Příklad (Teoretický příklad 6)
Pro dané $k \in \mathbb{N}$ spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\right).$$

Řešení
Upravíme odečtením zlomků:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1^k+2^k+\ldots+n^k\right)\cdot(k+1)-n^{k+1}}{n^k\cdot(k+1)}\right).$$

Nyní vidíme, že bychom si chtěli použít $x_n=\left(1^k+2^k+\ldots+n^k\right)\cdot(k+1)-n^{k+1}$ a $y_n=n^k\cdot(k+1)$ a použít Stolzovu větu. Na x_n nejsou kladeny žádné podmínky, y_n musí být rostoucí (to je, protože $k\geq 1$) a limita y_n jde k $+\infty$ (jelikož n^k jde zjevně k nekonečnu a $k+1$ je konstanta).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\cdot(k+1)-n^{k+1}-0+(n-1)^{k+1}}{n^k\cdot(k+1)-(n-1)^k\cdot(k+1)}\overset{\text{Binom. věta}}{=}$$

$$\overset{\text{Binom. věta}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\cdot(k+1)-n^{k+1}+n^{k+1}-(k+1)\cdot n^k+\binom{k+1}{2}n^{k-1}+P(n)}{n^k\cdot(k+1)-n^k\cdot(k+1)+k\cdot n^{k-1}\cdot(k+1)+Q(n)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{k+1}{2}n^{k-1}+P(n)}{k\cdot n^{k-1}\cdot(k+1)+Q(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(k+1)\cdot k}{2}+\frac{P(n)}{n^{k-1}}}{k\cdot(k+1)-\frac{Q(n)}{n^{k-1}}}\overset{\text{AL}}{=}\frac{\frac{(k+1)\cdot k}{2}+0}{(k+1)\cdot k+0}=\frac{1}{2}$$

Kde $P(n)$ a $Q(n)$ jsou polynomy stupně $k-2$. Tedy podle Stolzovy věty je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{2}.$$