Příklad (9.1)
V závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{Z}_5$ určete dimenze prostorů prostorů $\operatorname{Im} A_{a,b}$, $\operatorname{Im} A_{a,b}^T$, $\operatorname{Ker} A_{a,b}$ a $\operatorname{Ker} A_{a,b}^T$ pro matici

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a+2 & b & 1 & 2 \\ 2a+1 & 2b & a+3 & 1 \\ 3a+b+3 & 3b & a+4 & b+3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 4}.$$

Řešení
Elementární řádkové a sloupcové úpravy nemění hodnost matice, tedy provedeme nějaké řádkové a nějaké sloupcové úpravy:

$$\begin{pmatrix} a+2 & b & 1 & 2 \\ 2a+1 & 2b & a+3 & 1 \\ 3a+b+3 & 3b & a+4 & b+3 \end{pmatrix} \overset{\text{EŘÚ}}{\sim} \begin{pmatrix} a+2 & b & 1 & 2 \\ -3 & 0 & a+1 & -3 \\ b-3 & 0 & a+1 & b-3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{ESÚ}}{\sim} \begin{pmatrix} a & b & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 & -3 \\ 0 & 0 & a+1 & b-3 \end{pmatrix} \overset{\text{EŘÚ}}{\sim} \begin{pmatrix} a & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Když řešíme hodnost matice, tak nás zajímá, které prvky budou v odstupňovaném tvaru nulové a které ne. Tedy musíme prozkoumat $a = 0$, $b = 0$ a $a = -1$.

- Pokud $-1 \neq a \neq 0$ a $b \neq 0$, pak je matice v odstupňovaném tvaru a má všechny 3 řádky nenulové, tedy má hodnost 3.
- Při $a = 0$ a $b \neq 0$ nic nemění, jelikož matice bude stále v odstupňovaném tvaru a všechny řádky budou nenulové.
- Pokud bude $a = 0$ i $b = 0$, pak je první a poslední řádek nulový, tedy matice má zřejmě hodnost 1.
- Naopak jestliže $a \neq 0$ a $b = 0$, pak první a druhý řádek jsou nenulové na rozdíl od třetího, matice je v odstupňovaném tvaru, tedy její hodnost je 2.
- Nyní schází už jen případ $b \neq 0 \wedge a = -1$, v tomto případě není matice v odstupňovaném tvaru, musíme odečíst příslušný násobek 2. řádku od 3. Potom to již bude matice v odstupňovaném tvaru s 2 nenulovými řádky, tj. hodností 2.

Víme $\dim(\operatorname{Ker} A) + \dim(\operatorname{Im} A) = \#$počet sloupců a $\dim(\operatorname{Ker} A^T) + \dim(\operatorname{Im} A^T) = \#$počet řádků. Zároveň hodnost je podle druhé definice $\dim(\operatorname{Im} A) = \dim(\operatorname{Im} A^T)$, tedy můžeme vše dopočítat z hodnosti:

- $b \neq 0 \wedge a \neq -1 \implies \operatorname{rank} A_{a,b} = 3 \implies \dim(\operatorname{Im} A) = \dim(\operatorname{Im} A^T) = 3$, $\dim(\operatorname{Ker} A) = 4 - 3 = 1$ a $\dim(\operatorname{Ker} A^T) = 3 - 3 = 0$,
- $a \neq 0 \wedge b = 0 \vee a = -1 \implies \operatorname{rank} A_{a,b} = 2 \implies \dim(\operatorname{Im} A) = \dim(\operatorname{Im} A^T) = 2$, $\dim(\operatorname{Ker} A) = 4 - 2 = 2$ a $\dim(\operatorname{Ker} A^T) = 3 - 2 = 1$,
- $a = b = 0 \implies \operatorname{rank} A_{a,b} = 1 \implies \dim(\operatorname{Im} A) = \dim(\operatorname{Im} A^T) = 1$, $\dim(\operatorname{Ker} A) = 4 - 1 = 3$ a $\dim(\operatorname{Ker} A^T) = 3 - 1 = 2$.

Příklad (9.2)
Najděte nějakou bázi průniku podprostorů $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ prostoru $\mathbb{R}^4$.

$$\mathbf{X} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \right\}$$
$$\mathbf{Y} = \mathrm{LO}\left\{ (2,1,1,0)^T, (1,-1,1,1)^T \right\}$$

Řešení
Z definice LO si libovolný prvek $\mathbf{Y}$ (tím pádem i libovolný $\mathbf{Y} \cap \mathbf{X}$) můžeme zapsat jako $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T = a(2,1,1,0)^T + b(1,-1,1,1)^T$. Pokud je tento prvek z $\mathbf{Y} \cap \mathbf{X}$, tak navíc musí splňovat $y_1 + 2y_2 - y_3 + 3y_4 = 0$, tj.:

$$(2a + b) + 2 \cdot (a - b) - (a + b) + 3(b) = 0$$

$$3a + b = 0$$

Vidíme, že řešení má jednu dimenzi (např. a je volná proměnná, $b = -3a$), tj. báze má jeden prvek a to např. (libovolná jiná a a b splňující $b = -3a$ budou zjevně jen násobky tohoto) $a = 1, b = -3$:

$$\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \mathrm{LO}\left(\begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{LO}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$