Organizační úvod

Poznámka
Jako vždycky, jen v implikacích u zkoušky budou i pojmy z předchozích semestrů.

1 Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

1.1 Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

Definice 1.1

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť máme funkce $f : J \to \mathbb{R}$ a $f_n : J \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$

- konverguje bodově k f na J, pokud $\forall x \in J : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, neboli:
$$\forall x \in J\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$
- konverguje stejnoměrně k f na J (značíme $f_n \rightrightarrows f$ na J), pokud
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$
- konverguje lokálně stejnoměrně, pokud pro každý omezený uzavřený $[a, b] \subset J$ platí $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ (značíme $f_n \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} f$ na J).

Věta 1.1 (Kritérium stejnoměrné konvergence)

Nechť $f, f_n : J \to \mathbb{R}$, pak
$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } J \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Důkaz

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

$\square$

Poznámka (Pro spojité funkce)

$$\Leftrightarrow ||f_n - f||_{\mathcal{C}(J)} \to 0 \Leftrightarrow f_n \overset{\mathcal{C}(J)}{\to} f.$$

Věta 1.2 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)

Nechť $f_n : J \to \mathbb{R}$, pak

$$(\exists f : f_n \rightrightarrows f \text{ na } J) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

Důkaz

„ $\implies$ “: Víme $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Tedy

$$\forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon.$$

„ $\impliedby$ “: Víme $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Toto použijeme pro pevné $x \in J$. Pro posloupnost $a_n = f_n(x)$ máme splněnou BC podmínku pro posloupnost reálných čísel, tj. $a_n \to a \in \mathbb{R}$.

Označíme si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Nyní v BC podmínce provedeme limitu $n \to \infty$. Tím dostaneme přesně definici stejnoměrné konvergence. □

Věta 1.3 (Moore-Osgood)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je krajní bod intervalu J. Nechť $f_n, f : J \to \mathbb{R}$ splňují

- $f_n \rightrightarrows f$ *na* J,
- *existuje* $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Pak existují $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *a jsou si rovny.*

Důkaz

Příště. □

Důsledek

Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na I a nechť f_n jsou spojité na I. Pak f je spojitá na I.

Poznámka

Obdobně lze definovat stejnoměrnou spojitost i pro libovolnou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ a $f_n : A \to \mathbb{R}$ a platí, že stejnoměrná limita je spojitá (stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá).

Důkaz (Moore-Osgood)
Z BC podmínky

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Provedeme $\lim_{x \to x_0}$ a dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Tedy a_n splňuje BC podmínku, a tudíž $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

Nechť $\varepsilon \geq 0$. Z definice $f_n \rightrightarrows f$

$$\exists n_0\ \forall x \in J : |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zároveň předpokládejme $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$ (zvolíme si n_0 jako maximum). Máme pevnou funkci f_{n_0} a $\lim_{x\to x_0} f_{n_0}(x) = a_{n_0}$. Tedy

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in P(x_0, \delta) \cap J : |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Nyní $\forall x \in P(x_0, \delta) \cap J$ platí

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| \leq \varepsilon + \varepsilon + \ \varepsilon = 3\varepsilon.$$

□

Věta 1.4 (O záměně limity a derivace)

Nechť funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na intervalu (a, b) a nechť

- $\exists x_0 \in (a, b) : \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje,*
- *pro derivace f'_n platí $f'_n \overset{Loc}{\rightrightarrows}$ na (a, b).*

Potom existuje funkce f tak, že $f_n \overset{Loc}{\rightrightarrows} f$ na (a, b), f má vlastní derivaci a platí $f'_n \overset{Loc}{\rightrightarrows} f'$ na (a, b).

Důkaz
Nechť $x_0 \in [c,d] \subset (a,b)$. Víme $f_n' \rightrightarrows$ na $[c,d]$. Chceme ukázat $f_n \rightrightarrows f$ na $[c,d]$ ($\implies f_n \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} f$ na (a,b)). Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $f_n' \rightrightarrows$

$$\exists n_0\ \forall m,n \geq n_0\ \forall x \in [c,d] : |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$$

a zároveň $\forall m,n \geq n_0 : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$. Nyní $\forall x \in [c,d]$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq$$

$$\leq |h(x) - h(x_0)| + \varepsilon \leq |x - x_0| \cdot |h'(\xi)| + \varepsilon \leq (d-c) \cdot \varepsilon + \varepsilon,$$

kde $h = f_n - f_m$ a $\xi \in (x_0, x)$ resp. (x, x_0) z Lagrangeovy věty (cvičení: předpoklady jsou splněné).

Zbývá dokázat „$f_n' \rightrightarrows f'$ na $[c,d]$“: Zvolme $z \in [c,d]$ a položme $\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z}$ pro $x \in [c,d] \setminus \{z\}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $f_n' \rightrightarrows$

$$\exists n_0\ \forall n,m \geq n_0\ \forall x \in [c,d] : |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon.$$

Podobně jako v první části důkazu

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(z) - f_m(z))| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - z| < \varepsilon \cdot |x - z|.$$

Nyní $\forall m,n \geq n_0\ \forall x \in [c,d] \setminus \{z\}$:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \left| \frac{f_n(x) - f_m(z) - (f_m(x) - f_m(z)}{x - z} \right| < \frac{\varepsilon \cdot |x - z|}{|x - z|} = \varepsilon.$$

Podle BC $\varphi_n \rightrightarrows$ na $[c,d] \setminus \{z\}$. Tedy φ_n splňuje předpoklady Moore-Osgoodovy věty ($\lim_{x \to z} \varphi_n(x) = \lim_{x \to z} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} = f'(z)$). Tedy

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to z} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} = \lim_{x \to z} \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} f_n'(z) = \lim_{x \to z} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = f'(z).$$

A jelikož víme, že $f_n' \rightrightarrows$, tak $f_n' \to f' \implies f_n' \rightrightarrows f'$. □

1.2 Stejnoměrná konvergence řady funkcí

Definice 1.2

Řekněme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na intervalu J, pokud posloupnost částečných součtů $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na J.

Věta 1.5 (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaných na intervalu J. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ na J, pak posloupnost funkcí $u_n(x) \rightrightarrows 0$ na J.

Důkaz

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$$

speciálně pro $m = n + 1$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J : |\sum_{i=1}^{n+1} u_i - \sum_{i=1}^{n} u_i| = |u_{n+1}(x)| < \varepsilon \implies u_n \rightrightarrows 0.$$

□

Věta 1.6 (Weierstrassovo kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaných na intervalu J. Pokud pro

$$\sigma_n = \sup \{|u_n(x)| : x \in J\}$$

platí, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ na J.

Důkaz

Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro konečnou $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$

$$\exists n_0\ \forall m, n \geq n_0, m > n : |\sum_{k=n+1}^{m} \sigma_k| < \varepsilon.$$

Chceme ověřit BC podmínku pro $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$:

$$\forall m, n \geq n_0, m > n\ \forall x \in J : |s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{m} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sigma_k < \varepsilon.$$

Tedy podle BC podmínky $\sum u_k \rightrightarrows$. □

Věta 1.7 (O spojitosti a derivování řady funkcí)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu (a, b).

- *Nechť u_n jsou spojité na (a, b) a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{Loc}{\rightrightarrows}$ na (a, b). Pak $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je spojitá na (a, b).*
- *Nechť funkce u_n, $n \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na (a, b) a nechť $\exists x_0 \in (a, b)$:*

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{Loc}{\rightrightarrows}$ na (a,b). Pak je funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ dobře definovaná a diferencovatelná a navíc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{Loc}{\rightrightarrows} F(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{Loc}{\rightrightarrows} F'(x)$ na (a,b).

Důkaz

„První bod“: Funkce $s_n(x) = \sum_{n=1}^{k} u_n(x)$ jsou spojité a $s_k \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows}$ na (a,b). Tedy podle důsledku věty z dřívějška (stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá) je jejich limita lokálně spojitá, tedy spojitá.

„Druhý bod“: Na s_k použijeme větu z dřívějška (pokud mají derivace stejnoměrnou limitu, pak i funkce ji mají a shoduje se až na derivaci). Ověříme podmínky, tedy že $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} u_n(x)$ konverguje a $s_k' = \sum_{n=1}^{k} u_k' \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows}$ na (a,b). Podle tamté věty tedy $\exists F(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ a tato funkce je diferencovatelná a

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} F(x) \quad \wedge \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} F'(x) \qquad \text{na } (a,b).$$

□

Věta 1.8 (Abel-Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)

Nechť $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu J a nechť $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na J taková, že $b_1(x) \geq b_2(x) \geq \ldots \geq 0$. Jestliže je splněna některá z následujících podmínek, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) \rightrightarrows$ na J.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \rightrightarrows$ na J a b_1 je omezená.

(D) $b_n \rightrightarrows 0$ na J a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ má omezené částečné součty, tedy

$$\exists K > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \forall x \in J : |s_n(x)| = \left| \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \right| < K.$$

Důkaz
„Dirichlet“: Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme n_0 $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in J : |f_n(x)| < \varepsilon$. Nechť $m, n \geq n_0$. Označme $\sigma_i(x) := \sum_{j=m}^{i} a_j(x)$. Pak

$$|\sigma_i(x)| \leq \left| \sum_{j=1}^{i} a_j(x) - \sum_{j=1}^{n_0-1} a_j(x) \right| \leq K + K.$$

$$\forall m, n \geq n_0 \ \forall x \in J : \left| \sum_{j=n}^{m} a_j(x) \cdot b_j(x) \right| =$$

$$= |a_n \cdot b_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) b_{n+1} + \ldots + (\sigma_m - \sigma_{m-1}) b_m| \leq$$

$$\leq \sup_{j=n,\ldots,m} |\sigma_j(k)| \left(b_n - b_{n-1} + b_{n-1} - b_{n-2} + \ldots + b_{m-1} - b_m + \ b_m \right) =$$

$$= \sup_{j=n,\ldots,m} |\sigma_j(x)| \cdot |b_n(x)| \leq 2K \cdot \varepsilon.$$

A z BC podmínky už $\sum a_i(x) b_i(x) \rightrightarrows$ na J.

„Abel“: Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $\rightrightarrows$

$$\exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 : \left| \sum_{j=n}^{m} a_j(x) \right| < \varepsilon.$$

Tedy pro $\sigma_1(x) = \sum_{j=n}^{m} a_j(x)$ platí $|\sigma_i(x)| < \varepsilon$. Analogicky odhadu výše

$$\left| \sum_{j=n}^{m} a_j(x) \cdot b_j(x) \right| \leq \sup_{j=n,\ldots,m} |\sigma_j(x)| \cdot |b_n(x)| \leq \varepsilon \sup_{x \in J} (b_1(x)) \leq \varepsilon \cdot K.$$

Tedy $\sum a_i(x) \cdot b_i(x)$ splňuje BX podmínku. $\square$

2 Mocninné řady

Definice 2.1 (Mocninná řada)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ nazýváme mocninnou řadou s koeficienty a_n a středem x_0.

Definice 2.2 (Poloměr konvergence)

Poloměrem konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ nazveme

$$R = \sup \left\{ r \in [0, \infty) | \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ konverguje } \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \right\}.$$

Věta 2.1 (O poloměru konvergence mocninné řady)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ je mocninná řada a $R \in [0, \infty]$ je její poloměr konvergence. Pak řada konverguje absolutně $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ a diverguje $\forall x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + r, +\infty)$. Navíc platí $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Pokud existuje $Q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, potom $R = Q$.

Důkaz

Položme $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Pak pro $x : |x - x_0| < R$ platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot (x-x_0)^n|} = |x - x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-x_0|}{R} < 1 \implies \text{řada k. absolutně.}$$

Pro $|x - x_0| > R$ dostaneme úplně stejně > 1, tedy řada diverguje.

Nechť existuje $Q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} \cdot (x-x_0)^{n+1}|}{|a_n \cdot (x-x_0)^n|} = |x - x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = |x - x_0| \cdot \frac{1}{Q}.$$

Pro $|x - x_0| < \frac{1}{Q}$ řada konverguje, pro $|x - x_0| > \frac{1}{Q}$ řada diverguje, tedy $\frac{1}{Q}$ je poloměr konvergence. $\square$

Věta 2.2 (O stejnoměrné konvergenci mocninné řady)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ je mocninná řada a $R \in (0, \infty]$ je její poloměr konvergence. Pak řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Důkaz

Nechť $0 < r < R$. Podle předchozí věty $\sum a_n \cdot r^n$ konverguje absolutně. Nyní

$$\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] : |a_n (x - x_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n.$$

Víme, že $\sum |a_n| r^n$ konverguje, tedy podle Weierstrassova kritéria $\sum a_n (x-x_0)^n \rightrightarrows$ na $[x_0 - r, x_0 + r]$. Tedy konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$. $\square$

Věta 2.3 (O derivaci mocninné řady)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1}$ je také mocninná řada se stejným středem a s poloměrem konvergence R.

Navíc pro $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ platí $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1}$.

Důkaz
Položme $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Nyní poloměr konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_i \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1} \overset{x \neq x_0}{=} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_i \cdot n \cdot (x-x_0)^n}{x-x_0}$ je podle věty výše

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n| \cdot n}} = R \cdot \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n}} = R.$$

Následně použijeme větu o derivaci a stejnoměrné konvergenci (v bodě $x = x_0$ řada jistě konverguje a z předchozí věty řada derivací konverguje lokálně stejnoměrně) $\square$

Důsledek (O integrování mocninné řady)
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

je mocninná řada se stejným poloměrem konvergence. Navíc platí

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1} + C \text{ na } (x_0 - R, x_0 + R).$$

Důkaz (Hint k důkazu)
Mocninou řadu vpravo zderivujeme. $\square$

Věta 2.4 (Abelova)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Nechť navíc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n$ konverguje. Pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $[x_0, x_0 + R]$ a platí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n = \lim_{r \to R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n$.

Důkaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n \cdot R^n}_{a_n(x)} \cdot \underbrace{\frac{(x-x_0)^n}{R^n}}_{b_n(x)}.$$

Víme, že $b_n \geq b_{n+1} \geq 0$, jelikož $\frac{(x-x_0)^n}{R^n} \geq \frac{(x-x_0)^{n+1}}{R^{n+1}} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{x-x_0}{R}$. Navíc $b_0 = 1$. Víme, že $\sum a_n \cdot R^n$ konverguje, tedy podle BC podmínky pro konvergenci reálné řady:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 : |\sum_{k=n}^{m} a_k \cdot R^k| < \varepsilon.$$

Z toho ale jednoduše (jelikož $a_n(x)$ na x nezávisí)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 \ \forall x \in [x_0, x_0 + R] : |\sum_{k=n}^{m} a_k(x)| = |\sum_{k=n}^{m} a_k \cdot R^k| < \varepsilon.$$

Tedy podle Abel-Dirichletova kritéria (části Abel) $\sum a_n(x-x_0)^n \rightrightarrows$ na $[x_0, x_0 + R]$.

Funkce $a_n(x-x_0)^n$ jsou spojité a $\sum \rightrightarrows \implies F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ je spojitá na $[x_0, x_0 + R]$. Tedy

$$\lim_{x \to x_0 + R} F(x) = F(x_0 + R).$$

$\square$

3 Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací

Poznámka
Všechny integrály v této kapitole jsou Lebesgueovy.

3.1 Derivace monotónní funkce

Definice 3.1 (Limes superior a limes inferior pro funkce)

Nechť $x \in (a, b)$ a $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Definujeme limes superior a limes inferior jako

$$\limsup_{h \to 0} f(x+h) := \lim_{h \to 0} \sup_{y \in (x-h,x) \cup (x,x+h)} f(y), \qquad \liminf_{h \to 0} f(x+h) := \lim_{h \to 0} \sup_{y \in (x-h,x) \cup (x,x+h)} f(y).$$

Poznámka

Analogicky jako u posloupnosti platí věta:

$$\exists \lim_{h\to 0} f(x+h) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \limsup_{h\to 0} f(x+h) = \liminf_{h\to 0} f(x+h).$$

Definice 3.2

Nechť I je interval, x je vnitřní bod I a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce. Definujeme horní a dolní derivaci funkce f v bodě x jako

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$\underline{D}f(x) = \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Věta 3.1 (Míra vzoru a obrazu)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce, $M \subset I$ je měřitelná a $c > 0$.

- *Je-li $\overline{D}f(x) > c$ na M, potom $\mathcal{L}^*(f(M)) \supseteq c \cdot \mathcal{L}(M)$.*
- *Je-li $\underline{D}f(x) < c$ na M, potom $\mathcal{L}^*(f(M)) \subseteq c \cdot \mathcal{L}(M)$.*

Důkaz

Bez důkazu. □

Věta 3.2 (Derivace monotónní funkce)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Potom ve skoro každém bodě $x \in I$ existuje $f'(x)$.

Důkaz

Nechť $M_{p,q} = \left\{x \in I | \underline{D}f(x) < p < q < \overline{D}f(x)\right\}$. Podle předchozí věty

$$q \cdot \mathcal{L}(M_{p,q}) \subseteq \mathcal{L}^*(f(M_{p,q})) \subseteq p \cdot \mathcal{L}(M_{p,q}).$$

Tedy, protože $p < q$, tak $\mathcal{L}(M_{p,q}) = 0$.

Tvrdíme, že pro množinu M bodů nediferencovatelnosti platí $M = \bigcup_{p,q \in Q, p<q} M_{p,q}$ $\Longrightarrow$, tedy spočetné sjednocení nulových množin, tudíž M je nulová: „$\supseteq$“: $x \in M_{p,q}, p < q \implies \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x) \implies \nexists Df(x)$. „$\subseteq$“: Nechť $x \in M \implies \nexists Df(x) \implies \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)$. □

Věta 3.3 (Integrál derivace monotónní funkce)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce. Potom f' je lebesgueovsky *integrovatelná na $[a, b]$ a platí*

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a).$$

Důkaz

f je neklesající, tedy je měřitelná. Dodefinujeme $f(x) = f(b)$ pro $x > b$. Z předchozí věty víme, že pro skoro všechna x $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$. Definujeme funkce $g_n(x) = \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}$. Tyto funkce jsou měřitelné a pro skoro všechna x platí $\exists \lim_{n\to 0} g_n(x) = f'(x)$. Dále f je neklesající, tedy $g_n(x) \geq 0$ a $f'(x) \geq 0$.

Podle Fatouova lemmatu

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b \liminf_{n\to\infty} g_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx =$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_a^b n \cdot (f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x))dx = \liminf_{n\to\infty} \left(n \cdot \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(t)dt - n \cdot \int_a^b f(x)dx \right) =$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \left(n \cdot \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(t)dt - n \cdot \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx \right) \leq \liminf_{n\to\infty} \left(f(b) - n \cdot \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)dx \right) =$$

$$= f(b) - f(a).$$

Tedy f' je integrovatelná. □

3.2 Funkce s konečnou variací

Definice 3.3 (Kladná, záporná a totální variace)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a D dělení $[a, b]$. Definujeme kladnou variaci, zápornou variaci a (totální) variaci jako:

$$V^+(f, a, b) = \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ \right\},$$

$$V^-(f, a, b) = \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \right\},$$

$$V(f, a, b) = \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right\}.$$

Dále zavedeme značení $V_f^+(x) = V^+(f, a, x)$, atd.

Definice 3.4 (Konečná variace)

Řekneme, že funkce f ma na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ konečnou variaci, jestliže $V(f, a, b) < \infty$. Množinu všech funkcí s konečnou variací značíme $BV([a, b])$.

Poznámka
Nechť $[a, b] \in \mathbb{R}$ a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pak

- je-li f neklesající na $[a, b]$, pak $V(f, a, b) = V^+(f, a, b) = f(b) - f(a)$;
- $|V(f, a, b)| \geq |f(a) - f(b)|$.

Věta 3.4 (Vztah omezené variace a monotonie)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

- *Má-li f konečnou variaci na $[a, b]$, pak $V_f(x) = V_k^+ + V_f^-(x)$ a $f(x) - f(a) = V_f^+(x) - V_f^-(x)$.*
- *$f \subset BV(a, b)$ právě tehdy, když existují neklesající funkce $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ tak, že $f = v - u$.*

Důkaz
„První bod“: Nechť $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. Búno stačí pro $x = b$.

$$V(f,a,b) \geq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ + \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \leq V^+(f,a,b) + V^-(f,a,b).$$

Z těchto nerovností vezmeme supremum přes všechna dělení D a dostaneme $V(f,a,b) = V^+(f,a,b) + V^-(f,a,b)$ ($\geq$ z nerovnosti mezi prvním a třetím výrazem, $\leq$ z nerovnosti mezi druhým a čtvrtým).

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \leq$$

$$\leq V^+(f,a,b) - \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-.$$

Infimum přes dělení D dá $f(b) - f(a) \leq V^+(f,a,b) - \sup \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- = V^+(f,a,b) - V^-(f,a,b)$.

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - V^-(f,a,b).$$

Supremum přes dělení D dá $f(b) - f(a) \geq \sup \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - V^-(f,a,b) = V^+(f,a,b) - V^-(f,a,b)$.

„Druhý bod“: „ $\Longrightarrow$ “: Z prvního bodu víme, že $f(x) = (f(a) + V^+(f,a,x)) - V^-(f,a,x) = v(x) - u(x)$.

„ $\Longleftarrow$ “: Mějme tedy $f(x) = v(x) - u(x)$

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^{n} |v(x_i) - v(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| = v(b) - v(a) + u(b) - u(a),$$

což dá $f \in BV(a,b)$. □

Důsledek
$f \in BV \implies f$ má derivaci skoro všude.

Důkaz
Z předchozí věty $f = v - u$ a věty před ní mají u, v derivace skoro všude. $\square$

3.3 Absolutně spojitá funkce

Definice 3.5 (Absolutně spojitá funkce)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je absolutně spojitá na $[a, b]$, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: pro každý systém po dvou disjunktních intervalů $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^{n}$, $(a_j, b_j \subset [a, b])$ splňující $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta \implies \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. Množinu absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ budeme značit $AC([a, b])$.

Poznámka
$f \in Lip([a, b]) \implies f \in AC([a, b]) \implies f \in BC([a, b]) \cap C([a, b])$ a žádnou implikaci nelze obrátit.

$AC([a, b])$ je lineární prostor.

$f \in AC \implies V^{+} \in AC \wedge V^{-} \in AC$.

Věta 3.5 (Integrál derivace absolutně spojité funkce)

Nechť $f \in AC([a, b])$. Potom $f' \in L^1([a, b])$ a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$.

Důkaz
BÚNO f je rostoucí ($f \in AC \implies f \in BV \implies f(x) = (v(x)+x) - (u(x)+x)$, $v(x)+x, u(x)+x$ jsou rostoucí (u, v neklesající, ale my potřebujeme rostoucí, proto $+x$) a AC). Podle věty výše víme, že $\exists f'(x)$ skoro všude. Tedy $[a,b]$ si můžeme rozdělit na tři množiny – s kladnou f' (D), s nulovou f' (Z) a bez f' (N).

Dokážeme, že $|f(N)| = 0$, $|f(Z)| = 0$, $\int_D f'(x) = |f(D)|$. Pak $\int_a^b f'(x) = \int_D f'(x)dx = |f(D)| = |f(D) \cup f(Z) \cup f(N)| = f(b) - f(a)$, neboť f je rostoucí, tedy prostá.

„$|f(N)| = 0$“: Víme $|N| = 0$. K $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$ z definice AC. K N nalezneme otevřenou množinu G tak, že $N \subset G$ a $|G| < \delta$. Také $G = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ (resp. $\bigcup_{i=1}^{N}(a_i, b_i)$), kde (a_i, b_i) jsou po dvou disjunktní. Nyní $\forall m \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{m} b_i - a_i \leq |G| < \delta \implies \sum_{i=1}^{m} f(b_i) - f(a_i) < \varepsilon$. Nakonec pro $m \to \infty$ je $\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$ a $f(N) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f((a_i, b_i))$, tudíž $\sum_{i=1}^{\infty} f(b_i) - f(a_i) \leq \varepsilon$.

„$|f(Z)| = 0$“: Nechť $\varepsilon > 0$ a víme, že $f'(x) < \varepsilon$ na Z. Podle věty výše $|f(Z)| \leq \varepsilon \cdot |Z| \leq \varepsilon \cdot (b-a)$, tudíž $|f(Z)| = 0$.

„$\int_D f'(x) = |f(D)|$“: Nechť $\tau > 1$. Označme $D_k = \left\{x | T^k \leq f'(x) < \tau^{k+1}\right\}$. Pak $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k$. Podle věty výše

$$\frac{1}{\tau} \int_{D_k} f'(x)dx \leq \tau^k |D_k| \leq |f(D_k)| \leq \tau^{k+1} |D_k| \leq \tau \int_{D_k} f' dx$$

Posčítáme a získáme $\frac{1}{\tau} \int_D f'(x)dx \leq |f(D)| \leq \tau \int_D f'(x)dx$. Limita přes τ nám dá požadovanou rovnost. $\square$

Věta 3.6 (Neurčitý Lebesgueův integrál)

Nechť $\Theta \in L^1(a,b)$ a f je neurčitý Lebesgueův integrál Θ, tj. existuje konstanta C, že

$$f(x) = \int_a^x \Theta(t)dt + C, \qquad \forall x \in [a,b].$$

Pak $f \in AC$ a $f' = \Theta$ skoro všude.

Tvrzení 3.7 (Pozorování z TMI)

$$\Theta \in L^1 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ \forall M, |M| < \delta \implies \int_M |\Theta| < \varepsilon.$$

Důkaz
„$f \in AC$“: K $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta > 0$ z pozorování z TMI. Nechť (a_j, b_j) jsou po dvou disjunktní a $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta$. Nyní

$$\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| = \sum_{j=1}^{n} |\int_{a_j}^{b_j} \Theta(t)dt| \leq \int_{\bigcup(a_j,b_j)} |\Theta(t)|dt < \varepsilon \implies f \in AC.$$

„$f' = \Theta$ skoro všude“: Víme z předchozí věty, že $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$. Také víme $f(x) - C = \int_a^x \Theta(t)dt$. Tedy $C - f(a) = \int_a^x (f'(t) - \Theta(t))dt$. Při $x = a$ máme $C = f(a)$, tedy $\forall x \in [a, b] : \int_a^x (f'(t) - \Theta(t))dt$. Z TMI víme, že $f'(t) = \Theta(t)$ skoro všude. $\square$

Důsledek

$$f \in AC([a, b]) \Leftrightarrow \exists \Theta \in L^1(a, b), f(x) = \int_a^x \Theta(t)dt + C.$$

TODO (Chyběl jsem)

4 Fourierovy řady

4.1 Bodová konvergence Fourierových řad

Definice 4.1 (Dirichletovo jádro)

Nechť $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Potom funkce $D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos n \cdot x$ nazýváme Dirichletovým jádrem.

Věta 4.1 (O částečných součtech Fourierovy řady)

Nechť $f \in P_{2\pi}$ a $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + y) D_n(y)dy = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (f(x + y) + f(x - y)) D_n(y)dy.$$

Důkaz

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(k \cdot t) dt \cdot \cos(k \cdot x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(k \cdot t) dt \cdot \sin(k \cdot t) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos(k \cdot t) \cos(k \cdot x) + \sin(k \cdot t) \sin(k \cdot x)) \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k \cdot t - k \cdot x) \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot D_n(t-x) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(y+x) \cdot D_n(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y+x) D_n(y) dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{0}^{\pi} + \int_{-\pi}^{0} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} (f(x+y) + f(x-y)) \cdot D_n(y) dy.$$

□

Věta 4.2 (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)

Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je omezený interval a nechť $f \in L^1(a,b)$. Potom $\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x) \cdot \cos(t \cdot x) dx = 0$ a $\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x) \sin(t \cdot x) dx = 0$.

Důkaz
Pokud se nepletu, tak elegantnější důkaz je v `OM3/Funkcionalka/Funkcionalka.pdf str 69`.

$$1. \lim_{t\to\infty} \int_a^b \chi_{(c,d)}(x) \cdot \cos(t \cdot x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_c^d \cos(t \cdot x)dx =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{\sin(t \cdot x)}{t}\right]_c^d = \lim_{t\to\infty} \frac{\sin(t \cdot d) - \sin(t \cdot c)}{t} = 0.$$

$$2. G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (c_j, d_j) \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists j_0 | \bigcup_{j=j_0}^{\infty} (c_j, d_j)| < \varepsilon.$$

$$| \int_a^b \chi_G(x) \cos(t \cdot x)dx| \leq 0 + \int_a^b \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \chi_{(c_j,d_j)}(x)dx < \varepsilon.$$

$$3. f = \chi_E, E \in \mathcal{B} \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists G \text{ otevřená} : E \subset G \wedge |G \setminus E| < \varepsilon$$

$$| \int_a^b \chi_E \cos(t \cdot x)dx| \leq | \int_a^b \chi_G(x) \cos(t \cdot x)dx| + | \int_a^b \chi_{G\setminus E}(x) \cdot \cos(t \cdot x)dx| \leq 0 + \varepsilon.$$

4. Pro jednoduchou funkci je to triviální, neboť je to konečný součet 3.

5. K $\varepsilon > 0$ $\exists s$ jednoduchá, že $\int_a^b |f(x) - s(x)|dx < \varepsilon$.

$$| \int_a^b f(x) \cdot \cos(t \cdot x)dx| \leq | \int_a^b s(x) \cos(t \cdot x)dx| + | \int_a^b (s(x) - f(x)) \cdot \cos(t \cdot x)dx| \to 0 + \varepsilon \to 0.$$

□

Věta 4.3 (Riemannova věta o lokalizaci)

Nechť $f \in P_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$ a $s \in \mathbb{R}$. Potom $Sf(x) = s \Leftrightarrow \exists \delta \in (0, \pi)$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} (f(x + t) + f(x - t) - 2s) \cdot D_n(t)dt = 0.$$

Důkaz
Z věty výše víme, že $S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+y)+f(x-y))\cdot D_n(y)dy$. Dále z vlastností Dirichletova jádra
$$s = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(y)\cdot 2s dy.$$
Chceme $0 = \lim_{n\to\infty}(S_n f(x) - s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi (f(x+y)+f(x-y)-2s)D_n(y)dy =$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\delta (f(x+y)+f(x-y)-2s)\cdot D_n(y)dy + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \dots dy.$$
Stačí ukázat, že druhý integrál je roven nule. Z vlastností D_n je
$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi (f(x+y)+f(x-y)-2s)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})\cdot y)}{2\cdot\sin\frac{y}{2}}dy =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi \frac{f(x+y)+f(x-y)-2s}{2\sin\frac{y}{2}}\sin((n+\frac{1}{2})y)dy$$
Pokud je první činitel L_1, pak je toto rovno 0 z Riemannova-Lebesgueova lemmatu. Ale první činitel je integrovatelný, neboť $f(x+y)$, $f(x-y)$ i $2s$ jsou integrovatelné a $\sin\frac{y}{2} > \sin\frac{\delta}{2}$. $\square$

Definice 4.2 (Značení)

Nechť $x\in\mathbb{R}$ a f je reálná funkce na okolí x. Značíme $f(x+) = \lim_{t\to x_+} f(t)$ a $f(x-) = \lim_{t\to x_-} f(t)$

Věta 4.4 (Diniovo kritérium)

Nechť $f\in P_{2\pi}$ a $x\in\mathbb{R}$. Nechť existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$ a nechť existují limity
$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}, \qquad \lim_{t\to 0+}\frac{f(x-t)-f(x-)}{t}.$$
Potom řada S_f konverguje v x a platí $S_f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Speciálně má-li f konečné jednostranné derivace v x, pak $S_f(x) = f(x)$.

Důkaz
Podle předchozí věty stačí ukázat

$$\exists\delta > 0 : 0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - (f(x+) + f(x-))) \cdot D_n(t)dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \left(\frac{f(x+t) - f(x+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-)}{t} \right) \frac{t}{2\sin\frac{t}{2}} \cdot \sin((n+\frac{1}{2}) \cdot t)dt$$

Z definice limity jistě existuje $\delta > 0$ tak, že $\frac{f(x+t)-f(x+)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x-)}{t}$ je omezená. Dále $\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$ je omezená na $[0, \pi]$. Takže součin (značme ho F) těchto dvou funkcí je v $\mathcal{L}^1$. Podle Riemann-Lebesgueova lemmatu je $\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta F(t) \cdot \sin((n+\frac{1}{2}) \cdot t)dt = 0$. □

Věta 4.5 (Jordan-Dirichletovo kritérium)

Nechť $f \in P_{2\pi}$ a nechť $f \in BV([0, 2\pi])$. Potom

- *pro každé $x \in [0, 2\pi]$ Fourierova řada konverguje a $S_f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$,*
- *je-li f navíc spojitá na $(a, b) \subset [0, 2\pi]$, pak $S_n f \overset{Loc}{\rightrightarrows} f$ na $[a, b]$.*

4.2 Stejnoměrná konvergence – Fejérova věta

Definice 4.3 (Konvergence v Cesarově smyslu)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že a_n konverguje k $a \in \mathbb{R}$ v Cesarově [Čézarově] smyslu, pokud $\sigma_n = \frac{a_0+\ldots+a_n}{n+1} \to a$.

Definice 4.4 (Fejérovo jádro)

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Potom funkci $K_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n D_k(x)$ nazýváme Fejérovým jádrem.

Poznámka
K_n je sudá, 2π-periodická a $K_n(0) = \frac{n+1}{2}$. Platí $\int_{-\pi}^\pi K_n(x) = \pi$.

$$K_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}} \right)^2, \qquad x \in \mathbb{R}, \lambda \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{(To se ukáže indukcí.)}$$

Definice 4.5 (Částečné Fejérovy součty)

Nechť $f \in P_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Pak výraz

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k_0}^{n} S_k f(x)$$

nazýváme n-tý částečný Fejérův součet f.

Poznámka
To se z věty výše rovná $\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \cdot D_k(y) dy$.

Věta 4.6 (Fejérova)

Nechť $f \in P_{2\pi}$.

- *Jestliže pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$, pak*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

- *Je-li f spojitá na (a, b), pak $\sigma_n f \overset{Loc}{\rightrightarrows} f$ na (a, b).*

Důkaz (1. bod)
Podle poznámky

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) \cdot K_n(t) dt$$

a $s = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 2s \cdot K_n(t) dt$. Tedy

$$s_n f(x) - s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2s) K_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right).$$

K $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall t \in (0, \delta) : |f(x+t) + f(x-t) - (f(x+) + f(x-))| < \varepsilon$.

$$|\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi}| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \varepsilon \cdot |K_n(t)| dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varepsilon \cdot K_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$|\frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi}| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - (f(x+) + f(x-))| dt \cdot \frac{1}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \to 0.$$

□

Důkaz (2. bod)
Nechť $[c, d] \subset (a, b)$. Chceme $\sigma_n f(x) \rightrightarrows f(x)$ na $[c, d]$, tedy $|\sigma_n f(x) - f(x)| \leq$ něco malého, co nezávisí na $x \in [c, d]$. Nalezneme $\gamma > 0$, aby $[c - \gamma, d + \gamma] \subset (a, b)$. Ze stejnoměrné spojitosti f na $[c - \gamma, d + \gamma]$ k $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$ tak, že

$$\forall s, t \in [c - \gamma, d + \gamma] : |s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Tedy $\forall x \in [c, d]$ $\forall t \in (0, \gamma)$

$$|f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)| \leq |f(x + t) - f(x)| + |f(x - t) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Analogicky prvnímu bodu:

$$|\sigma_n f(x) - f(x)| = |\frac{1}{\pi} \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) (f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)) \cdot K_n(t) dt|.$$

$$|\frac{1}{\pi} \int_0^\delta | \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta 2\varepsilon \cdot K_n(t) dt \leq \varepsilon,$$

$$|\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi | \leq \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi |f(x + t) + f(x - t) + 2f(x)| dt \frac{1}{2(n + 1)} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x + t)| + |f(x - t)| + 2M dt \cdot \frac{1}{2(n + 1)} \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} (2 \int_0^{2\pi} |f(t)| dt + 2\pi 2M) \cdot \frac{1}{2(n + 1)} \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \to 0$$

(f je spojitá na $[c, d] \implies |f(x)| \leq M$.) □

Věta 4.7 (Weierstrassova – trigonometrická verze)

Nechť $f \in P_{2\pi}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje trigonometrický polynom T splňující $||f - T||_{C(\mathbb{R})} < \varepsilon$.

Důkaz
Z Fejerovy věty (2. bod). □

Důsledek (Weierstrass)
Nechť $f \in C([a, b])$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje polynom P tak, že $||f - P||_{C([a,b])} < \varepsilon$.

Důkaz (Šel by udělat přes komplexní čísla, ale zde je důkaz bez nich.)
Z Taylorovy věty víme, že $\forall [c,d]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists$ polynomy $P, Q : |\sin x - P(x)| < \varepsilon$ a $|\cos x - Q(x)| < \varepsilon$ na $[c,d]$. BÚNO $[a,b] = [0,2\pi]$ a f je periodická.

Z předchozí věty nalezneme trigonometrický polynom, že $||f - T|| < \varepsilon$. Nyní $T = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$. Nalezneme polynomy P_k a Q_k, aby $|\cos kx - P_k| < \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{|a_k|+1}$, $|\sin kx - Q_k| < \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{|b_k|+1}$. Položme $P = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot P_k + b_k \cdot Q_k$. P je polynom.

$$||P - f|| \leq ||f - T|| + ||T - P|| < \varepsilon + ||\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (\cos kx - P_k) + b_k(\sin kx - Q_k)|| <$$

$$< \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{|a_k|+1} + |b_k| \cdot \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{|b_k|+1} < 3 \cdot \varepsilon$$

□

Věta 4.8 (Fourierovy koeficienty určují funkci)

Nechť $f, g \in P_{2\pi}$ mají stejné Fourierovy koeficienty. Potom $f = g$ skoro všude.

Důkaz
Funkce $f - g$ má nulové Fourierovy koeficienty. Tedy BÚNO $f \neq 0, g = 0$ a $\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = 0$ a $\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Označme $\mathcal{T} := \left\{\varphi \in L^\infty(0,2\pi) | \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \varphi(x) dx = 0\right\}$.

1. $\mathcal{T}$ je zřejmě lineární prostor. 2. Nechť $\varphi_n \in \mathcal{T}$, $\varphi_n \to \varphi$ skoro všude a $||\varphi_n||_\infty \leq K\ \forall n$. Pak $\varphi \in \mathcal{T}$ z Lebesgueovy věty. 3. Trigonometrické polynomy $\subset \mathcal{T}$, neboť $\cos nx \in \mathcal{T}$, $\sin nx \in \mathcal{T}$ a použijeme jedničku. 4. Nechť φ je spojitá, $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0$. Podle předchozí věty existuje trigonometrický polynom $T_n \rightrightarrows \varphi$. Tedy $\varphi \in \mathcal{T}$ z druhého bodu. 5. $[a,b] \subset (0,2\pi)$, pak $\chi_{(a,b)} \in \mathcal{T}$, jelikož k ní konvergují „lichoběžníky". 6. $G \subset [0,2\pi]$ otevřená, potom $\chi_G \in \mathcal{T}$, neboť $G = \bigcup_{i=1}^\infty (a_i, b_i)$ a $\sum_{i=1}^k \chi_{(a_i,b_i)} \to \chi_G$ skoro všude a sumy jsou stejně omezené $K = 1$. 7. $E \subset (0,2\pi)$ měřitelná, pak $\chi_E \in \mathcal{T}$, neboť pro každé n existuje G_n otevřená, že $E \subset G_n \wedge |G_n \setminus E| < \frac{1}{2^n}$ (z TMI).

8. $E_1 := \{f > 0\}$ a $E_2 := \{f < 0\}$:

$$\int_0^{2\pi} |f| = \int_{E_1} f - \int_{E_2} f = \int_0^{2\pi} \chi_{E_1} f - \int_0^{2\pi} \chi_{E_2} f = 0 \implies f = 0 \text{ skoro všude.}$$

□

Důsledek
Trigonometrické funkce tvoří bázi prostoru $L^2(0,2\pi)$.

Důkaz
Nechť pro spor BÚNO $f \neq 0$ a $\langle f, \sin nx \rangle = 0$ a $\langle f, \cos nx \rangle = 0$ $\forall n$. Pak je ale $f \equiv 0$ z předchozí věty. $\square$

Poznámka (Komplexní zápis)

$$Sf(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cdot e^{ikx} + c_{-k} \cdot e^{-ikx}),$$
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$