Příklad
Pro která $a \in \mathbb{R}$ je zobrazení $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na?

$$f_a(x, y) = (ax + y, (3a + 4)x + ay)$$

Řešení
Aby zobrazení bylo na, musí ke každé dvojici $(B, C) \in \mathbb{R}^2$ existovat dvojice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tedy dostáváme SLR:

$$\begin{aligned} ax + y &= B \\ (3a + 4)x + ay &= C \end{aligned}$$

V případě $a = 0$ se $(x, y) = \left(\frac{C}{4}, B\right)$, tedy pro $a = 0$ je na. Jinak upravíme do odstupňovaného tvaru:

$$\begin{array}{rcl} ax+ \quad\quad y &=& B \\ 0x + \left(a - 3 - \dfrac{4}{a}\right)y &=& C - \left(3 + \dfrac{4}{a}\right)B \end{array}$$

Nutnou podmínkou nekonečně mnoha řešení SLR je, když $C - \left(3\frac{4}{a}\right)B = 0$, avšak když např. zvýšíme C o jedna a B nechám, výraz nulový už nebude (a naopak by SLR neměla řešení, pokud koeficient u y v druhém řádku bude 0), tedy tudy cesta nevede.

Jak víme, tato SLR bude mít 1 řešení, pokud koeficient u y v druhé rovnici bude nenulový. To nebude právě když:

$$a - 3 - \frac{4}{a} = 0$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \{4, -1\}$$

Tedy zobrazení je na pro $a \in \mathbb{R} - \{4, -1\}$

Příklad
Označme $O_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ osovou symetrii podle přímky p a $O_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ osovou symetrii podle přímky q.

$$p = \{(0,1) + t\,(1,0)\,|t \in \mathbb{R}\}\,, q = \left\{(x,y) \in R^2 | -x + y = 1\right\}$$

Příklad (a))
Najděte obraz bodu (x,y) při zobrazení O_p a při zobrazení O_q. (Zde stačí geometrický argument.)

Řešení
Zobrazení O_p je osová symetrie podle přímky $y = 1$, tedy každý bod posuneme o $(0,-1)$ zobrazíme v osové symetrii podle osy x ($(x,y) \to (x,-y)$) a posuneme zpět = o $(0,1)$. Tj. výsledné zobrazení je $(x,y) \to (x,y-1) \to (x,-y+1) \to (x,-y+2)$.

Zobrazení O_q je osová symetrie podle přímky, která je přímkou $x = y$ posunutou o $(0,1)$, tedy každý bod posuneme o $(0,-1)$ překlopíme podle $x = y$ ($(x,y) \to (y,x)$)[a] a posuneme zpět = o $(0,1)$. Tj. výsledné zobrazení je $(x,y) \to (x,y-1) \to (y-1,x) \to (y-1,x+1)$.

[a] Osová souměrnost podle $x = y$ zobrazuje osu x na osu y.

Příklad (b))
Najděte obraz bodu (x,y) při složených zobrazení $O_q \circ O_p$ a $O_p \circ O_q$.

Řešení
Zobrazení prostě složíme:

$$(O_q \circ O_p)(x,y) = O_q(O_p(x,y)) = O_q(x,-y+2) = (-y+2-1,x+1) = (1-y,x+1)$$

$$(O_p \circ O_q)(x,y) = O_p(O_q(x,y)) = O_p(y-1,x+1) = (y-1,-x-1+2) = (y-1,1-x)$$

Příklad (b)*)
Zkuste také (mimo soutěž) uhádnout, o jaká zobrazení se jedná, a odhad dokázat.

Řešení
Protože obě přímky prochází bodem $(0,1)$ tipl bych si, že složené zobrazení je rotace kolem bodu $(0,1)$ (a podle úhlu svíraného přímkami, že je o $\frac{\pi}{2}$). Dokážu to tím, že si převedu rovinu do komplexní roviny: $(x,y) \to x+iy$, posunu bod $(0,1)$ do počátku $(-i)$, orotuji o $\frac{\pi}{2}$ $(\cdot(\pm i))$ a vrátím počátek o bodu $(0,1)$ $(+i)$:

$$(x,y) \to x+iy \to x+i(y-1) \to ix+(-(y-1)) \to i(x+1)+(1-y) \to (1-y, x+1)$$

$$(x,y) \to x+iy \to x+i(y-1) \to -ix+(-(-(y-1))) \to i(-x+1)+(y-1) \to (y-1, 1-x)$$

A opravdu, dostanu obě složená zobrazení.