

Organizační úvod

Poznámka

Jako vždycky, jen v implikacích u zkoušky budou i pojmy z předchozích semestrů.

1 Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

1.1 Bodová a stejnoměrná konvergence posloupností funkcí

Definice 1.1

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť máme funkce $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_n : J \rightarrow \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$

- konverguje bodově k f na J , pokud $\forall x \in J : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, neboli:

$$\forall x \in J \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

- konverguje stejnoměrně k f na J (značíme $f_n \rightrightarrows f$ na J), pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

- konverguje lokálně stejnoměrně, pokud pro každý omezený uzavřený $[a, b] \subset J$ platí $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ (značíme $f_n \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} f$ na J).

Věta 1.1 (Kritérium stejnoměrné konvergence)

Nechť $f, f_n : J \rightarrow \mathbb{R}$, pak

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } J \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

┌
Důkaz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

└

□

┌ *Poznámka* (Pro spojité funkce)

$$\Leftrightarrow \|f_n - f\|_{C(J)} \rightarrow 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{C(J)} f.$$

Věta 1.2 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)

Nechť $f_n : J \rightarrow \mathbb{R}$, pak

$$(\exists f : f_n \Rightarrow f \text{ na } J) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

┌ *Důkaz*

„ \Rightarrow “: Víme $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Tedy

$$\forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon.$$

„ \Leftarrow “: Víme $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Toto použijeme pro pevné $x \in J$. Pro posloupnost $a_n = f_n(x)$ máme splněnou BC podmínku pro posloupnost reálných čísel, tj. $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$.

Označíme si $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Nyní v BC podmínce provedeme limitu $n \rightarrow \infty$. Tím dostaneme přesně definici stejnoměrné konvergence. \square

Věta 1.3 (Moore-Osgood)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^$ je krajní bod intervalu J . Nechť $f_n, f : J \rightarrow \mathbb{R}$ splňují*

- $f_n \Rightarrow f$ na J ,
- existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$.

Pak existují $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a jsou si rovny.

┌ *Důkaz*

┌ Příště. \square

Důsledek

Nechť $f_n \Rightarrow f$ na I a nechť f_n jsou spojité na I . Pak f je spojitá na I .

Poznámka

Obdobně lze definovat stejnoměrnou spojitost i pro libovolnou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ a $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ a platí, že stejnoměrná limita je spojitá (stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá).

Důkaz (Moore-Osgood)

Z BC podmínky

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Provedeme $\lim_{x \rightarrow x_0}$ a dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Tedy a_n splňuje BC podmínku, a tudíž $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

Nechť $\varepsilon \geq 0$. Z definice $f_n \rightrightarrows f$

$$\exists n_0 \forall x \in J : |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zároveň předpokládejme $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$ (zvolíme si n_0 jako maximum). Máme pevnou funkci f_{n_0} a $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{n_0}(x) = a_{n_0}$. Tedy

$$\exists \delta > 0 \forall x \in P(x_0, \delta) \cap J : |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Nyní $\forall x \in P(x_0, \delta) \cap J$ platí

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

□

Věta 1.4 (O záměně limity a derivace)

Nechť funkce f_n , $n \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na intervalu (a, b) a nechť

- $\exists x_0 \in (a, b) : \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje,
- pro derivace f'_n platí $f'_n \xrightarrow{Loc} f'$ na (a, b) .

Potom existuje funkce f tak, že $f_n \xrightarrow{Loc} f$ na (a, b) , f má vlastní derivaci a platí $f'_n \xrightarrow{Loc} f'$ na (a, b) .

┌

Důkaz

Nechť $x_0 \in [c, d] \subset (a, b)$. Víme $f'_n \rightrightarrows$ na $[c, d]$. Chceme ukázat $f_n \rightrightarrows f$ na $[c, d]$ ($\implies f_n \xrightarrow{\text{Loc}} f$ na (a, b)). Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $f'_n \rightrightarrows$

$$\exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in [c, d] : |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon$$

a zároveň $\forall m, n \geq n_0 : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$. Nyní $\forall x \in [c, d]$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \\ &\leq |h(x) - h(x_0)| + \varepsilon \leq |x - x_0| \cdot |h'(\xi)| + \varepsilon \leq (d - c) \cdot \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

kde $h = f_n - f_m$ a $\xi \in (x_0, x)$ resp. (x, x_0) z Lagrangeovy věty (cvičení: předpoklady jsou splněné).

Zbývá dokázat „ $f'_n \rightrightarrows f'$ na $[c, d]$ “: Zvolme $z \in [c, d]$ a položíme $\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z}$ pro $x \in [c, d] \setminus \{z\}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $f'_n \rightrightarrows$

$$\exists n_0 \forall n, m \geq n_0 \forall x \in [c, d] : |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon.$$

Podobně jako v první části důkazu

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(z) - f_m(z))| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \cdot |x - z| < \varepsilon \cdot |x - z|.$$

Nyní $\forall m, n \geq n_0 \forall x \in [c, d] \setminus \{z\}$:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \left| \frac{f_n(x) - f_m(z) - (f_m(x) - f_m(z))}{x - z} \right| < \frac{\varepsilon \cdot |x - z|}{|x - z|} = \varepsilon.$$

Podle BC $\varphi_n \rightrightarrows$ na $[c, d] \setminus \{z\}$. Tedy φ_n splňuje předpoklady Moore-Osgoodovy věty ($\lim_{x \rightarrow z} \varphi_n(x) = \lim_{x \rightarrow z} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} = f'(z)$). Tedy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow z} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} &= \lim_{x \rightarrow z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z) = \lim_{x \rightarrow z} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = f'(z). \end{aligned}$$

A jelikož víme, že $f'_n \rightrightarrows$, tak $f'_n \rightarrow f' \implies f'_n \rightrightarrows f'$. □

└

1.2 Stejnomořná konvergence řady funkcí

Definice 1.2

Řekněme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na intervalu J , pokud posloupnost částečných součtů $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na J .

Věta 1.5 (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaných na intervalu J . Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow na J$, pak posloupnost funkcí $u_n(x) \Rightarrow 0$ na J .

┌

Důkaz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$$

speciálně pro $m = n + 1$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in J : \left| \sum_{i=1}^{n+1} u_i - \sum_{i=1}^n u_i \right| = |u_{n+1}(x)| < \varepsilon \implies u_n \Rightarrow 0.$$

└

□

Věta 1.6 (Weierstrassovo kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaných na intervalu J . Pokud pro

$$\sigma_n = \sup \{|u_n|(x) : x \in J\}$$

platí, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow na J$.

┌

Důkaz

Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro konečnou $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$

$$\exists n_0 \forall m, n \geq n_0, m > n : \left| \sum_{k=n+1}^m \sigma_k \right| < \varepsilon.$$

Chceme ověřit BC podmínku pro $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$:

$$\begin{aligned} \forall m, n \geq n_0, m > n \forall x \in J : |s_m(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{k=1}^m u_k(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m \sigma_k < \varepsilon. \end{aligned}$$

┌

Tedy podle BC podmínky $\sum u_k \Rightarrow$.

□

Věta 1.7 (O spojitosti a derivování řady funkcí)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu (a, b) .

- Nechť u_n jsou spojité na (a, b) a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xRightarrow{Loc} na (a, b)$. Pak $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je spojitá na (a, b) .
- Nechť funkce u_n , $n \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na (a, b) a nechť $\exists x_0 \in (a, b) :$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \xrightarrow{\text{Loc}} na (a, b)$. Pak je funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ dobře definovaná a diferencovatelná na (a, b) a navíc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{\text{Loc}} F(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \xrightarrow{\text{Loc}} F'(x)$ na (a, b) .

Důkaz

„První bod“: Funkce $s_n(x) = \sum_{n=1}^k u_n(x)$ jsou spojité a $s_k \xrightarrow{\text{Loc}} na (a, b)$. Tedy podle důsledku věty z dřívějška (stejněměrná limita spojitých funkcí je spojitá) je jejich limita lokálně spojitá, tedy spojitá.

„Druhý bod“: Na s_k použijeme větu z dřívějška (pokud mají derivace stejnoměrnou limitu, pak i funkce ji mají a shoduje se až na derivaci). Ověříme podmínky, tedy že $s_k(x) = \sum_{n=1}^k u_n(x)$ konverguje a $s'_k = \sum_{n=1}^k u'_k \xrightarrow{\text{Loc}} na (a, b)$. Podle tamté věty tedy $\exists F(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ a tato funkce je diferencovatelná a

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{\text{Loc}} F(x) \quad \wedge \quad \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \xrightarrow{\text{Loc}} F'(x) \quad \text{na } (a, b).$$

□

Věta 1.8 (Abel-Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)

Nechť $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu J a necht $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na J taková, že $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots \geq 0$. Jestliže je splněna některá z následujících podmínek, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) \Rightarrow na J$.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \Rightarrow na J$ a b_1 je omezená.

(D) $b_n \Rightarrow 0$ na J a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ má omezené částečné součty, tedy

$$\exists K > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in J : |s_n(x)| = \left| \sum_{i=1}^m a_i(x) \right| < K.$$

┌ *Důkaz*

„Dirichlet“: Necht $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x)| < \varepsilon$. Necht $m, n \geq n_0$. Označme $\sigma_i(x) := \sum_{j=m}^i a_j(x)$. Pak

$$|\sigma_i(x)| \leq \left| \sum_{j=1}^i a_j(x) - \sum_{j=1}^{n_0-1} a_j(x) \right| \leq K + K.$$

$$\forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : \left| \sum_{j=n}^m a_j(x) \cdot b_j(x) \right| = |a_n \cdot b_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n)b_{n+1} + \dots + (\sigma_m - \sigma_{m-1})b_m| \leq \sup_{j=n, \dots, m} |\sigma_j(x)| \cdot |b_m(x)|$$

A z BC podmínky už $\sum a_i(x)b_i(x) \Rightarrow$ na J .

„Abel“: Necht $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro \Rightarrow

$$\exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : \left| \sum_{j=n}^m a_j(x) \right| < \varepsilon.$$

Tedy pro $\sigma_1(x) = \sum_{j=n}^m a_j(x)$ platí $|\sigma_i(x)| < \varepsilon$. Analogicky odhadu výše

$$\left| \sum_{j=n}^m a_j(x) \cdot b_j(x) \right| \leq \sup_{j=n, \dots, m} |\sigma_j(x)| \cdot |b_m(x)| \leq \varepsilon \sup_{x \in J} (b_1(x)) \leq \varepsilon \cdot K.$$

└ Tedy $\sum a_i(x) \cdot b_i(x)$ splňuje BX podmínku. □