Příklad (9.1)
Existuje komplexní hermitovská matice A řádu 3 splňující následující vztah?

$$f_A\left((1+2i,3+4i,-1-i)^T\right) = (-2+i,-4+3i,1-i)^T$$

Řešení
Neexistuje: Nechť tedy pro spor máme takovou matici $A = A^*$, která splňuje

$$A(1+2i,3+4i,-1-i)^T = (-2+i,-4+3i,1-i)^T.$$

Potom můžeme tuto rovnici hermitovsky sdružit (víme, že $(AB)^* = B^*A^*$):

$$(1-2i,3-4i,-1+i)A^* = (1-2i,3-4i,-1+i)A = (-2-i,-4-3i,1+i).$$

Následně původní rovnici vynásobíme $(1-2i,3-4i,-1+i)$ zleva a dosadíme druhou rovnici:

$$(1-2i,3-4i,-1+i)A(1+2i,3+4i,-1-i)^T = (-2-i,-4-3i,1+i)(1+2i,3+4i,-1-i)^T = -32i =$$

$$= 32i = (1-2i,3-4i,-1+i)(-2+i,-4+3i,1-i)^T$$

Spor $\lightning$.

Příklad (9.2)
Označme výraz

$$V(a,b,c) = 3a^2+2b^2+4c^2-4ab+2ac-3bc.$$

Dokažte, že $V(a,b,c) \geq 0$ pro libovolná reálná čísla a,b,c.

Důkaz
Začneme tím, že vytvoříme horní trojúhelníkovou matici $\tilde{A}$ tak, aby $V(a,b,c) = (a,b,c)\tilde{A}(a,b,c)^T$. Není těžké si rozmyslet, že prvek v 1. řádku v 1. sloupci (odpovídající a^2) musí být 3, v 1. řádku a 2. sloupci (odpovídající $a \cdot b$) musí být -4… Takto dostaneme

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Můžeme si všimnout, že ze stejného důvodu $V(a,b,c) = (a,b,c)\tilde{A}^T(a,b,c)^T$. Tedy můžeme dostat stejný výraz se symetrickou maticí jako:

$$V(a,b,c) = \frac{(a,b,c)\tilde{A}(a,b,c)^T + (a,b,c)\tilde{A}^T(a,b,c)^T}{2} = (a,b,c)\frac{\tilde{A}+\tilde{A}^T}{2}(a,b,c)^T =: (a,b,c)A(a,b,c)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1.5 \\ 1 & -1.5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Podle Wolfram Mathematica má tato matice vlastní čísla přibližně $\{6.03926, 2.63024, 0.330507\}$, což je rozhodně kladné a tedy podle tvrzení 10.19 je matice pozitivně definitní, což podle definice 10.18 není nic jiného než, že:

$$\forall \mathbf{o} \neq (a,b,c)^T \in \mathbb{R}^3 : V(a,b,c) = (a,b,c)A(a,b,c)^T > 0.$$

A pro $(a,b,c) = \mathbf{o}$ je zřejmě $V(a,b,c) = 0$. $\square$