Příklad (1.1 – Bonferroniho nerovnost)
Buďte $A_1, \ldots, A_n$ náhodné jevy z pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak platí

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j).$$

Dokažte.

Důkaz
$\bigcup_{i=1}^n A_i$ můžeme také napsat jako $\bigcup_{i=1}^n A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_i \cap A_j\right)$, tedy z každé množiny necháme jen tu část, která neprotíná předchozí množiny. Tím jsme ze získali disjunktní systém, tedy z konečné aditivity pravděpodobnosti:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_i \cap A_j\right)\right) = \sum_{i=1}^n P\left(A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_i \cap A_j\right)\right).$$

Nyní víme, že

$$\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_i \cap A_j\right) \cup \left(A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_i \cap A_j\right)\right) = A_i$$

a že tyto dvě množiny jsou disjunktní, tedy podle konečné aditivity pravděpodobnosti je

$$\sum_{i=1}^n P\left(A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_i \cap A_j\right)\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - P\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_i \cap A_j\right).$$

Nakonec pravděpodobnost za mínusem můžeme zase pomocí konečné aditivity ($A_i \cap A_j$ zase „zdisjunktníme“) a monotonie pravděpodobnosti („přidáme to, co jsme odebrali zdisjunktněním“) odhadnout:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_i \cap A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{i-1} P(A_i \cap A_j) \implies$$

$$\implies \sum_{i=1}^n P(A_i) - P\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_i \cap A_j\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j).$$

$\square$

Příklad (1.2 – Úloha o dvou počtářích)
Alois a Bartoloměj nejsou nijak zdatní počtáři. Pravděpodobnost, že daný problém vyřeší Alois správně, je $\frac{1}{8}$. V případě Bartoloměje je to jen $\frac{1}{12}$. Protože počítají každý zvlášť, pak v případě, že oba počítají špatně, dojdou ke stejnému výsledku jen s pravděpodobností $\frac{1}{1001}$. Jestliže oba získají stejný výsledek, jaká je pravděpodobnost, že tento výsledek je správný?

Řešení
Máme tedy jev A (Alois vyřešil správně) s pravděpodobností $P(A) = \frac{1}{8}$. Dále jev B (Bartoloměj vyřešil správně) s pravděpodobností $P(B) = \frac{1}{12}$. Nakonec máme jev S (vyřešili shodně) a o něm víme pravděpodobnost $P(S|A^c \cap B^c) = \frac{1}{1001}$. Zajímá nás $P(A \cap B|S)$.

Předpokládejme, že A a B jsou nezávislé (jinak je v zadání málo informací k výpočtu). Potom $P(A \cap B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12}$ a $P(A^c \cap B^c) = \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{8}$ (z konečné aditivity pravděpodobnosti a nezávislosti A^c a B^c, která vyplývá z nezávislosti A a B). Podobně $P(A \cap B^c) > 0$ a $P(A^c \cap B) > 0$. $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ a $A^c \cap B^c$ jsou zřejmě disjunktní a dávají dohromady celý prostor, tedy součet jejich pravděpodobností je 1.

Zároveň víme, že pravděpodobnost S je nenulová, neboť $P(S|A^c \cap B^c) > 0$. Tedy můžeme použít Bayesovu větu. Ještě potřebujeme znát $P(S|A \cap B)$, ale to je zřejmě 1, protože pokud počítali oba správně, tak se výsledky musí shodovat, naopak $P(S|A^c \cap B) = P(S|A \cap B^c) = 0$, jelikož pokud jeden spočítal výsledek správně a jeden špatně, tak se nemohli shodnout na výsledku. Tedy

$$P(A \cap B|S) = \frac{P(S|A \cap B) \cdot P(A \cap B)}{P(S|A \cap B) \cdot P(A \cap B) + P(S|A^c \cap B^c) \cdot P(A^c \cap B^c) + 0 + 0} =$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12}}{1 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{1001} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12}} = \frac{1}{1 + \frac{7 \cdot 11}{1001}} = \frac{1001}{1078}.$$

Příklad (1.3)
V okolí každé z 10 jaderných elektráren je vyšetřeno 100 lidí na jistou nemoc (předpokládejme, že osoby vybíráme „s vracením“). Tato nemoc se normálně vyskytuje u 1 % celkové populace (národní průměr). Panuje shoda na faktu, že elektrárna by měla být označena za „podezřelou“, pokud alespoň 3 ze 100 vyšetřených zkoumanou nemoc mají.

a) Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna z elektráren bude prohlášena za podezřelou, přestože frekvence výskytu nemoci v okolí jaderných elektráren se vůbec neliší od národního průměru?

b) Jaká je pravděpodobnost, že žádná z elektráren nebude prohlášena za podezřelou, přestože pravděpodobnost výskytu nemoci v okolí elektráren je 2 % (dvojnásobná oproti národnímu průměru).

Řešení (a)
Nejprve spočítáme pravděpodobnost toho, že nebude jedna elektrárna prohlášena za podezřelou, a to tak, že si to rozložíme na tři možnosti: Pravděpodobnost, že nikdo z vyšetřených není nemocný je 0.99^{100} (100krát vybíráme s pravděpodobností 0.99 zdravého člověka). Že byl nemocný právě jeden $0.99^{99} \cdot 0.01 \cdot 100$ (jednou jsme vybrali nezdravého a mohlo to být v libovolné ze 100 voleb). A že byli nemocní dva $0.99^{98} \cdot 0.01^2 \cdot \binom{100}{2}$ (dvakrát jsme vybrali nemocného tyto volby mohli být libovolné 2 ze 100).

Tyto jevy jsou disjunktní, tedy podle spočetné aditivity je pravděpodobnost, že jedna elektrárna nebude prohlášena za podezřelou:

$$(0.99^{100} + 0.99^{99} \cdot 0.01 \cdot 100 + 0.99^{98} \cdot 0.01^2 \cdot \binom{100}{2}) = 0.99^{99}(0.99 + 1 + 0.5) \approx 0.92.$$

Řešení příkladu pak spočítáme přes doplněk. Měření u elektráren jsou nezávislá, takže pravděpodobnost, že měření u všech dopadne „dobře“ je $(0.99^{99}(0.99 + 1 + 0.5))^{10}$, tedy pravděpodobnost, že alespoň jedna bude prohlášená za „podezřelou“ je:

$$1 - \left(0.99^{99}(0.99 + 1 + 0.5)\right)^{10} \approx 0.563.$$

Řešení (b)
Úplně obdobně jako v minulém případě, jen s pravděpodobností 0.98 místo 0.99 a 0.02 místo 0.02. Tedy pravděpodobnost jedné elektrárny je:

$$(0.98^{100} + 0.98^{99} \cdot 0.02 \cdot 100 + 0.98^{98} \cdot 0.02^2 \cdot \binom{100}{2}) = 0.98^{98}(0.98^2 + 2 \cdot 0.98 + 2 \cdot 0.99) \approx 0.68.$$

Pravděpodobnost, že všechny elektrárny nebudou prohlášeny za podezřelé, je pak:

$$\left(0.98^{98}(0.98^2 + 2 \cdot 0.98 + 2 \cdot 0.99)\right)^{10} \approx 0.020.$$

Příklad (1.4 – Paradox s kostkami)
Mějme dvě kostky D_1 a D_2, jejichž strany jsou označeny čísly následujícím způsobem

$$D_1 : 633333, \qquad D_2 : 555222.$$

Adam háže kostkou D_1, Barbora kostkou D_2. Kdo hodí vyšší číslo, vyhrává.

a) Ukažte, že Adam má větší pravděpodobnost, že vyhraje. Budeme to značit $D_1 \succ D_2$.

b) Barbora si toho všimla a navrhla následující změnu: „já teď očísluji (čísly z množiny [6]) třetí kostku. Ty si vybereš jednu z těch tří kostek a pak já jednu ze zbylých dvou. A budeme hrát znovu.“

   Je možné, aby Barbora očíslovala třetí kostku tak, že si vždy bude moci vybrat kostku s větší pravděpodobností výhry? To jest tak, že $D_1 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4$ (což by znamenalo, že relace $\succ$ není tranzitivní)?

Důkaz (a)
Jako prostor si zvolíme[a] $\Omega = [6]^2$, každý elementární jev je, která strana první (její „index“, ne číslo, které je na ní napsané) a která strana druhé kostky padla. $\mathcal{A} = 2^\Omega$ a $P = \frac{1}{6^2}$, tedy máme klasický pravděpodobnostní prostor.

Větší pravděpodobnost výhry má tudíž ta kostka, která má ve více (tj. více než v 18) dvojicích větší číslo. V případě kostek D_1 a D_2 máme tři dvojice $(6,5)$, tři $(6,2)$, patnáct $(3,5)$ a patnáct $(3,2)$, tedy vyhrává první kostka, jelikož pravděpodobnost, že na ní bude větší číslo je $\frac{3+3+15}{6^2} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$. □

[a] $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Řešení (b)
Například kostka $D_3 : 444441$. Jelikož při souboji $D_2 - D_3$ je patnáct dvojic $(5,4)$, tři $(5,1)$, patnáct $(2,4)$ a tři $(2,1)$, tedy D_2 má pravděpodobnost výhry $\frac{15+3+3}{6^2} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$.

Při souboji $D_3 - D_1$ máme pět dvojic $(4,6)$, dvacet pět $(4,3)$, jednu $(1,6)$ a pět $(4,6)$, tedy kostka D_3 má pravděpodobnost výhry $\frac{25}{36} > \frac{1}{2}$.