Příklad (1)
V daleké zemi mají mince v hodnotě 3 koruny a 5 korun. Dokažte, že pomocí těchto mincí lze zaplatit libovolnou částku vyšší než 7 korun.

Důkaz (přímý)
Částky 8, 9, 10 zaplatím jako $3+5$, $3+3+3$, $5+5$. Libovolnou vyšší částku mohu zapsat jako $3k-1$, $3k$, nebo $3k+1$, $k \in \mathbb{N} - \{1,2,3\}$ (jelikož částky jsou celé a větší než $3 \cdot 3 + 1$). Tyto částky zaplatím jako:

$$3k - 1 = 3 + 5 + 3(k-3)$$

$$3k = 3 + 3 + 3 + 3(k-3)$$

$$3k + 1 = 5 + 5 + 3(k-3)$$

Tedy pro libovolnou částku větší než 7 jsem ukázal konstrukci zaplacení mincemi v hodnotách 3 a 5 korun a tedy všechny tyto částky zaplatit lze. $\square$

Příklad (2)
Dokažte, že lze tabulku o $2^n \times 2^n$ čtvercových políčkách, kde jedno rohové pole chybí, pro každé přirozené n vydláždit kostkami ze 3 čtverečků ve tvaru písmene L.

Lemma

Z kostičky tvaru L s 3 čtverečky $k \times k$ ($k \in \mathbb{N}$) jsem schopen vyrobit kostičku tvaru L s 3 čtverečky $2k \times 2k$.

Důkaz (Konstrukcí)
AABB
ACCB
DC
DD ☐

Důkaz (Matematickou indukcí)
Pro $n = 1$ odpovídá tabulka bez rohového políčka kostičce tvaru L. Zároveň mám kostičku ve tvaru L s 3 čtverečky $2^{n-1} \times 2^{n-1} = 1 \times 1$.

Nechť tedy pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí, že tabulku o velikosti $2^n \times 2^n$ bez r. políčka umím vyplnit a mám k dispozici kostičku tvaru L s 3 čtverečky $2^{n-1} \times 2^{n-1}$.

Nyní vezmu tabulku $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ bez r. políčka. Vím, že čtverec $2^n \times 2^n$ BRP umím vyplnit, tedy se zaměřím na zbývající část tabulky, tedy tabulku tvaru L skládající se ze 3 čtverečků velikosti $2^n \times 2^n$. Z lemma vidím, že si z kostičky tvaru L s 3 čtverečky $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ umím vyrobit kostičku tLs3č $2^n \times 2^n$, kterou pokryji tento zbytek tabulky.

Tedy jsem dokázal, že nejenom, že pro $n + 1$ jsem schopen tabulku vyplnit, ale i sestrojit kostičku nutnou pro pokračování indukce. ☐

Příklad
Dokažte následující rovnosti:

$$\sum_{i=1}^{n}(6i-7) = 3n^2 - 4n \tag{1}$$

$$\prod_{i=2}^{n}\frac{i-1}{i} = \frac{1}{n} \tag{2}$$

Důkaz ((1) matematickou indukcí)
Pro $n = 1$ jistě $6 - 7 = -1 = 3 - 4$.

Nechť tedy pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ rovnost platí. Potom:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(6i-7) = \sum_{i=1}^{n}(6i-7) + 6(n+1) - 7 = 3n^2 - 4n + 6(n+1) - 7 =$$

$$= 3(n^2 + 2n + 1) - 4n - 4 = 3(n+1)^2 - 4(n+1)$$

Tedy výraz rovnost i pro $n + 1$, čímž je důkaz matematickou indukcí hotov. $\square$

Důkaz ((2) přímý)

$$\prod_{i=2}^{n}\frac{i-1}{i} = \prod_{i=2}^{n}(i-1)\cdot\frac{1}{i} = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{3}\cdots(n-1)\cdot\frac{1}{n} = 1\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$\square$