Organizační úvod

Přednáška bude asi touto formou celý semestr.

Pozor
Bude důležitá zpětná vazba (přímo přes Zoom, kde bude snad nějaký cvičící, nebo přes diskuzi k předmětu v Moodle, či kvízy (od 5. 10.)).

Poznámka
Číst mail a popis předmětu na webu.

Poznámka (Organizace)
2krát týdně přednáška na Zoomu. K zápočtu jsou třeba 2 věci:

Průběžná práce (nejlépe přečíst skripta už před přednáškou, na dotazy bude přihlíženo) = kvízy (od 5. 10., 3 / 4 otázky a,b,c, za jeden kvíz až 2 body do bodovacího systému) + domácí úkoly (zadávány se zpožděním = další týden, odevzdává se ve středu, za jeden úkol až 8 bodů), počítá se 10 nejlepších kvíz + úkol (minimum pro zápočet je 60%).

Aktivní účast alespoň na 9 cvičeních. Je to záměrně trochu neurčité (optimálně připojit se na cvičení a počítat příklady a interagovat s cvičícím (v menších skupinkách)), dá se i bez toho (např. méně interaktivně) podle domluvy se cvičícími.

Odevzdávání bude elektronické, většinou v Moodle. Pro skenování přes mobil používat aplikace jako Adobe scan / Genius scan. Nepoužívejme aplikace na automatické výpočty (1. je potřeba i postup, 2. děláme to pro sebe), ale můžeme je používat pro experimenty, ověření nebo představu.

Sociální stránka, spolupracujme (viz cvičení, klidně si na cvičeních můžete skupinky domluvit), ale úkol zkusme vypracovat každý sám.

Zkouška je standardně nějakých 5 termínů + jeden záchranný v září?, kdy bude 3hodinový test, požadavky ke zkoušce budou na webu. Midtermy (konec listopadu a půlka prosince) budou takové menší zkoušky, které se možná budou počítat ke zkoušce (minimálně si to můžeme vyzkoušet nanečisto).

Poznámka (Materiály)

- Skripta (Barto & Tůma, na webu), kapitola 1-7
- Cvičení, přímočaré úlohy (nejen mechanicky řešit)
- Přednášky nejsou směrodatný studijní materiál!

Pozor
Přednášky nejsou směrodatný studijní materiál! (Protože jejich cílem je pomoci nám látku pochopit, ne přečíst skripta. Navíc matematiku musí pochopit každý sám (doporučit přečíst text J. Hrnčíře`https://msekce.karlin.mff.cuni.cz/~smid/pmwiki/uploads/Main/vzkazHrncir.pdf`).)

1 Opakování (?)

- Analytická geometrie
- Komplexní čísla
- Zobrazení (hlavně terminologie)

Poznámka (Co je lineární algebra)
Abstraktní studium rovných útvarů a hezkých zobrazení mezi nimi.

Rovný útvar: Přímka, rovina, 3D prostor $\mathbb{R}^3 \equiv \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Hezkých zobrazení:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \tag{1}$$
$$(x, y) \longrightarrow \text{otočení } (x, y) \text{ o } \frac{\pi}{6} \tag{2}$$

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Abstraktní: Časem dojdeme k tomu, že nás zajímají pouze vlastnosti.

Poznámka (Proč lineární algebra)

- Často se vyskytuje na různých místech matematiky
- Geometrie
- Matematická analýza (na limitním okolí bodu jsou funkce většinou také rovné)
- Kvantová teorie (a celkově fyzika)
- Trisekce úhlu
- Z historie – nalezení planetky Ceres

- Moderní aplikace – komprese dat (JPEG, …), kódování a šifrování (samoopravné kódy, RSA)

1.1 Analytická geometrie

Poznámka (Názvosloví)
- Body vs. vektory: bod hranatou závorkou, vektor (jako rozdíl bodů) kulatou $\leftarrow$ je to skoro to samé, budeme uvažovat jen vektory (body jsou dané polohovými vektory)
- Operace s vektory: sčítání (sečteme po složkách), násobení skalárem (vynásobíme po složkách).
- Souřadnicové systémy (často nejsou kartézské)

Poznámka (Jak zadat přímku v $\mathbb{R}^2$)
- Bod a směrový vektor (parametricky)
- 2 různé body
- Rovnicí přímky: $L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\right\} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$ (implicitně)

Poznámka (Jak zadat rovinu v $\mathbb{R}^3$)
- Bod a 2 vektory s jiným směrem (parametricky)
- 3 různé body
- přímka a bod, který na ní neleží
- Rovnicí roviny: $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = da, b, c, d \in \mathbb{R}$ (implicitně)

Poznámka (Jak zadat rovinu v $\mathbb{R}^3$)
- Bod a směrový vektor
- 2 různé body
- 2 roviny (soustava 2 lineárních rovnic)

1.2 Zobrazení

$\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ množiny
$f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y} \; x \in \mathbb{X} \longrightarrow |f| \longrightarrow f(x) \in \mathbb{Y}$

Například

$$\mathbb{X} = \{\text{Různé symboly}\}, \mathbb{Y} = \{A, B, \ldots, Z\}$$

- Zadání pomocí definice: $f(x) :=$ První písmeno tvaru$x$
- Zadání pomocí tabulky: tabulka (jeden řádek symboly (x), druhý písmena $(f(x))$)
- Zadání pomocí grafu: Graf (jedna osa symboly, druhá písmena)

Definice 1.1 (Rovnost zobrazení)

$$f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y} = g : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{Y} \Leftrightarrow$$

Definice 1.2 (Prosté (= injektivní))

$$\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y : f(x) \neq f(y)$$

Definice 1.3 (Na (= surjektivní))

$$\forall y \in \mathbb{Y} \exists x \in \mathbb{X} : f(x) = y$$

Definice 1.4 (Vzájemně jednoznačné (= bijektivní))

Prosté a na.

Definice 1.5 (Skládání)

$$\mathbb{X} \overrightarrow{f} \mathbb{Y} \overrightarrow{g} : \mathbb{X} \overrightarrow{g \circ f} \mathbb{Z}, g \circ f(x) = g(f(x))$$

Dále obraz zobrazení je množina NA kterou se zobrazuje, obraz množiny v zobrazení je množina, na kterou zobrazí zobrazení prvky dané množiny. Vzor obdobně (z které zobrazuje,).

Definice 1.6 (Inverze)

$f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ má inverzi $g : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{Y}$, pokud $f \circ g = id_Y$ (identita na Y)

Věta 1.1

f má inverzi, právě když je bijektivní

Důkaz

Nechť má inverzi, když není na, tak v $\mathbb{Y}$přebývají prvky, které se nikam nezobrazují, když není prosté, tak chybí (TODO zlepšit popis).

Nechť je bijektivní, pak zřejmě má inverzi. □

2 Soustavy lineárních rovnic

6 motivačních příkladů v části 2.1 skript

Definice 2.1 (lineární rovnice)

Lineární rovnice o n neznámých s reálnými koeficienty je rovnice tvaru $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, kde $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty a $x_1, \ldots, x_n$ jsou neznámé.

Pozor (Jak vypadá definice)

- Psát celé věty!
- Vysvětlit použité symboly!
- Nezahlcovat definice balastem!

Definice 2.2 (Soustava lineárních rovnic (SLR))

Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých (s reálnými koeficienty) je soustava tvaru:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots + \ldots + \ldots \cdot \ldots &= \ldots a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \qquad = b_m, \end{aligned}$$

kde každý řádek je ve smyslu předchozí definice.

Definice 2.3 (Aritmetické vektory (nad $\mathbb{R}$))

Aritmetickým vektorem rozumíme uspořádanou n-tici reálných čísel. Zapisujeme ho jako:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Definice 2.4 (Množina řešení SLR)

Množina řešení SLR ve smyslu definice výše je množina:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_i 1 x_1 + \ldots + a_{in} x_n = b_i \forall 1 \leq i \leq m \right\}$$

Definice 2.5 (Operace s (aritm.) vektory (n fixní))

$v, w \in \mathbb{R}^n \longrightarrow v + w$ sčítání po složkách
$t \in \mathbb{R} \longrightarrow t \cdot w$ násobení po složkách
$-v := (-1) \cdot v$
$v - w := v + (-w)$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Definice 2.6 (Elementární úpravy SLR)

Elementární úpravy dané SLR jsou:

1. Prohození pořadí 2 rovnic
2. Vynásobíme jednu rovnici číslem $t \in \mathbb{R} - \{0\}$
3. Přičteme t-násobek jedné rovnice ($t \in \mathbb{R}$) k jiné rovnici.

Tvrzení 2.1

Elementární úpravy jsou ekvivalentními úpravami.

Důkaz
Skripta □

Poznámka
1. lze nahradit kombinací druhých dvou.

Pozor
V přednášce jsou tvrzení (věty, lemmata, ...). Typicky mají strukturu: Pokud platí ...předpoklad..., pak platí ...závěr....

Definice 2.7 (Gaussova eliminace)

Algoritmus na úpravu matice do odstupňovaného tvaru za pomoci elementárních úprav.

Definice 2.8 (Pivot)

První nenulový prvek v řádku v odstupňovaném tvaru.

Pokud je pivot až ve „vektoru“?, SLR nemá řešení.

Počet pivotů je počet bázových proměnných, počet neznámých - počet pivotů je počet volných proměnných (neboli parametrů).

Definice 2.9 (Odstupňovaný tvar matice)

Matice $m \times n$ je v odstupňovaném tvaru, jestliže

$$\exists r \in \mathbb{N}, r < m, \text{ že řádky } r+1, \ldots, m \text{ jsou nulové a}$$

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_r, \text{ kde } k_i \text{ je index prvního nenulového prvku v } i\text{-tém řádku.}$$

Definice 2.10 (Hodnost matice)

Buď $A = (a_{ij})_{m \times n}$ matice. Potom $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{r}(A)$ je tzv. hodnost matice, tedy počet nenulových řádků v odstupňovaném tvaru matice.

Pozor
Počet nenulových řádků v odstupňovaném tvaru nezáleží na volbě algoritmu, kterým jsme se do OT dostali.

Poznámka
$\operatorname{rank}(A) \leq m$ a $\operatorname{rank}(A) \leq n$

Poznámka (Geometrický význam)
Řádky popisují jednotlivé rovnice, netriviální rovnice má za množinu řešení nadrovinu v $\mathbb{R}^n$, řádky popisují proměnné, významově jsou lineárními kombinacemi.