Poznámka (Úmluva)
Všechny topologické prostory v tomto semestru budou Hausdorffovy (T_2). Tedy regulární jsou automaticky T_3, úplně regulární jsou automaticky T_π a normální jsou T_4.

Speciálně např. kompaktní prostory jsou T_4.

1 Parakompaktní prostory

Poznámka (Připomenutí)
Pokrytí, otevřené pokrytí, podpokrytí.

Definice 1.1 (Zjemnění)

Ať X je množina a $\mathcal{S}$ je pokrytí X. Řekneme, že systém $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(X)$ je zjemnění $\mathcal{S}$, pokud $\mathcal{T}$ je pokrytí a $\forall T \in \mathcal{T}\ \exists S \in \mathcal{S} : T \subseteq S$.

Definice 1.2 (Lokálně konečný systém)

Ať $\mathbb{X}$ je TP, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$. $\mathcal{S}$ se nazývá lokálně konečný, pokud

$$\forall x \in \mathbb{X}\ \exists U \in \mathcal{U}(x) : \{S \in \mathcal{S} | S \cap U \neq \emptyset\} \text{ je konečná.}$$

Systém $\mathcal{S}$ se nazve diskrétní, pokud

$$\forall x \in \mathbb{X}\ \exists U \in \mathcal{U}(x) : |\{S \in \mathcal{S} | S \cap U \neq \emptyset\}| \leq 1.$$

Systém $\mathcal{S}$ se nazve σ-lokálně konečný (resp. σ-diskrétní), pokud $\exists S_n$, že $= \bigcup_{n=1}^{\infty}$, že $\mathcal{S}_n$ jsou lokálně konečné (resp. diskrétní), $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka
Diskrétní systém je lokálně konečný. σ-diskrétní systém je σ-lokálně konečný.

Lemma 1.1 (Uzávěr lokálně konečného prostoru)

Ať $\mathbb{X}$ je TP, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ lokálně konečný systém. Pak $\left\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\right\}$ je opět lokálně konečný a platí $\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \left\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\right\}$.

Důkaz
Ať $x \in \mathbb{X}$ je libovolné. Existuje $U \in \mathcal{U}(x) : \{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$ je konečná. Ať $V = \int U, V \in \mathcal{U}(x)$. $\{A \in \mathcal{A} : A \cap V \neq \emptyset\}$ je zřejmě konečná. $V \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow V \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Tedy $\left\{A \in \mathcal{A} : \overline{A} \cap V \neq \emptyset\right\} = \{A \in \mathcal{A} : A \cap V \neq \emptyset\}$. Tedy $\left\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\right\}$ je konečná.

$\supseteq$: $\bigcup \mathcal{A} \supseteq A, A \in \mathcal{A}$, tedy $\overline{\bigcup \mathcal{A}} \supseteq \overline{A} \implies \overline{\bigcup \mathcal{A}} \supseteq \bigcup \left\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\right\}$.

$\subseteq$: Ať $x \in \overline{\bigcup \mathcal{A}}$. $\exists U \in \mathcal{U}(x)$ otevřená, že $\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq 0\} = \{A_1, \ldots, A_n\}$. $x \in \overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} \overset{\text{konečné}}{=} \overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$. $\exists i \leq n : x \in \overline{A_i}$. □

Definice 1.3 (Parakompaktní)

TP $\mathbb{X}$ se nazývá parakompaktní, pokud každé jeho otevřené pokrytí má lokálně konečné otevřené zjemnění.

Poznámka
Kompaktní $\implies$ parakompaktní (protože podpokrytí je zjemnění a konečné je lokálně konečné).

Diskrétní TP $\implies$ parakompaktní.

Tvrzení 1.2

Uzavřený podprostor parakompaktního TP je parakompaktní.

Důkaz
$\mathbb{X}$ je parakompaktní TP a $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená. Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí F (otevřenými množinami v F). Z definice podprostoru $\forall U \in \mathcal{U}\ \exists V_U$ otevřená v $\mathbb{X} : U = F \cap V_U$. Uvažujme $\mathcal{V} = \{V_U | U \in \mathcal{U}\} \cup \{F \setminus F\}$. $\mathcal{V}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Existuje otevřené lokálně konečné zjemnění $\mathcal{W}$ tohoto $\mathcal{V}$. $\{F \cap W | W \in \mathcal{W}\}$ je otevřené pokrytí F a zároveň lokálně konečné. Navíc je to i zjemnění $\mathcal{U}$. □

Věta 1.3 (Charakterizace parakompaktnosti)

Pro regulární TP $\mathbb{X}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

a) $\mathbb{X}$ je parakompaktní.

b) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má otevřené σ-lokálně konečné zjemnění.

c) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má lokálně konečné zjemnění (libovolnými množinami).

d) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má uzavřené lokálně konečné zjemnění.

Důkaz
a) $\implies$ *b)* : každé lokálně konečné zjemnění je σ-lokálně konečné.

b) $\implies$ *c)* : Ať $\mathbb{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Podle b) existuje otevřené zjemnění $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, $\mathcal{V}_n$ lokálně konečný systém. $W_n := \bigcup \mathcal{V}_n$ je otevřené $\{W_n | n \in \mathbb{N}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Ať $A_n := W_n \setminus \bigcup_{i<n} W_i$. $\{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ je lokálně konečné pokrytí $\mathbb{X}$ (každé $x \in \mathbb{X}$ je v nějakém W_n, takže už není ve větších A_n). $\{A_n \cap V | n \in \mathbb{N}, V \in \mathcal{V}_n\}$ je lokálně konečné zjemnění $\mathcal{U}$.

c) $\implies$ *d)* : Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Pro každé $x \in \mathbb{X}$ existuje $U_x \in U : x \in U_x$. Nyní máme bod v otevřené množině, tedy z regularity existují otevřené množiny $V_x \subseteq \mathbb{X} : x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$. $\mathcal{V} := \{V_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. $\mathcal{V}$ má lokálně konečné zjemnění $\mathcal{W}$ podle *c)*. $\left\{\overline{W} | W \in \mathcal{W}\right\}$ je lokálně konečný systém podle lemmatu „Uzávěr lokálně konečného systému“. Navíc je i pokrytí a zjemňuje $\mathcal{U}$.

d) $\implies$ *a)* Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Z d) existuje lokálně konečné uzavřené zjemnění $\mathcal{V}$. Pro $x \in \mathbb{X}$ existuje W_x otevřené okolí x protínající jen konečně mnoho prvků z $\mathcal{V}$. $\mathcal{W} := \{W_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Z d) existuje lokálně konečné uzavřené zjemnění $\mathcal{A}$ toho $\mathcal{W}$. Pro $V \in \mathcal{V}$ označíme $V^* := \mathbb{X} \setminus \bigcup \{A \in \mathcal{A} | A \cap V = \emptyset\}$. Zřejmě $V^* \supseteq V$. Tedy $\{V^* | V \in \mathcal{V}\}$ je otevřené (odčítáme uzavřenou množinu, neboť A jsou uzavřené a množina je lokálně konečná, tedy podle lemmatu … je uzavřené i sjednocení) pokrytí.

Ať $x \in \mathbb{X}$. $\exists U$ okolí x, které protíná jen konečně prvků $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Zřejmě $U \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Každé A_i je podmnožinou nějakého W_y, tj. (podle volby W_y) A_i protíná jen konečně mnoho prvků z $\mathcal{V}$. Navíc je-li $V \in \mathcal{V}$ a $A \in \mathcal{A}$, že $A \cap V = \emptyset$, pak $A \cap V^* = \emptyset$. Tedy každé A_i protíná pouze konečně mnoho prvků V^*, $V \in @V$. Pro každé $V \in @V$ fixujeme $U_v \in \mathcal{U} : V \subseteq U_V$. Zřejmě $V \subseteq U_V \cap V^*$. Pak $\{U_V \cap V^* | V \in \mathcal{V}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$, které je lokálně konečné a které je zjemnění $\mathcal{U}$. □

Důsledek
Každý Lindelöfův regulární prostor je parakompaktní.

Důkaz
Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Z lindolöfovosti existuje spočetné pokrytí $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. $\mathcal{V}$ je σ-lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{U}$. Tedy platí b) z minulé věty. □

Definice 1.4 (Skrčení)

Ať X je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (pokrytí X). Indexovaný systém $\{T_S : S \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se nazývá skrčení systému $\mathcal{S}$, pokud (je to pokrytí) a $T_S \subseteq S, S \in \mathcal{S}$.

Poznámka (Nadmutí)
Skrčení je speciální případ zjemnění.

Podobně jako skrčení lze definovat pojem nadmutí.

Lemma 1.4 (O skrčení)

Ať $\mathbb{X}$ je normální TP. Pak každé lokálně konečné (stačí bodově konečné) otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má uzavřené skrčení, jehož vnitřky tvoří pokrytí.

Důkaz
Ať $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \varkappa\}$, $\varkappa$ kardinál, $\mathcal{U}$ je lokálně kompaktní, otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Nyní $F_0 := \mathbb{X} \setminus \bigcup\{U_\alpha : 0 < \alpha < \varkappa\}$ uzavřená, $F_0 \subseteq U_0$ (z toho, že $\mathcal{U}$ je pokrytí). Z normality existuje otevřená $V_0 \subseteq \mathbb{X} : F_0 \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq U_0$.

Nyní indukcí: Nechť máme zkonstruované $V_\beta : \forall \beta < \alpha < \varkappa$. Označíme $F_\alpha := \mathbb{X} \setminus (\bigcup\{V_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup\{U_\gamma : \alpha < \gamma < \varkappa\})$. Z normality zas $V_\alpha \subseteq \mathbb{X} : F_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$.

$\mathcal{V} = \left\{\overline{V_\alpha} : \alpha < \varkappa\right\}$ je skrčení $\mathcal{U}$, $\operatorname{int} \overline{V_\alpha} \supseteq V_\alpha$ a $\bigcup_{\alpha<\varkappa} V_\alpha = \mathbb{X}$, tedy $\bigcup_{\alpha<\varkappa} \operatorname{int} \overline{V_\alpha} = \mathbb{X}$. $\square$

Definice 1.5 (Kolektivně normální)

TP $\mathbb{X}$ se nazývá kolektivně normální, pokud pro každý diskrétní systém $\mathcal{F}$ z uzavřených množin existuje disjunktní systém otevřených množin $\{U(F) : F \in \mathcal{F}\}$, že $F \subseteq U(F), F \in \mathcal{F}$ (tj. otevřené nadmutí).

Poznámka
Každý kolektivně normální prostor je normální.

Tvrzení 1.5

Každý parakompaktní prostor už je kolektivně normální, tedy i normální.

Důkaz
Ukážeme nejprve, že $\mathbb{X}$ je regulární. Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Pro $y \in F$ existuje otevřené okolí U_y bodu y, že $x \notin \overline{U_y}$. $\mathcal{U} := \{U_y : y \in F\} \cup \{\mathbb{X} \setminus F\}$ otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Ať $\mathcal{V}$ je lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{U}$. $G := \bigcup\{V \in \mathcal{V} : V \cap F \neq \emptyset\}$. Z lemmatu $\overline{G} = \bigcup\left\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}, V \cup F \neq \emptyset\right\} \not\ni x$. $G \supset F$, G otevřená. Tedy $\mathbb{X}$ je regulární.

Ať $\mathcal{F}$ je diskrétní soubor z uzavřených množin. Pro $F \in \mathcal{F}$ uvážíme $\bigcup\{H \in \mathcal{F} : H \neq F\}$ … uzavřená z lemmatu o uzávěru sjednocení lokálně kompaktního systému. Pro $x \in F$ existuje (z první části důkazu) U_x otevřená, že $x \in U_x$, $\overline{U_x} \cap H = \emptyset$ pro $H \neq F, H \in \mathcal{F}$. $\{U_x : x \in F \in \mathcal{F}\} \cup \{\mathbb{X} \setminus \bigcup F\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Ať $\mathcal{V}$ je otevřené lokálně konečné zjemnění. Pro $F \in \mathcal{F} : V(F) := \{V \in \mathcal{V} : V \cup F \neq \emptyset\} \setminus \bigcup\left\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}, V \cap H \neq \emptyset \text{ pro nějaké } H \in \mathcal{F}, H\right.$ Platí $F \subseteq V(F)$. Pro $F, F' \in \mathcal{F}, F \neq F' \implies V(F) \cap V(F') = \emptyset$. $\{V(F) : F \in \mathcal{F}\}$ je disjunktní otevřené nadmutí $\mathcal{F}$. $\square$

Definice 1.6 (Hvězda)

Ať $\mathbb{X}$ je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$, $x \in \mathbb{X}$, $A \subseteq \mathbb{X}$.

Hvězda bodu x vzhledem k $\mathcal{S}$ je $\mathrm{st}(x, \mathcal{S}) = \bigcup\{S \in \mathcal{S} : x \in S\}$.

Hvězda množiny A vzhledem k @S je $\mathrm{st}(A, \mathcal{S}) = \bigcup_{x \in A} \mathrm{st}(x, \mathcal{S})$.

Definice 1.7 (Barycentrické a hvězdovité zjemnění)

Ať $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou pokrytí $\mathbb{X}$. Řekneme, že $\mathcal{U}$ barycentricky zjemňuje $\mathcal{V}$, pokud $\{\mathrm{st}(x,\mathcal{U}) : x \in \mathbb{X}\}$ zjemňuje $\mathcal{V}$.

Řekneme, že $\mathcal{U}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{V}$, pokud $\{\mathrm{st}(U,\mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$ zjemňuje $\mathcal{V}$.

Například
Ať $(\mathbb{X}, \varrho)$ je MP. Ať $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou pokrytí $\mathbb{X}$ tvořená po řadě všemi $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon$ koulemi ($\varepsilon > 0$ pevné). Pak $\mathcal{U}$ zjemňuje barycentricky $\mathcal{V}$ a hvězdovitě $\mathcal{W}$.

Lemma 1.6 (Dvojité barycentrické zjemnění je hvězdovité)

Ať X je množina, $\mathcal{U}$ pokrytí $\mathcal{X}$, $\mathcal{V}$ barycentrické zjemnění $\mathcal{U}$ a $\mathcal{W}$ barycentrické zjemnění $\mathcal{V}$. Potom $\mathcal{W}$ je hvězdovité zjemnění $\mathcal{U}$.

Důkaz
Mějme $W \in \mathcal{W}$ libovolně. Chceme najít $U \in \mathcal{U} : \mathrm{st}(W, \mathcal{W}) \subseteq U$. $W = \emptyset$ triviální. $W \neq \emptyset :$ Fixujeme $x_0 \in W$. Pro každé $x \in \mathbb{X}$ existuje $V_x \in \mathcal{V}$: $\mathrm{st}(x, \mathcal{W}) \subseteq V_x$. Nyní

$$\mathrm{st}(W, \mathcal{W}) = \bigcup\{T \in \mathcal{W} : T \cap W \neq \emptyset\} = \bigcup\{\{T \in \mathcal{W} | x \in T\} \,| x \in W\} = \bigcup\{\mathrm{st}(x, \mathcal{W}) | x \in W\} \subseteq \bigcup\{V$$

protože $W \subseteq V_x$ pro každé $x \in W$. $\mathcal{V}$ barycentricky zjemňuje $\mathcal{U}$, tedy existuje $u \in \mathcal{U}$: $\mathrm{st}(x_0, \mathcal{V}) \subseteq U$. $\square$

Věta 1.7 (Charakterizace parakompaktnosti pomocí hvězdovitých zjemnění)

Pro TP $\mathbb{X}$ je ekvivalentní:

a) $\mathbb{X}$ je parakompaktní.

b) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má barycentrické zjemnění.

c) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má hvězdovité zjemnění.

d) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má otevřené σ-diskrétní zjemnění a $\mathbb{X}$ je regulární.

Důkaz
a) $\implies$ *b)* Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Z a) vyplývá, že existuje jeho lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{V}$. Víme, že $\mathbb{X}$ je parakompaktní, tedy normální. Z lemmatu o skrčení existuje uzavřené pokrytí $\mathcal{W} = \{W_V | V \in \mathcal{V}\}$, $W_V \subseteq V$. $\mathcal{V}$ je lokálně konečné, tedy i $\mathcal{W}$ je lokálně konečné. Pro $x \in \mathbb{X}$ definujeme $A_x = \bigcap \{V | x \in W_V\}$. Jde o konečný průnik (vzhledem k lokální kompaktnosti), tedy A_x je otevřená. Položme $B_x = \bigcup \{W \in \mathcal{W} | x \notin W\}$. Podle lemmatu o sjednocení lokálně konečného systému je B_x uzavřená. Zřejmě $x \in A_x \setminus B_x =: C_x$ je otevřená. Tedy $\mathcal{C} = \{C_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$.

Ukážeme, že $\mathcal{C}$ barycentricky zjemňuje $\mathcal{U}$: Ať $y \in \mathbb{X}$. Chceme najít $V \in \mathcal{U}$: $\mathrm{st}(y, \mathcal{C}) \subseteq V$. Víme, že existuje $V \in \mathcal{V} : y \in W_V$. Ať $x \in \mathrm{st}(y, \mathcal{C})$. Pak $y \in C_x = A_x \setminus B_x$, tedy $y \notin B_x$, tudíž $x \in W_V \subseteq V$ (kdyby ne, pak $W_V \subseteq B_x$, tedy $y \notin C_x$).

b) $\implies$ *c)* k otevřenému pokrytí můžeme najít barycentrické zjemnění, ke kterému můžeme najít barycentrické zjemnění. Pak c) vyplývá z předchozího lemmatu.

c) $\implies$ *d)* $\mathbb{X}$ je regulární: Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Uvažujme otevřené pokrytí $\{\mathbb{X} \setminus F, \mathbb{X} \setminus x\}$. Podle c) existuje otevřené hvězdovité zjemnění $\mathcal{U}$. $\exists U \in \mathcal{U} : x \in U$. Nutně $U \cap F = \emptyset$. Pak $\overline{U} \subseteq \mathrm{st}(U, \mathcal{U}) \subseteq \mathbb{X} \subseteq \mathbb{X} \setminus F$. Tedy $\mathbb{X}$ je regulární.

Ať $\mathcal{U}_0$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Chceme najít σ-diskrétní zjemnění toho $\mathcal{U}_0$. Použijeme podmínku c) spočetně nekonečněkrát, abychom induktivně našli otevřená pokrytí $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$, že $\mathcal{U}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{U}_n$, $n \geq 0$. Oindexujme prvky $\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 = \{U_i | i \in I\}$. Pro $i \in I$ a pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme $U_{i,n} := \{x \in \mathbb{X} | x$ má okolí $V : \mathrm{st}(V, \mathcal{U}_n) \subseteq U_i\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N} : \{U_{i,n} | i \in I\}$ je otevřené zjemnění $\mathcal{U}$, ale ne nutně pokrytí.

Pomocné tvrzení: Pokud $x \in U_{i,n}, u \notin U_{i,n+1}$, pak neexistuje $U \in \mathcal{U}_{n+1}$, že $x, y \in U$. Důkaz: Pro $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ existuje $W \in \mathcal{U}_n : \mathrm{st}(U, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq W$. Tedy pokud $x \in U \cap U_{i,n}$, pak $W \subseteq \mathrm{st}(x, \mathcal{U}_n) \subseteq U_i$. Pak $\mathrm{st}(U, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq U_i$ a $u \subseteq U_{i,n+1}$. Tedy $y \notin U$, protože $y \notin U_{i,n+1}$.

Uvažme dobré uspořádání $<$ na I. Ať $V_{i_0,n} = U_{i_0,n} \setminus \bigcup \{U_{i,n+1} | i < i_0\}$, $i_0 \in I, n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $** = \{V_{i_0,n} | i_0 \in I, n \in \mathbb{N}\}$ je hledané σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{U}_0$. Pro $i_1 \neq i_2, i_1, i_2 \in I$, pak $i_1 < i_2$ nebo naopak. Podle toho buď $V_{i_2,n} \subseteq \mathbb{X} \setminus U_{i_1,n+1}$ nebo $V_{i_1,n} \subseteq \mathbb{X} \setminus U_{i_2,n+1}$. Podle pomocného tvrzení platí, že pokud $x \in V_{i_1,n}$ a $y \in V_{i_2,n}$, pak neexistuje $U \in \mathcal{U}_{n+1}$, že $x, y \in U$. To nám říká, že $\forall n \in \mathbb{N} : \{V_{i,n} | i \in I\}$ je diskrétní. Zbývá už jen ukázat, že $**$ je pokrytí: Ať $y \in \mathbb{X}$. Existuje $<$-nejmenší $i(y) \in I : y \in U_{i(y),n}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Nyní $y \notin U_{i,n+2}$ pro $i < i(y)$. Podle pomocného tvrzení použitého na $n+1$ platí $\mathrm{st}(y, \mathcal{U}_{n+2}) \cap \bigcup \{U_{i,n+1} | i < i(y)\} = \emptyset$. Tedy $y \in V_{i(y)}, n$.

d) $\implies$ *a)* Víme, že $\mathbb{X}$ je regulární, tedy můžeme aplikovat charakterizaci parakompaktnosti z minulého týdne, jelikož σ-diskrétní $\implies$ σ-lokálně konečný. □

Věta 1.8 (Stone)

Každý metrizovatelný prostor je parakompaktní.

Důkaz
Ukážeme, že každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ má barycentrické zjemnění. Fixujeme na nějakém tom prostoru $\mathbb{X}$ kompatibilní metriku $\varrho \leq 1$. Navíc búno $\mathbb{X} \notin \mathcal{U}$. Pro každé $x \in \mathbb{X}$ a $U \in \mathcal{U}$, že $x \in U$, existuje největší možné $\varepsilon_{x,U} > 0$, že $B(x, 5\varepsilon_{x,U})$. Položíme $\mathcal{V} = \{B(x, \varepsilon_{x,U}) | x \in U \in \mathcal{U}\}$. Ověříme, že $\mathcal{V}$ barycentricky zjemňuje $\mathcal{U}$: Ať $x \in \mathbb{X}$. Chceme najít $U \in \mathcal{U} : \mathrm{st}(x, \mathcal{V}) \subseteq U$. Ať $\varepsilon_x = \sup\{\varepsilon_{x,U} | x \in U \in \mathcal{U}\}$. $0 < \varepsilon_x \leq 1$. Existuje $U \in \mathcal{U} : \varepsilon_{x,U} \geq \frac{\varepsilon_x}{2}$.

Ukážeme, že $\mathrm{st}(x, \mathcal{V}) \subseteq U$. Ať tedy $x \in B(y, \varepsilon_{y,v})$ pro nějaké $y \in V \in \mathcal{U}$. Chceme $B(y, \varepsilon_{y,v}) \subseteq U$. Máme $B(y, 5\varepsilon_{y,v}) \subseteq V$ a zároveň $\varrho(x, y) < \varepsilon_{U,V}$. Z $\triangle$-nerovnosti: $B(x, 4\varepsilon_{y,V}) \subseteq V$. Z maximality $\varepsilon_{x,V} \geq \frac{1}{5} 4\varepsilon_{y,V}$. Také $2\varepsilon_{x,U} > \varepsilon_x \geq \varepsilon_{x,V}$. Dohromady $2\varepsilon_{x,U} > \frac{4}{5}\varepsilon_{y,V}$, tj. $5\varepsilon_{x,U} > 2\varepsilon_{y,V}$. Pro $z \in B(y, \varepsilon_{y,V}) : \varrho(x, z) < 2\varepsilon_{y,V}$, a tedy $\varrho(x, z) < 5\varepsilon_{x,U}$. Proto $z \in U$. Tudíž $B(y, \varepsilon_{y,v}) \subseteq U$. □

Definice 1.8

Pro funkci $f : X \to \mathbb{R}$ značíme $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$.

Věta 1.9 (Rozklad jednotky)

Ať $\mathbb{X}$ je parakompaktní prostor, $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Pak existuje rozklad jednotky podřízený tomuto pokrytí, tj. systém spojitých funkcí $f_i : X \to [0, 1]$, $i \in I$, že $\{\operatorname{supp} f_i : i \in I\}$ je lokálně konečné zjemnění $\mathcal{U}$ a $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1, \forall x \in \mathbb{X}$.

Důkaz
$\mathbb{X}$ parakompaktní, tedy normální. Tedy existuje otevřené pokrytí $\mathcal{W}$ takové, že $\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ zjemňuje $\mathcal{U}$. Ať $\mathcal{V}$ je lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{W}$. Víme, že existuje uzavřené skrčení $\{F_V : V \in \mathcal{V}\}$, $F_V \subseteq V$. Z normality existují spojité funkce $g_V : \mathbb{X} \to [0, 1]$, $g_V|_{F_V} = 1$, $g_V|_{\mathbb{X} \setminus V} = 0$. Položme $g(x) := \sum_{V \in \mathcal{V}} g_V(x)$. Funkce g je spojitá, protože spojitost je lokální pojem a g je lokálně součet konečně mnoha nenulových spojitých funkcí. Navíc zřejmě $g \geq 1$, protože $\{F_V : V \in \mathcal{V}\}$ je pokrytí $\mathbb{X}$. Tedy položme $f_V := \frac{g_V}{g}$. □

Věta 1.10 (Michaelova selekční)

Zdola polospojitá (vícehodnotová) funkce z parakompaktního prostoru do neprázdných uzavřených konvexních podmnožin Banachova prostoru má spojitou selekci.

Věta 1.11 (Dugunjiho)

Ať $\mathbb{X}$ je metrizovatelný a $A \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená. Pak existuje lineární zobrazení $L : C(A, \mathbb{R}) \to C(\mathbb{X}, \mathbb{R})$, že $L(f)$ rozšiřuje f pro $f \in C(A, \mathbb{R})$.

2 Metrizační věty

Poznámka (Opakování)
Uryshonova metrizační věta: Regulární prostor se spočetnou bází je metrizovatelný.

Věta 2.1 (Bing, Nagata, Smirnov)

Pro regulární prostor $\mathbb{X}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

a) $\mathbb{X}$ *je metrizovatelný.*

b) $\mathbb{X}$ *má* σ*-diskrétní bázi.*

c) $\mathbb{X}$ *má* σ*-lokálně konečnou bázi.*

Důkaz
a) $\implies$ *b)*: Ať $\mathcal{B}_n$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ koulemi o poloměru $\frac{1}{n}$. $\mathbb{X}$ je parakompaktní podle Stoneovy věty. Z charakterizace parakompaktnosti máme, že $\mathcal{B}_n$ má σ-diskrétní otevřené zjemnění $\mathcal{V}_n$. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{V}_n$ je opět σ-diskrétní, navíc je to báze.

b) $\implies$ *c)*: triviální.

c) $\implies$ *a)* Ať $B = \bigcup_{n=1}^{\infty}$ je báze $\mathbb{X}$, $\mathcal{B}_n$ lokálně konečný soubor. Uvědomíme si, že $\mathbb{X}$ je parakompaktní: Je-li totiž $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí $\mathbb{X}$, pak $\{B \in \mathcal{B} : \exists U \in \mathcal{U} : B \subseteq U\}$ je zjemnění U a vzhledem k tomu, že B je báze, tak je to i pokrytí. Navíc je σ-lokálně konečné. Tedy z charakterizace parakompaktnosti to máme.

Z parakompaktnosti dostáváme normalitu $\mathbb{X}$. Pro $n, k \in \mathbb{N}$ a $B \in \mathcal{B}_n$ položme $V_{k,n,B} := \bigcup\left\{C \in \mathcal{B}_k : \overline{C} \subseteq B\right\}$. $\mathcal{B}_k$ je lokálně konečný, tedy (z lemmatu o uzávěru lokálně konečného systému) $\overline{V_{k,n,B}} \subseteq B$. Tedy existují (z normality) spojité funkce $f_{k,n,B} : \mathbb{X} \to [0,1]$, $f_{k,n,B}(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{X} \setminus B$ a 1 pro $x \in \overline{V_{k,n,B}}$.

Definujeme $M_{k,n} \subseteq [0,1]^{\mathcal{B}_n}$ následovně $M_{k,n} = \{\varphi : \mathcal{B}_n \to [0,1] : \{B \in \mathcal{B}_n : \varphi(B) \neq 0\}$ je konečná$\}$. Na $M_{k,n}$ uvažme metriku $\varrho_{k,n}\varphi, \psi := \sum_{B\in\mathcal{B}_n} |\varphi(B) - \psi(B)|$. Ať $g_{k,n} : \mathbb{X} \to M_{k,n}$, $g_{k,n} = \triangle_{B\in\mathcal{B}_n} f_{k,n,B}$, $g_{k,n}(x) = (f_{k,n,B}(x))_{B\in\mathcal{B}_n}$.

Ověříme, že $g_{k,n} : \mathbb{X} \to (M_{k,n}, \varrho_{k,n})$ je spojité: Ať $x \in \mathbb{X}$, $\varepsilon > 0$, existuje U okolí x protínající jen konečně prvků $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{B}_n$. $f_{k,n,B_1}, \ldots, f_{k,n,B_m}$ jsou spojitá, tedy existuje $V \subseteq U$ okolí x, že $|f_{k,n,B}(x) - f_{k,n,B_i}(y)| < \frac{\varepsilon}{m}$ pro $i \leq m, y \in V$. Nyní

$$\varrho_{k,n}(g_{k,n}(x), g_{k,n}(y)) = \sum_{i=1}^{m} |g_{k,n}(x)(B_i) - g_{k,n}(y)(V_i)| = \sum |f_{k,n,B}(x) - f_{k,n,B_i}(y)| < m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Pokud systém $\{g_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}\}$ odděluje body a uzavřené množiny, pak $\delta := \triangle_{k,n\in\mathbb{N}} g_{k,n} : \mathbb{X} \to \prod_{k,n\in\mathbb{N}} M_{k,n}$ je vnoření (podle lemmatu o Tichonovově vnoření). Tím jsme vnořili $\mathbb{X}$ do spočetného součinu metrizovatelných prostorů, tedy do metrizovatelného prostoru, tedy $\mathbb{X}$ je metrizovatelné.

$\{g_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}\}$ odděluje body a uzavřené množiny: Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ je uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Existuje $n \in \mathbb{N}$ a $B \in \mathcal{B}_n : x \in B \subseteq X \setminus F$. Z regularity existuje $C \in \mathcal{B}_k, k \in \mathbb{N}$. $g_{k,n}(x)(B) = f_{k,n,B}(x) = 1$ a $g_{k,n}(y)(B) = f_{k,n,B}(y) = 0$ pro $y \in \mathbb{X} \setminus B \supseteq F$. □

Definice 2.1

Ať $\mathbb{X}$ je TP. Posloupnost otevřených pokrytí $\mathcal{V}_n$ prostoru $\mathbb{X}$ se nazývá development, pokud pro každé $x \in \mathbb{X} : \{\mathrm{st}(x, \mathcal{V}_n) | n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí v bodě x.

Poznámka
Je-li (X, ϱ) MP, pak $\mathcal{V}_n := \left\{B(x, \frac{1}{n}) : x \in \mathbb{X}\right\}, n \in \mathbb{N}$ je development $\mathbb{X}$.

Věta 2.2 (Bing)

TP $\mathbb{X}$ je metrizovatelný $\Leftrightarrow$ je kolektivně normální a má development.

Důkaz

$\Longrightarrow$: metrizovatelný $\Longrightarrow$ má development (podle předchozí poznámky) a metrizovatelný $\Longrightarrow$ parakompaktní $\Longrightarrow$ kolektivně normální.

$\Longleftarrow$: Dokážeme ve 4 částech:

1. Pro diskrétní soubor $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uzavřených množin v $\mathbb{X}$ existuje diskrétní soubor otevřených množin $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$, že $F_\alpha \subseteq W_\alpha$: Dle kolektivní normality existují otevřené disjunktní $U_\alpha : \alpha \in A, F_\alpha \subseteq U_\alpha$. Položme $F = \bigcup \mathcal{F}$, $Z = \mathbb{X} \setminus \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. F uzavřená (sjednocení lokálního systému uzavřených množin), Z uzavřená. $\mathbb{X}$ je kolektivně normální, tedy speciálně normální, tedy existují otevřené disjunktní V, W, že $Z \subseteq V$ a $F \subseteq W$. Položme $W_\alpha := U_\alpha \cap W$. Systém $\{W_\alpha\}$ už je diskrétní (je-li $x \in Z$, pak $x \in V$ a $V \cap W_\alpha = \emptyset$, je-li naopak x v U_α, pak $U_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$ pro $\beta \neq \alpha$) a $F_\alpha \subseteq W_\alpha$.

2. Ať $\mathcal{V}_n$ je development prostoru $\mathbb{X}$. Buď $\varkappa \geq \omega$ a očíslujme $\mathcal{V}_n = \{V_{\alpha,n} | \alpha < \varkappa\}$ (s případným opakováním prvků). Položme $D_{\alpha,n,k} = \{x \in V_{\alpha,n} | \operatorname{st}(x, V_k) \subseteq V_{\alpha,n}\}$ a $C_{\alpha,n,k} = D_{\alpha,n,k} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} V_{\beta,n}$. $D_{\alpha,n,k}$ (a tudíž i $C_{\alpha,n,k}$) je uzavřená:

Volme $x \in \overline{D_{\alpha,n,k}}$. Pak pro libovolné $V \in \mathcal{V}_k$, že $x \in V$ platí, že existuje $y \in V \cap D_{\alpha,n,k}$. Pak $V \subseteq \operatorname{st}(y, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$. Tedy $\operatorname{st}(x, \mathcal{V}_k) = \bigcup\{V \in \mathcal{V}_k | x \in V\} \subseteq V_{\alpha,n}$. Tedy $x \in D_{\alpha,n,k}$, tudíž $D_{\alpha,n,k}$ je uzavřená.

3. Pro pevná $n, k \in \mathbb{N}$ je $\{C_{\alpha,n,k} | \alpha < \varkappa\}$ diskrétní: Buď $y \in \mathbb{X}$ libovolné. Pak existuje nejmenší $\beta < \varkappa : y \in V_{\beta,n}$. Najděme $V \in \mathcal{V}_k : y \in V$. Pro $\alpha > \beta : V_{\beta,n}$ je disjunktní s $C_{\alpha,n,k}$ a pro $\alpha < \beta : V$ je disjunktní s $C_{\alpha,n,k}$ (kdyby existovalo $z \in V \cap C_{\alpha,n,k}$ pak $\operatorname{st}(z, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$, speciálně $y \in V_{\alpha,n}$, což je spor s minimalitou β). Tedy $V \cap V_{\beta,n}$ je okolí bodu y, které protíná nejvýše jeden prvek systému $\{c_{\alpha,n,k} | \alpha \in A\}$ (a sice prvek $C_{\beta,n,k}$).

4. $\{C_{\alpha,n,k}\}$ je diskrétní soubor uzavřených množin (podle 2, 3). Podle 1 existuje diskrétní soubor otevřených nadmnožin $\{V_{\alpha,n,k} | \alpha < \varkappa\}$. Tedy $\mathcal{V}_{n,k} := \{V_{\alpha,n,k} \cap V_{\alpha,n} | \alpha < \varkappa\}$ je diskrétní (zmenšili jsme jeho množiny). Ukážeme, že $\mathcal{V} := \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_{n,k}$ je báze $\mathbb{X}$:

Ať $U \subseteq \mathbb{X}$ je otevřená, $x \in U$. $\exists n \in \mathbb{N} : \operatorname{st}(x, \mathcal{V}_n) \subseteq U$. Najdeme α nejmenší možné, že $x \in V_{\alpha,n}$. Zřejmě $V_{\alpha,n} \subseteq U$. Opět z vlastností developmentu existuje $k \in \mathbb{N} : \operatorname{st}(x, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$. Nyní $x \in C_{\alpha,n,k}$, tedy $x \in V_{\alpha,n,k} \cap V_{\alpha,n} \subseteq U$. Tudíž $\mathcal{V}$ je báze $\mathbb{X}$.

$\mathcal{V}$ je σ-diskrétní báze $\mathbb{X}$, tedy podle metrizační věty Bing-Nagata-Smirnov je $\mathbb{X}$ metrizovatelný. $\square$

3 Uniformní prostory

Poznámka
Zavedeno např. díky tomu, že stejnoměrnou spojitost nelze charakterizovat pomocí topologie.

Matematici Weil(1936), Tukey(1940) ... prvotní zkoumání UP.

Definice 3.1 (Značení)

Pro množinu $\mathbb{X}$ značíme $\triangle(X) = \{(x, x) | x \in X\}$.

Pro $E \subseteq X \times X$ značíme $E^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in E\}$.

Pro $C, D \in X \times X$ značíme $C \circ D = \{(x, z) \in X \times X | \exists y \in X : (x, y) \in C \wedge (y, z) \in D\}$.

$E[x] = \{y \in X | (x, y) \in E\}$.

Definice 3.2 (Uniformní prostor (UP))

Dvojice $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá uniformní prostor (UP), pokud $\mathbb{X}$ je množina a $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X \times X), \mathcal{D} \neq 0$ splňující

1. $\forall D \in \mathcal{D} : \triangle(\mathbb{X}) \subseteq D$,
2. $\forall C, D \in \mathcal{D} : C \cap D \in \mathcal{D}$,
3. $\forall D \in \mathcal{D}\ \exists C \in \mathcal{D} : C \circ C \subseteq D$,
4. $\forall D \in \mathcal{D} : D^{-1} \in \mathcal{D}$,
5. $\forall D \in \mathcal{D}\ \forall E \subseteq X \times X : D \subseteq E \implies E \in \mathcal{D}$,
6. $\forall x, y \in X : x \neq y \implies \exists D \in \mathcal{D} : (x, y) \notin D$. ($\Leftrightarrow \bigcap \mathcal{D} = \triangle(\mathbb{X})$.)

Prvky systému $\mathcal{D}$ nazýváme okolí diagonály.

Definice 3.3 (Báze uniformity)

Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}^2)$ se nazývá báze uniformity (resp. báze uniformity $\mathcal{D}$), pokud uzavřením $\mathcal{B}$ na nadmnožiny dostaneme $\mathcal{D}$.

Definice 3.4 (Subbáze uniformity)

Systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}^2)$ tvoří subbázi uniformity (resp. uniformity $\mathcal{D}$), pokud uzavřením na konečné průniky dostaneme bázi uniformity (resp. bázi uniformity $\mathcal{D}$).

Definice 3.5 (Uniformní zobrazení)

Jsou-li $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ a $(\mathbb{Y}, \mathcal{E})$ UP, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ se nazývá uniformní (stejnoměrně spojité), pokud $\forall E \in \mathcal{E} : (f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{D}$. ($\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E}\ \exists D \in \mathcal{D} : (f \times f)(D) \subseteq E$.) ($\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E}\ \exists D \in \mathcal{D}\ \forall x, y \in \mathbb{X} : (x, y) \in D \implies (f(x), f(y)) \in E$.)

Definice 3.6 (Uniformní izomorfismus)

Zobrazení f se nazývá uniformní izomorfismus, pokud f je bijekce a f i f^{-1} jsou uniformní.

Lemma 3.1

Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}^2)$ tvoří bázi nějaké uniformity na $\mathbb{X}$, pokud

$$a) \bigcap \mathcal{B} = \triangle(\mathbb{X}),$$

$$b) \forall C, D \in \mathcal{B}\ \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq C \cap D,$$

$$c) \forall D \in \mathcal{B}\ \exists C \in \mathcal{B} : C \circ C \subseteq D,$$

$$d) \forall D \in \mathcal{B}\ \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq D^{-1}.$$

Důkaz

$\mathcal{D} := \{C \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X} | \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq C\}$. Následně ověříme podmínky. □

Tvrzení 3.2 (Vytvoření UP z MP a TP z UP)

Je-li $(\mathbb{X}, \varrho)$ metrický prostor a $D_\varepsilon = \{(x, y) | \varrho(x, y) < \varepsilon\}$, potom $\{D_\varepsilon | \varepsilon > 0\}$ je báze nějaké uniformity na $\mathbb{X}$ – značíme ji $\mathcal{D}_\varrho$. Tato uniformita se nazývá generovaná metrikou ϱ.

Je-li $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ UP, pak systém $\tau_\mathcal{D} = \{A \subseteq X | \forall x \in A\ \exists D \in \mathcal{D} : D[x] \subseteq A\}$ je topologie na $\mathbb{X}$ a pro každé $x \in \mathbb{X}$ tvoří systém $\mathcal{B}(x) := \{D[x] | D \in \mathcal{D}\}$ bázi okolí v bodě x. Topologie $\tau_\mathcal{D}$ se nazývá generovaná uniformitou $\mathcal{D}$.

Pokud místo systému $\mathcal{D}$ použijeme v definici topologie $\tau_\mathcal{D}$ nějakou bázi $\mathcal{D}$, pak dostaneme stejnou topologii. Zároveň také $\tau_{\mathcal{D}_\varrho}$ je systém všech otevřených množin v $(\mathbb{X}, \varrho)$.

Důkaz

Ověříme definice. □

Definice 3.7

UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá metrizovatelný, pokud existuje metrika ϱ na $\mathbb{X}$, že $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\varrho$. TP $(\mathbb{X}, \tau)$ se nazývá metrizovatelný, pokud existuje uniformita $\mathcal{D}$ na $\mathbb{X}$, že $\tau = \tau_\mathcal{D}$

Definice 3.8

Ať $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$, $A \subseteq \mathbb{X}$, pak značíme $\mathrm{st}(A, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} | U \cap A \neq \emptyset\}$. $\mathcal{U}^* = \{\mathrm{st}(U, \mathcal{U}) | U \in \mathcal{U}\}$.

Pro $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ pokrytí $\mathbb{X}$, definujeme jejich společné zjemnění $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{U \cap V | U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$.

Poznámka
Pro $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ pokrytí množiny $\mathbb{X}$: $\mathcal{U}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{V}$, pokud $\mathcal{U}^*$ zjemňuje $\mathcal{V}$.

Definice 3.9

Ať $\mathbb{X}$ je množina, $\mathbf{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$ se nazývá pokrývací uniformita na $\mathbb{X}$, pokud:

- $\forall \mathcal{U} \in \mathbf{U} : \mathcal{U}$ je pokrytí $\mathbb{X}$,
- Je-li $\mathcal{U} \in \mathbf{U}, \mathcal{V}$ pokrytí $\mathbb{X}$ a $\mathcal{U}$ zjemňuje $\mathcal{V}$, pak $\mathcal{V} \in \mathbf{U}$,
- $\forall \mathcal{U} \in \mathbf{U}\ \exists \mathcal{V} \in \mathbf{U} : \mathcal{V}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{U}$,
- $\forall \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathbf{U} : \mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \in \mathbf{U}$,
- $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y\ \exists \mathcal{U} \in \mathbf{U}\ \forall U \in \mathcal{U} : |\{x, y\} \cap U| \leq 1$.

Prvky systému $\mathbf{U}$ se nazývají uniformní pokrytí.

Je-li $\mathbf{U}$ pokrývací uniformita na $\mathbb{X}$, pak položme

$$\mathcal{D}_{\mathbf{U}} := \{D \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X} | \exists \mathcal{U} \in \mathbf{U}\ \forall u \in \mathcal{U} : U \times U \subseteq D\}.$$

Je-li $\mathcal{D}$ (diagonální) uniformita na $\mathbb{X}$, pak položme

$$\mathcal{U}_{\mathcal{D}} := \{\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{X})) | \exists D \in \mathcal{D} : \{D[x] | x \in \mathbb{X}\} \text{ zjemňuje} \mathcal{U}\}.$$

Přiřazení $\mathbf{U} \mapsto \mathcal{D}_{\mathbf{U}}$ a $\mathcal{D} \mapsto \mathbf{U}_{\mathcal{D}}$ jsou navzájem inverzní bijekce systému všech pokrývacích uniformit na $\mathbb{X}$ a systém všech uniformit.

Lemma 3.3 (O pseudometrice)

Ať $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je UP a $D_i \in \mathcal{D}$, $D_i = D_i^{-1}$, $i \in \mathbb{N}_0$, $D_0 = \mathbb{X} \times X$, $D_{i+1} \circ D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$. Pak existuje pseudometrika d na $\mathbb{X}$, že pro každé $i \geq 1$: $\left\{(x, y) : d(x, y) < \frac{1}{2^i}\right\} \subseteq D_i \subseteq \left\{(x, y) | d(x, y) \leq \frac{1}{2^i}\right\}$.

Důkaz
Položme $d(x,y) := \inf\left\{\frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_k}} | x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{X} \wedge (x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j} \wedge x = x_0, y = x_k\right\}$. $d(x,y)$ je pseudometrika na $\mathbb{X}$. $D_i \subseteq \left\{(x,y) | d(x,y) \leq \frac{1}{2^i}\right\}$ vidíme z toho, že pro $(x,y) \in D_i$ zvolíme $k = 1$. Zbývá dokázat $\left\{(x,y) | d(x,y) < \frac{1}{2^i}\right\} \subseteq D_i$. Tedy chceme, že $d(x,y) < \frac{1}{2^i}$, pak $(x,y) \in D_i$, tj. že pro každou posloupnost $x_0, \ldots, x_k$, kde $(x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j}$: pokud $\frac{1}{2^{i_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_k}} < \frac{1}{2^i}$, pak $(x_0, x_k) \in D_i$. To dokážeme indukcí podle k:

Pro $k = 1 : \frac{1}{2^{i_1}} < \frac{1}{2^i}$, tj. $i < i_1$, tedy $(x_0, x_k) \in D_{i_1} \subseteq D_i$. Nyní předpokládejme, že $m > 1$ a pro všechna $k < m$ uvedené tvrzení platí. Uvažme posloupnost $x_0, \ldots, x_m$, že $(x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j}, j = 1, \ldots, m$, a $\frac{1}{2^{i_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^i}$. Zřejmě buď $\frac{1}{2^{i_1}} < \frac{1}{2^{i+1}}$, nebo $\frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Ze symetrie obou případů můžeme BÚNO předpokládat platnost první nerovnosti.

Ať $n \leq m - 1$ je největší takové, že $\frac{1}{2^{i_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_n}} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Pokud $n < m - 1$, pak $\frac{1}{2^{i+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_{n+1}}} \geq \frac{1}{2^{i+1}}$, tedy $\frac{1}{2^{i_{n+1}}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Podle indukčního předpokladu $x_0, n \in D_{i+1}$, $(x_{n+1}, x_m) \in D_{i+1}$. Navíc $\frac{1}{2^{i_{n+1}}} < \frac{1}{2^i}$, tedy $i < i_{n+1}$, $i + 1 \leq i_{n+1}$, $D_{i_{n+1}} \subseteq D_{i+1}$. $(x_0, x_m) = (x_0, x_n) \circ (x_n, x_{n+1}) \circ (x_{n+1}, x_m) \in D_{i+1} \circ D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$.

Pokud $n = m - 1$, pak podle IP $x_0, x_{m-1} \in D_{i+1}$, a jelikož $\frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^i}$, tak $(x_{m-1}, x_m) \in D_{i_m} \subseteq D_{i+1}$. Tedy $(x_0, x_m) \in D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$. □

Věta 3.4 (Metrizovatelnost UP)

UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je metrizovatelný, právě když má spočetnou bázi uniformity.

Důkaz
$(\Longrightarrow)$: Ať d je metrika na $\mathbb{X}$ generující $\mathcal{D}$. Pak $\left\{\left\{(x,y) : d(x,y) < \frac{1}{n}\right\} | n \in \mathbb{N}\right\}$ je báze $\mathcal{D}$.

$(\Longleftarrow)$: Ať $\{C_n | n \in \mathbb{N}\}$ je báze $\mathcal{D}$. Indukcí najdeme posloupnost $D_n \in \mathcal{D}$, že jsou splněny předpoklady předchozího lemmatu. A že $D_i \subseteq C_i$: Předpokládejme, že $D_0, \ldots, D_n$ máme ($D_0 = \mathbb{X} \times \mathbb{X}$), pak víme, že $\exists E : E \circ E \subseteq D_n$, $\exists F : F \circ F \subseteq E$. Tedy $F \circ F \circ F \subseteq D_n$. Ať $D_{n+1} := (F \cap C_{i+1}) \cap (F \cap C_{i+1})^{-1}$. Tedy $D_{n+1} \circ D_{n+1} \circ D_{n+1} \subseteq D_n$, $D_{n+1} \subseteq C_{i+1}$. Tedy podle lemmatu o pseudometrice existuje pseudometrika d na $\mathbb{X}$, že

$$\left\{(x,y) | d(x,y) < \frac{1}{2^i}\right\} \subseteq D_i \subseteq \left\{(x,y) | d(x,y) \leq \frac{1}{2^i}\right\}.$$

Pro $x, y \in \mathbb{X}, x \neq y$ $\exists C \in \mathcal{D} : (x,y) \notin C$. $\exists i \in \mathbb{N} : C_i \subseteq C$. $D_i \subseteq C_i$. $(x,y) \notin D_i$. Tedy $d(x,y) \geq \frac{1}{2^i} > 0$. Tedy d je metrika. d generuje uniformitu $\mathcal{D}$: Tj. pro $\varepsilon > 0$ $\{(x, y | d(x,y) < \varepsilon)\} \in \mathcal{D}$. To platí díky vlastnosti z předchozího lemmatu. A pro $D \in \mathcal{D}$ $\exists \varepsilon > 0 : \{(x,y) | d(x,y) < \varepsilon\} \subseteq D$. $D \in \mathcal{D}$ dané $\exists i \in \mathbb{N} : C_i \subseteq D$, $D_i \subseteq C_i \subseteq D$. $\varepsilon := \frac{1}{2^i}$. To máme také díky vlastnosti z předchozího lemmatu. □

Věta 3.5 (Jemná uniformita)

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP. Všechny otevřené podmnožiny $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ obsahující $\delta(\mathbb{X})$ tvoří bázi nějaké uniformity na $\mathbb{X}$ právě tehdy, když $\mathbb{X}$ je parakompaktní.

Poznámka (Reformulace)
Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP. Všechna otevřená pokrytí $\mathbb{X}$ tvoří bázi nějaké pokrývací uniformity na $\mathbb{X}$, právě když $\mathbb{X}$ je parakompaktní.

Důkaz
Pokud všechna otevřená pokrytí $\mathbb{X}$ tvoří bázi pokrývací uniformity, pak speciálně každé otevřené pokrytí má hvězdovité otevřené zjemnění. Tedy podle charakterizační věty je $\mathbb{X}$ parakompaktní.

Je-li $\mathbb{X}$ parakompaktní, tak podle charakterizační věty má každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ otevřené hvězdovité zjemnění a snadno se ověří, že $\{\mathcal{U}|\mathcal{U}$ je pokrytí $\mathbb{X}$, které je zjemňované nějakým ote
je pokrývací uniformita na $\mathbb{X}$. □

Věta 3.6 (Uniformizovatelnost TP)
TP je uniformizovatelný (tj. generován nějakou uniformitou), právě když je Tichonovův.

Důkaz
Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je generovaný uniformitou $\mathcal{D}$. Buď $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Pak existuje $D \in \mathcal{D} : D[x] \subseteq \mathbb{X} \setminus F$. Ať d je pseudometrika z předchozího lemmatu, kde volíme $D_1 = D$. Pak $\mathrm{B}_d(x, \frac{1}{2}) \subseteq D[x]$. Definujeme $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, $f(y) = d(x, y)$, $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 0$ a f je spojitá. Pro $y \in F : f(y) \geq \frac{1}{2}$. Tedy $\mathbb{X}$ je T_π.

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je Tichonovův. Pak uvažme $\beta\mathbb{X}$. $\beta\mathbb{X}$ je (para)kompaktní. Tedy na $\beta\mathbb{X}$ máme jemnou uniformitu, která generuje topologii na $\beta\mathbb{X}$. Tuto jemnou uniformitu na $\beta\mathbb{X}$ můžeme zúžit na $\mathbb{X}$ a ta již generuje topologii τ. □

3.1 Operace s uniformními prostory

Definice 3.10
Ať $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je UP, $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$. Pak uniformní podprostor $(\mathbb{Y}, \mathcal{D}_\mathbb{Y})$ je definován následovně $\mathcal{D}_\mathbb{Y} := \{D \cap (\mathbb{Y} \times \mathbb{Y}) | D \in \mathcal{D}\}$.

Jsou-li $(\mathbb{X}_i, \mathcal{D}_i)$ UP, pak suma těchto UP je definována jako $(\bigcup \mathbb{X}_i, \{\bigcup D_i | D_i \in \mathcal{D}_i\})$. Součin pak jako $(\prod \mathbb{X}_i | \{\prod D_i | D_i \in \mathcal{D}_i, \mathrm{Fin}(D_i \neq \mathbb{X}_i \times \mathbb{X}_i)\})$. (Tedy jsou různé od identity jen v konečně mnoha případech.)

3.2 Úplnost a totální omezenost

Definice 3.11 (Net)
Net $(x_i)_{i \in I}$ UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá cauchyovský, pokud $\forall D \in \mathcal{D}\ \exists i_0 \in I\ \forall i, j \geq i_0 : (x_i, x_j \in D)$.

Definice 3.12 (Úplný a totálněomezený prostor)

UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá úplný, pokud každý cauchyovský net v $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je konvergentní v $(\mathbb{X}, \tau_{\mathcal{D}})$.

UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá totálně omezený, pokud $\forall E \in \mathcal{D}\ \exists K \subseteq \mathbb{X}$ konečná: $E[K] = \mathbb{X}$.

Poznámka

MP je totálně omezený (úplný) $\Leftrightarrow$ UP jím generovaný je totálně omezený (úplný).

Poznámka

UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je totálně omezený $\Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{D}\ \exists$ konečné pokrytí $U_1, \ldots, U_n$ prostoru $\mathbb{X}$, že $(U_1 \times U_1) \cup \ldots \cup (U_n \times U_n) \subseteq D$.

Věta 3.7

Buď $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ UP. Pak $(\mathbb{X}, \tau_{\mathcal{D}})$ je kompaktní $\Leftrightarrow$ $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je úplný a totálně omezený.

Důkaz

$\Longrightarrow$ Je-li $D \in \mathcal{D}$, pak $\{\operatorname{int} D[x] | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Tedy z kompaktnosti existuje konečné podpokrytí $\{\operatorname{int} D[x_1], \ldots, \operatorname{int} D[x_n]\}$. Tedy pro $K := \{x_1, \ldots, x_n\}$ je $D[K] = \bigcup D[x_i] \supseteq \bigcup \int D[x_i] = \mathbb{X}$.

Ať $(x_i)_{i \in I}$ je cauchyovský net v $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$. Z charakterizace kompaktnosti víme, že $(x_i)_{i \in I}$ má hromadný bod – řekněme x. Ukážeme, že x je limitou netu x_i (tj. x_i konverguje k x). Ať U je okolí x. Pak existuje symetrické $D \in \mathcal{D} : (D \circ D)[x] \subseteq U$. Z cauchyovskosti existuje i_0, že pro $i, j \geq i_0 : (x_i, x_j) \in D$

$\square$

TODO

4 Topologické grupy

Definice 4.1 (Topologická grupa)

$(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$ se nazývá topologická grupa (TG), pokud $(\mathbb{G}, \cdot)$ je grupa, $(\mathbb{G}, \tau)$ je TP a $\cdot : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ je spojité, $^{-1} : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ je spojité.

Pozorování

Ať $\mathbb{G}$ je TG. Pak:

- $^{-1}$ je homeomorfismus.
- $\forall g \in \mathbb{G} : L_g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, $L_g(h) := g \cdot h$ (tzv. levá translace) je homeomorfismus.

($L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$.)

- $\forall x, y \in \mathbb{G}\ \exists h : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ homeomorfismus: $h(x) = y$. ($L_{yx^{-1}}(x) = y$.)
- $\forall U$ okolí e $\exists V$ okolí e: $V \cdot V^{-1} := \{u \cdot v^{-1} | u \in V, v \in V\} \subseteq U$.
- Pro U otevřenou v $\mathbb{G}$ a $M \subseteq \mathbb{G}$ libovolnou $M \cdot U$ je otevřené.
- Uzávěr podgrupy $H \leq \mathbb{G}$ je opět grupa.
- Uzávěr normální (algebraicky) podgrupy je normální (algebraicky) podgrupa.
- Je-li H podgrupa $\mathbb{G}$ s neprázdným vnitřkem, pak je obojetná.
- Součin TG se součinovou topologií a operací po složkách je TG.

Tvrzení 4.1 (Uniformita na TG)

Ať $\mathbb{G}$ je TG. Pak systém $\{D_U | U$ je okolí $e\}$, kde $D_U = \{(x, y) | x \cdot y^{-1} \in U\}$, je bází nějaké uniformity na $\mathbb{G}$. (Tzv. pravá uniformita na $\mathbb{G}$). Tato uniformita je kompatibilní s topologií $\mathbb{G}$.

Důkaz

$\delta(G) \subseteq D_u$. Ať U je okolí e. Chceme najít $\mathbf{V}$ okolí $e : D_V \circ D_V \subseteq D_U$. Uvažme spojité zobrazení $(x, y) \mapsto x \cdot y$, $x, y \in \mathbb{G}$. $(e, e) \to e$.

Tedy existuje V okolí e: $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \subseteq U$. Nyní $D_V \circ D_V \subseteq D_u$: Ať $(a, b) \in D_V \circ D_V$. Pak existuje $c \in G : (a, c) \in D_V$, $(c, b \in D_V)$. $a \cdot c^{-1} \in V$ a $cb^{-1} \in V$, tedy $a \cdot c^{-1} \cdot c \cdot b^{-1} \in V \cdot V \subseteq U$. $a \cdot b^{-1} \in U$. $(a, b) \in D_U$. Pro V, W okolí e: $D_V \cap D_W \supseteq D_{V \cap W}$. Tedy $\{D_U | U$ okolí $e\}$ tvoří bázi uniformity.

Tato uniformita je kompatibilní s původní topologií na $\mathbb{G}$: Ať V okolí e, $x \in \mathbb{G}$. $D_V[x] = \{y \in \mathbb{G} | xy^{-1} \in V\} = \{y \in \mathbb{G} | y \in V^{-1} \cdot x\}$ $i = V^{-1} \cdot x$ je okolí x. □

Věta 4.2

Každá TG je Tichonovova.

Důkaz

Ať $(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$ je TG. Ať $\mathcal{D}$ je pravá uniformita na $(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$. Víme, že $(\mathbb{G}, \tau_{\mathcal{D}})$ je Tichonovův. Předchozí tvrzení dává, že $\tau_{\mathcal{D}} = \tau$. □

Věta 4.3 (Metrizovatelnost TG)

TG je metrizovatelná, právě když má spočetný charakter.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Triviální (každý met. prostor má spočetný charakter). $\Longleftarrow$: Ať $(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$ má spočetný charakter. Ať $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí v e. $D_n := \{(x, y) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G} | xy^{-1} \in U_n\}$, $\{D_n | n \in \mathbb{N}\}$ je báze pravé uniformity $\mathcal{D}$. Tedy $\mathcal{D}$ má spočetnou bázi. Tedy $(\mathbb{G}, \mathcal{D})$ je metrizovatelný, tedy $(\mathcal{G}, \tau)$ je metrizovatelný. $\square$

Poznámka (Informativně)
Věta (Birkhoff Kahutani): Každá metrizovatelná grupa má zleva (zprava) invariantní metriku, tj. metrika ϱ, že $\varrho(x, y) = \varrho(c \cdot x, c \cdot y)$, $\forall c, x, y \in \mathbb{G}$.

Tvrzení 4.4 (Spojitost homomorfismu)

Ať $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ jsou TG. $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ je homomorfismus grup. f je spojité $\Leftrightarrow$ f je spojité v $e \in \mathbb{G}$.

Důkaz

$\Longrightarrow$: zřejmě. $\Longleftarrow$: Ať $x \in \mathbb{G}$, $(x_i)_{i \in I}$ je net v $\mathbb{G}$, který konverguje k x. Chceme, že $(f(x_i))_{i \in I}$ konverguje k $f(x)$ v $\mathbb{H}$. $(x_i \cdot x^{-1})_{i \in I}$ je net v $\mathbb{G}$, konverguje k $x \cdot x^{-1} = e \in \mathbb{G}$. f spojité v e, tedy $f(x_i \cdot x^{-1})$ konverguje k $f(e) = e \in \mathbb{H}$. Tudíž $f(x_i) \cdot (f(x))^{-1} \to e \in \mathbb{H}$. Tudíž (po vynásobení $f(x)$) $f(x_i) \to f(x)$. Tedy f spojité v x. $x \in \mathbb{G}$ libovolné. Tedy f je spojité. $\square$

Věta 4.5 (Faktor TG)

Buď N uzavřená normální podgrupa TG $\mathbb{G}$. Pak faktogrupa $\mathbb{G}/N$ s kvocientovou topologií je TG a přirozená projekce (= kvocientové zobrazení) $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/N$, $\pi(g) := g \cdot N$, je spojitý a otevřený homeomorfismus.

Důkaz

Víme: π je spojitý homeomorfismus. π je otevřené: je-li $U \subseteq \mathbb{G}$ otevřené, pak $\pi(U) = \{xN : x \in U\} \subseteq G/N$, $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cdot N$ je otevřením. Tedy z definice kvocientové topologie je $\pi(U)$ otevřená množina.

$\mathbb{G}/N$ je TG: Násobení je spojité: $f : \mathbb{G} \times G \to \mathbb{G}/N$, $f(g, h) := g \cdot h \cdot N$ je spojité, jelikož je to složení součinu a kvocientového zobrazení. Poznamenejme, že můžeme přirozeně identifikovat $\mathbb{G} \times \mathbb{G}/N \times N$ a $(\mathbb{G}/N) \times (\mathbb{G}/N)$. Operace součinu na G/N je kvocientem spojitého zobrazení f. Tedy je také spojité podle charakterizace spojitosti a projektivně vytvořeného prostoru.

Spojitost $^{-1}$ se ukáže obdobně.

Zbývá ověřit, že $\mathbb{G}/N$ je Hausdorffův. Stačí ověřit, že je T_1. N je uzavřená, tedy $G \setminus N$ je otevřená. $\pi^{-1}(G/N \setminus \{N\}) = \mathbb{G} \setminus N$ je otevřená. Tedy z definice kvocientové topologie $G/N \setminus \{N\}$ je otevřená v G/N, ... $\square$

Tvrzení 4.6 (O homomorfismu)

Ať $\mathbb{G}, \mathbb{H}$ jsou TG a $f : G \to H$ spojitý homomorfismus. Pak $N := f^{-1}(e)$ je normální (uzavřená) podgrupa G a existuje spojitý homomorfismus $\overline{f} : G/N \to H$, že $\overline{f}\pi = f$ (kde $\pi : G \to G/N$ je přirozená projekce).

Poznámka
$\overline{f}$ nemusí být vnoření topologických prostorů.

Důkaz
Bez důkazu. □

Tvrzení 4.7 (O izomorfismu)

Ať $\mathbb{G}$ je TG, $K \subseteq H$ její uzavřené normální podgrupy. Pak H/K je uzavřenou normální podgrupou G/K a $(G/K)/(H/K)$ je izomorfně homeomorfní s G/H.

Důkaz
Bez důkazu. □

5 Souvislé prostory

Definice 5.1

TP se nazývá souvislý, pokud je neprázdný a nelze ho vyjádřit jako sjednocení dvou disjunktních otevřených neprázdných množin. (Tj. obsahuje právě dvě obojetné množiny, sám sebe a prázdný prostor.)

Tvrzení 5.1

Pro neprázdný TP $\mathbb{X}$ je ekvivalentní: a) $\mathbb{X}$ je souvislý, b) Je-li $\mathbb{X} = A \cup B$ a $\overline{A} \cap B = \emptyset = \overline{B} \cap A$, pak $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$. c) $\mathbb{X}$ neobsahuje vlastní obojetnou podmnožinu. d) Každé spojité zobrazení $f : \mathbb{X} \to \{0, 1\}$ je konstantní.

Důkaz
Přímočaré. □

Tvrzení 5.2

Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý.

Důkaz
Ať $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ je spojité zobrazení, $\mathbb{X}$ souvislé, f na. Sporem. $\mathbb{Y}$ není souvislý. Potom z minulého tvrzení $\exists g : \mathbb{Y} \to \{0, 1\}$ spojitý nekonstantní. Potom ale $g \circ f : \mathbb{X} \to \{0, 1\}$ je spojité a nekonstantní $\implies$ $\mathbb{X}$ není souvislý. $\lightning$. $\square$

Tvrzení 5.3 (Sjednocení souvislých množin)

Ať $C_i \subseteq \mathbb{X}, C_i$ souvislé, $i \in I, 0 \in I, C_i \cap C_0 \neq \emptyset$ pro $i \in I$. Pak $\bigcup C_i$ je souvislé.

Důkaz
Ať O je neprázdná obojetná množina v $\bigcup C_i$. Existuje $j \in I$, $C_j \cap O \neq \emptyset$. $C_j \cap O$ je obojetná v C_j, C_j je souvislá, tedy $C_j \subseteq O$. Tedy $C_0 \cap O \neq \emptyset$, tj. $C_0 \subseteq O$. Je-li $i \in I$ libovolná, pak $C_i \cap O \neq \emptyset$ a opět $C_i \subseteq O$.Tudíž $O = \bigcup C_i$, tj. $\bigcup C_i$ je souvislá. $\square$

Důsledek
Jsou-li C_i souvislé v TP $\mathbb{X}$, $i \in I$ a $\bigcap C_i \neq \emptyset$, pak $\bigcup_{i \in I} C_I$ je souvislá.

Důkaz
Předchozí s $C_0 := \{x_0\} \subseteq \bigcap C_i$. $\square$

Důsledek
Je-li $A \subseteq \mathbb{X}$ souvislá a $A \subseteq M \subseteq \overline{A}$, pak M je souvislá.

Důkaz
$C_a := A \cup \{a\}$ pro $a \in M \setminus A$. Vzhledem k předchozímu stačí ověřit, že C_a je souvislá ($M = \bigcup_{a \in M \setminus A} C_a$). $\square$

Věta 5.4

Buď $\mathbb{X}$ Tichonovův prostor. Pak $\mathbb{X}$ je souvislý $\Leftrightarrow$ $\beta\mathbb{X}$ je souvislý.

Důkaz
$\implies$: $\overline{\mathbb{X}} = \beta\mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ je souvislá $\implies$ $\overline{\mathbb{X}}$ je souvislá $\implies$ $\beta\mathbb{X}$ je souvislá.

$\Leftrightarrow$: Ať $\beta\mathbb{X}$ je souvislý. Ať $f : \mathbb{X} \to \{0, 1\}$ je spojité zobrazení. Z vlastností $\beta\mathbb{X}$ existuje spojité rozšíření $\overline{f} : \beta\mathbb{X} \to \{0, 1\}$. $\beta\mathbb{X}$ je souvislý $\implies$ $\overline{f}$ je konstantní $\implies$ f je konstantní $\implies$ $\mathbb{X}$ je souvislý. $\square$

Věta 5.5 (Součin souvislých prostorů)

Ať $\mathbb{X}_i : i \in I$ jsou TP. Pak $\prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$ je souvislý $\Leftrightarrow$ $\forall i \in I : \mathbb{X}_i$ je souvislý.

Důkaz
Pokud některý $\mathbb{X}_i = \emptyset$, tvrzení platí. Dále ať $\mathbb{X}_i \neq \emptyset$, $i \in I$. $\implies$: Je-li $\prod \mathbb{X}_i$ souvislý, $\pi_j : \prod \mathbb{X}_i \to \mathbb{X}_j$ je spojité a na, tedy i $\mathbb{X}_j$ je souvislý.

$\impliedby$: Nejprve pro dva prostory $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$: $\mathbb{X} \times \mathbb{Y} = (\{x_0\} \times \mathbb{Y}) \cup \bigcup_{y \in \mathbb{Y}} \mathbb{X} \times \{y\}$. Tedy podle tvrzení výše je $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ souvislý. Indukcí dokážeme pro konečně mnoho. Obecně: $\forall i \in I$ fixujeme bod $x_i \in \mathbb{X}_i$.

$$M := \left\{ (y_i)_{i \in I} \in \prod \mathbb{X}_i : y_i = x_i \text{ pro všechna } i \in I \text{ až na konečně mnoho výjimek} \right\}.$$

$$M = \bigcup_{K \subseteq I \text{ konečná}} \left(\prod_{i \in K} \mathbb{X}_i \times \prod_{i \in I \setminus K} \{x_i\} \right).$$

To znamená, že M je souvislé, protože je sjednocením souvislých množin s průnikem obsahujícím $(x_i)_{i \in I}$. Ale M je hustá v $\prod \mathbb{X}_i$. $\overline{M}$ je souvislá, tedy $\prod \mathbb{X}_i$ je souvislá. □

Definice 5.2 (Komponenta souvislosti)

Ať $\mathbb{X}$ je TP, $x \in \mathbb{X}$, pak komponenta souvislosti bodu x je největší souvislá množina, která x obsahuje. Značíme ji C_x.

Důkaz (Existence)
Plyne z jednoho z důsledků: $\bigcup \{C | x \in C \wedge C \text{ je souvislá}\}$ je souvislá a maximální. Navíc je to vždy uzavřená množina. □

Poznámka
Komponenty souvislosti tvoří rozklad, tj. $C_x = C_y$ nebo $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Tvrzení 5.6

Jsou-li $\mathbb{X}_i$ TP a $x_i \in \mathbb{X}_i$, C_i komponenta bodu x_i v $\mathbb{X}_i$. Pak $\prod C_i$ je komponenta $(x_i)_{i \in I}$ v $\prod \mathbb{X}_i$.

Důkaz
Cvičení. □

Definice 5.3 (Kvazikomponenty)

Ať $\mathbb{X}$ je TP. Množina $Q \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá kvazikomponenta bodu $x \in \mathbb{X}$ v prostoru $\mathbb{X}$, pokud $Q = \bigcap \{Z | x \in Z \wedge Z \text{ obojetná}\}$. Značíme ji Q_x.

Poznámka
$\forall x \in \mathbb{X} : C_x \subseteq Q_x$. Navíc Q_x je uzavřená. A opět tvoří rozklad prostoru $\mathbb{X}$.

Například (TP $\mathbb{X}$, že $C_x \neq Q_x$)
$\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^2$ skládající se ze 2 bodů x, y a úseček k ním konvergujícím (: | | | | |). $C_x = \{x\}$, $Q_x = \{x, y\}$.

Lemma 5.7 (O průniku v kompaktu)

Buď $\mathbb{X}$ kompaktní TP, $\mathcal{A}$ soubor uzavřených množin v $\mathbb{X}$. $U \subseteq \mathbb{X}$ otevřená a $\bigcap \mathcal{A} \subseteq U$. Pak existuje konečný systém $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} : \bigcap \mathcal{F} \subseteq U$.

Důkaz
Kdyby ne, pak $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ konečné: $\bigcap \mathcal{F} \setminus U \neq \emptyset$. Tedy $\mathcal{A} \cup \{\mathbb{X} \setminus U\}$ má konečnou průnikovou vlastnost. $\mathbb{X}$ kompaktní: $\bigcap \mathcal{A} \cap (\mathbb{X} \setminus U) \neq \emptyset$. Tedy $\bigcap \mathcal{A} \not\subseteq U$. ↯. □

Věta 5.8

V kompaktním TP komponenty a kvazikomponenty splývají.

Důkaz
Ať $x \in \mathbb{X}$. $C_x \subseteq Q_x$. Pro $Q_x \subseteq C_x$ stačí dokázat, že Q_x je souvislá. Předpokládejme $E \cup F$, E, F uzavřené (v Q_x, a tedy i v $\mathbb{X}$) disjunktní množiny. BÚNO $x \in E$. $\mathbb{X}$ je normální, tedy existují otevřené disjunktní množiny U, V: $E \subseteq U$, $F \subseteq V$. $Q_x = E \cup F \subseteq U \cup V$. Podle předchozího lemmatu existují obojetné množiny $Q_1, \ldots, Q_n : Q_1 \cap \ldots \cap O_n \subseteq U \cup V$. Otevřené $O \cap U = O \setminus V$ uzavřené, tedy $x \in O \cap U$, tedy $Q_x \subseteq O \cap U$. Tedy $F = \emptyset$. Proto Q_x je souvislá. □

Definice 5.4 (Křivková a oblouková souvislost)

TP $\mathbb{X}$ se nazývá obloukově (resp. křivkově) souvislý, pokud $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists f : [0,1] \to f([0,1])$ homeomorfní (resp. f spojité), že $f(0) = x$, $f(1) = y$.

Poznámka
Obecně je mezi nimi rozdíl, v Hausdorffových prostorech je to totéž.

6 Kontinua

Definice 6.1 (Kontinuum)

Kontinuum je kompaktní souvislý prostor.

Jednoprvkové kontinuum se nazývá degenerované, ostatní nedegenerovaná.

Tvrzení 6.1

Ať K_n je klesající (vzhledem k inkluzi) posloupnost kontinuí, pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ je opět kontinuum.

Důkaz

$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ je zřejmě kompaktní. Předpokládejme, že $K = E \cup F$, kde E, F jsou uzavřené disjunktní. Chceme $E = \emptyset$ nebo $F = \emptyset$. K_1 je normální, tedy existují otevřené disjunktní U, V, že $E \subseteq U$ a $F \subseteq V$. Podle lemmatu o průniku v kompaktu existuje $n \in \mathbb{N}$, že $K_n \subseteq U \cup V$, tedy $K_1 = (K_n \cap U) \cup (K_n \cap V)$. K_n je sovislá, tedy $K_n \cap U = \emptyset$ nebo $K_n \cap V = \emptyset$. Tedy $E = \emptyset$ nebo $F = \emptyset$. □

Tvrzení 6.2 (Bum do hranice (Boundary bumping theorem))

Ať $\mathbb{X}$ je kontinuum, A vlastní uzavřená podmnožina $\mathbb{X}$. Pak každá komponenta množiny A protíná hranici A.

Důkaz

$A = \emptyset$ nemá žádnou komponentu. Tedy $A \neq \emptyset, x \in A$, C_x ... komponenta bodu x v A. Pro spor předpokládejme, že $C_x \cap \partial A = \emptyset$. $A \subset \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ je kontinuum, tedy $\partial A \neq \emptyset$. Víme, že C_x je kvazikomponenta $\mathbb{X}$, $C_x \subseteq A \setminus \partial A$. Tedy podle lemmatu o průniku v kompaktu existuje obojetná množina Z v A, že $C_x \subseteq Z \subseteq A \setminus \partial A$. Z je uzavřená v $\mathbb{X}$, neprázdná, vlastní. Navíc Z je otevřená v A a neprotíná hranici, tedy Z je otevřená v $\mathbb{X}$ (Z je otevřená v otevřené $A \setminus \partial A$). Z je tedy obojetná vlastní podmnožina v $\mathbb{X}$, ↯. □

Věta 6.3 (Sierpinski)

Ať $\mathbb{X}$ je kontinuum, $X_n, n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní uzavřené množiny v $\mathbb{X}$, že $X = \bigcup X_n$. Pak všechna $X_n = \emptyset$ až na jednu výjimku.

Důkaz

Je-li kontinuum $\mathbb{D}$ spočetným sjednocením uzavřených neprázdných disjunktních množin $Y_i, i \in \mathbb{N}$, pak pro každé $i \in \mathbb{N}$ existuje kontinuum $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{D}$, které je disjunktní s Y_i, ale není obsaženo v žádném $Y_j, j \in \mathbb{N}$ (protíná alespoň 2). Důkaz:

Fixujeme $j \neq i$: existují disjunktní otevřené U, V: $Y_j \subseteq U$, $Y_i \subseteq V$. Buď C komponenta libovolného bodu z Y_j v množině $\overline{U}$. Podle bum do hranice víme, že $C \cap \partial\overline{U} \neq \emptyset$. Tj. $\partial\overline{U} \cap Y_j = \emptyset$, tedy $C \nsubseteq Y_j$. $C \subseteq \overline{U} \subseteq \mathbb{D} \setminus V$, tedy $C \cap Y_i = \emptyset$.

Důkaz věty: Sporem: Existují alespoň dva indexy $n \neq m : X_n \neq \emptyset \neq X_m$. Kdyby $\{k \in \mathbb{N} : X_n \neq \emptyset\}$ byla konečná, pak $\mathbb{X}$ je sjednocením konečně mnoha disjunktních uzavřených neprázdných množin, tyto množiny by již byly obojetné, spor se souvislostí $\mathbb{X}$.

BÚNO (vyházíme prázdné a přeindexujeme) $X_n \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$. Indukcí najdeme posloupnost kontinuí C_n, že $C_{n+1} \subseteq C_n \wedge C_n \cap X_n = \emptyset \wedge C_n$ není obsaženo v žádném X_i, $i \in \mathbb{N}$. Podle prvního odstavce $\mathbb{X} = \mathbb{D}$, $X_j = Y_j$, $i = 1$ existuje $C = C_j$. Dále uvažme C_1. To protíná nekonečně mnoho z množin X_i. V druhém kroku indukce použijeme první odstavec na $\mathbb{D} = C_1$, $\{Y_i | i \in \mathbb{N}\} = \{C_1 \cap X_i | C_1 \cap X_i \neq \emptyset\}$, ...

$\bigcap C_n \neq \emptyset$, ať tedy $c \in \bigcap C_n$. $c \notin \bigcup X_n = \mathbb{X}$. ↯. □

Definice 6.2 (Rozložitelné a nerozložitelné kontinuum)

Kontinuum $\mathbb{X}$ se nazývá rozložitelné, pokud existují dvě vlastní podkontinua $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ (ne nutně disjunktní), že $\mathbb{X} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$. Jinak je nerozložitelné.

Věta 6.4 (Charakterizace nerozložitelnosti)

Kontinuum $\mathbb{X}$ je nerozložitelné, právě když každé jeho vlastní podkontinuum je v něĺ řídké (tj. uzávěr má prázdný vnitřek).

Důkaz

$\Longleftarrow$ Kdyby $X = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ vlastní podkontinua, pak $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ řídké. $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ je řídká v $\mathbb{X}$, $\lightning$.

$\Longrightarrow$: Ať $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ je vlastní podkontinuum $\mathbb{X}$, $\operatorname{int} \mathbb{Y} \neq \emptyset$. Ať $M = \overline{\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}}$. Pak M je souvislá: $\mathbb{X} = M \cup \mathbb{Y}$ a M je kontinuum, tedy $\mathbb{X}$ je rozložitelné. Nebo M je nesouvislá: $M = E \cup F$, kde E, F jsou uzavřené disjunktní neprázdné podmnožiny v M. Potom $(\mathbb{Y} \cup E) \cup (\mathbb{Y} \cup F)$. Ale tyto dvě množiny jsou vlastní uzavřené podmnožiny $\mathbb{X}$, které jsou souvislé (neboť každá komponenta E nebo F protíná jejich hranici a ta je podmnožinou $\mathbb{Y}$ a sjednocení souvislých protínajících se ve stejném bodě je souvislé). $\square$

7 Nesouvislost (absence souvislosti)

Definice 7.1

TP $\mathbb{X}$ se nazývá

- dědičně nesouvislý, pokud jeho jediné souvislé podprostory jsou jednobodové (tj. komponenty bodů jsou jednoprvkové).
- totálně nesouvislý, jestliže $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y, \exists$ obojetná $Z \subseteq \mathbb{Z} : x \in Z \wedge y \notin Z$.
- nuldimenzionální, pokud $\mathbb{X}$ má bázi tvořenou obojetnými množinami (tj. pro $x \in \mathbb{X}$, U okolí x existuje obojetná $Z \subseteq \mathbb{X} : x \in Z \subseteq U$).
- silně nuldimenzionální, pokud $\mathbb{X}$ je normální a pro uzavřené disjunktní $E, F \subseteq \mathbb{X}$ existuje obojetná $Z \subseteq \mathbb{X} : E \subseteq Z \subseteq \mathbb{X} \setminus F$.

Poznámka
Definici silné nuldimenzionality lze zobecnit na Tichonovovy prostory: Tichonovův prostor $\mathbb{X}$ se nazve silně nuldimenzionální, pokud $\forall E, F \subseteq$, E, F funkcionálně oddělené množiny (tj. $\exists f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ spojitá, že $E \subseteq f^{-1}(0)$, $F \subseteq f^{-1}(1)$) existuje obojetná $Z \subseteq \mathbb{X} : E \subseteq Z \subseteq \mathbb{X} \setminus F$.

Tvrzení 7.1

Silně nuldimenzionální $\Longrightarrow$ nuldimenzionální $\Longrightarrow$ totálně nesouvislý $\Longrightarrow$ dědičně nesouvislý.

Důkaz
Snadné cvičení. □

Poznámka
Obecně nelze žádnou z výše uvedených implikací obrátit.

Věta 7.2

Ať $\mathbb{X}$ je kompaktní TP. Pak je ekvivalentní:

1. *$\mathbb{X}$ je dědičně nesouvislý.*
2. *$\mathbb{X}$ je totálně nesouvislý.*
3. *$\mathbb{X}$ je nuldimenzionální.*
4. *$\mathbb{X}$ je silně nuldimenzionální.*

Důkaz
Implikace směrem nahoru už máme, tedy stačí 1) $\implies$ 4). Ale ukážeme nejprve 1) $\implies$ 3) a pak 3) $\implies$ 4). Ať $x \in \mathbb{X}, U$ okolí x. Víme, že $C_x = \{x\}$. V kompaktním prostoru splývají komponenty a kvazikomponenty: $C_x = Q_x = \bigcap\{Z : x \in Z, Z \text{ je obojetná v } \mathbb{X}\}$. Podle lemmatu o průniku v kompaktu existují obojetné $Z_1, \ldots, Z_n$, že $x \in \bigcap Z_i$, $x \in \bigcap Z_i \subseteq U$. Tedy 1) $\implies$ 3).

Zbývá 3) $\implies$ 4): Kompaktní prostor je normální. Ať E, F jsou uzavřené disjunktní. Pro každé $x \in E$ existuje obojetná $Z_x \subseteq \mathbb{X}$, že $x \in Z_x \subseteq X \setminus F$, díky nuldimenzionalitě. $\{Z_x | x \in E\}$ je otevřené pokrytí E. E uzavřená v $\mathbb{X}$, tedy E kompaktní. $\exists x_1, \ldots, x_n \in E$: $E \subseteq Z_{x_1} \cup \ldots \cup Z_{x_n}$, což je obojetná $\subseteq \mathbb{X} \setminus\ F/$ Tedy $\mathbb{X}$ je silně nuldimenzionální. □

Věta 7.3 (Nuldimenzionalita v $\beta\mathbb{X}$)

Buď $\mathbb{X}$ je Tichonovův prostor. Pak $\beta\mathbb{X}$ je nuldimenzionální, právě když $\mathbb{X}$ je silně nuldimenzionální.

Důkaz

$\Longrightarrow$: $\beta\mathbb{X}$ je kompaktní, tedy $\beta\mathbb{X}$ je silně nuldimenzionální. Ať $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ je spojitá. Chceme, že f^{-1} a $f^{-1}(1)$ oddělíme obojetnou: Existuje spojité rozšíření $\overline{f} : \beta\mathbb{X} \to [0,1]$ funkce f. $\overline{f}^{-1}(0)$, $\overline{f}^{-1}(1)$ funkcionálně oddělené v $\beta\mathbb{X}$. Tedy existuje obojetná $Z \subseteq \beta\mathbb{X}$, že $\overline{f}^{-1}(0) \subseteq Z \subseteq \beta\mathbb{X} \setminus \overline{f}^{-1}(1)$. Nyní $Z \cap \mathbb{X}$ obojetná v $\mathbb{X}$. $f^{-1}(0) = \overline{f}^{-1}(0) \cap \mathbb{X} \subseteq Z \cap \mathbb{X} \subseteq \mathbb{X} \setminus f^{-1}(1)$. $Z \cap \mathbb{X}$ je obojetná a odděluje $f^{-1}(0)$ a $f^{-1}(1)$.

$\Longleftarrow$: $\beta\mathbb{X}$ je kompaktní, tedy stačí ukázat (díky předchozí větě), že $\mathbb{X}$ je totálně nesouvislý. Ať $a, b \in \mathbb{X}$, $a \neq b$. Existuje spojitá funkce $f : \beta\mathbb{X} \to [0,1]$, $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. $A := f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{3}\right)\right)$, $B := f^{-1}\left(\left(\frac{2}{3}, 1\right]\right)$. Jistě $a \in A$ a $b \in B$. A, B jsou funkcionálně oddělené v $\beta\mathbb{X}$, otevřené. Tj. $A \cap \mathbb{X}$, resp. $B \cap \mathbb{X}$, je hustá v A, resp. B. Navíc jsou oddělené v $\mathbb{X}$. Ze silné nuldimenzionality $\mathbb{X}$ existuje obojetná $Z \subseteq \mathbb{X} : A \cap \mathbb{X} \subseteq Z \subseteq \mathbb{X} \setminus B$. Uvažujme spojitou funkce $g : \mathbb{X} \to \{0,1\}$, $g|_Z = 0$, $g|_{X \setminus Z} = 1$. g lze spojitě rozšířit na $\overline{g} : \beta\mathbb{X} \to \{0,1\}$. Ať $W := \overline{g}^{-1}(0)$. $W \supseteq Z$, W obojetná, $W \cap B = \emptyset$. $W \supseteq A$. $a \in W$, $b \notin W$. $\square$

Poznámka

Podprostor nuldimenzionálního prostoru je nuldimenzionální. Součin nuldimenzionálních je nuldimensionální. Tedy $\{0,1\}^{\varkappa}$ je vždy nuldimenzionální.

Tvrzení 7.4

Každý nuldimenzionální prostor $\mathbb{X}$ lze vnořit do $\{0,1\}^A$, kde za A lze volit váhu (nebo bázi) $\mathbb{X}$.

Důkaz

Ať $\mathcal{B}$ je báze X, která je tvořena obojetnými množinami, pro kterou je $|\mathcal{B}| = w(\mathbb{X})$. Pro $B \in \mathcal{B}$ uvažme $f_B(x) = 0$, $x \in B$ a 1 jinak. $\{f_B | B \in \mathcal{B}\}$ odděluje body a uzavřené množiny, tedy podle lemmatu o Tichonovově vnoření je $\triangle_{B \in \mathcal{B}} : x \in \mathbb{X} \mapsto (f_B(x))_{B \in \mathcal{B}}$ je vnoření $\mathbb{X} \to \{0,1\}^{\mathcal{B}}$. $\square$

Důsledek

Každý kompaktní metrický (má spočetnou váhu) nuldimenzionální prostor lze vnořit do Cantorova diskontinua.

Věta 7.5 (Topologická charakterizace Cantorova diskontinua)

Každý neprázdný nuldimenzionální kompaktní metrizovatelný prostor je homeomorfní Cantorovu diskontinuu.

Důkaz

Bez důkazu. $\square$

Poznámka (Stonova dualita)
Kompaktní nuldimenzionální TP se spojitými zobrazeními se dají přiřadit Booleovým algebrám s homomorfismy

8 Topologická dimenze

Definice 8.1 (Malá induktivní dimenze, Menger-Urysohn)

Pro $\mathbb{X}$ regulární definujeme

- $\operatorname{ind} \emptyset = -1$.
- $\operatorname{ind} \mathbb{X} \leq n \geq 0$, pokud $\forall x \in \mathbb{X}\ \forall U$ okolí $x\ \exists$ otevřená $V : x \in V \subseteq U : \operatorname{ind}(\partial V) \leq n-1$.
- $\operatorname{ind} \mathbb{X} = n$, pokud $\operatorname{ind} \mathbb{X} \leq n$ a neplatí $\operatorname{ind} \mathbb{X} \leq n-1$.
- $\operatorname{ind} \mathbb{X} = \infty$, pokud $\forall n \in \mathbb{N} : \operatorname{ind} \mathbb{X} \nleq n$.

Poznámka
$\operatorname{ind} \mathbb{X} = -1 \Leftrightarrow X = \emptyset$. $\operatorname{ind} \mathbb{X} \leq 0 \Leftrightarrow \mathbb{X}$ je nuldimenzionální ($\partial V = \emptyset \Leftrightarrow V$ je obojetná). $\operatorname{ind}([0,1]) = 1$ (není nuldimenzionální). $\operatorname{ind}[0,1]^n \leq n$ indukcí. (Naopak už pro $n = 2$ se těžko dokazuje, že platí rovnost. Viz dále.)

Definice 8.2 (Velká induktivní dimenze, Brouwer-čech)

Pro $\mathbb{X}$ normální definujeme

- $\operatorname{Ind} \emptyset = -1$.
- $\operatorname{Ind} \mathbb{X} \leq n \geq 0$, pokud $\forall E \subseteq \mathbb{X}$ uzavřenou a $\forall U$ otevřenou: $E \subseteq U\ \exists V$ otevřená: $E \subseteq V \subseteq U$ a $\operatorname{Ind}(\partial V) \leq n-1$.
- $\operatorname{Ind} \mathbb{X} = n$, pokud $\operatorname{Ind} \mathbb{X} \leq n$ a neplatí $\operatorname{Ind} \mathbb{X} \leq n-1$.
- $\operatorname{Ind} \mathbb{X} = \infty$, pokud $\forall n \in \mathbb{N} : \operatorname{ind} \mathbb{X} \nleq n$.

Poznámka
$\operatorname{Ind} \mathbb{X} \leq 0 \Leftrightarrow \mathbb{X}$ je silně nuldimenzionální.

Definice 8.3 (Pokrývací dimenze, Čech-Lebesgue)

Říkáme, že systém $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X je řádu n, pokud n je největší přirozené číslo pro které existují po dvou různé $A_1, \ldots, A_{n+1} \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.

Pro normální prostor $\mathbb{X}$ definujeme

- $\dim \emptyset = -1$.
- $\dim \mathbb{X} \leq n \geq 0$, pokud každé konečné otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má konečné otevřené zjemnění řádu nejvýše n.
- $\dim \mathbb{X} = n$, pokud $\dim \mathbb{X} \leq n$ a neplatí $\dim \mathbb{X} \leq n-1$.
- $\dim \mathbb{X} = \infty$, pokud $\forall n \in \mathbb{N} : \dim \mathbb{X} \nleq n$.

Věta 8.1

Ať $\mathbb{X}$ je normální TP. Pak $\dim \mathbb{X} \leq 0 \Leftrightarrow \mathbb{X}$ *je silně nuldimenzionální.*

Důkaz

$\implies$: Ať E, F jsou uzavřené disjunktní. Ať $\mathcal{U} = \{\mathbb{X} \setminus E, \mathbb{X} \setminus F\}$ otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. $\exists$ konečné otevřené zjemnění $\mathcal{V}$ toho $\mathcal{U}$, které má řád ≤ 0, tedy prvky $\mathcal{V}$ jsou navzájem disjunktní. Tedy každé $V \in \mathcal{V}$ je obojetná, $\bigcup \{V \in \mathcal{V} | V \subseteq \mathbb{X} \setminus F\}$ obojetná, obsahující E (protože pokud $V \cap E \neq \emptyset$ pro $V \in \mathcal{V}$, pak $V \subseteq \mathbb{X} \setminus F$) a disjunktní s F.

$\impliedby$: Ať $\mathcal{U}$ je otevřené konečné pokrytí $\mathbb{X}$. Podle lemmatu o skrčení existuje uzavřené $F_U : U \in \mathcal{U}, F_U \subseteq U, \bigcup \{F_U | U \in \mathcal{U}\}$. $\mathbb{X}$ silně nuldimenzionální, tedy $\exists$ obojetné $C_U : F_U \subseteq C_U \subseteq U$, $U \in \mathcal{U}$. $\{C_U | U \in \mathbb{U}\}$ je konečné obojetné pokrytí $\mathbb{X}$ zjemňující $\mathcal{U}$. Toto pokrytí můžeme „rozdisjunktnit“ a dostaneme disjunktní otevřené (obojetné) konečné pokrytí řádu 0 (zjemnění $\mathcal{U}$). □

Poznámka

$\dim[0,1] = 1$. $\dim[0,1]^n = n$ (zase dosti těžké dokázat).

Tvrzení 8.2 (Dimenze (uzavřeného) podprostoru)

Je-li $\mathbb{X}$ regulární a $A \subseteq \mathbb{X}$, pak $\operatorname{ind} A \leq \operatorname{ind} \mathbb{X}$.

Je-li $\mathbb{X}$ normální a $A \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, pak $\operatorname{Ind} A \leq \operatorname{Ind} \mathbb{X}$ *a* $\dim A \leq \dim \mathbb{X}$.

Důkaz

Indukcí podle $\operatorname{ind} \mathbb{X}$ ($\operatorname{Ind} \mathbb{X}, \dim \mathbb{X}$): Pokud $\operatorname{ind} \mathbb{X} = -1$, pak $\mathbb{X} = \emptyset = A$, $\operatorname{ind} A = -1$. Předpokládejme, že pro všechny regulární prostory $\mathbb{Y}$, kde $\operatorname{ind} \mathbb{Y} \leq n-1$, a $B \subseteq \mathbb{Y}$ je $\operatorname{ind}(B) \leq \operatorname{ind}(\mathbb{Y})$. $\operatorname{ind} \mathbb{X} = n$, $A \subseteq \mathbb{X}$: chceme $\operatorname{ind} A \leq n$. Ať $x \in A$, U okolí x v A. Existuje W okolí x v $\mathbb{X}$ takové, že $W \cap A = U$. $\exists V$ otevřené okolí x v $\mathbb{X}$: $\operatorname{ind}(\partial V) \leq n-1$, $x \in V \subseteq W$. $x \in V \cap A \subseteq U$, $V \cap A$ otevřená v A a $\partial_A (V \cap A) \subseteq \partial_{\mathbb{X}} V$, tedy podle indukčního předpokladu $\operatorname{ind} \partial_A (V \cap A) \leq \operatorname{ind} \partial_{\mathbb{X}} V \leq n-1$, tj. $\operatorname{ind} A \leq n$. Ostatní 2 dimenze analogicky. □

Věta 8.3 (Charakterizace pokrývací dimenze)

Pro normální prostor $\mathbb{X}$ je ekvivalentní:

1. $\dim \mathbb{X} \leq n$.

2. *Každé konečné otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má otevřené skrčení řádu $\leq n$.*

3. *Každé konečné otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má uzavřené skrčení řádu $\leq n$.*

4. *Každé konečné otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má konečné uzavřené zjemnění řádu $\leq n$.*

Důkaz

1) $\implies$ 2): Ať $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Dle 1) existuje $\mathcal{V}$ konečné otevřené zjemnění toho $\mathcal{U}$ řádu nejvýše n. $V_i' := \bigcup \left\{V \in \mathcal{V} | V \subseteq U_i \land V \nsubseteq \bigcup V_j' : j < i\right\}$. $\mathcal{V}' = \{V_i' | i \in [n]\}$ je skrčení $\mathcal{U}$ řádu $\leq n$.

2) $\implies$ 3) je z lemmatu o skrčení. 3) $\implies$ 4) je triviální.

4) $\implies$ 1): Ať $\mathcal{U}$ je konečné otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ a $\mathcal{F}$ je jeho uzavřené konečné zjemnění řádu $\leq n$. $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$. Pro $i \leq m$ fixujeme $U_i \in \mathcal{U} : F_i \subseteq U_i$. Indukcí najdeme $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_m\}$, že $F_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$, že řád $\mathcal{V} \leq n$. Ať $A_1 = \bigcup \{H_1 \cap \ldots \cap H_{n+1} | H_i \in \mathcal{F} \setminus \{F_1\}, H_i \text{ jsou po dvou různé}\}$. A_1 uzavřená. Navíc $A_1 \cap F_1 = \emptyset$, protože řád $\mathcal{F} \leq n$. Ať V_1 je otevřená, že $F_1 \subseteq V_1$ a $\overline{V_1} \cap A_1 = \emptyset$. Nyní $\left\{\overline{V_1}, F_2, F_3, \ldots, F_m\right\}$ má řád nejvýše n.

Předpokládejme, že máme otevřené $V_1, \ldots, V_{j-1}$, že $F_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$, $i \leq j-1$ a systém $\left\{\overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_{j-1}}, F_j, F_{j+1}, \ldots, F_m\right\}$ má řád $\leq n$. Hledáme V_j. Ať A_j je sjednocením průniků $n+1$ různých množin vybraných ze systému $\left\{\overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_{j-1}}, F_{j+1}, F_{j+2}, \ldots, F_m\right\}$. A_j je uzavřená a disjunktní s F_j. Opět z normality existuje otevřená $V_j : F_j \subseteq V_j \subseteq \overline{V_j} \subseteq U_j \setminus A_j$. Řád $\left\{\overline{V_1}, \ldots, \overline{V_j}, F_{j+1}, \ldots, F_n\right\} \leq n$.

$\mathcal{V} := \{V_1, \ldots, V_m\}$ je otevřené zjemnění $\mathcal{U}$ řádu $\leq n$. □

Věta 8.4 (Součtová pro dim)

Je-li $\mathbb{X}$ normální TP a $F_i \subseteq \mathbb{X}$ uzavřené, $i \in \mathbb{N}$, $\dim F_i \leq n$ a $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$, pak $\dim \mathbb{X} \leq n$.

Tvrzení 8.5

Pro normální TP $\mathbb{X}$: $\operatorname{ind} \mathbb{X} \leq \operatorname{Ind} \mathbb{X}$.

Důkaz

Přímočarý, indukcí podle $\operatorname{Ind} \mathbb{X}$. □

Věta 8.6 (Součinová věta pro dim)

Je-li $\mathbb{X}$ normální TP a $F_i \subseteq \mathbb{X}$ uzavřené, $i \in \mathbb{N}$, $\dim F_i \leq n$ a $\mathbb{X} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$, pak $\dim \mathbb{X} \leq n$.

Důkaz
Ať $\mathcal{U} = \{U_i|i \in [k]\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. $F_0 := \emptyset$. Induktivně definujeme otevřené pokrytí $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots$, že $\mathcal{U}_j = \{U_{j,i}|i \in [k]\}$, $U_{j,i} \subseteq U_{j-1,i}$ pro $j \geq 1$ a $U_{0,i} \subseteq U_i$, ord $\left\{\overline{U_{j,i}} \cap F_j|i \in [k]\right\} \leq n$.

$j = 0 : U_{j,0} := U_j$. Předpokládejme, že máme $\mathcal{U}_j$, $j < m \geq 1$, splňující podmínky výše. $\{F_m \cap U_{m-1,i}|i \in [k]\}$ je otevřené pokrytí F_m. Podle charakterizace dimenze dim má otevřené skrčení $\{V_1, \ldots, V_k\}$ řádu nejvýše n. Ať $W_i := (U_{m-1,i}, F_m) \cup V_i \subseteq U_{m-1,i}$. $\{W_i|i \in [k]\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Řád $\{F_m \cap W_i|i \in [k]\} \leq n$. Podle lemmatu o skrčení existuje skrčení tohoto $\{W_i|i \in [k]\}$ na $\{U_{m,i}|i \in [k]\}$, že $\overline{U_{m,i}} \subseteq W_i$. $\mathcal{U}_m := \{U_{m,i}|i \in [k]\}$ splňuje požadované podmínky. Nyní $\forall x \in \mathbb{X}\ \forall j \in \mathbb{N} : \exists i(x) \in [k] : x \in U_{j,i(x)}$. $\exists i(x) \in [k] :$ $\{j|i(x) = i(j,x)\}$ je nekonečné. $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty}$. Tedy $\left\{\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{U_{j,i}}|i \in [k]\right\}$ je uzavřené pokrytí $\mathbb{X}$ a navíc skrčení $\mathcal{U}$. K tomu je řádu $\leq n$. Tedy podle charakterizace dim je $\leq n$. □

Věta 8.7

Ať $\mathbb{X}$ je normální, pak $\operatorname{Ind} \beta\mathbb{X} = \operatorname{Ind} \mathbb{X}$, $\dim \beta\mathbb{X} = \dim \mathbb{X}$.

Důkaz
Bez důkazu. Pro důkaz viz Engelking: Theory of dimensions Finite and Infinite. □

8.1 Dimenze separabilních metrizovatelných prostorů

Věta 8.8

Je-li $\mathbb{X}$ separabilní metrizovatelný, pak $\dim \mathbb{X} = \operatorname{ind} \mathbb{X} = \operatorname{Ind} \mathbb{X}$.

Jsou-li $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ neprázdné separabilní metrizovatelné, pak $\dim \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \leq \dim \mathbb{X} + \dim \mathbb{Y}$.

Věta 8.9

Je-li $\mathbb{X}$ separabilní metrizovatelný prostor, pak existuje metrizovatelná kompaktifikace $\tilde{\mathbb{X}}$, že $\dim \mathbb{X} = \dim \tilde{\mathbb{X}}$.

Lemma 8.10 (O oddělování)

Pokud pro separabilní metrizovatelný prostor $\mathbb{X}$ je $\dim \mathbb{X} \leq n$, pak pro každou posloupnost disjunktních dvojic $(A_1, B_1), \ldots, (A_{n+1}, B_{n+1})$ uzavřených množin existují otevřené množiny $U_1, \ldots, U_{n+1} : A_i \subseteq U_i \subseteq \overline{U_i} \subseteq \mathbb{X} \setminus B_i$, že $\bigcap_{i=1}^{n+1} \partial U_i = \emptyset$.

8.2 Dimenze eukleidovských prostorů

Věta 8.11 (Bronworova o pevném bodě)

Každé spojité zobrazení $f : [0,1]^n \to [0,1]^n$ má pevný bod, tj. $x \in [0,1]^n : f(x) = x$.

Věta 8.12

$$\dim[0,1]^n = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

Důkaz (Myšlenka)

$\dim[0,1]^n \leq n$: Indukcí podle n: $n = 1$ je cvičení. Předpokládejme, že $\dim[0,1]^n \leq n$, chceme $\dim[0,1]^{n+1} \leq n+1$: Otevřené koule (při maximové metrice) v $[0,1]^{n+1}$ jsou „krychličky“, jejichž hranice jsou sjednocením konečně mnoha množin homeomorfních s $[0,1]^n$. Ze součtové věty je tedy dimenze hranice každé krychle v $[0,1]^{n+1}$ nejvýše n-dimenzionální. $\mathbb{R}^n$ je spočetným sjednocením prostorů homeomorfních $[0,1]^n$ tedy ze součtové věty $\dim \mathbb{R}^n \leq n$.

$\dim[0,1]^n \geq n$: Ať pro spor $\dim[0,1]^n \leq n-1$. $A_i := \{x \in [0,1]^n | x_i = 0\}$ a $B_i := \{x \in [0,1]^n | x_i = 1\}$. Zřejmě $\bigcup A_i \cup \bigcup B_i$ tvoří hranici $[0,1]^n$ v $\mathbb{R}^n$. Podle lemmatu o oddělování existují otevřené množiny $U_1, \ldots, U_n : A_i \subseteq U_i \subseteq \overline{U_i} \subseteq [0,1]^n \setminus B_i$, $i \in [n]$ a $\partial U_1 \cap \ldots \cap \partial U_n = \emptyset$. Definujme $f_i : [0,1]^n \to [0,1] : f_i(x) = \frac{1}{2}\frac{\varrho(x,\partial U_i)}{\varrho(x,\partial U_i)+\varrho(x,A_i)} + \frac{1}{2}$, pro $x \in U_i$, a $-\frac{1}{2}\frac{\varrho(x,\partial U_i)}{\varrho(x,\partial U_i)+\varrho(x,B_i)} + \frac{1}{2}$ jinak. f_i je spojité, $f(x) = 1$ pro $x \in A_i$, $f(x) = 0$ pro $x \in B_i$. $f_i^{-1}(1/2) = \partial U_i$. $f := f_1 \triangle \ldots \triangle f_n$, $f : [0,1]^n \to [0,1]^n$ spojité. Bod $a = (1/2, \ldots, 1/2)$ neleží v obrazu f, protože $\bigcap_{i=1}^n \partial U_i = \emptyset$.

Ať $g : [0,1]^n \setminus \{a\} \to [0,1]^n$ je projekce z bodu a na $[0,1]^n$. $g \circ f : [0,1]^n \to [0,1]^n$ spojité, ale nemá pevný bod. □

Věta 8.13 (Vnoření do euklidovských prostorů)

Separabilní metrizovatelný TPP dimenze $\leq n$ lze vnořit do $\mathbb{R}^{2n+1}$. (Menší dimenze $\mathbb{R}$ by už nefungovala.)

Dokonce lze takový prostor vnořit do $\{x \in \mathbb{R}^{2n+1} | x$ má nejvýše n racionálních souřadnic$\}$ (který má dimenzi n, takže se mu říká univerzální ?).

9 Hyperprostory

Definice 9.1 (Hyperprostory)

$\mathbb{X}$ TP. $\mathcal{K}(\mathbb{X}) = \{K \subseteq \mathbb{X} | K$ kompaktní, $K \neq \emptyset\}$. Na $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ lze zavést přirozeným způsobem topologii. Subbáze této topologie je tvořena množinami

$$\Gamma(U) = \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{X}) : K \cap U \neq \emptyset\},$$

$$\Lambda(V) = \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{X}) | K \subseteq V\},$$

pro U, V otevřené v $\mathbb{X}$.

Tvrzení 9.1

Je-li $\mathbb{X}$ kompaktní, pak $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ je kompaktní.

Poznámka
Opačná implikace je triviální, protože $\mathbb{X}$ je uzavřený v $\mathcal{K}(\mathbb{X})$.

Důkaz
Aplikace Alexandrovova lemmatu: Ať $\{\Gamma(U_i), \Lambda(V_j) | i \in I, j \in J\}$ je pokrytí $\mathcal{K}(\mathbb{X})$. Chceme vybrat konečné podpokrytí. $U := \bigcup_{i \in I} U_i$ je otevřené. $F := \mathbb{X} \setminus U$ uzavřená. Tedy F je kompaktní. Buď $F = \emptyset$, tak $\{U_i | i \in I\}$ je pokrytí $\mathbb{X}$, lze z něj tedy vybrat konečné podpokrytí $U_1, \ldots, U_n$ a $\{\Gamma(U_i) : i \in [n]\}$ je pokrytí $\mathcal{K}(\mathbb{X})$. Nebo $F \neq \emptyset$, tedy $F \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$ a $F \notin \Gamma(U_i)$ pro žádné $i \in I$. $\exists j \in J : F \in \Gamma(V_j)$. Tedy $F \subseteq V_j$.

$M := \mathbb{X} \setminus V_j \subseteq U$ je uzavřená, tedy kompaktní, $M \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, $\exists i_1, \ldots, i_n$, že $M \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$. Tvrdíme, že $\Gamma(U_{i_1}) \cup \ldots \cup \Gamma(U_{i_n}) \cup \Lambda(V_j) = \mathcal{K}(\mathbb{X})$: Ať $K \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, pak $K \subseteq V_j \implies K \in \Lambda(V_j)$, $K \notin V_j \implies K \cup M \neq \emptyset . \exists i_r : K \cap U_{i_r} \neq \emptyset$, Tedy $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ je kompaktní podle A. lemmatu. $\square$

Tvrzení 9.2

Je-li $\mathbb{X}$ kontinuum, pak $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ je kontinuum.

Je-li $\mathbb{X}$ úplně metrizovatelný, pak $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ je úplně metrizovatelný.

Poznámka
$\mathbb{Q} = [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Každý kompaktní metrický prostor lze vnořit do $\mathbb{Q}$. Tedy $\mathcal{K}(\mathbb{Q})$ obsahuje (jako body) topologické kopie všech kompaktních metrických prostorů.

Nejčastější prostor je Cantorovo diskontinuum.