

Organizační úvod

Poznámka (složení předmětu)

Předmět má přednášku, cvičení a proseminář z Matematické analýzy.

Poznámka (Motivace)

TODO

Poznámka (Jak studovat)

Studujte průběžně, ptejte se...

Poznámka (Literatura)

- skriptá – viz homepage
- příklady – Koláček & spol. – Příklady z matematické analýzy pro fyziky 1, 2, 3
- další příklady – viz homepage

Motivace

Poznámka (Používá se v)

- Fyzice (viz pohyb planet, např. Proč obíhají planety po elipsách?)
- Ekonomii (viz úroky, např. Lze předpovědět změny úroků v ekonomice a na burze?)
- Meteorologii (např. Jak ovlivňují teplé mořské proudy počasí v Evropě?)
- Lékařství (např. Jak dlouho bude koncentrace léku v krvi na účinné úrovni?)
- Epidemiologie (např. Proč se epidemie šíří nejprve rychle a potom pomalu?)
- Architektura (viz mosty (vibrace), např. Jak se ujistit, že most nespadne v bouři?)
- Inženýrství (viz letadla, např. Jak zkonstruovat nové křídlo pro letadlo? (Většina peněz i času při konstrukci jsou simulace.))

- Informatika (viz MP3, JPEG, např. Jak uchovat informaci o dané funkci v co nejmenším počtu čísel? (Používá se Fourierova transformace = převod funkce na siny a cosiny))

Poznámka (Proč se analýzu učíme my?)

- Abychom uměli látku (hledat extrémy funkcí, umět integrovat)
- Měli solidní matematické základy
- Přečíst návod, jak používat nějaké matematické modely (např. Uplatnění v bance – MFF nese mnoho peněz (nejvíce žádané práce jsou práce stylu statistik))
- Myslet, analyzovat, nedělat chyby (nezapomínat na další možnosti)
- Abychom se naučili způsob myšlení – matematici / matematicky dělají činnosti lépe (ze dvou lidí, co ji neumí, je matematik ten, kdo ji zvládne lépe, nikoliv ten druhý.)

1 Úvod

Dosti možná spíše opakování střední

1.1 Výroky

Definice 1.1 (Výrok)

Tvrzení, o kterém má smysl říct, že je pravdivé, či ne.

┌

Například

„Obloha je modrá.“

└ „Vídeň je hlavní město ČR.“

Poznámka (Vytváření nových výroků)

Děje se pomocí spojek a, nebo, implikací, ekvivalencí, atd.

A	B	konjunkce $A \& B$	disjunkce $A \vee B$	implikace $A \implies B$	ekvivalence $A \Leftrightarrow B$	negace A $\neg A$
0	0	0	0	1!	1	1
0	1	0	1	1!	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

$A \implies B = A$ je postačující podmínka pro $B = B$ je nutná podmínka pro A .

┌

Například (Pravdivé výroky)

$$1 = 2 \implies 2 = 3$$

já jsem papež \implies všechna letadla jsou modrá

└

┌

Příklad

•

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg B \implies \neg A)$$

•

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg(A \& \neg B))$$

•

$$\neg(A \& B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

•

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \& \neg B)$$

•

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \implies B) \& (B \implies A))$$

└

Definice 1.2 (Kvantifikátory)

Dále existují tzv. kvantifikátory: Obecný (= pro všechna) \forall a Existenční (= existuje) \exists .

Úmluva

$\forall x \in \mathbb{N}, x > 10 \ A(x)$ značí $\forall x \in \mathbb{N}(x > 10 \implies A(x))$

Například

- Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$ je: $\forall x \in M : A(x)$
- Existuje $x \in M$ tak, že platí $A(x)$ je $\exists x \in M : A(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} \ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m$

Například (Negace výroků)

- $\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$

- $\neg(\exists x \in M : A(x) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x))$
- $\neg(\text{Nikdo mě nemá rád.}) \Leftrightarrow \text{Existuje alespoň jeden člověk, který mě má rád.}$
- $\neg(\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$

$$\exists n \in \mathbb{N} \neg(\forall m \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \neg(\exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n + m$$

Pozor

Na pořadí kvantifikátorů záleží!

┌

Například

M...Muži

Ž...Ženy

L(m, ž)...muži m se líbí žena ž

$$\forall m \in M \exists \in : L(m,)$$

$$\exists \in \forall m \in M : L(m,)$$

První je, že pro každého muže existuje nějaká žena, která se mu líbí, naopak druhá říká, že existuje žena, která se líbí všem mužům.

└

1.2 Metody důkazů tvrzení

Definice 1.3 (Důkaz sporem)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow \neg(A \& \neg B)$$

┌

Například ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

($A : x = \sqrt{2}, B : x \notin \mathbb{Q}$)

┌

Důkaz (Důkaz sporem:)

Nechť $x = \sqrt{2}$ a $x \in \mathbb{Q}$. $x \in \mathbb{Q} \implies x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$, nesoudělná.

$$x^2 = 2, 2 = x^2 = \frac{p^2}{q^2} \implies 2q^2 = p^2 \implies p = 2k \implies 2q^2 = 4k^2 \implies q^2 = 2k^2 \implies q = 2l$$

$$p = 2k \& q = 2l \implies p \text{ a } q \text{ soudělná. } \nexists$$

□

└

Definice 1.4 (Přímý důkaz)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (A \implies C_1 \implies C_2 \implies \dots \implies C_n \implies B)$$

┌
Například

$$n^2 \text{liché} \implies n \text{liché}$$

┌
Důkaz

$$\begin{aligned} n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k &\implies n^2 = p_1^2 \cdot \dots \cdot p_k^2 \\ n^2 \text{liché} &\implies 2 \nmid p_1 \ \& \ \dots \ \& \ 2 \nmid p_k \implies n \text{liché} \end{aligned}$$

└

□

Definice 1.5 (Nepřímý důkaz)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg B \implies \neg A)$$

┌
Například

$$n^2 \text{liché} \implies n \text{liché}$$

┌
Důkaz

$$n \text{sudé} \Leftrightarrow n = 2k \implies n^2 = 4k^2 \implies n^2 \text{sudé}$$

└

□

Definice 1.6 (Matematická indukce)

$$(\forall n \in \mathbb{N} : V(n)) \Leftrightarrow (V(1) \ \& \ \forall n \in \mathbb{N} : V(n) \implies V(n+1))$$

┌
Například

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n \cdot (n + 1)$$

┌
Důkaz

1. $n = 1$: $1 = \frac{1}{2}1 \cdot 2$
- 2.

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n \cdot (n + 1) \implies \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}n \cdot (n + 1) + (n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1) \cdot (n + 2)$$

□

┌
┌
┌
Příklad

Všechna auta mají stejnou barvu.

┌
Důkaz

1. $n = 1$: Jedno auto má stejnou barvu jako ono samo.
2. $n \rightarrow n + 1$: vezmu prvních n aut, ty mají stejnou barvu, vezmu posledních n aut, ty mají také stejnou barvu. Tedy dohromady mají stejnou barvu. □

┌
(Spoiler: $n = 2$)

1.3 Množina reálných čísel

Poznámka (Množiny čísel)

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \right\}\end{aligned}$$

Definice 1.7 (Omezená množina)

Nechť $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}$. Řekněme, že \mathbb{M} je omezená shora (omezená zdola), jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ = horní (dolní) závora tak, že pro všechna $x \in \mathbb{M}$ platí $x \leq a$ ($x \geq a$).

Definice 1.8 (Supremum a infimum)

Nechť $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}$ je shora (zdola) omezená. Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazýváme supremem (infimem) \mathbb{M} , pokud:

$$\forall x \in \mathbb{M} : x \leq s (s \geq x)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < s(y > s) \exists x \in \mathbb{M}, y < x(x > y)$$

┌ *Například* • $\sup[0, 1] = 1$ (dokázat obě podmínky pro 1 (x z druhé podmínky volím 1)...)
 • $\sup(0, 1) = 1$ (taktéž dokázat obě podmínky pro 1 (pozor na záporná y) (x z druhé podmínky zvolíme často $\frac{s+y}{2}$))
 └

Definice 1.9 (Reálná čísla)

Na množině \mathbb{R} je dána relace \leq ($\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), operace sčítání $+$ a operace násobení \cdot a množina \mathbb{R} obsahuje prvky 0 a 1 tak, že platí:

Viz skripta (takové ty tělesové / grupové podmínky, podmínky uspořádání a *existence suprema*)

Věta 1.1 (o existenci infima)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje $\inf M$.

┌ *Důkaz*

Označme $-M = \{x \in \mathbb{R} : -x \in M\}$. Zřejmě $M \neq \emptyset$. M je zdola omezená $\implies -M$ je shora omezená. ($\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M x > K \implies \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in -M x < -K$). Z axiomů \mathbb{R} tedy existuje $s = \sup -M$. Položme $i = -s$. Tvrdím $i = \inf M$. (Dokážeme z definice suprema a infima, viz skripta). □

└

Věta 1.2 (Archimedova vlastnost)

Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x < n$

┌ *Důkaz (Sporem)*

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} x \geq n$$

Tedy \mathbb{N} je omezená podmnožina \mathbb{R} . Tedy existuje $\sup \mathbb{N}$. Tedy $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq x'$. Pak také $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 \leq x'$. To ale tvrdí, že $x' - 1$ je také $\sup \mathbb{N}$. To je ale spor, protože můžeme zvolit $y = x' - \frac{1}{2}$, pak $y < x'$, tedy z druhé vlastnosti suprema $\exists n \in \mathbb{N} : x' - \frac{1}{2} < n$, ale zároveň už víme, že $\forall n \in \mathbb{N} : n < x' - 1$. □

└

Věta 1.3 (Hustota \mathbb{Q} a \mathbb{R})

Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Pak existují $q \in \mathbb{Q}$ a $r \in \mathbb{Q}$ tak, že $q \in (a, b)$ a $r \in (a, b)$.

Důkaz

Podle $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{b-a} < n$, tedy $\frac{1}{n} < b-a$. Zvolme $q = \frac{\lceil an \rceil + 1}{n}$, pak jistě $a < q < b$ a $q \in \mathbb{Q}$.

Poté použijeme $q_1 \in (a, b)$ a $q_2 \in (q_1, b)$. Zvolme $r = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}}$. Pak (jelikož druhá část je kladná) $r > q_1$. A $r < q_2 \Leftrightarrow q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}} < q_2 \Leftrightarrow \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}} < q_2 - q_1$.

Tedy $r \in (a, b)$ a $r \in \mathbb{R}$
 \mathbb{Q} , jelikož $r = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}} = p \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{2} = \frac{q_2 - q_1}{p - q_1}$, ale levá strana je jistě iracionální a pravá racionální. Spor. \square

Věta 1.4 (O n -té odmocnině (BD = bez důkazu))

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, \infty)$, pak existuje právě jedno $y \in [0, \infty)$ tak, že $y^n = x$.

Důkaz

Idea: Položme $M = \{z \in \mathbb{R}\}$. Ukážeme, že $M \neq \emptyset$ shora omezená $\implies \exists s = \sup M$. Nyní ukážeme $s^n = x$. \square

1.4 Krátký výlet do nekonečna

Definice 1.10 (Mohutnost množin)

Řekněme, že množiny A a B mají stejnou mohutnost, pokud existuje bijekce $A \rightarrow B$. Značíme $A \approx B$.

Řekněme, že množina A má mohutnost menší, nebo rovnu mohutnosti B , pokud existuje prosté zobrazení $A \rightarrow B$. Značíme $A \preceq B$.

Řekněme, že množina A má menší mohutnost než B , pokud $A \preceq B$, ale neplatí $B \preceq A$. Značíme $A \prec B$

Například

- 1) \mathbb{N}, \mathbb{Z} : $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$ (prosté z \mathbb{N} do \mathbb{Z} je triviální, opačně si očísloji \mathbb{Z})
- 2) \mathbb{N}, \mathbb{Q} : $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ (obdobně, čísluji diagonálně)
- 3) \mathbb{N}, \mathbb{R} : $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ (důkaz sporem, přes diagonálu, vezmu první desetinou cifru z $f(1)$, druhou z $f(2)$... a pozměním je...)

Tvrzení 1.5 (Viz proseminář)

$A \preceq B \wedge B \preceq A \implies A \approx B$

Definice 1.11

Řekněme, že množina A je konečná, má-li konečný počet prvků.

Řekněme, že A je spočetná, jestliže $A \approx \mathbb{N}$, nebo je A konečná.

Řekněme, že A je nespočetná, jestliže $\mathbb{N} \prec A$.

Tvrzení 1.6 (Cantor)

Nechť X je množina, pak $X \prec \mathcal{P}(X)$, kde $\mathcal{P}(X)$ je množina všech podmnožin X .

┌

Důkaz

Zobrazení $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definované $\varphi(x) = \{x\}$ je prosté.

Tvrdím, že neplatí, že $X \approx \mathcal{P}(X)$. Důkaz sporem: Nechť existuje bijekce $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Označme $A = \{x \in X : x \notin \varphi(x)\}$. φ je bijekce $\implies \exists a \in X : \varphi(a) = A$.

Nyní buď a) $a \in A \implies a \notin \varphi(a) = A$ nebo b) $a \notin A \implies a \in \varphi(a) = A$. □

Poznámka („Nebrali jsme“ Hypotéza kontinua)

Otázka: Existuje $A \subset \mathbb{R}$, že $\mathbb{N} \prec A$ a $A \prec \mathbb{R}$?

Odpověď: Může a nemusí. (Hypotéza kontinua je ze standardních axiomů teorie množin tzv. nerozhodnutelná.)

Tvrzení 1.7

Nechť $A_n, n \in \mathbb{N}$, jsou spočetné množiny, pak:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

je spočetná.

┌

Důkaz

Napíšu si množiny A_i do matice a očísluji po diagonálách. Tím získám $\mathbb{N} \succeq A$. □

2 Posloupnost

2.1 Úvod

Definice 2.1

Jestliže ke každému $n \in \mathbb{N}$ je přiřazeno $a_n \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ je posloupnost reálných čísel.

┌

Například • $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

• $\{2^n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, 8, \dots\}$

• $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n^2 + 1$ (rekurentně zadaná posloupnost)

└

Definice 2.2

Řekněme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je:

- neklesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- nerostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- klesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- rostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$

┌

Například

$\{\frac{1}{n}\}$ je klesající a nerostoucí

$\{2^n\}$ je rostoucí a neklesající

└

Definice 2.3

Řekněme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, jestliže množina členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená podmnožina \mathbb{R} . Analogicky definujeme omezenost shora a omezenost zdola.

┌

Například

$\{\frac{1}{n}\}$ je omezená

$\{2^n\}$ je pouze omezená zdola

└

2.2 Vlastní limita posloupnosti

Definice 2.4 (Limita)

Nechť $A \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Řekněme, že A je (vlastní) limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon$$

Značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

┌ *Například*

└ Ve videu, při pochopení limity nejsou moc zajímavé.

Příklad ($\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$)

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \Leftrightarrow n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} + \dots \geq 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} a_n^2$$

$$\frac{2(n-1)}{n \cdot (n-1)} \geq a_n^2 \implies \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \geq a_n \geq 0$$

Věta 2.1 (Jednoznačnost vlastní limity (2.1))

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

┌ *Důkaz* (Sporem)

Nechť tedy existuje více limit. Dvě z nich označme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$, $A > B$. Zvolme $\varepsilon = \frac{A-B}{3}$. Z definice limity k našemu ε existují $n_A, n_B \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_A |a_n - A| < \varepsilon$ a $\forall n \geq n_B |a_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Z trojúhelníkové nerovnosti^a $|A - B| = |(A - a_{n_0}) + (a_{n_0} - B)| \leq |A - a_{n_0}| + |a_{n_0} - B| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}(A - B)$. \square

^a $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$

Věta 2.2 (O omezenosti konvergentní posloupnosti)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ má vlastní limitu. Pak $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je omezená.

┌ *Důkaz*

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = 1$. K tomuto $\varepsilon = 1$ existuje $n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) = (A - 1, A + 1)$. Množina $\{a_n | n = 1, 2, \dots, n_0\}$ je konečná, tedy omezená. Položme $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, |A| + 1\}$. Potom jistě $\forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq K$ (protože $\forall n \leq n_0 |a_n| \leq \max\{|a_i|; i \leq n_0\}$ a $\forall n > n_0 a_n \in (A - 1, A + 1) \implies |a_n| \leq |A| + 1 \leq K$). \square

Příklad

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R} \implies \exists n_0 \forall n > n_0 a_n \text{ je monotónní}$$

Definice 2.5 (Vybraná podposloupnost)

Řekněme, že posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ tak, že $b_n = a_{k_n}$

Věta 2.3 (o limitě vybrané podposloupnosti)

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a necht' $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$

Důkaz

K $\varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$. Chceme dokázat $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

K $\varepsilon > 0$ zvolme k_0 , kde n_0 je z definice $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Necht' $k \geq k_0$, pak $n_k \geq k \geq k_0 \geq n_0$.
Tedy $|b_k - A| = |a_{n_k} - A| < \varepsilon$ □

Věta 2.4 (Aritmetika limit)

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$. Pak platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = A \cdot B$$

$$\forall b_n \neq 0 \wedge B \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

Důkaz

Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \exists n_A \in \mathbb{N} \forall n > n_A |a_n - A| < \varepsilon$, z $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \exists n_B \in \mathbb{N} \forall n > n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max \{n_A, n_B\}$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí $|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. (A tady se použije lemmátka, které jsem ani nepsal a které je o tom, že ε můžeme na konci definice limity vynásobit libovolnou konstantou.)

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \xrightarrow{V2.2}$ b je omezená, tedy $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |b_n| \leq K$. Necht' $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \exists n_A \in \mathbb{N} \forall n > n_A |a_n - A| < \varepsilon$, z $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \exists n_B \in \mathbb{N} \forall n > n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max n_A, n_B$. Pak $\forall n > n_0$ platí $|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - b_n A + b_n A - AB| \leq |a_n b_n - b_n A| + |b_n A - AB| \leq |a_n - A| |b_n| + |b_n - B| |A| \leq \varepsilon \cdot K + \varepsilon \cdot |A| = \varepsilon \cdot (K + |A|)$.

K $\varepsilon_1 = \frac{|B|}{2}$ z $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n > n_1 |a_n - A| < \varepsilon_1 = \frac{|B|}{2} \implies |b_n| > \frac{|B|}{2}$. Necht' $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \exists n_A \in \mathbb{N} \forall n > n_A |a_n - A| < \varepsilon$, z $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \exists n_B \in \mathbb{N} \forall n > n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max n_A, n_B, n_1$. Pak $\forall n > n_0$ platí $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}| = \frac{|a_n B - AB + AB - b_n A|}{|b_n| \cdot |B|} \leq \frac{|a_n B - AB|}{|b_n| \cdot |B|} + \frac{|A - B - b_n A|}{|b_n| \cdot |B|} = \frac{|a_n - A| \cdot |B|}{|b_n| \cdot |B|} + \frac{|A| \cdot |B - b_n|}{|b_n| \cdot |B|} < \varepsilon \cdot (\frac{2}{|B|} + \frac{|A|}{|B|} \cdot \frac{2}{|B|})$. □

Věta 2.5 (Limita a uspořádání)

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

Jestliže $A < B$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n < b_n$.

Jestliže $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n > n_0$ platí $a_n \geq b_n$, pak $A \geq B$

┌ *Důkaz*

Položme $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$. Z existence limit vyplývá $\exists n_A \forall n \geq n_A |a_n - A| < \varepsilon \implies a_n < A + \varepsilon = A + \frac{B-A}{2} = \frac{B+A}{2}$ a $\exists n_B \forall n \geq n_B |b_n - B| < \varepsilon \implies b_n > B - \varepsilon = B - \frac{B-A}{2} = \frac{B+A}{2}$. Zvolme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí $b_n > \frac{A+B}{2} > a_n$.

Sporem. Necht $A < B$. Pak podle předchozí části $\exists n_1 \forall n > n_1 a_n < b_n$. Zároveň z předpokladu $\forall n \geq n_0 a_n \geq b_n$. Pak pro libovolné $n \geq n_1$ a $n \geq n_0$ platí $(a_n < b_n) \wedge (b_n < a_n)$ □

Věta 2.6 (O dvou strážnících)

Necht $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty, \{c_n\}_{n=1}^\infty$ jsou posloupnosti splňující $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \in \mathbb{R}$.

Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$.

┌ *Důkaz*

Necht ε je kladné. Potom $\exists n_A \forall n \geq n_A |a_n - A| < \varepsilon$ a $\exists n_B \forall n \geq n_B |b_n - A| < \varepsilon$, tedy zvolme $n_C = \max\{n_A, n_B\}$, tudíž $\forall n \geq n_C c_n \in (a_n, b_n) \subseteq (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. □

Věta 2.7 (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)

Necht $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$.

┌ *Důkaz*

Posloupnost $\{b_n\}$ je omezená $\implies \exists K > 0 \forall n \in \mathbb{N} |b_n| \leq K$. Z $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ k zadanému $\varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |a_n - 0| < \varepsilon$. K tomuto $\varepsilon > 0$ volme stejné n_0 , pak $\forall n \geq n_0 |a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| \leq |a_n| \cdot |b_n| \leq \varepsilon \cdot K$ □

┌ *Například*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice 2.6 (Nevlastní limita)

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ má (nevlastní) limitu $+\infty$ (respektive $-\infty$), pokud

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K$$

(

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n < K$$

)

┌ *Například*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

Tvrzení 2.8

Věty: jednoznačnost limity (2.1), limita vybrané posloupnosti (2.3), limita a uspořádání (2.5), o dvou strážnících (2.6, stačí jeden z nich).

┌ *Důkaz*

└ Analogicky

□

Definice 2.7 (Rozšířená reálná osa)

Rozšířená reálná osa je množina $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. S následujícími vlastnostmi:

- Uspořádání: $\forall a \in \mathbb{R} : -\infty < a < +\infty$
- Absolutní hodnota: $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$
- Sčítání: $\forall a \in \mathbb{R} * \setminus \{-\infty\} : +\infty + a = +\infty$
 $\forall a \in \mathbb{R} * \setminus \{+\infty\} : -\infty + a = -\infty$
- Násobení: $\forall a \in \mathbb{R} * a > 0 : a(\pm\infty) = \pm\infty$
 $\forall a \in \mathbb{R} * a < 0 : a(\pm\infty) = \mp\infty$
- Dělení: $\forall a \in \mathbb{R} : \frac{a}{\pm\infty} = 0$.
- Výrazy $-\infty + \infty, 0(\pm\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{\text{cokoliv}}{0}$ nejsou definovány (z dobrého důvodu!).

Poznámka (Rozšířená definice suprema a infima)

Je-li $\mathbb{A} \neq \emptyset$ shora neomezená, pak definujeme $\sup \mathbb{A} = +\infty$.

Je-li $\mathbb{A} \neq \emptyset$ zdola neomezená, pak definujeme $\inf \mathbb{A} = -\infty$.

$$\sup \emptyset = -\infty, \inf \emptyset = +\infty$$

Věta 2.9 (Aritmetika limit podruhé (L2.4))

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Pak platí:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$, pokud je výraz $A + B$ definován.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$, pokud je výraz $A \cdot B$ definován.
3. Pokud $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ a $B \neq 0$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz $\frac{A}{B}$ definován.

┌
Důkaz (Část)

1. $A, B \in \mathbb{R}$ víme. $A = +\infty, B \in \mathbb{R}$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ libovolně. Z toho, že $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$ k $\varepsilon = 1 \exists n_1 \forall n \geq n_1 |b_n - B| < 1 \implies b_n > B - 1$. Z $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ plyne, že k $K' = K - B + 1 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n > K' = K - B + 1$. Pak $\forall n \geq n'_0 = \max\{n_0, n_1\} : a_n + b_n > K - B + 1 + B - 1 = K$. \square

Věta 2.10 (Limita typu $\frac{A}{0}$)

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*, A > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ a $\exists n_0 \forall n \geq n_0$ platí $b_n > 0$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

┌
Důkaz

Zvolme $K \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \begin{cases} A = +\infty : \exists n_1 \forall n \geq n_1 a_n > 1 \\ A \in \mathbb{R} : \varepsilon = \frac{A}{2} \exists n_1 \forall n \geq n_1 |a_n - A| < \varepsilon = \frac{A}{2} \implies a_n > \frac{A}{2} \end{cases}$$

Tedy položíme $\tilde{A} = \min\{1, \frac{A}{2}\}$. Pak $\forall n \geq n_1 : a_n > \tilde{A}$. Z $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ k $\varepsilon = \frac{\tilde{A}}{K} \exists n_2 \forall n \geq n_2 |b_n - 0| < \frac{\tilde{A}}{K} \implies 0 < b_n < \frac{\tilde{A}}{K}$.

Položíme $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ pak

$$\forall n \geq n_3 \frac{a_n}{b_n} > \tilde{A} \cdot \frac{K}{\tilde{A}} = K$$

└

\square