Příklad (1.1)
Dokažte, že v libovolném komplexním vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ platí (pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$)

$$\Re(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{4}\left(||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 - ||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2\right),$$

$$\Im(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{4}\left(||\mathbf{u}-i\mathbf{v}||^2 - ||\mathbf{u}+i\mathbf{v}||^2\right).$$

Důkaz
Jednoduše upravujeme podle definice skalárního součinu 8.15 (body SSS, SL1, SL2), pozorování 8.16 (body 2, 3) a definicí normy 8.27 (N)[a]:

$$\frac{1}{4}\left(||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 - ||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2\right) \stackrel{\text{N}}{=} \frac{1}{4}\left(\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v} \rangle\right) \stackrel{\text{SL2, 3}}{=}$$

$$= \frac{1}{4}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle) \stackrel{\text{SSS}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}) = \Re(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle),$$

$$\frac{1}{4}\left(||\mathbf{u}-i\mathbf{v}||^2 - ||\mathbf{u}+i\mathbf{v}||^2\right) \stackrel{\text{N}}{=} \frac{1}{4}\left(\langle \mathbf{u}-i\mathbf{v}, \mathbf{u}-i\mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}+i\mathbf{v}, \mathbf{u}+i\mathbf{v} \rangle\right) \stackrel{\text{SL2, 3, SL1, 2}}{=}$$

$$= \frac{1}{4}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - i\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + i\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - i\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + i\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle) \stackrel{\text{SSS}}{=}$$

$$= \frac{i}{2}(\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = \Im(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle).$$

□

[a] Ještě potřebujeme

$$\Re(a+bi) = \frac{1}{2}(a+bi+a-bi) = \frac{1}{2}(a+bi+\overline{a+bi}),$$

$$\Im(a+bi) = \frac{i}{2}(a-bi-(a+bi)) = \frac{i}{2}(\overline{a+bi}-(a+bi)).$$

Příklad (1.2)
Zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dáno vzorcem $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A\mathbf{v}$, kde A je reálná symetrická čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu 2. Dokažte, že $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když platí $a_{11} > 0$ a $\det(A) > 0$.

Důkaz
Vizte následující příklad ($a_{11} = \det A_1, \det A = \det A_2$). □

Příklad (1.*)
Buď $A = (a_{ij})$ reálná symetrická matice řádu n. Pro $1 \le k \le n$ označme $A_k = (a_{ij})_{i,j \le k}$ matici řádu k, která vznikne z matice A vynecháním posledních $n-k$ řádků a posledních $n-k$ sloupců. Ukažte, že matice A určuje skalární součin na $\mathbb{R}^n$ právě když $\det(A_k) > 0$ pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Důkaz
Taktéž použijeme definici 8.15. Z toho, že je matice reálná a symetrická (tedy hermitovská) a $\mathbf{u}^T A\mathbf{v}$ číslo, dostáváme SSS ($\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$):

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A\mathbf{v} = \left(\mathbf{u}^T A\mathbf{v}\right)^T = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{u} = \mathbf{v}^T A\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle .$$

Z vlastností násobení matic skalárem a násobení a sčítání matic mezi sebou dostáváme SL1 a SL2 ($\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$):

$$\langle \mathbf{u}, t\mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \mathbf{u}^T A(t\mathbf{v} + \mathbf{w}) = t\mathbf{u}^T A\mathbf{v} + \mathbf{u}^T A\mathbf{w} = t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle .$$

Tedy to, co rozhoduje, jestli daná reálná symetrická matice bude skalární součin, je podmínka SP. Nejprve vyřešme situaci[a] $\exists k_0 \in [n] : \det A_{k_0} = 0$. To, že je determinant nulový, znamená, že A_{k_0} není regulární, tedy existuje nenulový vektor $(x_1, \ldots, x_{k_0})^T$ v jejím jádru. Pokud tento vektor doplníme nulami na vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{k_0}, 0, 0, \ldots)^T \in \mathbb{R}^n$, vektor $A\mathbf{x}$ má prvních k_0-členů nulových (z definice jádra a z toho, že díky 0 se sloupce $k_0 + 1$ a dále neprojeví do součinu). Tím pádem ale

$$\mathbf{x}^T \cdot (A\mathbf{x}) = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + \ldots + x_{k_0} \cdot 0 + 0 \cdot (A\mathbf{x})_{k_0+1} + \ldots + 0 \cdot (A\mathbf{x})_n = 0.$$

Tudíž jsme našli vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$, pro který je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$. To však nesplňuje druhou část podmínky SP, tedy matice A neurčuje skalární součin.

Nyní tedy předpokládejme, že $\forall k \in [n] : \det A_k \neq 0$. Můžeme si všimnout, že členy matice

$$A = I \cdot A \cdot I = I^T \cdot A \cdot I = (e_1 | \ldots | e_n)^T \cdot A \cdot (e_1 | \ldots | e_n) = \left(e_1^T | \ldots | e_n^T\right) \cdot A \cdot (e_1 | \ldots | e_n),$$

$$\text{kde } e_i = (0, \ldots, 0, 1_i, 0, \ldots, 0)^T,$$

určují $\mathbf{u}^T A\mathbf{v}$, kde $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou příslušné bázové vektory. Nejprve nechť $\exists k_- \in [n] : \det A_k < 0$. Zvolme nejmenší takové k_-. Potom $\forall k \in [k_- - 1] : \det A_k > 0$, tedy můžeme použít záporné lemmátko níže, takže existuje posloupnost symetrických úprav tak, že $a'_{k_-,k_-} < 0$. Podle sčítacího lemmátka (jelikož už víme, že $\mathbf{u}^T A\mathbf{v}$ splňuje SSS, SL1, SL2) má ale existovat $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tak, že $a'_{k_-,k_-} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$. Tedy takové A také nesplňuje podmínku SP, tentokrát první část.

Zbývá dokázat, že pokud reálná symetrická matice splňuje $\det(A_k) > 0$, $\forall k \in [n]$, pak už splňuje SP. To uděláme jednoduše tak, že libovolný nenulový[b] vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ zapíšeme ve tvaru $\mathbf{x} = x_1 \cdot e_1 + \ldots x_k \cdot e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \ldots + 0 \cdot e_n$, kde $x_k \neq 0$. Následně sloupec a řádek k matice A přenásobíme x_k a přičteme k nim $x_1$krát první řádek a sloupec, $x_2$krát druhý, ..., x_{k-1}krát $k-1$-tý. Tím podle sčítacího lemmátka dostaneme v $a'_{k,k}$ výsledek

$$(x_1 \cdot e_1 + \ldots x_k \cdot e_k)^T A(x_1 \cdot e_1 + \ldots x_k \cdot e_k) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}.$$

Přenásobením a přičtením jsme rozhodně nezměnili A_{k-1} a přenásobením jsme sice vynásobili $\det A_k$ číslem $(x_k)^2$, ale to je kladné číslo, tedy znamínko $\det A_k$ se nezměnilo a přičítáním řádků a sloupců k jiným se determinant nemění. Tedy můžeme použít kladné lemmátko na A'_k a dostaneme, že $0 < a'_{k,k} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Tím jsme dokázali SP. □

[a] $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
[b] Pro nulový vektor je SP splněna triviálně pro každou matici, jelikož $\mathbf{o}^T A\mathbf{o} = 0$.

Lemma 0.1 (Sčítací lemmátko)

Mějme bilineární symetrickou (tj. splňující SSS, SL1 a SL2) formu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na $\mathbb{R}^n$, vektory $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ a reálnou matici $B=(b_{i,j})$ řádu n, kde $b_{i,j}=\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle$. Potom přičtením x násobku řádku α k řádku β a x násobku sloupce α k sloupci β dostaneme matici $B'=(b'_{i,j})$, kde $b'_{i,j}=\left\langle\mathbf{v}'_i,\mathbf{v}'_j\right\rangle$, kde $\mathbf{v}'_l=\mathbf{v}_l+x\cdot\mathbf{v}_\alpha$, pokud $l=\beta$, a $\mathbf{v}'_l=\mathbf{v}_l$ jinak.

Speciálně pro volbu $\alpha=\beta$ a $x=y-1$ dostáváme matici $B'=(b'_{i,j})$, kde $b'_{i,j}=\left\langle\mathbf{v}'_i,\mathbf{v}'_j\right\rangle$, kde $\mathbf{v}'_l=y\cdot\mathbf{v}_l$, pokud $l=\beta$, a $\mathbf{v}'_l=\mathbf{v}_l$ jinak.

Důkaz
Přičtením x násobku řádku α k řádku β se změní pouze řádek β, a to ($i\in[n]$)

$$b^*_{\beta,i}=b_{\beta,i}+x\cdot b_{\alpha,i}=\langle\mathbf{v}_\beta,\mathbf{v}_i\rangle+x\cdot\langle\mathbf{v}_\alpha,\mathbf{v}_i\rangle=\langle\mathbf{v}_\beta+x\cdot\mathbf{v}_\alpha,\mathbf{v}_i\rangle=\left\langle\mathbf{v}'_\beta,\mathbf{v}_i\right\rangle.$$

(Pro $i\neq\beta$ již $b^*_{\beta,i}=b'_{\beta,i}$, jelikož $\mathbf{v}_i=\mathbf{v}'_i$.) Obdobně následně přičteme sloupec. Jediný problém je prvek $b'_{\beta,\beta}$, ale ten je zřejmě

$$b'_{\beta,\beta}=b^*_{\beta,\beta}+x\cdot b^*_{\beta,\alpha}=\left\langle\mathbf{v}'_\beta,\mathbf{v}_\beta\right\rangle+x\cdot\left\langle\mathbf{v}'_\beta,\mathbf{v}_\alpha\right\rangle=\left\langle\mathbf{v}'_\beta,\mathbf{v}_\beta+x\mathbf{v}_\alpha\right\rangle=\left\langle\mathbf{v}'_\beta,\mathbf{v}'_\beta\right\rangle.$$

□

Lemma 0.2 (Kladné lemmátko)

Nechť $A=(a_{i,j})$ je reálná symetrická matice řádu n, pro kterou platí[a] $\forall k\in[n]:\det A_k>0$, potom A má na diagonále kladné členy.

Důkaz (Indukcí)
Pro $\mu=1$ je triviálně $a_{1,1}=\det A_1>0$. Tedy $a_{1,1}$ je kladné a vynásobením prvního řádku a prvního sloupce $\frac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}$ dostaneme jednotkovou matici bez toho, abychom změnili znaménka determinantů matic $A_k, k\in[n]$ (násobíme řádek / sloupec, tedy i determinant, kladným číslem), a aniž bychom změnili hodnoty $a_{k,k}, k\in[n]\setminus\{1\}$.

Nechť nyní $\mu\in[n]\setminus\{1\}$ a pro $\mu-1$ lze matici $A_{\mu-1}$ symetrickými úpravami na A, které nezmění determinanty A_k a hodnoty $a_{k,k}, n\geq k\geq\mu$, převést do jednotkové matice. Proveďme tyto úpravy.

Označme novou matici $A'_\mu=(a'_{i,j})$. Víme tedy, že $A'_{\mu-1}=I$, $\det A'_\mu>1$, A'_μ je symetrická a $a'_{\mu,\mu}=a_{\mu,\mu}$. Zároveň na první pohled (jiné členy z definice determinantu vyjdou 0):

$$0<\det A'_\mu=a'_{\mu,\mu}\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1+\sum_{i=1}^{\mu-1}\operatorname{sgn}((i,\mu))\cdot a'_{\mu,i}\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot a'_{i,\mu}=$$

$$a_{\mu,\mu}-\sum_{i=1}^{\mu-1}\left(a'_{\mu,i}\right)^2\leq a_{\mu,\mu}.$$

Tudíž opravdu $a_{\mu,\mu}>0$.

Nyní už můžeme přičtením správných násobků řádků a sloupců (symetricky) $k<\mu$ k sloupci a řádku μ vynulovat všechny prvky $a'_{\mu,k}$ a $a'_{k,\mu}$, kde $k<\mu$. To je přičítání násobků řádků / sloupců k jinému řádku / sloupci, tedy to nemění determinant. Navíc to mění pouze prvky, které mají alespoň jeden index $<\mu$, takže i neměnnost $a_{k,k}, k>\mu$ zůstává zachována. Následně pak můžeme μ-tý sloupec a μ-tý řádek vynásobit $\frac{1}{\sqrt{a''_{\mu,\mu}}}$ (z předchozího přičítání / odčítání nám vyjde nový prvek na pozici μ,μ, my však už víme, že musí být kladný), tedy převést matici A_μ do jednotkové a nezměnit znaménko determinantů vyšších matic, ani další prvky na diagonále. □

[a] A_k značí podmatici A jako v příkladu výše.

Lemma 0.3 (Záporné lemmátko)

Nechť $A = (a_{i,j})$ *je reálná symetrická matice řádu* k_-*, pro kterou platí*[a] $\forall k \in [k_- - 1] : \det A_k > 0$ *a* $\det A < 0$*. Potom existuje posloupnost symetrických úprav (řádková + ta samá sloupcová úprava) tak, že* $a_{k_-,k_-} < 0$*.*

Důkaz

Stejně jako v minulém lemma upravíme matici $A_{k_- -1}$ do jednotkové matice symetrickými úpravami na A. Následně odečteme $\forall i \in [k_- - 1] : a_{k_-,i}$krát i-tý řádek od k_--tého a i-tý sloupec od k_--tého. Tím vynulujeme všechny prvky kromě těch na diagonále a nezměníme $A_{k_- -1}$ ani znaménko determinantu $\det A$. Tedy:

$$0 > \det A = \prod_{i=1}^{k_-} a_{i,i} = 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a_{k_-,k_-} = a_{k_-,k_-}.$$

□

[a] A_k značí podmatici A jako v příkladu výše.