1 Řady

1.1 Úvod

Definice 1.1

Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost. Číslo $s_m = a_1+a_2+\ldots+a_m$ nazveme m-tým částečným součtem řady $\sum a_n$. Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, pokud tato limita existuje. Je-li tato limita konečná, pak řekneme, že řada je konvergentní. Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je divergentní. Tuto limitu budeme značit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 1.1 (Nutná podmínka konvergence)

Jestliže je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m = s \in \mathbb{R}$. $a_n = s_n - s_{n-1}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$ □

Pozor
Tato věta je pouze a jen implikace.

Věta 1.2 (konvergence součtu řad)

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\cdot a_n$ konverguje.

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Důkaz
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\exists$ limita z $s_m \to s \in \mathbb{R}$ a to je z AL právě tehdy, když konverguje $\alpha s_m \to \alpha\cdot s \in \mathbb{R}$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\cdot a_n$ konverguje.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma \in \mathbb{R}$ konvergují, tedy i $s_m + \sigma_m \to s+\sigma \in \mathbb{R}$ konverguje. □

1.2 Řady s nezápornými členy

Pozorování
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je řada s nezápornými členy. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, nebo má součet $+\infty$.

Důkaz
$s_m = a_1 + \ldots + a_m \leq a_1 + \ldots + a_{m+1} = s_{m+1}$. $s_m \geq 0$ neklesající $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m \in [0, \infty]$. □

Věta 1.3 (Srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak

a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

Důkaz
a) Označme $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ a $\sigma_n = b_1 + \ldots + b_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$s_n = a_1 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n \leq a_1 + \ldots + a_{n_0} + b_{n_0+1} + \ldots + b_n \leq$$

$$\leq a_1 + \ldots + a_{n_0} + \sigma_n \leq a_1 + \ldots + a_{n_0} + \sigma$$

A to je konečné, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tedy $\sigma \in \mathbb{R}$. s_n neklesající a omezená $\implies \exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$.

b) Nepřímím důkazem z a). □

Věta 1.4 (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže $A \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Jestliže $A = 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Jestliže $A = \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Důkaz
(i) Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in (0,\infty)$ plyne, k $\varepsilon = \frac{K}{2}$ $\exists n_0$ $\forall n \geq n_0$: $\left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon = \frac{K}{2}$, tedy $\frac{K}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}K$.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\overset{\text{k. součtu řad}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}K \cdot b_n$ konverguje $\wedge$ $a_n \leq \frac{3}{2}K \cdot b_n$ $\overset{\text{Srov. kritérium}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\wedge \frac{K}{2} \cdot b_n \leq a_n$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{2} \cdot b_n$ konverguje $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

(ii) Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ plyne, k $\varepsilon = 1$ $\exists n_0$ $\forall n \geq n_0$: $\left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon = 1$, tedy $a_n < b_n$, a pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle srovnávacího kritéria.

(iii) Úplně stejně jako (ii). □

Věta 1.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, potom

$$(i) \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(iv) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje},$$

$$(v) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje}.$$

Důkaz
(*i*) $b_n = q^n$. Víme, že $a_n < b_n\ \forall n \geq n_0$, tedy použijeme srovnávací kritérium.

(*i*) $\implies$ (*ii*) : $b_n = \left\{ \sqrt[n]{a_n}, \sqrt[n+1]{a_n}, \ldots \right\}$. $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}_n < 1$. Nalezneme $q \in \left(\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, 1\right)$. Z definice $\lim_{n\to\infty} b_n$ pro $\varepsilon = q - \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ je $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : b_n < q$, tedy $\forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q$, tedy podle (*i*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(*ii*) $\implies$ (*iii*) : $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \implies \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, tedy podle (*ii*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(*iv*) : podobně jako v (*i*) $\implies$ (*ii*) dostaneme $\forall n_0 > n_k : b_{n_0} > q > 1$, tedy $\forall n_0\ \exists n > n_0 : \sqrt[n]{a_n} > q > 1 \implies a_n > 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tedy podle nutné podmínky konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(*iv*) $\implies$ (*v*) : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. □

Věta 1.6 (d'Alambertovo podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Potom:

$$(i) \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(iv) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje},$$

Důkaz
(*i*) Víme indukcí $a_{n_0+k} < q^k a_{n_0}$ a z konvergence geometrické řady $\sum_{k=1}^{\infty} q^k a_n$ konverguje $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(*i*) $\implies$ (*ii*): $b_n = \sup\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}, \dots\right\}$. $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Zvolíme $q \in (\lim_{n\to\infty} b_n, 1)$. Tedy $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : b_n < q \implies \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, tudíž podle (*i*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(*ii*) $\implies$ (*iii*) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, tedy podle (*ii*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(*iv*): Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ definicí limity pro $\varepsilon < \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1$ vyplývá $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies a_{n+1} > a_n$. Máme rostoucí posloupnost kladných čísel $\implies \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tedy podle nutné podmínky konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. □

Věta 1.7 (Kondenzační kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy splňující $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ konverguje.

Důkaz
Pro $k \in \mathbb{N} : s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j\ t_k = \sum_{j=0}^{k} 2^j \cdot a_{2^j}$.

$\Leftarrow$: Označme $A = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \cdot a_{2^j}$, pak $A \in \mathbb{R}$. Nechť $m \in \mathbb{N}$ a nalezneme $k \in \mathbb{N}$, $m < 2^k$. Pak $t_k \leq A$ a:

$$s_m \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + (a_{2^{k-1}} + \ldots + a_{2^k - 1}) \leq t_{k-1} \leq A.$$

Tedy s_m je shora omezená a rostoucí $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m \in \mathbb{R} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\implies$: Označme $B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$ a nalezneme $m \in \mathbb{N}$, aby $2^k \leq m$. Pak $s_m \leq B$ a platí:

$$s_m \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \geq$$

$$\geq a_1 + \frac{1}{2}(t_k - 1 \cdot a_1) \geq \frac{1}{2} t_k \implies t_k \leq 2 \cdot B.$$

t_k je shora omezená rostoucí posloupnost $\implies \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. □

1.3 Neabsolutní konvergence řad

Definice 1.2

Nechť pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Věta 1.8 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci řad)

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když je splněna následující podmínka:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 : \left| \sum_{n=j}^{m} a_n \right| < \varepsilon.$$

Důkaz

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \overset{\text{BC}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 :$ $|s_m - s_{n-1}| < \varepsilon$. Což je přesně výraz (po odečtení $s_m - s_{n-1}$) ve větě. □

Věta 1.9 (Vztah konvergence a absolutní konvergence)

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Důkaz

Z BC podmínky: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 : \sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon$. Chceme dokázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Stačí ověřit BC podmínku. K $\varepsilon > 0$ volme n_0 jako výše, pak $\forall m, n \geq n_0 : \left| \sum_{j=n}^{m} a_j \right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j| \leq \varepsilon \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. □

Věta 1.10 (Leibnitzovo kritérium (T5.10))

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel, pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz

$\implies$: z nutné podmínky (V5.1) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot a_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\Leftarrow$: $s_{2k+2} - s_{2k} = (-1)^{2k+2} \cdot a_{2k+2} + (-1)^{2k+1} \cdot a_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0 \implies s_{2k}$ je nerostoucí. Obdobně $s_{2k+1} - s_{2k-1} = a_{2k+1} - a_{2k} \geq 0 \implies s_{2k+1}$ je neklesající. Navíc $s_2 k = (-a_1 + a_2) + \ldots + (-a_{2k-1} + a_{2k}) \leq 0 + \ldots + 0 = 0$. Analogicky $s_{2k+1} \geq -a_1$.

Nyní $0 \geq s_{2k} = s_{2k+1} + a_{2k+1} \geq -a_1 + a_{2k+1} \geq -a_1$. Analogicky $-a_1 \leq s_{2k+1} \leq 0$. Tedy obě vybrané podposloupnosti jsou omezené a monotónní, tedy konvergují. $\lim_{n\to\infty} s_{2k} = S_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = S_2 \in \mathbb{R}$. Navíc

$$S_2 = \lim_{n\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2k} - a_{2k+1} \overset{\text{AL}}{=} S_1 - 0 = S_1.$$

Tedy jelikož existuje limita sudých i lichých členů a rovnají se, existuje i limita s_n. □

Lemma 1.11 (Abelova parciální sumace)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $m \leq n$ a nechť $a_m, \ldots, a_n, b_m, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Označme $s_k = \sum_{i=m}^{k} a_i$. Pak *platí*

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i = \sum_{i=m}^{n} s_i \cdot (b_i - b_{i+1}) + s_n \cdot b_n.$$

Důkaz

$$= a_m \cdot b_m + a_{m+1} \cdot b_{m+1} + \ldots + a_n \cdot b_n = s_m \cdot b_m + (s_{m+1} - s_m) \cdot b_{m+1} + \ldots + (s_n - s_{n-1}) \cdot b_n =$$
$$= \sum_{i=m}^{n} s_i \cdot (b_i - b_{i+1}) + s_n \cdot b_n.$$

$\square$

Věta 1.12 (Abel-Dirichletovo kritérium)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní. (D)* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má omezené částečné součty (tj.* $\exists K > 0\ \forall m \in \mathbb{N} : |s_m| = |\sum_{n=1}^{m} a_n| < K$*).*

Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ *konvergentní.*

Důkaz
Podle V 5.8 budeme ověřovat BC podmínku pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$. Označme $s_k = \sum_{n=m}^{k} a_n$. b_n je nerostoucí a $b_n > 0 \implies \forall i : b_i - b_{i+1} \geq 0$ a $\exists K\ \forall n : |b_n| \leq K$.

(A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

$$\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall i \geq m \geq n_0 : |\sum_{n=m}^{i} a_n| = |s_i| < \varepsilon.$$

Nyní k $\varepsilon > 0$ volme n_0 jako výše a nechť $n \geq m \geq n_0$:

$$|\sum_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i| \overset{\text{Abel PS}}{\leq} \sum_{i=m}^{n-1} |s_i \cdot (b_i - b_{i+1})| + |s_n| \cdot |b_n| \leq \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (b_i - b_{i+1}) + \varepsilon \cdot b_n = \varepsilon \cdot (b_m - b_n) + \varepsilon \cdot b_n$$
$$\leq \varepsilon \cdot K.$$

A podle BC podmínky máme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konverguje.

(D) Z předpokladů víme, že $\exists M > 0\ \forall i \geq m : |s_i| = |\sum_{n=1}^{i} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n| \leq M$ (volme $M = 2K$). Z $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ k $\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |b_n| < \varepsilon$. Nyní

$$\forall n \geq m \geq n_0 : |\sum_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i| \leq \sum_{i=m}^{n-1} |s_i(b_i - b_{i+1})| + |s_n| \cdot |b_n| \leq \sum_{i=m}^{n-1} M \cdot (b_i - b_{i+1}) + M \cdot b_n =$$
$$= M \cdot (b_m - b_n) + M \cdot b_n \leq M \cdot \varepsilon.$$

A podle BC podmínky máme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konverguje. □

Příklad
$\sin n$ a $\cos n$ má omezené částečné součty.

Důkaz
Buď sečtením $\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n =$ vzoreček.

Nebo dokážeme dokonce $\forall x \neq 2k\pi$ $\sin nx$ a $\cos nx$ má omezené částečné součty.

$$e^i x = \cos x + i \cdot \sin x \implies \sum_{k=0}^{n} e^{i \cdot k \cdot x} = \sum_{k=0}^{n} \cos k \cdot x + i \cdot \sum_{k=0}^{n} \sin k \cdot x.$$

Z geometrické řady ale víme, že

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i \cdot k \cdot x} = \frac{1 - \left(e^{ix}\right)^{n+1}}{1 - e^{ix}} = \frac{1 - \cos x \cdot (n+1) - i \cdot \sin x \cdot (n+1)}{1 - \cos x - i \sin x} \cdot \frac{1 - \cos x + i \cdot \sin x}{1 - \cos x + i \cdot \sin x} =$$

$$= \frac{A_n \cdot B}{(1 - \cos x)^2 + (\sin x)^2}.$$

Zřejmě $|A_n| \leq 3$ a $|B| \leq 3$, jmenovatel je nenulový a není závislý na n, tedy pro všechna n je výraz omezen konstantou. $\square$

1.4 Přerovnání a součin řad

Definice 1.3 (Přerovnání řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ nazýváme přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 1.13 (O přerovnání absolutně konvergentní řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolutně konvergentní řada a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ *je její přerovnání. Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ *je absolutně konvergentní a má stejný součet.*

Důkaz
$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje $\implies$ splňuje BC podmínku. Tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq m \geq n_0 | \sum_{i=n}^{m} a_i | < \varepsilon \implies \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq \varepsilon.$$

Zvolme $n_0' = \max \{p^{-1}(1), p^{-1}(2), \ldots, p^{-1}(n_0)\}$. Pak $\forall n' \geq n_0' : p^{-1}(n') \geq n_0$. Tedy

$$\forall n' \geq m' > n_0' : \sum_{i=m'}^{n'} |a_{p(i)}| \leq \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| < \varepsilon.$$

Tedy podle BC podmínky $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{p(n)}|$ konverguje, tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ konverguje.

Konverguje přerovnání k tomu samému? $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = A'$. K $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq \varepsilon$. Zvolme $n_0' \geq \max_{i \leq n_0} p(i)$, aby $\sum_{i=n_0'}^{\infty} |a_{p(i)}| \leq \varepsilon$. Pak $| \sum_{i=1}^{n_0} a_i - A| \leq \varepsilon$ a $| \sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)} - A'| \leq \varepsilon$. Nyní

$$|A - A'| \leq | \sum_{i=1}^{n_0} a_i - A| + | \sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)} - A'| + | \sum_{i=1}^{n_0} a_i - \sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)}| \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq 3\varepsilon$$

$\square$

Věta 1.14 (Riemann)

Neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat k libovolnému součtu $s \in \mathbb{R}^*$.

Důkaz
Bez důkazu (idea: rozdělíme na kladné a záporné členy (mají součty $+\infty$ a $-\infty$) a jdeme nahoru dolu nahoru dolu (vždy alespoň o 1 prvek), abychom se co nejvíce blížili s). $\square$

Definice 1.4 (Cauchyovský součin)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady. Cauchyovským součinem těchto řad nazveme řadu $\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{k-1} (a_{k-i} \cdot b_i)$.

Věta 1.15 (O součinu řad)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují absolutně. Pak

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{k-1} (a_{k-i} \cdot b_i).$$

Důkaz
Ať $s_n = \sum_{i=1}^n a_i \to A \in \mathbb{R}$, $\sigma_n = \sum_{i=1}^n b_i \to B \in \mathbb{R}$ a $\varrho_n = \sum_{k=2}^n \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i} b_i\right) \overset{\text{Chceme}}{\to} A \cdot B \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak $\exists n_0 : \sum_{i=n_0}^\infty |a_i| < \varepsilon$ a $\sum_{j=n_0}^\infty |b_j| < \varepsilon$ (z BC podmínky) a zároveň $|s_{n_0} \cdot \sigma_{n_0} - A \cdot B| < \varepsilon$. Nechť $n \geq 2n_0$, pak

$$|\varrho_n - A \cdot B| \leq |\varrho_n - s_{n_0} \cdot \sigma_{n_0}| + |s_{n_0} \cdot \sigma_{n_0} - A \cdot B| \leq$$

$$\leq |(a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \ldots + (a_{n-1} \cdot b_1 + \ldots + a_1 \cdot b_{n-1}) - (a_1 + \ldots + a_{n_0}) \cdot (b_1 + \ldots + b_{n_0})| + \varepsilon \leq$$

$$\leq \sum_{i \geq n_0 \vee j \geq n_0} |a_i b_j| + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^\infty |a_i| \cdot \sum_{j=n_0}^\infty |b_j| + \sum_{i=n_0}^\infty |a_i| \cdot \sum_{j=1}^\infty |b_j| + \varepsilon \leq A\varepsilon + B\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon \cdot \text{konst.}$$

□

1.5 Limita posloupnosti a součet řady v $\mathbb{C}$

Definice 1.5

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ jsou dvě reálné posloupnosti. Pak $c_n = a_n + ib_n$ je komplexní posloupnost.

Řekneme, že $\lim_{n\to\infty} c_n = A + iB$, pokud existují $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

Definice 1.6

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ jsou dvě reálné posloupnosti a $c_n = a_n + ib_n$. Řekneme, že komplexní řada $\sum_{n=1}^\infty c_n$ konverguje k $A + iB$, pokud konvergují řady $\sum_{n=1}^\infty a_n = A$ a $\sum_{n=1}^\infty b_n = B$.

Věta 1.16 (Vztah konvergence a absolutní konvergence pro komplexní řady)

Nechť $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ je komplexní posloupnost a řada $\sum_{n=1}^\infty |c_n|$ konverguje. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty c_n$ konverguje.

Důkaz
Z BC podmínky pro konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m \geq n \geq n_0 : \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon.$$

Víme $c_n = a_n + ib_n$. Nyní $\forall m \geq n \geq n_0$:

$$\sum_{j=n}^{m} |a_j| \leq \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon \wedge \sum_{j=n}^{m} |b_j| \leq \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ splňují BC podmínku, tedy konvergují. Podle V5.9 (vztah K a AK), tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, tedy konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. □

2 Primitivní funkce

2.1 Základní vlastnosti

Definice 2.1 (Primitivní funkce, integrál)

Nechť je funkce f definována na otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je primitivní funkce k funkci f, pokud pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a $F'(x) = f(x)$.

Množinu všech primitivních funkcí k f na I značíme $\int f(x)\, dx$

Věta 2.1 (O jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu)

Nechť F a G jsou primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro všechna $x \in I$.

Důkaz
Označme $H(x) = F(x) - G(x)$. Pak $(H(x))' = (F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$. Tedy (např. z Lagrangeovy věty) $\exists c \in \mathbb{R} : H(x) = c$ na I. □

Poznámka
Značíme $\int f(x)\, dx = F(x) + C$. Nechť F je primitivní funkce k f. Pak F je spojitá (protože má všude vlastní derivaci).

Věta 2.2 (O vztahu spojitosti a existence primitivní funkce)

Nechť I je otevřený interval a f je spojitá funkce na I. Pak f má na I primitivní funkci.

Důkaz
Později. □

Věta 2.3 (Linearita primitivní funkce)

Nechť f má primitivní funkci F a g má primitivní funkci G na otevřeném intervalu I a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ má primitivní funkci $\alpha F + \beta G$.

Důkaz

$$(\alpha \cdot F(x) + \beta \cdot G(x))' \overset{\text{AD}}{=} \alpha \cdot F'(x) + \beta \cdot G'(x) = \alpha \cdot f + \beta \cdot g.$$

□

Poznámka (Tabulkové integrály)

- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, ((x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}) \vee (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}))$.
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + C, (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.
- $\int e^x \, dx = e^x + C, (x \in \mathbb{R})$.
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C,\ (x \in \mathbb{R})$.
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C,\ (x \in \mathbb{R})$.
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C,\ (x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z})$.
- $\int \frac{1}{-\sin^2 x} \, dx = \operatorname{cotg} x + C,\ (x \in (0, \pi) + k\pi, k \in \mathbb{Z})$.
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C,\ (x \in \mathbb{R})$.
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C,\ (x \in (-1, 1))$.
- $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x + C,\ (x \in (-1, 1))$.

Věta 2.4 (Nutná podmínka existence primitivní funkce)

Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Pak f má na I Darbouxovu vlastnost, tedy pro každý interval $J \subseteq I$ je $f(J)$ interval.

Důkaz
Nechť $J \in I$ je interval. Nechť $y_1, y_2 \in f(J)$ a $y_1 < z < y_2$. Chceme ukázat $z \in f(J)$. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I. Definujeme $H(x) = F(x) - z \cdot x$ pro $x \in I$. Pak H je spojitá na I a $\forall x \in I : (H(x))' = f(x) - z$. Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ tak, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Nechť $x_1 < x_2$, v opačném případě je důkaz analogický. Funkce H je spojitá na $[x_1, x_2]$, a tedy tam nabývá minima.

Víme $H'(x_1) = f(x_1) - z < f(x_1) - y_1 = 0$, tedy $\exists \delta > 0$, že $\forall x \in [x_1, x_1 + \delta], H(x) < H(x_1)$, tedy v x_1 není minimum. Obdobně v x_2 není minimum. Tedy minimum je v $x_0 \in (x_1, x_2) \overset{\text{Fermat}}{\Longrightarrow} 0 = H'(x_0) = f(x_0) - z$, tj. $f(x_0) = z$. □

Věta 2.5 (Integrace per partes)

Nechť I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I. Nechť F je primitivní k f a G je primitivní k g na I. Pak platí $\int g(x) \cdot F(x)\, dx = G(x) \cdot F(x) - \int G(x) \cdot f(x)\, dx$ na I.

Důkaz
G je spojitá, tedy $G(x) \cdot f(x)$ je spojitá (tedy integrál vpravo existuje). Mějme funkci $G \cdot F - H$, kde H je primitivní k $G \cdot f$, pak

$$(G(x) \cdot F(x) - H(x))' = g(x) \cdot F(x) + G(x) \cdot f(x) - G(x) \cdot f(x) = g(x) \cdot F(x),$$

neboli $\int g(x) \cdot F(x)\, dx = G(x) \cdot F(x) - H(x)$. □

Věta 2.6 (1. o substituci)

Nechť F je primitivní funkce k f na a, b. Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t))$ na (α, β).

Důkaz
Podle věty o derivaci složené funkce

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \forall t \in (\alpha, \beta).$$

□

Věta 2.7 (2. o substituci)

Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu α, β vlastní nenulovou derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = G(t)$ ne (α, β). Pak $\int f(x)\, dx = G(\varphi^{-1}(x))$ na (a, b).

Důkaz
Podle V6.4 φ' nabývá mezihodnot (a je všude nenulová), tudíž φ' je na (α, β) buď kladná nebo záporná a φ je tím pádem ryze monotónní a spojitá. Tedy lze použít větu o derivaci inverzní funkce a dostaneme $(\varphi^{-1}(x)) = \frac{1}{\varphi'(\varphi(x))}$. Nyní na (a, b)

$$(G(\varphi^{-1}(x)))' = G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x).$$

□

2.2 Integrace racionálních funkcí

Definice 2.2 (Racionální funkce)

Racionální funkcí rozumíme podíl dvou polynomů $\frac{P}{Q}$, kde Q není nulový polynom.

Věta 2.8 (Základní věta algebry)

Nechť $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 x^0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Pak existují $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ tak, že $P(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$, $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 2.9 (O komplexních kořenech polynomu)

Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $z \in \mathbb{C}$ je kořen P násobnosti $k \in \mathbb{N}$. Pak i $\overline{z}$ je kořen násobnosti k.

Důkaz
Nejprve pozorování: $(\overline{z})^k = \overline{z^k}$ (dokážeme přes goniometrický tvar).

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. $k = 1$: z je kořen, tj. $P(z) = 0 = \overline{P(z)} = \overline{a_n \cdot z^n + \ldots + a_0 z^0} = a_n \overline{z^n} + \ldots + a_0 \overline{z^0} = P(\overline{z}) \implies \overline{z}$ je kořen. Dále předpokládejme, že $z \notin \mathbb{R}$ (jinak je důkaz triviální.)

Nyní nechť tvrzení platí pro $k-1$ a z je kořen násobnosti alespoň k, potom z IP víme, že $\overline{z}$ je $k-1$násobný kořen. Tedy $P(x) = (x - z)^{k-1} \cdot (x - \overline{z})^{k-1} \cdot Q(x) = (x^2 - (z + \overline{z}) \cdot x + z \cdot \overline{z})^{k-1} \cdot Q(x)$, tedy Q má reálně koeficienty a $Q(z) = 0$. Podle 1. kroku indukce je tudíž $\overline{z}$ kořenem Q, tedy $k$násobným kořenem P. □

Věta 2.10 (O rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že stupeň P je ostře menší než stupeň Q a $Q(x) = a_n \cdot (x - x_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{p_k} \cdot (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$, kde $a_n, x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, $p_1, \ldots, p_k, q_1, q_l \in \mathbb{N}$, žádné dva z mnohočlenů nemají společný kořen a mnohočleny $x^2 + \alpha_i x + \beta_i$ nemají reálný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla $A^i_j \in \mathbb{R}$, $i \in [k]$, $j \in [p_i]$ a $B^i_j, C^i_j \in \mathbb{R}$, $i \in [l]$,

$j \in [q_i]$ tak, že platí:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x - x_1} + \ldots + \frac{A_{p_1}^1}{(x - x_1)^{p_1}} + \ldots + \frac{A_1^k}{x - x_k} + \ldots + \frac{A_{p_k}^k}{(x - x_k)^{p_k}} + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^1} + \ldots.$$

Důkaz
Bez důkazu (velmi obtížný a docela zbytečný). □

Poznámka (Postup při integraci racionální funkce)

1. Vydělit polynomy.
2. Rozklad na parciální zlomky podle předchozí věty.
3. Integrace parciálních zlomků.

2.3 Substituce, převádějící na racionální funkce

Viz přednáška. ($R(e^{ax}) \to t = e^{ax}, R(\log x) \cdot \frac{1}{x} \to t = \log(x)$).

2.4 Integrace trigonometrických funkcí

Definice 2.3 (Racionálni funkce 2 proměnných)

Racionální funkcí dvou proměnných rozumíme podíl dvou polynomů $R(a, b) = \frac{P(a,b)}{Q(a,b)}$, kde $P(a, b)$ a $Q(a, b)$ jsou polynomy dvou proměnných a Q není identicky nulový.

Poznámka
Při integraci funkcí $R(\sin x, \cos x)$ používáme substituce:

- Pokud $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak používáme $t = \cos x$.
- Pokud $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak používáme $t = \sin x$.
- Pokud $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pak používáme $t = \tan x$.
- Vždy funguje $t = \tan \frac{x}{2}$. (Nepoužívat není-li nutné, těžký výpočet!)

2.5 Integrace funkcí obsahujících odmocniny

Viz přednáška. ($q \in \mathbb{N}, ad \neq bc, R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}) \to t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}$).

Poznámka (Eulerovy substituce)
Nechť $a \neq 0$. Při integraci funkcí typu $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ používáme substituce:

- polynom ax^2+bx+c má dvojnásobný kořen a $a > 0$, pak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-\alpha|$ a řešíme na $x > \alpha$ a $x < \alpha$ jako racionální funkce.
- polynom ax^2+bx+c má dva reálné kořeny α_1 a α_2. Pak úpravou převedeme na tvar $\sqrt{a\frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}}$ nebo $\sqrt{a \cdot \frac{\alpha_1-x}{x-\alpha_2}}$.
- polynom ax^2+bx+c nemá reálný kořen a $a > 0$. Pak používáme substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot x + t.$$

Pozor
Substituce $\tan x$, $\tan\frac{x}{2}$ a poslední předchozí jsou substituce 2. druhu a je vždy potřeba ověřit, že vnitřní funkce je monotónní a na.

3 Určitý integrál

3.1 Riemannův integrál

Definice 3.1 (Dělení, zjemnění dělení)

Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme dělením intervalu $[a, b]$, jestliže $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Řekneme, že dělení D' intervalu $[a, b]$ zjemňuje dělení D intervalu $[a, b]$, jestliže každý bod dělení D je i bodem dělení D'.

Definice 3.2 (Horní a dolní součty, Riemanovy integrály)

Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a D je dělení $[a, b]$, definujme horní a dolní součty

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-i}),$$

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-i}).$$

Horní a dolní Riemannův integrál definujeme jako

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf\left\{S(f,D)|D \text{ je dělení } [a,b]\right\},$$

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\left\{s(f,D)|D \text{ je dělení } [a,b]\right\}.$$

Definice 3.3

Řekneme, že f je Riemanovsky integrovatelná, jestliže $(R)\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = (R)\overline{\int_a^b} f(x)\, dx$. Tuto hodnotu pak označujeme $(R)\int_a^b f(x)\, dx$.

Množinu funkcí mající Riemannův integrál značíme $R([a,b])$.

Poznámka
Omezenost f je nutnou podmínkou.

Věta 3.1 (O zjemnění dělení)

Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$, D a D' jsou dělení intervalu $[a,b]$ a D' zjemňuje D. Pak $s(f,D) \leq s(f,D') \leq S(f,D') \leq S(f,D)$.

Důkaz
Prostřední nerovnost je triviální z $\sup \geq \inf$.

Předpokládejme, že $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ a $D' = \left\{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, z, x_{x_j}, \dots, x_n\right\}$. Pak

$$\inf\left\{f(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\right\} \leq \inf\left\{f(x), x \in [x_{j-1}, z]\right\},$$

$$\inf\left\{f(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\right\} \leq \inf\left\{f(x), x \in [z, x_j]\right\}.$$

Vynásobením $(z - x_{j-1})$ a $(x_j - z)$ dostaneme

$$\inf\left\{f(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\right\} \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq$$

$$\leq \inf\left\{f(x), x \in [x_{j-1}, z]\right\} \cdot (z - x_{j-1}) + \inf\left\{f(x), x \in [z, x_j]\right\} \cdot (x_j - z) \implies s(f,D) \leq s(f,D').$$

Pokud se D a D' liší o více bodů, pak postupujeme indukcí. Analogicky pro horní součty. $\square$

Věta 3.2 (O dvou děleních)

Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Pak $s(f,D_1) \leq S(f,D_2)$.

Důkaz
Nechť D zjemňuje D_1 i D_2 ($D = D_1 \cup D_2$). Potom D je jemnější než D_1 i D_2 a podle předchozí věty:
$$s(f, D_1) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq S(f, D_2).$$
$\square$

Důsledek
Nechť f je omezená na $[a, b]$, D_1 a D_2 jsou dělení $[a, b]$, $m = \inf\{f(x)|x \in [a, b]\}$ a $M = \sup\{f(x)|x \in [a, b]\}$. Pak:
$$m \cdot (b-a) \leq s(f, D_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq S(f, D_2) \leq M \cdot (b-a).$$

Definice 3.4 (Norma dělení)

Nechť D je dělení $[a, b]$. Číslo $\nu(D) = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j - x_{j-1}|$ nazveme normou dělení D.

Věta 3.3 (Aproximace R. integrálu pomocí součtů)

Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$ a $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení $[a, b]$ taková, že $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$. Pak $(R)\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf_{n\in\mathbb{N}} S(f, D_n)$ a $(R)\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} s(f, D_n)$.

Důkaz
BÚNO $f \geq 0$ (jinak přičteme k f konstantu). Stačí dokázat druhá rovnost, první je analogická. Nechť D je libovolné dělení a $\varepsilon > 0$. Stačí dokázat, že $\exists n_0 : s(f, D_{n_0}) \geq s(f, D) - \varepsilon$. Pak
$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup_D S(f, D) \geq \sup_{D_n} s(f, D_n) \geq \sup_D (s(f, D) - \varepsilon) = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \varepsilon.$$
Nechť $0 \leq f \leq K$ a zvolme n_0, aby $\nu(D_{n_0}) \leq \frac{\varepsilon}{K \cdot 4 \cdot \#\text{intervalů } D}$. Označme H = intervaly vzniklé dělením $P = D \cup D_{n_0}$ a γ = intervaly z P, v kterých není žádný bod dělení D. P je jemnější než D, a proto z věty výše dostáváme
$$s(f, D) \leq s(f, P) = \sum_{L\in H} \inf_L f \cdot \text{délka } L = \sum_{L\in\gamma} \inf_L f \cdot \text{délka } L + \sum_{L\in H\setminus\gamma} \inf_L f \cdot \text{délka } L \leq$$
$$\leq s(f, D_{n_0}) + 2 \cdot \#\text{intervalů } D \cdot (K \cdot \nu(D_{n_0})) < s(f, D_{n_0}) + \varepsilon.$$
$\square$

Věta 3.4 (Kritérium existence R integrálu)

Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak $f \in R([a, b]) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists$ dělení D intervalu $[a, b]$, že $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Zvolme libovolnou posloupnost dělení, že $\ni |D_n| \to 0$ (D_{n+1} je jemnější než D_n). Pak

$$\lim_{n\to\infty} S(f, D_n) = (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Tedy $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : S(f, D_n) - s(f, D_n) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$: Zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu nalezneme D z předpokladu.

$$0 \leq (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon \implies$$

$$\implies (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

□

Definice 3.5 (Stejnoměrná spojitost)

Řekneme, že funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu I, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Věta 3.5 (O vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti)

Nechť f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak f je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.

Důkaz
Sporem. Nechť f je spojitá na $[a,b]$, ale

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta = \frac{1}{n} \ \exists x_n, y_n \in I : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Interval a,b je omezený, tedy z x_n lze vybrat konvergentní posloupnost podle Weirstrassovy věty. Tedy $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Dále $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$, neboť

$$|y_{n_k} - x_0| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \to 0.$$

Víme, že f je spojitá v x_0 (vzhledem k $[a,b]$). Tedy k našemu $\varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b] : |f(z) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Nalezneme $j \in \mathbb{N}$, aby $x_{n_k}, y_{n_k} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Nyní

$$\varepsilon \leq |f(x_{n_k} - f(y_{n_k}))| \leq |f(x_{n_k} - f(x_0))| + |f(x_0) - f(y_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \lightning.$$

□

Věta 3.6 (O vztahu spojitosti a Riemannovské integrovatelnosti)

Nechť f je spojitá na omezeném intervalu $[a,b]$, pak $f \in R([a,b])$.

Důkaz
Podle věty ze zimy je spojitá funkce na omezeném intervalu otevřená. Z předchozí věty víme, že f je dokonce stejnoměrně spojitá na $[a,b]$. Pak

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in [a,b] : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Zvolme dělení D intervalu $[a,b]$ tak, že $\nu(D) < \delta$. Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$. Označme $M_j = \sup_{x_j, x_{j+1}} f$, $m_j = \inf_{x_j, x_{j+1}} f$. Pak platí $M_j \leq m_j + \varepsilon \ \forall j \in [n]$.

$$S(f,D) - s(f,D) = \sum_{j=1}^n M_j (x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n m_j (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon \cdot (b - a).$$

Podle věty výše tedy $f \in R([a,b])$. □

Věta 3.7 (Vztah monotonie a Riemanovské integrovatelnosti)

Nechť f je (omezená) monotonní funkce na intervalu $[a,b]$. Pak $f \in R([a,b])$.

Důkaz

BÚNO f je neklesající. Budeme dokazovat kritérium existence R integrálu. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme ekvidistantní dělení $D = \left\{a + (b-a)\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ a volíme n, aby $n > \frac{1}{\varepsilon}(b-a) \cdot (f(b) - f(a))$. Nyní

$$S(f, D) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j),$$

$$s(f, D) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}).$$

Odtud

$$S(f, D) - s(f, D) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) - f(x_{j-1}) \leq \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

$\square$

Věta 3.8 (Vlastnosti R integrálu)

a) Linearita: $f, g \in R([a,b]), \alpha \in \mathbb{R} \implies f + g \in R([a,b]) \wedge \alpha f \in R([a,b])$ *a*

$$(R)\int_a^b f + g = (R)\int_a^b f + (R)\int_a^b g \wedge (R)\int_a^b \alpha \cdot f = \alpha \cdot (R)\int_a^b g.$$

b) Monotonie: $f, g \in R([a,b]), f \leq g$, *pak* $(R)\int_a^b f \leq (R)\int_a^b g$.

c) Aditivita vzhledem k intervalům: Nechť $a < c < b$. *Pak* $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow f \in R([a,c]) \wedge f \in R([c,b])$ *a platí* $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx$.

Důkaz (a)
$f, g \in R([a,b]) \implies f$ a g jsou omezené na $[a,b] \implies f+g$ je omezená a αf je omezená na $[a,b]$. Je-li $I \subseteq [a,b]$ interval, pak $\sup_I (f+g) \le \sup_I f + \sup_I g$, $\inf_I (f+g) \le \inf_I f + \inf_I g$. Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a,b]$ platí

$$s(f,D) + s(g,D) \le s(f+g,D) \le S(f+g,D) \le S(f,D) + S(g,D).$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a,b]$ tak, že $\ni (D_n) \to 0$ (a D_{n+1} jemnější než D_n). Podle věty výše

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n) + S(g,D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,dx + (R)\int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} s(f,D_n) + s(g,D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,dx + (R)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Spolu s nerovností výše je to

$$\lim_{n\to\infty} s(f+g,D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f+g,D_n) \overset{\text{POLICIE}}{=} (R)\int_a^b f(x)\,dx + (R)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Tedy podle věty výše $f+g \in R([a,b])$ a $(R)\int_a^b f+g = (R)\int_a^b f + (R)\int_a^b g$.

Je-li $f \in R([a,b])$, $\alpha \ge 0$, je $\alpha \cdot f$ omezená na $[a,b]$. Pro každý interval $I \subseteq [a,b]$

$$\sup_I \alpha \cdot f = \alpha \cdot \sup_I f, \qquad \inf_I \alpha \cdot f = \alpha \cdot \inf_I f \implies$$

$$S(\alpha f, D) = \alpha \cdot S(f,D), \qquad s(\alpha \cdot f, D) = \alpha \cdot s(f,D).$$

Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení $[a,b]$, že $\nu(D_n) \to 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n. Pak

$$\lim_{n\to\infty} S(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot S(f,D_n) = \alpha \cdot (R)\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} s(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot s(f,D_n) = \alpha \cdot (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Podle věty výše je pro $\alpha f : \alpha f \in R([a,b])$ a $(R)\int_a^b \alpha f = \alpha (R)\int_a^b f$.

Zbývá $\alpha < 0$. Stačí $\alpha = -1$ (jelikož pak můžeme násobit kladným). Pak $\forall$ interval I $\sup_I(-f) = -\inf_I f$ a $\inf_I(-f) = -\sup_I f$. Tedy $\forall$ posloupnost dělení $\{D_n\}$, kde $\nu(D_n) \to 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n:

$$\lim_{n\to\infty} S(-f,D_n) = \lim_{n\to\infty} -s(f,D_n) = -(R)\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} s(-f,D_n) = \lim_{n\to\infty} -S(f,D_n) = -(R)\int_a^b f(x)\,dx,$$

tudíž $-f \in R([a,b])$ a $(R)\int_a^b (-f) = -(R)\int_a^b f$. □

Důkaz (b)
Nechť D_n je posloupnost dělení, $\nu(D_n) \to 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n. Pak $\sup_I f \leq \sup_I g$. Tedy víme, že

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n) \leq \lim_{n\to\infty} S(g, D_n) = (R)\int_a^b g(x)\,dx.$$

□

Důkaz (c)
Nechť $\{D_n^1\}$ a $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení $[a,c]$ respektive $[c,b]$ splňující $\nu(D_n^1) \to 0$ a $\nu(D_n^2) \to 0$ a D_{n+1}^1 je jemnější než D_n^1 a D_{n+1}^2 je jemnější než D_n^2. Nechť $D_n = D_n^1 \cup D_n^2$. Pak D_n je dělení $[a,b]$ a $\nu(D_n) \to 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n.

Nechť $f \in R([a,c])$ a $f \in R([c,b])$. Pak podle věty výše

$$\lim_{n\to\infty} S(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} s(f, D_n^1) = (R)\int_a^c f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} S(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} s(f, D_n^2) = (R)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} S(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n^1) + S(f, D_n^2) = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} s(f, D_n^1) + s(f, D_n^2) = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Podle věty výše je $f \in R([a,b])$ a $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx$.

Nechť $f \in R([a,b])$. Pak

$$0 \leq S(f, D_n^1) - s(f, D_n^1) \leq S(f, D_n^1) - s(f, D_n^1) + S(f, D_n^2) - s(f, D_n^2) = S(f, D_n) - s(f, D_n)$$

$$S(f, D_n) - s(f, D_n) \to 0 \implies \lim_{n\to\infty} S(f, D_n^1) - s(f, D_n^1) = 0 \implies f \in R([a,c]).$$

Analogicky $f \in R([c,b])$. Rovnost $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx$ plyne z předchozí části důkazu. □

Poznámka (Úmluva)
1. Nechť $b < a$, pak definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Věta 3.9 (O derivaci integrálu podle horní meze)

Nechť J je neprázdný interval a $f \in R([\alpha,\beta])$ pro každé $\alpha, \beta \in J$. Nechť $c \in J$ je libovolný pevný bod. Definujme na J funkci $F(x) = (R)\int_c^x f(t)\,dt$. Pak platí: 1) F je spojitá na J, *2) je-li f spojitá v $x_0 \in J$, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Důsledek
Je-li f spojitá na (a, b), pak má na (a, b) primitivní funkci.

Důsledek
Nechť f je spojitá na $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

$$(R)\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to\beta-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x),$$

kde F je primitivní funkce k f na (α, β).

Důkaz (Věty o defivaci integrálu …)
1) Nechť $y_0 \in J$ není pravým krajním bodem J. Chceme dokázat $\lim_{y\to y_0+} F(y) = F(y_0)$. Nyní

$$F(y) - F(y_0) = (R)\int_c^y f(t)\,dt - (R)\int_c^{y_0} f(t)\,dt = (R)\int_{y_0}^y f(t)\,dt \le |y - y_0|K \to 0,$$

jelikož f je Riemannovsky integrovatelná, tedy je omezená $f(t) < K$. Policií dokážeme $F(y) - F(y_0) \to 0$. Analogicky pro limitu zleva.

2) Víme

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(R)\int_0^{x_0+h} f(t)\,dt - (R)\int_0^{x_0} f(t)\,dt}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt.$$

Nyní

$$\frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0) = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ tak, že $\forall t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ platí $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Pak platí

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt\right| \le \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h = \varepsilon.$$

Tedy $F'(x_0) - f(x_0) = 0$ z policie. $\square$

3.2 Newtonův integrál

Definice 3.6 (Newtonův integrál)

Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) Newtonův integrál, jestliže má na (a, b) primitivní funkci F a existují $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$ vlastní. Hodnotou Newtonova integrálu rozumíme číslo

$$(N)\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Množinu funkcí mající Newtonův integrál značíme $N(a, b)$.

Důsledek

Je-li f spojitá na $[a, b]$, pak existují oba (v budoucnu všechny) integrály a rovnají se.

Existují i funkce integrovatelné pouze N a pouze R: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ a $\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x\,dx$.

Věta 3.10 (Per partes pro určitý integrál)

Nechť f, f', g, g' jsou spojité na intervalu $[a, b]$. Pak $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f\cdot g]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$, kde $[fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ a obecněji $\lim_{x\to b_+} f(x)g(x) - \lim_{x\to a_-} f(x)g(x)$.

Důkaz

Víme, že f je primitivní k f' a g je primitivní k g'. Tedy pro primitivní funkci platí $\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$. Dále $\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = Primit(b) - Primit(a) = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$. Všechny integrály existují ze spojitosti. □

Věta 3.11 (O substituci pro určitý integrál)

Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ je funkce, která má na $[\alpha, \beta]$ spojitou první derivaci. Pak

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ je na a má na $[\alpha, \beta]$ vlastní spojitou nenulovou derivaci. Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\Phi(\varphi^{-1}(t))]_a^b = [\Phi(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

kde Φ je primitivní funkce k $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

Důkaz

Bez důkazu. □

Pozorování
Nechť f je spojitá na (a,b) a $a < c < b$. Pak

$$1) f \in N(a,c) \wedge f \in N(c,b) \implies f \in N(a,b).$$

$$2) f \in N(a,b) \implies f \in N(a,c).$$

3.3 Konvergence integrálu

Věta 3.12 (Srovnávací kritérium pro konvergenci integrálů)

Nechť $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť jsou funkce $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ spojité na $[a,b)$ a nechť $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b)$. Pak $g \in N(a,b) \implies f \in N(a,b)$.

Důkaz
Zvolme $c \in (a,b)$ a označme G a F primitivní funkce k f a g. BÚNO $G(c) = F(c)$ (jinak odečti konstantu). $(G-F)'(x) = (g-f)(x) \geq 0$ na $[c,b) \implies G-F$ je neklesající na $[c,b)$. Dále $G(c) = F(c) \implies \forall x \in [c,b) : G(x) \geq F(x)$. Dále $G' = g \geq 0$ a $F' = f \geq 0$, tedy jsou neklesající. $g \in N(a,b) \implies \lim_{x\to b_-} G(x) \in \mathbb{R}$. F je neklesající a omezená $\lim_{x\to b_-} G(x)$, tedy $\lim_{x\to b_-} F(x) \in \mathbb{R} \implies f \in N(c,b)$. f je spojitá na $[a,c]$, tj. $f \in N(a,c)$. Tudíž $f \in N(a,b)$. $\square$

Poznámka
Platí analogie pro $(a,b]$.

Věta 3.13 (Limitní srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu)

Nechť $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť jsou funkce $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ spojité a nezáporné na $[a,b)$. Jestliže existuje $\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$, pak $g \in N(a,b) \Leftrightarrow f \in N(a,b)$.

Důkaz
Označme $A = \lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Z definice limity pro

$$\varepsilon = \frac{A}{2} \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in P_-(b,\delta) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon = \frac{A}{2}.$$

Neboli $\exists x_0 \in (a,b)$ $\forall x \in [x_0, b] : \frac{3}{2}A \geq \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}A$. Tudíž $\frac{3}{2}A \cdot g(x) \geq f(x) \geq \frac{1}{2}A \cdot g(x)$. $g \in N(a,b) \implies \frac{2}{3}A \cdot g(x) \in N(a,b) \implies \frac{3}{2}A \cdot g(x) \in N(x_0,b) \implies f \in N(x_0,b)$ podle předchozí věty. f je spojitá na $[a,x_0]$, tedy $f \in N(a,x_0) \implies f \in N(a,b)$.

Pokud naopak $f \in N(a,b)$, pak $f(x) \in N(x_0,b) \implies \frac{1}{2}A \cdot g(x) \in N(x_0,b) \implies g(x) \in N(x_0,b)$. g je spojitá na $[a,x_0]$, tedy $g \in N(a,x_0) \implies g \in N(a,b)$. $\square$

Poznámka
Platí i analogie pro $(a, b]$.

Lemma 3.14 (Odhad Newtonova integrálu součinu dvou funkcí)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g : [a, b] \in \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom $g(a) \cdot \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^b f(t) \cdot g(t)\,dt \leq g(a) \cdot \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,dt$.

Speciálně platí $|\int_a^b f(t) \cdot g(t)\,dt| \leq g(a) \cdot \sup_{x\in[a,b]} \cdot |\int_a^x f(t)\,dt|$.

Věta 3.15 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence integrálu)

Nechť $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k f na (a, b). Dále nechť $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ je na $[a, b]$ monotónní a spojitá. Pak platí:

(A) Je-li $f \in N(a, b)$ a g je omezená, pak $f \cdot g \in N(a, b)$.

(D) Je-li $F(x)$ omezená na (a, b) a $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$, pak $f \cdot g \in N(a, b)$.

Důkaz (Odhad Newtonova integrálu součinu dvou funkcí)
Dokážeme druhou nerovnost (první je analogická). Nechť $\varepsilon > 0$. Z V7.5 (spojitost na kompaktu a stejnoměrná spojitost) plyne stejnoměrná spojitost f a $f \cdot g$ na $[a, b]$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in [a, b] : |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon \wedge |f(x)\cdot g(x)-f(y)\cdot g(y)| < \varepsilon$.

Označme $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, x \in [a, b]$. Pak $F(a) = 0$. Zvolme dělení D intervalu $[a, b]$ s normou $< \delta$. Ze stejnoměrné spojitosti $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \forall t \in [x_{i-1}, x_i] : f(t) \geq f(x_{i-1}) - \varepsilon$. Tedy $\int_{x_{i-1}}^{x_i} {}_{f(t)\,dt \geq f(x_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}) - \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1}))}$. Analogicky z $f(t) \cdot g(t) \leq f(x_{i-1}) \cdot g(x_{i-1}) + \varepsilon$ dostaneme $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,dt \leq f(x_{i-1}) \cdot g(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1})$. Nyní aplikujeme předchozí nerovnost:

$$\leq g(x_{i-1}) \cdot \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt + \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1})\right) + \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq$$

g nerostoucí

$$\leq g(x_{i-1}) \cdot \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt\right) + g(a) \cdot \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1}) + \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq g(x_{i-1}) \cdot \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt\right) + \frac{x_i - x_{i-1}}{a - b}\tilde{\varepsilon},$$

kde $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(g(a) + 1) \cdot (b - a)$.

Nyní

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t)\,dt = \sum_{i=1}^n \int_{x_i-1}^{x_i} f(t) \cdot g(t)\,dt \leq \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} + \tilde{\varepsilon} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \cdot (F(x_i) - F(x_{i-1})) + \tilde{\varepsilon}.$$

Přes Abelovu parciální sumaci:

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i) \cdot (g(x_{i-1} - g(x_i))) + g(x_{n-1}) \cdot F(x_n) + \tilde{\varepsilon} \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} F(t) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i) + g(x_{n-1})) + \tilde{\varepsilon} = g(a) \cdot \sup_{t\in[a,b]} F(t) + \varepsilon \cdot (g(a)+1) \cdot (b-a).$$

Toto platí $\forall \varepsilon > 0$, tedy požadovaná nerovnost platí. □

Důkaz (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence integrálu)
$f \cdot g$ spojitá na $(a, b) \implies \exists$ primitivní funkce H. BÚNO je g nerostoucí. Jinak vezmeme $-g$ a konvergence $\int f \cdot g$ se nezmění.

(A) BÚNO $g \geq 0$: víme, že g je omezená $\exists K > 0\ \forall x \in [a, b) : |g(x)| < K$. Vezmeme funkci $g(x)+K \geq 0$ a konvergence se nám nezmění. $g \geq 0$ omezená, tedy $\exists c > 0\ \forall x \in [a, b) : 0 \leq g(x) < c$. $f \in N(a, b) \implies \lim_{x\to b_-} F(x) \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z Bolzano-Cauchyovy podmínky pro limitu funkce k tomuto

$$\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in P_-(b, \delta) : -\varepsilon < F(x) - F(y) < \varepsilon.$$

Nechť $x, y \in P_-(b, \delta)$, podle lemmatu:

$$H(y) - H(x) = \int_x^y f(t) \cdot g(t)\, dt \leq g(x) \cdot \sup_{z\in[x,y]} \int_x^s f(t)\, dt = g(x) \cdot \sup_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \leq$$

$$\leq g(x) \cdot \varepsilon \leq c \cdot \varepsilon.$$

$$H(y) - H(x) = \int_x^y f(t) \cdot g(t)\, dt \geq g(x) \cdot \inf_{z\in[x,y]} \int_x^s f(t)\, dt = g(x) \cdot \inf_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \geq$$

$$\geq -g(x) \cdot \varepsilon \geq -c \cdot \varepsilon.$$

Tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_-(b, \delta) : |H(x) - H(y)| < c \cdot \varepsilon$. Tedy z BC podmínky pro limitu funkce $\exists \lim_{x\to b_-} H(x)$. Nechť $u \in (a, b)$, $f \cdot g$ je spojitá na $[a, u] \implies f \cdot g \in N(a, c)$. H je spojitá v $u \implies \exists \lim_{x\to u_-} H(x) \implies f \cdot g \in N(u, b)$. Tudíž $f \cdot g \in N(a, b)$.

(D) Víme g nerostoucí a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0 \implies g \geq 0$. $F(x)$ omezená, tj. $\exists K > 0\ \forall x \in (a, b) : |F(x)| \leq K$. Nechť $\varepsilon > 0$:

$$\text{Z} \lim_{x\to b_-} g(x) = 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_-(b, \delta) : |g(x)| < \varepsilon.$$

Nyní $\forall x, y \in P_-(b, \delta)$, $x < y$ platí

$$H(y) - H(x) = \int_x^y f(t)g(t)\, dt \leq g(x) \cdot \sup_{z\in[x,y]} \int_x^z f(t)\, dt = g(x) \cdot \sup_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot \sup_{z\in[x,y]} F(z) - F(x) \leq \varepsilon \cdot 2K.$$

Analogicky

$$H(y) - H(x) = \int_x^y f(t)g(t)\,dt \geq g(x) \cdot \inf_{z\in[x,y]} \int_x^z f(t)\,dt = g(x) \cdot \inf_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \geq$$

$$\geq \varepsilon \cdot \inf_{z\in[x,y]} F(z) - F(x) \geq -\varepsilon \cdot 2K.$$

Tedy H splňuje BC podmínku a $\exists \lim_{x\to b_-} H(x)$. A z toho dostaneme $f \cdot g \in N(a,b)$. □

Věta 3.16 (O střední hodnotě integrálního počtu)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$, g je nezáporná na $[a,b]$, $g \in N(a,b)$ a $f \cdot g \in (a,b)$. Potom existuje $c \in [a,b]$ tak, že $\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)\,dx$.

Důkaz

f je spojité na $[a,b]$, tedy nabývá mezihodnot. Také je na $[a,b]$ omezená. Označme $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ a $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Pak $m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x)$. Je-li $\int_a^b g = 0 \implies g = 0$, volíme c libovolně. Nechť $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Pak

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M.$$

f nabývá mezihodnot, a proto $\exists c \in [a,b]$ tak, že $f(c) = \frac{\int_a^b g(x) \cdot f(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$. □

3.4 Aplikace určitého integrálu

Definice 3.7 (Obsah)

Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je nezáporná spojitá funkce, pak obsahem plochy pod grafem funkce nazveme

$$Obsah(f, [a,b]) = (R) \int_a^b f(x)\,dx = (N) \int_a^b f(x)\,dx.$$

Definice 3.8 (Délka křivky)

Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělením intervalu $[a,b]$. Označme $L(f,D) = \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}$. Délkou křivky f nazveme $L(f,[a,b]) = \sup_D L(f,D)$.

Věta 3.17

Nechť f má na intervalu $[a,b]$ spojitou první derivaci. Pak $L(f,[a,b]) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.

Důkaz
Označme $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Mějme dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n$. Pak

$$L(f, [a, b]) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}\right)^2} = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sqrt{1 + (f'(\zeta_j))^2},$$

podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě, kde $\zeta_j \in (x_{j-1}, x_j)$. Odtud snadno odvodíme, že $s(g, D) \leq L(f, D) \leq S(g, D)$. Tedy $\sup_D s(g, D) = \int_a^b g \leq \sup_D L(f, D) = L(f)$.

Sporem: Nechť $L(f) > \int_a^b g(x)\,dx$. Tedy $\exists$ dělení D, že $L(f, D) > \int_a^b g(x)\,dx$. Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ tak, že D_1 zjemňuje D, D_{n+1} zjemňuje D_n a $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$. Pak $L(f, D) \leq L(f, D_1) \leq L(f, D_2) \leq \ldots$ (jemnější dělení dává delší „délku“). Z nerovnosti v prvním odstavci je $L(f, D_n) \leq S(g, D_n)$, tedy $\lim_{n\to\infty} S(g, D_n) \geq L(f, D)$. $\lightning$. $\square$

Věta 3.18 (Délka křivky v $\mathbb{R}^n$)

Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a má spojitou první derivaci. Pak

$$L(\varphi([a, b])) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(x))^2 + \ldots + (\varphi_n'(x))^2}\,dx.$$

Důkaz
Bez důkazu. $\square$

Poznámka
Délka křivky nezávisí na parametrizaci.

Věta 3.19 (Objem a povrch rotačního tělesa)

Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná. Označme

$$T = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b] \wedge \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x) \right\}.$$

Pak $Objem(T) = \pi \cdot \int_a^b (f^x)^2\,dx$.

Je-li navíc f spojitá na $[a, b]$, pak $Obsahpovrchu(T) = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.

Důkaz
Bez důkazu. $\square$

Věta 3.20 (Integrální kritérium konvergence řad)

Nechť f je nezáporná, nerostoucí a spojitá na $n_0 - 1, \infty$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost a_n platí $a_n = f(n)$ pro všechna $n \geq n_0$. Pak

$$(N) \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje.}$$

Důkaz

Nechť $n_1 \geq n_0$ a mějme $D = \{n_0, n_0+1, \ldots, n_1\}$ intervalu $[n_0, n_1]$. Funkce f je nerostoucí, a tedy

$$S(f, D) = a_{n_0} + \ldots + a_{n_1 - 1} = \sum_{i=n_0}^{n_1 - 1} a_i,$$

$$s(f, D) = a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_1} = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i.$$

Protože f je spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i = s(f, D) \leq (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,dx = (N) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,dx \leq S(f, D) = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i.$$

Nechť $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje. Pak je $F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,dt$, $t \in [n_0, \infty)$ je primitivní k $f(x)$ na (n_0, ∞) (z derivace integrálu podle mezí). Tedy $\forall n_1 \geq n_0$ (z nerovnosti výše):

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} \int_{n_0}^{x} f(t)\,dt \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i = \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{konverguje.}$$

Obráceně: Nechť $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje $\implies \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i$ konverguje. Z nerovnosti výše:

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i \geq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Tedy $\lim_{x\to\infty} F(x) \in \mathbb{R} \implies \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ $\square$

Příklad (Stirlingova formule, nezkouší se)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Důkaz (Nástřel)
Vytknout konstanty, zlogaritmovat, upravit a použít Abelovu parciální sumaci. Následně použít Lagrangeův tvar zbytku TP. Následně podle předchozí věty dokážeme konvergenci. Následně si pomocí Wallisovy formule (Per partes na $\sin^n x$, $\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \to \frac{\pi}{2}$) „odvodíme" hodnotu π. Potom si do Wallisovy formule dosadíme limitu Stirlingovi (jako nějaké a) a dopočítáme. □

4 Obyčejné diferenciální rovnice

4.1 Řešení, existence a jednoznačnost

Definice 4.1 (ODR)

Nechť $\Phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$. Obyčejnou diferenciální rovnicí (ve zkratce ODR) n-tého řádu nazveme $\Phi(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$.

Definice 4.2 (Řešení ODR)

Řešení ODR na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ je funkce $y(x)$ splňující:

- Existuje $y^{(k)}(x)$ vlastní pro $k = 1, \ldots, n$ v I a všechna $x \in I$.
- Rovnice ODR platí pro všechna $x \in I$.

Definice 4.3

Řekneme, že $(\tilde{y}, \tilde{I})$ je rozšířením řešení (y, I), pokud $\tilde{y}$ je řešení na $\tilde{I}$, $I \subset \tilde{I}$, $y = \tilde{y}$ na I.

Řekneme, že (y, I) je maximální řešení, pokud nemá rozšíření.

Definice 4.4 (Otevřený interval)

Řekneme, že $I \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřený interval, pokud existují otevřené intervaly $I_1, I_2, \ldots, I_n$ tak, že $I = I_1 \times \ldots \times I_n$.

Definice 4.5 ((Otevřená) koule)

Nechť $c \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$. Definujeme (otevřenou) kouli jako

$$\mathrm{B}(c,r) = \left\{ x \in \mathbb{R} | ||x-c|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - c_1)^2 < r} \right\}.$$

Definice 4.6

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřený interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že f je spojitá v bodě $x_0 \in I$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{B}(x_0, \delta) \cap I : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Řekneme, že f je spojitá na I, pokud je spojitá ve všech bodech I.

Věta 4.1 (Peano s $y^{(n)}$)

Nechť $I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřený interval, $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá. $[x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}] \in I$. Pak existuje $\delta > 0$ a okolí x_0 a funkce $y(x)$ definovaná na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že $y(x)$ splňuje ODR

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Důkaz
Později. □

Pozor
Tato věta je lokální a nedává jednoznačnost řešení.

Definice 4.7

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřený interval. Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je lokálně lipschitzovská vůči y, pokud $\forall U \subseteq I$ omezené existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq K \cdot (y - \tilde{y}) \ \forall [x,y] \in U \wedge [x,\tilde{y}] \in U.$$

Věta 4.2 (Picard)

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřený interval a $[x_0, y_0] \in I$. Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá a lokálně lipschitzovská vůči y. Pak existuje $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a funkce $y(x)$ definována na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že $y(x)$ splňuje ODR $y'(x) = f(x, y(x))$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Navíc y je jediné řešení na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Důkaz
Později. □

4.2 Rovnice prvního řádu

Definice 4.8

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřený interval a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá, kde $\omega \subseteq \mathbb{R}$. V této kapitole studujeme pouze rovnice typu $y'(x) = f(x, y(x))$.

Poznámka (Speciální tvary)

$$y' = f(x) \implies y(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$
$$y'(x) = g(y(x)),$$
$$y'(x) = g(y(x)) \cdot h(x) \text{(separované proměnné)},$$
$$y'(x) = h\left(\frac{y(x)}{x}\right) \text{(homogenní rovnice) (substitucí převedeme na předchozí)},$$
$$y'(x) = a(x) \cdot y + b(x) \text{ (lineární rovnice 1. řádu)},$$
$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x) \cdot y^{\alpha}(x) \text{ (Bernouliho rovnice) (substitucí převedeme na předchozí)}.$$

Věta 4.3 (O existenci řešení separované rovnice)

Nechť $h : (a,b) \to \mathbb{R}$ *je spojitá,* $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ *je spojitá a nenulová. Potom každým bodem* $[x_0, y_0] \in (a,b) \times (c,d)$ *prochází právě jedno řešení rovnice* $y'(x) = g(y(x)) \cdot h(x)$.

Důkaz
g je spojitá a nenulová $\implies$ nemění znaménko. Můžeme definovat $H(x) = \int_{x_0}^x h(t)\,dt$ a $G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)}\,ds$. g nemění znaménko, tedy G je monotónní, tj. $\exists G^{-1}$. Chceme ukázat, že $y(x) = G^{-1}(H(x))$ je řešení. h, g spojité $\implies$ $H', G', (G^{-1})'$ je spojitá. Podle derivace složené funkce a derivace inverzní funkce

$$y'(x) = \big(G^{-1}(H(x))\big)' = (G^{-1})'(H(x)) \cdot H'(x) =$$

$$= \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x)))} \cdot h(x) = \frac{1}{\frac{1}{g(y(x))}} h(x) = g(y(x)) \cdot h(x).$$

Ověříme, že splňuje počáteční podmínku:

$$H(x_0) = 0, \qquad G(y_0) = 0, \qquad y(x_0) = G^{-1}(H(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0.$$

Jednoznačnost: Nechť $y(x)$ a $a(x)$ jsou řešení: $y'(x) = g(y(x)) \cdot h(x)$, $a'(x) = g(a(x)) \cdot h(x)$, $y(x_0) = y_0 = a(x_0)$ $\implies$ (g nenulové) $\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x) = \frac{a'(x)}{g(a(x))}$.

$$G(y(x)) - G(y(x_0)) = \int_{x_0}^x \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int_{x_0}^x \frac{a'(x)}{g(a(x))} = G(a(x)) - G(a(x_0)) \implies$$

$$\implies G(y(x)) = G(a(x)) \overset{G \text{ monotónní}}{\implies} y(x) = a(x).$$

$\square$

Věta 4.4 (O řešení lineární diferenciálni rovnice prvního řádu)

Nechť $(c, d) \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $x_0 \in (c, d)$ a $a, b : (c, d) \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Maximální řešení rovnice $y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ má tvar

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^x b(t) \cdot e^{-A(t)}\,dt\right) \cdot e^{A(x)} + y_0 \cdot e^{A(x)},$$

pro $x \in (c, d)$, kde A je primitivní k a splňující $A(x_0) = 0$.

Důkaz
Zřejmě $y(x_0) = 0 \cdot e^{A(x_0)} + y_0 \cdot e^{A(x_0)} = y_0$. Z věty o derivaci podle horní meze

$$\left(\int_{x_0}^{x} b(t) \cdot e^{-A(t)}\, dt\right)' = b(x) \cdot e^{-A(x)},$$

tedy

$$y'(x) = b(x) \cdot e^{-A(x)} \cdot e^{A(x)} + \left(\int_{x_0}^{x} b(t) \cdot e^{-A(t)}\, dt\right) \cdot e^{A(x)} \cdot a(x) + y_0 \cdot e^{A(x)} \cdot a(x),$$

$$a(x) \cdot y(x) + b(x) = a(x) \cdot \left(\int_{x_0}^{x} b(t) \cdot e^{-A(t)}\, dt\right) \cdot e^{A(x)} + a(x) \cdot y_0 \cdot e^{A(x)} + b(x).$$

Tyto výrazy se rovnají, tudíž y řeší naši ODR s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ na celém (c, d).

Jednoznačnost: Nechť $y(x)$ a $z(x)$ řeší naši ODR, pak $u(x) = y(x) - z(x)$. Dosazením y, z do ODR a odečtením dostaneme $u'(x) = a(x) \cdot u(x), u(x_0) = 0$. Tj.

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = (\ln u(x))' = a(x) \implies \ln u(x) = A(x) + C \implies e^{A(x)} \cdot \tilde{C}.$$

Z $u(x_0) = 0$ je $\tilde{C} = 0$, tedy $u \equiv 0 = y(x) - z(x)$. □

4.3 Systémy lineárních ODR a lineární rovnice n-tého řádu

Definice 4.9

Nechť I je interval a mějme funkce $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$. Lineární ODR řádu n nazveme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x), \qquad x \in I.$$

Je-li $b \equiv 0$ na I, pak se rovnice nazývá homogenní.

Definice 4.10

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Mějme funkce $\mathbf{b}, \mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^n$ a mějme maticovou funkci $A : I \to \mathbb{R}^{n^2}$. Systémem ODR prvního řádu rozumíme systém rovnic

$$y_i' = a_{i,1} \cdot y_1 + \ldots + a_{i,n} \cdot y_n + b_i.$$

Neboli v maticovém zápisu $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}$.

Je-li $\mathbf{b} \equiv \mathbf{o}$, pak se systém nazývá homogenní.

Poznámka
Řešení jedné rovnice řádu n lze převést na řešení systému n rovnic řádu 1 (zavedeme si funkce $u_i = y^{(i-1)}$ a řekneme, že musí splňovat $u_i' = u_{i+1}$, poslední rovnice pak vznikne z původní rovnice).

Věta 4.5 (O existenci řešení systému ODR 1. řádu)

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a mějme spojité funkce $b_j, a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ pro $i, j \in [n]$. Nechť $x_0 \in I$, $\mathbf{y}^0 \in \mathbb{R}^n$ a $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je spojitá maticová funkce. Pak existuje právě jedno řešení rovnice $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^0$ definované na celém I.

Důkaz
Později. $\square$

Definice 4.11

$$C^1(I, \mathbb{R}^n) := \{\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^n : \mathbf{y}_i' \text{ je spojitá funkce z } I \text{ do } \mathbb{R}\ \forall i \in [n]\}$$

Věta 4.6 (Prostor řešení ODR 1. řádu)

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a mějme spojité funkce $b_j, a_{ij} : I \to \mathbb{R}$, pro $i, j \in [n]$. Označme

$$L(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' - A\mathbf{y}, \qquad H = \operatorname{Ker} L = \left\{\mathbf{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^n) : L(\mathbf{y}) = 0 \text{ na } I\right\}.$$

Pak H je vektorový prostor dimenze n. Označme M množinu všech řešení nehomogenního systému rovnic $L(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' - A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ a nechť $\mathbf{y}_0$ je jedno pevné řešení $L(\mathbf{y}_0) = \mathbf{b}$. Pak $M = \mathbf{y}_0 + \operatorname{Ker} L$.

Důkaz
Nechť $x_0 \in I$. Podle předchozí věty existuje řešení $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ rovnice $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ takové, že $\mathbf{y}_i(x_0) = \mathbf{e}_i$. Tvrdíme, že $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ tvoří bázi H. Zřejmě jsou to řešení. Jsou lineárně nezávislé, protože kdyby ne, pak $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tak, že $c_1\mathbf{y}_1(x) + \ldots + c_n\mathbf{y}_n(x) \equiv \mathbf{o}$. Speciálně pro $x = x_0 : c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \ldots + c_n\mathbf{e}_n = \mathbf{o}$, tedy $c_i = 0 \forall i \in [n]$.

Navíc tvoří bázi: Nechť $y \in M$ tj. $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Pak $\mathbf{y}(x_0) = [\alpha_1, \dots, \alpha_n] = \alpha_1\mathbf{y}_1(x_0) + \ldots + \alpha_n\mathbf{y}_n(x_0)$. Podle předchozí věty existuje právě jedno řešení $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{y}(x_0) = [\alpha, \dots, \alpha_n]$. Ale $\alpha_1\mathbf{y}_1(x) + \ldots + \alpha_n\mathbf{y}_n(x)$ řeší $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Z jednoznačnosti řešení $\mathbf{y}(x) = \alpha_1\mathbf{y}_1(x) + \ldots + \alpha_n\mathbf{y}_n(x)$.

Podle předchozí věty existuje řešení $\mathbf{y}_0$ rovnice $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$. $\mathbf{y}_0 + \operatorname{Ker} L \subseteq M$: Nechť $\mathbf{y} \in H$, pak $(\mathbf{y}_0 + \mathbf{y})' = A\mathbf{y}_0 + \mathbf{b} + A\mathbf{y} = A \cdot (\mathbf{y}_0 + \mathbf{y}) + \mathbf{b} \implies \mathbf{y}_0 + \mathbf{y} \in M$. $\mathbf{y}_0 + \operatorname{Ker} L \supseteq M$: Nechť $\mathbf{y}_1 \in M$, $\mathbf{y}_1$ řeší $\mathbf{y}_1' = A \cdot \mathbf{y}_1 + \mathbf{b}$. Označme $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0$. Pak $\mathbf{y}' = \mathbf{y}_1' - \mathbf{y}_0' = A\mathbf{y}_1 + \mathbf{b} - (A\mathbf{y}_0 + \mathbf{b}) = A(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0) = A\mathbf{y} \implies \mathbf{y} \in H$. $\square$

Definice 4.12 (Fundamentální systém řešení)

Libovolnou bázi $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ prostoru $H = \mathrm{Ker}(\mathbf{y}' - A\mathbf{y})$ (tj. libovolných n lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$) nazýváme fundamentálním systémem řešení (FSŘ) homogenní rovnice $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

4.4 Rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Definice 4.13 (Charakteristický polynom)

Nechť $a0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak $\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$ nazveme charakteristickým polynomem rovnice $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0$.

Věta 4.7 (FSŘ pro rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty)

Mějme zadány $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou kořeny charakteristického polynomu s násobností $s_1, \ldots, s_k$. Pak funkce

$$e^{\lambda_1 x}, x \cdot e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{s_1-1} \cdot e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_k x}, \ldots, x^{s_k-1} \cdot e^{\lambda_k x}$$

tvoří fundamentální systém řešení $y^{(n)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0$ na $\mathbb{R}$.

Důkaz
Podle věty výše stačí ukázat, že tyto funkce řeší ODR a jsou lineárně nezávislé. 1. krok: Označme $L(y) = y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$ a $Q(\lambda)$ charakteristický polynom. Chceme $Q(\lambda) = 0 \implies L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda} Q(\lambda) = 0$. To dostaneme snadno z derivace $(e^{\lambda x})' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ atd.

2. krok: Nechť $\lambda = 0$ je s-násobný kořen $Q(\lambda)$. Chceme ukázat, že $1, x, \ldots, x^{s-1}$ patří do FSŘ. 0 je s-násobný kořen $\implies Q(\lambda) = \lambda^s P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_s \lambda^s + 0 + \ldots + 0$. Derivace $1, \ldots, x^{s-1}$ řádu s a vyšší jsou $0 \implies$ tyto funkce jsou řešením $L(y) = 0$.

3. krok: Nechť λ_0 je s-násobný kořen $Q(x)$. Chceme $e^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{s-1} e^{\lambda_0 x}$ jsou řešení. Napišme řešení ve tvaru $y(x) = a(x) \cdot e^{\lambda_0 x}$. Potom $y'(x) = a'(x) e^{\lambda_0 x} + a(x) \lambda_0 e^{\lambda_0 x}$, $y''(x) = a''(x) e^{\lambda_0 x} + \ldots$. Obecně $L(y) = L(a \cdot e^{\lambda_0 x}) = e^{\lambda_0 x} \cdot M(a)$, kde M je lineární diferenciální operátor řádu n s konstantními koeficienty, tedy $M(a) = b_n a^{(n)} + \ldots + b_1 a' + b_0 \cdot a$, $b_j \in \mathbb{R}$. Označme Q_1 charakteristický polynom $M(a)$.

Z bodu 1 víme, že $L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} \cdot Q(\lambda)$ a analogicky $M(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} Q_1(\lambda)$. Nyní trochu magie:

$$Q_1(\lambda) = \frac{M(e^{\lambda x})}{e^{\lambda x}} = \frac{L(e^{\lambda x} e^{\lambda_0 x})}{e^{\lambda_0 x} e^{\lambda x}} = \frac{L(e^{\lambda x + \lambda_0 x})}{e^{\lambda_0 x + \lambda x}} = Q(\lambda + \lambda_0).$$

Víme, že $Q(\lambda)$ má λ_0 jako s-násobný kořen $\implies Q_1(\lambda)$ má 0 jako s-násobný kořen. Podle 2. kroku $1, x, \ldots, x^{s-1}$ je řešením $M(a) = 0$, tedy $y = a \cdot e^{\lambda_0 x}$ pro $a = 1, x, \ldots, x^{s-1}$ jsou řešení.

4. krok Funkce … jsou lineárně nezávislé. Nechť pro spor existují polynomy $p_1, \ldots, p_k$ ($\deg p_i \leq s_i - 1$) tak, že $\sum_{j=1}^{k} P_j(x) e^{\lambda_j x} = 0$. BÚNO $P_j \not\equiv 0$. Vynásobíme předchozí rovnici $e^{-\lambda_k x}$:

$$0 = P_1(x) e^{(\lambda_1 - \lambda_k)x} + \ldots + P_2(x) e^{(\lambda_2 - \lambda_k)x} + \ldots + P_k(x)$$

Toto s krát zderivujeme (pozorování: derivací $P_j e^{\lambda_j x}$ nesnižujeme stupeň polynomu):

$$0 = R_1(x) e^{\lambda_1 - \lambda_k} + \ldots + R_{k-1}(x) e^{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x}.$$

Toto provedeme $(k-1)$krát, až nám zbude $S(x) e^{\tilde{\lambda} x} \equiv 0$, kde $\deg S = \deg P_1$. Ale $S \equiv 0$, což je spos s $P_1 \not\equiv 0$. □

Věta 4.8 (O speciální pravé straně pro rovnici n-tého řádu)

Mějme zadány $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, nechť $P_m(x)$ je polynom m-tého řádu a $(\alpha + i\beta)$ je k-násobný kořen charakteristického polynomu (lze i $k = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$). Pak rovnice $y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = P_m(x) e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ (případně se $\sin$ místo $\cos$) má na $\mathbb{R}$ řešení ve tvaru

$$y_0(x) = x^k Q_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + x^k R_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

kde Q_m a R_m jsou polynomy stupně m.

Důkaz
Bez důkazu. □

Poznámka
Není-li pravá strana rovnice ve tvaru kvazipolynomu, pak lze řešení nehomogenní rovnice najít metodou variace konstant ve tvaru

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x),$$

kde $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tvoří FSŘ rovnice

$$y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + ay = 0.$$

4.5 Systémy rovnic s konstantními koeficienty

Věta 4.9 (FSŘ pro soustavu rovnic s konstantními koeficienty)

Nechť má matice A všechna vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ různá a nechť $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ jsou příslušné vlastní vektory. Pak vektorové funkce $\mathbf{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n x}$ tvoří fundamentální systém řešení $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$ na $\mathbb{R}$.

Důkaz
Je to řešení: Nechť $y(x) = \mathbf{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}$, pak $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{v}_i \lambda_1 e^{\lambda_1 x}$, neboli $\mathbf{y}'(x) = A \cdot \mathbf{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 x} = A \cdot \mathbf{y}(x)$.

Je to lineárně nezávislé (že je jich n víme…): Nechť pro spor $\exists C_i \in \mathbb{R} : C_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + C_n \cdot \mathbf{v}_n \cdot e^{\lambda_n x} = 0$. BÚNO $C_1 \neq 0$. Vydělíme poslední exponencielou a zderivujeme:

$$C_1 \cdot \mathbf{v}_{11} \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + \ldots + C_n \cdot \mathbf{v}_n = 0,$$

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_n)\mathbf{v}_1 \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + \ldots + C_{n-1}(\lambda_1 - \lambda_n)\mathbf{v}_{n-1} e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x} = 0.$$

$(n-1)$-krát zopakujeme a dostaneme $C_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \implies C_1 = 0$, ↯. □

Poznámka
Nemá-li matice A všechna vlastní čísla různá, pak lze FSŘ také algoritmicky sestrojit. Nechť λ je k-násobné vlastní číslo. Pokud existuje k lineárně nezávislých vlastních vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, pak do FSŘ dáme funkce $\mathbf{v}_1 \cdot e^{\lambda x}, \ldots, \mathbf{v}_k e^{\lambda x}$. Pokud existuje pouze jeden vlastní vektor, tak nalezneme řetězce vektorů $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, aby $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{v}_1 = 0$, $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, … a do FSŘ dáme funkce $\mathbf{v}_1 e^{\lambda x}$, $\mathbf{v}_1 \cdot x \cdot e^{\lambda x} + \mathbf{v}_2 e^{\lambda x}$, …

Pokud existuje více vlastních vektorů, ale ne k, pak provedeme něco mezi. Záleží na Jordanově tvaru matice $A = R^{-1} J R$.

Definice 4.14

Nechť $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ tvoří FSŘ $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$. Pak matici $\varphi(x) = (\mathbf{y}_1(x)|\mathbf{y}_2| \ldots |\mathbf{y}_n)$ nazýváme fundamentální maticí soustavy $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$. (Tj. $\varphi'(x) = A \cdot \varphi(x)$.)

Lemma 4.10

Nechť φ je fundamentální matice soustavy $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$ na intervalu I. Pak $\varphi(x)$ je regulární pro každé $x \in I$.

Důkaz

Sporem. Nechť $\exists c_i \in \mathbb{R}$ a $\exists x_0 \in I$, $c_1 \cdot \mathbf{y}^1(x_0) + \ldots + c_n \cdot \mathbf{y}^n(x_0) = \mathbf{o}$. Podle věty o existenci řešení systému ODR 1. řádu $\exists!$ řešení splňující $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{o}$. Toto řešení je ale $\mathbf{y} \equiv 0$. Ale i funkce $\mathbf{y}(x)$ je řešení a splňuje $\mathbf{y}(x_0) = 0$. Z jednoznačnosti $\mathbf{y}(x) \equiv \mathbf{o}$, což je ale spor s nezávislostí $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$. □

Věta 4.11 (Tvar řešení pro soustavu ODR)

Nechť I je interval, $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ a $b : I \to \mathbb{R}^n$ jsou spojité funkce, $x_0 \in I$ a $\mathbf{y}^0 \in \mathbb{R}^n$. Pak maximální řešení rovnice $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^0$ má tvar

$$\mathbf{y}(x) = \varphi(x) \cdot \varphi^{-1}(x_0) \cdot \mathbf{y}^0 + \varphi(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \varphi^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t) dt,$$

kde φ je fundamentální matice soustavy.

Důkaz

Z lemmatu víme, že $\varphi(x)$ je regulární $\forall x \in I$. Díky Kramerově pravidlu je $\varphi^{-1}(t)$ spojitá, tedy $\int_{x_0}^{x} \varphi^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t) dt$ má smysl. Označme $\mathbf{y}(x)$ jako ve větě. Podle věty o derivaci podle horní meze dostaneme

$$\mathbf{y}'(x) = \varphi'(x) \cdot \varphi^{-1}(x_0) \cdot \mathbf{y}^0 + \varphi'(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \varphi^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t) dt + \varphi(x) \cdot \varphi^{-1}(x) \cdot \mathbf{b}(x) =$$

$$A \cdot \left(\varphi(x) \cdot \varphi^{-1}(x_0) \cdot \mathbf{y}^0 + \varphi(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \varphi^{-1}(t) \mathbf{b}(t) dt \right) + \mathbf{b}(x) = A \cdot \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x).$$

Z věty výše máme navíc jednoznačnost. □

Důsledek

Jako důsledek předchozí věty lze odvodit větu o pravé straně ve tvaru kvazipolynomu i následující větu.

Věta 4.12 (O speciální pravé straně pro soustavu n-tého řádu)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je matice a $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ jsou $n \times 1$ vektory polynomů. Pak soustava

$$\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y} + \mathbf{p}(x) \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + \mathbf{q}(x) \cdot e^{ax} \cdot \sin bx$$

má řešení ve tvaru

$$\mathbf{y}(x) = \tilde{\mathbf{p}}(x) \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + \tilde{\mathbf{q}}(x) \cdot e^{ax} \cdot \sin bx,$$

kde $\tilde{\mathbf{p}}$, $\tilde{\mathbf{q}}$ jsou vektory polynomů a $\max\{\deg \tilde{\mathbf{p}}, \deg \tilde{\mathbf{q}}\} = \max\{\deg \mathbf{p}, \deg \mathbf{q}\}$ + násobnost $(a + ib)$ jako vlastního čísla A.

Důkaz
Bez důkazu. $\square$

Poznámka
Není-li pravá strana ve tvaru kvazipolynomu, pak lze řešení nehomogenní rovnice najít metodou variace konstant ve tvaru $\mathbf{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \cdot \mathbf{y}_i(x)$, kde $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ tvoří FSŘ rovnice $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

5 Metrické prostory

5.1 Základní pojmy

Definice 5.1 (Metrický prostor (MP))

Metrickým prostorem budeme rozumět dvojici $(\mathbb{P}, \varrho)$, kde $\mathbb{P}$ je množina bodů a $\varrho : \mathbb{P}\times\mathbb{P} \to \mathbb{R}$ splňuje:

$$(i)\forall x, y \in \mathbb{P} : \varrho(x, y = 0) \Leftrightarrow x = y,$$

$$(ii)\forall x, y \in \mathbb{P} : \varrho(x, y) = \varrho(y, x), \text{(symetrie)}$$

$$(iii)\forall x, y, z \in \mathbb{P} : \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z). (\triangle\text{-nerovnost})$$

Poznámka
Z (i) a (iii) (volba $x = z$) vyplývá $\varrho(x, y) \geq 0$.

Tvrzení 5.1 (Cauchyova nerovnost)

$n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Pak

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Důkaz
$a_i = 0, \forall i \implies$ jasné. Jinak $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$.

$$0 \le \sum_{i=1}^n (a_i \cdot x + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot x^2 + 2\left(\sum_{i=0} a_i b_i\right) \cdot x + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

Kvadratická funkce, která je na $\mathbb{R}$ nezáporná a $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0 \implies$ má nejvýše 1 kořen $\implies$

$$\implies 0 \ge D = 4\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

□

Tvrzení 5.2 (Trojúhelníková nerovnost v $\mathbb{R}^n$)

Buď $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. *Potom* $\varrho_e(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \le \varrho_e(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \varrho(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Důkaz
Rozepíšeme:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}.$$

Označme $a_i = x_i - y_i$, $b_i = (y_i - z_i)$ a přepišme:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Umocníme na druhou (druhé mocniny pod odmocninami jsou jistě kladné, takže i jejich součet):

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \le \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Po odečtení správných členů nám zbude Cauchyova nerovnost. □

Definice 5.2 (Otevřená a uzavřená koule)

Nechť $(\mathbb{P}, \varrho)$ je MP, $x \in \mathbb{P}, r > 0$.

Otevřenou koulí se středem x a poloměrem r nazveme $\mathrm{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{P} | \varrho(x, y) < r\}$.

Uzavřenou koulí nazveme $\overline{\mathrm{B}(x, r)} = \{y \in \mathbb{P} | \varrho(x, y) \le r\}$.

Definice 5.3 (Otevřená, uzavřená)

Nechť $(\mathbb{P}, \varrho)$ je metrický prostor. Řekneme, že množina $G \subseteq \mathbb{P}$ je otevřená (v $(\mathbb{P}, \varrho)$), jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje $r > 0$, že $\mathrm{B}(x, r) \subseteq G$.

Řekneme, že množina $F \subseteq \mathbb{P}$ je uzavřená (v $(\mathbb{P}, \varrho)$), pokud je $\mathbb{P} \setminus F$ otevřená.

Věta 5.3 (Vlastnosti otevřených množin)

Nechť $(\mathbb{P}, \varrho)$ je metrický prostor. Pak $\emptyset$ a $\mathbb{P}$ jsou otevřené, průnik konečně mnoha otevřených je otevřená, sjednocení libovolně mnoha otevřených je otevřená.

Důkaz

Zřejmé, zvolíme minimum z okolí v každé z nich, najdeme $U \ni x$ a okolí v ní. Viz MetPro. $\square$

Věta 5.4 (Vlastnosti uzavřených množin)

Nechť $(\mathbb{P}, \varrho)$ je metrický prostor. Pak $\emptyset$ a $\mathbb{P}$ jsou uzavřené, konečné sjednocení uzavřených je uzavřená, libovolný průnik uzavřených je uzavřena.

Důkaz

Přes doplňky, viz MetPro. $\square$

Definice 5.4 (Vnitřní bod, vnitřek)

Nechť $(\mathbb{P}, \varrho)$ je metrický prostor, $A \subseteq \mathbb{P}$ a $x \in \mathbb{P}$. Řekneme, že x je vnitřním bodem množiny A, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $\mathrm{B}(x, r) \subseteq A$. Množinu všech vnitřních bodů A nazýváme vnitřkem A a značíme $\operatorname{int} A$.

Věta 5.5 (Charakterizace vnitřku)

Nechť $(\mathbb{P}, \varrho)$ je metrický prostor a $A \subseteq \mathbb{P}$. Potom $\operatorname{int} A$ je největší (vzhledem k inkluzi) otevřená množina obsažená v A.

Důkaz

$\operatorname{int} A$ je otevřená: Podle definice $\forall x \in \operatorname{int} A \; \exists r > 0 : \mathrm{B}(x, r) \subseteq A$. Tvrdíme, že $\mathrm{B}(x, r) \subseteq A$. $\forall y \in \mathrm{B}(x, r)$ zvolme $\tilde{r} = r - \varrho(x, y)$. Pak $\mathrm{B}(y, \tilde{r}) \subseteq \mathrm{B}(x, r) \subseteq A \implies y \in \operatorname{int} A$. $\forall x \in \operatorname{int} A \; \exists r > 0 : \mathrm{B}(x, r) \subseteq \operatorname{int} A \implies \operatorname{int} A$ je otevřená.

$\operatorname{int} A \subseteq A$ jasné. $\operatorname{int} A$ je největší otevřená množina v A: Sporem. Nechť $\exists G$ otevřená, $\operatorname{int} A \subsetneq G \subseteq A$. Pak $\exists x \in G \setminus \operatorname{int} A$, ale G otevřená, tedy $\exists r > 0$, že $\mathrm{B}(x, r) \subseteq G \subseteq A \implies x \in \operatorname{int} A$. ↯. $\square$

Důsledek

A otevřená $\implies \operatorname{int} A = A$.

Definice 5.5 (Hraniční bod, hranice, uzávěr)

Nechť $(\mathbb{P}, \varrho)$ je metrický prostor, $M \subseteq \mathbb{P}$ a $x \in \mathbb{P}$. Řekneme, že x je hraničním bodem M, jestliže $\forall r > 0$ platí $M \cap \mathrm{B}(x, r) \neq \emptyset$ a $(\mathbb{P} \setminus M) \cap (\mathrm{B}(x, r)) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů nazýváme hranicí M a značíme jí ∂M.

Uzávěr množiny M je definován jako $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Věta 5.6 (Uzávěr a uzavřené množiny)

Nechť $(\mathbb{P}, \varrho)$ *je metrický prostor a* $A \subseteq \mathbb{P}$. *Pak* A *je uzavřená v* $\mathbb{P} \Leftrightarrow \overline{A} = A$.

Důkaz

$\Longrightarrow$: A uzavřená $\Longrightarrow$ $\mathbb{P} \setminus A$ je otevřená $\Longrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{P} \setminus A \; \exists r > 0 : \mathrm{B}(x, r) \subseteq \mathbb{P} \setminus A \Longrightarrow x \notin \partial A \Longrightarrow \partial \subseteq A \Longrightarrow \overline{A} = A \cup \partial A = A$.

$\Leftarrow$: $A = \overline{A} = A \cup \partial A \Longrightarrow \partial A \subseteq A \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{P} \setminus A \; x \notin \partial A \Longrightarrow \exists r > 0 :$ $\mathrm{B}(x, r) \cap A = \emptyset$ nebo $\mathrm{B}(x, r) \cap (\mathbb{P} \setminus A) = \emptyset \Longrightarrow \mathrm{B}(x, r) \cap A = \emptyset \Longrightarrow \mathrm{B}(x, r) \subseteq \mathbb{P} \setminus A$ $\Longrightarrow \mathbb{P} \setminus A$ je otevřená $\Longrightarrow$ A je uzavřena. □

Věta 5.7 (Vlastnosti uzávěru)

Nechť $(\mathbb{P}, \varrho)$ *je metrický prostor a* $A \subseteq P$. *Potom platí*

$$(i) A \subseteq B \Longrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}.$$

$$(ii) \text{ Nechť } A \neq \emptyset, \text{ pak } \overline{A} = \{x \in \mathbb{P} | \varrho(x, A) = \inf \{\varrho(x, y) | y \in A\} = 0\}.$$

$$(iii) \overline{\overline{A}} = \overline{A}.$$

Důkaz

(i): Nechť $x \in \overline{A} = A \cup \partial A \subseteq B \cup \partial A$. Je-li $x \in B$, pak $x \in \overline{B} = B \cup \partial B$. Je-li $x \in \partial A$ a $x \notin B$, pak $\forall r > 0 : \mathrm{B}(x, r) \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow \mathrm{B}(x, r) \cap B \neq \emptyset$ a $\{x\} \in \mathrm{B}(x, r) \cap (\mathbb{P} \setminus B) \neq \emptyset$ $\Longrightarrow x \in \partial B \Longrightarrow x \in \overline{B}$.

(ii) Označme $M = \{x \in \mathbb{P} | \varrho(x, A) = 0\}$. M je uzavřená: Nechť $y \in \mathbb{P} \setminus M$, pak $\varrho(y, A > 0)$, tedy $\exists r > 0 : \mathrm{B}(y, r) \cap A = \emptyset$. Tvrdíme, že $\mathrm{B}(y, \frac{r}{2}) \subseteq \mathbb{P} \setminus M$: $\forall a \in A \; \forall z \in \mathrm{B}(y, \frac{r}{2})$, pak $\varrho(z, a) \geq \varrho(y, a) - \varrho(z, y) > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \Longrightarrow z \in \mathrm{P} \setminus M \Longrightarrow \mathrm{B}(y, \frac{r}{2}) \subseteq \mathbb{P} \setminus M$. Tedy $\forall y \in \mathbb{P} \setminus M \; \exists r > 0 : \mathrm{B}(y, \frac{r}{2}) \subseteq \mathbb{P} \setminus M \Longrightarrow \mathbb{P} \setminus M$ je otevřená $\Longrightarrow$ M je uzavřená. Podle (i) je $A \subseteq M \Longrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{M} = M$.

Dokážeme opačnou inkluzi ($M \subseteq \overline{A}$): Nechť $x \in \mathbb{P} \setminus \overline{A} \Longrightarrow$ podle předchozí věty je $\overline{A}$ uzavřená, a tedy $\mathbb{P} \setminus \overline{A}$ je otevřená $\Longrightarrow \exists r > 0 : \mathrm{B}(x, r) \cap \overline{A} \neq \emptyset \Longrightarrow \varrho(x, A) \geq r > 0$ $\Longrightarrow x \notin M$. Z $\mathbb{P} \setminus \overline{A} \subseteq \mathbb{P} \setminus M \Longrightarrow M \subseteq \overline{A}$.

(iii) Pro $A = \emptyset$ je $\overline{A} = \emptyset$ a tvrzení platí. Jinak podle (ii) $\overline{A} = M$ a $\overline{M} = M$. Pak $\overline{\overline{A}} = \overline{M} = M = \overline{A}$. □