1 Úvod

Definice 1.1 (Matice)

Reálná matice typu $m \times n$ je obdélníkové schéma (tabulka) reálných čísel. Prvek na pozici $(i,\ j)$ matice A značíme a_{ij} nebo A_{ij}. A i-tý řádek matice A značíme A_{i*} a j-tý řádek matice A značíme A_{*j}.

Definice 1.2 (Vektor)

Reálný n-rozměrný aritmetický sloupcový vektor (standardní) je matice typu $n \times 1$ a řádkový $1 \times n$.

Definice 1.3 (Soustava lineárních rovnic)

Lineární = neznámé jsou v 1. mocnině.
Soustava = více rovnic.
Rovnice výraz z neznámých (bez absolutního členu) a koeficientů rovný konstantě.

Definice 1.4 (Řešení)

Řešením rozumíme každý vektor hodnot neznámých vyhovující všem rovnicím.

Definice 1.5 (Matice soustavy)

Matice soustavy je matice koeficientů u neznámých.
Rozšířená matice soustavy je matice soustavy „následována“ vektorem hodnot konstant jednotlivých rovnic.

Poznámka (Geometrický význam)
Průsečík n „přímek“ v n rozměrném prostoru

Definice 1.6 (Elementární řádkové úpravy)

- Vynásobení řádku nenulovým reálným číslem.
- Přičtení jednoho řádku k druhému.
- Výměna dvou řádků. (Není elementární, protože jde vytvořit pomocí prvních dvou.)

Tvrzení 1.1

Elementární řádkové operace zachovávají množinu řešení soustavy.

Důkaz
Elementární úpravou neztratíme žádné řešení, protože pokud je x řešením před úpravou, je i po úpravě. A naopak ho lze invertovat, takže žádné řešení ani nepřibude. □

Definice 1.7 (Odsupňovaný tvar matice REF)

Matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je v řádkově odstupňovaném tvaru, pokud existuje r takové, že platí: řádky $1, \dots, r$ (tzv. bazické) jsou nenulové (obsahují alespoň 1 nenulový prvek), řádky $r+1, \dots, m$ jsou nulové, a navíc označíme-li jako $p_i = minj; a_{ij} \neq 0$ (tzv. pivot) pozici prvního nenulového prvku v i-tém řádku, tak platí: $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$.

Například
Matice, které jsou, a matice, které nejsou.

Definice 1.8 (Hodnost matice)

Počet nenulových řádků po převodu do odstupňovaného tvaru (nebo libovolného s maximálním počtem nulových řádků) značený $\text{rank}(A)$.

Dále jsme dělali Gaussovu eliminaci (nemá řešení ($\text{rank}(A) \neq \text{rank}(A|b)$), má 1 řešení ($\text{rank}(A|b) = n$), má mnoho řešení (pak bazické proměnné vyjádřím pomocí nebazických)).

Definice 1.9 (Redukovaný odstupňovaný tvar matice RREF)

Matice v odstupňovaném tvaru je v redukovaném OT, jestliže $\forall 0 \leq i \leq r, i \in \mathbb{N} : a_{ip_i} = 1 \wedge \forall i > x \in \mathbb{R} a_{xp_i} = 0$.

Poznámka
Tento tvar je jednoznačný.

Definice 1.10 (Rovnost matic)

Dvě matice se rovnají, pokud mají stejné rozměry a stejné prvky na stejných souřadnicích.

Definice 1.11 (Součet matic)

Pro součet musí mít matice stejné rozměry a poté sčítáme po složkách.

Poznámka (Vlastnosti)
Komutativita (pokud jsou prvky matice komutativní).

Definice 1.12 (Násobení skalárem)

Násobíme po složkách.

Definice 1.13 (Součin matic)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times o}$ jsou matice. Potom matice $C \in \mathbb{R}^{m\times o}$ definovaná jako $c_{ij} = a_{i*} \cdot b_{*j}$ je jejich součinem.

Poznámka (Vlastnosti)
Komutativita neplatí.

Asociativita, distributivita zleva a distributivita z prava platí. Stejně tak „asociativita" násobení skalárem.

Definice 1.14 (Transpozice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Potom $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ definována jako $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ je transponovaná matice A.

Poznámka (Vlastnosti)
Je sama sobě inverzním zobrazením. Distributivita pro všechny operace (pozor u násobení je antisymetrická).

$$(A^T)^T = A$$
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$

Definice 1.15 (Symetrická a antisymetrická matice)

Matice A je symetrická, pokud $A = A^T$, a antisymetrická $A = -A^T$.

Poznámka (Vlastnosti)
Symetrické matice jsou uzavřené na součet, ale na součin ne.

Definice 1.16 (Jednotkový vektor)

e_j definovaný jako $(e_j)_j = 1$ a $\forall i \neq j$ $(e_j)_i = 0$ je j-tý jednotkový vektor.

Poznámka (Vlastnosti)

$$Ae_i = A_{*i}$$
$$e_i^T = A_{i*}$$

Definice 1.17 (Skalární součin vektorů)

$u \cdot v = u^T v$ je skalární součin vektorů u a v.

uv^T je ? součin vektorů u a v

Poznámka (Zápis SLR jako maticové násovení)
SLR lze zapsat jako $Ax = b$.

Poznámka (Matice a lineární zobrazení $x \to Ax$)
Je užitečné se na matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jako na určité zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ definované předpisem $x \to Ax$.

Na řešení SLR se lze pak dívat jako na vzor b v zobrazení dané A.

Zároveň na maticový součin se lze dívat na skládání $(BA)x = B(Ax)$. (Základní motivace, aby se součin definoval tak, jak je.)

TODO?

Definice 1.18 (Regulární matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. A je regulární,
2. $\text{RREF}(A) = \mathcal{I}_n$,
3. $\text{rank}(A) = n$
4. pro nějaké $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ jediné řešení,
5. pro všechna $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ jediné řešení.

Matice A nesplňující tvrzení je singulární.

Tvrzení 1.2 (Uzavřenost na součin)

Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární matice. Pak AB je také regulární.

Důkaz
Buď x řešení soustavy $ABx = 0$. Chceme ukázat, že x musí být nulový vektor. Z předchozího tvrzení $\forall y Ay = 0$ má jediné řešení. Zároveň $\forall y Bx = y$ má jediné řešení. $\square$

Tvrzení 1.3

Je-li alespoň jedna z matic $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak AB je také singulární.

Důkaz
Je-li matice B singulární, pak $Bx = 0$ pro nějaké $x \neq 0$. Z toho ale plyne $(AB)x = A(Bx) = A(0) = 0$, tedy i AB je singulární.

Nyní předpokládejme, že matice B je regulární, tedy matice A singulární a existuje $y \neq 0$ takové, že $Ay = 0$. Z regularity matice B existuje $x \neq 0$ takové, že $Bx = y$. Celkem dostáváme $(AB)x = A(Bx) = Ay = 0$, tedy AB je singulární. $\square$

Definice 1.19 (Matice elementárních úprav)

Elementární úpravy jdou reprezentovat násobením tzv. elementární maticí zleva: $E_i(\alpha)$ jako násobení řádku i číslem α je jednotková matice s α místo i-té jedničky. E_{ij} jako prohození řádků i, j je jednotková matice s prohozeným i-tým a j-tým řádkem, ...

Tyto matice jsou regulární.

Věta 1.4

Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pak $\mathrm{RREF}(A) = QA$ pro nějakou regulární matici $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

Důkaz
$\mathrm{RREF}(A)$ získáme aplikací konečně mnoha elementárních řádkových úprav a součin regulárních matic je regulární matice. $\square$

Tvrzení 1.5

Každá regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dá vyjádřit jako součin konečně mnoha elementárních matic.

Důkaz
Elementární úpravy lze invertovat elementárními úpravami, tedy i inverze úprav regulární matice na $\mathcal{I}$ je regulární (a $\mathcal{I}$ je také regulární). $\square$

Definice 1.20 (Inverzní matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pak A^{-1} je inverzní maticí k A, pokud splňuje $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathcal{I}_n$.

Například

$\mathcal{I}_n^{-1} = \mathcal{I}_n$, 0_n^{-1} neexistuje.

Věta 1.6 (O existenci inverzní matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Je-li A regulární, pak k ní existuje inverzní matice a je určená jednoznačně. Naopak, existuje-li A^{-1}, pak A je regulární.

Důkaz

Existence: A je regulární, tedy soustava $Ax = e_j$ má řešení x_j pro každé j. Ukážeme, že $A^{-1} = (x_1|x_2|\dots|x_n)$ je hledaná inverze. (Porovnáním po sloupcích: $(AA^{-1})_{*j} = Ax_j = e_j = \mathcal{I}_{*j}$. Komutativní výraz dokážeme $A(A^{-1}A - \mathcal{I}) = AA^{-1}A - A = \mathcal{I}A - A = 0$, $A^{-1}A - \mathcal{I}$ je vektor, který je jednoznačně určen tím, že A je regulární.)

Jednoznačnost. Nechť pro nějakou matici B platí $AB = BA = \mathcal{I}$. Pak

$$B = B\mathcal{I} = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = \mathcal{I}A^{-1} - A^{-1}.$$

Naopak. Nechť pro A existuje inverzní matice. Buď x řešení soustavy $Ax = 0$. Pak

$$x = \mathcal{I}x = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 = 0,$$

tedy A je regulární. □

Tvrzení 1.7 (Vlastnosti inverzní matice)

Je-li A regulární, pak A^T je regulární.

Důkaz

Je-li A regulární, pak existuje inverze a platí $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathcal{I}_n$. Po transponování všech stran dostaneme

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = \mathcal{I}_n^T,$$

neboli

$$(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = \mathcal{I}_n.$$

Matice A^T má inverzi a je tudíž regulární. (Navíc $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, občas se značí A^{-T}).

□

Věta 1.8 (Jedna rovnost stačí)

Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Je-li $BA = I_n$, pak obě matice A, B jsou regulární a navzájem k sobě inverzní, to jest $B = A^{-1}$ a $A = B^{-1}$.

Důkaz

Regularita vyplývá z dřívějšího tvrzení vzhledem k regularitě $\mathcal{I}_n$. Tudíž existují inverze A^{-1}, B^{-1}. Odvodíme

$$B = B\mathcal{I}_n = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = \mathcal{I}_n A^{-1} = A^{-1}.$$

Úplně stejně druhá rovnost. □

Poznámka (Výpočet inverzní matice)

Důkaz věty ukázal návod: j-tý sloupec A^{-1} je řešením soustavy $Ax = e_j$.

Věta 1.9 (Výpočet inverzní matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Je-li* $\mathrm{RREF}(A|\mathcal{I}_n) = (I_n|B)$, *pak* $B = A^{-1}$, *jinak je* A *singulární.*

Důkaz

Je-li $\mathrm{RREF}(A|\mathcal{I}_n) = (\mathcal{I}_n|B)$, potom existuje regulární Q tak, že $(\mathcal{I}_n|B) = Q(A|\mathcal{I}_n)$. Po roztržení na dvě části $\mathcal{I}_n = QA$ tj. $Q = A^{-1}$ a $B = Q\mathcal{I}_n = Q = A^{-1}$.

Pokud není toho tvaru, pak z definice A není regulární. □

Tvrzení 1.10 (Vlastnosti inverzní matice)

Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *regulární. Pak:*

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
3. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1} \ \ldots \ (\alpha \neq 0)$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Důkaz

1., 2. triviální, 3. vynásobím $A\alpha$, 4. přezávorkuji. □

Poznámka

Pro $(A+B)^{-1}$ žádný jednoduchý vzoreček není.

Poznámka (Inverzní matice a soustava rovnic)

Buď Q regulární. Pak soustava $Ax = b$ je ekvivalentní s (QA)x = (Qb).

Důkaz
Žádné řešení neztratíme, zpět se dostaneme přednásobením Q^{-1} zleva. □

Věta 1.11 (Soustava rovnic a inverzní matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulářní. Pak řešení soustavy $Ax = b$ je dáno vzorcem $A^{-1}b = x$.

Poznámka (Inverzní matice - geometrie)
Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární matice. Pro každé $y \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jedno $x \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Ax = y$, zobrazení je tedy bijekcí.

Poznámka
Skládání zobrazení nám může dát i vhled do toho, jak funguje inverze součinu matic.