

# Organizační úvod

*Poznámka*

Zkouška bude snad ústní.

## Úvod

### Věta 0.1 (Lebesgueova míra)

Existuje právě jedna borelovská míra  $\lambda^n$  v  $\mathbb{R}^n$  taková, že

$$\lambda^n \left( \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i), \quad -\infty < a_i \leq b_i < \infty, 1 \leq i \leq n.$$

┌  
*Poznámka*

Zúplněnou  $\sigma$ -algebru značíme  $B_0^n$  a platí  $B^n \subsetneq B_0^n$  (pro  $n \geq 2$  jednoduché, pro  $n = 1$  možná někdy příště).

$\lambda^n$  je translačně a rotačně invariantní (posunutím a otočením se nezmění).

$\lambda^n$  je  $\sigma$ -konečná.

$\lambda^n$  je regulární (můžeme její hodnotu na množině aproximovat jejími hodnotami na otevřené nadmnožině a uzavřené podmnožině<sup>a</sup>).

<sup>a</sup>

$$\forall E \in B_0^n \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \subset E \subset G, F \text{ uzavřená}, G \text{ otevřená}, \lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon.$$

└

### Definice 0.1

$\tilde{\mu} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  je pramíra (premeasure) na algebře  $\mathcal{A}$  podmnožin  $X$ , jestliže:

$$\tilde{\mu}(\emptyset) = 0,$$

$$A_i \in \mathcal{A}, \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}, A_i \text{ po dvou disjunktní} \implies \tilde{\mu} \left( \bigcup_i A_i \right) = \sum_i \tilde{\mu}(A_i).$$

### Věta 0.2 (Hahn-Kolmogorov)

Buď  $\tilde{\mu}$  pramíra na algebře  $\mathcal{A}$ . Pak existuje míra  $\mu$  na  $\sigma\mathcal{A}$  taková, že  $\mu = \tilde{\mu}$  na  $\mathcal{A}$ . Je-li  $\tilde{\mu}$   $\sigma$ -konečná, je  $\mu$  určena jednoznačně.

# 1 Konstrukce Lebesgueovy míry z vnější míry

## Definice 1.1 (Vnější míra (outer measure))

Nechť  $X \neq \emptyset$ . Funkce  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  je vnější míra na  $X$ , jestliže:

$$\mu^*(\emptyset) = 0,$$

$$A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B), \text{ (monotonie)}$$

$$A_i \subset X (i \in \mathbb{N}) \implies \mu^*\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mu^*(A_i). \text{ (spočetná subaditivita)}$$

┌  
*Například*

$$\mu^* \equiv 0,$$

$$\mu^* = \delta_x, x \in X,$$

$$\mu^*(A) = A,$$

$$\mu^*(A) := 0, A = \emptyset, \mu^*(A) := 1, A \neq \emptyset,$$

$$X = \mathbb{R}, \lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_i |I_i|, A \subset \bigcup_i I_i, I_i \text{ otevřené intervaly} \right\}$$

└

## Definice 1.2 (Měřitelnost vůči vnější míře)

Řekneme, že množina  $A \subset X$  je  $\mu^*$ -měřitelná, jestliže

$$\forall T \subset X : \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A). (*)$$

Značíme  $\mathcal{A}_{\mu^*} := \{A \subset X | A \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná}\}.$

┌  
*Poznámka*

Ať  $\mu^*$  je vnější míra na  $X$ ,  $Y \subset X$ . Pak restrikce  $\mu^*|_Y : A \mapsto \mu^*(A \cap Y)$  je vnější míra a platí:

$$\mathcal{A}_{\mu^*} \subset \mathcal{A}_{\mu^*|_Y}$$

┌  
*Důkaz*

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}_{\mu^*} : \mu^*|_Y(T) &= \mu^*(T \cap Y) = \mu^*(T \cap Y \cap A) + \mu^*((T \cap Y) \setminus A) = \\ &= \mu^*|_Y(T \cap A) + \mu^*|_Y(T \setminus A). \end{aligned}$$

└

□

**Věta 1.1** (Caratheodory)

$\mathcal{A}_{\mu^*}$  je  $\sigma$ -algebra na  $X$  a  $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$  je míra. Prostor  $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$  je úplný.

┌

*Důkaz*

$\emptyset \in \mathcal{A}_{\mu^*}$  je zřejmé. Uzavřenost na komplement je také snadná, z definice  $\mathcal{A}_{\mu^*}$ . Místo sjednocení ukážeme uzavřenost na konečný průnik: Víme  $T \subset X : \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$ ,  $\mu^*(T \cap A) = \mu^*(T \cup A \cap B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B)$  a  $\mu^*(T \setminus (A \cap B)) = \mu^*((T \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu^*((T \setminus (A \cap B)) \setminus A) = \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A)$ .

Tedy  $\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \setminus (A \cap B))$ .  
Tudíž  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  je algebra.

Nyní chceme ukázat, že  $\mu^*$  je  $\sigma$ -aditivní na  $\mathcal{A}_{\mu^*}$ : Buďte  $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$  po dvou disjunktní. Volbou  $T = A_1 \cup A_2$  dostaneme  $\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \implies \mu^*$  je konečně aditivní na  $\mathcal{A}_{\mu^*}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu^*(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^* \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \mu^* \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

Opačná nerovnost plyne ze spočetné subaditivity. To znamená, že  $\mu^* \left( \bigcup_i A_i \right) = \sum_i \mu^*(A_i)$ ,  $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ , po dvou disjunktní.

$\mathcal{A}_{\mu^*}$  je uzavřená na disjunktní spočetné sjednocení:  $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ , po dvou disjunktní,  $T \subset X$ .

$$\mu^*(T) = \mu^* \left( T \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right) + \mu^* \left( T \cap \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \geq \mu^* \left( T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + (\mu^*|_T) \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \text{TODO}$$

Limitním přechodem  $n \rightarrow \infty$  dostaneme

$$\mu^*(T) \geq \mu^* \left( T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*|_T)(A_i) = \mu^* \left( T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + (\mu^*|_T) \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

Z tohoto všeho plyne, že  $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$  je míra na  $\sigma$ -algebře  $\mathcal{A}_{\mu^*}$ . Zbývá už jen úplnost:

$$\mu^*(A) = 0, T \subset X \implies \mu^*(T) \geq \underbrace{\mu^*(T \cap A)}_{=0} + \mu^*(T \setminus A) \implies A \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

└

□

TODO!!!

**Věta 1.2** (Regularita Lebesgueovy míry)

Nechť  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Je ekvivalentní:

1.  $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ ,
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset E \subset G, F$  uzavřená,  $G$  otevřená,  $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$ ,
3.  $\exists A \subset E \subset B, A, B \in \mathcal{B}^n, \lambda^n(B \setminus A) = 0$ ,
4.  $E \in \mathcal{B}_0^n$ .

┌  
Důkaz

1  $\implies$  2: Mějme  $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}, \varepsilon > 0$ . Nechť nejprve  $\lambda^{n*}(E) < \infty$ . Pak  $\exists I_i \in \mathcal{O}_n, E \subset \bigcup_i I_i, \sum_i v(I_i) < \lambda^{n*}(E) + \frac{\varepsilon}{2}$ . Položme  $G := \bigcup_i I_i$  (otevřená),  $E \subset G, \lambda^n(G \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Je-li  $\lambda^{n*}(E) = \infty$ , pak ze  $\sigma$ -konečnosti je  $E = \bigcup_m E_m, E_m := E \cap [-m, m]^n, \lambda^{n*}(E_m) < \infty \implies \exists G_m$  otevřená,  $E_m \subset G_m, \lambda^n(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$ .  $G := \bigcup_m G_m$  otevřená,  $E \subset G, \lambda^n(G \setminus E) \leq \sum_m \lambda^n(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

$E^c \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}} \implies \exists H$  otevřená,  $E^c \subset H, \lambda^n(H \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$ .  $F := H^c$  uzavřená,  $F \subset E, \lambda^n(E \setminus F) = \lambda^n(E \setminus H^c) = \lambda^n(H \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$ . TODO

2  $\implies$  3: Nechť  $E \subset \mathbb{R}^n$  splňuje 2.

$$\forall j \in \mathbb{N} \exists F_j \subset E \subset G_j, F_j \text{ uzavřená}, G_j \text{ uzavřená}, \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}.$$

Položme  $A := \bigcup_j F_j, B := \bigcap_j G_j, A, B \in \mathcal{B}^n, A \subset E \subset B, \lambda^n(B \setminus A) \leq \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}$  pro libovolné  $j \in \mathbb{N}$ , tedy  $\lambda^n(B \setminus A) = 0$ .

3  $\implies$  4: Jsou-li  $A \subset E \subset B$  jako v 3, pak  $B \setminus A$  je  $\lambda^n$ -nulová množina, a tedy  $E \in \mathcal{B}_0^n$ .

4  $\implies$  1:  $\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$  obsahuje  $\mathcal{B}^n$  a nulové množiny, tedy obsahuje  $\mathcal{B}_0^n$ . □

### Věta 1.3 (Luzinova (běžně bývá obecnější))

Buď  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lebesgueovsky měřitelná. Buď  $\varepsilon > 0$ . Pak existuje  $G \subset \mathbb{R}^n$  otevřená taková, že  $\lambda^n(G) < \varepsilon$  a restrikce  $f|_{G^c}$  je spojitá.

┌  
Důkaz

Buď  $U_1, U_2, \dots$  posloupnost všech otevřených intervalů s racionálními koncovými body.  $f$  je lebesgueovsky měřitelná, tedy  $\forall j, f^{-1}(U_j) \in \mathcal{B}_0^n$ . Podle regularity pak  $\exists F_j \subset f^{-1}(U_j) \subset G_j, F_j$  uzavřená,  $G_j$  otevřená,  $\lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$ . Položme  $G := \bigcup_j (G_j \setminus F_j)$ . Zřejmě  $G$  je otevřená,  $\lambda^n(G) \leq \sum_j \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \varepsilon$ .

Pro restrikci  $g := f|_{G^c}$  platí:

$$g^{-1}(U_j) = \{x \in G^c : f(x) \in U_j\} = f^{-1}(U_j) \cap G^c = G_j \cap G^c, j \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě  $U \subset \mathbb{R}$  otevřená  $\implies U = \cup_{U_j \subset U} U_j$ , tedy  $g^{-1}(U) = \bigcup_{U_j \subset U} g^{-1}(U_j)$  otevřená množina v  $G^c$ , tedy  $g$  je spojitá na  $G^c$ . □

*Poznámka*

Obecně nelze požadovat  $\lambda^n(G) = 0$ . Např. charakteristická funkce diskontinua kladné míry (podobně jako Cantorovo diskontinuum, ale nenulové míry), které dostaneme tak, že z prostředků intervalů v  $i$ -tém kroku vždy odebereme intervaly délky  $a_i$  tak, aby  $a_1 + 2a_2 + 4a_3 + \dots < 1$ . ( $G$  z minulé věty pak bude sjednocení malých okolíček krajních bodů odebíraných intervalů.)

## 2 Regularita borelovských měr

### Definice 2.1 (Regulární borelovská míra)

Borelovská míra  $\mu$  na topologickém (metrickém) prostoru  $X$  je regulární, jestliže  $\forall B \in \mathcal{B}(X) : \mu(B) = \inf \{ \mu(G) \mid B \subset G, G \text{ otevřená} \}$ .

*Poznámka*

1) Často se hovoří o vnější regularitě (outer regular measure). 2) Pro konečné míry:  $\mu$  je regulární  $\implies \forall B \in \mathcal{B} : \mu(B) = \sup \{ \mu(F) \mid F \subset B, F \text{ uzavřená} \}$ .

### Věta 2.1

*Každá konečná borelovská míra na metrickém prostoru je regulární.*

┌

*Důkaz*

$(X, \varrho)$  metrický prostor,  $\mu$  borelovská míra na  $X$ ,  $\mu(X) < \infty$ . Označme

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}(X) \mid \varepsilon > 0 \exists F \subset B \subset G, F \text{ uzavřená}, G \text{ otevřená}, \mu(G \setminus F) < \varepsilon\}.$$

Ukážeme  $\mathcal{D} := \mathcal{B}(X)$ .  $\mathcal{D}$  obsahuje všechny množiny:  $F \subset X$  uzavřená,  $F_{<\varepsilon} := \{x \in X \mid \varrho(x, F) < \varepsilon\}$  (otevřená). Zřejmě  $F_{<\frac{1}{j}} \searrow F, j \rightarrow \infty$  z uzavřenosti  $F$ .  $\mu$  konečná  $\implies$  (spojitost míry)  $\mu F_{<\frac{1}{j}} \rightarrow \mu(F)$ .

$\mathcal{D}$  je  $\sigma$ -algebra:  $\emptyset \in \mathcal{D}, D \in \mathcal{D} \implies D^c \in \mathcal{D}$ :

$$F \subset D \subset G, \mu(G \setminus F) < \varepsilon \implies G^c \subset D^c \subset F^c, \mu(F^c \setminus G^c) < \varepsilon.$$

$D_i \in \mathcal{D} \implies \bigcup_i D_i \in \mathcal{D}$ :

$$\exists F_i \subset D_i \subset G_i, \mu(G_i \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

TODO!

$$\bigcup_{i=1}^N F_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i, N \in \mathbb{N}.$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \setminus \bigcup_{i=1}^? F_i$$

□

└

┌

*Poznámka*

$\sigma$ -konečné míry nemusí být regulární, viz prostor spočetně přímek procházejících počátkem v  $\mathbb{R}^2$ .

└

## Definice 2.2 (Těsnost (= vnitřní regularita))

Borelovská míra  $\mu$  na metrickém (topologickém) prostoru  $X$  je těsná (= tight), jestliže  $\forall B \in \mathcal{B}(X) : \mu(B) = \sup \{\mu(K) \mid K \subset B \text{ kompaktní}\}$ .

*Poznámka*

$\mu$  je Radonova míra, jestliže je těsná a konečná na kompaktech.

Pokud  $\mu$  je konečná a těsná, pak už je  $\mu$  regulární.

Jestliže  $\mu$  je konečná a regulární a  $\mu(X) = \sup \{\mu(K) \mid K \subset X \text{ kompaktní}\}$ , pak  $\mu$  je těsná.

## Věta 2.2

Pokud  $\mu$  je konečná borelovská míra na úplném separabilním metrickém prostoru, potom už je těsná.

┌

*Důkaz*

Stačí ukázat  $\mu(X) = \sup \{\mu(K) | K \subset X \text{ kompaktní}\}$ :  $S = \{x_1, x_2, \dots\} \subset X$  hustá spočetná (ze separability).  $\forall n \in \mathbb{N} : \bigcup_i \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i) = X$ . Nechť je dáno  $\varepsilon > 0$ . Pak  $\forall n \exists k_n : \mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}$  (ze spojitosti míry).

Definujeme  $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i) (\in \mathcal{B}(X))$ .  $A$  je totálně omezená (tzn.  $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset A$  kompaktní tak, že  $A \subset \bigcup_{x \in F} \overline{B_\varepsilon(x)}$ ).  $\overline{A}$  je totálně omezená a uzavřená  $\implies \overline{A}$  je úplný MP (+ totálně omezený), tedy  $\overline{A}$  je kompaktní.

$$\mu(X \setminus \overline{A}) \leq \mu(X \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)\right)\right).$$

└

□

## 3 Věta o rozšíření míry

### Věta 3.1 (Hahn-Komogorov)

Bud'  $\tilde{\mu}$  pramíra na algebře  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \implies$  existuje míra  $\mu$  na  $\sigma\mathcal{A}$  taková, že  $\mu = \tilde{\mu}$  ne  $\mathcal{A}$ . Je-li  $\tilde{\mu}$   $\sigma$ -konečná, je  $\mu$  určena jednoznačně.

┌

*Důkaz*

Pro  $E \subset X$  položíme  $\mu^*(E) := \inf \{\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i) | A_i \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}$ . Ověříme, že  $\mu^*$  je vnější míra.

$\forall A \in \mathcal{A} : \mu^*(A) = \tilde{\mu}(A)$ . Zřejmě  $\mu^*(A) \leq \tilde{\mu}(A)$ , jelikož můžeme pokrýt  $A$  množinami  $A, \emptyset, \emptyset, \dots$ . Pro  $\geq$  mějme  $A \subset \bigcup_i A_i, A_i \in \mathcal{A}$ .  $B_1 := A_1 \cap A, B_2 := (A_2 \cap A) \setminus B_1, \dots$  O nich víme, že  $A = \bigcup_i B_i, B_i$  po dvou disjunktní,  $B_i \in \mathcal{A}$ .  $\tilde{\mu}(A) = \sum_i \tilde{\mu}(B_i) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i)$ , tedy z definice infima  $\tilde{\mu}(A) \leq \inf_{A_i} \sum_i \tilde{\mu}(A_i) = \mu^*(A)$ .

Zbývá ukázat, že  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$ . TODO.

Jednoznačnost:  $\mathcal{A}$  uzavřená na konečné průniky,  $\tilde{\mu}$  je  $\sigma$ -konečná  $\implies \exists A_n \in \mathcal{A}, A_n \nearrow X, \tilde{\mu}(A_n) < \infty \implies \mu$  je jednoznačně určena (věta o jednoznačnosti míry, TMI1). □

*Poznámka* (Zobecnění příkladu z TMI1)

$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i$  úplné separabilní metrické prostory (např.  $E_i = \mathbb{R}$ ),  $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N} \dots E_I = E_i, E, E_I$  metrické prostory.  $\pi_I : E \rightarrow E_I$  kanonická projekce. A následující věta:

### Věta 3.2 (Daniell-Koleuogorov)

$E_i$  úplné separabilní metrické prostory,  $i \in \mathbb{N}$ . Nechť pro každou  $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$  existuje borelovská pravděpodobnostní míra  $\mu_I$  na  $E_I$ . A nechť je splněna projektivní vlastnost:

$$\emptyset \neq I \subset J \subset \mathbb{N} \text{ konečná, } \forall B \in \mathcal{B}(E_I) : \mu_I(B) = \mu_J\left((\pi_I^J)^{-1}(B)\right),$$

pak  $\exists!$  borelovská míra  $\mu$  na  $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$  taková, že  $\forall \emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$  konečná,  $\forall B \in \mathcal{B}(E_I) : \mu(\pi_I^{-1}(B)) = \mu_I(B)$ .

### Lemma 3.3

$$1) x_n, x \in E : x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n(i) \rightarrow x(i), i \in \mathbb{N},$$

$$x_n, x \in E_I : x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n(i) \rightarrow x(i), i \in I$$

2)  $\pi_I, \pi_I^J$  jsou spojitá zobrazení.

3)  $\forall I \in ?_f : E_I$  je úplný separabilní MP.

$$4) \mathcal{B}(E_I) = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i).$$

┌ Důkaz

1 jsme nedokazovali, 2 a 3 jsou triviální.

$$4) \bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i) = \sigma \{ \bigcap_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}(E_i) \} = \sigma \{ \bigcap_{i \in I} G_i \mid G_i \subset E_i \text{ otevřené} \},$$

tedy  $\bigcap_{i \in I} G_i$  je otevřená v  $E_I \implies \bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i) \subset \mathcal{B}(E_I)$ . Naopak  $U \subset E_I$  otevřená  $\implies U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ , kde  $U_n = G_i^n$ ,  $G_i^n \subset E_i$  otevřená  $\implies \mathcal{B}(E_I) \subset \bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i)$ . □

### Věta 3.4 (Daniell-Kolmogorov)

$E_i$  úplné separabilní metrické prostory  $i \in \mathbb{N}$ . Nechť pro každou  $I \in ?_f$  existuje borelovská pravděpodobnostní míra  $\mu_I$  na  $E_I$ . Nechť  $I \subset J, I, J \in ?_f \implies \mu_I = \mu_J(\pi_I^J)^{-1}$ . Pak existuje právě jedna borelovská pravděpodobnostní míra  $\mu$  na  $E$  taková, že

$$\forall I \in ?_f : \mu_I = \mu(\pi_I)^{-1}.$$

┌ Důkaz

TODO!

└ TODO! □



## 4 Charakterizace Riemannovsky integrovatelných funkcí

### Věta 4.1

*Bud'  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  omezená. Pak*

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \text{ je spojitá v } \lambda^1\text{-skoro všude na } (a, b).$$

Důkaz

$(\mathcal{D}_n)$  posloupnost zjemňujících se dělení intervalu  $[a, b]$ .

$$\mathcal{D}_n = \left\{ a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{k_n}^{(n)} = b \right\}, n \in \mathbb{N}, ||\mathcal{D}_n|| = \max_{1 \leq i \leq k_n} (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Označme  $s_n(x) := \inf_{[x^{(n)}_{i-1}, x^{(n)}_i]} f$ ,  $S_n(x) := \sup_{[x^{(n)}_{i-1}, x^{(n)}_i]} f$ ,  $x \in (x^{(n)}_{i-1}, x^{(n)}_i]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  a  $S_n(x) := 0$ ,  $S_n(x) := 0$  pro ostatní  $x \in \mathbb{R}$ . Toto jsou jednoduché měřitelné funkce.

Horní a dolní Riemannův součet splňuje

$$\int_a^b f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b s_n d\lambda^1, \overline{\int_a^b f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{D}_n)} = \int_a^b S_n d\lambda^1.$$

$|f| \leq M$ , tedy  $-M \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq S_2 \leq S_1 \leq M$ . Označme  $f_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ,  $f_2 := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  (bodové limity funkcí).

$$-M \leq s_n \searrow f_1 \leq f \leq f_2 \nearrow S_n \leq M, \text{ } qquad f_1, f_2 \text{ měřitelné.}$$

Ze zobecněné Leviho věty  $\int_a^b s_n d\lambda^1 \rightarrow \int_a^b f_1 d\lambda^1$ ,  $\int_a^b S_n d\lambda^1 \rightarrow \int_a^b f_2 d\lambda^1$ .

$$\implies : \text{Nechť } f \in R[a, b], \text{ tedy } \int_a^b f = \overline{\int_a^b f}.$$

$$\implies \int_a^b f_1 d\lambda^1 = \int_a^b f_2 d\lambda^1 \implies \int_a^b (f_2 - f_1) d\lambda^1 = 0 \implies f_1 = f_2 \lambda^1\text{-s.v.}$$

$$N := \{x \in [a, b] | f_1(x) \neq f_2(x)\} \cup \left\{ x_i^{(n)} | 0 \leq i \leq k_n, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \lambda^1(N) = 0.$$

Ukážeme, že  $f$  je spojitá ve všech bodech množiny  $(a, b) \setminus N$ : Buď  $x \in (a, b) \setminus N$ ,  $\varepsilon > 0$ . Potom  $f_1(x) = f_2(x) \implies \exists n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n(x) - s_n(x) < \varepsilon$ .  $I_n$  nechť je otevřený interval dělení  $\mathcal{D}_n$ , pro nějž  $x \in I_n$ . Pak

$$s_n(x) \leq f(y) \leq S_n(x), y \in I_n \implies |f(y) - f(x)| \leq 2\varepsilon, y \in I_n \implies f \text{ je spojitá v bodě } x.$$

$$\Leftarrow : \text{Nechť } \lambda^1(D) = 0, \text{ kde } D := \{x \in (a, b) : f \text{ není spojitá v } x\}. \text{ Ukážeme, že } S_n(x) - s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \implies S(f, \mathcal{D}_n) - s(f, \mathcal{D}_n) \rightarrow 0 \implies f \in R[a, b].$$

Nechť  $x \in (a, b) \setminus D$ ,  $\varepsilon > 0$ . Pak  $f$  je spojitá v bodě  $x \implies \exists \delta > 0$ ,  $|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon$ .

Zvolme  $n_0$  tak velké, aby  $||\mathcal{D}_n|| < \delta$ ,  $n \geq n_0$ . Pak  $S_n(x) - s_n(x) \leq 2 \sup \{|f(y) - f(x)| : |y - x| < \delta\} < 2\varepsilon$ . □

□

## 5 Pokrývací věty

*Poznámka (Úmluva)*

Koulí se myslí uzavřená koule,  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq r\}$ ,  $r > 0$ ,  $B = B(x, r)$ ,  $t > 0 \dots tB = B(x, t \cdot r)$ .

### Lemma 5.1 („5r“ covering)

Nechť  $\mathcal{F}$  je systém koulí v  $\mathbb{R}^n$  (uzavřené, nedegenerované),  $\sup_{B \in \mathcal{F}} B < \infty$ . Pak existuje disjunkttní podsystém  $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$  takový, že

$$\forall B \in \mathcal{F} \exists B' \in \mathcal{F}' : B \cap B' \neq \emptyset \wedge B \subset 5B'.$$

*Důsledek*

$$\bigcup \mathcal{F} \subset \bigcup_{B' \in \mathcal{F}'} 5B'$$

*Důkaz („5r“ covering)*

Označme  $R := \sup_{B \in \mathcal{F}} B$ .  $\mathcal{F}_k := \{B \in \mathcal{F} \mid B \in (\frac{R}{2^{k+1}}, \frac{R}{2^k}]\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Dále definujeme indukci systémy  $\mathcal{B}_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ :  $\mathcal{B}_0$  libovolný maximální disjunkttní podsystém  $\mathcal{F}_0$ . Máme-li  $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_k$ :  $\mathcal{B}_{k+1}$  libovolný maximální disjunkttní podsystém  $\{B \in \mathcal{F}_{k+1} \mid \forall B' \in \mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k : B \cup B' := \emptyset\}$ .  $\mathcal{F}' := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k$  disjunkttní podsystém  $\mathcal{F}$ .

Nyní už jen ověříme vztah ze znění: Nechť  $B \in \mathcal{F}$ , pak  $B \in \mathcal{F}_k \implies \exists B' \in \mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ ,  $B \cap B' \neq \emptyset$  (z maximality). Dále víme, že  $\frac{R}{2^{k+1}} < B \leq \frac{R}{2^k}$  a  $\frac{R}{2^{k+1}} < B'$ , tedy  $B < 2B'$ . Navíc  $B = B(x, r)$  a  $B' = B(x', r')$ ,  $r < 2r'$ ,  $B \cap B' \neq \emptyset$ , tedy  $\|x - x'\| \leq r + r'$ , tj.  $\forall y \in B : \|y - x'\| \leq \|y - x\| + \|x - x'\| \leq r + r + r' < 5r'$ .  $\square$

### Definice 5.1 (Vitaliovo pokrytí)

Nechť  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Řekneme, že systém uzavřených koulí  $\mathcal{F}$  je Vitaliovým pokrytím (Vitaly Cover) množiny  $A$ , jestliže

$$\forall a \in A \forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathcal{F} : a \in B, B < \varepsilon.$$

### Věta 5.2 (Vitaly Covering Theorem)

Nechť  $A \subset \mathbb{R}^n$  a  $\mathcal{F}$  je Vitaliovo pokrytí  $A$ . Pak existuje disjunkttní  $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$  takový, že  $\lambda^n(A \setminus \bigcup \mathcal{F}') = 0$ .

┌ *Důkaz*

BÚNO nechť  $\sup_{B \in \mathcal{F}} \lambda^n(B) \leq 1$ . „5r“ covering lemma nám pak říká, že  $\exists \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$  disjunktí takový, že platí

$$\forall B \in \mathcal{F} \exists B' \in \mathcal{F}' : B \cap B' \neq \emptyset \wedge B \subset 5B.$$

Ukážeme, že  $\lambda^n(A \setminus \bigcup \mathcal{F}') = 0$ . Označme  $Z_r := (A \setminus \bigcup \mathcal{F}') \cap U_r(\mathbf{o})$ ,  $\forall r > 0$ . Ukážeme, že  $\lambda^n(Z_r) = 0$ .

Označme  $\mathcal{F}'' := \{B' \in \mathcal{F}' \mid B' \cap U_r(\mathbf{o}) \neq \emptyset\}$  a  $\mathcal{F}_k'' := \{B' \in \mathcal{F}'' \mid B' \in (\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}]\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .  $\mathcal{F}'$  je disjunktí, tudíž

$$\sum_{B' \in \mathcal{F}''} \lambda^n(B') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{B' \in \mathcal{F}_k''} \lambda^n(B') \leq \lambda^n(B(0, r+2)) < \infty$$

$\implies \mathcal{F}_k''$  je konečný  $\forall k$ . Nechť je dáno  $\varepsilon > 0$ . Pak

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \sum_{k > k_0} \sum_{B' \in \mathcal{F}_k''} \lambda^n(B') < \varepsilon.$$

Zvolme pevně  $z \in Z_r$ . Zřejmě  $z \notin \bigcup_{k=0}^{k_0} \bigcup_{B' \in \mathcal{F}_k''} B' =: K$  (kompakt). Z vlastnosti Vitaliova pokrytí pak:

$$\exists B \in \mathcal{F} : B \cap K = \emptyset, z \in B, B \subset U_r(0).$$

Z vlastnosti pokrytí  $\mathcal{F}'$  zřejmě  $B' \in \mathcal{F}'$ ,  $B' \notin \bigcup_{k=0}^{k_0} \bigcup \mathcal{F}_k''$ , tj.  $z \in 5B' \implies Z_r \subset \bigcup_{k > k_0} \bigcup_{B' \in \mathcal{F}_k''} 5B' \implies \lambda^{n*}(Z_r) \leq \sum_{k > k_0} \sum_{B' \in \mathcal{F}_k''} \lambda^n(5B') < 5^n \varepsilon$ .  $\varepsilon \rightarrow 0$  nám dá  $\lambda^n(Z_r) = 0$ . □

## Definice 5.2 (Lebesgueova hustota)

Pro  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  definujeme  $\Theta^{n*}(A, a) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\lambda^{n*}(A \cap B(a, \varepsilon))}{\lambda^n(B(a, \varepsilon))}$  ( $\leq 1$ ) a  $\Theta_*^n(A, a) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\lambda^{n*}(A \cap B(a, \varepsilon))}{\lambda^n(B(a, \varepsilon))}$ , tzv. horní a dolní hustota množiny  $A$  v  $a$ . Pokud  $\Theta^{n*}(A, a) = \Theta_*^n(A, a)$ , pak definujeme Lebesgueovu hustotu  $A$  v  $a$  vztahem  $\Theta^n(A, a) = \Theta^{n*}(A, a)$ .

## Věta 5.3 (Lebesgueova o hustotě (Lebesgue Density Theorem))

Pokud  $A \subset \mathbb{R}^n$  je lebesgueovsky měřitelná, potom  $\Theta^n(A, \cdot) = \chi_A(\cdot)$   $\lambda^n$ -skoro všude.

┌ *Důkaz*

Stačí ukázat, že  $\Theta^n(A, a) = 1$  pro  $\lambda^n$ -skoro všechna  $a \in A$ . BÚNO nechť  $A$  je omezená (obecně:  $A \cap B(0, n)$ ,  $n \rightarrow \infty$ ) TODO. □

TODO

## Věta 5.4

Je-li  $A \subset \mathbb{R}^n$  lebesgueovsky měřitelná a  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$   $L$ -lipschitzovské, platí  $\lambda^{n*}(f(A)) \leq L^n \lambda^n(A)$ .

┌  
Důkaz

Je-li  $A \subset B = B(x, r)$ , pak  $f(A) \subset f(B) \subset B(f(x), L \cdot r) \implies \lambda^{n*}(f(A)) \leq L^n \lambda^n(B)$ .

Ukážeme, že pro  $N \subset \mathbb{R}^n$  nulovou (tj.  $\lambda^n(N) = 0$ ) je  $\lambda^n(f(N)) = 0$ :  $N$  nulová  $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists I_i$  otevřené kvádry,  $N \subset \bigcup_i I_i$ ,  $\sum_i \lambda^n(I_i) < \varepsilon$ .

Můžeme zařídit, aby  $\frac{r(I_i)}{R(I_i)} \geq \eta > 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , kde  $R(I)$  a  $r(I)$  jsou poloměry opsané a vepsané koule  $I$ : Rozdělíme intervaly vůči delší straně.

Když  $B_i$  jsou koule opsané  $\overline{I_i}$ , pak  $\lambda^n(B_i) \leq \eta^{-n} \lambda^n(I_i)$  ( $B'_i \subset I_i \subset B_i \dots \lambda^n(I_i) > \lambda^n(B'_i) \geq \eta^n \lambda^n(B_i)$ ).

$$\lambda^{n*}(f(N)) \leq \lambda^{n*}\left(\bigcup_i f(I_i)\right) \leq \lambda^{n*}\left(\bigcup_i f(B_i)\right) \leq \sum_i \lambda^{n*}(f(B_i)) \leq L^n \sum_i \lambda^n(B_i) \leq \left(\frac{L}{\eta}\right)^n \sum_i \lambda^n(I_i) < \left(\frac{L}{\eta}\right)^n \varepsilon$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \dots \lambda^{n*}(f(N)) = 0.$$

$A \subset \mathbb{R}^n$  měřitelná,  $\varepsilon > 0$ , BÚNO nechť  $\lambda^n(A) < \infty$  (jinak je nerovnost triviální).  $\lambda^n$  regulární  $\implies \exists G \supset A$  otevřená, že  $\lambda^n(G) < \lambda^n(A) + \varepsilon$ .  $\mathcal{F} := \{B \text{ uzavřená koule} \mid B \subset G\}$  Vitaliovo pokrytí  $G \implies B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$  disjunktní,  $\lambda^n(G \setminus \bigcup_i B_i) = 0$ .

$$\lambda^{n*}(f(A)) \leq \lambda^{n*}(f(G)) \leq \lambda^{n*}\left(\bigcup_i f(B_i) \cup f(N)\right) \leq \sum_i \lambda^{n*}(f(B_i)) + \lambda^{n*}(f(N)) \leq L^n \sum_i \lambda^n(B_i) = L^n \lambda^n(A)$$

└

□

### Definice 5.3 (Funkcionální norma)

Pro  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineární zobrazení, definujeme  $\|L\| := \sup_{\|u\| \leq 1} \|Lu\|$ .

Poznámka

Označme  $\delta(L) := \inf_{\|u\|=1} \|Lu\|$ ,  $L$  regulární  $\Leftrightarrow \delta(L) > 0$ . Tedy platí

$$\delta(L) \|u\| \leq \|Lu\| \leq \|L\| \cdot \|u\|, u \in \mathbb{R}^n.$$

### Tvrzení 5.5

$L, M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dvě regulární lineární zobrazení. Nechť existuje  $\gamma > 0$  takové, že  $\forall u \in \mathbb{R}^n : \|Lu\| \leq \gamma \|Mu\|$ . Pak  $|\det L| \leq \gamma^n |\det M|$ .

┌

*Důkaz*

a) Necht  $M = \text{id}$ . Z předpokladů plyne, že pro každou kouli  $B = B(O, R)$  je  $L(B) \subset \gamma B$ , tedy

$$|\det L| \lambda^n(B) = \lambda^n(L(B)) \leq \gamma^n \lambda^n(B) \implies |\det L| \leq \gamma^n.$$

b) Pro  $M$  obecné: ( $v = Mu$ ),

$$\|LM^{-1}v\| \leq \gamma \|v\|, v \in \mathbb{R}^n \implies |\det LM^{-1}| \leq \gamma^n \implies |\det L| \leq \gamma^n |\det M|.$$

└

□