1 Preliminaries

Definice 1.1 (Slabá derivace)

Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Říkáme, že $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ je slabou derivací f podle i-té proměnné, pokud platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \partial_i \varphi d\lambda^n = -\int_{\mathbb{R}^n} g \varphi d\lambda^n \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Definice 1.2 (Značení)

$$\partial_i f(x) = \lim_{h \to \mathbf{o}} \frac{f(x + e_i h) - f(x)}{h}, \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix},$$

$$D_i f \text{ slabá derivace dle } i\text{-té proměnné}, \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ Dn f(x) \end{pmatrix},$$

$D \cdot$ bude také značit derivaci distribuce? (Distribuční derivaci?)

$f \in Lip(X, Y)$ jsou všechny Lipschitzovská zobrazení (tj. $\varrho_Y(f(a), f(b)) \leqslant lip(f) \cdot \varrho_X(a, b)$) z X do Y.

$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ (symetrický rozdíl množin).

Definice 1.3 (Lebesgueova–Stieltjesova míra)

μ míra vytvořená $M : I(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ pomocí Caratheodorovy konstrukce se nazývá Lebesgueova–Stieltjesova míra.

Definice 1.4 (Radonova míra)

$\mathcal{M}^+_{loc}(\Omega)$ je prostorem všech Borelovských měr na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, které jsou vnitřně regulární ($\mu(E) = \sup\{\mu(K) | K \subset E\}$), lokálně kompaktní.

Pokud navíc $|\mu| < \infty$, pak je to prostor $\mathcal{M}^+$. $\mathcal{M}_{loc}(\Omega) = \mu^+ - \mu^-$.

Definice 1.5 (?)

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

$$\psi_k(x) = k^n \psi(kx)$$

Poznámka

$$\int |\Psi| = 1, \qquad \psi(x) = \psi(x'), |x| = |x'|, \qquad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$\psi_k(x) > 0 \implies |x| < \frac{1}{k}$$

Věta 1.1 (Lebesgueova o derivaci 1)

Nechť $1 \leqslant p < \infty$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená. A nechť $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. Potom pro skoro všechna $x \in \Omega$:

$$\lim_{r \to 0} ⨍_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p d\lambda^n(x) = 0.$$

Důkaz

Bez důkazu. □

Definice 1.6 (Lebesgueův bod)

Každý takový bod se nazývá (p) Lebesgueův bod.

Definice 1.7 (Konvoluce)

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Za podmínek, kdy pravá strana existuje. g může být i míra.

Poznámka

Je-li $f * g \in L^1$ pak $f * g = g * f$. (Z Fubiniovy věty.)

Tvrzení 1.2

Nechť $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Pak $\psi_k * u(x)$ je definováno $\forall x \in \mathbb{R}^n$ a $\forall k \in \mathbb{N}$.

Důkaz

Nebyl. Viz Funkcionalka. □

Věta 1.3

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Pak $\psi_k * u \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ a $\partial_i(\psi_k * u) = \partial_i \psi_k * u$.

Důkaz

Nebyl. Viz Funkcionalka. □

Lemma 1.4

Nechť $f \in L^p$. *Potom* $\psi_k * f \in L^p$ $p \in [1, \infty]$. *Navíc* $\|\psi_k * f\|_p \leqslant \|f\|_p$.

Důkaz

Nebyl. Viz Funkcionalka. □

Věta 1.5

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *nechť* x *je Lebesgueův bod* f *(a* $f(x) = \lim_{r \to 0} ⨍_{B(x,r)} f$*) pak* $\psi_k * f(x) \xrightarrow{k} f(x)$.

Důkaz

Nebyl. □

Věta 1.6

Nechť $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Potom* $\psi_k * f \rightrightarrows f$ *na* $\mathbb{R}^n$.

Důkaz

Nebyl. □

Lemma 1.7

Pro $p \in [1, \infty)$ *platí* $\overline{\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{L^p} = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz

Nebyl. (Docela jednoduchý.) □

Věta 1.8

$1 \leqslant p < \infty$: $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \implies \psi_k * f \to f$ *v* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz

Nebyl. □

Poznámka

$(\psi_1 * f \xrightarrow{w} f$ v $L^\infty)$

Věta 1.9

Nechť $u \in Lip(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. *Pak* u *je slabě diferencovatelná na* $\mathbb{R}^n$ *a* $\|Du\|_{L^\infty} \leqslant lip(u)$.

Důkaz
Nechť $x, z \in \mathbb{R}^n$.

$$|\psi_k * u(z) - \psi_k * u(x)| = \left| \int (u(z-y) - u(x-y))\psi_k(y) d\lambda^n \right| \leqslant lip(u)|z-x|.$$

$lip(u_k) := lip(\psi_k * u) \leqslant lip(u)$. Nechť B je koule v $\mathbb{R}^n$. $\{\nabla u_k\}$ je omezená v $L^2(B)$ slabě konverguje k $g \in L^2(B, \mathbb{R}^n)$.

$\{f \in L^2(B) : \|f\|_\infty \leqslant c\}$ konvexní a uzavřená $\implies$ slabě uzavřená $\implies$ $\|g\|_\infty \leqslant lip(u)$. Tedy

$$\int_B u \nabla \varphi \leftarrow \int_B u_k \nabla \varphi = - \int_B \nabla u_k \varphi \to - \int_B g \varphi.$$

□

Lemma 1.10

Nechť $E \subset \Omega$ a pro nějaké $r > 0$: $E + B(\mathbf{o}, r) \subset \Omega$. Potom $\exists \eta \in \mathcal{D}(\Omega)$, že $\eta = 1$ na E.

Důkaz
$E + B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset\subset \Omega$. Najdeme k, že $\frac{1}{k} < \frac{r}{2}$. Potom $\psi_k * \chi_{E+B\left(0,\frac{r}{2}\right)}$ je hledaná funkce. □

2 Absolutně spojité funkce

Poznámka (V této kapitole vždy)
$I = (a_0, b_0)$ je interval. $\mathbb{D}(I)$ bude množina všech konečných dělení ($a_0 < x_0 < \ldots < x_n < b_0$) intervalu.

Definice 2.1 (Variace funkce)

Nechť $D = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_m\} \in \mathbb{D}(I)$ a $u : I \to \mathbb{R}$. Potom variace u podle dělení D je $V(u, D) = \sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|$.

Variace u je $V(u, I) = \sup_{D \in \mathbb{D}(I)} V(u, D)$.

Je-li $V(u, I) < \infty$ pak říkáme, že u má konečnou variaci na I.

Definice 2.2 (Absolutně spojité funkce)

Nechť $u : I \to \mathbb{R}$. Říkáme, že u je (klasicky) absolutně spojité na I, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^m$ po dvou disjunktní $\sum_{i=1}^m b_i - a_i < \delta$ je $\sum_{i=1}^n |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$.