Poznámka
Stručný obsah: Diferencovatelnost v Banachových prostorech; Asplundovy prostory; slabé Asplundovy prostory; fragmentovanost a oddělovací spojitost; atd.

1 Diferencovatelnost

1.1 Základní pojmy

Poznámka
Většina by fungovala i pro NLP, ale my se pro jednoduchost zaměříme na Banachovy prostory.

Definice 1.1

X, Y reálné Banachovy prostory, $U \subset X$ otevřená, $f : U \to Y$, $x \in U$, $h \in X$:

$$\partial_h^+ f(x) = \lim_{t \to 0_+} \frac{f(x + t \cdot h) - f(x)}{t} \in Y, \text{ pokud existuje,}$$

$$\partial_h f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot h) - f(x)}{t} \in Y, \text{ pokud existuje.}$$

Poznámka
$\partial_{\mathbf{o}}^+ f(x) = \partial_{\mathbf{o}} f(x) = 0$. Pokud $\|h\| = 1$, pak je to směrová derivace.

Pokud $\alpha > 0$, pak $\partial_{\alpha h}^+ f(x) = \alpha \partial_h^+ f(x)$, má-li alespoň jedna strana smysl. Podobně pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je $\partial_{\alpha h} f(x) = \alpha \partial_h f(x)$, má-li alespoň jedna strana smysl (speciálně $\alpha = -1$).

$$\exists \partial_h f(x) \Leftrightarrow \exists \partial_{-h}^+ f(x) = -\partial_h^+ f(x).$$

Definice 1.2 (Gateauxova derivace)

X, Y reálné Banachovy prostory, $U \subset X$ otevřená, $f : U \to Y$, $x \in U$, $h \in X$: Pokud $\exists L \in \mathcal{L}(X, Y)$, že $\forall h \in X : L(h) = \partial_h f(x)$, značíme $f_g'(x) = L$.

Poznámka
Stačí, aby $\forall h \in X : L(h) = \partial_u^+ f(a)$. Znamená to, že $h \mapsto \partial_h^{(+)} f(x)$ je omezený lineární operátor.

Definice 1.3 (Fréchetova derivace)

f má v bodě $x \in U$ Fréchetovu derivaci, pokud $\exists L \in \mathcal{L}(X, Y)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Poznámka
Pokud takové L existuje, nutně platí $L = f'_g(x)$. Fréchetovu derivaci značíme $f'_F(x)$.

Poznámka

$$\exists f'_F(x) \Leftrightarrow \exists f'_g(x) \wedge \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \partial_h f(x) \text{ stejnoměrně pro } h \in B_X \text{ (resp. } h \in S_X).$$

Důkaz
$f'_F(x)$ existuje $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall h \in X, \|h\| < \delta : \|f(x+h) - f(x) - \partial_h f(x)\| \leqslant \varepsilon \cdot \|h\|$$

Existenci $f'_g(x)$ máme, tedy: $\varepsilon > 0$ ... najdeme to $\delta > 0$: $h \in B_x$, $t \in \mathbb{R}$, $0 < |t| < \delta \implies \|t \cdot h\| < \delta$:

$$\|f(x+th) - f(x) - \partial_{t \cdot h} f(x)\| \leqslant \varepsilon \|t \cdot h\| = \varepsilon \cdot |t|$$

$$\|\frac{f(x+th) - f(x)}{t} - \partial_h t(x)\| \leqslant \varepsilon$$

to dává stejnoměrnou konvergenci „ $\implies$ “.

„ $\impliedby$ “: Nechť $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall h \in \{x | \forall t \in P(\mathbf{o}, \delta)\}$:

$$\|\frac{f(x + t \cdot h) - f(x)}{t} - \partial_h f(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ ... najdeme to $\delta > 0$: Zvolíme $h \in X$, $0 < \|h\| < \delta \implies \frac{h}{\|h\|} \in S_X \implies$

$$\implies \|\frac{f(x+h) - f(h)}{\|h\|} - \frac{\partial_h f(x)}{\|h\|}\| \leqslant \varepsilon \implies$$

$$\implies \frac{\|f(x+h) - f(x) - \partial_h f(x)\|}{\|h\|} < \varepsilon.$$

□

Poznámka

1. $X = \mathbb{R}$, pak je F. derivace, G. derivace a běžná derivace to samé.

2. TODO?

3. TODO?

Tvrzení 1.1

$\dim X < \infty$, $U \subset X$ *otevřená;* $f : U \to Y$ *lipschitzovská,* $x \in U$, $f'_g(x)$ *existuje* $\implies$ $f'_F(x)$ *existuje.*

Důkaz
f lipschitzovská $\implies$ existuje $L > 0 : \|f(x) - f(y)\| \leqslant L \cdot \|x - y\|$ $(x, y \in U)$. Nechť existuje $f'_g(x)$. Potom $\forall \varepsilon > 0$ existuje $h_1, \ldots, h_N \in S_X$ ε-síť. Nechť $\delta > 0$ je takové, že $B(x, \delta) \subset U$ a $0 < |t| < \delta \implies \|\frac{f(x+th_i)-f(x)}{t} - f'_g(x)(h_i)\| < \varepsilon$.

Vezmeme $h \in S_X$ libovolné, $0 < |t| < \delta$. Existuje i, že $\|h - h_i\| < \varepsilon$:

$$\|\frac{f(x+t\cdot h)-f(x)}{t} - f'_g(x)(h)\| \leqslant \|\frac{f(x+t\cdot h)-f(x+t\cdot h_i)}{t}\| + \|\frac{f(x+t\cdot h_i)-f(x)}{t} - f'_g(x)(h_i)\| + \|f'_g(x$$

□

Poznámka
Stačí lokálně lipschitzovská.

Tvrzení 1.2

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *konvexní* $\implies$ $f'(x)$ *existuje v každém bodě* (a, b) *až na spočetně mnoho.*

Důkaz
1) $\forall x \in (a, b)$ existuje vlastní $f'_+(x)$, neboť $f'_+(x) = \lim_{y \to x+} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, což je neklesající funkce v $y \in (x, b)$ a zdola omezená hodnotou $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ pro $z \in (a, x)$.

2) $x \mapsto f'_+(x)$ je neklesající na (a, b). 3) Podobně pro f'_-. Tedy f je spojitá na (a, b). 4) $f'(x)$ neexistuje $\Leftrightarrow$ f'_+ má v bodě x skok. (f'_+ je spojitá v x $\implies$ $f'_x(x) = \lim_{y \to x-} f'_+(y) = \lim_{y \to x-} f'_-(y)$, $f'_-(y) \leqslant f'_+(y) \leqslant f'_-(z)$ pro $z > y$). □

Tvrzení 1.3

f *convex and bounded from above on* $B(x, r)$, $x \in X, r > 0$ $\implies$ f *is Lipschitz on* $B\left(x, \frac{1}{2}\right)$.

Důkaz
1) „fM on $B(x,r) \implies f \geqslant 2f(x) - M$ on $B(x,r)$“: $y \in B(x,r)$, $z := x + (x-y) \implies z \in B(x,r)$, $x = \frac{1}{2}(y+z)$. $f(x) \leqslant \frac{1}{2}(f(y)+f(z))$, $f(y) \geqslant 2f(x) - f(z) \geqslant 2f(x) - M$.

2) Assume $|f| \leqslant M$ on $B(x,r)$. Take $v, w \in B(x, \frac{r}{2})$, $v \neq w$, $z := w + \frac{z}{2}\frac{w-v}{\|w-v\|} \implies z \in B(x,r)$. $w(1 + \frac{z}{2\|w-v\|}) = z + \frac{z}{2\|w-v\|}v$,

$$f(w) \leqslant \frac{f(z) + \frac{z}{2\|w-v\|}f(v)}{1 + \frac{z}{2\|w-v\|}}$$

$$f(w) - f(v) \leqslant \frac{f(z) + f(v)}{1 + \frac{z}{2\|w-v\|}}$$

$$\frac{f(w)-f(v)}{\|w-v\|} \leqslant \frac{f(z)-f(v)}{\|w-v\| + 1/2} \leqslant \frac{2M}{\frac{r}{2}} = \frac{4M}{r}$$

$\implies f$ is $\frac{4M}{r}$-lipschitz on $B(x, \frac{y}{2})$. □

Důsledek

- $\dim X < \infty$, $U \subset X$ open convex, $f : U \to \mathbb{R}$ convex $\implies f$ is locally lipschitz on U. (WLOG: $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$. $x \in U \implies \exists r > 0 \overline{B_{\|\cdot\|_1}(x,r)} \subset U$. $\overline{B_{\|\cdot\|_1}(x,r)} = \overline{\operatorname{conv}\{x \pm re_i | i \in [n]\}}$. $f \leqslant \max_{i\in[n]} f(x \pm r \cdot e_i)$ on $\overline{B_{\|\cdot\|_1}(x,r)} \implies f$ is Lipschitz on $\overline{B_{\|\cdot\|_1}(x, \frac{r}{2})}$)
- $\dim X < \infty$, $U \subset X$ open convex, $f : U \to \mathbb{R}$ convex, $x \in U \implies f'_F(x)$ exists if and only if f'_g („ $\implies$ “ always, „ $\impliedby$ “ from first item and tvrzeni above).
- X Banach space, $U \subset X$ open convex, $f : U \to \mathbb{R}$ continuous convex, then f is locally Lipschitz on U (f continuous $\implies f$ is locally bounded $\implies f$ is locally Lipschitz).

Věta 1.4

$X = l_1$, $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

$$\exists f'_g(x) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0. \qquad \implies f'_g(x) = (\operatorname{sgn} x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_\infty,$$

$$\forall x \in l_1 \ \nexists f'_F(x).$$

Důkaz
1) $x \in l_1$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 0$. Take $h = e_n \sum_{k \neq n} |x_k| + |t|$. $\partial_h f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\|x+t\cdot e_n\| - \|x\|}{t} = \lim_{t\to} \frac{|t|}{t}$ doesn't exist. This prove „ $\implies$ “.

„ $\impliedby$ “: Assume $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n \neq 0$, $h \in l_1$, $h \neq 0$, $\varepsilon > 0$:

$$\left|\frac{f(x+t\cdot h) - f(x)}{t} - \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cdot \operatorname{sgn} x_n\right| = \left|\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}(|x_n + t\cdot h_n| - |x_n| - th_n \operatorname{sgn} x_n)\right| \leqslant \left|\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{N}(\dots)\right| + \frac{1}{t}\sum_{n>N}(\cdot$$

□