Organizační úvod

Úvod

Poznámka (Motivace)
Hledání řešení diferenciálních rovnic. (Např. nahradíme rovnici definicí operátoru a hledáme, kde je operátor identita. Tedy neřešíme rovnice, ale prostory, na kterých máme funkce.)

Definice 0.1

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} \vee \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

1 Banachovy a Hilbertovy prostory

Definice 1.1 (Normovaný lineární prostor)

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $||\cdot|| : X \to [0, \infty)$ nazveme normou na X, pokud

$$||x\,|| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{o},$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||,$$

$$||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x\,|\,|.$$

Tvrzení 1.1

Nechť $(X, ||\;\cdot||)$ *je normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{K}$*.*

Funkce $\varrho(x, y) = ||x - y||$ *je translačně invariantní metrika na* X*.*

Norma je 1*-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na* x*.*

Zobrazení $+ : X \times X \to X$ *a* $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ *jsou spojitá.*

Důkaz
První část byla na MA3. Druhá: Zvol $x, y \in X$. Pak $||y||, ||x|| \leq ||x|| + ||x - y||$, tudíž $|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||$.

Třetí část: Připomenutí: Součin metrických prostorů s maximovou metrikou je metrický prostor. Důkaz tohoto i třetí části je pak jednoduché cvičení. □

Definice 1.2 (Uzavřená a otevřená koule)

$$B_X(x,r) = \{y \in X | ||x-y|| \leq r\}.$$
$$U_X(x,r) = \{y \in X | ||x-y|| < r\}.$$
$$S_X(x,r) = \{y \in X | ||x-y|| = r\}.$$

$$B_X = B(0,1)$$
$$U_X = U(0,1)$$
$$S_X = S(0,1)$$

Definice 1.3 (Banachův prostor)

Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Dále se opakovaly metrické prostory. Úplnost, kompaktnost a Bairova věta.

Tvrzení 1.2

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor. Potom a) Je-li Y Banachův, pak je Y uzavřený v X. Pokud je naopak X Banachův, pak Y je Banachův právě tehdy, když je uzavřený.

Důkaz
Je-li (P,ϱ) úplný, pak $M \subseteq P$ je úplný $\Leftrightarrow$ M je uzavřený. To dává speciálně b).

(P,ϱ) je MP, pak $M \subseteq P$ je úplný $\implies$ M uzavřený. To dává speciálně a). □

Například
$(\mathbb{K}, ||\cdot||_p)$, $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$, kde funkce je $\Omega \to \mathbb{K}$ a norma je definována jako p-tá odmocnina z integrálu funkce na p. $l_p(l)$ resp. $l_p(l, \mathbb{K})$ je diskrétní verze předchozího (tj. se sumou). $\mathbb{C}(K)$, kde K je hausdorfův a kompaktní TP.

c jsou všechny posloupnosti se supremovou normou, c_0 jsou všechny posloupnosti konvergující k 0 se supremovou normou. c_{00} sestává z těch posloupností, kde je jen konečně mnoho nenulových prvků (norma je maximová), je to lineární prostor, ale není Banachův. $c_0(I)$ je zobecnění z $c_0(\mathbb{N})$ na libovolnou diskrétní množinu I, tj. obsahuje „posloupnosti“, kde pro každé ε je pouze konečně mnoho členů větších než ε (pak $(c_0(I), ||\cdot||_\infty)$ je Banachův).

$\mathcal{L}^1([0,1], ||\cdot||_{\mathcal{L}^1})$ (prostor hladkých funkcí na intervalu $[0,1]$), kde $||f||_{\mathcal{L}^1} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$. $\mathcal{M}(K) = \{\mu : Borel(K) \to \mathbb{K} | \mu$ regulární míra$\}$, $||\mu|| := \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(B_i)|, \bigcup B_i = K, B_i$ Borelov

Věta 1.3

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Důkaz

Později. $\square$

Lemma 1.4

Nechť X je vektorový prostor, $||\cdot||_1$ a $||\cdot||_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{X,||\cdot||_1}$, $B_2 = B_{X,||\cdot||_2}$ a $a, b > 0$. Pak $a||x||^2 \leq ||x||_1 \leq b||x||_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně $||\cdot||_1 = ||\cdot||_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.

Důkaz

$\implies$: Zvol $x \in aB_1$, pak $||\frac{x}{a}||_1 \leq 1 \implies x \in B_2$. Opačně: Zvol $x \in B_2$, pak $||x||_2 \leq 1 \implies x \in B_1$.

$\Leftarrow$: Pokud $x = 0$, pak jsou nerovnosti jasné. Zvol $x \neq 0$. Pak $\frac{x}{||x||_1} \in B_1$. Pak $\frac{ax}{||x||_1} \in B_1 \subseteq B_2 \implies a||x||_2 \leq ||x||_1$. Analogicky pro druhý směr. $\square$

Tvrzení 1.5

Nechť X je vektorový prostor a $||\cdot||_1$ a $||\cdot||_2$ jsou normy na X a B_1 a B_2 jako minule. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *Normy $||\cdot||_1$ a $||\cdot||_2$ jsou ekvivalentní.*
2. *Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.*
3. *Zobrazení $\mathrm{id} : (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$ je homeomorfismus.*
4. *Otevřené množiny v $(X, ||\cdot||_1)$ X splývají s otevřenými množinami $(X, ||\cdot||_2)$.*
5. *$||x_n - x||_1 \to 0$, právě když $||x_n - x||_2 \to 0$ pro $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$.*

Důkaz

$1 \Leftrightarrow 2$ plyne z předchozího lemmatu. $3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$ je lehké a platí ve všech MP. $1 \implies 5$ jasné.

$5 \implies 1$: Sporem posloupností jdoucí k 1. TODO $\square$

Definice 1.4

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Poznámka (Fakt)
Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny. (A naopak každá konvexní množina může být koulí v nějaké normě.)

Definice 1.5 (Konvexní obal)

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu $\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M | C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 1.6

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak

$$\operatorname{conv} M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i | x_i \in M, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Důkaz
$\subseteq$: Stačí dokázat, že množina vpravo je konvexní. Přímočaré.

$\supseteq$: Stačí dokázat, že každý prvek vlevo je v konvexním obalu. Indukcí podle n, přímočaré. □

Definice 1.6

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Poznámka (Fakt)
Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X, která obsahuje $U(x, r)$ respektive $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$ a $r \geq 0$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.

Důkaz
Jednoduchý. □

Definice 1.7

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako

$$\overline{\operatorname{span}} M = \bigcap \{Y \supset M | Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$$

a uzavřený konvexní obal jako $\overline{\operatorname{conv}} M = \bigcap \{TODO\}$.

Poznámka (Fakt)
Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.

Poznámka (Fakt)
Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span} M} = \overline{\operatorname{span} \overline{M}}$ a $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\operatorname{conv} \overline{M}}$.

Věta 1.7

Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ *je uzavřený.*

Důkaz
Stačí dokázat pro $\dim Z = 1$ (pak indukcí). Ať $Z = \operatorname{span}(e)$, $e \notin Y$. Ověřme, že $\operatorname{span}(Y \cup \{e\}) = \{y + ke | k \in \mathbb{K}\}$ je uzavřený: Ať $x_n = y_n + k_n e \to x \in X$. Chci $x \in \operatorname{span} Y$.

1. krok: (t_n) je omezená. (Kdyby ne, pak má limitu nekonečno.) Pak ale $|| \frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} + e \; || = \frac{1}{|t_{n_k}|} ||x_{n_k}|| \to 0$, tedy $\frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} \to -e \notin Y$, tedy Y není uzavřená. ↯

Tedy existuje posloupnost (n_k), že $t_{n_k} \to t \in \mathbb{K}$. Pak ale $y_{n_k} = x_{n_k} - t_{n_k} e \to x - te \in Y$. Tedy $\exists z \in Y : x - te = z$, tj. $x = z + te \in \operatorname{span}(Y \cup \{e\})$. □

Důsledek
Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.

TODO

Věta 1.8 (Test úplnosti)

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Ať X je Borelovský, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je AK řada. $s_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$. Chceme (s_n) je cauchy: Buď $\varepsilon > 0$. Ať $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\sum_{n=N}^{M} ||x_n|| < \varepsilon$, $n_0 \leq N < M$. Pak ale pro $n_0 \leq N < M$ je

$$||s_N - s_M|| = ||\sum_{n=N+1}^{M} x_n|| \leq \sum_{N+1}^{M} ||x_N|| < \varepsilon.$$

Tedy (s_n) je konvergentní.

$\Leftarrow$: Ať (x_n) je cauchyovská. Indukcí najdeme podposloupnost, že $||x_{n_k} - x_{n_{k+1}} < 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_1})$$

$$\Longrightarrow \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \lim_{k \to \infty} (x_{n_k} - x_{n_1} + x_{n+1}) = \lim (x_{n_k} - x_{n_1}) + \lim x_{n_1} = z + x_{n_1}.$$

Celkem $\exists (n_k) \nearrow$, že $\lim (x_{n_k})$ existuje. Značme $x = lim_{k \to \infty} x_{n_k}$. Chceme $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. V metrickém prostoru konverguje Cauchyovská posloupnost právě tehdy, pokud existuje její konvergentní podposloupnost. $\square$

Definice 1.8 (Zobecněná řada)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou.

Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada … konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \ \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \subseteq F : ||x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma|| < \varepsilon.$$

Existuje-li $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada … (bezpodmínečně) konvergentn a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma \in \Gamma} ||x_\gamma||$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní.

Definice 1.9 (Bolzanova-Cauchyova podmínka)

Řekneme, že zobecněná řada TODO

Věta 1.9 (Nutná podmínka konvergence)

Nechť $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X. Pak je její součet určen jednoznačně a $(||x_\gamma||)_{\gamma \in \Gamma} \in c_0(\Gamma)$.

Důkaz (Jednoznačnost)
Ať $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = x \neq y = \sum_{\gamma\in\Gamma} = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$. Pak $\forall\varepsilon > 0$:

$$\exists F_x \in \mathcal{F}(\Gamma)\ \forall F \supseteq F_x : ||x - \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma|| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists F_y \in \mathcal{F}(\Gamma)\ \forall F \supseteq F_y : ||x - \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\varepsilon = ||x-y|| \leq ||x - \sum_{F_x\cup F_y} x_\gamma|| + \ ||\sum_{F_x\cup F_y} x_\gamma - y|| < \varepsilon$. ↯ □

Důkaz (Existence)
Chceme $(||x_\gamma||) \in c_0(\Gamma)$: Ať $\varepsilon > 0$ libovolné. Najdeme

$$F \in \mathcal{F}(\Gamma)\ \forall F' \supset F : ||x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\gamma_0 \notin F$ máme

$$||x_{\gamma_0}|| = ||\sum_{\gamma\in F\cup\{\gamma_0\}} x_\gamma - x + x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma|| \leq ||\dots|| + ||\dots|| < \varepsilon.$$

Tedy $\{\gamma\in\Gamma | ||x_\gamma|| > \varepsilon\} \subseteq F \in \mathcal{F}(\Gamma) \implies (||x_\gamma||) \in c_0(\Gamma)$. (Je tam pouze konečný počet prvků větších než ε.) □

Věta 1.10

Nechť X je Banachův prostor.

1. *Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*
2. *Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.*
3. *Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda \subset \Gamma$, pak je i zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ konvergentní.*

Důkaz (1.)
$\implies$: Ať $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ je konvergentní. Zvol $\varepsilon > 0$. Zvolíme

$$F \in \mathcal{F}(\Gamma)\ \forall F' \supseteq F : ||\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\tilde{F} \in \mathcal{F}(\Gamma)$, že $\tilde{F} \cap F = \emptyset$ máme:

$$||\sum_{\gamma\in\tilde{F}} x_\gamma|| = ||\sum_{\gamma\in F\cup\tilde{F}} x_\gamma - \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma|| \leq ||\ldots|| + ||\ldots|| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: Ať $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ splňuje B-C podmínku. Pak najdeme posloupnost $(F_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}(\Gamma)^{\mathbb{N}}$, že

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \wedge \forall F' \mathcal{F}(\Gamma) : F' \cap F_n = \emptyset : ||\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| < \frac{1}{n}.$$

Označ $y_n = \sum_{\gamma\in F_n} x_\gamma$. 1. krok: (y_n) je cauchyovská. (Dokáže se snadno.) 2. krok: Tedy existuje $y \in X : \lim y_n = y$. Chceme $y = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$: Ať $\varepsilon > 0$.

$$\forall F' \supset F : ||y - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| \leq ||y_{n_0} - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| + ||y_{n_0} - y|| = \sum_{\gamma\in F'\setminus F_{n_0}} x_\gamma \leq \frac{1}{n_0} + ||y_{n_0} - y|| < \varepsilon.$$

□

Důkaz (2.)
Víme, že $\sum_{\gamma\in\Gamma} ||x_\gamma||$ je konvergentní. Dle tvrzení níže tedy

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} ||x_\gamma|| = S = \sup\left\{\sum_{\gamma\in\Gamma} |||x_\gamma|||\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\}.$$

Ověříme, že $\sum x_\gamma$ splní B-C podmínku: Ať $\varepsilon > 0$. Ať $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že $S - \varepsilon < \sum_{\gamma\in F} ||x_\gamma||$. Pak $\forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, že $F' \cap F = \emptyset$:

$$||\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| \leq \sum_{\gamma\in F'} ||x_\gamma|| = \sum_{\gamma\in F'\cup F} ||x_\gamma|| - \sum_{\gamma\in F} ||x_\gamma|| < \varepsilon.$$

□

Důkaz (3.)
Snadný důsledek 1., protože B-C podmínka se zjevně dědí na podmnožiny. □

Tvrzení 1.11

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když $\sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma : F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\} < +\infty$. A navíc platí $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma : F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\}$.

Důkaz

$\implies$: Ať $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ konverguje. Pak zvolíme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ $\forall F' \supset F : ||\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma - \sum_{\gamma\in F} a_\gamma|| < 1$. Pak $\forall H \in \mathcal{F}(\Gamma) : \sum_{\gamma\in H} a_\gamma \leq \sum_{\gamma\in H\cup F} a_\gamma \leq \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma + 1$. Tedy $\sup \ldots \leq \sum_{\gamma\in\Gamma} a_p + 1 < \infty$.

$\Leftarrow$: Ať $S := \sup \ldots < \infty$. Chceme $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = S$. Ať $\varepsilon > 0$. Ať $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$ (z definice suprema) taková, že $S - \varepsilon < \sum_{\gamma\in H} a_\gamma$. Pak pro $F' \supset H$ máme

$$|S - \sum_{\gamma\in F'} a_\gamma| = S - \sum_{\gamma\in F'} a_\gamma < S - \sum_{\gamma\in H} a_\gamma < \varepsilon.$$

Tedy $\sum a_\gamma = S$. $\square$

Tvrzení 1.12

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní.

Důkaz

$\implies$: Ať $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| =: S < \infty$. Pak

$$\sup_{F\in\mathbb{F}(\mathbb{N})} \sum_{n\in F} ||x_n|| \leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} ||x_n|| = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| = S < \infty,$$

neboť každá konečná množina v přirozených číslech má maximum (a odebráním kladných prvků sumu zmenšíme).

$\Leftarrow$: Ať $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||x_n||$ je konvergentní, pak dle předchozího tvrzení $S := \sup_{F\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \sum_{n\in F} ||x_n|| < \infty$. Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n\in[N]} ||x_n|| \leq S < \infty.$$

$\square$

Věta 1.13

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v Banachově (pro normovaný lineární prostor je důkaz složitější) prostoru X. Pak následující tvrzení jsou konvergentní:

1. *$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje (říkáme $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně).*
2. *$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ke stejnému součtu.*
3. *$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Důkaz
1 $\implies$ 2: Ať $\varepsilon > 0$ a $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$. Ať $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňuje, že $\forall F' \supseteq F : ||\sum_{n \in F'} x_n - x|| < \varepsilon$, kde $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N} : F \subseteq \{\pi(1), \ldots, \pi(n_0)\}$. Pak $\forall n \geq n_0 :\ ||\sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)} - x|| < \varepsilon$. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = x$.

2 $\implies$ 3: okamžitě. 3 $\implies$ 1: Pro spor předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$, ale $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ nesplňuje B-C podmínku. Zvolme $\varepsilon > 0$ svědčící o tom, že B-C podmínka není splněna. Pak existuje $(F_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$, že $F_n \cap F_m = \emptyset\ \forall n \neq m$, $\max F_n < \min F_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ a $||\sum_{i \in F_n} x_i||$.

Zvolme $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$ splňující, že existuje $(n_k) \nearrow$ a $(p_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, že $\pi(\{n_k, n_k + 1, \ldots, n_k + p_k\}) = F_k\ \forall k \in \mathbb{N}$. Tedy $\forall k \in \mathbb{N} : ||\sum_{i=n_k}^{n_k+p_k} x_{\pi(i)}|| = ||\sum_{i \in F_k} x_i|| \geq \varepsilon$. To však znamená, že $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ nesplňuje B-C podmínku, tedy není konvergentní. ↯ □

Věta 1.14

Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.

Důkaz
Jasný z minulé věty. □

Navíc v $\mathbb{R}$ platí ekvivalence.

Věta 1.15

Pokud $\dim X = +\infty$, *pak* $\exists (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ *konverguje, ale* $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ *není konvergentní.*

2 Lineární operátory a funkcionály

Poznámka (Opakovali jsme)
Lineární zobrazení (viz lingebra), dále:

Věta 2.1

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *T je spojité.*
2. *T je spojité v jednom bodě.*
3. *T je spojité v 0.*
4. *$\exists C \geq 0$ tak, že $||T(x)|| \leq C||x|| \ \forall x \in X$.*
5. *T je Lipschitzovské.*
6. *T je stejnoměrně spojité.*
7. *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*
8. *$T(B_X)$ je omezená.*
9. *$T(U(0, \delta))$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.*

Prostor $\mathcal{L}(X < Y)$ s normou $||T|| = \sup_{x \in B_x} ||T(x)||$ je normovaný lineární prostor.

Lemma 2.2

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

- $||T(x)|| \leq ||T|| \cdot ||x||$ *pro každé* $x \in X$.
- $||T|| = \sup_{x \in S_X} ||T(x)|| = \sup_{x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}} \frac{||T(x)||}{||x||} = \sup_{x \in U_X} ||T(x)||$.
- $||T|| = \inf\{C \geq 0 | \ ||T(x)|| \leq C||x|| \forall x \in X\}$.

Důkaz
Pro $x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$ platí $||T(x)|| = ||T(\frac{x}{||x||})|| \cdot ||x|| \leq ||T|| \cdot ||x||$.

$S_X \subseteq B_X$, tedy $||T|| \geq \sup_{x \in S_X} ||T(x)||$. $\forall x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$:

$$\frac{||T(x)||}{||x||} = ||T(\frac{x}{||x||})|| \leq \sup_{y \in S_X} ||T(y)||,$$

tedy $\sup_{x \in S_X} ||T(x)|| \geq \sup_{x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}} \frac{||T(x)||}{||x||} =: S_3$. Pro $x \in U_X \setminus \{\mathbf{o}\}$ platí $||T(x)|| \leq \frac{||T(x)||}{||x||} \leq S_3$, tedy $\sup_{x \in U_x} ||T(x)|| \leq S_3$. Konečně, pro $x \in B_x$: $||T(x)|| \leftarrow ||T\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) x\right)|| \leq \sup_{x \in U_X} =: S_4$, tedy $||T_x|| = \lim_{n \to \infty} ||T\left(1 - \frac{1}{n}\right) x|| \leq S_4 \implies \sup_{x \in B(x)} ||T(x)|| \leq S_4$.

Dle prvního bodu máme nerovnost „$\geq$“. Pro „$\leq$“ zvolme $\varepsilon > 0$ … ať $\tilde{c} > 0$ je takové, že $\tilde{c} < \inf\{\ldots\} + \ \varepsilon$. Pak $||T|| = \sup_{x \in B_x} \frac{||T_x||}{||x||} \leq \inf\{\ldots\}$. $\square$

Definice 2.1

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X.