Organizační úvod

TODO!!!

Úvod

TODO!!!

1 Shodná zobrazení

Definice 1.1

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí $||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||$.

Lemma 1.1

Přímo z definice plyne, že složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti je opět shodnost.

Důkaz

Triviální. □

TODO!!!

Definice 1.2 (Grupa)

Množinu s jedinou binární operací $(M, \circ)$ nazveme grupou, jestliže je tato operace asociativní, existuje pro ní neutrální (jednotkový) prvek a ke každému prvku existuje prvek inverzní.

Důsledek (Grupa shodností)

Shodnosti jsou surjektivní a vzhledem ke skládání tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{E}(n)$.

Důkaz

Shodná zobrazení jsou tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{p}$, $g(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{q}$, kde $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou ortogonální. Potom

$$f^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}, (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q}.$$

□

Definice 1.3 (Přímé zobrazení)

Zobrazení f nazveme přímé, jestliže $\det \mathbf{A} = 1$, a nepřímé, jestliže $\det \mathbf{A} = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu $\mathbb{E}_+(n)$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{A}$ jednotková matice nazýváme posunutí a tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž $\mathbb{R}^n$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{p}$ nulový vektor tvoří podgrupu označovanou $\mathbb{ON}(n)$ (ortonormální grupa).

Důkaz
To, že jsou to podgrupy se dokáže jednoduše přes uzavřenosti. □

Poznámka
Shodná zobrazení můžeme vyjádřit jako kartézský součin, ale grupové operace by pak nefungovali. Proto je množina shodných zobrazení definovaná tzv. semidirektním součinem: $\{(\mathbf{A}, \mathbf{p})\} = \mathbb{ON} \ltimes \mathbb{R}^n$.

Věta 1.2

Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$ platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici rozměrů $(n+1) \times (n+1)$, tj.

$$f \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

Důkaz
Plyne z maticového násobení. □

Definice 1.4 (Asociovaný homomorfismus, samodružné směry, samodružné body)

Mějme shodné zobrazení $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$. Jeho body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme samodružné body. Lineární zobrazení $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dané maticí $\mathbf{A}$ nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f.

Řekneme, že množina M je samodružná množina zobrazení f, jestliže ji zobrazení zachovává (jako celek, ne nutně každý její bod zvlášť). Přesněji jestliže platí

$$\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{X} \in \mathbb{M} \implies f(\mathbf{X}) \in M.$$

Lemma 1.3

Přímka $p : C + \ < \mathbf{v} >$ je samodružnou množinou shodnosti f právě tehdy, když $< \mathbf{v} >$ je jeho samodružný směr a $f(C) - C$ je násobkem $\mathbf{v}$.

Důkaz

Ať $\mathbf{D} = \mathbf{C} + \mathbf{v}$. Z linearity je p samodružná právě tehdy, když $f(\mathbf{C}), f(\mathbf{D}) \in p$. To už dokážeme rozepsáním. □

Věta 1.4 (Klasifikační věta v $\mathbb{R}^2$)

Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(2)$ nastane právě jedna z těchto možností:

f je přímá shodnost a

- *má všechny body samodružné a všechny směry samodružné s vlastním číslem 1. Pak jde o identitu.*
- *má právě jeden samodružný bod, pak ji nazýváme otočení. Samodružné směry pak nemá buď žádné, nebo všechny s vlastním číslem -1. Tedy jde libovolné otočení nebo o otočení o π (= středová souměrnost).*
- *nemá žádný samodružný bod a všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem 1. Pak ji nazýváme posunutí.*

f je nepřímá shodnost. Pak má právě dva samodružné směry, jeden s vlastním číslem 1 a jeden s vlastím číslem -1 a

- *buď má právě jednu přímku samodružných bodů, pak ji nazýváme osová souměrnost,*
- *nebo nemá žádné samodružné body, pak ji nazýváme posunutá osová souměrnost.*