# 1 Řady

## 1.1 Úvod

**Definice 1.1**

Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost. Číslo $s_m = a_1+a_2+\ldots+a_m$ nazveme $m$-tým částečným součtem řady $\sum a_n$. Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, pokud tato limita existuje. Je-li tato limita konečná, pak řekneme, že řada je konvergentní. Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je divergentní. Tuto limitu budeme značit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Věta 1.1** (Nutná podmínka konvergence)

*Jestliže je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

*Důkaz*

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m = s \in \mathbb{R}$. $a_n = s_n - s_{n-1}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$ □

*Pozor*

Tato věta je pouze a jen implikace.

**Věta 1.2** (konvergence součtu řad)

*Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\cdot a_n$ *konverguje.*

*Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, pak* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

*Důkaz*

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\exists$ limita z $s_m \to s \in \mathbb{R}$ a to je z AL právě tehdy, když konverguje $\alpha s_m \to \alpha\cdot s \in \mathbb{R}$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\cdot a_n$ konverguje.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma \in \mathbb{R}$ konvergují, tedy konverguje i $s_m + \sigma_m \to s+\sigma \in \mathbb{R}$. □

## 1.2 Řady s nezápornými členy

*Pozorování*

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je řada s nezápornými členy. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, nebo má součet $+\infty$.

*Důkaz*
$s_m = a_1 + \ldots + a_m \le a_1 + \ldots + a_{m+1} = s_{m+1}$. $s_m \ge 0$ neklesající $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m \in [0,\infty]$. □

**Věta 1.3** (Srovnávací kritérium)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ platí $a_n \le b_n$. Pak a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.*

*Důkaz*
a) Označme $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ a $\sigma_n = b_1 + \ldots + b_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ platí

$$s_n = a_1+\ldots+a_{n_0}+a_{n_0+1}+\ldots+a_n \le a_1+\ldots+a_{n_0}+b_{n_0+1}+\ldots+b_n \le a_1+\ldots+a_{n_0}+\sigma_n \le a_1+\ldots+a_{n_0}+\sigma$$

A to je konečné, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tedy $\sigma \in \mathbb{R}$. $s_n$ neklesající a omezená $\implies$ $\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$.

b) Nepřímím důkazem z a). □

**Věta 1.4** (Limitní srovnávací kritérium)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže $A \in (0,\infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Jestliže $A = 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Jestliže $A = \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.*

*Důkaz*
(i) Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in (0,\infty)$ plyne, k $\varepsilon = \frac{K}{2} \exists n_0\ \forall n \ge n_0 : \left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon = \frac{K}{2}$, tedy $\frac{K}{2} \le \frac{a_n}{b_n} \le \frac{3}{2}K$.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\overset{\text{konvergence součtu řad}}{\implies}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}K\cdot b_n$ konverguje $\wedge a_n \le \frac{3}{2}K\cdot b_n \overset{\text{Srov. kritérium}}{\implies}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\wedge \frac{K}{2}\cdot b_n \le a_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{2}\cdot b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

(ii) Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ plyne, k $\varepsilon = 1 \exists n_0\ \forall n \ge n_0 : \left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon = 1$, tedy $a_n < b_n$, a pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle srovnávacího kritéria.

(iii) Úplně stejně jako (ii). □

**Věta 1.5** (Cauchyovo odmocninové kritérium)

*Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy, potom*

$$(i) \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$

$$(iv) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje,}$$

$$(v) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje.}$$

*Důkaz*

$(i)$ $b_n = q^n$. Víme, že $a_n < b_n$ $\forall n \geq n_0$, tedy použijeme srovnávací kritérium.

$(i) \implies (ii)$ : $b_n = \left\{\sqrt[n]{a_n}, \sqrt[n+1]{a_n}, \ldots\right\}$. $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}_n < 1$. Nalezneme $q \in \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, 1\right)$. Z definice $\lim_{n\to\infty} b_n$ pro $\varepsilon = q - \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ je $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : b_n < q$, tedy $\forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q$, tedy podle $(i)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(ii) \implies (iii)$ : $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \implies \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, tedy podle $(ii)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(iv)$ : podobně jako v $(i) \implies (ii)$ dostaneme $\forall n_0 > n_k : b_{n_0} > q > 1$, tedy $\forall n_0\ \exists n > n_0 : \sqrt[n]{a_n} > q > 1 \implies a_n > 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tedy podle nutné podmínky konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

$(iv) \implies (v)$ : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. □

**Věta 1.6** (d'Alambertovo podílové kritérium)

*Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy. Potom:*

$$(i) \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$

$$(iv) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje,}$$

*Důkaz*

$(i)$ Víme indukcí $a_{n_0+k} < q^k a_{n_0}$ a z konvergence geometrické řady $\sum_{k=1}^{\infty} q^k a_n$ konverguje $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(i) \implies (ii)$: $b_n = \sup\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}, \dots\right\}$. $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Zvolíme $q \in (\lim_{n\to\infty} b_n, 1)$. Tedy $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : b_n < q \implies \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, tudíž podle $(i)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(ii) \implies (iii)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, tedy podle $(ii)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(iv)$: Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ definicí limity pro $\varepsilon < \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1$ vyplývá $\exists n_0\ \forall n \geq n_0$ : $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies a_{n+1} > a_n$. Máme rostoucí posloupnost kladných čísel $\implies \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tedy podle nutné podmínky konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. $\square$

## **Věta 1.7** (Kondenzační kritérium)

*Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy splňující* $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ *konverguje.*

*Důkaz*

Pro $k \in \mathbb{N} : s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$ $t_k = \sum_{j=0}^{k} 2^j \cdot a_{2^j}$.

$\Leftarrow$: Označme $A = \sum_{j=0}^{k} 2^j \cdot a_{2^j}$, pak $A \in \mathbb{R}$. Nechť $m \in \mathbb{N}$ a nalezneme $kin\mathbb{N}$, $m < 2^k$. Pak $t_k \leq A$ a:

$$s_m \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^{k-1}} + \dots + a_{2^k - 1}) \leq t_{k-1} \leq A.$$

Tedy $s_m$ je shora omezená a rostoucí $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m \in \mathbb{R} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\implies$ : Označme $B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$ a nalezneme $m \in \mathbb{N}$, aby $2^k \leq m$. Pak $s_m \leq B$ a platí:

$$s_m \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}) \geq a_1 + \frac{1}{2}(t_k - 1 \cdot a_1) \leq \frac{1}{2} t_k \implies$$

$t_k$ je shora omezená rostoucí posloupnost $\implies \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. $\square$