Příklad (Teoretický příklad 12)
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je prostá a spojitá. Dokažte, že f je ryze monotónní.

Důkaz
Ukážeme sporem, že musí být monotónní. Pak z prostoty vyplývá, že už nutně musí být ryze monotónní:

Nechť tedy f je prostá, spojitá a není monotónní, tj. existují body $a < b : f(a) < f(b)$ a $c < d : f(d) < f(c)$. Jelikož je f spojitá, má Darbouxovu vlastnost. Teď rozebereme různé příklady a dokážeme, že z Darbouxovy vlastnosti plyne, že funkce není prostá:

$a = c$, $b = d$, $b = c$ nebo $a = d$. Pak z původních 4 bodů nám zbydou 3, $x < y < z$, kde $f(y) < f(x), f(z)$ nebo $f(y) > f(x), f(z)$. Ať tak či tak, z Darbouxovy vlastnosti vyplývá, že na intervalu (x, y) funkce f nabývá alespoň jedné stejné hodnoty jako na intervalu (y, z), protože když BÚNO $f(y) < f(x), f(z)$, pak existuje ε pravé okolí $f(y)$, které leží jak v $(f(y), f(x))$ tak v $(f(y), f(z))$, takže všechny hodnoty z tohoto okolí musí z Darbouxovy vlastnosti nabývat jak na (x, y) tak na (y, z).

Pokud $f(a) > f(c) \implies f(b) > f(d)$, potom buď $d > b$ a tedy intervaly (a, b) a (b, d) nemají průnik, zatímco $(f(a), f(b))$ a $(f(d), f(b))$ mají – spor s prostotou, nebo $b < d$ a tedy intervaly (c, b) a (b, d) nemají průnik, zatímco $(f(c), f(b))$ a $(f(d), f(b))$ mají – spor s prostotou.

Pokud $f(a) = f(c)$, tak buď $a = c$, ale to už jsme řešili, nebo $a \neq c$, ale pak f není prostá, spor.

Pokud $f(a) < f(c)$, pak buď $a < c$ a potom intervaly (a, c) a (c, d) jsou disjunktní, ale $(f(a), f(c))$ a $(f(a), f(d))$ mají společné pravé okolí $f(a)$, nebo $C > a$ a potom (c, a) a (a, b) jsou disjunktní, ale $(f(a), f(c))$ a $(f(a), f(b))$ také nejsou disjunktní, což je ale obojí ve sporu s tím, že f má být prostá.

Tedy f musí být monotónní, a protože je také prostá, tak rovnost nastávat nemůže a musí být ryze monotónní. $\square$