

Příklad (1.)

Ověřte přímým výpočtem Stokesovu větu pro singulární krychli c a formu ω :

$$c : \begin{cases} x = r \cdot s \\ y = s \cdot t \\ z = r \cdot t \\ w = r + s + t \end{cases}, \quad (r, s, t) \in [0, 1]^3, \quad \omega = w \, dx \wedge dz + z \, dy \wedge dw.$$

┌
Řešení

Stokesova věta pro singulární krychli c a formu ω vypadá následovně

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

Tudíž chceme dokázat, že integrál vlevo se rovná integrálu vpravo. Nejdřív si zvolíme pořadí souřadnic, tj. např. r, s, t a začneme integrálem vlevo:

Chceme spočítat parametrizaci ∂c , a jelikož máme trojrozměrnou parametrizaci c , ∂c je

$$\begin{aligned} \partial c &= -c_{r,s,0} + c_{r,s,1} + c_{r,0,t} - c_{r,1,t} - c_{0,s,t} + c_{1,s,t} \\ \int_{\partial c} d\omega &= \int_{-c_{r,s,0}} d\omega + \int_{c_{r,s,1}} d\omega + \int_{c_{r,0,t}} d\omega + \int_{-c_{r,1,t}} d\omega + \int_{-c_{0,s,t}} d\omega + \int_{c_{1,s,t}} d\omega \\ \int_{\partial c} d\omega &= - \int_{c_{r,s,0}} d\omega + \int_{c_{r,s,1}} d\omega + \int_{c_{r,0,t}} d\omega - \int_{c_{r,1,t}} d\omega - \int_{c_{0,s,t}} d\omega + \int_{c_{1,s,t}} d\omega \end{aligned}$$

Tedy najdeme parametrizace jednotlivých 'stěn' krychle a následně dosadíme do příslušných integrálů (viz další strana) a vypočítáme

$$\int_{\partial c} d\omega = -0 + \left(-\frac{19}{12}\right) + 0 - \frac{10}{12} - 0 + \frac{25}{12} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Nyní pravý integrál: stačí najít $d\omega$ a poté dosadit do integrálu:

$$d\omega = dw \wedge dx \wedge dz + dz \wedge dy \wedge dw,$$

$$\begin{aligned} dx &= r \, ds + s \, dr, & dy &= s \, dt + t \, ds, & dz &= r \, dt + t \, dr, & dw &= dr + ds + dt, \\ d\omega &= (dr + ds + dt) \cdot (r \, ds + s \, dr) \cdot (r \, dt + t \, dr) + (r \, dt + t \, dr) \cdot (s \, dt + t \, ds) \cdot (dr + ds + dt) = \\ &= (r^2 - s \cdot r - r \cdot t - r \cdot t - t \cdot s + t^2) \, dr \wedge ds \wedge dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_c d\omega &= \int_{[0,1]^3} (r^2 - s \cdot r - r \cdot t - r \cdot t - t \cdot s + t^2) \, dr \wedge ds \wedge dt = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, tedy Stokesova věta pro tuto krychli c a tuto formu ω platí.

└

┌
Řešení (Výpočty levého integrálu)

$$c_{r,s,0} = \begin{cases} x = r \cdot s \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = r + s + 0 \end{cases}, \quad c_{r,s,1} = \begin{cases} x = r \cdot s & dx = r \, ds + s \, dr \\ y = s & dy = ds \\ z = r & dz = dr \\ w = r + s + 1 & dw = dr + ds \end{cases}$$

$$\int_{c_{r,s,0}} \omega = \int_{c_{r,s,0}} \dots \wedge 0 + 0 \wedge \dots = 0$$

$$\int_{c_{r,s,1}} \omega = \int_{c_{r,s,1}} (r + s + 1) \cdot (-r) + r \cdot (-1) \, dr \wedge ds = -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{19}{12}$$

$$c_{r,0,t} = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = r \cdot t \\ w = r + 0 + t \end{cases}, \quad c_{r,1,t} = \begin{cases} x = r & dx = dr \\ y = t & dy = dt \\ z = r \cdot t & dz = r \, dt + t \, dr \\ w = r + 1 + t & dw = dr + dt \end{cases}$$

$$\int_{c_{r,0,t}} \omega = \int_{c_{r,0,t}} \dots 0 \wedge \dots + \dots 0 \wedge \dots = 0$$

$$\int_{c_{r,1,t}} \omega = \int_{c_{r,1,t}} (r + 1 + t) \cdot (r) + r \cdot t \cdot (-1) \, dr \wedge dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

$$c_{0,s,t} = \begin{cases} x = 0 \\ y = s \cdot t \\ z = 0 \\ w = 0 + s + t \end{cases}, \quad c_{1,s,t} = \begin{cases} x = s & dx = ds \\ y = s \cdot t & dy = s \, dt + t \, ds \\ z = t & dz = dt \\ w = 1 + s + t & dw = ds + dt \end{cases}$$

$$\int_{c_{0,s,t}} \omega = \int_{c_{0,s,t}} \dots 0 \wedge 0 + 0 \wedge \dots = 0$$

$$\int_{c_{1,s,t}} \omega = \int_{c_{1,s,t}} (1 + s + t) \cdot (1) + t \cdot (t - s) \, ds \wedge dt = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

└

Příklad (2.)

Definujte mapy na Grassmanniánu

$$Gr_{k,n} := \{L \subseteq \mathbb{R}^n \mid L \text{ podprostor dimenze } k\}$$

a pro $G_{2,3}$ ukažte, že přechodové funkce jsou difeomorfismy. Ukažte, že

$$\dim Gr_{k,n} = k \cdot (n - k).$$

┐

Řešení (Definování map)

Každé $L \in Gr_{k,n}$ má nějakou bázi $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$. Jelikož jsou vektory báze lineárně nezávislé, existuje posloupnost $l = (l_i)_{i=1}^k$ přirozených čísel $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_k \leq n$ tak, že B lze lineárními kombinacemi převést na B' (bázi, jelikož má k zjevně nezávislých vektorů)

$$B' = (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \dots, \mathbf{b}'_k) = \left(\begin{pmatrix} c_{1,1} \\ \vdots \\ c_{l_1-1,1} \\ 1 \\ c_{l_1,1} \\ \vdots \\ c_{l_2-2,1} \\ 0 \\ c_{l_2-1,1} \\ \vdots \\ c_{l_k-k,1} \\ 0 \\ c_{l_k-k+1,1} \\ \vdots \\ c_{n-k,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{1,2} \\ \vdots \\ c_{l_1-1,2} \\ 0 \\ c_{l_1,2} \\ \vdots \\ c_{l_2-2,2} \\ 1 \\ c_{l_2-1,2} \\ \vdots \\ c_{l_k-k,2} \\ 0 \\ c_{l_k-k+1,2} \\ \vdots \\ c_{n-k,2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} c_{1,k} \\ \vdots \\ c_{l_1-1,k} \\ 0 \\ c_{l_1,k} \\ \vdots \\ c_{l_2-2,k} \\ 0 \\ c_{l_2-1,k} \\ \vdots \\ c_{l_k-k,k} \\ 1 \\ c_{l_k-k+1,k} \\ \vdots \\ c_{n-k,k} \end{pmatrix} \right), \text{ řádky } \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ l_1 - 1 \\ l_1 \\ l_1 + 1 \\ \vdots \\ l_2 - 1 \\ l_2 \\ l_2 + 1 \\ \vdots \\ l_k - 1 \\ l_k \\ l_k + 1 \\ \vdots \\ n \end{matrix}$$

(tedy, že na každém řádku l_i je ve všech vektorech 0 kromě vektoru \mathbf{b}'_i , kde je v tomto řádku 1, zbytek míst je vyplněn $c_{\alpha,\beta}$ pro všechna $\alpha = 1, 2, \dots, n - k$ a $\beta = 1, 2, \dots, k$).

Pro pevnou posloupnost l a každé L , které lze vyjádřit v tomto tvaru při této volbě l (označme množinu těchto L jako \mathcal{L}_l), jsou čísla $c_{\alpha,\beta}$ určena jednoznačně, jelikož kdybychom našli jinou takovou bázi $B'' = (\mathbf{b}''_1, \dots, \mathbf{b}''_k)$, která splňuje 'polohu' jedniček a nul, tak každý její prvek musí jít vyjádřit jako lineární kombinace prvků B' , ale to lze zjevně jen nějak jako $\mathbf{b}''_i = 1 \cdot \mathbf{b}'_i$ právě díky 'poloze' jedniček a nul. Tudíž můžeme definovat zobrazení $\varphi_l : \mathcal{L}_l \rightarrow \mathbb{R}^{k \cdot (n-k)}$:

$$\varphi_l(L) = (c_{1,1}, c_{1,2}, \dots, c_{1,k}, c_{2,1}, \dots, c_{2,k}, \dots, c_{n-k,1}, \dots, c_{n-k,k})^T.$$

Mapy tedy budou $(\mathcal{L}_l, \varphi_l)$ a atlas $\{(\mathcal{L}_l, \varphi_l) \mid l \text{ jako v prvním odstavci}\}$. (Zde by bylo ještě nutné ověřit, že obrazy průniků \mathcal{L} jsou otevřené a že přechodové funkce jsou difeomorfismy, aby byly mapy kompatibilní, ale jelikož víme, že $\forall L$ existuje l tak, abychom byly schopni získat $c_{\alpha,\beta}$, tak alespoň $\bigcup_l \mathcal{L}_l = Gr_{k,n}$, což je druhá podmínka na atlas...)

┐

Řešení (Difeomorfismy)

Předpokládejme dvě posloupnosti s prvního odstavce definice map λ_1 a λ_2 . BÚNO $\lambda_1 = (0, 1)$ a $\lambda_2 = (0, 2)$. Tedy $L \in \mathcal{L}_{\lambda_1} \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}$ má báze:

$$B'_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \right) \text{ a } B'_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Z báze B'_1 do báze B'_2 lze přejít tak, že k prvnímu vektoru přičteme $-\frac{a}{b}$ násobek druhého a druhý vektor vynásobíme $\frac{1}{b}$ (pokud $b = 0$, tak zjevně B'_2 není báze L , tj. $L \notin \mathcal{L}_{\lambda_2}$). Tedy $d = \frac{1}{b}$ a $c = -\frac{a}{b}$ a naopak $b = \frac{1}{d}$ a $a = -\frac{c}{d}$. Tedy přechodová funkce (BÚNO) $\psi = \varphi_{\lambda_2} \circ \varphi_{\lambda_1}^{-1}$ je:

$$\psi((a, b)) = \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b} \right), \quad \psi^{-1}((c, d)) = \left(-\frac{c}{d}, \frac{1}{d} \right).$$

Tedy je zřejmě prostá (má inverzi) a hladká (derivováním podle b se zvyšuje mocnina u b a přenásobuje se $-1, -2, -3, \dots$, derivováním podle a se d změní na 0 a c nejdříve na zápornou mocninu b a pak na nulu), stejně tak její inverze.

Řešení (Dimenze)

Zobrazení φ_l je zřejmě na $\mathbb{R}^{k \cdot (n-k)}$, jelikož každá nezávislá množina vektorů určuje nějaký prostor (a nezávislé jsou díky 'jedničkám a nulám'), tedy $Gr_{k,n}$ je dimenze $k \cdot (n - k)$, jelikož mapy jsou této dimenze.

Příklad (3.)

Ukažte, že tečný fibrovaný prostor TX má přirozenou strukturu hladké variety. Definujte mapy na TX a ukažte, že přechodové funkce jsou difeomorfismy.

┌

Řešení

Nechť M je varieta dimenze n . Víme, že $\forall m \in M : T_m X$ je lineární vektorový prostor dimenze n , který pro libovolnou mapu, jež definuje obraz i pro m má bázi $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. Tedy disjunktní sjednocení $T_m X$ lze 'ztotožnit' s ' $M \times \mathbb{R}^n$ '.

Tedy mějme daný atlas na M , libovolnou mapu (U, φ) z něho a pro každý bod $m \in U$ bázi $B_m = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ tečného prostoru $T_m X$. Zobrazení $\psi_\varphi : \coprod_{m \in U} T_m X \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ potom můžeme definovat jako^a

$$\psi_\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(\pi(x)) \\ [x]_{B_{\pi(x)}} \end{pmatrix} = \left(\varphi(\pi(x))_1, \dots, \varphi(\pi(x))_n, ([x]_{B_{\pi(x)}})_1, \dots, ([x]_{B_{\pi(x)}})_n \right)^T$$

(tedy pro bod $z T_m X$ se na prvních n souřadnic zobrazuje m pomocí φ a na dalších n souřadnicích jsou souřadnice tohoto bodu při bázi B_m). $(\coprod_{m \in U} T_m X, \psi_\varphi)$ je pak zřejmě mapa a lze těmito mapami pokrýt celý TX , jelikož každý bod TX má projekci $m \in M$, která jistě musí být v nějakém U .

Aby byly přechodové funkce difeomorfismy, musí být prosté, na a hladké. Můžeme si všimnout, že pro dvě různé mapy (U_1, φ_1) a (U_2, φ_2) zobrazuje přechodová funkce prvních n souřadnic podle přechodové funkce $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, o níž víme, že je prostá, na a hladká, jelikož M je varieta a toto jsou mapy z jednoho jejího atlasu, tedy musí být kompatibilní.

Naopak druhých n souřadnic zobrazuje podle změny báze (B_m je pro jiné (U, φ) jiná), ale takováto změna je stejná pro všechny prvky jednoho $T_m X$, tedy pro konkrétní m (tj. konkrétní hodnoty prvních n souřadnic) je to přechod od báze k bázi, což je lineární bijekce, tedy rozhodně prostá, hladká a na. Tedy přechodová funkce je prostá, surjektivní a hladká, tedy difeomorfismus.

^a π je projekce $\forall x \in T_m X : \pi(x) = m$ a $[x]_B$ je vyjádření vektoru při bázi B .

└