Příklad (1. – Optimality of space $W^{1,2}(\Omega)$)
Consider $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ and $p \in (1,2)$ be arbitrary. Find an elliptic matrix $\mathbb{A}(x)$ and nontrivial $\hat{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ such that

$$\int_\Omega \mathbb{A}\nabla\hat{u}\cdot\nabla\varphi = 0, \qquad \forall\varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Řešení
Použijeme hint:

$$(\mathbb{A})_{ij} = \delta_{ij} + (a-1)\frac{x_i x_j}{|x|^2}, \qquad a > 1.$$

Toto je jistě matice eliptického problému, neboť:

$$\mathbb{A}\xi\cdot\xi = \sum_{ij}\mathbb{A}_{ij}\xi_j\xi_i = \sum_{ij}(\delta_{ij} + (a-1)\frac{x_i x_j}{|x|^2})\cdot\xi_j\cdot\xi_i = \sum_i \xi_i^2 + (a-1)\sum_{ij}\frac{x_i\xi_i}{|x|}\cdot\frac{x_j\xi_j}{|x|} =$$

$$= |\xi|^2 + (a-1)\left(\sum_i\frac{x_i\xi_i}{|x|}\right)\left(\sum_j\frac{x_j\xi_j}{|x|}\right) = |\xi|^2 + (a-1)\left(\sum_i\frac{x_i\xi_i}{|x|}\right)^2 \geqslant |\xi|^2.$$

Dále $\overline{u}(x) := x_1|x|^{-1-\varepsilon}$ pro $x \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon \in (0,1)$. Tedy

$$\partial_1\overline{u}(x) = |x|^{-1-\varepsilon} + x_1\cdot(-1-\varepsilon)|x|^{-2-\varepsilon}\cdot\frac{1}{2}|x|^{-1}\cdot 2x_1 = |x|^{-1-\varepsilon} + (-1-\varepsilon)x_1^2|x|^{-3-\varepsilon},$$

$$\partial_2\overline{u}(x) = x_1\cdot(-1-\varepsilon)|x|^{-2-\varepsilon}\cdot\frac{1}{2}|x|^{-1}\cdot 2x_2 = (-1-\varepsilon)x_1x_2|x|^{-3-\varepsilon}.$$

Integrovatelnost těchto derivací můžeme zjistit například převedením do polárních souřadnic:

$$\int_\Omega(\partial_1\overline{u}(x))^p\,dx_1dx_2 = \int_\Omega\left(|x|^{-1-\varepsilon} + (-1-\varepsilon)x_1^2|x|^{-3-\varepsilon}\right)^p dx_1dx_2 =$$

$$= \int_\Omega\left(r^{-1-\varepsilon} + (-1-\varepsilon)\cos^2(\varphi)r^2\cdot r^{-3-\varepsilon}\right)^p r\,dr\,d\varphi = \int_\Omega r^{-p\cdot(1-\varepsilon)+1}\cdot h_1(\varphi)\,dr\,d\varphi,$$

$$\int_\Omega(\partial_2\overline{u}(x))^p\,dx_1dx_2 = \int_\Omega\left((-1-\varepsilon)x_1x_2|x|^{-3-\varepsilon}\right)^p dx_1dx_2 =$$

$$= \int_\Omega\left((-1-\varepsilon)\cos(\varphi)r\cdot\sin(\varphi)r\cdot r^{-3-\varepsilon}\right)^p r\,dr\,d\varphi = \int_\Omega r^{p\cdot(-1-\varepsilon)+1}\cdot h_2(\varphi)\,dr\,d\varphi,$$

kde h_i je nějaká omezená funkce, která „nevynuluje integrál“. Z toho už je jasně vidět (neboť $0 \in \Omega$), že pro integrovatelnsot $p(-1-\varepsilon)+1 > -1$, tj. $p < \frac{2}{1+\varepsilon}$, tj. $\overline{u} \in W^{1,\frac{2}{1+\varepsilon}}(\Omega)$. Tedy vhodnou volbou $\varepsilon \in (0,1)$ dokážeme zařídit $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ pro libovolné $p \in (1,2)$.

Řešení
Nakonec zjistíme, že $\overline{u}$ řeší problém pro naše $\mathbb{A}$:

$$\int_\Omega \mathbb{A}\nabla\overline{u}(x)\cdot\nabla\varphi dS = \int_\Omega \sum_{ij}\left(\delta_{ij} + (a-1)\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)\partial_j\overline{u}(x)\cdot\partial_i\varphi dS =$$

$$= \int_\Omega \sum_{ij}\left(\delta_{ij} + (a-1)x_i x_j |x|^{-2}\right)\left((-1-\varepsilon)\cdot x_1 x_j \cdot |x|^{-3-\varepsilon}\right)\partial_i\varphi +$$

$$+\sum_i(\delta_{i1} + (a-1)x_i x_1|x|^{-2})(|x|^{-1-\varepsilon})\cdot\partial_i\varphi dS =$$

$$= \int_\Omega \sum_i(-1-\varepsilon)\cdot x_1 x_i\cdot|x|^{-3-\varepsilon}\partial_i\varphi + \sum_i(a-1)(-1-\varepsilon)x_1 x_i \overbrace{\left(\sum_j x_j^2\right)}^{|x|^2}|x|^{-5-\varepsilon}\partial_i\varphi +$$

$$+|x|^{-1-\varepsilon}\partial_1\varphi + \sum_i (a-1)x_i x_1 |x|^{-3-\varepsilon}\partial_i\varphi dS =$$

$$= \int_\Omega \sum_i x_1 x_i |x|^{-3-\varepsilon}((-1-\varepsilon)+(a-1)(-1-\varepsilon)+(a-1))\partial_i\varphi + |x|^{-1-\varepsilon}\partial_1\varphi dS =$$

$$= -\int_\Omega \sum_i \partial_i\left(x_1 x_i |x|^{-3-\varepsilon}(-a\varepsilon-1)\right)\varphi + \partial_1\left(|x|^{-1-\varepsilon}\right)\varphi dS + \int_{\partial\Omega}\dots\varphi\dots =$$

$$= -\int_\Omega \sum_i\left(x_1|x|^{-3-\varepsilon} + (-3-\varepsilon)x_1 x_i^2|x|^{-5-\varepsilon}\right)(-a\varepsilon-1)\varphi + x_1|x|^{-3-\varepsilon}(-a\varepsilon-1)\varphi +$$

$$+(-1-\varepsilon)x_1|x|^{-3-\varepsilon}\varphi dS + 0 =$$

$$= -\int_\Omega 3(-a\varepsilon-1)x_1|x|^{-3-\varepsilon}\varphi + (-3-\varepsilon)(-a\varepsilon-1)x_1|x|^{-3-\varepsilon}\varphi + (-1-\varepsilon)x_1|x|^{-3-\varepsilon}\varphi dS =$$

$$= -\int_\Omega \left(3(-a\varepsilon-1)+(-3-\varepsilon)(-a\varepsilon-1)+(-1-\varepsilon)\right)x_1|x|^{-3-\varepsilon}\varphi dS =$$

$$= -\int_\Omega\left(-1+a\varepsilon^2\right)x_1|x|^{-3-\varepsilon}\varphi dS.$$

Tedy pokud dosadíme $a = \frac{1}{\varepsilon^2}$, tak pro naše $\mathbb{A}$ funkce $\overline{u}$ řeší $\int\mathbb{A}\nabla u\cdot\nabla\varphi$. Tím, že navíc dosadíme $\varepsilon < \frac{2}{p} - 1$ jsme splnili zadání.

Příklad (2.)
The goal is to show that maximal regularity cannot hold in Lipschitz domains or when changing the type of boundary conditions. Let $\varphi_0 \in (0, 2\pi)$ be arbitrary and consider $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ given by

$$\Omega := \{(r,\varphi)|r\in(0,1),\varphi\in(0,\varphi_0)\}.$$

Denote $\Gamma_i \subset \partial\Omega$ in the following way $\Gamma_1 := \{(r,0)|r\in(0,1)\}$, $\Gamma_2 := \{(r,\varphi_0)|r\in(0,1)\}$ a $\Gamma_3 := \{(1,\varphi)|\varphi\in(0,\varphi_0)\}$.

Consider two functions

$$u_1(r,\varphi) := r^{\alpha_1} \sin\left(\frac{\varphi\pi}{\varphi_0}\right), \qquad u_2(r,\varphi) := r^{\alpha_2} \sin\left(\frac{\varphi\pi}{2\varphi_0}\right).$$

- Find the condition on α_i so that $u_i \in W^{1,2}(\Omega)$ – find an explicit formula for ∇u_i – and prove that it is really the weak derivative.

Řešení

Běžné derivace těchto funkcí jsou:

$$\nabla u_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial u_i}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i r^{\alpha_i - 1} \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i\cdot\varphi_0}\right) \\ \frac{\pi}{i\cdot\varphi_0} r^{\alpha_i-1} \cos\left(\frac{\varphi\pi}{i\cdot\varphi_0}\right) \end{pmatrix}$$

Jelikož tyto derivace jsou spojité, tak pro ně platí per-partes (používám jen $\operatorname{supp}\psi$, abych se vyhnul $r = 0$, ψ i ψ' jsou na doplňku nulové, tedy i integrovaná funkce):

$$\int_\Omega u_i \partial_j \psi = \int_{\operatorname{supp}\psi} u_i \partial_j \psi + 0 \overset{\text{p-p}}{=} -\int_{\operatorname{supp}\psi} \psi \partial_j u_i + \int_{\partial\left(\overline{\operatorname{supp}\psi}\right)} \psi u_i dS_j = -\int \ldots + \int 0 =$$

$$= -\int_{\operatorname{supp}\psi} \psi\partial_j u_i = -\int_\Omega \psi \partial_j u_i + 0.$$

Tedy jsou to slabé derivace. Že $u_i \in W^{1,2}(\Omega)$ platí, pokud jsou integrály druhých mocnin derivací konečné:

$$\int_\Omega \left(\alpha_i r^{\alpha_i-1} \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i\cdot\varphi_0}\right)\right)^2 = \int_\Omega \alpha_i^2 r^{2\alpha_i-2}\left(\sin\left(\frac{\varphi\pi}{i\cdot\varphi_0}\right)\right)^2 < \infty,$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\pi}{i\cdot\varphi_0} r^{\alpha_i-1}\cos\left(\frac{\varphi\pi}{i\cdot\varphi_0}\right)\right)^2 = \int_\Omega \left(\frac{\pi}{i\cdot\varphi_0}\right)^2 r^{2\alpha_i-2}\left(\cos\left(\frac{\varphi\pi}{i\cdot\varphi_0}\right)\right)^2 < \infty.$$

To bude zřejmě tehdy, když $\alpha_i > \frac{1}{2}$.

- Find the proper condition on α_i so that u_i solves the problem

$$a)\quad -\Delta u_1 = 0 \text{ in } \Omega, \qquad b)\quad u_1 = 0 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \qquad c)\quad u_1 = \sin\left(\frac{\varphi\pi}{\varphi_0}\right) \text{ on } \Gamma_3,$$

$$d)\quad -\Delta u_2 = 0 \text{ in } \Omega, \qquad e)\quad u_2 = 0 \text{ on } \Gamma_1, \qquad f)\quad u_2 = \sin\left(\frac{\varphi\pi}{2\varphi_0}\right) \text{ on } \Gamma_3,$$

$$g)\quad \nabla u_2 \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma_2.$$

Řešení
Rovnice $b), c), e), f)$ splňují funkce z definice (když dosadíme $r = 1$, tak nám zbude pouze sin, když dosadíme $\varphi = 0$ nebo $\varphi = \varphi_0$, tak bude sin nulový).

Norma n je v Γ_2 kolmá na poloměr, tedy

$$\nabla u_2 \cdot n = \frac{\pi}{2\varphi_0} r^{\alpha_2 - 1} \cos\left(\frac{\varphi\pi}{2\varphi_0}\right) = \frac{\pi}{2\varphi_0} r^{\alpha_2 - 1} \cos\left(\frac{\varphi_0\pi}{2\varphi_0}\right) = \ldots \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots \cdot 0 = 0.$$

V polárních souřadnicích $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$. Tedy

$$\Delta u_i = \alpha_i \cdot (\alpha_i - 1) r^{\alpha_i - 2} \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i \cdot \varphi_0}\right) - r^{-2}\left(\frac{\pi}{i \cdot \varphi_0}\right)^2 r^{\alpha_i} \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i \cdot \varphi_0}\right) +$$

$$+ r^{-1}\alpha_i r^{\alpha_i - 1} \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i \cdot \varphi_0}\right) = r^{\alpha_i - 2} \cdot \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i \cdot \varphi_0}\right) \cdot \left(\alpha_i \cdot (\alpha_i - 1) - \left(\frac{\pi}{i \cdot \varphi_0}\right)^2 + \alpha_i\right).$$

Výraz před závorkou je na vnitřku Ω nenulový, tedy musí být nulová závorka:

$$0 = \alpha_i \cdot (\alpha_i - 1) - \left(\frac{\pi}{i \cdot \varphi_0}\right)^2 + \alpha_i = \alpha_i^2 - \left(\frac{\pi}{i \cdot \varphi_0}\right)^2 \implies \alpha_i = \pm\frac{\pi}{i \cdot \varphi_0}.$$

- Find all p's for which $u_i \in W^{2,p}(\Omega)$. What is the criterium on α_i so that $u_i \in W^{2,2}(\Omega)$.

Řešení
Je to podobné jako v prvním bodě, jen chceme druhé derivace, tedy r bude v mocnině $p \cdot (\alpha_i - 2)$, tedy chceme, aby $p \cdot (\alpha_i - 2) > -1$. Tedy kritérium pro α_i je $\alpha_i > 1.5$.

- With the help of the above computation, find $f_i \in L^2(\Omega)$ such that the problems with homogeneous boundary conditions, i.e.,

$$-\Delta v_1 = f_1 \text{ in } \Omega, \qquad v_1 = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

$$-\Delta v_2 = f_2 \text{ in } \Omega, \qquad v_2 = 0 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \qquad \nabla v_2 \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma_2$$

poses unique weak solutions $v_i \in W^{1,2}(\Omega)$ but $v_1 \notin W^{2,2}(\Omega)$ if $\varphi_0 > \pi$ and $v_2 \notin W^{2,2}(\Omega)$ for $\varphi_0 > \frac{\pi}{2}$.

Řešení
Když zadefinujeme $v_i = u_i - \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i\cdot\varphi_0}\right)$, dostaneme splněné okrajové podmínky tohoto problému, neboť v Γ_3 jsme odečetli přesně hodnotu, v Γ_1 jsou právě tyto siny nulové a v Γ_2 je v prvním případě také nulový a v druhém chceme, aby byla druhá část gradientu, což je ale příslušný kosinus, který je přesně v $\nabla u_2 \cdot n$ a je též nulový.

Zbývají f_1 a f_2:

$$f_i = -\Delta v_i = -\Delta u_i + \Delta \sin\left(\frac{\varphi\pi}{i\cdot\varphi_0}\right) =$$

$$= 0 + \left(0 + \frac{1}{r^2}\cdot\left(\frac{\pi}{i\cdot\varphi_0}\right)^2\cdot\sin\left(\frac{\varphi\pi}{i\cdot\varphi_0}\right) + \frac{1}{r}\cdot 0\right) = \left(\frac{\pi}{r\cdot i\cdot\varphi_0}\right)^2$$

Příklad (3. – Fredholm alternative vs Lax-Milgram lemma vs minimum principe)
Consider $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a Lipschitz domain. Let $\mathbb{A} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ be an elliptic matrix. Assume that $\mathbf{c} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ and $b \geqslant 0$. Consider the problem

$$-\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) + bu + \mathbf{c}\cdot\nabla u = f \text{ in } \Omega, \qquad u = u_0 \text{ on } \partial\Omega.$$

a) Consider the case $b = 0$, $\mathbf{c} = \mathbf{o}$ and $f \in L^2(\Omega)$ fulfilling $f \geqslant 0$. Let $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ and denote $m := \operatorname{essinf}_{\partial\Omega} u_0$. Show that the unique weak solution u satisfies $u \geqslant m$ almost everywhere in Ω.

Důkaz
Jak nám napovídá hint, definujeme $\varphi(x) := (u(x)-m)_-$. Jelikož Ω je omezené a $u \in W^{1,2}$, tak

$$||\varphi||_2^2 = \int_\Omega (u(x)-m)_-^2 dx \leqslant \int_\Omega (u(x)-m)^2 dx = ||u(x)-m||_2^2 \leqslant (||u(x)||_2 + ||m||_2)^2 < \infty$$

TODO 0 u W!!!

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega) : \int_\Omega (\nabla\varphi(x))\psi(x)dx = \int_\Omega \nabla((u(x)-m)_-)\psi(x)dx = \int_{u(x)>m} \nabla(u(x)-m)\psi(x)dx + \int_{u(x)\leqslant m} 0\psi$$

Tedy $\nabla\varphi = \nabla u \chi_{u(x)>m}$, tedy $||\nabla\varphi||_2 < ||\nabla u||_2 < \infty$, tj. $\varphi \in W_0^{1,2}$.

Nyní použijeme φ jako testovací funkci:

$$\int_\Omega -\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u)\varphi = \int_\Omega f\varphi$$

$$\underbrace{\int_\Omega \mathbb{A}\nabla u\nabla\varphi}_{\geqslant c_1|\nabla u|^2 \geqslant 0} = \int_\Omega \underbrace{f}_{>0} \underbrace{\varphi}_{\leqslant 0}$$

Tedy levá strana $\geqslant 0$, pravá $\leqslant 0$, tedy se rovnají nule. Aby se pravá strana rovnala nule (f je nenulové), tak musí být $\varphi = 0$ skoro všude, tedy $u \geqslant m$ skoro všude na Ω. □

b) Consider $b > 0$ and **c** arbitrary. Prove that for any $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ and any $f \in L^2(\Omega)$ there exists a weak solution.