Příklad (1)
Hrajeme hru, kde v každém kole hodíme šestistěnnou kostkou a posuneme se o příslušný počet políček. S jakou pravděpodobností šlápneme někdy během hry na n-té políčko, pokud jsme začali na políčku číslo 0? Odpověď stačí ve formě rekurentního vzorce, který se odkazuje na konstantně mnoho hodnot pro nižší n. Dokážete využít pouze 2 hodnoty pro nižší n?

Řešení
Na každé políčko (krom 0) se musíme dostat jedním hodem z nějakého předchozího políčka. Jelikož na kostce můžou padnout jen čísla 1 až 6 a to každé se stejnou pravděpodobností, dostanu se na políčko n jedním hodem kostky z políčka $n-1$ s pravděpodobností $\frac{1}{6}$, ..., z políčka $n-6$ s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Můžu tedy p_n jako pravděpodobnost, že šlápnu na n-té políčko zapsat jako:

$$p_n = \frac{p_{n-1}}{6} + \frac{p_{n-2}}{6} + \frac{p_{n-3}}{6} + \frac{p_{n-4}}{6} + \frac{p_{n-5}}{6} + \frac{p_{n-6}}{6},$$

což platí pro všechna $n > 0$, pokud p_i pro záporná i definujeme jako 0 (na záporná políčka se nedostaneme) a $p_0 = 1$ (na nulté políčko jsme jistě šlápli, když tam začínáme...). Navíc pokud $n > 1$ musí tento vzorec platit i pro $n-1$:

$$p_{n-1} = \frac{p_{n-2}}{6} + \frac{p_{n-3}}{6} + \frac{p_{n-4}}{6} + \frac{p_{n-5}}{6} + \frac{p_{n-6}}{6} + \frac{p_{n-7}}{6}.$$

Co kdybychom tuto a předchozí rovnici odečetli, aby 'zmizely' některé členy:

$$p_n - p_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{6} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - \frac{p_{n-7}}{6},$$

$$p_n = \frac{7}{6}p_{n-1} - \frac{1}{6}p_{n-7},$$

což je vzorec, který se odkazuje pouze na 2 předchozí členy, ale musíme zadat navíc $p_1 = \frac{1}{6}$, jelikož platí až pro $n > 1$.

Příklad (2)
(Věta o džbánu) Vždy, když jdeme se džbánem pro vodu, s pravděpodobností p se nám ucho utrhne. Kolik cest pro vodu ve střední hodnotě před utržením uděláme (včetně té závěrečné při které se ucho již utrhne)?

Řešení
Počet cest pro vodu je náhodná veličina X. My si můžeme definovat náhodné veličiny $X_i, i \in \mathbb{N}$, tak, že X_i je 1, pokud jsme v daném pokusu absolvovali alespoň i cest (neboli před i-tou cestou ještě nebyl džbán rozbit) a 0 jinak. Tedy zřejmě $X = \sum_i X_i$. Pravděpodobnost, že se ucho neutrhlo při prvních i cestách (tedy, že před i-tou ještě nebyl rozbit) je $(1-p)^{i-1}$. Tedy $\mathbb{E}[X_i] = 1 \cdot (1-p)^{i-1} + 0 = (1-p)^{i-1}$. Z linearity střední hodnoty (a součtu geometrické řady) plyne:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_i X_i\right] = \sum_i \mathbb{E}\left[X_i\right] = \sum_i (1-p)^{i-1} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}.$$

Příklad (3)
Jazykový korektor změní 99% chybných slov na správná a 0.01% správných na chybná. Změnil 2% slov. Jaký podíl správných a cyhbných slov je na jeho vstupu a výstupu?

Řešení
Místo poměrů se nad úlohou zamysleme v pravděpodobnosti. Pokud v původním textu bylo $p \cdot 100\%$ slov chybných, pak pravděpodobnost, že nějaké slovo z původního textu je chybné je p. To znamená, že když si korektur přečte libovolné slovo z původního textu, tak ho s pravděpodobností $0.99p + 0.0001(1-p)$. Víme, že pravděpodobnost, že změnil slovo je 0.02, jelikož změnil 2% slov. Tedy

$$0.99p + 0.0001(1-p) = 0.02, \qquad p = \frac{199}{9899} \approx 2.01\%.$$

Tedy v původním textu bylo přibližně 2.01% slov špatně (97.99% dobře). Pravděpodobnost, že slovo bylo po opravě špatně je $p' = (1-0.99)p + 0.0001(1-p) \approx 0.03\%$, tedy v opraveném textu je přibližně 0.03% slov špatně (99.97% dobře).