

# 1 Úvod

## Definice 1.1 (Metrika, metrický prostor)

$M$  množina,  $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$  je metrika, pokud  $\forall x, y, z \in M$  platí:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$d(y, x) = d(x, y),$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Dvojice  $(M, d)$  se pak nazývá metrický prostor.

## Definice 1.2 (Norma a normovaný lineární prostor (NLP))

Ať  $\mathbf{V}$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , pak  $\|\cdot\| : \mathbf{V} \rightarrow [0, \infty)$  je norma, pokud  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o},$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{F} : \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Dvojice  $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$  se pak nazývá normovaný lineární prostor.

## Definice 1.3 (Otevřená a uzavřená koule)

Ať  $(\mathbb{M}, d)$  je MP,  $x \in \mathbb{M}$ ,  $r > 0$ . Pak otevřená koule o středu  $x$  a poloměru  $r$  je množina  $B(x, r) := \{y \in \mathbb{M}; d(x, y) < r\}$ . Uzavřená koule o středu  $x$  a poloměru  $r$  je množina  $\overline{B}(x, r) := \{y \in \mathbb{M}; d(x, y) \leq r\}$ .

## Věta 1.1

$(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$  je NLP pro  $d \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$ .

┌

*Důkaz*

1. krok:  $B = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\|_p \leq 1\}$  je konvexní množina (tj.  $\forall \lambda \in (0, 1) \forall x, y \in B : \lambda x + (1 - \lambda)y \in B$ ). Pro  $p = \infty$ :

$$\forall i \in [d] : |\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i| \leq \lambda|x_i| + (1 - \lambda)|y_i| \leq \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 = 1$$

Pro  $p < \infty$ :

$$\forall i \in [d] : |\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i|^p \leq \lambda|x_i|^p + (1 - \lambda)|y_i|^p,$$

protože  $t \mapsto t^p$  je konvexní funkce. Dopočítáním obou nerovností získáme, že je to opravdu konvexní množina.

2. krok: Pokud  $\|\cdot\|$  splňuje (i) + (ii) a  $B$  je konvexní, pak  $\|\cdot\|$  je norma. Zvolme  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ , BÚNO  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ , položme  $\tilde{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ ,  $\tilde{\mathbf{y}} := \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$ , tedy:

$$\frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} = \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \tilde{\mathbf{x}} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \tilde{\mathbf{y}} \in B \text{ (zlomky jsou } \lambda, 1 - \lambda).$$

$$\left\| \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \right\| \leq 1 \implies \frac{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

3.  $\|\cdot\|_p$  zřejmě splní (i) + (ii) a  $B$  je konvexní podle 1. kroku. Tedy  $\|\cdot\|_p$  je norma.  $\square$

*Poznámka (Značení)*

$$l_p^d := (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p).$$

### Definice 1.4 (Konvergence)

Ať  $(\mathbb{M}, d)$  je MP,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  posloupnost v  $\mathbb{M}$ ,  $x \in \mathbb{M}$ . Pak  $(x_n)$  konverguje k  $x$  pokud  $d(x_n, x)$  konverguje k 0. Píšeme  $x_n \rightarrow x$  nebo také  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

## 2 Otevřené a uzavřené množiny

### Definice 2.1 (Vnitřek, vnějšek, hranice)

Ať  $(\mathbb{M}, d)$  je MP.  $A \subseteq \mathbb{M}$ . Pak  $x_0 \in \mathbb{M}$  je vnitřní bod  $A \equiv \exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq A$ . Dále vnitřek (interior) množiny  $A$  je množina

$$\text{int}(A) = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je vnitřní bod } A\}.$$

Dále  $x_0 \in \mathbb{M}$  je vnější bod  $A \equiv \exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$ . Vnějšek (exterior) množiny  $A$  je množina

$$\text{ext}(A) = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je vnější bod } A\}.$$

Nakonec  $x_0 \in \mathbb{M}$  je hraniční bod  $A \equiv x \in \mathbb{M} \setminus (\text{int}(A) \cup \text{ext}(A))$ . Hranice množiny  $A$  je množina

$$\partial A = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je hraniční bod } A\}.$$

*Pozorování*

Zřejmě  $\text{int}(A) \subseteq A$ .

Zřejmě  $\text{ext}(A) = \text{int}(\mathbb{M} \setminus A) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$ .

## **Definice 2.2** (Otevřená a uzavřená množina)

Buď  $(\mathbb{M}, d)$  MP a  $A \subseteq \mathbb{M}$ . Pak  $A$  je otevřená  $\equiv A \cap \partial A = \emptyset$ .

Dále uzávěr množiny  $A$  je množina  $\overline{A} = A \cup \partial A$ . Množina  $A$  je poté uzavřená  $\equiv \partial A \subseteq A$ .

*Pozorování*

Zřejmě  $A$  je otevřená  $\Leftrightarrow A = \text{int}(A)$ .

Otevřená koule je otevřená množina.

## **Lemma 2.1**

Ať  $(\mathbb{M}, d)$  je MP,  $A \subseteq \mathbb{M}$ . Pak  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subseteq N \times A : x_n \rightarrow x$ . Zároveň následující podmínky jsou ekvivalentní:

$$a) A \text{ je uzavřená,} \quad b) A = \overline{A}, \quad \forall (x_n \in A) : x_n \rightarrow x \in \mathbb{M} \implies x \in A.$$

┌

*Důkaz*

$\implies$  : Ať  $x \in \overline{A}$ . Pokud  $x \in A$ , polož  $x_n = x$ . Pokud  $x \notin A$ , pak  $x \in \partial A$ , tedy  $\forall n \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ . Pak  $x_n \rightarrow x$  ( $0 \leq d(x_n, x) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ).

$\Leftarrow$  Ať  $(x_n)$  je posloupnost v  $A$ ,  $x_n \rightarrow x$ . Pokud  $x \in A$ , jsme hotovi. Pokud  $x \notin A$ , pak  $\forall \varepsilon > 0 \exists r_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in B(x, \varepsilon) \cap A$ . Tedy  $x \in \overline{A}$ .

$$a) \Leftrightarrow b) \quad A \text{ je uzavřená} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \partial A \subseteq A \Leftrightarrow A = A \cup \partial A = \overline{A}.$$

$$b) \implies c) \implies a) \quad A = \overline{A} \implies \forall (x_n) : x_n \rightarrow x \implies x \in A \quad \text{První část} \implies \partial A \subseteq A. \quad \square$$

## **Věta 2.2** (Základní vlastnosti otevřených množin)

Ať  $(\mathbb{M}, d)$  je MP. Pak

(i)  $\mathbb{M}$  a  $\emptyset$  jsou otevřené.

(ii) Sjednocení libovolně mnoha otevřených je otevřený.

(iii) Průnik konečně mnoha otevřených je otevřený.

┌

*Důkaz*

(i) Triviální. (ii)  $x \in \bigcup_i M_i$ , pak  $\exists j : x \in M_j$ . Potom  $M_j$  je otevřená, tedy existuje  $r > 0 : B(x, r) \subseteq M_j \subseteq \bigcup_i M_i$ . Tedy  $\bigcup_i M_i$  je otevřená. (iii)  $x \in \bigcap_i M_i$ , pak  $\forall i \exists r_i : B(x, r_i) \subseteq M_i$ . Polož  $r = \min_i r_i > 0$  (protože  $i$  je z konečné množiny, tedy existuje minimum a to je jistě jeden z těch poloměrů, tedy  $> 0$ ), pak  $B(x, r) \subseteq \bigcap_i M_i$ . Tedy  $\bigcap_i M_i$  je otevřená.  $\square$

└

### Věta 2.3 (Vztah otevřená a uzavřené množiny)

Ať  $(\mathbb{M}, d)$  je MP,  $A \subseteq M$ . Pak  $A$  je otevřená  $\Leftrightarrow \mathbb{M} \setminus A$  je uzavřená.

┌

*Důkaz*

$\Rightarrow$  : Zvol  $(x_n)$  posloupnost v  $\mathbb{M} \setminus A$ ,  $x_n \rightarrow x$ . Sporem. Nechť  $x \in A$ . Potom  $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$ , ale pak  $\exists n : x_n \in A$ .  $\nabla$ .

$\Rightarrow$  : Zvol  $x \in A$ . Protože  $\mathbb{M} \setminus A$  je uzavřená, tedy  $\partial(\mathbb{M} \setminus A) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$ ,  $x \notin \partial(\mathbb{M} \setminus A)$ , tedy  $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$  (to nelze) nebo  $B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{M} \setminus A) = \emptyset$ . Tedy  $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{M} \setminus A) = \emptyset$ , tj.  $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ , tedy  $A$  je otevřená.  $\square$

└

### Věta 2.4 (Základní vlastnosti uzavřených množin)

Ať  $(\mathbb{M}, d)$  je MP,  $A \subseteq \mathbb{M}$ . Pak

(i)  $\mathbb{M}$  a  $\emptyset$  jsou uzavřené.

(ii) Průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřený.

(iii) Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřené.

┌

*Důkaz*

Plyne z věty výše a de-Morganových pravidel.  $\square$

└

### Věta 2.5

Ať  $(\mathbb{M}, d)$  je MP,  $A \subseteq \mathbb{M}$ . Pak  $\text{int}(A) = \bigcup \{G \subseteq A \mid G \text{ otevřená}\}$ .  $\overline{A} = \bigcap \{F \supseteq A \mid F \text{ uzavřená}\}$ .

┌ *Důkaz*

$\subseteq$ :  $x \in \text{int}(A) \implies \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$ , stačí položit  $G = B(x, \varepsilon)$ .

$\supseteq$ : Ať  $G \subseteq A$  otevřená, pak  $G = \text{int}(G) \subseteq \text{int}(A)$ .

$\subseteq$ :  $x \in \overline{A}$ , pak  $\exists (x_n) \text{ v } A : x_n \rightarrow x$ . Zvol  $F \supseteq A$  uzavřená, pak  $x_n \rightarrow x \in F$  (z uzavřené se nedá vykonvergovat).

$\supseteq$ : Položme  $F = \overline{A} \supseteq A$ .

□

### 3 Spojitost v metrických prostorech

**Definice 3.1** (Spojítost v bodě, spojitost,  $k$ -Lipschitzovskost, Lipschitzovskost)

Ať  $(M, d), (N, e)$  jsou MP,  $f : M \rightarrow N$ ,  $a \in M$ . Potom  $f$  je spojitá v  $a \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : d(x, a) < \delta \implies e(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .

$f$  je spojitá na  $M \equiv \forall a \in M : f$  je spojitá v  $a$ .

$f$  je  $k$ -Lipschitzovská ( $k > 0$ )  $\equiv \forall x, y \in M : e(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ .

$f$  je Lipschitzovská  $\equiv \exists k > 0 : f$  je  $k$ -Lipschitzovská.

*Pozorování*

$f$  je  $k$ -Lipschitzovská  $\implies f$  je spojitá.

**Definice 3.2** (Značení)

Ať  $(M, d)$  je MP,  $A \subseteq M$ ,  $x \in M$ . Pak  $\text{dist}(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$ .

**Lemma 3.1**

Ať  $(M, d)$  je MP,  $A \subseteq M$ . Pak

$$(i) \forall x \in M : d(x, A) = d(x, \overline{A}),$$

$$(ii) \forall x \in M : d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A},$$

$$(iii) \text{dist}(\cdot, A) : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ je } 1\text{-Lipschitzovská.}$$

┌

*Důkaz*

(i)  $\geq$ : Jasně (infimum přes menší množinu).  $\leq$ : Pro  $n \in \mathbb{N}$  zvolme  $y_n \in \bar{A}$ :  $d(x, y_n) < \text{dist}(x, \bar{A}) + \frac{1}{n}$ . Zvolme dále  $x_n \in B(y_n, \frac{1}{n}) \cap A$ , pak  $\text{dist}(x, A) \leq d(x, x_n) \leq d(x, y_n) + d(y_n, x_n) < \text{dist}(x, \bar{A}) + \frac{1}{n}$ , celkem  $\forall n \in \mathbb{N} : \text{dist}(x, A) < \text{dist}(x, \bar{A}) + \frac{2}{n} \implies \text{dist}(x, A) \leq \text{dist}(x, \bar{A})$ .

(ii): BÚNO  $A$  je uzavřená (jinak podle (i)).  $\implies$  Jasně (do inf dosadíme  $x$ ).  $\implies \forall n \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$  protože  $d(x, A) = 0$ . Pak ale  $x_n \rightarrow x$ , tedy  $x \in A$  z uzavřenosti.

(iii): Zvolme  $x, y \in \mathbb{M}$ . BÚNO  $d(x, A) \geq d(y, A)$ . Fixujeme  $n \in \mathbb{N}$ . Zvolme  $y_n \in A$  :  $d(y, y_n) < \text{dist}(y, A) + \frac{1}{n}$ . Pak

$$|d(x, A) - d(y, A)| = d(x, A) - d(y, A) < d(x, y_n) - \left(d(y, y_n) - \frac{1}{n}\right) \triangleq \frac{1}{n} + d(x, y).$$

$\implies$  (n bylo libovolné, přejdeme k limitě)  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq 1 \cdot d(x, y)$ . □

### Lemma 3.2

Ať  $(\mathbb{M}, d)$  je MP. Pak

(i)  $\forall x \neq y \in \mathbb{M} \exists f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  1-Lipschitzovská, že  $f(x) \neq f(y)$ ,

(ii) Projekce  $\pi_i : (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p) \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_i$  jsou Lipschitzovské,  $d \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$ .

┌

*Důkaz*

(i) Zvol  $f := d(\cdot, \{x\})$ .

(ii)  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d : |\pi_i(x_1, \dots, x_d) - \pi_i(y_1, \dots, y_d)| = |x_i - y_i|$

$$\leq \begin{cases} p = \infty : & \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty \\ p \neq \infty : & \sqrt[p]{\sum_{j=1}^d |x_j - y_j|^p} \end{cases}.$$

└

□

### Tvrzení 3.3

Ať  $(\mathbb{M}, d), (\mathbb{N}, e)$  jsou MP,  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i)  $f$  je spojitá,

(ii)  $f^{-1}(U)$  je otevřená, kdykoliv  $U \subseteq \mathbb{N}$  je otevřená,

(iii)  $f^{-1}(F)$  je uzavřená, kdykoliv  $F \subseteq \mathbb{N}$  je uzavřená.

┌  
Důkaz

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii): Z věty o doplňcích a toho, že  $f^{-1}(\mathbb{N} \setminus U) = \mathbb{M} \setminus f^{-1}(U)$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Necht  $U \subseteq \mathbb{N}$  otevřená,  $x \in f^{-1}(U)$ . Pak  $f(x) \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$ .  $\Rightarrow$  ( $f$  spojitá)  $\exists \delta > 0 : y \in B(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$ , pak  $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Necht  $x \in \mathbb{M}, \varepsilon > 0$ . Pak  $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$  je otevřená dle (ii).  $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ . Tedy  $d(x, y) < \delta \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ .  $\square$

└

### Definice 3.3 (Stejněměrná spojitost)

Ať  $(\mathbb{M}, d)$  a  $(\mathbb{N}, e)$  jsou MP,  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ . Pak  $f$  je stejněměrně spojitá, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \mathbb{M} : d(x, y) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Důsledek

$f$  je stejněměrně spojitá  $\Rightarrow f$  je spojitá. (Ale naopak to neplatí.)

$f$  je Lipschitzovská  $\Rightarrow f$  je stejněměrně spojitá. (Stejně tak tohle naopak neplatí.)

### Definice 3.4 (Izometrie)

Ať  $(\mathbb{M}, d)$  a  $(\mathbb{N}, e)$  jsou MP,  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ . Pak  $f$  je izometrie, pokud  $\forall x, y \in \mathbb{M} : d(x, y) = e(f(x), f(y))$ .

Důsledek

Izometrie je 1-Lipschitzovská. (Ale ne naopak.)

### Definice 3.5 (Homeomorfismus)

Ať  $(\mathbb{M}, d)$  a  $(\mathbb{N}, e)$  jsou MP,  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ . Pak  $f$  je homeomorfismus, pokud  $f$  je spojitá bijekce a  $f^{-1}$  je spojitá.

Důsledek

Izometrie na je homeomorfismus. (Ale opačně to neplatí.)

### Lemma 3.4

$I$  interval,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , že  $|f'(x)| \leq C, \forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow f$  je  $C$ -Lipschitzovská.

┌

Důkaz

Ať  $a < b \in I \Rightarrow$  (Lagrange)  $\exists \zeta \in (a, b) : \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = |f'(\zeta)| \leq C$ , tj.  $|f(b) - f(a)| \leq C|b - a|$ .  $\square$

└

### Definice 3.6 (Topologicky ekvivalentní)

Řekneme, že  $\sigma$  a  $\sigma_1$  jsou topologicky ekvivalentní, pokud

$$\{A \subseteq \mathbb{Y} : A \text{ je otevřená v } (\mathbb{Y}, \sigma)\} = \{A \subseteq \mathbb{Y} : A \text{ je otevřená v } (\mathbb{Y}, \sigma_1)\}.$$

### Tvrzení 3.5

Budte  $(\mathbb{X}, \varrho)$ ,  $(\mathbb{Y}, \sigma)$  MP,  $f : (\mathbb{X}, \varrho) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$  homeomorfismus. Definujeme pro všechna  $y, y' \in \mathbb{Y}$  zobrazení  $\sigma_1 \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \rightarrow [0, \infty)$  předpisem

$$\sigma_1(y, y') = \varrho(f^{-1}(y), f^{-1}(y')).$$

Pak  $\sigma_1$  je metrika na  $\mathbb{Y}$ ,  $f : (\mathbb{X}, \varrho) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma_1)$  je izometrie a metriky  $\sigma$  a  $\sigma_1$  jsou topologicky ekvivalentní.

┌

Důkaz

Metrika: Banální, cvičení pro nás. Izometrie: Necht  $x, x' \in \mathbb{X}$  jsou libovolné body.

$$\sigma_1(f(x), f(x')) = \varrho(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(x'))) = \varrho(x, x'),$$

a tedy  $f$  je izometrie.

Topologická ekvivalence: Necht  $U \subseteq \mathbb{Y}$  je otevřená vzhledem k  $\sigma$ . Pak  $f^{-1}(U)$  je otevřená ( $f$  je homeomorfismus), ale  $f$  je izometrie, tedy  $f^{-1}$  je izometrie, tudíž  $f^{-1}$  je spojitá. Tj.

$$U = f(f^{-1}(U)) = (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(U)) \text{ je otevřená.}$$

Podobně pokud  $U$  je  $\sigma_1$ -otevřená, je  $\sigma$ -otevřená.

└

□

### Věta 3.6

Budte  $\varrho_1, \varrho_2$  metriky na  $\mathbb{X}$ . Pak  $\varrho_1$  a  $\varrho_2$  jsou topologicky ekvivalentní  $\Leftrightarrow$

$$(\forall x \in \mathbb{X} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{X} : \varrho_1(x, y) < \delta \implies \varrho_2(x, y) < \varepsilon) \wedge (\forall x \in \mathbb{X} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{X} : \varrho_2(x, y) < \delta \implies \varrho_1(x, y) < \varepsilon)$$

┌

Důkaz

└ Snadné cvičení.

□

### Definice 3.7 (Diametr, omezená množina)

Bud  $(\mathbb{X}, \varrho)$  MP,  $A \subseteq \mathbb{X}$ . Definujeme  $\text{diam}_\varrho(A) = \sup \{\varrho(x, y) : x, y \in A\}$ .

Řekneme, že  $A$  je omezená, pokud  $\text{diam}_\varrho(A) < \infty$ .



**Definice 3.8** (Omezená metrika)

$\varrho$  je na  $\mathbb{X}$  omezená pokud  $\mathbb{X}$  je omezená.

## 4 Operace s metrickými prostory

**Definice 4.1** (Operace)

Je-li  $(\mathbb{X}, \varrho)$  MP,  $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ , pak metrický prostor  $(\mathbb{Y}, \varrho|_{\mathbb{Y} \times \mathbb{Y}})$  nazýváme podprostorem prostoru  $(\mathbb{X}, \varrho)$ , značíme  $(\mathbb{Y}, \varrho)$ .

┌

*Důkaz*

Že  $(\mathbb{Y}, \varrho)$  je MP je zřejmé.

└

□

**Tvrzení 4.1**

*Bud'  $(\mathbb{X}, \varrho)$  MP,  $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ . Pak:*

- 1) *Pokud  $G \subseteq \mathbb{X}$  je otevřená v  $(\mathbb{X}, \varrho)$ , pak  $G' = G \cap \mathbb{Y}$  je otevřená v  $(\mathbb{Y}, \varrho)$ .*
- 2) *Pokud  $G' \subseteq \mathbb{Y}$  je otevřená v  $(\mathbb{Y}, \varrho)$ , pak  $\exists G \subseteq \mathbb{X}$  otevřená v  $(\mathbb{X}, \varrho) : G' = G \cap \mathbb{Y}$ .*

┌

*Důkaz*

1) Necht'  $y \in G'$ . Protože  $G$  je otevřená v  $\mathbb{X}$ , tak  $\exists r > 0 : B_{\mathbb{X}, \varrho}(y, r) \subseteq G$ . Tedy  $B_{\mathbb{Y}, \varrho}(y, r) = B_{\mathbb{X}, \varrho}(y, r) \cap \mathbb{Y} \subseteq G \cap \mathbb{Y} = G'$ .

2) Necht' je dána  $G'$  otevřená v  $(\mathbb{Y}, \varrho)$ . Pak  $\forall x \in G' \exists \varepsilon(x) > 0 : B_{\mathbb{Y}, \varrho}(x, \varepsilon(x)) \subseteq G'$ . Zřejmě  $G' = \bigcup_{x \in G'} B_{\mathbb{Y}, \varrho}(x, \varepsilon(x))$ .

Položme  $G = \bigcup_{x \in G'} B_{\mathbb{X}, \varrho}(x, \varepsilon(x))$ . Potom je  $G \cap \mathbb{Y} = G'$ .  $G$  je otevřená, jelikož je sjednocením otevřených množin.

└

□

**Definice 4.2** (Součet MP)

Mějme MP  $\{\mathbb{X}_\alpha, \varrho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , které splňují  $\forall \alpha \in I \forall x, y \in \mathbb{X}_\alpha : \varrho_\alpha(x, y) \leq 1$ . Sumou prostorů  $(\mathbb{X}_\alpha, \varrho_\alpha)$  nazýváme prostor

$$\sum_{\alpha \in I} (\mathbb{X}_\alpha, \varrho_\alpha) = (\mathbb{X}, \varrho),$$

kde

$$\mathbb{X} = \coprod_{\alpha \in I} \mathbb{X}_\alpha = \{(x, \alpha) | x \in \mathbb{X}_\alpha, \alpha \in I\},$$

$$\varrho((x, \alpha), (y, \beta)) = 1, \text{ pokud } \alpha \neq \beta, \varrho_\alpha(x, y), \text{ pokud } \alpha = \beta.$$

**Definice 4.3** (Součin (spočetně mnoha) MP)

Budte  $\{\mathbb{X}_i, \varrho_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  MP, že  $\forall i \in \mathbb{N} : \text{diam}(\mathbb{X}_i) \leq 1$ . Součinem prostorů  $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$  nazýváme metrický prostor (je nutno, ale jednoduché dokázat)

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} := (\mathbb{X}, \varrho), \quad \mathbb{X} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{X}_i \wedge \forall f, g \in \mathbb{X} : \varrho(f, g) = \sum_{i=1}^* \frac{\varrho_i(f(i), g(i))}{2^i}.$$

**Tvrzení 4.2**

Budte  $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , MP, kde  $\text{diam} \mathbb{X}_i \leq 1$ . Necht  $(\mathbb{X}, \varrho) = \prod_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{X}_i, \varrho_i)$  a budiž  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{X}$  posloupnost bodů v  $\mathbb{X}$ ,  $f \in \mathbb{X}$ . Pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  v  $(\mathbb{X}, \varrho) \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i) = f(i)$  v  $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ .

┌

Důkaz

$\Rightarrow$  : Necht  $f_n \rightarrow f$ . Budiž dáno libovolné  $i_0 \in \mathbb{N}$ . Necht  $\varepsilon > 0$ . Najdeme  $n_0 \in \mathbb{N}$ , že  $\forall n \geq n_0 : \varrho(f_n, f) < \varepsilon \cdot 2^{-i_0}$ . Tedy pro

$$n \geq n_0 : \varepsilon \cdot 2^{-i_0} > \varrho(f_n, f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} \geq \frac{\varrho_{i_0}(f_n(i_0), f(i_0))}{2^{i_0}},$$

tj.  $\varrho_{i_0}(f_n(i_0), f(i_0)) < \varepsilon$ . tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i_0) = f(i_0)$ .

$\Leftarrow$  : Necht  $\forall i \in \mathbb{N} : f_n(i) \rightarrow f(i)$ . Necht  $\varepsilon > 0$ . Najdeme  $i_0 \in \mathbb{N}$ , že  $\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, i_0\}$  najdeme  $n_i$ , že  $\forall n \geq n_i : \varrho_i(f_n(i), f(i)) < \frac{\varepsilon}{i_0}$ . Položme  $\tilde{n} := \max\{n_1, n_2, \dots, n_{i_0}\}$ . Pak  $n \geq \tilde{n}$ : jest

$$\varrho(f_n, f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} = \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\varepsilon/i_0}{2} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

└

□

## 5 Totálně omezené a separabilní MP

**Definice 5.1** ( $\varepsilon$ -sít,  $\varepsilon$ -separovanost, totální omezenost)

Bud  $(\mathbb{M}, d)$  MP,  $A \subseteq \mathbb{M}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Řekneme, že  $A$  je  $\varepsilon$ -sít pro  $\mathbb{M}$ , jestliže  $\forall x \in \mathbb{M} \exists a \in A \forall x \in B(a, \varepsilon) : d(x, a) < \varepsilon$ .

$A$  je  $\varepsilon$ -separovaná, pokud  $\forall x, y \in A : d(x, y) \geq \varepsilon$ .

$\mathbb{M}$  je totálně omezený, jestliže  $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subseteq \mathbb{M} : A$  je konečná  $\varepsilon$ -sít pro  $\mathbb{M}$ .

$\mathbb{M}$  je separabilní, pokud  $\exists A \subseteq \mathbb{M}$  spočetná:  $\overline{A} = \mathbb{M}$ . (Tj.  $A$  je hustá v  $\mathbb{M}$ .)

### Věta 5.1

$MP(\mathbb{M}, d)$  je totálně omezený, právě když  $\forall \varepsilon > 0$  je každá  $\varepsilon$ -separovaná množina konečná.

┌

*Důkaz*

$\Rightarrow$  : Necht  $\varepsilon > 0$ ,  $B \subseteq \mathbb{M}$  je  $\varepsilon$ -separovaná. Chceme  $B$  je konečná. Protože  $\mathbb{M}$  je TO, existuje konečná  $\frac{\varepsilon}{4}$ -sít  $A \subseteq \mathbb{M}$ . Pro každé  $x \in B$  zvolíme nějaký bod  $a_x \in A : d(x, a_x) < \frac{\varepsilon}{4}$ . Pak pro  $x \neq y$ ,  $x, y \in B$  platí  $a_x \neq a_y$ :  $d(a_x, a_y) \geq d(x, y) - d(x, a_x) - d(y, a_y) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ . Tj. zobrazení  $B \rightarrow A : x \mapsto a_x$  je prosté. Ale  $A$  je konečná tedy  $B$  je konečná.

$\Leftarrow$  Necht  $\varepsilon > 0$ ; chceme najít konečnou  $\varepsilon$ -sít. Vezmeme si  $B \subseteq M$   $\varepsilon$ -separovaná, která je maximální (co do inkluze). Tvrdíme, že  $B$  je automaticky  $\varepsilon$  sít: Zvolme  $x \in \mathbb{M}$ . Pak existuje  $b \in B : d(x, b) < \varepsilon$ . Kdyby ne:  $\forall b \in B : d(x, b) \geq \varepsilon$ . To by znamenalo, že  $B \cup \{x\} \supset B$  je  $\varepsilon$ -separovaná, což je spor s maximalitou  $B$ . Tj.  $B$  je opravdu  $\varepsilon$ -sít pro  $\mathbb{M}$ .

Druhá část důkazu však potřebuje tzv. Zornovo lemma, abychom mohli brát  $B$  maximální. □

### Věta 5.2

Buď  $(\mathbb{M}, d)$  MP,  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$ . Pokud  $(\mathbb{M}, d)$  je TO, pak i  $(\mathbb{N}, d)$  je TO. (Tedy TO se zachovává na podprostory.)

┌

*Důkaz*

Necht  $A \subseteq \mathbb{N}$  je  $\varepsilon$ -separovaná. Chceme:  $A$  je konečná. (Pak  $(\mathbb{N}, d)$  je TO podle V18). Ale  $A \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$ , tedy  $A \subseteq \mathbb{M}$  je  $\varepsilon$ -separovaná v  $\mathbb{M}$ . Ale  $\mathbb{M}$  je TO, takže  $A$  musí být konečná. □

### Věta 5.3

$(\mathbb{M}, d)$  je MP,  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$ . Je-li  $(\mathbb{N}, d)$  TO, pak  $(\overline{\mathbb{N}}, d)$  je TO. (TO se zachovává na uzávěr.)

┌

*Důkaz*

$\varepsilon > 0$  dáno, chceme konečnou  $\varepsilon$ -sít v prostoru  $(\overline{\mathbb{N}}, d)$ . Necht  $A \subseteq \mathbb{N}$  je konečná  $\varepsilon/2$ -sít pro  $\mathbb{N}$  (ta existuje, neboť  $(\mathbb{N}, d)$  je TO). Chceme je  $\varepsilon$ -sít pro  $(\overline{\mathbb{N}}, d)$ . Zvolme libovolný bod  $x \in \overline{\mathbb{N}}$ . Chceme  $\exists y \in A : d(x, y) < \varepsilon$ .

Protože  $x \in \overline{\mathbb{N}}$ , existuje  $z \in \mathbb{N} : d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Protože  $A$  je  $\varepsilon/2$ -sít pro  $\mathbb{N}$ , existuje  $y \in A : d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Tedy  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ . Tudíž  $A$  je  $\varepsilon$ -sít pro  $\overline{\mathbb{N}}$ . □

### Věta 5.4

Necht  $(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ ,  $\alpha \in I$  jsou MP,  $\text{diam } M_\alpha \leq 1$ ,  $\forall \alpha \in I$ . Pak  $\sum_{\alpha \in I} (\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$  je TO  $\Leftrightarrow I$  je konečná a  $\forall \alpha \in I : (\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$  je TO.

┌ *Důkaz*

$\Rightarrow$  : Necht  $\sum$  je TO. Necht  $\varepsilon > 0$ . Pokud  $\varepsilon \geq 1$ , pak libovolná jednobodová množina je  $\varepsilon$ -sít.  $\varepsilon < 1$ . Necht  $A \subseteq \sum(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$  je konečná  $\varepsilon$ -sít. Položme  $A_\alpha := \{x \in \mathbb{M}_\alpha \mid (x, \alpha) \in A\}$ . Potom  $A_\alpha$  je zřejmě  $\varepsilon$ -sít  $(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ .

$\Leftarrow$  : Podle předpokladů, pro dané  $\varepsilon > 0$ ,  $\forall \alpha \in I \exists A_\alpha \subseteq \mathbb{M}_\alpha$  :  $A_\alpha$  je konečná  $\varepsilon$ -sít (protože  $(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$  jsou TO).  $A \cup_{\alpha \in I} A_\alpha \times \{\alpha\}$  je  $\varepsilon$ -sít pro  $\sum_{\alpha \in I}(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ .  $\square$

## Věta 5.5

Necht  $(\mathbb{M}_i, d_i)$  jsou MP,  $i \in \mathbb{N}$ , a necht  $\forall i : \text{diam } \mathbb{M}_i \leq 1$ . Pak  $(\mathbb{M}, d) = \prod_{i \in \mathbb{N}}(\mathbb{M}_i, d_i)$  je TO  $\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : (\mathbb{M}_i, d_i)$  je TO.

┌ *Důkaz*

$\Rightarrow$  : (Lze provést i důkaz přímo z definic) Zvolme  $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \mathbb{M}$ . Definujeme zobrazení  $\varphi : (\mathbb{M}_i, d_i) \rightarrow (\mathbb{M}, d)$  tak, že  $\varphi(x) = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots) \in \mathbb{M}$ . Pak  $\varphi$  je izometrie. Tedy  $(\mathbb{M}_i, \frac{d_i}{2^i})$  lze chápat jako podprostor (neboli izometrickou kopii podprostoru)  $(\mathbb{M}, d)$ . Ale  $\mathbb{M}$  je TO, tedy i jeho podprostor je TO.

$\Leftarrow$  : Necht  $\varepsilon > 0$  je dáno. Zvolíme  $i_0 \in \mathbb{N} : \sum_{i=i_0}^\infty \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Pro  $i \in \{1, \dots, i_0 - 1\}$  najdeme konečné  $\varepsilon/2$ -sítě  $A_i$  pro  $\mathbb{M}_i$ .  $S = \{(x_i) \in \mathbb{M} \mid x_i \in A_i, i \in \{1, \dots, i_0 - 1\} \vee x_i = a_i, i \geq i_0\}$ .  $S$  je konečná, neboť  $|S| \prod_{i=1}^{i_0-1} |A_i|$ .  $S$  je  $\varepsilon$ -sít pro  $\mathbb{M}$ .  $\square$

## Věta 5.6

Bud  $(\mathbb{M}, d)$  MP. Pak následující je ekvivalentní: 1)  $\mathbb{M}$  je separabilní, 2) existuje spočetná množina otevřených podmnožin  $B_n \subseteq \mathbb{M}$  tak, že  $\forall G \subseteq \mathbb{M}$  otevřená:  $\exists I \subseteq \mathbb{N} : G = \bigcup_{n \in I} B_n$ , 3) každý podprostor  $\mathbb{M}$  je separabilní, 4) každá  $\varepsilon$ -separovaná množina je spočetná.

┌ *Důkaz*

1)  $\implies$  2): Uvažujme nějakou spočetnou hustou podmnožinu  $D \subseteq \mathbb{M}$ .  $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ .  $B_{(i,j)} := B(x_i, 1/j)$ .  $\mathbb{N}^2$  je spočetná, tedy těchto koulí je spočetně mnoho. Necht' je dána libovolná otevřená  $G \subseteq \mathbb{M}$ . Chceme  $G = \bigcup_{(i,j) \in I} B_{(i,j)}$ , kde  $I := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid B_{(i,j)} \subseteq G\}$ . Zvolme  $x \in G$ . Chceme  $\exists (i,j) \in I : x \in B_{(i,j)}$ . Protože  $G$  je otevřená,  $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq G$ . Podle definice hustoty najdeme  $\frac{1}{j} < \frac{\varepsilon}{2}$ .  $\exists i \in \mathbb{N} : x_i \in (x, \frac{1}{j})$ . Pak  $B_{(i,j)} \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq G$ . Tedy  $x \in \bigcup_{(i,j) \in I} B_{(i,j)}$ .

2)  $\implies$  1): Necht'  $B_n$  mají vlastnost z 2). Chceme ukázat, že  $M$  je separabilní. Vybereme  $x_n \in B_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pak  $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  je hustá. Skutečně, budiž  $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{M}$  otevřená, pak  $G = \bigcup_{n \in I} B_n$  pro nějaké  $I \subseteq \mathbb{M}$ . Tím pádem  $\forall n \in I : x_n \in B_n \subseteq G$ , tj. ( $I \neq \emptyset$ ) některé prvky  $D$  jsou v  $G$ .

2)  $\implies$  3): Buď  $\mathbb{O} \subseteq \mathbb{M}$  libovolný podprostor. Chceme:  $\mathbb{O}$  je separabilní. Stačí, že  $\mathbb{O}$  splňuje 2), tj. má spočetnou bázi otevřených množin.  $\mathbb{M}$  má spočetnou bázi otevřených množin  $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Tvrdíme, že  $\{B_n \cap \mathbb{O} \mid n \in \mathbb{N}\}$  má vlastnost z 2) (tj. je to báze) pro  $\mathbb{O}$ . Tedy všechny podprostory  $\mathbb{M}$  jsou separabilní.

3)  $\implies$  4): Necht'  $\mathbb{M}$  splňuje 3). Budiž dáno  $\varepsilon > 0$  a libovolná  $\varepsilon$ -separovaná podmnožina  $A \subseteq \mathbb{M}$ . Chceme  $|A| \leq |\mathbb{N}|$ .  $A$ , jakožto podprostor  $\mathbb{M}$ , je separabilní. Pro libovolné  $x \in A$  jest  $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$ . Je-li nyní  $D$  spočetná hustá v  $(A, d)$ , pak  $\forall x : A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ , tj.  $\forall x \in A : x \in D$ , tedy  $D = A$  a  $A$  je spočetná.

4)  $\implies$  1): Zornovo lemma: Pro  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  uvažujme maximální  $\frac{1}{n}$ -separovanou podmnožinu  $S_n \subseteq \mathbb{M}$ . Dokážeme, že  $S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  je hustá v  $\mathbb{M}$ : Necht'  $x \in \mathbb{M}$ ,  $\varepsilon > 0$  jsou dány. Najdeme  $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$ . Tvrdíme, že existuje  $y \in S_n : d(x, y) < \frac{1}{n}$ . Kdyby ne, pak  $S_n \cup \{x\}$  by byla  $\frac{1}{n}$ -separovaná, což by byl spor s maximalitou  $S_n$ . Tedy  $y \in S$  a  $d(x, y) < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .  $\square$

## Tvrzení 5.7

Pro prostory  $(\mathbb{M}_n, d_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  splňující  $\text{diam } \mathbb{M}_n \leq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , platí  $\prod_{i=1}^{\infty} (\mathbb{M}_i, d_i)$  je separovaný  $\Leftrightarrow \forall i : (\mathbb{M}_i, d_i)$  je separabilní.

┌ *Důkaz*

└ Cvičení.  $\square$

*Důsledek*

$\mathbb{M}$  je separovaný  $\implies \mathbb{M}$  je TO.

## 6 Úplné prostory

### Definice 6.1 (Cauchyovská posloupnost, úplný prostor)

Buď  $(\mathbb{M}, \varrho)$  MP,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  posloupnost prvků  $\mathbb{M}$ . Řekneme, že  $\{x_n\}$  je cauchyovská, jestliže

platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Řekneme, že prostor  $(\mathbb{M}, \varrho)$  je úplný, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost konverguje (tj.  $\exists x \in \mathbb{M} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ).

### Věta 6.1 (Cantorův princip)

Bud'  $(\mathbb{M}, \varrho)$  MP.  $\mathbb{M}$  je úplný  $\Leftrightarrow$  pro každou posloupnost uzavřených množin  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $F_n \subseteq \mathbb{M}$ , kde  $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$  a  $\text{diam } F_n \rightarrow 0$ , platí  $\bigcap F_n \neq \emptyset$ .

┌

Důkaz

$\Rightarrow$  : Vybereme prvky  $x_n \in F_n, n \in \mathbb{N}$  libovolně. Máme tedy  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Tato posloupnost je Cauchyovská, jelikož pro  $\varepsilon > 0$  najdeme  $n_0 \in \mathbb{N}$ , že  $\forall n \geq n_0 : \text{diam } F_n < \varepsilon$ . Pak  $\forall n, m \geq n_0 : x_n \in F_n, x_m \in F_m \subseteq F_{n_0}$ , tj.  $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

Tedy existuje  $x \in \mathbb{M} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Tvrdíme, že  $x \in \bigcap F_n$ . Necht' je dána  $m \in \mathbb{N}$ . Pak  $\forall n \geq m : x_n \in F_m$ . Ale  $F_m$  je uzavřená, a tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in F_m$ .

$\Leftarrow$  : Necht' platí podmínka věty. Bud'  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{M}$  cauchyovská. Chceme dokázat, že je konvergentní. Položme  $F_n = \overline{\{x_i | i \geq n\}}$ . Zřejmě  $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$   $\text{diam } F_n \rightarrow 0$ , protože  $\{x_n\}$  je cauchyovská. Tedy podle předpokladů existuje  $x \in \bigcap F_n$ .

Ukážeme, že  $x = \lim x_n$ : Necht' je dáno  $\varepsilon > 0$ . Zvolme  $n_0 \in \mathbb{N} : \text{diam } F_{n_0} < \varepsilon$ . Pro libovolné  $n \geq n_0$  platí  $\varrho(x_n, x) \leq \text{diam } F_n \leq \text{diam } F_{n_0} < \varepsilon$ . Tedy  $x_n \rightarrow x$ .  $\square$

### Věta 6.2 (Úplnost a podprostory)

Bud'  $(\mathbb{M}, \varrho)$  MP,  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$  jeho podprostor. Potom  $(\mathbb{N}, \varrho)$  je úplný  $\Leftrightarrow \mathbb{N}$  je uzavřený v  $\mathbb{M}$ .

┌

Důkaz

$\Rightarrow$  : Kdyby  $\mathbb{N}$  nebyla uzavřená množina, existovala by posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ , že  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{N}$ . Ale protože  $\{x_n\}$  je konvergentní v  $\mathbb{M}$ , je cauchyovská v  $\mathbb{M}$ , a tedy i v  $\mathbb{N}$ . Nemá ale v  $\mathbb{N}$  limitu a tak  $\mathbb{N}$  není úplný.

$\Leftarrow$  : Necht'  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$  je uzavřená v  $\mathbb{M}$ . Necht'  $\{x_n\}$  je cauchyovská v  $\mathbb{N}$ , pak je cauchyovská i v  $\mathbb{M}$ , a protože  $\mathbb{M}$  je úplný, tak  $\exists x \in \mathbb{M} : x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Ale  $\mathbb{N}$  je uzavřený, takže  $x \in \mathbb{N}$ .  $\square$

### Věta 6.3 (Úplnost a součin)

Necht'  $(\mathbb{M}_i, \varrho_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  jsou MP, že  $\forall i \in \mathbb{N} : \text{diam } \mathbb{M}_i \leq 1$ . Pak  $\prod_{i=1}^{\infty} (\mathbb{M}_i, \varrho_i)$  je úplný  $\Leftrightarrow \forall i : (\mathbb{M}_i, \varrho_i)$  je úplný.

┌ *Důkaz*

$\implies$  :  $(\mathbb{M}_i, \varrho_i)$  lze chápat jako podprostor součinu  $\prod(\mathbb{M}_i, \varrho_i)$ . Lze si snadno rozmyslet, že je uzavřený (cvičení). Tedy podle předchozí věty je úplný.

$\Leftarrow$ : Necht  $\{x_n\} \subseteq \prod(\mathbb{M}_i, \varrho_i) =: \mathbb{M}$  je cauchyovská posloupnost v  $\mathbb{M}$ ,  $x_n(i) \in \mathbb{M}_i$ . Tvrdíme, že  $\forall i \in \mathbb{N} : \{x_n(i)\}_{n=1}^\infty$  je cauchyovská v  $\mathbb{M}_i$ . Buď  $\varepsilon > 0$ . Najdeme  $n_0 \in \mathbb{N}$ , že  $\forall m, n \geq n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ .

$$\varrho(x_n, x_m) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varrho_j(x_n(j), x_m(j))}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Tedy  $\varrho_i(x_n(i), x_m(i)) < \varepsilon$ . Tudíž existuje limita  $x(i) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(i)$ , tj.  $x \in \prod_{j=1}^{\infty} (\mathbb{M}_j, \varrho_j)$ . Jednoduše (standardní zanedbatelnost „vocasu řady“) dokážeme, že  $\varrho(x_n, x) \rightarrow 0$ .  $\square$

### Věta 6.4 (Bairova)

*Necht  $(\mathbb{M}, \varrho)$  je úplný MP. Necht  $U_n$  jsou otevřené, husté podmnožiny  $\mathbb{M}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pak  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$  je hustá.*

┌ *Důkaz*

Stačí, že  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$  protne libovolnou kouli. Mějme tedy dáno  $x, \varepsilon$ . Buď  $B := B(x, \varepsilon)$ . Protože  $U_1$  je hustá, existuje  $x_1 \in U_1 \cap B$ . Ale  $U_1$  i  $B$  jsou otevřené, takže i  $U_1 \cap B$  je otevřená, takže existuje  $\varepsilon_1 > 0$ , že  $B(x_1, 2\varepsilon_1) \subseteq U_1 \cap B$ . Tedy  $\overset{B(x_1, \varepsilon_1)}{\subseteq} U_1 \cap B$ . Analogicky pokračujeme (navíc chceme, aby  $\varepsilon_i > \varepsilon_{i+1}$ ).

Tím jsme dostali klesající (co do inkluze) posloupnost uzavřených množin, jejichž průměr jde k 0. Tedy průnik těchto množin je neprázdný podle Cantorova principu.  $\square$

*Důsledek*

Existuje spojitá funkce, která nemá v žádném bodě derivaci.

### Definice 6.2 (Zajímavost)

$I$  množina,  $l_\infty := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ je omezená}\}$ .  $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$ .

### Tvrzení 6.5 (Zajímavost)

$(l_\infty, d_\infty)$  je úplný.

### Věta 6.6 (Zajímavost)

*Necht  $(\mathbb{M}, \varrho)$  je MP,  $\overline{D} = \mathbb{M}$ . Pak existuje izometrie  $\varphi : (\mathbb{M}, \varrho) \rightarrow l_\infty(D)$ .*

## 7 Kompaktnost

### Definice 7.1 (Pokrytí, otevřené pokrytí, konečná průniková vlastnost)

Ať  $\mathcal{S}$  je systém podmnožin množiny  $X$ . Řekneme, že  $\mathcal{S}$  je pokrytí  $X$ , pokud  $\bigcup \mathcal{S} = X$ .

Je-li  $(\mathbb{X}, \varrho)$  MP,  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ , říkáme, že  $\mathcal{S}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ , pokud  $\mathcal{S}$  je pokrytí  $\mathbb{X}$  a každá  $S \in \mathcal{S}$  je otevřená množina v  $(\mathbb{X}, \varrho)$ .

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  má konečnou průnikovou vlastnost, pokud  $\forall n \in \mathbb{N} \forall S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S} : \bigcap S_i \neq \emptyset$

### Definice 7.2 (Kompaktní prostor)

MP  $(\mathbb{X}, \varrho)$  se nazývá kompaktní, pokud z každého otevřeného pokrytí  $\mathcal{S}$  lze vybrat konečnou  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} : \bigcup \mathcal{S}' = \mathbb{X}$ .

### Definice 7.3

Ať  $(\mathbb{M}, \varrho)$  je MP,  $A \subseteq \mathbb{M}$ . Řekneme, že  $x \in \mathbb{M}$  je hromadným bodem množiny  $A$ , pokud  $\forall \varepsilon > 0 (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ .

### Věta 7.1 (Charakterizace kompaktnosti)

*Pro  $(\mathbb{M}, \varrho)$  je ekvivalentní:*

1.  $\mathbb{M}$  je kompaktní.
2. Je-li  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{M})$  soubor uzavřených množin s konečnou průnikovou vlastností, pak  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ .
3. Je-li  $A \subseteq \mathbb{M}$  nekonečná, pak  $A$  má hromadný bod v  $\mathbb{M}$ .
4. Z každé posloupnosti v  $\mathbb{M}$  lze vybrat konvergentní podposloupnost.
5. Každá spojitá funkce  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  je omezená.
6. Každá spojitá funkce  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  nabývá svého minima a maxima.
7. Z každého spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné pokrytí.



|

|

Důkaz

1  $\implies$  2: Ať  $\mathcal{F}$  je soubor uzavřených množin v  $(\mathbb{M}, \varrho)$  s konečnou průnikovou vlastností. Pro spor ať  $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ . Ať  $\mathcal{S} := \{\mathbb{M} \setminus F \mid F \in \mathcal{F}\}$ .  $\mathbb{M} \setminus F$  je otevřená pro  $F \in \mathcal{F}$ .  $\bigcup \mathcal{S} = \mathbb{M} \setminus \bigcap \mathcal{F} = \mathbb{M} \setminus \emptyset = \mathbb{M}$ . Tedy  $\mathcal{S}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{M}$ .  $\mathbb{M}$  je kompaktní, tedy  $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S} : S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = \mathbb{M}$ .  $\forall i \leq n \exists F_i \in \mathcal{F} : S_i = \mathbb{M} \setminus F_i$ .  $F_1 \cap \dots \cap F_n = \mathbb{M} \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_n) = \mathbb{M} \setminus \mathbb{M} = \emptyset$ . Tedy  $\mathcal{F}$  nemá konečnou průnikovou vlastnost.  $\nabla$ .

2  $\implies$  3: Ať  $A \subseteq \mathbb{M}$  je nekonečná. Ať pro spor  $A$  nemá hromadný bod. Uvažujme  $a \in A$ ,  $A \setminus \{a\}$  je uzavřená množina (protože jinak by bod  $a \in A \setminus \{a\}$  byl hromadným bodem).  $\mathcal{F} := \{A \setminus \{a\} \mid a \in A\}$  je soubor uzavřených množin a navíc má konečnou průnikovou vlastnost (můžeme odečíst pouze konečně mnoho  $a_i \in A$ , ale těch je nekonečně). Dle 2) je  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ . Ale  $\bigcap \{A \setminus \{a\} \mid a \in A\} = A \setminus A = \emptyset$ .  $\nabla$ .

3  $\implies$  4: Ať  $x_n \in \mathbb{M}$ . Pokud  $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  je konečná, najdeme konstantní (tedy konvergentní) podposloupnost. Jinak  $A$  má hromadný bod  $x \in \mathbb{M}$ . Najdeme podposloupnost konvergující k  $x$ , indukcí  $n_1 := 1$ ,  $n_i < n_{i+1} : \varrho(x_{n_k}) < \frac{1}{k}$ ,  $k > 1$ :

$B(x_{n_k}, \frac{1}{k+1}) \cap A$  je nekonečná, tedy existuje  $n_{k+1} > n_k$ , že je splněna chtěná podmínka. Jednoduše následně ukážeme i to, že tato posloupnost konverguje k  $x$ .

4  $\implies$  5: Zase sporem: Ať  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá neomezená funkce. Tj.  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \mathbb{M} : |f(x_n)| \geq n$ . Dle 4) ale víme, že posloupnost  $x_n$  má konvergentní podposloupnost  $x_{n_k}$ .  $x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{M}$ . Ale  $f$  je spojitá, tedy  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ .  $\nabla$ .

5  $\implies$  6:  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá,  $f$  nenabývá maxima (búno). Dle 5 je  $f$  omezená, tedy  $\sup_{x \in \mathbb{M}} f(x) = \alpha < \infty$ .  $g := \frac{1}{\alpha - f}$ ,  $\forall x \in \mathbb{M} : f(x) \neq \alpha$ , tedy  $g$  je spojitá (a dobře definovaná).  $\exists x_n \in \mathbb{M} : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \infty$ . Tedy  $g$  není omezená, spor s 5.

6  $\implies$  7: Ať  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots\}$  je spočetné otevřené pokrytí  $\mathbb{M}$ . Položme  $V_n := S_1 \cup \dots \cup S_n$ . Ať pro spor  $\mathcal{S}$  nemá konečné podpokrytí. Tedy  $V_n \subset \mathbb{M}$ ,  $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$ ,  $\bigcup V_n = \mathbb{M}$ . Můžeme předpokládat, že  $V_i \subset V_{i+1}$  libovolně. Vybereme  $x_i \in V_{i+1} \setminus V_i$  libovolně. Pro  $i \in \mathbb{N}$  ať  $\varepsilon_i = \min_{j \leq i} \varrho(x_i, x_j)$  a splňuje  $B(x_i, \varepsilon_i) \subseteq V_{i+1}$ .

$$f(x) = \frac{4k}{\varepsilon_k} \left( \frac{\varepsilon_k}{4} - \varrho(x, x_n) \right), \text{ pro } x \in B(x_{n_k}, \frac{\varepsilon_k}{4}), \text{ a } f(x) = 0 \text{ jinak.}$$

$f(x_k) = k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tedy  $f$  není omezená. Ale je spojitá. Spor s 6.

7  $\implies$  1: Nejprve ukážeme, že  $\mathbb{M}$  je separabilní, sporem:  $\mathbb{M}$  není separabilní, tedy podle charakterizace separability existuje  $\varepsilon > 0$  a existuje  $A \subseteq \mathbb{M}$ ,  $A$  nespočetná,  $A$  je  $\varepsilon$ -separovaná. Ať  $A' \subseteq A$  je spočetná, nekonečná. Zřejmě  $A'$  je  $\varepsilon$ -separovaná.  $A'$  je uzavřená v  $\mathbb{M}$ .  $\{A' \setminus \{a\} \mid a \in A'\} \cup \{B(a, \frac{\varepsilon}{2}) \mid a \in A'\}$  spočetné otevřené pokrytí  $\mathbb{M}$ . Tento systém ale nemá konečné podpokrytí, což je spor s 7, tedy  $\mathbb{M}$  je separabilní.

Ať  $\mathcal{S}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{M}$ .  $\mathbb{M}$  je separabilní, tedy existuje systém  $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  otevřených množin, že  $\forall G \subseteq \mathbb{M}$  otevřenou  $\exists J \subseteq \mathbb{N}$ :

$$G = \bigcup \{B_n \mid n \in J\}.$$

Tedy  $\forall S \in \mathcal{S} \exists J_S \subseteq \mathbb{N} : S = \bigcup \{B_n \mid n \in J_S\}$ .  $J := \bigcup_{S \in \mathcal{S}} J_S \subseteq \mathbb{N}$ .  $\forall n \in J \exists S_n \in \mathcal{S} : B_n \subseteq S_n$ . Tj.  $\bigcup B_n = \bigcup \mathcal{S} = \mathbb{M}$ . Tedy  $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \mathbb{M}$ . Tedy  $\{S_1, S_2, \dots\}$  je spočetné podpokrytí  $\mathbb{M}$ . Dle 7 existuje  $k \in \mathbb{N} : S_1 \cup \dots \cup S_k = \mathbb{M}$ .  $\square$

## Věta 7.2

Ať  $(\mathbb{M}, \varrho)$  je MP. Pak  $\mathbb{M}$  je kompaktní, právě když  $\mathbb{M}$  je úplný a totálně omezený.

┌

*Důkaz*

$\Rightarrow$  : Úplnost: Ať  $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$  jsou uzavřené neprázdné a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_1 = 0$ . Chceme, že  $\bigcap F_n \neq \emptyset$ .  $\mathcal{F} := \{F_1, F_2, \dots\}$  je systém uzavřených množin s konečnou průnikovou vlastností. Podle předchozí věty je  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ . Tj.  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ .

Totální omezenost: Ať  $\varepsilon > 0$ .  $\{B(x, \varepsilon) | x \in \mathbb{M}\}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{M}$ . Z kompaktnosti existuje konečné podpokrytí, tj.  $\exists n \in \mathbb{N} \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{M} : B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon) = \mathbb{M}$ . Tedy  $\{x_1, \dots, x_n\}$  je  $\varepsilon$ -sít pro  $\mathbb{M}$ . Tedy  $(\mathbb{M}, \varrho)$  je totálně omezený.

$\Leftarrow$  : Ukážeme, že každá nekonečná  $A \subseteq \mathbb{M}$  má hromadný bod. Indukcí najdeme klesající posloupnost  $B_n, n \in \mathbb{N}$ , uzavřených množin, že  $\text{diam } B_n \leq \frac{1}{n}$ ,  $B_n \cap A$  je nekonečná:

Z totální omezenosti  $\mathbb{M}$  existuje konečné pokrytí  $\mathbb{M}$  uzavřenými koulemi  $U_1, \dots, U_n$  s diametrem  $\leq 1$ .  $\exists i \leq n : U_i \cap A$  je nekonečná. Položme  $B_1 := U_i$ .

Máme-li  $B_1, \dots, B_n$ , víme, že  $B_n$  je totálně omezená,  $B_n \cap A$  je nekonečná. Z totální omezenosti  $B_n$  existují uzavřené  $V_1, \dots, V_l$ , že  $B_n = V_1 \cup \dots \cup V_l$ , že  $B_n = V_1 \cup \dots \cup V_l$ ,  $\text{diam } V_l \leq \frac{1}{n+1}$ . Existuje  $j \leq l : V_j \cap A$  je nekonečná.  $B_{n+1} := V_j$ .  $B_{n+1} \subseteq B_n$ .

Nyní z úplnosti  $\mathbb{M}$  je  $\bigcap B_n \neq \emptyset$ . Ať  $a \in \bigcap B_1$ .  $a$  je hromadným bodem  $A$ : Ať  $\varepsilon > 0$ , pak  $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ .  $B_n \subseteq B(a, \varepsilon)$ ,  $B(a, \varepsilon) \cap A$  je nekonečná, tedy  $a$  je hromadný bod  $A$ . □

└