Příklad (11)
Let $X = C^\infty([0,1])$ be the space of C^∞ functions on $[0,1]$ (i.e., C^∞ functions on $(0,1)$ such that all the derivatives can be continuously extended to $[0,1]$) equipped with the family of seminorms $\mathcal{P}$:

$$p_n(f) = \sup_{t\in[0,1]} \left|f^{(n)}(t)\right|, \qquad f \in X \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

1. Describe a base of neighborhoods of zero.

Řešení
Podle Věty 5 je báze okolí **o** rovná

$$\{\{x \in X | \tilde{p}_1(x) < c_1, \ldots, \tilde{p}_k(x) < c_k\} | \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k \in \mathcal{P}, c_1, \ldots, c_k > 0\},$$

tedy jsou to množiny těch funkcí, které mají vždy určité (konečný počet) derivace omezené určitými konstantami.

2. Is X Hausdorff? Is X metrizable? Is it a Fréchet space?

Řešení
Je Hausdorfův, protože pro každou nenulovou $f \in C^\infty$ je už p_0 nenulová (a použijeme Větu 5 z přednášky). Z Věty 5 také plyne, že X je (s kanonickou topologií) LCS, tedy podle Věty 22 (i a iv) je X metrizovatelný.

Aby to byl Fréchetův prostor, musíme ukázat, že je úplný: Mějme tedy cauchyovskou posloupnost (podle tvrzení 21. je tedy cauchyovská v každé p_n). To znamená, že každá i-tá derivace konverguje stejnoměrně, tedy konverguje k derivaci $(i-1)$-ní derivaci (o záměně limity a derivace) a zároveň k spojité funkci (stejnoměrná konvergence spojitých funkcí je spojitá), tedy limita posloupnosti má všechny derivace spojité.

3. Is X normable?

Řešení

Podle Věty 23 nám stačí rozhodnout, zda existuje omezené (podle lemma 15 omezené v každé normě) okolí **o**. Každé okolí **o** musí obsahovat množinu z báze okolí **o**. Ale taková množina je omezená vždy jen v konečně mnoha pseudonormách. Je-li p_n poslední norma (to neznamená, že v nějaké menší není omezena), ve které je daná množina omezená, ε minimum z konstant z definice báze okolí **o** (BÚNO $\varepsilon < 1$), pak můžeme pro každé $1 < K \in \mathbb{R}$ najít $f(x) = \varepsilon \frac{\varepsilon^n}{K^n} gon_n \left(\frac{K}{\varepsilon} x\right)$, kde ($gon_i$ je sin pro sudé i a cos pro liché i), což je funkce, která je jistě C^∞, pro $k \leqslant n$ je

$$p_k(f) = \sup_{x \in [0,1]} \left| f^{(k)}(x) \right| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{n-k}}{K^{n-k}} gon_{n-k} \left(\frac{K}{\varepsilon} x \right) \right| \leqslant \sup_{x \in [0,1]} \varepsilon \cdot 1 \cdot 1 = \varepsilon,$$

ale

$$p_{n+1}(f) = \sup_{x \in [0,1]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| = \sup_{x \in [0,1]} \left| K \cdot \cos \left(\frac{K}{\varepsilon} x \right) \right| = K.$$

Tedy p_{n+1} na tomto okolí je neomezená. Tedy neexistuje okolí **o**, které by bylo omezené, tedy prostor X není normovatelný.

4. Describe all the continuous linear functionals on X.

Řešení

Podle Tvrzení 14 musí pro $\varphi \in X^*$ existovat $c > 0$, $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n \in \mathcal{P}$, že $\forall f \in X : |L(f)| \leqslant c \cdot \max\{\tilde{p}_1(f), \dots, \tilde{p}_n(f)\}$.

Pokud v předchozí n-tici norem máme pouze jednu, p_k, pak se můžeme podívat, jak působí tento funkcionál na k-tou derivaci $f \in X$ jako prvek prostoru $C([0,1])$, tj. $f^{(k)} \in C([0,1])$. $|L(f)| \leqslant c \cdot p_k(f) = c \cdot \|f^{(k)}\|_\infty$, tedy L je spojitá (a zřejmě lineární) i na $\left\{f^{(k)}\right\} \subset C([0,1])$. Navíc z Weierstrassovy věty je $\left\{f^{(k)}\right\}$ (libovolné nekonečně hladké funkce, neboť „odderivovat“ můžeme vždy neurčitým Lebesgueovým integrálem, který je spojitý) hustá v $C([0,1])$, tedy L jednoznačně určuje prvek $C([0,1])^* = \mathcal{M}([0,1])$ (regulární borelovské znaménkové míry).

Naopak libovolný prvek $\mu \in C([0,1])^*$ lze aplikovat na $\left\{f^{(k)}\right\}$ a splňuje podmínku $\forall f \in X : |\mu(f)| := |\mu(f^{(k)})| \leqslant \|\mu\| \cdot \|f^{(k)}\|_\infty = c \cdot p_k(f)$. Tedy spojité funkcionály splňující $|L(f)| \leqslant c \cdot p_k$ odpovídají (pro každé k zvlášť) jedna ku jedné $C([0,1])^*$.

Pokud máme dvojici (a obdobně pro trojici, čtveřici, …) norem p_k a p_l v podmínce ze začátku, můžeme se k-tou a l-tou derivaci dívat jako na dvojici spojitých funkcí (zapomeneme, že je mezi nimi nějaká souvislost a že musí být hladké), tedy na prostor $C([0,1]) \times C([0,1])$. Pokud přidáme k tomuto prostoru normu $\|(g,h)\| = \max\{\|g\|, \|h\|\}$, pak $|L(f)| \leqslant c \cdot \max\{p_k(f), p_l(f)\}$ je totéž jako L spojité na naší podmnožině $C([0,1]) \times C([0,1])$ s touto normou neboli $C([0,1]) \oplus_\infty C([0,1])$. Každé takový lineární spojitý funkcionál lze rozšířit na celé $C([0,1]) \oplus_\infty C([0,1])$ My ale víme, že $(X \oplus_p Y)^* = X^* \oplus_q Y^*$, kde q je sdružený koeficient k p. Takže všechny lineární funkcionály splňující $L(f) \leqslant c \cdot \max\{p_k(f), p_l(f)\}$ jsou „podmnožinou“ $\mathcal{M}([0,1]) \oplus_1 \mathcal{M}([0,1])$ (aplikujeme na k-tou a l-tou derivaci). Opačnou „inkluzi“ také víme, neboť $\mathcal{M}([0,1])$ aplikované na k-tou, respektive l-tou, derivaci jsou funkcionály na X, tedy i jejich součet bude.

Tedy funkcionály na X budou (ne jednoznačného) tvaru $\mathcal{M}([0,1])^n$, pro každou n-tici $k_1, k_2, \dots, k_n$, kde aplikace znamená, že aplikujeme první míru na k_1-tou derivaci, druhou na k_2-tou derivaci, …