Příklad (6. General boundary condition for the parabolic equation)
Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be a Lipschitz domain, $T > 0$ be given and denote $Q := (0,T) \times \Omega$. Assume that $\mathbb{A} \in L^\infty(Q; \mathbb{R}^{d\times d}_{sym})$ be elliptic matrix and $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, $b \in L^2(0,T; L^\infty(\partial\Omega))$ and $g \in L^2(0,T; L^2(\partial\Omega))$ be given. Consider the problem

$$\begin{aligned} \partial_t u - \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) &= f && \text{in } Q,\\ \mathbb{A}\nabla u\nu + bu &= g && \text{on } \Gamma := (0,T)\times\partial\Omega,\\ u(0) := u(0,x) &= u_0(x) && \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

where $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Define a notion of a weak solution for general setting. Assume that $b \geqslant 0$ and prove the existence and the uniqueness of the weak solution.

Řešení
Zvolíme nám již známou Gelfandovu trojici $V := W^{1,2}(\Omega) \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H := L^2(\Omega) \simeq H^* \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} V^*$. Potom řekneme, že u je slabé řešení, pokud $u \in L^2(0,T;V) \cap W^{1,2}(0,T;V^*)$, $u(0,\cdot) = u_0$ (z předchozího $C([0,T];V^*)$, tedy to dává smysl) a $\forall w \in V$ a skoro všechna $t \in (0,T)$:

$$\Big\langle \underbrace{\partial_t u}_{\in V^*}, w \Big\rangle_V + \int_\Omega \mathbb{A}\nabla u \nabla w + \int_{\partial\Omega} b\cdot u\cdot w = \Big\langle \underbrace{f}_{\in V^*}, w \Big\rangle_V + \Big\langle \underbrace{g}_{\in (L^2(\partial\Omega))^*}, w \Big\rangle_{L^2(\partial\Omega)}$$

Důkaz (Pro dostatečně hladké u je to totéž jako silné řešení)
Pokud u je dostatečně hladké = dvakrát spojitě diferencovatelné, můžeme na prostřední člen vlevo použít per partes:

$$\int_\Omega \mathbb{A}\nabla u\nabla w = \int_{\partial\Omega} \mathbb{A}\nabla u\nu w - \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) w =$$

$$= (\mathbb{A}\nabla u\nu, w)_{L^2(\partial\Omega)} - (\operatorname{div}(\mathbb{A})\nabla u, w)_H = \langle \mathbb{A}\nabla u\nu, w\rangle_{L^2(\partial\Omega)} - \langle \operatorname{div}(\mathbb{A})\nabla u, w\rangle_V .$$

Stejně tak $\int_{\partial\Omega} b\cdot u\cdot w = \langle bu, w\rangle_{L^2(\partial\Omega)}$. Tedy když to rozdělíme, tak slabá formulace tvrdí $u(0) = u_0$ a:

$$\langle\rangle$$

□

Důkaz (Jednoznačnost)
$\forall t \in (0,T) : v(t) := u_1(t) - u_2(t) \in V$, tedy můžeme „otestovat $u(t)$“, tj. pro skoro všechna $t \in (0,T)$ dostaneme ze slabé formulace (a linearity aplikace duálu / integrálů)

$$0 = \langle \partial_t v(t), v(t) \rangle_V + \int_\Omega \mathbb{A} \nabla v(t) \nabla v(t) + \int_{\partial\Omega} b \cdot v^2(t) \geqslant \langle \partial_t v(t), v(t) \rangle_V + \int_\Omega \mathbb{A} \nabla v(t) \nabla v(t).$$

S použitím elipticity $\mathbb{A}$ dostáváme

$$0 \geqslant \langle \partial_t v(t), v(t) \rangle_V + \int_\Omega \mathbb{A} \nabla v(t) \nabla v(t) \geqslant \langle \partial_t v(t), v(t) \rangle_V + \int_\Omega c_1 |\nabla v(t)|^2 \geqslant \langle \partial_t v(t), v(t) \rangle_V$$

Aplikujeme $\int_0^{t_1}$ na obě strany a použijeme integraci per partes pro Sobolevovy–Bochnerovy funkce a $v(0) = u_1(0) - u_2(0) = u_0 - u_0 = 0$:

$$\int_0^{t_1} 0 = 0 \geqslant \int_0^{t_1} \langle \partial_t v(t), v(t) \rangle = \frac{1}{2} \left((v(t_1), v(t_1))_H - (v(t_0), v(t_0))_H \right) = \frac{1}{2} \|v(t_1)\|^2_{L^2(\Omega)} + 0.$$

Tedy pro všechna t_1 je $\|v(t_1)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, tudíž $v = 0$ a $u_1 = u_2$. ▫