Příklad
Pro soustavu $x' = x$, $y' = x + y$

1. najděte vlastní čísla a (zobecněné) vlastní vektory příslušné matice;
2. najděte první integrál;
3. najděte obecné řešení;
4. načrtněte chování řešení v celé rovině;
5. zkontrolujte své výsledky pomocí softwaru sage.

Řešení (1.)
Charakteristický polynom je $(1-\lambda)(1-\lambda)$, který má nulové body $\lambda = 1$, tedy vlastní číslo (dvojnásobné) je 1. Když odečteme λI, tak dostaneme matici $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, takže prvním vlastním vektorem je např. $(0,1)^T$. Ten dostaneme tak, že tuto matici vynásobíme vektorem $(1,0)^T$, což je tím pádem druhý vlastní vektor.

Řešení (2.)
První integrál najdeme tak, že rovnice spolu vynásobíme, použijeme první rovnici na to, abychom x' převedli na x a upravíme to do tvaru „derivace podílu“, takže to budeme moci zintegorvat:

$$x' \cdot (x+y) = y' \cdot x, \qquad x' \cdot x = y' \cdot x - x' \cdot y, \qquad x^2 = y' \cdot x - x' \cdot y,$$

$$1 = \frac{y' \cdot x - y \cdot x'}{x^2}, \qquad t + C = \frac{y}{x}, \qquad C = \frac{y}{x} - t.$$

Tím jsme dostali první integrál $\frac{y}{x} - t$.

Řešení (3.)
Vyřešíme nejprve první rovnici, protože neobsahuje y: $x' = x \implies x = C_1 \cdot e^t$. Druhou rovnici pak vyřešíme nejprve homogenní rovnici: $y' = y \implies y = C \cdot e^t$. Celou rovnici $y' = C_1 \cdot e^t + y$ pak můžeme řešit variací konstant: $C = C(t) = A + B \cdot t$.

$$(C(t) \cdot e^t)' = (A \cdot e^t + B \cdot t \cdot e^t)' = A \cdot e^t + B \cdot e^t + B \cdot t \cdot e^t = C_1 \cdot e^t + A \cdot e^t + B \cdot t \cdot e^t = x + C(t) \cdot e^t.$$

Z toho už vidíme, že $B = C_1$ a A můžeme zvolit libovolně, tedy $y = (C_2 + C_1 \cdot t) \cdot e^t$.

Řešení (4.)
$\operatorname{sgn} x' = \operatorname{sgn} x$ a $\operatorname{sgn} y' = \operatorname{sgn} x + y$, tj. $\operatorname{sgn} y'$ záleží na tom, zda jsme „nad“, „na“ nebo „pod“ osou $x = -y$. Takže jsem načrtl gradient na osách x a y a na přímce $x = -y$. S tím, že velikost gradientu je zřejmě přímo úměrná vzdálenosti od počátku, už mi vyšel obrázek podobný tomu v softwaru sage.

Řešení (5.)
https://sagecell.sagemath.org/?z=eJxNj9EKgyAUQN-D__uEShcpcs8Ye-5NByNJNcBkmTf9-1zXYnu5R5JzrJj0libCy0BEGiDhTnnCAVBYSUbS
Xslg6pMW6MG7qFpwftVF2olRHDjoxDhThKDnIzOnHd28ma2a1DuRpZucJ3zWLM3NYh7PAMup71AcVAwVf1ZHgqVk5XCHtWFfQUCvxBR
bR-sXEGGBOYOrUCfZRBRekHXMjb9zhP5b-__7ZdH-5F2RvrbUTB&lang=sage&interacts=eJyLjgUAARUAuQ==

```
var('y')
fx = x
fy = x + y
a = 0.5
p1 = plot_vector_field((fx, fy), (x, -a, a), (y, -a, a), gridlines='minor', plot_points=30)

p2 = text( r"$x' = %s, \ y' = %s$" %(latex(fx), latex(fy)) , (0, a/10))

total_plot = p1 + p2
total_plot.show()
```

Příklad
Načrtněte chování řešení v blízkosti stacionárních bodů soustavy

$$x' = 2x + y^2 - 1,$$

$$y' = \sin x - y^2 + 1.$$

Zkontrolujte své výsledky pomocí softwaru sage.

Řešení

Nejprve musíme najít stacionární body, tedy $x' = 0$, $y' = 0$. Součtem dostaneme $2x + \sin(x) = 0$, což splňuje pouze $x = 0$, a z první rovnice můžeme vyjádřit $y = \pm\sqrt{1-2x} = \pm 1$.

Dále $\nabla(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & \cos(x) \\ 2y & -2y \end{pmatrix}$. Tedy v bodě $(0, 1)$ je to $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, v bodě $(0, -1)$ je to $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Vlastní čísla jsou tedy λ splňující $(2-\lambda)(\mp 2-\lambda) \mp 2 = \lambda^2 + (\pm 2 - 2)\lambda + \mp 6 = 0$, tedy u první bodu $\lambda = \pm\sqrt{6}$ a druhého bodu $\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{2} = 2 \pm i\sqrt{2}$. Tedy oba stacionární body jsou hyperbolické.

Protože v bodě $(0, -1)$ má tato matice dvě různá komplexně sdružená vlastní čísla a číslo v druhém řádku prvního sloupce je záporné, řešeni tvoří pravotočivou spirálu.

V bodě $(0, 1)$ má matice vlastní vektor příslušící zápornému vlastnímu číslu (tedy stabilní prostor) $(1, -2-\sqrt{6})^T$. To znamená, že za pomoci Hartman-Grobmanovy věty (určuje, že v nějakém směru půjde řešení k tomuto bodu a v nějakém jiném od něho, jelikož matice má jeden stabilní a jeden nestabilní podprostor) a věty o stabilní varietě (říká, že stabilní směr řešení linearizované i původní rovnice bude tentýž) můžeme říci, že na přímce $(0, 1)^T + s \cdot (1, -2-\sqrt{6})^T$ se budou řešení blížit k bodu $(0, 1)$, kdežto ve směru „kolmém“ se budou vzdalovat.

A tak nám vyjde něco takovéhoto:
https://sagecell.sagemath.org/?z=eJxNj9EKwiAUhu-DvcNhbKhl0RZd7k2iIbWVYHOoLH37_m1B3cjnp_z_OZNynCUmsk0fqaF6G6817Sjh3FMFm2C9HngUEGl5hFaw1eGcbcYKNBob2qm7BevaXnfmznkfJfVJSOKAvZKkZk4_fjh9N3rofMNeerCOyTVmtHoIvjkdMRLia8SHLgZOLi8iw630ki6UVixyKrlR-IFGpH4xCUGoO85VS06wQZl2LpjHrbDEWP_bg3_aNxcfDxBJ-Q==&lang=sage&interacts=eJyLjgUAARUAuQ==

```
var('y')
fx = 2*x^2 + y^2 - 1
fy = sin(x) - y^2 + 1
a = 1.5
p1 = plot_vector_field((fx, fy), (x, -a, a), (y, -a, a), gridlines='minor', plot_points=30)

p2 = text( r"$x' = %s, \ y' = %s$" %(latex(fx), latex(fy)) , (0, a))

total_plot = p1 + p2
total_plot.show()
```