1 Dynamické systémy

Definice 1.1 (Dynamický systém)

(φ, Ω), $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ $\varphi(t, x)$.

- $\varphi(0, x) = x$;
- $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$
- φ je spojité.

Definice 1.2 (Orbit)

$\gamma^+(x_0) = \{\varphi(t, x_0) | t \geqslant 0\}$ je pozitivní orbit.

$\gamma^-(x_0) = \{\varphi(t, x_0) | t \leqslant 0\}$ je negativní orbit.

$\gamma(x_0) = \{\varphi(t, x_0) | t \in \mathbb{R}\}$ je plný orbit.

Definice 1.3 (Pozitivně, negativně a úplně invariantní)

(φ, Ω) dynamický systém, $M \subset \Omega$.

M je pozitivně invariantní $\equiv \forall x \in M : \gamma^+(x) \subset M$.

M je negativně invariantní $\equiv \forall x \in M : \gamma^-(x) \subset M$.

M je úplně invariantní $\equiv \forall x \in M : \gamma(x) \subset M$.

Poznámka
$\gamma^+(x_0)$ je pozitivně invariantní, $\gamma^-(x_0)$ je negativně invariantní a $\gamma(x_0)$ je úplně invariantní.

Definice 1.4

$$\omega(x_0) = \{y \in \Omega | \exists \{t_k\}_{k=1}^{\infty}, t_k \to \infty : \varphi(t_k, x_0) \to y\},$$
$$\alpha(x_0) = \{y \in \Omega | \exists \{t_k\}_{k=1}^{\infty}, t_k \to -\infty : \varphi(t_k, x_0) \to y\}.$$

Poznámka (To je ekvivalentní)
$\omega(x_0) = \{y \in \Omega | \forall \varepsilon > 0\ \forall T > 0\ \exists t \geqslant T : |\varphi(t_r, x_0) - y| < \varepsilon\}$.

Lemma 1.1

$\omega(x_0) = \bigcap_{\tau \geqslant 0} \overline{\gamma^+(\tau, x_0)}$.

Důkaz
„$\subseteq$“: $y \in \omega(x_0)$: $\forall \varepsilon > 0\ \forall T\ \exists t \geqslant T : |\varphi(t, x_0) - y| < \varepsilon$. Chceme:

$$\forall \tau \geqslant 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists z \in \gamma^+(\tau, x_0) : |y - z| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \tau \geqslant 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists s \geqslant \tau, z = \varphi(s, x_0) : |y - \varphi(s, x_0)| < \varepsilon.$$

„$\supseteq$“: $\forall \tau \geqslant 0\ y \in \overline{\gamma^+(\tau, x_0)} \implies$

$$\implies \forall \varepsilon\ \exists s \geqslant \tau : |\varphi(s, x_0) - y| < \varepsilon.$$

□

Věta 1.2 (Vlastnosti ω-limitní množiny)

Nechť (φ, Ω) je dynamický systém, $x_0 \in \Omega$. Potom

1. *$\omega(x_0)$ je uzavřená, úplně invariantní.*
2. *Pokud $\gamma^+(x_0)$ je relativně kompaktní v $\mathbb{R}^n$, pak $\omega(x_0) \neq \emptyset$, $\omega(x_0)$ je kompaktní, souvislá.*

Důkaz
1. $\omega(x_0)$ je průnik uzavřených množin, tedy uzavřená. $y \in \omega(x_0)\ \exists t_k \nearrow \infty\ \varphi(t_k, x_0) \to y$.

$$\begin{aligned} s_k = t_k + t \qquad & \varphi(s_k, x_0) = \varphi(t_k + t, x_0) = \varphi(t, \varphi(t_k, x_0)) \\ t_k \to \infty, \varphi\text{spojitá} \qquad & \varphi(s_k, x_0) = \varphi(t, \varphi(t_k, x_0)) \to \varphi(t, y) \end{aligned}$$

2. $\exists K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní $\gamma^+(x_0) \subset K$. a) pokud $t_n \geqslant 0, t_n \to \infty\ \{\varphi(t_n, x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost $\implies \exists \{t_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, podposloupnost, $\exists y \in \Omega \varphi(t_{n_k}, x_0) \to y$. Pak $y \in \omega(x_0)$.

b) $\omega(x_0)$ je tedy úplná a omezená, takže kompaktní. c) ať $\omega(x_0)$ je nesouvislá, tedy $\omega(x_0) \subseteq U \cup V$, U, V otevřené disjunktní neprázdné, $U, V \subseteq K$. Vezměme $y \in \omega(x_0) \cap U$, $z \in \omega(x_0) \cap V$. Nechť t_n je posloupnost taková, že $\varphi(t_{2n} x_0) \to y$, $\varphi(t_{2n+1}, x_0) \to z$, $t_{2n} < t_{2n+1}$, $\varphi(t_{2n}, x_0) \in U$, $\varphi(t_{2n+1}, x_0) \in V$. $F = K \backslash (U \cup V)$ uzavřená, tedy $\exists s_n \in (t_{2n}, t_{2n+1}) : \varphi(s_n, x_0) \in F$. Tedy $\{\varphi(s_n, x_0)\}$ je omezená posloupnost $\implies \exists$ podposloupnost konvergující k $w \in F$. □

Definice 1.5 (Topologická konjugovanost)

(φ, Ω), ψ, Θ dynamické systémy. $\exists : \Omega \to \Theta$ homeomorfismus (bijekce, spojité, spojitá inverze):

$$\forall x \in \Omega\ \forall t \in \mathbb{R} \qquad h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x)).$$

Poznámka
Dá se zobecnit ještě zobrazováním časů.

Věta 1.3 (O rektifikaci)

$\dot{x} = f(x), f(x_0) \neq 0$, (φ, Ω) příslušný dynamický systém. $\dot{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $y(0) = 0$ a (ψ, Θ) je příslušný dynamický systém. Potom (φ, Ω), (ψ, Θ) jsou lokálně topologicky konjugované ($\exists U$ okolí $x_0 \in \Omega$ a V okolí $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$ taková, že $\exists g : U \to V$ homeomorfismus $g(\varphi(t,x)) = \psi(t, g(x))$ $\forall x \in U$, $\forall t : \varphi(t,x) \in U$).

Důkaz
BÚNO $f_1(x_0) = \alpha \neq 0$ (první souřadnice funkce f) a $x_0 = \mathbf{o}$. Buď $\tilde{V}$ okolí $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$ $G : \tilde{V} \to \mathbb{R}^n$, $G(y_1, \ldots, y_n) = \varphi(y, (0, y_2, \ldots, y_n))$. Chceme ukázat, že G je invertibilní na nějakém okolí.

$$\frac{\partial G(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_1}|_{(0,\ldots,0)} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t = y_1, (0, y_2, \ldots, y_n))|_{y_1=0,\ldots,y_n=0} = f(\varphi(y_1(0, y_2, \ldots, y_n)))|_{y_1=0,\ldots,y_n=0} = f(\varphi$$

$$\frac{\partial G(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j}|_{(0,\ldots,0)} = \lim_{h \to 0} \frac{G(0, \ldots, h, \ldots, 0) - G(0, \ldots, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(0, \ldots, h, \ldots, 0)^T - (0, \ldots, 0)^T}{h} = (0$$

Tedy $\nabla G(0, \ldots, 0)$ je „jednotková matice, až na to, že a_{11} je α“, tudíž podle věty o inverzi funkce $\exists V \subseteq \tilde{V}$ okolí 0, $\exists U$ okolí bodu x_0 tak, že $G : V \to U$ je homeomorfismus. Položme $g = G^{-1}$.

Nyní už stačí $g(\varphi(t, x_0)) = \psi(t, g(x_0))$ $\forall x_0 \in U$ $\forall t : \varphi(t, x_0) \in U$. $\varphi(t, x_0) = G(\psi(t, g(x_0)))$

3. $x \in U = G(V)$ $\exists y \in V$ $x = G(y)$

$$x = \varphi(y, (x_{01}, x_{02} + y_2, \ldots, x_{0n} + y_n))$$

$$\varphi(t, x) = \varphi(t, \varphi(y, (x_{01}, x_{02} + y_2, \ldots, x_{0n} + y_n))) = \varphi(t + y, (x_{01}, x_{02} + y_2, \ldots, x_{0n} + y_n))$$

□

Věta 1.4 (La Salle invariance principle)

$$x' = f(x), (\varphi, \Omega) \quad \varphi : \mathbb{R} \to \Omega, floc.Lip.$$

$$\exists V : \Omega \to \mathbb{R},\ \textit{bounded from below.}$$

$$\exists l \in \mathbb{R} : \Omega_l = \{x \in \Omega | V(x) \leqslant l\} - -bounded$$

$$\dot{V}_f(x) := \nabla V(x) \cdot f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} \cdot f_j(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in \Omega_l.$$

$$R = \left\{ x \in \Omega_l | \dot{V}_f(x) = 0 \right\}, \quad M = \left\{ y \in R | \gamma^+(y) \subset R \right\}.$$

Then $\forall x \in \Omega_l : \omega(x) \subset M$.

Důkaz

Let $x \in \Omega_l$. $\forall y \in \omega(x)\ \exists t_k \nearrow \infty : x(t_k) \to y$. $\varphi(t, x_0) = x(t)$.

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot x'(t) = \dot{V}_f(x(t)) \leqslant 0.$$

$V(x(t)) \searrow$ and $\exists C : \forall x \in \Omega : V(x) > -C$ so $\exists \lim_{t\to\infty} V(x(t)) = c$.

So $\exists c\ \forall y \in \omega(x_0) V(y) = c$. $V(x(t_k)) \to V(y) = c$.

$$\gamma^+(y) \subset \omega(x_0)\ V(\varphi(t, y)) = c\ \forall t \geqslant 0 \implies$$

$$\implies \frac{d}{dt} V(\varphi(t, y)) = 0.$$

$\gamma^+(y) \subset R$ in particular, $y \in R$. Hence $y \in M$. □

2 Poincaré-Bendixson theory

Věta 2.1 (Poincaré-Bendixson)

Let $p \in \Omega$*,* Ω *open connected.* $\omega(p)$ *doesn't contain stat points and* $\gamma^+(p)$ *is relatively compact (*$\gamma^+(p)$ *is compact). Then* $\omega(p) = \Gamma$*-periodic orbit.*

Věta 2.2 (Bendixon-Dulas)

Ω*-simply connected (*$\forall$ *closed Jordan curve* γ *in* Ω*,* $\mathrm{int}(\gamma) \subset \Omega$*).* $\exists B : \Omega \to \mathbb{R} : (\div B)(x) = \frac{\partial B}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial B}{\partial x_2}(x_1, x_2) > 0$ *for almost every* $x \in \Omega$*. Then* $x' = f(x)$ *doesn't have nontrivial periodic solutions.*

Definice 2.1 (Transverzála)

Σ segment on a line such that $\forall p \in \Sigma : \Sigma \nparallel f(p)$.

Lemma 2.3

Σ *transverzála,* $p \in \Sigma \subset \Omega$*. Then* $\exists \tilde{\subset} U$ *neighborhood of* p*.* $\exists \Delta > 0$ *such that*

$$\forall y \in \tilde{U} : \varphi(t, y) \subset U\ \forall t : |t| < \Delta \wedge \exists \tau : |\tau| < \frac{\Delta}{2} : \varphi(\tau, y) \in \Sigma \cap \tilde{U}.$$

Důkaz
Use Th. of rect. □

Lemma 2.4

Let $p \in \Omega$ *and assume that* $|\gamma^+(p) \cap \Sigma| \geqslant 3$, *i. e.* $\exists t_1 < t_2 < t_3$ $\varphi(t_j, p) \in \Sigma$, $j = 1, 2, 3$. *Then* $\varphi(t_2, p)$ *lie between* $\varphi(t, p)$ *and* $\varphi(t_3, p)$.