Příklad (1. General boundary condition for the parabolic equation)
Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be a Lipschitz domain, $T > 0$ be given and denote $Q := (0,T) \times \Omega$. Assume that $\mathbb{A} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d\times d}_{sym})$ be elliptic matrix and $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, $b \in L^2(0,T; L^\infty(\Omega))$ and $g \in L^2(0,T; L^2(\partial\Omega))$ be given. Consider the problem

$$
\begin{aligned}
\partial_t u - \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) + bu &= f && \text{in } Q,\\
u &= u_d && \text{on } \Gamma_1 := (0,T) \times \partial\Omega_1,\\
(\mathbb{A}\nabla u)\vec{\nu} &= g && \text{on } \Gamma_2 := (0,T) \times \partial\Omega_2,\\
u(0,x) &= u_0(x) && \text{in } \Omega,
\end{aligned}
$$

where $\partial\Omega_1$ and $\partial\Omega_2$ are mutually disjoint fulfilling $\overline{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} = \partial\Omega$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, $u_d : Q \to \mathbb{R}$ and $g : (0,T) \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ are given.

Find proper (minimal) assumptions on u_d and u_0 for which you can define the notion of a weak solution and prove its existence and uniqueness.

Řešení (Definice slabého řešení)
Okrajová podmínka u_d nám dělá potíže. Tak se můžeme zkusit dívat ne na u, ale na $u - u_d$.

Zvolíme naše oblíbené $V := W_0^{1,2}(\Omega)$, tedy $V^* := \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*$, a $H = L^2(\Omega)$, o čemž jsme už na přednášce dokázali, že V, H, V^* je Gelfandova trojice. V existenci budeme potřebovat $u - u_d \in L^2(0,T;V) \cap W^{1,2}(0,T;V^*)$, takže budeme chtít, aby z těchto prostorů bylo i u i u_d. To navíc znamená, že i u_0 je z L^2, aby $u(0)$ se mohlo rovnat u_0. Nakonec chceme po řešení, aby

$$
\langle \partial_t u, \varphi \rangle + \int_\Omega \mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla\varphi - \int_{\partial\Omega_2} g \cdot u - \int_{\partial\Omega_1} (\mathbb{A}\nabla u)\vec{\nu} u_d + \int_\Omega bu\varphi = \langle f, \varphi \rangle_{V^*}.
$$

Řešení (Existence)
Tím, že jsme zvolili $V = W_0^{1,2}$, máme Galerkinovu aproximaci: $\|P^N u\|_V \leqslant c\|u\|_V$, $P^N u \to u$ a $u^N := P^N u = u_d + \sum_{j=1}^N a_j w_j$, kde w_j je ortonormální báze V a $a_j = \int u w_j$. Počáteční podmínka nám říká, že $(u^N - u_d)(0) = P^N(u_0 - u_d(0))$. Poté dostáváme soustavu rovnic dosazením do definice slabého řešení:

$$
\int_\Omega (\partial_t u^N) \cdot w_j + \int_\Omega \mathbb{A}(\nabla u^N) \cdot \nabla w_j - \int_{\partial\Omega_2} g \cdot w_j + \int_\Omega b u^N w_j = \langle f, w_j \rangle.
$$

Z definice u^N a z kolmosti ($\int w_i w_j = 0$) máme

$$
(\partial_t a_j) \int_\Omega w_j^2 + \int_\Omega (\partial_t u_d) w_j + \sum_{i=1}^N a_i \int_\Omega \mathbb{A}\nabla w_i \nabla w_j + \sum_{i=1}^N a_i \int_\Omega b w_i w_j = \int_{\partial\Omega_2} g \cdot w_j + \langle f, w_j \rangle.
$$

Navíc $\int_\Omega w_j^2 = 1$ z ortonormálnosti. To znamená, že máme ODE:

$$
\partial_t a_j + \sum_{i=1}^N a_i \,(BLA_1) = \int_\Omega (BLA_2) w_j,
$$

kde $BLA_1 \in L^\infty(0,T)$, neboť $\mathbb{A}$ i b jsou L^∞ a $BLA_2 \in L^2(0,T)$, neboť f, g i u_d jsou L^2. (Proto také chceme, aby $u_d \in W^{1,2}\left(0,T; (W_0^{1,2}(\Omega))^*\right)$.)

Důkaz (Pokračování existence)
To proženeme Caratheodorovou teorií jako na přednášce a dostaneme, že buď existují řešení $a \in AC(0,T)$ nebo $\exists \tilde{T}$, že existují řešení $a \in AC(0,\tilde{T})$ až do času $\tilde{T}$ a $a(t) \xrightarrow{t \to \tilde{T}_-} \infty$. Druhá možnost bude vyloučena, až uděláme odhady, které stejně potřebujeme pro konvergenci u^N.

Pro potřebné odhady vynásobíme rovnice a_j a sečteme podle j:

$$\int_\Omega (\partial_t u^N)\cdot(u^N - u_d) + \int_\Omega \mathbb{A}(\nabla u^N)\cdot\nabla(u^N - u_d) - \int_{\partial\Omega_2} g\cdot(u^N - u_d) + \int_\Omega b u^N (u^N - u_d) = \left\langle f, (u^N - u_d)\right\rangle.$$

Nyní potřebujeme v prvním členu místo u^N mít také $u^N - u_d$, tedy odečteme příslušné integrály:

$$\int_\Omega \left(\partial_t (u^N - u_d)\right)\cdot(u^N - u_d) + \int_\Omega \mathbb{A}\left(\nabla(u^N - u_d)\right)\cdot\nabla(u^N - u_d) - \int_{\partial\Omega_2} g\cdot(u^N - u_d) + \int_\Omega b(u^N - u_d)(u^N - u_d) =$$

$$= \left\langle f, (u^N - u_d)\right\rangle - \int_\Omega (\partial_t u_d)\cdot(u^N - u_d) - \int_\Omega \mathbb{A}\left(\nabla u_d\right)\cdot\nabla(u^N - u_d) - \int_\Omega b u_d (u^N - u_d).$$

Nyní stejně jako na přednášce:

$$\partial_t \|u^N - u_d\|_{L^2(0,T;V)} + \int_\Omega \mathbb{A}(\nabla u^N)\cdot\nabla(u^N - u_d) \leqslant c(b,\Omega)(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\partial\omega)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u^N(t)\|^2_V).$$

$\mathbb{A}$ je eliptická, tedy můžeme odhadnout $\int_\Omega \mathbb{A}(\nabla u^N)\cdot\nabla(u^N - u_d) \geqslant C_1\|\nabla u^N\|_2^2 - C_2\int_\Omega |\nabla u^N|\cdot|\nabla u_d|$. Tedy

$$\partial_t \|u^N - u_d\|_{L^2(0,T;V)} + C_1\|\nabla u^N\|_2^2 \leqslant c(b,\Omega)(\ldots) + C_2\int_\Omega |\nabla u^N|\cdot|\nabla u_d| \leqslant \ldots + C_2\int_\Omega \left((\nabla u^N)^2 + (\nabla u_d)^2\right).$$

Nakonec z Gronwalla získáme

$$\sup_t \|u^N - u_d\|_2^2 + \|\nabla u^N\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant K\cdot(1 + \|u_0\|_2^2),$$

což je nezávislé na N, tedy nám jako na přednášce vyjde, že slabé limity existují. □

Důkaz (Jednoznačnosti)
Jestliže u_1 a u_2 jsou (slabá) řešení problému výše, pak $v := u_1 - u_2$ je zřejmě (slabým) řešením problému

$$\begin{aligned} \partial_t v - \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla v) + bv &= 0 && \text{in } Q, \\ v &= 0 && \text{on } \Gamma_1 := (0,T) \times \partial\Omega_1, \\ (\mathbb{A}\nabla v)\vec{\nu} &= 0 && \text{on } \Gamma_2 := (0,T) \times \partial\Omega_2, \\ u(0,x) &= 0 && \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

neboť je „vše lineární v u“. Zároveň $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, tedy můžeme touto funkcí testovat:

$$0 = \int_\Omega 0 \cdot v = \int_\Omega (\partial_t v) \cdot v - \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla v)v + \int_\Omega bv^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t v^2 + \left(\int_\Omega \mathbb{A}\nabla v \cdot \nabla v - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mathbb{A}\nabla v \vec{\nu} v}_{=:I=0} \right) + \int bv^2$$

$$\left(I = \int_{\partial\Omega_1} \mathbb{A}\nabla v \vec{\nu} v + \int_{\partial\Omega_2} \mathbb{A}\nabla v \vec{\nu} v = \int_{\partial\Omega_1} \mathbb{A}\nabla v \vec{\nu} \cdot 0 + \int_{\partial\Omega_2} 0 \cdot v = 0 \right)$$

$$\left| \frac{1}{2}\partial_t \|v\|_2^2 \right| = \left| - \int_\Omega \mathbb{A}\nabla v \cdot \nabla v - \int_\Omega bv^2 \right| \leqslant \left| \int_\Omega \mathbb{A}\nabla v \cdot \nabla v \right| + \left| \int bv^2 \right| \leqslant$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|\mathbb{A}\|_\infty \cdot \|\nabla v\|_2 + \|b\|_\infty \|v\|_2 \overset{\text{Poincaré}}{\leqslant} C(\|\mathbb{A}\|_\infty, \|b\|_\infty, C_{poinc})\|v\|_2.$$

Tedy podle Gronwallova lemmatu $\|v(t)\|_2^2 \leqslant e^{Ct}\|v(0)\|_2^2 = e^{Ct} \cdot 0 = 0.$ □

Assume that $b \geqslant 0$, $f \in L^2_{loc}(0,\infty,L^2(\Omega))$, $b \in L^2_{loc}(0,\infty,L^\infty(\Omega))$, $g \in L^2_{loc}(0,\infty,L^2(\partial\Omega))$ and satisfies for some $\tau > 0$ that f, u_d and g are time τ-periodic. Show that there exists unique $u_0 \in L^2(\Omega)$, for which the weak solution u is τ-periodic.

Důkaz
Mějme dvě počáteční podmínky $u_{0,1}$ a $u_{0,2}$ a k nim odpovídající řešení u_1 a u_2. Potom pro $v := u_1 - u_2$ platí totéž, co v jednoznačnosti, až na $v(0,x) = u_{0,1} - u_{0,2}$. Tedy

$$0 = \int_\Omega 0 \cdot v = \int_\Omega (\partial_t v) \cdot v - \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla v)v + \int_\Omega \underbrace{bv^2}_{\geqslant 0} = \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t v^2 + \int_\Omega \mathbb{A}\nabla v \cdot \nabla v + \int bv^2.$$

Nyní vypustíme člen s b a nerovnici integrujeme v čase od 0 do τ:

$$0 = \int_0^\tau 0 \geqslant \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_\Omega \partial_t v + \int_0^t \int_\Omega \mathbb{A}\nabla v \cdot \nabla v = \frac{1}{2}\|v(\tau)\|_2 - \frac{1}{2}\|v(0)\|_2 + \int_0^t \int_\Omega \mathbb{A}\nabla v \cdot \nabla v.$$

$\mathbb{A}$ je eliptická, tedy $\mathbb{A}\nabla v \cdot \nabla v \geqslant C_1 \|\nabla v\|^2$, tedy

$$\|v(0)\|_2^2 \geqslant \|v(\tau)\|_2^2 + 2 \cdot C_1 \int_0^\tau \|\nabla v\|_2^2 \geqslant \|v(\tau)\|_2^2.$$

Z Poincarého nerovnosti víme, že $\|\nabla v\|_2^2 \cdot C_2 \geqslant \|v\|_2^2$, navíc pokud stejný postup aplikujeme na libovolná t_1 a t_2 místo 0 a τ, dostaneme, že $\|v(t)\|_2^2$ je nerostoucí, tedy

$$2 \cdot C_1 \int_0^\tau \|\nabla v\|_2^2 \geqslant 2 \cdot C_1 \cdot \frac{1}{C_2} \cdot \int_0^\tau \|v\|_2^2 \geqslant 2 \cdot C_1 \cdot \frac{1}{C_2} \cdot \tau \cdot \|v(\tau)\|_2^2 \implies$$

$$\implies \|v(0)\|_2^2 \geqslant (1 + C_3)\|v(\tau)\|_2^2.$$

Jelikož C_3 je kladná, tak zobrazení $F : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $F(u_0) = u(\tau)$ je kontrakce a podle Banachovy věty o pevném bodě (L^2 je úplný) existuje právě jedno $F(u_0) = u_0$. Takže existuje jediné u_0, že $u(0) = u(\tau)$. A naopak pokud $u(0) = u(\tau)$ a f, g a u_d jsou τ-periodické, tak můžeme řešit úlohu s časem posunutým o τ (2τ, 3τ) a vždy nám z jednoznačnosti musí vyjít totéž řešení, tedy u je také τ-periodické. □

Assume that $g = 0$ and consider that there are numbers $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ such that

$$b \geqslant c_1 \geqslant 0, \qquad f \geqslant c_2, \qquad u_d \geqslant c_3, \qquad u_0 \geqslant c_4 \qquad \text{a. e. in } Q.$$

Try to find an optimal (as large as possible) function D such that the unique weak solution satisfies

$$u(t,x) \geqslant D(t, c_1, c_2, c_3, c_4) \qquad \text{a. e. in } Q.$$

Řešení
Určitě potřebujeme aby $D(0,\dots) \leqslant c_4$, jinak by mohlo být $u(0,x) \leqslant D(0,\dots)$ na množině $x \in \tilde{\Omega} \subseteq \Omega$. Stejně tak $D \leqslant c_3$, protože jinak by se pro správné u_d mohlo rozbít $u \geqslant D$ na Γ_1. Také si všimněme, že $b \geqslant 0$.

Podle nápovědy zvolíme testovací funkci $(u-D)_- \leqslant 0$ (předpokládáme, že alespoň $D \in W^{1,2}$ a z předpokladů na D nám pak vychází, že $(u-D)_- \in W_0^{1,2}$):

$$\int_\Omega (\partial_t u) \cdot (u-D)_- + \int_\Omega \mathbb{A}\nabla u \nabla\left((u-D)_-\right) + \int_\Omega bu(u-D)_- = \int_\Omega f(u-D)_-$$

$$\int_\Omega (\partial(u-D)) \cdot (u-D)_- + \int_{\{u<D\}} \overbrace{\mathbb{A}\nabla u \nabla u}^{>0} = -\int_\Omega (\partial_t D + bu - f)(u-D)_-.$$

Podle nápovědy uvažujme, že integrand v pravé straně je nezáporný, tedy celá pravá strana je nekladná. Také pro spor předpokládejme, že $\{u < D\}$ je nenulové míry, tedy druhý integrál na levé straně je kladný a tedy

$$0 > \int_\Omega (\partial_t(u-D)) \cdot (u-D)_- = \int_\Omega (\partial_t((u-D)_-)) \cdot (u-D)_- = \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t\left((u-D)_-^2\right) =$$

$$= \|(u(\tau) - D(\tau))_-^2\|_2^2 - \|(u(0) - D(0))_-\|_2^2 \overset{D \leqq u_4}{=} \|(u(\tau) - D(\tau))_-\|_2^2 \geqslant 0.$$

Tedy nám stačí (pak už bude $\{u < D\}$ nulové míry) zvolit D tak, aby $D(0) \leqslant c_4$, $D \leqslant c_3$ a buď $u \geqslant D$, nebo

$$\partial_t D + bu - f \leqslant 0.$$

Jelikož v druhém případě máme $u < D$, tak nám stačí

$$\partial_t D + bD - c_2 \leqslant 0.$$

Pokud $D > 0$ a u by tak mohlo být větší než nula, tak bychom mohli správnou volbou b dostat na to, že $\partial_t D = -\infty$. To však být nemůže, tedy musíme hledat $D \leqslant 0$. Pro to nám navíc stačí

$$\partial_t D + c_1 D - c_2 \leqslant 0$$

Jelikož vždy může být (hledáme $D \leqslant 0$) $\partial_t D$ libovolně záporná, tj. určitě se nemůže stát, že by D bylo takové, že splňuje v nějakém čase $D \leqslant \min(c_4, 0)$ a v nějakém dalším by nutně muselo tuto mez překročit. Takže pokud budeme mít $\partial_t D + c_1 D - c_2 = 0$ s počáteční podmínkou $D = \min(c_4, c_3, 0)$ ($D \leqslant c_3$ musíme splnit jen v čase 0) a v případě dosažení $D = \min(c_4, 0)$ mít dále D konstantní.

$\partial_t D + c_1 D - c_2 = 0$ má řešení $K \cdot e^{-c_1 t} + c_2$, a v 0 tedy $K + c_2 = \min(c_3, c_4, 0)$, tj. $K = \min(c_3, c_4, 0) - c_2$. Takže

$$D(t, c_1, c_2, c_3, c_4) = \min\left(0, c_4, (\min(c_3, c_4, 0) - c_2) \cdot e^{-c_1 \cdot t}\right).$$

Reconsider first part with the weaker assumptions:

$$f \in L^1(0,T;L^2(\Omega)), \qquad b \in L^1(0,T;L^\infty(\Omega)), \qquad g \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;L^2(\partial\Omega)).$$

Řešení
TODO?

Příklad (2. Finite speed of propagation of WS to linear hyperbolic equation of 2nd order) Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be an open set fulfilling $B_1(0) \subset \Omega$. Assume that $\mathbb{A} \in L^\infty(\Omega) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d\times d}_{sym})$ be elliptic and that u is weak solution to

$$\partial_{tt} u - \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) = 0 \qquad \text{in } Q := (0,T)\times\Omega,$$

i. e.,

$$u \in L^2\left(0,T;W^{1,2}(\Omega)\right) \cap W^{1,2}\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap W^{2,2}\left(0,T;\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*\right)$$

satisfies for almost all $t \in (0,T)$ and all $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\langle \partial_{tt} u, w\rangle + \int_\Omega \mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla w = 0.$$

Find proper/optimal relation between $\Omega_0 \subset B_1(0)$ and $Q_0 \subset Q$ such that

$$u(0) = \partial_t u(0) = 0 \text{ in } \Omega_0 \qquad \Longrightarrow \qquad u = 0 \text{ in } Q_0.$$

Subgoal1: Show the result for constant matrix $\mathbb{A}$.

Řešení ($\Omega_0 = B_1(0)$ pro $\mathbb{A} = \mathbb{I}$)
Nechť je u nějaké řešení. ∂_{tt} neznáme nikde, tedy rovnost z definice zintegrujeme podle času (pro v čase konstantní $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$):

$$0 = \int_0^\tau 0 = \int_0^\tau \langle \partial_{tt} u, w\rangle + \int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla w = \langle \partial_t u(\tau), w\rangle - \langle \partial_t u(0), w\rangle + \int_\Omega \left(\int_0^\tau \mathbb{A}\nabla u\right)\cdot\nabla w.$$

Teď bychom rádi funkcí $u(\tau)$ otestovali tuto rovnost. Ale $u(\tau)$ je sice z $W_0^{1,2}(\Omega)$, ale už nesplňuje, že by bylo v $W_0^{1,2}(\Omega)$. My ho ale můžeme vynásobit nezápornou Lipschitzovskou funkcí $h(\tau, x)$, která bude na $\partial\Omega$ nulová a později zvolíme další podmínky. Tak $u(\tau)\cdot h(\tau) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ a máme

$$\langle \partial_t u(0), h(\tau)\cdot u(\tau)\rangle = \langle \partial_t u(\tau), h(\tau)\cdot u(\tau)\rangle + \int_\Omega \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right)\cdot\nabla(h(\tau)\cdot u(\tau)).$$

Máme počáteční podmínku na $\partial_t u$:

$$\int_{x\in\Omega, \|x\|>1} \partial_t u(0)\cdot h(\tau)\cdot u(\tau) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\partial_t (u)^2\right)\cdot h + \int_\Omega \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right)\cdot\left((\nabla h)\cdot u + h\cdot(\nabla u)\right).$$

Řešení (Pokračování)
Když zvolíme h tak, že pro $\|x\| \geqslant 1$ je $h = 0$, potom levá strana je nulová. V prvním integrálu na pravé straně bychom rádi dostali pryč derivaci u, takže použili per partes. Máme tam ale „špatný“ integrál. Takže si přidáme ten „správný“:

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(\partial_t(u^2)\right) \cdot h \overset{perp.}{=} -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega u^2 \cdot \partial_t h + \frac{1}{2}\int_\Omega (u(T))^2 \cdot h(T) - \frac{1}{2}\int_\Omega (u(0)) \cdot h(0).$$

Když položíme i $h(T) \equiv 0$ a použijeme $h = 0$ pro $|x| \geqslant 1$ a $u(0,x) = 0$ pro $\|x\| < 1$ máme

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(\partial_t(u^2)\right) \cdot h \overset{perp.}{=} -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega u^2 \cdot \partial_t h.$$

Spolu s předchozím máme

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega u^2 \cdot \partial_t h = \int_0^T \int_\Omega \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right) \cdot \left((\nabla h) \cdot u + h \cdot (\nabla u)\right).$$

Pravou stranu rozepíšeme z linearity a použijeme standardní trik z derivací (derivaci vezmeme použitím $\partial_t \int \ldots dt = \ldots$):

$$\ldots = \int_0^T \int_\Omega \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right) \cdot (\nabla h) \cdot u + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \partial_t \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right)^2 \cdot h.$$

Derivace podle t před u (v druhém integrálu) bychom se zase rádi zbavili a tentokrát zde máme i „správný“ integrál:

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \partial_t \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right)^2 \cdot h = -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right)^2 \cdot \partial_t h +$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^T \nabla u(t)dt\right)^2 \cdot h(T) + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^0 \nabla u(t)dt\right)^2 \cdot h(0).$$

Zvolili jsme $h(T) \equiv 0$ a integrál přes prázdnou množinu $(0,0)$ je nulový. Tedy druhá řádka je nulová.

Celkově všechno:

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega u^2 \cdot \partial_t h = \int_0^T \int_\Omega \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right) \cdot (\nabla h) \cdot u - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right)^2 \cdot \partial_t h$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(u^2 + \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right)^2\right) \cdot \partial_t h = \int_0^T \int_\Omega \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right) \cdot (\nabla h) \cdot u$$

Řešení (Pokračování)
Nyní jsme se dostali k tomu, že už máme u^2, které můžeme omezovat. Ještě bychom se rádi zbavili h. Nejlépe aby $\partial_t h \neq 0$ a $\nabla h \neq 0$ na „co největší množině", aby nám to „nenarušovalo" odhady. Pořád ale chceme h lipschitzovské, $h(T) \equiv 0$ a pro $\|x\| \geqslant 1$ chceme $h = 0$.

Nabízí se, že $h = \|x\| + t - C$ tam, kde chceme nezáporné derivace a 0 jinde. Pro $t = 0$ chceme, aby derivace byly nezáporné na co největší ploše, ale pro $\|x\| = 1$ musí kvůli spojitosti (lipschitzovskosti) být $h = 0$, tedy zvolíme $C = 1$. Také chceme, aby pro $t = T$ bylo „$\|x\| + t - C$ rovno nule", aby plynule navazovalo na $h(T) \equiv 0$, ale do té doby byly nezáporné derivace. Tedy h definujeme jako

$$h = \min\left(0, \|x\| + \frac{t}{T} - 1\right).$$

Dosadíme:

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(u^2 + \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right)^2\right) \cdot \chi_{h\neq 0} \cdot \frac{1}{T} = \int_0^T \int_\Omega \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right) \cdot \chi_{h\neq 0} \cdot u$$

Ještě potřebujeme upravit pravou stranu, protože chceme „normu", ne nějaký součin, tedy dle $0 \leqslant (A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB$ ($A = u$, $B = \int_0^\tau \nabla u(t)dt$)

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(u^2 + \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right)^2\right) \cdot \chi_{h\neq 0} \cdot \frac{1}{T} \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(u^2 + \left(\int_0^\tau \nabla u(t)dt\right)^2\right) \cdot \chi_{h\neq 0}$$

$$\left(\frac{1}{2T} - \frac{1}{2}\right) \cdot \int_0^T \int_\Omega (u^2 + \ldots_+) \cdot \chi_{h\neq 0} \leqslant 0.$$

Nyní když zvolíme $T < 1$ libovolně tak $\int\int u^2 \cdot \chi_{h\neq 0} \leqslant 0$, tedy $u^2 = 0$ skoro všude tam, kde $h \neq 0$, což je pro všechna (t, x) taková, že $\|x\| + \frac{t}{T} - 1 < 0$, tedy tam, kde $\|x\| + t < 1$.

Řešení ($\Omega_0 = B_r(x_0)$ pro $\mathbb{A} = \mathbb{I}$)
Nyní pokud funkce $v(t,x) = u(t/r, x - x_0)$ řeší problém pro $\Omega_0 = B_1(0)$, pak $u(t,x)$ řeší problém pro $\Omega_0 = B_r(x_0)$, tedy $Q_0(B_r(x_0)) = \{(t,x) | (t/r, x - x_0) \in Q_0(B_1(0))\} = \{(t \cdot r, x + x_0) | (t,x) \in Q_0(B_1(0))\}$.

Řešení (Ω_0 obecné pro $\mathbb{A} = \mathbb{I}$)
Nyní se můžeme na Ω_0 podívat jako mnoho kruhů $B_r(x_0)$, kde vždy $\lambda^n(B_r(x_0) \backslash \Omega_0) = 0$ (na množině míry nula můžeme totiž u_0 předefinovat). Tedy $Q_0(\Omega_0) = \{(t,x) | \lambda^n(B_t(x) \backslash \Omega_0) = 0\}$.

Řešení (Ω_0 obecné pro obecné $\mathbb{A}$)
Provedeme transformaci souřadnic (vynásobením maticí) tak, aby se nám rovnice transformovala do případu $\mathbb{A} = \mathbb{I}$ a máme to. Konkrétně vyjde $Q_0(\Omega_0) = \{(t,x) | \lambda^n(\mathbb{A} \cdot \ B_t(x) \backslash \Omega_0) = 0\}$.

Subgoal2: Show it for general $\mathbb{A}$.

Řešení
TODO?