Příklad (Teoretický příklad 7)
Pro dané $k \in \mathbb{N}$ spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1} \right).$$

Řešení
Upravíme odečtením zlomků:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1^k + 2^k + \ldots + n^k\right) \cdot (k+1) - n^{k+1}}{n^k \cdot (k+1)} \right).$$

Nyní vidíme, že bychom si chtěli použít $x_n = \left(1^k + 2^k + \ldots + n^k\right) \cdot (k+1) - n^{k+1}$ a $y_n = n^k \cdot (k+1)$ a použít Stolzovu větu. Na x_n nejsou kladeny žádné podmínky, y_n musí být rostoucí (to je, protože $k \geq 1$) a limita y_n jde k $+\infty$ (jelikož n^k jde zjevně k nekonečnu a $k+1$ je konstanta).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k \cdot (k+1) - n^{k+1} - 0 + (n-1)^{k+1}}{n^k \cdot (k+1) - (n-1)^k \cdot (k+1)} \overset{\text{Binom. věta}}{=}$$

$$\overset{\text{Binom. věta}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^k \cdot (k+1) - n^{k+1} + n^{k+1} - (k+1) \cdot n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + P(n)}{n^k \cdot (k+1) - n^k \cdot (k+1) + k \cdot n^{k-1} \cdot (k+1) + Q(n)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{k+1}{2} n^{k-1} + P(n)}{k \cdot n^{k-1} \cdot (k+1) + Q(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(k+1)\cdot k}{2} + \frac{P(n)}{n^{k-1}}}{k \cdot (k+1) - \frac{Q(n)}{n^{k-1}}} \overset{\text{AL}}{=} \frac{\frac{(k+1)\cdot k}{2} + 0}{(k+1) \cdot k + 0} = \frac{1}{2}$$

Kde $P(n)$ a $Q(n)$ jsou polynomy stupně $k-2$. Tedy podle Stolzovy věty je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{2}.$$