Příklad

Let Ω be a bounded domain with a smooth boundary. Let $\mathbf{v}$ be a smooth vector field that vanishes on the boundary ($\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{o}$). Show that

$$2\int_\Omega \mathbb{D} : \mathbb{D}\, dv = \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{v}\, dv + \int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{v})^2\, dv,$$

where $\mathbb{D}$ denotes the symmetric part of the gradient of $\mathbf{v}$ $\left(\mathbb{D} := \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\right)\right)$.

Řešení

Víme, že : je lineární, tedy

$$\mathbb{D} : \mathbb{D} = \left[\frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\right)\right] : \left[\frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T : (\nabla\mathbf{v})^T + \nabla\mathbf{v} : (\nabla\mathbf{v})^T + (\nabla\mathbf{v})^T : \nabla\mathbf{v}\right) =$$

(Pro matice: $\mathbb{A}^T : \mathbb{B}^T = \operatorname{tr}\left(\mathbb{A}^T\mathbb{B}\right) = A_{ji}B_{ij} = \operatorname{tr}\left(\mathbb{A}\mathbb{B}^T\right) = \mathbb{A} : \mathbb{B}$)

$$= \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T : \nabla\mathbf{v}\right).$$

Z linearity integrálu (a dosazení toho, co jsme teď spočítali):

$$2\int_\Omega \mathbb{D} : \mathbb{D}\, dv = \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{v}\, dv + \int_\Omega (\nabla\mathbf{v})^T : \nabla\mathbf{v}\, dv.$$

Tedy stačí dokázat, že $\int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{v})^2\, dv = \int_\Omega (\nabla\mathbf{v})^T : \nabla\mathbf{v}\, dv$.

Na jedné z prvních přednášek jsme měli rovnost

$$\int_\Omega (\operatorname{div}\mathbb{A}) \cdot \mathbf{v}\, dv = \int_{\partial\Omega} \mathbb{A}^T\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, ds - \int_\Omega \mathbb{A} : \nabla\mathbf{v}\, dv.$$

Tedy dosadíme $\mathbb{A} = (\nabla\mathbf{v})^T$ a $\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Navíc víme, že $\mathbf{v}$ je na hranici $\mathbf{o}$, tedy první člen na pravé straně je 0:

$$\int_\Omega (\nabla\mathbf{v})^T : \nabla\mathbf{v}\, dv = 0 - \int_\Omega \left(\operatorname{div}(\nabla\mathbf{v})^T\right) \cdot \mathbf{v}\, dv.$$

Derivace jsou (předpok. hladkost) záměnné: $\left(\operatorname{div}(\nabla\mathbf{v})^T\right)_j = \partial_i\partial_j v_i = \partial_j\partial_i v_i = \left(\nabla(\operatorname{div}\mathbf{v})\right)_j$. Nakonec použijeme Greenovu větu (a znovu $\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{o}$):

$$\int_\Omega (\nabla\mathbf{v})^T : \nabla\mathbf{v}\, dv = -\int_\Omega \left(\operatorname{div}(\nabla\mathbf{v})^T\right) \cdot \mathbf{v}\, dv = -\int_\Omega \nabla(\operatorname{div}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}\, dv =$$

$$= -\int_{\partial\Omega} (\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, ds + \int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{v})(\operatorname{div}\mathbf{v})\, dv = -0 + \int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{v})^2\, dv = \int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{v})^2\, dv.$$