Úvod

Poznámka
Mluvilo se o historii $\mathbb{C}$.

Definice 0.1 (Prostor $\mathbb{C}$)

Prostor $\mathbb{C}$ komplexních čísel je prostor $\mathbb{R}^2$, v němž navíc definujeme násobení:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

Ztotožníme $(x, 0) = x$, neboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Značíme $i := (0, 1)$ (imaginární jednotka).

Definice 0.2 (Značení (komplexně sdružené číslo, reálná a imaginární složka))

$$z = x + i \cdot y \in \mathbb{C} \implies \overline{z} := x - i \cdot y \wedge \Re z := x, \Im z := y.$$

Definice 0.3 (Modul / absolutní hodnota)

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Tvrzení 0.1 (Vlastnosti)

- $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, *potom* $z = x + i \cdot y$ *a* $(\pm i)^2 = -1$.
- *Násobení* $\cdot : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *je asociativní, komutativní a distributivní (vzhledem k* $+$*). Navíc* $\cdot$ *zahrnuje i násobení v* $\mathbb{R}$ *a násobení skalárem.*
- $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $z + \overline{z} = 2\Re z$, $z - \overline{z} = 2i\Im z$, $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0 : \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : zz^{-1} = 1$, *konkrétně* $z^-1 = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *je komutativní těleso.*

Pozor
$\mathbb{C}$ nelze „rozumně“ lineárně uspořádat.

Poznámka (Lineární zobrazení)
Lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$-lineární zobrazení) jsou reálné matice řádu 2. Lineární zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$-lineární) jsou komplexní čísla.

Lineární zobrazení $L = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ je tedy $\mathbb{C}$-lineární právě tehdy, když $a = d$ a $b = -c$.

Poznámka (Úmluva)
„Funkce“ znamená funkci z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$, není li řečeno jinak.

Definice 0.4 (Značení (okolí, prstencové okolí))

$$z_0 \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0 : \mathcal{U}(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}, \mathcal{P}(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Definice 0.5 (Limita, spojitost)

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w \in \mathbb{C} \equiv \forall \varepsilon \exists \delta > 0 \forall z \in \mathbb{C} : z \in \mathcal{P}(z_0, \delta) \implies f(z) \in \mathcal{U}(w, \varepsilon).$$

f je spojitá v z_0, jestliže $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Definice 0.6 (Derivace)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je v bodě $z_0 \in \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-diferencovatelná, jestliže existuje $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z) - Lh}{|h|} = 0$$

Značíme $L =: df(z_0)$.

$$df(z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{bmatrix}$$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-diferencovatelná, jestliže existuje $f'(z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}$. f' nazýváme komplexní derivace funkce.

Poznámka
Pro $(f \pm g)'$, $(f \cdot g)'$, $(f/g)'$, $(f \circ g)'$ platí stejné vzorce jako pro funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Věta 0.2 (Cauchy-Riemann)

Nechť f je komplexní funkce definovaná na nějakém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- *Existuje $f'(z_0)$.*
- *Existuje $df(z_0)$ a $df(x_0)$ je $\mathbb{C}$-lineární.*

- *Existuje $df(z_0)$ a platí*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0), \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0).$$

(Tzv. Cauchy-Riemannova podmínka.)

Důkaz

Druhý a třetí bod je ekvivalentní z poznámky o lineárních zobrazeních.

$w = f'(z_0) \Leftrightarrow 0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-wh}{h}$. Vynásobíme $\frac{h}{|h|}$:

$$\Leftrightarrow 0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-wh}{|h|} \Leftrightarrow df(z_0)h = wh.$$

□

Poznámka

Existuje-li $f'(z_0)$, pak $df(z_0)h = f'(z_0)h, h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.

Cauchy-Riemannova podmínka je ekvivalentní $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

Definice 0.7 (Holomorfní funkce)

Nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{C}$. Potom f je holomorfní na G, pokud je f $\mathbb{C}$-diferencovatelná v každém bodě G.

Definice 0.8 (Exponenciála)

$$\exp(z) := e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y), z = x + y \cdot i \in \mathbb{C}.$$

Tvrzení 0.3 (Vlastnosti exponenciály)

$\exp|_{\mathbb{R}}$ *je reálná exponenciála,* $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$, $\exp'(z) = \exp(z)$ *($z \in \mathbb{C}$),* $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\exp$ *není prostá na $\mathbb{C}$ a je 2π periodická, dokonce* $\exp(z) = \exp(w) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : w = z + 2k\pi\cdot i$*, nechť $P := \{z \in \mathbb{C} | \Im z \in (-\pi, \pi]\}$, potom* $\exp|_P$ *je prostá a* $\exp(P) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Definice 0.9 (Logaritmus a hlavní hodnota logaritmu)

Nechť $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Položme

$$Log z := \{w \in \mathbb{C} |\ \exp w = z\},$$

$$\log z := \log|z| + i\cdot\arg z. \qquad \text{(Hlavní hodnota logaritmu.)}$$

Tvrzení 0.4 (Vladstnosti logaritmu)

Nechť $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$*. Potom*

- $Logz = \{\log z + 2k\pi i | k \in \mathbb{Z}\}$, $\log = (\exp|_P)^{-1}$
- $\log$ *není spojitá na žádném* $z \in (-\infty, 0]$*, ale* $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0])$*. Navíc* $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$
- $\log(1 - z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$.

Pozor
Neplatí $\log \exp z = z$ a $\log(z \cdot w) = \log z + \log w$!

Definice 0.10

Nechť $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom hlavní hodnotou α-té mocniny z definujeme

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log z).$$

Položme

$$M_\alpha(z) := \{\exp(\alpha \cdot w) | w \in Logz\}.$$

Tvrzení 0.5 (Vlastnosti mocniny)

- $e^z = \exp(z \cdot \log e) = \exp(z)$.
- *Je-li* $z > 0$ *a* $\alpha \in \mathbb{R}$*, potom* z^α *je definována stejně jako v MA.*
- $M_\alpha(z) = \left\{z^\alpha \cdot e^{2k\pi \cdot i \cdot \alpha} | \ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $z \neq 0$.
- $(z^\alpha) = \alpha \cdot z^{\alpha - 1}$, $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
- $(1 + z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$, *kde*

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Poznámka (Zápočet)
Zápočet dostaneme za aktivní účast na cvičení

Poznámka
Je-li $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, potom

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

tedy f lze rozložit na sudou a lichou část.

Sudá část exponenciely je cosh a lichá sinh.

Definice 0.11 (Goniometrické funkce)

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z,$$

kde

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Tvrzení 0.6 (Vlastnosti)

- cos *i* sin *jsou rozšířením funkcí z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{C}$.
- $\sin' z = \cos z$, $\cos' z = \sin z$.
- sin *i* cos *jsou* 2π *periodické funkce, ale nejsou omezené, platí, že* $\sin \mathbb{C} = \mathbb{C} = \cos \mathbb{C}$.
- *Platí* $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

1 Křivkový integrál

Definice 1.1 (Značení)

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Potom φ je křivka, pokud je φ spojité, φ je regulární křivka, pokud je φ po částech spojitě diferencovatelné tzn. φ je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a existuje dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ takové, že $\varphi|_{[t_i, t_n]}$ je diferencovatelné.

Úsečka: Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, potom $\varphi(t) = a + t \cdot (b - a)$, $t \in [0, 1]$ je úsečka z a do b. Značíme $[a, b]$.

Řekneme, že křivka φ je lomená čára v $\mathbb{C}$, existují-li $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ taková, že

$$\varphi = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + \ldots + [z_{k-1}, z_k].$$

Poznámka (Úmluva)
Pokud neřekneme něco jiného, křivkou budeme rozumět regulární křivku v $\mathbb{C}$.

Definice 1.2 (Délka křivky)

$$V(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt,$$

je-li φ regulární.

Definice 1.3

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je regulární křivka a $f :< \varphi >\to \mathbb{C}$ je spojitá. Potom definujeme

$$\int_{\varphi} f := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Poznámka
Křivkový integrál konverguje jako Riemannův.

$$\int_{\varphi} f(z) dz,$$

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0, +\infty)$ a $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom

$$\int_{\varphi} (z - z_0)^n dz = \int_{0}^{2\pi} r^n e^{int} \cdot 2 \cdot r \cdot e^{it} dt = i \cdot r^{n+1} \int_{0}^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt =$$

$2\pi i$, pokud $n = -1$, 0, pokud $n \in \mathbb{Z}$ a $n \neq -1$.

Tvrzení 1.1 (Vlastnosti křivkového integrálu)

Je-li φ křivka, f a g jsou spojité funkce na $< \varphi >$ a $A \in \mathbb{C}$, ptotom

$$\int_{\varphi} (Af + g) = A \int_{\varphi} f + \int_{\varphi} g.$$

Je-li φ křivka a f je spojitá funkce na $< \varphi >$, potom

$$|\int_{\varphi} f| \leqslant \max_{<\varphi>} |f| \cdot V(\varphi).$$

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $\psi : [\gamma, \delta] \to \mathbb{C}$ a $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$. Potom

$$\int_{\varphi+\psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f \wedge \int_{-\varphi} f = -\int_{\varphi} f,$$

kde $(-\varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$ *je opačná křivka k* φ.

Křivkový integrál nezávisí na parametrizaci křivky: Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ *je křivka,* $\omega : [\gamma, \delta] \to [\alpha, \beta]$ *je spojitě diferencovatelné s* $\omega' > 0$ *a* $\psi = \varphi \circ \omega$. *Potom* $\int_\psi f = \int_\varphi f$.

Důkaz
Jednoduchý, ukázán na přednášce pro některé body. □

Definice 1.4 (Primitivní funkce)

Řekneme, že funkce f má na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ primitivní funkci F, pokud $F' = f$ na G.

Věta 1.2 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ *je otevřená a* f *má na* G *primitivní funkci* F. *Nechť* $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ *je regulární křivka a* f *je spojitá*[a] *na* $< \varphi >$. *Potom*

$$\int_\varphi f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)),$$

je-li navíc φ *uzavřená, tzn.* $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, *pak*

$$\int_\varphi f = 0.$$

[a] Tohle je zbytečný předpoklad, ale to ještě neumíme dokázat.