Příklad
Vyšetřete průběh řešení diferenciální rovnice $x' = t^2(x+1)$.

Řešení
Ω je zřejmě $\mathbb{R}^2$.

Stacionární řešení, tj. $t^2(x+1) = 0$ je pouze $x = -1$.

$x' > 0$ na $(-1, +\infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, jelikož $t^2 \geq 0$ a krom 0 je $t^2 > 0$, tudíž záleží především na $x + 1$. Tedy zde je x rostoucí. $x' < 0$ na $(-1, +\infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ a zde je x klesající. Nakonec $x' = 0$ pro $x = -1$ (tedy stacionární řešení $\implies$ z hlediska extrému a monotonie nezajímavé) a pro $t = 0$, kde je pouze inflexní bod, neboť z obou stran je řešení rostoucí nebo z obou klesající (krom $x = -1$, ale to je zas nezajímavé).

$x'' = 2t(x+1) + x't^2 \overset{t \neq 0}{=} x'(2/t + t^2)$, tedy $x'' = 0$ pro $x = -1$, $t = 0$ a $t = -\sqrt[3]{2}$. $x = -1$ je zase nezajímavé, $t = 0$ a $t = -\sqrt[3]{2}$ jsou množiny inflexních bodů. $x'' > 0$, a tedy řešení je konvexní na

$$(-1, +\infty) \times (0, +\infty) \cup (-1, +\infty) \times (-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (-\infty, -1) \times (-\sqrt[3]{2}, 0).$$

Naopak $x'' < 0$, a tedy řešení je konkávní na:

$$(-\infty, -1) \times (0, +\infty) \cup (-\infty, -1) \times (-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (-1, +\infty) \times (-\sqrt[3]{2}, 0)$$

Funkce je buď konstantní ($x = -1$), nebo klesá k $-\infty$ ($x < 1$) nebo stoupá k $+\infty$ ($x > 1$), tedy nás zajímá, jestli existuje vertikální asymptota. Jelikož $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x+1} = +\infty$, tak neexistuje?

Na druhou stranu ($t \to -\infty$) jde ve všech případech k $x = -1$ a $x' \overset{x \to -1}{\to} 0$, tedy se k $x = -1$ blíží „rovnoběžně“.

Příklad
Vyšetřete průběh řešení diferenciální rovnice $x' = \sqrt[3]{1-x^2}$.

Řešení
Ω je zřejmě $\mathbb{R}^2$.

Stacionární řešení, tj. $\sqrt[3]{1-x^2} = 0$ jsou $x = \pm 1$.

$x' > 0$ pro $|x| < 1$, a tedy pro $|x| < 1$ je x rostoucí. $x' < 0$ pro $|x| > 1$, a tedy pro $|x| > 1$ je x klesající. $x' = 0$ pro $x = \pm 1$. Extrémy kromě $x = \pm 1$ tedy nejsou.

Druhá derivace v bodech $x = \pm 1$ neexistuje. Jinak $x'' = (1-x^2)^{-2/3} \cdot 2x \cdot x' = \frac{2x}{x'}$. $x'' = 0$ je pro $x = 0$, tedy zde jsou inflexní body. $x'' > 0$, a řešení je tedy konvexní na $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Naopak $x'' < 0$, a řešení je tedy konkávní na $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Řešení v $x > -1$ jdou k $x = 1$. Naopak řešení v $x < -1$ jdou k $-\infty$ a jelikož $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx = +\infty$, tak neexistuje vertikální asymptota.

V druhém směru jde řešení v $x < 1$ k -1 a v $x > 1$ k $+\infty$.

Příklad

K zastavení říčních lodí u mola se z nich háže lano, které se omotá kolem sloupku stojícího na molu. Jaká síla působí na loď, když lano udělá tři otočky kolem tyče, součinitel tření lana o tyč je 1/3 a pracovník na molu táhne za volný konec lana silou 10 kg.

Poznámka

Uvažujme malou část lana odpovídající úhlu $\Delta\varphi$. Podívejme se, jaké síly na něj působí. Na tento malý úsek působí: napínací síly $T(\varphi)$ působící v krajních bodech a směřující ve směru lana, tedy tečně ke kružnici. Dále reakční síla sloupu $N(\varphi)$ působící ve středu segmentu a směřující kolmo k povrchu tyče ve směru od středu ven. Dále třecí síla $F_{tr}(\varphi)$ působící v místě kontaktu a směřující proti směru možného pohybu. Gravitační sílu můžeme ignorovat.

Řešení

Podle poznámky výše a geometrické představy nám vyjde

$$N = (T(\varphi) + T(\varphi + \Delta\varphi)) \cdot \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right), \qquad F_{tr} = (T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi)) \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right).$$

Z fyziky víme, že $N/3 = F_{tr}$, tedy že

$$\tan\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \frac{\sin}{\cos}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 3\frac{T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi)}{T(\varphi + \Delta\varphi) + T(\varphi)}.$$

Vydělení $\Delta\varphi$ a limitní přechod $\Delta\varphi \to 0$ dává

$$\frac{1}{2} = 3\frac{T'(\varphi)}{2T(\varphi)} \implies T'(\varphi) = \frac{T(\varphi)}{3}.$$

Řešení je $T(\varphi) = C\exp(\varphi/3)$. Víme, že $T(0) = 10$, tedy $C = 10$. Při třech otočkách je síla $T(6\pi) = 10\exp(2\pi) \approx 5355$ kg.