1 Úvod

Definice 1.1 (Metrika, metrický prostor)

M množina, $d : M \times M \to [0, \infty)$ je metrika, pokud $\forall x, y, z \in M$ platí:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$d(y, x) = d(x, y),$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Dvojice (M, d) se pak nazývá metrický prostor.

Definice 1.2 (Norma a normovaný lineární prostor (NLP))

Ať $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, pak $||\cdot|| : \mathbf{V} \to [0, \infty)$ je norma, pokud $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$

$$||\mathbf{x}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o},$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{F} : ||\lambda \mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||,$$

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||.$$

Dvojice $(\mathbf{V}, || \cdot ||)$ se pak nazývá normovaný lineární prostor.

Definice 1.3 (Otevřená a uzavřená koule)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP, $x \in \mathbb{M}$, $r > 0$. Pak otevřená koule o středu x a poloměru r je množina $B(x, r) := \{y \in M; d(x, y) < r\}$. Uzavřená koule o středu x a poloměru r je množina $\overline{B}(x, r) := \{y \in M; d(x, y) \leq r\}$.

Věta 1.1

$(\mathbb{R}^d, || \cdot ||_p)$ *je NLP pro* $d \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$.

Důkaz
1. krok: $B = \left\{x \in \mathbb{R}^d; ||x||_p \leq 1\right\}$ je konvexní množina (tj. $\forall \lambda \in (0,1)\ \forall x, y \in B : \lambda x + (1-\lambda)y \in B$). Pro $p = \infty$:

$$\forall i \in [d] : |\lambda x_i + (1-\lambda)y_i| \leq \lambda |x_i| + (1-\lambda)|y_i| \leq \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1$$

Pro $p < \infty$:

$$\forall i \in [d] : |\lambda x_i + (1-\lambda)y_i|^p \leq \lambda |x_i|^p + (1-\lambda)|y_i|^p,$$

protože $t \mapsto t^p$ je konvexní funkce. Dopočítáním obou nerovností získáme, že je to opravdu konvexní množina.

2. krok: Pokud $||\cdot||$ splňuje $(i) + (ii)$ a B je konvexní, pak $||\cdot||$ je norma. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, BÚNO $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, položme $\tilde{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$, $\tilde{\mathbf{y}} := \frac{\mathbf{y}}{||\mathbf{y}||}$, tedy:

$$\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||} = \frac{||\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||}\tilde{\mathbf{x}} + \frac{||\mathbf{y}||}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||}\tilde{\mathbf{y}} \in B \text{ (zlomky jsou } \lambda, 1-\lambda).$$

$$||\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||}|| \leq 1 \implies \frac{||\mathbf{x}+\mathbf{y}||}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||} \leq 1.$$

3. $||\cdot||_p$ zřejmě splní $(i) + (ii)$ a B je konvexní podle 1. kroku. Tedy $||\cdot||_p$ je norma. □

Poznámka (Značení)

$$l_p^d := \left(\mathbb{R}^d, ||\cdot||_p\right).$$

Definice 1.4 (Konvergence)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v $\mathbb{M}$, $x \in \mathbb{M}$. Pak (x_n) konverguje k x pokud $d(x_m, x)$ konverguje k 0. Píšeme $x_n \to x$ nebo také $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.