

1 Úvod

Poznámka (Domluva)

\mathbb{N} jsou přirozená čísla s 0. n značí přirozené číslo.

Dále se probírali základy značení a teorie množin.

Definice 1.1 (Základy)

Základem výrokové logiky je 5 symbolů (2 hodnoty + 3 logické spojky): $\top \perp \neg \wedge \vee$ = pravda, lež, negace, a, nebo.

Dále jsou to výrokové atomy z nějaké abecedy. Libovolný výrok je pak konečným aplikováním logických spojek.

Definice 1.2 (Pravdivostní ohodnocení)

Pravděpodobnostní ohodnocení je zobrazení t z prvovýroků do $\{0, 1\}$. Toto zobrazení lze jednoznačně rozšířit na t' na všechny výroky:

$$t'(\top) = 1, t'(\perp) = 0, t'(\neg a) = 1 - t'(a), t'(a \vee b) = \max\{t'(a), t'(b)\}, t'(a \wedge b) = \min\{t'(a), t'(b)\}$$

Definice 1.3

Pomocí pravdivostního ohodnocení můžeme zavést implikaci (spojka mezi premisou (antecedent) a závěrem (konsekvent)).

Definice 1.4 (Tautologie)

p je tautologie (notace $\models p \equiv t(p) = 1$ pro všechna $t : A \rightarrow \{0, 1\}$). p je splnitelné \equiv existuje $t : A \rightarrow \{0, 1\}$ takové, že $t(p) = 1$.

Lemma 1.1 (Zákony inempotence, komutativity, asociativity, distributivity, absorpce, DeMorganovy)

Viz skripta.

Definice 1.5 (Model)

Model (koho, čeho) Σ (výrokové teorie) je každé pravděpodobnostní ohodnocení t , které přiřazuje 1 všem výrokům ze Σ . Říkáme, že p je tautologický důsledek Σ (píšeme $\Sigma \models p$, říkáme p vyplývá ze Σ) $\equiv t(p) = 1$ pro všechny modely t (koho čeho) Σ .

Poznámka

$\models p$ je totéž, co $\emptyset \models p$.

Lemma 1.2

Vlastnosti \models . Viz skripta.

Definice 1.6 (Arita)

Mějme množinu symbolů F a zobrazení $a : F \rightarrow \mathbb{N}$. Říkáme, že symbol $f \in F$ má aritu $n \equiv a(f) = n$.

Řekněme, že slovo je přijatelné \equiv TODO.

Definice 1.7 (Arita logických symbolů)

Aritu symbolů ar definujeme pro $F = A \cup \{\top, \perp, \neq, \vee, \wedge\}$ jako $ar(x) = 0, x \in A \cup \{\top, \perp\}$, $ar(\neq) = 1$, $ar(\vee, \wedge) = 2$.

Lemma 1.3

Budte t_1, \dots, t_m a u_1, \dots, u_n jsou přijatelná slova a w libovolné slovo tak, že $t_1 \dots t_m w = u_1 \dots u_n$. Potom $m \leq n$, $t_i = u_i$ pro $i \in [m]$ a $w = u_{m+1} \dots u_n$.

┌

Důkaz

└ Indukcí podle velikosti $u_1 \dots u_n$.

□

Definice 1.8 (Modus Ponens (= MP = odvozovací pravidla))

Z p a $p \implies q$, odvodíme q .

Definice 1.9 (Důkaz)

Formální důkaz (či důkaz) p z Σ je sekvence p_1, \dots, p_n , kde $n \geq 1$ a $p_n = p$ tak, že $\forall k \in [n]$: buď $p_k \in \text{Sigma}$, nebo p_k je výrokový axiom (viz skripta), nebo $\exists i, j \in [k-1]$ tak, že p_k lze odvodit pravidlem MP z p_i a p_j .

Říkáme, že p je dokazatelné ze Σ , a značíme $\Sigma \vdash p$

Tvrzení 1.4

Pokud $\Sigma \vdash p$, pak $\Sigma \models p$.

┌

Důkaz

└ Jednoduchý.

□

Věta 1.5 (O úplnosti (1. znění))

$$\Sigma \vdash p \Leftrightarrow \Sigma \models p.$$

Věta 1.6 (Kompaktnost logiky)

Pokud $\Sigma \models p$, pak existuje konečná podmnožina $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tak, že $\Sigma_0 \models p$.

┌

Důkaz

Vyplývá z předchozí věty

□

Definice 1.10 (Konzistentnost)

Říkáme, že Σ je nekonzistentní, pokud $\Sigma \vdash \perp$, jinak (pokud $\Sigma \not\vdash \perp$) je konzistentní.

Věta 1.7 (O úplnosti (2. znění))

Σ je konzistentní právě tehdy, když má model.

Důsledek

Σ má model \Leftrightarrow každá konečná podmnožina Σ má model.

Lemma 1.8 (Dedukce)

Předpokládejme $\Sigma \cup \{p\} \vdash q$. Potom $\Sigma \vdash p \Rightarrow q$.

┌

Důkaz (Indukcí)

Pokud je q výrokový axiom, pak $\Sigma \vdash q$ a jelikož $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ je výrokový axiom, MP říká $\Sigma \vdash p \Rightarrow q$. Pokud $q \in \Sigma \cup \{p\}$, pak buď TODO

□

Důsledek

$\Sigma \vdash p$ tehdy a pouze tehdy, když $\Sigma \cup \{\neg\}$ je nekonzistentní.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Předpokládejme, že $\Sigma \vdash p$. Jelikož $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \perp)$ je výrokový axiom, můžeme 2krát použít MP a získat $\Sigma \cup \{p\}$ TODO

□

Důsledek

Z druhého znění věty o úplnosti vyplývá první znění.

Definice 1.11

Říkáme, že Σ je kompletní (úplná, ale s větou o úplnosti nemá nic společného), pokud Σ je konzistentní a pro všechna p je buď $\Sigma \vdash p$ nebo $\Sigma \vdash \neg p$.

Lemma 1.9 (Lindenbaum)

Nechť Σ je konzistentní. Pak existuje kompletní Σ' tak, že $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

┌

Důkaz

Zornovo lemma. TODO. Pokud je axiomů konečně, tak můžeme udělat důkaz bez Zornova lemmatu. □

Definice 1.12 (Pravdivostní ohodnocení v závislosti na Σ)

$t_\Sigma : A \rightarrow \{0, 1\}$, $t_\Sigma(a) = 1$, pokud $\Sigma \vdash a$, jinak $t_\Sigma(a) = 0$.

Lemma 1.10

Předpokládejme, že Σ je kompletní, potom pro každé p máme

$$\Sigma \vdash p \Leftrightarrow t_\Sigma(p) = 1.$$

Nevoli t_Σ je model Σ .

┌

Důkaz

Indukcí podle počtu spojek. TODO. □