1 Definice – Variety

1.1 Vnější algebra

Definice 1.1 (Algebra, unitární algebra)

Algebra $\mathcal{A} = (A, 0, +, -, \circ)$ nad nějakým tělesem $\mathbb{T}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, na kterém je dáno bilineární zobrazení $\circ : A \times A \to A$. Algebra $\mathcal{A}$ se nazývá unitární, pokud v ní existuje jednotka (1) vůči $\circ$.

Poznámka
Násobení ($\circ$) stačí definovat na vektorech báze, zbytek je dán bilinearitou.

Definice 1.2 (Vnější algebra, k-tá vnější mocnina, k-vektor)

Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor a $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je jeho báze. Vnější algebrou $\Lambda^*(\mathbf{V})$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je definována jako unitární algebra nad tělesem reálných čísel, jejíž báze (ve smyslu vektorového prostoru) je množina $\{e_I | I \subseteq [n]\}$. Tj.

$$\Lambda^*(\mathbf{V}) = \left\{ \sum_{I \subseteq [n]} \alpha_I e_I | \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sčítání a násobení prvky tělesa je definované zřejmým způsobem, násobení pro prvky báze je definováno:

$$e_I \wedge e_J := \begin{cases} 0, & \text{pokud } I \cap J \neq \emptyset, \\ \operatorname{sgn} \binom{I,J}{I \cup J} e_{I \cup J}, & \text{pokud } I \cap J = \emptyset, \end{cases}$$

kde sgn značí znaménko permutace $\binom{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_r}{k_1,\ldots,k_{p+r}}$, kde i, j, k jsou setříděné prvky po řadě $I, J, I \cup J$.

k-tá vnější mocnina prostoru $\mathbf{V}$, tj. $\Lambda^k(\mathbf{V})$, (jejíž prvky jsou k-vektory) prostoru $\mathbf{V}$ je podprostor (ne podalgebra) $\Lambda^*(\mathbf{V})$ daný jako LO $\{e_I || I| = k\}$.

1.2 Kalkulus diferenciálních forem

Definice 1.3 (Tečný prostor, hladká funkce)

Označme $T^*(\mathbb{T}^n)$ (zkráceně T^*) vektorový prostor, jehož bázi tvoří symboly $dx_1, \ldots, dx_n$ ($x_1, \ldots, x_n$ je báze $\mathbb{T}^n$).

Hladká funkce bude taková funkce, která má spojité parciální derivace všech řádů. Hladké zobrazení do VP je zobrazení, pro které všechny složky tohoto zobrazení vůči některé (a tedy vůči jakékoliv) bázi jsou hladké.

Definice 1.4 (Diferenciální forma, diferenciální forma stupně k (=k-forma))

Diferenciální forma (stupně k) na otevřené množině Ω je hladké zobrazení Ω do $\Lambda^*(T^*)$ (resp. $\Lambda^k(T^*)$).

Množinu všech diferenciálních forem (stupně k) na množině Ω budeme označovat $\mathcal{E}^*(\Omega)$ (resp. $\mathcal{E}^k(\Omega)$).

Definice 1.5 (Definice vnějšího diferenciálu)

Buď Ω otevřená množina. Pro všechna p, $0 \le p \le n$ definujeme zobrazení $d : \mathcal{E}^p(\Omega) \to \mathcal{E}^{p+1}(\Omega)$ takto:

- Je-li $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ (f je tedy funkce tak, jak ji známe běžně), pak definujeme $df : \Omega \to \Lambda^1(T^*)$ předpisem
$$df(a) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i, \qquad \forall a \in \Omega.$$
- Buď $\omega \in \mathcal{E}^p(\Omega)$. Forma ω je tedy tvaru $\omega(x) = \sum_{|I|=p} \omega_I(x) dx_I$, kde $x \in \Omega$ a ω_I jsou hladké funkce. Definujeme $d\omega : \Omega \to \Lambda^{p+1}(T^*)$ předpisem
$$d\omega(x) := \sum_{|I|=p} d\omega_I(x) \wedge dx_I, \qquad \forall x \in \Omega.$$

Definice 1.6 (Uzavřená a exaktní forma)

Forma $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ se nazývá uzavřená, pokud $d\omega = 0$, a exaktní, pokud existuje forma $\tau \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ taková, že $d\tau = \omega$.

Definice 1.7 (De Rhamův komplex)

Nechť ω je otevřená množina. Posloupnost
$$\mathcal{E}^0(\Omega) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(\Omega) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n(\Omega)$$
se nazývá de Rhamův komplex.

Definice 1.8 (Přenášení diferenciálních forem pomocí zobrazení)

Nechť $\Phi : U \to \Omega$ je hladké zobrazení, kde U, Ω jsou otevřené množiny. Pro každé $p \in [n]$ definujeme zobrazení $\Phi^* : \mathcal{E}^p(\Omega) \to \mathcal{E}^p(U)$ předpisem
$$\Phi^*(\omega) := \sum_{|I|=p} (\omega_I \circ \Phi) d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_p},$$
kde $\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I dx_I$ je libovolný prvek $\mathcal{E}^p(\Omega)$ a $i_1, \ldots, i_p$ jsou vzestupně setříděné prvky množiny I.

1.3 Integrace diferenciálních forem

Poznámka (Definice – Difeomorfismus)
Zobrazení Φ otevřené množiny $\mathcal{U}$ na otevřenou množinu $\mathcal{V}$ se nazývá difeomorfismus, pokud Φ je prosté a Φ i Φ^{-1} jsou spojitě diferencovatelné.

Definice 1.9 (regulární)

Nechť $\mathcal{O}$ je otevřená množina a φ je zobrazení z $\mathcal{O}$. Řekneme, že zobrazení φ je regulární, pokud φ je spojitě diferencovatelné, Jacobiho matice $\operatorname{Jac}\varphi$ má hodnost rovnou k ve všech bodech $u \in \mathcal{O}$ a zobrazení φ je homomorfismus $\mathcal{O}$ na $\varphi(\mathcal{O})$.

Definice 1.10 (Parametrizovaná plocha, parametrizace, regulární bod)

Dvojici (M, φ), kde φ je regulární zobrazení z otevřené množiny $\mathcal{O}$ a $M = \varphi(\mathcal{O})$ budeme nazývat parametrizovaná plocha dimenze k, zobrazení φ nazveme parametrizací množiny M.

Je-li M množina a je-li $x \in M$, pak řekneme, že x je regulární bod množiny M dimenze k, pokud existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu a takové, že $\mathcal{U} \cap M$ je parametrizovaná plocha dimenze k.

Definice 1.11 (Plocha dimenze k)

Řekneme, že množina M je plocha dimenze k, pokud každý její bod je regulární bod M dimenze k. Každá diskrétní množina je plocha dimenze 0.

Definice 1.12 (Tečný vektor, tečný prostor)

Nechť x je regulární bod lokální plochy M dimenze k. Řekneme, že vektor $\mathbf{v}$ je tečný vektor k M v bodě x, pokud existuje křivka $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subseteq \mathbb{R}^n$, pro kterou platí $c'(0) = \mathbf{v}$, $c(0) = x$.

Množinu všech tečných vektorů v bodě x označíme symbolem T_xM a nazveme tečný prostor k M v bodě x.

Definice 1.13 (Skalární součin na k-té vnější mocnině)

Skalární součin na Λ^k definujeme požadavkem, že báze $\{e_I | \, |I| = k\}$ je ortonormální.

Definice 1.14 (Orientace plochy, kladná orientace)

Nechť M je plocha dimenze k v $\mathbb{R}^n$. Pak orientací plochy M rozumíme spojité zobrazení ν plochy M do $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ takové, že pro všechny $x \in M$ platí

$$\nu(x) \in \Lambda^k(T_xM); ||\nu(x)|| = 1.$$

Pokud pro M existuje orientace ν, řekneme, že M je orientovatelná plocha. Dvojice (M, ν) se pak nazývá orientovaná plocha.

Nechť M je orientovaná plocha dimenze k. Řekneme, že parametrizace $\varphi : \mathcal{O} \to M' \subseteq M$ je kladně (nebo souhlasně) orientovaná, pokud je báze $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}\right\}$ kladně orientovaná báze $T_x M$ pro každý bod $x \in M$.

Definice 1.15 (Nosič)

Nechť k je nezáporné celé číslo. Pro diferenciální formu $\Omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ budeme definovat její nosič $\operatorname{supp} \omega$ předpisem

$$\operatorname{supp} \omega := \overline{\{x \in \Omega | \omega(x) \neq 0\}}.$$

Definice 1.16 (Otevřené pokrytí, lokálně konečný)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že soubor $\mathcal{U}$ otevřených množin je otevřené pokrytí M, pokud $M \subseteq \bigcup_{U \subseteq \mathcal{U}} U$.

Řekneme, že systém množin $\{P_\alpha\}$ v $\mathbb{R}^n$ je lokálně konečný, pokud pro každý bod $m \in M$ existuje okolí U_m takové, že $U_m \cap P_\alpha \neq \emptyset$ jen pro konečně mnoho α.

Definice 1.17 (Rozklad jednotky, respektování otevřené pokrytí)

Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že soubor nezáporných funkcí $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ na M je rozklad jednotky, pokud systém $\{\operatorname{supp} \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je lokálně konečný a pro každý bod $m \in M$ platí $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(m) = 1$.

Řekneme, že rozklad jednotky $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ respektuje pokrytí $\{U\}_{U \in \mathcal{U}}$, pokud pro každé $\alpha \in A$ existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subseteq U$.

Definice 1.18 (Integrál)

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ a Ω je otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^n$ s bází $(x_1, \ldots, x_n)$ s kanonickou orientací a $\Omega \in \mathcal{E}^n(\Omega)$. Pak existuje jednoznačně určená hladká funkce f na Ω taková, že $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, pak integrál $\int_\Omega \omega$ definujeme předpisem

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega f,$$

  pokud integrál napravo existuje jako Lebesgueův integrál.

- Nechť $k \in \mathbb{N}$. Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a M je orientovaná plocha dimenze k v Ω. Nechť $\omega \mathcal{E}^k(\Omega)$ je diferenciální forma, pro kterou existuje otevřená množina $U \subseteq \Omega$ taková, že platí $\operatorname{supp} \omega \subseteq U$ a existuje kladně orientovaná parametrizace φ plochy $U \cap M$ na $\mathcal{O}$. Pak definujeme

$$\int_M \omega = \int_\mathcal{O} \varphi^*(\omega).$$

- Nechť M je orientovaná plocha dimenze k v otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Zvolme libovolné pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ množiny Ω s vlastností, že pro všechny množiny $M \cap U_\alpha$, $\alpha \in A$ existuje parametrizace φ_α na oblasti $\mathcal{O}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^k$. Orientaci $\mathcal{O}_\alpha$ zvolíme tak, aby φ_α byla souhlasně orientovaná s danou orientací M.

  Nechť pro $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ platí, že $M \cap \operatorname{supp} \omega$ je kompaktní. Pak zvolíme rozklad jednotky $\{f_j\}_{j=1}^N$ na množině $M \cap \operatorname{supp} \omega$ respektující pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ a definujeme

$$\int_M \omega = \sum_{j=1}^N \int_M f_j \cdot \omega$$

- Nechť je orientovaná plocha dimenze 0 konečná množina bodů $M = \{m_i\}_{i=1}^N$ spolu s volbou orientace $a_i \in \{\pm 1\}$ pro každý bod M. Je-li diferenciální forma stupně nula daná funkcí f definovanou na M, pak

$$\int_M f = \sum_{i=1}^N a_i f(m_i).$$

Poznámka (Definice – Poloprostory)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &= \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0)\}, \\ \mathbb{R}^k_\leq &= \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k | u_k \leq 0\right\}, \\ \operatorname{int} \mathbb{R}^k_\leq &= \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k | u_k < 0\right\}, \\ \partial \mathbb{R}^k_\leq &= \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k | u_k = 0\right\}, \\ \mathbb{R}^k_\leq &= \operatorname{int} \mathbb{R}^k_\leq \cup \partial \mathbb{R}^k_\leq. \end{aligned}$$

Definice 1.19 (Plocha s okrajem, vnitřní bod, bod okraje)

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Řekneme, že neprázdná množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je plocha dimenze k s krajem, pokud pro každý bod $x \in M$ existuje otevřené okolí $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ bodu x a parametrická plocha $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ taková, že $\varphi(\mathcal{O} \cap \mathbb{R}^k_\leq) = \mathcal{U} \cap M$.

Můžou tedy nastat dva případy, body množiny $\varphi(\mathcal{O} \cap \operatorname{int} \mathbb{R}^k_\leq)$ jsou regulární body plochy dimenze k, tyto body nazveme vnitřní body plochy M. Množinu všech takových bodů pak vnitřek plochy M a označíme $\operatorname{int} M$.

Body množiny $\varphi(\mathcal{O} \cap \partial \mathbb{R}^k_\leq)$ budeme nazývat body kraje plochy M. Množinu všech bodů kraje plochy M nazveme kraj plochy M a označíme ji symbolem ∂M.

Definice 1.20 (Orientace plochy s krajem)

Orientace plochy M dimenze k s krajem je definována jako orientace jejího vnitřku $\operatorname{int} M$. Je-li M orientovaná a $x \in \partial M$, existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu $x \in \partial M$, existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu x a parametrizace φ s vlastností $\varphi(\mathcal{O} \cap \mathbb{R}^k_\leq) = \mathcal{U} \cap M$, která je souhlasně orientovaná v bodech plochy $\operatorname{int} M \cap \mathcal{U}$ s danou orientací $\operatorname{int} M$ a definuje orientaci na ploše $M' = \varphi(\mathcal{O})$.

Pro orientovanou plochu s krajem M definujeme indukovanou orientaci plochy ∂M následujícím způsobem. Řekneme, že ortonormální báze $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ prostoru $T_x(\partial M)$ je kladně (resp. záporně) orientovaná vůči indukovaná vůči indukované orientaci, pokud je báze $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\right\}$ kladně (resp. záporně) orientovaná báze prostoru $T_x M'$.

1.4 Integrál prvního druhu přes plochy dimenze k

Definice 1.21 (Grammova matice, Grammův determinant)

Nechť $k \geq 1$. Nechť M je plocha dimenze k v $\mathbb{R}^n$ s parametrizací $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k$ otevřená a $\varphi(\mathcal{O}) = M$. Grammovu matici $G = (G_{ij})_{i,j \in [k]}$ definujeme jako

$$G_{ij} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right\rangle.$$

Dále definujeme Grammův determinant $g = \det G$.

Definice 1.22 (Integrál 1. druhu)

Nechť $k \geq 1$.

- Nechť $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ je parametrizace plochy $M = \varphi(\mathcal{O})$, kde $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k$ je otevřená podmnožina. Je-li f spojitá funkce na ploše M, pak definujeme integrál prvního druhu $\int f\, dS$ předpisem
$$\int_M f\, dS = \int_{\mathcal{O}} f(\varphi(u))\sqrt{g}(u) du,$$
pokud integrál existuje jako Lebesgueův integrál. V případě, že plocha M je dimenze 1, pak se integrál tradičně značí $\int_M f\, ds$.
- Je-li M plocha dimenze k v $\mathbb{R}^n$, f spojitá funkce na M, a je-li $M \cap \operatorname{supp} f \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktní množina, pak nejprve zvolíme otevřené pokrytí $\{U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in A}$ s vlastností, že pro každé $\alpha \in A$ existuje parametrizace φ_α množiny $M \cap U_\alpha$ na množině $\mathcal{O}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^k$. Pak zvolíme rozklad jednotky $\{f_j\}_{j=1}^N$ pro množinu $M \cap \operatorname{supp} f$, který respektuje zvolené pokrytí, a definujeme
$$\int_M f\, dS = \sum_{j=1}^N \int_M f_j f\, dS.$$

2 Tvrzení – Variety

2.1 Vnější algebra

Věta 2.1

Pro vektorový prostor $\mathbf{V}$ *s bází* $e_1, \dots, e_n$ *a pro libovolná* $k, l \in [n]$ *platí:*

1. $\dim \Lambda^k(\mathbf{V}) = \binom{n}{k}$, $\dim \Lambda^*(\mathbf{V}) = 2^n$,
2. $\wedge$ *je asociativní,*
3. $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$,
4. *Je-li* $\omega \in \Lambda^k(\mathbf{V})$, $\tau \in \Lambda^l(\mathbf{V})$, *pak* $\omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega$,
5. *Nechť* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$ *jsou vektory. Jejich rozklad do báze má tvar*

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_i^j e_j; \mathbf{v}_i^j \in \mathbb{R}; i \in [k]; j \in [n].$$

Tj. když pro každou k*-prvkovou množinu* $I \subseteq [n]$ *označíme*

$$V_I := (\mathbf{v}_i^j)_{i \in [k], j \in I}$$

matici $k \times k$, *která vznikne z matice koeficientů* $W := (\mathbf{v}_i^j)_{i \in [k], j \in [n]}$ *vynecháním sloupců jejichž index* j *není v množině* I. *Při tomto označení platí*

$$\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k = \sum_{I \subseteq [n], |I| = k} \det V_I \cdot e_I.$$

Čísla $\{\det V_I\}_{|I|=k}$ *se nazývají Plückerovy souřadnice* k*-vektoru* $\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k$.

Důkaz

1. triviální z diskrétky, 2. nejprve pro báze (rozepsáním) zbytek z bilinearity, 3. indukcí, 4. stejně jako v bodě 2. dokážeme pro báze, tam je to triviální spočítání permutací z definice, a rozšíříme bilinearitou, 5. rozepsáním. □

2.2 Kalkulus diferenciálních forem

Věta 2.2

Vnější diferenciál má následující vlastnosti (pro $p, q \in [n]_0$*):*

1. $\forall \omega, \tau \in \mathcal{E}^*(\Omega) : d(\omega + \tau) = d\omega + d\tau$,
2. $\forall \omega \in \mathcal{E}^p(\Omega)$, $\tau \in \mathcal{E}^q(\Omega) : d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d\tau$,
3. $\forall \omega \in \mathcal{E}^p(\Omega) : d(d\omega) = 0$.

Důkaz
1. přímo z definice, 2. nejdříve formy tvaru $\omega = \omega_I d_I$ a $\tau = \tau_I d_I$ rozepsáním, následně triviálně rozšíříme, 3. indukcí? a rozepsáním. $\square$

Lemma 2.3 (Poincaré)

Nechť Ω je koule v $\mathbb{R}^n$. Pak každá uzavřená forma stupně $k \in [n]$ je exaktní.

Důkaz
Prý jednoduchý. $\square$

Věta 2.4

Jsou-li ω, Φ, U, Ω jako v definici a $\tau \in \mathcal{E}^q(\Omega)$, pak

1. $\Phi^*(\Omega + \tau) = \Phi^*(\omega) + \Phi^*(\tau)$, *pokud* $p = q$,
2. $\Phi^*(\omega \wedge \tau) = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\tau)$,
3. $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega)$,
4. *Je-li zobrazení* $\Psi : V \to U$, *kde* V *je otevřená, pak* $(\Phi \circ \Psi)^*(\omega) = (\Psi^* \circ \Phi^*)(\omega)$,
5. *Je-li* $k = n$ *a* $\omega \in \mathcal{E}^n$, *tedy* $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, x = \Phi(u)$, *pak*

$$\Phi^*(\omega) = \det(\operatorname{Jac}\Phi)(f \circ \Phi) du_1 \wedge \ldots \wedge du_n,$$

kde $\operatorname{Jac}\Phi = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\right)_{i,j=1}^n$.

Důkaz
1. přímo z definice, 2. dokážeme pro $\omega = \omega_I dx_I$ a $\tau = \tau_J dx_J$ rozepsáním a zbytek z 1., 3. obdobně jako 2., 4. rozepsáním a nakonec 5. jednoduše z předchozího a 5. předminulé věty. $\square$

2.3 Integrace diferenciálních forem

Věta 2.5 (O lokálním difeomorfismu)

Nechť Φ je spojitě diferencovatelné zobrazení otevřené množiny Ω, pro které je Jacobiho matice regulární v bodě $a \in \Omega$.

Pak existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu a takové, že Φ je difeomorfismus $\mathcal{U}$ na $\Phi(\mathcal{U})$.

Věta 2.6

Nechť $F : U \to \mathbb{R}^n$ je spojitě diferencovatelné zobrazení na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^{k+n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ a množina M je definovaná předpisem

$$M = \{x \in U | F(x) = c\} .$$

Pokud má pro každý bod $a \in M$ Jacobiho matice $F(a)$ hodnost n, pak je M plocha dimenze k.

Důkaz

Zvolme nějaký bod $a \in \mathbb{R}^{k+n}$ pro který $F(a) = c$. Podle předpokladů existuje $k \times k$ minor Jacobiho matice $\left\{\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right\}_{i,j}$ s nenulovým determinantem. Upravíme F tak, že podle věty o lokálním difeomorfismu pak existuje okolí bodu a, na kterém existuje difeomorfismus. □

Věta 2.7 (O narovnání okolí)

Bod x je regulární bod plochy M dimenze k, právě když existuje okolí $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ bodu x a difeomorfismus $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ takový, že

$$\Phi(\mathcal{U} \cap M) = \Phi(\mathcal{U}) \cap \mathbb{R}^k \qquad \mathbb{R}^k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)\} .$$

Důkaz

$\Leftarrow$: Restrikce zobrazení, $\implies$: podle věty o lokálním difeomorfismu (doplníme nevyužité souřadnice identitami). □

Lemma 2.8 (O přechodové funkce)

Nechť M je plocha dimenze k a $\varphi : \mathcal{O} \to M$ a $\varphi' : \mathcal{O}' \to M$ jsou dvě její parametrizace. Pak existuje difeomorfismus $\alpha : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$, pro který $\varphi' = \varphi \circ \alpha$.

Důkaz

Je zřejmé, že $\alpha = \varphi^{-1} \circ \varphi'$ je určeno jednoznačně, ale je třeba ukázat, že α je spojitě diferencovatelné. Zvolme bod $x' \in \mathcal{O}'$ pevně. Podle předchozí věty existuje okolí $\mathcal{V}' \subseteq \mathbb{R}$ bodu x', okolí $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ bodu $x = \alpha(x')$, okolí $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ bodu $\varphi(x) = \varphi'(x')$, a difeomorfismy $\Psi' : \mathcal{V} \to \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\Psi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ tak, že $\varphi = \Phi$ na $\mathcal{V} \cap \mathbb{R}^k$ a $\varphi' = \Phi'$ na $\mathcal{V}' \cap \mathbb{R}^k$. Pak ale $\alpha = \Psi^{-1} \circ \Psi'$ je spojitě diferencovatelné na $\mathcal{V}' \cap \mathbb{R}^k$. □

Věta 2.9

Nechť (M, φ) je parametrická plocha dimenze k, kde $\varphi(\mathcal{O}) = M$ a $\varphi(\overline{u}) = x$, $\overline{u} \in \mathcal{O}$. Pak je T_xM roven lineárnímu obalu vektorů $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\overline{u})$, ..., $\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(\overline{u})$ a nezávisí na volbě parametrizace.

Důkaz
Vektory $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(\overline{u})$ odpovídají křivkám $d_i(t) = u + tu_i$, patří tedy do prostoru T_xM a jsou lineárně nezávislé. Pro libovolný vektor $\mathbf{v}$ existuje podle definice křivka $d : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{O}$ taková, že $d(0) = \overline{u}$, $(\varphi \circ d)'(0) = \mathbf{v}$. Ale podle derivace složené funkce je $\mathbf{v}$ lineární kombinace vektorů $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(\overline{u})$.

Nezávislost na volbě parametrizace plyne z toho, že základní definice tečného prostoru je nezávislá na parametrizace. $\square$

Lemma 2.10

Je-li M souvislá množina, pak buď neexistuje žádná orientace, nebo existují právě dvě (navzájem opačné) orientace plochy M. Pokud orientace M existuje, je určena orientací tečného prostoru T_xM v jediném (libovolně zvoleném) bodě $x \in M$.

Důkaz
Pro $k = 0$ je důkaz triviální, neboť dimenze tečného prostoru je 0, a vnější algebra je tedy rovna tělesu a orientace jsou jen dvě: 1 a -1, protože se ze souvislosti rozhodujeme pouze v jednom bodě.

Jinak dokážeme, že pro každé $x \in M$ existuje okolí, kde se každé dvě rovnají (jestliže se rovnají v daném bodě a v každém bodě existují jen 2 k-vektory délky 1). $\square$

Věta 2.11

Pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$ existuje rozklad jednotky, který ho respektuje.

Důkaz
Dokážeme jen pro M omezenou (obecný důkaz by měl být jednoduchý, jen s dalšími technickými komplikacemi: zkompaktnění?).

Funkce $\exp\left(\frac{t^2}{t^2-r^2}\right)$ pro $t \in (-r, r)$ a 0 nám ukazuje, jak vytvořit funkci, která je na kouli nenulová, jinde nulová a všude spojitá. Pro každý bod $x \in M$ vezmeme jeho okolí, které je podmnožinou nějaké množiny z pokrytí a z těchto koulí pak vybereme konečně mnoho (důkaz v poznámkách k přednášce je v tomto bodě chybný). Následně definujeme funkce jako původní, dělené součtem všech (těch je konečně mnoho, nebo alespoň v každém bodě konečně mnoho nenulových ve správném důkazu, tedy výsledné funkce budou spojité). $\square$

Lemma 2.12

Nechť $k \geq 1$. Nechť Ω a Ω' jsou dvě otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$ a nechť $\alpha : \Omega \to \Omega'$, $x' = \alpha(x)$ je difeomorfismus, pro který $\det \operatorname{Jac} \alpha > 0$, kde $\operatorname{Jac} \alpha$ je Jacobiho matice $\left\{\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\right\}$, $i, j \in [n]$.

Pak pro každou diferenciální formu $\omega \in \mathcal{E}^n(\Omega')$ platí

$$\int_{\Omega'} \omega = \int_{\Omega} \alpha^*(\omega).$$

Důkaz

Existuje funkce $f'(x')$ taková, že $\omega = f'(x')dx'_1 \wedge \ldots \wedge dx'_n$ na Ω', že z věty o vlastnostech přenášení forem pomocí zobrazení plyne, že

$$\alpha^*(\omega) = \det \operatorname{Jac} \alpha(x)[f' \circ \alpha](x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

Potom už stačí jen použít větu o substituci pro Lebesgueův integrál. $\square$

Lemma 2.13

Nechť $k \geq 1$. Nechť $M \subseteq \Omega$ je orientovaná plocha dimenze k, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Nechť $\varphi : \mathcal{O} \to M$ a $\varphi' : \mathcal{O}' \to M$ jsou dvě kladně orientované parametrizace M. Pak

$$\int_{\mathcal{O}} \varphi^*(\omega) = \int_{\mathcal{O}'} (\varphi')^*(\omega).$$

Důkaz

Z lemmatu („o přechodové funkci“) plyne, že existuje difeomorfismus $\alpha : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$, pro který platí $\varphi' = \varphi \circ \alpha$, $\det \operatorname{Jac} \alpha > 0$ na $\mathcal{O}'$ a

$$(\varphi')^*(\omega) = \alpha^*(\varphi^*(\omega)).$$

Tvrzení tedy plyne z předchozího lemmatu. $\square$

Lemma 2.14

Nechť $k \geq 1$. Je-li M orientovaná plocha dimenze k v otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ a je--li $M \cap \operatorname{supp} \omega$ kompaktní, pak $\int_M \omega$ nezávisí ani na volbě otevřeného pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ množiny Ω ani na volbě rozkladu jednotky $\{f_j\}_{j=1}^N$ na množině $M \cap \operatorname{supp} \omega$ respektující pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Důkaz

Integrujeme postupně přes všechny průniky dvojic $\operatorname{supp} f_j \times \operatorname{supp} g_j$. $\square$

Lemma 2.15

Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^n$ plocha dimenze k s krajem, pak platí:

1. *Definice vnitřních bodů a bodů kraje plochy M nezávisí na volbě okolí $\mathcal{U}$ a parametrizace φ a platí*

$$M = \operatorname{int} M \cup \partial M, \qquad \operatorname{int} M \cap \partial M = \emptyset.$$

2. *Množina* $\operatorname{int} M$ *je plocha dimenze* k.

3. *Množina* ∂M *je plocha dimenze* $k-1$.

4. *Bod* $x \in M$ *je bod vnitřku* $\operatorname{int} M$, *právě když existuje jeho okolí* $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ *a difeomorfismus* $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *takový, že*

$$\Phi(\mathcal{U} \cap M) = \mathcal{V} \cap \mathbb{R}^k.$$

5. *Bod* $x \in M$ *je bod kraje* ∂M, *právě když existuje jeho okolí* $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ *a difeomorfismus* $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *takový, že*

$$\Phi(\mathcal{U} \cap M) = \mathcal{V} \cap \partial\mathbb{R}^k_{\leq},$$

Důkaz

1. Vezmeme si dvě parametrizace okolí x a zúžíme je tak, aby parametrizovali stejné okolí. Pak už je to zřejmé. 2. Všechny body množiny $\operatorname{int} M$ jsou regulární body plochy dimenze k. 3. Všechny body množiny ∂M jsou regulární body plochy dimenze $k-1$. 4. a 5. už víme z věty o regulárním bodu a difeomorfismu jeho okolí. □

Lemma 2.16

Nechť W *je VP se skalárním součinem a ortonormální bází* $A = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\}$. *Buď* $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ *báze, která je souhlasně orientovaná jako báze* A, *právě když* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle > 0$.

Důkaz

Báze A je ortonormální, tedy $\mathbf{u}$ můžeme rozložit jako:

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{w} + \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i.$$

Matice přechodu má tedy blokový tvar:

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle & \ldots \\ 0 & I_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Zřejmě je pak $\det M > 0$ právě když $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle > 0$ □

Lemma 2.17

Indukovaná orientace $T_x\partial M$ *nezávisí na volbě okolí* $\mathcal{U}$ *a parametrizace* φ *s vlastností* $\varphi(\mathcal{O} \cap \mathbb{R}^k_{\leq}) = \mathcal{U} \cap M$.

Důkaz
Předpokládejme, že $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ je ortonormální báze $T_x\partial M$. Vnější normála k M v bodě x je definována jako vektor $\omega \in T_xM$ kolmý k $T_x\partial M$ pro který existuje křivka $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $c(0) = x, c'(0) = \omega$ pro kterou $c(t) \notin M$ pro malá kladná t. Pro důkaz stačí, že pro libovolné φ jsou báze $\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}, \dots\right\}$ a $\{\omega, \dots\}$ souhlasně orientované.

Vektor $\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}$ je tečný k $d(t) = \varphi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k + t)$. Z vlastnosti φ plyne, že také pro d platí $d(0) = x$ a $d(t) \notin M$ pro malá kladná t. Tedy $\langle d(t) - d(0), \omega\rangle = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}, \omega\right\rangle \geq 0$. Protože φ je regulární, tak nenastává rovnost. Můžeme tudíž použít předchozí lemma. □

Lemma 2.18 (Gaussova věta pro poloprostor)

Pro každou diferenciální formu $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ s kompaktním nosičem platí

$$\int_{\operatorname{int}\mathbb{R}^n_{\leq}} d\omega = \int_{\partial\mathbb{R}^n_{\leq}} \omega.$$

Důkaz
TODO str. 35. □

Lemma 2.19 (Stokesova věta pro plochy s hladkou hranicí)

Předpokládejme, že M je orientovaná plocha dimenze k s krajem a ∂M má indukovanou orientaci. Nechť $M \subseteq \Omega$, kde Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$, a $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ taková, že $M \cup \operatorname{supp}\omega$ je kompaktní množina. Pak

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\operatorname{int} M} d\omega.$$

Důkaz
TODO str. 36. □

Lemma 2.20 (Gaussova věta pro kvadrant)

TODO str. 37.

Lemma 2.21 (Stokesova věta pro plochy se skoro hladkou hranicí)

TODO str. 38.

2.4 Integrál prvního druhu přes plochy dimenze k

Lemma 2.22

Nechť $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ *a* $\varphi' : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(\mathcal{O}) = \varphi'(\mathcal{O})$ *jsou dvě parametrizace plochy dimenze* k*, pak existuje difeomorfismus* $\alpha : \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ *takový, že* $\varphi = \varphi' \circ \alpha$*. Navíc platí*

$$\sqrt{g} = \left(\sqrt{g'} \circ \alpha\right) |\det \operatorname{Jac} \alpha|.$$

Důkaz

Funkce kterou hledáme je přechod mezi souřadnicemi (v každém bodě) a rovnost z toho pak plyne triviálně. □

Lemma 2.23

Nechť $k \geq 1$*. Nechť* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *je plocha dimenze* k*, a nechť* f *je spojitá funkce na* M*. Předpokládejme, že* $\varphi : \mathcal{O} \to M$ *a* $\varphi' : \mathcal{O}' \to M$ *jsou 2 kladně orientované parametrizace* M*. Pak*

$$\int_{\mathcal{O}} (f \circ \varphi)\sqrt{g} = \int_{\mathcal{O}'} (f \circ \varphi')\sqrt{g'}.$$

Důkaz

Snadný důsledek předchozího lemmatu a věty o substituci pro Lebesgueův integrál. □

Lemma 2.24

Nechť $k \geq 2$*. Je-li* M *plocha dimenze* k *v otevřené množině* $\mathbb{R}^n$*,* f *spojitá funkce na* M*, a je-li* $M \cap \operatorname{supp} f$ *kompaktní, pak* $\int_M f dS$ *nezávisí ani na volbě otevřeného pokrytí, ani na volbě rozkladu jednotky.*

Důkaz

Zcela analogicky jako u integrálu. □

3 Definice – Plochy

3.1 Plochy v $\mathbb{R}^3$

Definice 3.1 (Mapa, atlas, přechodové zobrazení)

Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^3$ je plocha, pak se každá regulární parametrizace $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S$ nazývá mapa na ploše S. Obor hodnot mapy $\mathbf{p}(\mathcal{O})$ označíme symbolem $< \mathbf{p} >$. Soubor map, které pokrývají plochu S se nazývá atlas na ploše S.

Jsou-li $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ dvě mapy a je-li množina $M = \mathbf{p}(\mathcal{O}) \cap \mathbf{p}'(\mathcal{O}')$ neprázdná, pak budeme zobrazení $\varphi = (\mathbf{p}')^{-1} \circ \mathbf{p} : \mathbf{p}^{-1}(M) \to (\mathbf{p}')^{-1}(M)$ nazývat přechodové zobrazení mezi těmito dvěma mapami.

Definice 3.2 (Indukovaná mapa na $T_x S$)

Nechť $\mathbf{p}$ je mapa na S a $s = \mathbf{p}(u)$, $u = (u^1, u^2)$ je bod v jejím obraze. Pak zobrazení $d\mathbf{p}_u : \mathbb{R}^2 \to T_s S$ je lineární izomorfismus, který definuje (indukovanou) globální mapu na $T_s S$. Obrazem vektoru $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ je vektor $a_1 \mathbf{p}_{u^1} + a_2 \mathbf{p}_{u^2}$, kde $\mathbf{p}_{u^1}$ resp. $\mathbf{p}_{u^2}$ označuje parciální derivace $\mathbf{p}$ podle u^1, resp. u^2 v bodě u.

3.2 První fundamentální forma plochy

Definice 3.3 (První fundamentální forma)

Skalární součin dvou vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ označíme $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Nechť x je bod plochy S. Bilineární formu

$$I_x(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

nazveme první fundamentální forma plochy S v bodě x.

Vzor I_x při zobrazení $d\mathbf{p}_u$ je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$, kterou budeme značit g_u ($x = \mathbf{p}(u)$):

$$g_u(a, b) = I_x(d\mathbf{p}_u(a), d\mathbf{p}u(b)), \qquad a, b \in \mathbb{R}^2.$$

Matice této bilineární formy (označme ji stejným symbolem g_u) má tvar

$$g_u = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{u^1} \cdot \mathbf{p}_{u^1} & \mathbf{p}_{u^1} \cdot \mathbf{p}_{u^2} \\ \mathbf{p}_{u^2} \cdot \mathbf{p}_{u^1} & \mathbf{p}_{u^2} \cdot \mathbf{p}_{u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Tradičně se první fundamentální forma symbolicky zapisuje ve tvaru

$$g_{11} d(u^1)^2 + 2 g_{12} du^1 du^2 + g_{22} d(u^2)^2$$

nebo

$$E d(u^1)^2 + 2F du^1 du^2 + G d(u^2)^2$$

Pro libovolný vektor $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ definujeme hodnotu $I(A)$ první fundamentální formy jako

$$I(a, b) = (a\ b) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Ea^2 + 2Fab + Gb^2.$$

3.3 Druhá fundamentální forma plochy

Definice 3.4 (Normála)

Je-li $T_x S$ tečný prostor v bodě x k ploše S, pak existuje jednotkový vektor N tak, že

$$T_s S = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{v} \cdot N = 0 \right\}.$$

Vektor N je určen jednoznačně až na znaménko a nazývá se vektor jednotkové normály k ploše S v bodě s.

Je-li $\mathbf{p}$ mapa na S, pak je normálový vektor N jednoznačně určen předpisem

$$N = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|}.$$

Poznámka (Souhlasně a opačně orientované mapy, orientovatelný atlas)
Dvě mapy pro tentýž bod mají stejnou jednotkovou normálu, právě když determinant Jacobiho matice přechodového zobrazení v daném době je kladný. V tom případě nazýváme tyto mapy souhlasně orientovanými. Pokud je determinant Jacobiho matice přechodového zobrazení v daném bodě záporný, nazveme mapy opačně orientovanými.

Atlas plochy nazveme orientovaným atlasem, pokud jsou všechny jeho mapy po dvou souhlasně orientované. Orientovaná plocha S je plocha s orientovatelným atlasem. Orientovatelná plocha je plocha, pro kterou existuje orientovaný atlas.

Definice 3.5 (Hladké zobrazení)

Nechť S a $\tilde{S}$ jsou dvě regulární plochy a F zobrazuje S do $\tilde{S}$. Řekneme, že je zobrazení F hladké v bodě $s \in S$, pokud existuje mapa $(U, \mathbf{p})$ na S obsahující bod s a mapa $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{p}})$ na $\tilde{S}$, obsahující bod $F(s)$ tak, že zobrazení $(\tilde{\mathbf{p}})^{-1} \circ F \circ (\mathbf{p})$ je hladké v bodě $(\mathbf{p})^{-1}(s)$.

Zobrazení F je hladké na S, pokud je hladké v každém bodě S. Zobrazení F je difeomorfismus S na $\tilde{S}$, pokud je F vzájemně jednoznačné a F i F^{-1} jsou hladké na svých definičních oborech.

Definice 3.6 (Tečné zobrazení)

Nechť S a $\tilde{S}$ jsou dvě regulární plochy a F zobrazuje S do $\tilde{S}$. Pak pro každý bod $s \in S$ definujeme tečné zobrazení

$$T_s F : T_s S \to T_{f(s)} \tilde{S}$$

následujícím předpisem: je-li c na $(-\varepsilon, \varepsilon)$ regulární křivka, $c(0) = s$ a $\dot{c}(0) = \mathbf{v} \in T_s S$, pak definujeme

$$T_s F(\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(F \circ c)(0) \in T_{f(s)} \tilde{S}.$$

Definice 3.7 (Gaussovo a Weingartenovo zobrazení)

Označme symbolem S_2 jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^3$. Předpokládejme, že S je plocha s orientací zadanou pomocí spojitě diferencovatelného zobrazení $N : S \to S_2$ (tradiční jméno pro N je Gaussovo zobrazení).

Pak v každém bodě $s \in S$ existuje tečné zobrazení

$$T_s N : T_s S \to T_{N(s)} S_2.$$

Vzhledem k tomu, že oba tečné prostory $T_s S$ a $T_{N(s)} S_2$ jsou kolmé na normálu $N(s)$, platí $T_s S = T_{N(s)} S_2$. Tedy můžeme zobrazení $T_s N$ považovat za zobrazení z $T_s S$ do sebe.

Lineární zobrazení

$$W_s := -T_s N : T_s S \to T_s S$$

budeme nazývat Weingartenovo zobrazení.

Definice 3.8 (Druhá fundamentální forma)

Předpokládejme, že S je plocha s orientací zadanou pomocí Gaussova zobrazení $N : S \to S_2$. Druhá fundamentální forma II_s plochy S v bodě $s \in S$ je bilineární forma na $T_s S$ zadaná předpisem

$$II_s(X, Y) := -T_s N(X) \cdot Y, \qquad X, Y \in T_s S.$$

Pro jednoduchost označení budeme často index s pro první a druhou fundamentální formu vynechávat a psát jenom I nebo II.

Definice 3.9

Nechť S je orientovaná plocha, $s \in S$ a $\mathbf{v} \in T_s S$ nenulový tečný vektor. Normálová křivost $\varkappa_n$ plochy S v bodě s a ve směru $\mathbf{v}$ je definována předpisem

$$\varkappa_n(\mathbf{v}) = \frac{II(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{I(\mathbf{v}, \mathbf{v})}.$$

Poznámka

Meusnierova věta říká, že $|\varkappa_n(\mathbf{v})|$ rovná křivosti křivky normálového řezu ve směru $\mathbf{v}$. Znaménko závisí na tom, je-li $N = n$ nebo $N = -n$. To je tedy geometrická interpretace normálové křivosti. Rovnost platí, pokud $N = n$, křivosti jsou opačné, pokud $N = -n$.

Definice 3.10 (Hlavní křivosti, hlavní směry, Gaussova a střední křivost)

Nechť S je orientovaná plocha. Minimum $\varkappa_1(s)$ a maximum $\varkappa_2(s)$ normálové křivosti v bodě $s \in S$ se nazývají hlavní křivosti a odpovídající směry se nazývají hlavní směry.

V každém bodě s orientované plochy S definujeme Gaussovu křivost $K = K(s)$ a střední křivost $H = H(s)$ vztahy

$$K(s) = \varkappa_1 \varkappa_2, \qquad H(s) = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}.$$

Definice 3.11 (Eliptický, kruhový, parabolický, planární a hyperbolický)

Bod $s \in S$ orientované plochy se nazývá eliptický, pokud $K(s) > 0$, kruhový, je-li navíc $\varkappa_1(s) = \varkappa_2(s)$, parabolický, pokud $K(s) = 0$, planární, je-li navíc $\varkappa_1 = \varkappa_2$ $(= 0)$, a hyperbolický, pokud $K(s) < 0$.

Definice 3.12

Nechť S je orienotvaná plocha a $\mathbf{p}$ souhlasně orientovaná mapa na S.

- Křivky $u \mapsto \mathbf{p}(u, v)$ pro v pevné a $v \mapsto \mathbf{p}(u, v)$ pro u pevné se nazývají parametrické mapy $\mathbf{p}$ na ploše S.
- Regulární křivka $c : I \to S$ je hlavní křivka, pokud $c'(t)$ je hlavní směr pro každé $t \in I$.
- Vektor $\mathbf{o} \neq X \in T_sS$ je asymptotický směr na ploše S v bodě s, jestliže $II_s(X, X) = 0$.
- Regulární křivka $c : I \to S$ je asymptotická křivka, pokud $c'(t)$ je asymptotický směr pro každé $t \in I$.

Definice 3.13 (Geodetika, geodetická křivost)

Nechť S je orientovaná plocha. Regulární křivka $c : I \to S$ se nazývá geodetika na ploše S, pokud

$$\det(c', c'', N \circ c) = 0, \forall t \in I.$$

Geodetická křivost $\varkappa_g$ křivky c je definována předpisem

$$\varkappa_g(t) = \frac{\det(c', c'', N \circ c)}{||c'||^3}, \forall t \in I.$$

Definice 3.14 (Kovariantní derivace)

Nechť $c : I \to S$ je regulární křivka na ploše S a nechť $X : I \to \mathbb{R}^3$ je hladké zobrazení (tj. vektorové pole podél křivky c). Kovariantní derivace zobrazení X podél křivky c je definována předpisem

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) = \prod_{c(t)}(X'(t)),$$

kde $\prod_{c(t)}$ je ortogonální projekce $\mathbb{R}^3$ na tečný prostor $T_{c(t)}S$.

Definice 3.15 (Parametrizovaná geodetika)

Řekneme, že regulární křivka $c : I \to S$ je parametrizovaná geodetika na ploše S, pokud pro každé $t \in I$ platí

$$\frac{\nabla c'}{dt}(t) = 0.$$

3.4 Riemannova metrika

Definice 3.16 (Riemannova metrika, Riemannova plocha)

Nechť S je plocha v $\mathbb{R}^3$. Riemannova metrika g na S přiřazuje každému bodu $s \in S$ skalární součin g_s na tečném prostoru T_sS.

Pro každou mapu $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S$ můžeme popsat tento skalární součin v indukované mapě na tečném prostoru T_sS pomocí funkcí

$$g_{ij}(u) = g_{\mathbf{p}(u)}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j).$$

Řekneme, že (S, g) je Riemannova plocha, pokud jsou funkce g_{ij} hladké pro každou mapu na S. Symbolicky tuto Riemannovu metriku zapisujeme jako výraz

$$ds^2 := g_{12}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2.$$

Definice 3.17

Zobrazení $F : S_1 \to S_2$ dvou Riemannových ploch nazveme lokální isometrie, pokud platí jedna z ekvivalentních podmínek lemmatu o isometrii. Pokud je navíc F vzájemně jednoznačné, nazveme ho isometrie ploch S_1 a S_2.

Řekneme, že zobrazení $F : S_1 \to S_2$ dvou Riemannových ploch je konformní zobrazení, pokud platí jedna z ekvivalentních podmínek lemmatu o konformním zobrazení.

3.5 Hyperbolická geometrie

Definice 3.18 (Hyperboloid)

Hyperboloid je Riemannova plocha v $\mathbb{R}^3$ definovaná předpisem

$$H_2 = \left\{\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 | B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -1 \wedge x_0 > 0\right\},$$

kde

$$B(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_0y_0,$$

spolu se skalárním součinem $g_x, x \in H_2$ definovaným jako restrikce bilineární formy B na T_xH_2.

Definice 3.19

Grupa transformací $O(2,1)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ je definována předpisem

$$O(2,1) = \left\{A \in GL(3,\mathbb{R}) | B(AX, AY) = B(X,Y) \wedge X, Y \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

Definice 3.20 (Poincarého model hyperbolické roviny)

Množina $U = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$ spolu s Riemannovou metrikou

$$g^{(U)} = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2} I_2$$

se nazývá Poincarého model hyperbolické roviny.

Definice 3.21 (Riemannova plocha)

Riemannova plocha (H_+, g) je definována předpisem

$$H_+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C} | y > 0\}, \qquad g^{H_+} = \frac{1}{y^2} I_2.$$

Definice 3.22 (Přímky v H_+)

Průnik zobecněné kružnice k v $\mathbb{R}^2$ s H_+ nazveme přímkou v H_+, pokud k protíná osu x pod pravým úhlem.

Definice 3.23 (Přímky v U)

Průnik zobecněné kružnice k v $\mathbb{R}^2$ s U nazveme přímkou v U, pokud k protíná jednotkovou kružnici pod pravým úhlem. Průniky přímek v rovině procházejících počátkem s U nazveme speciální přímky v U.

Definice 3.24 (Přímky v H_2)

Přímky v H_2 definujeme jako průniky dvourozměrných prostorů v $\mathbb{R}^3$ s H_2. Přímky které vzniknou jako průnik roviny obsahující osu x_0 s H_2 budeme nazývat speciální přímky v H_2.

4 Tvrzení – Plochy

4.1 Plochy v $\mathbb{R}^3$

Věta 4.1

Předpokládejme, že f je hladká funkce na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ a definujme množinu S rovnicí

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega | f(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

Pokud platí podmínka

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \neq 0$$

na celé množině S, pak S je plocha.

Důkaz

Jen speciální případ podobné věty z dřívějška. $\square$

4.2 První fundamentální forma plochy

4.3 Druhá fundamentální forma plochy

Lemma 4.2

1. *Zobrazení T_sF je dobře definované, tj. jeho hodnota nezávisí na výběru křivky jejíž tečný vektor je vektor $\mathbf{t} \in T_sS$.*
2. *Zobrazení T_sF je lineární.*
3. *Pokud bod s patří do mapy $(U, \mathbf{p})$ a bod $f(s)$ patří do mapy $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{p}})$, pak tyto mapy určují souřadnice vektorových prostorů T_sS a $T_{f(s)}\tilde{S}$ a matice tečného zobrazení T_sF vzhledem k těmto bázím je Jakobiho matice zobrazení $F = (\tilde{\mathbf{p}})^{-1} \circ F \circ (\mathbf{p})$ v bodě $\mathbf{p}^{-1}(s)$.*

Důkaz

TODO $\square$

Lemma 4.3

Druhá fundamentální forma je symetrická bilineární forma. To znamená, že pro všechny $X, Y \in T_sS$ platí

$$II(X,Y) = I(W(X), Y) = I(X, W(Y)) = II(Y, X).$$

Je-li $(U, \mathbf{p})$ mapa na S obsahující bod $s \in S$, pak má druhá fundamentální forma v lokálních souřadnicích daných bází $\mathbf{p}_{u^1}$, $\mathbf{p}_{u^2}$ tvar

$$II(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{2} h^{ij}\alpha_i\beta_j, \qquad X = \alpha_1\mathbf{p}_{u^1} + \alpha_2\mathbf{p}_{u^2}, \qquad Y = \beta_1\mathbf{p}_{u^1} + \beta_2\mathbf{p}_{u^2},$$

kde

$$h^{ij} = -(N \circ \mathbf{p})_{u^i} \cdot \mathbf{p}_{u^j} = (N \circ \mathbf{p}) \cdot \mathbf{p}_{u^i u^j}.$$

Důkaz
Postupně provedeme výpočty v dané mapě $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S$.

- TODO.

$\square$

Věta 4.4 (Meusnier)

Nechť S je plocha se zadanou orientací pomocí Gaussova zobrazení $N : S \to S_2$ a $c : I \to S$ je regulární křivka s tečným vektorem $\mathbf{t}(s)$ (parametrizovaná obloukem), s nenulovou křivostí $\varkappa(s)$, a hlavní normálou $\mathbf{n}(s)$, $s \in S$. Pak

$$II(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)) = \varkappa(s) \cos \beta,$$

kde β je úhel mezi oběma normálami $N(c(s))$ a $n(s)$.

Důkaz
Můžeme předpokládat, že existuje mapa $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S$, pro kterou $c(I) \subseteq \mathbf{p}(\mathcal{O})$. Pak existuje regulární křivka

$$u = \mathbf{p}^{-1} \circ c : I \to \mathcal{O}, \qquad c = \mathbf{p} \circ u, \qquad u = u(s),$$

a tedy $T_{u(s)}\mathbf{p}(u'(s)) = c'(s)$. V souřadnicích daných mapou tedy platí

$$II_{c(s)}(c'(s), c'(s)) = h_{u(s)}(u'(s), u'(s)) = -T_{u(s)}\mathbf{n}(u'(s)) \cdot T_{u(s)}\mathbf{p}(u'(s)) =$$

$$= -(n \circ u)'(s) \cdot c'(s) = (\mathbf{n} \circ u) \cdot c''(u) = \varkappa(s) N(c(s)) \cdot n(s) = \varkappa(s) \cos(\beta).$$

První rovnost je z definice, druhá je dosazení, TODO. $\square$

Věta 4.5

Jsou-li hlavní křivosti různé, jsou odpovídající hlavní směry X_i, $i = 1, 2$ na sebe kolmé a jsou to vlastní vektory pro Weingartenovo zobrazení s vlastními čísly $\varkappa_i$:

$$W(X_i) = \varkappa_i X_i, \qquad i = 1, 2.$$

Důkaz
Viz další věta. $\square$

Věta 4.6

Předpokládejme, že číslo λ je hlavní křivost plochy v bodě $s \in S$ a $(U, \mathbf{p})$ je mapa v okolí bodu s. Pak pro matice $g = g_u$, resp. $h = h_u$, první, resp. druhé, fundamentální formy v bodě s vzhledem k dané mapě platí $\det(h - \lambda g) = 0$.

Hlavní směry jsou pak řešením lineární soustavy rovnic $(h - \lambda g)\binom{\alpha_1}{\alpha_2} = \mathbf{o}$.

Hlavní směry, resp. hlavní křivosti, jsou vlastní vetkory, resp. vlastní čísla Weingartenovy matice $w = g^{-1}h$.

Jsou-li hlavní křivosti různé, pak jsou odpovídající hlavní směry na sebe kolmé.

Důkaz
Vázané extrémy funkce $\varkappa_n$ najdeme pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Snadno se zjistí, že

$$\operatorname{grad} I(\alpha_1, \alpha_2) = 2g\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} II(\alpha_1, \alpha_2) = 2h\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}.$$

Je-li (α_1, α_2) kritický bod $\varkappa_n$, pak

$$(h - \lambda g)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Rovnice pro hlavní křivost je pak

$$\det(h - \lambda g) = 0.$$

Druhá část tvrzení plyne z rovnosti $h - \lambda g = g(w - \lambda I)$.

Pro třetí pak předpokládejme, že $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$ jsou hlavní křivosti a $\alpha \in \mathbb{R}^2$, resp. $\beta \in \mathbb{R}^2$ jsou odpovídající hlavní směry. Ze vztahu $(h - \lambda g)(\alpha_1, \alpha_2)^T = \mathbf{o}$ plyne, že

$$\alpha^T(h - \varkappa_2 g)\beta = 0, \qquad \beta^T(h - \varkappa_1 g)\alpha = 0.$$

Odečtením těchto dvou rovnic dostaneme $(\varkappa_1 - \varkappa_2)[\alpha^T g\beta] = 0$ a z toho plyne kolmost hlavních směrů. □

Věta 4.7

Jsou-li $g = g_u$*, resp.* $h = h_u$*, matice první, resp. druhé, fundamentální formy v bodě* $s = \mathbf{p}(u) \in S$ *vzhledem k mapě* $(U, \mathbf{p})$*, a* $w = w_u$ *je matice Weingartnerova zobrazení v tomto bodě, pak:*

$$K(s) = \det w = \frac{\det h}{\det g},$$

$$H(s) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(w) = \frac{g^{11}h^{22} + g^{22}h^{11} - 2g^{12}h^{12}}{2\det g},$$

$$\varkappa_{1,2} = H(s) \pm \sqrt{H(s)^2 - K(s)}.$$

Důkaz
TODO str. 54. □

Věta 4.8

Nechť S je orientovaná plocha a $s \in S$.

1. *Pokud $K(s) > 0$, neeexistuje v bodě s žádný asymptotický směr.*
2. *Pokud $K(s) < 0$, pak existují v bodě s právě dva různé asymptotické směry.*
3. *Pokud $K(s) = 0$ a $0 = \varkappa_1(s) \neq \varkappa_2(s)$, pak existuje v bodě s právě jeden asymptotický směr, který je zároveň hlavním směrem.*
4. *Pokud $K(s) = 0$ a $0 = \varkappa_1(s) = \varkappa_2(s)$, pak je v bodě s každý směr asymptotický.*

Důkaz

1. je normálová křivost všude kladná nebo všude záporná. 2. je jedna hlavní křivost kladná a druhá záporná, ze spojitosti je tedy normálová křivost ve 2 místech nulová. V 3. je první hlavní křivost nulová, tedy první hlavní směr je zároveň asymptotický směr. 4. je zřejmá. □

Věta 4.9

Nechť S je orientovaná plocha s mapou $\mathbf{p}$ a $c(t) = \mathbf{p}(u(t))$, $t \in I$ je regulární křivka na S. Křivka c je hlavní, právě když

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ g^{11} & g^{12} & g^{22} \\ h^{11} & h^{12} & h^{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} g^{11}u_1' + g^{12}v' & h^{11}u' + h^{12}v' \\ g^{21}u' + g^{22}v' & h^{21}u' + h^{22}v' \end{pmatrix} = 0.$$

Křivka c je asymptotická, právě když

$$h^{11}(u')^2 + 2h^{12}u'v' + h^{22}(v')^2 = 0.$$

Důkaz

Determinanty jsou zřejmě shodné, druhý je pak stejný jako podmínka ve větě výše. □

Věta 4.10

Platí

$$\mathbf{p}_{ij} = \sum_k \Gamma^k_{ij}\mathbf{p}_k + h^{ij}\mathbf{n},$$

$$\mathbf{n}_i = \sum_k \sum_l h^{il}a^{lk}\mathbf{p}_k,$$

kde 2×2 matice $a = (a^{ij})$ je matice inverzní k matici první fundamentální formy g^{ij},

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_l a^{kl}(\mathbf{p}_{ij} \cdot \mathbf{p}_l)$$

a h^{il} je matice druhé fundamentální formy.

Důkaz
Vektor $\mathbf{p}_{ij}$ lze napsat jako lineární kombinaci báze s koeficienty, které je třeba spočítat. Rozklad má tvar

$$\mathbf{p}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{p}_k + m^{ij}\mathbf{n},$$

Pokud vynásobíme tuto rovnost vektorem $\mathbf{n}$ získáme

$$m^{ij} = \mathbf{p}_{ij} \cdot \mathbf{n} = h^{ij}.$$

Po vynásobení vektorem $\mathbf{p}_l$ dostaneme

$$\mathbf{p}_{ij} \cdot \mathbf{p}_l = \sum_k \Gamma_{ij}^k g^{kl}$$

a po vynásobení inverzní maticí $a = g^{-1}$ dostaneme vztah pro Γ_{ij}^k.

U druhé rovnosti postupujeme takto: Normála $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor. Derivací identity $n \cdot n = 1$ dostaneme rovnost $2n_i \cdot n = 0$. Tedy vektor n_i je tečný vektor v bodě $s = \mathbf{p}(u)$ a pro vhodné koeficienty platí

$$n_i = \sum_l \alpha_i^k \mathbf{p}_k.$$

Vynásobením vektorem $\mathbf{p}_l$ dostaneme

$$-h^{il} = -\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p}_l = \sum_i \alpha_i^k g^{kl},$$

a tedy

$$\alpha_i^k = -\sum_l h^{il} a^{lk}.$$

□

Lemma 4.11

Čísla Γ_{ij}^k se nazývá Christoffelovy symboly a platí pro ně

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_l a^{kl}(\mathbf{p}_{ij} \cdot \mathbf{p}_l) = \frac{1}{2} \sum_l a^{kl}(g_j^{il} + g_i^{jl} + g_l^{ij}),$$

kde $g_j^{il} = \frac{\partial g^{il}}{\partial u^j}$.

Důkaz
Stačí upravit. (Dokazujeme pouze druhou nerovnost.) □

Věta 4.12 (Gauss, Codazzi-Mainardi)

Pro první a druhou fundamentální formu plochy platí následující identity:

$$Gauss : \Gamma^m_{ij,k} - \Gamma^m_{ik,j} + \sum_l (\Gamma^l_{ij}\Gamma^m_{lk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lj}) = \sum_l a^{lm}(h^{ij}h^{kl} - h^{ik}h^{jl}),$$

kde $\Gamma^m_{ij,k} = \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^k}$.

$$Codazzi - Mainardi : \sum_l (\Gamma^l_{ij}h^{lk} - \Gamma^l_{ik}h^{lj}) + h^{ij}_k - h^{ik}_j.$$

Důkaz
Dosazujeme TODO. □

Věta 4.13 (Bonnet)

Nechť $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a g, h jsou dvě symetrické 2×2 dostatečně krát spojitě diferencovatelné maticové funkce na $\mathcal{O}$, pro které jsou na $\mathcal{O}$ splněny relace z předchozí věty. Pak existuje plocha S a její parametrizace na množině $\mathcal{O}$, pro kterou jsou g a h matice první a druhé fundamentální formy. Pokud je $\mathcal{O}$ souvislá, je plocha S určena jednoznačně až na shodnost.

Důkaz
Bez důkazu. □

Věta 4.14 (Theorema egregium)

Gaussova křivost K parametrizované plochy se vypočítá pomocí první fundamentální plochy a jejích derivací vzorcem

$$K = (g^{11})^{-1}\left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \sum_l (\Gamma^l_{11}\Gamma^2_{l2} - \Gamma^l_{12}\Gamma^2_{l1})\right).$$

Gaussova křivost je tedy vnitřní vlastností plochy.

Důkaz
Stačí použít Gaussovu rovnici pro speciální hodnoty $i = j = 1$, $k = l = 2$. Pravá strana

$$\sum a^{l2}(h^{11}h^{2l} - h^{12}h^{1l}) = a^{22}\det h = g^{11}\frac{\det h}{\det g} = g^{11}K.$$

□

Věta 4.15

Isometrické parametrizovatelné plochy mají v odpovídajících bodech stejnou Gaussovu křivost.

Důkaz
Důsledek předchozí věty. □

Věta 4.16 (Pro informaci, bez důkazu)

Je-li S plocha s nulovou Gaussovou křivostí, pak pro každý její bod $s \in S$ existuje okolí U s vlastností, že $S \cap U$ je isometrické otevřené podmnožině roviny.

Věta 4.17

Je-li c regulární křivka bez inflexních bodů na ploše S, pak:

$$\varkappa \mathbf{n} = \varkappa_n(\mathbf{t})\mathbf{N} + \varkappa_g(\mathbf{N} \times \mathbf{t}), \qquad \mathbf{t} = c',$$

$$\varkappa^2 = (\varkappa_n(\mathbf{t}))^2 + \varkappa_g^2, \qquad \mathbf{t} = c'.$$

Důkaz
Můžeme předpokládat, že je křivka c parametrizovaná obloukem. Nechť $\mathbf{n}$ je hlavní normála křivky c. Všechny tři vektory $\mathbf{n}, \mathbf{N}, \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ jsou kolmé na $\mathbf{t} = c'$, tedy leží ve společné rovině, jejíž ortonormální báze je $\{\mathbf{N}, \mathbf{N} \times \mathbf{t}\}$. Rozklad vektoru $c'' = \varkappa \mathbf{n}$ do této báze má tvar

$$c'' = \varkappa \mathbf{n} = (c'' \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} + (c'' \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{t}))\mathbf{N} \times \mathbf{t}.$$

Nyní stačí použít to, že $c'' \cdot \mathbf{N} = \varkappa_n(\mathbf{t})$ a $c'' \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{t}) = \varkappa_g$.

Druhá rovnice plyne z první a Pythagorovy věty. □

Lemma 4.18

Nechť $c : I \to S$ je regulární křivka. Pak je ekvivalentní:

1. *c je parametrizovaná geodetika,*
2. *Pro každé $t \in I$ je vektor $c''(t)$ násobkem normálového vektoru plochy $N(c(t))$,*
3. *c je geodetika a $||c''(t)||$ je konstantní pro $t \in I$.*

Důkaz
Pokud $c'(t) \equiv 0$, tvrzení je triviální. Můžeme tedy předpokládat, že $c'(t) \not\equiv 0$. Podmínka $0 = \prod_{c(t)} c''(t)$ je ekvivalentní s tím,že $c''(t)$ je násobek vektoru $N(c(t))$. Z toho plyne $1 \Leftrightarrow 2$.

Z podmínky 2. plyne, že c je geodetika, tedy $c''(t)$ je kolmé na $T_{c(t)}S$. Speciálně $c'' \cdot c' = 0$. Ale

$$c'' \cdot c' = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(c' \cdot c') = 0 \Leftrightarrow ||c'|| = konst.$$

Z podmínek $c'(t) \not\equiv 0$ a $||c'|| = konst.$ plyne, že $c'(t) \neq 0$ pro všechny body $t \in I$. Víme tedy, že oba vektory $c''(t)$ a $N(c(t))$ jsou kolmé na nenulový vektor $c'(t)$ a zároveň víme, že trojice $c'(t)$, $c''(t)$, $N(c(t))$ jsou lineárně závislé (protože c je geodetika). Z toho plyne, že $c''(t)$ je násobek vektoru $N(c(t))$, a tedy

$$\frac{\nabla c'}{dt}(t) = 0.$$

□

Věta 4.19

Nechť $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S$ je mapa na ploše S a $u = u(t)$ je regulární křivka v $\mathcal{O}$. Křivka $c = \mathbf{p}(u(t))$ je parametrizovaná geodetika na ploše S, právě když jsou splněny rovnice

$$\ddot{u}^1 + \sum_{ij} \Gamma^1_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j = 0,$$

$$\ddot{u}^2 + \sum_{ij} \Gamma^2_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j = 0.$$

Důkaz
Porovnáním koeficientů v rozkladu do báze $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$, $N \circ \mathbf{p}$ v předchozí větě. □

Věta 4.20

Je-li $\mathbf{v}$ jednotkový tečný vektor v bodě s plochy S, pak existuje jediná geodetika parametrizovaná obloukem, která prochází bodem s a jejíž tečný vektor v tomto bodě je $\mathbf{v}$.

Důkaz
Rovnice pro parametrický popis geodetiky $(u(t), v(t))$ v dané mapě mají tvar

$$\ddot{u} = f(u, v, \dot{u}, \dot{v}), \qquad \ddot{v} = g(u, v, \dot{u}, \ddot{v}),$$

kde f, g jsou hladké funkce čtyř proměnných. Základní věty o řešení této soustavy říkají, že pro každou čtveřici čísel a, b, c, d a každou hodnotu t_0 proměnné t existuje $\varepsilon > 0$ a řešení $(u(t), v(t))$ soustavy na intervalu $|t - t_0| < \varepsilon$ splňující počáteční podmínky

$$u(t_0) = a, \quad v(t_0) = b, \quad \dot{u}(t_0) = c, \quad \dot{v}(t_0) = d.$$

Navíc, libovolná taková dvě řešení se rovnají v jistém okolí bodu t_0. Zadání jednotkového tečného vektoru odpovídá zadání počátečních podmínek pro tuto soustavu. $\square$

Lemma 4.21 (O isometrii)

Nechť je F diferencovatelné zobrazení Riemannovy plochy (S_1, g_1) do Riemannovy plochy (S_2, g_2). Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *Zobrazení F zachovává délku křivek.*
2. *Tečné zobrazení $T_sF : T_sS_1 \to T_{F(s)}S_2$ je isometrie vektorových prostorů se skalárním součinem pro každý bod $s \in S_1$. To znamená, že pro každý bod $s \in S_1$ a pro každou dvojici vektorů $X, Y \in T_sS_1$ platí*

$$(g_1)_s(X, Y) = (g_2)_{F(s)}(T_sF(X), T_sF(Y)).$$

3. *Pro každou mapu $(\mathbf{p}^1, \mathcal{O})$ na S_1 jsou odpovídající matice první fundamentální formy pro mapu $\mathbf{p}^1$ a pro mapu $\mathbf{p}^2 = F \circ \mathbf{p}^1$ stejné (jako maticové funkce na $\mathcal{O}$).*

Důkaz
3. $\Longrightarrow$ 1. je zřejmá, protože pro délku odpovídajících křivek dostaneme stejný vzorec. 2. $\Longrightarrow$ 3. plyne z definice matice první fundamentální formy pro mapy $\mathbf{p}^1$ a $\mathbf{p}^2$, předpokladu 10.2? spolu se vztahem $\mathbf{p}^2_i = T_{\mathbf{p}^1(u)}F(\mathbf{p}^1_i)$, který popisuje tečné zobrazení pro složení dvou diferencovatelných zobrazení.

Pro poslední implikaci zvolíme pro každý bod $s = \mathbf{p}^1(\overline{u}) \in S_1$ soubor křivek

$$u(t) = (\overline{u})^1 + \alpha^1 t, \overline{u}^2 + \alpha^2 t), \quad t \in (-\varepsilon', \varepsilon), \quad \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R},$$

kde $\varepsilon, \varepsilon'$ jsou dostatečně malá kladná čísla. Délky obrazů těchto křivek se podle předpokladu při obou mapách rovnají a tedy platí

$$TODOintegralystr.62$$

pro všechna $\varepsilon, \varepsilon', \alpha^1, \alpha^2$. Z toho plyne (derivací podle ε), že se rovnají také integrandy. $\square$

Lemma 4.22 (O konformním zobrazení)

Nechť F je diferencovatelné zobrazení Riemannovy plochy (S_1, g_1) do Riemannovy plochy (S_2, g_2). Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

- *Zobrazení F zachovává úhly křivek.*
- *Pro každou mapu $(\mathbf{p}^1, \mathcal{O})$ na S_1 se liší odpovídající matice první fundamentální formy pro mapu $\mathbf{p}^1$ a pro mapu $\mathbf{p}^2 = F \circ \mathbf{p}^1$ na S_2 jen nenulovým násobkem (jako funkce na $\mathcal{O}$).*

Důkaz

Obdobně jako minulé lemma. □

4.4 Hyperbolická geometrie

Lemma 4.23

Nechť $A \in O(2,1)$ a $a_{00} > 0$. Pak A je isometrie H_2 na H_2. Grupu všech takovýchto isometrií označíme symbolem G.

Důkaz

Z definice $O(2,1)$ plyne, že A zachovává množinu

$$\left\{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 | B(x,x) = -1\right\},$$

která má 2 komponenty souvislosti a H_2 je jedna z nich. Bod $(1,0,0)$ patří do H_2 a jeho obraz je

$$A(1,0,0)^T = (a_{00}, a_{11}, a_{22}),$$

který patří do H_2, právě když $a_{00} > 0$. □

Lemma 4.24

Poincarého disk U a horní polorovina H_+ jsou isomorfní Riemannovy plochy.

Důkaz

Hledané zobrazení je tzv. Möbiova transformace?

$$\Phi(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

□

Tvrzení 4.25

Lineární lomené transformace $\Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, *kde* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$ *jsou isometrie* H_+ *na* H_+.

Důkaz
Grupa těchto transformací je generována „správnými" translacemi, dilatacemi a kruhovou inverzí a u těch se snadno ověří, že jsou isometrie. □

Lemma 4.26

Nechť $x \in \mathbb{R}$ *a* $0 < y_1 < y_2$. *Křivka* $c(t) = (x, t)$ *má nejkratší délku mezi všemi křivkami spojující body* (x, y_1) *a* (x, y_2).

Důkaz
Délka vektoru $c'(t)$ ve skalárním součinu $g^{(H_+)}$ je rovna $\frac{1}{y}$, tedy délka $l(c) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} = \ln \frac{y_2}{y_1}$.

Nechť $d(t) = (d_1(t), d_2(t))$, $t \in \langle a, b\rangle$ je křivka v H_+, pro kterou platí $d(a) = (x, y_1)$, $d(b) = (x, y_2)$, pak napíšeme její délku, zmenšíme o druhou souřadnici a dostaneme to samé jako výše. □

Věta 4.27

Isometrie Φ *převádí přímky v* U *na přímky v* H_2. *Každé dva body na hyperboloidu určují úsečku, která je spojuje. Její délka je menší nebo rovna délce libovolné křivky, která tyto dva body spojuje.*

Důkaz
? □

Věta 4.28

Plocha $|\triangle|$ *hyperbolického trojúhelníku* $\triangle$ *s úhly* α, β, γ *je roven*

$$|\triangle| = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Důkaz
Nejdříve (integrací, pomocí Fubiniovy věty) spočítáme povrch trojúhelníka s C v nekonečnu, potom ostatní zobrazíme na takovéto trojúhelníky. □

Lemma 4.29

Grupa G *působí transitivně na hyperboloidu* H_2. *Grupa* G *působí transitivněna množině všech přímek v* H_2.

Důkaz
TODO? □

Věta 4.30 (Kosinová, Sinová)

Předpokládejme, že △ je trojúhelník v hyperbolické geometrii s úhly α, β, γ a stranami a, b, c. Pak

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma,$$

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}.$$

Důkaz
TODO. □