Organizační úvod

Poznámka (Zápočet)
Za vypracování domácích úloh.

Poznámka (Zkouška)
Písemná, ale Covid?

Úvod

MA je na rovném prostoru $\mathbb{R}^n$ Naším cílem je vybudovat analýzu na nerovném? prostoru, tzv. varietě.

Poznámka (literatura)
Skripta – Krump, Souček, Těšínský: MA ve varietách
Sborník příkladů – Kopáček: Příklady z matematiky pro fyziky III.

1 Opakování

'Odvozovali' (přes limity velikosti rozdělení jdoucí k nule) jsme si:

Křivkový integrál 1. druhu, křivkový integrál 2. druhu. Integrální věty (pol. 19. stol, moderní formulace Cardan (1945)): Věta o potenciálu, Greenova věta

Plošný integrál 1. druhu, plošný integrál 2. druhu. Integrální věty: Stokesova věta, Gauss-Ostrogradského věta

2 Stokesova věta v $\mathbb{R}^n$, diferenciální formy v $\mathbb{R}^n$

Věta 2.1 (Moderní (= obecná) formulace Stokesovy věty = Cíl (Cartan 1945))

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

Kde S je buď 'singulární' ⅂-plocha v R^n (tato část) nebo ⅂-varieta s okrajem (3. část).

2.1 Vnější algebra vektorového prostoru

Motivace: Jak násobit vektory z $\mathbb{R}^n$?

Poznámka
Násobení na $\mathbb{R}^n$ zachovává Eklidovskou normu (tzn. $||x \cdot y = ||x|| \cdot ||y||$) pouze v dimenzích 1, 2, 4, 8 (= $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, kvaterniony, oktocosi).

Definice 2.1 (Algebra)

Algebra nad tělesem k (= $\mathbb{R}$) je vektorový prostor $\mathbb{A}$ nad k s bilineárním zobrazením ….

Algebra je asociativní, jestliže co asi.

Algebra má jednotku, jestliže existuje co asi ;)

Definice 2.2

Nechť Λ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$

Poznámka (Vlastnosti vnější algebry)
$\dim \Lambda * (\mathbb{V}) = 2^n$, protože každý vektor je určen bázovými vektory, kterých je jako podmnožin n prvkové množiny

TODO

$$e_I \wedge e_J = 0, \text{je-li} I \cap J \neq \emptyset \qquad = sgn(\text{permutace}) e_{I \cup J}, \text{je-li} I \cap J = \emptyset$$

Je-li $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ a $\tau \in \Lambda^l(\mathbb{V})$, potom $\omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega \in \Lambda k + l(\mathbb{V})$.

Důkaz
(Dokázat, že prohození je právě $k \cdot l$, následně z linearity násobení) □

Věta 2.2

Nechť $\mathbb{V}$je vektorový prostor s bází $e_1, \ldots e_n$. Nechť $v_1, v_2, \ldots v_k \in \mathbb{V}$, kde $1 \leq k \leq n$. Potom $v_i = \sum_{j=1}^n v_i^j e_j$ a označme $\mathbb{W} = \left(v_i^j\right)_{j=1,\ldots,n; i=1,\ldots,k}$ je matice $n \times k$ jejich souřadnice (sloupec i je vektor i). Je-li J k-prvková podmnožina $\{1, \ldots, n\}$, označ $W_j := (v_i^j)_{j \in I; i=1,\ldots,k}$ (minor $k \times k$). Potom $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots k = \sum_{|J|=k} (\det(W_j)) e_J$.

Důkaz
Posčítáním. A dokázáním, že to je definice determinantu. □

Definice 2.3 (Skalární součin na $\Lambda * (\mathbb{V})$)

Nechť $\mathbb{V}$je vektorový prostor se skalárním součinem (?, symetrický) $< \cdot, \cdot >$ a $e_1, \ldots, e_n$ je ortonormální báze $\mathbb{V}$.

Definujeme skalární součin ve $\Lambda * (\mathbb{V})$ jako:

$$\{\ldots\}$$

TODO!

Úmluva
$\mathbb{R}^n$ chápeme jako Euklidovský prostor se standardní bází $e_1, \ldots e_n$ a TODO!

Například
Nechť R je rovnoběžnostěn v $\mathbb{R}^n$ určený vektory $v_1, \ldots, v_k$, kde $1 \leq k \leq n$. Potom k-dimenzionální objem R je roven:

$$\mathrm{vol}_k(R) = ||v_1 \wedge \ldots \wedge v_k||,$$

kde $||x||$ je euklidovská norma.

Důkaz
TODO! □

TODO TODO!

Definice 2.4 (Vektorový součin v $\mathbb{R}^n$)

Nechť $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Potom jejich vektorový součin $v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ je definován jako $*(v_1 \times \cdots \times v_{n-1}) = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$

Poznámka
Ve skriptech označeno $[v_1, \ldots, v_{n-1}]$.

Poznámka (Platí)

$$v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = (-1)^{n-1} * (v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1})(zCv.2TODO)$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^n : \langle \omega, v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \rangle = \det(\omega | v_1 | cdots | v_{n-1})$$

2.2 Rozložitelné k-vektory

Nechť $\mathbb{V}$je vektorový prostor. Nechť $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{V})$. Položme

$$\ker \omega := \{v \in \mathbb{V} | \omega \wedge v = 0\}.$$

Platí 1. $\ker \omega$ je podprostor

Definice 2.5 (Rozložitelné k-vektory)

$\omega \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ je rozložitelný, pokud existují $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{V}$ takové, že $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$.

Platí 2. $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0 \Leftrightarrow$ vektory $v_1, \ldots, v_k$ jsou lineárně nezávislé.

Platí 3. Nechť $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0$. Potom

$$\ker \omega = \mathrm{LO}(v_1, \ldots, v_k)$$

Definice 2.6

$$R_k(\mathbb{V}) := \left\{\omega \in \Lambda^k(\mathbb{V}) | \omega \neq 0 \text{rozložitelný}\right\}$$

$$G_k(\mathbb{V}) := \{L | L k\text{- dimenzionální podprostor } \mathbb{V}\} \text{ (tzv. Grassmannian)}$$

Platí 4. Zobrazení $\varphi : R_k(\mathbb{V}) \to G_k(\mathbb{V})$: $\omega \to \ker \omega$ je na, ale není prosté. Skutečně máme

$$\ker \omega = \ker \omega' \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}? : \omega' = \alpha \omega.$$

Například (Nerozložitelné k-vektory)
Platí 5. Pro $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ jsou všechny 1-vektory, n-vektory i $(n-1)$-vektory rozložitelné.

Příklad
Rozložte $e_{123} + e_{124} + e_{234} \in \Lambda^3(\mathbb{R}^4)$, kde $e_{123} = e_{\{1,2,3\}}$.

Musíme tedy hledat v $\mathbb{R}^4$ a „výše“.

Příklad
Najděte nerozložitelný 2-vektor $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$

Poznámka (Projektivní prostor)
Mezi nejdůležitější Grassmanniany patří projektivní prostor:

Nechť $\mathbb{V}$je vektorový prostor. Polož $P(V) := \{$1-dimenzionální podprostor $\mathbb{V}\}$.

Tvrdíme $P(\mathbb{V}) = G_1(\mathbb{V})$.

TODO?

Věta 2.3 (Plückerovo vnoření)

$$G_k(\mathbb{V}) \to ?P(\mathbb{R}^{(nnadk)})$$

, je-li $\dim \mathbb{V} = n$

2.3 Diferenciální formy

$$x \in \mathbb{R}^n = (x_1, \ldots, x_n)$$

Označme $T * (\mathbb{R}^n)$ reálný vektorový prostor, jehož bázi tvoří symboly $dx_1, \ldots, dx_n$ tj.

$$T * (\mathbb{R}^4) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, dx_i | \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Definice 2.7 (Diferenciální fomrma)

Diferenciální forma ω na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je zobrazení $\omega : \Omega \to \Lambda * (T * (\mathbb{R}^n))$ třídy $\mathcal{S}^\infty$ (= je hladké).

Označme $\mathcal{E} * (\Omega)$ vektorový prostor všech diferenciálních forem na Ω. Každé $a \in \mathcal{E} * (\Omega)$ laze jednoznačně psát jako

$$\omega(x) = \sum_I \omega_I(x) \, dx_I, \tag{1}$$

kde součet je přes všechny $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $\omega_I \in \mathcal{S}^\infty(\Omega)$ a $dx_I = dx_{i_1} \vee \ldots \vee dx_{i_k}$ jsou-li prvky $i_1, \ldots, i_k$ množiny I uspořádány postupně

Definice 2.8 (Stupeň diferenciální formy)

Dále $\omega \in \mathcal{E} * (\Omega)$ má stupeň k (tzv. k-forma), pokud $\omega : \Omega \to \Lambda^k(T * (\mathbb{R}^n))$ je hladké zobrazení. Označme $\mathcal{E}^k(\Lambda)$ vektorový prostor všech k-forem na Ω.

Poznámka

Každá $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ má tvar (1), kde je součet přes všechny $|I| = k$.

Zřejmě $\mathcal{E} * (\Omega) = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{E}^k(\Omega)$ a $\mathcal{E}^0(\Omega) = \mathcal{S}^\infty(\Omega)$.

Definice 2.9 (Vnější násobení)

Na $\mathcal{E} * (\Omega)$ definujeme vnější násobení

$$(\omega \vee \tau)(x) := \omega(x) \vee \tau(x), x \in \Omega, \omega, \tau \in \mathcal{E} * (\Omega).$$

Definice 2.10 (Vnější (de Rhammův) diferenciál)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Potom definujeme zobrazení $d : \mathcal{E} * (\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega)$ následovně: (i)Je-li $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$, potom

$$(df)(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i, x \in \Omega$$

(ii) Nechť $\omega \in \mathcal{E} * (\Omega)$ je tvaru (1). Potom

$$dw := \sum_I (d\omega_I) \vee dx_I$$

Například

$$\omega = e^{xy}\, dx + \cos(x+y)\, dy$$
$$d(e^{xy}) = e^{xy} y\, dx + e^{xy} x\, dy$$
$$(\cos(x+y)) = -\sin(x+y)\, dx - \sin(x+y)\, dy$$
$$d\omega = e^{xy} x\, dy \vee dx - sin(x+y) dx \vee dy = -(xe^{xy} + \sin(x+y))\, dx \vee dy$$

Poznámka

Nechť $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je i-tá souřadnice funkce, tzn. $\varphi_i(x) := x_i$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$d\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\, dx_j = dx_i.$$

Poznámka

V „rovném“ prostoru $\mathbb{R}^n$:

- tečný prostor $T_x(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$.
- kotečný prostor $T_x * (\mathbb{R}^n) := (T_x(\mathbb{R}^n))* \simeq (\mathbb{R}^n)*$

Věta 2.4

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\omega, \tau \in \mathcal{E} * (\Omega)$ a $p = 0, \ldots, n$. Potom platí

(i) $d(\omega + \tau) = d\omega + d\tau$ *a* $\forall \omega \in \mathcal{E}^p(\Omega) : d\omega \in \mathcal{E}^{p+1}(\Omega)$, *kde* $\mathcal{E}^{n+1}(\Omega) := \emptyset$.

(ii) Je-li $\omega \in \mathcal{E}^p(\Omega)$, *potom* $d(\omega \vee \tau) = d\omega \vee \tau + (-1)^p \omega \vee d\tau$.

(iii) $d(d\omega) = 0$.

Důkaz (i) plyne z linearity $\vee$ a definice.

(ii) Vzhledem k (i) stačí dokázat pro $\omega = \omega_I \, dx_I$ a $\tau = \tau_J \, dx_J$, kde $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$, I je p-prvková a $I \cap J = \emptyset$.

Potom $d(\omega \vee \tau) = d(\omega_I \tau_J) \vee dx_I \vee dx_J$. Dále $d(\omega_I \tau_J) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\omega_I \tau_J)}{\partial x_i} \, dx_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J + \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} \right)$

Tedy $d(\omega \vee \tau) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J \, dx_i \vee dx_I \vee dx_J + \sum_{i=1}^n \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} \, dx_i \vee dx_I \vee dx_J$, kde musím v druhém členu posunout „$d\tau$“, k jeho dx_J

(iii) Pro $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ si to roznásobím a popáruji prohozené bázové vektory.

Díky (i) stačí rozbrat pro $\omega = \omega_I \, dx_I$, kde $I \subset \{1, \ldots, n\}$. Potom $d(d\omega) = d(\omega_I \, dx_I)$, (dvojkou rozepíšu) a z první části a $d1 = 0$ je to rovno 0.

$\square$

2.4 Přenášení diferenciálních forem pomocí zobrazení

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $u = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{R}^k$. V této části předpokládejme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $U \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená a $\varphi : U \to \Omega$ je hladké zobrazení.

Je tedy $x = \varphi(u), u \in U$ a $x_i = \varphi_i(u_1, \ldots, u_k)$, kde φ_i je i-tá složka φ.

Definice 2.11

Za předpokladů výše definujeme zobrazení $\varphi* : \mathcal{E} * (\Omega) \to \mathcal{E} * (U)$ předpisem $\varphi * (\omega) := \sum_I (\omega_I \circ \varphi) \, d\varphi_I$, kde $\omega = \sum_I \omega_I \, dx_I$ je tvaru (1) a $d\varphi_I = d\varphi_{i_1} \vee \ldots \vee d\varphi_{i_k}$, jsou-li prvky $i_1, \ldots, i_k$ uvnitř I uspořádány vzestupně.

Poznámka
V souladu s definicí plošného integrálu 2. druhu.

Věta 2.5

Nechť φ je jako výše a $\omega, \tau \in \mathcal{E} * (\Omega)$. Potom:

(i) $\varphi * (\omega + \tau) = \varphi * (\omega) + \varphi * (\tau)$,

(ii) $\varphi * (\omega \vee \tau) = \varphi * (\omega) \vee \varphi * (\tau)$,

(iii) $\varphi * (d\omega) = d(\varphi * (\omega))$.

(iv) *Je-li $V \subset \mathbb{R}^l$ otevřená a $\psi : V \to U$ je hladká, potom $(\varphi \circ \psi) * (\omega) = (\psi * \circ \varphi *)(\omega)$.*

v *Je-li $k = n$, $\omega \in \mathcal{E}^n(\Omega)$ a $\omega = f \, dx_1 \vee \ldots \vee dx_n$, potom $\varphi*(\omega) = (f \circ \varphi) \det(\mathrm{Jac}\, \varphi) \, du_1 \vee \ldots \vee du_n$, kde $\mathrm{Jac}\, \varphi = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right)_{i,j=1,\ldots,n}$ je Jacobiho matice $x = \varphi(u)$.*

Důkaz
Jednoduchý. $\square$

Definice 2.12 (Uzavřené a exaktní formy)

Formule $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ se nazývá uzavřená, je-li $d\omega = 0$ a exaktní, existuje-li $\tau \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ takové, že $d\tau = \omega$.

Poznámka (Platí)
Je-li ω exaktní, potom je uzavřená.

Lemma 2.6 (Poincarého lemma)

Nechť Ω je otevřená koule v $\mathbb{R}^n$. Potom pro $k > 0$ každé $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, která je uzavřená, je i exaktní.

Poznámka
Platí i pro hvězdovité (znáte z analýzy) nebo jednoduše souvislé (dá se stáhnout do bodu) oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Poznámka (Poncarého lemma platí pouze pro dané oblasti)
Nechť $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Potom $\omega := \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ je uzavřená, ale není exaktní.

Definice 2.13 (De Rhanův komplex)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, potom

$$\mathcal{E}^0(\Omega) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(\Omega) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n(\Omega)$$

je komplex (tzn. posloupnost vektorových prostorů a lineární zobrazení mezi nimi s vlastností, že každá složka dvou po sobě jdoucích zobrazení je triviální (zde, $d \circ d = 0$, splněno))

TODO!

3 Variety, Stokesova věta na varietách