Příklad (1.7)
Nalezněte všechny shodnosti v $\mathbb{R}^2$, které zobrazují přímku $3x+4y-5=0$ na osu „x" a bod $[2,1]$ na některý bod osy „y".

Řešení
Z přednášky víme, že všechny shodnosti v $\mathbb{R}^2$ lze napsat jako ($\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$):

$$\mathbf{z} \mapsto A\mathbf{z} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Z první podmínky (zobrazení bodů $\left[x, -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}\right]$ na osu „x", tj. na body $[\ldots,\ 0]$):

$$a_{21}x + a_{22}\left(-\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}\right) + b_2 = 0.$$

Tedy (protože rovnice musí platit pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tedy toto víme např. z rovnosti polynomů).

$$a_{21} = \frac{3}{4}a_{22}, \qquad b_2 = -\frac{5}{4}a_{22}.$$

Z druhé podmínky (zobrazení bodu $[2,1]$ na osu „y", tj. na bod $[0,\ldots]$):

$$2a_{11} + 1a_{12} + b_1 = 0.$$

Tudíž lze pro libovolné a_{11} a a_{12} vybrat b_1 (konkrétně $b_1 = -2a_{11} - a_{12}$), aby byla druhá podmínka splněna.

Zbývá ještě jedna podmínka, která nám vznikla během řešení – matice musí být ortogonální (aby to bylo shodné zobrazení), tj.

$$A \cdot A^T = I \Leftrightarrow a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 = a_{21}^2 + a_{22}^2 \wedge a_{21}a_{11} + a_{12}a_{22} = 0.$$

Nyní můžeme dosadit $a_{21} = \frac{3}{4}a_{22}$. Dostaneme $1 = \left(\frac{9}{16}+1\right)a_{22}^2$, tj. $a_{22} = \pm\frac{4}{5}$ a $a_{21} = \pm\frac{3}{5}$. Z poslední rovnice pak máme $\pm\frac{3}{5}a_{11} = \mp\frac{4}{5}a_{12}$. Tj. $\left(1+\frac{9}{16}\right)a_{11}^2 = 1$ a $a_{11} = \pm\frac{4}{5}$, $a_{12} = \mp\frac{3}{5}$. Tudíž máme 4 zobrazení:

$$\mathbf{z} \mapsto \begin{pmatrix} +\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ +\frac{3}{5} & +\frac{4}{5} \end{pmatrix}\mathbf{z} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z} \mapsto \begin{pmatrix} +\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}\mathbf{z} + \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{z} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & +\frac{3}{5} \\ +\frac{3}{5} & +\frac{4}{5} \end{pmatrix}\mathbf{z} + \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & +\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}\mathbf{z} + \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}.$$