

Organizační úvod

Úvod

Poznámka (Motivace)

Hledání řešení diferenciálních rovnic. (Např. nahradíme rovnici definicí operátoru a hledáme, kde je operátor identita. Tedy neřešíme rovnice, ale prostory, na kterých máme funkce.)

Definice 0.1

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} \vee \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

1 Banachovy a Hilbertovy prostory

Definice 1.1 (Normovaný lineární prostor)

Nechť X je vektorový prostor nad \mathbb{K} . Funkci $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ nazveme normou na X , pokud

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{o},$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

$$\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Tvrzení 1.1

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} .

Funkce $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ je translačně invariantní metrika na X .

Norma je 1-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na x .

Zobrazení $+: X \times X \rightarrow X$ a $\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$ jsou spojitá.

┌
Důkaz

První část byla na MA3. Druhá: Zvol $x, y \in X$. Pak $\|y\|, \|x\| \leq \|x\| + \|x - y\|$, tudíž $|||x| - |y||| \leq \|x - y\|$.

Třetí část: Připomenutí: Součin metrických prostorů s maximovou metrikou je metrický prostor. Důkaz tohoto i třetí části je pak jednoduché cvičení. □
└

Definice 1.2 (Uzavřená a otevřená koule)

$$B_X(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\}.$$

$$U_X(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| < r\}.$$

$$S_X(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| = r\}.$$

$$B_X = B(0, 1)$$

$$U_X = U(0, 1)$$

$$S_X = S(0, 1)$$

Definice 1.3 (Banachův prostor)

Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Dále se opakovaly metrické prostory. Úplnost, kompaktnost a Bairova věta.

Tvrzení 1.2

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor. Potom a) Je-li Y Banachův, pak je Y uzavřený v X . Pokud je naopak X Banachův, pak Y je Banachův právě tehdy, když je uzavřený.

┌

Důkaz

Je-li (P, ϱ) úplný, pak $M \subseteq P$ je úplný $\Leftrightarrow M$ je uzavřený. To dává speciálně b).

└

(P, ϱ) je MP, pak $M \subseteq P$ je úplný $\implies M$ uzavřený. To dává speciálně a). □

Například

$(\mathbb{K}, \|\cdot\|_p)$, $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$, kde funkce je $\Omega \rightarrow \mathbb{K}$ a norma je definována jako p -tá odmocnina z integrálu funkce na p . $l_p(l)$ resp. $l_p(l, \mathbb{K})$ je diskretní verze předchozího (tj. se sumou). $\mathbb{C}(K)$, kde K je hausdorffův a kompaktní TP.

c jsou všechny posloupnosti se supremovou normou, c_0 jsou všechny posloupnosti konvergující k 0 se supremovou normou. c_{00} sestává z těch posloupností, kde je jen konečně mnoho nenulových prvků (norma je maximová), je to lineární prostor, ale není Banachův. $c_0(I)$ je zobecnění z $c_0(\mathbb{N})$ na libovolnou diskretní množinu I , tj. obsahuje „posloupnosti“, kde pro každé ε je pouze konečně mnoho členů větších než ε (pak $(c_0(I), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachův).

$\mathcal{L}^1([0, 1], \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1})$ (prostor hladkých funkcí na intervalu $[0, 1]$), kde $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. $\mathcal{M}(K) = \{\mu : \text{Borel}(K) \rightarrow \mathbb{K} \mid \mu \text{ regulární míra}\}$, $\|\mu\| := \sup \{\sum_{i=1}^\infty |\mu(B_i)| \mid \bigcup B_i = K, B_i \text{ Borelové}\}$.

Věta 1.3

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Důkaz

Později. □

Lemma 1.4

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X , $B_1 = B_{X,\|\cdot\|_1}$, $B_2 = B_{X,\|\cdot\|_2}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|^2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.

Důkaz

\Rightarrow : Zvol $x \in aB_1$, pak $\|\frac{x}{a}\|_1 \leq 1 \Rightarrow x \in B_2$. Opačně: Zvol $x \in B_2$, pak $\|x\|_2 \leq 1 \Rightarrow x \in B_1$.

\Leftarrow : Pokud $x = 0$, pak jsou nerovnosti jasné. Zvol $x \neq 0$. Pak $\frac{x}{\|x\|_1} \in B_1$. Pak $\frac{ax}{\|x\|_1} \in B_1 \subset B_2 \Rightarrow a\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Analogicky pro druhý směr. □

Tvrzení 1.5

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a B_1 a B_2 jako minule. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.
2. Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.
3. Zobrazení $\text{id} : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.
4. Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami $(X, \|\cdot\|_2)$.
5. $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$, právě když $\|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$ pro $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$.

Důkaz

$1 \Leftrightarrow 2$ plyne z předchozího lemmatu. $3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$ je lehké a platí ve všech MP. $1 \Rightarrow 5$ jasné.

$5 \Rightarrow 1$: Sporem posloupností jdoucí k 1. TODO □

Definice 1.4

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Poznámka (Fakt)

Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny. (A naopak každá konvexní množina může být koulí v nějaké normě.)

Definice 1.5 (Konvexní obal)

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu $\text{conv } M = \bigcap \{C \supset M \mid C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 1.6

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak

$$\text{conv } M = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid x_i \in M, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

┌
Důkaz

└: Stačí dokázat, že množina vpravo je konvexní. Přímočaré.

└: Stačí dokázat, že každý prvek vlevo je v konvexním obalu. Indukcí podle n , přímočaré. □

Definice 1.6

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Poznámka (Fakt)

Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X , která obsahuje $U(x, r)$ respektive $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$ a $r \geq 0$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.

┌
Důkaz

└ Jednoduchý. □

Definice 1.7

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako

$$\overline{\text{span}} M = \bigcap \{Y \supset M \mid Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$$

a uzavřený konvexní obal jako $\overline{\text{conv}} M = \bigcap \{TODO\}$.

Poznámka (Fakt)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak \overline{Y} je podprostor X a \overline{C} je konvexní množina.

Poznámka (Fakt)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\text{span}} M = \overline{\text{span } M}$ a $\overline{\text{conv}} M = \overline{\text{conv } M}$.

Věta 1.7

Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\text{span}(Y \cup Z)$ je uzavřený.

┌

Důkaz

Stačí dokázat pro $\dim Z = 1$ (pak indukci). Ať $Z = \text{span}(e)$, $e \notin Y$. Ověříme, že $\text{span}(Y \cup \{e\}) = \{y + ke | k \in \mathbb{K}\}$ je uzavřený: Ať $x_n = y_n + k_n e \rightarrow x \in X$. Chci $x \in \text{span } Y$.

1. krok: (t_n) je omezená. (Kdyby ne, pak má limitu nekonečno.) Pak ale $\|\frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} + e\| = \frac{1}{|t_{n_k}|} \|x_{n_k}\| \rightarrow 0$, tedy $\frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} \rightarrow -e \notin Y$, tedy Y není uzavřená. \nexists

Tedy existuje posloupnost (n_k) , že $t_{n_k} \rightarrow t \in \mathbb{K}$. Pak ale $y_{n_k} = x_{n_k} - t_{n_k} e \rightarrow x - te \in Y$. Tedy $\exists z \in Y : x - te = z$, tj. $x = z + te \in \text{span}(Y \cup \{e\})$. \square

└

Důsledek

Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X .

TODO

Věta 1.8 (Test úplnosti)

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

┌ *Důkaz*

\implies : Ať X je Borelovský, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je AK řada. $s_N = \sum_{n=1}^N x_n$. Chceme (s_n) je cauchy: Buď $\varepsilon > 0$. Ať $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\sum_{n=N}^M \|x_n\| < \varepsilon$, $n_0 \leq N < M$. Pak ale pro $n_0 \leq N < M$ je

$$\|s_N - s_M\| = \left\| \sum_{n=N+1}^M x_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \|x_n\| < \varepsilon.$$

Tedy (s_n) je konvergentní.

\Leftarrow : Ať (x_n) je cauchyovská. Indukcí najdeme podposloupnost, že $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_1})$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - x_{n_1} + x_{n_1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - x_{n_1}) + \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_1} = z + x_{n_1}.$$

Celkem $\exists(n_k) \nearrow$, že $\lim(x_{n_k})$ existuje. Značme $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Chceme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. V metrickém prostoru konverguje Cauchyovská posloupnost právě tehdy, pokud existuje její konvergentní podposloupnost. \square

Definice 1.8 (Zobecněná řada)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X . Symbol $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou.

Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ . Řekneme, že zobecněná řada ... konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \subseteq F : \left\| x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada ... (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní.

Definice 1.9 (Bolzanova-Cauchyova podmínka)

Řekneme, že zobecněná řada TODO

Věta 1.9 (Nutná podmínka konvergence)

Nechť $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X . Pak je její součet určen jednoznačně a $(\|x_\gamma\|)_{\gamma \in \Gamma} \in c_0(\Gamma)$.

┌ *Důkaz (Jednoznačnost)*

At $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma = x \neq y = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$. Pak $\forall \varepsilon > 0$:

$$\exists F_x \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F \supseteq F_x : \|x - \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists F_y \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F \supseteq F_y : \|y - \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\varepsilon = \|x - y\| \leq \|x - \sum_{F_x \cup F_y} x_\gamma\| + \|\sum_{F_x \cup F_y} x_\gamma - y\| < \varepsilon$. ✎

□

┌ *Důkaz (Existence)*

Chceme $(\|x_\gamma\|) \in c_0(\Gamma)$: At $\varepsilon > 0$ libovolné. Najdeme

$$F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \supset F : \|x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\gamma_0 \notin F$ máme

$$\|x_{\gamma_0}\| = \left\| \sum_{\gamma \in F \cup \{\gamma_0\}} x_\gamma - x + x - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma \right\| \leq \|\dots\| + \|\dots\| < \varepsilon.$$

Tedy $\{\gamma \in \Gamma \mid \|x_\gamma\| > \varepsilon\} \subseteq F \in \mathcal{F}(\Gamma) \implies (\|x_\gamma\|) \in c_0(\Gamma)$. (Je tam pouze konečný počet prvků větších než ε .)

□

Věta 1.10

Nechť X je Banachův prostor.

1. *Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*
2. *Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.*
3. *Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda \subset \Gamma$, pak je i zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Lambda} x_\gamma$ konvergentní.*

┌

Důkaz (1.) \Rightarrow : Ať $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ je konvergentní. Zvol $\varepsilon > 0$. Zvolíme

$$F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \supseteq F : \left\| \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\tilde{F} \in \mathcal{F}(\Gamma)$, že $\tilde{F} \cap F = \emptyset$ máme:

$$\left\| \sum_{\gamma \in \tilde{F}} x_\gamma \right\| = \left\| \sum_{\gamma \in F \cup \tilde{F}} x_\gamma - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma + \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma \right\| \leq \|\dots\| + \|\dots\| < \varepsilon.$$

 \Leftarrow : Ať $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ splňuje B-C podmínku. Pak najdeme posloupnost $(F_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}(\Gamma)^\mathbb{N}$, že

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \wedge \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma) : F' \cap F_n = \emptyset : \left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \frac{1}{n}.$$

Označ $y_n = \sum_{\gamma \in F_n} x_\gamma$. 1. krok: (y_n) je cauchyovská. (Dokáže se snadno.) 2. krok: Tedy existuje $y \in X : \lim y_n = y$. Chceme $y = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$. Ať $\varepsilon > 0$.

$$\forall F' \supset F : \left\| y - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| \leq \left\| y_{n_0} - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| + \|y_{n_0} - y\| = \sum_{\gamma \in F' \setminus F_{n_0}} x_\gamma \leq \frac{1}{n_0} + \|y_{n_0} - y\| < \varepsilon.$$

□

└

┌

*Důkaz (2.)*Víme, že $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|$ je konvergentní. Dle tvrzení níže tedy

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\| = S = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\| : F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\}.$$

Ověříme, že $\sum x_\gamma$ splní B-C podmínku: Ať $\varepsilon > 0$. Ať $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že $S - \varepsilon < \sum_{\gamma \in F} \|x_\gamma\|$. Pak $\forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, že $F' \cap F = \emptyset$:

$$\left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| \leq \sum_{\gamma \in F'} \|x_\gamma\| = \sum_{\gamma \in F' \cup F} \|x_\gamma\| - \sum_{\gamma \in F} \|x_\gamma\| < \varepsilon.$$

□

└

┌

Důkaz (3.)

Snadný důsledek 1., protože B-C podmínka se zjevně dědí na podmnožiny.

□

└

Tvrzení 1.11

Nechť $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$ je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když $\sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} a_\gamma : F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\} < +\infty$. A navíc platí $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} a_\gamma : F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\}$.

┌ *Důkaz*

\Rightarrow : Ať $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$ konverguje. Pak zvolíme $F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \supset F : \|\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma - \sum_{\gamma \in F} a_\gamma\| < 1$. Pak $\forall H \in \mathcal{F}(\Gamma) : \sum_{\gamma \in H} a_\gamma \leq \sum_{\gamma \in H \cup F} a_\gamma \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma + 1$. Tedy $\sup \dots \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma + 1 < \infty$.

\Leftarrow : Ať $S := \sup \dots < \infty$. Chceme $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = S$. Ať $\varepsilon > 0$. Ať $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$ (z definice suprema) taková, že $S - \varepsilon < \sum_{\gamma \in H} a_\gamma$. Pak pro $F' \supset H$ máme

$$|S - \sum_{\gamma \in F'} a_\gamma| = S - \sum_{\gamma \in F'} a_\gamma < S - \sum_{\gamma \in H} a_\gamma < \varepsilon.$$

└ Tedy $\sum a_\gamma = S$. □

Tvrzení 1.12

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní.

┌ *Důkaz*

\Rightarrow : Ať $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| =: S < \infty$. Pak

$$\sup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \sum_{n \in F} \|x_n\| \leq \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^N \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = S < \infty,$$

neboť každá konečná množina v přirozených číslech má maximum (a odebráním kladných prvků sumu zmenšíme).

\Leftarrow : Ať $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$ je konvergentní, pak dle předchozího tvrzení $S := \sup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \sum_{n \in F} \|x_n\| < \infty$. Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n \in [N]} \|x_n\| \leq S < \infty.$$

└ □

Věta 1.13

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v Banachově (pro normovaný lineární prostor je důkaz složitější) prostoru X . Pak následující tvrzení jsou konvergentní:

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ konverguje (říkáme $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně).
2. $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ke stejnému součtu.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

┌ *Důkaz*

1 \implies 2: Ať $\varepsilon > 0$ a $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$. Ať $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňuje, že $\forall F' \supseteq F : \|\sum_{n \in F'} x_n - x\| < \varepsilon$, kde $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N} : F \subseteq \{\pi(1), \dots, \pi(n_0)\}$. Pak $\forall n \geq n_0 : \|\sum_{i=1}^n x_{\pi(i)} - x\| < \varepsilon$. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = x$.

2 \implies 3: okamžitě. 3 \implies 1: Pro spor předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$, ale $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ nesplňuje B-C podmínku. Zvolme $\varepsilon > 0$ svědčící o tom, že B-C podmínka není splněna. Pak existuje $(F_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$, že $F_n \cap F_m = \emptyset \ \forall n \neq m$, $\max F_n < \min F_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\|\sum_{i \in F_n} x_i\| \geq \varepsilon$.

Zvolme $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$ splňující, že existuje $(n_k) \nearrow$ a $(p_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, že $\pi(\{n_k, n_k + 1, \dots, n_k + p_k\}) = F_k \ \forall k \in \mathbb{N}$. Tedy $\forall k \in \mathbb{N} : \|\sum_{i=n_k}^{n_k+p_k} x_{\pi(i)}\| = \|\sum_{i \in F_k} x_i\| \geq \varepsilon$. To však znamená, že $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ nesplňuje B-C podmínku, tedy není konvergentní. ζ □

Věta 1.14

Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.

┌ *Důkaz*

Jasný z minulé věty. □

Navíc v \mathbb{R} platí ekvivalence.

Věta 1.15

Pokud $\dim X = +\infty$, pak $\exists (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ konverguje, ale $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ není konvergentní.

2 Lineární operátory a funkcionály

Poznámka (Opakovali jsme)

Lineární zobrazení (viz lingeбра), dále:

Věta 2.1

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. T je spojitý.
2. T je spojitý v jednom bodě.
3. T je spojitý v 0.
4. $\exists C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X$.
5. T je Lipschitzovské.
6. T je stejnoměrně spojitý.
7. $T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.
8. $T(B_X)$ je omezená.
9. $T(U(0, \delta))$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.

Prostor $\mathcal{L}(X \rightarrow Y)$ s normou $\|T\| = \sup_{x \in B_x} \|T(x)\|$ je normovaný lineární prostor.

Lemma 2.2

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

- $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ pro každé $x \in X$.
- $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$.
- $\|T\| = \inf \{C \geq 0 \mid \|T(x)\| \leq C\|x\| \forall x \in X\}$.

┌ *Důkaz*

Pro $x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$ platí $\|T(x)\| = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$.

$S_X \subseteq B_X$, tedy $\|T\| \geq \sup_{x \in S_X} \|T(x)\|$. $\forall x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$:

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \sup_{y \in S_X} \|T(y)\|,$$

tedy $\sup_{x \in S_X} \|T(x)\| \geq \sup_{x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} =: S_3$. Pro $x \in U_X \setminus \{\mathbf{o}\}$ platí $\|T(x)\| \leq \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq S_3$, tedy $\sup_{x \in U_X} \|T(x)\| \leq S_3$. Konečně, pro $x \in B_x$: $\|T(x)\| \leftarrow \|T((1 - \frac{1}{n})x)\| \leq \sup_{x \in U_X} \|T(x)\| =: S_4$, tedy $\|T_x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T((1 - \frac{1}{n})x)\| \leq S_4 \implies \sup_{x \in B(x)} \|T(x)\| \leq S_4$.

Dle prvního bodu máme nerovnost „ \geq “. Pro „ \leq “ zvolme $\varepsilon > 0$... ať $\tilde{c} > 0$ je takové, že $\tilde{c} < \inf \{ \dots \} + \varepsilon$. Pak $\|T\| = \sup_{x \in B_x} \frac{\|T_x\|}{\|x\|} \leq \inf \{ \dots \}$. □

Definice 2.1

Nechť X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} . Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X .

TODO!!!

TODO!!!

TODO!!!

Poznámka (Kvociet)

Nechť X je vektorový prostor nad \mathbb{K} a Y jeho podprostor. Definujeme relaci ekvivalence \sim na X jako $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y$.

Pro $x \in X$ pak definujeme $[x]$ jako třídu ekvivalence obsahující x .

Na množině $X/Y = \{[x] | x \in X\}$ definujeme operace $[x] + [y] = [x + y]$ a $\alpha[x] = [\alpha x]$.

Definice 2.2 (Kvociet)

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme faktoprostorem prostoru X podle Y nebo též kvocientem X podle Y . Dále definujeme tzv. kanonecké kvocientové zobrazení $q : X \rightarrow X/Y$ předpisem $q(x) = [x]$.

Definice 2.3 (Norma na kvocientu)

Buď X normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\|[x]\|_{X/Y} = \inf_{y \in [x]} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \text{dist}(x + Y, 0) = \text{dist}(x, Y).$$

Tato norma se nazývá kanonická kvocientová norma.

┌
Důkaz (Je to norma)
└ Triviální. □

Tvrzení 2.3

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q : X \rightarrow X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_x) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.

┌
Důkaz
└ Zřejmý. □

Věta 2.4

Nechť X je Banachův prostor. Potom TODO!

┌
Důkaz
Přes test úplnosti (X je Banachův, právě když každá abs. konvergentní řada je konvergentní). Ať $\{[x]_n | n \in \mathbb{N}\}$ splňuje $\sum_{n=1}^{\infty} < \infty$. Chceme $\sum_{[x]_n}$. Ať $\{y_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y$ jsou takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + y_n\| < \infty$. Pak $\sum (x_n + y_n)$ je konvergentní (podle testu úplnosti) a je prvkem X , tedy $q(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} q(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} [x_n]$. Tudíž $\sum_{n=1}^{\infty} [x_n]$ je v prostoru $q(X) = X/Y$. □
└

Poznámka (Zajímavosti)

l_{∞}/c_0 je docela zajímavý prostor (Rosemider? + Brech? 2012: Je nerozhodnutelné, zda l_{∞}/c_0 je izometricky univerzální Banachův prostor hustoty $|\mathbb{R}|$. Dokonce je nerozhodnutelné, zda takový prostor existuje.) ($l_{\infty}/c_0 \equiv \mathcal{C}(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$)

Definice 2.4 (Direktní součet)

Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je direktním (též algebraickým) součtem A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{\mathbf{o}\}$ a $X = A + B = \text{span}\{A \cup B\}$.

Definice 2.5 (Projekce)

Nechť X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P : X \rightarrow X$ se nazývá (lineární) projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Tvrzení 2.5 (Fakt)

Nechť X je vektorový prostor.

- Je-li $P : X \rightarrow X$ lineární projekce, pak $P \restriction_{\text{Rang } P} = \text{id}_{\text{Rang } P}$.
- Je-li Y podprostor X a $P : X \rightarrow Y$ lineární zobrazení splňující $P \restriction_Y = \text{id}_Y$, pak P je projekce X na Y .

┌ Důkaz

└ Triviální. □

Tvrzení 2.6

Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A a P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = \text{id}_X$, $\text{Rang } P_A = A$, $\text{Ker } P_A = B$, $\text{Rang } P_B = B$ a $\text{Ker } P_B = A$.

┌ Důkaz

└ Jednoduchý. □

Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X , pak $X = A \oplus B$, kde $A = \text{Rang } P$, $B = \text{Ker } P$ a $P = P_A$.

┌ Důkaz

└ Jednoduchý. □

Věta 2.7

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.

- Prostor Y má algebraický doplněk v X .
- Je-li A algebraický doplněk Y v X , je A algebraicky izomorfní s X/Y , speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

┌ *Důkaz*

Díky Zornovu lemmatu existuje algebraická báze $B \subset Y$ prostoru Y . Stejně tak existuje $B' \supset B$ báze X . Potom $Z = \text{span}(B' \setminus B)$ je algebraický doplněk Y v X , neboli $X = Y \oplus Z$.

Ať $X = Y \oplus A$. Pak chceme $q|_A: A \rightarrow X/Y$ je lineární izomorfismus: Víme q je lineární, q je prosté (ať $x \in A, q(x) = 0$, pak $x \in Y$, tedy $x \in A \cap Y = \{0\}$, takže $x = 0$) a q je na (Ať $x = y + a \in X$, pak $q(x) = q(a)$, tedy $q(x) \in q|_A(A)$). □

Definice 2.6 (Kodimenze)

Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak kodimenzi (značíme $\text{codim } Y$?) Y rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

Definice 2.7

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B , pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_t B$. Je-li A podprostor X , pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_t B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X . Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

Věta 2.8

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když zobrazení $T: X \rightarrow Y \oplus_1 Z$, $T(x) = (P_Y(x), P_Z(x))$ je izomorfismus.

┌ *Důkaz*

\Rightarrow : $\forall x \in X: \|T(x)\| = \|P_Y x\| + \|P_Z x\| \leq 2 \max(\|P_Y\|, \|P_Z\|) \|x\| \leq \|(P_Y + P_Z)x\| = \|x\|$. Tedy T je izomorfismus.

\Leftarrow : $\forall x \in X: \|P_Y x\| \leq \|P_Y x\| + \|P_Z x\| = \|T x\| \leq \|T\| \|x\|$, tedy $\|P_Y\| \leq \|T\|$. □

Věta 2.9

Nechť X je Banachův prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když Y a Z jsou uzavřené.

┌ *Důkaz*

Zatím bez důkazu. □

Věta 2.10

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Pak

- Y je izomorfní komplementovanému podprostoru X , právě když existují lineární operátory $S: X \rightarrow Y$ a $T: Y \rightarrow X$ splňující $S \circ T = \text{id}_Y$.

- Y je isometrické 1-komplementovanému podprostoru X , právě když existují lineární operátory $S : X \rightarrow Y$ a $T : Y \rightarrow X$ splňující $S \circ T = \text{id}_Y$ a $\max \{\|S\|, \|T\|\} \leq 1$.

┌ *Důkaz*

\Leftarrow : Polož $p := T \circ S : X \rightarrow X$. Pak p je zřejmě lineární a $\|p\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$, navíc $p^2 = (T \circ S) \circ (T \circ S) = p$, tedy p je projekce. Zároveň $p(X) = T(S(X))$, jelikož $S \circ T$ je identita, tak S je na a $p(X) = T(Y) = \text{Rang } T$. Zbývá si uvědomit, že T je izomorfismus (izometrie, pokud $\|S\|, \|T\| \leq 1$): Máme

$$\forall x \in X : \|Sx\| = \|ST Sx\| \leq \|S\| \cdot \|TSx\|,$$

tedy (protože S je na):

$$\forall y \in Y : \|y\| \frac{1}{\|S\|} \leq \|Ty\|,$$

tudíž T je izomorfismus.

\Rightarrow : Ať $P : X \rightarrow X$ je projekce, $L : P(X) \rightarrow Y$ izomorfismus na. Položíme $S := L \circ P$, $T := L^{-1}$, pak $S \circ T = L \circ P \circ L^{-1} = L \circ L^{-1} = \text{id}$. □

Poznámka (Zajímavosti pro všechny (nezkouší se))

Ví se ($\dim X = +\infty$, X Banach)

- X lze komplementovaně vnořit do $l_p \implies X \cong l_p$, $p \in [1, \infty]$.
- X lze komplementovaně vnořit do $c_0 \implies X \cong l_0$.
- Existuje nespočetně neizomorfních podprostorů L_p , $p \in (1, \infty)$.

Neví se:

- X lze komplementovaně vnořit do $L_1 \implies X \in \{l_1, L_1\}$.
- X lze komplementovaně vnořit do $\mathcal{C}([0, 1]) \implies X \cong \mathcal{C}(k?)$.

Ví se:

- $X \cong l_2 \Leftrightarrow (\forall Z, \dim Z = +\infty, Z \text{ Banach}, Z \hookrightarrow l_2 \implies Z \cong l_2)$.

Neví se, zda platí izometrická varianta předchozího.

3 Hilbertovy prostory

Lemma 3.1

A^\perp je uzavřený podprostor.

┌

Důkaz

Pro $y \in X$ ať $f_y(x) = \langle x, y \rangle$. Pak f_y je lineární a spojitý (z Cauchy-Swartz). $A^\perp = \bigcap_{y \in A} f_y^{-1}(0)$. □

Definice 3.1

Prostor se skalárním součinem $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se nazývá Hilbertův prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Například • $l_2 \dots \langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

• $L_2([0, 1]) \dots \langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$.

Tvrzení 3.2

Nechť $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad \mathbb{K} . Pak funkce $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).

┌

Důkaz

└ Přímočarý s použitím Cauchy-Swartz. □

Tvrzení 3.3 (Polarizační vzorec)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

v komplexním.

┌

Důkaz (Reálný případ, v \mathbb{C} analogicky)

$$4\langle x, y \rangle = 2\langle x, y \rangle - 2\langle x, -y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|-y\|^2 = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

└ □

Důsledek

Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T : X \rightarrow Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in X$.

┌

Důkaz

Izometrie zachovává pravé strany v polarizačním vzorci. □

└

TODO!

Věta 3.4

$(X, \|\cdot\|)$ je NLP. Pak $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pro skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle \Leftrightarrow$ platí:

$$\forall x, y \in X : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

┌

Důkaz (Reálný případ, komplexní analogicky)

\Rightarrow z Polarizačního vzorce. Pro \Leftarrow položíme $\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$, $x, y \in X$.
Následně ověříme podmínky (kromě linearitu (speciálně aditivity) je ověření triviální).
Aditivita: Chceme

$$LS = \forall x, y, z \in X : \langle x + y, z \rangle + \langle x - y, z \rangle = 2 \langle x, z \rangle = PS.$$

$$LS = \frac{1}{4} \left(\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 + \|x - y + z\|^2 - \|x - y - z\|^2 \right) =$$

z předpokladu $\stackrel{=}{=}$

$$\frac{1}{4} \left(2(\|x + z\|^2 + \|y\|^2) - 2(\|x - y\|^2 + \|y\|^2) \right) = \frac{1}{2} (\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2) = PS.$$

Tuto rovnost aplikujeme na $x = y$: $\langle 2x, z \rangle = 2 \langle x, z \rangle$, a na $\tilde{x} = \frac{1}{2}(x + y)$, $\tilde{y} = \frac{1}{2}(x - y)$:

$$\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 2 \left\langle \frac{1}{2}(x + y), z \right\rangle = \langle x + y, z \rangle.$$

└

□

Věta 3.5 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H . Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \text{dist}(x, C)$.

┌

Důkaz

Zvolme $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v C , že $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x\| = d(x, C)$. Chceme, že $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Tedy, protože C je uzavřená, existuje $y \in C : y_n \rightarrow y$. Pak ale $d(x, C) = \|x - y\|$.

Zbývá jednoznačnost: Ať $y, z \in C$ taková, že $\|x - y\| = \|x - z\| = \text{dist}(x, C)$. Pak $\|y - z\|^2 \leq 0$, tedy $y = z$. □

└

Věta 3.6 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \text{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \in Y^\perp$.

┌ Důkaz

└ Jednoduchý. □

Věta 3.7 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H . Pak $H = Y \oplus Y^\perp$ a projekce $P_Y : H \rightarrow Y$ příslušná rozkladu $H = Y \oplus Y^\perp$ má následující vlastnosti:

- $\|P_Y(x) - x\| = \text{dist}(x, Y) \leq \|x\|$ pro každé $x \in H$,
- $\|P_Y\| \leq 1$.

┌ Důkaz

$Y \cap Y^\perp = \{0\}$: Ať $x \in Y \cap Y^\perp$. Pak $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$.

$H = Y + Y^\perp$: Zvol $x \in H$. Dle vět výše existuje právě jedno $y \in Y : x - y \in Y^\perp$. Pak $x = y + x - y \in Y + Y^\perp$.

Tedy, $H = Y \oplus Y^\perp$, a zároveň z důkazu víme, že

$P_Y(x) =$ „jediný prvek $y \in Y$, že $x - y \in Y^\perp$ “ = „j. p. $y \in Y$, že $\|x - y\| = d(x, Y)$ “.

Tedy $\|P_Y(x) - x\| = d(x, Y) \leq \|x\|$. Zbývá $\|P_Y\| \leq 1$: $\|P_Y x\|^2 =$ □

Věta 3.8

Nechť H je Hilbertův prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ je podposloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.

┌

Důkaz

\implies už víme. \Leftrightarrow : Víme $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ splňuje B-C podmínku. Tedy pro $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall m > n \geq n_0 : \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| < \varepsilon.$$

Polož $F = \{1, \dots, n_0\}$. Zvol $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) : F' \cap F = \emptyset$. Pak

$$\left\| \sum_{k \in F'} x_k \right\|^2 \stackrel{\text{Pyt. věta}}{=} \sum_{k \in F'} \|x_k\|^2 \leq \sum_{k \in \min F'}^{\max F'} \|x_k\|^2 = \left\| \sum_{\dots}^{\dots} x_k \right\|^2 < \varepsilon.$$

└

□

Definice 3.2 (Ortogonalní, ortonormální, maximální ortonormální, úplný ortonormální, ortonormální báze)

Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortogonalní, pokud $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$.
- ortonormální, pokud A je ortogonalní a $A \subset S_X$.
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A .
- úplný ortonormální, pokud A je ortonormální a $\overline{\text{span}} A = X$.
- ortonormální báze, pokud $A = \{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ .

TODO

Tvrzení 3.9 (Fakt)

Je-li A ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak $\|x - y\| = \sqrt{2}$ pro každé dva prvky $x, y \in A$, $x \neq y$.

┌

Důkaz

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

└

□

┌

Poznámka

Tedy, pokud X je separabilní se skalárním součinem \implies každý ON-systém je spočetný.

└

Věta 3.10

Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.

┌

Důkaz

$\mathcal{P} = \{A \subset X \mid A \text{ je ON-systém}\}$ s uspořádáním inkluzí. Zvol $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$ lineárně uspořádané, pak $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{P}$ je horní závora $\mathcal{O} \implies$ (z Zornova lemmatu) $\exists A \in \mathcal{P}$ maximální. To je hledaný maximální ON-systém. \square

└

Věta 3.11 (Besselova nerovnost)

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.

┌

Důkaz

Ať $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $x_F := \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$. Pak $\|x\|^2 = \|x - x_F\|^2 + \|x_F\|^2$ podle Pythagorovy věty ($x - x_F \perp x_F$: $\forall i \in F : \langle x - x_F, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x_F, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle \langle x, e_i \rangle e_i, e_i \rangle = 0$). Tj. $\|x\|^2 \geq \|x_F\|^2 = \sum_{\gamma \in F} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$. Tedy máme omezení pro všechny konečné součty, tudíž celý součet bude omezen stejně (celý součet je supremum z konečných podle tvrzení někde výše). \square

└

Věta 3.12

Nechť H je Hilbertův prostor a $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je ortonormální systém v H . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$ pro každé $x \in H$ (tzv. Parsevalova rovnost).
2. $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$ pro každé $x \in H$.
3. $\{e_\gamma\}$ je ortonormální báze.
4. $H = \overline{\text{span}} \{e_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$.
5. $\{e_\gamma\}$ je maximální ortonormální systém.

┌
Důkaz

1 \implies 2: Necht $\varepsilon > 0$. Zvolíme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$: $\|x\|^2 - \varepsilon < \sum_{\gamma \in F} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$. Zvolíme $F' \supset F$, $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$. Pak

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{\gamma \in F'} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|^2 &\stackrel{\text{cos + Pythagorova věta}}{=} \|x\|^2 + \sum_{\gamma \in F'} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 - 2\Re \left\langle x, \sum_{\gamma \in F'} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma \right\rangle = \\ &= \dots + \dots - 2\Re \sum_{\gamma \in F'} \overline{\langle x, e_\gamma \rangle} \langle x, e_\gamma \rangle = \|x\|^2 - \sum_{\gamma \in F'} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

2 \implies 3: Triviální. 3 \implies 4: Triviální. 4 \implies 1: Necht $x \in H$ a $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, že existuje $\sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma$ splňující $\|x - \sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma\| < \varepsilon$. Položme $y := \text{span}(e_\gamma, \gamma \in F)$, pak $d(x, y) \leq \|x - \sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma\| < \varepsilon$. (Jelikož $d(x, y) = \|x - \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|$, neboť z lemmatu někde výše stačí ověřit $y \perp x - \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$, tj. stačí $\forall i \in F : \langle x - \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma, e_i \rangle = 0$, což je jednoduché.)

Tedy $\|x\| \leq \varepsilon + \|\sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|$ (z Besselovy nerovnosti víme, že suma konverguje a navíc víme, že v 1 platí \geq , tj. stačí dokázat \leq)

$$\|x\|^2 \leq \left(\varepsilon + \left\| \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma \right\| \right)^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon\|x\| + \sum_{\gamma \in F} \|\langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|^2 \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon\|x\| + \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2.$$

2 \implies 5: Ať $x \in \{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}^\perp$ (chceme, že $x = 0$). Z 2. víme, že $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma = \sum 0 = 0$.

5 \implies 4: Ať $Y = \overline{\text{span}}(e_\gamma, \gamma \in \Gamma)$. Pak $H = Y \oplus_t Y^\perp$ (zde se používá úplnost jako předpoklad věty, ze které toto plyne). $H = Y \oplus_t \{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}^\perp \stackrel{5}{=} Y \oplus_t \{\mathbf{o}\}$. \square

Poznámka

Bez úplnosti jsou ekvivalentní 1, 2, 3 a 4 a vyplývá z nich 5.

TODO!

Věta 3.13 (Ernst Sigismund Fisher (1907), Frigyes Riesz (1907))

TODO!!!

Věta 3.14 (?)

TODO!!!

Věta 3.15 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))

Necht H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $l : H \rightarrow H^*$, $l(y) = f_y$ je sdruženě lineární

$(I(\alpha y) = \bar{\alpha}I(y))$ izometrie H na H^* .

┌

Důkaz

$\forall y \in H$ máme: f_y je lineární, $\forall x \in H: f_y(x) \leq \|x\| \cdot \|y\|$, tedy f_y je spojitý a $\|f_y\| \leq \|y\|$,
 $f_y\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle = \|y\| \implies \|f_y\| = \|y\|, y \in H. \implies I$ je izometrie, sdruženě
 lineární. Zbývá „na“. To se dokáže z následujícího lemmatu:

Zvol $f \in H^*$, pak $H = \text{Ker } f \oplus (\text{Ker } f)^\perp$. Tedy existuje $z \in (\text{Ker } f)^\perp$ splňující $H = \text{Ker } f \oplus \text{span } \{z\}$. Položme $y := f(z)z$. Pak $I(y) = f$, jelikož:

$$\forall x \in H : I(y)(x) = \langle x, y \rangle = \langle x_{\text{Ker } f} + \alpha_x z, y \rangle = \langle \alpha_x z, y \rangle = \alpha_x \langle z, \overline{f(z)}z \rangle = f(\alpha_x z) = f(x).$$

└

□

Lemma 3.16

Nechť X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \text{Ker } f$. Pak $X = \text{Ker } f \oplus \text{span } \{x\}$. Tedy $\text{codim Ker } f = 1$.

┌

Důkaz

$\text{Ker } f \cap \text{span } \{x\} = \{\mathbf{0}\}$: Ať $\alpha \in \mathbb{K}$, pak pokud $\alpha x \in \text{Ker } f$, pak $\alpha f(x) = f(\alpha x) = 0$, tedy $\alpha = \mathbf{0}$.

$$\text{Ať } y \in X. \text{ Pak } y = \left(y - \frac{f(y)}{f(x)}x\right) + \frac{f(y)}{f(x)}x.$$

└

□

Definice 3.3

Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Symbolem X_R označme prostor X uvažovaný jako reálný. Tj. X_R je tatáž množina jako X uvažovaná s operací sčítání jako v X , s násobením reálným číslem jako v X a stejně definovanou normou.

Věta 3.17 (Reálná verze komplexního normovaného lineárního prostoru)

Nechť Z je komplexní normovaný lineární prostor. Pak platí

1. X_R je reálný normovaný lineární prostor. (Zřejmé.)
2. X_R je úplný, právě když X je úplný. (Norma je pořád tatáž.)
3. $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ je lineární, právě když $\Re \varphi : X_R \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární a $\Im \varphi(x) = -\Re \varphi(ix)$ pro každé $x \in X$.
4. Je-li $\varphi \in X^*$, pak funkcionál $\psi(x) = \Re \varphi(x)$, $x \in X_R$, patří do $(X_R)^*$ a platí $\|\psi\| = \|\varphi\|$.
5. Je-li $\psi \in (X_R)^*$, pak existuje právě jeden funkcionál $\varphi \in X^*$ takový, že $\psi(x) = \Re \varphi(x)$ pro $x \in X_R$. Je dán vzorcem $\varphi(x) = \psi(x) - i\psi(ix)$ a splňuje $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

6. Prostory $(X_R)^*$ a $(X^*)_R$ jsou izometrické.

┌
Důkaz

└
TODO.

□

Definice 3.4

Nechť X je reálný normovaný lineární prostor. Na $X \times X$ definujeme:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in X,$$

$$(\alpha_1 + i\alpha_2) \cdot (x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in X,$$

$$\|(x_1, x_2)\|_{X_C} = \sup \{ |(\cos \alpha)x_1 + (\sin \alpha)x_2|_X \mid \alpha \in [0, 2\pi) \}, \quad x_1, x_2 \in X.$$

Symbolem $(X_C, \|\cdot\|)$ značíme komplexní normovaný lineární prostor $(X \times X, +, \cdot, \|\cdot\|_{X_C})$.

Věta 3.18 (Komplexifikace)

Je-li X reálný normovaný lineární prostor, pak je $(X_C, \|\cdot\|)$ komplexní normovaný lineární prostor. Je-li navíc X Banachův, pak je X_C Banachův.

┌
Důkaz

Linearitu nebudeme dokazovat (definice je zvolena tak, aby to vycházelo, lehké cvičení). Norma je taktéž jednoduchá, nejtěžší je dokázat, že lze vytýkat konstanty.

X_C je Banachův plyne z toho, že $X \oplus_\infty X$ je Banach a norma $\|\cdot\|_{X_C}$ je ekvivalentní (konstanty 1 a 2) maximové normě, která je v definici součinu metrických prostorů a součin úplných metrických prostorů je úplný. □

Definice 3.5 (Sublineární funkcionál, pseudonorma)

TODO!

Věta 3.19 (Hans Hanh (1927), Stefan Banach (1929))

Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor.

- Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F|_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.
- Je-li p pseudonorma na X a t je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F|_Y = f$ a $|F(x)| \leq p(x)$, $x \in X$.

┌
Důkaz (1. bod)

1. krok: rozšíříme f o jednu dimenzi, tj. na $Z = Y \oplus \text{span}(x)$, kde $x \notin Y$. Položme $F(y + tx) := f(y) + t\alpha$, $y \in Y$, $t \in \mathbb{R}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je vhodně zvolená: Linearita f vyplývá z definice, tedy stačí $f(y) + t\alpha \leq p(y + t\alpha)$, $y \in Y$, $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall t > 0 : \alpha \leq \frac{1}{t}(p(y + tx) - f(y)) \wedge \forall t < 0 : \alpha \geq \frac{1}{t}(p(y + tx) - f(y)), y \in Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall t > 0 : \alpha \leq p\left(\frac{y}{t} + x\right) - f\left(\frac{y}{t}\right) \wedge \forall t < 0 : \alpha \geq f\left(\frac{-y}{t}\right) - p\left(\frac{-y}{t} - x\right), y \in Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in Y : \alpha \in [f(y) - p(y - x), p(y + x) - f(y)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall y, z \in Y : f(y) - p(y - x) \leq p(z + x) - f(z),$$

tedy máme $f(y) + f(z) = f(y + z) \leq p(y + z) \leq p(y - x) + p(z + x)$. Tedy α můžeme volit libovolně z intervalu $[\sup_y f(y) - p(y - x), \inf_y p(y + x) - f(y)]$.

2. krok: přidáme všechny dimenze (transfinitní) indukci. (Hanh-Banachova věta je ekvivalentní axiomu výběru.) □

┌
Důkaz (2. bod)

1. krok: Pro $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ aplikujeme první bod: VIme, že existuje $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineární, že $F|_Y = f$. Pak ale $F(x) \leq p(x)$, $x \in X \wedge -F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x)$, $x \in X \Rightarrow |F(x)| \leq p(x)$, $x \in X$.

2. krok: Pro $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Polož $g = \Re f$. Pak podle 1. části $\exists G : X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ lineární, že $G|_Y = g \wedge |G(x)| \leq p(x)$, $x \in X$. Pak máme $f(x) = g(x) - ig(ix)$, $x \in X$ a položíme $F(x) := G(x) - iG(ix)$, $x \in X$. Pak $f|_Y = f$, F je lineární a pro $x \in X$ máme:

Zvolme $|\lambda| = 1$, $\lambda \in \mathbb{C} : |F(x)| = \lambda F(x)$, pak $|F(x)| = F(\lambda x) = G(\lambda x) - iG(i\lambda x) = G(\lambda x) \leq P(\lambda x) \leq p(x)$. □

Věta 3.20 (Hahnova-Banachova)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F|_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.

┌
Důkaz

Aplikujeme předchozí větu na $p(x) := \|f\| \cdot \|x\|$, $x \in X$. Pak $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| = p(x)$, $x \in Y \Rightarrow \exists F : X \rightarrow \mathbb{K}$ lineární, $F|_Y = f$, $|F| \leq p$. Pak $|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$, $x \in X$, tedy $\|F\| \leq \|f\|$ (opačná nerovnost triviální). □

Důsledek

Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).

┌ *Důkaz*

Zvol $x \in X$. BÚNO $x \neq \mathbf{0}$. Polož $Y = \text{span}(x)$, $g : Y \rightarrow \mathbb{K}$ definujeme předpisem $g(tx) := t\|x\|$, $\forall t \in \mathbb{K}$. Pak g je zřejmě lineární a $\|g\| = 1$, protože

$$|g(tx)| = |t| \cdot \|x\| = \|tx\|, \forall t \in \mathbb{K}.$$

Podle H-B $\exists f \in X^* : f|_Y = g$, $\|f\| = \|g\| = 1$. Pak $f(x) = \|x\|$.

Ad „speciálně“: Zvol $x + y$. Najdi $f \in S_{X^*} : f(x - y) = \|x - y\|$, pak $f(x) \neq f(y)$, protože $\|x - y\| \neq 0$. □

Důsledek

Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.

┌ *Důkaz*

└ Triviální. □

Důsledek (Oddělování bodu a podprostoru)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f|_Y = 0$ a $f(x) = \text{dist}(x, Y) > 0$.

┌ *Důkaz*

Zvolme $Z := Y \oplus \text{span}(x) \subset X$. $f(y + \alpha x) := \alpha \text{dist}(x, Y)$, $y \in Y$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f : Z \rightarrow \mathbb{K}$ je lineární. $\|f\| = 1$: $|f(y + \alpha x)| = |\alpha| \text{dist}(x, Y) \leq |\alpha| \cdot \|x + \frac{y}{\alpha}\| = \|\alpha x + y\|$, $y \in Y$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Zvolme $(y_n)_{n=1}^\infty$ v Y , že $d(x, Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\|$. Pak $\frac{|f(y_n + x)|}{\|y_n + x\|} = \frac{d(x, Y)}{\|y_n + x\|} \rightarrow 1$.

Nyní z H-B věty rozšíříme na celé Y : $\exists F \in X^X : F|_Z = f \wedge \|F\| = 1$. □

Věta 3.21 (Oddělování konvexních množin)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení

- Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\Re f(x) < \inf_B \Re f$ pro každé $x \in A$.
- Je-li A uzavřená a B kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_A \Re f < \inf_B \Re f$.

┌ *Poznámka*

└ Ekvivalentní H-B větě.

┌ *Důkaz*

BÚNO X je nad \mathbb{R} . BÚNO $A \neq \emptyset \neq B$. První bod: Zvolíme $a \in A$, $b \in B$. Polož $w = b - a$ a $C = w + A - B$. Pak $w \notin C$, $0 \in C$, C je konvexní (A i B jsou konvexní, takže i jejich posunutý rozdíl je konvexní) a otevřená (A je otevřená, posunutý rozdíl otevřené a libovolné je otevřená). Položme $p_c(x) := \inf \{t > 0 \mid x \in tC\}$ (lehce se ověří, že p_c , tzv. Minkowského funkcionál, je sublineární). $p_c(x) < +\infty$ (protože C obsahuje nulu a z otevřenosti i kouli kolem ní a každé x se vejde do dostatečně nafouklé koule). $p_c \leq 1$ na C a $p_c(w) \geq 1$.

Položme $Y := \text{span}(w)$, $g(\alpha w) := \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ (pak $g \leq p_c$). Z H-B tedy plyne:

$$\exists G : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineární, } G|_Y = g, G \leq p_c.$$

Pak $G \in X^*$ protože $G \leq p_c \leq 1$ na C , ale to obsahuje kouli, takže je G omezené na nějaké kouli \implies je spojitě.

Konečně $\forall x \in A \forall y \in B : G(x) = G(y) + G(x - y + w) - G(w) \leq G(y) + 1 - 1 = G(y)$.

Rovnost nemůže nastat, protože A je otevřená. □

└