Příklad (4.1)
Nechť $\mathbb{T}$ je těleso, $a \in \mathbb{T}$ a A je čtvercová matice řádu n nad tělesem $\mathbb{T}$ taková, že součet prvků v každém sloupci je roven a. Dokažte, že pak a je vlastním číslem matice A.

Důkaz
1) Nechť nejdříve $a = 0$ (ta je prvkem každého tělesa). Potom součet prvků v každém sloupci A je 0, tedy součet všech řádků (to jest lineární kombinace s koeficienty 1) je nenulová lineární kombinace dávající nulový vektor. Tedy A není regulární, tedy existuje lineární nenulová kombinace sloupců, která dává nulový vektor. Tuto kombinaci nechť reprezentuje vektor $\mathbf{x}$ ($\in \mathbb{T}^n$). Tudíž $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o} = 0 \cdot \mathbf{x}$ a $a = 0$ je vlastní číslo A a $\mathbf{x}$ je vlastní vektor příslušející tomuto číslu.

2) Podle bodu 1) má matice $A - a \cdot I_n$ vlastní číslo 0 a vlastní vektor jemu náležející $\mathbf{x}$. Potom je $A\mathbf{x} = a \cdot I_n \cdot \mathbf{x} + (A - a \cdot I_n)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} = a\mathbf{x}$. Tedy a je vlastním číslem A a přísluší mu vlastní vektor $\mathbf{x}$. □

Příklad (4.2)
Najděte nějakou reálnou čtvercovou matici A řádu 3, která současně splňuje následující podmínky:

- A má vlastní číslo -1 a vlastní vektory příslušné tomuto vlastnímu číslu tvoří podprostor
$$\left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\right\}.$$
- A má vlastní číslo 3 a $(1, 1, 0)^T$ je vlastní vektor příslušný tomuto vlastnímu číslu.

Řešení
Lineární zobrazení (tj. i násobení maticí) je jednoznačně určeno tím, kam zobrazuje prvky nějaké báze, tudíž najdeme bázi $\mathbb{R}^3$, která se nám bude zobrazovat. Jako jeden prvek se hned nabízí $(1, 1, 0)^T$ z druhé podmínky. Jako další dva prvky vezmeme bázi prostoru z první podmínky. To můžou být třeba $(1, 2, 0)^T$ a $(1, 0, -2)$, jelikož má stupeň volnosti $3 - 1 = 2$ (tj. jsou všechny), $2 \cdot 1 - 2 + 0 = 0 = 2 \cdot 1 - 0 + (-2)$ (tj. jsou to opravdu prvky daného prostoru) a jsou lineárně nezávislé (LN spolu s $(1, 1, 0)^T$ dokážeme nalezením inverzní matice k matici přechodu báze[a]).

Tedy máme bázi $\mathbb{R}^3$ $B = \left((1, 1, 0)^T, (1, 2, 0)^T, (1, 0, -2)^T\right)$. A z definice vlastního čísla víme, že se má zobrazovat na (ve stejném pořadí) $B' = \left(3 \cdot (1, 1, 0)^T, -1 \cdot (1, 2, 0)^T, -1 \cdot (1, 0, -2)^T\right)$. Tedy A vzhledem k bázím B, B bude vypadat jako:
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poslední část úkolu je zapsat tuto matici (vzhledem ke kanonické bázi), tedy můžeme vyjít z toho, že když A vzhledem k bázím B, B přenásobíme zprava $[id]^K_B$ a zleva $[id]^B_K$ dostaneme A (ze součinu lineárních zobrazení). $[id]^B_K$ je triviální (sloupce jsou vektory $[B]_K$) a $[id]^K_B$ dostaneme její inverzí:
$$[B]^B_K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad [B]^K_B = \left([B]^B_K\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Tudíž hledaná matice je
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 8 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[a] Neboť pokud má čtvercová matice inverzní matici, pak je regulární a tedy má nezávislou posloupnost sloupců.