

1 Preliminaries

Definice 1.1 (Slabá derivace)

Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Říkáme, že $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ je slabou derivací f podle i -té proměnné, pokud platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \partial_i \varphi d\lambda^n = - \int_{\mathbb{R}^n} g \varphi d\lambda^n \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Definice 1.2 (Značení)

$$\partial_i f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + e_i h) - f(x)}{h}, \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix},$$

$$D_i f \text{ slabá derivace dle } i\text{-té proměnné}, \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ D_n f(x) \end{pmatrix},$$

$D \cdot$ bude také značit derivaci distribuce? (Distribuční derivaci?)

$f \in Lip(X, Y)$ jsou všechny Lipschitzovská zobrazení (tj. $\varrho_Y(f(a), f(b)) \leq lip(f) \cdot \varrho_X(a, b)$) z X do Y .

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ (symetrický rozdíl množin).}$$

Definice 1.3 (Lebesgueova–Stieltjesova míra)

μ míra vytvořená $M : I(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$ pomocí Caratheodorovy konstrukce se nazývá Lebesgueova–Stieltjesova míra.

Definice 1.4 (Radonova míra)

$\mathcal{M}_{loc}^+(\Omega)$ je prostorem všech Borelovských měr na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, které jsou vnitřně regulární ($\mu(E) = \sup \{\mu(K) | K \subset E\}$), lokálně kompaktní.

Pokud navíc $|\mu| < \infty$, pak je to prostor \mathcal{M}^+ . $\mathcal{M}_{loc}(\Omega) = \mu^+ - \mu^-$.

Definice 1.5 (?)

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

$$\psi_k(x) = k^n \psi(kx)$$

┌ Poznámka

$$\int |\Psi| = 1, \quad \psi(x) = \psi(x'), |x| = |x'|, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$\psi_k(x) > 0 \implies |x| < \frac{1}{k}$$

Věta 1.1 (Lebesgueova o derivaci 1)

Nechť $1 \leq p < \infty$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená. A nechť $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. Potom pro skoro všechna $x \in \Omega$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p d\lambda^n(x) = 0.$$

┌ Důkaz

└ Bez důkazu. □

Definice 1.6 (Lebesgueův bod)

Každý takový bod se nazývá (p) Lebesgueův bod.

Definice 1.7 (Konvoluce)

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Za podmínek, kdy pravá strana existuje. g může být i míra.

Poznámka

Je-li $f * g \in L^1$ pak $f * g = g * f$. (Z Fubiniovy věty.)

Tvrzení 1.2

Nechť $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Pak $\psi_k * u(x)$ je definováno $\forall x \in \mathbb{R}^n$ a $\forall k \in \mathbb{N}$.

┌ Důkaz

└ Nebyl. Viz Funkcionalka. □

Věta 1.3

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Pak $\psi_k * u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ a $\partial_i(\psi_k * u) = \partial_i \psi_k * u$.

┌ Důkaz

└ Nebyl. Viz Funkcionalka. □

Lemma 1.4

Nechť $f \in L^p$. Potom $\psi_k * f \in L^p$ $p \in [1, \infty]$. Navíc $\|\psi_k * f\|_p \leq \|f\|_p$.

Důkaz

Nebyl. Viz Funkcionalka. □

Věta 1.5

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ nechť x je Lebesgueův bod f (a $f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} f$) pak $\psi_k * f(x) \xrightarrow{k} f(x)$.

Důkaz

Nebyl. □

Věta 1.6

Nechť $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Potom $\psi_k * f \rightrightarrows f$ na \mathbb{R}^n .

Důkaz

Nebyl. □

Lemma 1.7

Pro $p \in [1, \infty)$ platí $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{L^p} = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz

Nebyl. (Docela jednoduchý.) □

Věta 1.8

$1 \leq p < \infty$: $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \implies \psi_k * f \rightarrow f$ v $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz

Nebyl. □

Poznámka

$(\psi_1 * f \xrightarrow{w} f \text{ v } L^\infty)$

Věta 1.9

Nechť $u \in Lip(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Pak u je slabě diferencovatelná na \mathbb{R}^n a $\|Du\|_{L^\infty} \leq lip(u)$.

┌

*Důkaz*Nechť $x, z \in \mathbb{R}^n$.

$$|\psi_k * u(z) - \psi_k * u(x)| = \left| \int (u(z-y) - u(x-y)) \psi_k(y) d\lambda^n \right| \leq \text{lip}(u) |z - x|.$$

$\text{lip}(u_k) := \text{lip}(\psi_k * u) \leq \text{lip}(u)$. Necht B je koule v \mathbb{R}^n . $\{\nabla u_k\}$ je omezená v $L^2(B)$ slabě konverguje k $g \in L^2(B, \mathbb{R}^n)$.

$\{f \in L^2(B) : \|f\|_\infty \leq c\}$ konvexní a uzavřená \implies slabě uzavřená $\implies \|g\|_\infty \leq \text{lip}(u)$.
Tedy

$$\int_B u \nabla \varphi \leftarrow \int_B u_k \nabla \varphi = - \int_B \nabla u_k \varphi \rightarrow - \int_B g \varphi.$$

└

□

Lemma 1.10

Nechť $E \subset \Omega$ a pro nějaké $r > 0$: $E + B(\mathbf{o}, r) \subset \Omega$. Potom $\exists \eta \in \mathcal{D}(\Omega)$, že $\eta = 1$ na E .

┌

Důkaz

$E + B(0, \frac{r}{2}) \subset \subset \Omega$. Najdeme k , že $\frac{1}{k} < \frac{r}{2}$. Potom $\psi_k * \chi_{E+B(0, \frac{r}{2})}$ je hledaná funkce. □

└

2 Absolutně spojitě funkce

Poznámka (V této kapitole vždy)

$I = (a_0, b_0)$ je interval. $\mathbb{D}(I)$ bude množina všech konečných dělení $(a_0 < x_0 < \dots < x_n < b_0)$ intervalu.

Definice 2.1 (Variace funkce)

Nechť $D = \{x_0 < x_1 < \dots < x_m\} \in \mathbb{D}(I)$ a $u : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom variace u podle dělení D je $V(u, D) = \sum_{i=1}^m |u(x_i) - u(x_{i-1})|$.

Variace u je $V(u, I) = \sup_{D \in \mathbb{D}(I)} V(u, D)$.

Je-li $V(u, I) < \infty$ pak říkáme, že u má konečnou variaci na I .

Definice 2.2 (Absolutně spojitě funkce)

Nechť $u : I \rightarrow \mathbb{R}$. Říkáme, že u je (klasicky) absolutně spojitě na I , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^m$ po dvou disjunktní $\sum_{i=1}^m b_i - a_i < \delta$ je $\sum_{i=1}^m |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$.

Definice 2.3

Nechť $u : (a_0, b_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Říkáme, že $u \in W^{1,1}(I) \Leftrightarrow u \in L^1(I)$ a $\exists Du \in L^1(I)$. ($Du = f d\lambda^1, f \in L^1$.)

Věta 2.1

Nechť $T \in \mathcal{D}^*(I)$ a $\langle T, \varphi' \rangle = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$. Then $\exists c \in \mathbb{R}, T = c(d\lambda^1)$ (tj. $\langle T, \varphi \rangle = \int c\varphi$).

┌

Důkaz

Nechť $\eta \in \mathcal{D}(I) : \int_I \eta = 1$. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ a $\lambda = \langle 1, \varphi \rangle = \int_I \varphi$. Označme $c := \langle T, \eta \rangle$. Zadefinujeme $\Phi(x) = \int_{a_0}^x \varphi - \lambda\eta$, $\Phi(b_0) = 0$, $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$.

$$\begin{aligned} 0 = \langle T, \Phi' \rangle &= \langle T, \varphi \rangle - \lambda \langle T, \eta \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \lambda c = \langle T, \varphi \rangle - \int c\varphi \implies \\ &\implies \langle T, \varphi \rangle = \int c\varphi. \end{aligned}$$

└

□

Věta 2.2

Nechť $f : I = (a_0, b_0) \rightarrow \mathbb{R}, f \in L^1(I)$. Potom

1. $\exists!$ (až na aditivní c) $u : u(b) - u(a) = \int_a^b f$ (pro $a_0 < a < b < b_0$);
2. u má slabou derivaci a $Du = f$;
3. $\exists! T \in \mathcal{D}^*(I)$ (až na aditivní c), že $T' = f$;
4. $T = u d\lambda^1 + c d\lambda^1$;
5. u je absolutně spojitá;

┌

Důkaz

„1.“ $u(x) = \int_{a_0}^x f(t) dt$.

„2.“ $\int_I u(x) \varphi'(x) dx = \int_I \varphi'(x) \int_{a_0}^x f(t) dt dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{a_0}^x f(t) \int_I \varphi'(x) dx dt = - \int_I \varphi(t) f(t) dt$.
Tedy $Du = f$ na I .

„3.“ a „4.“ jednoduché.

„5.“: $f \in L^1 \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \subset I$ měřitelná a $\mathcal{L}^1(A) < \delta : \int_A |f| < \varepsilon$. Nechť $[a_i, b_i]$ po dvou disjunktní, $i \in [n]$, $\sum b_i - a_i < \delta \implies \sum |u(b_i) - u(a_i)| \leq \int_{\bigcup (a_i, b_i)} |f| < \varepsilon$. □

└

Věta 2.3

Nechť u je absolutně spojitá na $I = (a_0, b_0)$. Potom

1. u je spojitá a lze ji spojitě dodefinovat na \bar{I} ;
2. $V(u, I) < \infty$ a $V(u, (a_0, x])$ je absolutně spojitá;
3. u je rozdílem 2 neklesajících funkcí;
4. $\exists! f \in L^1 : u(b) - u(a) = \int_a^b f$;
5. $\exists u'$ skoro všude, $u'(x) = f(x)$ skoro všude;
6. $Du = u' d\lambda^1$ na I ;
7. $u(b) - u(a) = \int_a^b u'(x)$.

┌

Důkaz

„1.“ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \varepsilon_k = 2^{-k} \dots \delta_k. x_k \in (a_0, a_0 + \delta_k)$.

$$\sum_{k=n}^{\infty} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| < 2^{-n+1}.$$

Značme $u(a_0)$ jakoukoliv limitu $u(x_k)$. Potom $|u(a_0) - u(x)| < 2\varepsilon_k$ jakmile $x \in (a_0, a_0 + \delta_k)$.

„2.“ $\varepsilon = 1, \exists \delta > 0. \lambda^1(I) = b_0 - a_0$. Najdeme $N \in \mathbb{N}$, že $N \geq \frac{b_0 - a_0}{\delta}$. D je dělení I . $v(u, D) \leq N$. $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0: V(u, (a_0, x]) := g(x)$ mějme konečné intervaly $\lambda^1(\bigcup [a_i, b_i]) < \delta$
 $\implies \sum |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$.

„3.“: $v(x) = V(u, [a_0, x])$ a $v(x) - u(x)$ jsou hledané funkce. $(V(u, [a_0, x]) + V(u, (x, y))) =$
 $TODO)$

„4.“: (z 3. předpokládejme, že u je neklesající) Caratheodorovou konstrukcí nalezneme míru: $M((a, b)) = u(b) - u(a)$ a ukážeme o ní, že je spojitá (pak je to Lebesgue-Stieltjesova míra, tedy platí $M((a, b)) = \int_a^b f$). Nechť $\lambda^1(N) = 0$. $\forall \delta > 0$ najdu $G \supset N$ $\lambda^1(G) < \delta$, G otevřená, tedy $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$. $\mu(G) = \sum_{i=1}^m |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$.

$$\frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y) dy \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} f(x).$$

└

□

Věta 2.4

Nechť u je spojitá na I . Pak NÁPOJE:

- u je absolutně spojitá na I ;

- $u \in W^{1,1}(I)$;
- $\exists f \in L^1(I) : Du = f d\lambda^1$;
- Du má L^1 reprezentanta $u(b) - u(a) = \int_a^b Du$;
- $\exists u'$ skoro všude, $u' \in L^1$ a $u(b) - u(a) = \int_a^b u'$;
- $\exists f \in L^1 : u(b) - u(a) = \int_a^b f$;
- $\exists g \in L^1 : |u(b) - u(a)| \leq \int_a^b g$.

┌

Důkaz

Máme vše kromě „poslední bod \implies první“: $\lambda^1(\bigcup(a_i, b_i)) < \delta \implies \sum |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$. □

Definice 2.4

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená:

$$W_{loc}^{1,1}(\Omega) := \{u \in L_{loc}^1(\Omega) | \forall i \in [n] \exists D_i u \in L_{loc}^1(\Omega)\},$$

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in W_{loc}^{1,1} | \|u\|_{1,p} < \infty\}, \text{ kde } \|u\|_{1,p} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |D_i u|^p + \int_{\Omega} |u|^p},$$

$$W_c^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) | \exists K \subset \Omega : \{u \neq 0\} \subset K\},$$

$$p \in [1, \infty) : W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{W_c^{1,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}, \quad p = \infty : W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{W^{1,\infty}(\Omega) \cap C_0(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}.$$

Věta 2.5

$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ je Banachův prostor.

┌

Důkaz

Linearita a funkčnost normy je zřejmá. Jak je to s úplností? u_k cauchyovská v $\|\cdot\|_{1,p}$.
 $W^{1,p} \hookrightarrow L^p \implies u_k$ cauchyovská v $L^p \implies \exists u \in L^p : u_k \rightarrow u$ v L^p .

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} u \partial_i \varphi \leftarrow \int_{\Omega} u_k \partial_i \varphi = - \int_{\Omega} D_i u_k \varphi \rightarrow - \int_{\Omega} g \varphi.$$

┌

Poslední konvergence z $\exists g : D_i u_k \rightarrow g$ v L^p a $D_i u = g \in L^p$. □

Věta 2.6 (Rieszova pro $W^{1,p}$)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená. $1 \leq p < \infty$, $p' = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$. Pak pro každý $L \in (W^{1,p}(\Omega))^*$ existuje $f \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ takové, že $L(u) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f^i D_i u + \int_{\Omega} f^{n+1} u$ a navíc $\|L\|_{(W^{1,p})^*} = \|f\|_{L^p}$.

┌
Důkaz

Definujeme $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$, $u \mapsto (D_1 u, \dots, D_n u, u)$. $TW^{1,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$. Díky HB větě každý $L \in (W^{1,p}(\Omega))^*$ lze rozšířit na $L^1 \in (L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}))^* = L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$. \square

┌
Poznámka

$f, h \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ jsou takové, že

$$\sum_i \int f^i D_i u + \int f^{n+1} u = \sum_i \int h^i D_i u + \int h^{n+1} u.$$

└ $\operatorname{div} h = \operatorname{div} f$ na Ω a $f \cdot \nu = h \cdot \nu$ na $\partial\Omega$. $\Delta u = f$.

Poznámka

$u_k \rightarrow u$ v $W^{1,p} \Leftrightarrow \|u_k - u\|_{1,p} \rightarrow 0$.

Pro $p = \infty$

Věta 2.7

Nechť 1. $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, nebo 2. $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ $\psi_k * u \xrightarrow{*} u$ v $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, potom $\|\psi_k * u - u\|_{1,p} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

┌
Důkaz

Víme $\int |\psi_k * D_i u - D_i u|^p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Stačí dokázat $\psi_k * D_i u = D_i(\psi * u) = \partial_i(\psi_k * u)$. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, pak

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^n} D_i(\psi_k * u) \varphi &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k * u \partial_i \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x-y) u(y) dy \partial_i \varphi(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y-x) \partial_i \varphi(x) dx u(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k * \partial_i \varphi(y) u(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \partial(\psi_k * \varphi) u(y) dy = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} (\psi_k * \varphi) D_i u = \int_{\mathbb{R}^n} (\psi_k * D_i u) \varphi. \end{aligned}$$

└ Tedy $\psi_k * D_i u = D_i(\psi_k * u)$. \square

Věta 2.8

$$\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}^{W^{1,p}} = W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

┌
Důkaz

Definujeme $\eta(x) = 1$ na $B(0, 1)$, $\eta(x) = 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2)$, $\eta(x) \in [0, 1]$ in \mathbb{R}^n a $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$u_k(x) = u(x)\eta(x/k)$. $u_k(x) = u(x)$ na $B(0, k)$, $u_k(x) = 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2k)$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_k - u|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, k)} |2u|^p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

$$D_i u_k = D_i u(x) \eta\left(\frac{x}{k}\right) = (D_i u(x)) \eta\left(\frac{x}{k}\right) + u(x) D_i \eta\left(\frac{x}{k}\right).$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |D_i u_k - D_i u|^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, k)} \left| 2D_i u + u(x) \frac{\|\nabla \eta\|_\infty}{k} \right|^p \leq \\ &\leq c \cdot \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, k)} |D_i u|^p + |u|^p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

└

□

Věta 2.9

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ jsou slabě * sekvenciálně husté v $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. (Jinak řečeno, pro každé $u \in W^{1,\infty}$ najdeme $\varphi_k \subset \mathcal{D}$, $\varphi_k \xrightarrow{*} u$ v $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$).

┌
Důkaz

$u \in W^{1,\infty}$, $u_k(x) = u(x)\eta\left(\frac{x}{k}\right)$. Zvolme $f \in L^1$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_i u_k f = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(0, 2k) \setminus B(0, k)} \frac{\partial_i \eta\left(\frac{x}{k}\right)}{k} u(x) f(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{x}{k}\right) D_i u f(x) = \int_{B(0, k)} D_i u f(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} D_i u f.$$

└

□

Věta 2.10

Nechť $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $u \in W^{-1,p}(\Omega)$. Potom $\exists u_k \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega) : u_k \rightarrow u$ v $W^{1,p}(\Omega)$.

┌ *Důkaz*

$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots \subseteq \Omega$, $\overline{\Omega_k}$ kompaktní, Ω_k otevřené, $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$. Najdeme rozklad jednotky ω_j (tj. $\omega_j \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\omega_j(x) \in [0, 1]$, $\omega_j \geq \chi_{\Omega_j}$, $\forall x \in \Omega_n : \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(x) = 1$).

Mějme $\omega_j u \in W_0^{1,p}(\Omega) \exists v_{k,j} \in \mathcal{D}(\Omega) : v_{k,j} \rightarrow \omega_j u$ v $W^{1,p}$. Takže najdeme $v_j \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} |v_j - \omega_j u|^p + |Dv_j - D\omega_j u| < 2^{-j} \varepsilon$, $v_j \in W^{1,p}$. $\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j u = u \in W^{1,p}$.

Položme $v = \sum_{j=1}^{\infty} v_j$. Chceme dokázat $\|v - u\|_{1,p} < \varepsilon$. Nejprve na Ω_n . Máme $u|_{\Omega_n} = \sum_{j=1}^n (\omega_j u)|_{\Omega_n} v|_{\Omega_n} = \sum_{j=1}^n v_j|_{\Omega_n}$.

$$\int_{\Omega} \|v - u\|^p + \|Dv - Du\|^p \leq \int_{\Omega_n} \sum_{j=1}^n |v_j - u_j|^p + |Dv_j - Du_j|^2 \leq \sum_{j=1}^n \|v_j - u_j\|_{W^{1,p}(\Omega_n)}^p \leq \sum_{j=1}^n 2^j \varepsilon \leq \varepsilon.$$

Pošleme $n \rightarrow \infty$ a zjistíme, že $\|u - v\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq \varepsilon$. □

└

┌ *Poznámka* (Konstrukce rozkladu jednotky)

Mějme nějaké $\eta_j : \eta_j \in \mathcal{D}(\Omega)$, *TODO!!!*

└

3 Absolutní spojitost po přímkách

Věta 3.1

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $a \in L^1$. Nechť platí následující: Pro každé $i \in [n]$ a pro λ^n -skoro všechna $x \in \Omega$ je funkce $t \mapsto u(x + te_i)$ lokálně absolutně spojitá a $\partial_i u \in L^1(\Omega)$. Pak $u \in W^{1,1}(\Omega)$ a $D_i u = \partial_i u d\lambda^n$.

┌ *Důkaz*

$u \in L^1 \implies u$ měřitelná. $\varphi_x : t \mapsto u(x + te_i)$ absolutně spojitá $\implies \exists \varphi'_x(t)$ pro skoro všechna t a

$$\varphi'_x(t) = \lim_{y \rightarrow t, y \in Q} \frac{\varphi_x(y) - \varphi_x(t)}{y - t} \implies \varphi'(x, t) = \partial_i u(x + te_i) \text{ je } \lambda^n\text{-měřitelná.}$$

BÚNO $\Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$. Označme $\tilde{\Omega} := (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pro λ^n -skoro všechna $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}$ máme (u absolutně spojitá v $L^1 \implies Du = u'$):

$$\int_{\tilde{\Omega}} \int_{a_1}^{b_1} \partial_1 u(t, \tilde{x}) \varphi(t, x) dt d\tilde{x} = \int_{\tilde{\Omega}} \int_{a_1}^{b_1} u(t, \tilde{x}) \partial_1 \varphi(t, x) dt d\tilde{x}.$$

$$\left(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} \partial u \varphi = - \int_{\Omega} u \partial_1 \varphi \right)$$

└ □

Věta 3.2

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Pak existuje vhodný reprezentant funkce u takový, že platí následující: Pro TODO!!!

TODO!!!

TODO!!!

Definice 3.1

Nechť U je konvexní otevřená omezená a $x \in U$. Značíme $U_t := \{x + t(y - x) | y \in U\} = \{z | x + \frac{1}{t}(z - x) \in U\}$. Dále značíme $\bar{u}_U = \int_U u dy$.

Minkowského funkcionál množiny U je $p(y) = \inf \{t | y \in U_t\}$. Platí, že $U_t = \{y | p(y) < t\}$.

Věta 3.3 (O odhadu potenciálem)

Nechť U je konvexní otevřená omezená, $x \in U$, $u \in W^{1,1}(U)$. Dále nechť x je Lebesgueův bod u , pak

$$|u(x) - \bar{u}_U| \leq \frac{\text{diam } U}{\lambda^n(U)} \int_0^1 \frac{1}{t^n} \int_{U_t} |Du(y)| d\lambda^n(y) d\lambda^1(t).$$

Je-li navíc ? konečný, pak

$$u(x) - \bar{u}_U = \int_0^1 \frac{1}{t} \int_{U_t} |Du(y)|(y - x) d\lambda^n(y) d\lambda^1(t).$$

Důkaz

Nechť $u \in \mathcal{C}^1(U)$ ($\forall u \in W^{1,1} \exists u_k \rightarrow u$ v $W^{1,1}$, $u_k \in \mathcal{C}^1$).

$$\xi(t) = \int_U u(x + t(y - x)) d\lambda^n(y) = \int_{U_t} u d\lambda^n.$$

$\xi(1) = \int_U u = \bar{u}_U$. $\lim_{s \rightarrow 0+} \xi(s) = u(x)$ Lebesgueův bod. $0 < a < b < 1$:

$$\xi(b) - \xi(a) = \int_a^b \partial_t \left(\int_U u(x + t(y - x)) dy \right) dt = \int_a^b \int_U \nabla u(x + t(y - x)) \cdot (y - x) dy dt = \int_a^b \frac{1}{\lambda^n(U) t^n} \int_{U_t} \nabla u(x + t(y - x)) \cdot (y - x) dy dt$$

$$\omega_a^b(z) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^n(U)} \int_{\max\{a, p(z)\}}^b \frac{1}{t^{n+1}} dt, & p(z) < b, \\ 0, & p(z) \geq b. \end{cases} \quad \omega_a^b \in \mathbb{C}_c(U)$$

$$\begin{aligned} \xi(b) - \xi(a) &= \frac{1}{\lambda^n(U)} \int_a^b \int_{U_t} \nabla u(z)(z - x) d\lambda^n(z) \frac{dt}{t^{n+1}} =: ** = \\ &= \frac{1}{\lambda^n(U)} \int_a^b \int_{\{p(z) < t\}} \nabla u(z)(z - x) d\lambda^n(z) \frac{dt}{t^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{\lambda^n(U)} \int_{U_b} \int_{(a,b) \cap \{p(z) < t\}} \nabla \frac{u(z)(z - x)}{t^{n+1}} d\lambda^n(z) dt = \\ &= \int_U \omega_a^b(z) \nabla u(z)(z - x) dz =: * \end{aligned}$$

Pomocí silné aproximace hladkými funkcemi v $W^{1,1}(U)$ dostaneme $*$ i pro $\forall u \in W^{1,1}(U)$.

$$\xi(b) - \xi(a) \stackrel{\text{Fubini}^b}{=} \int_a^b \frac{1}{t} \left(\int_{U_t} D_u(z)(z - x) dz \right) dt.$$

Použijeme odhad $|z - x| \leq \text{diam } U_t = t \text{diam } U$:

$$|\xi(b) - \xi(a)| \leq \text{diam } U \int_a^b \int_{U_t} |D_u(z)| dz dt = \frac{\text{diam } U}{\lambda^n(U)} \int_a^b \int_{U_t} |Du(z)| dz \frac{dt}{t^n}.$$

$$|\xi(1) - \xi(0)| \leq \frac{\text{diam } U}{\lambda^n(U)} \int_0^1 \int_{U_t} Du(z) dz \frac{dt}{t^n}.$$

$$** \xrightarrow{b \rightarrow 1-, a \rightarrow 0+} \int_0^1 \frac{1}{t} \int_{U_t} Du(z)(z - x) dz dt$$

□

Důsledek

Nechť $U \in \mathbb{R}^n$ otevřená konvexní omezená, $u \in W^{1,1}(U)$ a necht $x \in U$ je Lebesgueův. Pak

$$\int_U |u(y) - u(x)| d\lambda^n(y) \leq c_U \int_U \frac{|Du(y)|}{|y - x|^{n-1}} d\lambda^n(y),$$

kde C_U závisí pouze na tvaru U .

┌

Důkaz

Označme $R = \text{diam } U$. Potom $p(y) \geq \frac{|y-x|}{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$. Víme, že $|\xi(b) - \xi(a)| \leq \int_U \omega_a^b(y) |Du(y)| \cdot |y - x| d\lambda^n(y)$.

$$\omega_a^b(y) \leq \frac{1}{\lambda^n(U)} \int_{p(y)}^\infty \frac{1}{t^{n+1}} = \frac{1}{n \cdot \lambda^n(U)} [p(y)]^{-n} \leq \frac{1}{n \cdot \lambda^n(U)} \frac{R^n}{|y - x|^n}.$$

Potom

$$|\xi(b) - \xi(a)| \leq C_U \cdot \frac{R^n}{n \cdot \lambda^n(U)} \int_U \frac{|Du(y)|}{|y - x|^{n-1}}.$$

$$\left| \int_U u(y) - u(x) dy \right| \leq C_U \int_U \frac{|Du(y)|}{|y - x|^{n-1}}.$$

$$v(y) = |u(y) - u(x)| \in W^{1,1}.$$

$$\int_{B(x,r)} |v(y) - v(x)| \rightarrow 0, \quad \int ||u(y) - u(x)| - 0| = \int |u(y) - u(x)|.$$

$|Dv| = |Du|$ skoro všude.

$$\left| \int |u(y) - u(x)| \right| \leq C_U \int \frac{|Du|}{|y - x|^{n-1}}.$$

└

□

Lemma 3.4

Nechť $r > 0$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$\int_{B(\mathbf{o}, r)} |x - y|^{1-n} d\lambda^n(y) \leq Cr.$$

Odhad platí také, když vyměníme $B(\mathbf{o}, r)$ za $Q(\mathbf{o}, r)$

┌

Důkaz

Nechť $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{o}, 2r)$, pak $|y - x| > r$. $|y - x|^{1-n} \leq r^{1-n}$. $\lambda^n(B(\mathbf{o}, 1)) =: \omega_n$, $\lambda^n(B(\mathbf{o}, r)) = r^n \omega_n$.

$$\int_{B(\mathbf{o}, r)} |y - x|^n \leq \int_{B(\mathbf{o}, r)} r^{1-n} = \lambda^n(B(\mathbf{o}, r)) r^{1-n} = \omega_n r.$$

$$x \in B(0, 2r), B(x, 3r) \supset B(0, r).$$

$$\int_{B(0, r)} |y - x|^{1-n} \leq \int_{B(x, 3r)} |y - x|^{1-n} = \int_{B(0, r)} |y|^{1-n} \cdot \int_0^{3r} \mathcal{H}^{n-1}(S_t) t^{1-n} = 3 \mathcal{H}^{n-1}(S_n) r.$$

└

□

Lemma 3.5 (Symetrizace Rieszova integrálu s jádrem)

Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^n$ měřitelná, pak $\int_E |x|^{1-n} d\lambda^n(x) \leq c \cdot \lambda^n(E)^{\frac{1}{n}}$.

┐

Důkaz

Nechť $R : \lambda^n(B(0, R)) = \lambda^n(E)$. Pak $\lambda^n(B \setminus E) = \lambda^n(E \setminus B)$.

$$\int_{E \setminus B} \frac{1}{|x|^{n-1}} \leq \int_{E \setminus B} \frac{1}{R^{n-1}} = \int_{B \setminus E} R^{1-n} \leq \int_{B \setminus E} |x|^{1-n}.$$

$$\int_E |x|^{1-n} \leq \int_B |x|^{1-n} \leq CR = C\lambda^n(B(0, R))^{\frac{1}{n}} = c(\lambda^n(E))^{\frac{1}{n}}.$$

┐

□

Věta 3.6

Ω otevřená v \mathbb{R}^n , $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Potom $\forall B \subset \Omega$ platí

$$\int_B |u - \bar{u}_B| d\lambda^n \leq C \cdot r \cdot \int_B |Du| d\lambda^n,$$

kde C závisí pouze na n a $r = \frac{\text{diam } B}{2}$.

┐

Důkaz

Je-li x Lebesgueův bod pro u , pak

$$|u(x) - \bar{u}_B| \leq C_B \int_B \frac{|Du(y)|}{|y - x|^{n-1}} dy$$

$$\int_B |u(x) - \bar{u}_B| \leq \int_B C(n) \int_B \frac{|Du(y)|}{|y - x|^{n-1}} dy dx \leq C(n)r \int_B |Du(y)|.$$

┐

□

Poznámka

Aproximace $u \in W^{1,p}$... $\exists u_k \in C^\infty$, $u_k \rightarrow u$ v $W^{1,p}$. ($\int |u_k - u|^p < \varepsilon$) $u_k \rightarrow u$ v $W^{1,1}$ ($\lambda^n(\{u_k \neq u\}) < \frac{1}{k}$), $u_k \in Lip$.

Věta 3.7

Nechť $u \in W^{1,1}(B)$. Pak $\exists E_m : B \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$ takové, že $m \cdot \lambda^n(E_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ a $\exists g_m \in Lip(B)$:

- $lip g_m \leq C \cdot m$;
- $\{g_m = u\} \subseteq B \setminus E_m$;
- $\|u - g_m\|_{1,1} \rightarrow 0$.

┌

Poznámka

$Mf(x) = \sup_{r>0} \int_{B(x,r)} |f| \quad (f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)).$ Slabý odhad:

$$\lambda^n(Mf > \alpha) \leq \frac{C}{\alpha} \int_{|f| > \frac{\alpha}{2}} |f| d\lambda^n \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0.$$

└

┌ *Důkaz*

Definujeme $h(x) = |Du(x)|$ pro $x \in B$ a $h(x) = 0$ jinak. $h \in L^1(\mathbb{R})$. Dále definujeme $E_m = \{Mh > m\}$. Díky slabému odhadu je $\lambda^n(E_m) \leq \frac{C}{m} \int_{\{|h| > \frac{m}{2}\}} |h| = \sigma\left(\frac{1}{m}\right)$. Chceme dokázat, že $x, y \in B \setminus E_m$ je $|u(x) - u(y)| \leq C \cdot m \cdot |x - y|$. Definujeme $B_j = B(x, 2^{-j}|x + y|)$, $B_{-j} = B(y, 2^{-j}|x + y|)$, $B_0 = B\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}, 2|x - y|\right)$, $j \in \mathbb{N}$.

Protože je $x, y \in B \setminus E_m$ je $\int_{B_j} h \leq m \quad \forall j \in \mathbb{Z}$ (pro $j = 0$, protože to tak vyjde). Předefinujeme E_m jako $\{Mh > m\} \cup \{x \text{ má Lebesgueův bod pro } u\}$. Tím pádem máme $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{B_j} u =: \lim_{j \rightarrow \infty} \overline{u}_{B_j} = u(x)$. Potom

$$|u(x) - u(y)| \leq |\overline{u}_{B_1} - \overline{u}_{B_{-1}}| + \sum_{j=1}^{\infty} |\overline{u}_{B_{j+1}} - \overline{u}_{B_j}| + |\overline{u}_{B_{-j-1}} - \overline{u}_{B_{-j}}|.$$

$$\begin{aligned} |\overline{u}_{B_{j+1}} - \overline{u}_{B_j}| &= \left| \int_{B_{j+1}} u - \overline{u}_{B_j} \right| \leq \int_{B_{j+1}} |u - \overline{u}_{B_j}| \leq 2^n \int_{B_j} |u - \overline{u}_{B_j}| \leq C \cdot |x - y| \cdot 2^{-j} \int_{B_j} |Du|. \\ |\overline{u}_{B_1} - \overline{u}_{B_{-1}}| &= \left| \int_{B_0} \overline{u}_{B_1} - u + \int_{B_0} u - \overline{u}_{B_{-1}} \right| = \\ &= \left| \int_{B_1} u - \overline{u}_{B_0} + \int_{B_{-1}} \overline{u}_{B_0} - u \right| \leq \text{TODO!!!} \end{aligned}$$

TODO!!! Použijeme McShanovu rozšiřovací větu.

$g_m \in W^{1,1}(B)$. „ $Dg_m = Du$ skoro všude na $B \setminus E_m$ “: stačí $D_1 g_m = D_1 u$. Když vybereme správného reprezentanta u : $\exists \partial_1 u(\cdot, \tilde{x}), \exists \partial_1 g_m(\cdot, \tilde{x}), u = g_m$ skoro všude $\implies \partial_1 u = \partial_1 g_m$ skoro všude (na $(a, b) \cap B \setminus E_m$).

$$\int_B |u - g_m| \leq \int_{B \setminus E_m} |u| + \int_{E_m} |g_m| \rightarrow 0 + \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_m} |g_m|. \text{ A } |g_m| \leq \sup |u|_{B \setminus E_m}.$$

$$\int_B |Du - Dg_m| \leq \int_{E_m} |Du| d\lambda^n + c \cdot m \lambda^n(E_m) \rightarrow 0,$$

neboť $\lambda^n(E_m) \rightarrow 0$ a slabý odhad.

$$\int_B |g_m - \overline{g_m}_B| \leq C \cdot r \cdot \int_B |Dg_m| \leq C \cdot \int_B |Du|.$$

$$g_m - \overline{g_m}_B \in L^1.$$

$$|\overline{u} - \overline{g_m}_B| \leq \int_B |u - \overline{u}_B| + |g_m - \overline{g_m}_B| \leq c \cdot \int_B |Du|.$$

Tedy $\int_{E_m} g_m \rightarrow 0$ (neboť g_m je omezená).

└ □

Věta 3.8 (Frunchi–Hajtasz–Koskala)

Nechť $u \in L^1(\Omega)$. Pak $u \in W^{1,1}(\Omega) \iff \exists f \in L^1(\Omega) \quad \forall B(x, r) \subset \subset \Omega : \int_B |u - \overline{u}_B| \leq r \cdot \int_B f$.

┌ *Důkaz*

$$u \in W^{1,1} \implies \int |u - \bar{u}_B| \leq C \cdot r \cdot \int_B |Du|.$$

„ \implies “: Viz věta výše. „ \impliedby “: Necht $\Omega' \subset\subset \Omega : \Omega' + B(0, \frac{1}{k}) \subset \Omega$, pak $\psi_k * u \in C^1(\Omega')$ ($\psi_k(x) = k^n \psi(kx)$).

$$\forall i \in [n] \quad \forall x \in \Omega' : \int_{B(x, k^{-1})} \partial_i \psi_k(x-y) \bar{u}_{B(x, k^{-1})} = \bar{u}_{B(x, k^{-1})} \int_{B(0, k^{-1})} \partial_i \psi_k(y) dy = 0.$$

$$\begin{aligned} \int |\partial_i \psi_k * u| &= \left| \int_{B(x, k^{-1})} \partial_i \psi_k(x-y) (u(y) - \bar{u}_{B(x, k^{-1})}) \right| \leq \\ &\leq C k^{n+1} \int_{B(x, k^{-1})} |u - \bar{u}_{B(x, k^{-1})}| \leq C k^n \int_{B(x, k^{-1})} f \leq C \|f\|_1. \end{aligned}$$

TODO!!!

Chceme ?

$$\int_{\Omega'} u_n \partial_i \varphi = - \int_{\Omega}$$

└ TODO!!!

□

Věta 3.9 (Gagliardo–Nirenbergoum)

Necht U je otevřená omezená konvexní. Necht $u \in W^{1,1}(U)$ s nulovým mediánem v U . Pak

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} = \left(\int_U |u|^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C_U \int_U |Du|,$$

$$\|u\|_{L^{p^*}} = \left(\int_U |u|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_U \left(\int_U |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p^* = \frac{np}{n-p}, \quad p \in [1, \infty].$$

Definice 3.2

Necht $M \subset \mathbb{R}^n$ a $0 < \lambda^n(M) < \infty$ a $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ je měřitelná. Říkáme, že $c \in \mathbb{R}$ je mediánem u na M , pokud:

$$\lambda^n(\{u > c\} \cap M) \leq \frac{1}{2} \lambda^n(M), \quad \lambda^n(\{u < c\} \cap M) \leq \frac{1}{2} \lambda^n(M).$$

Tvrzení 3.10 (Odhad slabého typu)

Necht $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená konvexní, $u \in W^{1,1}(U)$ s nulovým mediánem na U . Pak

$$s (\lambda^n(\{u > s\}))^{1-\frac{1}{n}} \leq c \cdot \int_U |Du| d\lambda^n.$$

┌ *Důkaz*

Označme $G_s := \{|u| > s\}$, $s\lambda^n(G_s) \leq C \cdot \int_{G_s} |u|$.

$$\begin{aligned}
 s\lambda^n(G_s) &= \int_U s\lambda^n(G_s) \leq c \cdot \int_U \int_{G_s} |u(x)| dx dy = \\
 &= c \cdot \int_{G_s} \int_U |u(x)| dy dx \leq \\
 &(|u(x)| \leq |u(x) - u(y)| \quad \forall y : \operatorname{sgn}(u(y)) \neq \operatorname{sgn}(u(x)).) \\
 &\leq c \cdot \int_{G_s} \int_{\{\operatorname{sgn}(u(y)) \neq \operatorname{sgn}(u(x))\}} |u(x) - u(y)| \stackrel{0 \text{ je med}}{\leq} c \cdot \int_{G_s} \int_U |u(x) - u(y)| dy dx \leq \\
 &\leq c \cdot \int_{G_s} \int_U \frac{|Du(y)Z|}{|x - y|^{n-1}} dy dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} c \cdot \int_U |Du(y)| \int_{G_s} \frac{1}{|x - y|^{n-1}} dx dy \leq c \cdot \int_U |Du(y)| \lambda^n(G_s)^{\frac{1}{n}}.
 \end{aligned}$$

└

□

Věta 3.11

Nechť U je otevřená omezená konvexní a $u \in W^{1,1}(U)$ s nulovým mediánem v U . Pak

$$\int_0^\infty \lambda^n(\{|u| > s\})^{1-\frac{1}{n}} ds \leq c \int_U |Du|.$$

┌ *Důkaz*

Zvolme $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Nechť $u \geq 0$ (BÚNO, aplikujeme na $u_+ := \max\{u, 0\}$ a $u_- := \max\{-u, 0\}$). Zdefinujeme

$$v(x) := v_{a,k}(x) := \begin{cases} u(x) - (k-1)a, & u(x) \in [(k-1)a, k \cdot a] \\ 0, & u(x) \leq (k-1)a \end{cases}.$$

v má nulový medián v U a $Du = Dv$ skoro všude v $\{x | a(k-1) \leq u(x) \leq ak\}$. $s \cdot \lambda^n(\{|v| > s\})^{1-\frac{1}{n}} \leq c \cdot \int_U Dv$.

$$\int_{(k-1)a}^k \cdot a (\lambda^n(\{u > s\}))^{1-\frac{1}{n}} ds \leq a (\lambda^n(\{u > (k-1)a\}))^{1-\frac{1}{n}} \leq c \cdot \int_{U \cap V_{a,k}} |Du|.$$

Sečteme přes $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^\infty \lambda^n(\{u > s\})^{1-\frac{1}{n}} ds \leq c \cdot \int_U |Du|, \quad \forall a > 0.$$

└ $a \rightarrow 0$.

□

Poznámka

M měřitelná, $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelná. Pak

$$\int_M |u|^p = \int_0^\infty p s^{p-1} \lambda^n(M \cap \{|u| > s\}) ds.$$

Lemma 3.12

$f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ nerostoucí a $q \geq 1$, $r > 1$. Pak

$$\int_0^\infty s^{qr-1} f(s) ds \leq c \cdot \left(\int_0^\infty s^{q-1} f(s)^{\frac{1}{r}} ds \right)^r.$$

┌
Důkaz

$$I := \int_0^\infty s^{q-1} f(s)^{\frac{1}{r}} ds.$$

└

□

Věta 3.13 (Gagliardova–Nirenbergonova)

Nechť U je otevřená konvexní omezená a necht $u \in W^{1,1}(U)$ s nulovým mediánem v U . Pak

$$\left(\int_U |u|^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C_U \int_U |Du|,$$

kde C_U závisí pouze na tvaru U .

┌
Důkaz

$$\begin{aligned} \int_M |u|^p &= \int_0^\infty p s^{p-1} \lambda^n(\{|u| > s\}), & p &= \frac{n}{n-1}. \\ \int_0^\infty s^{qr-1} f(s) &\leq c \cdot \left(\int_0^\infty s^{q-1} f(s)^{\frac{1}{r}} \right)^r, & \frac{n}{n-1} - 1 &= \frac{1}{n-1}. \\ \int_U |u|^{\frac{n}{n-1}} &\int_0^\infty \frac{n}{n-1} s^{\frac{1}{n-1}} \lambda^n(U \cap \{|u| > s\}) \leq, & q &= 1, r = \frac{n}{n-1}. \\ &\leq c_n \left(\int_0^\infty \lambda^n(U \cap \{|u| > s\})^{\frac{n-1}{n}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \leq \left(c \cdot \int_U |Du| \right)^{\frac{n}{n-1}}. \end{aligned}$$

└

□

Věta 3.14 (Sobolevova nerovnost)

U omezená otevřená konvexní, $1 \leq p < n$ a necht $u \in W^{1,p}(U)$ s nulovým mediánem v U . Pak

$$\left(\int |u|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_U \frac{pn-p}{n-p} \left(\int_U |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

┌
Důkaz

„ $p = 1$ “ triviální. „ $p > 1$ “: $u = u^+ - u^-$, tedy BÚNO $u \geq 0$. Nejdřív předpokládejme navíc, že $u \in L^\infty(U)$. Definujme $v = u^{\frac{pn-p}{n-p}}$. ($\frac{p}{p-n}(n-1)v$ je ACL?.)

$$\nabla v = \frac{pn-p}{n-p} u^{\frac{pn-p}{n-p}} \nabla u \implies v \in W^{1,1}(U).$$

$$\begin{aligned} \left(\int_U |u|^{p^*} \right)^{\frac{n-1}{n}} &= \left(\int_U |v|^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C_U \int_U |Dv| = C_U \frac{pn-p}{n-p} \int_U u^{\frac{pn-p}{n-p}} |Du| \leq C_U \frac{pn-p}{n-p} \left(\int_U |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \\ &\quad \left(\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{np-p-np+n}{np} = \frac{n-p}{np} = \frac{1}{p^*} \right) \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov pro $u \in W^{1,p} \cap L^\infty$. Nechť $u \in W^{1,p}$. Zdefinujeme $u_k = \min\{u, k\}$. $\exists Du_k$ a $|Du_k| \leq |Du|$.

$$\left(\int |u|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leftarrow \left(\int |u_k|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq c \cdot \left(\int |Du_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot \left(\int |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

└

□

Věta 3.15 (Sobolevova nerovnost na celém \mathbb{R}^n)

Nechť $1 \leq p < n$ a nechť $u \in W^{1,p}$. Pak

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_\beta \frac{pn-p}{n-p} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

┌
Důkaz

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \varphi$ je kompaktní, φ má nulový medián v $B(\mathbf{o}, R)$ pro R dostatečně velké. Tím pádem je

$$\|\varphi\|_{L^{p^*}} \leq C_\beta \frac{pn-p}{n-p} \|D\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Mějme $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, najdeme $\varphi_k \rightarrow u$ v $W^{1,p}$ a tudíž platí odhad i pro u .
└

□

Věta 3.16 (Sobolevova–Poincarého nerovnost)

U je omezená otevřená kompaktní, $p \cdot q \geq 1$. Nechť $u \in W^{1,p}(U)$. Pokud $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, pak

$$\left(\int_U |u - \bar{u}_U|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{p,q,U}(\text{diam } U) \cdot \left(\int |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

┌ *Důkaz*

BÚNO u má nulový medián v U . Za prvé necht $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$: $q = \frac{np}{n-p}$:

$$\begin{aligned} \left(\int_U |u|^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq c \cdot (\text{diam } U)^{-\frac{n}{q}} \left(\int_U |u|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \cdot (\text{diam } U)^{-\frac{n}{q}} \left(\int_U |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq c \cdot (\text{diam } U)^{-\frac{n}{q} + \frac{n}{p}} \left(\int_U |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}} = c \cdot (\text{diam } U) \cdot \left(\int_U |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

└ „ $q < \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ “: Najdeme $s \in [1, n)$, $(\int |u|^q)^{\frac{1}{q}} \leq (\int |u|^{s^*})^{\frac{1}{s^*}}$, $\frac{1}{q} - \frac{1}{s^*} = \frac{1}{t}$. TODO? □

Věta 3.17 (O vnoření $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\Omega)$)

Necht $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $\lambda^n(\Omega) < \infty$, necht $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ a necht $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Pak

$$(\lambda^n(\Omega))^{-\frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_{p,n} (\lambda^n(\Omega))^{-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega)} + C_{p,n} (\lambda^n(\Omega))^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

┌ *Důkaz*

$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ ($q = p^*$):

$$\left(\int_{\Omega} |u|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq (\lambda^n(\Omega))^{-\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq (\lambda^n(\Omega))^{-\frac{1}{q}} C \cdot \frac{pn - p}{n - p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

└ TODO!!! □

Definice 3.3

Říkáme, že x je bodem hustoty měřitelné množiny E , pokud $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda^n(E \cap B(x, r))}{\lambda^n(B(x, r))} = 1$.

Necht $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a necht $x \in \mathbb{R}^n$. Říkáme, že $L = \text{aplim}_{y \rightarrow x} u(y)$ je aproximativní limita u v bodě x , pokud $\exists E \subseteq \mathbb{R}^n$ měřitelná: x je bodem hustoty E a $\lim_{y \rightarrow x, y \in E} u(y) = L$.

┌ *Poznámka*

u měřitelná:

$$L = \text{aplim}_{y \rightarrow x} u(y) \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \sigma > 0 \exists r_0 : \forall r \in (0, r_0) : \frac{1}{r^n} \lambda^n(\{|u(y) - L| \geq \varepsilon\}) \leq \sigma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \text{ je bodem hustoty } M_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |u(y) - u(x)| < \varepsilon\} \forall \varepsilon.$$

$$A = \nabla_a u \equiv \text{aplim}_{y \rightarrow x} \frac{u(y) - u(x) - A(y - x)}{|x - y|} = 0.$$

Lemma 3.18

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$. Pak pro skoro všechna $x \in \Omega$:

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{1}{r} \int_{B(x,r)} |u(y) - u(x) - Du(x)(y-x)| d\lambda^n(y) = 0.$$

┌
Důkaz

BÚNO x je Lebesgueův bod pro u a Du . Definujeme $v(y) = u(y) - u(x) - Du(x)(y-x)$.
 $v(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \int |v(y)| &= \frac{1}{R} \int_{B(x,R)} |v(y) - v(x)| \leq \frac{C}{R} \int_{B(x,R)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} = \\ &= \frac{C}{R} \int_{B(x,R)} \left(\int_{|x-y|}^{\infty} \frac{1}{r^n} dr \right) |Du(y)| = \frac{C}{R} \int_0^R \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |Du(y) - Du(x)| dy dr + \frac{C}{R} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |Du(y) - Du(x)| dy dr \\ &\leq c_1 \cdot \underbrace{\int_0^R \int_{B(x,r)} |Du(y) - Du(x)| dy dr}_{\xrightarrow{R \rightarrow 0+} 0} + c_2 \cdot \underbrace{\int_R^{\infty} \int_{B(x,r)} |Du(y) - Du(x)| dy dr}_{\xrightarrow{R \rightarrow 0+} 0} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

└

□

Věta 3.19

Nechť $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Potom $\exists \nabla_a u(x) = Du(x)$ pro skoro všechna $x \in \Omega$.

┌
Důkaz

Mějme x takové, že $\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{1}{r} \int_{B(x,r)} |u(y) - u(x) - Du(x)(y-x)| dy = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a $\tau \in (0, \varepsilon)$ (např. ε^2). Označme $v(y) = u(y) - u(x) - Du(x)(y-x)$ a $\sigma = \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n+1}}$. Najdeme $r_0 > 0$: $\int_{B(x,\sigma)} |v| \leq \tau \sigma \forall r \in (0, r_0)$.

Máme

$$\begin{aligned} \lambda^n(\{|v(y)| \geq \varepsilon |y-x|\} \cap B(x,r)) &\leq \lambda^n(\{y \in B(x,r) \setminus B(x,\sigma r) \mid |v(y)| \geq \varepsilon \cdot |y-x| \geq \varepsilon \cdot \sigma \cdot r\}) + \lambda^n(B(x,\sigma r)) \\ &\leq \int_{B(x,r) \cap \{|v| > \sigma \cdot \varepsilon \cdot r\}} \frac{|v|}{\sigma \cdot \varepsilon \cdot r} dy + \sigma^n \lambda^n(B(x,r)) \leq \frac{\tau \cdot r}{\sigma \cdot \varepsilon \cdot r} \cdot r^n + c \cdot \delta^n \cdot r^n = \left(\frac{\tau}{\varepsilon \cdot \delta} + \delta^n \cdot c\right) \cdot r^n. \end{aligned}$$

└

□

Lemma 3.20

Nechť $v \in Lip_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$ a necht $\exists \nabla_a v(x)$. Potom $\exists \nabla v(x) = \nabla_a v(x)$.

┌ *Důkaz*

BÚNO u je lipschitzovská a $Lip u =: L$. Najdeme $r_0 > 0$: $B(x, r_0) \subset \Omega$ a $\forall r \in (0, r_0)$ platí

$$\lambda^n(B(x, r) \cap E) \leq \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^n \lambda^n(B(x, r)), \quad E := \{y \mid |v(y)| > \varepsilon|y - x|\},$$

protože $\exists \nabla_a u(x)$. Necht $E \cap B(x, \frac{\varepsilon}{4}) \setminus B(x, \frac{\varepsilon}{8})$ ($|v(y)| \leq C \cdot \varepsilon|y - x|$) otevřená, tedy $\overline{B(x, r) \setminus E}$ je uzavřená $\implies \exists z' \in \overline{B(x, r) \setminus E}$ nejbližší k z . $|z - z'| \leq \frac{r}{4}$, protože $x \in B(x, r) \setminus E$.

$$z' \in B(x, \frac{r}{2}) \text{ a } B(z, |z - z'|) \subset B(x, r).$$

$$\left(\frac{|z' - z|}{r}\right)^n \leq \frac{\lambda^n(E \cap B(x, r))}{\lambda^n(B(x, r))} \leq \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^n.$$

$$|z' - z| \leq \frac{\varepsilon}{L}r, \quad |v(z') - v(z)| \leq \varepsilon r,$$

$$|v(z)| \leq |v(z')| + |v(z) - v(z')| \leq \varepsilon|z' - x| + \varepsilon r \leq 2\varepsilon r \leq c \cdot \varepsilon \cdot |z - x|.$$

└

□

Věta 3.21 (Rademacher)

Necht $u \in Lip_{loc}(\Omega)$. Potom $\exists \nabla$ skoro všude na Ω , $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ a $Du = \nabla u$.

┌ *Důkaz*

$\implies \exists \nabla_a u$ skoro všude $\implies \exists \nabla u$ skoro všude. ∇u je měřitelná. $|\nabla u| < M \implies \nabla u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Funkce u má $\partial_\gamma u$ skoro všude na skoro všech přímkách \implies (ACL charakterizace) $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$.

$$Lip(u, x) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|}. \quad S(u) = \{x \mid Lip(u, x) < \infty\}.$$

└

□

Věta 3.22 (Stepanov)

Necht u je reálná funkce na Ω . Potom u je diferencovatelná skoro všude na $S(u)$.

┌ *Důkaz*

Necht $\{B_j\}$ – střed racionální poloměr $?$. Pro každé B_j definujeme lipschitsové obálky:

$$w_j(x) = \inf \{w(x) \mid w(x) \geq u(x) \text{ a } lip(u, B_j) \leq j\},$$

$$v_j(x) = \sup \{v(x) \mid v(x) \leq u(x) \text{ a } lip(u, B_j) \leq j\}.$$

Dokažme, že pro $N := \bigcup \{x \in B \mid \nabla w_j(x) \neq \nabla v_j(x)\}$ je $\lambda^n(N) = 0$. Necht $x \in S(u) \setminus N$. $\exists r > 0 \exists l > 0 : |u(x) - u(y)| \leq l \cdot |x - y|$. $lip(u, B_j) \leq L \leq j \implies w_j = u = v_j$ na B_j , $x \notin N$. □

└