Příklad
Each of two urns contains m balls. Out of the total of the $2m$ balls, m are white and m are black. A ball is simultaneously selected from each urn and moved to the other urn, and the process is indefinitely repeated. What is the steady-state distribution of the number of white balls in each urn?

Solve in two ways:

- by solving a list of equations, as we did in the tutorial for other Markov chains.
- by sampling: Put $m = 5$, start with one urn completely white, the other completely black. Repeat many times the update step, observe the number of black balls in the first urn, repeat.

Řešení

Označme si stavy podle počtu bílých kuliček v první urně: 0, 1, ..., m. Do stavu i se dostaneme s pravděpodobností $\frac{(i+1)^2}{m^2}$ ze stavu $i+1$ (musíme vybrat bílou z první urny, tj. $\frac{i+1}{m}$, a černou z druhé urny, tj. $\frac{i+1}{m}$), s pravděpodobností $\frac{(m-i+1)^2}{m^2}$ ze stavu $i-1$ (zase musíme vybrat bílou z druhé urny, tj. $\frac{m-(i-1)}{m}$, a černou z první, tj. $\frac{m-(i-1)}{m}$). Poslední možností, jak se do stavu i dostat, je ze samotného stavu i, a to vytáhnutím černé a bílé zároveň (z libovolné urny), tedy s pravděpodobností $\frac{2i(m-i)}{m^2}$. Tedy pro steady-state distribuci máme rovnost

$$\frac{(m-i+1)^2}{m^2}p_{i-1} + \frac{2i(m-i)}{m^2}p_i + \frac{(i+1)^2}{m^2}p_{i+1} = p_i,$$

$$(m-i+1)^2 p_{i-1} + 2i(m-i)p_i + (i+1)^2 p_{i+1} = m^2 p_i.$$

$$\begin{pmatrix}
-m^2 & 1^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
m^2 & 2\cdot 1\cdot (m-1) - m^2 & 2^2 & 0 & 0 & \dots \\
0 & (m-1)^2 & 2\cdot 2\cdot (m-2) - m^2 & 3^2 & 0 & \dots \\
 & & & & & \\
0 & \dots & \dots & i^2 & \dots & \dots \\
0 & \dots & (m-i+1)^2 & 2i(m-i) - m^2 & (i+1)^2 & \dots \\
0 & \dots & \dots & (m-i)^2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}$$

Můžeme si všimnout, že když sečteme prvních $i+1$ řádků, tak se nám prvních i sloupců sečte na nulu a vyjde nám $(i^2 + 2i(m-i) - m^2)p_i + (i+1)^2 p_{i+1} = 0$, tedy $p_{i+1} = \frac{(m-i)^2}{(i+1)^2}p_i$. Dosazením a upravením dostaneme $p_{i+1} = \left(\frac{m!/(m-i-1)!}{(i+1)!}\right)^2 p_0$, tj. $p_i = \binom{m}{i}^2 p_0$.

Nyní už stačí sečíst pravděpodobnosti jednotlivých stavů, protože víme, že součet těchto pravděpodobností musí být 1, tedy $p_0 \cdot \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}^2 = 1$. Číslo $\binom{m}{i}^2$ si můžeme rozdělit na $\binom{m}{i} \cdot \binom{m}{m-i}$, tedy v předchozím součtu vybíráme m prvků z $2m$ (jeden sčítanec je výběr přesně i kuliček z první poloviny a zbylých $m-i$ kuliček z druhé), tedy $p_0 = \frac{1}{\binom{2m}{m}}$ a

$$p_i = \frac{\binom{m}{i}^2}{\binom{2m}{m}}$$

Řešení
Naprogramoval jsem přesně danou situaci (se značením stavů jako v prvním řešení):

```
import random

class Urny:
    def __init__(self, m):
        self.first = 0
        self.second = m
        self.m = m

    def step(self):
        first_white = random.randint(1, self.m) <= self.first
        second_white = random.randint(1, self.m) <= self.second
        self.first -= first_white
        self.second += first_white
        self.second -= second_white
        self.first += second_white


if __name__ == '__main__':
    random.seed(42)
    m = 5
    stat = [0 for i in range(m + 1)]
    n = 100000
    for _ in range(n):
        urny = Urny(m)
        for _ in range(1000):
            urny.step()
        stat[urny.first] += 1
    print([it/n for it in stat])
```

A vyšlo mi `[0.00387, 0.09854, 0.39656, 0.39836, 0.09905, 0.00362]`, což je blízko exaktnímu řešení

$$\left[\frac{1}{252}, \frac{25}{252}, \frac{100}{252}, \frac{100}{252}, \frac{25}{252}, \frac{1}{252}\right].$$