*Příklad* (1.)
Let $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ be a non-singular matrix. Show that

$$\frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}\mathbb{A})^2 - \operatorname{tr}\left(\mathbb{A}^2\right)\right) = \operatorname{tr}(\operatorname{cof}\mathbb{A}),$$

where $\operatorname{cof}\mathbb{A}$ denotes the cofactor matrix to matrix $\mathbb{A}$, $cof\mathbb{A} := (\det\mathbb{A})\mathbb{A}^{-T}$. There are several ways how to prove this identity, you may, for example, use the Schur decomposition theorem.

*Důkaz*
Víme, že pro $\mathbb{A}$ existuje Schurův rozklad ve tvaru $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\cdot\mathbb{U}\cdot\mathbb{Q}^{-1}$, kde $\mathbb{Q}$ je unitární a $\mathbb{U}$ je horní trojúhelníková matice, která má na diagonále vlastní čísla. Tedy

$$\operatorname{tr}\mathbb{A} = \operatorname{tr}\left(\mathbb{Q}\mathbb{U}\mathbb{Q}^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left(\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{Q}\mathbb{U}\right) = \operatorname{tr}\mathbb{U} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Obdobně $\operatorname{tr}(\mathbb{A}^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ a $\operatorname{tr}(\mathbb{A}^{-1}) = \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1}$, neboť

$$\mathbb{A}^2\mathbf{v}_i = \mathbb{A}\cdot\mathbb{A}\mathbf{v}_i = \mathbb{A}\cdot\lambda_i\mathbf{v}_i = \lambda_i^2\mathbf{v}_i,$$

$$\mathbf{v}_i/\lambda_i = \mathbb{I}\mathbf{v}_i/\lambda_i = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{v}_i/\lambda_i = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{v}_i.$$

Tedy na levé straně rovnosti máme:

$$\frac{1}{2}\left((\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 - (\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\right) = \lambda_1\cdot\lambda_2 + \lambda_1\cdot\lambda_3 + \lambda_2\cdot\lambda_3.$$

Na pravé pak (víme, že $\det\mathbb{A} = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3$, například z toho, že v definici det zvolíme vlastní vektory) díky linearitě stopy a $\operatorname{tr}\mathbb{B} = \operatorname{tr}\mathbb{B}^T$:

$$\operatorname{tr}\operatorname{cof}\mathbb{A} = \operatorname{tr}\left(\mathbb{A}^{-T}\det\mathbb{A}\right) = (\det\mathbb{A})\cdot(\operatorname{tr}\mathbb{A}^{-T}) = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot(\lambda_1^{-1}+\lambda_2^{-1}+\lambda_3^{-1}),$$

čehož roznásobením dostaneme to samé, co máme na levé straně. □

*Příklad* (2.)
Let $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ be non-singular matrices such that $\mathbb{A}+\mathbb{B}$ is non-singular matrix as well. Show that

$$\text{a)} \qquad \det(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \det\mathbb{A} + \operatorname{tr}(\mathbb{A}^T\operatorname{cof}\mathbb{B}) + \operatorname{tr}(\mathbb{B}^T\operatorname{cof}\mathbb{A}) + \det\mathbb{B}$$

$$\text{b)} \qquad (\mathbb{A}+\mathbb{B})^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A}+\mathbb{B})}\cdot$$

$$\cdot\left(\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2 + \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}\mathbb{A} - (\mathbb{A}+\mathbb{B})\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B}) + \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B}))^2 - \operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2\right)\right)$$

The Cayley-Hamilton theorem might be useful.

*Důkaz* (a)

Z definice determinantu a linearity smíšeného součinu (smíšený součin je invariantní vůči cyklické záměně vektorů a první vektor je vždy sám jako první složka skalárního součinu, který je v první složce lineární): $\det(A+B) =$

$$= \frac{(A+B)\mathbf{v}\cdot(A+B)\mathbf{u}\times(A+B)\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}} = \frac{A\mathbf{v}\cdot A\mathbf{u}\times A\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}} + \frac{A\mathbf{v}\cdot A\mathbf{u}\times B\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}} + \frac{A\mathbf{v}\cdot B\mathbf{u}\times A\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}} +$$

$$+ \frac{A\mathbf{v}\cdot B\mathbf{u}\times B\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}} + \frac{B\mathbf{v}\cdot A\mathbf{u}\times A\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}} + \frac{B\mathbf{v}\cdot A\mathbf{u}\times B\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}} + \frac{B\mathbf{v}\cdot B\mathbf{u}\times A\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}} + \frac{B\mathbf{v}\cdot B\mathbf{u}\times B\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}}$$

Na první a poslední člen použijeme zase definici determinantu. Další členy „otočíme“ invariantností smíšeného součinu vůči cyklické záměně, použijeme „Nanson formula“ a definici kofaktoru a nakonec transponováním dostaneme matici doprostřed skalárního součinu: $\det(A+B) =$

$$= \det A + \frac{\mathbf{w}^T\cdot(B^T\cdot\operatorname{cof}A)\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{u}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}} + \frac{\mathbf{u}^T\cdot(B^T\cdot\operatorname{cof}A)\cdot\mathbf{w}\times\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}} + \frac{\mathbf{v}\cdot(A^T\cdot\operatorname{cof}B)\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}} +$$

$$+ \frac{\mathbf{v}\cdot(B^T\cdot\operatorname{cof}A)\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}} + \frac{\mathbf{u}\cdot(A^T\cdot\operatorname{cof}B)\cdot\mathbf{w}\times\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}} + \frac{\mathbf{w}\cdot(A^T\operatorname{cof}B)\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{u}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{w}} + \det B$$

Nyní už stačí jen dokázat $\frac{\mathbf{u}^T\cdot C\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}} + \frac{\mathbf{v}^T\cdot C\cdot\mathbf{w}\times\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}} + \frac{\mathbf{w}^T\cdot C\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}} = \operatorname{tr} C$. V definici determinantu je, že platí pro libovolná nezávislá $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$. My si tedy můžeme zvolit $\mathbf{u} = e_1$, $\mathbf{v} = e_2$ a $\mathbf{w} = e_3$. Tím pádem se snažíme ukázat $e_1^T\cdot C\cdot e_1 + e_2^T\cdot C\cdot e^2 + e_3^T\cdot C\cdot e_3 = \operatorname{tr} C$, což je jistě pravda. □

*Důkaz* (b)

Z C-H, kam dosadíme koeficienty odvozené na přednášce, velmi triviální úpravou rovnic (matice není singulární, tedy jí i jejím determinantem můžeme dělit) dostaneme

$$\mathbb{C}^{-1} = \frac{1}{c_3}\mathbb{C}^2 - \frac{c_1}{c_3}\mathbb{C} + \frac{c_2}{c_3}\mathbb{I} = \frac{1}{\det\mathbb{C}}\mathbb{C}^2 - \frac{\operatorname{tr}\mathbb{C}}{\det\mathbb{C}}\mathbb{C} + \frac{\operatorname{tr}\operatorname{cof}\mathbb{A}}{\det\mathbb{A}}\mathbb{I}.$$

Tam můžeme dosadit $\mathbb{C} = \mathbb{A} + \mathbb{B}$:

$$\text{b)} \qquad (\mathbb{A}+\mathbb{B})^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A}+\mathbb{B})}\cdot\left((\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 - (\mathbb{A}+\mathbb{B})\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B}) + \operatorname{tr}\operatorname{cof}(\mathbb{A}+\mathbb{B})\right).$$

To můžeme roznásobit a dosadit z prvního příkladu:

$$(\mathbb{A}+\mathbb{B})^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A}+\mathbb{B})}\cdot$$

$$\cdot\left(\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2 + \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}\mathbb{A} - (\mathbb{A}+\mathbb{B})\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B}) + \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B}))^2 - \operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2\right)\right)$$

□