Příklad (5.1)
Podrobně odvoďte a sestrojte přirozený kubický spline $S(x)$ interpolující funkci $f(x)$ danou tabulkou

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0	1	0	0

Dále vypočtěte hodnotu $S(1.5)$.

Řešení
Jelikož chceme přirozený spline, tak $S''(x_0) = S''(x_3) = 0$. Z přednášky víme, že

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S''(x_1) \\ S''(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2) \\ f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

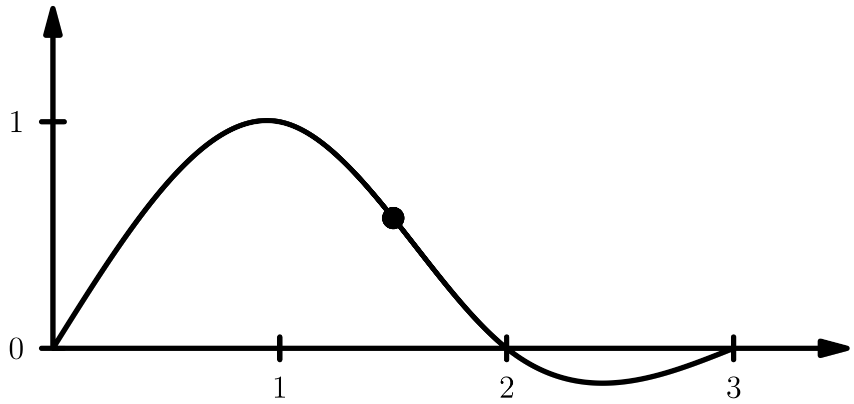
Odečtením čtyřnásobku jedné rovnice od druhé získáme $S''(x_1) = -\frac{18}{5}$ a $S''(x_2) = \frac{12}{5}$. To pak můžeme dosadit do odvození z přednášky:

$$S|_{[x_i,x_{i+1}]} = \frac{(x-x_i)^3}{6h} S''(x_{i+1}) + \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h} S''(x_i) + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{6} \left(S''(x_{i+1}) - S''(x_i) \right) \right) (x - x_i) + f(x_i) - \frac{h^2}{6} S''(x_i)$$

$$S|_{[0,1]} = \frac{(x-0)^3}{6 \cdot 1} \left(-\frac{18}{5} \right) + \frac{(1-x)^3}{6 \cdot 1} 0 + \left(\frac{1-0}{1} - \frac{1}{6} \left(-\frac{18}{5} - 0 \right) \right) (x - 0) + 0 - \frac{1^2}{6} 0 = \frac{8}{5} x - \frac{3}{5} x^3$$

$$S|_{[1,2]} = \frac{(x-1)^3}{6 \cdot 1} \frac{12}{5} + \frac{(2-x)^3}{6 \cdot 1} \left(-\frac{18}{5} \right) + \left(\frac{0-1}{1} - \frac{1}{6} \left(\frac{12}{5} + \frac{18}{5} \right) \right) (x - 1) + 1 - \frac{1^2}{6} \left(-\frac{18}{5} \right) = x^3 - \frac{24}{5} x^2 + \frac{32}{5} x - \frac{8}{5}$$

$$S|_{[2,3]} = \frac{(x-2)^3}{6 \cdot 1} 0 + \frac{(3-x)^3}{6 \cdot 1} \frac{12}{5} + \left(\frac{0-0}{1} - \frac{1}{6} \left(0 - \frac{12}{5} \right) \right) (x - 2) + 0 - \frac{1^2}{6} \frac{12}{5} = -\frac{2}{5} x^3 + \frac{18}{5} x^2 - \frac{52}{5} x + \frac{48}{5}$$



$$S(1.5) = 1.5^3 - \frac{24}{5} 1.5^2 + \frac{32}{5} 1.5 - \frac{8}{5} = \frac{23}{40} = 0.575.$$