Příklad (4d)
Dokažte
$$\exists F\ \forall X : FX = SFX.$$

Důkaz
Zvolme $F = (\lambda y.(Syy))(\lambda y.(Syy))$ (závorky jsou obdobou $(\lambda y.yy)(\lambda y.yy)$, které se samo „množí“, jen je tam ještě vloženo S, aby vypadlo ven). Potom

$$FX = (\lambda y.(Syy))(\lambda y.(Syy))X \to_\beta S(\lambda y.(Syy))(\lambda y.(Syy))X = SFX.$$

□

Důkaz (Kombinátor pevného bodu)
Napíšeme rovnici ve tvaru $F = C[f,x]F$: $F = (\lambda fx.Sfx)F$. A nyní najdeme pevný bod $(\lambda fx.Sfx)$:

$$Y(\lambda fx.Sfx) = (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))(\lambda fx.Sfx) \overset{\alpha}{\to}{}^{*}_{\beta} (\lambda xy.Sxxy)(\lambda xy.Sxxy).$$

Tedy získáváme $F = (\lambda xy.Sxxy)(\lambda xy.Sxxy)$ a opravdu,

$$FX \to_\beta^2 S(\lambda xy.Sxxy)(\lambda xy.Sxxy)X = SFX.$$

□

Příklad (5a $SIIx$)
Zjednodušte $SIIx$.

Řešení

$$SIIx \to_\beta^3 Ix(Ix) \to_\beta^2 xx.$$

Příklad (6b)
Dokažte: Kombinátor $Z = VVVV$, kde $V = \lambda ehlo.o(hello)$, je kombinátor pevného bodu.

Důkaz
Mějme ZF, tedy $VVVVF$. Aplikujme (4krát) β pravidlo na první výraz (první tři parametry jsou V, čtvrtý parametr je F). Dostaneme $F(VVVVF)$, což je $F(ZF)$. □

Příklad (6c2)
Platí $Y(SI) \to_\beta^* \Theta$ (pro Y z přednášky).

Důkaz (Ano.)

$$Y(SI) \to_\beta (\lambda x.SI(xx))(\lambda x.SI(xx)) \to_\beta^{2\cdot 2} (\lambda x.(\lambda y.(Iy)(xxy)))(\lambda x.(\lambda y.(Iy)(xxy))) \to_\beta^{2\cdot 1}$$
$$\to_\beta^{2\cdot 1} (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy)) = AA = \Theta.$$

□

Příklad (6.1)
Najděte příklady termů:

- dvojice termů, které ukazují, že relace $\to_\beta$, $\to_\beta^*$, $=_\beta$ jsou různé;
- term v β-normálním tvaru;
- silně normalizovatelné, ale ne v β-normálním tvaru;
- normalizovatelné, ale ne silně normalizovatelné;
- nejsou normalizovatelné.

Řešení
Například:

- $I(Ic) \to_\beta^* c$, ale ne $I(Ic) \to_\beta c$. Obdobně $c =_\beta I(Ic)$ (vyplývá z předchozího), ale ne $c \to_\beta^* I(Ic)$ ani $c \to_\beta I(Ic)$ (neboť konstanta je v normálním tvaru, tedy se redukuje pouze na sebe).
- c nebo $\lambda x.x$.
- Ic lze redukovat pouze na c (tedy každou redukční strategií se znormalizuje), ale není v β-normální formě.
- KIY, neboť když budeme redukovat operátor pevného bodu, tak ten nám akorát bude vytvářet víc a víc f. Případně $KI((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))$, kde se závorka redukuje sama na sebe.
- Y nebo $((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))$.

Příklad (7a)
Ukažte, že v $\lambda\eta$-kalkulu z $Fx = Gx$ plyne $F = G$.

Důkaz
Použitím pravidla ξ (6. axiomu) dostaneme $\lambda x.Fx = \lambda x.Gx$. Na obě strany pak můžeme použít η, čímž dostaneme $F = \lambda x.Fx = \lambda x.Gx = G$ a z tranzitivity (3. axiomu) máme $F = G$. □

Příklad (7d.2)
Teorie $\lambda\eta$ je extenzionální.

Důkaz
Mějme M a N. Pokud pro každé L je $\lambda\eta \vdash ML = NL$, pak to platí i pro $L = x$, tedy podle předchozího příkladu je $F = G$. □

Příklad ($8 \implies 9$c)
Převeďte do kombinatorické logiky $\lambda xy.yx$.

Poznámka (8) a.1) $\lambda x.x = SKK$.

a.2) $\lambda x.M = KM$ pro $x \notin \mathrm{FV}(M)$.

a.3) $\lambda x.MN = S(\lambda x.M)(\lambda x.N)$.

Řešení
Vnitřek je $\lambda y.yx$, tedy 8a.3) (pro $x \coloneqq y$, $M \coloneqq y$ a $N \coloneqq x$), tudíž $S(\lambda y.y)(\lambda y.x)$, což je S následované 8a.1) (pro $x \coloneqq y$) a 8a.2) (pro $x \coloneqq y$ a $M \coloneqq x$), tedy $S(SKK)(Kx)$.

Tedy máme $\lambda x.S(SKK)(Kx)$, což je zase 8a.3) (pro $M \coloneqq S(SKK)$ a $N \coloneqq Kx$), tudíž $S(\lambda x.S(SKK))(\lambda x.Kx)$.

Druhá závorka $(\lambda x.Kx)$ je taktéž 8a.3) a potom 8a.2) a 8a.1), tedy $S(KK)(SKK)$. První závorka $(\lambda x.S(SKK))$ je 8a.2), tudíž $K(S(SKK))$. Dohromady

$$S(K(SKK))(S(KK)(SKK)).$$

Důkaz (Zkouška)

$$S(K(S(SKK)))(S(KK)(SKK))xy =_{CL} K(S(SKK))x(S(KK)(SKK)x)y =_{CL}$$
$$=_{CL} S(SKK)(KKx(SKKx))y =_{CL} SKKy(Kxy) =_{CL} yx.$$

□

Řešení (Druhá možnost)
Přepíšeme $\lambda xy.yx$ do tvaru $\lambda x.(\lambda fy.M)(N)$, kde M neobsahuje x (jinak bychom si přihoršili o f) a N není $\lambda y.yx$ (to bychom se zacyklili). Tedy řekněme $N = \lambda y.x$ (někde x vzít musíme) a $M = y(fy)$ (dostaneme to, co chceme). Tedy podle a.3) je to $S(\lambda xfy.y(fy))(\lambda xy.x)$. S umíme, druhá závorka je K, což také umíme. První závorka je skoro S, jen se potřebujeme zbavit první proměnné. To uděláme tak, že se první proměnně zbavíme pomocí $K(\dots)$ a místo ní pak vložíme identitu (SKK), která zmizí. Tedy $K(S(SKK))$. Dohromady $S(K(SKK))K$

Důkaz (Zkouška)

$$S(K(S(SKK)))Kxy =_{CL} K(S(SKK))x(Kx)y =_{CL} S(SKK)(Kx)y =_{CL}$$
$$=_{CL} SKKy(Kxy) =_{CL} yx.$$

□

Příklad (10b)
Dokažte:

$$I \# K.$$

Důkaz
Kdyby $I = K$, pak pro všechna s, t máme (ze 4. axiomu) $Is = Ks$ a $It = Kt$ a (znovu ze 4. axiomu) máme $Ist = Kst$ a $Its = Kts$, což se zredukuje na $st = s$ a $st = t$, tedy (3. axiom) $s = t$. □

Příklad (10e)
Dokažte:

$$s \# t \leftrightarrow \lambda + (s = t) \vdash K = K_*.$$

Důkaz
„→“: triviálně z definice #. „←“: Pokud $K = K_*$, pak pro libovolné termy a, b je $Ka = K^*a$ a $Kab = K^*ab$ (z dvou aplikací axiomu 4), což se zredukuje na $a = b$, tedy přidáním $s = t$ (to implikuje podle předpokladu přidání $K = K_*$) dostaneme spornou teorii. □

Příklad (11a)
Převeďte na superkombinátor: $\lambda fgh.f\,(\lambda y.g(hy))$.

Řešení

$$\lambda fgh.f\left(\left(\lambda \tilde{g}\tilde{h}y.\tilde{g}(\tilde{h}y)\right)gh\right)$$

nebo

$$(\lambda xfgh.f(xgh))\,(\lambda ghy.g(hy))\,.$$

Z druhých tří axiomů víme, že můžeme β aplikovat uvnitř, a aplikací β na vlnkovaté věci dostaneme původní výraz.

Příklad (13d)
Najděte term A_{succ}, pro který platí: $A_{\text{succ}}c_n = c_{n+1}$.

Řešení
Pokud jsme dávali pozor na přednášce, pak je nejjednodušší řešení $A_{\text{succ}} = A_+c_1 \to_\beta^* \lambda ypq.p(ypq)$. (Pokud nyní za y dosadíme c_n, pak uvnitř závorky bude n aplikací p na q a zvenku jsme na to aplikovali ještě jednou p. Tedy jsme dostali c_{n+1}).

Obdobně můžeme A_{succ} definovat jako $\lambda ypq.yp(pq)$, jelikož tady (po dosazení $y = c_n$) naopak n-krát aplikujeme p na px, tedy máme také c_{n+1}.

Příklad (14a)
Zformulujte a dokažte analogickou větu k „Double Fixed Point Theorem“ pro n termů v n (vzájemně závislých) rovnicích.

Řešení (Pro zjednodušení výrazů v důkazu mám $n+1$ termů v $n+1$ rovnicích.)

$$\forall A_0, \dots, A_n \; \exists X_0, \dots, X_n \; \forall i \in \{0, \dots, n\} : X_i = A_i X_0 X_1 \dots X_n.$$

Důkaz
Nechť

$$F = \lambda x.[$$
$$A_0(x \text{ true})(x \text{ false true}) \dots (c_n P^- x \text{ true}), [$$
$$\dots$$
$$A_{n-1}(x \text{ true})(x \text{ false true}) \dots (c_n P^- x \text{ true}), [$$
$$A_n(x \text{ true})(x \text{ false true}) \dots (c_n P^- x \text{ true}), \text{cokoliv}$$
$$]$$
$$\dots$$
$$]$$
$$].$$

Z věty o pevném bodě máme Z takové, že $FZ = Z$. Položme

$$X_i = c_i P^- Z \text{ true} = Z \underbrace{\text{false} \dots \text{false}}_{i\text{-krát}} \text{ true}.$$

Potom

$$X_i = c_i P^- Z \text{ true} = c_i P^- (FZ) \text{ true} = A_i (c_0 P^- Z \text{ true}) \dots (c_n P^- Z \text{ true}) = A_i X_0 X_1 \dots X_n.$$

□