

### *Příklad (řeka)*

Je dáno povodí řeky ve formě orientovaného stromu, v němž každý vrchol je buď soutok nebo molo (či současně obojí). Pro každý úsek mezi sousedícími vrcholy je dána jejich vzdálenost (malé přirozené číslo). Je dáno malé přirozené číslo  $d$ . Otázka je, zda v povodí existují dvě mola, kde jedno je dosažitelné po proudu od druhého a jejichž vzdálenost je přesně  $d$ . Popište algoritmus, který na danou otázku odpoví.

┌

### *Řešení*

V každém vrcholu si pro každou hodnotu  $1, 2, \dots, d - 1$  budeme uchovávat, zda se do tohoto vrcholu umíme dostat po proudu z nějakého mola na tuto vzdálenost. Zároveň si budeme uchovávat seznam vrcholů, do kterých už nevede hrana (kterou jsme ještě nezkoumali, tj. pokud jsem to správně pochopil, na začátku listy). A u každého vrcholu  $\text{deg}_{in}$  (počet neprozkoumaných hran vedoucích do tohoto vrcholu), abychom uměli aktualizovat předchozí seznam. (Graf budeme uchovávat jako seznamy sousedů pro každý vrchol.)

Náš algoritmus následně vezme vrchol ze seznamu a aktualizuje sousední vrcholy po proudu (tj. pokud jsem to správně pochopil otec řešeného vrcholu). Tj. jestliže se do tohoto vrcholu dá dostat z mola po proudu ve vzdálenosti  $l$  a má souseda ve vzdálenosti  $v$  po proudu, pak se dá dostat do souseda ze vzdálenosti  $l + v$ . Pokud  $l + v = d$ , pak jsme vyhráli. Pokud  $l + v > d$ , tak (předpokládám, že délka řeky je nezáporná) se z daného mola touto cestou už nedostaneme na vzdálenost  $d$ . Nakonec všechny sousedy, kteří po aktualizaci mají  $\text{deg}_{in} = 0$ , přidáme do seznamu a řešený vrchol z něho odstraníme.

Nyní si všimneme 2 věcí: První – náš seznam bude prázdný až ve chvíli, kdy vyřešíme všechny vrcholy. To můžeme nahlédnout jednoduše, pokud zvolíme libovolný vrchol a půjdeme proti proudu, nemůžeme jít do nekonečna, protože ve stromu nejsou cykly.

Druhá – vrcholy ze seznamu už mají uzavřenou dosažitelnost (tj. všechna mola proti proudu od tohoto vrcholu už jsme prozkoumali, a pokud se z nich lze dostat do tohoto vrcholu na méně než  $d$  kroků, tak je vyřešíme). U vrcholů, které jsou v seznamu na začátku, je to pravda. Jakmile vrchol má  $\text{deg}_{in} = 0$ , tak už jsme prozkoumali všechny vrcholy proti proudu. Ty už v seznamu byly, takže to o nich platilo. Tudíž jsme prozkoumali i všechna mola proti proudu od tohoto.

Pro výpočet časové a prostorové složitosti označme  $n$  počet vrcholů. Hran je pak  $n - 1 = O(n)$ . Každý vrchol zpracováváme jednou a přes každou hranu aktualizujeme jednou  $d$  prvků, tedy časová složitost je  $O(n + n \cdot d) = O(n \cdot d)$ . Pamatovat si potřebujeme jen seznam vrcholů a v každém vrcholu  $d$  vzdáleností k molům, tedy prostorová složitost je také  $O(n + n \cdot d) = O(n \cdot d)$ .

└