Část I

Definice

Definice 0.1 (Množinová funkce)

Buď X množina a $\mathcal{P}(X)$ její potenční množina, tj. $\mathcal{P}(X) := \{A|A \subset X\}$. Nechť $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Pak zobrazení $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$ se nazývá množinová funkce.

Definice 0.2 (σ-algebra a algebra)

Systém $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ nazveme σ-algebra na X, jestliže

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $A \in \mathcal{A} \implies A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- $A_i \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Jestliže nahradíme třetí podmínku za $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathbb{A}$, pak se systém $\mathcal{A}$ nazývá algebra.

Definice 0.3 ($\sigma\mathcal{S}$)

Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ libovolný množinový systém, pak nejmenší σ-algebru obsahující systém $\mathcal{S}$ označíme $\sigma\mathcal{S}$. (Existence vyplývá z věty o průniku σ-algeber.)

Definice 0.4 (Generátor σ-algebry)

Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ a $\mathcal{A} = \sigma\mathcal{S}$, pak $\mathcal{S}$ nazveme generátor σ-algebry $\mathcal{A}$ (také říkáme, že $\mathcal{A}$ je generováno systémem $\mathcal{S}$).

Definice 0.5 (Borelovská σ-algebra)

Je-li (X, ϱ) metrický prostor a $\mathcal{G}$ systém všech otevřených podmnožin X, pak $\mathcal{B}(X) := \partial\mathcal{G}$ se nazývá borelovská σ-algebra na X.

Definice 0.6 (Měřitelný prostor a měřitelná množina)

Je-li $\mathcal{A}$ σ-algebra na X, pak dvojice $(X, \mathcal{A})$ se nazývá měřitelný prostor. Množiny $A \in \mathcal{A}$ se nazývají $\mathcal{A}$-měřitelné (krátce měřitelné, pokud nehrozí nedorozumění).

Definice 0.7 (Míra, prostor s mírou)

Buď $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. Zobrazení $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ splňující

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(M2) jestliže $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, jsou po dvou disjunktní, pak $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$,

se nazývá míra. (M2 se také nazývá spočetná/sigma aditivita)

Trojice $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá prostor s mírou.

Definice 0.8 (Nulová množina, úplný prostor, zúplnění)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že množina $N \subset X$ je nulová množina, jestliže existuje $A \in \mathcal{A}$ tak, že $N \subset \mathcal{A}$ a $\mu(A) = 0$. Symbolem $\mathcal{N}$ označíme systém všech nulových množin.

Řekneme, že prostor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je úplný, pokud $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$. σ-algebru $\mathcal{A}_0 := \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$ nazveme zúplněním σ-algebry $\mathcal{A}$ vzhledem k míře μ.

Definice 0.9 (Borelovská, konečná, pravděpodobnostní a σ-konečná míra)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že míra μ je:

- borelovská, je-li X metrický prostor a $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$;
- konečná, je-li $\mu(X) < +\infty$;
- pravděpodobnostní, je-li $\mu(X) = 1$;
- σ-konečná, existují-li množiny $X_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, tak, že $\mu(X_i) < +\infty$, $\forall i \in \mathbb{N}$, a $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$.

Definice 0.10 (Lebesgueova míra)

Zúplněné míry $\lambda^n_{\mathcal{B}}$ nazveme Lebesgueovou mírou v $\mathbb{R}^n$ a označíme λ^n.

($\lambda^n_{\mathcal{B}}$ je borelovská míra na $\mathbb{R}^n$ taková, že $\lambda^n_{\mathcal{B}}([a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$.)

Definice 0.11 (Vzor systému)

Ať X, Y jsou množiny, $f : X \to Y$ zobrazení a $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$. Pak $f^{-1}(\mathcal{S}) := \{f^{-1}(S) | S \in \mathcal{S}\}$.

Definice 0.12 (Měřitelné zobrazení, borelovsky měřitelné zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{M})$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ nazýváme měřitelné (vzhledem k $\mathcal{A}$ a $\mathcal{M}$), jestliže $f^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}$. Pak píšeme $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{M})$.

Je-li některý z prostorů X, Y metrický prostor, pak za příslušnou σ-algebru bereme borelovskou σ-algebru (pokud není řečeno jinak). Měřitelné zobrazení mezi dvěma metrickými prostory se nazývá borelovsky měřitelné (stručně borelovské).

Definice 0.13 (Jednoduchá funkce)

Funkce $s : X \to [0, +\infty)$ se nazývá jednoduchá, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Pak platí $s = \sum_{\alpha \in s(x)} \alpha \cdot \chi_{\{s=\alpha\}}$. Součet na pravé straně této rovnosti nazýváme kanonickým tvarem jednoduché funkce s.

Definice 0.14 (Lebesgueův integrál)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

- Je-li $s : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty)$ jednoduchá měřitelná funkce, zapíšeme ji v kanonickém tvaru $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}$, pro $E_j := \{x \in X | s(x) = \alpha_j\}$, a definujeme

$$\int_X s d\mu = \int_X s(x) d\mu(x) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j).$$

- Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ měřitelná funkce, pak definujeme

$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X s d\mu | 0 \leq s \leq f, s \text{ jednoduchá, měřitelná} \right\}.$$

- Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$, pak definujeme

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu,$$

má-li rozdíl smysl.

Definice 0.15 (Skoro všude)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $V(x)$ vlastnost, kterou bod x může, ale nemusí mít. Je-li $E \in \mathcal{A}$, pak výrok $V(x)$ platí μ-s. v. na E znamená:

$$\exists N \in \mathcal{A} \cap \mathcal{N}, N \subset E \; \forall x \in E \setminus N : V(x).$$

Je-li $E = X$, pak místo μ-s. v. na E píšeme pouze μ-s. v. Pokud nehrozí nedorozumění, o jakou míru se jedná, tak píšeme pouze s. v. místo μ-s. v.

Definice 0.16 (Měřitelná funkce)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že funkce f definovaná na množině $D \in \mathcal{A}$ s hodnotami v $\mathbb{R}^*$ je měřitelná na X, jestliže $\mu(D^c) = 0$ a $\forall$ otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^*$ platí $f^{-1}(G) \cap D \in \mathcal{A}$.

Pro měřitelnou funkci f pak definujeme

$$\int_X f d\mu := \int_X \tilde{f} d\mu, \qquad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \forall x \in D, \\ 0, & \forall x \in D^c. \end{cases}$$

Definice 0.17 ($\mathcal{L}^*$ a $\mathcal{L}^1$)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, pak označujeme

$$\mathcal{L}^*(\mu) := \left\{ f | (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*, f \text{ je měřitelná na } X, \exists \int_X f d\mu \right\},$$

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu) | \int_X |f| d\mu < +\infty \right\}.$$

Definice 0.18 (Dynkinův systém (d-systém))

Systém $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ se nazývá d-systém (nebo Dynkinův systém) na X, jestliže

- $\emptyset \in \mathcal{D}$;
- $D \in \mathcal{D} \implies D^c \in \mathcal{D}$;
- $D_n \in \mathcal{D}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n \cap D_m = \emptyset$ pro $n \neq m \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$.

Definice 0.19 (π-systém)

Je-li systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ uzavřen na konečné průniky (neboli $\forall S, T \in \mathcal{S} : S \cap T \in \mathcal{S}$), pak systém $\mathcal{S}$ nazveme π-systém.

Definice 0.20 (Měřitelný obdélník, součinová σ-algebra, řezy)

Je-li $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, pak množinu $A \times B \subset X \times Y$ nazveme měřitelným obdélníkem. Systém všech měřitelných obdélníků označíme symbolem $\mathcal{O}$.

Součinová σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ na prostoru $X \times Y$ je dána předpisem

$$\mathcal{A} \otimes B := \sigma \mathcal{O}.$$

Pro $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a $x \in X$, $y \in Y$ definujeme řezy E_x, E^y množiny E předpisy

$$E_x := \{ y \in Y | [x, y] \in E \}, \qquad E^y := \{ x \in X | [x, y] \in E \}.$$

Definice 0.21 (C^1-difeomorfismus)

Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ se nazývá difeomorfismus, je-li prosté, třídy C^1 na G a $\forall x \in G : J\varphi(x) \neq 0$.

Definice 0.22 (Absolutní spojitost měr)

Nechť μ, ν jsou míry na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že míra ν je absolutně spojitá vzhledem k míře μ (a značíme $\nu \ll \mu$), jestliže

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

Definice 0.23 ((Radonova-Nikodymova) hustota / derivace míry)

Funkce f z Radonovy-Nikodymovy věty se nazývá (Radonova-Nikodymova) hustota nebo derivace míry ν vzhledem k míře μ a vztah

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

se někdy zapisuje ve tvaru $d\nu = f d\mu$ nebo také $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Definice 0.24 ((Vzájemně) singulární míry)

Řekneme, že míry μ, ν na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$ jsou vzájemně singulární (a píšeme $\mu \perp \nu$), jestliže

$$\exists S \in \mathcal{A} : \mu(S) = 0 \wedge \nu(X \setminus S) = 0.$$

Definice 0.25 (Distribuční funkce)

Buď μ konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$. Pak funkci

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x\rangle), \qquad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme distribuční funkcí míry μ.

Definice 0.26 (Lebesgueův-Stieltjesův integrál)

Je-li F distribuční funkce konečné borelovské míry μ a $A \subset \mathcal{R}$ borelovská množina, pak

$$\int_A f dF := \int_A f d\mu, \qquad \text{(má-li pravá strana smysl).}$$

Definice 0.27 (Konvergence podle míry)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f, $f_n, n \in \mathbb{N}$, měřitelné funkce na X. Řekneme, že funkce f_n konvergují k funkci f podle míry μ (značení $f_n \xrightarrow{\mu} f$), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Část II

Tvrzení

Věta 0.1 (O průniku σ-algeber)

Nechť $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in I$, jsou σ-algebry na X (kde I je libovolná indexová množina). Pak $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ je σ-algebra na X.

Důkaz

Triviální, přenechán čtenáři. □

Důsledek

Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ libovolný množinový systém, pak existuje nejmenší σ-algebra $\sigma\mathcal{S}$ obsahující systém $\mathcal{S}$.

Důkaz

$$\sigma\mathcal{S} := \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) | \mathcal{S} \subset \mathcal{A} \lambda \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra}\}.$$

□

Věta 0.2 (Vlastnosti míry)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Pak

1. $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
2. $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$;
3. $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N} \implies \mu\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mu(A_i)$, *(subaditivita míry)*;
4. $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \implies \mu(A_i) \nearrow \mu\left(\bigcup A_i\right)$;
5. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \mu(A_1) < +\infty \implies \mu(A_i) \searrow \mu\left(\bigcap_i A_i\right)$.

Důkaz
Ad 1.: $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$, $A, B \in \mathcal{A} \implies$

$$\implies A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \implies$$

$$\implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \ldots = \mu(A) + \mu(B)$$

Ad 2.: $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \implies$

$$\implies B = A \cup B \setminus A \implies \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

Ad 3.: $A_i \in \mathcal{A} \forall i \in \mathbb{N}$:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \ldots \implies$$

$$\implies \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \ldots \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots$$

Ad 4.: $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $A_i \in \mathcal{A} \forall i \in \mathbb{N}$

$$\implies A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots \cup (A_k \setminus A_{k-1}) \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2,$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \ldots \implies$$

$$\implies \mu(A_k) = \mu(A_1) + \sum_{i=2}^{k} \mu(A_i \setminus A_{i-1}) \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2,$$

$$\mu\left(\bigcup_{i}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i-1}).$$

Z toho plyne $\mu(A_k) \nearrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$.

Ad 5. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $A_i \in \mathcal{A} \forall i \in \mathbb{N}$, $\mu(A_1) < +\infty$. Položíme $B_i = A_1 \setminus A_i \forall i \in \mathbb{N}$. Pak na posloupnost B_i aplikujeme 4.:

$$\mu(A_1) - \mu(A_i) \nearrow \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \implies -\mu(A_i) \nearrow \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \implies$$

$$\implies \mu(A_i) \searrow \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

$\square$

Věta 0.3 (Zúplnění míry)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Pak platí

1. $\mathcal{A}_0 = \{R \subset X | \exists A, B \in \mathcal{A} \wedge A \subset E \subset B \wedge \mu(B \setminus A) = 0\}$.
2. *Míru μ lze jednoznačně rozšířit na $\mathcal{A}_0$ (rozšířenou míru označíme μ_0).*
3. *Prostor $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ je úplný.*

Důkaz (1.)
Označme
$$\tilde{\mathcal{A}}_0 := \{E \subset X | \exists A, B \in \mathcal{A} \wedge A \subset E \subset B \wedge \mu(B \setminus A) = 0\}.$$
Ukážeme, že $\tilde{\mathcal{A}}_0$ je σ-algebra:

- $E = \emptyset \in \tilde{\mathcal{A}}$, neboť volba $A = \emptyset = B$ dává $A \subset E \subset B$, $\mu(B \setminus A) = \mu(\emptyset \setminus \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Tedy $\emptyset \in \tilde{\mathcal{A}}_0$.
- Je-li $E \in \tilde{\mathcal{A}}_0 \implies \exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset E \subset B \wedge \mu(B \setminus A) = 0$. Tedy $A^c, B^c \in \mathcal{A}$ a $B^c \subset E^c \subset A^c$. Protože $A^c \setminus B^c = B \setminus A$, tak $\mu(A^c \setminus B^c) = \mu(B \setminus A) = 0$, a tedy $E^c \in \tilde{\mathcal{A}}_0$.
- Nechť $E_i \in \tilde{\mathcal{A}}_0$ $\forall i \in \mathbb{N}$. $\implies$ $\exists A_i, B_i \in \mathcal{A} : A_i \subset E_i \subset B_i$, $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$. $\implies \bigcup_i A_i \subset \bigcup_i E_i \subset \bigcup_i B_i$ a
$$\mu\left(\bigcup_i B_i \setminus \bigcup_i A_i\right) \leq \mu\left(\bigcup_i (B_i \setminus A_i)\right) \leq \sum_i \mu(B_i \setminus A_i) = 0.$$
Tedy $\bigcup_i E_i \in \tilde{\mathcal{A}}_0$.

Tudíž $\tilde{\mathcal{A}}_0$ je σ-algebra.

Platí $\mathcal{A} \cup \mathbb{N} \subset \tilde{\mathcal{A}}_0$, neboť

- Je-li $N \in \mathcal{N} \implies \exists A \in \mathcal{A} : N \subset A$, $\mu(A) = 0 \implies N \in \tilde{\mathcal{A}}_0$, tedy $\mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{A}}_0$.
- Je-li $A \in \mathcal{A}$, pak $A \subset A \subset A \wedge \mu(A \setminus A) = \mu(\emptyset) = 0 \implies A \in \tilde{\mathcal{A}}_0$, tedy $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}_0$.

Z $\mathcal{A} \cup \mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{A}}_0$ plyne $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}) \subset \sigma(\tilde{\mathcal{A}}_0) = \tilde{\mathcal{A}}_0$, tj. $\mathcal{A}_0 \subset \tilde{\mathcal{A}}_0$.

Opačnou inkluzi získáme snadno: Je-li $E \subset \tilde{\mathcal{A}}_0$, pak

$$\exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset E \subset B \wedge \mu(B \setminus A) = 0 \implies E = A \cup (E \setminus A) \implies E \in \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}) = \mathcal{A}_0.$$

$\square$

Důkaz (2.)
Buď $E \in \mathcal{A}_0$. Tedy $\exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset E \subset B$, $\mu(B \setminus A) = 0$. Definujeme $\mu_0(E) := \mu(A)$. Tato definice je korektní, neboť: Je-li $A_i, B_i \in \mathcal{A}$, $A_i \subset E \subset B_i$, $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$, $i \in \{1, 2\}$, pak $A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \setminus A_2)$, a tedy

$$\mu(A_1) = \mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2) = \mu(A_1 \cap A_2).$$

Analogicky dostaneme $\mu(A_2) = \mu(A_1 \cap A_2)$. Tudíž $\mu(A_1) = \mu(A_2)$, což dokazuje korektnost definice.

Dále ověříme, že μ_0 je míra: Je jasné, že $\mu_0 \geq 0$. Taktéž zřejmě $\mu_0(\emptyset) = 0$, neboť $\emptyset \subset \emptyset \subset \emptyset$, $\mu(\emptyset \setminus \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0 \implies \mu_0(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

Je-li $E_i \in \mathcal{A}_0 \forall i \in \mathbb{N}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, pak

$$\exists A_i, B_i \in \mathcal{A} : A_i \subset E_i \subset B_i, \mu(B_i \setminus A_i) = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{N} \implies$$

$$\implies \bigcup_i A_i \subset \bigcup_i E_i \subset \bigcup_i B_i, \qquad \bigcup_i B_i \setminus \bigcup_i A_i \subset \bigcup (B_i \subset A_i) \implies$$

$$\mu(\bigcup_i B_i \setminus \bigcup_i A_i) \leq \mu\left(\bigcup_i (B_i \setminus A_i)\right) \leq \sum_i \mu(B_i \setminus A_i) = 0.$$

Proto $\mu_0\left(\bigcup_i E_i\right) = \mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i) = \sum_i \mu_0(E_i)$, tj. $\mu_0\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i \mu_0(E_i)$. Takže μ_0 je míra na $\mathcal{A}_0$.

Dále platí, že μ_0 je rozšířením μ, neboť je-li $A \in \mathcal{A}$, pak $A \subset A \subset A$, $\mu(A \setminus A) = \mu(\emptyset) = 0$, tudíž $\mu_0(A) = \mu(A)$.

Nakonec jednoznačnost: Buď $E \in \mathcal{A}_0$. Pak $\exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset E \subset B$, $\mu(B \setminus A) = 0$. Proto $\mu_0(A) \leq \mu_0(E) \leq \mu_0(B)$. Ovšem $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A)$. Tedy $\mu_0(E) = \mu(A)$. □

Důkaz (3.)
Je-li $M \subset X$ nulová množina v $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$, pak

$$\exists N \in \mathcal{A}_0 : M \subset N \wedge \mu_0(N) = 0 \implies$$

$$\implies \exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset N \subset B \wedge \mu(B \setminus A) = 0 \implies \mu(A) = 0,$$

a proto $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) = 0 + 0 = 0$. Tudíž $\emptyset \subset M \subset N \subset B$, tj. $\emptyset \subset M \subset B$ a přitom $\mu(B \setminus \emptyset) = \mu(B) = 0$. Tedy $M \in \mathcal{A}_0$ a $\mu_0(M) = 0$. □

Věta 0.4 (O míře $\lambda^n_{\mathcal{B}}$)

Existuje právě jedna borelovská míra $\lambda^n_{\mathcal{B}}$ na $\mathbb{R}^n$ taková, že

$$\lambda^n_{\mathcal{B}}([a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \times \ldots \times (b_n - a_n),$$

jestliže $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $\forall i \in [n]$.

Důkaz
V TMI2. □

Věta 0.5 (O zobrazení $f : X \to Y$)

Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \to Y$ zobrazení. Pak platí:

1. *Je-li $\mathcal{M}$ σ-algebra na Y, pak $f^{-1}(\mathcal{M})$ je σ-algebra na X.*
2. *Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak $\sigma(f^{-1}(S)) = f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$.*

Důkaz
Bez důkazu? □

Důsledek
Jsou-li $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{M})$ měřitelné prostory a $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ generátor $\mathcal{M}$, pak $f : X \to Y$ je měřitelné $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$.

Důsledek
Je-li $X, \mathcal{A}$ měřitelný prostor a Y metrický prostor, pak $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ pro všechny otevřené množiny $G \subset Y$.

Důsledek
Každé spojité zobrazení f mezi metrickými prostory je borelovsky měřitelné.

Věta 0.6 (Generátory $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$)

Borelovská σ-algebra B^n je generována:

- *otevřenými intervaly $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, kde $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $i \in [n]$;*
- *systémem $\mathcal{S} := \{(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n) | a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in [n]\}$.*

Důkaz
Bez důkazu? □

Věta 0.7 (O měřitelných zobrazeních)

1. *Jsou-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ a $g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^m$ měřitelné zobrazení, pak $(f, g) : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^{n+m}$ je měřitelné zobrazení.*

2. *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ měřitelná zobrazení, pak $f \pm g$ je měřitelné zobrazení.*

3. *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, pak také funkce $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ jsou měřitelné.*

Důkaz
Bez důkazu? $\square$

Věta 0.8 (O měřitelných funkcích)

Buď $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. Pak platí:

1. *$f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce $\Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}\ \forall a in \mathbb{R}$.*
2. *$f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná funkce $\Leftrightarrow f^{-1}(\langle -\infty, a)) \in \mathcal{A}\ \forall a in \mathbb{R}$.*

Důkaz
Bez důkazu. $\square$

Důsledek
Nechť $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ jsou měřitelné funkce. Pak:

1. Množiny $\{x \in X | f(x) < g(x)\}$, $\{x \in X | f(x) \leq g(x)\}$, $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ jsou měřitelné.
2. $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ jsou měřitelné funkce. (Speciálně funkce $f^+ = \max\{f, 0\}$ a $f^- = \min\{f, 0\}$ jsou měřitelné.)

Věta 0.9 (O měřitelných funkcích podruhé)

Jsou-li funkce $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$, měřitelné, pak i funkce $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n \to \infty} f_n$ a $\liminf_{n \to \infty} f_n$ měřitelné.

Speciálně bodová limita posloupnosti měřitelných funkcí je měřitelná funkce.

Důkaz
Bez důkazu? $\square$

Věta 0.10 (O nezáporné měřitelné funkci)

Nechť $f : (X, \mathcal{A}) \to \langle 0, +\infty\rangle$ je měřitelná funkce. Pak existují jednoduché nezáporné měřitelné funkce s_n na X, $n \in \mathbb{N}$, tak, že

$$\forall x \in X : s_n(x) \nearrow f(x).$$

Je-li navíc funkce f omezená, pak $s_n \rightrightarrows f$ na X.

Důkaz
Pro $n \in \mathbb{N}$ a $i \in [n \cdot 2^n]$ definujeme

$$E_{n,i} := f^{-1}\left(\left\langle \frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right\rangle\right), \qquad F_n := f^{-1}\left(\langle n, +\infty \rangle\right),$$

$$s_n := \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}.$$

Množiny $E_{n,i}$ a F_n jsou měřitelné, tedy s_n jsou měřitelné. Je jasné, že s_n je jednoduchá nezáporná funkce a platí $s_n \leq s_{n+1}$.

Je-li $x \in X$ takové, že $f(x) < +\infty$, pak pro dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$ platí $f(x) - \frac{1}{2^n} \leq s_n(x) \leq f(x)$. Je-li $x \in X$ takové že $f(x) = +\infty$, pak $s_n(x) = n \to +\infty$. Tedy $s_n(x) \to f(x)\ \forall x \in X$.

Je také jasné, že $s_n \rightrightarrows f$, pokud je funkce f omezená (neboť pak $|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}\ \forall x \in X\ \forall n \in \mathbb{N}$). $\square$

Lemma 0.11 (K důkazu Leviho věty)

Buď $(A, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a S jednoduchá, nezáporná, měřitelná funkce na X. Definujeme-li

$$\varphi(A) := \int_A s d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A},$$

pak φ je míra na $\mathcal{A}$.

Důkaz
Je jasné, že $\varphi \geq 0$. Nechť $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j}$ je kanonický tvar funkce s. Je-li $A \in \mathcal{A}$, pak

$$\varphi(A) = \int_A s d\mu = \int_X \chi_A s d\mu = \int_X \tilde{s} d\mu = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(E_j \cap A),$$

kde $\tilde{s} := \sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot \chi_{E_j \cap A}$ je jednoduchá nezáporná měřitelná funkce, tudíž můžeme použít definici integrálu. Z této rovnosti už vyplývá $\varphi(\emptyset) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(E_j \cap \emptyset) = 0$.

Nechť $A_i \in A\ \forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$. Buď $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$. Pak

$$\varphi(A) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(E_j \cap A) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \sum_{i=1}^\infty \mu(E_j \cap A_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \alpha_j \mu(E_j \cap A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \varphi(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \varphi(A_i).$$

$\square$

Věta 0.12 (Levi)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou nezáporné měřitelné funkce na X splňující $f_n \nearrow f$, pak $\int_X f_n d\mu \nearrow \int_X f d\mu$.

Důkaz

Protože $f_n \leq f_{n+1}$ tak $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu \implies$

$$\exists \alpha \in \langle 0, +\infty \rangle : \int_X f_n d\mu \to \alpha.$$

Podle věty o měřitelných zobrazeních podruhé je funkce f měřitelná na X. Protože $f_n \leq f$, tak $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$. Odtud plyne $\alpha \leq \int_X d\mu$.

Nyní dokážeme opačnou nerovnost: Buď s libovolná jednoduchá měřitelná funkce splňující $0 \leq s \leq f$ a nechť $C \in (0, 1)$. Definujeme $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E_n := \{x \in X | f_n(x) \geq Cs(x)\}.$$

Množiny E_n jsou měřitelné

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \qquad \wedge \qquad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Dále platí

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq C \int_{E_n} s d\mu.$$

Protože funkce $\varphi(A) := \int_A s d\mu$ je z předchozího lemmatu míra na $\mathcal{A}$, tak pravá strana konverguje k $c \int_X s d\mu$. Levá strana konverguje k α, tedy $\alpha \geq c \int_X d\mu$, a limitním přechodem pro $c \nearrow 1$ máme $\alpha \geq \int_X s d\mu$. Odtud dostaneme

$$\alpha \geq \sup_{0 \leq s \leq f} \int_X s d\mu = \int_X f d\mu.$$

Tedy $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$. $\square$

Věta 0.13 (Fatouovo lemma)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou nezáporné měřitelné funkce na X, pak

$$\int_X (\liminf_{n \to \infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Důkaz
Buď

$$g_n(x) := \inf\{f_k(x)|k \geq n\}, x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

Pak g_n jsou měřitelné a platí

$$g_n \nearrow g := \lim_{n\to\infty} g_n := \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

Podle Leviho věty $\int_X g_n d\mu \nearrow \int_X g d\mu$. Protože $g_n \leq f_n \forall n \in \mathbb{N}$, tak $\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu \forall n \in \mathbb{N}$. Z uvedeného limitním přechodem dostaneme

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Pravá strana je rovna

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X g d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

□

Lemma 0.14

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f, g jsou měřitelné funkce na X splňující $f = g$ skoro všude, pak $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$, má-li jedna strana rovnosti smysl.

Důkaz
Bez důkazu? □

Věta 0.15 (Linearita integrálu)

Jestliže $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, pak

$$\int_X (\lambda f) d\mu = \lambda \int_X f d\mu,$$

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_x g d\mu, \qquad \textit{má-li pravá strana smysl.}$$

Důkaz
Bez důkazu? □

Důsledek (Linearity a Leviho)
Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou nezáporné měřitelné funkce na X, pak

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Důkaz
Z předchozí věty máme

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{k} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{k} \int_X f_n d\mu \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Odtud limitním přechodem pro $k \to +\infty$ pomocí Leviho věty dostaneme dané tvrzení. $\square$

Věta 0.16 (Zobecněná Leviho věta)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, měřitelné funkce na X splňující $f_n \nearrow f$ a $\int_X f_1 d\mu > -\infty$, pak

$$\int_X f_n d\mu \nearrow \int_X f d\mu.$$

Důkaz
BÚNO $\int_X f_1 < +\infty$, jinak vztah plyne z monotonie integrálu. Buď $g_n := f_n - f_1$, $n \in \mathbb{N}$, $g := f - f_1$. Pak $g_n \geq 0$, $g_n \nearrow g$ a z Leviho věty dostaneme $\int_X g_n d\mu \nearrow \int_X g d\mu$. Odtud pak, s využitím aditivity integrálu z předpředchozí věty, plyne $\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$. $\square$

Důsledek
Totéž platí pro obrácená znamínka.

Věta 0.17 (Lebesgueova)

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a f, $f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce na X splňující $f_n \to f$ skoro všude. jestliže existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že $|f_n| \leq g$ skoro všude $\forall n \in \mathbb{N}$, pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int_X f_n d\mu \implies \int_X f d\mu$.

Důkaz
Předefinujme funkce f_n, f na množině $\{x | f_n(x) \nrightarrow f(x)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid |f_n(x)| > g(x)\}$ nulové míry tak, aby předpoklady platily $\forall x \in X$. Je-li

$$g_n := \inf \{f_n, f_{n+1}, \dots\}, h_n := \sup \{f_n, f_{n+1}, \dots\}, n \in \mathbb{N}, \text{ pak} \forall n \in \mathbb{N} :$$

$$-g \leq g_n \leq f_n \leq h_n \leq g \implies g_n, f_n \in \mathcal{L}^1(\mu), -g \leq \lim_{n\to\infty} f_n = f \leq g \implies f \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Protože $g_n \nearrow f$, $h_n \searrow f$ pro $n \to \infty$, tak podle zobecněné Leviho věty a jejího důsledku platí $\int_X g_n d\mu \to \int_X f d\mu$ a $\int_X h_n d\mu \to \int_X f d\mu$. Protože

$$\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu \leq \int_X h_n d\mu \implies \int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu.$$

$\square$

Důsledek
Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce na X takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje skoro všude. Jestliže existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že $\left|\sum_{n=1}^{k} f_n\right| \leq g$ skoro všude $\forall k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$.

Důkaz
Aplikujeme předchozí větu na posloupnost částečných součtů $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. □

Věta 0.18 (Další vlastnosti integrálů a měřitelných funkcí)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

- *Jestliže f je nezáporná měřitelná funkce na X a $\int_X f d\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.*
- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int_E f d\mu = 0$ $\forall E \in \mathcal{A}$, pak $f = 0$ skoro všude.*
- *Je-li f měřitelná funkce na X, pak*

$$\int_X f d\mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_X |f| d\mu \in \mathbb{R}.$$

- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$.*
- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak f je konečná skoro všude.*

Důkaz
Bez důkazu? □

Věta 0.19 (Vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Jestliže $(R)\int_a^b f$ existuje, pak $\int_a^b f d\lambda^1 \in \mathbb{R}$ a platí

$$(R)\int_a^b f = \int_a^b f d\lambda^1.$$

Důkaz
Bez důkazu? □

Věta 0.20 (Vztah Newtonova a Lebesgueova integrálu)

Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná funkce. Pak $(N)\int_a^b f$ existuje právě tehdy, když $\int_a^b f d\lambda^1 \in \mathbb{R}$.

V takovém případě navíc $(N)\int_a^b = \int_a^b f d\lambda^1$.

Důkaz
Bez důkazu? $\square$

Věta 0.21 (O limitě integrálu závislém na parametru)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, (T, ϱ) metrický prostor, $M \subset T$, $t_0 \in M'$ a $f : X \times T \to \mathbb{R}$. Nechť platí:

- *Pro μ-skoro všechna $x \in X$ existuje*
$$\lim_{t \to t_0, t \in M} f(x,t) =: \varphi(x).$$
- *$\forall t \in M \setminus \{t_0\}$ je funkce $f(\cdot, t)$ μ-měřitelná.*
- *Existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že $|f(x,t)| \leq g(x)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$ a $\forall t \in M \setminus \{t_0\}$.*

Pak $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\lim_{t \to t_0, t \in M} \int_X f(x,t) d\mu = \int_X \varphi(x) d\mu$.

Důkaz
K ověření rovnosti integrálů dle Heineho věty stačí dokázat: Je-li $t_n \in M \setminus \{t_0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $t_n \to t_0$, pak $\int_X f(x, t_n) d\mu \to \int_X \varphi(x) d\mu$:

Z první podmínky máme $f(x, t_n)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$. Dále platí (z druhé podmínky) $|f(x, t_n)| \leq g(x)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$ a $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tedy rovnost integrálů (a také existence integrálu) plyne z Lebesgueovy věty, položíme-li v ní $f_n(x) := f(x, t_n) \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Věta 0.22 (O spojitosti integrálu závislém na parametru)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, (T, ϱ) metrický prostor, $M \subset T$ a $f : X \times T \to \mathbb{R}$. Nechť platí:

- *Pro μ-skoro všechna $x \in X$ je funkce $f(x, \cdot)$ spojitá na M.*
- *$\forall t \in M$ je funkce $f(\cdot, t)$ μ-měřitelná.*
- *Existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že $|f(x,t)| \leq g(x)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$ a $\forall t \in M$.*

Pak funkce $F(t) := \int_X f(x,t) d\mu$, $t \in M$, je spojitá na M.

Důkaz

Dle Heineho věty stačí dokázat: Je-li $t_0 \in M \cap M'$, pak $\lim_{t \to t_0, t \in M} F(t) = F(t_0)$, tj. $\lim_{t \to t_0, t \in M} \int_X f(x,t) d\mu = \int_X f(x,t_0) d\mu$. To ale plyne z předchozí věty. $\square$

Věta 0.23 (O derivaci integrálu podle parametru)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval a $f : X \times I \to \mathbb{R}$. Nechť platí:

- *$\forall t \in I$ je funkce $f(\cdot, t)$ μ-měřitelná.*
- *$\exists N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$, tak, že $\forall x \in X \setminus N$ a $\forall t \in I$ existuje konečná derivace $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$.*
- *Integrál $F(t) := \int_X f(x,t) d\mu$ konverguje alespoň pro jednu hodnotu $t \in I$.*
- *$\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že $\forall x \in X \setminus \mathbb{N}$ a $\forall t \in I$ platí $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$.*

Pak $\forall t \in I$ integrál $F(t)$ konverguje a platí

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) d\mu \qquad \forall t \in I.$$

Důkaz
Je-li t, $t+h \in I$, pak $\forall x \in X \setminus N$ dle Lagrangeovy věty dle druhé a čtvrté podmínky platí

$$|f(x,t+h) - f(x,t)| = \left|h \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(x, t+\Theta h)\right| \leq |h| \cdot g(x),$$

kde $\Theta \in (0,1)$. Speciálně, je-li $t \in I$ a t_0 onen bod, pro který integrál $F(t)$ konverguje, pak

$$|f(x,t)| \leq |f(x,t_0)| + |t - t_0| \cdot g(x) \forall x \in X \setminus N,$$

odkud plyne, že integrál $F(t)$ konverguje $\forall t \in I$.

Dále, je-li t, $t+h \in I$, $h \neq 0$, pak

$$\frac{1}{h}(F(t+h) - F(t)) = \int_X \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h} d\mu.$$

Protože z nerovnosti výše je

$$\left|\frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t+\Theta h)\right| \leq g(x) \forall x \in X \setminus N, \forall t, t+h \in I, h \neq 0,$$

tedy

$$\lim_{h \to 0} \int_X \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h} d\mu = \int_X \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}\right) d\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) d\mu.$$

□

Věta 0.24 (O průniku d-systémů)

Nechť $\mathcal{D}_\alpha, \alpha \in I$, jsou d-systémy na X (I je libovolná indexová množina). Pak $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{D}_\alpha$ je d-systém na X.

Důkaz
Je triviální a přenechán čtenáři. □

Důsledek
Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ libovolný množinový systém, pak existuje nejmenší d-systém $d\mathcal{S}$ na X obsahující systém $\mathcal{S}$.

Důkaz

$$d\mathcal{S} := \bigcap \{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X) | \mathcal{S} \subset \mathcal{D} \wedge \mathcal{D} \text{ je d-systém}\}.$$

□

Věta 0.25 (O rovnosti $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$)

Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ π-systém, pak $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$.

Důkaz

Z následujících dvou tvrzení. Protože $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je π-systém, tak je $d\mathcal{S}$ π-systém. Protože $d\mathcal{S}$ je také d-systém, tak $d\mathcal{S}$ je σ-algebra na X, která obsahuje $\mathcal{S}$. Proto $\sigma\mathcal{S} \subset d\mathcal{S}$, neboť $\sigma\mathcal{S}$ je nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{S}$. Opačná implikace tj. $d\mathcal{S} \subset \sigma\mathcal{S}$ platí triviálně. Tedy $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$. □

Tvrzení 0.26

Je-li d-systém $\mathcal{D}$ na X π-systém, pak $\mathcal{D}$ je σ-algebra na X.

Důkaz

Je třeba ověřit, že platí $A_k \in \mathcal{D}\ \forall k \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}$. To provedeme v několika krocích:

Platí $A \setminus B \in \mathcal{D}$, je-li $A, B \in \mathcal{D}$, neboť $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ a přitom $A \cap B \subset A$, tedy $A \setminus B \in \mathcal{D}$.

Platí $A \cup B \in \mathcal{D}$, je-li $A, B \in \mathcal{D}$, neboť $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ a přitom $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$, tedy $A \cup B \in \mathcal{D}$.

Je-li $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{D}$, pak $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{D}$ (indukcí s využitím předchozího odstavce).

Nechť tedy $A_k \in \mathcal{D} \forall k \in \mathbb{N}$. Položíme-li $A_0 := \emptyset \in \mathcal{D}$, pak

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left(\bigcup_{i=0}^{k} A_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right) \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k,$$

kde $\tilde{A}_k := \left(\bigcup_{i=0}^{k} A_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i \right) \forall k \in \mathbb{N}$. Protože $\bigcup_{i=0}^{k} A_i \in \mathcal{D} \forall k \in \mathbb{N}_0$, tak $\tilde{A}_k \in \mathcal{D} \forall k \in \mathbb{N}$. Navíc $\tilde{A}_k \cap \tilde{A}_m = \emptyset$ pro $k \neq m$, $k, m \in \mathbb{N}$. Tedy $\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \in \mathcal{D}$, tj. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}$. □

Tvrzení 0.27

Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ π-systém, pak $d\mathcal{S}$ je také π-systém.

Důkaz
Je-li $\mathcal{D} := \{D \in d\mathcal{S} | D \cap S \in d\mathcal{S}\ \forall S \in \mathcal{S}\}$, pak $\mathcal{D}$ je d-systém, neboť:

- $\emptyset \in \mathcal{D}$, protože $\emptyset \in d\mathcal{S}$ a $\emptyset \cap S = \emptyset \in d\mathcal{S}\ \forall S \in \mathcal{S}$;
- $D \in \mathcal{D} \implies D \cap S \in d\mathcal{S}\ \forall S \in \mathcal{S} \implies$
$$\implies (X \setminus D) \cap S = (X \cap S) \setminus (D \cap S) = S \setminus (D \cap S) \in d\mathcal{S}\ \forall S \in \mathcal{S} \implies X \setminus D \in \mathcal{D};$$
- $D_n \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N}, D_n \cap D_m = \emptyset$ pro $n \neq m \implies$
$$\implies D_n \cap S \in d\mathcal{S}\ \forall S \in \mathcal{S} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
a $(D_n \cap S) \cap (D_m \cap S) \subset D_n \cap D_m = \emptyset$ pro $n \neq m\ \forall S \in \mathcal{S}$.
Pak $(\bigcup_n D_n) \cap S = \bigcup_n (D_n \cap S) \in d\mathcal{S}$. Tj. $\bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$.

Dále platí $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$, neboť $\forall D \in \mathcal{S}$ máme $D \in d\mathcal{S}$ a přitom $D \cap S \in \mathcal{S}\ \forall S \in \mathcal{S}$. Odtud máme $D \cap S \in d\mathcal{S}\ \forall S \in \mathcal{S}$ (neboť $\mathcal{S} \subset d\mathcal{S}$), a tedy $D \in \mathcal{D}$.

Z inkluze $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ plyne $d\mathcal{S} \subset d\mathcal{D} = \mathcal{D}$. Navíc (dle definice systému $\mathcal{D}$) platí $\mathcal{D} \subset d\mathcal{S}$. Celkem tedy platí $\mathcal{D} = d\mathcal{S}$, což znamená
$$\forall D \in d\mathcal{S} : D \cap S \in d\mathcal{S} \qquad \forall S \in \mathcal{S}.$$

Je-li $D \in d\mathcal{S}$ pevné a $\mathcal{D}_D := \{E \in \mathcal{P}(X) | E \cap D \in d\mathcal{S}\}$, pak $\mathcal{D}_D$ je d-systém, neboť:

- $\emptyset \in \mathcal{D}_D$, protože $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ a $\emptyset \cap D = \emptyset \in d\mathcal{S}$;
- $E \in \mathcal{D}_D \implies E \cap D \in d\mathcal{S}$, a tedy
$$(X \setminus E) \cap D = (X \cap D) \setminus (E \cap D) = D \setminus (E \cap D) \in d\mathcal{S} \implies X \setminus E \in \mathcal{D}_D;$$
- $E_n \in \mathcal{D}_D\ \forall n \in \mathbb{N}, E_n \cap E_m = \emptyset$ pro $n \neq m \implies E_n \cap D \in d\mathcal{S} \forall n \in \mathbb{N}$ a $(E_n \cap D) \cap (E_m \cap D) = \emptyset$ pro $n \neq m$. Pak $(\bigcup_n E_n) \cap D = \bigcup_n (E_n \cap D) \in d\mathcal{S}$, tj. $\subset_n E_n \in \mathcal{D}_D$.

Z $\mathcal{D} = d\mathcal{S}$ plyne $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_D\ \forall D \in d\mathcal{S}$, tj. $d\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_D\ \forall D \in d\mathcal{S}$, což znamená
$$\forall E \in d\mathcal{S} : E \cap D \in d\mathcal{S}\ \forall D \in d\mathcal{S},$$

a tedy $d\mathcal{S}$ je uzavřený na průniky dvou množin $\implies d\mathcal{S}$ je uzavřený i na průniky konečného počtu množin $\implies d\mathcal{S}$ je π-systém. □

Věta 0.28 (O jednoznačnosti míry)

Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je π-systém a μ, ν jsou dvě míry na $\sigma\mathcal{S}$ splňující $\mu(S) = \nu(S) \forall S \in \mathcal{S}$.

Jestliže existují množiny $X_n \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}$, tak, že $X_n \nearrow X$ a $\mu(X_n) < +\infty \forall n \in \mathbb{N}$, pak $\mu = \nu$ na $\sigma\mathcal{S}$.

Důkaz
Předpokládejme nejprve, že $\mu(X) < +\infty$. Systém

$$\mathcal{D} := \{A \in \sigma\mathcal{S} | \mu(A) = \nu(A)\}$$

je d-systém. Dle předpokladu $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$, odtud plyne

$$d\mathcal{S} \subset d\mathcal{D} = \mathcal{D}.$$

Podle věty o rovnosti $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$

$$\sigma\mathcal{S} = d\mathcal{S} \subset \mathcal{D} \subset \partial\mathcal{S}$$

odkud dostáváme $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S} = \mathcal{D} \implies \mu(A) = \nu(A)$ na $\sigma\mathcal{S}$.

Je-li $\mu(X) = +\infty$, pak definujeme

$$\mathcal{D}_n := \{A \in \sigma\mathcal{S} | \mu(AcapX_n) = \nu(A \cup X_n)\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Analogicky jako v první části důkazu lze ověřit, že $\mathcal{D}_n$ je d-systém ($\forall n \in \mathbb{N}$), který obsahuje $\mathcal{S}$ (neboť $S \cap X_n \in \mathcal{S}$ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall S \in \mathcal{S}$, protože $\mathcal{S}$ je π-systém). Tedy

$$d\mathcal{S} \subset d\mathcal{D}_n \subset \sigma\mathcal{S} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \implies$$

$$\implies d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S} = \mathcal{D}_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Z vlastnosti míry pak $\forall A \in \sigma\mathcal{S}$ dostaneme

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap X_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap X_n) = \nu(A).$$

□

Věta 0.29 (O součinové σ-algebře $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$)

Je-li $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, pak

- $\forall x \in X : E_x \in \mathcal{B}$, $\forall y \in Y : E^y \in \mathcal{A}$;
- *Funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná na $(X, \mathcal{A})$, funkce $y \mapsto \mu(E^y)$ je měřitelná na (Y, B).*

Je-li funkce $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná, pak $\forall x \in X$ je funkce $f_x : y \mapsto f(x, y)$ měřitelná na (Y, B) a $\forall y \in Y$ je funkce $f^y : x \mapsto f(x, y)$ měřitelná na $(X, \mathcal{A})$.

Důkaz
Provedem pouze pro E_x, funkci $x \mapsto \nu(E_x)$ a funkci f_x (pro E^y, funkci $y \mapsto \mu(E^y)$ a funkci f^y je důkaz analogický). □

Důkaz (1.)
$\forall x \in X$ je množina $\mathcal{E} := \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} | E_x \in \mathcal{B}\}$ σ-algebra, neboť:

- $\emptyset \in \mathcal{E}$, protože $\emptyset_x = \emptyset \in \mathcal{B}$;
- $E \in \mathcal{E} \implies E_x \in \mathcal{B} \implies (E^c)_x = (X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x \in \mathcal{B}$, a tedy $E^c \in \mathcal{E}$;
- $E_n \in \mathcal{E}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies (E_n)_x \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies$

$$\implies (\bigcup_n E_n)_x = \bigcup_n (E_n)_x \in \mathcal{B},$$

  a tedy $\bigcup_n E_n \in \mathcal{E}$.

Dále platí $\emptyset \subset \mathcal{E} \implies \mathcal{A} \otimes B = \sigma\mathcal{O} \subset \sigma\mathcal{E} = \mathcal{E}$. Ovšem z definice $\mathcal{E}$ máme $\mathcal{E} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Tedy $\mathcal{E} = \sigma\mathcal{O} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, což znamená, že

$$\forall x \in X\ \forall E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : E_x \in \mathcal{B}.$$

$\square$

Důkaz (3.)
Buď $Y_0 \in \mathcal{B}$, $\nu(Y_0) < +\infty$ a

$$\mathcal{D} := \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} | x \mapsto \nu(E_x \cap Y_0) \text{ je měřitelná na } (X, \mathcal{A})\}.$$

Dokážeme-li, že a) $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$, b) $\mathcal{D}$ je d-systém, c) $\mathcal{O}$ je π-systém, pak $d\mathcal{O} \subset d\mathcal{D} = \mathcal{D} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ $\implies \mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

a) Je-li $E \subset \mathcal{O}$, pak $E = A \times B$, kde $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B} \implies E_x = B$ pro $x \in A$ a $\emptyset$ pro $x \notin A \implies E_x \cap Y_0 = B \cap Y_0$ pro $x \in A$ a $\emptyset$ pro $x \notin A \implies \nu(E_x \cap Y_0) = \nu(B \cap Y_0) \cdot \chi_A(x)$ $\implies$ funkce $x \mapsto \nu(E_x \cap Y_0)$ je $(X, \mathcal{A})$ měřitelná (neboť $A \in \mathcal{A}$). Tedy $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$.

b) $\emptyset \in \mathcal{D}$, neboť $\emptyset \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a funkce $x \mapsto \nu(\emptyset_x \cap Y_0) = \nu(\emptyset) = 0\ \forall x \in X \implies$ funkce $x \mapsto \nu(\emptyset_k \cap Y_0)$ je $(X, \mathcal{A})$ měřitelná.

$E \in \mathcal{D} \implies E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a funkce $x \mapsto \nu(E_x \cap Y_0)$ je $(X, \mathcal{A})$ měřitelná. Protože

$$(E^c)_x \cap Y_0 = (X \times Y \setminus E)_x \cap Y_0 = (Y \setminus E_x) \cap Y_0 = Y_0 \setminus E_x \cap Y_0,$$

tak $\nu((E^c)_x \cap Y_0) = \nu(Y_0) \setminus \nu(E_x \cap Y_0) \implies$ funkce $x \mapsto \nu((E^c)_x \cap Y_0)$ je rozdílem dvou měřitelných funkcí $x \mapsto \nu(Y_0)$ a $x \mapsto \nu(E_x \cap Y_0)$, tedy je to měřitelná funkce (na $(X, \mathcal{A})$).

Buď $E_n \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N}$ a $E_n \cap E_m = \emptyset$ pro $n \neq m$. Tedy $E_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N}$ a funkce $x \mapsto \nu((E_n)_x \cap Y_0)$ jsou měřitelné na $(X, \mathcal{A})\ \forall n \in \mathbb{N}$

Protože $(\bigcup_n E_n)_x \cap Y_0 = (\bigcup_n (E_n)_x) \cap Y_0 = \bigcup_n ((E_n)_x \cap Y_0)$, tak

$$\nu((\bigcup_n E_n)_x \cap Y_0) = \nu(\bigcup_n ((E_n)_x \cap Y_0)) = \sum_n \nu((E_n)_x \cap Y_0) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \nu((E_n)_x \cap Y_0) \implies$$

Funkce $x \mapsto \nu((\bigcup_n E_n)_x \cap Y_0)$ je limita ($k \to +\infty$) měřitelných funkcí $x \mapsto \sum_{n=1}^k \nu((E_n)_x \cap Y_0) \implies$ funkce $x \mapsto \nu((\bigcup_n E_n)_x \cap Y_0)$ je měřitelná funkce (na $(X, \mathcal{A})$) $\implies \bigcup_n E_n \in \mathcal{D}$.

c) To je jasné, neboť je-li $E_i \in \mathcal{O}$, pak $E_i = A_i \times B_i$, kde $A_i \in \mathcal{A}$, $B_i \in \mathcal{B} \implies$

$$\implies E_1 \cap E_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{O}.$$

Tedy platí $d\mathcal{O} \subset d\mathcal{D} = \mathcal{D} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies \mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Protože ν je σ-konečná míra, tak existují množiny $Y_n \subset Y$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) takové, že $\nu(Y_n) < +\infty$ a $\nu(Y_n) \nearrow \nu(Y)$. Pak $\forall E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ platí $\nu(E_x) = \lim_{n \to \infty} \nu(E_x \cap Y_n)$, a tedy funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná na $(X, \mathcal{A})$, neboť limitou funkcí $x \mapsto \nu(E_x \cap Y_n)$, které jsou dle předchozí části důkazu měřitelné na $(X, \mathcal{A})$. $\square$

Důkaz (5.)
Buď $a \in \mathbb{R}^*$ a $E := \{[x,y] \in X \times Y | f(x,y) < a\}$. Protože f je měřitelná, tak $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dále $\forall x \in X$ platí

$$\{y \in Y | f_x(y) < a\} = E_x \in \mathcal{B}.$$

Tudíž $\forall x \in X$ je funkce f_x měřitelná na $(Y, \mathcal{B})$. □

Věta 0.30 (Existence a jednoznačnost součinové míry)

Existuje právě jedna míra $\mu \otimes \nu$ na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (tzv. součinová míra) splňující

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \qquad \forall A \in \mathcal{A}\ \forall B \in \mathcal{B}.$$

Pro tuto míru platí

$$E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies (\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x).$$

Důkaz
1. Existence: $\forall E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ definujeme

$$(\mu \otimes \nu)(E) := \int_X \nu(E_x) d\mu(x).$$

Pak $\mu \otimes \nu$ je míra na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, neboť:

$$(\mu \otimes \nu)(\emptyset) = \int_X \nu(\emptyset_x) d\mu(x) = \int_X 0 d\mu(x) = 0;$$

Je-li $E_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, $E_n \cap E_m = \emptyset$ pro $n \neq m$, pak

$$(\mu \otimes \nu) \left(\bigcup_n E_n \right) = \int_X \nu \left(\left(\bigcup_n E_n \right)_x \right) d\mu(x) = \int_X \nu \left(\bigcup_n (E_n)_x \right) =$$

$$= \int_X \sum_n \nu\left((E_n)_x\right) d\mu(x) = \sum_n \int_X \nu\left((E_n)_x\right) d\mu(x) = \sum_n (\mu \otimes \nu)(E_n).$$

Z definice $\mu \otimes \nu$ na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ $\forall A \in \mathcal{A}$ $\forall B \in \mathcal{B}$ dostáváme

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \int_X \nu\left((A \times B)_x\right) d\mu(x) = \int_X \nu(B) \cdot \chi_A(x) d\mu(x) =$$

$$= \nu(B) \int_A d\mu(x) = \nu(B) \cdot \mu(A).$$

2. Jednoznačnost: Předpokládejme, že τ je míra na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ splňující $\tau(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ $\forall B \in \mathcal{B}$, tj. $\tau = \mu \otimes \nu$ na $\mathcal{O}$. Systém $\mathcal{O}$ je π-systém. Protože μ a ν jsou σ-konečné, tak existují množiny $X_n \in \mathcal{A}$, $\mu(X_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \nearrow X$ a množiny $Y_n \in \mathcal{B}$, $\nu(Y_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n \nearrow Y$. Pak pro množiny $X_n \times Y_n$ platí $X_n \times Y_n \in \mathcal{O}$, $(\mu \otimes \nu)(X_n \times Y_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \times Y_n \nearrow X \times Y$. Z věty 6.1? pak plyne $\tau = \mu \otimes \nu$ na $\sigma\mathcal{O}$, tj. na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. □

Věta 0.31 (Fubini)

Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$ platí

- *Funkce $x \mapsto \int_Y f(x,y) d\nu(y)$ je měřitelná na X;*
- *Funkce $y \mapsto \int_X f(x,y) d\nu(x)$ je měřitelná na Y;*
- $\int_{X \otimes Y} f(x,y) d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$

Důkaz
Je-li $f = \chi_E$, kde $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, pak 3. plyne z věty o existenci a jednoznačnost součinové míry, neboť

$$\int_{X\times Y} \chi_E(x,y)d(\mu \otimes \nu) = (\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y \chi_E(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x),$$

neboť $\nu(E_x) = \int_Y \chi_{E_x}(y)d\nu(y) = \int_Y \chi_E(x,y)d\nu(y)\ \forall x \in X$.

Podobně dostaneme

$$\int_{X\times Y} \chi_E(x,y)d(\mu \otimes \nu) = (\mu \otimes \nu)(E) = \int_Y \mu(E_y)d\nu(y) = \int_Y \left(\int_X \chi_E(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y),$$

neboť $\nu(E^y) = \int_X \chi_{E^y}(x)d\mu(x) = \int_X \chi_E(x,y)d\mu(x)\ \forall y \in Y$. Tedy 3. platí pro $f = \chi_E$, kde $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Pro jednoduchou nezápornou měřitelnou funkci $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{E_i}$ na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ máme

$$\int_{X\times Y} s(x,y)d(\mu \otimes \nu) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(\mu \otimes \nu)(E_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_X \left(\int_Y \chi_{E_i}(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) =$$

$$= \int_X \left(\int_Y s(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x),$$

tj. pro funkci s platí první rovnost v 3.

Z uvedeného také plyne, že funkce $x \mapsto \int_Y s(c,y)d\nu(y)$ je měřitelná na X. Druhá rovnost v 3. pro funkci s se dokáže analogicky.

Buď $f \geq 0$ měřitelná na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Dle věty o nezáporné měřitelné funkci existuje posloupnost nezáporných jednoduchých měřitelných funkcí $\{s_n\}$ tak, že $s_n \nearrow f$. Pak podle Leviho věty platí

$$\int_Y s_n(x,y)d\nu(y) \nearrow \int_Y f(x,y)d\nu(y) \qquad \forall x \in X.$$

Protože integrály na levé straně této nerovnosti jsou měřitelnými funkcemi, tak i integrál na pravé je měřitelná funkce na X a další aplikací Leviho věty dostaneme

$$\int_X \left(\int_Y s_n(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) \nearrow \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x).$$

Druhá nerovnost v 3. se zase dokáže analogicky.

Pro $f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$ dané tvrzení plyne z příslušných tvrzení pro f^+ a f^- (a z linearity integrálu). $\square$

Věta 0.32 (Fubiniova věta pro zúplněnou součinovou míru)

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a (Y, B, ν) jsou prostory s úplnými σ-konečnými mírami. Je-li $f \in \mathcal{L}^*(\mu \overset{0}{\times} \nu)$, pak

- *Funkce $f_y : x \mapsto f(x, y)$ je měřitelná na X pro ν-skoro všechna $y \in Y$ a funkce $f_x : y \mapsto f(x, y)$ je měřitelná na Y pro μ-skoro všechna $y \in Y$;*
- *Funkce $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ je měřitelná na X a funkce $y \mapsto \int_X f(x, y) d\nu(x)$ je měřitelná na Y;*
- $\int_{X \otimes Y} f(x, y) d(\mu \overset{0}{\otimes} \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$

Důkaz

Důkaz se nestíhal, pouze bylo zmíněno, že se použije předchozí věta a následující 2 Lemmata. □

Lemma 0.33

Nechť $(Z, \mathcal{C}, \varrho)$ je prostor s mírou a $(Z, \mathcal{C}_0, \varrho_0)$ jeho zúplnění. Je-li funkce $f : (Z, \mathcal{C}_0) \to \mathbb{R}^*$ ϱ_0 měřitelná, pak existuje ϱ-měřitelná funkce $g : (Z, \mathcal{C}) \to \mathbb{R}^*$ tak, že $f = g$ ϱ-skoro všude na X.

Důkaz

Bez důkazu. □

Lemma 0.34

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ jsou prostory s úplnými σ-konečnými mírami. Nechť h je $\mu \overset{0}{\otimes} \nu$-měřitelná funkce na $X \times U$ a $h = 0$ $\mu \overset{0}{\otimes} \nu$-skoro všude na $X \times Y$. Potom pro μ-skoro všechna $x \in X$ platí $h(x, y) = 0$ pro ν-skoro všechna $y \in Y$. Speciálně, funkce h_x je měřitelná na $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$. (Obdobně pro h^y).

Důkaz

Bez důkazu. □

Věta 0.35 (O míře $\lambda^p \otimes \lambda^q$)

Je-li $p, q \in \mathbb{N}$, pak:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q), \qquad (tj.\ \lambda^{p+q}_{\mathcal{B}} = \lambda^p_{\mathcal{B}} \otimes \lambda^q_{\mathcal{B}})$$

$$\lambda^{p+q} = \lambda^p \overset{0}{\otimes} \lambda^q.$$

Důkaz
Bez důkazu. $\square$

Věta 0.36 (Fubiniova věta v $\mathbb{R}^{p+q}$)

Je-li $s, q \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^{p+q})$, pak

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f d\lambda^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) d\lambda^q(y) \right) d\lambda^p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) d\lambda^p(x) \right) d\lambda^q(y).$$

Důkaz
Bez důkazu, ale lehký důsledek předchozí věty a Fubiniovy věty. $\square$

Definice 0.28 (Značení)

Je-li $p, q \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, pak definujeme projekce předpisem

$$\pi_1(x,y) := x, \qquad \pi_2(x,y) := y.$$

Důsledek
Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{B}_0^{p+q} := (\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q}))_0$. Jestliže $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^{p+q})$ a množiny $\pi_1 A, \pi_2 A$ jsou měřitelná, pak

$$\int_A f d\lambda^{p+q} = \int_{\pi_1 A} \left(\int_{A_x} f(x,y) d\lambda^q(y) \right) d\lambda^p(x) = \int_{\pi_2 A} \left(\int_{A^y} f(x,y) d\lambda^p(x) \right) d\lambda^q(y).$$

Lemma 0.37

Lebesgueova míra λ^n je translačně invariantní, tzn.

$$\lambda^n(B + r) = \lambda^n(B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}_0^n \ \forall r \in \mathbb{R}^n.$$

Důkaz
Dané tvrzení plyne z věty o jednoznačnosti míry, neboť míry λ^n a $\mu(B) := \lambda^n(B+z) \ \forall B \in \mathcal{B}_0^n$ a pro libovolné pevné $r \in \mathbb{R}^n$ se shodují na systému $\mathcal{B}_0^n$. $\square$

Věta 0.38 (O obrazu míry)

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $(Y, \mathcal{B})$ je měřitelný prostor. Je-li $\varphi : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ měřitelné zobrazení, pak množinová funkce daná předpisem

$$(\varphi(\mu))(B) := \mu\left(\varphi^{-1}(B)\right) \qquad \forall B \in \mathcal{B}$$

je míra na $(Y, \mathcal{B})$ (tzn. obraz míry μ při zobrazení φ) a pro každou měřitelnou funkci f na

Y platí

$$\int_Y f d\varphi(\mu) = \int_X (f \circ \varphi) d\mu,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Důkaz

Snadno ověříme, že množinová funkce $\varphi(\mu)$ daná prvním předpisem má všechny vlastnosti míry. Ověření druhé rovnosti je také jednoduché: Nejprve se ověří pro případ, že $f = \chi_B$, kde $B \in \mathcal{B}$.

V tomto případě je se pravá strana druhé rovnosti rovná levé:

$$\int_X (\chi_B \circ \psi) d\mu = \int_X \chi_{\psi^{-1}(B)} d\mu = \mu\left(\psi^{-1}(B)\right) =$$

$$(\psi(\mu))(B) = \int_X \chi_B d\psi(\mu).$$

S použitím tohoto výsledku se druhá rovnost ověří pro jednoduché funkce, pak pro nezáporné měřitelné funkce a nakonec se tento výsledek spolu s rovností $f = f^+ - f^-$ použije k ověření rovnosti pro měřitelnou funkci f na Y. □

Věta 0.39

Buď $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertibilní lineární zobrazení

- *Je-li $\nu(A) := \lambda^n(L(A))\ \forall A \in \mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, pak ν je mír a platí $\nu = |\det L| \cdot \lambda^n$.*
- *Je-li $\mu(A) := |\det L| \lambda^n_{\mathcal{B}}(A)\ \forall A \in \mathcal{B}^n$, pak $L(\mu) = \lambda^n_{\mathcal{B}}$ a pro $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^n_{\mathcal{B}})$ platí*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L) |\det L| d\lambda^n.$$

Důkaz

1. L je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, a tedy L je spojité. L je invertibilní $\implies$ $\exists$inverzní zobrazení L^{-1}, které je opět lineární a spojité. Tedy L je měřitelné.

$$(L^{-1}\lambda^n)(A) = \lambda^n(L(A)) = \nu(A), \forall A \in \mathcal{B}^n$$

$\implies$ nu je míra dle předchozí věty.

Z lineární algebry je známo, že L lze vyjádřit jako kompozici konečně mnoha „elementárních" lineárních zobrazení jednoho z následujících typů:

$$L_1(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ kde } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$L_2(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n), \qquad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, j > i \in \mathbb{N},$$

$$L_3(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n), \qquad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad i, j \in \mathbb{N}.$$

Protože determinant součinu matic se rovná součinu determinantů, stačí tvrzení ověřit pro „elementární" zobrazení. Ověříme na intervalech, L_1 ho jen natáhne o α, tedy na determinant násobek, L_2 „otočí" interval, ale λ^n se otočením nezmění, L_3 posune a zdeformuje interval, ale tím se λ^n nezmění (dokážeme přes Fubiniovu větu). Všechny 3 zobrazení stejně operují na prázdné množině, takže i na π systému $I \cup \{\emptyset\}$, tedy míry se rovnají všude.

2.

$$(L(\mu))(A) \overset{1.}{=} \mu(L^{-1}(A)) = |\det L| \lambda^n_{\mathcal{B}}(L^{-1}(A)) = |\det L| \cdot |\det L^{-1}| \lambda^n_{\mathcal{B}}(A) = \lambda^n_{\mathcal{B}}(A) \forall A \in \mathcal{B}^n,$$

tedy $L(\mu) = \lambda^n_{\mathcal{B}}$. Z předchozí věty pak plyne rovnost integrálů. □

Lemma 0.40

Buď $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzovské zobrazení. Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ lebesgueovsky měřitelná množina, pak také $T(A)$ je lebesgueovsky měřitelná množina.

Důkaz

Vynechán. □

Věta 0.41

Je-li $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertibilní lineární zobrazení, pak

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L) |\det L| d\lambda^n,$$

má-li jedna strana smysl.

Důkaz
Bez důkazu, ale jednoduše vyplývá z předchozího lemmatu a věty. □

Věta 0.42 (O substituci)

Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus. Jestliže $f : \varphi(G) \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce, pak

$$\int_G f(\varphi(x))|J\varphi(x)|dx = \int_{\varphi(G)} f(y)dy,$$

má-li jedna strana rovnosti smysl.

Důkaz
Bude v TMI2. □

Důsledek
Je-li navíc $M \subset \varphi(G)$ lebesgueovsky měřitelná množina, pak

$$\int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(x))|J\varphi(x)|dx = \int_M f(y)dy.$$

Lemma 0.43

$$\lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) = 0.$$

Důkaz
Množina $\mathbb{R}^{n-1}$ je λ^n-měřitelná, neboť je uzavřená v $\mathbb{R}^n$. Dále platí $\mathbb{R}^{n-1} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,\varepsilon}$, kde $\varepsilon > 0$ a

$$I_{k,\varepsilon} := (-k,k)^{n-1} \times \left(\frac{-\varepsilon}{(2k)^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^k}, \frac{\varepsilon}{(2k)^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^k} \right) \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$\lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(I_{k,\varepsilon}) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{n-1} \cdot \frac{2\varepsilon}{(2k)^{n-1}} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} = 2\varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, tak $\lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) = 0$. □

Lemma 0.44 (O míře s hustotou f)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f nezáporná měřitelná funkce na X. Definujeme-li

$$\nu(A) := \int_A f d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A},$$

pak ν je míra na $\mathcal{A}$ a pro měřitelnou funkci $g : (X, \mathcal{A}) \to \langle 0, +\infty \rangle$ platí

$$\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu.$$

Důkaz

Je jasné, že $\nu \geq 0$. Dále

$$\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f d\mu = \int_X f \cdot \chi_\emptyset d\mu = \int_X 0 d\mu = 0.$$

Je-li $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, kde $A_j \in \mathcal{A}$, $A_j \cap A_i = \emptyset$ pro $i \neq j$, pak

$$\nu(A) = \int_A f d\mu = \int_X f \cdot \chi_A d\mu = \int_X f \left(\sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j} \right) d\mu =$$

$$= \sum_{j=1}^\infty \int_X f \chi_{A_j} d\mu = \sum_{j=1}^\infty \int_{A_j} f d\mu = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j).$$

Tedy ν je míra na $\mathcal{A}$.

K důkazu rovnosti: Je-li $g := \chi_E$, kde $E \in \mathcal{A}$, pak

$$\int_X g d\nu = \int_X \chi_E d\nu = \nu(E) = \int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu = \int_X g f d\mu,$$

tj. rovnost platí. Z toho a linearity integrálu plyne, že rovnost platí v případě, že g je jednoduchá nezáporná měřitelná funkce na X.

Nakonec je-li $g : (X, \mathcal{A}) \to \langle 0, +\infty \rangle$ měřitelná funkce, pak existují nezáporné jednoduché měřitelné funkce g_n splňující $g_n \nearrow g$. Odtud z předchozího a Leviho věty pak plyne rovnost i pro g. $\square$

Věta 0.45 (Charakterizace faktu $\nu \ll \mu$ pro konečné míry)

Nechť μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$. Pak $\nu \ll \mu$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta \implies \nu(A) < \varepsilon.$$

Důkaz
„$\Leftarrow$“: Buď $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$. Pak volbou $\varepsilon = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, ze znění dostaneme

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \delta_k > 0\ \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \frac{1}{k} : \nu(A) < \frac{1}{k}.$$

Protože $\mu(A) = 0 < \delta_k\ \forall k \in \mathbb{N}$, tak $\nu(A) < \frac{1}{k}\ \forall k \in \mathbb{N}$, tj. $\nu(A) = 0$.

„ $\implies$ “: Nechť $\nu \ll \mu$ a předpokládejme, že podmínka ze znění neplatí, tj.

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta \wedge \nu(A) \geq \varepsilon.$$

Volme $\delta = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$. Tedy dle předchozího platí

$$\exists A_n \in \mathcal{A}, \mu(A_n) < \frac{1}{2^n} \wedge \nu(A_n) \geq \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Položme $B_k := \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n, k \in \mathbb{N}$. Pak

$$B_1 \supset B_2 \supset \ldots, \mu(B_1) \leq \mu(X) < +\infty, \nu(B_1) \leq \nu(X) < +\infty,$$

a tedy

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k),$$
$$\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \nu(B_k).$$

Protože

$$\mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^k},$$

tj. $\mu(B_k) \leq \frac{1}{2^k}$, tak $\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$.

Dále platí $\nu(B_k) = \nu\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right) \geq \nu(A_{k+1}) \geq \varepsilon\ \forall k \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{k\to\infty} \nu(B_k) \geq \varepsilon$. Tedy pro $B := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ dle předchozích výsledků důkazu máme $\mu(B) = 0 \wedge \nu(B) \geq \varepsilon$, což je spor, neboť $\nu \ll \mu$. Tedy podmínka z věty platí. $\square$

Věta 0.46 (Radonova-Nikodymova)

Jsou-li μ, ν σ-konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ splňující $\mu \ll \nu$, pak existuje nezáporná měřitelná funkce f na X tak, že

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Důkaz
Nejprve předpokládejme, že μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ a $\nu \ll \mu$. Dle následujícího lemmatu aplikovaného na míry ν, $\nu + \mu$, splňující $\nu \leq \mu + \nu$, existuje měřitelná funkce h na X, $0 \leq h \leq 1$ $(\mu + \nu)$-skoro všude tak, že

$$\nu(A) = \int_A hd(\mu + \nu) = \int_A hd\mu + \int_A hd\nu \qquad \forall A \in \mathcal{A} \implies$$

$$\implies \nu(\{h = 1\}) = \int_{\{h=1\}} hd(\mu + \nu) = \mu(\{h = 1\}) + \nu(\{h = 1\}),$$

a tedy $\mu(\{h = 1\}) = 0$. Protože $\nu \ll \mu$, tak také $\nu(\{h = 1\}) = 0$. Proto $h < 1$ $(\mu+\nu)$-skoro všude.

Rovnost výše lze psát ve tvaru

$$\int_X \chi_A d\nu = \int_X \chi_A hd\mu + \int_X \chi_A hd\nu,$$

tj.

$$\int_X \chi_A(1 - h)d\nu = \int_X \chi_A hd\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Odtud a z linearity integrálu pak plyne, že platí $\int_X g(1 - h)d\nu = \int_X ghd\mu$ pro všechny nezáporné jednoduché μ-měřitelné funkce g na X. Pomocí Leviho věty lze ukázat, že tato rovnost platí pro každou nezápornou μ-měřitelnou funkci g na X. Volbou $g := \frac{1}{1-h}\chi_A$, kde $A \in \mathcal{A}$, pak dostaneme

$$\int_X \chi_A d\nu = \int_X \frac{h}{1 - h}\chi_A d\mu \implies \nu(A) = \int_A f d\mu \ \forall A \in \mathcal{A},$$

kde $f := \frac{h}{1-h}$ je hledaná hustota $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Jsou-li μ, ν σ-konečné míry, pak nalezneme posloupnosti $\{E_i\}, \{F_j\} \subset \mathcal{A}$ po dvou disjunktních množin tak, aby $\mu(E_i) < +\infty \ \forall i \in \mathbb{N}$, $\nu(F_j) < +\infty \ \forall j \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = X = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$.

Položíme-li $D_{ij} := E_i \cap F_j, i, j \in \mathbb{N}$, pak $X = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} D_{ij}$ a pro konečné míry $\nu|_{D_{ij}}$, $\mu|_{D_{ij}}$ (tj. restrikce daných měr ν, μ na D_{ij}) splňující $\nu|_{D_{ij}} \ll \mu|_{D_{ij}}$ určíme příslušnou hustotu $f_{ij} = \frac{d\nu|_{D_{ij}}}{d\mu|_{D_{ij}}}$. Hledaná hustota $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ je pak definovaná takto:

Je-li $x \in X$, pak $\exists! i \in \mathbb{N}$, $\exists! j \in \mathbb{N}$ tak, že $x \in D_{ij}$ a položíme $f(x) = f_{ij}(x)$. □

Lemma 0.47 (Radonova-Nikodymova věta – baby verze)

Jestliže μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu(A) \leq \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$, pak existuje měřitelná funkce f na X splňující $0 \leq f \leq 1$ μ-skoro všude a

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Důkaz
Definujeme funkcionál $Jg := \int_X g^2 d\mu - 2\int_X g d\nu$, $\forall g \in \mathcal{L}^2(\mu)$. Definice J je korektní, protože konvergence v L^2 je silnější než konvergence v L^1 (nebo z Hölderovy nerovnosti), tedy oba integrály jsou pro $g \in L^2$ konečné. Dále definujeme $c := \inf_{g\in L^2(\mu)} Jg$.

$$Jg = \int_X g^2 d\mu - 2\int_X g d\nu \geq \int_X g^2 d\mu - 2\int_X |g| d\mu =$$

$$= \int_X (|g|-1)^2 d\mu - \mu(X) \geq -\mu(X) > -\infty, \forall g \in L^2(\mu).$$

Předpokládejme, že $\exists f$ $c = Jf$. Buď $A \in \mathcal{A}$ pevná množina, definujeme $g(t) := J(f + t\chi_A)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Tedy g má minimum v bodě 0. Tudíž $g'(0) = 0$, pokud g' existuje. Ověříme výpočtem z definice existenci a dosadíme 0:

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{J(f + t\chi_A) - J(f)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\int_X (f + t\chi_A)^2 d\mu - 2\int_X (f + t\chi_A) d\nu - \int_X f^2 d\mu + 2\int_X f d\nu\right] =$$

$$\lim_{t\to 0}\left[\int_X 2f\chi_A d\mu + t\int_X \chi_A d\mu - 2\int_X \chi_A d\nu\right] = 2\left[\int_X f\chi_A d\mu - \int_X \chi_A d\nu\right] = 0$$

Tedy $\forall A \in \mathcal{A} : \nu(A) = \int_A f d\mu$.

$$0 \leq \int_{\{f>1\}} (f-1)^+ d\mu = \int_{\{f>1\}} (f-1) d\mu = \int_{\{f>1\}} d\mu - \int_{\{f>1\}} 1 d\mu =$$

$$= \nu(\{f>1\}) - \mu(\{f>1\}) \leq 0 \implies f \leq 1 \mu\text{-skoro všude}$$

$$0 \leq \int_{\{f<0\}} f^- d\mu = -\int_{\{f<0\}} f d\mu = -nu(\{f<0\}) \leq 0 \implies f \geq 0 \mu\text{-skoro všude}$$

$$J(g) + J(h) - J\left(\frac{g+h}{2}\right) = \int_X \frac{g^2 - 2gh + h^2}{2} d\mu = \frac{1}{2}\int_X (g-h)^2 d\mu = \frac{1}{2}||g-h||^2_{L^2(\mu)}.$$

$\exists \{f_n\} \subset L^2(\mu)$. $J(f_n) \to c$ pro $n \to \infty$. $g = f_n$, $h = f_m$:

$$J(f_n) + J(f_m) - 2J\left(\frac{f_n + f_m}{2}\right) = \frac{1}{2}||f_n - f_m||^2_{L^2(\mu)}, \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$\leq J(f_n) + J(f_n) - 2c \to 0 \implies \exists f \in L^2(\mu) : f_n \to f \in L^2(\mu).$$

$$\int_X |f_n - f| d\nu \leq \int_X |f_n - f| d\mu \leq \left(\int_X |f_n - f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (\mu(X))^{\frac{1}{2}} \to 0 \implies$$

$$\implies ||f_n - f||_{L^2(M)} \to 0 \implies J(f_n) \to J(f).$$

$\square$

Věta 0.48 (Lebesgueův rozklad míry)

Buď μ míra na (X, d) a ν σ-konečná míra na $(X, \mathcal{A})$. Pak existuje rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$ na σ-konečné míry ν_a a ν_s takový, že $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$, přičemž míry ν_a a ν_s jsou určeny jednoznačně.

Důkaz (Konečná míra, existence rozkladu)
Předpokládejme nejprve, že ν je konečná míra. Nejprve se zabývejme existencí rozkladu:

Buď $\mathcal{N}_\mu := \{B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0\}$. Pak

$$c := \sup\{\nu(B) | B \in \mathcal{N}_\mu\} \leq \nu(X) < +\infty.$$

Nechť $\{B_j\}_j \subset \mathcal{N}_\mu$ je taková posloupnost, že $\lim_{j\to\infty} \nu(B_j) = c$. Označíme-li $N := \bigcup_{j=1}^\infty B_j$, pak $\mu(N) \leq \sum_j \mu(B_j) = 0$, a tedy $\mu(N) = 0$, tj. $N \in \mathcal{N}_\mu$.

Dále platí

$$c \geq \nu(N) = \nu(\bigcup_j B_j) \geq \nu(i) \qquad \forall i \in \mathbb{N} \implies \nu(N) = c.$$

Definujeme

$$\nu_s(A) := \nu(A \cap N) \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Pak

$$\nu_s(X \setminus N) = \nu((X \setminus N) \cap N) = \nu(\emptyset) = 0.$$

Odtud a z $\mu(N) = 0$ plyne $\nu_s \perp \mu$. Následně definujeme $\nu_a := \nu - \nu_s$. Tedy

$$\nu_a(A) = \nu(A) - \nu_s(A) = \nu(A) - \nu(A \cap N) = \nu(A \setminus N) = \nu(A \cap N^c),$$

tj.

$$\nu_a(A) = \nu(A \cap N^c) \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Dokažme, že $\nu_a \ll \mu$: Nechť $\mu(a) = 0$. Pak

$$N \cup (A \cap N^c) \in \mathcal{N}_\mu,$$

a kdyby $\nu(A \cap N^c) > 0$, pak by

$$\nu(N \cup (A \cap N^c)) = \nu(N) + \nu(A \cap N^c) > c,$$

což je spor s definicí čísla c. Tedy $\nu(A \cap N^c) = 0$, tj. $\nu_a(A) = 0$, tudíž $\nu_a \ll \mu$. $\square$

Důkaz (Konečná míra, jednoznačnost rozkladu)
Nechť

$$\nu = \nu_a + \nu_s \wedge \nu = \tilde{\nu}_a + \tilde{\nu}_s,$$

$$\nu_s \perp \mu \wedge \tilde{\nu}_s \perp \mu \wedge \nu_a \ll \mu \wedge \tilde{\nu}_a \ll \mu.$$

Ze singularit měr plyne

$$\exists N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0 \wedge \nu_s(N^c) = 0,$$

$$\exists \tilde{N} \in \mathcal{A} : \mu(\tilde{N}) = 0 \wedge \tilde{\nu}_s(\tilde{N}^c) = 0.$$

Buď $N_0 := N \cup \tilde{N}$. Pak $\mu(N_0) \leq \mu(N) + \mu(\tilde{N}) = 0$, a tedy $\mu(N_0) = 0$, odkud plyne $\nu_a(N_0) = 0 \wedge \tilde{\nu}_a(N_0) = 0$.

Dále platí

$$\nu_s(N_0^c) = \nu_s(X \setminus N_0) \leq \nu_s(N^c) = 0,$$

$$\tilde{\nu}_s(N_0^c) = \tilde{\nu}_s(X \setminus N_0) \leq \tilde{\nu}_s(\tilde{N}^c) = 0,$$

tj. $\nu_s(N_0^c) = 0 \wedge \tilde{\nu}_s(N_0^c) = 0$. Tedy $\forall A \in \mathcal{A}$ platí

$$\nu_s(A) = \nu_s(A \cap N_0) = \nu(A \cap N_0) - \nu_a(A \cap N_0) = \nu(A \cap N_0)$$

a analogicky

$$\tilde{\nu}_s(A) = \tilde{\nu}_s(A \cap N_0) = \nu(A \cap N_0) - \tilde{\nu}_a(A \cap N_0) = \nu(A \cap N_0),$$

odkud dostáváme $\nu_s = \tilde{\nu}_s$, což spolu s tím, že je to rozklad dává $\nu_a = \tilde{\nu}_a$. □

Důkaz (Sigma-konečná míra)
Předpokládejme nyní, že ν je σ-konečná míra. Pak existuje posloupnost $\{D_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ po dvou disjunktních množin tak, že $X = \bigcup_k D_k$. Označme $A_k := \{A \cap D_k | A \in \mathcal{A}\}$ a aplikujeme stejný postup jako pro konečnou míru na měřitelné prostory $(D_k, \mathcal{A}_k)$ a restrikce měr μ, ν na $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Nechť $N_1, N_2, \dots$ jsou μ-nulové množiny zkonstruovatelné jako množina N v části I a nechť $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$. Pak míry ν_s, ν_a definované předpisem

$$\nu_s(A) := \nu(A \cap N), \qquad \nu_a(A) = \nu(A \cap N^c) \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

tvoří Lebesgueův rozklad míry ν, neboť

$$\mu(N) = \mu(\bigcup_k N_k) = \sum_k \mu(N_k) = 0,$$

$$\nu_s(X \setminus N) = \nu((X \setminus N) \cap N) = \nu(\emptyset) = 0,$$

a tedy $\nu_s \perp \mu$.

Je-li $\mu(A) = 0$ a označíme-li $A_k = A \cap D_k$, $k \in \mathbb{N}$, pak $\mu(A_k) = 0$, a tedy

$$(\nu|_{D_k})_a(A_k) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad (\text{neboť } (\nu_{D_k})_a \ll \mu|_{D_k}).$$

Dále platí

$$\nu_a(A) = \nu(A \cap N^c) = \sum_k \nu(A \cap D_k \cap N^c),$$

a protože

$$D_k \cap N^c = D_k \cap (X \setminus N) = D_k \cap (X \setminus \bigcup_j N_j) = D_k \cap \bigcup_j (X \setminus N_j) \subset D_k \cap (X \setminus N_k) = D_k \setminus N_k,$$

tak

$$\nu_a(A) \le \sum_k \nu(A \cap D_k \cap (D_k \setminus N_k)) = \sum_k \nu(A_k \cap (D_k \setminus N_k)) = \sum_k (\nu|_{D_k})(A_k \cap (D_k \setminus N_k)) =$$

$$= \sum_k (\nu|_{D_k})_a(A_k) = 0,$$

a tedy $\nu_a \ll \mu$.

Jednoznačnost rozkladu $\nu = \nu_a + \nu_s$ plyne z faktů, že $\forall A \in \mathcal{A}$ platí

$$\nu(A) = \sum_k \nu|_{D_k}(A \cap D_k), \qquad \nu_s(A) = \sum_k (\nu|_{D_k})_s(A \cap D_k),$$

$$\nu_a(A) = \sum_k (\nu|_{D_k})_a(A \cap D_k \setminus N_k)$$

a „lokální rozklady“ $\nu|_{D_k} = (\nu|_{D_k})_s + (\nu|_{D_k})_a$, $k \in N$, jsou určeny jednoznačně. $\square$

Lemma 0.49 (O distribuční funkci)

Distribuční funkce F_μ splňuje:

- *F_μ je neklesající;*
- *$F_\mu(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0,\ F_\mu(+\infty) := \lim_{x\to+\infty} F_\mu < \infty$;*
- *F_μ je zprava spojitá.*

Důkaz

První bod je jednoduchý: Je-li $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, pak

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x\rangle) \leq \mu((-\infty, y\rangle) = F_\mu(y).$$

Druhý bod: Obě uvedené limity existují, neboť dle prvního bodu je funkce F_μ neklesající. Tedy

$$F_\mu(-\infty) = \lim_{n\to\infty} F_\mu(-n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, -n\rangle) =$$
$$= \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, -n\rangle\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Analogicky dostaneme

$$F_\mu(+\infty) = \lim_{n\to\infty} F_\mu(n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, n\rangle) =$$
$$= \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\infty, n\rangle\right) = \mu(\mathbb{R}) < +\infty.$$

Třetí bod je také jednoduchý: Je-li $x \in \mathbb{R}$, pak $(-\infty, x\rangle = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right\rangle$, a tedy

$$F_\mu(x+) = \lim_{n\to\infty} F_\mu\left(x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right\rangle\right) =$$
$$= \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right\rangle\right) = \mu((-\infty, x\rangle) = F_\mu(x).$$

□

Věta 0.50 (O Lebesgueově-Stieltjosově míře)

Je-li $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce splňující

- *F je neklesající;*

- *$F_\mu(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0$, $F_\mu(+\infty) := \lim_{x\to+\infty} F_\mu < \infty$;*
- *F_μ je zprava spojitá.*

pak existuje právě jedna konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$ (tzn. Lebesgueova-Stieltjesova míra příslušná funkci F) taková, že $F_\mu = F$.

Důkaz
Bude v TMI2. □

Věta 0.51 (Per partes pro L-S integrál)

Jestliže F, G jsou distribuční funkce a $-\infty < a < b < +\infty$, pak

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_{(a,b\rangle} F(x)dG(x) + \int_{(a,b\rangle} G(x)dF(x).$$

Důkaz
Nechť $\Omega := \{[x,y] \in \mathbb{R}^n | a < x \le y \le b\}$. Použitím Fubiniovy věty k výpočtu $(\mu_F \otimes \mu_G)(\Omega)$ obdržíme

$$(\mu_F \otimes \mu_G)(\Omega) = \int_{(a,b\rangle} \left(\int_{\langle x,b\rangle} dG(y) \right) dF(x) = \int_{(a,b\rangle} (G(b) - G(x-))dF(x) =$$
$$= G(b)(F(b) - F(a)) - \int_{(a,b\rangle} G(x-)dF(x),$$
$$(\mu_F \otimes \mu_G)(\Omega) = \int_{(a,b\rangle} \left(\int_{(,y\rangle} dF(x) \right) dG(y) = \int_{(a,b\rangle} (F(y) - F(a))dG(y) =$$
$$= \int_{(a,b\rangle} F(y)dG(y) - F(a)(G(b) - G(a)).$$

Odečteme-li předchozí od sebe, dostaneme

$$0 = G(b)F(b) - G(b)F(a) - \int_{(a,b\rangle} G(x-)dF(x) - \int_{(a,b\rangle} F(y)dG(y) + F(a)G(b) - F(a)G(a).$$

□

Lemma 0.52 (O $\mu \ll \lambda^1$)

Nechť μ je konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$. Jestliže $F_\mu \in C^1(\mathbb{R})$, pak $\mu \ll \lambda^1$ a $\frac{d\mu}{d\lambda^1} = F'_\mu$. (Tj. platí $\mu(A) = \int_A F'_\mu d\lambda^1 \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.)

Důkaz
Nechť $\mathcal{S}$ je systém, který se skládá z $\emptyset$ a všech intervalů $(a, b\rangle$, kde $-\infty < a < b < +\infty$. Pak $\mathcal{S}$ je π-systém. Buď ν míra daná předpisem

$$\nu(A) := \int_A F'_\mu d\lambda^1 \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Pak $\mu = \nu$ na $\mathcal{S}$, neboť

$$\mu(\emptyset) = 0 = \nu(\emptyset),$$

$$\mu((a, b\rangle) = F_\mu(b) - F_\mu(a) = \int_a^b F'_\mu(x)dx = \int_{(a,b\rangle} F'_\mu d\lambda^1 = \nu((a, b\rangle),$$

je-li $-\infty < a < b < +\infty$.

Dále platí $X_n := (-n, n\rangle \in \mathcal{S}$, $X_n \nearrow X := \mathbb{R}$, $\mu(X_n) < +\infty \forall n \in \mathbb{N}$. Proto, dle věty o jednoznačnosti míry platí $\mu = \nu$ na $\sigma\mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tedy

$$\mu(A) = \nu(A) = \int_A F'_\mu d\lambda^1 \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

tj. $\frac{d\mu}{d\lambda^1} = F'_\mu$. $\square$

Lemma 0.53 (Čebyševova nerovnost)

Je-li $1 \le p < +\infty$, $f \in L^p(\mu)$ *a* $c \in (0, +\infty)$, *pak*

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| \ge c\}) \le \left(\frac{||f||_p}{c}\right)^p.$$

Důkaz

$$\mu(\overbrace{\{x \in X \mid |f()x| \ge c\}}^{M:=}) = \int_M 1 d\mu \le \int_M \left(\frac{|f|}{c}\right)^p d\mu \le \int_X \left(\frac{|f|}{c}\right)^p d\mu = \left(\frac{||f||_p}{c}\right)^p.$$

$\square$

Věta 0.54 (Vztah mezi konvergencí v $L^p(\mu)$ a konvergencí podle míry)

Je-li $1 \le p \le +\infty$ *a* $f, f_n \in L^p(\mu)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, *pak*

$$f_n \overset{L^p(\mu)}{\to} f \implies f_n \overset{\mu}{\to} f.$$

Důkaz
Je-li $p \in \langle 1, +\infty)$, pak implikace plyne z Čebyševovy nerovnosti. Jinak předpokládejme $f_n \overset{L^p(\mu)}{\to} f$ a $\varepsilon > 0$, pak

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : ||f_n - f||_\infty < \varepsilon,$$

a tedy $\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$. Proto $f_n \overset{\mu}{\to} f$. □

Věta 0.55 (1. vztah mezi konvergencí podle míry a konvergencí skoro všude)

Jestliže $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f_n \overset{\mu}{\to} f$, pak existuje vybraná podposloupnost $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tak, že $f_{n_k} \to f$ μ-skoro všude.

Důkaz
Protože

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

tak lze konstruovat posloupnost čísel $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tak, že

$$\mu\left(\{x \in X \mid |f_{n_1}(x) - f(x)| \geq 1\}\right) \leq \frac{1}{2}$$

a zbývající členy posloupnosti $\{n_k\}$ určit induktivně tak, aby $n_k > n_{k-1}$ a

$$\mu(\left\{x \in X \mid |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}) \leq \frac{1}{2^k}, \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\,.$$

Definujeme množiny A_k, $k \in \mathbb{N}$, předpisem

$$A_k := \left\{x \in X \mid |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}$$

a $A := \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq j} A_k$. Jestliže $x \notin A$, pak $\exists j \in \mathbb{N}$ tak, že $x \notin \bigcup_{k\geq j} A_k$, tedy

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \qquad \forall k \in \{j, j+1, \ldots\}\,,$$

tudíž $\{f_{n_k}\}_k$ konverguje k f pro všechna $x \notin A$.

Protože $\forall j \in \mathbb{N}$ platí

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{k\geq j} A_k\right) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^j} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{j+1}} \implies \mu(A) = 0.$$

□

Důsledek

Je-li $1 \leq p \leq +\infty$ a $f_n \stackrel{L^p(\mu)}{\to} f$, pak

$$\exists \{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : f_{n_k} \to f \mu\text{-skoro všude.}$$

Důkaz

Přímý důsledek předchozích dvou vět. □

Věta 0.56 (2. vztah mezi konvergencí podle míry a konvergencí skoro všude)

Jestliže $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s konečnou mírou a $f_n \to f$ μ-skoro všude, pak $f_n \stackrel{\mu}{\to} f$.

Důkaz

Máme dokázat, že $\forall \varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Buď $\varepsilon > 0$. Definujeme množiny A_n, B_n, $n \in \mathbb{N}$, předpisem

$$A_n := \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, \qquad B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Pak $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ a platí

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \{x \in X | f_n(x) \nrightarrow f(x)\}.$$

Tedy $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = 0$ dle předpokladu, což spolu s větou o vlastnostech míry dává $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$. Protože $A_n \subset B_n$, tak $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. □

Věta 0.57 (Jegorov)

Jestliže $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s konečnou mírou, $\varepsilon > 0$ a f, $f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce splňující $f_n \to f$ μ-skoro všude, pak

$$\exists B \in \mathcal{A}, \mu(B^c) < \varepsilon : f_n \rightrightarrows f \text{ na } B.$$

Důkaz
Buď $\varepsilon > 0$. Položme

$$g_n := \sup_{j \geq n} |f_j - f| \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pak $g_n \to 0$ μ-skoro všude (neboť $f_n \to f$ μ-skoro všude), a tedy dle předpředchozí věty $g_n \xrightarrow{\mu} 0$. Proto

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_k \in \mathbb{N} : \mu(\left\{ x \in X | g_{n_k}(x) \geq \frac{1}{k} \right\}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Definujeme množiny $B_1, B_2, \ldots$ předpisem

$$B_k := \left\{ x \in X | g_{n_k}(x) < \frac{1}{k} \right\}$$

a nechť $B := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k$. Pak $\mu(B^c) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k^c\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k^c) < \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Buď $\delta > 0$ a $k \in \mathbb{N}$ takové číslo, že $\delta > \frac{1}{k}$. Pak

$$\forall x \in B\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_k : |f_n(x) - f(x)| \leq g_{n_k}(x) < \frac{1}{k} < \delta,$$

a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na B. $\square$