Příklad
Consider the following problem:

$$-\Delta_p u + \sinh u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

where $f \in L^\infty(\Omega)$ and $p \in (1, \infty)$.

Define a proper notion of a weak solution and prove the existence and the uniqueness.

Řešení (Slabé řešení)
Funkci $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ nazveme slabým řešením tohoto problému, jestliže $\int_\Omega |\sinh u| < \infty$ a pro každé $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega \sinh(u)\varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

(Toto dává smysl, neboť $|\nabla u|^{p-2}\nabla u \in L^{\frac{p}{p-1}}$ a $\frac{p-1}{p} + \frac{1}{p} = 1$, $\sinh u$ je podle předpokladu L^1 a $\varphi \in L^\infty$, nakonec $f \in L^\infty \subset W_0^{1,cokoliv}$.)

Důkaz (Jednoznačnost)
sinh je monotónní (neboť to je rostoucí funkce). O $|\nabla u|^{p-2}\nabla u$ víme, že je ostře monotónní (jako funkce ∇u). Tedy když do formulace slabého řešení pro dvě řešení u a v dosadíme za testovací funkci $(u - v) \cdot \min(K/|u - v|, 1)$ a odečteme, dostaneme

$$\int_{|u-v| \leqslant K} \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) \cdot (\nabla u - \nabla v) + \int_\Omega \underbrace{\sinh \ldots}_{\geqslant 0} = 0.$$

a (z monotónnosti) $\nabla u - \nabla v = 0$ skoro všude na $\{|u - v| \leqslant K\}$ a limitním přechodem skoro všude na Ω. Což spolu s Poincarého nerovností (pro nulovou stopu) dává $u = v$. (Pokud $\nabla u - \nabla v = 0$ skoro všude, pak $\|u - v\|_{1,p}^p \leqslant C \cdot \|\nabla(u - v)\|_p^p + \int \operatorname{tr} \ldots = 0$.) □

Důkaz (Existence aproximace)
Mějme podobný problém, kde místo $\sinh u$ bude $\sinh_n u := \sinh \min(\max(u, -n)n)$. Tím pádem nepotřebujeme $\varphi \in L^\infty(\Omega)$. Tedy hledáme $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ takové, že pro každé $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega \sinh_n(u)\varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

Nyní můžeme zvolit $A(x, u, \xi) = |\xi|^{p-2}\xi$ a $B(x, u, \xi) = |\sinh_n u|$ a použít větu z přednášky:

- A, B Caratheodorovy zřejmé.
- $\exists c_1 \in \mathbb{R}, 0 = c_1 \in L^{p'}(\Omega)$, že $|A(x, u, \xi)| \leqslant c_1(1+|u|^{p-1}+|\xi|^{p-1})+c_1(x)$ a $|B(x, u, \xi)| \leqslant c_1(1+|u|^{p-1}+|\xi|^{p-1})+c_1(x)$, neboť pro první stačí volit $c_2 = 1$ a v druhém můžeme c_2 zvolit z vlastností sinh na omezené množině.
- Koercivitu máme z $A(x, u, \xi) \cdot \xi = |\xi|^p$ a $B(x, u, \xi) \cdot u \geqslant 0$ (sinh je lichá funkce).
- Nakonec víme, že A je striktně monotónní (vzhledem k ξ).

Tedy (podle věty z přednášky) slabé řešení tohoto problému existuje. Označme ho u_n. □

Důkaz (Limita aproximací je vhodným kandidátem)
u_n můžeme dosadit jako testovací funkci do našich aproximací (v aproximacích nemáme požadavek $\varphi \in L^\infty$):

$$\|\nabla u_n\|_p^p + \int_\Omega \underbrace{\sinh_n(u_n)u_n}_{\geqslant 0} = \int_\Omega f u_n \leqslant c(\varepsilon)\|f\|_{p'}^{p'} + \varepsilon \cdot \|u\|_p^p.$$

A vhodnou volbou ε a Poincarého nerovností dosáhneme $\|u_n\|_{1,p}^p \leqslant C\cdot\|f\|_{p'}^{p'}$ pro C nezávislé na n. Tedy z u_n můžeme vybrat slabě konvergující (ve $W_0^{1,p}$) posloupnost, BÚNO je to samotná $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Označme limitu u. Potom

$$\int_\Omega \sinh u = \int_{u>0} \sinh u - \int_{u<0} - \sinh u \overset{\text{Fatou}}{=}$$

$$= \liminf \underbrace{\int_{u>0} \sinh_n u_n}_{\leqslant \int_\Omega 1+\sinh_n(u_n)u_n} - \liminf \underbrace{\int_{u<0} - \sinh_n u_n}_{\geqslant \int_\Omega -1-\sinh(u_n)u_n}.$$

My ale víme, že $\int_\Omega 1$ je konečný a $\int_\Omega \pm\sinh_n(u_n)u_n$ jsou správně omezené (z nerovnice výše máme $\int_\Omega \sinh_n(u_n)u_n \leqslant c(\varepsilon)\|f\|_{p'}^{p'} + \varepsilon\|u\|_p^p$, ale $\|u\|_p^p \leqslant C \cdot \|u\|_{1,p}^p$ jsme už uniformě odhadli), tedy $\int_\Omega \sinh u < \infty$ a první podmínku pro slabé řešení máme splněnou. □

Důkaz (Limita aproximací splňuje rovnici pro slabé řešení)
Pravá strana rovnicí pro slabé řešení ($\int f\varphi$) je všude stejná, tedy s tou není potřeba nic dělat. Limitu $\int_\Omega \sinh_n(u_n)\varphi$ spočítáme přes Vitaliovu větu o konvergenci. K tomu stačí ověřit $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall S \subset \Omega, |S| < \delta : \int_S |\sinh_n(u_n) \cdot \varphi| < \varepsilon$:

$$\int_S |\sinh_n(u_n)| \cdot |\varphi| \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_S |\sinh_n(u_n)| \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot \left(\int_{\{u_n < K \wedge u_n > -K\} \cap S} |\sinh_n(u_n)| + \int_{\{u_n > K \vee u_n < -K\} \cap S} |\sinh_n u_n| \cdot |u_n| \cdot \frac{1}{|u_n|} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot \left(|S| \cdot \sinh(K) + \frac{C_2}{K} \right) \leqslant C \cdot C_2 \cdot \left(|S| \cdot \sinh(K) + \frac{1}{K} \right),$$

kde C_2 je uniformní omezení $\sinh_n(u_n) \cdot u_n$, které jsme už viděli. Zvolením správného K a $|S|$ dosáhneme, že toto bude $< \varepsilon$, čímž splníme předpoklady Vitaliovy věty, tedy $\int_\Omega \sinh_n(u_n) \cdot \varphi \to \int_\Omega \sinh(u) \cdot \varphi$.

Zbývá poslední, a to $\int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n) \nabla u_n \to \int_\Omega A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u$, ale to se udělá stejně jako v důkazu věty použité k existenci aproximací, neboť A je striktně monotónní (vzhledem k ξ) a všechny ostatní podmínky jsou také jako v dané větě (omezení na B se v této části důkazu nepoužila). $\square$