Příklad (5. – Lax-Milgram lemma vs Fredholm alternative II)
Consider $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a Lipschitz domain. Let $a, b \in \mathbb{R}$. Consider the problem: For given $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$ find $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^2$ solving

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 - a\Delta u_2 + u_1 &= f_1 \quad && \text{in } \Omega, \\ -\Delta u_2 - b\Delta u_1 + u_2 &= f_2 \quad && \text{in } \Omega, \\ u_1 = u_2 = u_3 &= 0 \quad && \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Under which conditions on a, b the system has for any $\mathbf{f}$ a weak solution?

Poznámka (Prerekvizita řešení: vlastní vektory Δ jako ortogonálni báze $W_0^{1,2}$ a ortonormální množina v L^2)
Definujme operátor $\Delta : W_0^{1,2} \to W_0^{1,2}$ tak, že Δu je taková pravá strana $f \in W_0^{1,2}$, že u je slabým řešením $\Delta u = f$, neboli $-\int \nabla u \cdot \nabla v = \int f v$ $(= \int \Delta u\, v)$.

Víme, že existuje ortogonální báze $W^{1,2}$ složená z vlastních vektorů Δ (tj. slabých řešení $-\Delta u = \lambda_k u$), která je zároveň ortonormální množina v prostoru L^2. Navíc nenulová vlastní čísla $\to \infty$.

Řešení
$\mathbf{u} \in \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^2$ je slabé řešení, když $\forall \varphi \in W_0^{1,2}$:

$$\int (-\Delta u_1 - a\Delta u_2)\varphi + \int u_1\varphi = \int f_1\varphi,$$
$$\int (-\Delta u_2 - b\Delta u_1)\varphi + \int u_2\varphi = \int f_2\varphi.$$

Jelikož ω_i je báze $W_0^{1,2}$ a rovnice jsou lineární a „uzavřené na limity“, stačí nám, když budou splněné pro $(\omega_i) \subset W_0^{1,2}$:

$$\lambda_i(u_1)_i + a\cdot\lambda_i\cdot(u_2)_i + (u_1)_i = \overbrace{\int -\Delta(u_1 + au_2)\omega_i}^{=\int((u_1)_i + a(u_2)_i)\omega_i\lambda_i\omega_i + 0} + \overbrace{\int u_1\omega_i}^{=\int((u_1)_i\omega_i)\omega_i + 0} = \int f_1\omega_i = (f_1)_i,$$
$$\lambda_i(u_2)_i + b\cdot\lambda_i\cdot(u_1)_i + (u_2)_i = \underbrace{\int -\Delta(u_2 + bu_1)\omega_i}_{=\int((u_2)_i + b(u_1)_i)\omega_i\lambda_i\omega_i + 0} + \underbrace{\int u_2\omega_i}_{=\int((u_2)_i\omega_i)\omega_i + 0} = \int f_2\omega_i = (f_2)_i,$$

kde $u_j = \sum_{i=1}^{\infty}(u_j)_i\cdot\omega_i$ a $(f_j)_i = \int f_j\omega_j$. Tedy $(u_1)_i$ a $(u_2)_i$ odpovídá řešení

$$\begin{pmatrix}\lambda_i + 1 & a\cdot\lambda_i\\ b\cdot\lambda_i & \lambda_i + 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(u_1)_i\\ (u_2)_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(f_1)_i\\ (f_2)_i\end{pmatrix}.$$

Tj. řešení existuje právě tehdy, když všechny ($\forall i$) tyto soustavy mají řešení (jelikož $\lambda_i \to \infty$, tak konvergence $\sum(f_j)_i\omega_i$ nám garantuje konvergenci $\sum_{i=1}^{\infty}(u_j)_i\omega_i$). To je pro libovolné $\mathbf{f}$ tehdy, když ($\forall i$)

$$\det\begin{pmatrix}\lambda_i + 1 & a\cdot\lambda_i\\ b\cdot\lambda_i & \lambda_i + 1\end{pmatrix} = (\lambda_i + 1)^2 - a\cdot b\cdot\lambda_i^2 \neq 0,$$

tedy například, když $a\cdot b \leqslant 0$.

Under which condition on $\mathbf{f}$, the system has a solution?

Řešení
V případě, že $(\lambda_i + 1)^2 - a\cdot b\cdot\lambda_i^2 = 0$ pro některá i, pak je druhý řádek matice násobkem prvního, tedy i $(f_2)_i$ musí být stejným násobkem $(f_1)_i$ (pro všechna taková i).