1 Úvod

Poznámka (Co je diskrétní matematika)
Protipól matematiky spojité. Souhrnný název pro matematické disciplíny, zabývající se diskrétními objekty.

Poznámka (Co je potřeba)
Cvičení + zkouška z věcí z přednášky.

Poznámka (literatura)
Kapitoly z diskrétní matematiky od Matouška.

Definice 1.1 (Důkaz (neformální))

Rozebírání tvrzení na tvrzení, která už jsou zřejmá.

Definice 1.2 (Definice (neformální))

Definujeme objekty pomocí jednodušších a jednodušších, až axiomů.

Definice 1.3 (Důkaz sporem)

Dokážeme φ tím, že vyvrátíme φ

Definice 1.4 (Důkaz matematickou indukcí)

Dokážeme $\varphi(n), \forall n \in \mathbb{N}$ tak, že dokážeme $\varphi(0) \land (\forall n \in \mathbb{N})(\varphi(n) \implies \varphi(n+1))$

Definice 1.5 (Dolní a horní celá část)

$\lceil x \rceil$ je nejbližší nižší celé číslo k x

$\lfloor x \rfloor$ je nejbližší vyšší celé číslo k x

Definice 1.6 (Sčítání mnoha čísel)

$\sum_{i=13}^{n} x_i = x_{13} + x_{14} + \ldots + x_n =$ Sčítání x od indexu 13 do indexu n

$\sum_{\emptyset} = 0$

Definice 1.7 (Sčítání mnoha čísel)

$\prod_{i=13}^{n} x_i = x_{13} \cdot x_{14} \cdot \ldots \cdot x_n =$ Násobení x od indexu 13 do indexu n

$\prod_{\emptyset} = 1$

Poznámka (Klasické množiny)
$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

Poznámka (Klasické množinové operace)

$$x \in \mathbb{A}$$
$$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$$
$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$$
$$\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$$
$$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$$
$$\mathbb{A} \triangle \mathbb{B} = (\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}) = \text{disperze}$$
$$2^{\mathbb{A}} = \mathcal{P}(\mathbb{A})$$

Definice 1.8 (Uspořádaná dvojice)

Uspořádaná dvojice je (x, y) nebo $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Vytváří se např. kartézským součinem $\mathbb{A} \times \mathbb{B} := \{(a, b) | a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}\}$.

Uspořádaná trojice je $(x, y, z) = ((x, y), z) = (x, (y, z))$. Atd. pro n-tice.

Definice 1.9 (Relace)

$\mathbb{A}$ je relace (binární) mezi množinami $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y} \equiv \mathbb{A} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

$\mathbb{A}$ je relace (binární) na množině $\mathbb{X} \equiv$ mezi $\mathbb{X}$ a $\mathbb{X}$.

Inverze je relace mezi $\mathbb{Y}$ a $\mathbb{X}$: $R^{-1} := \{(y, x) | (x, y) \in R\}$.

Skládání $T = R \circ S = \{(x, z) | \exists y : xRy \wedge ySz\}$

Diagonála = diagonální relace: $\triangle x := \{(x, x) \in \mathbb{X}\}$

Definice 1.10 (Funkce = zobrazení)

Funkce z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ je relace A mezi $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ taková, že $\forall x \in \mathbb{X} \exists! y \in \mathbb{Y} : xAy$

Definice 1.11 (Vlastnosti funkcí)

Funkce $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ je:

- prostá (injektivní) $\equiv \nexists x, x' \in \mathbb{X} : x \neq x' \wedge f(x) = f(x')$
- na $\mathbb{Y}$ (surjektivní) $\equiv \forall y \in \mathbb{Y} \exists x \in \mathbb{X} : f(x) = y$
- vzájemně jednoznačná (bijektivní, 1-1 (jedna ku jedné)) $\forall y \in \mathbb{Y} \exists! x \in \mathbb{X} : f(x) = y$

Definice 1.12 (Vlastnoti relací)

Relace R na $\mathbb{X}$ je:

- reflexivní $\equiv \forall x \in \mathbb{X} : xRx$
- symetrická $\equiv \forall x, y \in \mathbb{X} : xRy \implies yRx (\Leftrightarrow R = R^{-1})$
- antisymetrická $\equiv \forall x, y \in \mathbb{X} : xRy \wedge yRx \implies x = y$
- tranzitivní $\equiv \forall x, y, z \in \mathbb{X} : xRy \wedge yRz \implies xRz$

Definice 1.13 (Ekvivalence)

Relace se nazývá ekvivalence, pokud je tranzitivní, reflexivní a symetrická.

Definice 1.14 (Ekvivalenční třídy)

$$R[x] = \{y \in \mathbb{X} | xRy\}$$

Věta 1.1

$$1) \forall x \in \mathbb{X} R[x] \neq \emptyset$$
$$2) \forall x, y \in \mathbb{X} : R[x] = R[Y] XOR R[x] \cap R[y] = \emptyset$$
$$3) \; \{R[x] | x \in \mathbb{X}\} \; \textit{určuje ekvivalenci } R \textit{ jednoznačně}$$

Důkaz
1) triviální

2) Dokážeme: pokud $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$, pak $R[x] = R[y]$. (Tranzitivita).

3) $\square$

Definice 1.15 (Rozklad množiny)

Množinový systém $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathbb{X}}$ je rozklad množiny $\mathbb{X}$ tehdy, když
(R1) $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{S} : \mathbb{A} \neq \emptyset$,
(R2) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{S} : \mathbb{A} \neq \mathbb{B} \implies \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$,
(R3) $\bigcup_{\mathbb{A} \in \mathcal{S}} = \mathbb{X}$.

Definice 1.16 (Uspořádání)

Relace R na množině $\mathbb{X}$ je uspořádání $\equiv$ R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Poznámka
Někdy se říká částečné uspořádání a částečně uspořádaná množina (čum), aby se zdůraznilo, že nemusí být lineární.

Definice 1.17 (Uspořádaná množina)

Dvojice (X, R), kde X je množina a R je uspořádání na ní.

Definice 1.18 (Porovnatelné prvky a lineární uspořádání)

$xy \in X$ jsou porovnatelné $\equiv xRy \vee yRx$

Uspořádání R je lineární $\equiv \forall x, y \in X$ porovnatelné.

Definice 1.19 (Ostrá nerovnost)

$(X, \leq)$ ČUM $\rightarrow (X, <) : x < y \equiv x \leq y \wedge x \neq y$

Definice 1.20 (Hasseův diagram)

Poznámka
Splňuje následující: 1. To, co je nahoře je větší než to, co je dole
2. Nezakreslujeme tranzitivitu

Definice 1.21 (Bezprostřední předchůdce ($x \lhd y$))

x je bezprostřední předchůdce y v uspořádání $\leq \equiv x < y \wedge (\nexists z : x < z \wedge z < y)$

V hasseově diagramu jsou mezi vrcholy (prvky množiny) hrany pouze, pokud dolní vrchol je bezprostředním předchůdcem toho nahoře.

Definice 1.22 (Nejmenší, minimální, největší a maximální prvek)

- $x \in \mathbb{X}$ je nemenší $\equiv \forall y \in \mathbb{X} : x \leq y$
- $x \in \mathbb{X}$ je minimální $\equiv \nexists y \in \mathbb{X} : y < x$
- největší a maximální obdobně

Lemma 1.2

Každá konečná neprázdná ČUM má minimální prvek.

Důkaz (Důkazík)
$x_1 \in \mathbb{X}$ zvolíme libovolně, pokud x_1 není minimální $\exists x_2 < x_1 ... \exists k \in \mathbb{N} x_k$ je minimální. □

Definice 1.23 (Řetězec)

Pro $(X, \leq)$ ČUM $A \subseteq X$ je řetězec $\equiv \forall a, b \in A : a, b$ jsou porovnatelné.

Naopak $A \subseteq X$ je antiřetězec (nezávislá množina) $\equiv \nexists a, b \in A$ různé a porovnatelné.

Definice 1.24 (Délka nejdelšího řetězce)

$$\omega(X, \leq) := \text{maximum z délek řetězců („výška uspořádání“)}$$
$$\alpha(X, \leq) := \text{maximum z „délek“ (velikostí) antiřetězců („šířka uspořádání“)}$$

Věta 1.3 (O dlouhém a Širokém)

$$\forall (X, \leq) ČUM : \alpha(X, \leq) \cdot \omega(X, \leq) \geq |X|$$

(Neboli buď $\alpha \geq \sqrt{|X|}$ nebo $\omega \geq \sqrt{|X|}$.)

Důkaz
Sestrojíme $X_1 := \{x \in X | x \text{je minimální}\}$.

Když máme $X_1, \dots, X_i$, $Z_i := X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i} x_j\right)$. Pokud $Z_i = \emptyset$, tak jsme skončili, jinak $X_{i+1} := \{x \in Z_i | x \text{je minimální v} Z_i\}$.

Přitom $\forall i$ X_i je antiřetězec, $\{X_1, \dots, X_k\}$ tvoří rozklad X a $\exists \{r_j \in X_j\}_{j=1}^{k}$, $\{r_j\}_{j=1}^{k}$ je řetězec. ($r_k \in X_k$ zvolíme libovolně, $r_j \notin X_{j-1} \implies \exists r_{j-1} \in X_{j-1} : r_{j-1} < r_j$.)

$$|X| = \sum_{i=1}^{k} |X_i| \leq k \cdot \max_{1 \leq i \leq k} |X_i| \leq \omega \cdot \alpha.$$

$\square$