1 Preliminaries

Definice 1.1 (Slabá derivace)

Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Říkáme, že $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ je slabou derivací f podle i-té proměnné, pokud platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \partial_i \varphi d\lambda^n = -\int_{\mathbb{R}^n} g \varphi d\lambda^n \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Definice 1.2 (Značení)

$$\partial_i f(x) = \lim_{h \to \mathbf{o}} \frac{f(x + e_i h) - f(x)}{h}, \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix},$$

$$D_i f \text{ slabá derivace dle } i\text{-té proměnné}, \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ Dnf(x) \end{pmatrix},$$

$D\cdot$ bude také značit derivaci distribuce? (Distribuční derivaci?)

$f \in Lip(X, Y)$ jsou všechny Lipschitzovská zobrazení (tj. $\varrho_Y(f(a), f(b)) \leqslant lip(f) \cdot \varrho_X(a, b)$) z X do Y.

$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ (symetrický rozdíl množin).

Definice 1.3 (Lebesgueova–Stieltjesova míra)

μ míra vytvořená $M : I(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ pomocí Caratheodorovy konstrukce se nazývá Lebesgueova–Stieltjesova míra.

Definice 1.4 (Radonova míra)

$\mathcal{M}^+_{loc}(\Omega)$ je prostorem všech Borelovských měr na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, které jsou vnitřně regulární ($\mu(E) = \sup \{\mu(K) | K \subset E\}$), lokálně kompaktní.

Pokud navíc $|\mu| < \infty$, pak je to prostor $\mathcal{M}^+$. $\mathcal{M}_{loc}(\Omega) = \mu^+ - \mu^-$.

Definice 1.5 (?)

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

$$\psi_k(x) = k^n \psi(kx)$$

Poznámka

$$\int |\psi| = 1, \qquad \psi(x) = \psi(x'), |x| = |x'|, \qquad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$\psi_k(x) > 0 \implies |x| < \frac{1}{k}$$

Věta 1.1 (Lebesgueova o derivaci 1)

Nechť $1 \leqslant p < \infty$. *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *otevřená. A nechť* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. *Potom pro skoro všechna* $x \in \Omega$*:*

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p d\lambda^n(x) = 0.$$

Důkaz

Bez důkazu. □

Definice 1.6 (Lebesgueův bod)

Každý takový bod se nazývá (p) Lebesgueův bod.

Definice 1.7 (Konvoluce)

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Za podmínek, kdy pravá strana existuje. g může být i míra.

Poznámka

Je-li $f * g \in L^1$ pak $f * g = g * f$. (Z Fubiniovy věty.)

Tvrzení 1.2

Nechť $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. *Pak* $\psi_k * u(x)$ *je definováno* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *a* $\forall k \in \mathbb{N}$.

Důkaz

Nebyl. Viz Funkcionalka. □

Věta 1.3

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. *Pak* $\psi_k * u \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *a* $\partial_i(\psi_k * u) = \partial_i \psi_k * u$.

Důkaz

Nebyl. Viz Funkcionalka. □

Lemma 1.4

Nechť $f \in L^p$. Potom $\psi_k * f \in L^p$ $p \in [1, \infty]$. Navíc $\|\psi_k * f\|_p \leqslant \|f\|_p$.

Důkaz
Nebyl. Viz Funkcionalka. □

Věta 1.5

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ nechť x je Lebesgueův bod f (a $f(x) = \lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} f$) pak $\psi_k * f(x) \xrightarrow{k} f(x)$.

Důkaz
Nebyl. □

Věta 1.6

Nechť $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Potom $\psi_k * f \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}^n$.

Důkaz
Nebyl. □

Lemma 1.7

Pro $p \in [1, \infty)$ platí $\overline{\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{L^p} = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz
Nebyl. (Docela jednoduchý.) □

Věta 1.8

$1 \leqslant p < \infty$: *$f \in L^p(\mathbb{R}^n) \implies \psi_k * f \to f$ v $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Důkaz
Nebyl. □

Poznámka
($\psi_1 * f \xrightarrow{w} f$ v L^∞)

Věta 1.9

Nechť $u \in Lip(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Pak u je slabě diferencovatelná na $\mathbb{R}^n$ a $\|Du\|_{L^\infty} \leqslant lip(u)$.

Důkaz
Nechť $x, z \in \mathbb{R}^n$.

$$|\psi_k * u(z) - \psi_k * u(x)| = \left| \int (u(z-y) - u(x-y))\psi_k(y) d\lambda^n \right| \leqslant lip(u)|z-x|.$$

$lip(u_k) := lip(\psi_k * u) \leqslant lip(u)$. Nechť B je koule v $\mathbb{R}^n$. $\{\nabla u_k\}$ je omezená v $L^2(B)$ slabě konverguje k $g \in L^2(B, \mathbb{R}^n)$.

$\{f \in L^2(B) : \|f\|_\infty \leqslant c\}$ konvexní a uzavřená $\implies$ slabě uzavřená $\implies$ $\|g\|_\infty \leqslant lip(u)$. Tedy

$$\int_B u \nabla\varphi \leftarrow \int_B u_k \nabla\varphi = -\int_B \nabla u_k \varphi \rightarrow -\int_B g\varphi.$$

□

Lemma 1.10

Nechť $E \subset \Omega$ a pro nějaké $r > 0$: $E + B(\mathbf{o}, r) \subset \Omega$. Potom $\exists \eta \in \mathcal{D}(\Omega)$, že $\eta = 1$ na E.

Důkaz
$E + B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset\subset \Omega$. Najdeme k, že $\frac{1}{k} < \frac{r}{2}$. Potom $\psi_k * \chi_{E+B\left(0,\frac{r}{2}\right)}$ je hledaná funkce. □

2 Absolutně spojité funkce

Poznámka (V této kapitole vždy)
$I = (a_0, b_0)$ je interval. $\mathbb{D}(I)$ bude množina všech konečných dělení ($a_0 < x_0 < \ldots < x_n < b_0$) intervalu.

Definice 2.1 (Variace funkce)

Nechť $D = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_m\} \in \mathbb{D}(I)$ a $u : I \to \mathbb{R}$. Potom variace u podle dělení D je $V(u, D) = \sum_{i=1}^n |u(x_i) - u(x_{i-1})|$.

Variace u je $V(u, I) = \sup_{D \in \mathbb{D}(I)} V(u, D)$.

Je-li $V(u, I) < \infty$ pak říkáme, že u má konečnou variaci na I.

Definice 2.2 (Absolutně spojité funkce)

Nechť $u : I \to \mathbb{R}$. Říkáme, že u je (klasicky) absolutně spojité na I, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^m$ po dvou disjunktní $\sum_{i=1}^m b_i - a_i < \delta$ je $\sum_{i=1}^n |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$.

Definice 2.3

Nechť $u : (a_0, b_0) \to \mathbb{R}$. Říkáme, že $u \in W^{1,1}(I) \Leftrightarrow u \in L^1(I)$ a $\exists Du \in L^1(I)$. ($Du = f d\lambda^1, f \in L^1$.)

Věta 2.1

Nechť $T \in \mathcal{D}^*(I)$ a $\langle T, \varphi' \rangle = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$. Then $\exists c \in \mathbb{R}$, $T = c(d\lambda^1)$ (tj. $\langle T, \varphi \rangle = \int c\varphi$).

Důkaz

Nechť $\eta \in \mathcal{D}(I) : \int_I \eta = 1$. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ a $\lambda = \langle 1, \varphi \rangle = \int_I \varphi$. Označme $c := \langle T, \eta \rangle$. Zadefinujeme $\Phi(x) = \int_{a_0}^x \varphi - \lambda\eta$, $\Phi(b_0) = 0$, $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$.

$$0 = \langle T, \Phi' \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \lambda \langle T, \eta \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \lambda c = \langle T, \varphi \rangle - \int c\varphi \implies$$

$$\implies \langle T, \varphi \rangle = \int c\varphi.$$

□

Věta 2.2

Nechť $f : I = (a_0, b_0) \to \mathbb{R}$, $f \in L^1(I)$. Potom

1. *$\exists!$ (až na aditivní c) u: $u(b) - u(a) = \int_a^b f$ (pro $a_0 < a < b < b_0$);*
2. *u má slabou derivaci a $Du = f$;*
3. *$\exists! T \in \mathcal{D}^*(I)$ (až na aditivní c), že $T' = f$;*
4. *$T = u d\lambda^1 + c d\lambda^1$;*
5. *u je absolutně spojitá;*

Důkaz

„1." $u(x) = \int_{a_0}^x f(t)dt$.

„2." $\int_I u(x)\varphi'(x)dx = \int_I \varphi'(x) \int_{a_0}^x f(t)dtdx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{a_0}^x f(t) \int_I \varphi'(x)dxdt = -\int_I \varphi(t)f(t)dt$. Tedy $Du = f$ na I.

„3." a „4." jednoduché.

„5.": $f \in L^1 \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \subset I$ měřitelná a $\mathcal{L}^1(A) < \delta$: $\int_A |f| < \varepsilon$. Nechť $[a_i, b_i]$ po dvou disjunktní, $i \in [n]$, $\sum b_i - a_i < \delta \implies \sum |u(b_i) - u(a_i)| \leqslant \int_{\bigcup(a_i, b_i)} |f| < \varepsilon$. □

Věta 2.3

Nechť u je absolutně spojitá na $I = (a_0, b_0)$. Potom

1. *u je spojitá a lze ji spojitě dodefinovat na $\overline{I}$;*
2. *$V(u, I) < \infty$ a $V(u, (a_0, x])$ je absolutně spojitá;*
3. *u je rozdílem 2 neklesajících funkcí;*
4. *$\exists! f \in L^1 : u(b) - u(a) = \int_a^b f$;*
5. *$\exists u'$ skoro všude, $u'(x) = f(x)$ skoro všude;*
6. *$Du = u' d\lambda^1$ na I;*
7. *$u(b) - u(a) = \int_a^b u'(x)$.*

Důkaz
„1.“ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \varepsilon_k = 2^{-k} \ldots \delta_k$. $x_k \in (a_0, a_0 + \delta_k)$.

$$\sum_{k=n}^{\infty} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| < 2^{-n+1}.$$

Značme $u(a_0)$ jakoukoliv limitu $u(x_k)$. Potom $|u(a_0) - u(x)| < 2\varepsilon_k$ jakmile $x \in (a_0, a_0 + \delta_k)$.

„2.“ $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$. $\lambda^1(I) = b_0 - a_0$. Najdeme $N \in \mathbb{N}$, že $N \geqslant \frac{b_0 - a_0}{\delta}$. D je dělení I. $v(u, D) \leqslant N$. $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $V(u, (a_0, x]) := g(x)$ mějme konečné intervaly $\lambda^1(\bigcup [a_i, b_i]) < \delta$ $\implies \sum |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$.

„3.“: $v(x) = V(u, [a_0, x])$ a $v(x) - u(x)$ jsou hledané funkce (jsou omezené a snadno se dokáže, že jsou neklesající).

„4.“: (z 3. předpokládejme, že u je neklesající) Caratheodorovou konstrukcí nalezneme míru: $M((a, b)) = u(b) - u(a)$ a ukážeme o ní, že je spojitá (pak je to Lebesgue-Stieltjesova míra, tedy platí $M((a, b)) = \int_a^b f$). Nechť $\lambda^1(N) = 0$. $\forall \delta > 0$ najdu $G \supset N$ $\lambda^1(G) < \delta$, G otevřená, tedy $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$. $\mu(G) = \sum_{i=1}^{m} |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$.

$$\frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y) dy \xrightarrow{\delta \to 0^+} f(x).$$

□

Věta 2.4

Nechť u je spojitá na I. Pak NÁPOJE:

- *u je absolutně spojitá na I;*
- *$u \in W^{1,1}(I)$;*
- *$\exists f \in L^1(I) : Du = f d\lambda^1$;*
- *Du má L^1 reprezentanta $u(b) - u(a) = \int_a^b Du$;*
- *$\exists u'$ skoro všude, $u' \in L^1$ a $u(b) - u(a) = \int_a^b u'$;*
- *$\exists f \in L^1 : u(b) - u(a) = \int_a^b$;*
- *$\exists g \in L^1 : |u(b) - u(a)| \leqslant \int_a^b g$.*

Důkaz

Máme vše kromě „poslední bod $\implies$ první“: $\lambda^1(\bigcup(a_i, b_i)) < \delta \implies \sum |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$. □

Definice 2.4

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená:

$$W^{1,1}_{loc}(\Omega) := \left\{ u \in L^1_{loc}(\Omega) | \forall i \in [n] \ \exists D_i u \in L^1_{loc}(\Omega) \right\},$$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,1}_{loc} \middle| \|u\|_{1,p} < \infty \right\}, \text{ kde } \|u\|_{1,p} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \int_\Omega |D_i u|^p + \int_\Omega |u|^p},$$

$$W^{1,p}_c(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \middle| \exists K \subset \Omega : \{u \neq 0\} \subset K \right\},$$

$$p \in [1, \infty) : W^{1,p}_0(\Omega) = \overline{W^{1,p}_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}, \qquad p = \infty : W^{1,p}_0(\Omega) = \overline{W^{1,\infty}(\Omega) \cap C_0(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}.$$

Věta 2.5

$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ je Banachův prostor.

Důkaz

Linearita a funkčnost normy je zřejmá. Jak je to s úplností? u_k cauchyovská v $\|\cdot\|_{1,p}$. $W^{1,p} \hookrightarrow L^p \implies u_k$ cauchyovská v $L^p \implies \exists u \in L^p : u_k \to u$ v L^p.

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_\Omega u \partial_i \varphi \leftarrow \int_\Omega u_k \partial_i \varphi = - \int_\Omega D_i u_k \varphi \to - \int g \varphi.$$

Poslední konvergence z $\exists g : D_i u_k \to g$ v L^p a $D_i u = g \in L^p$. □

Věta 2.6 (Rieszova pro $W^{1,p}$)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *otevřená.* $1 \leqslant p < \infty$, $p' = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$*. Pak pro každý* $L \in (W^{1,p}(\Omega))^*$ *existuje* $f \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ *takové, že* $L(u) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega f^i D_i u + \int_\Omega f^{n+1} u$ *a navíc* $\|L\|_{(W^{1,p})^*} = \|f\|_{L^p}$.

Důkaz

Definujeme $T\colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$, $u \mapsto (D_1 u, \ldots, D_n u, u)$. $TW^{1,p}(\Omega) \Subset L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$. Díky HB větě každý $L \in (W^{1,p}(\Omega))^*$ lze rozšířit na $L^1 \in (L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}))^* = L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$. □

Poznámka

$f, h \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ jsou takové, že

$$\sum_i \int f^i D_i u + \int f^{n+1} u = \sum_i \int h^i D_i u + \int h^{n+1} u.$$

$\operatorname{div} h = \operatorname{div} f$ na Ω a $f \cdot \nu = h \cdot \nu$ na $\partial\Omega$. $\Delta u = f$.

Poznámka

$u_k \to u$ v $W^{1,p} \Leftrightarrow \|u_k - u\|_{1,p} \to 0$.

Pro $p = \infty$ TODO?

Věta 2.7

Nechť 1. $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, *potom* $\|\psi_k * u - u\|_{1,p} \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Nebo nechť 2. $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, *potom* $\psi_k * u \xrightarrow{*} u$ *v* $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz

Víme $\int |\psi_k * D_i u - D_i u|^p \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Stačí dokázat $\psi_k * D_i u = D_i(\psi * u) = \partial_i(\psi_k * u)$. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, pak

$$-\int_{\mathbb{R}^n} D_i(\psi_k * u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k * u \partial\varphi = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x-y)u(y)dy\partial_i\varphi(x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y-x)\partial_i\varphi(x)dxu(y)dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k * \partial_i\varphi(y)u(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \partial(\psi_k * \varphi)u(y) =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} (\psi_k * \varphi)D_i u = \int_{\mathbb{R}^n} (\psi_k * D_i u)\varphi.$$

Tedy $\psi_k * D_i u = D_i(\psi_k * u)$. □

Věta 2.8

$$p < \infty : \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}^{W^{1,p}} = W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Důkaz
Definujeme $\eta(x) = 1$ na $B(0,1)$, $\eta(x) = 0$ na $\mathbb{R}^n \backslash B(0,2)$, $\eta(x) \in [0,1]$ in $\mathbb{R}^n$ a $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$u_k(x) = u(x)\eta(x/k)$. $u_k(x) = u(x)$ na $B(0,k)$, $u_k(x) = 0$ na $\mathbb{R}^n \backslash B(0,2k)$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_k - u|^p \leqslant \int_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,k)} |2u|^p \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

$$D_i u_k = D_i u(x)\eta\left(\frac{x}{k}\right) = (D_i u(x))\eta\left(\frac{x}{k}\right) + u(x) D_i \eta\left(\frac{x}{k}\right).$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D_i u_k - D_i u|^p \leqslant \int_{\mathbb{R}\backslash B(0,k)} \left| 2D_i u + u(x)\frac{\|\nabla\eta\|_\infty}{k}\right|^p \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot \int_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,k)} |D_i u|^p + |u|^p \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

□

Věta 2.9

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ jsou slabě $*$ sekvenciálně husté v $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. (Jinak řečeno, pro každé $u \in W^{1,\infty}$ najdeme $\varphi_k \subset \mathcal{D}$, $\varphi_k \xrightarrow{*} u$ v $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$).

Důkaz
$u \in W^{1,\infty}$, $u_k(x) = u(x)\eta\left(\frac{x}{k}\right)$. Zvolme $f \in L^1$. $\int D_i u_k f =$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(0,2k)\backslash B(0,k)} \frac{\partial_i \eta(\frac{x}{k})}{k} u(x) f(x) + \int_? \eta\left(\frac{x}{k}\right) D_i u f(x) = \int_{B(0,k)} D_i u f(x) \to \int D_i u f.$$

□

Věta 2.10

Nechť $1 \leqslant p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $u \in W^{-1,p}(\Omega)$. Potom $\exists u_k \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega) : u_k \to u$ v $W^{1,p}(\Omega)$.

Důkaz
$\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \ldots \Subset \Omega$, $\overline{\Omega_k}$ kompaktní, Ω_k otevřené, $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$. Najdeme rozklad jednotky ω_j (tj. $\omega_j \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\omega_j(x) \in [0,1]$, $\omega_j \geqslant \chi_{\Omega_j}$, $\forall x \in \Omega_n : \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(x) = 1$).

Mějme $\omega_j u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $\exists v_{k,j} \in \mathcal{D}(\Omega)$: $v_{k,j} \to \omega_j u$ v $W^{1,p}$. Takže najdeme $v_j \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\int_\Omega |v_j - \omega_j u|^p + |Dv_j - D\omega_j u| < 2^{-j}\varepsilon$, $v_j \in W^{1,p}$. $\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j u = u \in W^{1,p}$.

Položme $v = \sum_{j=1}^{\infty} v_j$. Chceme dokázat $\|v-u\|_{1,p} < \varepsilon$. Nejprve na Ω_n. Máme $u|_{\Omega_n} = \sum_{j=1}^{n} (\omega_j u)|_{\Omega_n} v|_{\Omega_n} = \sum_{j=1}^{n} v_j|_{\Omega_n}$.

$$\int_\Omega \|v-u\|^p + \|Dv - Du\|^p \leqslant \int_{\Omega_n} \sum_{j=1}^{n} |v_j - u_j|^p + |Dv_j - Du_j|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|v_j - u_j\|^p_{W^{1,p}(\Omega_n)} \leqslant \sum_{j=1}^{n} 2^j \varepsilon \leqslant \varepsilon.$$

Pošleme $n \to \infty$ a zjistíme, že $\|u - v\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant \varepsilon$. □

Poznámka (Konstrukce rozkladu jednotky)
Mějme nějaké $\eta_j : \eta_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ tak, že $0 \leqslant \eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \ldots$ a $\eta_j = 1$ na Ω_j. Označme $\omega_1 = \eta_1$ a $\omega_j = \eta_j - \eta_{n-1}$ pro $j \geqslant 2$. Potom ω_j mají kompaktní nosič a tvoří rozklad jednotky.

3 Absolutní spojitost po přímkách

Věta 3.1

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $u \in L^1$. Nechť platí následující: Pro každé $i \in [n]$ a pro λ^n-skoro všechna $x \in \Omega$ je funkce $t \mapsto u(x + te_i)$ lokálně absolutně spojitá a $\partial_i u \in L^1(\Omega)$. Pak $u \in W^{1,1}(\Omega)$ a $D_i u = \partial_i u d\lambda^n$.

Důkaz
$u \in L^1 \implies u$ měřitelná. $\varphi_x : t \mapsto u(x + te_i)$ absolutně spojitá $\implies \exists \varphi_x'(t)$ pro skoro všechna t a

$$\varphi_x'(t) = \lim_{y \to t, y \in Q} \frac{\varphi_x(y) - \varphi_x(t)}{y - t} \implies \varphi'(x,t) = \partial_i u(x + te_i) \text{ je } \lambda^n\text{-měřitelná.}$$

BÚNO $\Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$. Označme $\tilde{\Omega} := (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pro λ^n-skoro všechna $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}$ máme (u absolutně spojitá v $L^1 \implies Du = u'$):

$$\int_{\tilde{\Omega}} \int_{a_1}^{b_1} \partial_1 u(t, \tilde{x}) \varphi(t, x) dt d\tilde{x} = \int_{\tilde{\Omega}} \int_{a_1}^{b_1} u(t, \tilde{x}) \partial_1 \varphi(t, x) dt d\tilde{x}.$$

$$\left(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_\Omega \partial u \varphi = - \int_\Omega u \partial_1 \varphi \right)$$

□

Věta 3.2

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Pak existuje vhodný reprezentant funkce u takový, že platí následující: Pro λ^n-skoro všechny $x \in \mathbb{R}^n$ je funkce $t \mapsto u(x + te_i)$ lokálně absolutně spojitá na $\{t \in \mathbb{R} | x + te_i \in \Omega\}$. Funkce u má všechny parciální derivace v λ^n skoro každém bodě a $D_i u = \partial_i u \lambda^n$.

Důkaz

Jako v předchozím důkazu můžeme předpokládat, že Ω je interval a označíme $\tilde{\Omega} = (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$. Podle předpředchozí věty existuje posloupnost $\{u_k\}$ $\mathcal{C}^1$-funkcí tak, že $\|u_k - u\|_{1,1} \to 0$. Dokonce můžeme předpokládat, že $\|u_k - u_{k+1}\|_{1,1} < 2^{-k}$.

Potom řada

$$\lim_{k\to\infty} u_{k+1} = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots = u_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{k+1} - u_k)$$

konverguje skoro všude a její součet je skoro všude původní funkce u. Můžeme tedy předpokládat, že funkce u je reprezentována tímto součtem. Máme:

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} (|u_{k+1} - u_k| + |\nabla u_{k+1} - \nabla u_k|)\, d\lambda^n = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega (|u_{k+1} - u_k| + |\nabla u_{k+1} - \nabla u_k|)\, d\lambda^n < \infty,$$

tedy pro λ^{n-1}-skoro každý $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}$ je integrál

$$\int_{a_1}^{b_1} \sum_{k=1}^{\infty} (|u_{k+1}(t,\tilde{x}) - u_k(t,\tilde{x})| + |\nabla u_{k+1}(t,\tilde{x}) - \nabla u_k(t,\tilde{x})|)\, d\lambda^1(t) < \infty.$$

Pro takový $\tilde{x}$ je $u|_{(a_1,b_1)\times\{\tilde{x}\}} \in W^{1,1}((a_1,b_1))$ a dle věty výše je $u|_{(a_1,b_1)\times\{\tilde{x}\}}$ absolutně spojitá funkce na (a_1,b_1). Dále je $\partial_1 u_k \to \partial_1 u$ v $L^1((a_1,b_1))$. Provedením limitního přechodu diferenčních podílů přes racionální čísla, dostaneme, množina bodů, kde parciální derivace existuje je měřitelná a tudíž derivace existuje skoro všude.

Pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je $u|_{(a_1,b_1)\times\{\tilde{x}\}} \in \mathcal{D}((a_1,b_1))$ a dle věty výše (bod 6.) a dle Fubiniovy věty je $D_1 u = \partial_1 u \in L^1(\Omega)$. Podobně pro ostatní parciální derivace. □

Poznámka

Předchozí dvě věty dávají dohromady tzv. Beppo Leviho charakterizaci Sobolevových prostorů.

Věta 3.3 (Svazové vlastnosti Sobolevových prostorů)

Nechť $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$. Potom též funkce $w := \max\{u, v\} \in W^{1,p}$ a $\nabla w = \nabla u$ na $\{w = u\}$ a $\nabla w = \nabla v$ na $\{w = v\}$.

Důkaz
Pro případ $n = 1$ si stačí uvědomit, že $Du\chi_{\{u \geqslant v\}} + Dv\chi_{\{v>u\}} \in L^1$ ($|u(b) - u(a)| \leqslant \int_a^b f$ a $|v(b) - v(a)| \leqslant \int_a^b g \implies |w(b) - w(a)| \leqslant \int_a^b f + g$). Pro $n \geqslant 2$ je tvrzení zřejmým důsledkem předchozích vět a jednorozměrného případu. □

Důsledek
$u \in W^{1,p} \implies |u| \in W^{1,p} \wedge \nabla|u| = \operatorname{sgn} u \nabla u$.

Definice 3.1

Nechť U je konvexní otevřená omezená a $x \in U$. Značíme $U_t := \{x + t(y - x) | y \in U\} = \left\{z | x + \frac{1}{t}(z - x) \in U\right\}$. Dále značíme $\overline{u}_U = \fint_U u dy$.

Minkowského funkcionál množiny U je $p(y) = \inf\{t | y \in U_t\}$. Platí, že $U_t = \{y | p(y) < t\}$.

Věta 3.4 (O odhadu potenciálem)

Nechť U je konvexní otevřená omezená, $x \in U$, $u \in W^{1,1}(U)$. Dále nechť x je Lebesgueův bod u, pak

$$|u(x) - \overline{u}_U| \leqslant \frac{\operatorname{diam} U}{\lambda^n(U)} \int_0^1 \frac{1}{t^n} \int_{U_t} |Du(y)| d\lambda^n(y) d\lambda^1(t).$$

Je-li navíc ? konečný, pak

$$u(x) - \overline{u}_U = \int_0^1 \frac{1}{t} \fint_{U_t} |Du(y)|(y - x) d\lambda^n(y) d\lambda^1(t).$$

Důkaz
Nechť $u \in \mathcal{C}^1(U)$ ($\forall u \in W^{1,1}$ $\exists u_k \to u$ v $W^{1,1}$, $u_k \in \mathcal{C}^1$).

$$\xi(t) = \fint_U u(x + t(y-x))d\lambda^n(y) = \fint_{U_t} ud\lambda^n.$$

$\xi(1) = \fint_U u = \overline{u}_U$. $\lim_{s\to 0_+} \xi(s) = u(x)$ (Lebesgueův bod). $0 < a < b < 1$:

$$\xi(b) - \xi(a) = \int_a^b \partial_t \left(\fint_U u(x + t(y-x))dy \right) dt = \int_a^b \fint_U \nabla u(x + t(y-x)) \cdot (y-x)dydt =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\lambda^n(U)t^n} \int_{U_t} \nabla u(z) \frac{(z-x)}{t} dzdt.$$

$$\omega_a^b(z) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^n(u)} \int_{\max\{a,p(z)\}}^b \frac{1}{t^{n+1}}dt, & p(z) < b, \\ 0, & p(z) \geqslant b. \end{cases} \qquad \omega_a^b \in \mathbb{C}_c(U)$$

$$\xi(b) - \xi(a) = \frac{1}{\lambda^n(U)} \int_a^b \int_{U_t} \nabla u(z)(z-x)d\lambda^n(z) \frac{dt}{t^{n+1}} =: ** =$$

$$= \frac{1}{\lambda^n(U)} \int_a^b \int_{\{p(z)<t\}} \nabla u(z)(z-x)d\lambda^n(z) \frac{dt}{t^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^n(U)} \int_{U_b} \int_{(a,b)\cap\{p(z)<t\}} \nabla \frac{u(z)(z-x)}{t^{n+1}} d\lambda^n(z)dt =$$

$$= \int_U \omega_a^b(z) \nabla u(z)(z-x)dz =: *$$

Pomocí silné aproximace hladkými funkcemi v $W^{1,1}(U)$ dostaneme $*$ i pro $\forall u \in W^{1,1}(U)$.

$$\xi(b) - \xi(a) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \frac{1}{t} \left(\fint_{U_t} D_u(z)(z-x)dz \right) dt.$$

Použijeme odhad $|z - x| \leqslant \operatorname{diam} U_t = t \operatorname{diam} U$:

$$|\xi(b) - \xi(a)| \leqslant \operatorname{diam} U \int_a^b \fint_{u_t} |D_u(z)|dzdt = \frac{\operatorname{diam} U}{\lambda^n(U)} \int_a^b \int_{U_t} |Du(z)|dz \frac{dt}{t^n}.$$

$$|\xi(1) - \xi(0)| \leqslant \frac{\operatorname{diam} U}{\lambda^n(U)} \int_0^1 \int_{U_t} Du(z)dz \frac{dt}{t^n}.$$

$$** \xrightarrow{b\to 1_-, a\to 0_+} \int_0^1 \frac{1}{t} \fint_{U_t} Du(z)(z-x)dzdt$$

□

Důsledek
Nechť $U \in \mathbb{R}^n$ otevřená konvexní omezená, $u \in W^{1,1}(U)$ a nechť $x \in U$ je Lebesgueův. Pak

$$\int_U |u(y) - u(x)| d\lambda^n(y) \leqslant c_U \int_U \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}} d\lambda^n(y),$$

kde C_U závisí pouze na tvaru U.

Důkaz
Označme $R = \operatorname{diam} U$. Potom $p(y) \geqslant \frac{|y-x|}{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$. Víme, že

$$|\xi(b) - \xi(a)| \leqslant \int_U \omega_a^b(y) |Du(y)| \cdot |y - z| d\lambda^n(y).$$

$$\omega_a^b(y) \leqslant \frac{1}{\lambda^n(U)} \int_{p(y)}^{\infty} \frac{1}{t^{n+1}} = \frac{1}{n \cdot \lambda^n(U)} [p(y)]^{-n} \leqslant \frac{1}{n \cdot \lambda^n(u)} \frac{R^n}{|y-x|^n}.$$

Potom

$$|\xi(b) - \xi(a)| \leqslant C_U \cdot \frac{R^n}{n \cdot \lambda^n(U)} \int_U \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}.$$

$$|\fint_U u(y) - u(x) dy| \leqslant C_U \int_U \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}.$$

$$v(y) = |u(y) - u(x)| \in W^{1,1}.$$

$$\int_{B(x,r)} |v(y) - v(x)| \to 0, \qquad \int ||u(y) - u(x)| - 0| = \int |u(y) - u(x)|.$$

$|Dv| = |Du|$ skoro všude.

$$\left| \fint |u(y) - u(x)| \right| \leqslant Cu \int \frac{|Du|}{|y-x|^{n-1}}.$$

□

Lemma 3.5

Nechť $r > 0$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$\int_{B(\mathbf{o},r)} |x - y|^{1-n} d\lambda^n(y) \leqslant Cr.$$

Odhad platí také, když vyměníme $B(\mathbf{o}, r)$ za $Q(\mathbf{o}, r)$

Důkaz
Nechť $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{o}, 2r)$, pak $|y-x| > r$. $|y-x|^{1-n} \leqslant r^{1-n}$. $\lambda^n(B(\mathbf{o},1)) =: \omega_n$, $\lambda^n(B(\mathbf{o},r)) = r^n\omega_n$.

$$\int_{B(\mathbf{o},r)} |y-x|^n \leqslant \int_{B(\mathbf{o},r)} r^{1-n} = \lambda^n(B(\mathbf{o},r))r^{1-n} = \omega_n r.$$

$x \in B(0,2r)$, $B(x,3r) \supset B(0,r)$.

$$\int_{B(0,r)} |y-x|^{1-n} \leqslant \int_{B(x,3r)} |y-x|^{1-n} = \int_{B(0,r)} |y|^{1-n} \cdot \int_0^{3r} \mathcal{H}^{n-1}(S_t)t^{1-n} = 3\mathcal{H}^{n-1}(S_n)r.$$

□

Lemma 3.6 (Symetrizace Rieszova integrálu s jádrem)

Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^n$ měřitelná, pak $\int_E |x|^{1-n} d\lambda^n(x) \leqslant c \cdot \lambda^n(E)^{\frac{1}{n}}$.

Důkaz
Nechť $R : \lambda^n(B(0,R)) = \lambda^n(E)$. Pak $\lambda^n(B \setminus E) = \lambda^n(E \setminus B)$.

$$\int_{E\setminus B} \frac{1}{|x|^{n-1}} \leqslant \int_{E\setminus B} \frac{1}{R^{n+1}} = \int_{B\setminus E} R^{1-n} \leqslant \int_{B\setminus E} |x|^{1-n}.$$

$$\int_E |x|^{1-n} \leqslant \int_B |x|^{1-n} \leqslant CR = C\lambda^n(B(0,R))^{\frac{1}{n}} = c(\lambda(E))^{\frac{1}{n}}.$$

□

Věta 3.7

Ω otevřená v $\mathbb{R}^n$, $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Potom $\forall B \subset \Omega$ platí

$$\int_B |u - \overline{u}_B| d\lambda^n \leqslant c \cdot r \cdot \int_B |Du| d\lambda^n,$$

kde C závisí pouze na n a $r = \frac{\operatorname{diam} B}{2}$.

Důkaz
Je-li x Lebesgueův bod pro u, pak

$$|u(x) - \overline{u}_B| \leqslant C_B \int_B \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy$$

$$\int_B |u(x) - \overline{u}_B| \leqslant \int_B C(n) \int_B \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}} dydx \leqslant C(n)r \int_B |Du(y)|.$$

□

Poznámka
Aproximace $u \in W^{1,p}$ ... $\exists u_k \in \mathcal{C}^\infty$, $u_k \to u$ v $W^{1,p}$. ($\int |u_k - u|^p < \varepsilon$.) $u_k \to u$ v $W^{1,1}$ ($\lambda^n(\{u_k \neq u\}) < \frac{1}{k}$), $u_k \in Lip$.

Věta 3.8

Nechť $u \in W^{1,1}(B)$. Pak $\exists E_m : B \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$ takové, že $m \cdot \lambda^n(E_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ a $\exists g_m \in Lip(B)$:

- *$lip g_m \leqslant C \cdot m$;*
- *$\{g_n = u\} \subseteq B \backslash E_m$;*
- *$\|u - g_m\|_{1,1} \to 0$.*

Poznámka
$Mf(x) = \sup_{r>0} ⨍_{B(x,r)} |f|$ ($f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$). Slabý odhad:

$$\lambda^n(Mf > \alpha) \leqslant \frac{C}{\alpha} \int_{|f| > \frac{\alpha}{2}} |f| d\lambda^n \overset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Důkaz
Definujeme $h(x) = |Du(x)|$ pro $x \in B$ a $h(x) = 0$ jinak. $h \in L^1(\mathbb{R})$. Dále definujme $E_m = \{Mh > m\}$. Díky slabému odhadu je $\lambda^n(E_m) \leqslant \frac{C}{m}\int_{\left\{|h|>\frac{m}{2}\right\}} |h| = \sigma\left(\frac{1}{m}\right)$. Chceme dokázat, že $x, y \in B \setminus E_m$ je $|u(x) - u(y)| \leqslant C \cdot m \cdot |x - y|$. Definujme $B_j = B(x, 2^{-j}|x+y|)$, $B_{-j} = B(y, 2^{-j}|x+y|)$, $B_0 = B\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}, 2|x-y|\right)$, $j \in \mathbb{N}$.

Protože je $x, y \in B \setminus E_m$ je $⨍_{B_j} h \leqslant m\ \forall j \in \mathbb{Z}$ (pro $j = 0$, protože to tak vyjde). Předefinujeme E_m jako $\{Mh > m\} \cup \{x \text{ má Lebesgueův bod pro } u\}$. Tím pádem máme $\lim_{j\to\infty} ⨍_{B_j} u =: \lim_{j\to\infty} \overline{u_{B_j}} = u(x)$. Potom

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \left|\overline{u}_{B_1} - \overline{u}_{B_{-1}}\right| + \sum_{j=1}^{\infty} \left|\overline{u}_{B_{j+1}} - \overline{u}_{B_j}\right| + \left|\overline{u}_{B_{-j-1}} - \overline{u}_{B_{-j}}\right|.$$

$$|\overline{u}_{B_{j+1}} - \overline{u}_{B_j}| = \left|⨍_{B_{j+1}} u - \overline{u}_{B_j}\right| \leqslant ⨍_{B_{j+1}} |u - \overline{u}_{B_j} \leqslant 2^n ⨍_{B_j} |u - \overline{u}_{B_j}| \leqslant C \cdot |x-y| \cdot 2^{-j} ⨍_{B_j} |Du|.$$

$$|\overline{u}_{B_1} - \overline{u}_{B_{-1}}| = \left|⨍_{B_0} \overline{u}_{B_1} - u + ⨍_{B_0} u - \overline{u}_{B_{-1}}\right| = \left|⨍_{B_1} u - \overline{u}_{B_0} + ⨍_{B_{-1}} \overline{u}_{B_0} - u\right| \leqslant$$

$$\leqslant ⨍_{B_1} |u - \overline{u}_{B_0} + ⨍_{B_{-1}} |u - \overline{u}_{B_0}| \leqslant C ⨍_{B_0} |u - \overline{u}_{B_0}| \leqslant C \cdot |x-y| \cdot ⨍_{B_0} |Du|.$$

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C \cdot |x-y| \cdot ⨍_{B_0} |Du| + C \cdot |x-y| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} ⨍_{B_j} |Du| + 2^{-j} ⨍_{B_{-j}} |Du| \leqslant C \cdot m \cdot |x-y|.$$

Použijeme McShanovu rozšiřovací větu.

$g_m \in W^{1,1}(B)$. „$Dg_m = Du$ skoro všude na $B \setminus E_m$“: stačí $D_1 g_m = D_1 u$. Když vybereme správného reprezentanta u: $\exists \partial_1 u(\cdot, \tilde{x})$, $\exists \partial_1 g_m(\cdot, \tilde{x})$, $u = g_m$ skoro všude $\implies$ $\partial_1 u = \partial_1 g_m$ skoro všude (na $(a,b) \cap B \setminus E_m$).

$\int_B |u - g_n| \leqslant \int_{B \setminus E_m} |u| + \int_{E_m} |g_m| \to 0 + \lim_{m\to\infty} \int_{E_m} |g_m|$. A $|g_n| \leqslant \sup |u|_{B \setminus E_m}|$.

$$\int_B |Du - Dg_m| \leqslant \int_{E_m} |Du| d\lambda^n + c \cdot m \lambda^n(E_m) \to 0,$$

neboť $\lambda^n(E_m) \to 0$ a slabý odhad.

$$\int_B |g_m - \overline{g_m}_B| \leqslant C \cdot r \cdot \int_B |Dg_m| \leqslant C \cdot \int_B |Du|.$$

$g_m - \overline{g_m}_B \in L^1$.

$$|\overline{u} - \overline{g_m}_B| \leqslant ⨍_B |u - \overline{u}_B| + |g_m - \overline{g_m}_B| \leqslant c \cdot \int_B |Du|.$$

Tedy $\int_{E_m} g_m \to 0$ (neboť g_m je omezená). □

Věta 3.9 (Franchi–Hajlasz–Koskela)

Nechť $u \in L^1(\Omega)$. Pak $u \in W^{1,1}(\Omega) \Leftrightarrow \exists f \in L^1(\Omega)\ \forall B(x,r) \subset\subset \Omega : \int_B |u - \overline{u}_B| \leqslant r \cdot \int_B f$.

Důkaz

$u \in W^{1,1} \implies \int |u - \overline{u}_B| \leqslant C \cdot r \cdot \int_B |Du|$.

„$\implies$“: Viz věta výše. „$\impliedby$“: Nechť $\Omega' \subset\subset \Omega : \Omega' + B(0, \frac{1}{k}) \subset \Omega$, pak $\psi_k * u \in \mathcal{C}^1(\Omega')$ ($\psi_k(x) = k^n \psi(kx)$).

$$\forall i \in [n]\ \forall x \in \Omega' : \int_{B(x,k^{-1})} \partial_i \psi_k(x-y) \overline{u}_{B(x,k^{-1})} = \overline{u}_{B(x,k^{-1})} \int_{B(0,k^{-1})} \partial_i \psi_k(y) dy = 0.$$

$$\int |\partial_i \psi_k * u| = \left| \int_{B(x,k^{-1})} \partial_i \psi_k(x-y)(u(y) - \overline{u}_{B(x,k^{-1})}) \right| \leqslant$$
$$\leqslant Ck^{n+1} \int_{B(x,k^{-1})} |u - \overline{u}_{B(x,k^{-1})}| \leqslant Ck^n \int_{B(x,k^{-1})} f \leqslant C\|f\|_1.$$

Z toho vidíme, že pro $u_k = \psi_k * u$ je posloupnost $\{\partial_i u_k\}$ omezená v $L^1(\Omega')$ a tudíž existuje $\mu_i \in \mathcal{M}(\Omega)$ tak, že (podposloupnost) $\partial_i u_k \chi_{\Omega'}$ konverguje slabě s * k μ_i. Tedy pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ je

$$\int_{\Omega'} u(\partial_i \varphi) d\lambda^n = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} u_k(\partial_i \varphi) d\lambda^n = -\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} (\partial_i u_k) \varphi d\lambda^n = -\int_{\Omega'} \varphi d\mu_i.$$

Tím jsme ověřili, že μ je distributivní derivací u v Ω'. Distributivní derivace v celém Ω je tedy lokálně znaménková míra a díky nezávislosti odhadů na Ω' je to globálně znaménková míra.

Chceme $\mu_i \ll \lambda^n$ ($\varphi \in C_c^\infty(\Omega')$):

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi \overset{u_k \to u \text{ v } L^2}{\longleftarrow} \int_{\Omega'} u_k \partial_i \varphi = -\int_{\Omega'} \partial_i u_k \varphi \overset{(w*)}{\to} -\int \varphi d\mu_i.$$

Tj. $\mu_i = D_i u$ ve smyslu distribucí.

$$\int_G |\partial_i u_k \varphi| \leqslant c \cdot k^k \int_G \int_{B\left(x,\frac{1}{k}\right)} f(y) dy \varphi(x) dx \leqslant c \cdot k^n \int_G \int_{B\left(x,\frac{1}{k}\right)} f(y)\varphi(x) \leqslant$$
$$\leqslant c \cdot k^n \cdot \int_{G + B\left(0,\frac{1}{k}\right) \cap \operatorname{supp} \varphi} f(x) \lambda^n \left(B\left(x, \frac{1}{k}\right)\right) \leqslant C \cdot \int_G |f|.$$

Limitním přechodem $k \to \infty$ a supremum přes φ:

$$\left| \int_G \varphi d\mu_i \right| \leqslant c \cdot \int_G |f|, \qquad |d\mu_i|(G) \leqslant |f| d\lambda^n(G), \qquad \mu_i \ll \lambda^n.$$

□

Věta 3.10 (Gagliardo–Nirembergoum)

Nechť U je otevřená omezená konvexní. Nechť $u \in W^{1,1}(U)$ s nulovým mediánem v U. Pak

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} = \left(\int_U |u|^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant C_U \int_U |Du|,$$

$$\|u\|_{L^{p^*}} = \left(\int_U |u|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant C_U \left(\int_U |Du|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p^* = \frac{np}{n-p}, \qquad p \in [1, \infty].$$

Důkaz

Níže. □

Definice 3.2

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $0 < \lambda^n(M) < \infty$ a $u : M \to \mathbb{R}$ je měřitelná. Říkáme, že $c \in \mathbb{R}$ je mediánem u na M, pokud:

$$\lambda^n(\{u > c\} \cap M) \leqslant \frac{1}{2}\lambda^n(M), \qquad \lambda^n(\{u < c\} \cap M) \leqslant \frac{1}{2}\lambda^n(M).$$

Tvrzení 3.11 (Odhad slabého typu)

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená konvexní, $u \in W^{1,1}(U)$ s nulovým mediánem na U. Pak

$$s\left(\lambda^n(\{u > s\})\right)^{1-\frac{1}{n}} \leqslant c \cdot \int_U |Du| d\lambda^n.$$

Důkaz

Označme $G_s := \{|u| > s\}$, $s\lambda^n(G_s) \leqslant C \cdot \int_{G_s} |u|$.

$$s\lambda^n(G_s) = \fint_U s\lambda^n(G_s) \leqslant c \cdot \fint_U \int_{G_s} |u(x)| dx dy =$$

$$= c \cdot \int_{G_s} \fint_U |u(x)| dy dx \leqslant$$

$$(|u(x)| \leqslant |u(x) - u(y)| \qquad \forall y : \operatorname{sgn}(u(y)) \neq \operatorname{sgn}(u(x)).)$$

$$\leqslant c \cdot \int_{G_s} \fint_{\{\operatorname{sgn}(u(y)) \neq \operatorname{sgn}(u(x))\}} |u(x) - u(y)| \overset{\text{0 je med}}{\leqslant} c \cdot \fint_{G_s} \fint_U |u(x) - u(y)| dy dx \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot \int_{G_s} \int_U \frac{|Du(y)Z|}{|x-y|^{n-1}} dy dx \overset{\text{Fubini}}{=} c \cdot \int_U |Du(y)| \int_{G_s} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dx dy \leqslant c \cdot \int_U |Du(y)| \lambda^n(G_s)^{\frac{1}{n}}.$$

□

Věta 3.12

Nechť U je otevřená omezená konvexní a $u \in W^{1,1}(U)$ s nulovým mediánem v U. Pak

$$\int_0^\infty \lambda^n(\{|u| > s\})^{1-\frac{1}{n}} ds \leqslant c \int_u |Du|.$$

Důkaz

Zvolme $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Nechť $u \geqslant 0$ (BÚNO, aplikujeme na $u_+ := \max\{u, 0\}$ a $u_- := \max\{-u, 0\}$). Zadefinujeme

$$v(x) := v_{a,k}(x) := \begin{cases} u(x) - (k-1)a, & u(x) \in [(k-1)a, k \cdot a] \\ 0, & u(x) \leqslant (k-1)a \end{cases}.$$

v má nulový medián v U a $Du = Dv$ skoro všude v $\{x | a(k-1) \leqslant u(x) \leqslant ak\}$.

$$s \cdot \lambda^n(\{|v| > s\})^{1-\frac{1}{n}} \leqslant c \cdot \int_U Dv.$$

$$\int_{(k-1)a}^k \cdot a \left(\lambda^n(\{u > s\})\right)^{1-\frac{1}{n}} ds \leqslant a(\lambda^n(\{u > (k-1)a\}))^{1-\frac{1}{n}} \leqslant c \cdot \int_{U \cap V_{a,k}} |Du|.$$

Sečteme přes $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^\infty \lambda^n(\{u > s\})^{1-\frac{1}{n}} ds \leqslant c \cdot \int_U |Du|, \qquad \forall a > 0.$$

$a \to 0_+$. □

Poznámka

M měřitelná, $u : M \to \mathbb{R}$ měřitelná. Pak

$$\int_M |u|^p = \int_0^\infty p s^{p-1} \lambda^n(M \cap \{|u| > s\}) ds.$$

Lemma 3.13

$f:(0,\infty)\to[0,\infty)$ nerostoucí a $q\geqslant 1$, $r>1$. Pak

$$\int_0^\infty s^{qr-1}f(s)ds \leqslant c\cdot\left(\int_0^\infty s^{q-1}f(s)^{\frac{1}{r}}ds\right)^r.$$

Důkaz

$$I:=\int_0^\infty s^{q-1}f(s)^{\frac{1}{r}}.$$

$$\forall t>0: t^q f(t)^{\frac{1}{r}} = \int_0^t qs^{q-1}(f(t))^{\frac{1}{r}}ds \leqslant \int_0^t qs^{q-1}(f(s))^{\frac{1}{r}} \leqslant c\cdot I.$$

$$s^{qr-q}f(s)^{1-\frac{1}{r}} \leqslant c\cdot I^{r-1}, \qquad t\mapsto t^{r-1} \text{ rostoucí pro } r>1.$$

$$\int_0^\infty s^{qr-1}f(s) \leqslant \int_0^\infty s^{qr-q}f(s)^{1-\frac{1}{r}} \leqslant c\cdot I^{r-1}\int_0^\infty s^{q-1}f(s)^{\frac{1}{r}} = c\cdot I^r.$$

□

Věta 3.14 (Gagliardova–Nirembergonova)

Nechť U je otevřená konvexní omezená a nechť $u\in W^{1,1}(U)$ s nulovým mediánem v U. Pak

$$\left(\int_U |u|^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant C_U\int_U |Du|,$$

kde C_U závisí pouze na tvaru U.

Důkaz

$$\int_M |u|^p = \int_0^\infty ps^{p-1}\lambda^n(\{|u|>s\}), \qquad p=\frac{n}{n-1}.$$

$$\int_0^\infty s^{qr-1}f(s) \leqslant c\cdot\left(\int_0^\infty s^{q-1}f^{\frac{1}{r}}\right)^r, \qquad \frac{n}{n-1}-1=\frac{1}{n-1}.$$

$$\int_U |u|^{\frac{n}{n-1}}\int_0^\infty \frac{n}{n-1}s^{\frac{1}{n-1}}\lambda^n(U\cap\{|u|>s\}) \leqslant, \qquad q=1, r=\frac{n}{n-1}.$$

$$\leqslant c_n\left(\int_0^\infty \lambda^n(U\cap\{|u|>s\})^{\frac{n-1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} \leqslant \left(c\cdot\int_U |Du|\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

□

Věta 3.15 (Sobolevova nerovnost)

U omezená otevřená konvexní, $1 \leqslant p < n$ a nechť $u \in W^{1,p}(U)$ s nulovým mediánem v U. Pak

$$\left(\int |u|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant C_U \frac{pn-p}{n-p} \left(\int_U |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Důkaz

„$p = 1$“ triviální. „$p > 1$“: $u = u^+ - u^-$, tedy BÚNO $u \geqslant 0$. Nejdřív předpokládejme navíc, že $u \in L^\infty(U)$. Definujme $v = u^{\frac{pn-p}{n-p}}$. (?$\frac{p}{p-n}(n-1)v$ je ACL?.)

$$\nabla v = \frac{pn-p}{n-p} u^{\frac{pn-n}{n-p}} \nabla u \implies v \in W^{1,1}(U).$$

$$\left(\int_U |u|^{p^*} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\int_U |v|^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant C_U \int_U |Dv| = C_U \frac{pn-p}{n-p} \int_U u^{\frac{np-n}{n-p}} |Du| \leqslant$$

$$\leqslant C_U \frac{pn-p}{n-p} \left(\int_U |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_U u^{p^*} \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

$$\left(\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{np-p-np+n}{np} = \frac{n-p}{np} = \frac{1}{p^*}. \right)$$

Tím je důkaz hotov pro $u \in W^{1,p} \cap L^\infty$. Nechť $u \in W^{1,p}$. Zadefinujeme $u_k = \min\{u, k\}$. $\exists Du_k$ a $|Du_k| \leqslant |Du|$.

$$\left(\int |u|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leftarrow \left(\int |u_k|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant c \cdot \left(\int |Du_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c \cdot \left(\int |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Věta 3.16 (Sobolevova nerovnost na celém $\mathbb{R}^n$)

Nechť $1 \leqslant p < n$ a nechť $u \in W^{1,p}$. Pak

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_\beta \frac{pn-p}{n-p} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Důkaz

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi$ je kompaktní, φ má nulový medián v $B(\mathbf{o}, R)$ pro R dostatečně velké. Tím pádem je

$$\|\varphi\|_{L^{p^*}} \leqslant C_\beta \frac{pn-p}{n-p} \|D\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Mějme $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, najdeme $\varphi_k \to u$ v $W^{1,p}$ a tudíž platí odhad i pro u. □

Věta 3.17 (Sobolevova–Poincarého nerovnost)

U je omezená otevřená konvexní, $p, q \geqslant 1$. Nechť $u \in W^{1,p}(U)$. Pokud $\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, pak

$$\left(\fint_U |u - \overline{u}_U|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C_{p,q,U} (\operatorname{diam} U) \cdot \left(\fint |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Důkaz

BÚNO u má nulový medián v U. Za prvé nechť „$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$“: $q = \frac{np}{n-p}$:

$$\left(\fint_U |u|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c \cdot (\operatorname{diam} U)^{\frac{-n}{q}} \left(\int_u |u|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c \cdot (\operatorname{diam} U)^{\frac{-n}{q}} \left(\int_U |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot (\operatorname{diam} U)^{\frac{-n}{q} + \frac{n}{p}} \left(\fint_U |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}} = c \cdot (\operatorname{diam} U) \cdot \left(\fint_U |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

„$q < \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$“: Najdeme $s \in [1, n)$, $\left(\fint |u|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\fint |u|^{s^*} \right)^{\frac{1}{s^*}}$, $\frac{1}{q} - \frac{1}{s^*} = \frac{1}{t}$. □

Věta 3.18 (O vnoření $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\Omega)$)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $\lambda^n(\Omega) < \infty$, nechť $\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ a nechť $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Pak

$$(\lambda^n(\Omega))^{-\frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{p,n} (\lambda^n(\Omega))^{-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega)} + C_{p,n} (\lambda^n(\Omega))^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Důkaz

„$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ $(q = p^*)$“:

$$\left(\fint_\Omega |u|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant (\lambda^n(\Omega))^{-\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant (\lambda^n(\Omega))^{-\frac{1}{q}} C \cdot \frac{pn - p}{n - p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

„$\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$“: BÚNO $\lambda^n(\Omega) = 1$ (jinak rozšíříme $W^{1,p}$ na celé $\mathbb{R}^n$ za pomoci věty z PDR1 a pak položíme $v(y) = r \cdot u(y/r)$, kde $r = (\lambda^n(\Omega))^{1/n}$). $\forall t \geqslant s \geqslant 1 : \left(\fint_\Omega |u|^s \right)^{\frac{1}{s}} = \left(\fint_\Omega |u|^t \right)^{\frac{1}{t}}$. $q > p$, jinak Hölder a stačí první člen na pravé straně.

$$p < q < p^* \implies \left(\fint_\Omega |u|^q \right)^{\frac{1}{q}} \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \left(\fint_\Omega |u|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant C_\beta \frac{p \cdot n - p}{n - p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Definice 3.3

Říkáme, že x je bodem hustoty měřitelné množiny E, pokud $\lim_{r\to 0} \frac{\lambda^n(E\cap B(x,r))}{\lambda^n(B(x,r))} = 1$.

Nechť $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a nechť $x \in \mathbb{R}^n$. Říkáme, že $L = \operatorname{aplim}_{y\to x} u(y)$ je aproximativní limita u v bodě x, pokud $\exists E \subseteq \mathbb{R}^n$ měřitelná: x je bodem hustoty E a $\lim_{y\to x, y\in E} u(y) = L$.

Poznámka

u měřitelná:

$$L = \operatorname{aplim}_{y\to x} u(y) \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \sigma > 0\ \exists r_0 : \forall r \in (0, r_0) : \frac{1}{r^n}\lambda^n(\{|u(y) - L| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \sigma \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x$ je bodem hustoty $M_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n | |u(y) - u(x)| < \varepsilon\}\ \forall \varepsilon$.

$A = \nabla_a u \equiv \operatorname{aplim}_{y\to x} \frac{u(y)-u(x)-A(y-x)}{|x-y|} = 0$.

Lemma 3.19

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$. Pak pro skoro všechna $x \in \Omega$:

$$\lim_{r\to 0_+} \frac{1}{r} ⨍_{B(x,r)} |u(y) - u(x) - Du(x)(y - x)| d\lambda^n(y) = 0.$$

Důkaz

BÚNO x je Lebesgueův bod pro u a Du. Definujeme $v(y) = u(y) - u(x) - Du(x)(u - x)$. $v(x) = 0$.

$$\frac{1}{R} ⨍ |v(y)| = \frac{1}{R} ⨍_{B(x,R)} |v(y) - v(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{R} \int_{B(x,R)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} = \frac{C}{R} \int_{B(x,R)} \left(\int_{|x-y|}^{\infty} \frac{1}{r^n} dr \right) |Du(y)| =$$

$$= \frac{C}{R} \int_0^R \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |Du(y) - Du(x)| dy dr + \frac{C}{R} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^n} \int_{B(x,R)} |Du(y) - Du(x)| dyxr \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \cdot \int_0^R \underbrace{⨍_{B(x,r)} |Du(y) - Du(x)|}_{\xrightarrow{R\to 0+} 0} + c_2 \cdot ⨍_{B(x,R)} \underbrace{|Du(y) - Du(x)|}_{\xrightarrow{R\to 0+} 0} \to 0.$$

□

Věta 3.20

Nechť $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Potom $\exists \nabla_a u(x) = Du(x)$ pro skoro všechna $x \in \Omega$.

Důkaz

Mějme x takové, že $\lim_{r\to 0_+} \frac{1}{r} \fint_{B(x,r)} |u(y) - u(x) - Du(x)(y-x)|dy = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a $\tau \in (0,\varepsilon)$ (např. ε^2). Označme $v(y) = u(y) - u(x) - Du(x)(y-x)$ a $\sigma = \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n+1}}$. Najděme $r_0 > 0$: $\fint_{B(x,\sigma)} |v| \leqslant \tau\sigma \ \forall r \in (0, r_0)$.

Máme

$$\lambda^n(\{|v(y)| \geqslant \varepsilon|y-x|\} \cap B(x,r)) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^n(\{y \in B(x,r)\backslash B(x,\sigma r) | |v(y)| \geqslant \varepsilon \cdot |y-x| \geqslant \varepsilon \cdot \sigma \cdot r\}) + \lambda^n(B(x, \delta \cdot r)) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{B(x,r)\cap\{|v|>\sigma\cdot\varepsilon\cdot r\}} \frac{|v|}{\sigma \cdot \varepsilon \cdot r} dy + \sigma^n \lambda^n(B(x,r)) \leqslant \frac{\tau \cdot r}{\sigma \cdot \varepsilon \cdot r} \cdot r^n + c \cdot \delta^n \cdot r^n = \left(\frac{\tau}{\varepsilon \cdot \delta} + \delta^n \cdot c\right) \cdot r^n.$$

□

Lemma 3.21

Nechť $v \in Lip_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$ a nechť $\exists \nabla_a v(x)$. Potom $\exists \nabla v(x) = \nabla_a v(x)$.

Důkaz

BÚNO u je lipschitzovská a $Lip u =: L$. Najděme $r_0 > 0$: $B(x, r_0) \subset \Omega$ a $\forall r \in (0, r_0)$ platí

$$\lambda^n(B(x,r) \cap E) \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^n \lambda^n(B(x,r)), \qquad E := \{y | |v(y)| > \varepsilon|y-x|\},$$

protože $\exists \nabla_a u(x)$. Nechť $E \cap B\left(x, \frac{c}{4}\right) \backslash B\left(x, \frac{c}{8}\right)$ $(|v(y)| \leqslant C \cdot \varepsilon|y-x|)$ otevřená, tedy $\overline{B(x,r)}\backslash E$ je uzavřená $\implies \exists z' \in \overline{B(x,r)}\backslash E$ nejbližší k z. $|z-z'| \leqslant \frac{r}{4}$, protože $x \in B(x,r)\backslash E$.

$z' \in B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ a $B(z, |z-z'|) \subset B(x,r)$.

$$\left(\frac{|z'-z|}{r}\right)^n \leqslant \frac{\lambda^n(E \cap B(x,r))}{\lambda^n(B(x,r))} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^n.$$

$|z'-z| \leqslant \frac{\varepsilon}{L} r$, $|v(z') - v(z)| \leqslant \varepsilon r$,

$$|v(z)| \leqslant |v(z')| + |v(z) - v(z')| \leqslant \varepsilon|z'-x| + \varepsilon r \leqslant 2\varepsilon r \leqslant c \cdot \varepsilon \cdot |z-x|.$$

□

Věta 3.22 (Rademacher)

Nechť $u \in Lip_{loc}(\Omega)$. Potom $\exists \nabla$ skoro všude na Ω, $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ a $Du = \nabla u$.

Důkaz

$\implies \exists \nabla_a u$ skoro všude $\implies \exists \nabla u$ skoro všude. ? ∇u je měřitelná. $|\nabla u| < M \implies \nabla u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Funkce u má $\partial_? u$ skoro všude na skoro všech přímkách $\implies$ (ACL charakterizace) $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$.

$Lip(u,x) = \limsup_{y \to x} \frac{|u(y)-u(x)|}{|y-x|}$. $S(u) = \{x | Lip(u,x) < \infty\}$. □

Věta 3.23 (Stepanov)

Nechť u je reálná funkce na Ω. Potom u je diferencovatelná skoro všude na $S(u)$.

Důkaz

Nechť $\{B_j\}$ – střed racionální poloměr ?. Pro každé B_j definujeme lipschitsovské obálky:

$$w_j(x) = \inf \{w(x) | w(x) \geqslant u(x) lip(u, B_j) \leqslant j\},$$

$$v_j(x) = \sup \{v(x) | v(x) \leqslant u(x) lip(u, B_j) \leqslant j\}.$$

Dokažme, že pro $N := \bigcup \{x \in B | \nexists \nabla w_j(x) \vee \nexists v_j(x)\}$ je $\lambda^n(N) = 0$. Nechť $x \in S(u) \setminus N$. $\exists r > 0\ \exists l > 0 : |u(x) - u(y)| \leqslant l \cdot |x-y|$. $lip(u, B_j) \leqslant L \leqslant j \implies w_j = u = v_j$ na B_j, $x \notin N$. □

Lemma 3.24

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená konvexní, nechť $p > r$ a nechť $u \in W^{1,p}(U)$. Pokud x je Lebesgueův bod pro u, pak

$$|u(x) - \overline{u}_U| \leqslant C \cdot r^{1-\frac{n}{p}} \left(\int_U |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

kde $r = \operatorname{diam} U$ a $C = C(n, p, U)$.

Důkaz

$$|u(x)-\overline{u}_U| \leqslant c\cdot\int_U \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy \leqslant c\cdot\left(\int_U |Du|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_U \frac{1}{|x-y|^{\frac{np-p}{p-1}}}\right)^{1-\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c\cdot\left(\int_U |Du|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{B(x,r)} |x-y|^{\frac{(1-n)p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c\cdot(\ldots)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^r \underbrace{\overbrace{t^{\frac{1-np}{p-1}}}^{\approx r^{1-\frac{n-1}{p-1}}}\cdot t^{\frac{(n-1)\cdot(p-1)}{p-1}}}_{=t^{\frac{-n-1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \leqslant c\cdot(\ldots)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(r^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

□

Věta 3.25 (Morrey)

Nechť U je omezená otevřená konvexní a nechť $p>n$ a $u\in W^{1,p}(U)$. Pak u má spojitého reprezentanta. Navíc

$$osc_U u := \sup\{|u(x)-u(y)|, x,y\in U\} \leqslant c\cdot r^{1-\frac{n}{p}}\left(\int_U |Du|^p\right)^{\frac{1}{p}} = c\cdot r^{1-\frac{n}{p}}\cdot\|Du\|_p,$$

$$\sup_U u \leqslant C\cdot r^{1-\frac{n}{p}}\left(\int_U |Du|^p + r^{-p}|u|^p\right).$$

Důkaz

Pokud u má spojitého reprezentanta, potom každý bod $x\in U$ je Lebesgueův pro u. Pak platí první (a z $\sup u \leqslant \overline{u} + osc u$) i druhý odhad.

Najdeme $u_k\in C^\infty(U)$, $u_k\to u$ v $W^{1,p}(U)$. Druhý odhad $\implies$ konvergence v $W^{1,p}$ implikuje konvergenci v L^∞ a hledaná limita je náš reprezentant.

□

Věta 3.26

Nechť U je omezená otevřená konvexní, $p>n$ a $u\in W^{1,p}(U)$.

$$\|u\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}} = \sup_{x\neq y\in U}\frac{|u(y)-u(x)|}{|y-x|^{1-\frac{n}{p}}} \leqslant c\cdot\left(\int |Du|^p\right)^{\frac{1}{p}} = c\cdot\|Du\|_p.$$

Důkaz

$r = \operatorname{diam} U$. $\exists z \in U$ a $\varrho > 0$: $\forall B(w,s) \subset U : s \leqslant 2\varrho$. Pak $\frac{r}{\varrho}$ závisí pouze na tvaru U. Vybereme $x, y \in U$ a označme $t = \frac{|x-y|}{\varrho}$ ($t\varrho = |x-y|$). Pokud $t \geqslant 1$, pak stačí použít předchozí větu. Nechť tedy $t < 1$: $\varphi^x(w) = x + t(w-x)$, $\quad \varphi^y(w) = y + t\cdot(w-y)$,

$$U^x = \varphi^x(U), \quad U^y = \varphi^y(U), \qquad x^* = \varphi^x(z), \quad y^* = \varphi^y(z).$$

$$|y^* - x^*| = |y + t(z-y) - x - t(z-x)| = |1-t|\cdot|y-x| < t\cdot\varrho.$$

$$\varnothing \neq B(x^*, t\cdot\varrho) \cap B(y^*, t\cdot\varrho) \subset U^x \cap U^y.$$

$$|u(y) - u(x)| \leqslant c\cdot(osc_{U_x} u + osc_{U^y} u) \leqslant c\cdot(\operatorname{diam} U^x + \operatorname{diam} U^y)^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_p \leqslant$$
$$\leqslant c\cdot(t\cdot r)^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_p \leqslant C\cdot|x-y|^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_p.$$

□

Věta 3.27

Nechť $p > n$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Pak

$$\sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}} \leqslant c\cdot\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

a

$$\sup_{\mathbb{R}^n} u \leqslant c\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p + |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Navíc $u \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz

$z \in \mathbb{R}^n$, $u = B(z,1)$, $u(z) \leqslant c\cdot\left(\int_{B(z,1)} |Du|^p + |u|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n} \ldots\right)^{\frac{1}{p}}$. $u \in C_0(\mathbb{R}^n)$ je důsledkem hustoty testovaček v $W^{1,p}$ a vnoření $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$. □

Věta 3.28

$p > n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená, rozšiřitelná. Pak $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \overset{kompaktně}{\hookrightarrow} \mathbb{C}(\overline{\Omega})$.

Důkaz

$$\exists C : |u(x) - u(y)| \leqslant c\cdot|x-y|^{1-\frac{n}{p}} \qquad \forall x, y \in \Omega\ \forall u : \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Totiž jsou to funkce stejně stejnoměrně spojité a $\sup u \leqslant C$, tedy jsou stejně omezené. Použijeme Arzela-Ascoli (tj. $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ kompaktně).

$v(y) := u(y) - u(x) - Du(x)(y-x)$. x je p-Lebesgeův bod Du. Potom $\frac{|v(y)|}{r} \leqslant c\cdot \left(⨍ |Dv|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$. □

Věta 3.29 (Calderonova)

Nechť $p > n$ a buď $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Potom $\exists \nabla u = Du$ skoro všude.

Důkaz

Nechť x je p-Lebesgueův bod pro Du (to jsou skoro všechny). Zadefinujeme $v(y) = u(y) - u(x) - Du(x)(y - x)$.

$$\sup_{y \in B(x,r)} \frac{v(y)}{r} \leqslant c \cdot \left(\fint_{B(x,r)} |Dv|^p \right)^{1/p} = c \cdot \left(\fint_{B(x,r)} |Du - Du(x)|^p \right)^{1/p} \xrightarrow{r \to 0_+} 0.$$

□

4 Nespojitost

Poznámka

$p \in [1, n]$.

$\exists u \in W^{1,p}(B)$, $\nexists \nabla u$ na B. Dokonce každý reprezentant je nespojitý na v každém $x \in B$.

Věta 4.1

Nechť B je koule v $\mathbb{R}^n$. Existuje $u \in W^{1,n}(B)$ tak, že každá funkce spojitá alespoň v jednom bodě se liší od u na množině kladné míry.

Důkaz

$$\omega_{r,R}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant r, \\ \frac{\log|x| - \log R}{\log|x| - \log R}, & |x| \in (r,R), \\ 0, & |x| \geqslant R. \end{cases}$$

$\omega_{r,R}$ je Lipschitz $\exists \nabla\omega_{r,R} = D\omega_{r,R}$.

$$\omega_{r,R} \in W^{1,n}(B(0,R)), \qquad |Du|^n = \left|\frac{1}{|x|}\frac{1}{\log r - \log R}\right|^n, \qquad |x| \in (r,R).$$

$$\int_B |Du|^n \leqslant \left|\frac{C}{\log r - \log R}\right|^n \int_r^R \frac{t^{n-1}}{t^n} = |\log R - \log r|^{1-n} \overset{r\to 0_+}{\longrightarrow} 0.$$

Ať $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B$: $\{x_{2k-1}\}$ je hustá v B a $\{x_{2k}\}$ je hustá v B. Vyberme R_1 tak, že $B(x_1,R_1) \subset B$, a vyberme $r_1 = \frac{R_1}{2}$.

Předpokládejme, že máme vybrané r_j, R_j pro $j \in [k-1]$. Zvolme R_k, že $B(x_k,R_k) \subset B$ a $R_k^n < 2^{-k-j-1} r_j^n$ $\forall j \in [k-1]$ (tj. $\sum_{k=j+1}^{\infty} R_k^n < \frac{r_j^n}{2}$). $r_k : \|\nabla\omega_{r_k,R_k}\|_{L^n} < 2^{-k}$.

Definujme

$$u_k(x) = \begin{cases} \max(u_{k-1}(x), \omega_{r_k,R_k}(x - x_k)), & k \text{ liché}, \\ \min(u_{k-1}(x), \omega_{r_k,R_k}(x - x_k)), & k \text{ sudé}. \end{cases}$$

u_k je cauchyovská v $W^{1,n}(B)$. $\|Du_k - Du_{k-1}\|_{L^n} \leqslant 2^{-k}$. $u = \lim u_k$ v $W^{1,n}$. Mějme $B(x_k,R_k)$ díky „tj.“ máme $|\{u(x) = 1\} \cap B(x_k,R_k)| > 0$. Obdobně $u(x) = 0$.

Pro f spojitou v x najdi δ, že v $B(x,\delta)$ má f hodnoty v $(c - 1/3, c + 1/3)$, takže f nabývá maximálně jedné z hodnot $\{0,1\}$. Ale u nabývá druhé z těchto hodnot na množině kladné míry, tedy f a u se liší na množině kladné míry. □

Definice 4.1

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Řekneme, že u má singularitu typu A v bodě x, pokud $\overline{\lim}_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |u - \overline{u}_{B(x,r)}| > 0$. A řekneme, že u má singularitu typu B v bodě x, pokud $\nexists \lim_{r\to 0_+} \overline{u}_{B(x,r)}$ nebo $\lim_{r\to 0_+} \overline{u}_{B(x,r)} = \pm\infty$.

Věta 4.2

$p \in [1,n]$. *Nechť* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *a* A *budiž množina bodů singularit typu A. Potom* $\mathcal{H}^{n-p}(A) = 0$. *(pro* $n = p$ *je to* $A = \emptyset$*.)*

Důkaz
A_k: limita z definice singularity typu A $> \frac{1}{k}$. $A = \bigcup_k A_k$. Stačí $\mathcal{H}^{n-p}(A_n) = 0$ $\forall k$. Víme, že $\lambda^n(A_n) = 0$. Najdeme G otevřenou, že $G \supset A_k$, $\lambda^n(G)$ je libovolně malé. Najdeme $\{x_j\}$, $\{r_j\}$, $B(x_j, r_j)$ po dvou disjunktní, $⨍_{B_j} |u - \overline{u}| > \frac{1}{k}$. $G \subset \bigcup_j B(x_j, r_j)$.

$$r_j \left(⨍_{B(x_j,r_j)} |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant c \cdot \left(⨍ |u - \overline{u}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c \cdot r_j^{n-p} \int_{B(x_j,r_j)} |u - \overline{u}|^p \leqslant \int |Du|^p.$$

$$\frac{1}{k} \leqslant \left(⨍ |u - \overline{u}| \right)^{p \cdot \frac{1}{p}} \leqslant \left(⨍ |u - \overline{u}|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$r_j^{n-p} \leqslant C \cdot k^p \cdot r_j^{-p} \int_{B_j} |u - \overline{u}|^p \leqslant c \cdot k^p \int_{B_j} |Du|^p.$$

Sečteme přes j:

$$\mathcal{H}_\infty^{n-p}(A_k) \leqslant c \cdot k^p \cdot \int_G |Du|^p \xrightarrow{|G| \to 0} 0.$$

$\square$

Věta 4.3

Nechť $p \in [1, n]$ a $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Nechť E je množina singularit typu B, pak $\mathcal{H}^{n-p}(E) = 0$ $\forall q < p$.

Důkaz
Zvolme $\varepsilon > 0$, $z \in E : \lim_{r \to 0} \overline{u}_{B(z,r)} = \infty$. Najdeme $R = R(z) \in (0, 1)$. $B(z, R) \subset \Omega$.

$$\infty \leftrightarrow |u(x) - \overline{u}| \leqslant 2R \int_0^1 \left(⨍_{B(z,t \cdot R)} |Du| \right)^{p \cdot \frac{1}{p}}.$$

$$\infty = \int_0^R r^{-\frac{n}{p}} \left(\int_{B(z,r)} |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}} dr \leqslant$$

$$\leqslant \sup \left\{ r^{\frac{q-n}{p}} \left(\int_{B(z,r)} |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}, r \in (0, R) \right\} \int_0^R r^{-\frac{1}{p}} dr \implies$$

$\implies$ lze najít $r(z) \in (0, R)$: $r^{n-q} \leqslant \varepsilon \int_{B(z,r)} |Du|^p$.

$$B_j = B(x_j, r_j), \quad \bigcup 5B_j \supset E, \quad r_j^{n-q} \leqslant \varepsilon \int_{B_j} |Du|^p.$$

$$\mathcal{H}_\infty^{n-q}(E) \leqslant \varepsilon \int_\Omega |Du|^p \implies H^{n-q}(E) = 0$$

$\square$