

Hodně štěstí ke zkouškám, nestresujte se a hlavně se nezapomínejte smát, úsměv vždy pomůže. Váš Jidáš

Tahák na písemnou zkoušku z MA 20/21

Limity $x \rightarrow \infty$, $a > 1$, $b \in \mathbb{R}$

$$1 \ll \log x \ll \sqrt[n]{x} \ll x \ll x^a \ll a^x \ll x! \ll x^x$$

$$\sqrt[n]{a-1} \rightarrow 1, \quad \sqrt[n]{x} \rightarrow 1, \quad \sqrt[n]{x!} \rightarrow \infty, \quad \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x = e^b.$$

Limity $x \rightarrow 0$

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \frac{\tan x}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{1}{0_{\pm}} = \pm\infty$$

Derivace $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $x_+ > 0$, $x_1 \in (-1, 1)$

$$c' = 0, \quad (x^n)' = nx^{n-1}, \quad (x_+^a)' = ax_+^{a-1}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\exp x)' = \exp x, \quad (\log x_+)' = \frac{1}{x_+}, \quad (\arcsin x_1)' = \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}}, \quad (\arccos x_1)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{abs} x)' = \operatorname{sgn} x \text{ (kromě 0, kde neexistuje),}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\right), \quad (\cotg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}).$$

Taylorovy polynomy v bodě $x = 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\exp x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2}),$$

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{2!} \cdot x + \frac{a \cdot (a-1)}{3!} + \dots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n).$$

Vyšetření funkce

Definiční obor a spojitost. Průsečíky. Symetrie (lichost, sudost, periodicitu). Limity. Derivace. Monotonie a extrémy (lokální, globální). Druhá derivace. Konvexita, konkavita, inflexní body. Asymptoty. Graf a obor hodnot.

Zbytky Taylorova polynomu $\xi_1, \xi_2, \xi \in (a, x)$

$$\text{Lagrangeův : } f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi_1) \cdot (x-a)^{n+1},$$

$$\text{Cauchyův : } f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi_2) \cdot (x-\xi_2)^n \cdot (x-a),$$

$$\text{Taylorův : } f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-\xi)^n.$$

Věty

Aritmetika limit (+ Binomická věta*), věta o složené funkci (S, P), L'Hopital, Heine, POLICIE (strážníci, Anděl, Ďábel), omezená krát nulová = nulová, bezejmenná věta o dělení nulou, limita a uspořádání, jednoznačnost limity, Bolzano-Cauchyova podmínka, limita vybrané posloupnosti, věta o (limitě) monotónní posloupnosti, věty o hromadných bodech a limsup s liminf.

Aritmetika derivací, derivace složené funkce, derivace inverzní funkce, vztah derivace a monotonie, derivace a limita derivace (spojitá funkce), vztah druhé derivace a konvexity / konkavity.

Spojité funkce[†], $a \in \mathbb{R}$

(x^a) , log, exp, sin, cos, (tan), (cotg), arcsin, arccos, arctan, arccotg, abs, (sgn).

Dále: složení, součet, rozdíl, součin a násobek spojitých funkcí[‡].

Funkce pro vyvracení tvrzení

$(-1)^n$, abs, sgn, $\sin \frac{1}{x}$, $f = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x > 0 \\ x^3 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$, Dirichletova, Riemannova[§], Weierstrassova, Cantorovo diskontinuum.

Nemá limitu ani limitu součtu, ale má třeba limitu průměru. Nemá derivaci v nule, ale je spojitá. V nule má derivaci (nevlastní), ale není spojitá. Na libovolném okolí nuly není prostá. V nule nemá druhou derivaci, ale první ano. Není monotónní ani spojitá ani nemá jednostranné derivace, ale zato má spoustu maxim a minim. Je spojitá právě v iracionálních bodech. Je spojitá na celém \mathbb{R} , ale nemá nikde derivaci. Je opravdu divné.

Další $x, c, d > 0$, n liché

$$x^y = \exp(y \log(x)), \quad \sqrt{c} - \sqrt{d} = \frac{c-d}{\sqrt{c} + \sqrt{d}}, \quad \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}},$$
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \dots + b^{n-1}), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Zdroje:

- <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~henc1/prednaska.pdf>
- <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/priklady.pdf>
- <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pernecka/ZS2009-2010/stvrtok/derivace.pdf>
- <https://github.com/JoHavel/MFFNotes/blob/master/OM1/MatAnalyza/MatAnalyza.pdf>

*Pozor, 'platí' pouze pro konstantní mocninu, tj. ne pro $(\dots)^x$ a $(\dots)^n$.

[†]Funkce v () jsou spojitě jen na nějakém intervalu.

[‡]Podíl chybí schválně!

[§]Riemannova, ne Riemannova ζ

Goniometrické identity¶

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \tan x \cdot \cotg x = 1.$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = -\tan x, \quad \cotg(-x) = -\cotg x.$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cotg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y, & \cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y, \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}, & \cotg(x \pm y) &= \frac{\cotg x \cdot \cotg y \mp 1}{\cotg x \pm \cotg y}. \end{aligned}$$

| | | | | | |
|------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| Rad | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tan | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – |
| cotg | – | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2},$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}, \quad \cotg x \pm \cotg y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \cdot \sin y}, \quad \tan x \pm \cotg y = \pm \frac{\cos(y \mp x)}{\cos x \sin y}.$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)], \quad \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)],$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x - y) + \sin(x + y)], \quad \tan x \cdot \cotg y = \frac{\tan x + \cotg y}{\cotg x + \tan y},$$

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cotg x + \cotg y}, \quad \cotg x \cdot \cotg y = \frac{\cotg x + \cotg y}{\tan x + \tan y}.$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \tan 2x = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x}, \quad \cotg 2x = \frac{\cotg^2 x - 1}{2 \cdot \cotg x}.$$

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \quad \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}, \quad \left| \cotg \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}.$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x), \quad \cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x).$$

Logaritmy

$$\log(xy) = \log x + \log y, \quad \log \frac{x}{y} = \log x - \log y, \quad \log(x^y) = y \log(x), \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

¶Zdroj https://cs.wikipedia.org/wiki/Goniometrick%C3%A1_funkce.