1 Úvod aneb Projektivní přímka a rovina

Poznámka (O čem to bude)
Nevlastní body, homogenní souřadnice. Projektivní geometrie = „geometrie polohy“, tj. neměří se vzdálenosti ani úhly. Máme pojmy (v rovině) bod, přímka, incidence ($X \in p$).

Inspirováno perspektivou v malířství (realismus, 17. století).

Klíčové pojmy: nevlastní body („body v nekonečnu“), princip duality.

Poznámka (Možné přístupy ke geometrii)
Axiomatický (jen axiomy, bez obrázků) (dnes), syntetický (důraz kladen na obrázky, bez souřadnic) (tento semestr), analytický (souřadnice, bez obrázků) (příští semestr).

1.1 Axiomatika projektivní geometrie (v rovině)

Poznámka (Primitivní pojmy)
Bod, přímka, incidence.

Definice 1.1 (Axiom A1)

Ke každým dvěma (různým) bodům ∃! přímka s oběma body incidentní. (Přímce říkáme *spojnice* daných bodů.)

Definice 1.2 (Axiom A2)

Ke každým dvěma (různým) přímkám ∃! bod s oběma přímkami incidentní. (Bodu říkáme *průsečík* daných přímek.)

Poznámka
A2 vzniklo z A1 záměnnou pojmů bod a přímka. V EG neplatí, ale v PG chceme mít Princip duality.

Definice 1.3 (Princip duality)

Veškerá tvrzení zůstávají v platnosti, pokud v nich zaměníme pojmy bod a přímka, incidence (prochází bodem a leží na přímce, průsečík a spojnice), a pojmy z nich odvozené.

Definice 1.4 (Nevlastní bod, vlastní bod)

Máme-li dvě rovnoběžky v EG, pak za jejich průsečík v PG označíme společný směr (bez orientace), neboli nevlastní bod (značíme X_∞, atd.).

Původní body v rovině budeme nazývat vlastní.

Definice 1.5 (Nevlastní přímka, vlastní přímka)

Nevlastní přímka (n_∞) = množina všech nevlastních bodů.

Poznámka
S nevlastními body a přímkou splňuje rovina A1 i A2.

Definice 1.6 (Axiom A3)

Existují alespoň 4 body, z nichž každé 3 jsou nekolineární.

Poznámka („A4“)
Duální tvrzení k A3 už je dokazatelné z A1 až A3.

Definice 1.7 (Projektivní rovina)

Rovina s nevlastními body a nevlastní přímkou splňuje i A3. Takové rovině ($\mathbb{R}^2 \cup n_\infty$) budeme říkat projektivní rovina a značit ji $\mathbb{R}P^2$ nebo P^2.

Poznámka (Idea: existující různé geometrie)
Euklidovská geometrie (EG) (body, přímky, incidence, vzdálenosti, úhly), Afinní geometrie (AG) (body, přímky, incidence, rozlišení rovnoběžek a různoběžek, případně vlastních a nevlastních bodů), Projektivní geometrie (PG) (body, přímky, incidence).

(Hyperbolická geometrie = Lobačevského geometrie (body, přímky, incidence, jiné vzdálenosti, jiné úhly))

1.2 Afinní geometrie

Poznámka
Body $A, B, \ldots$ a vektory $u, v, \ldots$.

$\rightarrow$ přímky, vzájemné polohy přímek (ale ne kolmost).

Poznámka (Lze zavést střed úsečky:)
$\vec{AS} = \frac{1}{2}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{SA} = -\vec{SB}$.

Definice 1.8 (Dělící poměr)

Dělící poměr 3 bodů A, B, C na (jedné) přímce je číslo $\lambda = (ABC)$ splňující $C - A = \lambda(C - B)$.

Poznámka
Odsud lze odvodit Euklidovskou definici dělícího poměru: $|\lambda| = \frac{\|C-A\|}{\|C-B\|}$.

A, B, C různé, pak λ nenabývá hodnot 0 $(A = C)$, 1 $(A = B)$ a ∞ $(B = C)$.

C je středem úsečky AB, právě když $(ABC) = -1$.

Dělící poměr jako graf funkce (A, B pevné, C proměnné) je hyperbola.

Pro každé dva body $A \neq B$ a $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, existuje právě jedno C, že $(ABC) = \lambda$.

Konstrukce: dány úsečky délek 1 a λ, a body A, B.

Pokud $\lambda = (ABC)$, tak $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$, $(ACB) = 1 - \lambda$, $(BCA) = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, $(CAB) = \frac{1}{1-\lambda}$, $(CBA) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$. Tyto permutace se některé rovnají pro λ z trojice $(0, 1, \infty)$ (každé tam bude dvakrát), z trojice $(-1, 2, 1/2)$ (také každé dvakrát) a z dvojice $(1/2 + i\sqrt{3}/2, 1/2 - i\sqrt{3}/2)$ (každé třikrát).

Poznámka (Role zobrazení v jednotlivých geometriích)
V EG: posunutí, otáčení a osová souměrnost (tj. shodnosti) zachovávají délky a úhly (tj. (pro zajímavost) jsou to invarianty euklidovské grupy).

V AG: isomorfismy (lineární zobrazení na) zachovávají dělící poměr.

1.3 Projektivní přímka

Definice 1.9 (Označení)

Je-li $v = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, označíme $\langle v \rangle$ = lineární obal v = přímka generovaná v (procházející počátkem). Tedy $\langle (x_0, x_1) \rangle = \langle v \rangle = \langle av \rangle = \langle ax_0, ax_1 \rangle$ pro $\forall a \neq 0, a \in \mathbb{R}$.

Definice 1.10 (Projektivní přímka $\mathbb{R}P^1$, geometrický bod, aritmetický zástupce, homogenní souřadnice)

Projektivní přímka je množina $\mathbb{R}P^1 = \{\langle v \rangle | v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ = množina všech přímek v $\mathbb{R}^2$ (procházejících počátkem). Prvek $\langle v \rangle \in \mathbb{R}P^2$ nazýváme geometrický bod, vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nazýváme jeho aritmetickým zástupcem.

Poznámka
Tedy každý geometrický bod má nekonečně mnoho aritmetických zástupců (a ti se všichni liší jen nenulovým násobkem).

Je-li $v = (x_0, x_1)$, píšeme $\langle v \rangle = [x_0 : x_1]$. Tomuto se říká homogenní souřadnice geometrického bodu.

Poznámka
Jsou určeny až na nenulový násobek.

Definice 1.11 (Kanonické vnoření afinní přímky $\mathbb{R}$ do projektivní přímky $\mathbb{R}P^1$)

Kanonické vnoření afinní přímky $\mathbb{R}$ do projektivní přímky $\mathbb{R}P^1$ je zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}P^1$, bod $x \mapsto [1 : x]$ (body vlastní) a vektor $1 \mapsto [0 : 1]$ (bod nevlastní).

První souřadnice je tzv. rozlišovací souřadnice (1 znamená vlastní, 0 nevlastní).

TODO!!!

Příklad (Konstrukce)
Zkonstruovat 4. harmonický bod. (Mějme body M, N, A a chceme najít C tak, aby $(MNAC) = -1$)

Řešení
Zvolíme nekolineární bod H, do kterého vedeme přímky m, n, a. Vedeme libovolnou přímku z A, průsečíky s m a n označme X a Y. Do nich vedeme přímky z N a M a průsečík těchto přímek spojíme s H a máme přímku c.

TODO!!! (Konstrukce 4. harmonické přímky).

Definice 1.12 (Projektivní škála)

Máme body 0, 1 a ∞ na jedné přímce. Následně provedeme několik kroků: 1. najdeme bod -1 tak, aby $(0\,\infty\,1\;-1) = -1$, najdeme bod -2 tak, aby $(-1\,\infty\,0\;-2) = -1$

TODO!!!

Poznámka
Této konstrukce se dá použít k nakreslení pražců na sbíhající se koleje (průsečík $= \infty$, první pražec 0, druhý 1).

2 Projektivita a perspektivita lineárních soustav

Definice 2.1 (Soustava)

Bodová = označené body na přímce. Píšeme $p(A, B, C, \ldots)$.

Přímková = označené přímky ve svazku. Píšeme $P(a, b, c, \ldots)$.

Dvě soustavy jsou sourodé, pokud jsou stejného typu a nesourodé, pokud jsou různých typů. Pokud jsou sourodé, pak mohou být soumístné, tedy na stejné přímce / ve stejném svazku, nebo nesoumístné (různé přímky / různé svazky).

Definice 2.2 (Perspektiva)

Perspektiva nesoumístných sourodých soustav je zobrazení: pro bodové soustavy jde o středové promítání z bodu $O \notin p, p'$ (píšeme $p(A, B < C) :: p'(A', B', C')$), pro přímkové soustavy duálně (přímka o protne soustavu procházející P v bodech, které spojíme s bodem P' a dostaneme druhou soustavu).

Bod O se nazývá bod perspektivity (střed promítání). Přímka o je přímkou perspektivity.

Poznámka
Bod O nemusí být vlastni.

Poznámka (Značení ::)
Perspektivita je určená dvěma páry bodů/přímek (potřebujeme najít bod O nebo přímku o), proto „dvakrát dvě tečky“.

Důsledek
V každé perspektivitě existuje samodružný element: průsečík $p \cap p'$ respektive spojnice PP'.

Pozor
Složení perspektivit obecně není perspektivita! (Nemusí být zachován samodružný element.)

Definice 2.3 (Projektivita)

Projektivita je složení konečného počtu perspektivit.

Poznámka
Dá se dokázat, že každá projektivita je složením $\leqslant 2$ perspektivit.

Důsledek
Projektivita obecně nemá samodružný element, ale pokud už ho obsahuje, již je perspektivitou.

Pozor
Perspektivita nezachovává dělící poměr 3 bodů.

Tvrzení 2.1

Perspektivita zachovává dvojpoměry 4 bodů.

Důsledek
Projektivita zachovává dvojpoměry 4 bodů.

Tvrzení 2.2 (Lze dokázat i opak)

Pokud zobrazení zachovává kolinearitu a dvojpoměr, je to nutně projektivita.

Poznámka (Druhý způsob (analytický) zavedení projektivity a perspektivity)
Nejprve se zavede projektivní souřadný systém (PSS) na projektivní přímce. Je to trojice bodů $0, 1, \infty$. Souřadnice bodu X vůči tomuto PSS je homogenní dvojice $[1 : x]$, kde $x = (X10\infty)$. Pak projektivní zobrazení je $\mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^1$, $[x_0 : x_1] \mapsto [x'_0 : x'_1]$, kde $(x'_0, x'_1) = A \cdot (x_0, x_1)^T$, kde A je regulární matice 2×2 určená až na násobek $\neq 0$.

Důsledek
Projektivita zachovává dvojpoměr.

Pak perspektivita = projektivita mající samodružný bod.

Poznámka (Značení projektivity)
Projektivitu značíme $p(A, B, C) ::: p'(A', B', C')$.

Poznámka
Projektivita je určena třemi páry bodů.

Definice 2.4 (Perspektivita nesourodých soustav)

Dvě nesourodé soustavy jsou v perspektivitě, je-li jedna soustava průmětem/průsekem té druhé.

Věta 2.3

Dvě sourodé nesoumístné soustavy jsou v perspektivitě $\Leftrightarrow$ *obě jsou v perspektivitě s touž nesourodou soustavou.*

Důkaz

Obrázkem. (Dává nám to přesně ty body a přímky, které potřebujeme.) □

Poznámka (Doplňování soustav)

Doplňování perspektivit ($p(A, B, C) :: p'(A', B', C')$ dáno, k bodu X na p doplňte X') je jednoduché.

Doplňování projektivit ($p(A, B, C) ::: p'(A', B', C')$ dáno, m bodu X na p doplňte X') je těžší, budeme potřebovat následující větu.

Věta 2.4 (O direkční přímce)

Nechť $p(A, B, C) ::: p'(A', B', C')$ *je projektivita nesoumístných bodových soustav. Pak průsečíky spojnic* AB' *a* $A'B$*,* AC' *a* CA'*,* BC' *a* CB' *leží na jedné přímce* d*.*

Důkaz

Zvolme si význačné body A, A' a uvažujme přímky: $a = AA'$, $b = AB'$ a $c = AC'$, stejně tak $a' = A'A$, $b' = A'B$, $c' = A'C$. Hned je jasné, že $a = a'$.

Pak máme $A(a, b, c) :: p'(A', B', C') ::: p(A, B, C) :: A'(a', b', c')$. Tedy $A(a, b, c) ::: A'(a', b', c')$. Ale ta má samodružnou přímku $a = a'$, tedy je to perspektivita 2 přímkových soustav, tedy podle předchozí věty jsou obě v perspektivitě s touž nesourodou soustavou (body na přímce). Označme ji d. A víme, že se s ní protínají odpovídající si páry přímek, tj. páry $B = AB'$, $b' = A'B$, $c = AC'$, $c' = A'C$.

Potřebujeme ukázat, že přímka d nezávisí na volbě páru AA'. A tím také to, že také přímky BC', $B'C$ se protínají na d. Označme $M = N'$ průsečík $p \cap p'$. Kde je M' a N? Platí $M' = p' \cap d$ a $N = p \cap d$. $N \in p$ zřejmé (leží v soustavě $p(A, B, C)$). $N \in d$? máme přímky $n = AN = p$, $n' = A'N$, víme, že průsečík $n \cap n' = N \in d$. Stejně tak $M' = p' \cap d$.

Důsledek: $d = M'N$, ale M, N' nezáleží na volbě páru AA', tedy máme hotovo. □

Definice 2.5 (Direkční přímka projektivity)

Přímku z předchozí věty nazveme direkční přímka projektivity.

Poznámka

Projektivita je perspektivita $\Leftrightarrow p \cap p' \in d$.

Příklad
Doplňování projektivity (nesoumístných soustav) je teď jednoduché. Doplňování projektivity soumístných soustav uděláme přes další soustavu.

Příklad
Spojení bodu V s nepřístupným průsečíkem přímek p, p'.

Řešení
Na p a p' doplníme body A, A', B, B' tak, aby $V \in AB', BA'$. AA' a BB' se protínají v bodě, ze kterého vedeme přímku, na která protne p a p' v bodech C a C'. Nyní najdeme direkční přímku.

Věta 2.5 (Pappova o šestiúhelníku)

Stejné jako věta o direkční přímce. (Jinak formulovaná.)

TODO!!! (charakteristika projektivity, involuce, …)

Definice 2.6 (Involuce)

Involuce je projektivita (soumístných soustav) splňující jednu z následujících ekvivalentních podmínek:

- $w = (XX'ST) = -1$; (tzv. charakteristika projektivity, X a X' je libovolný pár, S a T jsou různé samodružné elementy)
- $\exists X \neq S, T : X'' = X$;
- $\forall X : X'' = X$.

Definice 2.7 (Hyperbolická a eliptická involuce)

S, T reálné různé $\implies$ involuce je hyperbolická (nesouhlasné soustavy, neboli směr je proti).

S, T komplexně sdružené $\implies$ eliptická (souhlasné soustavy, neboli směr se zachovává).

Poznámka
$S = T$ je parabolická involuce (ale není to projektivita, neboť to není prosté zobrazení).

Poznámka (Pár involuce)
$X \to X'$ a $X' \to X$, pak X, X' je pár involuce.

Poznámka
Projektivita je určena 3 páry, involuce je určena 2 páry.

Důsledek
$AA'B'B$ a $BAA'B'$ (ve skutečnosti vzhledem k zahrnutí ∞ jsou to stejné případy) jsou hyperbolické (říkáme páry se nerozdělují), $ABA'B'$ jsou hyperbolické (páry se rozdělují).

Příklad (Konstrukce)
Určit druhý samodružný bod (T) involuce určené jedním samodružným bodem (S) a jedním párem (A, A').

Řešení
Využijeme $(AA'ST) = -1$ a najdeme čtvrtý harmonický bod, jak jsme to již dělali.

Věta 2.6 (O bodu na direkční přímce)

Mějme projektivitu $p(A, B, C) ::: p'(A', B', C')$ (nesourodých soustav), d nechť je direkční přímka, $H \in d$ libovolný bod na direkční přímce. Pak páry přímek $a = HA$, $A' = HA'$, $b = HB$, $b' = HB'$, atd. jsou páry téže involuce přímek ve svazku se středem H. Neboli $H(a, b, c) ::: H(a', b', c')$ je involuce.

Důkaz
„1. Projektivita“:

$$H(a, b, c) :: p(A, B, C) ::: p'(A', B', C') :: H(a', b', c').$$

(Složení tří projektivit je projektivita, tedy existuje $H(a, b, c) ::: H(a', b', c')$)

„2. Involuce“: Tato projektivita je involuce, protože pokud označíme $X = a' \cap p \implies x = a'$, pak z věty o direkční přímce platí $X' = a \cap p' \implies a = x'$, tedy (a, a') je pár involuce a to už stačí.

(Pokud $H \in AA'$, zvolíme místo A jiný bod.) □

Věta 2.7 (O přímce procházející direkčním bodem)

Mějme projektivitu $P(a, b, c) ::: P'(a', b', c')$, D nechť je direkční bod a $D \in h$. Pak páry bodů $A = h \cap a$, $A' = h \cap a'$, $B = h \cap b$, $B' = h \cap b'$ jsou páry téže involuce bodů na přímce h. ($h(A, B, C) ::: h(A', B', C')$ je involuce.)

Důkaz
Dualita. □

Příklad
Doplňování bodové involuce dané dvěma páry.

Řešení
Použijeme předchozí větu a doplníme projektivitu. (Další způsoby jsou klasicky jako doplňování projektivity, nebo použití původní, neduální, verze předchozí věty.)

2.1 Úplný čtyřroh a úplný čtyřstran

Definice 2.8 (Úplný čtyřroh)
Čtveřice bodů v rovině (M, N, P, Q), přičemž žádné tři nejsou kolineární, se nazývá čtyřroh.

Tyto body (M, N, P, Q) jsou vrcholy čtyřrohu. Jejich 6 spojnic jsou strany čtyřrohu.

Máme 3 páry protějších stran (MN a PQ, MP a NQ, MQ a NP), 3 diagonální vrcholy = průsečíků protějších stran (X, Y, Z) a 3 diagonální strany (XY, XZ, YZ).

Všemu tomuto dohromady se říká úplný čtyřroh.

Definice 2.9 (Úplný čtyřstran)
Čtveřice přímek v rovině (m, n, p, q), přičemž žádné tři neprochází jedním bodem, se nazývá čtyřstran.

Tyto přímky (m, n, p, q) jsou strany čtyřstranu. Jejich 6 průsečíků jsou vrcholy čtyřstrnu.

Máme 3 páry protějších vrcholů ($m \cap n$ a $p \cap q$, $m \cap p$ a $n \cap q$, $m \cap q$ a $n \cap p$), 3 diagonální strany = spojnice protějších vrcholů (x, y, z) a 3 diagonální vrcholy ($x \cap y$, $x \cap z$, $y \cap z$).

Všemu tomuto dohromady se říká úplný čtyřstran.

Věta 2.8
Každá (i diagonální) strana úplného čtyřrohu je proťata ostatními stranami jen ve 4 bodech, které tvoří harmonickou čtveřici.

Důkaz
„První část“ se spočítá z obrázku. „Druhá část“ je vidět z konstrukce čtvrtého bodu harmonické čtveřice. □

Věta 2.9 (Duální k přechozí)

Každý (i diagonální) vrchol úplného čtyřstranu je spojen s ostatními vrcholy pouze 4 přímkami, ty tvoří harmonickou čtveřici.

Věta 2.10 (O přímce a čtyřrohu)

Je dán úplný čtyřroh a libovolná přímka h různá od jeho 9 stran. Pak protější strany 4 rohu vytínají na h páry téže involuce.

Důkaz

Nechť P a Q jsou středy svazků $a = PM$, $b = PN$ a $a' = QN$, $b' = QM$ (a a a' protější, b a b' taktéž). Páry AA', BB' zadávají involuci na h. Je pár CC' také párem této involuce?

Zároveň máme projektivitu $P(a, b, \dots) ::: Q(a', b', \dots)$. Dle věty o přímce procházející direkčním bodem je průsečík $D = C' = MN \cap h$ direkčním bodem této projektivity a proto $D' = C = PQ \cap h$. Tedy $DD' = C'C$ je pár téže involuce. □

Věta 2.11 (O bodu a čtyřstranu)

Je dán úplný čtyřstran a bod H různý od jeho vrcholů. Pak spojnice protějších vrcholů čtyřstranu s H tvoří páry téže involuce.

Poznámka

A, A', B, B', C, C' z předchozí věty (původní verze) se nazývá čtyřstranná množina.

3 Kuželosečky

Definice 3.1 (Bodová kuželosečka)

Mějme projektivitu nesoumístných přímkových soustav $H(a, b, c) ::: H'(a', b', c')$. Bodová kuželosečka $\mathcal{B}$ = množina průsečíků odpovídajících si přímek (tj. $a \cap a'$, $b \cap b'$, atd.).

Věta 3.1

Zadaná projektivita je perspektivitou ⇔ kuželosečka B se skládá ze dvou přímek, a sice přímky HH' a z přímky perspektivity.

Důkaz

Z obrázku a rozpravy nad ním. □

Definice 3.2 (Singulární a regulární)

Když $H :: H'$ $\mathcal{B}$ je singulární. V opačném případě je regulární.

Tvrzení 3.2 (Platí)

$H, H' \in \mathcal{B}$. (Pro singulární kuželosečku celá $HH' \in \mathcal{B}$. Pro regulární křivku $H = n \cap n'$ a $H' = m \cap m'$, tedy $H, H' \in \mathcal{B}$.)

Poznámka
Dále budeme uvažovat jen regulární křivky.

Definice 3.3 (Vzájemná poloha přímky a kuželosečky)

Přímka v rovině je (ve vztahu ke kuželosečce)

- vnější přímka, pokud nemají žádný společný bod;
- tečna, má-li jeden průsečík;
- sečna, má-li dva průsečíky.

Věta 3.3

Bodem H (resp. H') prochází jediná tečna, a sice n (resp. m'), kde $m = n' = HH'$. Průsečík $D = n \cap m'$ je direkčním bodem zadané projektivity.

Důkaz
Přímka $x \in H(a, b, c)$ protíná kuželosečku $\mathcal{B}$ ve 2 bodech, pouze pro $x = n$ tyto 2 body splývají do 1 bodu (H). Podobně pro H', m'. $D = n \cap m'$ už víme. □

Věta 3.4

Je-li dána $\mathcal{B}$ pomocí projektivity $H(a, b, c)$ ::: $H'(a', b', c')$ a zvolíme-li 5 bodů na $\mathcal{B}$: K, K', A, B, C a označíme-li $\alpha = KA$, $\beta = KB$, ..., pak projektivita $K(\alpha, \beta, \gamma)$ ::: $K(\alpha', \beta', \gamma')$ zadává tutéž kuželosečku.

Důkaz
Vynechán. □

Důsledek
V definici kuželosečky můžeme vzít za středy svazků libovolné dva body na kuželosečce.

Důsledek
Každým bodem (regulární) kuželosečky prochází jediná tečna.

Důsledek
Kuželosečka je zadána 5 body (nebo šesti přímkami, z nichž 3 a 3 prochází stejným a stejným bodem).

Příklad (Konstrukce (!!!))
Sestrojit kuželosečku z 5 bodů. (Tj. dány body H, H', A, B, C, najít alespoň 1 další bod kuželosečky procházející těmito body. Pak umíme najít libovolný konečný počet bodů.)

Řešení
Nalezneme direkční bod a následně provedeme konstrukci druhé přímky v perspektivitě k nějaké zvolené přímce (ta nám určuje, který bod dostaneme).

Příklad (DÚ)
K zadaným 5 bodům najít 10–15 dalších bodů kuželosečky. (Ručně nebo v geogebře.)

Příklad (Konstrukce)
Kuželosečka zadána 5 body, v jednom z nich najít tečnu.

Řešení
Tento bod vezmeme jako bod soustavy, k němu zvolíme druhý bod a najdeme direkční bod perspektivity přímkových soustav procházejících zbylými třemi body. Ten spojíme s naším bodem a máme tečnu.

Poznámka
Tečna s bodem dotyku = 2 podmínky pro kuželosečku.

Kuželosečka je tedy zadána 5 podmínkami:

- 5 bodů;
- 4 body + tečna v jednom z nich;
- 3 body + tečny ve dvou z nich.

Příklad (Konstrukce)
Sestrojit kuželosečku z jedné tečny a 4 bodů.

Řešení
Zvolíme ze 3 zbývajících bodů bod druhé přímkové soustavy. Poté průsečík tečny a spojnice (správných) průsečíků vzniklých 4 přímek je direkční bod.

Příklad (Konstrukce)
Sestrojit kuželosečku ze dvou tečen a 3 bodů.

Řešení
Zde máme direkční bod rovnou.

3.1 Soustavy na bodové kuželosečce

Definice 3.4

$\mathcal{B}(A, B, C)$ je bodová soustava na $\mathcal{B}$. Zase mohou bít soumístné/nesoumístné. Perspektivita soustavy na kuželosečce a soustavy na přímce je „promítnutí“ bodů soustavy $\mathcal{B}(A, B, C)$ z libovolného bodu $\in \mathcal{B}$ na danou přímku. Složení perspektivit je zase projektivita. Dvojpoměr 4 bodů na $\mathcal{B}$ je definován přenesením na bodovou soustavu na přímce (zachovává se v každé projektivitě).

Poznámka
Projektivita je dána 3 páry bodů.

Projektivita soumístných soustav na $\mathcal{B}$ má 2/1/0 samodružných bodů.

Věta 3.5

Je-li dána projektivita $\mathcal{B}(A, B, C) \;:::\; \mathcal{B}(A', B', C')$, pak průsečíky $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$, $BC', B'C$ leží na jedné, tzv. direkční přímce d. Navíc $d \cap \mathcal{B}$ jsou samodružné body dané projektivity.

Důkaz
Označíme si $b = A'B$, $b' = AB'$, $c = A'C$, $c = AC'$ a $a = A'A = a'$.

$$A(a', b', c') \;:::\; \mathcal{B}(A', B', C') \;:::\; \mathcal{B}(A, B, C) \;:::\; A'(a, b, c).$$

Tato projektivita $(A(a', b', c') \;:::\; A'(a, b, c))$ je perspektivita (neboť $a = a'$ je samodružná). Tedy existuje přímka perspektivity d, na níž se kříží b', b a c, c'.

Dále chceme ukázat i $BC' \cap B'C \in d$ a $d \cap \mathcal{B} =$ samodružné body projektivity. Nejprve ukážeme druhou část (a z ní už plyne první, protože samodružné body nezávisí na volbě A): $S = S'$, $T = T'$ samodružné body ($\in \mathcal{B}$ z definice), potom $S = S' \in d$, neboť $s = A'S$ a $s' = AS'$ se protínají na d, ale jediný jejich průsečík je $S = S'$ ($T = T'$ obdobně). □

Důkaz
Důkaz pro 0 samodružných bodů (případně pro 1) by se prováděl algebraicky. □

Poznámka
Direkční přímka je sečnou / tečnou / vnější přímkou k $\mathcal{B} \Leftrightarrow$ daná projektivita má 2/1/0 reálné samodružné body.

Příklad (Konstrukce)
Doplňování projektivity na bodové kuželosečce.

Řešení
Nemůžeme to udělat tak, jak bychom chtěli, protože nemáme „nakreslenou" kuželosečku (neumíme s ní dělat průsečík).

Co ale můžeme, můžeme obvyklým způsobem najít dvě přímky procházející doplňovaným bodem a najít jejich průsečík.

Definice 3.5 (Involuce (totéž, co výše))

Involuce je projektivita (soumístných soustav) splňující jednu z následujících ekvivalentních podmínek:

- $w = (XX'ST) = -1$; (tzv. charakteristika projektivity, X a X' je libovolný pár, S a T jsou různé samodružné elementy)
- $\exists X \neq S, T : X'' = X$;
- $\forall X : X'' = X$.

Poznámka
Involuce je dána 2 páry bodů.

Rozlišujeme involuci hyperbolickou a eliptickou podle toho, zda má 2 nebo 0 samodružných bodů.

Věta 3.6 (O involuci na bodové kuželosečce)

Nechť je dána involuce na $\mathcal{B}$ dvěma páry bodů A, A'; B, B'. Pak platí:

1. *Na direkční přímce d leží nejen průsečíky AB', $A'B$, … ale i průsečíky AB, $A'B'$, …*
2. *Spojnice AA', BB', … se protínají v jediném bodě P.*
3. *Průsečíky $\alpha \cap \mathcal{B}$ jsou samodružné body involuce (S, T), přímky PS a PT jsou tečny z bodu P k $\mathcal{B}$.*
4. *Tečny v bodech A, A' se také protínají na d.*

Definice 3.6

d se pak nazývá osa involuce, P se nazývá střed involuce.

Důkaz (1.)
Průsečík AB' a $A'B \in d$ z definice d. Průsečík AB a $A'B' \in d$ záměnou $A \leftrightarrow A'$. □

Důkaz (2.)
Body A, A', B, B' zadávají úplný čtyřroh. d je jednou z jeho diagonálních stran (plyne z 1. bodu) a to každého takového. Tedy bod $R = AA' \cap d$ zůstává pevný pro každý čtyřroh obsahující body A a A'. Dále bod P je protější diagonální vrchol k diagonálni straně d. Navíc víme, že A, R, A', P je harmonická čtveřice takže (protože A, R a A' jsou pevné) P je pevný pro každou volbu B, B'. □

Důkaz (3.)
Víme už, že $S, T = d \cap \mathcal{B}$ a díky $S = S'$ a $T = T'$ se jedná o tečny. □

Důkaz (4.)
„Limitním přechodem" z bodu 1. □

Definice 3.7

Říkáme též, že involuce je indukována svým středem P.

Taktéž definujeme vnější a vnitřní bod kuželosečky v následující tabulce:

Involuce	Reálné samodružné body	Osa involuce	Střed involuce
hyperbolická	2	sečna	vnější bod
eliptická	0	vnější přímka	vnitřní bod
„parabolická"	1	tečna	$\in \mathcal{B}$

(U parabolické se všechny body zobrazí do P.)

Definice 3.8 (Další názvy)

$P =$ pól přímky d, $d =$ polára bodu P.

Poznámka
$p =$ vnitřní bod $\mathcal{B} \implies$ každá přímka z bodu P je sečna $\mathcal{B}$.

$p =$ vnější bod $\mathcal{B} \implies$ existují právě dvě tečny a ty oddělují sečny od vnějších přímek.

Důsledek
Je-li $R = A'A \cap T_1T_2$ (T_i tečné body z bodu P), pak $(AA'RP) = -1$.

3.2 Čtyři malé věty

Věta 3.7 (A)

Mějme na $\mathcal{B}$ dány dvě involuce se středy $P \neq Q$. Tyto dvě involuce mají jediný společný pár, jsou to právě průsečíky $PQ \cap \mathcal{B}$. Navíc je-li alespoň jeden z bodů P, Q vnitřní, je tento pár reálný.

Důkaz
Jednoduchý. □

Věta 3.8 (B)

Nechť A, A' = pár involuce indukovaný na $\mathcal{B}$ středem P, $Q :=$ průsečík tečen k $\mathcal{B}$ v bodech A a A'. $X, X' = PQ \cap \mathcal{B}$. Pak X, X' je jediný pár involuce se středem P, který splňuje $(XX'AA' = -1)$.

Důkaz
Pro involuci ze středem Q platí A, A' jsou samodružné body. X, X' je pár této involuce, tedy $(XX'AA') = -1$. A dle Věty A je to jediný takový pár. □

Věta 3.9 (C)

P = libovolný vnější bod $\mathcal{B}$. M, N = body dotyku tečen z P k $\mathcal{B}$. A, C = 2 (libovolné) body na $\mathcal{B}$ kolineární s bodem P. B = libovolný další bod na $\mathcal{B}$. $a := BA$, $c := BC$, $m := BM$, $n := BN$. Pak $(mnac) = -1$.

Důkaz
Okamžitě z Věty B. □

Věta 3.10 (D)

P, M, N, A, C jako ve větě C. $m := CM$, $n := CN$, $a := CA$ a c je tečna v bodě C. Pak $(mnac) = -1$. (Věta C s $C = B$.)

Důkaz
$C = B$ ve Větě C. □

Příklad (Konstrukce)
Kuželosečka je dána 3 body a tečnami ve 2 z nich. Sestrojit tečnu ve 3 bodě.

Řešení
Věta D.

4 Tečnové kuželosečky

Definice 4.1 (Tečnová kuželosečka)

Mějme projektivitu nesourodých bodových soustav $h(A, B, C) ::: h'(A', B', C')$. Tečnová kuželosečka $\mathcal{T}$ je množina spojnic odpovídajících si bodů.

Poznámka
Tedy prvky tečnové kuželosečky nejsou body, ale tečny klasické kuželosečky. (Tj. budeme je nazývat tečny kuželosečky $\mathcal{T}$.)

Věta 4.1

$h(A, B, C) :: h'(A', B', C') \Leftrightarrow \mathcal{T}$ se skládá ze dvou bodů (formálněji dvou svazků s těmito středy) a sice středu perspektivity a průsečíku $h \cap h'$.

Poznámka
Takovýmto kuželosečkám budeme říkat singulární a dále budeme mluvit jen o těch, co to nesplňují, tedy regulárních kuželosečkách.

Definice 4.2 (Vnější,)

Bod v rovině se nazývá vnější bod / bod dotyku / vnitřní bod $\mathcal{T}$, pokud jím procházejí 2 / 1 / 0 tečny z $\mathcal{T}$

Důsledek (Pozorovani, z definice)
$h, h' \in \mathcal{T}$.

Na h, h' leží jediný bod dotyku, a to odpovídající body průsečíku přímek. Navíc spojnice těchto bodů je direkční přímka zadané projektivity.

Věta 4.2

Buď $\mathcal{T}$ tečnová kuželosečka.

- *Na volbě tečen h, h' nezáleží, lze je nahradit jinou dvojicí.*
- *Na každé tečně leží jeden bod dotyku.*
- *$\mathcal{T}$ je zadána 5 tečnami, nebo 4 tečnami s 1 bodem dotyku, nebo 3 tečnami s 2 body dotyku.*

Příklad (Konstrukce)
Tečnová kuželosečka z 5 tečen / 4 tečen a 1 bodu dotyku / 3 tečen a 2 bodů dotyku.

Řešení
V případě bodu dotyku zvolíme body dotyku na h nebo h'. A poté najdeme direkční přímku projektivity bodových soustav (procházející body dotyku). Pak vždy najdeme další bod této projektivity a spojíme.

Příklad (Konstrukce)
Na tečně z tečnové kuželosečky najděte bod dotyku.

Řešení
Zvolíme si danou tečnu jako h a najdeme průsečík direkční přímky s h.

Důsledek
Umíme přecházet mezi tečnovými a bodovými kuželosečkami. Tj. nemusíme rozlišovat $\mathcal{B}$ a $\mathcal{T}$.

4.1 Další duální tvrzení

Věta 4.3 (O direkčním bodu na $\mathcal{T}$)

$\mathcal{T}(a,b,c)$ ::: $\mathcal{T}(a',b',c')$ $\implies$ spojnice „křížem“, tj. $a \cap b'$ a $a' \cap b$, … prochází jedním bodem, tzv. direkčním bodem projektivity, D. Tečny z bodu D jsou samodružné přímky této pojektivity.

Věta 4.4 (O involuci na $\mathcal{T}$)

Je dána involuce tečen na $\mathcal{T}$ (dvěma páry a a a', b a b'). Pak

- *direkčním bodem D procházejí nejen spojnice průsečíků $a \cap b'$, $a' \cap b$, ale též $a \cap b$, $a' \cap b'$;*
- *průsečíky $a \cap a'$, $b \cap b'$ leží na jedné přímce p;*
- *samodružné přímky involuce jsou tečny z bodu $D =: m, n$, jejichž body dotyku jsou průsečíky s p;*
- *spojnice bodů dotyku tečen a, a' prochází D.*

Definice 4.3 (Střed involuce, osa involuce)

Bodu D říkáme střed involuce. Přímce p říkáme osa involuce.

Definice 4.4

Říkáme též, že involuce je indukována svojí osou p.

Taktéž definujeme sečnu a vnější přímku kuželosečky v následující tabulce:

Involuce	Reálné samodružné body	Osa involuce	Střed involuce
hyperbolická	2	sečna	vnější bod
eliptická	0	vnější přímka	vnitřní bod
„parabolická“	1	tečna	$\in \mathcal{B}$

(U parabolické se všechny body zobrazí do P.)

Důsledek
$(aa'rp) = -1$ (a, a' odpovídající si tečny, p osa involuce, r spojnice průsečíku všech tří předchozích a D).

Věta 4.5 (D*)

p libovolná sečna $\mathcal{T}$, m, n tečny v průsečících $p \cap \mathcal{T}$. $a, c \in \mathcal{T}$ libovolné, konkurentní (duál kolineární, česky sbíhavé) s přímkou p. C bod dotyku na c. $M = m \cap c$, $N = n \cap c$, $A = a \cap c \cap p$. Potom $(MNAC) = -1$.

Příklad (Konstrukce)
$\mathcal{T}$ je dána 3 tečnami a 2 body dotyku. Najděte bod dotyku na třetí tečně.

Řešení
Z minulé věty a hledání čtvrtého harmonického bodu.

5 Elipsa, parabola, hyperbola, aneb afinní klasifikace (regulárních) kuželoseček

Poznámka
V $\mathbb{R}P^2$ jsou nerozlišitelné.

Poznámka
Nyní tedy rozlišujeme vlastní a nevlastní. Tj. máme

1. rozlišení vlastní/nevlastní;
2. rozlišení rovnoběžek a různoběžek;
3. dělící poměr 3 bodů (připomenutí: $(ABC) = (ABCD_\infty)$, kde D_∞ je směr dané přímky);
4. úsečky (neobsahuje nevlastní bod / množina bodů, že $ABX < 0$);
5. střed úsečky ($(ABSD_\infty) = (ABS) = -1$);
6. rovnoběžný přenos délek (2 úsečky na rovnoběžkách jsou stejně dlouhé, když jsou to protější strany rovnoběžníku).

Ale ztratili jsme dualitu. (Nevlastní bod není duální k nevlastní přímce.)

Příklad (Konstrukce)
Najděte střed úsečky.

Řešení
Přes konstrukci čtvrtého harmonického bodu. Nebo jako průsečík úhlopříček rovnoběžníku (dokážeme přes úplný čtyřroh).

Definice 5.1 (Elipsa, parabola, hyperbola, asymptoty, střed kuželosečky, průměr kuželosečky, omezený průměr kuželosečky)

Kuželosečka je elipsa/parabola/hyperbola pokud má 0/1/2 reálné nevlastní body. (Elipsa má 2 komplexní nevlastní body.)

Asymptoty kuželosečky jsou tečny v nevlastních bodech. (Tj. pro E/P/H máme 0/1/2 reálné asymptoty.)

Střed kuželosečky je průsečík jejích asymptot. (Pro parabolu za střed považujeme její nevlastní bod. Pro elipsu se ukáže, že ty dvě imaginární asymptoty mají reálný průsečík.) Podle toho rozlišujeme středové kuželosečky (elipsa, hyperbola) a nestředové/osové kuželosečky (parabola).

Průměr kuželosečky je libovolná přímka procházející středem dané kuželosečky. Omezený průměr je úsečka na průměru vymezená vlastními průsečíky.

Poznámka
Polára (p) je spojnice tečných bodů tečen z pólu (P). Pól je průsečík tečen z průsečíků

kuželosečky s polárou.

Důsledek
Střed kuželosečky je pól nevlastní přímky vzhledem k této kuželosečce.

Věta 5.1

Střed E/H půlí (je středem) každý její omezený průměr.

Důkaz
Víme, že střed je pól nevlastní přímky. A my víme, že $(ARA'P)$, kde $P = S$. ▫

Věta 5.2

Nechť jsou spojnice bodů X a X', Y a Y' (na kuželosečce) rovnoběžné. Pak spojnice středů úseček XX' a YY' prochází středem kuželosečky (S).

Důkaz
„Pro elipsu a hyperbolu“: X a X', Y a Y' jsou páry involuce indukované nevlastním bodem (bodem $P = XX' \cap YY'$). A $(AA'RP) = -1$, kde $A = X$ a $A' = X'$, nám dává, že $R = S_X$ leží na ose této involuce a z předchozí věty máme, že S tam leží také.

„Pro parabolu“: Zase uvažujme involuci danou XX', YY'. Její střed je nevlastní bod, tedy jedna z tečen z tohoto bodu je nevlastní přímka, tedy bod dotyku je střed paraboly a zároveň jím prochází osa involuce. ▫

Příklad (Konstrukce)
Najít střed kuželosečky dané pěti body.

Řešení
Provedeme dvakrát předchozí větu.

Poznámka
Středu v parabole se také říká směr průměrů (nebo směr osy).

Věta 5.3

Spojnice bodů dotyku rovnoběžných tečen elipsy/hyperboly je průměrem této kuželosečky.

Důkaz
Uvažujme involuci indukovanou společným směrem tečen (označme si ho P_∞). Spojnice bodů dotyku je její osa a díky harmonické čtveřici $(AA'SP_\infty) = -1$ tam leží i S, kde A, A' je průměr procházející P_∞. ▫

Poznámka
Tato věta je vlastně limitním přechodem předchozí. (Ale limitní přechody nemáme.)

Pozor
Parabola nemá rovnoběžné tečny.

Důkaz
Pro spor předpokládejme, že má 2 rovnoběžné tečny $\implies$ jejich průsečík je nevlastní a z něj tedy vedou 3 tečny (ještě nevlastní přímka). □

Věta 5.4

Nechť Y, Y' jsou vlastní body dotyku tečen ke kuželosečce z bodu Z a $C =$ střed YY'. Pak střed kuželosečky $S \in ZC$.

Důkaz
Uvažujme involuci indukovanou směrem přímky YY'. Její osa prochází body Z (z věty o involuci, bod 4), C (harmonická čtveřice) a S (harmonická čtveřice). □

Příklad (Konstrukce středu kuželosečky)
Mějme kuželosečku danou 5 tečnami, zkonstruujte její střed.

Řešení
Nalezneme tečné body (stačí 3) a použijeme předchozí větu.

Příklad (Konstrukce hyperboly)
Sestrojit hyperbolu včetně středu a asymptot, jsou-li dány 3 body a 2 směry asymptot (5 bodů).

Řešení
Zvolíme směry asymptot jako H a H'. Pak direkční bod je střed a jeho spojnice s H a H' jsou asymptoty.

Příklad (Konstrukce hyperboly 2)
Sestrojte hyperboly ze dvou asymptot a jednoho bodu.

Řešení
Direkční bod projektivity soustav svazků ve směrech asymptot je průsečík asymptot (střed). A máme v podstatě hotovo.

Poznámka
U hyperboly lze dohledávat body pomocí středové symetrie.

Věta 5.5 (Hyperbola a její asymptoty)

Hyperbola a její asymptoty vytínají na libovolné sečně stejně dlouhé úsečky.

Důkaz
Z předchozí konstrukce + definice stejně dlouhých úseček. □

Věta 5.6 (Limitní verze předchozí)

Na tečně také. (Bod dotyku je středem úsečky spojující průsečíky tečny s asymptotami.)

Poznámka
Zkouška bude ± na hodinku: dvě konstrukce (provést a zdůvodnit). Domluvíme se na nějakých dvou termínech.

Příklad (Konstrukce hyperboly 3)
Sestrojte hyperbolu včetně asymptot a středu, jsou-li dány čtyři body a jeden směr asymptoty.

Příklad (Konstrukce hyperboly 4 a 5)
DÚ: Sestrojte hyperbolu včetně asymptot a středy, jsou-li dány (3 body + 1 asymptota) nebo (3 tečny a 1 asymptota).

Poznámka
Úlohu „najít obě asymptoty při zadání 5 vlastních bodů“ zatím neumíme řešit.

5.1 Speciální konstrukce pro parabolu

Poznámka
Pokud je jeden z pěti bodů v konvexním obalu zbylých 4, pak je to hyperbola. Jak ale zadat parabolu? No tím, že má nevlastní přímku.

Tedy „parabola je dána 4 tečnami“ (nebo 3 tečny + směr průměrů, nebo 3 tečny a bod na jedné z nich, nebo 2 tečny a směr průměru a bod na jedné z nich, atd.)

Poznámka (Připomenutí)
Průměry paraboly jsou rovnoběžné a jejich společný směr je střed, tedy bod dotyku s nevlastní přímkou.

Parabola nemá rovnoběžné tečny.

Příklad (Konstrukce paraboly)
Parabola dána 4 tečnami, najděte 1 další tečnu.

Řešení
Nevlastní přímku zvolíme za h. TODO?

A najít směr průměrů.

Řešení
Je to průsečík direkční přímky v předchozí konstrukci s nevlastní přímkou.

Příklad (Konstrukce paraboly 2)
Sestrojte parabolu, je-li dána 3 tečnami a 1 bodem dotyku (na některé vlastní tečně).

Řešení
Zvolíme si přímku s bodem a nevlastní přímku jako bodové soustavy, najdeme direkční přímku (prochází tečným bodem) a postupujeme jako obvykle.

Příklad (Konstrukce tečny s daným směrem)
K parabole dané 4 tečnami sestrojte tečnu s daným směrem.

Řešení
Najdeme direkční přímku a pak daným směrem vedeme přímku procházející jedním z bodů. Její průsečík s direkční přímkou spojíme s dalším bodem a vedeme rovnoběžku.

Příklad (Konstrukce paraboly 3)
Sestrojte parabolu ze tří bodů a směru průměru.

Řešení
Úloha 4 body a tečna -> kuželosečka.

5.2 Elipsa/Kružnice

Poznámka
Pro elipsu nejsou žádné speciální konstrukce (nemá speciální tečny / body). Budeme tedy studovat kružnici.

Jak ale kružnici definovat? a) Skoro euklidovsky: potřebujeme pojem stejně dlouhé úsečky i na různoběžkách. b) Pomocí kolmosti: tj. k afinní geometrii přidáme pojem kolmosti.

Poznámka
Kružnice $\implies$ přenos délek mezi různoběžkami $\implies$ půlení úhlu $\implies$ kolmost.

Z kolmosti pak přes Thaletovu větu můžeme konstruovat bodově kružnici.

Definice 5.2 (Absolutní involuce)

Absolutní involuce ve svazku přímek je involuce daná dvěma páry kolmic.

Poznámka
Je to otočení o 90 stupňů.

Poznámka (Pozorování)
Jde o eliptickou involuci (páry se rozdělují, nemá reálné samodružné přímky).

Má 2 komplexně sdružené samodružné přímky, tzv. izotropické přímky. Jejich směry se nazývají izotropické body.

Definice 5.3

Kružnice je elipsa, jejíž asymptoty jsou izotropické přímky procházející jejím středem.

Důsledek
Proto je každá kružnice dána třemi body (resp. třemi podmínkami). (Zbývající dva body jsou body na asymptotách.)

Příklad (Konstrukce kružnice)
Sestrojte kružnici, je-li dáno

- 3 body (průsečík os je střed, podle toho uděláme středovou souměrnost a máme 6 bodů);
- 2 body a 1 tečna (průsečík osy a kolmice na tečnu v bodě je střed);
- 1 bod a 2 tečny (bez kružítka asi nejde, potřebujeme osu úhlu).

Poznámka
V praxi budeme používat kružítko.

Platí všechny obvyklé vlastnosti kružnice. Zejména umíme vést ke kružnici tečny z vnějšího bodu.

Příklad (Konstrukce samodružné body projektivity)
Sestrojte samodružné body projektivity soumístné bodové soustavy dané 3 páry bodů.

Řešení
Sestrojíme tečny z daných bodů k libovolně zvolené kružnici dotýkající se přímky. ($p(A, B, C) ::: p(A', B', C') \implies k(a, b, c) ::: k(A', B', C')$). Najdeme direkční bod a z něho vedeme tečny ke kružnici. Ty jsou tedy samodružné body projektivity na tečnové kuželosečce, tedy jejich průsečíky s bodovou soustavou (její přímkou) jsou samodružné body.

Poznámka
Kdyby direkční bod vyšel na kružnici, pak je jeden dvojitý samodružný bode, a kdyby byl vnitřní, tak jsou samodružné body imaginární.

Příklad (Konstrukce duální k předchozí)
Sestrojte samodružné přímky projektivity soumístných přímkových soustav.

Řešení
Duálně.

Příklad (Konstrukce průsečík kuželosečky s přímkou)
Najít průsečíky kuželosečky dané 5 body s danou přímkou.

Řešení
Jako obvykle vyrobíme soustavy $H(a, b, c) ::: H'(a', b', c')$. Ty nám na přímce vytvoří další soustavy v projektivitě a nalezneme samodružné body.

Příklad (Konstrukce duální k předchozí)
Kuželosečka dána 5 tečnami a dán bod. Nalezněte tečny procházející R.

Příklad (Konstrukce asymptot v hyperbole)
Najděte asymptoty hyperboly zadané 5 body.

Poznámka
Tj. najít zejména směry asymptot, jelikož střed už najít umíme.

Řešení
Směry asymptot jsou průsečíky s nevlastní přímkou, tedy minulá konstrukce. Ale máme nevlastní přímku. Takže to uděláme tak, že pomocnou kružnici položíme procházející bodem H, přeneseme si na ní body A, B, C a pomocí přímek rovnoběžných s čárkovanými přímkami i body A', B', C'.

6 Pascalova a Brianchonova věta

Poznámka (Idea)
Kuželosečka je dána 5 body. Tedy 6 bodů na kuželosečce musí být nějak vázáno.

Věta 6.1 (Pascalova)
Šest bodů 1, 2, 3, 4, 5, 6 leží na kuželosečce ⇔ průsečíky spojnic 12 a 45, 23 a 56, 34 a 61 leží na jedné, tzv. Pascalově přímce (p).

Důkaz
„ $\Longrightarrow$ “: Označíme $1 = A$, $2 = B'$, $3 = C$, $4 = A'$, $5 = B$, $6 = C'$. Pak $p =$ direkční přímka projektivity $\mathcal{B}(A, B, C) \,:::\, \mathcal{B}(A', B', C')$.

„ $\Longleftarrow$ “: Mějme kuželosečku danou body $1, \ldots, 5$. Ukážeme, že i 6 na ní leží. Označme $6' \neq 5$ průsečík $\mathcal{B}$ a přímky 56 (a chceme ukázat, že $6' = 6$). Protože $6' \in 56$, tak $56' = 56$. Spojnice 12 a 45, 23 a $56'$ se protínají na p, na které leží i průsečík 34 a $6'1$ (dle první části, $p =$ Pascalova přímka pro $1, \ldots, 5, 6'$). Zároveň dle předpokladu věty se na téže přímce p protínají i 34 a 61. Proto nutně $6' = 6$. □

Důsledek (Speciální případ pro singulární kuželosečku 2 přímky)
Pappova věta.

Poznámka (Historická)
Původní důkaz Pascalovy věty byl euklidovský.

Poznámka
Pro 6 bodů existuje celkem $60 = \frac{6!}{6 \cdot 2}$ Pascalových přímek.

Příklad (Konstrukce)
Kuželosečka je dána 5 body, přímka x prochází jedním z nich. Najděte druhý průsečík $x \cap \mathcal{B}$.

Řešení
Použijeme Pascalovu větu. (Bod s přímkou musí být číselně sousední s hledaným.)

Příklad (Konstrukce)
Kuželosečka dána 5 body, sestrojte v jednom z nich tečnu.

Řešení
Označíme si jeden bod dvěma sousedními čísly a použijeme Pascalovu větu. (Tečna bude rovnoběžka)

Příklad (Konstrukce)
Kuželosečka je dána 3 body a tečnami ve dvou z nich. Sestrojte tečnu ve třetím bodě.

Řešení
Označíme si každý bod dvěma sousedními čísly a použijeme Pascalovu větu.

Poznámka
Odpovídá řešení za pomoci nalezení harmonické čtveřice (po Malé větě D).

Věta 6.2 (Brianchonova (duální k Pascalově))

6 přímek $(1, \ldots, 6)$ *je tečnami k tečnami k téže kuželosečce* $\Leftrightarrow$ *spojnice průsečíků* $1 \cap 2$ *a* $4 \cap 5$, $2 \cap 3$ *a* $5 \cap 6$, $3 \cap 4$ *a* $6 \cap 1$, *prochází jedním, tzv. Brianchonovým bodem.*

Poznámka (Historická)
Také byla dokázána ještě eukleidovsky.

Příklad (Konstrukce)
Kuželosečka dána 5 tečnami, bod X leží na jedné z nich. Najděte druhou tečnu z bodu X.

Řešení
Duální ke konstrukci výše.

Příklad (Konstrukce)
Kuželosečka dána 5 tečnami. Sestrojte na jedné z nich bod dotyku.

Řešení
Duální ke konstrukci výše.

Příklad
Kuželosečka dána 3 tečnami a 2 body dotyku. Najděte bod dotyku na třetí tečně.

Řešení
Duální ke konstrukci výše.

7 Pól a polára

Poznámka (Už víme)
Involuce na kuželosečce: P = střed involuce = pól přímky p. p = osa involuce = polára bodu P.

Involuce je hyperbolická $\Leftrightarrow$ P je vnější bod a p sečna, je eliptická $\Leftrightarrow$ P je vnitřní bod a p vnější přímka, „je“ parabolická $\Leftrightarrow$ P je tečný bod tečny p.

Polára p = spojnice bodů dotyku tečen z pólu P. Pól P = průsečík tečen v průsečících poláry s kuželosečkou.

$(AA'RP) = -1 = (aa'rp)$.

Příklad (Konstrukce)
Kuželosečka je dána 5 body, sestrojte poláru k danému bodu P.

Řešení
TODO!!! Přes Pascalovu větu najdeme další dva body a použili harmonickou čtveřici?

Příklad
Kuželosečka dána 5 tečnami. Najděte k přímce p pól.

Řešení
Samostudium (duálně k předchozí konstrukci).

Věta 7.1

Dvojice pól+polára jsou 2 podmínky pro kuželosečku.

Důkaz
Nechť je to x podmínek. Předpokládejme, že známe navíc tečny s, t z bodu p, tedy máme $x+2$ podmínek. $S = s \cap p$, $T = t \cap p$ jsou body dotyku, tedy s, S, t, T jsou 4 podmínky, tedy $x + 2 \geqslant 4$. Přitom není $x + 2 > 4$, protože podmínkami P, p, s, t není kuželosečka určena jednoznačně. Tedy $x + 2 = 4$, tj. $x = 2$. □

Příklad (Konstrukce, kuželosečka z poláry)
Sestrojte kuželosečku (tj. najděte další 2 body), je-li dán pól, polára a 3 body A, B, C.

Řešení
Přes harmonickou čtveřici. (A druhý se dá získat různými triky.)

Příklad
Duální k předchozímu.

Řešení
Na doma.

Poznámka (Platí)
Vepíšeme-li kuželosečce úplný čtyřroh, pak dvojice pól+polára = diagonální vrchol + protější diagonální strana čtyřrohu.

Definice 7.1 (Názvosloví)

PQR (se stranami p, q, r) je polární trojúhelník.

Poznámka (Platí)
$P \in q \Leftrightarrow Q \in p$.

Definice 7.2

V situaci z předchozí poznámky nazýváme body P, Q (resp. přímky p, q) polárně sdružené (vůči kuželosečce $\mathcal{B}$) (sdružené póly, resp. sdružené poláry).

Poznámka
V polárním trojúhelníku máme 3 dvojice polárně sdružených bodů a 3 dvojice polárně sdružených přímek.

Věta 7.2

Dvojice sdružených pólů tvoří 1 podmínku pro kuželosečku.

Důkaz
Ať zadávají x podmínek. Předpokládejme, že navíc známe $s, t =$ dvě tečny z bodu P. T bod dotyku na t. $(P, Q), s, t, T$ je $x+3$ podmínek. Známe i $S = s \cap p$, tedy s, S, t, T máme 4 podmínky. Tedy $x + 3 \geqslant 4$. Ale opět potřebujeme 1 další bod pro určení kuželosečky, tj. $x + 3 = 4$ a $x = 1$. □

Věta 7.3

Polární trojúhelník tvoří 3 podmínky pro kuželosečku.

Důkaz
(P, Q), (Q, R), (P, R) jsou tři podmínky a tím už jsou určeny i strany p, q, r. □

Příklad (Konstrukce)
Zkonstruujte kuželosečku z polárního trojúhelníku a 2 bodů (A, B).

Řešení
Přes harmonickou čtveřici dohledáme body.

Poznámka (Bonusová informace)
V polárním trojúhelníku je vždy jeden vrchol vnitřní a dva vnější.