Organizační úvod

Úvod

Poznámka (Motivace)
Hledání řešení diferenciálních rovnic. (Např. nahradíme rovnici definicí operátoru a hledáme, kde je operátor identita. Tedy neřešíme rovnice, ale prostory, na kterých máme funkce.)

Definice 0.1

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} \vee \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

1 Banachovy a Hilbertovy prostory

Definice 1.1 (Normovaný lineární prostor)

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $||\cdot|| : X \to [0, \infty)$ nazveme normou na X, pokud

$$||x\,|| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{o},$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||,$$

$$||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x\;||.$$

Tvrzení 1.1

Nechť $(X, ||\;\cdot||)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$.

Funkce $\varrho(x, y) = ||x - y||$ je translačně invariantní metrika na X.

Norma je 1-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na x.

Zobrazení $+ : X \times X \to X$ a $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ jsou spojitá.

Důkaz
První část byla na MA3. Druhá: Zvol $x, y \in X$. Pak $||y||, ||x|| \leq ||x|| + ||x - y||$, tudíž $|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||$.

Třetí část: Připomenutí: Součin metrických prostorů s maximovou metrikou je metrický prostor. Důkaz tohoto i třetí části je pak jednoduché cvičení. □

Definice 1.2 (Uzavřená a otevřená koule)

$$B_X(x,r) = \{y \in X | ||x-y|| \leq r\}.$$
$$U_X(x,r) = \{y \in X | ||x-y|| < r\}.$$
$$S_X(x,r) = \{y \in X | ||x-y|| = r\}.$$

$$B_X = B(0,1)$$
$$U_X = U(0,1)$$
$$S_X = S(0,1)$$

Definice 1.3 (Banachův prostor)

Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Dále se opakovaly metrické prostory. Úplnost, kompaktnost a Bairova věta.

Tvrzení 1.2

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor. Potom a) Je-li Y Banachův, pak je Y uzavřený v X. Pokud je naopak X Banachův, pak Y je Banachův právě tehdy, když je uzavřený.

Důkaz

Je-li (P,ϱ) úplný, pak $M \subseteq P$ je úplný $\Leftrightarrow$ M je uzavřený. To dává speciálně b).

(P,ϱ) je MP, pak $M \subseteq P$ je úplný $\implies$ M uzavřený. To dává speciálně a). □

Například

$(\mathbb{K}, ||\cdot||_p)$, $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$, kde funkce je $\Omega \to \mathbb{K}$ a norma je definována jako p-tá odmocnina z integrálu funkce na p. $l_p(l)$ resp. $l_p(l,\mathbb{K})$ je diskrétní verze předchozího (tj. se sumou). $\mathbb{C}(K)$, kde K je hausdorfův a kompaktní TP.

c jsou všechny posloupnosti se supremovou normou, c_0 jsou všechny posloupnosti konvergující k 0 se supremovou normou. c_{00} sestává z těch posloupností, kde je jen konečně mnoho nenulových prvků (norma je maximová), je to lineární prostor, ale není Banachův. $c_0(I)$ je zobecnění z $c_0(\mathbb{N})$ na libovolnou diskrétní množinu I, tj. obsahuje „posloupnosti“, kde pro každé ε je pouze konečně mnoho členů větších než ε (pak $(c_0(I), ||\cdot||_\infty)$ je Banachův).

$\mathcal{L}^1([0,1], ||\cdot||_{\mathcal{L}^1})$ (prostor hladkých funkcí na intervalu $[0,1]$), kde $||f||_{\mathcal{L}^1} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$. $\mathcal{M}(K) = \{\mu : Borel(K) \to \mathbb{K} | \mu \text{ regulární míra}\}$, $||\mu|| := \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(B_i)|, \bigcup B_i = K, B_i$ Borelo

Věta 1.3

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Důkaz

Později. □

Lemma 1.4

Nechť X je vektorový prostor, $||\cdot||_1$ a $||\cdot||_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{X,||\cdot||_1}$, $B_2 = B_{X,||\cdot||_2}$ a $a, b > 0$. Pak $a||x||^2 \leq ||x||_1 \leq b||x||_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně $||\cdot||_1 = ||\cdot||_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.

Důkaz

$\implies$: Zvol $x \in aB_1$, pak $||\frac{x}{a}||_1 \leq 1 \implies x \in B_2$. Opačně: Zvol $x \in B_2$, pak $||x||_2 \leq 1 \implies x \in B_1$.

$\Leftarrow$: Pokud $x = 0$, pak jsou nerovnosti jasné. Zvol $x \neq 0$. Pak $\frac{x}{||x||_1} \in B_1$. Pak $\frac{ax}{||x||_1} \in B_1 \subseteq B_2 \implies a||x||_2 \leq ||x||_1$. Analogicky pro druhý směr. □

Tvrzení 1.5

Nechť X je vektorový prostor a $||\cdot||_1$ a $||\cdot||_2$ jsou normy na X a B_1 a B_2 jako minule. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *Normy $||\cdot||_1$ a $||\cdot||_2$ jsou ekvivalentní.*
2. *Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.*
3. *Zobrazení $\mathrm{id} : (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$ je homeomorfismus.*
4. *Otevřené množiny v $(X, ||\cdot||_1)$ X splývají s otevřenými množinami $(X, ||\cdot||_2)$.*
5. *$||x_n - x||_1 \to 0$, právě když $||x_n - x||_2 \to 0$ pro $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$.*

Důkaz

$1 \Leftrightarrow 2$ plyne z předchozího lemmatu. $3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$ je lehké a platí ve všech MP. $1 \implies 5$ jasné.

$5 \implies 1$: Sporem posloupností jdoucí k 1. TODO □

Definice 1.4

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Poznámka (Fakt)
Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny. (A naopak každá konvexní množina může být koulí v nějaké normě.)

Definice 1.5 (Konvexní obal)

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu $\operatorname{conv} M = \bigcap \{C \supset M | C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 1.6

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak

$$\operatorname{conv} M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i | x_i \in M, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Důkaz
$\subseteq$: Stačí dokázat, že množina vpravo je konvexní. Přímočaré.

$\supseteq$: Stačí dokázat, že každý prvek vlevo je v konvexním obalu. Indukcí podle n, přímočaré. □

Definice 1.6

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Poznámka (Fakt)
Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X, která obsahuje $U(x, r)$ respektive $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$ a $r \geq 0$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.

Důkaz
Jednoduchý. □

Definice 1.7

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako

$$\overline{\operatorname{span}} M = \bigcap \{Y \supset M | Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$$

a uzavřený konvexní obal jako $\overline{\operatorname{conv}} M = \bigcap \{TODO\}$.

Poznámka (Fakt)
Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.

Poznámka (Fakt)
Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\text{span} M} = \overline{\operatorname{span} M}$ a $\overline{\text{conv} M} = \overline{\operatorname{conv} M}$.

Věta 1.7

Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ *je uzavřený.*

Důkaz
Stačí dokázat pro $\dim Z = 1$ (pak indukcí). Ať $Z = \operatorname{span}(e)$, $e \notin Y$. Ověřme, že $\operatorname{span}(Y \cup \{e\}) = \{y + ke | k \in \mathbb{K}\}$ je uzavřený: Ať $x_n = y_n + k_n e \to x \in X$. Chci $x \in \operatorname{span} Y$.

1. krok: (t_n) je omezená. (Kdyby ne, pak má limitu nekonečno.) Pak ale $|| \frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} + e \,|| = \frac{1}{|t_{n_k}|} ||x_{n_k}|| \to 0$, tedy $\frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} \to -e \notin Y$, tedy Y není uzavřená. ↯

Tedy existuje posloupnost (n_k), že $t_{n_k} \to t \in \mathbb{K}$. Pak ale $y_{n_k} = x_{n_k} - t_{n_k} e \to x - te \in Y$. Tedy $\exists z \in Y : x - te = z$, tj. $x = z + te \in \operatorname{span}(Y \cup \{e\})$. □

Důsledek
Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.

TODO

Věta 1.8 (Test úplnosti)

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Ať X je Borelovský, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je AK řada. $s_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$. Chceme (s_n) je cauchy: Buď $\varepsilon > 0$. Ať $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\sum_{n=N}^{M} ||x_n|| < \varepsilon$, $n_0 \leq N < M$. Pak ale pro $n_0 \leq N < M$ je

$$||s_N - s_M|| = ||\sum_{n=N+1}^{M} x_n|| \leq \sum_{N+1}^{M} ||x_N|| < \varepsilon.$$

Tedy (s_n) je konvergentní.

$\Leftarrow$: Ať (x_n) je cauchyovská. Indukcí najdeme podposloupnost, že $||x_{n_k} - x_{n_{k+1}} < 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$z = \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_1})$$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - x_{n_1} + x_{n+1}) = \lim(x_{n_k} - x_{n_1}) + \lim x_{n_1} = z + x_{n_1}.$$

Celkem $\exists(n_k) \nearrow$, že $\lim(x_{n_k})$ existuje. Značme $x = lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Chceme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. V metrickém prostoru konverguje Cauchyovská posloupnost právě tehdy, pokud existuje její konvergentní podposloupnost. □

Definice 1.8 (Zobecněná řada)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou.

Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada … konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$, pokud platí

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma)\ \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \subseteq F : ||x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| < \varepsilon.$$

Existuje-li $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada … (bezpodmínečně) konvergentn a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma} ||x_\gamma||$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní.

Definice 1.9 (Bolzanova-Cauchyova podmínka)

Řekneme, že zobecněná řada TODO

Věta 1.9 (Nutná podmínka konvergence)

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X. Pak je její součet určen jednoznačně a $(||x_\gamma||)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$.

Důkaz (Jednoznačnost)
Ať $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = x \neq y = \sum_{\gamma\in\Gamma} = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$. Pak $\forall\varepsilon > 0$:

$$\exists F_x \in \mathcal{F}(\Gamma)\ \forall F \supseteq F_x : ||x - \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma|| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists F_y \in \mathcal{F}(\Gamma)\ \forall F \supseteq F_y : ||x - \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\varepsilon = ||x-y|| \leq ||x - \sum_{F_x\cup F_y} x_\gamma|| + \ ||\sum_{F_x\cup F_y} x_\gamma - y|| < \varepsilon$. ↯ □

Důkaz (Existence)
Chceme $(||x_\gamma||) \in c_0(\Gamma)$: Ať $\varepsilon > 0$ libovolné. Najdeme

$$F \in \mathcal{F}(\Gamma)\ \forall F' \supset F : ||x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\gamma_0 \notin F$ máme

$$||x_{\gamma_0}|| = ||\sum_{\gamma\in F\cup\{\gamma_0\}} x_\gamma - x + x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma|| \leq ||\ldots|| + ||\ldots|| < \varepsilon.$$

Tedy $\{\gamma\in\Gamma | ||x_\gamma|| > \varepsilon\} \subseteq F \in \mathcal{F}(\Gamma) \implies (||x_\gamma||) \in c_0(\Gamma)$. (Je tam pouze konečný počet prvků větších než ε.) □

Věta 1.10

Nechť X je Banachův prostor.

1. *Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*
2. *Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.*
3. *Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda \subset \Gamma$, pak je i zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ konvergentní.*

Důkaz (1.)
$\Longrightarrow$: Ať $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ je konvergentní. Zvol $\varepsilon > 0$. Zvolíme

$$F \in \mathcal{F}(\Gamma)\ \forall F' \supseteq F : ||\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\tilde{F} \in \mathcal{F}(\Gamma)$, že $\tilde{F} \cap F = \emptyset$ máme:

$$||\sum_{\gamma\in\tilde{F}} x_\gamma|| = ||\sum_{\gamma\in F\cup\tilde{F}} x_\gamma - \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma|| \leq ||\ldots|| + ||\ldots|| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: Ať $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ splňuje B-C podmínku. Pak najdeme posloupnost $(F_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}(\Gamma)^\mathbb{N}$, že

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \wedge \forall F'\mathcal{F}(\Gamma) : F' \cap F_n = \emptyset : ||\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| < \frac{1}{n}.$$

Označ $y_n = \sum_{\gamma\in F_n} x_\gamma$. 1. krok: (y_n) je cauchyovská. (Dokáže se snadno.) 2. krok: Tedy existuje $y \in X : \lim y_n = y$. Chceme $y = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$: Ať $\varepsilon > 0$.

$$\forall F' \supset F : ||y - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| \leq ||y_{n_0} - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| + ||y_{n_0} - y|| = \sum_{\gamma\in F'\setminus F_{n_0}} x_\gamma \leq \frac{1}{n_0} + ||y_{n_0} - y|| < \varepsilon.$$

$\square$

Důkaz (2.)
Víme, že $\sum_{\gamma\in\Gamma} ||x_\gamma||$ je konvergentní. Dle tvrzení níže tedy

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} ||x_\gamma|| = S = \sup\left\{\sum_{\gamma\in\Gamma} |||x_\gamma|||\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\}.$$

Ověříme, že $\sum x_\gamma$ splní B-C podmínku: Ať $\varepsilon > 0$. Ať $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že $S - \varepsilon < \sum_{\gamma\in F} ||x_\gamma||$. Pak $\forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, že $F' \cap F = \emptyset$:

$$||\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| \leq \sum_{\gamma\in F'} ||x_\gamma|| = \sum_{\gamma\in F'\cup F} ||x_\gamma|| - \sum_{\gamma\in F} ||x_\gamma|| < \varepsilon.$$

$\square$

Důkaz (3.)
Snadný důsledek 1., protože B-C podmínka se zjevně dědí na podmnožiny. $\square$

Tvrzení 1.11

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když $\sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma : F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\} < +\infty$. A navíc platí $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma : F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\}$.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Ať $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ konverguje. Pak zvolíme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ $\forall F' \supset F : ||\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma - \sum_{\gamma\in F} a_\gamma|| < 1$. Pak $\forall H \in \mathcal{F}(\Gamma) : \sum_{\gamma\in H} a_\gamma \leq \sum_{\gamma\in H\cup F} a_\gamma \leq \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma + 1$. Tedy $\sup \ldots \leq \sum_{\gamma\in\Gamma} a_p + 1 < \infty$.

$\Leftarrow$: Ať $S := \sup \ldots < \infty$. Chceme $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = S$. Ať $\varepsilon > 0$. Ať $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$ (z definice suprema) taková, že $S - \varepsilon < \sum_{\gamma\in H} a_\gamma$. Pak pro $F' \supset H$ máme

$$|S - \sum_{\gamma\in F'} a_\gamma| = S - \sum_{\gamma\in F'} a_\gamma < S - \sum_{\gamma\in H} a_\gamma < \varepsilon.$$

Tedy $\sum a_\gamma = S$. $\square$

Tvrzení 1.12

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je konvergentní.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Ať $\sum_{n=1}^\infty ||x_n|| =: S < \infty$. Pak

$$\sup_{F\in\mathbb{F}(\mathbb{N})} \sum_{n\in F} ||x_n|| \leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^N ||x_n|| = \sum_{n=1}^\infty ||x_n|| = S < \infty,$$

neboť každá konečná množina v přirozených číslech má maximum (a odebráním kladných prvků sumu zmenšíme).

$\Leftarrow$: Ať $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||x_n||$ je konvergentní, pak dle předchozího tvrzení $S := \sup_{F\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \sum_{n\in F} ||x_n|| < \infty$. Tedy

$$\sum_{n=1}^\infty ||x_n|| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n\in[N]} ||x_n|| \leq S < \infty.$$

$\square$

Věta 1.13

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v Banachově (pro normovaný lineární prostor je důkaz složitější) prostoru X. Pak následující tvrzení jsou konvergentní:

1. *$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje (říkáme $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně).*
2. *$\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ke stejnému součtu.*
3. *$\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Důkaz
$1 \implies 2$: Ať $\varepsilon > 0$ a $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$. Ať $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňuje, že $\forall F' \supseteq F : ||\sum_{n\in F'} x_n - x|| < \varepsilon$, kde $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N} : F \subseteq \{\pi(1), \dots, \pi(n_0)\}$. Pak $\forall n \geq n_0 :\ ||\sum_{i=1}^n x_{\pi(i)} - x|| < \varepsilon$. Tedy $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)} = x$.

$2 \implies 3$: okamžitě. $3 \implies 1$: Pro spor předpokládejme, že $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$, ale $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ nesplňuje B-C podmínku. Zvolme $\varepsilon > 0$ svědčící o tom, že B-C podmínka není splněna. Pak existuje $(F_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}(\mathbb{N})^\mathbb{N}$, že $F_n \cap F_m = \emptyset\ \forall n \neq m$, $\max F_n < \min F_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ a $||\sum_{i\in F_n} x_i||$.

Zvolme $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$ splňující, že existuje $(n_k) \nearrow$ a $(p_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, že $\pi\left(\{n_k, n_k+1, \dots, n_k+p_k\}\right) = F_k\ \forall k \in \mathbb{N}$. Tedy $\forall k \in \mathbb{N} : ||\sum_{i=n_k}^{n_k+p_k} x_{\pi(i)}|| = ||\sum_{i\in F_k} x_i|| \geq \varepsilon$. To však znamená, že $\sum_{i=1}^\infty x_{\pi(i)}$ nesplňuje B-C podmínku, tedy není konvergentní. ↯ ☐

Věta 1.14

Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.

Důkaz
Jasný z minulé věty. ☐

Navíc v $\mathbb{R}$ platí ekvivalence.

Věta 1.15

Pokud $\dim X = +\infty$*, pak* $\exists (x_n) : \sum_{n=1}^\infty ||x_n||$ *konverguje, ale* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *není konvergentní.*

2 Lineární operátory a funkcionály

Poznámka (Opakovali jsme)
Lineární zobrazení (viz lingebra), dále:

Věta 2.1

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *T je spojité.*
2. *T je spojité v jednom bodě.*
3. *T je spojité v 0.*
4. *$\exists C \geq 0$ tak, že $||T(x)|| \leq C||x||\ \forall x \in X$.*
5. *T je Lipschitzovské.*
6. *T je stejnoměrně spojité.*
7. *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*
8. *$T(B_X)$ je omezená.*
9. *$T(U(0, \delta))$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.*

Prostor $\mathcal{L}(X < Y)$ s normou $||T|| = \sup_{x \in B_x} ||T(x)||$ je normovaný lineární prostor.

Lemma 2.2

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

- $||T(x)|| \leq ||T|| \cdot ||x||$ *pro každé* $x \in X$.
- $||T|| = \sup_{x \in S_X} ||T(x)|| = \sup_{x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}} \frac{||T(x)||}{||x||} = \sup_{x \in U_X} ||T(x)||$.
- $||T|| = \inf\{C \geq 0 |\ ||T(x)|| \leq C||x|| \forall x \in X\}$.

Důkaz
Pro $x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$ platí $||T(x)|| = ||T(\frac{x}{||x||})|| \cdot ||x|| \leq ||T|| \cdot ||x||$.

$S_X \subseteq B_X$, tedy $||T|| \geq \sup_{x \in S_X} ||T(x)||$. $\forall x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$:

$$\frac{||T(x)||}{||x||} = ||T(\frac{x}{||x||})|| \leq \sup_{y \in S_X} ||T(y)||,$$

tedy $\sup_{x \in S_X} ||T(x)|| \geq \sup_{x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}} \frac{||T(x)||}{||x||} =: S_3$. Pro $x \in U_X \setminus \{\mathbf{o}\}$ platí $||T(x)|| \leq \frac{||T(x)||}{||x||} \leq S_3$, tedy $\sup_{x \in U_x} ||T(x)|| \leq S_3$. Konečně, pro $x \in B_x$: $||T(x)|| \leftarrow ||T\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) x\right)|| \leq \sup_{x \in U_X} =: S_4$, tedy $||T_x|| = \lim_{n \to \infty} ||T\left(1 - \frac{1}{n}\right) x|| \leq S_4 \implies \sup_{x \in B(x)} ||T(x)|| \leq S_4$.

Dle prvního bodu máme nerovnost „$\geq$“. Pro „$\leq$“ zvolme $\varepsilon > 0$ ... ať $\tilde{c} > 0$ je takové, že $\tilde{c} < \inf\{\dots\} + \ \varepsilon$. Pak $||T|| = \sup_{x \in B_x} \frac{||T_x||}{||x||} \leq \inf\{\dots\}$. □

Definice 2.1

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X.

TODO!!!

TODO!!!

TODO!!!

Poznámka (Kvocient)
Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y jeho podprostor. Definujeme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y$.

Pro $x \in X$ pak definujeme $[x]$ jako třídu ekvivalence obsahující x.

Na množině $X/Y = \{[x] | x \in X\}$ definujeme operace $[x] + [y] = [x + y]$ a $\alpha[x] = [\alpha x]$.

Definice 2.2 (Kvocient)

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme faktoprostorem prostoru X podle Y nebo též kvocientem X podle Y. Dále definujeme tzv. kanonecké kvocientové zobrazení $q : X \to X/Y$ předpisem $q(x) = [x]$.

Definice 2.3 (Norma na kvocientu)

Buď X normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, ||\cdot||_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$||[x]||_{X/Y} = \inf_{y\in[x]} ||y|| = \inf_{y\in Y} ||x+y|| = \inf_{y\in Y} ||x-y|| = \operatorname{dist}(x+Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y).$$

Tato norma se nazývá kanonická kvocientová norma.

Důkaz (Je to norma)
Triviální. □

Tvrzení 2.3

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q: X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_x) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $||q|| = 1$.

Důkaz
Zřejmý. □

Věta 2.4

Nechť X je Banachův prostor. Potom TODO!

Důkaz
Přes test úplnosti (X je Banachův, právě když každá abs. konvergentní řada je konvergentní). Ať $\{[x]_n | n \in \mathbb{N}\}$ splňuje $\sum_{n=1}^{\infty} < \infty$. Chceme $\sum_{[x]_n}$. Ať $\{y_n |\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y$ jsou takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n + y_n|| < \infty$. Pak $\sum (x_n + y_n)$ je konvergentní (podle testu úplnosti) a je prvkem X, tedy $q\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} q(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty}[x_n]$. Tudíž $\sum_{n=1}^{\infty}[x_n]$ je v prostoru $q(X) = X/Y$. □

Poznámka (Zajímavosti)
l_∞/c_0 je docela zajímavý prostor (Rosemider? + Brech? 2012: Je nerozhodnutelné, zda l_∞/c_0 je izometricky univerzální Banachův prostor hustoty $|\mathbb{R}|$. Dokonce je nerozhodnutelné, zda takový prostor existuje.) ($l_\infty/c_0 \equiv \mathcal{C}(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$)

Definice 2.4 (Direktní součet)

Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je direktním (též algebraickým) součtem A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{\mathbf{o}\}$ a $X = A + B = \operatorname{span}\{A \cup B\}$.

Definice 2.5 (Projekce)

Nechť X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P : X \to X$ se nazývá (lineární) projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Tvrzení 2.5 (Fakt)

Nechť X je vektorový prostor.

- *Je-li $P : X \to X$ lineární projekce, pak $P \upharpoonright P = \mathrm{id}_P$.*
- *Je-li Y podprostor X a $P : X \to Y$ lineární zobrazení splňující $P \upharpoonright_Y = \mathrm{id}_Y$, pak P je projekce X na Y.*

Důkaz

Triviální. $\square$

Tvrzení 2.6

Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A a P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = \mathrm{id}_X$, $P_A = A$, $\ker P_A = B$, $P_B = B$ a $\mathrm{Ker}\, P_B = A$.

Důkaz

Jednoduchý. $\square$

Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X, pak $X = A \oplus B$, kde $A = P$, $B = \mathrm{Ker}\, P$ a $P = P_A$.

Důkaz

Jednoduchý. $\square$

Věta 2.7

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.

- *Prostor Y má algebraický doplněk v X.*
- *Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y, speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.*

Důkaz

Díky Zornovu lemmatu existuje algebraická báze $B \subset Y$ prostoru Y. Stejně tak existuje $B' \supset B$ báze X. Potom $Z = \operatorname{span}(B' \setminus B)$ je algebraický doplněk Y v X, neboli $X = Y \oplus X$.

Ať $X = Y \oplus A$. Pak chceme $q \restriction_A \colon A \to X/Y$ je lineární izomorfismus: Víme q je lineární, q je prosté (ať $x \in A, q(x) = 0$, pak $x \in Y$, tedy $x \in A \cap Y = \{\mathbf{o}\}$, takže $x = \mathbf{o}$) a q je na (Ať $x = y + a \in X$, pak $q(x) = q(a)$, tedy $q(x) \in q|_A(A)$). □

Definice 2.6 (Kodimenze)

Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak kodimenzí (značíme Y?) Y rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

Definice 2.7

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_t B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_t B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

Věta 2.8

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když zobrazení $T : X \to Y \oplus_1 Z$, $T(x) = (P_Y(x), P_Z(x))$ je izomorfismus.

Důkaz

$\implies$: $\forall x \in X$: $||T(x)|| = ||P_Y x|| + ||P_Z x|| \leq 2\max(||P_Y||, ||P_Z||)||x|| \leq ||(P_Y + P_Z)x|| = ||x||$. Tedy T je izomorfismus.

$\Leftarrow$: $\forall x \in X$: $||P_y x|| \leq ||P_y x|| + ||P_z x|| = ||Tx|| \leq ||T|| ||x||$, tedy $||P_y|| \leq ||T||$. □

Věta 2.9

Nechť X je Banachův prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když Y a Z jsou uzavřené.

Důkaz

Zatím bez důkazu. □

Věta 2.10

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Pak

- *Y je isomorfní komplementovanému podprostoru X, právě když existují lineární operátory $S : X \to Y$ a $T : Y \to X$ splňující $S \circ T = \mathrm{id}_Y$.*

- *Y je isometrické 1-komplementovanému podprostoru X, právě když existují lineární operátory $S : X \to Y$ a $T : Y \to X$ splňující $S \circ T = \mathrm{id}_y$ a $\max\{||S||, ||T||\} \leq 1$.*

Důkaz
$\Leftarrow$: Polož $p := T \circ S : X \to X$. Pak p je zřejmě lineární a $||p|| \leq ||T|| \cdot ||S||$, navíc $p^2 = (T \circ S) \circ (T \circ S) = p$, tedy p je projekce. Zároveň $p(X) = T(S(X))$, jelikož $S \circ T$ je identita, tak S je na a $p(X) = T(Y) = T$. Zbývá si uvědomit, že T je izomorfismus (izometrie, pokud $||S||, ||T|| \leq 1$): Máme

$$\forall x \in X : ||Sx|| = ||STSx|| \leq ||S|| \cdot ||TSx||,$$

tedy (protože S je na):

$$\forall y \in Y : ||y|| \frac{1}{||S||} \leq ||Ty||,$$

tudíž T je izomorfismus.

$\Longrightarrow$: Ať $P : X \to X$ je projekce, $L : P(X) \to Y$ izomorfismus na. Položíme $S := L \circ P$, $T := L^{-1}$, pak $S \circ T = L \circ P \circ L^{-1} = L \circ L^{-1} = \mathrm{id}$. □

Poznámka (Zajímavosti pro všechny (nezkouší se))
Ví se ($\dim X = +\infty$, X Banach)

- X lze komplementovaně vnořit do $l_p \implies X \cong l_p$, $p \in [1, \infty]$.
- X lze komplementovaně vnořit do $c_0 \implies X \cong l_0$.
- Existuje nespočetně neizomorfních podprostorů L_p, $p \in (1, \infty)$.

Neví se:

- X lze komplementovaně vnořit do $L_1 \implies X \in \{l_1, L_1\}$.
- X lze komplementovaně vnořit do $\mathcal{C}([0, 1]) \implies X \cong \mathcal{C}(k?)$.

Ví se:

- $X \cong l_2 \Leftrightarrow (\forall Z, \dim Z = +\infty, Z Banach, Z \hookrightarrow l_2 \implies Z \cong l_2)$.

Neví se, zda platí izometrická varianta předchozího.

3 Hilbertovy prostory

Lemma 3.1

$A^\perp$ je uzavřený podprostor.

Důkaz
Pro $y \in X$ ať $f_y(x) =< x, y >$. Pak f_y je lineární a spojité (z Cauchy-Swartze). $A^\perp = \bigcap_{y \in A} f_y^{-1}(0)$. □

Definice 3.1

Prostor se skalárním součinem $(X, < \cdot, \cdot >)$ se nazývá Hilbertův prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, || \cdot ||)$ je Banachův prostor, kde $||x|| = \sqrt{< x, x >}$.

Například
- l_2 ... $< x, y >:= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.
- $L_2([0, 1])$ ... $< f, g >:= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$.

Tvrzení 3.2

Nechť $(X, < \cdot, \cdot >)$ je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak funkce $< \cdot, \cdot >: X \times X \to \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).

Důkaz
Přímočarý s použitím Cauchy-Swartze. □

Tvrzení 3.3 (Polarizační vzorec)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$< x, y >= \frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2)$$

v reálném případě, resp.

$$< x, y >= \frac{1}{4}(||x + \ y||^2 - ||x - y||^2 + i||x + iy||^2 - i||x - iy||^2)$$

v komplexním.

Důkaz (Reálný případ, v $\mathbb{C}$ analogicky)

$$4 < x, y >= 2 < x, y > -2 < x, -y >= ||x+y||^2-||x||^2-||y||^2-||x-y||^2+||x||^2+||-y||^2 = ||x+y||^2-||x-$$

□

Důsledek
Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T : X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $< T(x), T(y) >=< x, y >$ pro každé $x, y \in X$.

Důkaz
Izometrie zachovává pravé strany v polarizačním vzorci. $\square$