1 Úvod

Poznámka (Aplikace)
Transfinitní indukce, axiom výběru (= princip maximality = Zornovo lemma)

Poznámka (Cíl)
Vybudování matematiky na pevných základech. Porozumění nekonečen. Důkaz existence nealgebraických (= transcendentních) reálných čísel. Princip kompaktnosti. Banach-Tarského paradox.

Poznámka (Literatura)
Balcar, Štěpánek – Teorie množin
Seriál PraSete
Hrbáček, Jech – Introduction to set theory
Olšák – Esence teorie množin (videa)

Poznámka (Historie)
Bernard Bolzano (český matematik, 1781-1848, pojem množina), George Cantor (německý matematik, 1845 - 1918, zavedení aktuálního nekonečna, diagonální metoda, kardinální čísla, uzavřená množina), Bertrand Russell (1902, Russellův paradox = paradox holiče = holí holič holící všechny lidi, kteří se neholí sami, sebe?) + Berriho paradox (nechť m je nejmenší přirozené číslo, které nejde definovat méně než 100 znaky), Zermelo-Fraenkel (zavedli axiomatickou teorii množin).

Definice 1.1 (Symboly)

Proměnné pro množiny – $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$.

Binární predikátorový symbol = a bin. relační symbol $\in$.

Logické spojky $\neg, \vee, \wedge, \implies, \Leftrightarrow$.

Kvantifikátory $\forall, \exists$.

Závorky () {} []

Definice 1.2 (Formule)

Atomické ($x = y$, $x \in y$). Jsou-li φ a ψ formule, pak $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \implies \psi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jsou formule. Je-li φ formule, x proměnná, pak $(\forall x)\varphi$, $(\exists x)\varphi$ jsou formule. (Vázané vs. volné proměnné – proměnné formule, které do ní lze dosadit jsou volné, proměnné formule, které do ní nelze dosadit jsou vázané). Každou formuli lze dostat konečnou posloupností aplikací výše zmíněného.

Definice 1.3 (Rozšíření jazyka)

$x \neq y$ značí $\neg(x = y)$, $x \notin y$ znamená $\neg(x \in y)$, $x \subseteq y$ znamená $(\forall u)(u \in x \implies u \in y)$, $x \subset y$ značí $x \subseteq y \wedge x \neq y$. Dále uvidíme $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\emptyset$, $\{x \in a | \varphi(x)\}$.

Definice 1.4 (Axiomy logiky)

Vysvětlují, jak se chovají implikace, kvantifikátory, rovnost, …

Definice 1.5 (Axiomy TEMNA)

Říkají, jak se chová $\in$ a jaké množiny existují. Budeme používat Zermelo-Fraenkelovu teorii (ZF), tedy 9 axiomů (7 + 2 schémata). (Není minimální, tj. lze některé odvodit z jiných) + axiom výběru (AC) s ním se pak ZF značí ZFC.

Definice 1.6 (Axiomy ZFC)

1. Axiom existence množiny: $(\exists x)(x = x)$.
2. Axiom extenzionality: $(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \implies x = y$.
3. Schéma axiomů vydělení: je-li $\varphi(x)$ formule, která neobsahuje volnou proměnnou z, potom $(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x)))$ je axiom.
4. Axiom dvojice: $(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (x = a \vee x = b))$.
5. Axiom sumy: $(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a))$.
6. Axiom potence: $(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow x \subseteq a)$.
7. Schéma axiomů nahrazení[a] Je-li $\psi(u, v)$ formule s volnými proměnnými u, v, jež nemá volné proměnné w, z, pak

   $$(\forall u)(\forall v)(\forall w)((\psi(u,v) \wedge \psi(u,w)) \implies v = w) \implies (\forall a)(\exists z)(\forall v)(v \in z \Leftrightarrow (\exists u)(u \in a \wedge \psi(u,v)))$$

   je axiom.
8. Axiom fundovanosti (regularity): $(\forall a)(a \neq \emptyset \implies (\exists x)(x \in a \wedge x \cap a = \emptyset))$.

Později ještě:

- Axiom nekonečna
- Axiom výběru

[a] Slogan: Obraz množiny funkcí je množina.

Definice 1.7 (Značení)

$\{x|x \in a \wedge \varphi(x)\}$, zkráceně $\{x \in a|\varphi(x)\}$ je množina z axiomů vydělení.

Definice 1.8 (Průnik, množinový rozdíl, prázdná množina)

$a \cap b = \{x|x \in a \wedge x \in b\}$.

$a \setminus b = a - b = \{x|x \in a \wedge x \notin b\}$.

$\emptyset = \{x|x \in a \wedge x \neq x\}$. ($\emptyset$ je díky prvním třem axiomům dobře definována.)

Definice 1.9 (Neuspořádaná a uspořádaná dvojice)

$\{a, b\}$ je neuspořádaná dvojice, $\{a\}$ znamená $\{a, a\}$.

$(a, b) = < a, b > = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ je uspořádaná dvojice.

Lemma 1.1

$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow (x = u \wedge y = v)$.

Důkaz

$\Leftarrow$ $x = u$, pak $\{x\} = \{u\}$ z axiomu extenzionality, stejně tak $\{x, y\} = \{u, v\}$, a tedy $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

$\Longrightarrow$ $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ pak $\{x\} = \{u\}$ nebo $\{x\} = \{u, v\}$, každopádně $x = u$. Nyní $\{u, v\} = \{x\}$ nebo $\{u, v\} = \{x, y\}$ tedy $v = x$ nebo $v = y$. Pokud $v = y$, tak jsme skončili, pokud $v = x$ pak $v = u = x = y$. $\square$

Definice 1.10 (Potenční množina)

$\mathcal{P}(a) = \{x|x \subseteq a\}$ je potenční množina (potence) a (z axiomu potence).

Definice 1.11 (Uspořádaná n-tice)

Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n$ množiny, definujeme uspořádanou n-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = < \ldots >$ následovně: $(a_1) = a_1$, je-li definovaná $(a_1, \ldots, a_k)$, pak $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}) = ((a_1, a_2, \ldots, a_k), a_{k+1})$.

Lemma 1.2

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n)$.

Důkaz

Domácí cvičení. $\square$

Definice 1.12 (Značení)

$$\bigcup a = \{x | (\exists y)(x \in y \wedge y \in a\} .$$

Definice 1.13

Pro $a = \{b, c\}$ definujeme $b \cup c = \bigcup a$.

Definice 1.14 (Neuspořádaná n-tice)

Neuspořádanou n-tici $\{a_1, \ldots, a_n\}$ (n-prvkovou množinu) definujeme rekurzivně: je-li definováno $\{a_1, \ldots, a_k\}$, pak $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\} = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{a_{k+1}\}$.

Poznámka
Axiom nahrazení se využívá v: transfinitní rekurzi, definici $\omega + \omega$, větě o typu dobrého uspořádání, Zornově lemmatu (tj. axiom výběru).

Příklad
Ukažte, že axiom fundovanosti zakazuje existenci konečných cyklů relace $\in$ (tj. takových množin y, pro které $y \in . \in \ldots \in . \in y$).

Důsledek
Všechny množiny lze vygenerovat z $\emptyset$ pomocí operací $\bigcup$ a $\mathcal{P}$ (zhruba).

1.1 Třídy

Definice 1.15

Nechť $\varphi(x)$ je formule, pak $\{x, \varphi(x)\}$ (čteme třída všech x, pro které platí $\varphi(x)$), tzv. třídový term, se nazývá třída (určená formulí x).

Důsledek
Pokud $\varphi(x)$ je tvaru $x \in a \wedge \varphi(x)$, pak je $\{x, \varphi(A)\}$ množina z axiomu vydělení. Obdobně pro axiom dvojice, sumy, ...

Poznámka
Je-li y množina, pak y má stejné prvky jako třída $x, x \in y \wedge x = x$.

Poznámka (Vlastní třídy)
Existují i třídy (tzv. vlastní), které nejsou množiny (např. třída všech množin).

Definice 1.16 (Rozšíření jazyka)

Ve formulích na místech volných proměnných připustíme i Třídové termy a proměnné pro třídy (psané velkými písmeny). (Avšak je nebude možné kvantifikovat!)

Definice 1.17 (Eliminace (nahrazování) třídových termů)

x, y, z, X, Y proměnné (3 množinové + 3 třídové), $\varphi(x)$, $\psi(y)$ formule základního jazyka, X zastupuje $\{x, \varphi(x)\}$ a Y $\{y, \varphi(y)\}$.

$$z \in X \text{ (schéma formulí pro obecné } X\text{) zastupuje } z \in \{x, \varphi\} \text{ nahradíme } \varphi(z).$$

$$z = \{X\} \text{ zastupuje } z = \{x, \varphi(x)\} \text{ nahradíme } (\forall u)(u \in z \Leftrightarrow \varphi(u)).$$

$$X \in Y \text{ zastupuje } \{x, \varphi(x)\} \in \{y, \varphi(y)\} \text{ nahradíme } (\exists u)(u = \{x, \varphi(x)\}) \wedge u \in \{y, \psi(y)\}\,.$$

$$X \in y \text{ analogicky předchozí.}$$

$$X = Y \ldots\ldots\ldots\ldots (\forall u)(\varphi(u) \Leftrightarrow \psi(u)).$$

Poznámka
Třídy s rozšířenou formulí nepřináší díky eliminaci nic nového.

Definice 1.18 (Třídové operace)

$A \cap B$ je $\{x, x \in A \wedge x \in B\}$, $A \cup B$ je $\{x, x \in A \vee B\}$, $A \setminus B = A - B = \{x, x \in A \wedge x \notin B\}$.

Definice 1.19 (Univerzální třída, doplněk)

$\{x, x = x\}$ je tzv. univerzální třída a značí se V.

Buď A třída, pak (absolutní) doplněk A je $V - A$, který se značí $-A$.

Definice 1.20 (Inkluze)

$A \subseteq B$ $(A \subset B)$ značí „A je (vlastní) částí (= podtřídou) B“.

Definice 1.21 (Suma a průnik)

$\bigcup A$ značící sumu třídy A je třída $\{x, (\exists a)(a \in A \wedge x \in a)\}$. $\bigcap A$ značící průnik třídy A je třída $\{x, (\forall a)(a \in A \rightarrow x \in a)\}$.

Lemma 1.3

V není množina.

Důkaz

Cvičení. $\square$

Lemma 1.4

Je-li A třída, a množina, pak $a \cap A$ je množina.

Důkaz

V podstatě axiom vydělení. $\square$