

Příklad (11)

Let $X = C^\infty([0, 1])$ be the space of C^∞ functions on $[0, 1]$ (i.e., C^∞ functions on $(0, 1)$ such that all the derivatives can be continuously extended to $[0, 1]$) equipped with the family of seminorms \mathcal{P} :

$$p_n(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f^{(n)}(t)|, \quad f \in X \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

1. Describe a base of neighborhoods of zero.

┌

Řešení

Podle Věty 5 je báze okolí $\mathbf{0}$ rovná

$$\{\{x \in X \mid \tilde{p}_1(x) < c_1, \dots, \tilde{p}_k(x) < c_k\} \mid \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k \in \mathcal{P}, c_1, \dots, c_k > 0\},$$

tedy jsou to množiny těch funkcí, které mají vždy určité (konečný počet) derivace omezené určitými konstantami.

└

2. Is X Hausdorff? Is X metrizable? Is it a Fréchet space?

┌

Řešení

Je Hausdorffův, protože pro každou nenulovou $f \in C^\infty$ je už p_0 nenulová (a použijeme Větu 5 z přednášky). Z Věty 5 také plyne, že X je (s kanonickou topologií) LCS, tedy podle Věty 22 (i a iv) je X metrizovatelný.

Aby to byl Fréchetův prostor, musíme ukázat, že je úplný: Mějme tedy cauchyovskou posloupnost (podle tvrzení 21. je tedy cauchyovská v každé p_n). To znamená, že každá i -tá derivace konverguje stejnoměrně, tedy konverguje k derivaci $(i - 1)$ -ní derivaci (o záměně limity a derivace) a zároveň k spojitě funkci (stejnoměrná konvergence spojitých funkcí je spojitá), tedy limita posloupnosti má všechny derivace spojitě.

└

3. Is X normable?

Řešení

Podle Věty 23 nám stačí rozhodnout, zda existuje omezené (podle lemma 15 omezené v každé normě) okolí \mathbf{o} . Každé okolí \mathbf{o} musí obsahovat množinu z báze okolí \mathbf{o} . Ale taková množina je omezená vždy jen v konečně mnoha pseudonormách. Je-li p_n poslední norma (to neznaméná, že v nějaké menší není omezena), ve které je daná množina omezená, ε minimum z konstant z definice báze okolí \mathbf{o} (BÚNO $\varepsilon < 1$), pak můžeme pro každé $1 < K \in \mathbb{R}$ najít $f(x) = \varepsilon \frac{\varepsilon^n}{K^n} gon_n\left(\frac{K}{\varepsilon}x\right)$, kde (gon_i je \sin pro sudé i a \cos pro liché i), což je funkce, která je jistě C^∞ , pro $k \leq n$ je

$$p_k(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f^{(k)}(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{n-k}}{K^{n-k}} gon_{n-k}\left(\frac{K}{\varepsilon}x\right) \right| \leq \sup_{x \in [0,1]} \varepsilon \cdot 1 \cdot 1 = \varepsilon,$$

ale

$$p_{n+1}(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f^{(n+1)}(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \left| K \cdot \cos\left(\frac{K}{\varepsilon}x\right) \right| = K.$$

Tedy p_{n+1} na tomto okolí je neomezená. Tedy neexistuje okolí \mathbf{o} , které by bylo omezené, tedy prostor X není normovatelný.

4. Describe all the continuous linear functionals on X .

Řešení

Podle Tvzení 14 musí pro $\varphi \in X^*$ existovat $c > 0$, $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n \in \mathcal{P}$, že $\forall f \in X : |L(f)| \leq c \cdot \max\{\tilde{p}_1(f), \dots, \tilde{p}_n(f)\}$.

A pokud v předchozí n -tici norem máme pouze jednu, p_k , pak se můžeme podívat, jak působí tento funkcionál na k -tou derivaci $f \in X$ jako prvek prostoru $C([0, 1])$, tj. $f^{(k)} \in C([0, 1])$. $|L(f)| \leq c \cdot p_k(f) = c \cdot \|f^{(k)}\|_\infty$, tedy L je spojitá (a zřejmě lineární) i na $\{f^{(k)}\} \subset C([0, 1])$. Navíc z Weierstrassovy věty je $\{f^{(k)}\}$ (libovolné nekonečně hladké funkce, neboť „odderivovat“ můžeme vždy neurčitým Lebesgueovým integrálem, který je spojitý) hustá v $C([0, 1])$, tedy L jednoznačně určuje prvek $C([0, 1])^* = \mathcal{M}([0, 1])$ (regulární borelovské znaménkové míry).

Naopak libovolný prvek $\mu \in C([0, 1])^*$ lze aplikovat na $\{f^{(k)}\}$ a splňuje podmínku $\forall f \in X : |\mu(f)| := |\mu(f^{(k)})| \leq \|\mu\| \cdot \|f^{(k)}\|_\infty = c \cdot p_k(f)$. Tedy spojité funkcionály splňující $|L(f)| \leq c \cdot p_k$ odpovídají (pro každé k zvlášť) jedna ku jedné $C([0, 1])^*$.

Navíc si můžeme všimnout, že pokud nenulové spojité funkcionály K, L odpovídají jiným p_k, p_l , $l < k$, pak jsou jiné, neboť