Příklad (6.1)
Dětská stavebnice obsahuje 8 červených a 8 modrých destiček ve tvaru rovnostranného trojúhelníka. Kolika způsoby z nich lze sestavit velký trojúhelník o čtyřnásobné hraně

(a) až na otočení,

(b) až na otočení a převrácení?

Řešení ((a))
Grupa symetrií otočení trojúhelníku je 3 prvková (vše je plně určeno, kam se zobrazí daný vrchol trojúhelníku). id klasicky zachovává všechny trojúhelníky, tedy $|G_{\mathrm{id}}| = \binom{16}{8}$ (použijeme všechny trojúhelníky a jen volíme, kterých 8 bude červených, zbytek budou modré).

Naopak stabilizátor obou netriviálních rotací je prázdný, protože obě rotace jsou 5 trojcyklů a 1 „jednocyklus“, tudíž počet shodných trojúhelníčků musí dávat zbytek 0 nebo 1 po dělení 3. Ale 8 děleno 3 dává zbytek 2. Podle Burnsideovy věty je počet způsobů

$$\frac{1}{3}\left(\binom{8}{16} + 2 \cdot 0\right) = 4290.$$

Řešení ((b))
Tentokrát máme grupu $D_{2\cdot 3}$, která má 6 prvků. 3 prvky se shodují, tedy není třeba je řešit. Další 3 jsou osové symetrie. Ty zachovávají ty trojúhelníky, které mají „levých“ 6 trojúhelníčků shodných s „pravými“ 6.

To znamená, že buď 4 z nich jsou červené a „prostřední 4“ modré. Nebo jsou 3 červené a 3 modré, tedy potom ještě vybíráme 2 ze 4 „prostředních“ a nebo jsou 4 z nich modré. Potom Burnsideova věta dává

$$\frac{1}{6}\left(\binom{16}{8} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \left(\binom{6}{4} + \binom{6}{3}\binom{4}{2} + \binom{6}{2}\right)\right) = 2222.$$

Příklad (6.2)
Popište pomocí první věty o izomorfismu, jak vypadá faktogrupa $\mathbb{R}^*/\{-1,1\}$.

Řešení
Absolutní hodnota je zřejmě homeomorfismus $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^+$ (při násobení v absolutní hodnotě můžeme všechny znaménka vytknout a „smazat“, tedy vše probíhá jako v $\mathbb{R}^+$), kde $\mathbb{R}^+$ jsou kladná reálná čísla s násobením. Navíc jádro je $\{-1,1\}$. Tedy podle 1. věty o izomorfismu je $\mathbb{R}/\{-1,1\} \simeq \mathbb{R}^+$.

Příklad (6.3)
Nalezněte minimální polynom $m_{a,\mathbb{Q}}$, kde $a = 1 + \sqrt{5}$.

Řešení
Jelikož $1 + \sqrt{5}$ zřejmě není prvek $\mathbb{Q}$, tak $m_{a,\mathbb{Q}}$ musí být stupně nejméně 2. Všimneme si, že $a^2 = 1 + 2\sqrt{5} + 5$, kde se můžeme zbavit $\sqrt{5}$ odečtením $2a$. Potom už zbývá jen 4, ale to už je prvek $\mathbb{Q}$. Tedy $a^2 - 2a - 4 = 0$. Neboli $m_{a,\mathbb{Q}} = x^2 - 2x - 4$.

Příklad (6.4)
Určete stupeň rozšíření $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) : \mathbb{Q}]$ a nalezněte nějakou bázi $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$ nad $\mathbb{Q}$.

Řešení
Z tvrzení o stupni jednoduchého rozšíření je $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) : \mathbb{Q}] = \deg m_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}}$. Tedy stačí najít minimální polynom. Polynom $x^4 - 5 = 0$ je nerozložitelný, jelikož je primitivní nad $\mathbb{Z}$, z Einsteinova kritéria je tedy ireducibilní nad $\mathbb{Z}$ ($5|5$, $5|0$, $5|0$, $5|0$, $5 \nmid 1$, $5^2 \nmid 5$), a z toho už víme, že je ireducibilní i v podílovém tělese – v $\mathbb{Q}$. Tedy $m_{\sqrt[4]{5},\mathbb{Q}} = x^4 - 5$. Tedy $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) : \mathbb{Q}] = 4$.

Jako báze se nabízí $(1, \sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{5}^2, \sqrt[4]{5}^3)$. To že tato posloupnost generuje celé $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$ nad $\mathbb{Q}$ se ověří snadno (obsahuje $\sqrt[4]{5}$ a jakýkoliv násobek lineární kombinace této posloupnosti lze vyjádřit zase jako lineární kombinaci, jelikož násobením $\sqrt[4]{5}^i$ spolu vznikají zase jen $\sqrt[4]{5}^j$, ze kterých můžu vytknout celé číslo a zbytek bude $\sqrt[4]{5}^k$, pro $k < 4$). A je lineárně nezávislá, jelikož generuje celé $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$ nad $\mathbb{Q}$ a takový generátor musí mít dimenzi alespoň 4. (Pokud by byla lineárně závislá, tak umíme vytvořit posloupnost délky 3, která generuje tento VP.)