

Příklad

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a necht a_1, \dots, a_n jsou kladná reálná čísla splňující $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Dokažte, že:

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n.$$

┌

Důkaz

Myšlenkově roznásobme výraz. Zjistíme, že člen složený z každé podmnožiny^a \mathbb{A} se ve výsledku vyskytuje právě jednou s koeficientem 1.

Dále můžeme tyto členy napárovat tak, že člen složený z nějaké podmnožiny \mathbb{A} spárujeme s členem složeným z doplňku. Toto párování je jednoznačné (doplňek je jednoznačný) a zároveň součin těchto členů je dle zadání 1.

Nyní označme jeden člen z dvojice x a druhý je tím pádem x^{-1} . Z AG nerovnosti (jelikož je x kladné) plyne, že součet této dvojice $(x + \frac{1}{x})$ je větší roven 2.

Dvojic máme polovinu toho co členů a těch máme 2^n (roznásobili jsme n dvojčlených výrazů), tedy dvojic máme 2^{n-1} . Tudíž součet všech součtů dvojic (tj. roznásobený výraz) je větší roven $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. □

^a $\mathbb{A} = \{a_i; i \in \mathbb{N} \wedge i \leq n\}$

└