Než začnete číst: Rovnou říkám, že nemám druhou polovinu čtvrté úlohy, protože jsem k ní do deadlinu nestihl nic vymyslet. A jsem si svými řešeními celkově docela nejistý – chyběl jsem totiž zrovna třetí a čtvrtý týden, takže mi toho dosti uniklo.

Tedy pokud se Vám to nezdá dost, klidně mě rovnou vyhoďte, nemám problém si předmět odchodit příští rok. V opačném případě budu samozřejmě „makat“ na tom, abych v tom měl plně jasno i v těch částech, které jsem stále nestihl plně pochopit.

Příklad (1. – Optimality of space $W^{1,2}(\Omega)$)
Consider $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ and $p \in (1,2)$ be arbitrary. Find an elliptic matrix $\mathbb{A}(x)$ and nontrivial $\hat{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ such that

$$\int_\Omega \mathbb{A}\nabla\hat{u}\cdot\nabla\varphi = 0, \qquad \forall\varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Řešení
Použijeme hint:

$$(\mathbb{A})_{ij} = \delta_{ij} + (a-1)\frac{x_i x_j}{|x|^2}, \qquad a > 1.$$

Toto je jistě matice eliptického problému, neboť:

$$\mathbb{A}\xi\cdot\xi = \sum_{ij}\mathbb{A}_{ij}\xi_j\xi_i = \sum_{ij}(\delta_{ij} + (a-1)\frac{x_i x_j}{|x|^2})\cdot\xi_j\cdot\xi_i = \sum_i \xi_i^2 + (a-1)\sum_{ij}\frac{x_i\xi_i}{|x|}\cdot\frac{x_j\xi_j}{|x|} =$$

$$= |\xi|^2 + (a-1)\left(\sum_i\frac{x_i\xi_i}{|x|}\right)\left(\sum_j\frac{x_j\xi_j}{|x|}\right) = |\xi|^2 + (a-1)\left(\sum_i\frac{x_i\xi_i}{|x|}\right)^2 \geqslant |\xi|^2.$$

Dále $\overline{u}(x) := x_1|x|^{-1-\varepsilon}$ pro $x \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon \in (0,1)$. Tedy

$$\partial_1\overline{u}(x) = |x|^{-1-\varepsilon} + x_1\cdot(-1-\varepsilon)|x|^{-2-\varepsilon}\cdot\frac{1}{2}|x|^{-1}\cdot 2x_1 = |x|^{-1-\varepsilon} + (-1-\varepsilon)x_1^2|x|^{-3-\varepsilon},$$

$$\partial_2\overline{u}(x) = x_1\cdot(-1-\varepsilon)|x|^{-2-\varepsilon}\cdot\frac{1}{2}|x|^{-1}\cdot 2x_2 = (-1-\varepsilon)x_1x_2|x|^{-3-\varepsilon}.$$

Integrovatelnost těchto derivací můžeme zjistit například převedením do polárních souřadnic:

$$\int_\Omega(\partial_1\overline{u}(x))^p\,dx_1dx_2 = \int_\Omega\left(|x|^{-1-\varepsilon} + (-1-\varepsilon)x_1^2|x|^{-3-\varepsilon}\right)^p dx_1dx_2 =$$

$$= \int_\Omega\left(r^{-1-\varepsilon} + (-1-\varepsilon)\cos^2(\varphi)r^2\cdot r^{-3-\varepsilon}\right)^p r dr d\varphi = \int_\Omega r^{-p\cdot(1-\varepsilon)+1}\cdot h_1(\varphi)drd\varphi,$$

$$\int_\Omega(\partial_2\overline{u}(x))^p\,dx_1dx_2 = \int_\Omega\left((-1-\varepsilon)x_1x_2|x|^{-3-\varepsilon}\right)^p dx_1dx_2 =$$

$$= \int_\Omega\left((-1-\varepsilon)\cos(\varphi)r\cdot\sin(\varphi)r\cdot r^{-3-\varepsilon}\right)^p r dr d\varphi = \int_\Omega r^{p\cdot(-1-\varepsilon)+1}\cdot h_2(\varphi)drd\varphi,$$

kde h_i je nějaká omezená funkce, která „nevynuluje integrál“. Z toho už je jasně vidět (neboť $0 \in \Omega$), že pro integrovatelnsot $p(-1-\varepsilon)+1 > -1$, tj. $p < \frac{2}{1+\varepsilon}$, tj. $\overline{u} \in W^{1,\frac{2}{1+\varepsilon}}(\Omega)$. Tedy vhodnou volbou $\varepsilon \in (0,1)$ dokážeme zařídit $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ pro libovolné $p \in (1,2)$.

Řešení

Nakonec zjistíme, že $\overline{u}$ řeší problém pro naše $\mathbb{A}$:

$$\int_\Omega \mathbb{A}\nabla\overline{u}(x)\cdot\nabla\varphi dS = \int_\Omega \sum_{ij}\left(\delta_{ij}+(a-1)\frac{x_ix_j}{|x|^2}\right)\partial_j\overline{u}(x)\cdot\partial_i\varphi dS =$$

$$= \int_\Omega \sum_{ij}\left(\delta_{ij}+(a-1)x_ix_j|x|^{-2}\right)\left((-1-\varepsilon)\cdot x_1x_j\cdot|x|^{-3-\varepsilon}\right)\partial_i\varphi +$$

$$+\sum_i(\delta_{i1}+(a-1)x_ix_1|x|^{-2})(|x|^{-1-\varepsilon})\cdot\partial_i\varphi dS =$$

$$= \int_\Omega \sum_i(-1-\varepsilon)\cdot x_1x_i\cdot|x|^{-3-\varepsilon}\partial_i\varphi + \sum_i(a-1)(-1-\varepsilon)x_1x_i\overbrace{\left(\sum_j x_j^2\right)}^{|x|^2}|x|^{-5-\varepsilon}\partial_i\varphi +$$

$$+|x|^{-1-\varepsilon}\partial_1\varphi + \sum_i(a-1)x_ix_1|x|^{-3-\varepsilon}\partial_i\varphi dS =$$

$$= \int_\Omega \sum_i x_1x_i|x|^{-3-\varepsilon}((-1-\varepsilon)+(a-1)(-1-\varepsilon)+(a-1))\partial_i\varphi + |x|^{-1-\varepsilon}\partial_1\varphi dS =$$

$$= -\int_\Omega\sum_i\partial_i\left(x_1x_i|x|^{-3-\varepsilon}(-a\varepsilon-1)\right)\varphi + \partial_1\left(|x|^{-1-\varepsilon}\right)\varphi dS + \int_{\partial\Omega}\ldots\varphi\ldots =$$

$$= -\int_\Omega\sum_i\left(x_1|x|^{-3-\varepsilon}+(-3-\varepsilon)x_1x_i^2|x|^{-5-\varepsilon}\right)(-a\varepsilon-1)\varphi + x_1|x|^{-3-\varepsilon}(-a\varepsilon-1)\varphi +$$

$$+(-1-\varepsilon)x_1|x|^{-3-\varepsilon}\varphi dS + 0 =$$

$$= -\int_\Omega 3(-a\varepsilon-1)x_1|x|^{-3-\varepsilon}\varphi + (-3-\varepsilon)(-a\varepsilon-1)x_1|x|^{-3-\varepsilon}\varphi + (-1-\varepsilon)x_1|x|^{-3-\varepsilon}\varphi dS =$$

$$= -\int_\Omega\left(3(-a\varepsilon-1)+(-3-\varepsilon)(-a\varepsilon-1)+(-1-\varepsilon)\right)x_1|x|^{-3-\varepsilon}\varphi dS =$$

$$= -\int_\Omega\left(-1+a\varepsilon^2\right)x_1|x|^{-3-\varepsilon}\varphi dS.$$

Tedy pokud dosadíme $a=\frac{1}{\varepsilon^2}$, tak pro naše $\mathbb{A}$ funkce $\overline{u}$ řeší $\int\mathbb{A}\nabla u\cdot\nabla\varphi$. Tím, že navíc dosadíme $\varepsilon < \frac{2}{p}-1$ jsme splnili zadání.

Příklad (2.)
The goal is to show that maximal regularity cannot hold in Lipschitz domains or when changing the type of boundary conditions. Let $\varphi_0 \in (0, 2\pi)$ be arbitrary and consider $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ given by

$$\Omega := \{(r, \varphi) | r \in (0,1), \varphi \in (0, \varphi_0)\}.$$

Denote $\Gamma_i \subset \partial\Omega$ in the following way $\Gamma_1 := \{(r, 0) | r \in (0,1)\}$, $\Gamma_2 := \{(r, \varphi_0) | r \in (0,1)\}$ a $\Gamma_3 := \{(1, \varphi) | \varphi \in (0, \varphi_0)\}$.

Consider two functions

$$u_1(r, \varphi) := r^{\alpha_1} \sin\left(\frac{\varphi\pi}{\varphi_0}\right), \qquad u_2(r, \varphi) := r^{\alpha_2} \sin\left(\frac{\varphi\pi}{2\varphi_0}\right).$$

- Find the condition on α_i so that $u_i \in W^{1,2}(\Omega)$ – find an explicit formula for ∇u_i – and prove that it is really the weak derivative.

Řešení
Běžné derivace těchto funkcí jsou:

$$\nabla u_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial u_i}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i r^{\alpha_i - 1} \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i \cdot \varphi_0}\right) \\ \frac{\pi}{i \cdot \varphi_0} r^{\alpha_i - 1} \cos\left(\frac{\varphi\pi}{i \cdot \varphi_0}\right) \end{pmatrix}$$

Jelikož tyto derivace jsou spojité, tak pro ně platí per-partes (používám jen $\operatorname{supp}\psi$, abych se vyhnul $r = 0$, ψ i ψ' jsou na doplňku nulové, tedy i integrovaná funkce):

$$\int_\Omega u_i \partial_j \psi = \int_{\operatorname{supp}\psi} u_i \partial_j \psi + 0 \overset{\text{p-p}}{=} -\int_{\operatorname{supp}\psi} \psi \partial_j u_i + \int_{\partial\left(\overline{\operatorname{supp}\psi}\right)} \psi u_i dS_j = -\int \ldots + \int 0 =$$

$$= -\int_{\operatorname{supp}\psi} \psi \partial_j u_i = -\int_\Omega \psi \partial_j u_i + 0.$$

Tedy jsou to slabé derivace. Že $u_i \in W^{1,2}(\Omega)$ platí, pokud jsou integrály druhých mocnin derivací konečné:

$$\int_\Omega \left(\alpha_i r^{\alpha_i - 1} \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i \cdot \varphi_0}\right)\right)^2 = \int_\Omega \alpha_i^2 r^{2\alpha_i - 2} \left(\sin\left(\frac{\varphi\pi}{i \cdot \varphi_0}\right)\right)^2 < \infty,$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\pi}{i \cdot \varphi_0} r^{\alpha_i - 1} \cos\left(\frac{\varphi\pi}{i \cdot \varphi_0}\right)\right)^2 = \int_\Omega \left(\frac{\pi}{i \cdot \varphi_0}\right)^2 r^{2\alpha_i - 2} \left(\cos\left(\frac{\varphi\pi}{i \cdot \varphi_0}\right)\right)^2 < \infty.$$

To bude zřejmě tehdy, když $\alpha_i > \frac{1}{2}$.

- Find the proper condition on α_i so that u_i solves the problem

$$a) \quad -\Delta u_1 = 0 \text{ in } \Omega, \qquad b) \quad u_1 = 0 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \qquad c) \quad u_1 = \sin\left(\frac{\varphi\pi}{\varphi_0}\right) \text{ on } \Gamma_3,$$

$$d) \quad -\Delta u_2 = 0 \text{ in } \Omega, \qquad e) \quad u_2 = 0 \text{ on } \Gamma_1, \qquad f) \quad u_2 = \sin\left(\frac{\varphi\pi}{2\varphi_0}\right) \text{ on } \Gamma_3,$$

$$g) \quad \nabla u_2 \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma_2.$$

Řešení
Rovnice $b), c), e), f)$ splňují funkce z definice (když dosadíme $r = 1$, tak nám zbude pouze sin, když dosadíme $\varphi = 0$ nebo $\varphi = \varphi_0$, tak bude sin nulový).

Norma n je v Γ_2 kolmá na poloměr, tedy

$$\nabla u_2 \cdot n = \frac{\pi}{2\varphi_0} r^{\alpha_2 - 1} \cos\left(\frac{\varphi\pi}{2\varphi_0}\right) = \frac{\pi}{2\varphi_0} r^{\alpha_2 - 1} \cos\left(\frac{\varphi_0\pi}{2\varphi_0}\right) = \ldots \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots \cdot 0 = 0.$$

V polárních souřadnicích $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$. Tedy

$$\Delta u_i = \alpha_i \cdot (\alpha_i - 1) r^{\alpha_i - 2} \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i \cdot \varphi_0}\right) - r^{-2}\left(\frac{\pi}{i \cdot \varphi_0}\right)^2 r^{\alpha_i} \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i \cdot \varphi_0}\right) +$$

$$+ r^{-1}\alpha_i r^{\alpha_i - 1} \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i \cdot \varphi_0}\right) = r^{\alpha_i - 2} \cdot \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i \cdot \varphi_0}\right) \cdot \left(\alpha_i \cdot (\alpha_i - 1) - \left(\frac{\pi}{i \cdot \varphi_0}\right)^2 + \alpha_i\right).$$

Výraz před závorkou je na vnitřku Ω nenulový, tedy musí být nulová závorka:

$$0 = \alpha_i \cdot (\alpha_i - 1) - \left(\frac{\pi}{i \cdot \varphi_0}\right)^2 + \alpha_i = \alpha_i^2 - \left(\frac{\pi}{i \cdot \varphi_0}\right)^2 \implies \alpha_i = \pm\frac{\pi}{i \cdot \varphi_0}.$$

- Find all p's for which $u_i \in W^{2,p}(\Omega)$. What is the criterium on α_i so that $u_i \in W^{2,2}(\Omega)$.

Řešení
Je to podobné jako v prvním bodě, jen chceme druhé derivace, tedy r bude v mocnině $p \cdot (\alpha_i - 2)$, tedy chceme, aby $p \cdot (\alpha_i - 2) > -1$. Tedy kritérium pro α_i je $\alpha_i > 1.5$.

- With the help of the above computation, find $f_i \in L^2(\Omega)$ such that the problems with homogeneous boundary conditions, i.e.,

$$-\Delta v_1 = f_1 \text{ in } \Omega, \qquad v_1 = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

$$-\Delta v_2 = f_2 \text{ in } \Omega, \qquad v_2 = 0 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \qquad \nabla v_2 \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma_2$$

poses unique weak solutions $v_i \in W^{1,2}(\Omega)$ but $v_1 \notin W^{2,2}(\Omega)$ if $\varphi_0 > \pi$ and $v_2 \notin W^{2,2}(\Omega)$ for $\varphi_0 > \frac{\pi}{2}$.

Řešení
Když zadefinujeme $v_i = u_i - \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i\cdot\varphi_0}\right)$, dostaneme splněné okrajové podmínky tohoto problému, neboť v Γ_3 jsme odečetli přesně hodnotu, v Γ_1 jsou právě tyto siny nulové a v Γ_2 je v prvním případě také nulový a v druhém chceme, aby byla druhá část gradientu, což je ale příslušný kosinus, který je přesně v $\nabla u_2 \cdot n$ a je též nulový.

Zbývají f_1 a f_2:

$$f_i = -\Delta v_i = -\Delta u_i + \Delta \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i\cdot\varphi_0}\right) =$$

$$= 0 + \left(0 + \frac{1}{r^2}\cdot\left(\frac{\pi}{i\cdot\varphi_0}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i\cdot\varphi_0}\right) + \frac{1}{r}\cdot 0\right) = \left(\frac{\pi}{r\cdot i\cdot\varphi_0}\right)^2$$

Příklad (3. – Fredholm alternative vs Lax-Milgram lemma vs minimum principe)
Consider $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a Lipschitz domain. Let $\mathbb{A} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ be an elliptic matrix. Assume that $\mathbf{c} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ and $b \geqslant 0$. Consider the problem

$$-\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) + bu + \mathbf{c} \cdot \nabla u = f \text{ in } \Omega, \qquad u = u_0 \text{ on } \partial\Omega.$$

a) Consider the case $b = 0$, $\mathbf{c} = \mathbf{o}$ and $f \in L^2(\Omega)$ fulfilling $f \geqslant 0$. Let $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ and denote $m := \operatorname{essinf}_{\partial\Omega} u_0$. Show that the unique weak solution u satisfies $u \geqslant m$ almost everywhere in Ω.

Důkaz
Jak nám napovídá hint, definujeme $\varphi(x) := (u(x) - m)_-$. Jelikož Ω je omezené a $u \in W^{1,2}$, tak

$$||\varphi||_2^2 = \int_\Omega (u(x) - m)_-^2 dx \leqslant \int_\Omega (u(x) - m)^2 dx = ||u(x) - m||_2^2 \leqslant (||u(x)||_2 + ||m||_2)^2 < \infty$$

Zároveň $u_0 = u \geqslant m$ na $\partial\Omega$, tedy φ je na $\partial\Omega$ nulové.

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega) : \int_\Omega (\nabla\varphi(x))\psi(x)dx = \int_\Omega \nabla((u(x) - m)_-)\psi(x)dx =$$

$$= \int_{u(x)>m} \nabla(u(x) - m)\psi(x)dx + \int_{u(x)\leqslant m} 0\psi(x)dx = \int_{u(x)>m} (\nabla u(x))\psi(x)dx =$$

$$= \int_\Omega (\nabla\chi_{u(x)>m} u(x)) \cdot \psi(x)dx.$$

Tedy $\nabla\varphi = \nabla u \chi_{u(x)>m}$, tedy $||\nabla\varphi||_2 < ||\nabla u||_2 < \infty$, tj. $\varphi \in W_0^{1,2}$.

Nyní použijeme φ jako testovací funkci:

$$\int_\Omega -\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u)\varphi = \int_\Omega f\varphi$$

$$\underbrace{\int_\Omega \mathbb{A}\nabla u \nabla\varphi}_{\geqslant C_1|\nabla u|^2 \geqslant 0} = \int_\Omega \underbrace{f}_{>0} \underbrace{\varphi}_{\leqslant 0}$$

Tedy levá strana $\geqslant 0$, pravá $\leqslant 0$, tudíž se rovnají nule. Aby se pravá strana rovnala nule (f je nenulové), tak musí být $\varphi = 0$ skoro všude, tedy $u \geqslant m$ skoro všude na Ω. □

b) Consider $b > 0$ and $\mathbf{c}$ arbitrary. Prove that for any $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ and any $f \in L^2(\Omega)$ there exists a weak solution.

Důkaz
Nejprve si podle hintu převedeme úlohu na důkaz tvrzení, že

$$-\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) + bu + \mathbf{c} \cdot \nabla u = 0 \text{ v } \Omega$$

má pouze jedno řešení $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $u = 0$.

Převedení bych moc rád udělal tak, že místo f na pravé straně použiji $f - bu_0 - \mathbf{c} \cdot \nabla u_0 + \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u)$, protože to k tomu hrozně nabádá, navíc mě nenapadá nic jiného, co by šlo použít, než Fredholmova alternativa a nenapadá mě žádný jiný postup, jak se dostat z FA na boundary value problém. Jenže $\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u)$ prostě nemusí být v L^2. Asi mi něco jednoduchého uniká, ale bohužel už nemám moc času do deadlinu. Takže řekněme, že nová pravá strana je v L^2.

Potom z Fredholmovy alternativy a z tvrzení (pokud tedy platí, což si dokážeme dále) plyne, že problém

$$-\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) + bu + \mathbf{c} \cdot \nabla u = f - bu_0 - \mathbf{c} \cdot \nabla u_0 + \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) \text{ v } \Omega, \qquad u = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

má (právě jedno) řešení $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Pokud tedy zvolíme $\tilde{u} = u + u_0$, pak $\tilde{u}$ je slabé řešení problému

$$-\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla \tilde{u}) + b\tilde{u} + \mathbf{c} \cdot \nabla \tilde{u} = f \text{ v } \Omega, \qquad \tilde{u} = u_0 \text{ na } \partial\Omega,$$

neboť „všechno“ je zde lineární, takže „přičtením“ u_0 k u na levé straně se přičtou odpovídající členy na pravé. $\square$

Důkaz
Mějme u řešící $-\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) + bu + \mathbf{c}\cdot\nabla u = 0$ v Ω.

Nyní dokážeme, že pro nějaké M je $|u| < M$ skoro všude, tedy $u \in L^\infty(\Omega)$ a $\|u\|_{L^\infty} \leqslant M$. Pokud $d = 1$, tak je z věty o vnoření u spojité, takže se omezenost může „rozbíjet“ pouze na hranici Ω, ale my víme, že $\operatorname{tr} u = 0$. Pro tuto část důkazu tedy předpokládejme $d > 1$.

Ať $M > 0$ a $\varphi_M := (u - M)_+$. Protože je $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, tak $\varphi_M \in W^{1,2}(\Omega)$ ze stejných důvodů jako v a), $\nabla\varphi_M = \nabla u \cdot \chi_{u\geqslant M}$, a navíc $\varphi_M \in W_0^{1,2}$, neboť u zůstává 0 tam, kde 0 bylo.

Tedy ho můžeme použít jako testovací funkci: $\int \mathbb{A}\nabla u\cdot\nabla\varphi_M + bu\varphi_M + \mathbf{c}\cdot\nabla u\varphi_M = \int 0\cdot\varphi_M$. První a třetí člen už je na $u < M$ stejně nulový, tedy můžeme psát

$$\int \mathbb{A}\nabla\varphi_M\cdot\nabla\varphi_M + bu\varphi_M = -\int \mathbf{c}\cdot\nabla\varphi_M\varphi_M.$$

Levou stranu můžeme zezdola odhadnout pomocí toho, že $b > 0$, $\varphi_M \geqslant 0$ a tam, kde $\varphi_M \neq 0$, $u \geqslant M > 0$. Navíc $\mathbb{A}$ je eliptické, takže

$$c_1\|\nabla\varphi_M\|_2^2 = \int c_1\|\nabla\varphi_M\|_{\mathbb{R}^d}^2 \leqslant \int \mathbb{A}\nabla\varphi_M\cdot\nabla\varphi_M + bu\varphi_M = -\int \mathbf{c}\cdot\nabla\varphi_M\varphi_M.$$

Levou část můžeme shora odhadnout pomocí dvakrát použité Hölderovy nerovnosti:

$$-\int \mathbf{c}\cdot\nabla\varphi_M\varphi_M \leqslant \|c\|_\infty\cdot\|\nabla\varphi_M\|_2\cdot\|\varphi_M\|_2.$$

Nyní znovu použijeme Hölderovu nerovnost, tentokrát na $\|\varphi_M\|_2$. Protože ψ je na $u < M$ nulové, můžeme psát (jak bylo na přednášce)

$$\|\varphi_M\|_2 = \sqrt{\int \varphi_M^2} = \sqrt{\int \varphi_M^2\chi_{u\geqslant M}} \leqslant \sqrt{\left(\int \varphi_M^{2p}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int \chi_{u\geqslant M}^q\right)^{\frac{1}{q}}} = \|\varphi_M\|_{2p}\cdot\left(\int \chi_{u\geqslant M}\right)^{\frac{1}{2q}},$$

kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avšak musíme použít správné $p \neq 1$ ($p = 1$ nám nedává nic nového), aby $\varphi_M \in L^{2p}$. To můžeme z věty o vnoření Sobolevových prostorů: pokud $d = 2$, tak $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^r$ pro r jakékoliv, takže není co řešit. Pokud $d > 2$, tak můžeme vybrat $2p = r = \frac{d\cdot 2}{d-2} = \frac{2}{1-(2/d)} > 2$ ($p > 1$).

Nakonec $\infty > \int u \geqslant \int_{u>M} u \geqslant \int_{u>M} M$, tedy míra $\{u > M\}$ se musí pro rostoucí M zmenšovat k nule. Takže můžeme zvolit libovolně malé $\left(\int \chi_{u\geqslant M}\right)^{\frac{1}{2q}}$ v nerovnosti:

$$c_1\cdot C\cdot\|\nabla\varphi_M\|_2\cdot\|\varphi_M\|_{2p} \underset{nerov}{\overset{\text{Sob.}}{\leqslant}} c_1\|\nabla\varphi_M\|_2^2 \leqslant -\int \mathbf{c}\cdot\nabla\varphi_M\varphi_M \leqslant \|c\|_\infty\cdot\|\nabla\varphi_M\|_2\cdot\|\varphi_M\|_{2p}\left(\int \chi_{u\geqslant M}\right)^{\frac{1}{q}},$$

tedy $\|\nabla\varphi_M\|_2 = 0$ (nebo $\|\varphi_M\|_2 = 0$, ale to bychom byli hotovi). Tudíž se nám celá rovnost s testovací funkcí φ_M stala $\int b\cdot u\cdot\varphi_M = 0$, ale $b > 0$, $u > 0$ (kde $\varphi_M \neq 0$), takže musí být $\varphi_M = 0$ skoro všude, tedy $u \leqslant M$ skoro všude. □

Důkaz
Úplně stejně dostaneme $u \geqslant -M'$ pro nějaké $M' > 0$ z $\varphi_{M'} = (u+M)_-$, jelikož pak

$$\int \mathbb{A}\nabla\varphi_{M'} \cdot \nabla\varphi_{M'} + b(-u)(-\varphi_{M'}) = -\int \mathbf{c} \cdot \nabla\varphi_{M'}\varphi_{M'}.$$

má úplně stejné vlastnosti jako rovnice výše, jelikož v prvním členu je druhá mocnina, v druhém je to zase kladné a vpravo omezujeme vlastně absolutní hodnotu (víme, že pravá strana je nezáporná, takže i levá musí být) normami, takže na znamínkách nezáleží. □

Důkaz
Nyní máme tedy dokázáno, že u je „omezená skoro všude", tedy $u \in L^\infty$. Tedy i $u^k \in L^\infty$ pro $k \in \mathbb{N}$, navíc $\nabla u^k = k \cdot u^{k-1}\nabla u$, protože $\nabla(u \cdot \ldots \cdot u) = u\nabla(u \cdot \ldots \cdot u) + (\nabla u)(u \cdot \ldots \cdot u)$ a $u^{k-1} \in L^\infty$, tedy $u^k \in W^{1,2}(\Omega)$. Nakonec $\operatorname{tr} u^k|_{\partial\Omega} = 0$, neboť

$$\operatorname{tr} u^k|_{\partial\Omega} = u^k|_{\partial\Omega} = (u|_{\partial\Omega})^k = (\operatorname{tr} u|_{\partial\Omega})^k = 0^k = 0.$$

Tedy $u^k \in W_0^{1,2}$.

Použijme u^k pro k liché jako testovací funkci:

$$\int \mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla u^k = \int k \cdot u^{k-1}\mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla u = \int -bu \cdot u^k - u^k\mathbf{c} \cdot \nabla u.$$

Na levou stranu můžeme použít elipticitu $\mathbb{A}$ (u^{k-1} je sudé), napravo je $-bu^{k+1}$ určitě záporné, tedy ji můžeme zvětšit přidáním absolutní hodnoty do části s $\mathbf{c}$:

$$\int c_1(\nabla u)^2 \cdot k \cdot u^{k-1} \leqslant -\int bu^{k+1} + \int |\mathbf{c} \cdot \nabla u| \cdot |u^{(k-1)/2}| \cdot |u^{(k+1)/2}|.$$

Chtěli bychom se zbavit integrálu s $\mathbf{c}$, tedy rozdělíme výraz jako výše a použijeme Yangovu nerovnost pro koeficienty $p = q = 2$, tj. $\left(|\mathbf{c} \cdot \nabla u| \cdot |u^{(k-1)/2}|\right) \cdot |u^{(k+1)/2}| \leqslant \frac{|\mathbf{c}\cdot\nabla u|^2 \cdot u^{k-1}}{2} + \frac{u^{k+1}}{2}$:

$$\int (c_1 \cdot k - |c|/2)(\nabla u)^2 \cdot u^{k-1} \leqslant \int (-b + |c|/2)u^{k+1}.$$

Hölderovou nerovností (pro $1, \infty$) (a tím, že na levé straně vytýkáme kladnou a zmenšujeme zápornou část a na pravé vytýkáme zápornou a zvětšujeme kladnou)

$$(c_1 \cdot k - \|c\|_\infty/2) \int (\nabla u)^2 \cdot u^{k-1} \leqslant (-b + \|c\|_\infty/2) \int u^{k+1},$$

$$\int (\nabla u)^2 \cdot u^{k-1} \leqslant \frac{-b + \|c\|_\infty/2}{c_1 \cdot k - \|c\|_\infty/2} \|u^{\frac{k+1}{2}}\|_2^2.$$

Teď už stačí jen $\int(\nabla u)^2 \cdot u^{k-1} \geqslant \text{konst}\,\|u\|_{k+1}$. Takže konstantu na pravé straně můžeme libovolně zmenšit, takže $\|u\|_{k+1} = 0$, tedy $u = 0$ skoro všude. □

Příklad (4. – Lax-Milgram lemma vs Fredholm alternative II)
Consider $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a Lipschitz domain. Let $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Consider the problem: For given $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$ find $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^3$ solving

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + a u_3 &= f_1 && \text{in } \Omega, \\ -\Delta u_2 + b u_3 &= f_2 && \text{in } \Omega, \\ -\Delta u_3 + c u_1 + d u_2 &= f_3 && \text{in } \Omega, \\ u_1 = u_2 = u_3 &= 0 && \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Under which conditions on a, b, c, d the system has for any $\mathbf{f}$ a weak solution?

Řešení
Chtěli bychom použít Lax-Milgram. K tomu potřebujeme, aby na levé straně byl eliptický bilineární operátor. Operátor si definujeme přímočaře (tak aby odpovídal představě slabého řešení). Pro $V = (W_0^{1,2}(\Omega))^3$ definujme $B : V \times V \to \mathbb{R}$ jako

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + au_3v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 + bu_3v_2 + \nabla u_3 \cdot \nabla v_3 + cu_1v_3 + du_2v_3.$$

Zřejmě je lineární. Také je „V-bounded“, neboť ($\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{1,2} = \|\cdot\|_{(W^{1,2}(\Omega))^3} = \|\cdot\|_V$)

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + au_3v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 + bu_3v_2 + \nabla u_3 \cdot \nabla v_3 + cu_1v_3 + du_2v_3 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{ij} \left| \int_\Omega \partial_j u_i \partial_j v_i \right| + |a| \cdot \left| \int_\Omega u_3 v_1 \right| + |b| \cdot \left| \int_\Omega u_3 v_2 \right| + |c| \cdot \left| \int_\Omega u_1 v_3 \right| + |d| \cdot \left| \int_\Omega u_2 v_3 \right| \overset{\text{Hölder}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \sum_{ij} \|\partial_j u_i\|_2 \|\partial_j v_i\|_2 + |a| \cdot \|u_3\|_2 \|v_1\|_2 + |b| \cdot \|u_3\|_2 \|v_2\| + |c| \cdot \|u_1\|_2 \|v_3\|_2 + |d| \cdot \|u_2\|_2 \|v_3\|_2 \leqslant$$

$$= \max(1, |a|, |b|, |c|, |d|) \left(\sum_i \left(\sum_j \|\partial_j u_i\|_2 + \|u_i\|_2 \right) \right) \cdot \left(\sum_i \left(\sum_j \|\partial_j v_i\|_2 + \|v_i\|_2 \right) \right) \overset{*}{\leqslant}$$

$$\leqslant (3d+1)^2 \cdot \max(1, |a|, |b|, |c|, |d|) \|\mathbf{v}\|_{1,2} \cdot \|\mathbf{u}\|_{1,2}.$$

$$* : \qquad \sum_i \alpha_i \leqslant n \cdot \max_i \alpha_i = n \cdot \sqrt{\left(\max_i \alpha_i \right)^2} \leqslant n \cdot \sqrt{\sum_i \alpha_i^2}, \qquad i \in [n] = \{1, \ldots, n\}, \alpha_i \geqslant 0.$$

Aby byl „V-coercive“, potřebujeme, aby $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant c_1 \|u\|_V^2$:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_1 + au_3u_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla u_2 + bu_3u_2 + \nabla u_3 \cdot \nabla u_3 + cu_1u_3 + du_2u_3 =$$

$$= \int_\Omega \sum_{ij} (\partial_j u_i)^2 + (a+c)u_3u_1 + (b+d)u_3u_2.$$

Kdyby $(a+c)$ nebylo 0, pak můžeme zvolit např. $\pm u_1 = u_3 = e^{\sqrt{\frac{a+c}{2}}t}$, $u_2 = 0$ (znamínko podle toho, zda je $(a+c)$ záporné nebo kladné), pak $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \ngeqslant c_1 \|u\|_V^2$. Obdobně pro $(b+d)$. Tedy dostáváme podmínky $a+c = 0$, $b+d = 0$. Jakmile ale máme tuto podmínku, tak

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_\Omega \sum_{ij} (\partial_j u_i)^2 = \sum_{ij} \int_\Omega (\partial_j u_i)^2 = \|\nabla u\|^2_{(L^2(\Omega))^{3d}}$$

Z Poincarého nerovnosti máme $\|u\|_2 \leqslant C \cdot \|\nabla u\|_2$, tj. $\frac{1}{C^2+1} \left(\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \right) \leqslant \|\nabla u\|_{1,2}$, tedy $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant c_1 \|u\|_V$.

Tedy pokud $a + c = 0 = b + d$, tak je operátor B eliptický bilineární operátor a tedy podle Lax-Milgram existuje pro každé $\mathbf{f} \in (L^2\Omega)^3$ právě jedno slabé řešení problému ze zadání.