Příklad (4.1)
Nechť $\triangle_{ABC}$ je sférický trojúhelník, označme úhly u vrcholů A, B, C postupně α, β, γ. Ukažte, že plošný obsah trojúhelníku $\triangle_{ABC}$ nezávisí na délkách stran trojúhelníku a vypočte se pomocí vzorce

$$S(\triangle_{ABC}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Důkaz
Řezy rovinami OAB, OAC, OBC rozdělí sféru na trojúhelníky $\triangle_{ABC} \cong \triangle_{A'B'C'}$, $\triangle_{A'BC} \cong \triangle_{AB'C'}$, $\triangle_{AB'C} \cong \triangle_{A'BC'}$, $\triangle_{ABC'} \cong \triangle_{A'B'C}$ (shodnosti vyplývají ze středové souměrnosti), kde $A' = -A$, $B' = -B$ a $C' = -C$.

Dále si všimneme, že $\triangle_{ABC}$ a $\triangle_{A'BC}$ dohromady tvoří plochu mezi „poledníky“ ABA' a ACA', která má obsah $\frac{\alpha}{2\pi}$ obsahu sféry, jelikož sféra vznikne rotace polokružnice o 2π, kdežto tato plocha vznikne rotací jen o γ, protože rotace kolem AA' o γ zobrazí tečnu AB na tečnu AC, tedy zobrazí ABA' na ACA'. Symetricky $S(\triangle_{ABC}) + S(\triangle_{AB'C}) = \beta$ a $S(\triangle_{ABC}) + S(\triangle_{ABC'}) = \gamma$. A symetricky i prohozené „čárkované“ a „nečárkované“ vrcholy.

Takto jsme dostali 6 ploch mezi „poledníky“, které nám dohromady pokryjí sféru, v trojúhelnících s 1 nebo 2 čárkovanými jenom jednou, v trojúhelnících $\triangle_{ABC}$ a $\triangle_{A'B'C'}$ dokonce trojnásobně. Tedy když sečteme obsahy všech těchto ploch a odečteme obsah sféry, dostaneme 2 krát součet obsahů těchto trojúhelníků, tedy $4S(\triangle_{ABC})$. Tedy už stačí jen vydělit 4:

$$S(\triangle_{ABC}) = \frac{S \cdot \frac{\alpha}{2\pi} + S \cdot \frac{\beta}{2\pi} + S \cdot \frac{\gamma}{2\pi} + S \cdot \frac{\alpha}{2\pi} + S \cdot \frac{\beta}{2\pi} + S \cdot \frac{\gamma}{2\pi} - S}{4} =$$

$$\frac{S}{4 \cdot 2\pi} \cdot (2(\alpha + \beta + \gamma) - 2\pi) = \frac{S}{4\pi} \cdot (\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Např. z Archimédovy věty pak víme, že $S = 4\pi$, tedy zlomek je 1 a dostáváme přesně chtěný výraz. $\square$

Příklad (4.2)
Ukažte, že pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ platí rovnost

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{x} \cdot v \\ \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{y} \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

Důkaz
Determinant je lineární v každém sloupci / řádku matice a skalární součin je bilineární zobrazení, tedy tento je lineární vůči $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ (řádky) a $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ (sloupce). Stejně tak skalární i vektorový součin jsou bilineární, tedy levá strana rovnice je také lineární vůči všem vektorům, tedy nám tvrzení stačí ověřit pro kanonickou bázi $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Pokud $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, resp. $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, tak vektorový součin $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, resp. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, je nulový a matice vpravo má shodné řádky, resp. sloupce, tedy je singulární, tj. má determinant 0.

Pokud vlevo budou vektorové součiny různých dvojic vektorů, pak jejich výsledek budou jiné ± 1 krát bázové vektory, tedy jejich skalární součin bude 0. Stejně tak vpravo, BÚNO $\mathbf{x} \neq \mathbf{u}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{v}$, bude mít matice první řádek nulový, tj. bude singulární a determinant bude 1.

Jestliže prohodíme $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ (resp. $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$), tak se vlevo změní znaménko příslušného vektorového součinu, tedy i celého skalárního součinu a vpravo se prohodí řádky (resp. sloupce), tedy determinant také změní znaménko. Proto nám zbývá dokázat, že věta platí pro $\mathbf{x} = \mathbf{u} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \mathbf{v} = \mathbf{e}_j$, $i \neq j$. Vlevo potom dostáváme skalární součin $(\pm\mathbf{e}_k) \cdot (\pm\mathbf{e}_k) = 1$ a vpravo je jednotková matice, která má determinant také 1. $\square$

Příklad (4.3)
Ukažte, že ve sférické geometrii platí pro sférický trojúhelník vztah

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma,$$

kde a, b, c jsou délky stran trojúhelníka a γ je úhel v trojúhelníku proti straně c.

Jaký tvar má Pythagorova věta ve sférickém trojúhelníku?

Důkaz
Označme A, B, C vektory OA, OB, OC a N_1, N_2, N_3 jednotkové normály k rovinám OBC, OAC, OAB směřující ven z tělesa $OABC$. Nejprve ukážeme, že $C \times B = N_1 \cdot \sin a$. Zřejmě a je úhel svíraný vektory B a C (tak je mimo jiné definován radián) a N_1 má směr $C \times B$, tedy vztah platí (pokud nevíme, že vektorový součin je velikosti sinu úhlu sevřeného danými vektory krát jejich velikost, tak si můžeme BÚNO rotovat C, B tak, aby měli souřadnice $(1, 0, 0)$ a $(\cos a, \sin a, 0)$ a vynásobit na $(0, 0, \sin a)$). Symetricky $A \times C = N_2 \cdot \sin b$.

Následně si můžeme všimnout, že úhel svíraný normálami (ležícími v jedné rovině) rovin je $\frac{\pi}{2}$ − „protější“ (ležící v opačných polorovinách) úhel svíraný těmito rovinami, což je například dobře vidět na řezu rovinou danou těmito normálami. Tedy normály N_1 a N_2 svírají $\frac{\pi}{2}$ − úhel mezi OBC a OAC, který je roven γ, jelikož tečny k a a b leží v těchto rovinách a zároveň leží obě v rovině kolmé na OAC a OBC, tedy úhel mezi tečnami je roven úhlu mezi rovinami.

To nám dává $N_1 \cdot N_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = -\cos\gamma$, jelikož skalární součin je zase velikost vektorů krát kosinus mezi nimi (zase víme, nebo odvodíme z rotace). Ze stejného důvodu je $C \cdot C = 1$, $B \cdot A = \cos c$, $A \cdot C = \cos b$ a $B \cdot C = \cos a$. Použijeme předchozí příklad (rozepíšeme determinant):

$$(C \times B) \cdot (A \times C) = (A \cdot C)(B \cdot C) - (C \cdot C)(B \cdot A),$$

$$(N_1 \cdot \sin a) \cdot (N_2 \cdot \sin b) = (\cos b)(\cos a) - 1(\cos c),$$

$$\cos a \cos b = -(N_1 \cdot N_2) \sin a \cdot \sin b + \cos c,$$

$$\cos a \cos b = \cos\gamma \sin a \cdot \sin b + \cos c.$$

Pythagorova věta (dosadíme $\gamma = \pi/2$) pak je

$$\cos a \cos b = \cos c.$$

□