Příklad

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be Lipschitz. Consider the sequence v^n and u^n such that for some $p, q \in (1, \infty)$ there holds $u^n \rightharpoonup u$ weakly in $L^2(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, $v^n \rightharpoonup v$ weakly in $L^q(0,T;L^q(\Omega))$. In addition, assume that for all $\varphi \in C_0^2((0,T)\times\Omega)$ there holds $\int_0^T \int_\Omega u^n \partial_t \varphi + v^n \Delta\varphi = 0$.

Show that there exists a subsequence u^{n_k} such that $u^{n_k} \to u$ strongly in $L^1(0,T;L^p(\Omega))$.

Důkaz $(q \leqslant p)$

Chtěli bychom použít Aubinovo–Lionsovo lemma na u^n. K tomu potřebujeme vědět, že $\partial_t u^n$ existuje a je v nějakém prostoru $L^1(0,T;V_3)$. Navíc budeme chtít vědět, že posloupnosti u^n a $\partial_t u^n$ jsou omezené. K tomu máme

$$\int_0^T \int_\Omega u^n \partial_t \varphi = -\int_0^T \int_\Omega u^n v^n \Delta\varphi, \qquad \forall \varphi \in C_0^2((0,T)\times\Omega).$$

To je skoro definice derivace, kdyby vpravo bylo φ a ne $\Delta\varphi$. Tudíž si zadefinujeme $w^n : (0,T) \to W^{2,q'}(\Omega)^*$, kde $1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$ tak, že pro skoro všechna $t \in (0,T)$:

$$\langle w^n(t), \psi \rangle_{W^{2,q'}(\Omega)^*} := \int_\Omega v^n(t) \Delta\psi, \qquad \forall \psi \in W^{2,q'}(\Omega).$$

To znamená, že $|\langle w^n(t), \psi\rangle_{W^{2,q'}(\Omega)^*}| \leqslant \int_\Omega |v^n(t)| \cdot |\Delta\psi| \leqslant \|v^n(t)\|_q \cdot \|\Delta\psi\|_{q'} \leqslant \|v^n(t)\|_q \cdot \|\psi\|_{2,q'}$. Tedy $\|w^n(t)\|_{W^{2,q'}(\Omega)^*} \leqslant \|v^n(t)\|_q$ a $w^n \in L^q(0,T;W^{2,q'}(\Omega)^*) \subset L^1(0,T;W^{2,q'}(\Omega)^*)$.

Navíc u^n a v^n slabě konvergují, tudíž jsou omezené. Z omezenosti v^n vyplývá i omezenost w^n ($\|w_n\| \leqslant \|v_n\|$). Jediné, co zbývá z požadavků A–L, je $\partial_t u^n = w^n$. Pro libovolné $\tilde\varphi \in C_0^\infty((0,T))$, tj. $\psi\tilde\varphi \in C_0^2((0,T)\times\Omega)$, a pro $\tilde\psi \in C^2(\Omega) \overset{\text{dense}}{\subset} W^{2,q'}(\Omega)$:

$$\int_0^T \langle w^n, \psi\rangle_{W^{2,q'}(\Omega)^*} \tilde\varphi = \int_0^T \langle w^n \psi\tilde\varphi\rangle = \int_0^T \int_\Omega v^n(t)\Delta(\psi\tilde\varphi) =$$

$$= -\int_0^T \int_\Omega u^n \partial_t(\psi\tilde\varphi) = -\int_0^T (\partial_t\tilde\varphi) \int_\Omega u^n\psi = -\int_0^T (\partial_t\tilde\varphi) \langle u^n, \psi\rangle_{W^{2,q'}(\Omega)^*}.$$

Nyní už použijeme Aubinovo–Lionsovo lemma na

$$\left\{ u^n \in L^1(0,T;W^{1,p}(\Omega)), \partial_t u^n \in L^1(0,T;W^{2,q'}(\Omega)^*) \right\}$$

(omezenost u^n v L^1 vyplývá z omezenosti v L^2 a Hölderovy nerovnosti), čímž dostaneme, že $\{u^n\} \hookrightarrow\hookrightarrow L^1(0,T;L^p)$. ($W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p$ víme ze Sobolevových vnoření, a oba tyto prostory jsou reflexivní, $L^p \hookrightarrow L^q \hookrightarrow W^{2,q'}(\Omega)^*$ z předpokladu $q \leqslant p$.)

Jelikož $\{u^n\}$ je omezená, tak vnořená bude prekompaktní, tudíž z ní lze vybrat (silně) konvergentní podposloupnost, která ale z $u^n \rightharpoonup u$ nemůže konvergovat jinam než k u. $\square$

Důkaz ($p < q \leqslant \frac{dp}{d-p}$ (ale to ani není potřeba))
Postup bude totožný jako v předchozím případě, jen budeme posloupnost vnořovat do L^q (proto $q \leqslant \frac{dp}{d-p}$) a následně použijeme, že norma L^q je až na násobek větší než L^p, tedy (silná) konvergence v L^q implikuje (silnou) konvergenci v L^p $\square$

Důkaz ($p < q$)
Je-li $p < q$, tak $L^q \hookrightarrow L^p$, tedy v^n konvergují slabě i v L^p a můžeme v zadání místo q psát p a máme $q = p$. $\square$