Budeme chtít najít kořeny funkce $f(x) = x^2 - x - 2$ pomocí metod pevného bodu.

$$\varphi_1(x) = x^2 - 2, \qquad \varphi_2(x) = \sqrt{x+2}, \qquad \varphi_3(x) = 1 + \frac{2}{x}, \qquad \varphi_4(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}.$$

Příklad (4.1)
Popište, jak jsou jednotlivé metody $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ odvozeny.

Řešení

$$\begin{aligned}
x = \varphi_1(x) = x^2 &\overset{/-x}{\Leftrightarrow} 0 = x^2 - x - 2 = f(x), \\
x = \varphi_2(x) = \sqrt{x+2} &\overset{/\cdot^2}{\Longrightarrow} x^2 = x + 2 \overset{/-x-2}{\Leftrightarrow} f(x) = x^2 - x - 2 = 0, \\
x = \varphi_3(x) = 1 + \tfrac{2}{x} &\overset{/\cdot x}{\Longrightarrow} x^2 = x + 2 \overset{/-x-2}{\Leftrightarrow} f(x) = x^2 - x - 2 = 0, \\
x = \varphi_4(x) = \tfrac{x^2+2}{2x-1} &\overset{/\cdot(2x-1)}{\Longrightarrow} 2x^2 - x = x^2 + 2 \overset{/-x^2-2}{\Leftrightarrow} f(x) = x^2 - x - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Příklad (4.2)
Platí pro všechny metody $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$, že jsou oba kořeny f pevnými body?

Řešení
Platí to pro φ_1, protože děláme ekvivalentní úpravu a pro φ_3 a φ_4, protože tam jsou pro úpravu problémové body 0 a $\frac{1}{2}$. Pro φ_2 to neplatí, protože úprava není ekvivalencí pro záporná x, tedy ani pro -1. Můžeme vidět, že $\varphi_2(-1) = 1$.

Věta 0.1

Nechť $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$ a nechť $I, \overline{x} \in I$, je interval takový, že platí:

- $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$,
- $|\varphi'(x)| < 1 \ \forall x \in I$,
- $\varphi(I) \subseteq I$.

Pokud $x_0 \in I$, pak iterace pevného bodu konverguje do $\overline{x}$.

Příklad (4.3)
Je možné pomocí předchozí věty ukázat, zda budou jednotlivé metody konvergovat pro danou volbu počátečního bodu? Pokud ano, ukažte. $x_{0,\varphi_1} = 3$, $x_{0,\varphi_2} = -1.5$, $x_{0,\varphi_3} = 3$, $x_{0,\varphi_4} = 0$.

Řešení
Pro φ_1 nelze větu použít, jelikož $x_0 = 3 \in I$ a $\varphi'(x_0) = 2x_0 = 6 > 1$. (Navíc φ_1 pro $x_0 = 3$ nekonverguje, ale diverguje k $+\infty$, protože $x^2 - 2 > 2x$ pro všechna $x \geq 3$, tj. diverguje rychleji než 2^n.)

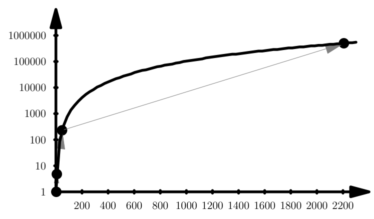
Pro φ_2 zvolíme $I = [-1.5, +\infty)$, $\varphi_2'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ je zřejmě spojitá pro $x > -2$, tedy na celém I, zároveň pro $\sqrt{x+2} > 0.5$, tj. pro $x > -1.75$ (tj. na celém I), je $0 < \varphi_2'(x) < 1$. φ_2 zobrazuje do kladných čísel, tedy do I (a je na celém intervalu I definováno), takže platí i třetí bod. Pevným bodem je $2 \in I$ (a $x_0 = -1.5 \in I$), tedy tato metoda konverguje.

Pro φ_3 zvolíme například interval $\left(\sqrt{2}, 3\right] = I$, kde $0 > \varphi_3'(x) = -\frac{2}{x^2} > -1$ je spojitá a $x_0 = 3 \in I$ a $\overline{x} = 2 \in I$. Jediné, co zbývá ověřit je $\varphi_3(I) \subset I$, ale φ_3 je klesající a $\varphi_3(3) = 1.5 > \sqrt{2}$ a $\varphi_3(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} < 3$. Tedy také tato metoda konverguje podle věty výše.

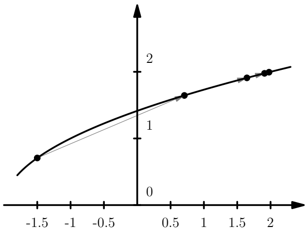
Pro φ_4 a $x_0 = 0$ nelze větu použít přímo, protože $x_0 \in I$ a $\varphi_4'(x_0) = 2\frac{x_0^2 - x_0 - 2}{(2x_0-1)^2} = -4 < -1$, ale můžeme si všimnout (např. z následující úlohy), že pro $\tilde{x}_0 = \varphi_4(x_0) = \frac{0^2+2}{2\cdot 0-1} = -2$ už můžeme zvolit interval $[-2, -1] = I$, kde $0 \leq \varphi_4'(x) = 2\frac{x^2-x-2}{(2x-1)^2} < \frac{1}{2} < 1$ je spojitá. Zároveň $\tilde{x}_0, \overline{x} = -1 \in I$ a $\varphi_4(I) = \left[-\frac{6}{5}, -1\right] \subseteq I$. Tedy φ_4 pro $x_0 = 0$ konverguje podle předchozí věty a toho, že $\varphi_4(x_0) = -2 = \tilde{x}_0$.

Příklad
Chování metody pevných bodů z předchozí úlohy otestujte pomocí náčrtu. Pokud metoda konverguje, přestože věta nešla použít, zdůvodněte proč.

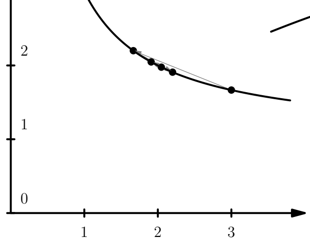
Řešení
φ_1 prostě nekonverguje, φ_2 a φ_3 konvergují podle věty a φ_4 už jsem vysvětlil v předchozí úloze.



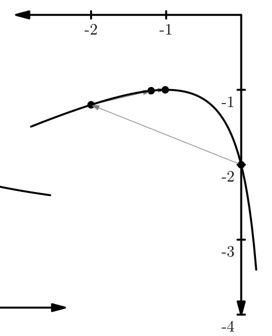
φ_1



φ_2



φ_3



φ_4