Příklad (4.1 – Střední hodnota versus pravděpodobnost)
Bob navrhne Alici následující hru: „Tady mám minci, která není spravedlivá – pravděpodobnost, že na ní padne hlava je $p \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Tvůj počáteční vklad je 100 Kč a pokaždé, když na minci padne hlava, tvůj kapitál zdvojnásobím. Pokud padne orel, tak mi naopak dáš polovinu svého kapitálu. Označme X_n hodnotu tvého kapitálu po n-tém hodu mincí. Je zřejmé, že $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \infty$, takže očekávaná hodnota tvého kapitálu poroste nade všechny meze.“

Je pro Alici výhodné takovou hru hrát? Ověřte Bobovo tvrzení a ukažte, že [$\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ skoro jistě.

Řešení
Označme si Y_n jako indikátor, že v n-tém hodu padla hlava. Potom $X_{n+1} = \frac{X_n}{2} + Y_{n+1} \cdot X_n \cdot \frac{3}{2}$.

$$\mathbb{E}X_n = \frac{\mathbb{E}X_{n-1}}{2} + \frac{3}{2} \cdot \mathbb{E}(Y_n \cdot X_{n-1}) = \frac{\mathbb{E}X_{n-1}}{2} + \frac{3}{2} \cdot \mathbb{E}Y_n \cdot \mathbb{E}X_{n-1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}p\right) \mathbb{E}X_{n-1}$$

Neboť Y_n a X_{n-1} jsou zřejmě nezávislé. To, co nám vyšlo, je ale geometrická posloupnost s koeficientem $q = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}p > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, tedy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = 100 \cdot q^{n-1} = \infty$.

Důkaz

$\square$