

# 1 Ohniska kuželoseček

## 1.1 Konstrukce s imaginárními elementy

### *Poznámka*

Všimněme si, že projektivita dvou souměstných soustav určuje jednoznačně pár samodružných elementů, ale opačně ne. Pokud však vezmeme involuci, tak ta už má jednoznačnou korespondenci involuce s párem samodružných elementů.

### *Příklad (Konstrukce)*

Je-li dána projektivita souměstných bodových soustav na přímce, určete involuci, která má tytéž samodružné body. (Totéž duálně.)

┌

### *Řešení (Duální)*

Zvolíme pomocnou kružnici procházející daným bodem. Převedeme soustavy na bodové soustavy na kružnici. Vezmeme směrovou přímku za poláru a najdeme k ní (přes tečny) pól. Nyní uvažujeme involuci se středem v tomto bodě. Obraz v hledané involuci najdeme tak, že vzor převedeme na kružnici, zobrazíme v této involuci, a vrátíme zpět.

┌

┌

### *Poznámka*

Pokud směrová přímka vyjde mimo kružnici, budou samodružné body komplexní a pól najdeme tak, že leží na polárách k bodům (pólům) ležícím na dané poláře.

┌

### **Věta 1.1**

*Pro eliptickou involuci (bodových soustav na přímce) existují právě dva body v rovině, z nichž se tato involuce promítá absolutní involucí (to znamená involucí kolmic).*

┌

### *Důkaz*

Pro eliptickou involuci se její páry rozdělují. Tedy nad úsečkami vzor – obraz si uděláme Thaletovy kružnice a hledané body budou jejich průsečíky. □

┌

### **Definice 1.1**

Body z předchozí věty se nazývají pomocné body eliptické involuce.

### *Poznámka (Platí)*

Absolutní involuce je eliptická involuce, jejíž samodružné přímky jsou imaginární. Nazývají se izotropické přímky a jejich směry jsou  $[0 : 1 : i]$  a  $[0 : 1 : -1]$ .

### *Poznámka*

Izotropické body leží na každé kružnici v rovině. Každé izotropická přímka je kolmá sama na sebe (v reálném skalárním součinu, z definice absolutní involuce)

## 1.2 Ohnisko středových kuželoseček

### *Důsledek*

Pokud kuželosečka není kružnice, pak izotropické body na ní neleží, tedy z každého izotropického bodu k takové kuželosečce existují 2 tečny (? 4 imaginární přímky). Lze ukázat, že ze 6 průsečíků těchto 4 přímek jsou vždy dva reálné.

### **Definice 1.2** (Ohnisko)

Těmto dvěma bodům budeme říkat ohniska dané kuželosečky.

### **Věta 1.2**

*Bod je ohniskem kuželosečky  $\Leftrightarrow$  involuce sdružených polár indukovaná v tomto bodě kuželosečkou je involuce absolutní.*

┌

#### *Důkaz*

Samodružné přímky involuce sdružených polár jsou právě tečny z tohoto bodu. □

└

### **Věta 1.3**

1. Kuželosečka má 2 ohniska  $(E, F)$  (pro kružnici splývající), jsou umístěna symetricky podle středu na jedné z os kuželosečky. Ohniska jsou samodružné body involuce bodů na této ose, jejíž páry jsou vytáty sdruženými kolmými polárami. A tedy i páry tečna+jejich normála (kolmice v bodě dotyku = pól tečny).

2. Každé z ohnisek je pomocným bodem eliptické involuce, kterou na druhé ose vytínají sdružené kolmé poláry (a tedy i dvojice tečna+normála).

3. Každá kružnice opsaná trojúhelníku danému druhou osou a sdruženými kolmými polárami protíná původní osu v ohniscích. (Vyplyvá z předchozí části.)

┌

#### *Důkaz*

Bez důkazu. □

└

### **Definice 1.3** (Hlavní osa, vedlejší osa)

Ose z předchozí věty se říká hlavní osa, druhé pak vedlejší.

*Příklad (Konstrukce)*

Dány osy elipsy s vrcholy, najděte ohniska.

┌

*Řešení* (Podobné hledání hyperoskulační kružnice.)

K spojnici hlavního a vedlejšího vrcholu umíme najít pól (průsečík tečen = kolmic na osy). Z tohoto pólu vedeme kolmici, čímž jsme získali dvojici kolmých sdružených polár, tedy použijeme předchozí větu, bod 3.

└

Totéž pro hyperbolu: na hlavní ose máme zadané vrcholy, na vedlejší náhradní body.

┌

*Řešení*

Polára bude tentokrát průsečík „těch druhých dvou kolmic v hlavním a vedlejším vrcholu“, neboť pomocné body jsou takové, že přesně tento bod leží na asymptotě (tečně v nevlastním bodě).

└

## 1.3 Ohnisko paraboly

### Definice 1.4 (Ohnisko)

(Stejná.) Ohnisko paraboly je reálný průsečík izotropických tečen.

┌

*Poznámka*

Tuto definici splňují 2 body: vlastní ohnisko  $F$  a nevlastní ohnisko = střed = směr průměrů = směr osy.

└

┌

*Poznámka*

Polára vlastního ohniska = řídící přímka.

└

### Věta 1.4

1. Bod je ohniskem paraboly  $\Leftrightarrow$  involuce sdružených polár v tomto bodě je involuce absolutní. (Tj. sdružené poláry v  $F$  jsou vzájemně kolmé.)

2. Spojnice vlastního a nevlastního ohniska = osa paraboly, vlastní ohnisko pólí každou úsečku vyřatou na ose sdruženými kolmými polárami (speciálně tečnou a její normálou).

*Příklad (Konstrukce)*

Zkonstruuje ohnisko paraboly zadané 4 tečnami.

┌

*Řešení*

Najdeme osu a bod dotyku na libovolné nevrcholové tečně. Z něj vedeme kolmici a použijeme předchozí větu bod 2.

└

### Věta 1.5

Ohnisko jsou pro kuželosečku 2 podmínky.

*Důkaz*

Ohnisko zadává 2 izotropické tečny, tedy 2 podmínky.  $\square$

*Poznámka*

2 ohniska + 1 bod (mimo osu = jejich spojnice) nezadávají jednoznačně kuželosečku, zadávají však jednoznačně elipsu a hyperbolu. A tyto dvě kuželosečky se v daném bodu protínají kolmo (úhel mezi tečnami).

## 2 Analytická geometrie

### Definice 2.1 (Projektivní prostor, geometrický bod, aritmetický zástupce)

(Reálný) projektivní prostor dimenze  $n$  je množina

$$\mathbb{R}P^n = \{\langle v \rangle, v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{o}\}\} = \text{množina všech přímk (procházejících počátkem) v } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Prvek  $\langle v \rangle \in \mathbb{R}P^n$  se nazývá geometrický bod a  $v$  jeho aritmetický zástupce

*Poznámka* (Platí)

$\langle v \rangle = \langle w \rangle$  (tj. stejné geometrické body)  $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : w = \alpha \cdot v$  (tj. aritmetičtí zástupci se liší pouze násobkem  $\neq 0$ ).

### Definice 2.2 (Homogenní souřadnice)

Je-li  $v = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{o}\}$ , pak homogenní souřadnice geometrického bodu  $\langle v \rangle$  jsou  $[x_0 : \dots : x_n]$ .

*Poznámka*

Jsou určeny až na násobek  $\neq 0$ .

### Definice 2.3 (Projektivní přímka, projektivní rovina, projektivní prostor)

$\mathbb{R}P^1$  říkáme projektivní přímka.  $\mathbb{R}P^2$  říkáme projektivní rovina.  $\mathbb{R}P^3$  říkáme projektivní prostor.

*Poznámka* (Značení)

Místo  $\langle a \rangle$  budeme psát  $A$ .

*Poznámka*

$\mathbb{R}P^1$ : Dva body  $A, B$  jsou totožné  $\Leftrightarrow$  vektory  $a, b$  jsou lineárně závislé.

$\mathbb{R}P^2$ : Tři body  $A, B, C$  leží na jedné přímce (po dvou různé)  $\Leftrightarrow a, b, c$  jsou lineárně závislé (po dvou lineárně nezávislé), tj. leží v jedné rovině.

$\mathbb{R}P^3$ : Čtyři body  $A, B, C, D$  leží v rovině  $\Leftrightarrow a, b, c, d$  jsou lineárně závislé, tj. leží v jednom prostoru.

Obecně  $\mathbb{R}P^n$ :  $n+1$  bodů  $A_0, \dots, A_n$  leží v  $n-1$ -dimenzionálním projektivním prostoru  $\Leftrightarrow$  vektory  $a_0, \dots, a_n$  leží v nadrovině v  $\mathbb{R}^{n+1}$  (jsou lineárně závislé).

*Poznámka*

Procesu „zakázu  $\mathbf{o}$  a ztotožnění násobky“ říkáme projektivizace.

**Definice 2.4** (Projektivní rozšíření afinního prostoru, vlastní bod, nevlastní bod)

Projektivní rozšíření afinního prostoru  $\mathbb{R}^n$  na projektivní prostor  $\mathbb{R}P^n$  (= kanonické vnoření  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}P^n$ ) je zobrazení, které bodu  $[x_1, \dots, x_n]$  přiřadí  $[1 : x_1 : \dots : x_n]$  a vektoru  $(x_1, \dots, x_n)$  přiřadí  $[0 : x_1 : \dots : x_n]$ .

Prvním říkáme body vlastní, druhý nevlastní.

TODO?

**Definice 2.5** (Homogenní souřadnice přímky)

V  $\mathbb{R}P^2$  zavádíme homogenní souřadnice přímky  $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$  jako homogenní trojici  $(a_0 : a_1 : a_2)$ .

┌

*Poznámka*

└ Opět určeny až na násobek  $\neq 0$ .

*Například*

$(0 : 1 : 0)$  je osa  $y$ ,  $(0 : 0 : 1)$  je osa  $x$ ,  $(1 : 0 : 0)$  je nevlastní přímka.

*Příklad* (Hledání průsečíku dvou přímek)

TODO?

*Příklad* (Incidence bodů)

$X = [x_0 : x_1 : x_2]$ ,  $a = (a_0 : a_1 : a_2)$ .  $X \in a \Leftrightarrow a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ .

┌ *Důsledek*

Lze zaměnit bod za přímku  $\implies$  dualita.

└ Tj. například spojnice bodů se počítá stejně jako průsečík přímek.

*Poznámka* (Trik na nalezení spojnice (/průsečíku))

Dány body  $Y = [y_0 : y_1 : y_2]$ ,  $Z = [z_0 : z_1 : z_2]$ . Chceme rovnici jejich spojnice:  $X \in a = YZ \Leftrightarrow a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$  pro hledané souřadnice  $(a_0 : a_1 : a_2) \Leftrightarrow$  vektory  $X$ ,  $Y$  a  $Z$  jsou závislé  $\Leftrightarrow \det((X|Y|Z)^T) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1) \cdot x_0 + (-y_0 \cdot z_2 + y_2 \cdot z_0) \cdot x_1 + (y_0 \cdot z_1 - y_1 \cdot z_0) \cdot x_2 = 0.$$

## 2.1 Dvojpoměr

### Definice 2.6 (Dvojpoměr)

Dvojpoměr 4 vektorů v rovině  $a, b, c, d$ , po dvou lineárně nezávislých, ale po třech lineárně závislých (tj. BÚNO  $c = \alpha_1 a + \beta_1 b$ ,  $d = \alpha_2 \cdot a + \beta_2 b$ ) definujeme jako  $(abcd) := \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\alpha_1 \cdot \beta_2} \in \mathbb{R}$ .

┌ *Poznámka*

└ Zřejmě tato hodnota nezávisí na volbě (nenulového) násobku každého vektoru.

Dvojpoměr 4 bodů  $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^n$  ležících na jedné přímce definujeme jako  $(ABCD) := (abcd)$ .

### Tvrzení 2.1 (Už jsme si dokázali)

$A, B, C, D$  jsou čtyři různé  $\implies (ABCD) \neq 0, 1, \infty$ . (Např.  $C = A \vee B = D \Leftrightarrow (ABCD) = 0$ .)

$A, B, C, D$  vlastní  $\implies (ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$ .  $A, B, C$  vlastní,  $D$  nevlastní  $\implies (ABCD) = (ABC)$ .

Věta o 4 determinantech (pro  $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^1$ ):

$$(ABCD) = \frac{(a_0 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_0) \cdot (b_0 \cdot d_1 - b_1 \cdot d_0)}{(a_0 \cdot d_1 - a_1 \cdot d_0) \cdot (b_0 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_0)}.$$

### Definice 2.7 (Harmonická čtveřice)

$$(ABCD) = -1$$

*Příklad* (Pak jsme počítali. V jednu chvíli nám vyšlo:)

Parametrizace přímky procházející  $A, B$  je  $t_1 \cdot A + t_2 \cdot B$ , kde například  $t_1 + t_2 = 1$ ; lépe  $t \cdot A + (1 - t) \cdot B$ .

### Definice 2.8 (Projektivní souřadný systém (PSS))

Projektivní souřadný systém v  $\mathbb{R}P^n$  je  $(n + 1)$ -tice různých bodů  $A_0, \dots, A_n \in \mathbb{R}P^n$ . Pak  $\forall X \in \mathbb{R}P^n$  definujeme souřadnice bodu  $X$  vůči PSS  $(A_0, \dots, A_n)$  jako homogenní  $(n + 1)$ -tici  $[x_0 : \dots : x_n]$  takovou, že  $x = \sum_{i=0}^n x_i \cdot a_i$ .

TODO!!! (Projektivita na  $\mathbb{R}P^n$ : je dána regulární maticí  $(n + 1) \times (n + 1)$  určenou až na násobek  $\neq 0$  (píšeme  $A \sim k \cdot A$ , pro  $k \neq 0$ ).)

TODO!!! (Ukázání si, že taková matice zachovává dvojpoměr.)

TODO!!! (Projektivita je dána svými hodnotami na  $n + 2$  bodech.)

TODO!!! (A mnoho dalšího.)

## 2.2 Samodružné body projektivit

### Definice 2.9 (Samodružný bod projektivity)

$\langle \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}P^n$  je samodružný bod projektivity dané maticí  $A \equiv \langle A \cdot \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle$ .

┌

*Poznámka*

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} : A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} \quad (\Leftrightarrow (A - \lambda E) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0)$$

$\Leftrightarrow \lambda \neq 0$  je vlastním číslem matice  $A$   $\mathbf{0} \neq \mathbf{v}$  je vlastním vektorem matice  $A$  příslušným vlastnímu číslu  $\lambda$ .

└

*Poznámka*

Matice projektivity je regulární, tedy nemá vlastní číslo nula.

TODO? (Hromada lineární algebry.)

## 2.3 Klasifikace projektivit na projektivní přímce

*Poznámka*

Klasifikace projektivit na projektivní přímce podle možných Jordanových tvarů:

- $J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Pro  $\lambda = 1$  je to identická projektivita. Pro  $\lambda \neq 1$  má dva reálné samodružné body.
- $J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Tehdy má jediný samodružný bod (a ten je reálný).  
Navíc je podobná matici  $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , což je násobek  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- $J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Tehdy má dva komplexní samodružné body.

*Důsledek*

To dokazuje větu ze zimního semestru ( $\exists$  2/1/0 samodružné body projektivity soustav).

## 2.4 Charakteristika projektivity

*Poznámka* (Opakování zimního semestru)

Jsou-li  $S, T$  samodružné body projektivity na  $\mathbb{RP}^1$ , pak její charakteristika je číslo  $w = (XX'ST)$  pro libovolný pár  $X \mapsto X'$ .

Věta: Hodnota  $w$  nezávisí na volbě bodu  $X$ .

### Věta 2.2

*Hodnota  $w$  nezávisí na volbě bodu  $X$ , a je-li projektivita dána maticí  $A$ , platí*

$$w = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{D}}{\operatorname{tr} A - \sqrt{D}}, \quad D := (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A.$$

┌  
*Důkaz*

Pro dvojpoměr platí (věta o čtyřech determinantech)

$$(XX'ST) = \frac{[XS] \cdot [X'T]}{[XT] \cdot [X'S]}, \quad [AB] = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Pro danou  $A$  spočítejme její vlastní čísla:  $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A) \cdot \lambda + \det A$ , tj.  $\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{D}}{2}$ .

Pak pro samodružné body platí:  $S' = S, T' = T$ , tedy  $\mathbf{s}' = A \cdot \mathbf{s} = \lambda_1 \cdot \mathbf{s}, \mathbf{t}' = A \cdot \mathbf{t} = \lambda_2 \cdot \mathbf{t}$ .  
Pak

$$[\mathbf{x}'\mathbf{s}] = [\mathbf{x}' \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{s}'] = \frac{1}{\lambda_1} [\mathbf{x}'\mathbf{s}'] = \frac{1}{\lambda_1} \cdot |A| \cdot [\mathbf{x}\mathbf{s}], \quad [\mathbf{x}'\mathbf{t}] = \dots = \frac{1}{\lambda_2} \cdot |A| \cdot [\mathbf{x}\mathbf{t}].$$

Dosadíme:  $w = \frac{[\mathbf{x}\mathbf{s}] \cdot \frac{1}{\lambda_2} \cdot |A| \cdot [\mathbf{x}\mathbf{t}]}{[\mathbf{x}\mathbf{t}] \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot |A| \cdot [\mathbf{x}\mathbf{s}]} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{D}}{\operatorname{tr} A - \sqrt{D}}.$

□



## 2.5 Involuce

*Poznámka* (Opakování zimního semestru)

Involuce je projektivita souměrných soustav splňující  $w = -1 \Leftrightarrow \forall X : X'' = X \Leftrightarrow \exists X : X'' = X$ .

### Definice 2.10 (Involuce)

Involuce je projektivita (na  $\mathbb{R}P^n$ ) daná maticí  $A$ , která splňuje  $A^2 \sim E$ .

### Věta 2.3

Nechť matice  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  zadává neidentickou projektivitu na  $\mathbb{R}P^1$  ( $A \not\sim E$ ). Pak NáPoJE:

1.  $A^2 \sim E$  (je to involuce);
2.  $\text{tr } A = 0$ ;
3.  $w = -1$ .

┌

*Důkaz*

Pišme  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Pak  $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d) \cdot b \\ (a+d) \cdot c & bc + d^2 \end{pmatrix}$ .

„1.  $\implies$  2.“:  $A^2 \sim E$  máme, chceme  $\text{tr } A = a + d = 0$ . Předpoklad nám dává  $(a+d) \cdot b = 0 = (a+d) \cdot c$ . Pro spor  $(a+d) \neq 0$ . Pak  $b = c = 0$  a  $A = \text{diag}(a, d)$ , tedy  $\text{diag}(a^2, d^2) \sim \text{diag}(1, 1)$ , tedy  $a^2 = d^2$ , tj.  $a = \pm d$ . Takže buď  $a + d = 0$  nebo  $A \sim E$ .  $\zeta$ .

„2.  $\implies$  1.“: předpokládáme  $a + d = 0$ . Pak ale  $A^2 = \text{diag}(a^2 + bc, bc + d^2) \stackrel{a=-d}{=} \text{diag}(a^2 + bc, a^2 + bc) \sim E$ .

„2.  $\Leftrightarrow$  3.“:  $w = \frac{\text{tr } A + \sqrt{D}}{\text{tr } A - \sqrt{D}}$ , tedy pro  $\text{tr } A = 0$  je  $w = -1$ , a pokud  $w = -1$ , pak  $\text{tr } A + \sqrt{D} = -\text{tr } A + \sqrt{D}$ , tedy  $\text{tr } A = -1$ . (Přitom  $D = (\text{tr } A)^2 - 4 \det A = -4 \det A \neq 0$ .)  $\square$

└

*Důsledek*

Stará definice involuce sedí s tou novou.

## 2.6 Parabolická involuce

*Poznámka*

Parabolická involuce odpovídá singulární matici  $A$ , která splňuje  $\text{tr } A = 0$ .

Poznámka

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \implies c = \frac{-a^2}{b}.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a^2 & ba \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a^2 & ba \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot (ax_0 + bx_1) \\ -a \cdot (ax_0 + bx_1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

Důsledek

Tedy parabolická involuce zobrazuje všechny body do jednoho bodu.

Poznámka

Klasifikace involucí na  $\mathbb{R}P^1$  podle Jordanova tvaru:

- $J_A \sim \text{diag}(1, -1) \implies p_A(\lambda) = \lambda^2 + \det A = \lambda^2 - a^2$ , tedy 2 reálné samodružné body, tj. hyperbolická involuce;
- $J_A = \text{diag}(\lambda, \bar{\lambda}) \implies p_A(\lambda) = \lambda^2 + \det A = \lambda^2 + a^2$ , tedy 2 imaginární body, tj. eliptická involuce.
- $J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , tj. parabolická involuce.

### 3 Projektivity na $\mathbb{R}P^2$

Například (Znamé projektivity)

Všechny eukleidovské shodnosti. Všechny afinity (násobení bodu v  $\mathbb{R}^2$  regulární maticí). Tj. i stejnolehlosti.

Poznámka (Působení projektivity na přímku)

Nechť je dána projektivita dána maticí  $A$  ( $3 \times 3$  regulární). Na bodech  $x \mapsto Ax$ . Na přímkách tedy  $p^T \mapsto p^T A^{-1}$ , protože projektivita zachovává incidenci.

Důsledek

Projektivita na  $\mathbb{R}P^2$  má samodružné body a samodružné přímky. (A jsou to vlastní vektory matice  $A^{-T}$ .)

#### Věta 3.1

Nechť  $A$  má  $n$  různých vlastních čísel. Označme  $v_1, \dots, v_n$  vlastní vektory  $A$  (odpovídající  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ) a  $u_1, \dots, u_n$  vlastní vektory  $A^T$  (odpovídající stejným  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ). Pak pro  $i \neq j : \langle u_j, v_i \rangle = 0$ .

┌  
Důkaz

$$\lambda_j \cdot \langle u_j, v_i \rangle = \lambda_j \mathbf{u}_j^T \cdot \mathbf{v}_i = (\lambda_j \mathbf{u}_j)^T \cdot \mathbf{v}_i = (A^T \cdot \mathbf{u}_j)^T \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_j^T \cdot A \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_j^T \cdot (\lambda_i \mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{u}_j^T \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_i \cdot \langle u_j, v_i \rangle \stackrel{i \neq j}{\implies} \langle u_j, v_i \rangle = 0$$

└

Důsledek

Jsou-li  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  samodružné přímky a  $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$  samodružné body projektivity, pak  $i \neq j \implies \mathbf{V}_i \in \mathbf{u}_j$ .

### Definice 3.1 (Silně a slabě samodružná)

Samodružná přímka je silně samodružná, pokud se každý její bod zobrazí sám na sebe, a slabě samodružná v opačném případě.

Samodružný bod je silně samodružný, pokud se každá jím procházející přímka zobrazí sama na sebe, a slabě samodružný v opačném případě.

Poznámka

Přímka/bod je silně samodružná/-ý právě tehdy, pokud příslušný vlastní podprostor má dimenzi  $\geq 2$  (tj. existují 2 lineárně nezávislé vlastní vektory).

## 3.1 Klasifikace projektivit na $\mathbb{R}P^2$

Poznámka (Hrubá klasifikace)

Jordanovy buňky mohou být buď 3, 2 nebo 1.

Poznámka (Podpřípady)

3 buňky:

- $J_{1a} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  (3 různá reálná vlastní čísla).  $\implies$  3 slabě samodružné body a 3 slabě samodružné přímky.
- $J_{1b} = \text{diag}(\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_3)$ , kde  $\lambda_1$  je komplexní číslo, které není reálné, a  $\lambda_3$  je reálné číslo. Je podobná s maticí  $\text{diag}(R_\varphi, \lambda_2)$ , rotace + stejnolehlost (= spirální podobnost). 1 slabě samodružný bod a 1 slabě samodružná přímka.
- $J_{1c} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) \sim \text{diag}(\lambda'_1, 1, 1)$ . Jeden silně a jeden slabě samodružný bod, jedna silně a jedna slabě samodružná přímka. Toto zobrazení je perspektivní (nebo také středová) kolineace.
- $J_{1d} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) \sim E$  je identita.

2 buňky:

- $J_{2a} = \text{diag} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \right)$ , kde  $\lambda \neq 1$ . 2 slabě samodružné přímky a 2 slabě samodružné body. Je to stejnolehlost složená s elací (tj. s osovou afinitou, kde směr je rovnoběžný s osou).
- $J_{2b} = \text{diag} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \right)$ . 1 silně samodružná přímka a jeden silně samodružný bod.

1 buňka:

- $J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (to je jediná až na podobnost matice se 3 Jordanovy buňky). Jeden slabě samodružný bod a jedna slabě samodružná přímka.

TODO? (definice bilineární formy; antisymetrické a symetrické BL formy; (jednoznačný) rozklad na symetrickou a antisymetrickou část; kvadratická forma  $(g_2)$  určená BL formou  $g$  neboli její symetrickou částí  $g_s$ ; zpětná rekonstrukce  $g_s$  z  $g_2$ ; polární báze (to je ta, ve které je matice kvadratické formy diagonální); Sylvestrův zákon setrvačnosti; signatura; Sylvestrovo kritérium; regulární matice má počet nul v signatuře nulový a opačně)

### Definice 3.2 (Vrchol symetrické bilineární formy)

Vrchol symetrické bilineární formy  $g$  na  $\mathbb{R}^n$  je množina  $V(g) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$ .

┌

*Poznámka*

Ekvivalentně  $g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$ . Maticově  $\forall \mathbf{v} : \mathbf{u}^T G \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}^t \cdot G = \mathbf{o}$  nebo  $G \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}$ .

Čili  $V(g) = \text{Ker } G$ .

└

## 4 Kvadriky

### Definice 4.1 (Kvadrika)

Kvadrika v  $\mathbb{R}P^n$  určená kvadratickou formou  $g_2$  (na  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) je množina  $Q_g := \{\langle \mathbf{u} \rangle \in \mathbb{R}P^n \mid g_2(\mathbf{u}) = 0\}$ .

*Například*

TODO?

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je formálně reálná kuželosečka (nemá reálné body).

TODO?

*Důsledek*

Kvadrík na  $\mathbb{R}P^n$  je dána symetrickou maticí  $(n+1) \times (n+1)$  určenou až na násobek  $\neq 0$ .

*Důsledek*

Kvadrík v  $\mathbb{R}P^n$  je určen symetrickou maticí  $3 \times 3$ , tedy 6 čísel, až na násobek, tedy o jedno číslo méně, tj. 5 čísel.

┌ *Důsledek*

$X = \langle \mathbf{x} \rangle \in Q_g \Leftrightarrow x^T \cdot G \cdot x = 0$ , tedy zadání 5 bodů je stejné jako zadání 5 lineárních rovnic (o 6 neznámých).

└

#### **Definice 4.2** (Regulární kvadrík, singulární kvadrík)

Kvadrík je regulární/singulární, pokud její matice vůči libovolné bázi je regulární/singulární.

┌

*Poznámka*

To je ekvivalentní s nulou/nenulou v počtu nul v signatuře matice.

└

#### **Definice 4.3** (Vrchol kvadriky)

Vrchol kvadriky je množina  $V(Q) := \{X | \mathbf{x} \in V(g) = \text{Ker } G\}$ .

## 4.1 Polární vlastnosti kvadrik

#### **Definice 4.4** (Polárně sdružené body)

Body  $X, Y \in \mathbb{R}P^n$  jsou polárně sdružené vzhledem ke kvadrice  $Q_F \equiv F(x, y) = 0$ .

┌

*Poznámka*

Ekvivalentně  $x^T \cdot A \cdot y = 0$ .

└

Ze symetričnosti  $F$  je symetrická i polární sdruženost.

┌

#### **Definice 4.5** (Singulární a regulární bod kuželosečky)

Bod  $Y \in \mathbb{R}P^n$  je singulární bod kvadriky  $Q_F \equiv Y$  je polárně sdružený se všemi body v  $\mathbb{R}P^n$  (vůči  $Q_F$ ). Ostatní body se nazývají regulární.

┌ *Poznámka*

Singulární bod musí být sdružený sám se sebou, tedy leží na příslušné kvadrice.

Množina všech singulárních bodů kvadriky  $Q_F$  tvoří podprostor v  $\mathbb{R}P^n$ . (Lze jednoduše ověřit na aritmetických zástupcích.)

Singulární body existují  $\Leftrightarrow$  kvadrika je singulární.

Množina singulárních bodů je vrchol kvadriky.

┌ *Důsledek*

Pro regulární kvadriky (a právě pro ně) je  $V(Q_F) = \emptyset$ .

*Pozor*

Zde zadaný vrchol nemá nic společného s vrcholem paraboly (či elipsy).

┌ *Poznámka*

Označení pochází z vrcholu kuželu / -ové plochy.

*Poznámka* (Definice)

Dimenze prázdné množiny je  $-1$ .

### **Tvrzení 4.1**

*Projektivní dimenze  $V(Q_F)$  je rovna  $(n + 1) - h(A) - 1 = n - h(A)$ .*

### **Tvrzení 4.2**

*Je-li  $X \in V(Q_F)$  a  $Y$  libovolný bod kvadriky  $Q_F$ . Pak celá přímka  $XY \subset Q_F$ .*

┌ *Důkaz*

$$X \in V(Q_F) \Leftrightarrow \forall Z \in \mathbb{R}^n : F(X, Z) = 0,$$

$$Y \in Q_F \Leftrightarrow F(Y, Y) = 0.$$

Vezmeme libovolný bod na přímce  $XY$ : označme  $aX + bY = \langle ax + by \rangle$ .

$$F(aX + bY, aX + bY) = a^2 F(X, X) + 2ab F(X, Y) + b^2 F(Y, Y) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

└ □

### **Tvrzení 4.3**

*$Q_F$  libovolná kvadrika v  $\mathbb{R}P^n$ ,  $S$  libovolný podprostor v  $\mathbb{R}P^n \implies Q_F \cap S$  je také kvadrika (v  $S$ ).*

┌ *Důkaz*

$F|_S$  je stále kvadratická forma.

└ □

*Důsledek*

$V(Q_F)$  je také kvadrika.

### **Definice 4.6** (Doplňěk)

Je-li  $S$  podprostor  $\mathbb{R}P^n$ , doplňkem prostoru  $S$  v  $\mathbb{R}P^n$  nazveme podprostor  $T \subset \mathbb{R}P^n$  splňující  $S \cap T = \emptyset$  a  $S$  má maximální možnou dimenzi.

┌ *Poznámka*

Zase je to symetrická vlastnost dvou podprostorů.

└ Pro projektivní dimenzi platí  $\dim_p S + \dim_p T = n - 1$ .

### **Definice 4.7** (Podstava kvadriky)

Podstava kvadriky  $Q_F$  je její průnik s libovolným podprostorem  $T$ , který je doplňkem  $V(Q_F)$ .

*Důsledek*

Podstava je regulární kvadrika.

┌ *Důkaz*

Je to průnik s podprostorem a neobsahuje singulární body.

└ □

*Důsledek* (Strukturální věta pro kvadriky)

Každá kvadrika sestává z podprostorů, které spojují body podstavy s vrcholem.

┌ *Poznámka*

Speciálním případem je regulární kvadrika, která je celá svou podstavou.

### **Definice 4.8** (Polární nadrovina, pól)

Buď  $P \in \mathbb{R}P^n$  bod, který není singulárním bodem  $Q_F$  (tj. buď  $P$  je regulárním bodem  $Q_F$  nebo  $P \notin Q_F$ ). Pak polární nadrovina  $\varrho_P$  bodu  $P$  je  $\varrho_P = \{X \in \mathbb{R}P^n | F(P, X) = 0\}$ .  $P$  se pak nazývá pólem této nadroviny.

┌ *Poznámka*

$\varrho_P$  je nadrovina, protože  $X \in \varrho_P \Leftrightarrow p^T \cdot A \cdot x = 0$  a  $p^T \cdot A$  je nenulový.

*Poznámka*

Platí:

- $Q_F$  regulární  $\implies \varrho_P$  je definována pro každý bod  $P \in \mathbb{R}P^n$ ;
- $Q_F$  je singulární  $\implies \varrho_P$  není definována pro  $P \in V(Q_F)$ , ale pro všechny ostatní body platí  $V(Q_F) \subset \varrho_P$ .

#### **Definice 4.9** (Tečná nadrovina)

Tečná nadrovina je polární nadrovina pro případ, že  $P \in Q_F$  (tj. že  $P$  je regulárním bodem  $Q_F$ ).

#### **Definice 4.10** (Tečna)

Tečna ke kvadrice  $Q_F$  je přímka, která buď leží celá na kvadrice (ale ne celá v  $V(Q_F)$ ), anebo má s kvadrikou společný právě jeden (regulární) bod.

*Poznámka* (Platí, ale těžké dokázat)

Všechny tečny v daném bodě leží v tečné nadrovině.

*Poznámka* (Platí)

$P \in \varrho_Q \Leftrightarrow Q \in \varrho_P$ . (Ze symetrie polární sdruženosti.)

*Příklad*

Určete tečný ke  $Q_F$  z bodu  $P$ .

┌

*Řešení*

└

Určíme  $\varrho_P$  a průsečíky  $\varrho_P \cap Q_F$  leží na hledaných tečnách.

Kuželosečka dána rovnicí  $x^2 - y^2 + 4xy + 4x + 2y + 3 = 0$ . Určete tečny z bodů  $[-1, -1]$ ,  $[-3, 0]$ ,  $[0, -2]$ .

#### **Definice 4.11** (Vnitřní bod, vnější bod)

Bod neležící na kuželosečce je vnitřní/vnější, pokud z něj nevedou/vedou tečny.



## 5 Klasifikace kvadrik

### 5.1 Maximální podprostory na kvadrice

#### Věta 5.1 (Bez důkazu)

Mějme kvadriku v  $\mathbb{R}P^n$  se signaturou  $(p, q, r)$ . BÚNO  $p \geq q$ . Potom

- maximální (projektivní) dimenze podprostoru neprotínajícího  $Q_F$  je  $p - 1$ ;
- maximální (projektivní) dimenze podprostoru ležícího na  $Q_F$  je  $q + r - 1 = n - p$ .

#### Definice 5.1 (Projektivní typ kvadriky)

Číslo  $n - p$  nazýváme projektivní typ kvadriky.

*Například*

Pro:

- 1  $p = n + 1$ : projektivní typ je  $n - (n + 1) = -1 \implies Q_F$  obsahuje jen  $\emptyset$ , ale ne body, tedy  $Q_F = \emptyset$  (formálně reálná kvadrika);
- 0  $p = n$ : na  $Q_F$  leží body, ale ne přímky;
- 1  $p = n - 1$ : na  $Q_F$  leží přímky, ale ne roviny;
- ...

### 5.2 Projektivní klasifikace kvadrik

*Poznámka*

První určujeme regulární/singulární. Pak (pokud je singulární) najdeme vrchol a podstavu (ta je regulární). Tedy nás zajímá hlavně klasifikace regulárních kvadrik.

#### Definice 5.2 (Oválná, přímková, (+ klasifikace))

	pro	$(p, q, r)$	projektivní typ	název
Pro regulární kvadriky máme tyto možnosti:		$(n + 1, 0, 0)$	-1	formálně reálná
		$(n, 1, 0)$	0	oválná (body, ale n
	$n \geq 3$	$(n - 1, 2, 0)$	1	přímková (občas ta
	$n \geq 5$	$(n - 2, 3, 0)$	2	
	...	...	...	

*Poznámka*

Oválná v  $\mathbb{R}P^2 = \{\text{elipsa, parabola, hyperbola}\}$ .

## 5.3 Afinní klasifikace kvadrik

**Definice 5.3** (Středová kvadrika, nestředová kvadrika, střed kvadriky, směr osy)

Regulární kvadrika je

- středová, je-li pól nevlastní nadroviny vlastní bod; (Tomuto bodu říkáme střed kvadriky.) (To je právě tehdy, není-li nevlastní rovina tečná.)
- nestředová (osová, paraboloid), je-li pól nevlastní nadroviny nevlastní bod. (Tomuto bodu říkáme směr osy.) (To je právě tehdy, je-li nevlastní rovina tečná.)

**Definice 5.4** (Značení)

$$A = [F]_K = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \dots a_{0n} \\ a_{01} \dots a_{0n} & B \end{pmatrix}.$$

**Věta 5.2**

$Q_F$  je středová  $\Leftrightarrow B$  je regulární, pak  $S = [1 : s_1 : \dots : s_n]$  je střed  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a_{01} \dots a_{0n} | B) \cdot (1, s_1, \dots, s_n)^T = \mathbf{0}.$$

$(Q_F$  je nestředová  $\Leftrightarrow B$  je singulární), pak  $S = [0 : s_1 : \dots : s_n]$  je směr osy  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow B \cdot (s_1, \dots, s_n)^T = \mathbf{0}.$$

┌

*Důkaz*

„Pro nestředové“:  $S = [0 : s_1 : \dots : s_n]$  je pólem nevlastní nadroviny  $\Leftrightarrow \forall [0 : x_1 : \dots : x_n]$  platí

$$(0, x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot (0 : s_1 : \dots : s_n)^T = 0 \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \cdot B \cdot (s_1, \dots, s_n)^T = 0 (\forall (x_1, \dots, x_n)) \Leftrightarrow B \cdot (s_1, \dots, s_n)^T = 0$$

přičemž  $(s_1, \dots, s_n) \neq \mathbf{o}$ , tedy  $B$  je singulární. Opačně, pokud  $B$  je singulární, pak existuje takové  $(s_1, \dots, s_n) \neq \mathbf{o}$ , které to splňuje.

„Pro středové“: první část je jen negací již dokázaného. Pak  $S = [1 : s_1 : \dots : s_n]$  je pólem nevlastní nadroviny  $\Leftrightarrow$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) : (0, x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot (1, s_1, \dots, s_n)^T \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \cdot (a_{01} \dots a_{0n} | B) (1, s_1, \dots, s_n)^T = 0 (\forall (x_1, \dots, x_n))$$

└

□

*Poznámka*

$$(a_{01} \dots a_{0n} | B) \cdot (1, s_1, \dots, s_n)^T = \mathbf{o} \Leftrightarrow S = -B^{-1} \cdot (a_{01}, \dots, a_{0n})^T.$$

*Poznámka*

$B$  je taktéž matice kvadriky (o dimenzi menší), která vznikne průnikem původní kvadriky s nevlastní nadrovinou ( $n_\infty$ ). A proto  $Q_F$  je středová/nestředová  $\Leftrightarrow Q_F \cap n_\infty$  je regulární/singulární.

Pro singulární kvadriky nelze definovat středová/nestředová, ale platí  $V_Q$  je jeden bod („střed“)  $\Leftrightarrow B$  je regulární. (A naopak  $V_Q$  je alespoň přímka  $\Leftrightarrow B$  je singulární.)

*Poznámka* (Jemnější dělení)

Jak rozlišit hyperbolu ( $|Q_F \cap n_\infty| = 2$ ) od elipsy ( $Q_F \cap n_\infty = \emptyset$ )?

Začneme v  $\mathbb{R}P^1$  přehledem možných případů:

1. Regulární kvadriky:

- Signatura  $(2, 0, 0)$ :  $x_0^2 + x_1^2 = 0$  nemá řešení, tedy je to formálně reálná kvadrika a je středová.
- Signatura  $(1, 1, 1)$ :  $x_0^2 = x_1^2$  má právě dvě řešení = naše kvadrika jsou dva body. V této podobě je středová, ale když máme  $x_0^2 - 2x_0x_1 = 0$ , pak je jedno z řešení nevlastní bod a kvadrika je nestředová.

2. Singulární kvadriky:

- Signatura  $(1, 0, 1)$ : buď  $x_0^2 = 0$  nebo  $x_1^2 = 0$ , tedy buď 1 nevlastní nebo 1 vlastní bod.
- Signatura  $(0, 0, 2)$ : celá přímka.

### Tvrzení 5.3

*Přehled kvadrik v  $\mathbb{R}P^2$ :*

#### 1. Regulární:

- Signatura  $(3, 0, 0)$ : formálně reálná kvadrika.
- Signatura  $(2, 1, 0)$ : oválná. Středové můžou být dvě  $\text{sign } B = (2, 0, 0)$ , tj.  $Q_F \cap n = \emptyset$ , je elipsa,  $\text{sign } B = (1, 1, 0)$  je pak hyperbola. Nestředová je pak parabola.

#### 2. Singulární:

- Signatura  $(2, 0, 1)$ : Pokud je  $B$  regulární, pak je to jeden vlastní bod. V opačném případě je to jeden vlastní bod.
- Signatura  $(1, 1, 1)$ : Pokud je  $B$  regulární, pak jsou to dvě různoběžky. V opačném případě jsou to dvě rovnoběžky.
- Signatura  $(1, 0, 2)$ : Obsahuje-li  $B$  něco, pak je to 1 vlastní přímka. V opačném případě je to nevlastní přímka
- Signatura  $(0, 0, 3)$ : celý prostor.