

Organizační úvod

TODO!!!

Úvod

TODO!!!

1 Shodná zobrazení

Definice 1.1

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí $\|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$.

Lemma 1.1

Přímo z definice plyne, že složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti je opět shodnost.

┌
Důkaz
└ Triviální.

□

TODO!!!

Definice 1.2 (Grupa)

Množinu s jedinou binární operací (M, \circ) nazveme grupou, jestliže je tato operace asociativní, existuje pro ní neutrální (jednotkový) prvek a ke každému prvku existuje prvek inverzní.

Důsledek (Grupa shodností)

Shodnosti jsou surjektivní a vzhledem ke skládání tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{E}(n)$.

┌
Důkaz
Shodná zobrazení jsou tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$, $g(\mathbf{X}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{q}$, kde \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou ortogonální.
Potom

$$f^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}, (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q}.$$

└

□

Definice 1.3 (Přímé zobrazení)

Zobrazení f nazveme přímé, jestliže $\det \mathbf{A} = 1$, a nepřímé, jestliže $\det \mathbf{A} = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu $\mathbb{E}_+(n)$. Zobrazení, pro která je \mathbf{A} jednotková matice nazýváme posunutí a tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž \mathbb{R}^n . Zobrazení, pro která je \mathbf{p} nulový vektor tvoří podgrupu označovanou $\mathbb{ON}(n)$ (ortonormální grupa).

Důkaz

To, že jsou to podgrupy se dokáže jednoduše přes uzavřenosti. □

Poznámka

Shodná zobrazení můžeme vyjádřit jako kartézský součin, ale grupové operace by pak nefungovali. Proto je množina shodných zobrazení definovaná tzv. semidirektním součinem: $\{(\mathbf{A}, \mathbf{p})\} = \mathbb{ON} \ltimes \mathbb{R}^n$.

Věta 1.2

Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$ platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici rozměrů $(n+1) \times (n+1)$, tj.

$$f \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

Důkaz

Plyne z maticového násobení. □

Definice 1.4 (Asociovaný homomorfismus, samodružné směry, samodružné body)

Mějme shodné zobrazení $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$. Jeho body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme samodružné body. Lineární zobrazení $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dané maticí \mathbf{A} nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f .

Řekneme, že množina M je samodružná množina zobrazení f , jestliže ji zobrazení zachovává (jako celek, ne nutně každý její bod zvlášť). Přesněji jestliže platí

$$\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{X} \in M \implies f(\mathbf{X}) \in M.$$

Lemma 1.3

Přímka $p : C + \langle \mathbf{v} \rangle$ je samodružnou množinou shodnosti f právě tehdy, když $\langle \mathbf{v} \rangle$ je jeho samodružný směr a $f(C) - C$ je násobkem \mathbf{v} .

Důkaz

Ať $\mathbf{D} = \mathbf{C} + \mathbf{v}$. Z linearit je p samodružná právě tehdy, když $f(\mathbf{C}), f(\mathbf{D}) \in p$. To už dokážeme rozepsáním. \square

Věta 1.4 (Klasifikační věta v \mathbb{R}^2)

Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(2)$ nastane právě jedna z těchto možností:

f je přímá shodnost a

- má všechny body samodružné a všechny směry samodružné s vlastním číslem 1. Pak jde o identitu.
- má právě jeden samodružný bod, pak ji nazýváme otočení. Samodružné směry pak nemá buď žádné, nebo všechny s vlastním číslem -1. Tedy jde libovolné otočení nebo o otočení o π (= středová souměrnost).
- nemá žádný samodružný bod a všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem 1. Pak ji nazýváme posunutí.

f je nepřímá shodnost. Pak má právě dva samodružné směry, jeden s vlastním číslem 1 a jeden s vlastním číslem -1 a

- buď má právě jednu přímku samodružných bodů, pak ji nazýváme osová souměrnost,
- nebo nemá žádné samodružné body, pak ji nazýváme posunutá osová souměrnost.

Definice 1.5 (Kvaterniony)

Kvaterniony jsou algebra nad \mathbb{R}^4 , kde kanonická báze se značí $1, i, j, k$ a $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.

TODO kvaterniony.

TODO!!!

2 Křivky

TODO!!!

Definice 2.1 (Reparametrizace, změna parametru)

Je-li $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulární parametrická křivka a $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$ hladký difeomorfismus intervalu \tilde{I} na I (tedy hladká bijekce s hladkým inverzním zobrazením), je $\tilde{c} = c \circ \varphi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulární parametrická křivka se stejným obrazem jako c . Difeomorfismus φ pak nazýváme změnou parametru a \tilde{c} reparametrizací c . Je-li navíc $\varphi' > 0$ na \tilde{I} , nazveme \tilde{c} reparametrizací c zachovávající orientaci.

Definice 2.2 (Křivka, orientovaná křivka)

Býti reparametrizací je relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme křivka. Každého zástupce příslušné třídy ekvivalence nazýváme parametrizací této křivky. Býti reparametrizací zachovávající orientaci je rovněž relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme orientovaná křivka.

┌

Důkaz

Reflexivita: $c \text{oid} = c$ (difeomorfismus s kladnou derivací). Symetrie: $\tilde{c} = c \circ \varphi \Leftrightarrow c = \tilde{c} \circ \varphi^{-1}$ (pokud je $\varphi' > 0$, pak $(\varphi^{-1})' > 0$). Transitivita:

$$\tilde{\tilde{c}} = \tilde{c} \circ \varphi \wedge \tilde{c} = c \circ \psi \implies \tilde{\tilde{c}} = c \circ \psi \circ \varphi.$$

(Navíc $(\psi \circ \varphi)' = \psi' \cdot \varphi'$).

└

□

Poznámka

Dále budeme reparametrizaci označovat pouze změnou parametru a tečka bude značit derivaci podle t , čárkou pak podle s .

Lemma 2.1

Pro derivace dvou parametrizací $c(t)$ a $c(s) = c(\varphi(s))$ téže hladké regulární křivky v každém odpovídajícím bodě platí

$$(\dot{c}|\ddot{c}|\ddot{\tilde{c}}) = (c'|c''|c''') \begin{pmatrix} \dot{\varphi} & \ddot{\varphi} & \ddot{\ddot{\varphi}} \\ 0 & \dot{\varphi}^2 & 3\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi}^3 \end{pmatrix}.$$

┌ Důkaz

$$\begin{aligned}\dot{c} &= \frac{dc}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = c' \cdot \dot{\varphi} \quad \left(dcdt|_{\varphi(s_0)} \cdot \frac{d\varphi}{ds}|_{s_0} \right) . \\ \ddot{c} &= \frac{d}{ds} (c' \cdot \dot{\varphi}) = c' \cdot \ddot{\varphi} + \frac{dc'}{ds} \cdot \dot{\varphi} = c' \ddot{\varphi} + c''(\dot{\varphi})^2 . \\ \ddot{\ddot{c}} &= \frac{d}{ds} (c' \ddot{\varphi} + c''(\dot{\varphi})^2) = c' \cdot \ddot{\ddot{\varphi}} + c'' \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + c'' \cdot 2\dot{\varphi} \ddot{\varphi} + c''' \cdot (\dot{\varphi})^3 .\end{aligned}$$

└ □

2.1 Rovinné křivky

Definice 2.3 (Tečný vektor, orientovaný jednotkový normálový vektor, znaménková křivost)

V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $c(t)$ v \mathbb{R}^2 definujeme jednotkový tečný vektor

$$\mathbf{t}(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|},$$

dále orientovaný jednotkový normálový vektor

$$\mathbf{n}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t),$$

a znaménkovou křivost

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(c'(t)|c''(t))}{\|c'(t)\|^3}.$$

Bod, kde je znaménková křivost nulová, nazýváme inflexní.

Věta 2.2

Při reparametrizaci křivky v \mathbb{R}^2 zachovávající orientaci se v daném bodě tečný vektor, orientovaný normálový vektor a znaménková křivost nemění. Při reparametrizaci, která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné a znaménková křivost pouze změní znaménko.

┌ Důkaz

└ Jen dosadíme z minulého lemmatu. □

Věta 2.3

Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou ekvivariantní vůči schodnostem \mathbb{R}^2 . Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(X) = AX + p$, parametrickou křivku $c(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ_z , t , n_ . Pak křivka $\tilde{c} = f(c(t)) = Ac(t) + p$ má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost $\tilde{\kappa}_z = \kappa_z \det A$, normálový vektor $\tilde{n}_* = An_s \det A$ a tečný vektor $\tilde{t} = At$.*

┌
Důkaz
Rozepsáním.
└

□

Věta 2.4

Křivka má v každém svém bodě kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou (ze všech přímek) a v každém neinflexním bodě s oskulační kružnicí (ze všech rovnic).

Věta 2.5

Pro hladkou regulární parametrickou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ platí

$$t'(t) = \|c'(t)\| \varkappa_2(t) n_*(t).$$

Dále platí, že existuje hladká funkce $\vartheta(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $t(t) = (\cos \vartheta(t), \sin \vartheta(t))$ pro $t \in I$ a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\varkappa_2(t) = \frac{\vartheta'(t)}{\|c'(t)\|}, t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $\|c'(t)\| = 1$, pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny směru křivky.

┌
Důkaz

$$t(t)' = \left(\frac{c'}{\|c'\|} \right)' = \frac{\sqrt{c' \cdot c''} - \frac{1}{2} \frac{2c' \cdot c''}{\sqrt{c' \cdot c'}} c'}{c' \cdot c'} = \frac{\|c'\|^2 c'' - (c' \cdot c'') c'}{\|c'\|^3}.$$

Dokážeme, že $(t' \perp t) \Leftrightarrow (t' \perp c')$.

$$t' \cdot c' = \frac{1}{\|c'\|^3} [(\|c'\|^2 c'' - (c' \cdot c'') c') \cdot c'] = \|c'\|^2 (c'' \cdot c') - (c' \cdot c'')(c' \cdot c') = 0,$$

tedy existuje $K \in \mathbb{R}$, že $t' = K \cdot n_*$.

$$\det(t, t') = \det(t, K n_*) = K \det(t, n_*) = K.$$

$$\begin{aligned} \det(t, t') &= \det\left(\frac{c'}{\|c'\|}, \frac{\|c'\|^2 c'' - (c' \cdot c'') c'}{\|c'\|^3}\right) = \frac{1}{\|c'\|^4} \det(c', \|c'\|^2 c'') + 0 = \\ &= \frac{\det(c', c'')}{\|c'\|^3} \|c'\| = \varkappa_2 \cdot \|c'\|. \end{aligned}$$

└ K důkazu úhlu bychom potřebovali komplexku. (Pro důkaz existence.)

□

2.2 Křivky v prostoru

Definice 2.4 (Jednotkový tečný vektor, křivost, binormála, jednotkový normálový vektor, torze)

Jednotkový tečný vektor bude totožný, křivost (tentokrát není znaménková) je totožná, jen místo determinantu je velikost vektorového součinu. Dále definujeme binormálu (normovaný vektorový součin první a druhé derivace), normála je pak vektorový součin binormály a tečny.

$$\text{Torze je } \tau(t) = \frac{\det(c'(t)|c''(t)|c'''(t))}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2}.$$

Definice 2.5 (Oskulační, retriřikační a normálová rovina)

Oskulační rovina je množina $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \rangle$, retriřikační rovina je množina $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t) \rangle$ a normálová rovina je $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t) \rangle$.