

Organizační úvod

Poznámka

Podmínkou zápočtu je splnění 1 domácí práce a 1 písemného testu. Není potřeba docházka.

Bude moodle (přístup dají cvičící). Budou tam poznámky k přednášce, cvičebnice a bude se tam odevzdávat domácí práce.

Je dobré umět míru.

1 Úvod

Poznámka

Pravděpodobnost popisuje modely popisující náhodné jevy.

Statistika se pak snaží popsat reálné věci za pomoci těchto modelů.

Poznámka (Historie)

Klasická pravděpodobnost navazuje na dílo Kolmogorova, který popisoval axiomatickou pravděpodobnost.

2 Pravděpodobnostní prostor

Definice 2.1 (Pravděpodobnostní prostor, pravděpodobnost)

Pravděpodobnostní prostor je trojice (Ω, \mathcal{A}, P) , kde Ω je neprázdná množina, \mathcal{A} je σ -algebra a P je pravděpodobnost.

Pravděpodobnost P je množinová funkce $\mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ splňující:

- $P(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$, (nezápornost)
- $P(\Omega) = 1$, (normovanost)
- jsou-li $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, pak $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. (σ -aditivita)

┌ *Poznámka* (Interpretace)

Ω se často nazývá stavový prostor a obsahuje všechny „realizace náhody“ neboli elementární jevy, tj. všechny možnosti, o kterých uvažují.

\mathcal{A} je σ -algebra náhodných jevů. P pak obsahuje veškerou informaci o té dané náhodné situaci.

└ Pokud nastal $\omega \in A \in \mathcal{A}$ ($\omega \in \Omega$), pak nastal jev A .

Definice 2.2 (Klasický pravděpodobnostní prostor, diskrétní pravděpodobnostní prostor, spojitý pravděpodobnostní prostor, indikátor)

Ω konečná, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $P(\{a\}) = \frac{1}{n} \forall a \in \Omega$ je klasický pravděpodobnostní prostor.

Ω spočetná (včetně konečná), $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ je taková, že $p(\omega) \geq 0 \forall \omega \in \Omega$ a $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Položíme $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \forall A \in \mathcal{A}$ nazýváme diskrétní pravděpodobnostní prostor.

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$) a $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ měřitelná, že $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1$, pak definujeme $P(B) = \int_B g(x) dx$, $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}$ je spojitý pravděpodobnostní prostor. Speciálním případem $g(x) = 1_{[0,1]}(x)$ je pak tzv. indikátor.

Definice 2.3 (Jev jistý, jev nemožný, podjev, zároveň, alespoň jeden, jev opačný, neslučitelné jevy)

Ω je jev jistý, \emptyset je jev nemožný, $A \subset B$ znamená „ A je podjev B “, $A \cap B$ znamená „nastal A a zároveň B “, $A \cup B$ znamená „nastal A nebo B “, A^C je jev opačný, $A \cap B = \emptyset$ jsou neslučitelné jevy.

Věta 2.1

Budte (Ω, \mathcal{A}, P) pravděpodobnostní prostor a $A, B, A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in \mathbb{N}$) náhodné jevy. Pak platí:

- $P(\emptyset) = 0$;
- P je konečně aditivní;
- $P(A^C) = 1 - P(A)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$; (monotonie)
- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \implies P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_i)$; (spojitost)
- $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \implies P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_i)$; (spojitost)
- $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \wedge \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \implies \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_i) = 0$; (spojitost v nule)
- $B \subset A \implies P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

┌ *Důkaz*

Vše z míry. Pravděpodobnost je konečná, předposlední bod vyplývá z předchozího. □

Poznámka

28. února bude v 17:20 náhradní přednáška za poslední přednášku.

Věta 2.2 (Princip inkluze a exkluze)

Buď (Ω, \mathcal{A}, P) pravděpodobnostní prostor. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každá $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, platí:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right).$$

┌ *Důkaz*

Nebude, v podstatě byl v diskřetce. □

3 Podmíněná pravděpodobnost

Definice 3.1 (Podmíněná pravděpodobnost)

Buďte $A, B \in \mathcal{A}$ takové, že $P(B) > 0$. Definujeme $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ a nazýváme ji podmíněnou pravděpodobností jevu A za podmínky (jevu) B .

Věta 3.1

Buď $B \in \mathcal{A}$ takové, že $P(B) > 0$. Pak zobrazení $P(\cdot|B) : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ splňuje definici pravděpodobnosti.

┌ *Důkaz*

Ověříme po bodech: zřejmě $P(A|B) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$, $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$ a σ -aditivita plyne ze σ -aditivity $P(\cdot \cap B)$ a deMorganových pravidel ($B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B$), $P(B)^{-1}$ se prostě z obou stran vytkne. □

Pozor

Podmíněná pravděpodobnost nám neříká nic o příčinné souvislosti.

Pozorování (O podmíněné pravděpodobnosti)

Buďte $A, B, C \in \mathcal{A}$ a pravděpodobnost „správných“ jevů nenulová. Pak:

- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$,

- $B \subset A \implies P(A|B) = 1$,
- $A \cap B = \emptyset \implies P(A|B) = 0$,
- $P(A|\Omega) = P(A)$,
- pokud $P(\{\omega\}) > 0$, pak $\forall A \in \mathcal{A}$ platí $P(A|\{\omega\}) = \delta_\omega(A)$.

┌
Důkaz

Triviální (buď z definice, nebo z toho, že je to pravděpodobnost). □

└

Pozor (Neplatí!)

$P(A|B \cup C) = P(A|B) + P(A|C)$, ani v případě, že $A \cap B = \emptyset$.

Věta 3.2 (O násobení pravděpodobností)

Budte $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Pak

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}) \cdot \dots \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1).$$

┌
Důkaz

Z $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ plyne, že $P(A_1 \cap \dots \cap A_k) > 0$ pro $k \in [n-1]$, pomocí monotonie pravděpodobnosti. Tedy výraz je dobře definován.

Dokážeme indukcí: Pro $n = 2$ platí $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$ z definice. Z $n - 1$ na n : ($B := A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= P(B \cap A_n) \stackrel{\text{def}}{=} P(A|B) \cdot P(B) \stackrel{\text{IP}}{=} \\ &= P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}) \cdot \dots \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1). \end{aligned}$$

└ □

Věta 3.3 (O celkové pravděpodobnosti)

Budte A, B_1, B_2, \dots náhodné jevy takové, že $P(\bigcup_n B_n) = 1$ a $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i \neq j$ a $P(B_i) > 0 \forall i$. Potom $P(A) = \sum_n P(A|B_n) \cdot P(B_n)$.

┌ *Důkaz*

Víme $P((\bigcup_n B_n)^c) = 0$, a tedy $P(A) = P(A \cap \bigcup_n B_n) + P(A \cap (\bigcup_n B_n)^c) = P(A \cap \bigcup_n B_n)$, protože P je konečně-aditivní a platí monotonie. Dle de Morganových pravidel (a toho, že průnik s další množinou zachovává disjunktnost):

$$P(A) = P\left(\bigcup_n (A \cap B_n)\right) = \sum_n P(A \cap B_n) = \sum_n P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$

└

□

Věta 3.4 (Bayesova)

Za předpokladů věty o celkové pravděpodobnosti a $P(A) > 0$, platí $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_n P(A|B_n)P(B_n)}$.

┌ *Důkaz*

Snadný z definice podmíněné pravděpodobnosti a věty o celkové pravděpodobnosti. □

Příklad (Pólyovo urnové schéma)

Máme v urně n koulí k různých barev. Náhodně taháme z urny. Po vytažení koule do urny vytaženou kouli vrátíme a s ní i Δ (pevný parametr) koulí stejné barvy.

Podle volby Δ máme 2 základní schémata: $\Delta = -1$ (tahání bez vracení) a $\Delta = 0$ (tahání s vracením).

Definice 3.2 (Nezávislé jevy)

Náhodné jevy A a B jsou nezávislé, pokud platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Pozor

Zase to nemá nic do činění s kauzalitou.

Věta 3.5

Jsou-li dva jevy A a B nezávislé, pak jsou i jevy A a B^c nezávislé.

Je-li navíc $P(B) > 0$, pak $P(A|B) = P(A)$.

┌
Důkaz

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B).$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

└

□

Definice 3.3 (Vzájemná nezávislost)

Buď $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ systém náhodných jevů. Pak říkáme, že tyto jevy jsou (vzájemně) nezávislé, pokud pro každou konečnou množinu $I \subset \Lambda$ (dále $I \in \mathcal{F}(\Lambda)$) platí $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Věta 3.6

Buď $C = \{B_1, \dots, B_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, systém nezávislých jevů. Nahradíme-li libovolnou podmnožinu těchto jevů jejich doplňky, dostaneme opět systém nezávislých jevů

┌
Důkaz

Indukcí podle velikosti nahrazované množiny. (Použije se předchozí věta.)

└

□

Věta 3.7

Jsou-li jevy $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ vzájemně nezávislé a $P(B_1 \cap \dots \cap B_m) > 0$, pak

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n | B_1 \cap \dots \cap B_m) = P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

┌
Důkaz

Snadný.

└

□

4 Náhodné veličiny

Definice 4.1 (Náhodný element)

Buďte (Ω, \mathcal{A}) a (Ω', \mathcal{A}') stavové prostory. Pak každé měřitelné zobrazení $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ nazveme náhodný element z Ω' .

Definice 4.2 (Náhodná veličina)

Měřitelné zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nazveme (reálnou) náhodnou veličinou.

Definice 4.3 (Značení)

Místo $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$ píšeme $\{X \leq a\}$, místo $P(\{X \leq a\})$ píšeme $P(X \leq a)$.

Definice 4.4

Buď X náhodná veličina. $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ značíme $\sigma(X)$ a nazýváme σ -algebrou náhodných jevů generovaných náhodnou veličinou X (σ -algebra indukovaná X).

Definice 4.5 (Rozdělení náhodné veličiny)

Rozdělení náhodné veličiny $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ rozumíme indukovanou pravděpodobnostní mírou P_X na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ definovanou jako

$$P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

┌ *Poznámka* (A důkaz, že je to pravděpodobnostní míra)
 P_X je obraz míry P v zobrazení X .
└

Věta 4.1 (O přenosu integrace pro P_X)

Buď X náhodná veličina a buď h měřitelná funkce $(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Pak platí

$$\int_{\Omega} h(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(x) dP_X(x),$$

pokud existuje alespoň jedna strana.

┌ *Důkaz*
Speciální případ věty o obrazu míry z TMI1.
└

□

Definice 4.6 (Hustota náhodné veličiny)

Buď X náhodná veličina, P_X její rozdělení a μ σ -konečná míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ taková, že $P_X \ll \mu$. Potom $f(x) = \frac{dP_X}{d\mu}(x)$ se nazývá hustota náhodné veličiny X vzhledem k míře μ .

┌ *Poznámka*
 $f(x)$ je určena jednoznačně μ -skoro všude. Pokud pro $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ měřitelnou platí

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dP_X(x) < \infty \quad (\forall g(x) \geq 0 \forall x),$$

┌ pak $\int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) d\mu(x)$.
└

Věta 4.2

Bud' X náhodná veličina, pak platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} P(X \in B) &:= P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) = \int_{\Omega} 1_B(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} 1_B(x) dP_X(x) = \int_B dP_X(x) = P_X(B) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1_B(x) dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_B(x) f(x) d\mu(x) = \int_B f(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

┌
Důkaz

Je to jen sesypání faktů, které už známe. □

Definice 4.7 (Distribuční funkce)

Mějme náhodnou veličinu $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Funkci $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definovanou jako $F_X(x) = P(X \leq x)$ nazveme distribuční funkce náhodné veličiny X .

┌
Poznámka

Definice se shoduje s distribuční funkcí z TMI1. (A tedy platí věta o vlastnostech distribuční funkce, s tím, že dokonce $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.)

Věta 4.3

Bud' $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující vlastnosti distribuční funkce a $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. Pak existuje pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) a náhodná veličina $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ taková, že $F_X = F$.

┌
Důkaz

Z TMI1 víme, že existuje Lebesgueova-Stieltjesova míra μ , jejíž distribuční funkce je F . Tj. $\mu((-\infty, a]) = F(a)$. Teď chybí jen dodefinovat (Ω, \mathcal{A}, P) a X . Položíme $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ a $X = \text{id}_{\mathbb{R}}$. □

Definice 4.8 (Názvosloví: diskrétní náhodná veličina, absolutně spojitá veličina)

Mějme diskrétní náhodnou veličinu $P_X \equiv \mu_d$, tj. existuje nejvýše spočetná $\{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}$ a $\{p_i\}_{i \in I} \subset (0, 1]$ takových, že $\sum_{i \in I} p_i = 1$ a platí $P_X = \sum_{i \in I} p_i \delta_{x_i}$.

Potom nutně $F_X(x) = \sum_{i \in I} p_i 1_{[x, \infty)}(x)$ a také platí, že $P_X \ll \nu$, kde ν je čítací míra na $\{x_i\}_{i \in I}$.

(Absolutně) spojitá náhodná veličina je taková, že $P_X = \mu_a \ll \lambda$, takže $P_X(B) = \int_B f(x) d\mu$.

Definice 4.9 (Kvantilová funkce)

Bud' F_X distribuční funkce náhodné veličiny X . Funkce $F_X^{-1}(u) = \inf \{x | F_X(x) \geq u\}$, $u \in (0, 1)$ se nazývá kvantilová funkce náhodné veličiny X .

┌ *Poznámka*

Bude potřeba později. Teď jen: Je neklesající a zleva spojitá. Lze z ní jednoznačně odvodit F_X .

Pozor

Kvantilová funkce obecně není inverzní funkcí k F_X , protože inverzní funkce nemusí existovat. Ale pro F_X rostoucí a spojitou je F_X^{-1} inverzní funkcí k F_X .

4.1 Střední hodnota, rozptyl a momenty náhodné veličiny

Definice 4.10 (Střední hodnota)

Střední hodnota náhodné veličiny X je číslo $\mathbb{E}X$ dané výrazem $\mathbb{E}X = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$, pokud má integrál smysl.

Definice 4.11 (Medián)

Medián rozdělení náhodné veličiny X je číslo $q_{\frac{1}{2}}$ splňující $P(X \leq q_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}$ a $P(X \geq q_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}$.

Věta 4.4

Buď X náhodná veličina a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Pak $g(X)$ je také náhodná veličina a $\mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_X(x)$, pokud alespoň jeden z výrazů existuje.

┌ *Důkaz*

Složení 2 měřitelných funkcí je měřitelné, tj. $g(X)$ je opravdu náhodná veličina.

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X(x).$$

┌ Druhá rovnost plyne ze vztahu mezi P_X a její distribuční funkcí. □

Věta 4.5 (Základní vlastnosti $\mathbb{E}X$)

Buďte X, Y náhodné veličiny na stejném pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) . Pak platí

$$\mathbb{E}(a + bX) = a + b\mathbb{E}X, \quad X \in L^1, a, b \in \mathbb{R},$$

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y, \quad X, Y \in L^1,$$

$$P(X \geq 0) = 1 \implies \mathbb{E}X \geq 0, \quad (\text{obecněji } P(X \in [a, b]) = 1 \implies \mathbb{E}X \in [a, b]),$$

$$X \in L^1 \implies |X| \in L^1,$$

$$X \leq Y, P\text{-skoro všude} \implies \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y (\text{pokud existují}).$$

┌ *Důkaz*

└ Snadný, aplikace míry. □

Definice 4.12 (Názvosloví: P -skoro jistě)

P -skoro jistě znamená P -skoro všude.

Definice 4.13 ($n - t$ moment)

n -tý moment náhodné veličiny X definujeme jako $\mathbb{E}X^n$, $n \in \mathbb{N}$.

n -tý absolutní moment náhodné veličiny X definujeme jako $\mathbb{E}|X|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

n -tý centrální moment náhodné veličiny X definujeme jako $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^n$, $n \in \mathbb{N}$, pokud $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}$.

n -tý absolutní centrální moment náhodné veličiny X definujeme jako $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^n$, $n \in \mathbb{N}$, pokud $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}$.

┌ *Poznámka*

└ 1-ní moment je $\mathbb{E}X$. První centrální moment je 0.

Definice 4.14 (Rozptyl)

Rozptyl náhodné veličiny X je definován jako $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$. Značí se $\text{var } X$.

┌ *Poznámka*

Rozptyl je střední čtvercová odchylka X od $\mathbb{E}X$. $\text{var } X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \geq 0$. $\text{var } X = 0$ právě tehdy, když $X = \mathbb{E}X$ skoro jistě.

Věta 4.6 (Základní vlastnosti rozptylu)

$$\text{var}(a + bX) = b^2 \text{var } X, \quad a, b \in \mathbb{R} \wedge X \in L^2.$$

┌ *Důkaz*

$$\text{var}(a+bX) = \mathbb{E}(a+bX - \mathbb{E}(a+bX))^2 = \mathbb{E}(a+bX - a - b\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(bX - b\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(b(X - \mathbb{E}X))^2 = b^2 \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = b^2 \text{var } X.$$

└ □

Věta 4.7 (Čebyševova nerovnost)

Buď $X \in L^1$ náhodná veličina. Pak $P(|X - \mathbb{E}X| \geq a) \leq \frac{\text{var } X}{a^2}$, $\forall a > 0$.

┌ *Důkaz*

└ Viz TMI1. □

Definice 4.15 (Markovova nerovnost)

Buď $X \in L^n$, $n \in \mathbb{N}$, náhodná veličina. Pak $P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}|X|^n}{a^n}$, $\forall a > 0$.

┌ *Důkaz*

└ Obdobně Čebyševově větě. □

Věta 4.8 (Nerovnost mezi L^p normami na pravděpodobnostních prostorech)

Buď X náhodná veličina, $0 < \alpha < \beta \in \mathbb{R}$ a $\mathbb{E}|X|^\beta < \infty$. Pak platí $\sqrt[\alpha]{\mathbb{E}|X|^\alpha} \leq \sqrt[\beta]{\mathbb{E}|X|^\beta}$, a speciálně tedy platí $\mathbb{E}|X| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2}$.

┌ *Důkaz*

$$\mathbb{E}|X|^\alpha = \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \cdot 1 dP_X(x) \stackrel{\text{Hölder na } p = \frac{\beta}{\alpha}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^\beta dP_X(x) \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} 1^\beta dP_X(x) \right)^{\frac{1}{\beta}} = \dots \cdot 1.$$

(Integrál napravo je konečný z předpokladů této věty, tedy splňujeme předpoklady Höldera.) Odmocněním α dostáváme přesně chtěnou nerovnost. □

Například (Absolutně spojitá rozdělení)

Rovnoměrné rozdělení intervalu $[a, b]$, $a < b \in \mathbb{R}$ značíme $R([a, b])$ a jeho hustota je až na konstantu Lebesgueova míra: $f_X(x) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(x)$.

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 1, & t \geq b. \end{cases} \quad \mathbb{E}X = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}, \text{ var } X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ značíme $Exp(\lambda)$. $P(X > t) = e^{-t\lambda}$, $t > 0$. $F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pro $t \geq 0$ a 0 pro $t \leq 0$. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ a $f_X(x) = 0$ jinak. $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$, $\text{var } X = \frac{1}{\lambda^2}$.

┌ *Poznámka*

└ Exponenciální rozdělení má vlastnost ztráty paměti, tedy že $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$, $s, t > 0$.

Normální (Gaussovo) rozdělení: Normované $N(0, 1)$ je $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. $F_X(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Tyto F_X a f_X se často značí Φ a φ . $\mathbb{E}X = 0$ ($x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ je lichá funkce), $\text{var } X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 = 1$. $\mathbb{E}X^{2k+1} = 0$.

Obecné $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ má $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Tvrzení 4.9

Bud' X nezáporná (tj. $P(X \geq 0) = 1$) absolutně spojitá náhodná veličina, která splňuje $P(X > s+t | X > s) = P(X > t)$, $\forall s, t > 0$, pak $X \sim \text{Exp}$.

┌ Důkaz

└ Dělat nebudeme. □

Věta 4.10

$X \sim N(0, 1)$ a $Y := \sigma X + \mu$, pro $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Pak $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

┌ Důkaz

└ TODO!!! □

Důsledek

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\sigma Z + \mu \leq t) = P\left(Z \leq \frac{t - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right).$$

Důsledek

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(\sigma Z + \mu) = \mu + \sigma \mathbb{E}Z = \mu + 0 = \mu.$$

$$\text{var } Y = \text{var}(\sigma Z + \mu) = \sigma^2 \cdot \text{var } Z = \sigma^2.$$

Věta 4.11 (Rozdělení funkce náhodné veličiny)

Bud' X náhodná veličina s distribuční funkcí F_X , $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Pak $Y = g(X)$ je náhodná veličina s distribuční funkcí $F_Y(y) = \int_{\{x|g(x) \leq y\}} dF_X(x)$.

┌ Důkaz

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P_X(\{x|g(x) \leq y\}) = \int_{\{x|g(x) \leq y\}} dF_X(x).$$

└ □

5 Náhodné vektory

Definice 5.1 (Náhodný vektor)

Měřitelné zobrazení $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, nazveme náhodným vektorem.

Definice 5.2 (Rozdělení náhodného vektoru)

Rozdělením náhodného vektoru $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ nazveme indukovanou pravděpodobnostní míru $P_{\mathbf{X}}$ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ definovanou jako $P_{\mathbf{X}}(B) = P(\{\omega \in \Omega \mid \mathcal{X}(\omega) \in B\})$, $B \in \mathcal{B}^n$.

Definice 5.3 ((Sdružená) distribuční funkce)

(Sdružená) distribuční funkce náhodného vektoru \mathbf{X} je definována jako

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P\left(\bigcup_{i=1}^b (X_i \leq x_i)\right), \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Poznámka

$F_{\mathbf{X}}$ jednoznačně určuje $P_{\mathbf{X}}$.

Věta 5.1 (O marginální distribuční funkci)

Buď \mathbf{X} n -rozměrný náhodný vektor s distribuční funkcí $F_{\mathbf{X}}$. Pak pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{(X_1, \dots, X_{n-1})^T}(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

kde $F_{(X_1, \dots, X_{n-1})^T}$ je distribuční funkce náhodného vektoru $(X_1, \dots, X_{n-1})^T$.

Důkaz

Použijeme Heineho větu: Nechť máme posloupnost čísel $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ takových, že $y_k \rightarrow \infty$. Označme $B = \bigcup_{i=1}^{n-1} \{X_i \leq x_i\}$. $B_k = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \{X_i \leq x_i\}\right) \cap \{X_n \leq y_k\}$, $D_k = \left(\bigcup_{l=k}^{\infty} B_l^c\right)^c$, $k \in \mathbb{N}$. Zřejmě $D_k \subseteq B_k \subset B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ a $D_k \nearrow B$. Ze spojitosti P máme $\lim_{k \rightarrow \infty} P(D_k) = P(B)$. Nakonec z monotonie P máme $P(D_k) \leq P(B_k) \leq P(B)$, tedy ze dvou strážníků $\lim_{k \rightarrow \infty} P(B_k) = P(B)$. \square

Poznámka

Pro každou permutaci $\pi \in \mathcal{S}_n$ platí

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})^T}(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

Rozdělení $P_{\mathbf{Y}}$ podvektoru $\mathbf{Y} = (X_j)_{j \in J}$, $J \subset \{1, \dots, n\} = I$ se nazývá marginální rozdělení (a distribuční funkce se nazývá marginální distribuční funkce).

Rozdělení (X_1, \dots, X_n) určuje rozdělení X_1, \dots, X_n , ale ne naopak.

Definice 5.4 (Značení)

Mějme dva body $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a buď $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $c_i \in \{a_i, b_i\}, \forall i \in [n]$. Potom

$$\Delta_{n,k} = \{c | c_i = a_i \text{ právě pro } k \text{ indexů}\}, \quad k \in [n]_0.$$

Věta 5.2 (O vlastnostech sdružené distribuční funkce)

Distribuční funkce náhodného vektoru \mathbf{X} splňuje:

1. $\lim_{x_i \rightarrow \infty \forall i} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 1;$
2. $\forall j \forall x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n : \lim_{x_j \rightarrow -\infty} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0;$
3. $F_{\mathbf{X}}$ je zprava spojitá v každé proměnné;
4. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, a_i < b_i, \forall i \in [n]$ platí $\sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{\mathbf{c} \in \Delta_{n,k}} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{c}) \geq 0$. („Monotonie“.)

┌

Důkaz

1. Uvědomme si, že $x_i \rightarrow \infty, \forall i \in [n] \Leftrightarrow \min_{i \in [n]} x_i \rightarrow \infty$. Z monotonie pravděpodobnosti P máme $1 \geq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \geq F_{\mathbf{X}}(\min_i x_i \cdot (1, \dots, 1))$. Stačí ukázat, že pro funkci $H(x) := F_{\mathbf{X}}(x \cdot (1, \dots, 1))$ platí $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 1$. $H(x)$ je neklesající funkce x (z monotonie pravděpodobnosti P a definice distribuční funkce) a $H(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Takže musí $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} H(x) \leq 1$ a nutně bude i rovna limitě $\lim_{k \rightarrow \infty} H(k)$. Označme $B_k = (-\infty, k \cdot (1, \dots, 1)]$. Platí $B_k \nearrow \mathbb{R}^n$, takže ze spojitosti pravděpodobnosti $H(k) = P_{\mathbf{X}}(B_k) \rightarrow 1$.

2. 3. analogicky (za domácí úkol).

4. (jen pro $n = 2$, pro $n > 2$ je důkaz zbytečně technický):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{\mathbf{c} \in \Delta_{n,k}} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{c}) &= F_{\mathbf{X}}(b_1, b_2) - [F_{\mathbf{X}}(b_1, a_2) + F_{\mathbf{X}}(a_1, b_2)] + F_{\mathbf{X}}(a_1, a_2) = \\ &= [F_{\mathbf{X}}(b_1, b_2) - F_{\mathbf{X}}(b_1, a_2)] - [F_{\mathbf{X}}(a_1, b_2) - F_{\mathbf{X}}(a_1, a_2)] = \\ &= P(X_1 \leq b_1 \wedge a_2 < X_2 \leq b_2) - P(X_1 \leq a_1 \wedge a_2 < X_2 \leq b_2) = \\ &= P(a_1 < X_1 \leq b_1 \wedge a_2 < X_2 \leq b_2). \end{aligned}$$

└

□

Poznámka

Pro každý interval $(\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ v \mathbb{R}^n definujeme $\mu_F((\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = 4$. z předchozího pro F splňující tvrzení předchozí věty. Potom lze rozšířit μ_F na konečnou borelovskou míru na \mathbb{R}^n a té se říká Lebesgueova-Stieltjesova míra příslušná F .

Pokud $F = F_{\mathbf{X}}$ od \mathbf{X} s rozdělením $P_{\mathbf{X}}$, pak nutně $\mu_F = P_{\mathbf{X}}$, neboť se rovnají na intervalech $\{(\mathbf{a}, \mathbf{b}] | \mathbf{a} < \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n\}$, což je systém uzavřený na konečné průniky generující \mathcal{B}^n .

Věta 5.3

Nechť F splňuje vlastnosti sdružené distribuční funkce. Pak \exists pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) a náhodný vektor \mathbf{X} takový, že $F = F_{\mathbf{X}}$.

┌

Důkaz

Vezměme $\Omega := \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}^n$, $P = \mu_F$ a $\mathbf{X} = \text{id}$. Pak je \mathbf{X} zřejmě měřitelné, tedy je to náhodný vektor. Navíc

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(\{\omega \in \Omega | \omega_i \leq x_i, \forall i \in [n]\}) = \mu_F((-\infty, \mathbf{x}]) = F(\mathbf{x}).$$

└

□

Definice 5.5 (Diskrétní rozdělení)

Náhodný vektor \mathbf{X} má diskrétní rozdělení, pokud \exists (konečná nebo spočetná) množina $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^n$ a hodnoty $\{p_i\}_{i \in I}$ splňující $\forall i \in I : p_i \in (0, 1]$, $\sum_{i \in I} p_i = 1$, tak že $P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i) = p_i$.

┌

Poznámka

Pak nutně $P_{\mathbf{X}} = \sum_{i \in I} p_i \delta_{\mathbf{x}_i}$.

└

Také zřejmě marginální rozdělení jsou též diskrétní.

Definice 5.6 ((Absolutně) spojité rozdělení)

Náhodný vektor \mathbf{X} má (absolutně) spojité rozdělení, existuje-li nezáporná měřitelná funkce $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{(-\infty, x_1]} \int_{(-\infty, x_2]} \dots \int_{(-\infty, x_n]} f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots dt_1, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Poznámka

To nastává právě tehdy, když $P_{\mathbf{X}} \ll \lambda^n$. Potom $f_{\mathbf{X}} = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{\mathbf{X}}$ λ^n skoro všude.

Věta 5.4 (O hustotě $P_{\mathbf{X}}$ vzhledem k součinové referenční míře)

Buď $P_{\mathbf{X}}$ rozdělení n -rozměrného náhodného vektoru \mathbf{X} . Nechť $P_{\mathbf{X}} \ll \nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n$ (součin σ -konečných měr na \mathbb{R}). Pak $P_{X_i} \ll \nu_i$, $\forall i \in [n]$, a existují nezáporné měřitelné funkce $f_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, $f_{x_i} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $i \in [n]$ takové, že

$$P_{\mathbf{X}}((-\infty, \mathbf{x}]) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{(-\infty, x_1]} \dots \int_{(-\infty, x_n]} f_{\mathbf{x}}(t_1, \dots, t_n) d\nu_n(t_n) \dots d\nu_1(t_1), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$P_{\mathbf{X}}(B) = \int_B f_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) d(\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n)(\mathbf{t}), \quad \forall B \in \mathcal{B}^n.$$

Navíc pro každé $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in [n]$ platí

$$F_{X_i}(x_i) = \int_{(-\infty, x_i]} f_{x_i}(t) d\nu_i(t),$$

kde $f_{X_i}(y_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{x}}(y_1, \dots, y_n) d(\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_{i-1} \otimes \nu_{i+1} \otimes \dots \otimes \nu_n)(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ pro ν_i -skoro všechna $y_i \in \mathbb{R}$.

┌

Důkaz

Snadný: existence a tvrzení o $f_{\mathbf{x}}$ plyne z Radon-Nikodymovy věty a přepis v 1. vzorci a tvrzení o f_i plyne z Fubiniovy věty a věty o marginální distribuční funkci. \square

└

6 Nezávislé náhodné veličiny

Definice 6.1 ((Vzájemně) nezávislé náhodné veličiny)

Buď $\{X_i\}_{i \in I}$ systém náhodných veličin na (Ω, \mathcal{A}, P) , kde $I \neq \emptyset$ je libovolná indexová množina. $\{X_i\}_{i \in I}$ nazveme (vzájemně) nezávislé, pokud \forall konečnou neprázdnou $J \subset I$, platí

$$P\left(\bigcap_{i \in J} \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i \in J} P(X_i \in B_i), \quad B_i \in \mathcal{B}, i \in J.$$

Poznámka

Pro nezávislé náhodné veličiny jsou jevy $(X_i \in B_i)$ nezávislé.

Věta 6.1 (O rozdělení vektoru s nezávislými složkami)

Buď $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ náhodný vektor. Pak $\{X_i\}_{i=1}^n$ jsou nezávislé náhodné veličiny právě tehdy, když $P_{\mathbf{X}} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$.

┌

Důkaz

„ \Leftarrow “ zřejmě. „ \Rightarrow “: $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ platí $P_{\mathbf{X}}(B_1 \times \dots \times B_n) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(B_i)$ plyne z definice nezávislosti, takže $P_{\mathbf{X}}$ se rovná součinné míře na měřitelných obdélnících $\{B_1 \times \dots \times B_n | B_i \in \mathcal{B}\}$, ale tento systém je uzavřený na konečné průniky a generuje \mathcal{B}^n , tedy z věty o jednoznačnosti míry se $P_{\mathbf{X}}$ a $P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$ rovnají na celém \mathcal{B}^n . \square

└

Věta 6.2 (O distribuční funkci náhodného vektoru s nezávislými složkami)

Za předpokladů předchozí věty platí, že $\{X_i\}_{i=1}^n$ jsou vzájemně nezávislé právě tehdy, když $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

┌
Důkaz

„ \implies “ zřejmě neboť $F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = P(\bigcup \dots) = \prod P(X_i \in (-\infty, x_i]) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$.
 „ \impliedby “: Množiny $(-\infty, \dots] \times \dots$ tvoří systém uzavřený na konečné průniky a generující \mathcal{B}^n , tedy z rovnosti $P_{\mathbf{X}}$ a součinnové míry na tomto systému už plyne rovnost dvou měr na \mathcal{B}^n (pomocí věty o jednoznačnosti míry). \square

Věta 6.3 (O hustotě vektoru s nezávislými složkami)

Bud $P_{\mathbf{X}}$ rozdělení n -rozměrného náhodného vektoru \mathbf{X} splňující $P_{\mathbf{X}} \ll \nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n$ (součin σ -konečných měr) a bud $f_{\mathbf{X}}$ hustota náhodného vektoru \mathbf{X} . Pak náhodné veličiny X_1, \dots, X_n jsou vzájemně nezávislé $\Leftrightarrow f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$ pro $\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n$ -skoro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, kde $f_{x_i} = \frac{dP_{X_i}}{d\nu_i}$, $i \in [n]$.

┌
Důkaz

„ \implies “: použijeme charakterizaci nezávislosti složek pomocí distribuční funkce:

$$\int_{(-\infty, \mathbf{x}]} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(t_i) d(\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n)(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(t_i) d\nu_n(t_n) \dots d\nu_1(t_1) = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{x_i} f_{x_i}(t_i) d\nu_i(t_i) \prod_{i=1}^n$$

Takže $f_{\mathbf{X}} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}$ $\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n$ -skoro všude. „ \impliedby “ dokážeme obdobně obráceným postupem. \square

Věta 6.4

Bud $\{X_i\}_{i \in I}$ systém nezávislých náhodných veličin a $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i \in I$ měřitelné funkce. Pak $\{g_i(X_i)\}_{i \in I}$.

┌
Důkaz

Dokážeme z definice: Bud $J \subset I$ konečná neprázdná

$$P\left(\bigcap_{i \in J} \{g_i(X_i) \in B_i\}\right) = P\left(\bigcap_{i \in J} \{X_i \in g_i^{-1}(B_i)\}\right) = \prod_{i \in J} P(X_i \in g_i^{-1}(B_i)) = \prod_{i \in J} P(g_i(x_i) \in B_i), \quad \forall B_i \in \mathcal{B}$$

└

\square

7 Momenty náhodného vektoru

Definice 7.1 (Notace: střední hodnota náhodného vektoru)

$$\mathbb{E}\mathbf{X} := (\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_n)^T.$$

Definice 7.2 (Kovariance, korelace)

Budte X, Y náhodné veličiny na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) . Pak kovariance X a Y je definovaná jako $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]$. Korelace X a Y je definována jako $\text{cor}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var } X} \cdot \sqrt{\text{var } Y}}$, pokud $\text{var } X \cdot \text{var } Y > 0$.

Věta 7.1 (Hölderova nerovnost)

Budte X_1, X_2 náhodné veličiny na stejném pravděpodobnostním prostoru a necht $\mathbb{E}|X_1|^p < \infty$, $\mathbb{E}|X_2|^q < \infty$, $p, q > 1$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak $\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2| \leq (\mathbb{E}|X_1|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}|X_2|^q)^{\frac{1}{q}}$, a rovnost nastává, když $X_1 = c \cdot X_2$ skoro jistě.

Důkaz

MA3. □

Důsledek

$\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2| \leq \sqrt{\mathbb{E}X_1^2 \cdot \mathbb{E}X_2^2}$, takže $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{var } X \cdot \text{var } Y}$ a $\text{cor}(X, Y) \in [-1, 1]$. Navíc $|\text{cor}(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow X = aY + b$ skoro jistě pro nějaké $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Věta 7.2

Budte náhodné veličiny X_1 a X_2 nezávislé a $\mathbb{E}|X_i| < \infty$, $i = 1, 2$. Pak $\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2| < \infty$ a platí $\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) = (\mathbb{E}X_1) \cdot (\mathbb{E}X_2)$.

Důkaz

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 \cdot x_2 dP_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 \cdot x_2 d(P_{X_1} \otimes P_{X_2})(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}} x_1 dP_{x_1} \cdot \int_{\mathbb{R}} x_2 dP_{x_2} = (\mathbb{E}X_1) \cdot (\mathbb{E}X_2),$$

z Fubiniovy věty, pokud $\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2| < \infty$. Uvažujme $\Phi_n(x_1, x_2) = |x_1| \cdot 1_{|x_1| \leq n} \cdot |x_2| 1_{|x_2| \leq n}$. Pak $\mathbb{E}\Phi_n(X_1, X_2) =$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x_1| \cdot |x_2| 1_{|x_1| \leq n} \cdot 1_{|x_2| \leq n} dP_{X_1} \otimes dP_{X_2}(x_1, x_2) = \mathbb{E}(|X_1| 1_{\{|X_1| \leq n\}}) \cdot \mathbb{E}(|X_2| 1_{\{|X_2| \leq n\}}) \leq \mathbb{E}|X_1| \cdot \mathbb{E}|X_2|.$$

Takže $\Phi_n(X_1, X_2) \nearrow |X_1, X_2|$ z Léviho věty $\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2|$ existuje a z poslední nerovnosti je $\mathbb{E}|X_1, X_2| \leq \mathbb{E}|X_1| \cdot \mathbb{E}|X_2|$. □

Věta 7.3 (P cov a var pro nezávislost náhodných veličin)

Budte X_1, \dots, X_n nezávislé náhodné veličiny, $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$, $\forall i \in [n]$. Pak $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$, $i \neq j$. $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ platí $\text{var}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{var } X_i$.

┌
Důkaz

$\text{cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j)] = \mathbb{E}X_i X_j - \mathbb{E}X_i(\mathbb{E}X_j) - (\mathbb{E}X_i)\mathbb{E}X_j + \mathbb{E}X_i + \mathbb{E}X_j = \mathbb{E}(X_i X_j) - (\mathbb{E}X_i)(\mathbb{E}X_j)$
z nezávislosti a předchozí věty.

$$\text{var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i (X_i - \mathbb{E}X_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{var} X_i + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_i a_j \text{cov}(X_i, X_j)$$

└

□

Definice 7.3 (Nekorelované náhodné veličiny)

Náhodné veličiny X a Y s $\text{cov}(X, Y) = 0$ nazveme nekorelované.

Definice 7.4 (Varianční matice, korelační matice)

Varianční matice n -rozměrného náhodného vektoru \mathbf{X} je matice $n \times n$ s prvky $a_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$, $i, j \in [n]$, tj.

$$\text{Var } \mathbf{X} = \mathbb{E}(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X})^T.$$

Korelační matice n -rozměrného náhodného vektoru \mathbf{X} je matice $n \times n$ s prvky $a_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$, $i, j \in [n]$.

Věta 7.4 (O vlastnostech varianční matice)

Bud $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ náhodný vektor takový, že $\forall i \in [n] : \mathbb{E}(X_i^2) < \infty$. Pak

1. $\text{Var } \mathbf{X}$ je symetrická a pozitivně semidefinitní;
2. pro libovolné $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ a matici B typu $m \times n$ je $\text{Var}(\mathbf{a} + B\mathbf{X}) = B(\text{Var } \mathbf{X})B^T$;
3. $|\text{cov}(X_i, X_j)| \leq \sqrt{\text{var}(X_i) \cdot \text{var}(X_j)}$, a rovnost nastává právě tehdy, když existují konstanty a, b , že $X_i = a + bX_j$ skoro jistě;
4. jsou-li X_1, \dots, X_n vzájemně nezávislé, pak $\text{Var } \mathbf{X}$ je diagonální;
5. $\text{Var } \mathbf{X}$ je singulární \Leftrightarrow existují $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, alespoň jedno nenulové, taková, že $\sum_{i=1}^n a_i X_i = k$ skoro jistě, kde k je nějaká konstanta.

┌ *Důkaz*

1. symetrická zřejmě, pro pozitivní semidefinitnost chceme dokázat, že $\mathbf{a}(\text{Var } \mathbf{X})\mathbf{a}^T \geq 0$ (rozepíšeme jako v minulé větě):

$$\mathbf{a}(\text{Var } \mathbf{X})\mathbf{a}^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{cov}(X_i, X_j) = \text{var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) \geq 0.$$

Ve 2. snadně dokážeme $\mathbb{E}(B\mathbf{X}) = B\mathbb{E}\mathbf{X}$. Tedy

$$\text{Var}(\mathbf{a} + B\mathbf{X}) = \mathbb{E}(\mathbf{a} + B\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{a} + B\mathbf{X}))(\mathbf{a} + B\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{a} + B\mathbf{X}))^T = \mathbb{E}(B\mathbf{X} - \mathbb{E}(B\mathbf{X}))(B\mathbf{X} - \mathbb{E}(B\mathbf{X}))^T = \mathbb{E}(B(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X}))(B(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X}))^T = B\mathbb{E}(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X})^T B^T = B\text{Var } \mathbf{X} B^T.$$

3. už jsme ukázali jako důsledek Hölderovy nerovnosti. Bod 4. je zřejmý z věty o kovarianci pro nezávislé náhodné veličiny.

5. $\text{Var } \mathbf{X}$ je singulární $\Leftrightarrow \exists \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ tak, že $\mathbf{a}(\text{Var } \mathbf{X})\mathbf{a}^T = 0$, ale $\mathbf{a}(\text{Var } \mathbf{X})\mathbf{a}^T = \mathbb{E}(\mathbf{a}\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{a}\mathbf{X})^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}\mathbf{X} = \mathbb{E}\mathbf{a}\mathbf{X}$ skoro jistě. \square

Věta 7.5 (O momentech výběrového průměru)

Budte X_1, \dots, X_n nezávislé (nebo jen nekorelované) náhodné veličiny a budte $\mathbb{E}X_i = \mu$, $\text{var } X_i = \sigma^2$, $i \in [n]$, kde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$. Pak pro $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ platí $\mathbb{E}\overline{X}_n = \mu$ a $\text{var } \overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}$.

┌ *Důkaz*

Rozepsáním z linearitě střední hodnoty a z věty o vlastnostech varianční matice bod 2. \square

8 Rozdělení transformovaného náhodného vektoru

Věta 8.1

Budte X, Y nezávislé náhodné veličiny a $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelná. Pak náhodná veličina $U = \psi(X, Y)$ má distribuční funkci

$$G_U(u) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{y | \psi(x, y) \leq u\}} dF_Y(y) dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{y | \psi(x, y) \leq u\}} dP_Y(y) dP_X(x) =$$

$$G_U(u) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{x | \psi(x, y) \leq u\}} dF_X(x) dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{x | \psi(x, y) \leq u\}} dP_X(x) dP_Y(y), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

┌ *Důkaz*

Víme, že $\mathbb{E}U = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x, y) d(P_X \otimes P_Y)(x, y)$. Použijeme Fubiniovu větu a vzorec použijeme pro náhodnou veličinu $\tilde{U}(u) = 1_{(U \leq u)} = 1_{(\psi(X, Y) \leq u)}$. To nám dá

$$G_U(u) = P(U \leq u) = \mathbb{E}1_{(U \leq u)} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{(\psi(x, y) \leq u)} dP_Y(y) dP_X(x).$$

└

□

Věta 8.2 (O rozdělení součtu)

Budte X, Y nezávislé náhodné veličiny. Pak náhodná veličina $U = X + Y$ má distribuční funkci

$$F_U(u) = \int_{\mathbb{R}} F_x(u - y) dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_Y(u - x) dF_X(x), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

┌ *Důkaz*

Dosazením do předchozí věty.

└

□

Definice 8.1 (Konvoluce)

Bud $\psi(x, y) = x + y$. Pak $\psi(P_X \otimes P_Y)$ se nazývá konvoluce pravděpodobnostních rozdělení P_X a P_Y . Budte F_X a F_Y distribuční funkce. Pak F_U definovaná jako $F_U(u) = \int_{\mathbb{R}} F_X(u - y) dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_Y(u - x) dF_X(x)$ se nazývá konvoluce distribučních funkcí. Značíme $P_X * P_Y$, resp. $F_X * F_Y$.

Důsledek (Věty o rozdělení součtu nezávislých náhodných veličin)

Budte X, Y nezávislé náhodné veličiny a budte obě absolutně spojitě. Pak $U = X + Y$ je také absolutně spojitá s hustotou $f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_X(u - y) dy = \int_{\mathbb{R}} f_Y(u - x) f_X(x) dx$, $u \in \mathbb{R}$.

┌ *Důkaz*

Dosazením.

└

□

Poznámka

Pro ne-nezávislá X, Y lze snadno odvodit analogický vzorec (s jinou než součinnovou mírou).

Věta 8.3

Budte nezávislé náhodné veličiny X a Y čítací (tj. $P(X \in \mathbb{N}_0) = 1 = P(Y \in \mathbb{N}_0)$). Pak $U = X + Y$ je také čítací náhodná veličina a $P(U = u) = \sum_{n=0}^u P(X = n) \cdot P(Y = u - n)$, $u \in \mathbb{N}_0$.

┌ *Důkaz*

Snadno z věty o úplné pravděpodobnosti.

└

□

Věta 8.4 (O transformaci hustot)

Bud \mathbf{X} n -rozměrný absolutně spojitý náhodný vektor s hustotou $f_{\mathbf{X}}$. Bud $S_{\mathbf{X}}$ otevřená množina taková, že $P(\mathbf{X} \in S_{\mathbf{X}}) = 1$, a $g : S_{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ difeomorfismus. Pak rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$ má vzhledem k λ^n hustotu $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(g^{-1}(\mathbf{y})) \cdot |\text{Jac } g^{-1}(\mathbf{y})|_{g(S_{\mathbf{X}})}(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

┌

Důkaz

Z věty o obrazu míry víme, že $P_{\mathbf{X}}(A) = P_{\mathbf{Y}}(g(A))$, $\forall A \in \mathcal{B}^n$, resp. $\forall g(A) \in \mathcal{B}^n$. Pokud existuje hustota $f_{\mathbf{Y}}$, pak je to také rovno $\int_{g(A)} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$. Z předpokladů máme, že g^{-1} je difeomorfismus na $g(S_{\mathbf{X}})$. Použijeme větu o substituci s volbami $h = f_{\mathbf{X}}$, $\varphi = g^{-1}$, $M = g(S_{\mathbf{X}})$ a $N = A$ a dostaneme

$$P_{\mathbf{X}}(A) = \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{g(A)} f_{\mathbf{X}}(g^{-1}(\mathbf{y})) |\text{Jac } g^{-1}(\mathbf{y})| d\mathbf{y},$$

pro každou $A \subset g^{-1}(g(S_{\mathbf{X}})) = S_{\mathbf{X}}$, resp. $\forall g(A) \subset g(S_{\mathbf{X}})$. Levý integrál zřejmě existuje, tedy existuje i pravý. Z předpokladů víme $\int_{S_{\mathbf{X}}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = P(\mathbf{X} \in S_{\mathbf{X}}) = 1$ a také $\int_{(g(S_{\mathbf{X}}))^c} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0$ a oba integrály jsou nulové i pro všechny podmnožiny $S_{\mathbf{X}}^c$, resp. $(g(S_{\mathbf{X}}))^c$. Takže $\forall B \in \mathcal{B}^n$ a funkci $f_{\mathbf{Y}}$ ze znění dostáváme:

$$P_{\mathbf{Y}}(B) = P_{\mathbf{Y}}(B \cap g(S_{\mathbf{X}})) + P_{\mathbf{Y}}(B \setminus g(S_{\mathbf{X}})) = P_{\mathbf{X}}(g^{-1}(B \cap g(S_{\mathbf{X}}))) + 0 = \int_{B \cap g(S_{\mathbf{X}})} f_{\mathbf{Y}} d\mathbf{y} + 0 = \int_{B \cap g(S_{\mathbf{X}})} f_{\mathbf{Y}} d\mathbf{y} = \int_B f_{\mathbf{Y}} d\mathbf{y} = P_{\mathbf{Y}}(B).$$

┌ A tedy $f_{\mathbf{Y}}$ je opravdu hustota \mathbf{Y} . □