1 Úvod aneb Projektivní přímka a rovina

Poznámka (O čem to bude)
Nevlastní body, homogenní souřadnice. Projektivní geometrie = „geometrie polohy“, tj. neměří se vzdálenosti ani úhly. Máme pojmy (v rovině) bod, přímka, incidence ($X \in p$).

Inspirováno perspektivou v malířství (realismus, 17. století).

Klíčové pojmy: nevlastní body („body v nekonečnu“), princip duality.

Poznámka (Možné přístupy ke geometrii)
Axiomatický (jen axiomy, bez obrázků) (dnes), syntetický (důraz kladen na obrázky, bez souřadnic) (tento semestr), analytický (souřadnice, bez obrázků) (příští semestr).

1.1 Axiomatika projektivní geometrie (v rovině)

Poznámka (Primitivní pojmy)
Bod, přímka, incidence.

Definice 1.1 (Axiom A1)

Ke každým dvěma (různým) bodům ∃! přímka s oběma body incidentní. (Přímce říkáme *spojnice* daných bodů.)

Definice 1.2 (Axiom A2)

Ke každým dvěma (různým) přímkám ∃! bod s oběma přímkami incidentní. (Bodu říkáme *průsečík* daných přímek.)

Poznámka
A2 vzniklo z A1 záměnnou pojmů bod a přímka. V EG neplatí, ale v PG chceme mít Princip duality.

Definice 1.3 (Princip duality)

Veškerá tvrzení zůstávají v platnosti, pokud v nich zaměníme pojmy bod a přímka, incidence (prochází bodem a leží na přímce, průsečík a spojnice), a pojmy z nich odvozené.

Definice 1.4 (Nevlastní bod, vlastní bod)

Máme-li dvě rovnoběžky v EG, pak za jejich průsečík v PG označíme společný směr (bez orientace), neboli nevlastní bod (značíme X_∞, atd.).

Původní body v rovině budeme nazývat vlastní.

Definice 1.5 (Nevlastní přímka, vlastní přímka)

Nevlastní přímka (n_∞) = množina všech nevlastních bodů.

Poznámka
S nevlastními body a přímkou splňuje rovina A1 i A2.

Definice 1.6 (Axiom A3)

Existují alespoň 4 body, z nichž každé 3 jsou nekolineární.

Poznámka („A4“)
Duální tvrzení k A3 už je dokazatelné z A1 až A3.

Definice 1.7 (Projektivní rovina)

Rovina s nevlastními body a nevlastní přímkou splňuje i A3. Takové rovině ($\mathbb{R}^2 \cup n_\infty$) budeme říkat projektivní rovina a značit ji $\mathbb{R}P^2$ nebo P^2.

Poznámka (Idea: existující různé geometrie)
Euklidovská geometrie (EG) (body, přímky, incidence, vzdálenosti, úhly), Afinní geometrie (AG) (body, přímky, incidence, rozlišení rovnoběžek a různoběžek, případně vlastních a nevlastních bodů), Projektivní geometrie (PG) (body, přímky, incidence).

(Hyperbolická geometrie = Lobačevského geometrie (body, přímky, incidence, jiné vzdálenosti, jiné úhly))

1.2 Afinní geometrie

Poznámka
Body $A, B, \ldots$ a vektory $u, v, \ldots$.

$\rightarrow$ přímky, vzájemné polohy přímek (ale ne kolmost).

Poznámka (Lze zavést střed úsečky:)
$\vec{AS} = \frac{1}{2}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{SA} = -\vec{SB}$.

Definice 1.8 (Dělící poměr)

Dělící poměr 3 bodů A, B, C na (jedné) přímce je číslo $\lambda = (ABC)$ splňující $C - A = \lambda(C - B)$.

Poznámka
Odsud lze odvodit Euklidovskou definici dělícího poměru: $|\lambda| = \frac{\|C-A\|}{\|C-B\|}$.

A, B, C různé, pak λ nenabývá hodnot 0 ($A = C$), 1 ($A = B$) a ∞ ($B = C$).

C je středem úsečky AB, právě když $(ABC) = -1$.

Dělící poměr jako graf funkce (A, B pevné, C proměnné) je hyperbola.

Pro každé dva body $A \neq B$ a $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, existuje právě jedno C, že $(ABC) = \lambda$.

Konstrukce: dány úsečky délek 1 a λ, a body A, B.

Pokud $\lambda = (ABC)$, tak $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$, $(ACB) = 1 - \lambda$, $(BCA) = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, $(CAB) = \frac{1}{1-\lambda}$, $(CBA) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$. Tyto permutace se některé rovnají pro λ z trojice $(0, 1, \infty)$ (každé tam bude dvakrát), z trojice $(-1, 2, 1/2)$ (také každé dvakrát) a z dvojice $(1/2 + i\sqrt{3}/2, 1/2 - i\sqrt{3}/2)$ (každé třikrát).

Poznámka (Role zobrazení v jednotlivých geometriích)
V EG: posunutí, otáčení a osová souměrnost (tj. shodnosti) zachovávají délky a úhly (tj. (pro zajímavost) jsou to invarianty euklidovské grupy).

V AG: isomorfismy (lineární zobrazení na) zachovávají dělící poměr.

1.3 Projektivní přímka

Definice 1.9 (Označení)

Je-li $v = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, označíme $\langle v \rangle$ = lineární obal v = přímka generovaná v (procházející počátkem). Tedy $\langle (x_0, x_1) \rangle = \langle v \rangle = \langle av \rangle = \langle ax_0, ax_1 \rangle$ pro $\forall a \neq 0, a \in \mathbb{R}$.

Definice 1.10 (Projektivní přímka $\mathbb{R}P^1$, geometrický bod, aritmetický zástupce, homogenní souřadnice)

Projektivní přímka je množina $\mathbb{R}P^1 = \{\langle v \rangle | v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ = množina všech přímek v $\mathbb{R}^2$ (procházejících počátkem). Prvek $\langle v \rangle \in \mathbb{R}P^2$ nazýváme geometrický bod, vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nazýváme jeho aritmetickým zástupcem.

Poznámka
Tedy každý geometrický bod má nekonečně mnoho aritmetických zástupců (a ti se všichni liší jen nenulovým násobkem).

Je-li $v = (x_0, x_1)$, píšeme $\langle v \rangle = [x_0 : x_1]$. Tomuto se říká homogenní souřadnice geometrického bodu.

Poznámka
Jsou určeny až na nenulový násobek.

Definice 1.11 (Kanonické vnoření afinní přímky $\mathbb{R}$ do projektivní přímky $\mathbb{R}P^1$)

Kanonické vnoření afinní přímky $\mathbb{R}$ do projektivní přímky $\mathbb{R}P^1$ je zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}P^1$, bod $x \mapsto [1 : x]$ (body vlastní) a vektor $1 \mapsto [0 : 1]$ (bod nevlastní).

První souřadnice je tzv. rozlišovací souřadnice (1 znamená vlastní, 0 nevlastní).

TODO!!! (Konstrukce 4. harmonického bodu nebo 4. harmonické přímky).

Definice 1.12 (Projektivní škála)

Máme body 0, 1 a ∞ na jedné přímce. Následně provedeme několik kroků: 1. najdeme bod -1 tak, aby $(0 \infty 1 \; -1) = -1$, najdeme bod -2 tak, aby $(-1 \infty 0 \; -2) = -1$

TODO!!!

Poznámka
Této konstrukce se dá použít k nakreslení pražců na sbíhající se koleje (průsečík = ∞, první pražec 0, druhý 1).

2 Projektivita a perspektivita lineárních soustav

Definice 2.1 (Soustava)

Bodová = označené body na přímce. Píšeme $p(A, B, C, \ldots)$.

Přímková = označené přímky ve svazku. Píšeme $P(a, b, c, \ldots)$.

Dvě soustavy jsou sourodé, pokud jsou stejného typu a nesourodé, pokud jsou různých typů. Pokud jsou sourodé, pak mohou být soumístné, tedy na stejné přímce / ve stejném svazku, nebo nesoumístné (různé přímky / různé svazky).

Definice 2.2 (Perspektiva)

Perspektiva nesoumístných sourodých soustav je zobrazení: pro bodové soustavy jde o středové promítání z bodu $O \notin p, p'$ (píšeme $p(A, B < C) :: p'(A', B', C')$), pro přímkové soustavy duálně (přímka o protne soustavu procházející P v bodech, které spojíme s bodem P' a dostaneme druhou soustavu).

Bod O se nazývá bod perspektivity (střed promítání). Přímka o je přímkou perspektivity.

Poznámka
Bod O nemusí být vlastni.

Poznámka (Značení ::)
Perspektivita je určená dvěma páry bodů/přímek (potřebujeme najít bod O nebo přímku o), proto „dvakrát dvě tečky“.

Důsledek
V každé perspektivitě existuje samodružný element: průsečík $p \cap p'$ respektive spojnice PP'.

Pozor
Složení perspektivit obecně není perspektivita! (Nemusí být zachován samodružný element.)

Definice 2.3 (Projektivita)

Projektivita je složení konečného počtu perspektivit.

Poznámka
Dá se dokázat, že každá projektivita je složením $\leqslant 2$ perspektivit.

Důsledek
Projektivita obecně nemá samodružný element, ale pokud už ho obsahuje, již je perspektivitou.

Pozor
Perspektivita nezachovává dělící poměr 3 bodů.

Tvrzení 2.1

Perspektivita zachovává dvojpoměry 4 bodů.

Důsledek
Projektivita zachovává dvojpoměry 4 bodů.

Tvrzení 2.2 (Lze dokázat i opak)

Pokud zobrazení zachovává kolinearitu a dvojpoměr, je to nutně projektivita.

Poznámka (Druhý způsob (analytický) zavedení projektivity a perspektivity)
Nejprve se zavede projektivní souřadný systém (PSS) na projektivní přímce. Je to trojice bodů $0, 1, \infty$. Souřadnice bodu X vůči tomuto PSS je homogenní dvojice $[1 : x]$, kde $x = (X 1 0 \infty)$. Pak projektivní zobrazení je $\mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^1$, $[x_0 : x_1] \mapsto [x'_0 : x'_1]$, kde $(x'_0, x'_1) = A \cdot (x_0, x_1)^T$, kde A je regulární matice 2×2 určená až na násobek $\neq 0$.

Důsledek
Projektivita zachovává dvojpoměr.

Pak perspektivita = projektivita mající samodružný bod.

Poznámka (Značení projektivity)
Projektivitu značíme $p(A, B, C) ::: p'(A', B', C')$.

Poznámka
Projektivita je určena třemi páry bodů.

Definice 2.4 (Perspektivita nesourodých soustav)

Dvě nesourodé soustavy jsou v perspektivitě, je-li jedna soustava průmětem/průsekem té druhé.

Věta 2.3

Dvě sourodé nesoumístné soustavy jsou v perspektivitě $\Leftrightarrow$ obě jsou v perspektivitě s touž nesourodou soustavou.

Důkaz
Obrázkem. (Dává nám to přesně ty body a přímky, které potřebujeme.) □

Poznámka (Doplňování soustav)
Doplňování perspektivit ($p(A, B, C) :: p'(A', B', C')$ dáno, k bodu X na p doplňte X') je jednoduché.

Doplňování projektivit ($p(A, B, C) ::: p'(A', B', C')$ dáno, m bodu X na p doplňte X') je těžší, budeme potřebovat následující větu.

Věta 2.4 (O direkční přímce)

Nechť $p(A, B, C) ::: p'(A', B', C')$ je projektivita nesoumístných bodových soustav. Pak průsečíky spojnic AB' a $A'B$, AC' a CA', BC' a CB' leží na jedné přímce d.

Důkaz

Zvolme si význačné body A, A' a uvažujme přímky: $a = AA'$, $b = AB'$ a $c = AC'$, stejně tak $a' = A'A$, $b' = A'B$, $c' = A'C$. Hned je jasné, že $a = a'$.

Pak máme $A(a, b, c) :: p'(A', B', C') ::: p(A, B, C) :: A'(a', b', c')$. Tedy $A(a, b, c) ::: A'(a', b', c')$. Ale ta má samodružnou přímku $a = a'$, tedy je to perspektivita 2 přímkových soustav, tedy podle předchozí věty jsou obě v perspektivitě s touž nesourodou soustavou (body na přímce). Označme ji d. A víme, že se s ní protínají odpovídající si páry přímek, tj. páry $B = AB'$, $b' = A'B$, $c = AC'$, $c' = A'C$.

Potřebujeme ukázat, že přímka d nezávisí na volbě páru AA'. A tím také to, že také přímky BC', $B'C$ se protínají na d. Označme $M = N'$ průsečík $p \cap p'$. Kde je M' a N? Platí $M' = p' \cap d$ a $N = p \cap d$. $N \in p$ zřejmé (leží v soustavě $p(A, B, C)$). $N \in d$? máme přímky $n = AN = p$, $n' = A'N$, víme, že průsečík $n \cap n' = N \in d$. Stejně tak $M' = p' \cap d$.

Důsledek: $d = M'N$, ale M, N' nezáleží na volbě páru AA', tedy máme hotovo. □

Definice 2.5 (Direkční přímka projektivity)

Přímku z předchozí věty nazveme direkční přímka projektivity.

Poznámka

Projektivita je perspektivita $\Leftrightarrow p \cap p' \in d$.

Příklad

Doplňování projektivity (nesoumístných soustav) je teď jednoduché. Doplňování projektivity soumístných soustav uděláme přes další soustavu.

Příklad

Spojení bodu V s nepřístupným průsečíkem přímek p, p'.

Řešení

Na p a p' doplníme body A, A', B, B' tak, aby $V \in AB', BA'$. AA' a BB' se protínají v bodě, ze kterého vedeme přímku, na která protne p a p' v bodech C a C'. Nyní najdeme direkční přímku.

Věta 2.5 (Papova o šestiúhelníku)

Stejné jako věta o direkční přímce. (Jinak formulovaná.)

TODO!!! (charakteristika projektivity, involuce, ...)

Definice 2.6 (Involuce)

Involuce je projektivita (soumístných soustav) splňující jednu z následujících podmínek:

- $w = (XX'ST) = -1$; (tzv. charakteristika projektivity, X a X' je libovolný pár, S a T jsou různé samodružné elementy)
- $\exists X \neq S, T : X'' = X$;
- $\forall X : X'' = X$;

Definice 2.7 (Hyperbolická a eliptická involuce)

S, T reálné různé $\implies$ involuce je hyperbolická (nesouhlasné soustavy, neboli směr je proti).

S, T komplexně sdružené $\implies$ eliptická (souhlasné soustavy, neboli směr se zachovává).

Poznámka
$S = T$ je parabolická involuce (ale není to projektivita, neboť to není prosté zobrazení).

Poznámka (Pár involuce)
$X \to X'$ a $X' \to X$, pak X, X' je pár involuce.

Poznámka
Projektivita je určena 3 páry, involuce je určena 2 páry.

Důsledek
$AA'B'B$ a $BAA'B'$ (ve skutečnosti vzhledem k zahrnutí ∞ jsou to stejné případy) jsou hyperbolické (říkáme páry se nerozdělují), $ABA'B'$ jsou hyperbolické (páry se rozdělují).

Příklad (Konstrukce)
Určit druhý samodružný bod (T) involuce určené jedním samodružným bodem (S) a jedním párem (A, A').

Řešení
Využijeme $(AA'ST) = -1$ a najdeme čtvrtý harmonický bod, jak jsme to již dělali.

Věta 2.6 (O bodu na direkční přímce)

Mějme projektivitu $p(A, B, C) ::: p'(A', B', C')$ (nesourodých soustav), d nechť je direkční přímka, $H \in d$ libovolný bod na direkční přímce. Pak páry přímek $a = HA$, $A' = HA'$, $b = HB$, $b' = HB'$, atd. jsou páry téže involuce přímek ve svazku se středem H. Neboli $H(a, b, c) ::: H(a', b', c')$ je involuce.

Důkaz

„1. Projektivita“:

$$H(a, b, c) :: p(A, B, C) ::: p'(A', B', C') :: H(a', b', c').$$

(Složení tří projektivit je projektivita, tedy existuje $H(a, b, c) ::: H(a', b', c')$)

„2. Involuce“: Tato projektivita je involuce, protože pokud označíme $X = a' \cap p \implies x = a'$, pak z věty o direkční přímce platí $X' = a \cap p' \implies a = x'$, tedy (a, a') je pár involuce a to už stačí.

(Pokud $H \in AA'$, zvolíme místo A jiný bod.) □

Věta 2.7 (O přímce procházející direkčním bodem)

Mějme projektivitu $P(a, b, c) ::: P'(a', b', c')$, D nechť je direkční bod a $D \in h$. Pak páry bodů $A = h \cap a$, $A' = h \cap a'$, $B = h \cap b$, $B' = h \cap b'$ jsou páry téže involuce bodů na přímce h. ($h(A, B, C) ::: h(A', B', C')$ je involuce.)

Důkaz

Dualita. □

Příklad

Doplňování bodové involuce dané dvěma páry.

Řešení

Použijeme předchozí větu a doplníme projektivitu. (Další způsoby jsou klasicky jako doplňování projektivity, nebo použití původní, neduální, verze předchozí věty.)

2.1 Úplný čtyřroh a úplný čtyřstran

Definice 2.8 (Úplný čtyřroh)

Čtveřice bodů v rovině (M, N, P, Q), přičemž žádné tři nejsou kolineární, se nazývá čtyřroh.

Tyto body (M, N, P, Q) jsou vrcholy čtyřrohu. Jejich 6 spojnic jsou strany čtyřrohu.

Máme 3 páry protějších stran (MN a PQ, MP a NQ, MQ a NP), 3 diagonální vrcholy

= průsečíků protějších stran (X, Y, Z) a 3 diagonální strany (XY, XZ, YZ).

Všemu tomuto dohromady se říká úplný čtyřroh.

Definice 2.9 (Úplný čtyřstran)

Čtveřice přímek v rovině (m, n, p, q), přičemž žádné tři neprochází jedním bodem, se nazývá čtyřstran.

Tyto přímky (m, n, p, q) jsou strany čtyřstranu. Jejich 6 průsečíků jsou vrcholy čtyřstrnu.

Máme 3 páry protějších vrcholů ($m \cap n$ a $p \cap q$, $m \cap p$ a $n \cap q$, $m \cap q$ a $n \cap p$), 3 diagonální strany = spojnice protějších vrcholů (x, y, z) a 3 diagonální vrcholy ($x \cap y$, $x \cap z$, $y \cap z$).

Všemu tomuto dohromady se říká úplný čtyřstran.

Věta 2.8

Každá (i diagonální) strana úplného čtyřrohu je proťata ostatními stranami jen ve 4 bodech, které tvoří harmonickou čtveřici.

Důkaz

„První část“ se spočítá z obrázku. „Druhá část“ je vidět z konstrukce čtvrtého bodu harmonické čtveřice. □

Věta 2.9 (Duální k přechozí)

Každý (i diagonální) vrchol úplného čtyřstranu je spojen s ostatními vrcholy pouze 4 přímkami, ty tvoří harmonickou čtveřici.

Věta 2.10 (O přímce a čtyřrohu)

Je dán úplný čtyřroh a libovolná přímka h různá od jeho 9 stran. Pak protější strany 4 rohu vytínají na h páry téže involuce.

Důkaz

Nechť P a Q jsou středy svazků $a = PM$, $b = PN$ a $a' = QN$, $b' = QM$ (a a a' protější, b a b' taktéž). Páry AA', BB' zadávají involuci na h. Je pár CC' také párem této involuce?

Zároveň máme projektivitu $P(a, b, \ldots) ::: Q(a', b', \ldots)$. Dle věty o přímce procházející direkčním bodem je průsečík $D = C' = MN \cap h$ direkčním bodem této projektivity a proto $D' = C = PQ \cap h$. Tedy $DD' = C'C$ je pár téže involuce. □

Věta 2.11 (O bodu a čtyřstranu)

Je dán úplný čtyřstran a bod H různý od jeho vrcholů. Pak spojnice protějších vrcholů čtyřstranu s H tvoří páry téže involuce.

Poznámka
A, A', B, B', C, C' z předchozí věty (původní verze) se nazývá čtyřstranná množina.

3 Kuželosečky

Definice 3.1 (Bodová kuželosečka)

Mějme projektivitu nesoumístných přímkových soustav $H(a, b, c)$ ::: $H'(a', b', c')$. Bodová kuželosečka $\mathcal{B}$ = množina průsečíků odpovídajících si přímek (tj. $a \cap a'$, $b \cap b'$, atd.).

Věta 3.1

Zadaná projektivita je perspektivitou ⇔ kuželosečka B se skládá ze dvou přímek, a sice přímky HH' a z přímky perspektivity.

Důkaz
Z obrázku a rozpravy nad ním. □

Definice 3.2 (Singulární a regulární)

Když $H :: H'$ $\mathcal{B}$ je singulární. V opačném případě je regulární.

Tvrzení 3.2 (Platí)

$H, H' \in \mathcal{B}$. (Pro singulární kuželosečku celá $HH' \in \mathcal{B}$. Pro regulární křivku $H = n \cap n'$ a $H' = m \cap m'$, tedy $H, H' \in \mathcal{B}$.)

Poznámka
Dále budeme uvažovat jen regulární křivky.

Definice 3.3 (Vzájemná poloha přímky a kuželosečky)

Přímka v rovině je (ve vztahu ke kuželosečce)

- vnější přímka, pokud nemají žádný společný bod;
- tečna, má-li jeden průsečík;
- sečna, má-li dva průsečíky.