# 1 Skalární součin

**Definice 1.1** (Standardní skalární součin)

Buďte $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. Pak standardní skalární součin $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ definujeme jako $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{u_1} \cdot v_1 + \ldots + \overline{u_n} \cdot v_n$.

**Definice 1.2** (Euklidovská norma)

Nechť $\cdot$ je standardní skalární součin na $\mathbf{V}$. Potom $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ definujeme euklidovskou normu jako $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$.

**Definice 1.3** (Skalární součin)

Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Skalární součin je zobrazení $\cdot : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{C}$, které ($\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ a $\forall t \in \mathbb{C}$) splňuje:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}, \text{ (Symetričnost)}$$

$$\mathbf{u} \cdot (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}), \ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}, \text{ (Linearita)}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0 \wedge (\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}).$$

**Definice 1.4** (Hermitovsky sdružená matice)

Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, potom hermitovsky sdružená matice je $A^* = (\overline{a_{ji}})$.

Čtvercová matice je Hermitovská, pokud je rovna své hermitovsky sdružené matici.

**Definice 1.5**

Buď $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a buď $A = T^{n \times n}$. Pak $A$ je pozitivně definitní, pokud je hermitovská a platí

$$\mathbf{u} * Au \geq 0 \wedge (\mathbf{u} * Au = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}).$$

*Důsledek*

$\langle \cdot, \cdot \rangle_A = \cdot^* A \cdot$ je skalární součin, právě když $A$ je pozitivně definitní.

**Definice 1.6** (Norma)

Buď $\mathbf{V}$ VP nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pak normou vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ rozumíme $||\mathbf{u}|| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ .

**Tvrzení 1.1** (Vlastnosti normy)

$$||\mathbf{u}|| \geq 0 \wedge (||\mathbf{u}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}).$$

$$\forall t \in \mathbb{T} : ||t\mathbf{u}|| = |t| \cdot ||\mathbf{u}||.$$

$$||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||^2 = 2||\mathbf{u}||^2 + 2||\mathbf{v}||^2.$$

$$\Re(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2}||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 - ||\mathbf{u}||^2 - ||\mathbf{v}||^2.$$

**Věta 1.2** (Cauchy-Schwarzova nerovnost)

*Buď $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, $\mathbf{V}$ VP nad $\mathbb{T}$ se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pak platí $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ : $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||$. Rovnost platí právě tehdy, pokud $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je lineárně závislá.*

*Důkaz*

Případ 1): $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je LZ: Buď $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$: $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = |\langle \mathbf{u}, t \cdot \mathbf{u} \rangle| = |t| \cdot |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| = |t| \cdot ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||$.

Případ 2): $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je LN: Víme, že $||\mathbf{u} - t\mathbf{v}||^2 > 0$. Zvolme $t$ tak, aby $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = 0$. (To lze, protože $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - t \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - t||\mathbf{v}||^2 \implies t = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{||\mathbf{v}||^2}$.) $0 < ||\mathbf{u} - t\mathbf{v}||^2 = \langle \mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle - \overline{t} \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = ||\mathbf{u}||^2 - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{||\mathbf{v}||^2} = ||\mathbf{u}||^2 - \frac{\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{||\mathbf{v}||^2} = ||\mathbf{u}||^2 - \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{||\mathbf{v}||^2}$.

Tj. $0 < ||\mathbf{u}||^2 \cdot ||\mathbf{v}||^2 - |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2$, tedy $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||$. □

*Důsledek* (Trojúhelníková nerovnost)

Buď $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, $\mathbf{V}$ VP nad $\mathbb{T}$ se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pak platí $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ : $||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$. Rovnost platí právě tehdy, pokud $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je lineárně závislá.

*Důkaz*

$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = ||\mathbf{u}||^2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + ||\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + 2\Re(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) + ||\mathbf{v}||^2 \leq ||\mathbf{u}||^2 + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| + ||\mathbf{v}||^2 \leq ||\mathbf{u}||^2 + 2 \cdot ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{v}||^2 = (||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||)^2$. □

**Definice 1.7** (Kolmost)

Buď $\mathbf{V}$ VP se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Řekneme, že $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou kolmé, značíme $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, pokud $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

*Poznámka*

Ze skoro symetrie (SSS) plyne, že relace jsou kolmé je symetrická.

**Definice 1.8** (Kolmost množin)

Množina nebo posloupnost $M$ vektorů VP $\mathbf{V}$ s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se nazývá ortogonální, pokud každá dvojice různých prvků $M$ je kolmá. Nazývá se ortonormální, pokud je ortogonální a každý prvek má normu 1.

*Důsledek*
Kanonická báze je ortonormální. Normovaná (tj. každý prvek vydělíme normou) ortogonální množina / posloupnost je ortonormální.

**Tvrzení 1.3** (Pythagorova věta)

*$\mathbf{V}$ vektorový prostor se $\langle\cdot,\cdot\rangle$, buďte $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ kolmé vektory. Pak*

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2.$$

*Důkaz*

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = \langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle+\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle+\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle+0+0+\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = ||\mathbf{u}||^2+||\mathbf{v}||^2.$$

□

*Důsledek*
Je-li $(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)$ ortogonální posloupnost, pak $||\mathbf{v}_1+\ldots+\mathbf{v}_k||^2 = ||\mathbf{v}_1||^2+\ldots+||\mathbf{v}_k||^2$.

*Důkaz*
Indukcí triviálně. □

**Tvrzení 1.4**

*Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor s $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)$ ortogonální posloupnost nenulových vektorů. Pak je $(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)$ LN.*

*Důkaz*
Předpokládejme, že $0 = a_1\mathbf{v}_1+\ldots+a_k\mathbf{v}_k$, kde $a_1,\ldots,a_k\in\mathbb{T}$ ($\mathbb{T}=\mathbb{R}\vee\mathbb{T}=\mathbb{C}$). Chceme ukázat, že $a_1=\ldots=a_k=0$.

$$\forall i\in[k]: 0 = \langle v_i,\mathbf{o}\rangle = \langle\mathbf{v}_i, a_1\mathbf{v}_1+\ldots+a_k\mathbf{v}_k\rangle = a_1\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_1\rangle+\ldots+a_k\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_k\rangle = a_i\cdot||\mathbf{v}_i||^2 \implies a_i = 0.$$

□

## 1.1 Ortonormální báze a vyjádření vektorů vzhledem k nim

**Tvrzení 1.5**

*$\mathbf{V}$ VP s $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $B=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ ortonormální báze. Pak pro každý $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$ platí:*

$$\mathbf{u} = \langle\mathbf{v}_1,\mathbf{u}\rangle\cdot\mathbf{v}_1+\ldots+\langle\mathbf{v}_n,\mathbf{u}\rangle\cdot\mathbf{v}_n.$$

*To jest*

$$[\mathbf{u}]_B = (\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle, \ldots, \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u} \rangle)^T.$$

*Důkaz*

Vezmeme $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{T}$ tak, aby $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$. Máme $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}_i, a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n \rangle = a_1 \cdot 0 + \ldots + a_i + \ldots + a_n \cdot 0 = a_i$. □

*Poznámka*

Kdyby $B$ byla jen ortogonální, pak $[\mathbf{u}]_B = (\frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle}{||\mathbf{v}_1||}, \ldots, \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u} \rangle}{||\mathbf{v}_k||})^T$.

*Poznámka*

$a_1, \ldots, a_n$ se někdy nazývají Fourierovy koeficienty.

**Tvrzení 1.6**

*$\mathbf{V}$ VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ortonormální báze, $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$. Pak $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = [\mathbf{u}]_B \cdot [\mathbf{w}]_B = [\mathbf{u}]_B^* [\mathbf{w}]_B$.*

*Důkaz*

Buď $[\mathbf{u}]_B = (a_1, \ldots, a_n)^T$, $[\mathbf{w}]_B = (b_1, \ldots, b_n)^T$. Pak $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n, b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_n\mathbf{v}_n \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_i} \cdot b_j \cdot \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i \cdot \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = [\mathbf{u}]_B^* [\mathbf{w}]_B$. □

## 1.2 Kolmost množin

**Definice 1.9** (Kolmost množin)

$\mathbf{V}$ VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $M, N \subseteq \mathbf{V}$. Pak řekneme, že $\mathbf{v}$ je kolmý k $M$, značíme $\mathbf{v} \perp M$, pokud $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}\ \forall \mathbf{w} \in M$, a řekneme, že $M$ je kolmá k $N$, značíme $M \perp N$, pokud $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}\ \forall \mathbf{v} \in M\ \forall \mathbf{w} \in N$.

**Definice 1.10**

Buď $\mathbf{V}$ VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a buď $\mathbf{W} \leq \mathbf{v}$. Je-li $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, ortogonální projekcí vektoru $\mathbf{v}$ na podprostor $\mathbf{W}$ rozumíme vektor $\mathbf{w}$ takový, že $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ a $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{w}$.

**Věta 1.7**

*Buď $\mathbf{V}$ VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$, buď $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ ortogonální projekce $\mathbf{v}$ na $\mathbf{W}$. Potom pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ různý od $\mathbf{w}$ platí: $||\mathbf{v} - \mathbf{w}|| < ||\mathbf{v} - \mathbf{u}||$.*

*Speciálně existuje-li ortogonální projekce $\mathbf{v}$ na $\mathbf{W}$, pak je určena jednoznačně.*

*Důkaz*
Z předpokladu $\mathbf{w}, \mathbf{u}$, a tedy i $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ jsou vektory $\mathbf{W}$. Tudíž $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{w} - \mathbf{u}$ ($\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{W}$). Z Pythagorovy věty: $||\mathbf{v} - \mathbf{u}||^2 = ||\mathbf{v} - \mathbf{w}||^2 + ||\mathbf{w} - \mathbf{u}||^2 > ||\mathbf{v} - \mathbf{w}||^2$. □

## Tvrzení 1.8

*Buď $\mathbf{V}$ VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a buďte $M, N \subseteq \mathbf{V}$. Pak $M \perp N \Leftrightarrow M \perp \mathrm{LO}(N)$ ($\Leftrightarrow \mathrm{LO}(M) \perp \mathrm{LO}(N)$).*

*Důkaz*
$\Leftarrow$: Triviální (protože $N \subseteq \mathrm{LO}(N)$).

$\implies$ : Předpokládejme, že $M \perp N$. Vezměme $\mathbf{v} \in M$ a $\mathbf{w} = a_1\mathbf{w}_1 + \ldots + a_n\mathbf{w}_n \in \mathrm{LO}(N)$. Pak $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \rangle + \ldots + a_n \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n \rangle = 0$. □

## Tvrzení 1.9

*Buď $\mathbf{V}$ VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$, který má ortonormální bázi $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Pak pro libovolné $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ je*

$$\mathbf{w} := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_2 + \ldots + \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{u}_k$$

*ortogonální projekcí do $\mathbf{W}$.*

*Důkaz*
Zjevně $\mathbf{w} \in \mathrm{LO}(B) = \mathbf{W}$. Chceme ukázat, že $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{W}$. Podle tvrzení výše stačí ukázat, že $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{u}_i, \forall i \in [k]$. Označme $a_i := \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle$.

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} - a_1\mathbf{u}_1 - a_2\mathbf{u}_2 - \ldots - a_k\mathbf{u}_k \rangle = a_i - a_1 \cdot 0 - \ldots - a_i \cdot 1 - \ldots - a_k \cdot 0 = \mathbf{o}.$$

□

## Definice 1.11 (Gramova-Schmidtova ortogonalizace)

Postup, který vezme LN posloupnost $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ z VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a vytvoří ortonormální posloupnost $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ taková, že $\forall i \in [k] : \mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i\} = \mathrm{LO}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i\}$.

1) $\mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||}$. 2) Pro každé $i = 2, \ldots, k$ spočítáme $\mathbf{w}_i = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_i \rangle \cdot \mathbf{u}_1 + \ldots + \langle \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}_i \rangle \cdot \mathbf{u}_{i-1}$ a položíme $\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i}{||\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i||}$.

*Důkaz*

To, že $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i)$ je ortonormální $\forall i \in [k]$ dokážeme triviálně indukcí.

Stejně tak, že $\mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i\} = \mathrm{LO}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i\}$.

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{||\ldots||} - \frac{\mathbf{w}_i}{||\ldots||}, \frac{\mathbf{w}_i}{||\ldots||} \in \mathrm{LO}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}\} \overset{\mathrm{IP}}{=} \mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}\}.$$

$\mathbf{v}_i$ také z definice.

Nakonec musíme ukázat, že nikdy nedělíme nulou (naopak, pokud dostaneme špatný (= LZ) vstup, tak dělíme). Ukáže se, že kdybychom dělili, tak nějaké $\mathbf{u}_i \in \mathrm{LO}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}\}$. □

## Věta 1.10

*Máme-li $\mathbf{V}$ VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a aplikujeme-li GS ortogonalizaci na LN posloupnost vektorů z $\mathbf{V}$, pak dostaneme ortonormální posloupnost, že se jejich LO rovnají.*

*Důkaz*

Viz předchozí důkaz. □

*Důsledek*

Každý konečně generovaný VP se skalárním součinem má ortonormální bázi.

*Důsledek*

Máme-li $\mathbf{V}$ konečně generovaný VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a ortonormální posloupnost $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$, můžeme ji doplnit na ortonormální bázi.

*Důkaz*

Doplníme na bázi a aplikujeme GS ortogonalizaci, kde si rozmyslíme, že nám nezmění původní posloupnost. □

*Důsledek*

Je-li $\mathbf{V}$ konečně generovaný VP s ortonormální bází $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ a s $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pak existuje isomorfismus $\mathbf{V} \to T^n$ takový, že $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = f(\mathbf{v}) \cdot f(\mathbf{w})$.

*Poznámka*

Aplikováním GS ortogonalizace na $\mathbb{T}^n$ dostaneme tzv. QR - rozklad matice, kde $A = Q \cdot R$ a $A$ má za sloupce původní vektory, $Q$ má ortonormální posloupnost sloupců a $R$ je horní trojúhelníková s nezápornými reálnými čísly na diagonále.

## 1.3 Ortogonální doplněk, Gramova matice

### Definice 1.12

Buď $\mathbf{V}$ VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nad $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Je-li $M \subseteq \mathbf{V}$ množina vektorů, pak ortogonálním doplňkem k $M$ ve $\mathbf{V}$, rozumíme

$$M^{\perp} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{v} | \mathbf{v} \perp M\} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} | (\forall \mathbf{u} \in M : \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0)\}.$$

*Důsledek*
$M \perp M^{\perp}$ a $M^{\perp}$ je největší taková množina vzhledem k inkluzi.

### Tvrzení 1.11

$\mathbf{V}$ *VP s* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $M \subseteq \mathbf{V}$. *Pak* $M^{\perp} = (\mathrm{LO}\, M)^{\perp}$, $M^{\perp}$ *je podprostor* $\mathbf{V}$, $M \subseteq N \implies N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$.

*Důkaz*

$$\mathbf{v} \in M^{\perp} \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp M \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \mathrm{LO}\, M \Leftrightarrow \mathbf{v} \in (\mathrm{LO}\, M)^{\perp}.$$

Vezmeme $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in M^{\perp}$ a $t \in \mathbb{T}$, pak $\forall \mathbf{v} \in M : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 + 0 = 0$ a $\langle \mathbf{v}, t \cdot \mathbf{w}_1 \rangle = t \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle = t \cdot 0 = 0 \implies \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, t \cdot \mathbf{w}_1 \in M^{\perp}$.

Ať $M \subseteq N$. Pak $\mathbf{v} \in N^{\perp} \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp N \implies \mathbf{v} \perp M \Leftrightarrow \mathbf{v} \in M^{\perp}$. $\square$

### Věta 1.12

*Buď* $\mathbf{V}$ *VP s* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *nad* $\mathbb{R}$ *nebo* $\mathbb{C}$. *Buď* $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ *konečně generovaný. Pak platí:*

$$1) \mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp}.$$

$$2) (\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{W}.$$

*3) Každý vektor* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *má (jednoznačnou) ortogonální projekci jak na* $\mathbf{W}$, *tak ne* $\mathbf{W}^{\perp}$.
*4) Je-li* $\mathbf{V}$ *konečně generovaný dimenze* $n$, *pak* $n = \dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{W}^{\perp}$.

*Důkaz*
1) Triviálně $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^{\perp} = \{\mathbf{o}\}$. Navíc použitím toho, že existuje ortogonální projekce (a toho, že je kolmá) na $\mathbf{W}$ máme, že $\mathbf{W} + \mathbf{W}^{\perp} = \mathbf{V}$.

2) $\mathbf{W} \subseteq (\mathbf{W}^{\perp})^{\perp}$: je-li $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, pak $w \perp (\mathbf{W}^{\perp})$, tj. $w \in (\mathbf{w}^{\perp})^{\perp}$. Naopak $(\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} \subseteq \mathbf{W}$: vezměme $\mathbf{v} \in (\mathbf{W}^{\perp})^{\perp}$. Uvažujme ortogonální projekci $\mathbf{v}$ na $\mathbf{W}$:

$$(\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} \ni \mathbf{v} = \mathbf{w} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v} - \mathbf{w} \in (\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} \implies (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \perp (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \implies \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{o} \implies \mathbf{v} = \mathbf{w} \in \mathbf{W}.$$

Víme, že ortogonální projekce na $\mathbf{W}$ existuje. Je-li tedy $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, pak můžeme psát $\mathbf{v} = \mathbf{w} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = (\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{w}$, potom $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \in \mathbf{W}^{\perp}$ je podle definice ortogonální projekce na $\mathbf{W}^{\perp}$. ($\mathbf{w} \in (\mathbf{W}^{\perp})^{\perp}$.)

Použijeme 1) a větu o dimenzi součtu a průniku podprostorů. □

## Definice 1.13 (Gramova matice)

Buď $\mathbf{V}$ VP s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Buď $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ posloupnost vektorů. Pak Gramovu matici posloupnosti $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ definujeme jako:

$$(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle)_{k \times k}.$$

## Tvrzení 1.13

*Buď* $\mathbf{V}$ *VP s* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *posloupnost vektorů* $\mathbf{V}$, $B$ *Gramova matice. Vezměme* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *a* $\mathbf{w} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k \in \mathbf{W} := \mathrm{LO}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. *Pak následující je ekvivalentní:*
*1)* $\mathbf{w}$ *je ortogonální projekce* $\mathbf{v}$ *na* $\mathbf{W}$.
*2)* $B \cdot (a_1, \ldots, a_k)^T = (\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle, \ldots, \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \rangle)$.

*Důkaz*
1) $\Leftrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{W} \Leftrightarrow \forall i \in [k] :\Leftrightarrow \mathbf{u}_i \perp \mathbf{v} - \mathbf{w} \Leftrightarrow \forall i \in [k] : \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall [k] : \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle \Leftrightarrow \forall i \in [k] : \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_1 \rangle \cdot a_1 + \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle \cdot a_k = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle \Leftrightarrow$ 2). □

*Důsledek*
Buď $A$ matice typu $n \times k$ nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Buď $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$ a $x \in \mathbb{C}^k$ nebo $\mathbb{R}^k$. Pak následující je ekvivalentní:
1) $Ax$ je ortogonální projekce $\mathbf{v}$ na $\Im A$.
2) $A^*A \cdot x = A^* \cdot \mathbf{v}$.

## Tvrzení 1.14 (8.80)

*Buď* $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *posloupnost vektorů ve VP* $\mathbf{V}$ *s* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *a buď* $B \in T^{k \times k}$ *gramova matice. Pak platí:*
*1)* $B$ *je regulární* $\Leftrightarrow (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *LN.*
*2)* $B$ *je hermitovská (v reálném případě symetrická). 3) Je-li* $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *LN, pak* $B$ *je pozitivně definitní.*

*Důkaz*
1) aplikujeme tvrzení výše na $\mathbf{v} = \mathbf{o}$. První podmínka se přepíše na $0 = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k \Leftrightarrow B \cdot (a_1, \ldots, a_k)^T = \mathbf{o} \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_k)^T \in \operatorname{Ker} B$. Ale jádro je $\{\mathbf{o}\} \Leftrightarrow B$ je regulární.

2) Plyne z rovnosti: $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle}$.

3) Vezměme ortonormální bázi $C$ prostoru LO $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ a položme $A = ([\mathbf{u}_1]_C | \ldots | [\mathbf{u}_k]_C)$. Pak $A$ je regulární, tj. $A^*A$ je pozitivně definitní. □

## 1.4 Unitární a ortogonální matice

**Definice 1.14** (Unitární a ortogonální matice)

Čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ se nazývá ortogonální, pokud má ortonormální posloupnost sloupců vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Čtvercová matice nad $\mathbb{C}$ se nazývá unitární, pokud má ortonormální posloupnost sloupců vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

**Tvrzení 1.15**

*Buď $Q$ čtvercová komplexní matice řádu $n$. Pak následující je ekvivalentní: 1) $Q$ je unitární, 2) $Q^* \cdot Q = I_n$, 3) $Q^*$ je unitární, 4) $Q \cdot Q^* = I_n$, 5) $Q^T$ je unitární, 6) $f_Q$ zachovává standardní skalární součin, tj. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.*

*Speciálně je každá unitární matice regulární a $Q^{-1} = Q^*$.*

*Důkaz*
1) $\Leftrightarrow$ 2), 3) $\Leftrightarrow$ 4): z definice. 2) $\implies$ 4): 2) $\implies$ $Q$ má levou inverzi $Q^* \implies Q$ regulární a $Q^{-1} = Q^* \implies Q \cdot Q^{-1} = Q \cdot Q^* = I_n$. 4) $\implies$ 2): analogicky.

3) $\Leftrightarrow$ 5): 5) říká, že $Q$ má ortonormální posloupnost řádků, 3) říká, že když komplexně sdružíme všechny prvky $Q$, pak dostaneme ortonormální posloupnost řádků. Z toho to už jednoduše dostaneme.

2) $\implies$ 6): Předpokládejme 2), uvažujme $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. Pak $f_Q(\mathbf{u}) \cdot f_Q(\mathbf{v}) = (Q\mathbf{u})^*(Q\mathbf{v}) = \mathbf{u}^*(Q^*Q)\mathbf{v} = \mathbf{u}^*\mathbf{v}$.

6) $\implies$ 1) $Q = (f_Q(e_1) | \ldots | f_Q(e_n)) \implies (f_Q(e_1), \ldots, f_Q(e_n))$ ortonormální $\implies Q$ unitární. □

*Důsledek*
Součin unitárních matic stejného řádu je unitární matice.

*Důkaz*
$(AB)^*(AB) = B^*A^*AB = B^*B = I_n$. □

### Tvrzení 1.16

*Je-li $A$ regulární komplexní matice a $Q_1R_1 = A = Q_2R_2$ jsou 2 QR rozklady, pak nutně $Q_1 = Q_2$ a $R_1 = R_2$.*

*Důkaz*
Z regularity $Q_1R_1 = Q_2R_2 \implies Q_2^*Q_1 = Q_2^{-1}Q_1 = R_2R^{-1} =: (\mathbf{c}_1|\dots|\mathbf{c}_n)$. Chceme ukázat, ze $\mathbf{c}_i = e_i\forall i$. To ukážeme indukcí podle $i$. Víme, že $R_2R_1^{-1}$ je horní trojúhelníková, tedy každé $\mathbf{c}_i$ musí mít kladný prvek na $i$-té pozici a zároveň všude výše musí mít nulu, aby byl kolmý ke všem předchozím (o kterých z IP víme, že jsou to jednotkové vektory). □

### Definice 1.15

Buď $\mathbf{V}$ komplexní VP s $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{V}}$ a $\mathbf{W}$ komplexní VP s $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{W}}$. Pak lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ se nazývá unitární, pokud $\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})\rangle_{\mathbf{W}} = \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{V}}$.

### Tvrzení 1.17

*Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineární zobrazení, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ komplexní VP se skalárním součinem, pak následující je ekvivalentní: 1) $f$ je unitární, 2) $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} : ||f(\mathbf{u})_{\mathbf{W}} = ||\mathbf{u}||_{\mathbf{V}}$ ($f$ zachovává normu), 3) $f$ zobrazí každou ortonormální posloupnost $(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k)$ na ortonormální posloupnost $(f(\mathbf{u}_1,\dots,f(\mathbf{u}_k)))$, 4) $f$ zobrazuje jednotkové vektory na jednotkové vektory.*

*Speciálně: každé unitární zobrazení je prosté.*

*Důkaz*
Ve skriptech. Dodatek plyne z 2) a $f$ prosté $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\}$. 1) $\implies$ 2) $\implies$ 4), 1) $\implies$ 3) $\implies$ 4) jednoduché. 4) $\implies$ 2): $\mathbf{o} \neq \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, pak $\mathbf{v} = t\mathbf{u}$ pro $t = ||\mathbf{v}||_{\mathbf{V}}$, $\mathbf{u}$ jednokový. $||f(\mathbf{v})||_{\mathbf{W}} = t \cdot ||f(\mathbf{u})||_{\mathbf{W}} = t = ||\mathbf{v}||_{\mathbf{V}}$.

2) $\implies$ 1): Polarizační identity: $\Re\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle, \Im\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \frac{1}{2}(\dots)$. □

*Poznámka*
Unitární zobrazení může zobrazovat i do prostoru větší dimenze.

## 1.5 Přibližné řešení SLR metodou nejmenších čtverců

### Definice 1.16

Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$ je přibližné řešení SLR $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ metodou nejmenších čtverců, pokud

$$||A\mathbf{c} - \mathbf{b}|| = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n} ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||.$$

*Důsledek*
$\mathbf{c}$ je ortogonální projekce $\mathbf{b}$ do $\operatorname{Im} A$.

*Poznámka*
Používá se například, když chybou měření soustava nemá řešení, ale my víme, že řešení mít má.

Jmenuje se podle čtverců ve výpočtu normy.

**Tvrzení 1.18**

$\mathbf{c}$ *je přibližné řešení* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *metodou nejmenších čtverců, právě když* $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$.

# 2 Lineární dynamické systémy, vlastní čísla a vlastní vektory

**Definice 2.1** (Vlastní čísla a vlastní vektory)

Buď $\mathbb{T}$ těleso, $A$ čtvercová matice řádu $n$ (tj. máme $f_a : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$). $\lambda \in \mathbb{T}$ se nazývá vlastní číslo matice $A$, pokud $\exists \mathbf{v} \in T^n, \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ takový, že $A \cdot \mathbf{V} = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Je-li $\lambda \in \mathbb{T}$ vlastní číslo matice $A$, pak $\mathbf{w} \in \mathbb{T}^n$ je vlastním vektorem příslušným k $\lambda$, pokud $A \cdot \mathbf{w} = \lambda \cdot \mathbf{w}$.

**Definice 2.2** (Vlastní čísla a vlastní vektory)

Buď $\mathbb{T}$ těleso, $\mathbf{V}$ VP nad $\mathbb{T}$ a $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor. $\lambda \in \mathbb{T}$ se nazývá vlastní číslo operátoru $f$, pokud $\exists \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ takový, že $f(\mathbf{V}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Je-li $\lambda \in \mathbb{T}$ vlastní číslo operátoru $f$, pak $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ je vlastním vektorem příslušným k $\lambda$, pokud $f(\mathbf{w}) = \lambda \cdot \mathbf{w}$.

*Pozorování*
$A$ má vlastní číslo 0 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} A \neq \{\mathbf{o}\} \Leftrightarrow$ (pro čtvercové) $A$ je singulární $\Leftrightarrow \det A = 0$.

$f$ má vlastní číslo 0 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \neq \{\mathbf{o}\}$.

Navíc množina vlastních vektorů příslušných k 0 je přesně $\operatorname{Ker} A$ ($\operatorname{Ker} f$).

*Pozorování*
$A$ má vlastní číslo $\lambda \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\mathbf{o}\} \Leftrightarrow A - \lambda I_n$ singulární $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$.

$f$ má vlastní číslo $\lambda \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}}) \neq \{\mathbf{o}\}$.

Navíc množina $M_\lambda$ vlastních vektorů $A$ (resp. $f$) příslušných k $\lambda$ je v tom případě rovna $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ (resp. $\mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}})$). Speciálně $M_\lambda \leq \mathbb{T}^n$ (resp. $M_\lambda \leq \mathbf{V}$).

**Definice 2.3** (Charakteristický polynom)

Buď $A$ čtvercová matice nad $\mathbb{T}$. Potom charakteristickým polynomem $A$ rozumíme polynom v $\lambda$:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

**Tvrzení 2.1**

*Buď $A = (a_{ij})$ matice řadu $n$ nad $\mathbb{T}$. A $p_A(\lambda)$ charakteristický polynom. Pak*

1. *$p_A(\lambda)$ je polynom stupně $n$.*
2. *Koeficient u $\lambda^n$ je roven $(-1)^n$.*
3. *Koeficient u $\lambda^{n-1}$ je roven $(-1)^{n-1} \cdot (a_{11} + \ldots + a_{nn})$ (tzv. stopa matice $\cdot(-1)^{n-1}$).*
4. *Absolutní člen je roven* $\det A$.

**Definice 2.4** (Podobné matice)

Čtvercové matice $X$ a $Y$ jsou podobné, pokud $Y = RXR^{-1}$ pro $R$ regulární.

**Tvrzení 2.2**

*$X, Y$ podobné $\implies p_X(\lambda) = p_Y(\lambda)$.*