} c_k = A = \lim_{k\to\infty} d_k$. Nyní $n_k$ je rostoucí posloupnost, tedy $a_{n_k}$ je vybraná podposloupnost z $\{a_n\}$. Víme, že $a_{n_k} \in [c_k, d_k] \Leftrightarrow c_k \leq a_{n_k} \leq d_k$ a podle Věty o dvou strážnících je $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A \in \mathbb{R}$. □

## **Definice 2.8** (Limes superior)

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a označme $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ a $c_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$. (Pak $b_n$ je nerostoucí a $c_n$ je neklesající.)

Je-li $\{a_n\}$ shora neomezená, pak klademe $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Je-li $\{a_n\}$ sdola neomezená, pak klademe $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

Číslo $\lim_{n\to\infty} b_n$ nazýváme limes superior posloupnosti $\{a_n\}$ a značíme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Číslo $\lim_{n\to\infty} c_n$ nazýváme limes inferior posloupnosti $\{a_n\}$ a značíme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

*Důkaz*
Existence limit je zaručena V 2.9 (o limitě monotónní posloupnosti). □

*Poznámka*
Zřejmě $\forall c_n \leq a_n \leq b_n$.

*Například*

$$\limsup_{n\to\infty} (-1)^n = 1$$

$$\liminf_{n\to\infty} (-1)^n = -1$$

## **Věta 2.14** (Vztah limity, limes superior a limes inferior (T2.12))

*Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}*$. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = A.$$

*Důkaz*

Důkaz jen pro $A \in \mathbb{R}$. Jinak by byl podobný.

$\implies$ $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, tedy posloupnost je omezená dle věty 2.2. Můžeme tedy definovat $b_n$ a $c_n \in \mathbb{R}$. Posloupnosti $b_n$ a $c_n$ jsou monotónní a platí $c_n \leq b_n$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z definice $\lim_{n\to\infty} a_n \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |a_n - A| < \varepsilon$, tj. $\forall n_0 b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} \leq A + \varepsilon$ a $\forall n_0 c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} \geq A - \varepsilon$.

Podle V 2.5 o limitě a uspořádání $\lim_{n\to\infty} c_n \in [A-\varepsilon, A+\varepsilon]$, $\lim_{n\to\infty} b_n \in [A-\varepsilon, A+\varepsilon]$, pro libovolné $\varepsilon$.

$\impliedby$ Podle definice $b_n$ a $c_n$ je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená, tedy můžeme definovat $b_n$ a $c_n$. Z poznámky víme, že $c_n \leq a_n \leq b_n$ a podle věty o dvou strážnících tedy $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A$. □

*Příklad*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

## **Definice 2.9** (Hromadná hodnota)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}*$. Řekněme, že $A$ je hromadná hodnota posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\})$.

*Například*

$H(\{(-1)^n\} = \{0, 1\})$

## **Věta 2.15** (O hromadných hodnotách posloupnosti)

*Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, potom $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$ jsou hromadnými hodnotami posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a pro každou hromadnou hodnotu $A \in \mathbb{R}*$ této posloupnosti platí $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq A \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.*

*Důkaz*
Opět pouze pro $\limsup_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Pak $a_n$ je shora omezená. Označme $b_n$ jako vždy, $b_n$ je nerostoucí a $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

Z $\lim_{n\to\infty} b_n = A$ $\varepsilon = 1 \exists m_1$ tak, že $|b_{m_1} - A| < 1$. Nyní z $b_{m_1} = \sup\{a_{m_1}, a_{m_1+1}, \dots\}$ existuje $n_1 \geq m_1$ tak, že $b_{m_1} - 1 < a_{n_1} \leq b_{m_1} \implies |a_{n_1} - b_{m_1}| < 1 \implies |a_{n_1} - A| \leq |a_{n_1} - b_{n_1}| + |b_{m_1} - A| < 2$. Dále indukcí.

Mějme $m_1, \dots, m_k$ a $n_1, \dots, n_k$. Z $\lim_{n\to\infty} b_n = A, \varepsilon = \frac{1}{k+1} \exists m_k > n_k |b_{m_k} - A| < \frac{1}{n+1}$. Z $b_{m_{k+1}} = \sup\left\{a_{m_{k+1}}, \dots\right\} \exists n_{k+1} \geq m_{k+1}$ tak, že $b_{m_{k+1}} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} \leq b_{m_{k+1}} \implies |a_{n_{k+1} - b_{m_{k+1}}}| < \frac{1}{k+1} \implies |a_{n_{k+1}} - A| \leq |a_{n_{k+1}} - b_{m_{k+1}}| + |b_{m_{k+1}} - A| < \frac{2}{k+1}$.

Tedy jsme dostali rostoucí posloupnost $n_k$ tak že $|a_{n_k} - A| < \frac{2}{k} \implies \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Tedy $\limsup_{n\to\infty} a_n = A \in H(\{a_n\})$.

Úplně stejně pro $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Stačí dokázat $\forall A \in H(\{a_n\})$ $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq A \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$. Nechť $n_k$ je rostoucí posloupnost taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Z poznámky víme $c_{n_k} \leq a_{n_k} \leq b_{n_k}$, tedy podle V2.5 $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

$\square$

*Důsledek*
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Pak

- $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$,
- $\liminf_{n\to\infty} a_n = \min H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}), \limsup_{n\to\infty} a_n = \max H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$,
- Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, pak $H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{A\}$.

**Věta 2.16** (Bolzano-Cauchyova podmínka (T2.14))

*Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku, tedy*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

*Důkaz*

$\implies$ : Z $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ vyplývá $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| \leq |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Opačná implikace: Nechť $\{a_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$. Toto použiji pro $m = n_0$ a dostanu $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$. Tedy $a_n$ je omezená posloupnost a definujeme $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ a $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$. Z definice $b_n$ a $c_n$ dostaneme $\forall n > n_0 : a_{n_0} - \varepsilon \leq c_n \leq b_n \leq a_{n_0} + \varepsilon$. Tedy podle věty o uspořádání a ..., $a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon$.

Odtud $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n - \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq 2\varepsilon$. Toto platí $\forall \varepsilon > 0$, tedy $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Podle V2.12 $\exists \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. $\square$

*Poznámka* (Organizační věci ke zkoušce)
Písemná část (příklady, stačí udělat jednou i na více pokusů, 50b, minimum 25, libovolná literatura, žádná elektronika) $\to$ ústní část (teoretická, 40b (+10 pro jedničkáře), minimum 25b, lze se na ni dostat nejenom s úspěšnou písemnou částí, ale i s 3 neúspěšnými písemnými částmi).

3 pokusy. (Jeden termín i v září.) Nezapomenout si s sebou doklad totožnosti.

RADA 1 (písemná): Začněte příklady 1 (limita posloupnosti 10b), 2 (limita funkce 10b), 3 (průběh funkce 20b), až potom udělat 4 (teoretický příklad, 10b).

Ústní část = klíčový pojem (0b), 3 definice nebo znění vět ($3 \times 4$b = 12b), LV+důkaz (4+8b = 12b), TV+důkaz(4+12 = 16b). Nemá časový limit.

RADA 2 (ústní): Musím umět důkazy? ANO! Stačí lehké? ANO!

$<$ 50b :(, $[50, 59)$ (3), $\geq$ 60b (bonusová otázka 10b): $\geq$ 70b (2), $\geq$ 85b (1).

# 3 Funkce jedné reálné proměnné - limita a spojitost

## 3.1 Základní definice

**Definice 3.1** (Funkce jedné reálné proměnné)

Funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subseteq \mathbb{R}$.

**Definice 3.2** (Sudá, lichá a periodická funkce)

Řekněme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$ je sudá, jestliže $\forall x \in M : (-x \in M) \wedge (f(x) = f(-x))$, je lichá, jestliže $\forall x \in M : (-x \in M) \wedge (f(x) = -f(-x))$, je periodická, jestliže $\exists p > 0, \forall x \in M : (x + p \in M) \wedge (f(x) = f(x + p))$.

**Definice 3.3** (Funkce omezená, omezená shora, omezená zdola)

Řekněme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, je omezená (omezená shora, omezená zdola), jestliže $f(M)$ je omezená (omezená shora, omezená zdola).

**Definice 3.4** (Prstencové okolí bodu, okolí bodu (+ levé a pravé))

Nechť $\delta > 0$ a $a \in \mathbb{R}$. Prstencové okolí bodu $\mathrm{P}(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, $\mathrm{P}(+\infty, \delta) = \left(\frac{1}{\delta}, +\infty\right)$, $\mathrm{P}(-\infty, \delta) = \left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right)$.

Pravé a levé prstencové okolí bodu $a$ je $\mathrm{P}_+(a, \delta) = (a, a + \delta), \mathrm{P}_-(a, \delta) = (a - \delta, a)$.

Okolí bodu $\mathrm{B}(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$, $\mathrm{B}(+\infty, \delta) = \left(\frac{1}{\delta}, +\infty\right)$, $\mathrm{B}(-\infty, \delta) = \left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right)$.

Pravé a levé okolí bodu $a$ je $\mathrm{B}_+(a, \delta) = [a, a + \delta)\,, \mathrm{B}_-(a, \delta) = (a - \delta, a]$.

**Definice 3.5** (Limita funkce)

Nechť $f : M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že $f$ má v bodě $a \in \mathbb{R}*$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathrm{P}(a, \delta) : f(x) \in \mathrm{B}(A, \varepsilon),$$

značíme $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

*Poznámka*

Pro reálné $a$ lze zapsat definici podobně jako limitu posloupnosti.

Definici lze také zapsat jako $\lim_{x \to a} f(x) = A \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(\mathrm{P}(a, \delta)) \subseteq \mathrm{B}(A, \varepsilon)$.

**Definice 3.6** (Limita zprava / zleva)

Nechť $f : M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že $f$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu zprava (zleva) rovnou $A \in \mathbb{R}*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in \mathrm{P}_{+(-)} : f(x) \in B(A, \varepsilon),$$

značíme $\lim_{x \to a_{+(-)}} f(x) = A$.

*Poznámka*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = A \wedge \lim_{x \to a-} f(x) = A$$

**Definice 3.7** (Spojitost v bodě (+ zprava a zleva))

Nechť $f : M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}, a \in M$. Řekneme, že $f$ je v bodě $a \in \mathbb{R}$ spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva), jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \left( \lim_{x \to a+} f(x) = f(a), \lim_{x \to a-} f(x) = f(a) \right)$$

*Například*
$f(x) = x$ je spojitá. Dirichletova funkce ($\mathrm{D}(x)$ je 1 pro $x \in \mathbb{Q}$, je 0 pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) není spojitá (a nemá nikde limitu). Riemanova funkce (($\mathrm{R}(x)$ je $\frac{1}{q}$ pro $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ nesoudělná, je 0 pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) je spojitá v každém iracionálním čísle a nespojitá v každém racionálním.

## 3.2 Věty o limitách

**Věta 3.1** (Heineho věta (T3.1))

*Nechť $A \in \mathbb{R}*, f : M \to \mathbb{R}$ a $f$ je definována na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}*$. Následující podmínky jsou ekvivalentní (NPJE):*
*(i)* $\lim_{x \to a} = A$,
*(ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \in M, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq a, \lim_{n \to \infty} = a$ platí* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

*Důkaz*
($\implies$): Mějme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující předpoklady bodu (ii). Nechť $\varepsilon > 0$ Podle (i) $\exists \delta > 0 \forall x \in \mathrm{P}(a, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon)$. $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, tedy k tomuto $\delta > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 :$ $x_n \in \mathrm{B}(c, \delta)$. Dále $x_n \neq a$, tedy $x_n \in \mathrm{P}(a, \delta)$. Tudíž dostáváme $f(x_n) \in B(A, \varepsilon)$. ($\impliedby$): Dokažme $\neg(i) \implies \neg(ii)$. $\neg(i) : \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathrm{P}(a, \delta) : \neg(f(x) \in B(A, \varepsilon))$. Toto použijeme pro $\delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Dostaneme $\exists x_n \in \mathrm{P}(a, \frac{1}{n}) : f(x_n) \notin B(A, \varepsilon)$. Nyní $x_n \to a$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq a \implies \{x_n\}$ splňuje podmínky (ii) a dostaneme $\lim_{n \to \infty} = A$. Toto je spor s $f(x_n) \notin \mathrm{B}(A, \varepsilon)$. $\square$

*Poznámka*
Existují i varianty pro limitu zprava a zleva a pro Spojitost

**Věta 3.2** (O jednoznačnosti limity)

*Funkce $f$ má v bodě $a$ nejvýše jednu limitu.*

*Důkaz*
Sporem. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} f(x) = B$, $A \neq B$. Podle Heineho věty $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B$. Toto je spor s jednoznačností limity posloupnosti. . $\square$

**Věta 3.3** (limita a omezenost)

*Nechť $f$ má vlastní limitu v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že $f$ je na $\mathrm{P}(a, \delta)$ omezená.*

*Důkaz*
Označme $A = \lim_{x\to a} f(x)$. Víme $A \in \mathbb{R}$. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ tak, že

$$\forall x \in \mathrm{P}(a, \delta) : f(x) \in \mathrm{B}(A, 1) = (A - 1, A + 1).$$

Tedy $f(\mathrm{P}(a, \delta)) \subseteq (A - 1, A + 1)$. Z toho plyne, že $f$ je na $\mathrm{P}(a, \delta)$ omezená. $\square$

**Věta 3.4** (O aritmetice limit)

*Nechť $a \in \mathbb{R}*$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}*$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}*$. Pak platí (má li pravá strana smysl):*

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$$

$$lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

*Důkaz*
Heineho věta. $\square$

*Důsledek*
Nechť jsou funkce $f$ a $g$ spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak jsou funkce $f + g, f \cdot g$ spojité v $a$. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak $f/g$ je spojitá v $a$.

Speciálně polynomy jsou spojité na $\mathbb{R}$ a racionální lomené funkce $\frac{P(x)}{Q(q)}$ jsou spojité ve všech $x : Q(x) \neq 0$.

**Věta 3.5** (O limitě a uspořádání a o dvou policajtech)

*Nechť $a \in \mathbb{R}*$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$. Pak existuje prstencové okolí $\mathrm{P}(a, \delta)$ tak, že $\forall x \in \mathrm{P}(a, \delta) : f(x) > g(x)$.*

*Nechť existuje prstencové okolí bodu $\mathrm{P}(a, \delta)$ tak, že $\forall x \in \mathrm{P}(a, \delta) : f(x) \leq g(x)$. Nechť existují $\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)$. Potom platí $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.*

*Nechť na nějakém prstencovém okolí $\mathrm{P}(a, \eta)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Pak existuje $\lim_{x\to a} h(x)$ a rovná se jim.*

*Důkaz*
$\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x) \implies f(x) > g(x)$ na $\mathrm{P}(a,\delta)$. Označme $A = \lim_{x\to a} f(x)$ a $B = \lim_{x\to a} g(x)$. Víme $A > B$. Nalezneme $\varepsilon > 0$ tak, aby $\mathrm{B}(A,\varepsilon) \cap \mathrm{B}(B,\varepsilon) = \emptyset$. Navíc $\forall c \in \mathrm{B}(A,\varepsilon) \forall d \in \mathrm{B}(B,\varepsilon)$ platí $c > d$. K tomuto $\varepsilon$ nalezneme $\delta_1 > 0$ a $\delta_2 > 0$ tak, že $\forall x \in \mathrm{P}(c,\delta_1) : f(x) \in \mathrm{B}(A,\varepsilon)$ a $\forall x \in \mathrm{P}(c,\delta_2) : g(x) \in \mathrm{B}(B,\varepsilon)$. Položme $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$. Pak $\forall x \in \mathrm{P}(c,\delta) : f(x) \in \mathrm{B}(A,\varepsilon)\ landg(x) \in \mathrm{B}(B,\varepsilon) \implies f(x) > g(x)$.

Sporem z první části.

Označme $A = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Nechť nejprve $A \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 > 0$ tak, že $\forall x \in \mathrm{P}(a,\delta_1)$ platí $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, $A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon$. Nechť $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Pak $\forall x \in \mathrm{P}(a,\delta) : h(x) \in \mathrm{B}(a,\varepsilon)$.

Pro $A = \pm\infty$ obdobně. □

**Věta 3.6** (Limita složené funkce)

*Nechť funkce $f$ a $g$ splňují $\lim_{x\to a} g(x) = A$ a $\lim_{y\to A} f(x) = B$. Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek: (S) $f$ je spojitá v $A$, (P) $\exists \eta > 0 \forall x \in \mathrm{P}(a,\eta) : g(x) \neq A$. Pak platí $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.*

*Důkaz*
(S) Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{y\to A} f(x) = B$. $\exists \psi > 0$ tak, že $f(\mathrm{P}(A,\psi)) \subseteq \mathrm{B}(B,\varepsilon)$. $f$ je spojitá v $A \implies B = \lim_{y\to A} f(x) = f(A) \implies$ dokonce $f(\mathrm{B}(A,\psi)) \subseteq \mathrm{B}(B,\varepsilon)$.

K našemu $\psi > 0$ z $\lim_{x\to a} g(x) = A \exists \delta > 0 : g(\mathrm{P}(a,\delta)) \subseteq \mathrm{B}(A,\psi)$. Nyní $f(g(\mathrm{P}(a,\delta))) \subseteq f(\mathrm{B}(A,\psi)) \subseteq \mathrm{B}(B,\varepsilon) \implies \lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

(P) Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{y\to A} f(x) = B$. $\exists \psi > 0$ tak, že $f(\mathrm{P}(A,\psi)) \subseteq \mathrm{B}(B,\varepsilon)$. K $\psi > 0$ z $\lim_{x\to a} g(x) = A \exists \delta > 0 : g(\mathrm{P}(a,\delta))\, \mathrm{B}(A,\psi)$. BÚNO $\delta < \eta$. Z (P) $g(x) \neq A \forall x \in \mathrm{P}(a,\delta) \subseteq \mathrm{P}(a,\eta)$. Tedy dokonce $g(P(a,\delta)) \subseteq \mathrm{P}(A,\psi)$.

Nyní $f(g(\mathrm{P}(a,\delta))) \subseteq f(\mathrm{P}(A,\psi)) \subseteq \mathrm{B}(B,\varepsilon) \implies \lim_{x\to a} f(g(x)) = B$. □

**Věta 3.7** (Limita monotónní funkce)

*Nechť $f$ je monotónní na intervalu $(a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}*$. Potom existuje $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$.*

*Důkaz*
Nechť $f$ je neklesající, pro nerostoucí je důkaz analogický. Označme $m = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$. Dokážeme $\lim_{x\to a+} f(x) = m$ v případě $m \in \mathbb{R}$. Případ $m = -\infty$ a důkaz pro $\lim_{x\to b-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)}$ je analogický.

Nechť $\varepsilon > 0$. Z vlastnosti infima $\exists y \in f((a,b))$ tak, že $y < m + \varepsilon$. Z definice $f((a,b))\exists x' \in (a,b) : f(x') = y$. $f$ je neklesající, a proto $\forall x \in (a,x') : f(x) \leq f(x') = y < m + \varepsilon$. $m$ je také dolní závora $f((a,b))$ tedy $\forall x \in (a,b) : m - \varepsilon < m \leq f(x)$.

Celkem $\forall x \in (a,x') : m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon$. Tedy $\lim_{x\to a+} f(x) = m$. □

**Věta 3.8** (T3.8, Bolzano-Cauchyova podmínka pro funkce)

*Nechť $a \in \mathbb{R}*$ a $\delta_0 > 0$. Nechť $f$ je funkce definovaná alespoň na $\mathrm{P}(a,\delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x\to a} f(x)$ právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzano-Cauchyova) podmínka:*

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall x,y \in \mathrm{P}(a,\delta) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

*Důkaz*
$(\implies)$ Nechť $\varepsilon > 0$ a $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Z definice limity $\exists\delta > 0\forall x \in \mathrm{P}(o,\delta) : f(x) \in \mathrm{B}(A,\varepsilon)$. Toto $\delta$ použijeme pro BC podmínku a $\forall x,y \in \mathrm{P}(a,\delta) : |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Toto je ekvivalentní BC podmínce.

$(\impliedby)$ Použijeme BC podmínku pro posloupnosti a Heineho větu. Víme BC a chceme $\exists A \in \mathbb{R} : \lim_{x\to a} f(x) = A$. Z heineho věty je tato „limita" ekvivalentní s $\forall x_n \to a, x_n \neq a : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Nechť tedy $x_n \to a, x_n \neq a$. Tvrdím, že $a_n = f(x_n)$ splňuje BC podmínku pro posloupnost. Nechť $\varepsilon > 0$, nalezneme $\delta > 0$ z BC podmínky pro funkci. K tomuto $\delta > 0\exists n_0\forall n \geq n_0 : x_n \in \mathrm{P}(a,\delta)$, neboť $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, tedy $\forall m,n \geq n_0 : |a_n - a_m| = |f(x_n) - f(x_m)| \overset{\text{z BC podmínky}}{<} \varepsilon$. Tedy $a_n = f(x_n)$ splňuje BC podmínku pro posloupnosti, tedy $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in \mathbb{R}$.

Nyní nechť $x_n \to a, x_n \neq a$ a $y_n \to a, y_n \neq a$. Podle předchozího $\exists A,B \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \wedge \lim_{n\to\infty} b(y_n) = B$. Nechť $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ je nová posloupnost splňující podmínky. Pak existuje její limita $\implies A = B$ podle věty o limitě podposloupnost. □

## 3.3 Funkce spojité na intervalu (3.3)

**Definice 3.8** (Vnitřní body)

Vnitřními pody intervalu $J$ rozumíme ty body $J$, které nejsou krajními.

**Definice 3.9** (Funkce spojitá na intervalu)

Nechť $f$ je funkce a $J$ je interval. Řekneme, že $f$ je spojitá na $J$, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě. Je-li počáteční bod $J$ prvkem $J$, tak požadujeme i spojitost zprava v tomto bodě. Analogicky pro koncový bod požadujeme spojitost zleva.

**Definice 3.10** (Darboux)

Nechť $f$ je spojitá na intervalu $[a, b]$ a platí $f(a) < f(b)$. Pak pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $f(x_0) = y$.

*Poznámka*

Pro $f(a) > f(b)$ platí analogie.

*Důkaz*

Nechť $y \in (f(a), f(b))$ a položme $M = \{z \in [a, b] : f(z) < y\}$. Množina $M$ je neprázdná (obsahuje např. $a$), shora omezená ($b$), tedy existuje $x_0 = \sup M$. Zřejmě $x_0 \in [a, b]$. Dokážeme, že $f(x_0) = y$ vyloučením případů:

$f(x_0) > y$, potom ze spojitosti ($\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > y$) plyne $\exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f(x) > y$ ($0 < \varepsilon < f(x_0) - y$). Tedy z definice $M$, že $(x_0 - \delta, x_0)$ neleží v $M \implies x_0$ není nejmenší horní závora $M$, .

$f(x_0) < y$, potom ze spojitosti plyne $\exists \delta \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) < y$, tedy $\exists x > x_0 : f(x) < y$, tedy $x$ není horní závora, .

Tedy $f(x_0) = y$ (zřejmě $b \neq x_0 \neq a$, tedy $x_0 \in [a, b]$). $\square$

*Důsledek*

Nechť $J$ je interval a funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak je $f(J)$ interval.

**Definice 3.11** (Maximum (minimum))

Nechť $f : M \to \mathbb{R}, m \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $f$ nabývá v bodě $a \in M$ maxima (resp. minima, ostrého maxima, ostrého minima) na $M$, jestliže $forall x \in M : f(x) \overset{(\geq, <, >)}{\leq} f(a)$ (samozřejmě při ostrých $x \neq a$).

Řekneme, že $f$ nabývá v bodě $a \in M$ lokálního maxima (ostrého lokálního maxima, ostrého likoálního minima, lokálního minima), jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f$ nabývá na $M \cap \mathrm{B}(a, \delta)$ svého maxima (...).

**Věta 3.9** (Spojitost funkce a nabývání extrémů)

*Nechť $f$ je spojitá na $[a, b]$. Pak $f$ nabývá na $[a, b]$ svého maxima a minima.*

*Důkaz*
Použijeme Bolzano-Weirstrassovu větu a Heineho větu pro spojitost.

Označme $G = \sup f([a, b])$. Z definice suprema $\exists y_n \in f([a, b])$ tak, že $y_n \to G$. Z definice $f([a, b]) \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) = y_n$. Podle Bolzano-Weirstrass $\exists x_{n_k} \to x* \in [a, b]$ (díky strážníkům). Podle Heineho věty (pro spojitost) $x_{n_k} \to x* \implies f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to f(x*)$. Ale $y_n \to G \implies y_{n_k} \to G$.

Tedy $G = f(x*) \implies$ v $x*$ je nabyto maximum. Minimum lze dokázat analogicky. □

*Důsledek*
Nechť $f$ je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Pak funkce $f$ je na $[a, b]$ omezená.

**Definice 3.12** (Prostá a inverzní funkce na intervalu)

Nechť $f$ je funkce a $J$ je interval. Řekneme, že $f$ je prostá na $J$, jestliže pro všechna $x, y \in J$ platí $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$.

Pro prostou funkci $f : J \to \mathbb{R}$ definujeme funkci $f^{-1} : f(J) \to \mathbb{R}$ předpisem $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

**Věta 3.10** (O inverzní funkci)

*Nechť $f$ je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu $J$. Potom je $f^{-1}$ spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

*Důkaz*
BÚNO $f$ je spojitá a rostoucí. Víme, že $f^{-1}$ je definováno na $f(J)$. Tvrdím, že $f^{-1}$ je rostoucí: Sporem: Nechť $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$, ale $f^{-1}(y_1) = x_1 \geq f^{-1}(y_2) = x_2$. Pak ale $x_1 \geq x_2 \overset{f \text{ rostoucí}}{\implies} f(x_1) = y_1 \geq f(x_2) = y_2$ .

$y_0 \in f(J)$ vnitřní bod: spojitost: Víme, že $f^{-1}(y_0) = x_0$ a $x_0$ je vnitřní bod $J$. Nechť $\varepsilon > 0$. Existují $x_1, x_2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap J$. Pak $f(x_1) < f(x_0) = y_0 < f(x_2)$. Zvolme $\delta = \min\{f(x_2) - f(x_0), f(x_0) - f(x_1)\}$. Pak $\mathrm{B}(f(x_0), \delta) = \mathrm{B}(y_0, \delta) \subseteq (f(x_1), f(x_2))$. Nyní $f^{-1}(\mathrm{B}(y_0, \delta)) \subseteq (x_1, x_2) \subseteq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \implies \lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$.

$y_0 \in f(J)$ levý krajní bod: spojitost zprava: $f^{-1}(y_0) = x_0$ a $x_0$ je levý krajní bod $J$. Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $x_1 \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ tak, že $x_0 < x_1 \implies f(x_0) < f(x_1)$. Položme $\delta = f(x_1) - f(x_0)$, pak $\mathrm{B}_+(y_0, \delta) = [y_0, y_0 + \delta) = [y_0, f(x_1))$. Nyní $f^{-1}(\mathrm{B}_+(y_0, \delta)) = [x_0, x_1) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

$y_0 \in f(J)$ pravý krajní bod: spojitost zleva: Analogicky. □

*Například*
Funkce $x \to x^n$ je spojitá a rostoucí na $[0, \infty)$, proto je i funkce $x \to \sqrt[n]{x}$ spojitá a rostoucí na $[0, \infty)$.

## 3.4 Elementární funkce (3.4)

**Věta 3.11** (Zavedení exponenciely)

*Existuje funkce* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující: a)* $\exp(x)$ *je rostoucí na* $\mathbb{R}$, *b)* $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$, *c)* $\exp(0) = 1$, *d)* $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$, *e)* $\exp(x)$ *je spojitá na* $\mathbb{R}$.

*Poznámka* (Další možnosti zavedení)

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{y}\, dy$$

$$e^x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

*Důkaz*
Položme $\exp x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}$. Nejdříve chceme ukázat $\exists \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nechť $x$ je pevné.[a]

Podle věty Bolzano-Cauchyova podmínka pro posloupnost stačí ověřit BC podmínku. Nechť $\varepsilon > 0$, zvolme $n_0 \geq 2k_0 \wedge \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, kde $k_0 = \lfloor |x| \rfloor + 1$. Nechť $m, k \geq n_0$. BÚNO $m > k$:

$$\left|\sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}\right| = \left|\sum_{n=k+1}^{m} \frac{x^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=k+1}^{m} \left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=k+1}^{m} |x|^{k_0+2} \cdot \frac{1}{n\cdot(n-1)} = |x|^{k_0+2} \cdot \frac{1}{k} < |x|^{k_0+2} \cdot \varepsilon,$$

což je přesně BC podmínka, tedy naše posloupnost je dobře definována.

a) $0 \leq x \leq y \implies \frac{x^n}{n!} \leq \frac{y^n}{n!} \implies \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{k} \frac{y^n}{n!} \implies \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{y^n}{n!} \implies \exp x \leq \exp y$.

$x \leq y \leq 0 \implies -x \geq -y \geq 0 \implies \exp(-x) \geq \exp(-y) \overset{\text{z b), viz dále}}{\implies} \exp x = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{\exp(-y)} = \exp y$.

$x \leq 0 \leq y \implies \exp x \leq \exp 0 \leq \exp y$

b)[b] Označme $s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} x^i \overset{n\to\infty}{\to} s = \exp x$, $\sigma_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} y^j \overset{n\to\infty}{\to} \sigma = \exp y$, $\varrho_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \frac{x^{k-j}}{(k-j)!} \cdot \frac{y^j}{j!} \overset{n\to\infty}{\to} \varrho = \exp(x+y)$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Pak z BC podmínky $\exists n_0$, že $\sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{|x|^i}{i!} < \varepsilon$, $\sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{|y|^j}{j!} < \varepsilon$ a zároveň $|s_{n_0} \cdot \sigma_{n_0} - s \cdot \sigma| < \varepsilon$. Nechť $n \geq 2n_0$, pak

$$|\varrho_n - s\cdot\sigma| \leq |\varrho_n - s_{n_0}\sigma_{n_0}| + |s_{n_0}\sigma_{n_0} - s\cdot\sigma| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \cdot \frac{|y|^i}{i!} + \sum_{j=n_0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \cdot \frac{|y|^i}{i!} + \varepsilon \leq,$$

jelikož všechny členy, které se neodečetly, mají alespoň jeden index $\geq n_0$ jinak se vyskytují v $s_{n_o}\sigma_{n_0}$. Pokračujeme:

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \cdot \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{|y|^i}{i!} + \sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|y|^i}{i!} + \varepsilon < e^{|x|} \cdot \varepsilon + \varepsilon e^{|y|} + \varepsilon.$$

c) $\exp 0 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{0^n}{n!} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1$.

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + x \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!}\right) \overset{\text{další rovnost}}{=} 1$

$$\left| x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \right| \overset{|x|\leq 1}{\leq} |x| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq |x| \cdot e \to 0$$

e) Chceme $\lim_{h\to 0} \exp(x+h) = \exp x$ (tj. spojitost v $x$).

$$\lim_{h\to 0} \exp(x+h) - \exp x + \exp x = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x)\cdot\exp(h) - \exp x}{h} \cdot h + \exp x = \lim_{h\to 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} \cdot h + \exp x =$$

□

[a] $\exists \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n\cdot(n-1)} = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{k} = 1$. Pak existuje $k_0 > |x|$ ($k_0 = \lfloor x \rfloor + 1$). $\forall n \geq 2k_0$ platí

*Poznámka* (Vlastnosti exp)

- $\exp(n \cdot x) = (\exp x)^n$ (Matematická indukce).
- $\exp x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ $(\exp x = \left(\exp \frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$, kdyby $\exp x = 0$, pak $\exp \frac{x}{2^i} = 0 \implies \exp 0 = 0$ ).
- Z a) je exponenciela rostoucí rostoucí $\implies \lim_{x\to\infty} \exp x$ existuje. $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \lim_{n\to\infty} (\exp 1)^n = +\infty \implies \lim_{x\to a} \exp(x) = +\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ $(= \lim_{x\to-\infty} \exp(x) \cdot \frac{\exp -x}{\exp -x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\exp 0}{\exp -x} = \frac{1}{+\infty} = 0)$.
- $\exp \mathbb{R} = (0, \infty)$ (funkce nabývá mezihodnot).

*Řešení*
Nechť pro spor $e = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{N}$ nesoudělná.

$$\sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} < e = \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)!} \cdot \frac{1}{(q+1)^{n-(q+1)}} = \frac{1}{(q+1)!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^j} = \frac{1}{(q+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} + \frac{1}{q! \cdot q} . (/ \cdot$$

$$m < pq! < m+1, \quad m \in \mathbb{N}, \; .$$

**Definice 3.13** (Logaritmus)

Funkci inverzní k exponenciele (exp) je logaritmus (log)

**Věta 3.12** (Vlastnosti logaritmu)

*Funkce* log *splňuje: a)* $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *je spojitá a rostoucí funkce, b)* $\forall x, y > 0 : \log(x \cdot y) = \log x + \log y$, *c)* $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

*Důkaz*
a) exp je spojitá a rostoucí $\implies$ existuje inverzní funkce, exp : $\mathbb{R} \to (0, \infty)$ $\implies$ $\log(0, \infty) \to \mathbb{R}$. Podle věty o inverzní funkci je log spojitá a rostoucí funkce.

b) $\log x = A, \log y = B \Leftrightarrow \exp A = x, \exp B = y$. Z definice exponenciely $x \cdot y = \exp A \cdot \exp B = \exp(A + B) \implies \log(x \cdot y) = A + B = \log x + \log y$.

c) označme $f(y) = \frac{\exp y - 1}{y}, y \neq 0$ a $g(x) = \log x$, pak $g(x) \neq 0 \forall x \neq 1$ víme $\lim_{y \to 0} f(y) = 1$ z definice exponenciely $\lim_{x \to 1} g(x) = 0$. Podle VOLSF (P) dostaneme $1 = \lim_{x \to 1} f(g(x)) = \lim_{x \to 1} \frac{\exp(\log x) - 1}{\log x} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\log x}$. $\square$

**Definice 3.14**

Nechť $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$. Pak definujeme $a^b = \exp(b \log(a))$. Je-li $b > 0$, pak definujeme $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$.

*Poznámka*
$x \cdot x = x^2 = x^2 = \exp(2 \cdot \log x) = \exp(\log x) \cdot \exp(\log x) = x \cdot x$. Obdobně pro $x^n, n \in \mathbb{N}$.

*Příklad*
$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{Heine}}{=} \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x} \log(1+x)} \overset{\text{VOLSF (S)}}{=} e^1 = e$.

**Věta 3.13** (Zavedení sinu a cosinu)

*Existují funkce* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující: a)* $\forall x, y \in \mathbb{R} : \sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$, $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$, $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, *b) existuje kladné číslo* $\pi$ *tak, že* sin *je rostoucí na* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *a* $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, *c)* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

*Důkaz* (Bez důkazu, jen nástřel)
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n$. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot (-1)^n$. $\square$

**Definice 3.15** (tan a cotg)

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ a $y \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ definujeme funkce tangens a cotangens předpisem

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

**Věta 3.14** (Spojitost sinu a cosinu)

*Funkce* sin, cos, tan, cotg *jsou spojité na svém definičním oboru.*

*Důkaz*
a) sin, pak b) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ a složení spojitých funkcí je spojitá funkce, c) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ jsou spojité z aritmetiky limit.

a) $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$: 1. v 0: $\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot x \overset{\text{AL}}{=} 1 \cdot 0 = \sin 0$. 2. $\lim_{x\to a}(\sin x - \sin a) = \lim_{x\to a} f(x) 2 \cdot \sin\frac{x-a}{2} \cdot \cos\frac{x+a}{2} \overset{\text{AL}}{=} 2 \cdot \lim_{x\to a} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2} \overset{\text{VOLSF (P)}}{=} 2 \cdot 0 \cdot \cos a = 0$. $\square$

**Definice 3.16** (Inverzní funkce)

Nechť $\sin * x = \sin x$ pro $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nechť $\cos * x = \cos x$ pro $x \in [0, \pi]$. Nechť $\tan * x = \tan x$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Nechť $\operatorname{cotg} * x = \operatorname{cotg} x$ pro $x \in (0, \pi)$.

Definujeme arcsin (respektive arccos, arctan, arccotg) jako inverzní funkce k $\sin *$ (respektive $\cos *$, $\tan *$, $\operatorname{cotg} *$).

## 3.5 Derivace a Taylorův polynom

**Definice 3.17** (Derivace)

Nechť $f$ je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak derivací $f$ v bodě $a$ budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

derivací $f$ v bodě $a$ zprava budeme rozumět

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a derivací $f$ v bodě $a$ zleva budeme rozumět

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

*Poznámka*
Limita buď existuje a pak je vlastní nebo nevlastní, nebo vůbec neexistuje.

Ekvivalentní definice je

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$f'(a) = A \Leftrightarrow (f'_+(a) = A \wedge f'_-(a) = A).$$

**Věta 3.15** (Vztah derivace a spojitosti)

*Nechť má funkce $f$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}$. Pak je $f$ v bodě $a$ spojitá.*

*Důkaz*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a) \overset{\text{AL}}{=} f'(a)\cdot 0 + f(a) = f(a).$$

□

**Věta 3.16** (Aritmetika derivací (T4.2))

*Nechť $f'(a)$ a $g'(a)$ existují. Pak (pokud mají pravé strany smysl)*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

*Nechť $g$ je spojitá v $a$, pak*

$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a).$$

*Nechť je $g$ spojitá v $a$ a $g(a) \neq 0$, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

*Důkaz*

$$(f+g)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+g(a+h)-(f(a)+g(a))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = f'$$

$$(f\cdot g)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot g(a+h) - f(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(a+h) + f(a)\cdot g(a+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot g(a$$

Víme, že $g(a) \neq 0$ a $g$ je spojitá v $a$. Tedy $\exists \delta > 0$ tak, že $g(a+h) \neq 0 \forall h \in \mathrm{B}(0,\delta)$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)-\frac{f(a)}{g(a)}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(a+h)}{g(a+h)\cdot g(a)\cdot h} \overset{\text{AL}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(h+a)\cdot g(a)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot$$

□

**Věta 3.17** (Derivace složené funkce)

*Nechť má $f$ derivaci v bodě $y_0$, $g$ má derivaci v $x_0$, je v $x_0$ spojitá a $y_0 = g(x_0)$. Pak (je-li pravá strana definována)*

$$(f\circ g)'(x_0) = f'(y_0)\cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

*Důkaz*
Myšlenka:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\overset{\text{VOLSF}}{=}\lim_{y\to y_0}\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}$$

Funkce $f$ má v bodě $y_0\in\mathbb{R}$ derivaci, a proto je $f$ definována na jistém okolí $\mathrm{B}(y_0,\eta)$. Funkce $g$ je spojitá v $x_0\in\mathbb{R}, g(x_0)=y_0$, a proto je funkce $f(g(x))$ definována na jistém okolí $\mathrm{B}(x_0,\delta$.

1. Předpokládejme nejprve, že $f'(y_0)\in\mathbb{R}$. Definujeme pomocnou funkci $S(y)=f'(y_0), y=y_0$ a $S(y)=\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}, y\in D(f)\setminus\{y_0\}$. Platí $\lim_{y\to y_0}S(y)=S(y_0)$, tedy $S$ je v bodě $y_0$ spojitá. Pro $x\in D(f\circ g)$ platí

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=S(g(x))\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x_-x_0}\text{(Získáme z } 0=0 \text{ a rozšíření jinak.).}$$

Odtud z VOLSF s podmínkou (S)

$$(f\circ g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}S(g(x))\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=S(g(x_0))\cdot g'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

2. Nechť nyní $f'(y_0)=\pm\infty$. Pak ale $g(x_0)\neq 0$, aby byl výraz vpravo definován. Pak existuje $\tilde{\eta}>0$ tak, že $\forall x\in\mathrm{P}(x_0,\eta):\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\neq 0$. Takže $\forall x\in\mathrm{P}(x_0,\tilde{\eta}g(x)\neq g(x_0)$, odtud

$$(f\circ g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}S(g(x))\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x_-x_0}=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0),$$

kde jsme použili VOLSF s podmínkou (P). □

**Věta 3.18** (Derivace inverzní funkce)

*Nechť $f$ je na intervalu $(a,b)$ spojitá a rostoucí (resp. klesající). Nechť $f$ má navíc v bodě $x_0\in(a,b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce $f^{-1}$ derivaci v bodě $y_0=f(x_0)$ a platí*

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

*Poznámka*
Existují i varianty pro $f'(x_0)=0$ a $f'(x_0)=\pm\infty$.

*Důkaz*
Z věty o inverzní funkci víme, že $f^{-1}$ existuje a je spojitá na $f((a,b))$ a $y_0$ je vnitřní bod $f((a,b))$. Víme, že $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ a $\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$ + víme podmínku (P), neboť $f^{-1}$ je rostoucí. Podle VOLSF s podmínkou (P) dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{y\to y_0}\frac{f(f^{-1}(y)) - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \lim_{y\to y_0}\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}.$$

Odtud

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim_{y\to y_0}\frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

*Poznámka* (Derivace elementárních funkcí)

- $(const)' = 0$
- $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}, x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$
- $(\log x)' = \frac{1}{x}, x\in(0,\infty)$
- $(\exp x)' = \exp x, x\in\mathbb{R}$
- $(a^x)' = a^x\log a, x\in\mathbb{R}, a\in R^+$
- $(\sin x)' = \cos x, x\in\mathbb{R}$
- $(\cos x)' = -\sin x, x\in\mathbb{R}$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x\in D(\tan)$
- $(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}, x\in D(\operatorname{cotg})$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1,1)$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, x\in\mathbb{R}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1,1)$
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x\in\mathbb{R}$

**Věta 3.19** (Fermatova (L4.5))

*Nechť $a\in\mathbb{R}$ je bod lokálního extrému funkce $f$ ne $M$. Pak $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.*

*Důkaz*
Sporem. Nechť $a$ je bod lokálního extrému $f$ na $M$, $\exists f'(a)$, ale $f'(a) \neq 0$. BÚNO $f'(a) > 0$. Pak $\exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in \mathrm{P}(a, \delta) : \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Nyní $a < x \implies f(x) > f(a)$ a $a > x \implies f(x) > f(a)$ (obojí na intervalu $x \in \mathrm{P}(a, \delta)$). Tedy zde není ani maximum, ani minimum, tj. není zde extrém . $\square$

**Věta 3.20** (Rolleova)

*Nechť $f$ je spojitá na intervalu $[a, b]$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (a, b)$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $\zeta \in (a, b)$ tak, že $f'(\zeta) = 0$.*

*Důkaz*
Je-li $f(x) = f(a)\ \forall x \in (a, b)$, volme *zeta* libovolně v $(a, b)$.

Nechť $\exists x \in (a, b) f(x) \neq f(a) = f(b)$. BÚNO $f(x) > f(a)$. Podle věty o spojitosti funkce a nabývání extrémů existuje bod $\zeta \in [a, b]$ tak, že $f(\zeta) = \max\{f(x), x \in [a, b]\}$ $f(x_0) > f(a) \implies \zeta \neq a, \zeta \neq b \implies \zeta \in (a, b)$. Víme, že $\exists f'(\zeta)$, protože $f'(x)$ existuje všude na $(a, b)$. Podle Fermatovy věty je $f'(\zeta = 0)$. $\square$

**Věta 3.21** (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

*Nechť je funkce $f$ spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci v každém bodě intervalu $(a, b)$. Pak existuje $\zeta \in (a, b)$ tak, že $f'(\zeta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

*Důkaz*
Položme $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$. Pak $F$ je spojitá na $[a, b]$ (součet spojitých funkcí) $F(a) = 0 = F(b)$. Dále $\exists F'(a) \forall x \in (a, b)$. Tudíž podle Rolleovy věty $\exists \zeta \in (a, b)$ tak, že $F'(\zeta) = 0$. Nyní $0 = F'(\zeta) = f'(\zeta) - 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \implies f'(\zeta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

*Důsledek*
Nechť $f'(x) = 0$ pro všechny $x \in (a, b)$. Pak je $f$ konstantní na $(a, b)$. ($\forall x, y \in (a, b) \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\zeta) = 0$.)

**Definice 3.18** (Vnitřek intervalu)

Nechť $J$ je interval. Množinu všech vnitřních bodů $J$ nazýváme vnitřek $J$ a značíme $\operatorname{int} J$.

**Věta 3.22** (O vztahu derivace a monotonie)

*Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f$ je spojitá na $J$ a v každém vnitřním bodě $J$ má derivaci. a) Je-li $f'(x) > 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je $f$ rostoucí na $J$. b) Je-li $f'(x) < 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je $f$ klesající na $J$. c) Je-li $f'(x) \geq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je $f$ neklesající na $J$. d) Je-li $f'(x) \leq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je $f$ nerostoucí na $J$.*

*Důkaz*
a) Nechť $a, b \in J, a < b$. Pak $f$ je na $[a, b]$ spojitá a existuje $f'(x) \forall x \in (a, b)$. Podle Lagrangeovy věty $\exists \zeta \in (a, b) \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\zeta) > 0 \implies f(b) > f(a)$.

Ostatní body analogicky. □

**Věta 3.23** (Cauchyova věta o střední hodnotě)

*Nechť $f, g$ jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ takové, že $f$ má v každém bodě $(a, b)$ derivaci a $g$ má v každém bodě $(a, b)$ vlastní derivaci různou od nuly. Pak existuje $\zeta \in (a, b)$ tak, že $\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.*

*Důkaz*
Tvrdíme, že $f(b) - g(a) \neq 0$, jinak by podle Rolleovy věty $\exists \zeta \in (a, b), g'(\zeta) = 0$. .

Definujme $H(x) = [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)]$. Pak $H$ je spojitá na $[a, b]$ a $H(a) = 0 \cdot [] - [] \cdot 0$. a $H(b) = 0$. Dále $H'(x) = f'(x) \cdot [g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)] \cdot g'(x)$. Podle Rolleovy věty $\exists \zeta \in (a, b)$ tak, že $0 = H'(\zeta) = f'(\zeta) \cdot [g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)] \cdot g'(\zeta)$. Tj.

$$\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

**Věta 3.24** (l'Hospitalovo pravidlo)

*1. Nechť $a \in \mathbb{R}*$, $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$ a nechť existuje $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. 2. Nechť $a \in \mathbb{R}*$, $\lim_{x \to a+} |g(x)| = +\infty$ a nechť existuje $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

*Poznámka*
Platí i pro $\lim_{x \to a-}$ a $\lim_{x \to a}$.

*Důkaz*
1. „$\frac{0}{0}$“, tj. „$f(a) = g(a) = 0$“: a) $a \in \mathbb{R}$. Víme $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Tedy $\exists \delta > 0\ \forall x \in P_+(a,\delta) : g'(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) \in \mathbb{R}$. Definujeme $f(a) = g(a) = 0$. Pak $f$ a $g$ jsou spojité na $[a, a+\delta)$ a existují tam $f'$ a $g'$. Jsou splněny předpoklady (V 4.9.) na intervalu $[a, x] \forall x \in (a, a+\delta)$. Existuje tedy $\zeta(x) \in (a, x)$ tak, že

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\zeta(x))}{g'(\zeta(x))}.$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ existuje $0 < \delta_0 < \delta$ tak, že $\forall y \in (a, a+\delta_0) : \frac{f'(y)}{g'(y)} \in \mathrm{B}(A,\varepsilon)$. Nyní $\forall x \in (a, a+\delta_0)$ máme $\zeta(x) \in (a,x) \subset (a, a|\delta_0)$, tedy $\frac{f'(\zeta(x))}{g'(\zeta(x))} \in \mathrm{B}(A,\varepsilon)$, a tedy díky výrazu kus výše $\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathrm{B}(A,\varepsilon) \implies \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

b) $a = -\infty$ ($a = +\infty$ analogicky) Platí $\lim_{x\to-\infty} h(x) = B \in \mathbb{R}* \Leftrightarrow \lim_{y\to 0+} h\left(-\frac{1}{y}\right) = B$. Zavedeme pomocné funkce $F(y) = f\left(-\frac{1}{y}\right)$ a $G(y) = g\left(-\frac{1}{y}\right)$, pak na jistém $P_+(0,\delta)$ platí $F'(y) = f'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-1}{y^2}$ a $G'(y) = g'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-1}{y^2}$. Nyní $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0+} \frac{F(y)}{G(y)}$ a

$$\lim_{y\to 0+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to 0+} \frac{f'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-1}{y^2}}{g'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-1}{y^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Nyní z části 1. a) pro bod 0, $F$ a $G$ dostaneme $A = \lim_{y\to 0+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to a} f(x)g(x)$.

2. Dokážeme pouze v případě $\lim_{x\to a+} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta_1 > 0$, že $\forall z \in \mathrm{P}_+(a,\delta_1) : \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - A\right| < \varepsilon$. Zafixujme si $y \in \mathrm{P}_+(a,\delta_1)$. Zvolme $0 < \delta_2 < \delta_1$, že $\forall x \in \mathrm{P}_+(a,\delta_2) : \frac{1}{|g(x)|}(|f(y)| + |g(y)|(|A| + \varepsilon)) < \varepsilon$. Zvolme libovolně $x \in \mathrm{P}_+(a,\delta_2) \cup (a,y)$. Na intervalu $[x,y]$ jsou splněny předpoklady V4.9, tj. $\exists \zeta \in (x,y)$ :

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \implies$$

$$f(y) - f(x) = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \cdot g(y) - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \cdot g(x) \implies$$

$$\frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \implies$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}\right| = \left|\frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)}\right| \le \frac{|f(y)|}{|g(x)|} + \left|\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}\right| \cdot \frac{|g(y)|}{|g(x)|} \le \frac{|f(y)|}{|g(x)|} + (|A|+\varepsilon) \cdot \frac{|g(y)|}{|g(x)|} \le \varepsilon.$$

Dále můžeme pokračovat v odhadech:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \le \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}\right| + \left|\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - A\right| < \varepsilon + \varepsilon.$$

$\square$

**Věta 3.25** (derivace a limita derivace)

*Nechť je funkce $f$ spojitá zprava v $a$ a nechť existuje* $\lim_{x\to a+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. *Pak* $f'_+(a) = A$.

*Důkaz*

Z definice derivace

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{\text{„}0/0\text{“}}{=} \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{1} = A.$$

□

## 3.6 Konvexní a konkávní funkce

**Definice 3.19**

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a nechť $f$ má vlastní $n$-tou derivaci na okolí bodu $a$. Pak $(n+1)$-ní derivací v bodě $a$ budeme rozumět $f^{(n+1)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a+h)-f^{(n)}(a)}{h}$.

**Definice 3.20**

Funkce $f$ na intervalu $I$ nazveme konvexní (konkávní), jestliže $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ $(\geq)$.

Funkci nazveme ryze konvexní (ryze konkávní), jsou-li příslušné nerovnosti ostré.

*Poznámka*

Ekvivalentně lze definovat, že funkce $f$ je na $I$ konvexní, pokud $\forall x, y \in I, x < y\ \forall \alpha \in (0,1)$ :

$$f(\alpha \cdot x + (1-\alpha)y) \leq \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha) \cdot f(y).$$

**Lemma 3.26** (Lemmátko)

*Nechť je funkce $f$ na intervalu $I$ konvexní, pak*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

*Platí i pro ryze konvexní případ (jen s ostrými nerovnostmi).*

*Důkaz*

$$\frac{1}{x_3 - x_1} \cdot (f(x_3) - f(x_1)) = \frac{1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2) + f(x_2) - f(x_1)) \geq \frac{1}{x_3 - x_1} \left( \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_3 - x \right.$$

Druhá nerovnost se ukáže analogicky. □

**Věta 3.27** (Vztah druhé derivace a konvexity (konkávity))

*Nechť $f$ má na intervalu $(a, b)$ spojitou první derivaci.*

*Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$, pak $f$ je ryze konvexní na intervalu $(a, b)$. Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$, pak $f$ je ryze konkávní na intervalu $(a, b)$.*

*Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$, pak $f$ je konvexní na intervalu $(a, b)$. Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) \leq 0$, pak $f$ je konkávní na intervalu $(a, b)$.*

*Důkaz* (Třetí část, zbytek analogicky)
Z $f''(x) \geq 0$ a věty 4.8 (vztah derivace a monotonie) máme $f'$ je neklesající na $(a, b)$. Zvolme $x_1 < x_2 < x_3 \in (a, b)$. Podle věty 3.7 (Lagrange) $\exists \zeta_1 \in (x_1, x_2), \zeta_2 \in (x_2, x_3)$ :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\zeta_1) \qquad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\zeta_2)$$

$\zeta_1 < \zeta_2 \overset{f' \text{ neklesající}'}{f} (\zeta_1) \leq f'(\zeta_2) \implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ □

**Věta 3.28** (Konvexita a jednostranné derivace)

*Nechť $f$ je konvexní na otevřeném $J$ a $a \in \operatorname{int} J$. Pak $f'_+(a) \in \mathbb{R}$ a $f'_-(a) \in \mathbb{R}$.*

*Důkaz*
Z definice $f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Nechť $a < x_1 < x_2$. Z lemmatu víme, že $\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \leq \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a}$. Tedy funkce $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ je klesající. Podle věty 3.7 (limita monotónní funkce) tedy $\exists \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}^*$.

Zvolme $y \in J$, $y < a$, $y$ pevné. Nyní $\forall x \in J$, $x > a$, platí

$$\frac{f(a) - f(y)}{a - y} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Tedy $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ je zdola omezená na jistém $P^+(a, \delta) \implies f'_+(a) \in \mathbb{R}$. □

**Věta 3.29** (Konvexita a spojitost)

*Nechť $f$ je konvexní na otevřeném intervalu $J$. Pak $f$ je spojitá na $J$.*

*Důkaz*
$a \in J \implies a \in \operatorname{int} J \implies \exists f'_+(a) \in \mathbb{R}\ \big(\exists f'_-(a) \in \mathbb{R}\big)$. Z analogie věty 4.1 pro jednostranné limity je, jelikož má vlastní derivaci v $a$, $f$ spojitá zleva (zprava) v bodě $a$. $\square$

**Definice 3.21** (Tečna, inflexní bod)

Nechť $f$ má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Označme $T_a^f = \{[x, y] : x \in \mathbb{R}, y = f(a) + f'(a)(x - a)\}$.

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$, $x \in D_f$ leží nad (pod) tečnou $T_a^f$ jestliže platí $f(x) \overset{(<)}{>} f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$.

Funkce $f$ má v bodě $a$ inflexi (a je inflexní bod), jestliže $f'(a) \in \mathbb{R}$ a existuje $\Delta > 0$ tak, že:

$$(i) \forall x \in (a - \Delta, a) : [x, f(x)] \text{ leží nad tečnou,}$$

$$(ii) \forall x \in (a, a + \Delta) : [x, f(x)] \text{ leží pod tečnou,}$$

nebo

$$(i) \forall x \in (a - \Delta, a) : [x, f(x)] \text{ leží pod tečnou,}$$

$$(ii) \forall x \in (a, a + \Delta) : [x, f(x)] \text{ leží nad tečnou,}$$

**Věta 3.30** (Nutná podmínka pro inflexi)

*Nechť $f''(a) \neq 0$. Pak $a$ není inflexní bod funkce $f$.*

*Důkaz*
BÚNO $f''(a) > 0$, tedy $f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0$. Standardním způsobem odvodíme $\exists \Delta > 0 \forall h \in \mathrm{P}(0, \Delta) : \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0$. Tj.

$$\forall x \in (a, a + \Delta) : f'(x) > f'(a) \qquad \forall x \in (a - \Delta, a) : f'(x) < f'(a)$$

Pro $y \in (a, a + \Delta)$ platí podle Lagrangeovy věty 4.7 $\frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(\zeta) > f'(a)$. Odtud $f(y) - f(a) > f'(a) \cdot (y - a) \implies f(y) > f(a) + f'(a) \cdot (y - a)$. Analogicky pro $y \in (a - \Delta, a)$ platí $f(y) > f(a) + f'(a) \cdot (y - a)$. Tedy $a$ není inflexní bod. $\square$

**Věta 3.31** (Postačující podmínka pro inflexi)

*Nechť $f$ má spojitou první derivaci na intervalu $(a, b)$. Nechť $z \in (a, b)$ a platí*

$$\forall x \in (a, z) : f''(x) > 0 \land \forall x \in (z, b) : f''(x) < 0.$$

*Pak $z$ je inflexní bod.*

*Důkaz*
Podle V 4.8 (derivace a monotonie) víme, že $f'$ klesá na $[z, b)$. Podle věty 4.7 (Lagrange o střední hodnotě) pro $x \in [z, b)$ nalezneme $\zeta \in (z, x) : \frac{f(x)-f(z)}{x-z} = f'(\zeta)$. Tj. $f(x) = f(z)+f'(\zeta)(x-z) < f(z)+f'(z)\cdot(x-z)$. Analogicky $\forall x \in (a, z] : f(x) > f(z)+f'(z)\cdot(x-z)$. Tj. $z$ je inflexní bod $f$. □

*Poznámka*
Platí analogicky pro $f'' < 0$ na $(a, z)$ a $f'' > 0$ na $(z, b)$.

## 3.7 Průběh funkce

**Definice 3.22**

Řekneme, že funkce $ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ je asymptota funkce $f$ v $+\infty$ (resp. $-\infty$) jestliže $\lim_{x\to+\infty(-\infty)}[f(x) - (ax + b)]$.

**Věta 3.32** (Tvar asymptoty)

*Funkce $f$ má v $+\infty$ asymptotu $ax + b \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ a $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = b$.*

*Poznámka*
Věta platí analogicky i pro $-\infty$.

*Důkaz*
$(\Longrightarrow)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{a} \overset{\text{AL}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{ax + b}{x} = \frac{0}{+\infty} + a = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax \overset{\text{AL}}{=} \lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) + \lim_{x\to+\infty} b = 0 + b = b$$

$(\Longleftarrow)$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] \overset{\text{AL}}{=} \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) + \lim_{x\to+\infty}(-b) = b + (-b) = 0$$

□

*Poznámka* (Průběh funkce)
Vyšetřujeme:

- Určíme definiční obor a obor spojitosti.
- Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.
- Zjistíme symetrii funkce: lichost, sudost, periodicita.

- Dopočítáme limity v „krajních bodech“ definičního oboru.
- Spočteme první derivaci (i jednostranné v problematických bodech).
- Určíme intervaly monotonie a nalezneme extrémy (lokální i globální).
- Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce konvexní / konkávní, určíme inflexní body.
- Vypočteme asymptoty funkce.
- Načrtneme graf funkce a určíme obor hodnot.

## 3.8 Taylorův polynom

**Definice 3.23**

Nechť $f$ je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $n$-tá derivace $f$ v bodě $a$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + f''(a) \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

nazýváme Taylorovým polynomem řádu $n$ funkce $f$ v bodě $a$.

*Poznámka*
Stupeň $T_n^{f,a}(x) \leq n$.

$\left(T_n^{f,a}\right)' = T_{n-1}^{f,a}$.

**Věta 3.33** (O nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem)

*Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ a $P$ je polynom stupně nejvýše $n$. Pak*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P(x) = T_n^{f,a}.$$

*Důkaz*
( $\Longleftarrow$ ) MI: $n = 1$: $T_1^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = 0.$$

$n-1 \to n$:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \underset{\frac{0}{0}}{l'Hospital =} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \left(T_n^{f,a}(x)\right)'}{n\cdot (x-a)^{n-1}} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \left(T_{n-1}^{f,a}(x)\right)'}{n\cdot (x-a)^{n-1}} \stackrel{\text{IP}}{=} 0.$$

( $\Longrightarrow$ )

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x\to a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0 + 0 = 0.$$

Podle následujícího lemmatu (stupeň $P - T_n^{f,a} \le n$) $P - T_n^{f,a} = 0$. $\square$

## **Lemma 3.34** (K důkazu výše)

*Nechť $Q$ je polynom, $a \in \mathbb{R}$, $\deg(Q) \le n$ a $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak $Q(x) = 0$.*

*Důkaz* (Indukcí)
$n = 1$: $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{x-a} = 0 \stackrel{\text{Je definováno}}{\Longrightarrow} Q(a) = 0 \implies Q(x) = c(x-a)$. Nyní $\lim_{x\to a} \frac{c\cdot(x-a)}{(x-a)} = c = 0 \implies Q(x) = 0$.

$n-1 \to n$: $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(a-x)^n} = 0 \implies Q(a) = 0 \implies Q(x) = (x-a)\cdot R(x)$, kde stupeň $R \le n-1$. Tedy $\lim_{x\to a} \frac{(x-a)R(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}} \stackrel{\text{ind. předpoklad}}{\Longrightarrow} R(x) = 0 \implies Q(x) = 0$. $\square$

## **Věta 3.35** (Taylor)

*Nechť má funkce $f$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci v intervalu $[a,x]$ a nechť $\varphi$ je spojitá funkce v $[a,x]$ a má vlastní derivaci v $(a,x)$, která je v každém bodě tohoto intervalu nenulová. Pak existuje $\zeta \in (a,x)$ tak, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\zeta)} \cdot f^{(n+1)}(\zeta) \cdot (x-\zeta)^n.$$

## **Definice 3.24**

$R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{=} f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme zbytek po Taylorově polynomu stupně $n$.

*Důsledek* (Lagrangeův tvar zbytku)
Speciálně existuje $\zeta_1 \in (a, x)$ tak, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\zeta_1) \cdot (x-a)^{n+1}$.

*Důkaz*
Položme $\varphi(t) = (x-t)^{t+1}$, pak $\varphi'(t) = (n+1)(n-t)^n(-1)$, tedy

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{0 - (x-a)^n + 1}{(n+1)(x-\zeta)^n} \cdot f^{(n+1)}(\zeta_1) \cdot (x-\zeta_1)^n .$$

□

*Důsledek* (Cauchyův tvar zbytku)
Speciálně existuje $\zeta_2 \in (a, x)$ tak, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\zeta_2) \cdot (x-\zeta_2)^n \cdot (x - a)$.

*Důkaz*
Položme $\varphi(t) = t$. □

*Poznámka* (Taylorovy řady elementárních funkcí)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

*Důkaz* (Taylor)
Definujeme pro $t \in [a, x]$:

$$F(t) = f(x) - \left[ f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right].$$

Platí $F$ je spojitá na $[a, x]$ ($\exists f^{(n+1)}$ vlastní $\implies$ $f^{(n)}$ spojitá). $F(x) = 0$. $F(a) = f(x) -$

$T_n^{f,a}(x)$. $\exists F'$ na $(a,x)$.

Podle Cauchyovy věty o střední hodnotě $\exists \zeta \in (a,x)$ :

$$\frac{0-\big(f(x)-T_n^{f,a}(x)\big)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{F'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}.$$

Nyní

$$F'(\zeta) = 0 - \Big[ f'(\zeta) - f'(\zeta) + f''(\zeta)\cdot(x-\zeta) - f''(\zeta)\frac{2(x-\zeta)}{2} + f'''(\zeta)\frac{(x-\zeta)^2}{2!} + \ldots - f^{(n)}(\zeta)\frac{n\cdot(x-\zeta)^{n-}}{n!}$$

Tedy

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = -F'(\zeta)\cdot\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi(\zeta)} = f^{(n+1)}(\zeta)\frac{(x-\zeta)^n}{n!}\cdot\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi(\zeta)}.$$

□

**Definice 3.25**

Nechť $f$, $g$ jsou funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce $f$ je v bodě $a$ malé $o$ od $g$, jestliže platí $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Píšeme $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$.

*Poznámka*
Ukazovala se vzorová písemná zkouška.