*Příklad* (5.1)
Dokažte, že množina všech nekonstantních lineárních funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spolu s operací skládání funkcí a vhodně zvolenou jednotkou a operací inverze tvoří grupu.

*Důkaz*
Nechť $Y$ je množina nekonstantních lineárních funkcí $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \right\}$$

a $h : X \to Y$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto f(x) = ax + b$. Zřejmě se jedná o bijekci, jelikož každá nekonstantní lineární funkce se dá vyjádřit v tomto tvaru ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) a toto vyjádření je jednoznačné (a opačně každý tento tvar vyjadřuje nějakou nekonstantní lineární funkci).

Dále si můžeme všimnout, že $X \leq GL_2(\mathbb{R})$, jelikož jsou tyto matice horní trojúhelníkové s nenulovými prvky na diagonále, tedy regulární, tudíž stačí ověřit jen uzavřenost na násobení:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in X. \qquad (a \neq 0 \wedge c \neq 0 \implies ac \neq 0)$$

Následně si představme, že $Y$ je opravdu grupa (tj. že existuje inverze, jednotka a $Y$ je uzavřená na $\circ$). Potom můžeme ukázat, že $h$ je homomorfismus (tj. izomorfismus). Stačí ověřit, že obraz součinu je součin obrazů, tj.

$$„f(x) = ac \cdot x + ad + b“ = h \begin{pmatrix} ac & ad + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=}$$

$$h \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot h \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = „f(x) = a \cdot x + b“ \circ „f(x) = c \cdot x + d“ = „f(x) = a \cdot (c \cdot x + d) + b“$$

Tím jsme dokázali, že $Y$ je grupa, neboť z $h$ umíme odvodit inverzi a jednotku. Jednotka je obraz jednotkové matice (jednotky v $GL_2$), tedy $f(x) = 1 \cdot x$. Inverze k $f(x) = ax + b$ je $f(x)\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ (tj. inverzní funkce), což nám vyjde i z $h\left((h^{-1}(„f(x) = ax + b“))^{-1}\right)$. $\square$

*Příklad* (5.2)
Vypište všechny prvky grupy $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ a uveďte jejich řády.

*Řešení*
Matice
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
má determinant $a \cdot d - b \cdot c$, což v $\mathbb{Z}_2$ znamená, že právě jedna diagonála bude obsahovat 2 jedničky. To nám dává
$$GL_2(\mathbb{Z}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$GL_2(\mathbb{Z}_2)$ má 6 prvků, tedy podle Lagrangeovy věty má prvek řád buď 1 (pouze jednotková matice), 2 (ty matice, které v druhé mocnině dají jednotkovou), 3 (všechny ostatní, vzhledem k tomu, že:), 6 (žádné, jelikož pak by byla grupa cyklická, ale (jak uvidíme) $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ má $3 \neq \varphi(2)$ prvky řádu 2). Podíváme se tedy na druhé mocniny:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tudíž matice mají řád
$$\operatorname{ord} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{ord} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{ord} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$
$$\operatorname{ord} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \qquad \operatorname{ord} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{ord} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

*Příklad* (5.3)
Nalezněte všechny grupové homomorfismy ze $(S_3, \circ, {}^{-1}, \mathrm{id})$ do $(\mathbb{Z}_6, +, -, 0)$ a popište jejich obrazy a jádra.

*Řešení*
Řád obrazu prvku musí dělit řád tohoto prvku, tedy transpozice (prvky grupy $S_3$ řádu 2) se musí zobrazovat na 3 nebo 0 a trojcykly (prvky řádu 3) na 3 nebo 0.

$(2\,3)\circ(1\,3) = (1\,2\,3)$ a $(2\,3)\circ(1\,2) = (3\,2\,1)$, takže trojcykly se musí zobrazovat na nulu, protože jejich obraz musí být součet 0 a 0, 3 a 0 nebo 3 a 3 (z vlastností homomorfismu), ale to 2 a 4 nejsou. Díky tomu musí být obraz všech transpozic shodný, neboť složení dvojice transpozic dá trojcyklus, tedy součet jejich obrazů musí být nula, a to $3 + 0$ není.

Tedy máme 2 homomorfismy: triviální (všechno zobrazí na 0), kde obrazem je tedy $\{0\}$ a jádrem je $S_3$, a zobrazení $h$ takové, které zobrazuje trojcykly a identitu na 0 a transpozice na 3, tudíž obraz je $\{0, 3\}$ a jádro je $\{\mathrm{id}, (1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1)\}$.

Zbývá dokázat, že $h$ je opravdu homomorfismus. Pro to stačí dokázat $h(x \circ y) = h(x) + h(y)$, $\forall x, y \in S_3$. To je pro $x = \mathrm{id}$ nebo $y = \mathrm{id}$ jednoduché. Složení trojcyklů v $S_3$ je identita a $0 + 0 = 0$, tedy pro ně to platí také. Složení trojcyklu a transpozice má liché znamínko, tedy to musí být transpozice a $0+3 = 3+0 = 3$. Nakonec složení dvou různých transpozic má sudé znamínko a není to identita, tedy v $S_3$ je to trojcyklus a $3 + 3 = 0$.