Organizační úvod

Přednášky budou nahrávány, referáty ne.

Kontaktovat přes e-mail slavikova@karlin.mff.cuni.cz

Teoretické příklady odevzdávat přes Moodle.

1 Prvočísla

Definice 1.1 (Dělitel)

Číslo $d \in \mathbb{Z}$ nazýváme dělitelem čísla $n \in \mathbb{Z}$, značeno $d \div n$, pokud existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující $n = kd$.

Definice 1.2 (Prvočíslo)

Řekněme, že $n \in \mathbb{N}$ je prvočíslo, pokud $n > 1$ a jeho jediní kladní dělitelné jsou $1 \geq n$.

Například (Několik prvních prvočísel)
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

Věta 1.1 (Základní věta aritmetiky)

Každé přirozené číslo $n \geq 2$ lze zapsat právě jedním způsobem jako součin prvočísel ve tvaru:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$k \in N, p_1 < p_2 < \cdots < p_k jsou\ prvočísla, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$$

Například

$$2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 (k = 3, p_1 = 2, p_2 = 5, p_3 = 101, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1)$$

Důkaz
1. krok = existence rozkladu (indukcí):

Pro $n = 2$ zjevně platí $2 = 2^1$ $(k = 1, p_1 = 2, \alpha_1 = 1)$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna $2 \leq x \leq n$. Pokud je $n + 1$ prvočíslo, pak $n + 1 = (n + 1)^1$ $(k = 1, p_1 = n + 1, \alpha_1 = 1)$. Pokud není, pak $n + 1 = a \cdot b$, kde $1 < a \leq b < n + 1$. Podle indukčního předpokladu lze a i b rozložit na prvočísla. Zápis rozkladu $n + 1$ pak bude sjednocením všech prvočísel a součtem příslušných α, pokud se prvočísla vyskytují v a i b. (V přednášce byl zaveden zápis bez mocnin, kde prvočísla nemusí být různá, a pak proveden součin.)

2. krok = jednoznačnost rozkladu:

Lemma 1.2 (Euklidovo lemma (bez důkazu))

Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$ a nechť p je prvočíslo takové, že $p \mid ab$. Pak $p \mid a$ nebo $p \mid b$.

Použijeme důkaz sporem. Předpokládejme, že tvrzení neplatí. Vybereme nejmenší z přirozených čísel, pro které rozklad není jednoznačný. Označme ho n.

$$n = q_1 \cdots q_l = r_1 \cdot r_m \ (q_1, \dots, q_l, r_1, \dots, r_m \text{prvočísla})$$

A není pravda, že $(r_1, \dots, r_m)$ je permutací $(q_1, \dots, q_l)$.

Protože $q_1 \mid n$, pak $q_1 \mid r_1 \cdots r_m$ a podle Euklidova lemmatu q_1 dělí alespoň jedno z čísel $r_1, \dots r_m$. BÚNO $q_1 | r_1$, tedy $q_1 = r_1$. Vydělením n číslem q_1 dostaneme menší přirozené číslo, které nemá jednoznačný rozklad. $(\frac{n}{q_1} = q_2 \cdots q_l = r_2 \cdots r_m)$. □

Věta 1.3

Prvočísel je nekonečně mnoho.

Důkaz
Důkaz sporem. Předpokládejme, že prvočísel je konečně mnoho, a označme p největší prvočíslo. Definujeme:

$$n_p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1$$

Pak $n_p > p$ a n_p dává zbytek 1 po dělení všemi prvočísly, tedy není ani jedním dělitelné. Tedy n_p nemá prvočíselný rozklad. se základní větou aritmetiky. □

Poznámka
Důkaz nedává konstrukci vyššího prvočísla, pouze dokazuje jeho existenci.

Například
Mezi 1 a 100 je 25 prvočísel.

Mezi 10^7 a $10^7 + 100$ jsou pouze 2 prvočísla.

Označme $\Pi(N)$ *počet prvočísel* $\leq N$.

Existují konstanty $c_1, c_2 > 0$ *takové, že*

$$\frac{c_1}{\log N} \leq \frac{\Pi(N)}{N} \leq \frac{c_2}{\log N}$$

Poznámka
Prvočísel je nekonečně mnoho, ale „řídnou“. Musí tedy existovat dlouhé úseky bez prvočísel.

Například
Interval $[n! + 2, \ldots, n! + n]$ neobsahuje žádné prvočíslo. (Jelikož k-té číslo je dělitelné $k + 1$.)

2 Čísla racionální a iracionální

Definice 2.1 (Racionální a iracionální číslo)

Číslo $x \in \mathbb{R}$ je racionální, pokud ho lze zapsat ve tvaru $x = \frac{p}{q},\ q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z}$.

Číslo $y \in \mathbb{R}$ je iracionální, pokud není racionální.

Například (Z přednášky)
$\sqrt{2}$ je iracionální.

Věta 2.1

Nechť $n \in \mathbb{N}$ *je taková, že* $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ *(tedy* n *není druhou mocninou přirozeného čísla). Pak* $\sqrt{n}$ *je iracionální.*

Lemma 2.2

Jsou-li p, q *nesoudělná, pak* $p^2,\ q^2$ *jsou také nesoudělná.*

Důkaz
Dle základní věty aritmetiky každé přirozené číslo lze rozložit na součin prvočísel. Rozložíme a dokážeme. □

Důkaz (Sporem)
Předpokládejme, že $\sqrt{n}$ je racionální, ale není to celé číslo. Pak $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla ($q \geq 2$). Umocníme: $n = \frac{p^2}{q^2}$. $q|p$ *lightning*. □

Věta 2.3 (Referát 1)

Existují iracionální čísla a,b taková, že a^b je racionální. (Text: skripta z MA, str. 14--15.)

Důkaz
Buď $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nebo $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ □

Příklad (Teoretický příklad 1)
Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $a_1, \ldots, a_n$ jsou kladná reálná čísla, taková, že $a_1 \cdot \cdots \cdot a_n = 1$.

Dokažte, že
$$(1 + a_1) \cdot \cdots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n.$$

Příklad (Teoretický příklad 2)
Nalezněte supremum a infimum množiny
$$\left\{\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor : n \in \mathbb{N}\right\}$$

3 Mohutnost množin

Definice 3.1

Množiny $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ mají stejnou mohutnost, pokud existuje bijekce $\mathbb{X}$ na $\mathbb{Y}$. Značíme $\mathbb{X} \approx \mathbb{Y}$.

Množina $\mathbb{X}$ má mohutnost menši nebo rovnu mohutnosti $\mathbb{Y}$, pokud existuje prosté zobrazení $\mathbb{X}$ do $\mathbb{Y}$. Značíme $\mathbb{X} \preceq \mathbb{Y}$.

Množina $\mathbb{X}$ má menší mohutnost než $\mathbb{Y}$, pokud $\mathbb{X} \preceq \mathbb{Y}$, ale neplatí $\mathbb{Y} \preceq \mathbb{X}$. Značíme $\mathbb{X} \prec \mathbb{Y}$.

Věta 3.1

(Cantor-Bernstein) Nechť $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ jsou množiny splňující $\mathbb{X} \preceq \mathbb{Y}$ a $\mathbb{Y} \preceq \mathbb{X}$, pak $\mathbb{X} \approx \mathbb{Y}$.

Lemma 3.2

Nechť $\mathbb{X}$ je množina a $H : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to \mathcal{P}(\mathbb{X})$ je zobrazení splňující podmínku $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$: $\mathbb{A} \subset \mathbb{B} \implies H(\mathbb{A}) \subset H(\mathbb{B})$. Pak existuje $\mathbb{C} \subset \mathbb{X}$ takové, že $H(C) = C$.

Důkaz

Položme $\mathcal{C} = \{\mathbb{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) : \mathbb{A} \subset H(\mathbb{A})\}$. Ukážeme, že $\mathbb{C} = \bigcap \mathcal{C}$ je hledanou množinou. $C \subset \mathbb{X}$ je zřejmé, $C \subset H(C)$: Pokud $\mathbb{A} \in \mathcal{C}$, pak $\mathbb{A} \subset C$, pak z vlastnosti zobrazení plyne $H(\mathbb{A}) \subset H(\mathbb{C})$. Tedy $\mathbb{A} \subset H(\mathbb{A}) \subset H(\mathbb{C})$. Z definice $\mathbb{C}$ dostáváme $C \subset H(\mathbb{C})$. Nakonec musíme ještě dokázat $H(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$. Z $\mathbb{C} \subset H(\mathbb{C})$ a z vlastnosti zobrazení $H(\mathbb{C}) \subset H(H(\mathbb{C}))$ TODO! $H(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$. □

Důkaz

Předpokládáme $\mathbb{X} \preceq \mathbb{Y} \implies$ existuje prosté zobrazení $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ a $\mathbb{Y} \preceq X \implies$ existuje prosté zobrazení $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$.

Definujeme $H : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to \mathcal{P}(\mathbb{X})$ předpisem $H(\mathbb{A}) = \mathbb{X} \setminus g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{A}))$. (Pozorování, jestliže $f = g^{-1}$ je prosté a na, tak H je identita.) Nyní ověříme předpoklady Lemmatu.

Nechť $\mathbb{U} \subset \mathbb{V} \subset \mathbb{X}$. Pak $f(\mathbb{U}) \subset f(\mathbb{V}) \implies \mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{V}) \subset \mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{U}) \implies g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{V})) \subset g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{U})) \implies \mathbb{X} \setminus g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{U})) \subset \mathbb{X} \setminus g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{V})) \implies H(\mathbb{U}) \subset H(\mathbb{V})$.

Dle lemmatu existuje $\mathbb{C} \subset \mathbb{X}$ takové, že $H(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Pak $\mathbb{C} = H(\mathbb{C}) = \mathbb{X} \setminus g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C})), g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C})) = \mathbb{X} \setminus \mathbb{C}$. Tedy $g|_{\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C})}$ je prosté zobrazení $\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C})$ ne $\mathbb{X}|\mathbb{C}$, a tedy $g^{-1}|_{\mathbb{X} \setminus \mathbb{C}}$ je prosté zobrazení $\mathbb{X} \setminus \mathbb{C}$ na $\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C})$. Navíc jistě $f|_{\mathbb{C}}$ je prosté zobrazení $\mathbb{C}$ na $f(\mathbb{C})$

Definujeme $h(a) = f(a), a \in \mathbb{C} | h(a) = g^{-1}(a), a \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{C}$. Potom h je prosté zobrazení $\mathbb{X}$ na $\mathbb{Y}$. □

4 Aritmetický, geometrický a harmonický průměr

Definice 4.1

Nechť $x_1, \ldots, x_n > 0$. Definujeme jejich

- aritmetický průměr jako $A_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.
- geometrický průměr jako $G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n}$
- harmonický průměr jako $H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$

Věta 4.1 (AGH nerovnost)

$$A_n \geq G_n \geq H_n$$

Poznámka (Pozorování)
Nerovnost $G_n \geq H_n$ snadno plyne z $A_n \geq G_N$, stačí dosadit $x_i = \frac{1}{y_i}$. Stačí ukázat nerovnost $A_n \geq G_n$.

Důkaz (1. Zpětnou indukcí)
Dokážeme pro mocniny 2. Následně dosadíme za jedno x geometrický průměr těch ostatních a budeme „indukovat“ zpět. □

Důkaz (2. Indukcí)
Dokážeme pro 1.

Chceme odhadnout aritmetický průměr $n+1$ čísel. Použijeme indukční předpoklad pro n čísel, jejichž aritmetický průměr je stejný. Za tato čísla zvolíme $x_1, \ldots, x_{n-1}, x'_n$, kde x'_n je doplnění, aby byly shodné aritmetické průměry. x'_n vyjádříme. Upravíme, řekneme, že x_n a x_{n+1} jsme zvolili, že budou nejmenší a největší číslo. □

Poznámka (2. referát)
Existuje i aritmeticko-geometrický průměr a aritmeticko-harmonický průměr (je roven geometrickému).

Příklad (3. teoretický)
Najděte všechna celá čísla m splňující

$$(1+m)^n \geq 1 + mn, \forall n \in \mathbb{N}$$

TODO? (Posloupnost $(1+\frac{1}{n})^n$ je rostoucí a shora omezená číslem 3, posloupnost $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ je naopak klesající).

Definice 4.2 (Aritmeticko-geometrický průměr)

Nechť $0 < b_1 < a_1$. $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ a $b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$. Limita těchto posloupností se nazývá aritmeticko-geometrický průměr.

Důkaz (Shodnost a existence limit)
$a_n \geq b_n$ z AG nerovnosti. Dokáže se monotónnost, z toho plyne existence limit. Pak z AL $A = \frac{A+B}{2}$, tedy $A = B$. □

Definice 4.3 (Aritmeticko-harmonický průměr)

Definujeme a dokazujeme obdobně jako výše.

Věta 4.2

Aritmeticko-harmonický průměr je roven geometrickému.

Důkaz
Součin členů se stejným indexem je roven součinu prvních členů, z toho limita součinu je součin prvních členů, z toho vyplývá, že limita činitelů (jelikož je shodná) je odmocninou ze součinu prvních členů (geometrický průměr). □

Věta 4.3 (Referáty)

Z množiny hromadných bodů nelze „vykonvergovat".

O množině hromadných bodů posloupnosti $\{a_n\}$ *splňující* $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$.

Příklad (Teoretický příklad 5)
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost splňující

$$a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}.$$

Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní.

5 Odhady faktoriálu

Tvrzení 5.1

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Důkaz (První nerovnost)
Označme $\beta_n = \left(\frac{n}{3}\right)^n, n \in \mathbb{N}$. Pak $\left(\frac{n}{3}\right)^n = \beta_n = \beta_1 \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}$. Odhadneme $\frac{\beta_k}{\beta_{k-1}} < k$. Tedy $\beta_n < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$. □

Důkaz (Druhá nerovnost)
AG. □

Horní odhad lze zlepšit:

Tvrzení 5.2

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n, \ n \geq 6.$$

Důkaz (Indukcí)
$n = 6 : 6! = 720 = 9 \cdot 80 < 9 \cdot 81 = 3^6$.

$(n+1)! = (n+1)n! < (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n \overset{?}{<} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$. Stačí ukázat $\frac{n^n}{2^n} < \frac{(n+1)^n}{2^{n+1}}$, tedy $2 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. □

Definice 5.1 (e)

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

Tvrzení 5.3

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = e.$$

Důkaz
Z AL: $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$ □

Tvrzení 5.4

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^{n+1}, \ n \geq 2.$$

Důkaz
1. nerovnost stejně jako výše s 3 místo e. Druhá nerovnost indukcí. □

Poznámka (Stirlingova formule (odhad fakotriálu))

$$n! \approx \sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

(Ve smyslu $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}} = 1$.)

Definice 5.2 (Toeplitzova transformace)

$\{c_{n,k}\}_{n=1,k=1}^{\infty,\ n}$ reálná čísla splňující: a) $\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = 0$ pro každé $k \in N$, b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} = 1$, c) existuje $C > 0$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} |c_{n,k}| \leq C$.

Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost. Zadefinujme novou posloupnost $\{b_n\}$ vztahem

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} a_k, n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Například (Matice (pouze dolní trojúhelník) splňující podmínky TT)
Jednotková matice.

Matice mající na i-tém řádku $\frac{1}{i}$, tedy $c_{n,k} = \frac{1}{n}$. Taková matice zřejmě splňuje podmínky TT a způsobí, že TT převede posloupnost na průměry prvních n členů. (Tj. pokud posloupnost konverguje, tak i průměry prvních n členů konvergují ke stejné limitě).

Důkaz (Toeplitzovy věty)
1. krok (konstantní posloupnost): Nechť $a_n = a, n \in \mathbb{N}$. Pak $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} a \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} \overset{\text{z b)}}{=} a$.

2. krok: Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Lze psát $a_n = (a_n - a) + (a)$. Víme, že pro posloupnost a tvrzení platí, stačí tedy dokázat tvrzení pro posloupnost $a_n - a$, která má limitu 0.

3. krok (nulová limita): Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak $\forall m > 1, n \geq m$ platí $|b_n| = |b_n - 0| = |\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} a_k| \leq \sum_{k=1}^{m-1} |c_{n,k}| \cdot |a_k| + \sum_{k=m}^{n} |c_{n,k}| \cdot |a_k|$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Protože $a_n \to 0$, pak $\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1, |a_n| < \frac{\varepsilon}{2C}$, kde C je konstanta z c). $\{a_n\}$ je konvergentní $\implies$ $\{a_n\}$ je omezená $\implies$ $|a_n| \leq D \forall n \in \mathbb{N}$. Z podmínky a) plyne, že $\exists n_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_2 \sum_{k=1}^{n_1-1} |c_n, k| < \frac{\varepsilon}{2D}$.

Nyní použijeme nerovnost výše s $m = n_1$, pro $n \geq \max\{n_1, n_2\}$:

$$|b_n| \leq \sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| \cdot |a_k| + \sum_{k=n_1}^{n} |c_{n,k}| \cdot |a_k| \leq D \sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2C} \sum_{k=n_1}^{n} |c_{n,k}| < D \cdot \frac{\varepsilon}{2D} + \frac{\varepsilon}{2C} \cdot C = \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. □

Příklad
Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel a $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Pak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = a$.

Řešení

AGH nerovnost a věta o dvou strážnících (Výše jsme dokázali, že A konverguje k a a obdobně se dokáže, že převrácená hodnota H konverguje k $\frac{1}{a}$, tedy H konverguje také k a, tedy G konverguje k a).

Důsledek

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel, pro kterou $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. Dokažte, že potom $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Řešení

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1},$$

což je geometrický průměr posloupnosti $\frac{a_n}{a_n-1} \to a$ rozšířené o 1 člen a_1, tedy má dle předchozího případu limitu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Příklad (Teoretický příklad 6)

Platí implikace v předchozím případě i opačně?

Příklad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Řešení

$$a_n = \frac{n^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$$

Tedy $\frac{n}{\sqrt[n]{n}} \to e$ podle předchozího důsledku.

Věta 5.5 (Stolzova)

Nechť $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ jsou posloupnosti splňující: a) y_n je rostoucí a $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$; b) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$.

Pak $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$.

Důkaz
1. Dokážeme pomocné tvrzení: Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující: a) $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty}(b_1 + \ldots + b_n) = \infty$; b) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

$$\text{Pak } \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + \ldots + b_n} = a.$$

Důkaz: Položme $c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1+\ldots+b_n}$. Ověříme předpoklady Toeplitzovy věty (předpoklad 1 díky podmínce 1, předpoklad 2 vychází automaticky z definice $c_{n,k}$, stejně tak 3, jelikož $c_{n,k} \geq 0$). Pak limita výše je přesně výsledek TV.

2. krok: Předpokládejme, že $y_1 > 0$. Definujme $a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{y-1}}$, $b_n = y_n - y_{n-1}$, $n \geq 2$, $a_1 = \frac{x_1}{y_1}$, $b_1 = y_1$. Následuje ověření předpokladů 1. kroku. □

Příklad
Nechť $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a \in \mathbb{R}$. Spočtěte $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

Řešení
Stolzova věta pro $x_n = a_n, y_n = n$. Výsledek a.

Příklad
$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}, k \in \mathbb{N}$

Řešení

$$x_n = 1^k + 2^k + \ldots + n^k, y_n = n^{k+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

Příklad (Teoretický příklad 7:)
Pro dané $k \in \mathbb{N}$ spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1} \right).$$

Příklad
Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right).$$

Řešení
Stolzova věta s $x_n = a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{n}}, \quad y_n = \sqrt{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})} = a \cdot 2 = 2a.$$

Poznámka (Speciálně $a = 1$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2$$

Příklad
Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \left(\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} \right).$$

Řešení
Stolzova věta s $x_n = \frac{a_1}{1} + \ldots + \frac{a_n}{n}, y_n = \log n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{n}}{\log n - \log(n-1)} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \left(\log \frac{n}{n-1}\right)} = a \cdot 1 = a$$

Poznámka (Speciálně)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) = 1$$

Příklad
Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Uvažujme posloupnost $a_n = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$, $n \in \mathbb{N}_0$. Potom $H(\{a_n\}) = [0, 1]$.

Lemma 5.6

Nechť $m \in \mathbb{N}$. Pak existují $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, pro která platí $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{mq}$.

Důkaz
Uvažujme $\{a_n\}_{n=0}^{m}$. Pak $a_n \in [0,1)$ a posloupnost má $m+1$ prvků. Lze psát

$$[0,1) = \left[0, \frac{1}{m}\right) \cup \left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{m-1}{m}, 1\right)$$

Tedy jeden z těchto intervalů obsahuje z dirichletova principu alespoň 2 členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{m}$. Nechť to jsou $a_i, a_j, i < j$. Pak $|a_i - a_j| < \frac{1}{m}$. Položme $p = \lfloor \alpha j \rfloor - \lfloor \alpha i \rfloor$, $q = j - i$. $|\alpha q - p| = |\alpha j - \alpha i - \lfloor \alpha j \rfloor + \lfloor \alpha i \rfloor| = |a_i - a_j| < \frac{1}{m}$, tedy $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{mq}$. □

Důkaz
Nechť $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$, $x \in (\varepsilon, 1-\varepsilon)$. Najdeme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $m > \frac{1}{\varepsilon}$, a k němu p, q z lemmatu. Jelikož $\alpha \notin Q$, platí $p\alpha - q \neq 0$. Najdeme $n_0 \in \mathbb{Z}$ splňující $n_0(q\alpha - p) \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Pak $n_0 \neq 0$. Dále $\lfloor n_0(\alpha q - p) \rfloor = 0$, a tedy $\lfloor n_0 \alpha q - n_0 p) \rfloor = \lfloor n_0 \alpha q \rfloor - n_0 p = 0$.

Je-li $n_0 > 0$ zvolme $n = n_0 q$. Pak $n \in \mathbb{N}$ a $a_n = \alpha n_0 q - \lfloor \alpha n_0 q \rfloor > \alpha n_0 q - n_0 p \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Indukcí lze zkonstruovat podposloupnost a_{n_k} takovou, že $a_{n_k} \to x$, tedy $x \in H(\{a_n\})$. Odtud $(0,1) \subseteq H(\{a_n\})$.

Z množiny hromadných bodů nelze vykonvergovat (referát), tedy $[0,1] = H$ (body < 0 nebo > 1 hromadnými body nemohou být, protože $a_n \in [0,1], \forall \mathbb{N}$). □

Příklad (Teoretický příklad 8)
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel s vlastností, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ platí, že $\{a_{nk}\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní. Plyne odtud, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ musí být konvergentní?

Poznámka (Připomeňme)
$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, značíme někdy $\overline{\lim} a_n$, je největší hromadná hodnota.

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, značíme někdy $\underline{\lim} a_n$, je největší hromadná hodnota.

Tvrzení 5.7 (Trojúhelníková nerovnost)

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

Důkaz
Přímo z definice dokážeme vlastnosti suprem a infim. $\square$

Příklad (Teoretický příklad 9)
Zkonstruujte funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $\lim_{x\to 0} f(x)f(2x) = 0$, pro kterou $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

Příklad (Teoretický příklad 11)
Najděte spojitou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která nabývá každé své hodnoty právě třikrát.

Definice 5.3 (Darbouxova vlastnost)

Funkce f má na intervalu I Darbouxovu vlastnost (vlastnost nabývání mezihodnot), pokud pro všechna $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in I$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, platí, že f nabývá na (x_1, x_2) všech hodnot mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$

Věta 5.8 (Z přednášky)

Každá spojitá funkce na I má na I Darbouxovu vlastnost.

Příklad (Teoretický příklad 12)
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je prostá a spojitá. Dokažte, že f je ryze monotónní (tj. buď rostoucí nebo klesající).

6 Funkcionální rovnice

Věta 6.1 (Cauchyova funkcionální rovnice)

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Nechť navíc platí alespoň jedna z následujících podmínek. Pak $f(x) = cx$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.

- *f je spojitá v nějakém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.*
- *f je shora omezená na nějakém intervalu (a, b).*
- *f je monotonní na $\mathbb{R}$.*

Důkaz
Důkaz $f(qx) = qf(x), q \in \mathbb{Q}$ viz 10. úkol z lingebry.

- Nechť $z_n \to 0$, pak $z_n + x_0 \to x_0$ a
$$f(z_n + x_0) = f(z_n) + f(x_0).$$
Jelikož f je spojitá v x_0, platí
$$\lim_{n\to\infty} f(z_n + x_0) = f(x_0) \implies \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0.$$
Tedy f je spojitá v 0 dle Heineho věty.
Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x_n \to x$, $x_n \in \mathbb{Q}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak $x_n - x \to 0$.
$$f(x_n - x) = f(x_n) - f(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot f(1) = x \cdot f(1) = x \cdot c.$$
- Krok 1: je-li f shora omezená na (a, b), pak f je omezená na $(-\varepsilon, \varepsilon), \forall \varepsilon > 0$. Důkaz: Položme $g(x) = f(x) - f(1)x, x \in \mathbb{R}$. Pak
$$g(x + y) = g(x) + g(y), g(0) = f(0) - 0 = 0 \implies g(r) = rg(0) = 0, \forall r \in \mathbb{Q}.$$
Nechť $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Pak $\exists r \in \mathbb{Q}, x + r \in (a, b)$. Tedy $g(r) = f(r) - f(1)r = 0$ a $g(x) = g(x) + g(r) = g(x + r) = f(x + r) - f(1) \cdot (x + r)$. $f(x + r)$ je shora omezená z předpokladů, $f(1) \cdot (x + r)$ zřejmě. Tedy g je shora omezená na epsilonovém okolí 0, tedy i f je shora omezená na epsilonovém okolí 0, a protože je lichá, tak je i sdola omezená.
Krok 2: z definice spojitosti a linearity je tato funkce tedy spojitá v 0.
- Pokud je monotónní, pak je omezená na intervalu např. $[0, 1]$, tedy dále postupujeme podle bodu (ii).

$\square$

Příklad
Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojité, splňující $f(1) > 0, f(x + y) = f(x)f(y)$.

Řešení

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\geq 0$$

Pokud $f\left(x_0\right)=0$ pro nějaké $x_0\in\mathbb{R}$, pak $f(x)=f\left(x-x_0\right)\cdot 0=0$ ↯.

Tedy $f(x)>0$. Tedy můžeme 'zlogaritmovat': $g(x)=\log f(x)$ spojitá na $\mathbb{R}$ a

$$g(x+y)=\log f(x+y)=\log f(x)+\log f(y)=g(x)+g(y).$$

Tudíž $g(x)=ax$ pro nějaké $a\in\mathbb{R}$. Tudíž $f(x)=e^{ax}=\left(e^a\right)^x=b^x$, pro $b\in\mathbb{R}$.

Příklad

Najděte všechny spojité $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takové, že $x-y\in\mathbb{Q}\implies f(x)-f(y)\in\mathbb{Q}$.

Řešení

$g(x)=f(x+1)-f(x)$ spojitá. $H(g)\subseteq\mathbb{Q}\implies g$ je konstantní. Potom při označení $f(0)=r$ je $f(z)=r+zq$, pro libovolné $.z\in\mathbb{Z}$. Obdobně to dokážeme pro jiné konstanty v g než 1 a že $f\left(\frac{n}{m}\right)=r+\frac{n}{m}q$, takže ze spojitosti $f(x)=r+qx$ pro $q\in\mathbb{Q}$, $r\in\mathbb{R}$.