TODO!!!

Definice 0.1 (Lineární PDR)

Parciální diferenciální rovnice (PDR) je lineární, jde-li ji zapsat ve tvaru

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m, \alpha \in (\mathbb{N}_0)^n} a_\alpha D^\alpha u = f$$

pro neznámou funkci u, $f(x)$ a $a_\alpha(x)$ je dáno ($x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$).

Je-li $f \equiv 0$, pak říkáme, že PDR je homogenní (bez pravé strany). Pokud a_α jsou konstanty, pak říkáme, že PDR je s konstantními koeficienty.

Definice 0.2 (Semilineární PDR)

Semilineární rovnice má tvar

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u + b = 0,$$

kde $a(x)$ a $b(x, u, \nabla u, \ldots, \nabla^{n-1} u)$ je dáno.

Definice 0.3 (Kvazilineární PDR)

Kvazilineární rovnice je

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u + f = 0,$$

kde $a_\alpha(x, u, \nabla u, \ldots, \nabla^{m-1} u)$ a $f(x, u, \nabla u, \ldots, \nabla^{m-1} u)$ je dáno.

Definice 0.4 (Řád rovnice)

m v předchozích definicích nazýváme řád rovnice.

Definice 0.5 (Korektně zadaný problém)

Problém je korektně zadaný podle Hadamarda, pokud má řešení, řešení je jednoznačné a řešení závisí spojitě na datech.

Definice 0.6 (Klasické řešení)

Rovnice platí bodově, derivace jsou spojité.

Definice 0.7 (Okrajové podmínky)

Dirichlet: zadaná hodnota na hranici.

Neumann: zadány normálové tečny na hranici.

1 Cauchyova úloha pro kvazilineární rovnici 1. řádu

Definice 1.1

Buď $a_1, \ldots, a_n$, $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Rovnici

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(u(x), x)\partial_j u(x) = f(u(x), x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

nazveme kvazilineární rovnici prvního řádu.

Počáteční podmínku předepisujeme ve tvaru $u(0, \overline{x}) = u_0(\overline{x})$, kde $\overline{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme klasickým řešením Cauchyovy úlohy pro kvazilineární rovnici 1. řádu, pokud $u \in \mathbb{C}^1(\Omega)$ a podmínky platí bodově v Ω.

2 Klasifikace lineárních rovnic 2. řádu

Poznámka (Lineární rovnice druhého řádu)

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x) = f(x),$$

kde a_{ij}, b_i, c, f jsou dané funkce, $i, j \in [n]$, u neznámá funkce.

Zafixujeme $x_0 \in \mathbb{R}^n$, aby rovnice byla definována na nějakém $U(x_0)$. Chceme také rovnici transformovat tak, aby $A = (a_{ij})$ byla diagonální. Budeme pp. A je symetrická (neboť pro $u \in C^2(\ldots)$: $\partial_i\partial_j u = \partial_j\partial_i u$)

Definice 2.1 (Transformace diferenciální rovnice)

Vezmeme nějaké y_0 a $U(y_0)$ a hladké? zobrazení $\varphi(y_0) = x_0$ a $\varphi(U(y_0)) \subset U(x_0)$.

Definujeme funkci v: $u(x) = v(P \cdot x)$, kde $P \in M^{n\times n}$ je regulární matice. $u(\overbrace{P^{-1}y}^{\varphi(y)}) = v(y)$.

Dosadíme do rovnice výše:

$$\partial_i u(x) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k v(Px)P_{ki}, \qquad \partial_j\partial_i u(x) = \sum_{k=1}^{m} P_{ki} \sum_{l=1}^{n} P_{lj}\partial_k\partial v(Px),$$

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n} \partial_k\partial_l v(Px)P_{ki}a_{ij}(x)(P^T)_{jl} = \sum_{k,l=1}^{n} \partial_k\partial_l v(Px)(PA(x)P^T)_{kl}$$

LA: $A(x_0)$ je symetrická, tedy ze Sylvestrova zákona setrvačnosti existuje P regulární taková, že $PA(x_0)P^T = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ pro $d_i \in \{-1, 0, 1\}$. Pozor, P není určena jednoznačně, ale $d_1, \dots, d_n$ ano až na permutaci.

Taktéž lze najít P tak, aby $P^T = P^{-1}$ a $PA(x_0)P^{-1} = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ pro $d \in \mathbb{R}$.

Například
Vlnová rovnice v 1D: $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$.

Laplaceova rovnice v 2D: $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$.

Rovnice vedení tepla: $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$.

Definice 2.2 (Typy diferenciální rovnice 2. řádu)

Řekneme, že lineární diferenciální rovnice je

- **eliptická** v x_0, pokud $\operatorname{sgn} A(x_0) = (n, 0, 0)$ nebo $(0, 0, n)$; (Laplace)
- **hyperbolická** v x_0, pokud $\operatorname{sgn} A(x_0) = (n-1, 0, 1)$ nebo $(1, 0, n-1)$; (vlnová)
- **parabolická** v x_0, pokud $\operatorname{sgn} A(x_0) = (n-1, 1, 0)$ nebo $(0, 1, n-1)$ a v případě $\operatorname{sgn} A(x_0) = (n-1, 1, 0)$ navíc požadujeme, aby koeficient b_n (odpovídající $d_n = 0$) po transformaci byl v bodě x_0 záporný, a v opačném případě kladný; (vedení tepla)

Věta 2.1

Buď S hyperbolická na okolí $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $a_{11}, a_{12}, a_{22} \in C^1(U(x_0))$, $a_{11} \neq 0$ na $U(x_0)$. Pak lze

$$a_{11}\partial_1^2 u + 2a_{12}\partial_1\partial_2 u + a_{22}\partial_2^2 u = 0$$

transformovat do tvaru $\partial_1\partial_2 v = f(\partial_1 v, \partial_2 v, v)$ na $V(x_0)$ pro vhodnou funkci f a okolí V.

Důkaz
Dokázáno na cvičení. □

3 Vlnová rovnice

Tvrzení 3.1 (Obecné řešení vlnové rovnice v 1D)

Řešení $\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0$, kterou lze transformovat na $\partial_1\partial_2 v = 0$, dostaneme skrze $\partial_2 v(\varrho\sigma) = \tilde{V_1}(\sigma)$, tedy $\int_0^\infty \tilde{V_1}(\tau)d\tau + V_2(\varrho) = V_1(\sigma) + V_2(\varrho) = v(\varrho, \sigma)$.

Obecným řešením je tedy

$$u(t, x) = V_1(x - ct) + V_2(x + ct),$$

pro dost hladké funkce V_1, V_2.

Poznámka (Úloha pro vlnovou rovnici (Cauchyova úloha))
Pro dané $f : (0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hledáme řešení $u : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f \text{ v } (0,T) \times \mathbb{R}.$$

A $u(0,x) = u_0(x)$, $\partial_t u(0,x) = u_1(x)$ ($\partial_t u$ musí jít spojitě rozšířit do $(0,x)$ a $\partial_t u(0,x)$ je hodnota tohoto rozšíření).

Definice 3.1 (d'Alambertova formule)

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)ds.$$

Lemma 3.2

$$\partial_t \int_0^t u_\tau(t,x)d\tau = u_t(t,x) + \int_0^t \partial_1 u_\tau(t,x)d\tau$$

Důkaz
$U(t,s,x) := \int_0^t u_\tau(s,x)d\tau$. Chceme $\partial_t[U(t,t,x)] = (\partial_1 U)(t,t,x) + (\partial_2 U)(t,t,x)$.

$$\partial_t u(t,x) = u_t(t,x) + \int_0^t \partial_1 u_\tau(t,x)d\tau.$$

□

Poznámka (Duhamelův princip)
Aneb jak určit řešení (libovolné lineární rovnice) pro $f \not\equiv 0$, $u_0 = 0$, $u_1 = 0$ (pokud známe řešení pro $f = 0$).

Najdeme řešení $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ v $(\tau, T) \times \mathbb{R}$ ($\tau \in (0,T)$) s počátečními podmínkami $u(\tau, x) = 0$ a $\partial_t u(\tau, x) = f(\tau, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Označme ho u_τ.

Tvrdíme, že $u(t,x) := \int_0^t u_\tau(t,x)d\tau$ je řešení s $f \not\equiv 0$.

$$\partial_t u(t,x) = u_t(t,x) + \int_0^t \partial_1 u_\tau(t,x)d\tau = 0 + \int_0^t \partial_1 u_\tau(t,x)d\tau$$

$$\partial_t^2 u(t,x) = \partial_1 u_t(t,x) + \int_0^t \partial_1^2 u_\tau(t,x)d\tau = f(t,x) + \int_0^t \partial_1^2 u_\tau(t,x)d\tau$$

$$\partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = f(t,x) + \int_0^t (\partial_1^2 u_\tau(t,x) - \partial_2^2 u_\tau(t,x))d\tau = f(t,x) + \int_0^t 0 d\tau = f(t,x).$$

Očividně navíc $u(0,x) = 0$ a $\partial_t u(0,x) = 0$.

Dosazením řešení z d'Alambertovy formule:

$$u(t,x) = \int_0^t u_\tau(t,x)d\tau = \int_0^t \frac{1}{2}\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,s)dsd\tau$$

Definice 3.2

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $k \in \mathbb{N}_0$. $C^k(\overline{\Omega}) = \{f \in \Omega \to \mathbb{R} | \alpha \in (\mathbb{N}_0)^n, |\alpha| \leqslant k \implies D^\alpha f$ je možné spojitě rozšíř

Pro $T > 0$ definujeme $C^k([0,T)\times\mathbb{R}) := \{f : (0,T) \times \mathbb{R} | \alpha \in (\mathbb{N}_0)^2, |\alpha| \leqslant k \implies D^\alpha f$ lze spojitě rozšíři

Poznámka
Podobné prostory zavedeme podobně.

Pro omezené Ω lze zavést i tím, že $D^\alpha f$ jsou stejnoměrně spojité.

Nerozlišujeme mezi $D^\alpha f$ a jeho rozšířením na hranici.

Lemma 3.3

Ať f, $\partial_2 f \in C([0,T) \times \mathbb{R})$ pro zvolené $T > 0$. Pak pro $F(t,x) := \int_0^t f(\tau,x)d\tau$ je

$$F \in C^1([0,T) \times \mathbb{R}) \wedge \partial_1 F(t,x) = f(t,x) \wedge \partial_2 F(t,x) = \int_0^t \partial_2 f(\tau,x)d\tau.$$

Důkaz (Náznak)
Platí $\partial_1 F(t,x) = f(t,x)$ pro $(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}$, protože pro pevné $x \in \mathbb{R}$ je $\tau \mapsto f(\tau,x)$ spojité $\implies \partial_1 F_t \in C([0,T) \times \mathbb{R})$.

$$\partial_2 F(t,x) = \int_0^t \partial_2 f(\tau,x)d\tau,$$

protože derivjeme integrál dle parametru x, t je pevné. ($f(\cdot,x)$ je měřitelná ze spojitosti, $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(\cdot,x_0) \in L^1(0,t)$ ze spojitosti pro $t < T$, $\exists \partial_2 f(t,x)$ všude (tj. i skoro všude) z $\partial_2 \in C(\ldots)$, integrovatelná majoranta existuje z $|\partial_2 f(t,x)| \leqslant \max_{[0,t]\times[-K,K]} \partial_2 f$ pro vhodné $K > 0$). □

Věta 3.4

Buď $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $T > 0$, $f \in C^1([0,T) \times \mathbb{R})$. Definujeme

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x),$$

kde u_1, u_2 jsou u z d'Alambertovy formule a Duhamelova principu. Pak platí $u \in C^2([0,T) \times \mathbb{R})$, $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = f$ v $(0,T) \times \mathbb{R}$, $u = u_0$, $\partial_t u = u_1$ v $\{0\} \times \mathbb{R}$.

Důkaz
„$u_2 \in C^1([0,T) \times \mathbb{R})$“: Ano, pokud $F(\tau,t,x) := \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,s)ds$ splňuje $F, \partial_2 F, \partial^3 F \in C([0,T) \times \mathbb{R})$. $G(\tau,\alpha,\beta) := \int_\alpha^\beta f(\tau,s)ds$ je spojitá na $[0,T) \times \mathbb{R}^2$ z vlastností f, tedy F podmínky splňuje.

Z lemmatu tedy máme

$$u_2 \in C^1([0,T) \times \mathbb{R}), \partial u_2(t,x) = \frac{1}{2}F(t,t,x) + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_2 F(\tau,t,x)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \partial_2 F(\tau,t,x)d\tau$$

Podobně $\partial_t u_2 \in C^1([0,T) \times \mathbb{R})$.

$$\partial_t^2 u_2(t,x) = \frac{1}{2}\partial_2 F(t,t,x) + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_2^2 F(\tau,t,x)d\tau.$$

$$\partial_2 F(\tau,t,x) = f(\tau, x+(t-\tau)) + f(\tau, x-(t-\tau))$$

$$\partial_2 = F(t,t,x) = 2f(t,x),$$

$$\partial_t^2 u_2(t,x) = f(t,x) + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_2 f(\tau, x+(t-\tau)) - \partial_2 f(\tau, x-(t-\tau))d\tau.$$

Existence ∂_x^2 stejně jako v předchozím. Její výpočet:

$$\partial_3^2 F(\tau,t,x) = (\partial_2 f)(\tau, x+t-\tau) - (\partial_3 f)(\tau, x-t+\tau)$$

$$\partial_x^2 u_2(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \partial_3^2 F(\tau,t,x)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \partial_2 f(\tau, x+t-\tau) - \partial_2 f(\tau, x-t+\tau)d\tau.$$

Tedy $\partial_t^2 u_2 - \partial_x^2 u_2 = f$ na $(0,T) \times \mathbb{R}$. $u_2 = 0$ a $\partial_t u_2 = 0$ v $\{0\} \times \mathbb{R}$. □

Lemma 3.5 (O rozšiřování)

Buď $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\tilde{g}$ liché rozšíření na $\mathbb{R}$.

- *Je-li $g(0) = 0$ a $g \in C([0,+\infty))$, je $\tilde{g} \in C(\mathbb{R})$.*
- *Je-li $g(0) = 0$ a $g \in C^1([0,+\infty))$, je $\tilde{g} \in C^1(\mathbb{R})$.*
- *Je-li $g''(0) = g(0) = 0$ a $g \in C^2([0,+\infty))$, je $\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R})$.*

Důkaz
Pro $x < 0$: $\tilde{g}(x) = -g(-x)$, $\lim_{x\to 0_-} \tilde{g}(x) = \lim_{x\to 0_-} -g(-x) = \lim_{y\to 0_+} -g(y) = 0$.

Pro $x < 0$: $\tilde{g}(x) = -g(-x)$, $\lim_{x\to 0_-} \tilde{g}'(x) = \lim_{x\to 0_-} g'(-x) = \lim_{y\to 0_+} g'(y)$. Tedy $\tilde{g}'_+(0) = \tilde{g}'_-(0) = \tilde{g}'(0)$.

Třetí případ je analogicky. □

Poznámka (Počátečně okrajová úloha v $(0,T) \times (0,+\infty)$)
Pro dané funkce $u_0, u_1 : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $T > 0$, $f : [0,T) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ najděte $u : [0,T) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, které řeší $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = f$ v $(0,T) \times (0,+\infty)$, $u = 0$ v $[0,T) \times \{0\}$, $u = u_0$ a $\partial_t u = u_1$ v $\{0\} \times [0,\infty)$.

Definujeme $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{f}$ jako lichá rozšíření.

$$u(t,x) := \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_0(x+t) + \tilde{u}_0(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{u}_1(s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\tau,s) ds d\tau.$$

Upočítali jsme to a vyšlo to.

Věta 3.6

Buď $T > 0$, $f \in C^1([0,T) \times [0,\infty))$, $u_0 \in C^2([0,+\infty))$, $u_1 \in C^1([0,+\infty))$, $f(t,0) = 0$ $\forall t \in [0,T)$, $u_0(0) = u_0''(0) = 0$, $u_1(0) = 0$. Pak u definované

$$u(t,x) = \begin{cases} \text{formule z předchozí věty,} \\ u(t,x) = \frac{1}{2}\left(u_0(t+x) - u_0(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t} u_1(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t}\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,s) ds d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{t-x}\int_{t-\tau-x}^{x+t-\tau} \end{cases}$$

Důkaz
Přímočarý. □

Poznámka (Počátečně okrajová úloha v $(0,T) \times (0,l)$)
Pro dané funkce $u_0, u_1 : (0,l) \to \mathbb{R}$, $l > 0$ a $f : (0,T) \times (0,l) \to \mathbb{R}$ najděte $u : (0,T) \times (0,l)$, $u = u_0$ a $\partial_1 u = u_1$ v $\{0\} \times (0,l)$, $u = 0$ v $(0,T) \times \{0,l\}$.

Věta 3.7

Obdobně předchozí větě, jen rozšiřujeme „liše periodicky“.

Důkaz
Obdobně předchozí větě, jen rozšiřujeme „liše periodicky“. □

Poznámka
Pak jsme ještě vyměnili podmínku $u = 0$ v $(0,T) \times \{0\}$ za $\partial_t u = 0$ v $(0,T) \times \{0\}$. Takže jsme rozšířili sudě a za cvičení vymysleli znění věty…

Definice 3.3 (Fourierova metoda (separace proměnných))

Řešení hledáme ve tvaru řady

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x).$$

Pokud X_0 volíme vhodně, PDR TODO!!!

Věta 3.8

Nechť $u_0 \in C^3([0,l])$, $u_1 \in C^3([0,l])$, $l > 0$ a $u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = u_1(0) = u_1(l) = 0$. Pak řešení nalezené Fourierovou metodou splňuje

$u \in C^2([0,+\infty)\times[0,l]), \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ *v* $(0,+\infty)\times(0,l), u = 0$ *na* $(0,+\infty)\times\{0,l\}, u = u_0, \partial_t u = u_1$ *v* $\{0\}\times$

Důkaz

Dokážeme pouze, že $u \in C^2([0,\infty)\times[0,l])$ a že řadu je možné derivovat člen po členu. Jen pro část

$$R(t,x) := \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{k\pi}{e}x)\hat{u}_{0k}\cos(\frac{k\pi}{e}t)$$

Typicka 2. der:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{2}\right) gon_1(\frac{k\pi}{2}x) gon_2(\frac{k\pi}{2}t)\hat{u}_{0k}.$$

Pro stejnoměrnou konvergenci 2. derivace počítejme $\sum_{k=1}^{\infty} k^2|\hat{u}_{0k}| < \infty$.

$$\hat{u}_{0k} = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(y)\sin\frac{k\pi}{l}y dy = \underbrace{\frac{2}{l}[u_0(y)]_0^l}_{=0} + \frac{2}{l}\int_0^l u_0'(y)\cos\frac{k\pi y}{l}dy\frac{l}{k\pi} = \dots$$

$$\dots = -\frac{2}{l}\int_0^l u_0'''(y)\cos\frac{k\pi y}{2}dy\left(\frac{l}{k\pi}\right)^3$$

$$|k^2\hat{u}_{0k}| \leqslant \frac{1}{k}p_k := \frac{1}{k}\cdot\frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 |\int_0^l u_0'''(y)\cos\frac{k\pi y}{l}dy|.$$

($||y||_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{g}_k^2$ pro orto-normální bázi.) Parsevalova nerovnost: $u_0''' \in L^2(0,l) \implies \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 < \infty$.

$$|k^2\hat{u}_{0k}| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + p_k^2\right) \implies \sum_{k=1}^{\infty} k^2|\hat{u}_{0k}| < \infty.$$

□

Poznámka

V předchozí větě lze předpokládat, že u_0'', $u_1' \in AC([0,l])$, u_1'', $u_0''' \in L^2(0,l)$.

Věta 3.9 (Gauss-Green-Ostrogradsky)

Ať $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená omezená s C^1 hranicí a vnější normálou ν. Ať $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Pak $\forall i \in [n] : \int_\Omega \partial_i u = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu_i ds$. Pokud $U \in C^1(\overline{\Omega})$, $U : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n : \int_\Omega \operatorname{div} U d\lambda^n =$

$\int_{\partial\Omega} U \cdot \nu dS$.

Věta 3.10 (Greenovy ?)

Ať Ω jako v minulé větě, $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, $w \in C^1(\overline{\Omega})$, $u, v, w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Pak

$$\int_\Omega \Delta u w = \int_{\partial\Omega} w(\nabla u \cdot \nu) dS - \int_\Omega \nabla u \nabla w.$$

$$\int_\Omega (\Delta u) v - u(\Delta v) = \int_{\partial\Omega} v(\nabla u \cdot \nu) - u(\nabla v \cdot \nu) dS.$$

Důkaz

Druhá rovnost plyne z první. První:

$$\operatorname{div}(\nabla u \cdot w) = \ldots = \Delta u w + \nabla u \cdot \nabla w.$$

Nyní už z GGO. □

Lemma 3.11

Buď $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, u spojitá na $\partial U(0, r)$. Pak $\fint_{\partial U(x,1)} u ds = \fint_{\partial U(0,1)} u(x + rz) dS(z)$. Kde

$$\fint_M f d\mu = \int_M f d\mu / \int_M 1 d\mu, \text{ pro } \mu(M) \neq 0.$$

Důkaz

Plyne z definice plošného integrálu (ukázali jsme si pouze v $n = 3$). Převedeme na sférické souřadnice, vydělíme objemem daných koulí a vyjde to. □

Lemma 3.12

Buď $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$, $u \in C(\mathcal{U}(x, R))$. Pak $\partial_l \left[\int_{\mathcal{U}(x,r)} dx\right] = \partial_r \left[\int_0^r \int_{\partial\mathcal{U}(x,\varrho)} u dS d\varrho\right] = \int_{\partial U(x,\Omega)} u dS$.

Důkaz

Prý byl někdy na cvičení. □

Lemma 3.13

$$n \int_{\mathcal{U}(0,1)} 1 = \int_{\partial\mathcal{U}(0,1)} 1 dS.$$

Definice 3.4

$$\alpha_n := \lambda^n(\mathcal{U}(0,1)), n\alpha_n := \int_{\partial\mathcal{U}(0,1)} dS.$$

Lemma 3.14

Buď $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$, $u \in C^1(\mathcal{U}(x,R))$. Označme $u^x(r) = \fint_{\partial\mathcal{U}(x,r)} udS$. Pak platí

$$\partial_r u^x(r) = \fint_{\partial\mathcal{U}(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y), \qquad r \in (0,R).$$

Je-li navíc $u \in C^2(\mathcal{U}(x,R))$, je

$$\partial_r u^x(r) = \frac{r}{n} \fint_{\mathcal{U}(x,r)} \Delta u(y) d\lambda(y).$$

$$\partial_r^2 u^x(r) = \left(\frac{1}{n} - 1\right) \fint_{\mathcal{U}(x,r)} \Delta u(y) d\lambda(y) + \fint_{\partial\mathcal{U}(x,r)} \Delta u(y) dS(y), \qquad r \in (0,R).$$

Důkaz

Podle lemmatu výše, derivace integrálů podle parametru a znovu tohoto lemmatu:

$$\partial_r u^x(r) = \partial_r \left(\fint_{\partial\mathcal{U}(0,1)} u(x+rz) dS(z) \right) = \int_{\partial\mathcal{U}(0,1)} (\nabla u)(x+rz) \cdot z ds(z) = \fint_{\partial\mathcal{U}(x,1)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) =$$

$$\overset{u \in C^2}{=} \frac{1}{n\alpha_n r^{n-1}} \int_{\mathcal{U}(x,r)} \Delta u(y) d\lambda^n(y) = \frac{r}{n} \fint_{\mathcal{U}(x,1)} \Delta u(y) d\lambda^n(y).$$

□

Lemma 3.15

Buď $x \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $u \in C^m([0,+\infty) \times \mathbb{R}^n)$ a u splňuje bodově $\partial_t^2 u - \nabla u = 0$ v $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $u = u_0$ a $\partial_t = u_1$ v $\{0\} \times \mathbb{R}^n$.

Označme $u^x(r,t) = \fint_{\partial U(x,r)} u(t,y) dS(y)$, $u_0^x(r,t) = \fint_{\partial U(x,r)} u_0(y) dS(y)$, $u_1^x(r,t) = \fint_{\partial U(x,r)} u_1(y) dS(y)$, pro $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Pak $u^x \in C^m([0,+\infty)^2)$ a $\partial_t^2 u^x - \partial_r^2 u^x - \frac{n-1}{r} \partial_r u^x = 0$ v $(0,+\infty)^2$, $u^x = u_0^x$, $\partial_t u^x = u_1^x$ v $[0,+\infty) \times \{0\}$.

Důkaz
„$u^x \in C^m([0,+\infty)^2)$“ spojitost derivací podle t je zřejmá. Derivace dle r:

$$\partial_r u^x(r,t) = \frac{r}{n} \fint_{U(x,r)} \Delta u(y) d\lambda(y),$$

podle lemmatu výše. Navíc je spojitá. $\partial_t \partial_r u^x(r,t)$ je jasná.

$\partial_r^2 u^x(r,t)$ podobně:

$$\fint_{U(x,r)} (\Delta u)(t,y) d\lambda(y) = \fint_{0,1} (\Delta u)(t,x+rz) d\lambda(z)$$

spojitá dle teorie míry.

„Rovnosti“:

$$\partial_r u^x(r,t) = \frac{r}{n} \fint_{U(x,r)} \Delta u(t,y) d\lambda(y) = \frac{r}{n} \int_{U(x,r)} \partial_t^2 u(t,y) d\lambda(y) = \frac{r^{1-n}}{n\alpha_n} \partial_t^2 \int_{U(x,r)} u(t,y) d\lambda(y)$$

$$r^{n-1} \partial_r u^x(r,t) = \frac{1}{n\alpha_n} \partial_t^2 \int_{U(x,r)} u(t,y) d\lambda(y).$$

$$RHS = r^{1-n} \partial_r (r^{n-1} \partial_r u^x(r,t)) = \frac{1}{n\alpha_n r^{n-1}} \partial_t^2 \int_{\partial U(x,r)} u dS = \partial_t^2 u^x(r,t)$$

$$RHS = r^{1-n}(r^{n-1}\partial_r^2 u^x(r,t) + (n-1) r^{n-2} \partial_r u^x(r,t)) = \partial_r^2 u^x(r,t) + \frac{n-1}{r} \partial_r u^x(r,t) \text{ v } (0,+\infty)^2.$$

$u^x = u_0^x$, $\partial_t u^x = u_1^x$ v $[0,+\infty) \times \{0\}$ plyne z definice u_i^x. □

Lemma 3.16 (Doplnění pro $n = 3$)

Označme $t, r \geqslant 0$ $\tilde{u}^x(r,t) = r u^x(r,t)$ a $\tilde{u}_0^x(r) = r u_0^x(r)$, $\tilde{u}_1^x(r) = r u_1^x(r)$. Pak

$$\partial_t^2 \tilde{u}^x = \partial_r^2 u \text{ v } (0,+\infty)^2,$$

$$\tilde{u}^x = 0 \text{ v } \{0\} \times [0,+\infty),$$

$$\tilde{u}^x = \tilde{u}_0^x, \partial \tilde{u}^x = \tilde{u}_1^x \text{ v } [0,+\infty) \times \{0\}.$$

Důkaz
„První“: $\partial_t^2 \tilde{u}^x = r \partial_t^2 u^x = r \partial_2^2 u^x + 2\partial_r u^x = \partial_r^2 (r u^x) = \partial_r^2 \tilde{u}^x$.

„Druhá“: $\tilde{u}^x = 0$ z definice pro $r = 0$ a podobně „třetí“. □

Poznámka (K lemmatům výše)

Řešení $0 < x \leqslant t < T$:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+t) - u_0(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t} u_1(\xi)d\xi$$

$$\tilde{u}^x(r,t) \overset{r\leq t}{=} \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_0^x(r+t) - \tilde{u}_0^x(t-r)\right) + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{u}_1^x(\xi)d\xi$$

$$u(t,x) = \lim_{r\to 0_+} U^x(r,t) = \lim_{r\to 0_+} \frac{1}{r}\tilde{u}^x(r,t) =$$

$$\lim_{r\to 0_+} \frac{1}{2r}\left((t+r)u_0^x(t+r) - (t-r)u_0^x(t-r)\right) + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \xi u_1^x(\xi)d\xi =$$

$$= \partial_t(t\cdot u_0^x(t)) + tu_1^x(t) = u_0^x(t) + t \fint_{\partial U(x,t)} \nabla u_0(y)\frac{y-x}{t}dS(y) + t \fint_{\partial U(x,t)} u_1(y)dS(y).$$

Důkaz (Kirchhoffův vzorec)
Kandidát na řešení vlnové rovnice pro $n = 3$:

$$u(t,x) = \fint_{\partial U(x,t)} u_0(y) + \nabla u_0(y)(y-x) + tu_1(y)dS(y), \qquad x \in \mathbb{R}^3, t \geqslant 0.$$

□

Definice 3.5 (Poissonnův vzorec v $n = 2$)

Kandidát na řešení vlnové rovnice v $n = 2$:

$$u(t,x) = \frac{1}{2} \fint_{U(x,t)} tu_0(y) + t\nabla u(y)(y-x) + t^2 u_1(y)\frac{1}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}}dy, \qquad x \in \mathbb{R}^2, t \geqslant 0.$$

Věta 3.17

Buď $n \in \{2,3\}$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ a u je definováno buď Kirchhoffovým nebo Poissonovým vzorcem. Pak

$$u \in C^2([0,+\infty) \times \mathbb{R}^n);$$
$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \ \ v \ (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n;$$
$$u = u_0 \wedge \partial_t u = u_1 \ \ v \ \{0\} \times \mathbb{R}^n.$$

Důkaz
Bez důkazu. □

Věta 3.18

Buď $T > 0$, $f \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, $n \in \{2,3\}$. Ať pro $\tau \in (0,T)$ splňuje funkce $u_\tau : [\tau,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ následující:

$$u_\tau \in C^2([0,+\infty] \times \mathbb{R}^n);$$
$$\partial_t^2 u_\tau - \Delta u_\tau = 0 \ \ v \ (\tau,+\infty) \times \mathbb{R}^n;$$

$$u_\tau = 0 \wedge \partial_t u_\tau = f(\tau, \cdot) \ v \ \{\tau\} \times \mathbb{R}^n.$$

Pak pro funkci $u(t,x) := \int_0^t u_\tau(t,x) d\tau$, *pro* $t \in (0,T)$, $x \in \mathbb{R}^n$, *platí*

$$u \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}^n);$$

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f \ v \ (0,T) \times \mathbb{R}^n$$

$$u = 0 \wedge \partial_t u = 0 \ v \ \{0\} \times \mathbb{R}^n.$$

Důkaz

Bez důkazu. □

Věta 3.19

Buď $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$, $K = \{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n | \ |x - x_0| \leqslant t_0 - t, t \in [0, t_0]\}$. *A buď* $u \in C^2(K)$ *a platí* $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ *v* K, $u = 0$ *a* $\partial_t u = 0$ *v* $\{0\} \times U(x_0)$. *Pak* $u = 0$ *na* K.

Důkaz

Energetická metoda:

$$e(t) = \int_{U(x_0, t_0 - t)} |\delta_t u|^2 + |\nabla u|^2.$$

$$e(0) = 0, \quad e \geqslant 0,$$

$$\frac{de}{dt} = -\int_{\partial U(x_0,t_0-t)} |\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 ds + \int_{U(x_0,t_0-t)} 2\partial_t u \partial_t^2 u + 2\nabla u \cdot \partial_t \nabla u ds =$$

$$= -\int_{\partial U(x_0,t_0-t)} |\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 ds + \int_{U(x_0,t_0-t)} 2\partial_t u \partial_t^2 u + 2 \underbrace{\operatorname{div}(\nabla}_{=\Delta} u) \cdot \partial_t u ds + \int_{\partial U(x_0, t-t_0)} 2\nabla u \cdot \nu \partial_t u ds =$$

$$= -\int_{\partial U(x_0,t_0-t)} |\partial_t u|^2 - 2\nabla u \cdot \nu \partial_t u + |\nabla u|^2 ds =$$

$$= -\int_{\partial U(x_0,t_0-t)} |\partial_t u \nu - \nabla u|^2 ds \leqslant 0.$$

Tedy e je nerostoucí a $e \geqslant 0$, tedy $e = 0$. □

Důsledek

Klasické řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici je určené jednoznačně.

4 Rovnice vedení tepla

Definice 4.1 (Rovnice vedení tepla (RVT))

Rovnici $\partial_t u - \Delta u = f$ v $(0,T) \times \Omega$, $T \in (0,\infty]$, nazýváme rovnice vedení tepla, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zadáváme f a další podmínky (počáteční, okrajová). Hledáme $u : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$.

Definice 4.2 (Fundamentální řešení RVT)

Funkci $G(t,x) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ nazveme fundamentální řešení RVT.

Definice 4.3 (Prostor testovacích funkcí)

Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná, otevřená, definujeme prostor testovacích funkcí jako množinu $\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) | \exists K \subset \Omega, K \text{ kompaktní}, \operatorname{supp} \varphi \subset K\}$.

Věta 4.1 (Vlastnosti fundamentálního řešení RVT)

1. *$G \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\})$;*
2. *$\partial_t G - \Delta G = 0$ v $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{(0,0)\}$;*
3. *$\forall t > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x) dx = 1$, $G \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$;*
4. *$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$:*
$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} G \cdot (-\partial_t \varphi - \Delta \varphi) = \varphi(0,0).$$

Důkaz

Ad 1: $G \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\})$, $\mathbb{C}^\infty$ obdobně. Zafixujeme si $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

$$0 \leqslant \frac{1}{(r\pi t)^{n/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \overset{x \in U(x_0, |x_0|/2)}{\leqslant} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x_0|^2/4}{4t}} \to 0.$$

$$\lim_{t \to 0_+, x \to x_0} G(t,x) = 0.$$

Ad 2: cvičení.

Ad 3:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2} e^{-|y|^2} dy =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y_1^2 + \ldots + y_n^2)} dy = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz\right)^n}_{=\sqrt{\pi}} = 1.$$

Ať $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ kompaktní. Pak existuje $C > 0$, $K \subset (-C, C) \times \mathbb{R}^n$. $G \geqslant 0 \implies \int_k G \leqslant \int_{-C}^{C} \int_{\mathbb{R}^n} G = C < +\infty$. Tedy $G \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Ad 4: Zafixujeme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} G \cdot (-\partial_t \varphi - \Delta \varphi) = \lim_{h \to 0_+} \int_h^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} G \cdot (-\partial_t \varphi - \Delta \varphi) =$$

$$= \lim_{h \to 0_+} \int_h^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \partial_t G \varphi + \int_{\mathbb{R}^n} G(h,x)\varphi(h,x) dx - \int_h^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta G \varphi =$$

$$= \lim_{h \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{4\pi h}}^n e^{-\frac{|x|^2}{4h}} \varphi(h,t) dx =$$

$$= \lim_{h \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2} e^{-|y|^2} \varphi(h, 2\sqrt{h} y) dy \overset{\text{Lebesgue}}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2} e^{-|y|^2} \varphi(0,0) dy = \varphi(0,0).$$

□

Důsledek

Zafixujeme $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, definujeme $\varphi(\sigma, \xi) := f(t - \sigma, x - \xi)$ pro pevné $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

Dostáváme:

$$\varphi(0,0) = f(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} G \cdot (-\partial_t \varphi - \Delta_t \varphi) d(\sigma, \xi) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} G \cdot (\partial_t f - \Delta_x f) d(\sigma, \xi) = (\partial_t u - \Delta u),$$

kde

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} G(\sigma,\xi) \cdot f(t-\sigma, x-\xi) d(\sigma,\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} G(t-\sigma, x-\xi) g(\sigma,\xi) d(\sigma,\xi).$$