# Organizační úvod

TODO!!!

# Úvod

TODO!!!

**Definice 0.1**

Zúplnění míry $\lambda^n_B$ nazveme Lebesgueovou mírou v $\mathbb{R}^n$.

*Poznámka*

1. Lebesgueova míra je $\sigma$-konečná.
2. Množinu $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n) := \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{N})$ nazýváme $\sigma$-algebrou lebesgueovsky měřitelných množin. Platí $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
3. Lebesgueova míra je regulární v následujícím smyslu:

   $$\forall E \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \text{otevřená množina } G\, \exists \text{uzavřená množina } F : F \subset E \subset G \wedge \mu(G \setminus F) < \varepsilon.$$

**Definice 0.2** (Značení)

Nechť $X, Y$ jsou množiny a $f : X \to Y$. Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak $f^{-1}(\mathcal{S}) := \{f^{-1}(S) | S \in \mathcal{S}\}$.

**Věta 0.1** (O zobrazení $f : X \to Y$)

*Nechť $X, Y$ jsou množiny a $f : X \to Y$.*

1. *Je-li $\mathcal{M}$ $\sigma$-algebra na $Y$, pak $f^{-1}(\mathcal{M})$ je $\sigma$-algebra na $X$.*
2. *Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak $f^{-1}(\sigma(\mathcal{S})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{S}))$.*

*Důkaz*

Později. □

# 1 Měřitelná zobrazení

**Definice 1.1** (Měřitelné zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{M})$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ nazveme měřitelným (vzhledem k $\mathcal{A}$ a $\mathcal{M}$), jestliže $f^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}$.

Jestliže některý z prostorů $X, Y$ je metrický prostor, pak za příslušnou $\sigma$-algebru bereme $\sigma$-algebru borelovských podmnožin (pokud není řečeno jinak).

Měřitelné zobrazení mezi dvěma metrickými prostory se nazývá borelovsky měřitelné (krátce borelovské).

*Poznámka*

1. Snadno se ověří, e kompozice dvou měřitelných zobrazení je měřitelné zobrazení.
2. Z věty O zobrazení... plyne, že jsou-li $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{M})$ měřitelné prostory, pak zobrazení $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$, kde $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ je generátor $\sigma$-algebry $\mathcal{M}$. Speciálně je-li $(X, \mathcal{A})$ a $Y$ metrický prostor, pak zobrazení $f : X \to Y$ je měřitelné $\Leftrightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ $\forall$otevřenou množinu $G \subset Y$.

*Důsledek*
Každé spojité zobrazení mezi dvěma metrickými prostory je měřitelné (borelovské).

*Důkaz*
Z věty O zobrazení... (vzory otevřených množin při spojitém zobrazení jsou otevřené množiny). $\square$

## **Věta 1.1** (Generátory $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$)

*Borelovská $\sigma$-algebra $\mathcal{B}^n$ je generována*

1. *otevřenými intervaly $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, kde $-\infty < a_i < b_i < +\infty$,*
2. *systémem $\mathcal{S} := \{(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n)\}$, kde $a_i \in \mathbb{R}$.*

## **Věta 1.2** (O měřitelných zobrazeních)

*Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor.*

1. *Jsou-li $f : X \to \mathbb{R}^n$ a $g : X \to \mathbb{R}^n$ měřitelná zobrazení, pak zobrazení $(f, g) : X \to \mathbb{R}^{n+m}$ je měřitelné.*
2. *Jsou-li $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ měřitelná zobrazení, pak zobrazení $f \pm g$ jsou měřitelná zobrazení.*
3. *Jsou-li $f, g : X \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, pak také $f \cdot g, \max(f, g), \min(f, g)$ jsou měřitelné.*

*Poznámka*
Prostor $\mathbb{R}^*$ je metrický prostor s metrikou např. $\varrho^*$ danou předpisem $\varrho^*(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$, kde $\varphi(x) := \frac{x}{1+|x|}$ pro konečné $x$ a $\varphi(\pm\infty) = \pm 1$ (tzv. redukovaná metrika).

Redukovaná metrika má následující vlastnosti (viz Jarník – Diferenciální počet 2, str. 245, 246):

1. V množině $\mathbb{R}$ je ekvivalentní s eukleidovskou metrikou.
2. Konvergence v prostoru $(\mathbb{R}^*, \varrho^*)$ splývá s konvergencí zavedenou v $\mathbb{R}^*$ pomocí okolí bodů.

Platí $\mathcal{B}^* := \mathcal{B}(\mathbb{R}^*) = \sigma\left(\{\langle -\infty, a) \,|a \in \mathbb{R}\}\right)$. Plyne z:

1. $\forall$ otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^*$ lze psát jako spočetné sjednocení intervalů typu $\langle -\infty, a), (a,b), (b, \infty\rangle$.
2. $\langle -\infty, a)$ je stejný jako v $\mathbb{R}^*$.
3. $(a, +\infty\rangle$ je $\mathbb{R}^* \setminus \langle -\infty, a)$.
4. $(a, +\infty\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\langle a + \frac{1}{n}, +\infty \right\rangle$.
5. $(a,b) = \langle -\infty, b) \cap (a, +\infty\rangle$.

**Věta 1.3** (O měřitelných funkcích)

*Buď $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. Pak platí*

1. *$f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce právě tehdy, když $f^{-1}\left((-\infty, a)\right) \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$.*
2. *$f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná funkce právě tehdy, když $f^{-1}\left(\langle -\infty, a)\right) \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$.*

*Důsledek*
Nechť $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ jsou měřitelné funkce. Pak

1. množiny $\{x \in X | f(x) < g(x)\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}$ jsou měřitelné.
2. funkce $\max(f,g), \min(f,g)$ jsou měřitelné funkce.

**Věta 1.4** (O měřitelných funkcích podruhé)

*Jsou-li funkce $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ množiny $(X, \mathcal{A})$ do $\mathbb{R}^*$ měřitelné funkce, pak funkce* $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \limsup_{n\in\mathbb{N}}$ *j*
*jsou měřitelné.*

**Definice 1.2** (Jednoduchá funkce)

Funkce $S: \ X \to [0, +\infty)$ se nazývá jednoduchá, jestliže množina $S(X)$ je konečná.

Platí, že $s(x) = \sum_{\alpha \in S(X)} \alpha \cdot \chi_{S=\alpha}$. Součet na pravé straně této rovnosti nazveme kanonickým vyjádřením jednoduché funkce.

# 2 Abstraktní Lebesgueův integrál

**Věta 2.1** (O nezáporné měřitelné funkci)

*Nechť $f : (X, \mathcal{A}) \to \langle 0, +\infty \rangle$ je měřitelná funkce. Pak existuje posloupnost jednoduchých (nezáporných) měřitelných funkcí $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tak, že $s_n \nearrow f$ (konverguje nahoru).*

*Jestliže navíc $f$ je omezená, pak $s_n \rightrightarrows f$.*

**Definice 2.1**

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou.

1. Je-li $s : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty)$ jednoduchá měřitelná funkce, zapíšeme ji v kanonickém tvaru $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}$ a definujeme

$$\int_X s d\mu = \int_X s(x) d\mu(x) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j).$$

2. Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ měřitelná funkce, pak definujeme

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu | 0 \le s \le f \land s \text{ je jednoduchá} \right\}.$$

3. Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}*$, pak definujeme

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu, \text{ má li pravá strana smysl.}$$