Příklad (10.6)
Je dána afinní kuželosečka $\tilde{Q}$ s rovnicí

$$11x^2 + 4xy + 14y^2 - 4x - 28y - 16 = 0.$$

- Ukažte, že $\tilde{Q}$ je regulární kuželosečka.
- Určete její afinní typ.
- Určete tečny k $\tilde{Q}$ z bodu $[-1, -1]$.
- Nalezněte její střed a asymptoty $\tilde{Q}$, jestliže existují.
- Nalezněte její osy, vrcholy a délky poloos.
- Nalezněte nějakou parametrizaci $\tilde{Q}$ a ukažte, že všechny vrcholy jsou body s nejmenší či největší znaménkovou křivostí.

Řešení
$\tilde{Q}$ lze ztotožnit s průnikem projektivní kuželosečky

$$Q = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{P}^2 \middle| \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & -14 \\ -2 & -14 & -16 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 0 \right\}$$

s projektivní rovinou „$x_3 = 1$“. Matice má determinant

$$11 \cdot 14 \cdot (-16) + 2 \cdot (-14) \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 \cdot (-14) - (-2) \cdot 14 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 \cdot (-16) - 11 \cdot (-14) \cdot (-14) = -4500,$$

tedy je regulární a určuje tudíž regulární kuželosečku.

Body mimo $x_3 = 1$ jsou právě ty, pro které $x_3 = 0$, tedy:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & -14 \\ -2 & -14 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Tato matice má hlavní minory 11 a 150, tedy je pozitivně definitní, tudíž jediné řešení je $x_1 = x_2 = 0$, ale $\mathbf{o} \notin \mathbb{P}^2$.

Tudíž kuželosečka nemá žádné nevlastní body, takže je to elipsa.

Je to elipsa tedy nemá žádné asymptoty. Rovnici můžeme upravit: