Příklad (2.1)

Báze B níže je ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na $\mathbb{C}^2$. Najděte vzorec pro $\left\langle \binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2} \right\rangle$ v závislosti na x_1, x_2, y_1, y_2.

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \right)$$

Řešení

Známe skalární součiny nějaké báze (protože z toho, že je ortonormální vyplývá, že její prvek sám se sebou dává skalární součin 1 a s ostatními dává 0). Tedy nechť χ a υ jsou vyjádření $[\mathbf{x}]_B$ a $[\mathbf{y}]_B$, kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$. Potom z definice skalárního součinu 8.15 (body SL1 a SL2) a z pozorování 8.16 (body 2 a 3) víme, že

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \chi_1 \mathbf{b}_1 + \chi_2 \mathbf{b}_2, \upsilon_1 \mathbf{b}_1 + \upsilon_2 \mathbf{b}_2 \rangle = \overline{\chi_1}\upsilon_1 \cdot \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle + \overline{\chi_1}\upsilon_2 \cdot \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle + \overline{\chi_2}\upsilon_1 \cdot \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \rangle + \overline{\chi_2}\upsilon_2 \cdot \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle =$$

$$= \overline{\chi_1}\upsilon_1 \cdot 1 + 0 + 0 + \overline{\chi_2}\upsilon_2 \cdot 1 = \chi^* \cdot \upsilon.$$

Zbývá tedy zjistit, jak vypadá vyjádření vektorů v bázi B. Víme, že matice přechodu od B ke K (K je kanonická báze) je $[id]_K^B = (\mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2)$. My ale potřebujeme matici přechodu od K k B. Ta ale není nic jiného, než inverze k $[id]_K^B$, tj.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} i & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-i & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} i & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} i & 0 & 1-i & -1 \\ 0 & 1 & i & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1-i & i \\ 0 & 1 & i & 1 \end{array} \right).$$

Výsledek je tudíž:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \chi^* \cdot \upsilon = \left([id]_B^K \mathbf{x}\right)^* \cdot \left([id]_B^K \mathbf{y}\right) = \mathbf{x}^* \left([id]_B^K\right)^* \cdot [id]_B^K \cdot \mathbf{y} =$$

$$\mathbf{x}^* \cdot \begin{pmatrix} -1+i & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1-i & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^* \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1-2i \\ -1+2i & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}.$$

Příklad (2.2)
Nechť **V** je vektorový prostor spojitých reálných funkcí s definičním oborem $[1,4]$ a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je skalární součin na **V** daný vztahem

$$\langle f,g\rangle=\int_1^4 f\cdot g.$$

Najděte ortonormální bázi podprostoru LO $\left\{1,x,x^2\right\}$ a ortogonální projekci funkce $\sin(x)$ na tento prostor.

Řešení
Provedeme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci:

$$\int_1^4 1\cdot 1\,dx=[x]_1^4=4-1=3,$$

Tedy prvním vektorem bude $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Následně chceme x mínus projekce x do $\frac{1}{\sqrt{3}}$, tedy:

$$x-?=x-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\int_1^4 x\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,dx=x-\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4=x-\frac{4^2-1^2}{6}=x-\frac{5}{2}.$$

To znormujeme:

$$\frac{x-5/2}{||x-5/2||}=\frac{x-5/2}{\sqrt{\int_1^4(x-5/2)^2\,dx}}=\frac{x-5/2}{\sqrt{[x^3/3]_{-3/2}^{3/2}}}=\frac{x-5/2}{\sqrt{\frac{27+27}{24}}}=\frac{x-5/2}{\frac{3}{2}}=\frac{2x-5}{3}.$$

Tudíž druhým vektorem ortonormální báze bude $\frac{2x-5}{3}$. Nyní zjistíme rozdíl x^2 a jeho projekce do LO $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2x-5}{3}\right\}$:

$$x^2-?=x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\int_1^4 x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,dx-\frac{2x-5}{3}\int_1^4 x^2\frac{2x-5}{3}dx=x^2-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4-\frac{2x-5}{9}\left(2\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^4-5\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4\right)=$$

$$=x^2-\frac{4^3-1^3}{9}-\frac{2x-5}{9}\left(\frac{4^4-1^4}{2}-10\frac{4^3-1^3}{6}\right)=x^2-7-\frac{2x-5}{9}\cdot\frac{255-10\cdot 21}{2}=x^2-5x+\frac{11}{2}.$$

A znormujeme:

$$\frac{x^2-5x+11/2}{||x^2-5x+11/2||}=\frac{x^2-5x+11/2}{\sqrt{\int_1^4(x^2-5x+11/2)^2\,dx}}=\frac{x^2-5x+11/2}{\sqrt{27/20}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\left(2x^2-10x+11\right).$$

Tedy jedna z ortonormálních bází řešeného podprostoru je

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\quad\frac{2x-5}{3},\quad\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\left(2x^2-10x+11\right)\right).$$

Ortogonální projekci $\sin x$ pak jednoduše spočítáme z definice:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^4\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x\,dx+\frac{2x-5}{3}\int_1^4\frac{2x-5}{3}\sin x\,dx+$$

$$+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\left(2x^2-10x+11\right)\cdot\int_1^4\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\left(2x^2-10x+11\right)\cdot\sin x\,dx=$$

$$\overset{\text{Wolfram}}{=}0.587664+0.635467x-0.25405x^2.$$

```
N[Integrate[Sin[x]/Sqrt[3], {x, 1, 4}]/Sqrt[3] + (2 x - 5)/3 Integrate[(2 x - 5)/3 Sin[x], {x, 1, 4}] +
Sqrt[5/3]/3 (2 x^2 - 10 x + 11) Integrate[Sqrt[5/3]/3 (2 x^2 - 10 x + 11) Sin[x], {x, 1, 4}]]

ExpandAll[%]
```

Příklad (2.*)
Ukažte, že skalární součin je až na násobek určen kolmostí. Přesněji: Nechť $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ jsou dva skalární součiny na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ takové, že pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 = 0$, právě když $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_2 = 0$. Pak existuje kladné reálné číslo t takové, že $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 = t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_2$, pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Důkaz
Nejdříve dokážeme tvrzení sporem pro skalární součin dvou prvků ortogonální báze: Nechť $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ je orto*normální* báze $\mathbf{V}$ vzhledem k skalárnímu součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ (víme, že nějaká musí existovat, jelikož vezmeme libovolnou bázi a provedeme ortogonalizaci). S podmínky $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_2 = 0$ víme, že tato báze je ortogonální vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$.

Nyní nechť pro spor existují $s, t \in \mathbb{R}, s \neq t$ a i, j tak, že $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle_1 = s \cdot \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle_2 = s$ a $\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j \rangle_1 = t \cdot \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j \rangle_2 = t$, potom z definice a vlastností skalárního součinu (z ortogonality vzhledem k oběma součinům a z ortonormality vzhledem k druhému)

$$\langle \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i + \mathbf{b}_j \rangle_2 = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle_2 - \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i \rangle_2 + \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle_2 - \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j \rangle_2 = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$$

a

$$\langle \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i + \mathbf{b}_j \rangle_1 = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle_1 - \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i \rangle_1 + \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle_1 - \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j \rangle_1 = s - 0 + 0 - t \neq 0.$$

To je ale ve sporu s předpokladem $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_2 = 0$.

Máme tedy, že $\exists t\ \forall \mathbf{b} \in B : \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_1 = t \cdot \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$. Z definice a vlastností skalárního součinu (a ortogonality B vzhledem k oběma součinům) máme pro vektory $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{b}_i$ a $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{b}_i$ (víme, že se tak dají vyjádřit každé vektory z $\mathbf{V}$):

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_1 = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} \cdot y_i \cdot \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle_1 + \sum_{i,j \in [n], i \neq j} 0 = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} \cdot y_i \cdot t \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle_2 + \sum_{i,j \in [n], i \neq j} t \cdot 0 = t \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2 .$$

$\square$