Příklad (11.1)
Víme, že B, C, D jsou báze prostoru $\mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je lineární zobrazení a $x \in \mathbb{R}^2$. Dále víme, že platí

$$[x]_B = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}, \qquad [f]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad [f]_C^D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Určete $[x]_D$ (v závislosti na x_1 a x_2).

Řešení
Ze skládání lineárních funkcí víme, že $[f]_C^B = [f]_C^D \cdot [id]_D^B$, a z definice matice přechodu, že $[x]_D = [id]_D^B \cdot [x]_B$. Tedy nám stačí najít $[id]_D^B$, tedy najít a, b, c, d tak, že

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ -a+5c & -b+5d \end{pmatrix},$$

$$2 = a + 3c, \qquad 3 = b + 3d, \qquad 3 = -a + 5c, \qquad 1 = -b + 5d.$$

Vyřešíme SLR[a] a získáme $c = \frac{5}{8}$, $a = \frac{1}{8}$, $d = \frac{1}{2}$ a $b = \frac{3}{2}$. Nyní už můžeme vyjádřit $[x]_D$:

$$[x]_D = [id]_B^D \cdot [x]_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1x_1}{8} + \frac{3x_2}{2} \\ \frac{5x_1}{8} + \frac{1x_2}{2} \end{pmatrix}.$$

[a] Nebo najdeme inverzní matici k $[f]_C^D$, čímž můžeme použít $[x]_D = \left([f]_C^D\right)^{-1} \cdot [f]_C^B \cdot [x]_B$, což můžeme bez dalšího počítání použít např. v Matlabu.

Příklad (11.2)
Nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení mezi konečně generovanými prostory nad tělesem $\mathbb{T}$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$, $U \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících implikací (obecně) platí:

- Je-li $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ lineárně nezávislá posloupnost ve $\mathbf{V}$, pak je $(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k))$ lineárně nezávislá posloupnost v $\mathbf{W}$.
- Je-li $(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k))$ lineárně nezávislá posloupnost v $\mathbf{W}$, pak je $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ lineárně nezávislá posloupnost ve $\mathbf{V}$.
- Je-li U podprostorem prostoru $\mathbf{V}$, pak je $f(U) = \{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in U\}$ podprostorem prostoru $\mathbf{W}$.
- Je-li $f(U)$ podprostorem prostoru $\mathbf{W}$, pak je U podprostorem prostoru $\mathbf{V}$.

Řešení

- Obecně neplatí, např. každá projekce (jež není bijekcí, tedy např. projekce z roviny do přímky) sníží dimenzi, tedy zobrazí bázi na závislou posloupnost vektorů.
- Obecně platí, neboť pokud by vzor nebyl lineárně nezávislý, pak lze jeden z jeho vektorů vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních, ale z linearity f pak lze takto vyjádřit i obraz tohoto vektoru za pomoci obrazů ostatních vektorů, tedy jsme dokázali obměnu implikace $\implies$ implikace platí.
- Obecně platí, jelikož $f(U)$ je podmnožinou W a je uzavřené na součet a součin z linearity f, neboť $f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ a $t \cdot f(\mathbf{x}) = f(t \cdot \mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$, $t \in \mathbb{T}$ (a z toho, že U je podprostor víme, že $\mathbf{x} + \mathbf{y}, t \cdot \mathbf{x} \in U$).
- Obecně neplatí, jelikož když vezmeme libovolnou projekci jako v prvním bodě, odstraněním libovolného 1 bodu ve vzoru se obraz nezmění, protože každý bod obrazu má jistě více vzorů.

Příklad (11.*)
Nechť $\mathbf{V}$ je konečně generovaný prostor a $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ je báze $\mathbf{V}$. Nechť $f_1, \ldots, f_n$ jsou lineární formy určené vztahy $f_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$ pro každé $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ukažte, že $B^d = (f_1, \ldots, f_n)$ tvoří bázi $\mathbf{V}^d$, je to tzv. duální báze k B. Dále dokažte, že pro libovolnou formu $f \in \mathbf{V}^d$ platí $[f]^B = ([f]_{B^d})^T$.

Dále nechť $g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení mezi konečně generovanými prostory, B je báze $\mathbf{V}$ a C je báze $\mathbf{W}$. Zobrazení $g^d : W^d \to V^d$ definujeme vztahem $g^d(f) = fg$ (pro každé $f \in W^d$). Dokažte, že g^d je lineární zobrazení $\mathbf{W}^d \to \mathbf{V}^d$ a platí

$$\left[g^d\right]_{B^d}^{C^d} = \left([g]_C^B\right)^T$$

Důkaz (Duální báze)
Pokud se nepletu, $\mathbf{V}^d$ jsme nikde nepotkali, tedy ověřujeme jen, že B^d je LN. Můžeme si všimnout, že z definice je $[f_i]^B = (\underbrace{0, 0, 0,}_{i-1} 1, \underbrace{0, 0, 0, 0}_{\dim(\mathbf{V})-i})$ (tj. že jednička je na i-té pozici), jelikož B je LN, tedy vektor $\mathbf{v}_i$ lze vyjádřit právě jedním (tímto) způsobem jako lineární kombinace ostatních, a jelikož lineární zobrazení (v závislosti na nějaké bázi) lze vyjádřit jako matici, a toto je tudíž jediná matice, která vyhovuje definici.

$[f_i]^B$ jsou tedy transponované vektory kanonické báze, tudíž jsou lineárně nezávislé[a]. $f \to [f]^B$ je jistě lineární zobrazení, tedy vzor f_i LN posloupnosti $[f_i]^B$ v tomto zobrazení bude také lineárně nezávislý (podle druhého bodu předchozího příkladu). Tedy je bází.

f je lineární zobrazení z $\mathbf{V}$ do $\mathbb{R}$, tedy $[f]^B$ lze vyjádřit nějakou maticí ('vektorem') $\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\dim(\mathbf{V})}\right) = \alpha_1 \cdot [f_1]^B + \alpha_2 \cdot [f_2]^B + \ldots + \alpha_{\dim(\mathbf{V})} \cdot \left[f_{\dim(\mathbf{V})}\right]^B$. A jelikož je zobrazení $f \to [f]^B$ lineární, lze f zapsat jako $\alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2 + \ldots + \alpha_{\dim(\mathbf{V})} \cdot f_{\dim(\mathbf{V})}$, jinými 'slovy' $[f]_{B^d} = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\dim(\mathbf{V})}\right)^T$. A jelikož je transpozice sama k sobě inverzní operací, tak jsme dokázali $[f]^B = ([f]_{B^d})^T$. □

[a] Protože můžu nejdříve transponovat vektory a potom spočítat výraz, nebo nejdříve spočítat výraz a výsledek pak transponovat a dostanu to samé, tedy transpozice je lineární zobrazení.

Důkaz (Duální zobrazení)
Přenásobme rovnici, kterou chceme dokázat, libovolným $[f]_{C^d}$ zprava (tj. aplikovat obě strany jako zobrazení na vektor $[f]_{C^d}$) a dostaneme

$$\left[g^d\right]_{B^d}^{C^d} \cdot [f]_{C^d} = \left([g]_C^B\right)^T \cdot [f]_{C^d}.$$

Z první části již víme, že $[f]_{C^d} = \left([f]^C\right)^T$ (transponování je inverzní samo k sobě), tj. předchozí rovnice se dá přepsat jako

$$\left[g^d\right]_{B^d}^{C^d} \cdot [f]_{C^d} = \left([g]_C^B\right)^T \cdot \left([f]^C\right)^T.$$

Také víme, že $X \cdot Y = \left(X^T \cdot Y^T\right)^T$, tudíž můžeme pokračovat v přepisování na tvar

$$\left[g^d\right]_{B^d}^{C^d} \cdot [f]_{C^d} = \left([f]^C \cdot [g]_C^B\right)^T.$$

Vpravo je nyní skládání lineárních zobrazení, vlevo aplikace lineárního zobrazení na vektor, tedy máme

$$\left[g^d(f)\right]_{B^d} = \left([fg]^B\right)^T.$$

Ale toto jsou vyjádření vektorů z $\mathbf{V}^d$, tedy můžeme aplikovat znovu první část příkladu a získat tak

$$\left[g^d(f)\right]_{B^d} = [fg]_{B^d},$$

což už vyplývá z definice $g^d(f) = fg$. Jestliže ale 2 zobrazení dávají schodný obraz pro libovolný vzor, pak jsou totožná, tedy jsme dokázali rovnost ze zadání.

$\square$