Organizační úvod

TODO!!!

Úvod

TODO!!!

1 Shodná zobrazení

Definice 1.1

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí $||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||$.

Lemma 1.1

Přímo z definice plyne, že složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti je opět shodnost.

Důkaz
Triviální. □

TODO!!!

Definice 1.2 (Grupa)

Množinu s jedinou binární operací $(M, \circ)$ nazveme grupou, jestliže je tato operace asociativní, existuje pro ní neutrální (jednotkový) prvek a ke každému prvku existuje prvek inverzní.

Důsledek (Grupa shodností)
Shodnosti jsou surjektivní a vzhledem ke skládání tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{E}(n)$.

Důkaz
Shodná zobrazení jsou tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{p}$, $g(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{q}$, kde $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou ortogonální. Potom

$$f^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}, (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q}.$$

□

Definice 1.3 (Přímé zobrazení)

Zobrazení f nazveme přímé, jestliže $\det \mathbf{A} = 1$, a nepřímé, jestliže $\det \mathbf{A} = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu $\mathbb{E}_+(n)$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{A}$ jednotková matice nazýváme posunutí a tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž $\mathbb{R}^n$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{p}$ nulový vektor tvoří podgrupu označovanou $\mathbb{ON}(n)$ (ortonormální grupa).

Důkaz

To, že jsou to podgrupy se dokáže jednoduše přes uzavřenosti. □

Poznámka

Shodná zobrazení můžeme vyjádřit jako kartézský součin, ale grupové operace by pak nefungovali. Proto je množina shodných zobrazení definovaná tzv. semidirektním součinem: $\{(\mathbf{A}, \mathbf{p})\} = \mathbb{ON} \ltimes \mathbb{R}^n$.

Věta 1.2

Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$ platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici rozměrů $(n+1) \times (n+1)$, tj.

$$f \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

Důkaz

Plyne z maticového násobení. □

Definice 1.4 (Asociovaný homomorfismus, samodružné směry, samodružné body)

Mějme shodné zobrazení $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$. Jeho body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme samodružné body. Lineární zobrazení $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dané maticí $\mathbf{A}$ nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f.

Řekneme, že množina M je samodružná množina zobrazení f, jestliže ji zobrazení zachovává (jako celek, ne nutně každý její bod zvlášť). Přesněji jestliže platí

$$\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{X} \in \mathbb{M} \implies f(\mathbf{X}) \in M.$$

Lemma 1.3

Přímka $p : C + \ < \mathbf{v} >$ je samodružnou množinou shodnosti f právě tehdy, když $< \mathbf{v} >$ je jeho samodružný směr a $f(C) - C$ je násobkem $\mathbf{v}$.

Důkaz

Ať $\mathbf{D} = \mathbf{C} + \mathbf{v}$. Z linearity je p samodružná právě tehdy, když $f(\mathbf{C}), f(\mathbf{D}) \in p$. To už dokážeme rozepsáním. $\square$

Věta 1.4 (Klasifikační věta v $\mathbb{R}^2$)

Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(2)$ nastane právě jedna z těchto možností:

f je přímá shodnost a

- *má všechny body samodružné a všechny směry samodružné s vlastním číslem 1. Pak jde o identitu.*
- *má právě jeden samodružný bod, pak ji nazýváme otočení. Samodružné směry pak nemá buď žádné, nebo všechny s vlastním číslem -1. Tedy jde libovolné otočení nebo o otočení o π (= středová souměrnost).*
- *nemá žádný samodružný bod a všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem 1. Pak ji nazýváme posunutí.*

f je nepřímá shodnost. Pak má právě dva samodružné směry, jeden s vlastním číslem 1 a jeden s vlastím číslem -1 a

- *buď má právě jednu přímku samodružných bodů, pak ji nazýváme osová souměrnost,*
- *nebo nemá žádné samodružné body, pak ji nazýváme posunutá osová souměrnost.*

Definice 1.5 (Kvaterniony)

Kvaterniony jsou algebra nad $\mathbb{R}^4$, kde kanonická báze se značí $1, i, j, k$ a $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.

TODO kvaterniony.

TODO!!!

2 Křivky

TODO!!!

Definice 2.1 (Reparametrizace, změna parametru)

Je-li $c : I \to \mathbb{R}^n$ regulární parametrická křivka a $\varphi : \tilde{I} \to I$ hladký difeomorfismus intervalu $\tilde{I}$ na I (tedy hladká bijekce s hladkým inverzním zobrazením), je $\tilde{c} = c \circ \varphi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ regulární parametrická křivka se stejným obrazem jako c. Difeomorfismus φ pak nazýváme změnou parametru a $\tilde{c}$ reparametrizací c. Je-li navíc $\varphi' > 0$ na $\tilde{I}$, nazveme $\tilde{c}$ reparametrizací c zachovávající orientaci.

Definice 2.2 (Křivka, orientovaná křivka)

Býti reparametrizací je relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme křivka. Každého zástupce příslušné třídy ekvivalence nazýváme parametrizací této křivky. Býti reparametrizací zachovávající orientaci je rovněž relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme orientovaná křivka.

Důkaz

Reflexivita: $c \circ \mathrm{id} = c$ (difeomorfismus s kladnou derivací). Symetrie: $\tilde{c} = c \circ \varphi \Leftrightarrow c = \tilde{c} \circ \varphi^{-1}$ (pokud je $\varphi' > 0$, pak $(\varphi^{-1})' > 0$). Tranzitivita:

$$\tilde{\tilde{c}} = \tilde{c} \circ \varphi \wedge \tilde{c} = c \circ \psi \implies \tilde{\tilde{c}} = x \circ \psi \circ \varphi.$$

(Navíc $(\psi \circ \varphi)' = \psi' \cdot \varphi'$). $\square$

Poznámka

Dále budeme reparametrizaci označovat pouze změnou parametru a tečka bude značit derivaci podle t, čárkou pak podle s.

Lemma 2.1

Pro derivace dvou parametrizací $c(t)$ a $c(s) = c(\varphi(s))$ téže hladké regulární křivky v každém odpovídajícím bodě platí

$$(\dot{c}|\ddot{c}|\dddot{c}) = (c'|c''|c''') \begin{pmatrix} \dot{\varphi} & \ddot{\varphi} & \dddot{\varphi} \\ 0 & \dot{\varphi}^2 & 3\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi}^3 \end{pmatrix}.$$

Důkaz

$$\dot{c} = \frac{dc}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = c' \cdot \dot{\varphi} \qquad \left(dcdt|_{\varphi(s_0)} \cdot \frac{d\varphi}{ds}|_{s_0} \right).$$

$$\ddot{c} = \frac{d}{ds}\left(c' \cdot \dot{\varphi}\right) = c' \cdot \ddot{\varphi} + \frac{dc'}{ds} \cdot \dot{\varphi} = c'\ddot{\varphi} + c''(\dot{\varphi})^2.$$

$$\dddot{c} = \frac{d}{ds}\left(c'\ddot{\varphi} + c''(\dot{\varphi})^2\right) = c' \cdot \dddot{\varphi} + c''\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + c'' \cdot 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + c''' \cdot (\dot{\varphi})^3.$$

□

2.1 Rovinné křivky

Definice 2.3 (Tečný vektor, orientovaný jednotkový normálový vektor, znaménková křivost)

V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $c(t)$ v $\mathbb{R}^2$ definujeme jednotkový tečný vektor

$$\mathbf{t}(t) = \frac{c'(t)}{||c'(t)||},$$

dále orientovaný jednotkový normálový vektor

$$\mathbf{n}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t),$$

a znaménkovou křivost

$$\varkappa_z(t) = \frac{\det(c'(t)|c''(t))}{||c'(t)||^3}.$$

Bod, kde je znaménková křivost nulová, nazýváme inflexní.

Věta 2.2

Při reparametrizaci křivky v $\mathbb{R}^2$ zachovávající orientaci se v daném bodě tečný vektor, orientovaný normálový vektor a znaménková křivost nemění. Při reparametrizaci, která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné a znaménková křivost pouze změní znaménko.

Důkaz

Jen dosadíme z minulého lemmatu. □

Věta 2.3

Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou ekvivariantní vůči schodnostem $\mathbb{R}^2$. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(X) = AX + p$, parametrickou křivku $c(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny $\varkappa_2$, t, n_*. Pak křivka $\tilde{c} = f(c(t)) = Ac(t) + p$ má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost $\tilde{\varkappa}_2 = \varkappa_2 \det A$, normálový vektor $\tilde{n}_* = An_s \det A$ a tečný vektor $\tilde{t} = At$.

Důkaz

Rozepsáním. $\square$

Věta 2.4

Křivka má v každém svém bodě kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou (ze všech přímek) a v každém neinflexním bodě s oskulační kružnicí (ze všech rovnic).

Věta 2.5

Pro hladkou regulární parametrickou křivku $c : I \to \mathbb{R}^2$ platí

$$t'(t) = ||c'(t)||\varkappa_2(t)n_*(t).$$

Dále platí, že existuje hladká funkce $\vartheta(t) : I \to \mathbb{R}$ splňující $t(t) = (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t))$ pro $t \in I$ a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\varkappa_2(t) = \frac{\vartheta'(t)}{||c'(t)||}, t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $||c'(t)|| = 1$, pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny směru křivky.

Důkaz

$$t(t)' = \left(\frac{c'}{||c'||}\right)' = \frac{\sqrt{c' \cdot c'}c'' - \frac{1}{2}\frac{2c' \cdot c''}{\sqrt{c' \cdot c'}}c'}{c' \cdot c'} = \frac{||c'||^2 c'' - (c' \cdot c'')c'}{||c'||^3}.$$

Dokážeme, že $(\mathbf{t}' \perp \mathbf{t}) \Leftrightarrow (\mathbf{t}' \perp c')$.

$$\mathbf{t}' \cdot c' = \frac{1}{||c'||^3}\left[\left(||c'||^2 c'' - (c' \cdot c'')c'\right) \cdot c'\right] = ||c'||^2(c'' \cdot c') - (c' \cdot c'')(c' \cdot c') = 0,$$

tedy existuje $K \in \mathbb{R}$, že $\mathbf{t}' = K \cdot \mathbf{n}_*$.

$$\det(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \det(\mathbf{t}, K\mathbf{n}_*) = K\det(\mathbf{t}, \mathbf{n}_*) = K.$$

$$\det(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \det\left(\frac{c'}{||c'||}, \frac{||c'||^2 \cdot c'' - (c' \cdot c'')c'}{||c'||^3}\right) = \frac{1}{||c'||^4}\det(c', ||c'||^2 \cdot c'') + 0 =$$

$$= \frac{\det(c', c'')}{||c'||^3}||c'|| = \varkappa_2 \cdot ||c'||.$$

K důkazu úhlu bychom potřebovali komplexku. (Pro důkaz existence.) $\square$

2.2 Křivky v prostoru

Definice 2.4 (Jednotkový tečný vektor, křivost, binormála, jednotkový normálový vektor, torze)

Jednotkový tečný vektor bude totožný, křivost (tentokrát není znaménková) je totožná, jen místo determinantu je velikost vektorového součinu. Dále definujeme binormálu (normovaný vektorový součin první a druhé derivace), normála je pak vektorový součin binormály a tečny.

Torze je $\tau(t) = \frac{\det(c'(t)|c''(t)|c'''(t))}{||c'(t)\times c''(t)||^2}$.

Definice 2.5 (Oskulační, retrifikační a normálová rovina)

Oskulační rovina je množina $\mathbf{c}(t) + < \mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) >$, retrifikační rovina je množina $\mathbf{c}(t) + < \mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t) >$ a normálová rovina je $\mathbf{c}(t) + < \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t) >$.

Věta 2.6

Na otevřeném intervalu I budiž zadány dvě hladké reálné funkce $k(t)$, $r(t)$, přičemž $r(t) > 0$ pro všechna $t \in I$. Pak existuje až na přímou podobnost právě jedna hladká parametrická rovinná křivka $c(t)$, $t \in I$, pro kterou platí

$$||c'(t)|| = r(t), \qquad \varkappa_z(t) = f(t).$$

Důkaz

Zintegrujeme a vyjde nám jedna funkce až na konstanty. □

Věta 2.7

Při reparametrizaci křivky v $\mathbb{R}^3$ zachovávající orientaci se v daném bodě křivost, torze a Frenetův repér nemění. Při reparametrizaci, která mění orientaci, se křivost, torze a normálový vektor rovněž nemění, zatímco tečný a binormálový vektor se mění na vektory opačné.

Důkaz

Prostě se spočítá. □

Věta 2.8

Křivost, tečný a normálový vektor jsou ekvivariantní vůči shodnostem $\mathbb{R}^3$. TODO

Důkaz

Prostě se spočítá. □

Definice 2.6 (Tečna)

Pro hladkou regulární křivku $c(t)$ v $\mathbb{R}^3$ definujeme v každém bodě tečnou přímku jako množinu $c(t) + \langle \mathbf{t}(t) \rangle$.

Definice 2.7 (a lemma o parametrizaci obloukem)

O hladké parametrizované křivce $c()$ řekneme, že je parametrizovaná obloukem nebo jednotkovou rychlostí, jestliže pro všechna $t \in I$ platí $||c'(t)|| = 1$. Každou hladkou regulární křivku lze parametrizovat obloukem. Je-li $c(t)$ nějaké parametrizace obloukem, pak všechny ostatní parametrizace této křivky obloukem získáme reparametrizací $t = \varphi(s)$, $\varphi(s) = \pm s + s_0$, kde s_0 je libovolná konstanta.

Důkaz

Zřejmé. $\square$

Lemma 2.9

Pro hladkou křivku $c(t)$ v $\mathbb{R}^3$ parametrizovanou obloukem v každém bodě platí $\mathbf{t}(t) = c'(t)$ a v každém neinflexním bodě navíc platí

$$n(t) = \frac{c''(t)}{||c''(t)||}, \qquad \varkappa(t) = ||c''(t)|| = ||c'(t) \times c''(t)||.$$

Důkaz

Prostě se spočítá. $\square$

Věta 2.10 (Frenetovy vzorce)

Je-li $c(t)$ hladká křivka v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem, pak v každém neinflexním bodě platí

$$\mathbf{t}' = \varkappa n, \qquad n' = -\varkappa \mathbf{t} + \tau b, \qquad b' = -\tau n',$$

což lze vyjádřit maticově jako

$$(t'|n'|b') = (t|n|b) \begin{pmatrix} 0 & -\varkappa & 0 \\ \varkappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix},$$

nebo s využitím takzvaného Darbouxova vektoru $d = \tau \mathbf{t} + \varkappa b$ jako

$$t' = d \times t, \qquad n' = d \times n, \qquad b' = d \times b.$$

Věta 2.11

Nechť $f(t) > 0$, $g(t)$ jsou hladké funkce definované na otevřeném intervalu I. Pak existuje až na přímou eukleidovskou shodnost právě jedna hladká křivka $c(t)$ v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem na intervalu I tak, že $\varkappa(t) = f(t)$, $\tau(t) = g(t)$.

Tyto rovnice se někdy nazývají přirozené rovnice křivky.

Věta 2.12

Pro regulární hladkou para TODO!

TODO

Věta 2.13

Křivka je určena křivostí, torzí a počáteční polohou Frenetova repéru.

Důkaz
Technický. Chce to věty o řešení diferenciálních rovnic. □

Věta 2.14

Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^3$ bez inflexních bodů platí, že leží v nějaké rovině právě tehdy, když $\tau(t) = 0$, $\forall t \in I$.

Důkaz
$c(t)$ leží v rovině $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0 \Leftrightarrow c(t) \cdot (a, b, c) = -d$, tj. $c' \cdot (a, b, c) = c'' \cdot (a, b, c) = c''' \cdot (a, b, c) = 0$, tedy $c', c'', c''' \in \langle (a, b, c) \rangle^{\perp}$, který je dimenze dva, tedy determinant daných vektorů (a tedy torze) musí být 0.

Naopak jestliže $\tau = 0$, pak $b' = \tau \cdot \mathbf{n} = 0 \implies b$ je konstantní. Zvolíme $t_0 \in I$ a definujeme $h(t) = (c(t) - c(t_0)) \cdot b$. $h(t_0) = 0$ a navíc $h'(t) = c'(t) \cdot b = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0 \implies h \equiv 0$. $0 = (c(t) - c(t_0)) \cdot b = c(t) \cdot b = c(t_0) \cdot b$. □

Věta 2.15

Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^2$ vnořenou do $\mathbb{R}^3$ zobrazením $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ platí $\varkappa = |\varkappa_z|$ a v neinflexních bodech $n = \operatorname{sgn}(\varkappa_z) n_s$.

Důkaz
Přímým výpočtem. □

3 Křivkový integrál

Definice 3.1 (Křivkový integrál 1. druhu)

Mějme hladkou parametrickou křivku $c(t), t \in (\alpha, \beta)$ v $\mathbb{R}^n$ a reálnou funkci f definovanou na $\langle c \rangle$. Pak definujeme křivkový integrál 1. druhu

$$\int_c f ds := \int_\alpha^\beta f(c(t)) ||c'(t)|| dt,$$

pokud integrál napravo existuje jako Lebesgueův integrál.

Věta 3.1

Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na (re)parametrizaci.

Důkaz

Větou o substituci. □

Definice 3.2 (Délka křivky)

Délku křivky definujeme jako integrál prvního druhu z konstantní jednotkové funkce

$$l(c) = \int_c 1 ds.$$

Definice 3.3 (Uzavřená, jednoduchá, Jordanova křivka)

Parametrizovaná křivka $c : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ se nazývá uzavřená, jestliže $c(\alpha) = c(\beta)$. Tuto křivku navíc nazveme jednoduchou, je-li c prosté na $[\alpha, \beta)$. Jednoduchá uzavřená rovinná křivka se rovněž nazývá Jordanova.

Věta 3.2 (Umlaufsatz)

Je-li $c(t), t \in [\alpha, \beta]$ *hladká uzavřená křivka, pro kterou navíc* $\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{t}(\beta)$*, pak existuje* $k \in \mathbb{Z}$ *(nazývané index křivky) takové, že* $\int_c \varkappa_z ds = 2k\pi$.

Je-li navíc c *jednoduchá a kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček), pak* $k = 1$.

Důkaz

TODO □

Definice 3.4

Mějme hladkou parametrickou křivku $c(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ v $\mathbb{R}^n$ a zobrazení (vektorové pole) $F : \langle c \rangle \to \mathbb{R}^n$. Pak definujeme Křivkový integrál 2. druhu

$$\int_c F dX := \int_\alpha^\beta F(c(t)) \cdot c'(t) dt,$$

pokud integrál napravo existuje jako Lebesgueův integrál.

Věta 3.3 (Greenova)

Nechť c *je jednoduchá hladká uzavřená kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) křivka v* $\mathbb{R}^2$*. Nechť* $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ *je hladké vektorové pole definované na nějakém okolí uzávěru* $\operatorname{int} c$*. Pak*

$$\int_c F dX = \int_{\operatorname{int} c} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Důkaz

$\square$

Lemma 3.4

Buď $c(t) = (c_x(t), c_y(t))^T$, $t \in [\alpha, \beta]$ kladně orientovaná hladká jednoduchá uzavřená křivka. Pak plošný obsah obsah oblasti $\operatorname{int} c$ *je roven*

$$A = \int_\alpha^\beta c_x(t)c_y'(t)dt = -\int_\alpha^\beta c_y(t)c_x'(t)dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (c_x c_y' - c_x' c_y)(t)dt.$$

Důkaz

Dosadíme správná vektorová pole do Greenovy věty a spočítáme. $\square$

Věta 3.5 (Isoperimetrická nerovnost)

Buď $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ hladká jednoduchá uzavřená křivka délky l a buď A plošný obsah $\operatorname{int} c$*. Pak*

$$\frac{l^2}{4\pi} \geq A,$$

přičemž rovnost nastane, právě když c je kružnice.

Lemma 3.6 (Wirtinger)

Nechť $f(t) : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ je hladká funkce, pro kterou platí $f(0) = f(\pi) = 0$. Pak

$$\int_0^\pi f'^2(t)dt \geq \int_0^\pi f^2(t)dt,$$

TOOD.

Důkaz

Vynechán. $\square$

TODO!!!

Definice 3.5 (Afinní zobrazení)

Mějme afinní prostory A, B se zaměřeními V, W nad stejným tělesem T. Řekneme, že zobrazení $f : A \to B$ je afinní, jestliže zachovává afinní kombinace, tedy jestliže pro libovolné body $B_1, \ldots, B_k \in A$ a koeficienty $c_1, \ldots, c_k \in T$ splňující $c_1 + \ldots + c_k = 1$ platí

$$f(\sum_{i=1}^k c_i B_i) = \sum_{i=1}^k c_i f(B_i).$$

Definice 3.6 (Asociovaný homomorfismus)

Mějme afinní prostory A, B se zaměřeními V, W nad stejným tělesem $\mathbb{T}$ a $f : A \to B$ afinní zobrazení. Definujeme zobrazení $\overline{f} : V \to W$ předpisem

$$\overline{f}(\mathbf{v}) = f(\mathbf{X} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{X}),$$

kde $\mathbf{X} \in A$ je libovolný bod. Tato definice na volbě bodu $\mathbf{X}$ nezávisí a navíc takto definované $\overline{f}$ je lineární a nazývá se asociovaný homomorfismus.

Důkaz
Rozepsáním. □

Důsledek
Obrazem afinního podprostoru v afinním zobrazení je opět afinní podprostor. Afinní zobrazení navíc zachovávají rovnoběžnost podprostorů.

Důsledek
Afinní zobrazení je injektivní, surjektivní či bijektivní právě tehdy, když tuto vlastnost má asociovaný homomorfismus.

Definice 3.7 (Afinita)

Afinní zobrazení $f : A \to A$ z afinního prostoru do sebe nazveme afinita, jestliže je bijektivní. Všechny afinity daného prostoru tvoří grupu vzhledem ke skládání, která se nazývá afinní grupa.

Věta 3.7

Zobrazení $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je afinní právě tehdy, když má tvar

$$f(X) = AX + p,$$

kde A je matice $n \times m$ a p je vektor $n \times 1$. V případě $m = n$ je toto zobrazení afinitou právě tehdy, když je matice A regulární.

4 Projektivní geometrie

Definice 4.1

Mějme vektorový prostor V^{n+1} dimenze $(n+1)$ nad tělesem $\mathbb{T}$. Množinu všech 1-dimenzionálních podprostorů V nazveme projektivním prostorem dimenze n nad tělesem $\mathbb{T}$ a označujeme ho $\mathbb{P}(\mathbf{V}^{n+1})$ nebo zkráceně $\mathbb{P}^n$.

Projektivní podprostor dimenze 0 nazýváme bod, podprostor dimenze 1 přímka, podprostor dimenze 2 rovina a podprostor (maximální) dimenze $(n-1)$ nadrovina.

TODO

Věta 4.1

Projektivní zobrazení $F : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ z afinního prostoru do sebe jsou bijektivní právě tehdy, když

TODO

Věta 4.2

V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n$ nad tělesem $\mathbb{T}$ mějme dáno $n+2$ bodů $X_1, \dots, X_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje projektivní soustava souřadnic taková, že

$$\begin{aligned} X_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0), \\ X_2 &= (0, 1, \dots, 0, 0), \\ &\vdots \\ X_n &= (0, 0, \dots, 1, 0), \\ X_{n+1} &= (0, 0, \dots, 0, 1), \\ X_{n+2} &= (1, 1, \dots, 1, 1). \end{aligned}$$

Důkaz

Za bázi vezmeme $B = (X_1, \dots, X_{n+1})$ a její členy správně přenásobíme (nebudeme násobit 0, jelikož jsou v obecné poloze), aby jejich součet byl X_{n+2}. □

Důsledek

V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n$ nad tělesem $\mathbb{T}$ mějme dáno $n+2$ bodů $X_1, \dots, X_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině a také $n+2$ bodů $Y_1, \dots, Y_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje právě jedno projektivní zobrazení $F : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, pro které platí

$$F(X_i) = Y_i, \qquad i \in [n+2].$$

Věta 4.3 (Pappova věta)

V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2$ nad $\mathbb{R}$ mějme dvě přímky p, q, které se protínají v bodě S. Na přímce p mějme body P_1, P_2, P_3 různé navzájem a různé od S. Podobně na přímce q mějme body Q_1, Q_2, Q_3 různé navzájem a různé od S. Pak platí, že body

$$X := \overline{P_1Q_2} \cap \overline{P_2Q_1}, \qquad Y := \overline{P_1Q_3} \cap \overline{P_3Q_1}, \qquad Z := \overline{P_2Q_3} \cap \overline{P_3Q_2}$$

leží na přímce.

Důkaz
Zvolíme si body S, P_1, Q_1, X a použijeme předchozí větu. $\overline{SP_1} = (0,0,1)^*$, $\overline{SQ_1} = (0,1,0)^*$, $\overline{Q_1P_2} = (1,-1,0)^*$, $\overline{P_1Q_2} = (1,0,-1)^*$, $P_3 = (1,\alpha,0)$, $Q_3 = (1,0,\beta)$. Zbytek dopočítáme (můžeme si všimnout, že máme jen 2 stupně volnosti).

$\overline{Q_1P_3} = (\alpha,-1,0)^*$, $\overline{P_1Q_3} = (\beta,0,-1)^*$, $P_2 = (1,1,0)$, $Q_2 = (1,0,1)$, $\overline{P_2Q_3} = (\beta,-\beta,-1)$, $\overline{Q_2P_3} = (\alpha,-1,-\alpha)$, $Y = (1,\alpha,\beta)$, $Z = ()$. □

Definice 4.2 (Dvojpoměr)

TODO

Věta 4.4

Projektivní transformace zachovávají dvojpoměr. Jestliže je tedy F projektivní transformace, pak

$$(A,B,C,D) = (F(A),F(B),F(C),F(D)).$$

Důkaz
Rozepíše se pomocí homomorfismu. □

Definice 4.3

Mějme n-dimenzionální afinní prostor A se zaměřením V^n nad tělesem $\mathbb{T}$ a $(n+1)$-dimenzionální afinní prostor B se zaměřením V^{n+1} nad stejným tělesem a prosté afinní zobrazení $\varphi : A \to B$ a bod $P \in B\ \operatorname{Im}(\varphi)$. Pak je zobrazení $\Phi : A \to \mathbb{P}(V^{n+1})$ zadané předpisem

$$\Phi(x) := \mathrm{LO}\left\{\varphi(X) - P\right\},$$

je prosté a nazývá se vnoření A do projektivního prostoru $\mathbb{P}(V^{n+1})$

Definice 4.4

Pro libovolné těleso splňuje zobrazení $\Phi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{P}(TODO)$ TODO.

Věta 4.5

V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ má každá afinní přímka p v $\mathbb{R}^2$ se směrovým vektorem $v = (v_x, v_y)$ právě jeden nevlastní bod $(v_x, v_y, 0)$. Tento bod budeme rovněž nazývat směr p.

Definice 4.5 (Dělící poměr)

Mějme tři body A, B, X na afinní přímce nad tělesem $\mathbb{T}$, přičemž $A \neq B$ a $X \neq B$. Pak dělící poměr

$$\frac{AX}{XB} := \lambda \qquad (=: (A,B;X)),$$

jako jediný skalár, pro který platí $\lambda(B - X) = (X - A)$. Potom platí, že X je afinní kombinací bodů A, B

$$X = \frac{1}{\lambda+1}A + \frac{\lambda}{\lambda+1}B$$

a tedy naopak, jsou-li (c_1, c_2) barycentrické souřadnice X v soustavě (A, B), pak

$$\frac{AX}{XB} = \frac{c_2}{c_1}.$$

Důkaz

Upočítá se. □

Věta 4.6

V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujme různé body A, B, C, D ležící na jedné přímce. Pak pro dvojpoměry a dělící poměry platí

1. *Jestliže jsou všechny tyto body vlastní, pak*

$$(A, B, C, D) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{BD}{DA}} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA}.$$

2. *Jestliže D je nevlastní, pak $(A,\ B, C, D) = -\frac{AC}{CB}$.*

3. *Speciálně je-li …*

Důkaz

Rozepsáním. □

Věta 4.7

Uvažujme kanonicky projektivně rozšířený afinní prostor $\mathbb{T}^n$. Projektivní transformace uvažovaná na vlastních bodech mají tvar lineárních lomených zobrazení. Afinity tvoří podgrupu projektivních transformací a jsou to právě ta zobrazení, které vlastní body zobrazují na vlastní body a nevlastní body na nevlastní body.

Důkaz

F je dáno regulární maticí. Touto maticí to můžeme bod zobrazit a pak ho vydělit příslušnou jeho souřadnicí, abychom dostali jeho reprezentaci v afinním prostoru. □

TODO (definice okolo kvadrik).

Definice 4.6

Pro trojúhelník ABC v $\mathbb{R}^2$ definujeme jeho orientovaný obsah jako

$$S_{ABC} := \frac{1}{2}\det(B - A|C - A).$$

Věta 4.8

Afinity zachovávají dělící poměry. Je-li f afinita v $\mathbb{R}^2$ tvaru $f(X) = TX + p$, pak

$$S_{f(A)f(B)f(C)} = (\det T)S_{ABC}.$$

Afinity v rovině tedy zachovávají poměry obsahů.

Důkaz
Upočítá se. □

Věta 4.9

Nechť $Z = (A, B, C)$ tvoří barycentrickou soustavu souřadnic v $\mathbb{R}^2$ a P, Q, R jsou libovolné body $\mathbb{R}^2$. Pak platí

- *Body P, Q, R leží na přímce právě tehdy, když* $\det([P]_Z|[Q]_Z|[R]_Z) = 0$.
- *Obecněji platí* $S_{PQR} = \det([P]_Z|[Q]_Z|[R]_Z)S_{ABC}$.

Důkaz
První bod plyne jednoduše z druhého a definice obsahu trojúhelníku.

Druhý TODO. □

Věta 4.10 (Cevova)

Mějme trojúhelník ABC a bod X, který neleží na žádné ze stran trojúhelníka (ani po prodloužení do přímek). Předpokládejme, že existují průsečíky $P = AX \cap BC$, $Q = BX \cap CA$ a $R = CX \cap AB$. Pak platí

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$

Důkaz
Zobrazíme afinním zobrazením na trojúhelník $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$. Tam už se to upočítá analyticky. □

Věta 4.11 (Menelaova)

Mějme trojúhelník ABC a přímku p, která neprochází žádným z vrcholů a není rovnoběžná *se žádnou se stran. Označme si $P = p \cap BC$, $Q = p \cap CA$ a $R = p \cap AB$. Pak platí*

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1.$$

Důkaz
TODO. □

Věta 4.12

Každá regulární kuželosečka v reálném projektivní rovině $\mathbb{P}^2$ je projektivní transformací kuželosečky dané rovnicí

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Důkaz
BÚNO matice má signaturu $++-$. Potom existují symetrické úpravy, které matici převedou na tvar $\operatorname{diag}(1, 1, -1)$. Matice těchto úprav (tj. matice, kterou matici kuželosečky násobíme zleva a zprava transponovaně) je pak hledané projektivní zobrazení. □

Definice 4.7

Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem $\mathbb{T}$ a v něm kvadriku Q danou kvadratickou formou q a nechť b je příslušná symetrická bilineární forma, tedy $q(v) = b(b, b)$. Řekneme, že dva body $X = \mathrm{LO}(v)$, $Y = \mathrm{LO}(w)$ jsou polárně sdružené, jestliže $b(v, w) = 0$.

Věta 4.13 (O polaritě)

Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem $\mathbb{T}$ a v něm regulární kvadriku Q. Pak

1. *Body sdružené s libovolným bodem $X \in \mathbb{P}(V^{n+1})$ tvoří nadrovinu, kterou nazveme polára k X a označíme p_X.*
2. *Naopak každá nadrovina je polárou k právě jednomu bodu, který se nazývá jejím pólem.*
3. *Pro libovolné dva body X, Y platí*

   $$X \in p_Y \Leftrightarrow Y \in p_X.$$

4. *Bod X je sdružen sám se sebou (nebo-li leží na své poláře p_X) právě tehdy, když leží na Q.*

   $$(X \in p_X \Leftrightarrow X \in Q.)$$

   V tomto případě p_X nazýváme tečnou nadrovinou ke Q v bodě X.

Důkaz

1. Vyjádříme si, co to znamená být polárou. 2. Obdobně jako 1. 3. ze symetrie matice. 4. z definice. □

Definice 4.8 (Afinní pojmy)

Nechť $\mathbb{P}^n$ je kanonickým projektivním rozšířením afinního prostoru $\mathbb{T}^n$, pak

- O množině $\tilde{Q} \subset \mathbb{T}^n$ řekneme, že je to regulární afinní kvadrika, jestliže to je množina vlastních bodů regulární kvadriky Q v $\mathbb{P}^n$. O Q hovoříme jako o projektivním rozšířením/zúplněním $\tilde{Q}$ a o $\tilde{Q}$ hovoříme jako o afinní verzi Q. Nevlastní body Q považujeme i za nevlastní body $\tilde{Q}$.
- Tečné nadroviny ke $\tilde{Q}$ definujeme jako afinní verze tečných nadrovin ke Q ve vlastních bodech.
- jestliže je pól nevlastní nadroviny p_∞ vlastním bodem, pak jej nazýváme středem kvadriky $\tilde{Q}$.
- Jestliže má kvadrika v nevlastním bodě tečnou nadroviny, která není nevlastní, nazýváme tuto nadrovinu asymptotickou k $\tilde{Q}$.

Definice 4.9 (Elipsa, parabola, hyperbola, afinní typ kuželosečky)

Regulární kuželosečku v $\mathbb{R}^2$ nazveme elipsa, jestliže nemá žádný nevlastní bod, parabola, jestliže má právě jeden nevlastní bod, a hyperbola, jestliže má dva nevlastní body, jiné možnosti nejsou.

Těmto názvům říkáme afinní typ kuželosečky. Elipsa a hyperbola mají střed, parabola střed nemá. Hyperbola má dvě různé asymptoty, parabola ani elipsa asymptoty nemají.

Důkaz

Rozmyslí se. □

Definice 4.10 (Sdružené směry)

V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ mějme regulární kuželosečku Q. O dvou vlastních přímkách řekneme, že mají sdružené směry, jestliže jsou jejich nevlastní body polárně sdružené vůči Q.

Pro elipsu jsou vždy dva různé směry po dvou sdružené. Pro hyperbolu jsou směry asymptot sdružené vždy samy se sebou a ostatní směry jsou po dvou sdružené. Pro parabolu existuje jeden směr (její nevlastní bod), který je sdružen sám se sebou i se všemi ostatními směry.

Důkaz
Rozmyslí se. □

Definice 4.11

V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ s kanonickým skalárním součinem mějme regulární kuželosečku Q. Směr (nevlastní bod) nazýváme hlavní, jestliže existuje směr sdružený, který je na něj kolmý. Osu kuželosečky definujeme jako poláru hlavního směru, pokud tato polára není nevlastní přímkou. Vrcholy kuželosečky definujeme jako vlastní průsečíky os s kuželosečkou. Úsečka spojující střed a vrchol se nazývá poloosa.

Lemma 4.14

V projektivní rovině $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ mějme regulární kuželosečku Q. Nechť přímka p protíná Q ve dvou různých bodech A, B. Nechť $C \in p$ různé od A, B a nechť $D \in p$ je polárně sdružené s C. Pak (A, B, C, D) tvoří harmonickou čtveřici.

Důkaz
Upočítá se. □

Věta 4.15

Nechť přímka p prochází středem S kuželosečky Q (elipsy nebo hyperboly) a protíná kuželosečku ve dvou různých bodech A, B. Pak S je středem úsečky AB.

Tečny ke Q v bodech A, B jsou rovnoběžné a mají směr sdružený se směrem p.

Jestliže ma přímka se směrem sdruženým k p s kuželosečkou Q dva průsečíky X, Y, pak přímka p půlí úsečku XY.

Důkaz
S využitím pojmů a minulého lemmatu. □

Věta 4.16

Nechť vlastní přímka p prochází jediným nevlastním bodem X paraboly a protíná ji v dalším (nevlastním) bodě Y. Nechť přímka rovnoběžná s tečnou v bodě Y protíná parabolu ve dvou bodech A, B. Pak přímka p půlí úsečku AB.

Důkaz
Z předchozí věty. □

Věta 4.17 (Příklad afinně zachovaného pojmu)

V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ mějme elipsu Q se středem S. Jestliže F je afinita, pak $F(Q)$ je opět elipsa a $F(S)$ je jejím středem.

Důkaz
Triviální. □

Definice 4.12 (Projektivní klasifikace kvadrik v prostoru)

Každá regulární kvadrika v reálném projektivním prostoru $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ je projektivní transformací právě jedné z kvadrik

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0, \qquad \text{(nepřímková kvadrika)}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0. \qquad \text{(přímková kvadrika)}$$

V projektivně rozšířeném prostoru $\mathbb{R}^3$ definujeme tyto afinní typy regulárních kvadrik

- elipsoid jako nepřímkovou kvadriku, která nemá žádný nevlastní bod,
- eliptický paraboloid jako nepřímkovou kvadriku, která má právě jeden nevlastní bod,
- dvojdílný hyperboloid jako nepřímkovou kvadriku, jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku,
- jednodílný hyperboloid jako přímkovou kvadriku, jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku,
- hyperbolický paraboloid jako přímkovou kvadriku, jejíž nevlastní body tvoří dvě přímky.

Každé dvě kvadriky stejného afinního typu jsou mezi sebou zobrazitelné afinní transformací.

Důkaz
Nebyl? □