Úvod

Poznámka (Motivace)
Hledání řešení diferenciálních rovnic. (Např. nahradíme rovnici definicí operátoru a hledáme, kde je operátor identita. Tedy neřešíme rovnice, ale prostory, na kterých máme funkce.)

Definice 0.1

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} \vee \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

1 Banachovy a Hilbertovy prostory

Definice 1.1 (Normovaný lineární prostor)
Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $||\cdot|| : X \to [0, \infty)$ nazveme normou na X, pokud

$$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{o},$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||,$$

$$||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x||.$$

Tvrzení 1.1
Nechť $(X, ||\cdot||)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$.

Funkce $\varrho(x, y) = ||x - y||$ je translačně invariantní metrika na X.

Norma je 1-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na x.

Zobrazení $+ : X \times X \to X$ a $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ jsou spojitá.

Důkaz
První část byla na MA3. Druhá: Zvol $x, y \in X$. Pak z trojúhelníkové nerovnosti máme $||y|| \leq ||x|| + ||x - y||$, $||x|| \leq ||y|| + ||x - y||$, tudíž (podle toho, zda je v absolutní hodnotě kladná nebo záporná hodnota, tak z první/druhé rovnice) $\big| ||x|| - ||y|| \big| \leq ||x - y||$.

Třetí část: Připomenutí: Součin metrických prostorů s maximovou metrikou je metrický prostor. Důkaz tohoto i třetí části je pak jednoduché cvičení. $\square$

Definice 1.2 (Uzavřená a otevřená koule)

$$B_X(x, r) := \{y \in X \mid ||x - y|| \leq r\}.$$

$$U_X(x, r) := \{y \in X \mid ||x - y|| < r\}.$$

$$S_X(x,r) := \{y \in X \mid ||x-y|| = r\}.$$

$$B_X := B_X(\mathbf{o},1).$$
$$U_X := U_X(\mathbf{o},1).$$
$$S_X := S_X(\mathbf{o},1).$$

Definice 1.3 (Banachův prostor)

Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Dále se opakovaly metrické prostory. Úplnost, kompaktnost a Bairova věta.

Tvrzení 1.2

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor. Potom

a) Je-li Y Banachův, pak je Y uzavřený v X.

b) Pokud je naopak X Banachův, pak Y je Banachův právě tehdy, když je uzavřený.

Důkaz

Je-li (P,ϱ) úplný, pak $M \subseteq P$ je úplný $\Leftrightarrow$ M je uzavřený. To dává speciálně b).

(P,ϱ) je MP, pak $M \subseteq P$ je úplný $\implies$ M uzavřený. To dává speciálně a). □

Například

$(\mathbb{K}, ||\cdot||_p)$, $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$, kde funkce je $\Omega \to \mathbb{K}$ a norma je definována jako p-tá odmocnina z integrálu funkce na p. $l_p(l)$ resp. $l_p(l,\mathbb{K})$ je diskrétní verze předchozího (tj. se sumou). $\mathbb{C}(K)$, kde K je hausdorfův a kompaktní TP.

c jsou všechny posloupnosti se supremovou normou, c_0 jsou všechny posloupnosti konvergující k 0 se supremovou normou. c_{00} sestává z těch posloupností, kde je jen konečně mnoho nenulových prvků (norma je maximová), je to lineární prostor, ale není Banachův. $c_0(I)$ je zobecnění z $c_0(\mathbb{N})$ na libovolnou diskrétní množinu I, tj. obsahuje „posloupnosti“, kde pro každé ε je pouze konečně mnoho členů větších než ε (pak $(c_0(I), ||\cdot||_\infty)$ je Banachův).

$\mathcal{L}^1([0,1], ||\cdot||_{\mathcal{L}^1})$ (prostor hladkých funkcí na intervalu $[0,1]$), kde $||f||_{\mathcal{L}^1} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$. $\mathcal{M}(K) = \{\mu : Borel(K) \to \mathbb{K} | \mu \text{ regulární míra}\}$,

$$||\mu|| := \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(B_i)|, \bigcup B_i = K, B_i \text{ Borelovská}\right\}.$$

Definice 1.4 (Ekvivalentní normy)

Nechť X je vektorový prostor a $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $||\cdot||_1$ a $||\cdot||_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A||x||_2 \leq ||x||_1 \leq B||x||_2$.

Věta 1.3

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Důkaz

Později. $\square$

Lemma 1.4

Nechť X je vektorový prostor, $||\cdot||_1$ a $||\cdot||_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{X,||\cdot||_1}$, $B_2 = B_{X,||\cdot||_2}$ a $a, b > 0$. Pak $a||x||_2 \leq ||x||_1 \leq b||x||_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně $||\cdot||_1 = ||\cdot||_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Zvol $x \in aB_1$, pak $||\frac{x}{a}||_1 \leq 1 \implies x \in B_2$. Opačně: Zvol $x \in B_2$, pak $||x||_2 \leq 1 \implies x \in B_1$.

$\Leftarrow$: Pokud $x = 0$, pak jsou nerovnosti jasné. Zvol $x \neq 0$. Pak $\frac{x}{||x||_1} \in B_1$. Pak $\frac{ax}{||x||_1} \in B_1 \subseteq B_2 \implies a||x||_2 \leq ||x||_1$. Analogicky pro druhý směr. $\square$

Tvrzení 1.5

Nechť X je vektorový prostor a $||\cdot||_1$ a $||\cdot||_2$ jsou normy na X a B_1 a B_2 jako minule. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *Normy $||\cdot||_1$ a $||\cdot||_2$ jsou ekvivalentní.*
2. *Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.*
3. *Zobrazení $\mathrm{id} : (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$ je homeomorfismus.*
4. *Otevřené množiny v $(X, ||\cdot||_1)$ X splývají s otevřenými množinami $(X, ||\cdot||_2)$.*
5. *$||x_n - x||_1 \to 0$, právě když $||x_n - x||_2 \to 0$ pro $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$.*

Důkaz
$1 \Leftrightarrow 2$ plyne z předchozího lemmatu. $3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$ je lehké a platí ve všech MP. $1 \implies 5$ jasné.

$5 \implies 1$: Sporem: Předpokládejme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $x_n, y_n \in X$ splňující $||x_n - y_n||_1 > n||x_n - y_n||_2$. Položme $z_n = \frac{x_n - y_n}{||x_n - y_n||_1}$. Pak $||z_n||_1 = 1$, ale $||z_n||_2 < \frac{1}{n} \to 0$. $\lightning$. $\square$

Definice 1.5 (Konvexní množina)

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Poznámka (Fakt)
Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny. (A naopak každá konvexní množina může být koulí v nějaké normě.)

Definice 1.6 (Konvexní obal)

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu $\operatorname{conv} M = \bigcap \{C \supset M | C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 1.6

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak

$$\operatorname{conv} M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i | x_i \in M, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Důkaz
$\subseteq$: Stačí dokázat, že množina vpravo je konvexní. Přímočaré.

$\supseteq$: Stačí dokázat, že každý prvek vlevo je v konvexním obalu. Indukcí podle n, přímočaré. $\square$

Definice 1.7

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Poznámka (Fakt)
Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X, která obsahuje $U(x, r)$ respektive $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$ a $r \geq 0$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.

Důkaz
Jednoduchý. □

Definice 1.8

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako
$$\overline{\text{span}} M = \bigcap \{Y \supset M | Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$$
a uzavřený konvexní obal jako $\overline{\text{conv}} M = \bigcap \{C \supset M | C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Poznámka (Fakt)
Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.

Poznámka (Fakt)
Ať X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\text{span}} M = \overline{\text{span}\, M}$ a $\overline{\text{conv}} M = \overline{\text{conv}\, M}$.

Věta 1.7

Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\text{span}(Y \cup Z)$ *je uzavřený.*

Důkaz
Stačí dokázat pro $\dim Z = 1$ (pak indukcí). Ať $Z = \text{span}(e)$, $e \notin Y$. Ověřme, že $\text{span}(Y \cup \{e\}) = \{y + ke | k \in \mathbb{K}\}$ je uzavřený: Ať $x_n = y_n + t_n e \to x \in X$. Chceme $x \in \text{span}\, Y$.

1. krok: (t_n) je omezená. (Kdyby ne, pak má limitu ∞ a $||\frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} + e|| = \frac{1}{|t_{n_k}|} ||x_{n_k}|| \to 0$, tedy $\frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} \to -e \notin Y$, tedy Y není uzavřená. ↯)

Tedy existuje posloupnost (n_k), že $t_{n_k} \to t \in \mathbb{K}$. Pak ale $y_{n_k} = x_{n_k} - t_{n_k} e \to x - te \in Y$. Tedy $\exists z \in Y : x - te = z$, tj. $x = z + te \in \text{span}(Y \cup \{e\})$. □

Důsledek
Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený.

Definice 1.9 (Konvergence řady v normovaných lineárních prostorech)

Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim\limits_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada je konvergentní, pokud existuje takové x. Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < +\infty$.

Poznámka (Fakt)
Nechť X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní řada v X. Pak

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||.$$

Věta 1.8 (Test úplnosti)

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Ať X je Borelovský, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je AK řada. $s_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$. Chceme (s_n) je cauchy: Buď $\varepsilon > 0$. Ať $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\sum_{n=N}^{M} ||x_n|| < \varepsilon$, $n_0 \leq N < M$. Pak ale pro $n_0 \leq N < M$ je

$$||s_N - s_M|| = ||\sum_{n=N+1}^{M} x_n|| \leq \sum_{N+1}^{M} ||x_N|| < \varepsilon.$$

Tedy (s_n) je konvergentní.

$\Leftarrow$: Ať (x_n) je cauchyovská. Indukcí najdeme podposloupnost, že $||x_{n_k} - x_{n_{k+1}}|| < 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_1})$$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} (x_{n_k} - x_{n_1} + x_{n+1}) = \lim(x_{n_k} - x_{n_1}) + \lim x_{n_1} = z + x_{n_1}.$$

Celkem $\exists (n_k) \nearrow$, že $\lim(x_{n_k})$ existuje. Značme $x = lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Chceme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. V metrickém prostoru konverguje Cauchyovská posloupnost právě tehdy, pokud existuje její konvergentní podposloupnost. □

Definice 1.10 (Zobecněná řada)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou.

Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada ... konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \; \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supseteq F : ||x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| < \varepsilon.$$

Existuje-li $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada ... (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma} ||x_\gamma||$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní.

Definice 1.11 (Bolzanova-Cauchyova podmínka)

Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v normovaném lineárním prostoru splňuje BC podmínku, pokud

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma)\ \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset : \left\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\right\| < \varepsilon.$$

Věta 1.9 (Nutná podmínka konvergence)

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X. Pak je její součet určen jednoznačně a $(||x_\gamma||)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$.

Důkaz (Jednoznačnost)

Ať $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = x \neq y = \sum_{\gamma\in\Gamma} = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$. Pak $\forall\varepsilon > 0$:

$$\exists F_x \in \mathcal{F}(\Gamma)\ \forall F \supseteq F_x : ||x - \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma|| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists F_y \in \mathcal{F}(\Gamma)\ \forall F \supseteq F_y : ||x - \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\varepsilon = ||x-y|| \leq ||x - \sum_{F_x\cup F_y} x_\gamma|| + ||\sum_{F_x\cup F_y} x_\gamma - y|| < \varepsilon$. ↯ □

Důkaz (Limita)

Chceme $(||x_\gamma||) \in c_0(\Gamma)$: Ať $\varepsilon > 0$ libovolné. Najdeme

$$F \in \mathcal{F}(\Gamma)\ \forall F' \supset F : ||x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\gamma_0 \notin F$ máme

$$||x_{\gamma_0}|| = ||\sum_{\gamma\in F\cup\{\gamma_0\}} x_\gamma - x + x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma|| \leq ||\dots|| + ||\dots|| < \varepsilon.$$

Tedy $\{\gamma \in \Gamma | ||x_\gamma|| > \varepsilon\} \subseteq F \in \mathcal{F}(\Gamma) \implies (||x_\gamma||) \in c_0(\Gamma)$. (Je tam pouze konečný počet prvků větších než ε.) □

Věta 1.10

Nechť X je Banachův prostor.

1. *Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*
2. *Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.*
3. *Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda \subset \Gamma$, pak je i zobecněná řada*

$\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ *konvergentní.*

Důkaz (1.)
$\implies$: Ať $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ je konvergentní. Zvol $\varepsilon > 0$. Zvolíme

$$F \in \mathcal{F}(\Gamma)\ \forall F' \supseteq F : ||\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro $\tilde{F} \in \mathcal{F}(\Gamma)$, že $\tilde{F} \cap F = \emptyset$ máme:

$$||\sum_{\gamma\in\tilde{F}} x_\gamma|| = ||\sum_{\gamma\in F\cup\tilde{F}} x_\gamma - \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma|| \leq ||\ldots|| + ||\ldots|| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: Ať $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ splňuje B-C podmínku. Pak najdeme posloupnost $(F_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}(\Gamma)^\mathbb{N}$, že

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \wedge \forall F' \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F_n = \emptyset : ||\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| < \frac{1}{n}.$$

Označ $y_n = \sum_{\gamma\in F_n} x_\gamma$. 1. krok: (y_n) je cauchyovská. (Dokáže se snadno.) 2. krok: Tedy existuje $y \in X : \lim y_n = y$. Chceme $y = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$: Ať $\varepsilon > 0$.

$$\forall F' \supset F : ||y - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| \leq ||y_{n_0} - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| + ||y_{n_0} - y|| = \sum_{\gamma\in F'\setminus F_{n_0}} x_\gamma \leq \frac{1}{n_0} + ||y_{n_0} - y|| < \varepsilon.$$

□

Důkaz (2.)
Víme, že $\sum_{\gamma\in\Gamma} ||x_\gamma||$ je konvergentní. Dle tvrzení níže tedy

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} ||x_\gamma|| = S = \sup\left\{\sum_{\gamma\in\Gamma} |||x_\gamma|||F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\}.$$

Ověříme, že $\sum x_\gamma$ splní B-C podmínku: Ať $\varepsilon > 0$. Ať $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že $S - \varepsilon < \sum_{\gamma\in F} ||x_\gamma||$. Pak $\forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, že $F' \cap F = \emptyset$:

$$||\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma|| \leq \sum_{\gamma\in F'} ||x_\gamma|| = \sum_{\gamma\in F'\cup F} ||x_\gamma|| - \sum_{\gamma\in F} ||x_\gamma|| < \varepsilon.$$

□

Důkaz (3.)
Snadný důsledek 1., protože B-C podmínka se zjevně dědí na podmnožiny. □

Tvrzení 1.11

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ *je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když*

$\sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} a_\gamma : F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\} < +\infty$. *A navíc platí* $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} a_\gamma : F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\}$.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Ať $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$ konverguje. Pak zvolíme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ $\forall F' \supset F : || \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma - \sum_{\gamma \in F} a_\gamma|| < 1$. Pak $\forall H \in \mathcal{F}(\Gamma) : \sum_{\gamma \in H} a_\gamma \leq \sum_{\gamma \in H \cup F} a_\gamma \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma + 1$. Tedy $\sup \ldots \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} a_p + 1 < \infty$.

$\Leftarrow$: Ať $S := \sup \ldots < \infty$. Chceme $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = S$. Ať $\varepsilon > 0$. Ať $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$ (z definice suprema) taková, že $S - \varepsilon < \sum_{\gamma \in H} a_\gamma$. Pak pro $F' \supset H$ máme

$$|S - \sum_{\gamma \in F'} a_\gamma| = S - \sum_{\gamma \in F'} a_\gamma < S - \sum_{\gamma \in H} a_\gamma < \varepsilon.$$

Tedy $\sum a_\gamma = S$. □

Tvrzení 1.12

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Ať $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| =: S < \infty$. Pak

$$\sup_{F \in \mathbb{F}(\mathbb{N})} \sum_{n \in F} ||x_n|| \leq \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} ||x_n|| = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| = S < \infty,$$

neboť každá konečná množina v přirozených číslech má maximum (a odebráním kladných prvků sumu zmenšíme).

$\Leftarrow$: Ať $\sum_{n \in \mathbb{N}} ||x_n||$ je konvergentní, pak dle předchozího tvrzení

$$S := \sup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \sum_{n \in F} ||x_n|| < \infty.$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n \in [N]} ||x_n|| \leq S < \infty.$$

□

Věta 1.13

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v Banachově (pro normovaný lineární prostor je důkaz složitější) prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ *konverguje (říkáme* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje bezpodmínečně).*

2. $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ *konverguje pro každou permutaci* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ke stejnému součtu.*

3. $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ *konverguje pro každou permutaci* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Důkaz
1 $\implies$ 2: Ať $\varepsilon > 0$ a $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$. Ať $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňuje, že $\forall F' \supseteq F : ||\sum_{n\in F'} x_n - x|| < \varepsilon$, kde $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N} : F \subseteq \{\pi(1), \ldots, \pi(n_0)\}$. Pak $\forall n \geq n_0 : ||\sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)} - x|| < \varepsilon$. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = x$.

2 $\implies$ 3: okamžitě. 3 $\implies$ 1: Pro spor předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$, ale $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ nesplňuje B-C podmínku. Zvolme $\varepsilon > 0$ svědčící o tom, že B-C podmínka není splněna. Pak existuje $(F_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$, že $F_n \cap F_m = \emptyset\ \forall n \neq m$, $\max F_n < \min F_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ a $||\sum_{i\in F_n} x_i||$.

Zvolme $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$ splňující, že existuje $(n_k) \nearrow$ a $(p_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, že

$$\pi\left(\{n_k, n_k + 1, \ldots, n_k + p_k\}\right) = F_k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tedy $\forall k \in \mathbb{N} : ||\sum_{i=n_k}^{n_k+p_k} x_{\pi(i)}|| = ||\sum_{i\in F_k} x_i|| \geq \varepsilon$. To však znamená, že $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ nesplňuje B-C podmínku, tedy není konvergentní. ↯ □

Věta 1.14

Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.

Důkaz
Jasný z minulé věty. □

Navíc v $\mathbb{R}$ *platí ekvivalence.*

Věta 1.15

Pokud $\dim X = +\infty$, *pak* $\exists (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ *konverguje, ale* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *není konvergentní.*

2 Lineární operátory a funkcionály

Poznámka (Opakovali jsme)
Lineární zobrazení (viz lingebra), dále:

Věta 2.1

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *T je spojité.*
2. *T je spojité v jednom bodě.*
3. *T je spojité v 0.*
4. *$\exists C \geq 0$ tak, že $||T(x)|| \leq C||x|| \; \forall x \in X$.*
5. *T je Lipschitzovské.*
6. *T je stejnoměrně spojité.*
7. *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*
8. *$T(B_X)$ je omezená.*
9. *$T(U(0, \delta))$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.*

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou $||T|| = \sup_{x \in B_x} ||T(x)||$ je normovaný lineární prostor.

Lemma 2.2

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

- $||T(x)|| \leq ||T|| \cdot ||x||$ *pro každé* $x \in X$.
- $||T|| = \sup_{x \in S_X} ||T(x)|| = \sup_{x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}} \frac{||T(x)||}{||x||} = \sup_{x \in U_X} ||T(x)||$.
- $||T|| = \inf\{C \geq 0 \mid ||T(x)|| \leq C||x|| \; \forall x \in X\}$.

Důkaz
Pro $x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$ platí $||T(x)|| = ||T(\frac{x}{||x||})|| \cdot ||x|| \leq ||T|| \cdot ||x||$.

$S_X \subseteq B_X$, tedy $||T|| \geq \sup_{x \in S_X} ||T(x)||$. $\forall x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$:

$$\frac{||T(x)||}{||x||} = ||T(\frac{x}{||x||})|| \leq \sup_{y \in S_X} ||T(y)||,$$

tedy $\sup_{x \in S_X} ||T(x)|| \geq \sup_{x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}} \frac{||T(x)||}{||x||} =: S_3$. Pro $x \in U_X \setminus \{\mathbf{o}\}$ platí $||T(x)|| \leq \frac{||T(x)||}{||x||} \leq S_3$, tedy $\sup_{x \in U_x} ||T(x)|| \leq S_3$. Konečně, pro $x \in B_x$: $||T(x)|| \leftarrow ||T\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) x\right)|| \leq \sup_{x \in U_X} =: S_4$, tedy $||T_x|| = \lim_{n \to \infty} ||T\left(1 - \frac{1}{n}\right) x|| \leq S_4 \implies \sup_{x \in B(x)} ||T(x)|| \leq S_4$.

Dle prvního bodu máme nerovnost „$\geq$“. Pro „$\leq$“ zvolme $\varepsilon > 0$ ... ať $\tilde{c} > 0$ je takové, že $\tilde{c} < \inf\{\ldots\} + \varepsilon$. Pak $||T|| = \sup_{x \in B_x} \frac{||T_x||}{||x||} \leq \inf\{\ldots\}$. □

Definice 2.1

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X.

Poznámka (Fakt)
Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ je posloupnost operátorů konvergující k $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \to T(x)$ v prostoru Y.

Důkaz (Ze skript)

$$||T_n(x) - T(x)|| = ||(T_n - T)(x)|| \leq ||T_n - T|| \cdot ||x|| \to 0.$$

□

Poznámka (Fakt)
Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $||T \circ S|| \leq ||T|| \cdot ||S||$.

Důkaz
Jednoduchý. □

Věta 2.3

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.

Důkaz (Ze skript)
Mějme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{T_n\}$ v $\mathcal{L}(X,Y)$. Pro libovolné pevné $x \in X$ platí

$$||T_n(x) - T_m(x)|| = ||(T_n - T_m)(x)|| \cdot ||x|| \qquad \forall m,n \in \mathbb{N}.$$

Tedy posloupnost $\{T_n(x)\}$ je cauchyovská v Y a protože Y je úplný, existuje limita $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$, kterou označíme $T(x)$. Nyní stačí dokázat, že je T lineární. Linearita plyne ze spojitosti součtu a násobení.

Navíc pro $x \in B_X$ platí

$$||T(x)|| = \lim_{n\to\infty} ||T_n(x)|| \leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||\right) ||x|| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||.$$

Jelikož $\{T_n\}$ je cauchyovská, tak je zřejmě i $\{||T_n||\}$ cauchyovská, tudíž omezená, tedy $||T(x)||$ je konečné, tedy $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Nakonec je potřeba dokázat $T_n \to T$ v $\mathcal{L}(X,Y)$. Pro $\varepsilon > 0$ zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $||T_n - T_m|| \leq \varepsilon$ pro každé $n, m \geq n_0$. Pak pro $x \in B_X$ a pevné $n \geq n_0$ máme

$$||T_n(x) - T(x)|| = \lim_{m\to\infty} ||T_n(x) - T_m(x)|| \leq$$

$$\leq \sup_{m\geq n_0} ||T_n(x) - T_m(x)|| \leq \sup_{m\geq n_0} ||T_n - T_m|| \cdot ||x|| \leq \varepsilon.$$

Tedy $||T_n - T|| \leq \varepsilon$ pro libovolné $n \geq n_0$. Proto $T_n \to T$. □

Věta 2.4

Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.

Důkaz
Speciální případ předchozí věty. □

Definice 2.2 (Izomorfismus, izomorfismus do, izometrie, izometrie do, izomorfní a izometrické prostory, izomorfně vnořený a izometricky vnořený prostor)

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- izometrie X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $||T(x) - T(y)|| = ||x - y||$ pro všechna $x, y \in X$;

- izometrie X do Y (nebo jen izometrie do), pokud $||T(x) - T(y)|| = ||x - y||$ pro všechna $x, y \in X$.

Dále říkáme, že prostory X a Y jsou izomorfní respektive izometrické, pokud existuje lineární izomorfismus resp. izometrie X na Y.

O prostoru X řekneme, že je izomorfně resp. izometricky vnořen do Y, pokud existuje lineární izomorfismus respektive izometrie X do Y.

Poznámka
Lineární zobrazení T je izometrie do, právě tehdy, když $\forall z : ||Tz|| = ||z||$.

Tvrzení 2.5

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

1. *$T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1||x|| \leq ||T(x)|| \leq C_2||x||$ pro každé $x \in X$.*
2. *Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, pak je i Y Banachův.*
3. *Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do, pak* $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený v Y.*

Důkaz (Ze skript)
1. $\implies$ Máme $||T(x)|| \leq ||T|| \cdot ||x||$ pro každé $x \in X$. Dále $T^{-1} : \operatorname{Rng} T \to X$ je spojité, platí tedy pro každé $y \in \operatorname{Rng} T$ nerovnost $||T^{-1}(y)|| \leq ||T^{-1}|| \cdot ||y||$. Tudíž $||x|| = ||T^{-1}(T(x))|| \leq ||T^{-1}||T(x)||$ pro každé $x \in X$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $X \neq \{\mathbf{o}\}$ a tedy $||T^{-1}|| > 0$. Požadovaná nerovnost tak platí s konstantami $C_1 = \frac{1}{||T^{-1}||}$ a $C_2 = ||T||$.

$\Leftarrow$ Splňují-li kladné konstanty C_1, C_2 požadované nerovnosti, je T spojité a prosté: Je-li $T(x) = 0$, pak $||x|| \leq \frac{1}{C_1}||T(x)|| = 0$, tedy $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Existuje tedy inverzní operátor $T^{-1} : \operatorname{Rng} T \to X$, který je lineární. Pro libovolné $y \in \operatorname{Rng} T$ máme $||T^{-1}(y)|| \leq \frac{1}{C_1}||T(T^{-1}(y))|| = \frac{1}{C_1}||y||$. Tedy T^{-1} je navíc spojité.

2. Vezmeme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{y_n\}$ v Y. Díky odhadu $||T^{-1}(y_n) - T^{-1}(y_m)|| \leq ||T^{-1}|| \cdot ||y_n - y_m||$ pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ je cauchyovská i posloupnost $\{T^{-1}(y_n)\}$. Vzhledem k tomu, že X je úplný, konverguje $\{T^{-1}(y_n)\}$ k nějakému $x \in X$. Pak ovšem ze spojitosti operátoru T plyne $y_n = T(T^{-1}y_n) \to T(x)$, tedy i $\{y_n\}$ je konvergentní. Proto je Y úplný.

3. Podle 2. je $\operatorname{Rng} T$ Banachův prostor. Tedy je uzavřený v Y dle tvrzení výše. $\square$

Poznámka (Fakt)
Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do. Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.

Věta 2.6

Nechť X, $\hat{X}$ a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v $\hat{X}$ a Y je úplný. Nechť dále $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\hat{T} \in \mathcal{L}(\hat{X}, Y)$ rozšiřující T, tj. $\hat{T}|_X = T$. Navíc platí $||\hat{T}|| = ||T||$.

Důkaz
Jednoduchý. □

3 Konečně rozměrné prostory

Lemma 3.1 (O skoro kolmici)

Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

Důkaz (Ze skript)
Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolme $u \in X \setminus Y$ a označme $d = \operatorname{dist}(u, Y)$. Protože Y je uzavřený, je $d > 0$ a můžeme nalézt $\eta > 0$ tak, aby $\frac{d}{d+\eta} > 1 - \varepsilon$. Dále existuje $v \in Y$ takové, že $||u-v|| \leq d+\eta$. Položme $x = \frac{u-v}{||u-v||}$. Pak $x \in S_X$. Je-li $y \in Y$ libovolné, je $v+||u-v||y \in Y$, a tedy

$$||x - y|| = \left|\left| \frac{u - v}{||u - v||} - y \right|\right| = \frac{||u - (v + ||u - v||y)||}{||u - v||} \geq \frac{d}{d + \eta}.$$

Dostáváme tak, že $\operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y} ||x - y|| \geq \frac{d}{d+\eta} > 1 - \varepsilon$. □

Věta 3.2

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\dim X < \infty$.
2. *Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, || \cdot ||_2)$.*
3. *B_X je kompaktní.*
4. *Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojité.*
5. *Každá lineární forma na X je spojitá.*
6. *Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.*

Důkaz (Ze skript)
1. $\implies$ 2.: Nechť $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je nějaká báze X. Definujeme zobrazení $T : \mathbb{K}^n \to X$ předpisem $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Snadno je vidět, že T je lineární zobrazení a díky vlastnostem báze je to bijekce. Protože „projekce" $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ jsou spojité, ze spojitosti vektorových operací plyne spojitost T.

Ukažme nyní i spojitost inverze T^{-1}. Množina $S = S_{(\mathbb{K}^n, ||\cdot||_2)}$ je kompaktní, neboť je uzavřená a omezená. Protože T je spojitý, je množina $T(S)$ také kompaktní. Norma $||\cdot||_X$ je spojitá na X, a tedy nabývá na $T(S)$ minima $C > 0$ ($T(S)$ neobsahuje 0 díky prostotě T). Pro libovolné $y \in X \setminus \{0\}$ je $\frac{T^{-1}(y)}{||T^{-1}(y)||_2} \in S$, takže $C \leq \left|\left|T\left(\frac{T^{-1}(y)}{||T^{-1}(y)||_2}\right)\right|\right|_X = \frac{||y||_X}{||T^{-1}(y)||_2}$, odkud $||T^{-1}(y)||_2 \leq \frac{1}{C}||y||_X$.

2. $\implies$ 3.: Je-li $T : \mathbb{K}^n \to X$ izomorfismus, je $T^{-1}(B_X)$ uzavřená omezená podmnožina $(\mathbb{K}^n, ||\cdot||_2)$, takže je kompaktní. Tedy i $B_X = T(T^{-1}(B_X))$ je kompaktní.

3. $\implies$ 1.: Nechť X je nekonečné dimenze. Indukcí najdeme posloupnost prvků $\{x_n\}$ v S_X tak, že $\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}) \geq \frac{1}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$: x_1 zvolíme libovolně, následně $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ je vždy uzavřený a vlastní (neboť je konečně dimenzionální), tedy podle lemmatu o skoro kolmici najdeme x_{n+1} splňující $\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}) > \frac{1}{2}$. Tedy B_X není kompaktní.

1. $\implies$ 6.: Nechť $||\cdot||_1$ a $||\cdot||_2$ jsou normy na X. Zafixujeme nějakou bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostoru X. Označme eukleidovskou normu na $\mathbb{K}^n$ jako $||\cdot||_e$. Nechť $T_1 : (X, ||\cdot||_1) \to (\mathbb{K}^n, ||\cdot||_e)$ a $T_2 : (X, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{K}^n, ||\cdot||_e)$ jsou izomorfismy z důkazu 1. $\implies$ 2. Pak $T_2^{-1} \circ T_1 = \mathrm{id}_X$ a tedy $\mathrm{id}_X : (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$ je izomorfismus, tj. normy $||\cdot||_1$ a $||\cdot||_2$ jsou ekvivalentní.

6. $\implies$ 5.: Předpokládejme, že $(X, ||\cdot||)$ existuje nespojitá lineární forma f. Pro každé $x \in X$ položíme $||x||_0 = ||x|| + |f(x)|$. Snadno je vidět, že $||\cdot||_0$ je norma na X, která je ovšem neomezená na $B_{(X, ||\cdot||)}$. Tedy normy $||\cdot||$ a $||\cdot||_0$ nejsou ekvivalentní.

5. $\implies$ 1.: Není-li X konečněrozměrný, má nekonečnou algebraickou bázi $\{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že všechny vektory e_γ mají normu 1. Vybereme nekonečnou spočetnou množinu $\{\gamma_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$ a položme $f(e_{\gamma_n}) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f(e_\gamma) = 0$ pro $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_n | n \in \mathbb{N}\}$. Pak f lze jednoznačně rozšířit na lineární formu na X, která ovšem není omezená na B_X.

1. $\implies$ 4.: Nechť Y je nějaký normovaný lineární prostor a $T : (X, ||\cdot||) \to Y$ je lineární zobrazení. Zvolme bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostoru X a uvažujme normu $||x||_1 = ||\sum_{i=1}^n x_i e_i||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Díky tvrzení 4. stačí dokázat, že $T : (X, ||\cdot||_1) \to Y$ je spojité. To je ale zřejmé z odhadu

$$||T(x)|| = \left|\left|\sum_{i=1}^n x_i T(e_i)\right|\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot ||T(e_i)|| \leq \max\{||T(e_1)||, \ldots, ||T(e_n)||\} \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

4. $\implies$ 5.: Je triviální. $\square$

4 Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Definice 4.1

Nechť $(X, ||\cdot||_X)$ a $(Y, ||\cdot||_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, ||\cdot||_p)$, kde norma $||\cdot||_p$ je daná vzorcem

$$||(x,y)||_p = \begin{cases} (||x||_X^p + ||y||_Y^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{||x||_X, ||y||_Y\}, & \text{pro } p = \infty. \end{cases}$$

Poznámka (Kvocient)
Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y jeho podprostor. Definujeme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y$.

Pro $x \in X$ pak definujeme $[x]$ jako třídu ekvivalence obsahující x.

Na množině $X/Y = \{[x] | x \in X\}$ definujeme operace $[x] + [y] = [x+y]$ a $\alpha[x] = [\alpha x]$.

Definice 4.2 (Kvocient)

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme faktoprostorem prostoru X podle Y nebo též kvocientem X podle Y. Dále definujeme tzv. kanonecké kvocientové zobrazení $q : X \to X/Y$ předpisem $q(x) = [x]$.

Definice 4.3 (Norma na kvocientu)

Buď X normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, ||\cdot||_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$||[x]||_{X/Y} = \inf_{y \in [x]} ||y|| = \inf_{y \in Y} ||x+y|| = \inf_{y \in Y} ||x-y|| = \operatorname{dist}(x+Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y).$$

Tato norma se nazývá kanonická kvocientová norma.

Důkaz (Je to norma)
Triviální. □

Tvrzení 4.1

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q : X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_x) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $||q|| = 1$.

Důkaz
Zřejmý. □

Věta 4.2

Nechť X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.

Důkaz

Přes test úplnosti (X je Banachův, právě když každá abs. konvergentní řada je konvergentní). Ať $\{[x]_n | n \in \mathbb{N}\}$ splňuje $\sum_{n=1}^{\infty} [x]_n < \infty$. Chceme $\sum_n [x]_n$ konverguje. Ať $\{y_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y$ jsou takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n + y_n|| < \infty$. Pak $\sum (x_n + y_n)$ je konvergentní (podle testu úplnosti) a je prvkem X, tedy $q\left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} q(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} [x_n]$. Tudíž $\sum_{n=1}^{\infty} [x_n]$ je v prostoru $q(X) = X/Y$ konverguje. □

Poznámka (Zajímavosti)

l_∞ / c_0 je docela zajímavý prostor (Rosemider? + Brech? 2012: Je nerozhodnutelné, zda l_∞ / c_0 je izometricky univerzální Banachův prostor hustoty $|\mathbb{R}|$. Dokonce je nerozhodnutelné, zda takový prostor existuje.) ($l_\infty / c_0 \equiv \mathcal{C}(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$)

Definice 4.4 (Direktní součet)

Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je direktním (též algebraickým) součtem A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{\mathbf{o}\}$ a $X = A + B = \operatorname{span}\{A \cup B\}$.

Definice 4.5 (Projekce)

Nechť X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P : X \to X$ se nazývá (lineární) projekce, pokud $P^2 := P \circ P = P$.

Tvrzení 4.3 (Fakt)

Nechť X je vektorový prostor.

- *Je-li $P : X \to X$ lineární projekce, pak $P \restriction_{\operatorname{Rng} P} = \operatorname{id}_{\operatorname{Rng} P}$.*
- *Je-li Y podprostor X a $P : X \to Y$ lineární zobrazení splňující $P \restriction_Y = \operatorname{id}_Y$, pak P je projekce X na Y.*

Důkaz

Triviální. □

Tvrzení 4.4

Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A a P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = \operatorname{id}_X$, $\operatorname{Rng} P_A = A$, $\ker P_A = B$, $\operatorname{Rng} P_B = B$ a $\operatorname{Ker} P_B = A$.

Důkaz
Jednoduchý. $\square$

Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X, pak $X = A \oplus B$, kde $A = \operatorname{Rng} P$, $B = \operatorname{Ker} P$ a $P = P_A$.

Důkaz
Jednoduchý. $\square$

Věta 4.5

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.

- *Prostor Y má algebraický doplněk v X.*
- *Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y, speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.*

Důkaz
Díky Zornovu lemmatu existuje algebraická báze $B \subset Y$ prostoru Y. Stejně tak existuje $B' \supset B$ báze X. Potom $Z = \operatorname{span}(B' \setminus B)$ je algebraický doplněk Y v X, neboli $X = Y \oplus X$.

Ať $X = Y \oplus A$. Pak chceme $q \restriction_A \colon A \to X/Y$ je lineární izomorfismus: Víme q je lineární, q je prosté (ať $x \in A, q(x) = 0$, pak $x \in Y$, tedy $x \in A \cap Y = \{\mathbf{o}\}$, takže $x = \mathbf{o}$) a q je na (Ať $x = y + a \in X$, pak $q(x) = q(a)$, tedy $q(x) \in q|_A(A)$). $\square$

Definice 4.6 (Kodimenze)

Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak kodimenzí (značíme $\operatorname{codim} Y$) Y rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

Definice 4.7

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_t B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_t B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

Věta 4.6

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když zobrazení $T : X \to Y \oplus_1 Z$, $T(x) = (P_Y(x), P_Z(x))$ je izomorfismus.

Důkaz
$\implies$: $\forall x \in X$: $||T(x)|| = ||P_Y x|| + ||P_Z x|| \leq 2\max(||P_Y||, ||P_Z||)||x|| \leq ||(P_Y + P_Z)x|| =$ $||x||$. Tedy T je izomorfismus.

$\Leftarrow$: $\forall x \in X$: $||P_y x|| \leq ||P_y x|| + ||P_z x|| = ||Tx|| \leq ||T|| \cdot ||x||$, tedy $||P_y|| \leq ||T||$. □

Věta 4.7

Nechť X je Banachův prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když Y a Z jsou uzavřené.

Důkaz
Zatím bez důkazu. □

Věta 4.8

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Pak

- *Y je isomorfní komplementovanému podprostoru X, právě když existují lineární operátory $S : X \to Y$ a $T : Y \to X$ splňující $S \circ T = \mathrm{id}_Y$.*
- *Y je isometrické 1-komplementovanému podprostoru X, právě když existují lineární operátory $S : X \to Y$ a $T : Y \to X$ splňující $S \circ T = \mathrm{id}_Y$ a $\max\{||S||, ||T||\} \leq 1$.*

Důkaz
$\Leftarrow$: Polož $p := T \circ S : X \to X$. Pak p je zřejmě lineární a $||p|| \leq ||T|| \cdot ||S||$, navíc $p^2 = (T \circ S) \circ (T \circ S) = p$, tedy p je projekce. Zároveň $p(X) = T(S(X))$, jelikož $S \circ T$ je identita, tak S je na a $p(X) = T(Y) = \operatorname{Rng} T$. Zbývá si uvědomit, že T je izomorfismus (izometrie, pokud $||S||, ||T|| \leq 1$): Máme

$$\forall x \in X : ||Sx|| = ||STSx|| \leq ||S|| \cdot ||TSx||,$$

tedy (protože S je na):

$$\forall y \in Y : ||y|| \frac{1}{||S||} \leq ||Ty||,$$

tudíž T je izomorfismus.

$\implies$: Ať $P : X \to X$ je projekce, $L : P(X) \to Y$ izomorfismus na. Položíme $S := L \circ P$, $T := L^{-1}$, pak $S \circ T = L \circ P \circ L^{-1} = L \circ L^{-1} = \mathrm{id}$. □

Poznámka (Zajímavosti pro všechny (nezkouší se))
Ví se ($\dim X = +\infty$, X Banach)

- X lze komplementovaně vnořit do l_p $\implies$ $X \cong l_p$, $p \in [1, \infty]$.

- X lze komplementovaně vnořit do $c_0 \implies X \cong l_0$.
- Existuje nespočetně neizomorfních podprostorů L_p, $p \in (1, \infty)$.

Neví se:

- X lze komplementovaně vnořit do $L_1 \implies X \in \{l_1, L_1\}$.
- X lze komplementovaně vnořit do $\mathcal{C}([0,1]) \implies X \cong \mathcal{C}(k?)$.

Ví se:

- $X \cong l_2 \Leftrightarrow (\forall Z, \dim Z = +\infty, ZBanach, Z \hookrightarrow l_2 \implies Z \cong l_2)$.

Neví se, zda platí izometrická varianta předchozího.

5 Hilbertovy prostory

Lemma 5.1

$A^\perp$ je uzavřený podprostor.

Důkaz
Pro $y \in X$ ať $f_y(x) =< x, y >$. Pak f_y je lineární a spojité (z Cauchy-Swartze). $A^\perp = \bigcap_{y \in A} f_y^{-1}(0)$. □

Definice 5.1

Prostor se skalárním součinem $(X, < \cdot, \cdot >)$ se nazývá Hilbertův prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, ||\cdot||)$ je Banachův prostor, kde $||x|| = \sqrt{< x, x >}$.

Například
- l_2 ... $< x, y > := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.
- $L_2([0,1])$ ... $< f, g > := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$.

Tvrzení 5.2

Nechť $(X, < \cdot, \cdot >)$ je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak funkce $< \cdot, \cdot >: X \times X \to \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).

Důkaz
Přímočarý s použitím Cauchy-Swartze. $\square$

Tvrzení 5.3 (Polarizační vzorec)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$< x, y >= \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$$

v reálném případě, resp.

$$< x, y >= \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2)$$

v komplexním.

Důkaz (Reálný případ, v $\mathbb{C}$ analogicky)

$$4 < x, y >= 2 < x, y > -2 < x, -y >= ||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2 - ||x-y||^2 + ||x||^2 + ||-y||^2 =$$
$$= ||x+y||^2 - ||x-y||^2.$$

$\square$

Důsledek
Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T : X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $< T(x), T(y) >=< x, y >$ pro každé $x, y \in X$.

Důkaz
Izometrie zachovává pravé strany v polarizačním vzorci. $\square$

Věta 5.4

$(X, ||\cdot||)$ je NLP. Pak $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro nějaký skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle \Leftrightarrow$ platí:

$$\forall x, y \in X : ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

Důkaz (Reálný případ, komplexní analogicky)
$\Longrightarrow$ z Polarizačního vzorce. Pro $\Leftarrow$ položme $\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right)$, $x,y\in X$. Následně ověříme podmínky (kromě linearity (speciálně aditivity) je ověření triviální). Aditivita: Chceme

$$LS = \forall x,y,z \in X : \langle x+y,z\rangle + \langle x-y,z\rangle = 2\langle x,z\rangle = PS.$$

$$LS = \frac{1}{4}\left(\underline{||x+y+z||^2} - ||x+y-z||^2 + \underline{||x-y+z||^2} - ||x-y-z||^2\right) \overset{\text{z předpokladu}}{=}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\underline{2\left(||x+z||^2 + ||y||^2\right)} - 2\left(||x-y||^2 + ||y||^2\right)\right) = \frac{1}{2}\left(||x+z||^2 - ||x-z||^2\right) = PS.$$

Tuto rovnost aplikujeme na $x = y$: $\langle 2x,z\rangle = 2\langle x,z\rangle$, a na $\tilde{x} = \frac{1}{2}(x+y)$, $\tilde{y} = \frac{1}{2}(x-y)$:

$$\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle = 2\left\langle \frac{1}{2}(x+y), z\right\rangle = \langle x+y,z\rangle .$$

□

Věta 5.5 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x\in H$ existuje právě jedno $y\in C$ tak, že $||x-y|| = \operatorname{dist}(x,C)$.

Důkaz
Zvolme $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v C, že $\lim_{n\to\infty} ||y_n - x|| = d(x,C)$. Chceme, že $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Tedy, protože C je uzavřená, existuje $y\in C : y_n \to y$. Pak ale $d(x,c) = ||x-y||$.

Zbývá jednoznačnost: Ať $y,z\in C$ taková, že $||x-y|| = ||x-z|| = \operatorname{dist}(x,C)$. Pak $||y-z||^2 \le 0$, tedy $y = z$. □

Věta 5.6 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y jeho podprostor a $x\in X$. Pak $y\in Y$ splňuje $||x-y|| = \operatorname{dist}(x,Y)$ právě tehdy, když $x-y\in Y^{\perp}$.

Důkaz
Jednoduchý. □

Věta 5.7 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak $H = Y \oplus_t Y^{\perp}$ a projekce $P_Y : H \to Y$ příslušná rozkladu $H = Y \oplus Y^{\perp}$ má následující vlastnosti:

- $||P_Y(x) - x|| = \operatorname{dist}(x,Y) \le ||x||$ *pro každé* $x\in H$,

- $||P_Y|| \leq 1$.

Důkaz
$Y \cap Y^\perp = \{\mathbf{o}\}$: Ať $x \in Y \cap Y^\perp$. Pak $\langle x, x\rangle = 0 \implies x = 0$.

$H = Y + Y^\perp$: Zvol $x \in H$. Dle vět výše existuje právě jedno $y \in Y : x - y \in Y^\perp$. Pak $x = y + x - y \in Y + Y^\perp$.

Tedy, $H = Y \oplus Y^\perp$, a zároveň z důkazu víme, že

$$P_Y(x) = \text{„jediný prvek } y \in Y\text{, že } x - y \in Y^\perp\text{“} = \text{„j. p. } y \in Y\text{, že } ||x - y|| = d(x, Y)\text{“.}$$

Tedy $||P_Y(x) - x|| = d(x, y) \leq ||x||$. Zbývá $||P_Y|| \leq 1$: Z Pythagorovy věty je:

$$||P_Y x||^2 = ||x||^2 - ||x - P_Y x||^2 \leq ||x||^2.$$

□

Věta 5.8

Nechť H je Hilbertův prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ je podposloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.

Důkaz
$\implies$ už víme. $\Leftarrow$: Víme $\sum_{n=1}^\infty x_n$ splňuje B-C podmínku. Tedy pro $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall m > n \geq n_0 : ||\sum_{k=n+1}^{m} x_k|| < \varepsilon.$$

Polož $F = \{1, \ldots, n_0\}$. Zvol $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) : F' \cap F = \emptyset$. Pak

$$||\sum_{k \in F'} x_k||^2 \overset{\text{Pyt. věta}}{=} \sum_{k \in F'} ||x_k||^2 \leq \sum_{k \in \min F'}^{\max F'} ||x_k||^2 = ||\sum_{\ldots}^{\ldots} x_k||^2 < \varepsilon.$$

□

Definice 5.2 (Ortogonální, ortonormální, maximální ortonormální, úplný ortonormální, ortonormální báze)

Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortogonální, pokud $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$.
- ortonormální, pokud A je ortogonální a $A \subset S_X$.
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A.

- úplný ortonormální, pokud A je ortonormální a $\overline{\text{span}}A = X$.
- ortonormální báze, pokud $A = \{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Tvrzení 5.9 (Fakt)

Je-li A ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak $||x - y|| = \sqrt{2}$ pro každé dva prvky $x, y \in A$, $x \neq y$.

Důkaz

$$||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

□

Poznámka
Tedy, pokud X je separabilní se skalárním součinem $\implies$ každý ON-systém je spočetný.

Věta 5.10

Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.

Důkaz
$\mathcal{P} = \{A \subset X | A \text{ je ON-systém}\}$ s uspořádáním inkluzí. Zvol $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$ lineárně uspořádané, pak $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{P}$ je horní závora $\mathcal{O} \implies$ (z Zornova lemmatu) $\exists A \in \mathcal{P}$ maximální. To je hledaný maximální ON-systém. □

Věta 5.11 (Besselova nerovnost)

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} | \langle x, e_\gamma \rangle |^2 \leq ||x||^2$$

pro každé $x \in X$.

Důkaz
Ať $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $x_F := \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$. Pak $||x||^2 = ||x - x_F||^2 + ||x_F||^2$ podle Pythagorovy věty ($x - x_F \perp x_F$: $\forall i \in F : \langle x - x_F, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x_F, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle \langle x, e_i \rangle e_i, e_i \rangle = 0$). Tj. $||x||^2 \geq ||x_F||^2 = \sum_{\gamma \in F} | \langle x, e_\gamma \rangle |^2$. Tedy máme omezení pro všechny konečné součty, tudíž celý součet bude omezen stejně (celý součet je supremum z konečných podle tvrzení někde výše). □

Věta 5.12

Nechť H je Hilbertův prostor a $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je ortonormální systém v H. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $||x||^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé* $x \in H$ *(tzv. Parsevalova rovnost).*

2. $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé* $x \in H$.

3. $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*

4. $H = \overline{\text{span}}\,\{e_\gamma|\gamma \in \Gamma\}$.

5. $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Důkaz
1 $\implies$ 2: Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolíme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$: $||x||^2 - \varepsilon < \sum_{\gamma\in F} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$. Zvolíme $F' \supset F$, $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$. Pak

$$||x - \sum_{\gamma\in F'} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma||^2 \overset{\text{cos + Pythagorova věta}}{=} ||x||^2 + \sum_{\gamma\in F'} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 - 2\Re\left\langle x, \sum_{\gamma\in F'\langle x,e_\gamma\rangle e_\gamma}\right\rangle =$$

$$= \ldots + \ldots - 2\Re \sum_{\gamma\in F'} \overline{\langle x, e_\gamma\rangle} \langle x, e_\gamma\rangle = ||x||^2 - \sum_{\gamma\in F'} |\langle x, e_\gamma\rangle| < \varepsilon.$$

2 $\implies$ 3: Triviální. 3 $\implies$ 4: Triviální. 4 $\implies$ 1: Nechť $x \in H$ a $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, že existuje $\sum_{\gamma\in F} a_\gamma e_\gamma$ splňující $||x - \sum_{\gamma\in F} a_\gamma e_\gamma|| < \varepsilon$. Položme $y := \text{span}(e_\gamma, \gamma \in F)$, pak $d(x, y) \leq ||x - \sum_{\gamma\in F} a_\gamma e_\gamma|| < \varepsilon$. (Jelikož $d(x, y) = ||x - \sum_{\gamma\in F} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma||$, neboť z lemmatu někde výše stačí ověřit $y \perp x - \sum_{\gamma\in F} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$, tj. stačí $\forall i \in F : \left\langle x - \sum_{\gamma\in F} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma, e_i\right\rangle = 0$, což je jednoduché.)

Tedy $||x|| \leq \varepsilon + ||\sum_{\gamma\in F\langle x,e_\gamma\rangle e_\gamma}||$ (z Besselovy nerovnosti víme, že suma konverguje a navíc víme, že v 1 platí $\geq$, tj. stačí dokázat $\leq$)

$$||x||^2 \leq \left(\varepsilon + ||\sum_{\gamma\in F\langle x,e_\gamma\rangle e_\gamma}||\right)^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon||x|| + \sum_{\gamma\in F} ||\langle x, e_\gamma\rangle e\gamma|| \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon||x|| + \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2.$$

2 $\implies$ 5: Ať $x \in \{e_\gamma|\gamma \in \Gamma\}^\perp$ (chceme, že $x = 0$). Z 2. víme, že $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma = \sum 0 = 0$.

5 $\implies$ 4: Ať $Y = \overline{\text{span}}(e_\gamma, \gamma \in \Gamma)$. Pak $H = Y \oplus_t Y^\perp$ (zde se používá úplnost jako předpoklad věty, ze které toto plyne). $H = Y \oplus_t \{e_\gamma|\gamma \in \Gamma\}^\perp \overset{5}{=} Y \oplus_t \{\mathbf{o}\}$. $\square$

Poznámka
Bez úplnosti jsou ekvivalentní 1, 2, 3 a 4 a vyplývá z nich 5.

Věta 5.13 (Ernst Sigismund Fisher (1907), Frigyes Riesz (1907))

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *ortonormální báze Hilbertova prostoru* H*, je zobrazení* $T : H \to l_2(\Gamma)$, $T(x) =$

$\{\langle x, e_\gamma \rangle\}_{\gamma \in \Gamma}$ *izometrie* H *a* $l_2(\Gamma)$. *Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický* $l_2(\Gamma)$ *pro vhodnou množinu* Γ.

Důkaz (Ze skript)
Zjevně T je lineární. Z Parsevalovy rovnosti plyne, že $||x||^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_y \rangle|^2$ pro každé $x \in H$, a tedy T je izometrie do $l_2(\Gamma)$. $\{T(e_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ je množina kanonických bázových vektorů v $l_2(\Gamma)$. Díky linearitě tedy $\operatorname{Rng} T$ obsahuje všechny vektory v $l_2(\Gamma)$, které mají jen konečně mnoho nenulových souřadnic. Tyto vektory tvoří hustou podmnožinu v $l_2(\Gamma)$. Podle tvrzení ze začátku předměty je Rng uzavřený, tudíž je roven celému $l_2(\Gamma)$. □

Věta 5.14 (Vyjádření ortogonální projekce)

Nechť H *je Hilbertův prostor a* Y *jeho uzavřený podprostor. Nechť* $(e_j)_{j\in J}$ *je nějaká ortonormální báze prostoru* Y. *Pak projekci na* Y *podél* $Y^\perp$ *(tzv. ortogonální projekci) lze vyjádřit vzorcem*

$$Px = \sum_{j\in J} \langle x, e_j \rangle e_j, \qquad x \in H.$$

Důkaz
Dle vět a lemmatu F. Riesze $P_Y x = \sum_{j\in J} \langle x, e_j \rangle e_j \Leftrightarrow x - \sum_{j\in J} \langle x, e_j \rangle e_j \in Y^\perp$. Tedy stačí

$$\forall x \in H\ \forall j_0 \in J : \left\langle x - \sum_{j\in J} \langle x, e_j \rangle e_j, e_{j_0} \right\rangle = 0 :$$

$$\forall x \in H\ \forall j_0 \in J : \left\langle x - \sum_{j\in J} \langle x, e_j \rangle, e_j | e_{j_0} \right\rangle = \langle x, e_{j_0} \rangle - \sum_{j\in J} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_{j_0} \rangle =$$

$$= \langle x, e_{j_0} \rangle - \langle x, e_{j_0} \rangle = 0.$$

□

Věta 5.15 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))

Nechť H *je Hilbertův prostor. Pro každé* $y \in H$ *označme* $f_y \in H^*$ *funkcionál definovaný jako* $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ *pro* $x \in H$. *Pak zobrazení* $l : H \to H^*$, $l(y) = f_y$ *je sdruženě lineární* $(I(\alpha y) = \overline{\alpha} I(y))$ *izometrie* H *na* H^*.

Důkaz
$\forall y \in H$ máme: f_y je lineární, $\forall x \in H$: $f_y(x) \leq ||x|| \cdot ||y||$, tedy f_y je spojité a $||f_y|| \leq ||y||$, $f_y\left(\frac{y}{||y||}\right) = \left\langle \frac{y}{||y||}, y \right\rangle = ||y|| \implies ||f_y|| = ||y||, y \in H. \implies I$ je izometrie, sdruženě lineární. Zbývá „na“. To se dokáže z následujícího lemmatu:

Zvol $f \in H^*$, pak $H = \operatorname{Ker} f \oplus (\operatorname{Ker} f)^\perp$. Tedy existuje $z \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$ splňující $H = \operatorname{Ker} f \oplus_t \operatorname{span}\{z\}$. Položme $y := f(z)z$. Pak $I(y) = f$, jelikož:

$$\forall x \in H : I(y)(x) = \langle x, y\rangle = \langle x_{\operatorname{Ker} f} + \alpha_x z, y\rangle = \langle \alpha_x z, y\rangle = \alpha_x \left\langle z, \overline{f(z)} z \right\rangle = f(\alpha_x z) = f(x).$$

□

Lemma 5.16

Nechť X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Pak $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Tedy $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$.

Důkaz
$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{span}\{x\} = \{\mathbf{o}\}$: Ať $\alpha \in \mathbb{K}$, pak pokud $\alpha x \in \operatorname{Ker} f$, pak $\alpha f(x) = f(\alpha x) = 0$, tedy $\alpha = \mathbf{o}$.

Ať $y \in X$. Pak $y = \left(y - \frac{f(y)}{f(x)} x\right) + \frac{f(y)}{f(x)} x$. □

Definice 5.3

Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Symbolem X_R označme prostor X uvažovaný jako reálný. Tj. X_R je tatáž množina jako X uvažovaná s operací sčítání jako v X, s násobením reálným číslem jako v X a stejně definovanou normou.

Věta 5.17 (Reálná verze komplexního normovaného lineárního prostoru)

Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Pak platí

1. *X_R je reálný normovaný lineární prostor. (Zřejmé.)*
2. *X_R je úplný, právě když X je úplný. (Norma je pořád tatáž.)*
3. *$\varphi : X \to \mathbb{C}$ je lineární, právě když $\Re\varphi : X_R \to \mathbb{R}$ je lineární a $\Im\varphi(x) = -\Re\varphi(ix)$ pro každé $x \in X$. (Z definice linearity.)*
4. *Je-li $\varphi \in X^*$, pak funkcionál $\psi(x) = \Re\varphi(x)$, $x \in X_R$, patří do $(X_R)^*$ a platí $||\psi|| = ||\varphi||$. (Z předchozího bodu.)*
5. *Je-li $\psi \in (X_R)^*$, pak existuje právě jeden funkcionál $\varphi \in X^*$ takový, že $\psi(x) = \Re\varphi(x)$ pro $x \in X_R$. Je dán vzorcem $\varphi(x) = \psi(x) - i\psi(ix)$ a splňuje $||\psi|| = ||\varphi||$. (4., 5.)*
6. *Prostory $(X_R)^*$ a $(X^*)_R$ jsou izometrické. (Vyplývá z 5.)*

Definice 5.4

Nechť X je reálný normovaný lineární prostor. Na $X \times X$ definujeme:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \in X,$$

$$(\alpha_1 + i\alpha_2) \cdot (x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1), \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in X,$$

$$||(x_1, x_2)||_{X_C} = \sup \left\{ ||(\cos\alpha)x_1 + (\sin\alpha)x_2||_X \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\}, \qquad x_1, x_2 \in X.$$

Symbolem $(X_C, ||\cdot||)$ značíme komplexní normovaný lineární prostor $(X \times X, +, \cdot, ||\cdot||_{X_C})$.

Věta 5.18 (Komplexifikace)

Je-li X reálný normovaný lineární prostor, pak je $(X_C, ||\cdot||)$ komplexní normovaný lineární prostor. Je-li navíc X Banachův, pak je X_C Banachův.

Důkaz

Linearitu nebudeme dokazovat (definice je zvolena tak, aby to vycházelo, lehké cvičení). Norma je taktéž jednoduchá, nejtěžší je dokázat, že lze vytýkat konstanty.

X_C je Banachův plyne z toho, že $X \oplus_\infty X$ je Banach a norma $||\cdot||_{X_C}$ je ekvivalentní (konstanty 1 a 2) maximové normě, která je v definici součinu metrických prostorů a součin úplných metrických prostorů je úplný. $\square$

Definice 5.5 (Sublineární funkcionál, pseudonorma)

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p : X \to \mathbb{R}$ se nazývá sublineární funkcionál, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p : X \to [0, +\infty)$ se nazývá pseudonorma, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Věta 5.19 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))

Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor.

- *Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F|_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

- *Je-li p pseudonorma na X a t je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F|_Y = f$ a $|F(x)| \leq p(x)$, $x \in X$.*

Důkaz (1. bod)
1. krok: rozšíříme f o jednu dimenzi, tj. na $Z = Y \oplus \operatorname{span}(x)$, kde $x \notin Y$. Položme $F(y + tx) := f(y) + t\alpha$, $y \in Y$, $t \in \mathbb{R}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je vhodně zvolená: Linearita f vyplývá z definice, tedy stačí $f(y) + t\alpha \leq p(y + t)$, $y \in Y$, $t \in R \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall t > 0 : \alpha \leq \frac{1}{t}(p(y + tx) - f(y)) \wedge \forall t < 0 : \alpha \geq \frac{1}{t}(p(y + tx) - f(y)), y \in Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall t > 0 : \alpha \leq p(\frac{y}{t} + x) - f(\frac{y}{t}) \wedge \forall t < 0 : \alpha \geq f(\frac{-y}{t}) - p(\frac{-y}{t} - x), y \in Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in Y : \alpha \in [f(y) - p(y - x), p(y + x) - f(y)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall y, z \in Y : f(y) - p(y - x) \leq p(z + x) - f(z),$$

tedy máme $f(y) + f(z) = f(y + z) \leq p(y + z) \leq p(y - x) + p(z + x)$. Tedy α můžeme volit libovolně z intervalu $[\sup_y f(y) - p(y - x), \inf_y p(y + x) - f(y)]$.

2. krok: přidáme všechny dimenze (transfinitní) indukcí. (Tato věta je dokonce ekvivalentní axiomu výběru, takže předpokládáme, že axiom výběru platí.) $\square$

Důkaz (2. bod)
1. krok: Pro $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ aplikujeme první bod: Víme, že existuje $F : X \to \mathbb{R}$ lineární, že $F|_Y = f$. Pak ale $F(x) \leq p(x)$, $x \in X \wedge - F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x), x \in X \implies |F(x)| \leq p(x), x \in X$.

2. krok: Pro $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Polož $g = \Re f$. Pak podle 1. části $\exists G : X_R \to \mathbb{R}$ lineární, že $G|_Y = g \wedge |G(x)| \leq p(x), x \in X$. Pak máme $f(x) = g(x) - ig(ix)$, $x \in X$ a položíme $F(x) := G(x) - iG(ix)$, $x \in X$. Pak $f|_Y = f$, F je lineární a pro $x \in X$ máme:

Zvolme $|\lambda| = 1$, $\lambda \in \mathbb{C} : |F(x)| = \lambda F(x)$, pak $|F(x)| = F(\lambda x) = G(\lambda x) - iG(i\lambda x) = G(\lambda x) \leq P(\lambda x) \leq p(x)$. $\square$

Věta 5.20 (Hahnova-Banachova)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F|_Y = f$ a $||F|| = ||f||$.

Důkaz
Aplikujeme předchozí větu na $p(x) := ||f|| \cdot ||x||, x \in X$. Pak $|f(x)| \leq ||f|| \cdot ||x|| = p(x)$, $x \in Y \implies \exists F : X \to \mathbb{K}$ lineární, $F|_y = f$, $|F| \leq p$. Pak $|F(x)| \leq p(x) = ||f|| \cdot ||x||$, $x \in X$, tedy $||F|| \leq ||f||$ (opačná nerovnost triviální). $\square$

Důsledek
Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = ||x||$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).

Důkaz
Zvol $x \in X$. BÚNO $x \neq \mathbf{o}$. Polož $Y = \operatorname{span}(x)$, $g : Y \to \mathbb{K}$ definujeme předpisem $g(tx) := t||x||, \forall t \in \mathbb{K}$. Pak g je zřejmě lineární a $||g|| = 1$, protože

$$|g(tx)| = |t| \cdot ||x|| = ||tx||, \forall t \in \mathbb{K}.$$

Podle H-B $\exists f \in X^* : f|_Y = g$, $||f|| = ||y|| = 1$. Pak $f(x) = ||x||$.

Ad „speciálně“: Zvol x a y. Najdi $f \in S_{X^*} : f(x-y) = ||x-y||$, pak $f(x) \neq f(y)$, protože $||x-y|| \neq 0$. $\square$

Důsledek
Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $||x|| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.

Důkaz
Triviální. $\square$

Důsledek (Oddělování bodu a podprosotru)
Nechť X je normovnaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f|_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.

Důkaz
Zvolme $Z := Y \oplus \operatorname{span}(x) \subset X$. $f(y + \alpha x) := \alpha \operatorname{dist}(x, Y)$, $y \in Y$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f : Z \to \mathbb{K}$ je lineární. $||f|| = 1$: $|f(y + \alpha x)| = |\alpha| \operatorname{dist}(x, Y) \leq |\alpha| \cdot ||x + \frac{y}{\alpha}|| = ||\alpha x + y||$, $y \in Y$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Zvolme $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ v Y, že $d(x, Y) = \lim_{n\to\infty} ||x - y_n||$. Pak $\frac{|f(y_n+x)|}{||y_n+x||} = \frac{d(x,Y)}{||y_n+x||} \to 1$.

Nyní z H-B věty rozšíříme na celé Y: $\exists F \in X^* : F|_z = f \wedge ||F|| = 1$. $\square$

Věta 5.21 (Oddělování konvexních množin)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $A, B \subset X$ jsou disjuktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení

- *Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\Re f(x) < \inf_B \Re f$ pro každé $x \in A$.*
- *Je-li A otevřená a B kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_A \Re f < \inf_B \Re f$.*

Poznámka
Ekvivalentní H-B větě.

Důkaz
BÚNO X je nad $\mathbb{R}$. BÚNO $A \neq \emptyset \neq B$. První bod: Zvolíme $a \in A$, $b \in B$. Polož $w = b - a$ a $C = w + A - B$. Pak $w \notin C$, $\mathbf{o} \in C$, C je konvexní (A i B jsou konvexní, takže i jejich posunutý rozdíl je konvexní) a otevřená (A je otevřená, posunutý rozdíl otevřené a libovolné je otevřená). Položme $p_c(x) := \inf\{t > 0 | x \in tC\}$ (lehce se ověří, že p_c, tzv. Minkowského funkcionál, je sublineární). $p_c(x) < +\infty$ (protože C obsahuje nulu a z otevřenosti i kouli kolem ní a každé x se vejde do dostatečně nafouklé koule). $p_c \leq 1$ na C a $p_c(w) \geq 1$.

Položme $Y := \operatorname{span}(w)$, $g(\alpha w) := \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ (pak $g \leq p_c$). Z H-B tedy plyne:

$$\exists G : X \to \mathbb{R} \text{ lineární }, G|_Y = g, G \leq p_c.$$

Pak $G \in X^*$ protože $G \leq p_c \leq 1$ na C, ale to obsahuje kouli, takže je G omezené na nějaké kouli $\implies$ je spojité.

Konečně $\forall x \in A\ \forall y \in B : G(x) = G(y) + G(x - y + w) - G(w) \leq G(y) + 1 - 1 = G(y)$. Rovnost nemůže nastat, protože A je otevřené. $\square$

Důsledek (H-B věty)
X je NLP, $Y \subset X$ podprostor. Buď $\dim Y < \infty$ nebo $\operatorname{codim} Y < \infty$. Pak $Y \overset{C}{\hookrightarrow} X$. (Tj. $\exists P : X \to Y$ spojitý, že $P|_Y = \mathrm{id}_Y$.)

Důkaz
$\dim Y < \infty$: Ať $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze Y, $\{f_1, \dots, f_n\}$ je duální báze Y. Pak $f_1, \dots, f_n : Y \to \mathbb{K}$ jsou spojité (Y má konečnou dimenzi). Z H-B $\exists F_1, \dots, F_n : X \to \mathbb{K}$ spojité, $||F_i|| = ||f_i||$, $F_i \supset f_i$. Definujme $P : X \to Y$ předpisem $P(x) := \sum_{i=1}^n F_i(x) e_i \in Y$. P je lineární,

$$||Px|| \leq \sum_{i=1}^n ||F_i(x)|| \cdot ||e_i|| \leq \sum_{i=1}^n ||F_i|| \cdot ||x|| \cdot ||e_i|| \leq \left(n \cdot \max_{i \in [n]} ||F_i|| \cdot ||e_i||\right) \cdot ||x||.$$

P je tedy spojité. Zbývá ověřit $P_y = \mathrm{id}_n$. $\forall y \in Y$:

$$P(y) = P(\sum_{i=1}^n f_i(y) e_i) = \sum_{i=1}^n f_i(Y) P(e_i) = \sum_{i=1}^n f_i(y) \sum_{j=1}^n F_j(e_i) e_j = \sum_{i=1}^n f_i(y) e_i = y.$$

$\operatorname{codim} Y < \infty$: ($\operatorname{codim} Y = \dim(X/Y)$) ať $\{q(e_1), \dots, q(e_n)\}$ je báze X/Y ($q : x \mapsto [x]$) a $\{f_1, \dots, f_n\}$ duální funkcionály. Ty jsou spojité. Polož $F_i = f_i \circ q$ ($i \in [n]$), což je složení dvou spojitých funkcionálů, tedy spojitý funkcionál. Definujeme $P : X \to \operatorname{span}(e_1, \dots, e_n)$, $P(x) := \sum_{i=1}^n F_i(x) e_i$, $x \in X$. „P je lineární" je jasné, stejně tak spojitost P (podobně jako v první části).

$P|_{\operatorname{span}(e_1, \dots, e_n)} = \mathrm{id}$:

$$\forall i \in [n] : P(e_i) = \sum_{j=1}^n F_j(e_i) e_j = \sum_{j=1}^n f_j(q(e_j)) e_j = e_i.$$

Tedy P je spojitá lineární projekce a navíc $\operatorname{Ker} P = Y$: $Px = 0 \Leftrightarrow F_i(x) = 0 \forall\ i \in [n]$ $\Leftrightarrow f_i(q(x)) = 0, \Leftrightarrow q(x) = 0$. Máme $X = \operatorname{Rng} P \oplus_t \operatorname{Ker} P$. Položíme $Q = \mathrm{id} - P$, pak $\operatorname{Rng} Q = \operatorname{Ker} P = Y$, Q spojitá projekce. □

Definice 5.6

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(x, Y)$. Operátor $T^* : Y^* \to X^*$ definovaný předpisem $T^* f(x) = f(Tx)$ pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá duální (nebo též adjungovaný) operátor k T.

Operátor $(T^*)^*$ značíme T^{**}.

Věta 5.22

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.

1. *Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $||T^*|| = ||T||$.*
2. *Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.*
3. *$T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $\mathrm{id}_X^* = \mathrm{id}_{X^*}$.*

Důkaz
1. Spojitost T^*f je zřejmá z definice (složení dvou lineárních funkcí), stejně tak linearita T. Dále

$$\forall y^* \in B_{Y^*} : ||T^*y^*|| = \sup_{x \in B_X} |T^*y^*(x)| = \sup_{x \in B_X} |y^*(Tx)| \leq \sup_{x \in B_X} ||Tx|| = ||T||,$$

tedy $||T^*|| \leq ||T||$ a T je spojité. Zbývá $||T|| \leq ||T^*||$. (Dokazujeme opačnou nerovnost k té výše.) Zvolme $x \in B_X$. Najdi (z jednoho z důsledků H-B) $y^* \in S_{Y^*}$. $||T_x|| = |y^*(Tx)|$. Pak

$$||Tx|| = |y^*(Tx)| = |T^*y^*(x)| \leq ||T^*|| \cdot ||y^*|| \cdot ||x|| \leq ||T^*||.$$

Tj. $||T|| \leq ||T^*||$.

2. Linearita zobrazení plyne z předpisu a izometrie pak plyne z prvního bodu.

3. $\forall z^* \in Z^*$ $\forall x \in X$:

$$\left((S \circ T)^* z^*\right)(x) = z^*(S(T(x))) = S^*z^*(Tx) = \left(T^*S^*z^*\right)(x).$$

A to platí pro všechna x a z^*, tedy funkcionály na ně aplikované musí být tytéž. Identita je triviální z definice. $\square$

Věta 5.23

Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^\star \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takový, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \left\langle x, T^\star y \right\rangle_{H_1}.$$

Dále platí, že $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$, kde $I_j : H_j \to H_j^*$, $j = 1, 2$ jsou příslušné sdružené lineární izometrie z věty výše (89 ve skriptech). ($I_i : y \mapsto \langle \cdot, y \rangle \in H_1^*$.)

Důkaz
Zvol $x \in H_1$, $y \in H_2$. Uvažuj $g \in (H_1)^*$ definované předpisem $\langle Tx, y \rangle_{H_1}$. Dle věty 89 ve skriptech, $\exists! z \in H_1 : g(x) = \langle x, z \rangle$, $x \in H_1$. Tedy rovnost z věty platí $\Leftrightarrow T^\star y = z$. Celkem $\exists! T^\star : H_2 \to H_1$, pro které platí rovnost ze znění.

Zbývá: $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$ (pak operátor $T^\star$ je lineární a spojitý). Stačí jen, že $I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$ splňuje rovnost ze zadání, protože existuje právě jeden takový operátor. Z definice I_i a přelévání písmenek (definice sdruženého operátoru) tedy:

$$\forall x \in H_1 \ \forall y \in H_2 : \left\langle x, \left(I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2\right)(y) \right\rangle_{H_1} =$$

$$\left(I_1\left(I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2\right)\right)(x) = \left(T^* \circ I_2\right)(x) = (I_2 y)(Tx) = \langle Tx, y \rangle.$$

$\square$

Definice 5.7 (Hilbertovsky adjungovaný operátor)

Operátor $T^\bigstar$ z předcházející věty nazýváme hilbertovsky adjungovaným operátorem k T.

Věta 5.24

Nechť H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory.

1. *Je-li $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, je $T^{\bigstar\bigstar} = (T^\bigstar)^\bigstar = T$.*
2. *Zobrazení $T \mapsto T^\bigstar$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.*
3. *Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ a $S \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$. Pak $(S \circ T)^\bigstar = T^\bigstar \circ S^\bigstar$. Dále $(\mathrm{id}_{H_1})^\bigstar = \mathrm{id}_{H_1}$.*

Důkaz

1. Máme

$$\forall x \in H_1\ \forall y \in H_2 : \left\langle T^{\bigstar\bigstar} x, y \right\rangle_{H_2} = \left\langle x, T^\bigstar y \right\rangle_{H_1} = \langle Tx, y \rangle_{H_2}.$$

Tedy pro každé x, y jsou tyto operátory stejné, tedy $T^{\bigstar\bigstar} = T$.

2. Sdružená linearita: Zachování „+“ plyne ze vzorce, „zachování“ „·“:

$$\forall x, y\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \left\langle x, T^\bigstar \alpha y \right\rangle = \langle Tx, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle Tx, y \rangle = \overline{\alpha} \left\langle x, T^\bigstar y \right\rangle$$

.

Izometrie plyne z toho, že $T^\bigstar$ je složení izometrií. To že je na plyne z 1.

$$3. \forall x, y : \left\langle x, (S \circ T)^\bigstar y \right\rangle = \langle S(Tx), y \rangle - \left\langle Tx, S^\bigstar y \right\rangle = \left\langle x, T^\bigstar S^\bigstar y \right\rangle.$$

□

Definice 5.8 (Sdružený exponent)

Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme sdruženým exponentem k p, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Věta 5.25 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)

Nechť $I \neq \emptyset$.

1. *Prostor $c_0(I)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $l_1(I)$ pomocí zobrazení $I : l_1(I) \to c_0(I)^*$, $I(y) = f_y$, kde*
$$f_y(x) = \sum_{i \in I} x_i y_i.$$
2. *Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $l_p(I)^*$ je lineárně izometrický*

s prostorem $l_q(I)$ pomocí zobrazení $I : l_q(I) \to l_p(I)^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

3. *Je-li (Ω, S, μ) libovolný prostor s mírou $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I : L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde*

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega f \cdot g d\mu.$$

4. *Je-li (Ω, S, μ) prostor se σ-konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I : L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde*

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega f \cdot g d\mu.$$

Důkaz (1.)
$||I|| \leq 1$:

$$\forall y \in l_1(I)\ \forall x \in c_0(I)\ \forall F \in \mathcal{F}(I) : |\sum_{i \in F} y_i x_i| \leq \sum_{i \in F} |y_i x_i| \leq ||x||_\infty \cdot \sum_{i \in F} |y_i| \leq ||x||_\infty \cdot ||y||_1$$

$$\implies |I(y)(x)| \leq ||x||_\infty \cdot ||y||_1,$$

takže opravdu $I(y) \in c_0(I)^*$ a navíc $||I(y)|| \leq ||y||_1$, tedy I je lineární, dobře definované, $||I|| \leq 1$.

Izometrie: Zvol $y \in l_1(I)$, zvol $F \in \mathcal{F}(I)$. Polož $x_F := \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|}{y(i)} e_i \in B_{c_0(I)}$. Pak

$$||I(y)|| \geq |I(y)(x_F)| = |\sum_{i \in F, y(i) \neq 0} y(i) \cdot \frac{|y(i)|}{y(i)}| = \sum_{i \in F} |y(i)|.$$

Tedy, protože $||y||_1 = \sup_{F \in \mathcal{F}(I)} \sum_{i \in F} y(i)$, dostáváme $||I(y)|| \geq ||y||$.

Zbývá už jen „na“: Zvol $f \in c_0(I)^*$. Polož $y(i) := f(e_i)$, $i \in I$. Pak $y \in l_1(I)$: Zvol $F \in \mathcal{F}(I)$. Pak

$$\sum_{i \in F} |y(i)| = \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} y(i) \cdot \frac{|y(i)|}{y(i)} = \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} f(e_i) \cdot \frac{|y(i)|}{y(i)} = f\left(\sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|}{y(i)} \cdot e_i\right) \leq ||f||.$$

Tudíž $y \in l_1(I)$ (a $||y||_1 \leq ||f||$).

Chceme $I(y) = f$: Máme $\forall i \in I : I(y)(e_i) = y(i) = f(e_i)$. Tedy $I(y) = f$ na e_i, takže z linearity a spojitosti na $\overline{\operatorname{span}}(e_i, i \in I) = c_0(I)$. $\square$

Důkaz (2.)
Případ $p = 1$: $||I|| \leq 1$ se dokáže jako v důkazu 1:

$$\forall y \in l_\infty(I)\ \forall x \in l_1(I)\ \forall F \in \mathcal{F}(I) : \sum_{i \in F} |y_i x_i| \leq ||y||_\infty \cdot ||x||_1.$$

I izometrie: Ať $y \in l_\infty(I)$, pak

$$\forall i \in I : ||I(y)|| \geq |I(y)(e_i)| = |y(i)| \implies ||I(y)|| \geq \sup_i |y(i)| = ||y||_\infty.$$

I je na: Ať $f \in l_1(I)^*$. Polož $y(i) := f(e_i)$, $i \in I$. Pak $y \in l_\infty(I)$:

$$\forall i \in I : |y(i)| = |f(e_i)| \leq ||f|| \implies ||y||_\infty \leq ||f||.$$

$I(y) = f$ je totožné jako v důkazu 1.

2. Případ $p > 1$: $||I|| \leq 1$ se dokáže podobně jen se použije Hölder:

$$\forall y \in l_q(I)\ \forall x \in l_p(I)\ \forall F \in \mathcal{F}(I) : \sum_{i \in F} |y_i x_i| \leq ||y||_q \cdot ||x||_p.$$

I izometrie: Ať $y \in l_q(I)$. Polož $x_F = \frac{\sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|}{y(i)} e_i}{||---||---||_p} \in S_{l_p(I)}$ (BÚNO $\exists i \in F : y(i) \neq 0$).

$$x_F = \left(\sum |y(i)|^{p(q-1)}\right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|^q}{y(i)} e_i$$

a zároveň

$$||I(y)|| \geq I(y)(x_F) = \left(\sum |y(i)|^{p(q-1)}\right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \sum_{i \in F} |y(i)|^q = ||y(i)||_q.$$

I je na: Ať $f \in l_p(I)^*$. Polož $y(i) := f(e_i)$, $i \in I$. Pak $y \in l_q(I)$: Zvol $F \in \mathcal{F}(I)$. Pak polož $x_F = \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|^q}{y(i)} e_i$.

$$\sum_{i \in F} |y(i)|^q = \sum_{i \in F} f(e_i) x_F(i) = f(\sum_{i \in F} x_F(i) \cdot e_i) \leq ||f|| \cdot ||x_F||_p = ||f|| \left(\sum_{i \in F} |y(i)|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

. Celkem

$$\inf_{F \in \mathcal{F}(i)} \left(\sum_{i \in F} |y(i)|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq ||f||,$$

tedy $y \in l_q(I)$ a $||y||_q \leq ||f||$. $\square$

Důkaz (3, 4)
1. krok μ konečná: I je spojitý, lineární a $||I|| \leq 1$: $p = 1$:

$$|I(f)(g)| \leq \int_\Omega |fg| d\mu \leq ||f||_\infty \int_\Omega |g| d\mu = ||f||_\infty \cdot ||g||_1.$$

Tedy I je dobře definované, lineární a $||I|| \leq 1$. $p > 1$:

$$|I(f)(g)| \leq \int_\Omega |fg| d\mu \leq ||f||_q \cdot ||g||_p.$$

Tedy I je dobře definované, lineární a $||I|| \leq 1$.

I je izometrie: $p > 1$: Ať $f \in L_q(\Omega)$, BÚNO $f \neq 0$. Zvol

$$g(x) := \frac{\frac{|f(x)|^q}{f(x)} \chi_{\{x | f(x) \neq 0\}}}{|| - - || - - ||} \in S_{L_p(\mu)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^{p(q-1)} dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{|f(x)|^q}{f(x)} \chi_{\{x|f(x) \neq 0\}},$$

$$||f|| \geq ||I(f)|| \geq I(f)(g) = \left(\int_\Omega |f(x)|^q d\mu(x) \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \int_\Omega |f(x)|^q d\mu(x) = ||f||_q.$$

Tedy $||I(f)|| = ||f||$ a I je izometrie.

$p = 1$: Ať $f \in L_\infty(r)$, BÚNO $f \neq 0$. Zvol $||f||_\infty > \varepsilon > 0$ je libovolné, ať

$$A = \{x | f(x) > ||f||_\infty - \varepsilon\}.$$

Pak $\mu(A) > 0$. Ať $\mu(A) < \infty$ (v případě σ-konečné míry můžeme A aproximovat). Polož $g(x) := \frac{|f(x)|}{f(x)} \frac{\chi_A}{\mu(A)} \in B_{L_{1,\mu}}$. Pak

$$||f|| \geq ||I(f)|| \geq I(f)(g) = \int_\Omega |f(x)| \chi_A(x) \cdot \frac{1}{\mu(A)} d\mu(x) > \frac{||f||_\infty - \varepsilon}{\mu(A)} \int_A 1 d\mu(x) = ||f||_\infty - \varepsilon.$$

I je na: Ať $x^* \in (L_p)^*$. Položme $\nu(A) := x^*(\chi_A)$, $A \in \mathcal{A}$. Pak ν je $\mathbb{K}$-hodnotová míra: $\nu(\emptyset) = x^*(0) = 0$. Ať $(A_j)_{j=1}^\infty$ posloupnost množin z $\mathcal{A}$, po 2 disjunktní. Pak

$$||\chi_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j} - \chi_{\bigcup_{j=1}^n A_j}||_p = \mu \left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j \right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Tedy

$$\nu(\bigcup_{j=1}^\infty A_j) = x^*(\chi_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j}) = \lim_{n \to \infty} x^*(\chi_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j}) = \lim_{n \to \infty} x^*(\chi_{A_1}) + \ldots + x^*(\chi_{A_n}) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n \nu(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i).$$

$\square$

Důkaz (Pokračování 3, 4)
Zároveň $\nu << \mu$:

$$\mu(A) = 0 \implies \chi_A = 0 \text{ skoro všude } \implies x^*(\chi_A) = 0.$$

Tedy z R-M věty $\exists g \in L_1(\mu)$: $\nu(A) = \int_A g d\mu$, $A \in \mathcal{A}$. Pak $x^*(s) = \int_\Omega g \cdot s d\mu$, pro s jednoduchou funkci. Tedy pro $f \in (L_p(\mu))$ najdu $s_k \to f$, $|s_k| \leq 4f$, s_k jednoduché. Pak ale $s_k \overset{L_p}{\to} f$ (z Lebesgueovy věty, jelikož $5f$ je integrovatelná majoranta). Tedy

$$x^*(f) = \lim_k x^*(s_k) = \lim_k \int_\Omega g \cdot s_k d\mu = \int_\Omega g \cdot f d\mu.$$

Poslední věc, co zbývá je $g \in L_q(\mu)$: $p = 1$: Chceme $|g(x)| \leq ||x^*||$ skoro všude. Pokud ne, pak $A = \{x||g(x)| > ||x^*||\}$ má kladnou míru. Ať $A_+ = \{x|g(x) > ||x^*||\}$ má kladnou míru. Pak

$$||x^*||\mu(A_+) \leq |\int_{A_+} g d\mu| = |x^*(\chi_{A_+})| \leq ||x^*||\mu(A_+).\lightning.$$

Podobně pro $A_- := \{x|g(x) < -||x^*||\}$. $p > 1$ vynecháme.

Další kroky byly vynechány. □

Věta 5.26

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Nechť q je sdružený exponent k p. Pak zobrazení $I : X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ dané předpisem

$$I(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie $X^* \oplus_q Y^*$ na $(X \oplus_p Y)^*$.

Důkaz
$I(f,g)$ lineární pro $(f,g) \in X^* \oplus_q Y^*$ lehké. Zvol $(f,g) \in X^* \oplus_q Y^*$. Pak

$$||I(f,g)|| = \sup_{(x,y)\in B_{X\oplus_p Y}} |f(x)+g(y)| \leq \sup_{(x,y)\in B_{X\oplus_p Y}} (||f||\cdot||x|| + ||g||\cdot||y||) =$$

$$= \sup_{(\alpha,\beta)\in B_{(\mathbb{K}^2,||\cdot||_p)}} \tilde{I}(||f||,||g||)(\alpha,\beta) = ||\tilde{I}(||f||,||g||)|| = ||(||f||,||g||)||_q = \sqrt[q]{||f||^q + ||g||^q} =$$

$$= ||(f,g)||_{X^*\oplus_q Y^*}.$$

Tedy $||I|| \leq 1$.

I je izometrie: Ať $(f,g) \in X^* \oplus_q Y^*$, BÚNO $(f,g) \neq 0$. Zvol $\varepsilon > 0$ libovolné. Ať $\eta > 0$ je „dost malé“: Zvolme

$$x \in B_x : |f(x)| > ||f|| - \eta, |\alpha| = 1, |f(x)| = \alpha f(x),$$

$$y \in B_y : |f(y)| > ||f|| - \eta, |\beta| = 1, |f(x)| = \beta f(y).$$

Položme

$$u = \frac{(||f||^{q-1}\alpha x, ||g||^{q-1}\beta y)}{(||f||^q + ||g||^q)^{\frac{1}{p}}} = \frac{\dots}{C}.$$

$$||u|| = \left(\frac{1}{C}||f||^{p(q-1)}||\alpha x||^p + ||g||^{p(q-1)||\beta y||^p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{C}(||f||^q + ||g||^q)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

tedy $u \in B_{\dots}$. Pak ale

$$||I(f,g)|| \geq I(f,g)(u) = \frac{1}{c}(||f||^{q-1}f(\alpha x) + ||g||^{q-1}g(\beta y)) \geq$$

$$\geq \frac{1}{C}(||f||^{q-1}(||f|| - \eta) + ||g||^{q-1}(||g|| - \eta)) \to \frac{1}{C}\cdot(||f||^q + ||g||^q) = ||(f,g)||.$$

I je na: Ať $\varphi \in (X \oplus_p Y)^*$. Polož $f(x) := \varphi(x,0)$, $x \in X$ a $g(x) := \varphi(0,y)$, $y \in Y$. Pak $f \in X^*$, $g \in Y^*$ a $I(f,g) = \varphi$. □

Definice 5.9

Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Věta 5.27 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$)

Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f d\mu$ pro každé $f \in C(K)$.

Důkaz
Bez důkazu. □

Věta 5.28 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$)

Je-li K kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I : M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu)_k = \varphi_k$, kde

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f d\mu.$$

Důkaz
Bez důkazu. □

6 Anihilátory, dualita kvocientů a podprostorů

Definice 6.1 (Horní a dolní anihilátor)

Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. anihilátor množiny A jako

$$A^\perp = \{f \in X^* | f(x) = 0 \ \forall x \in A\}.$$

Poznámka
Vlastně je to zobecnění kolmého prostoru (v Hilbertových prostorech je to „totéž“).

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. zpětný anihilátor jako

$$B_\perp = \{x \in X | f(x) = 0 \ \forall f \in B\}.$$

Lemma 6.1

Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak

- *$A^\perp$ je uzavřený podprostor X^*,*
- *$B_\perp$ je uzavřený podprostor,*
- *$(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}} A$,*
- *$(B_\perp)^\perp \supset \overline{\operatorname{span}} B$.*

Důkaz
První dva body triviální cvičení. Další dva body jsou lehké. □

Věta 6.2

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.

1. *Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I : Y^\perp \to (X/Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f)(\hat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^\perp$ na $(X/Y)^*$.

2. *Zobrazení $I : X^*/Y^\perp \to Y^*$ dané předpisem*

$$I(\hat{f}) = f|_Y$$

je lineární izometrie $X^*/Y^\perp$ na Y^*.

Důkaz
1. a) $I(f)$ je dobře definované: Ať $\hat{x} = \hat{y}$, pak $x - y \in Y$ a $f \in Y^\perp$ (tj. $f(x-y) = 0$), tedy $f(x) = f(y)$.

b) Zároveň $||I(f)|| = \sup_{\hat{x}U_{X/Y}} |I(f)(\hat{x})| = \sup_{x \in U_x} |I(f)(\hat{x})| = \sup_{x \in U_x} |f(x)| = ||f||$, tedy I je spojité a izometrie (linearita je triviální).

c) Ať $\varphi \in (X/Y)^*$. Pak $\varphi \circ q \in X^*$ a $I(\varphi \circ q) = \varphi \wedge \varphi \circ q \in Y^\perp$: $\forall y \in Y : \varphi(q(y)) = \varphi(\hat{0}) = 0$. Tedy $\varphi \circ q \in Y^\perp$. $\forall \hat{x} \in X/Y : I(\varphi \circ q)(\hat{x}) = (\varphi \circ q)(x) = \varphi(\hat{x})$, tedy $I(\varphi \circ q) = \varphi$.

2. a) $I(\hat{f})$ je dobře definované: Ať $\hat{f} = \hat{g}$, pak $f - g \in Y^\perp$, tedy $f|_Y = g|_Y$.

b) I zřejmě lineární. Zároveň $||I(\hat{f})|| = \sup_{y \in B_y} ||f(y)|| = ||f|_Y|| \leq \inf_{h \in \hat{f}} ||h|| = ||\hat{f}||$.

c) I je izometrie: Ať $\hat{f} \in X^*/Y^\perp$. Zvol $g \in X^* : g|_Y = f|_Y \wedge ||g|| = ||f|_Y||$ z H-B věty. Pak $\hat{g} = \hat{f}$ a $||I(\hat{f})|| = ||I(\hat{g})|| = ||g|_Y|| = ||g|| \geq \inf_{h \in \hat{f}} ||h|| = ||f_|Y||$.

d) I je na: Ať $\varphi \in Y^*$. Z H-B věty existuje $f \in X^* : f|_Y = \varphi$. Pak $I(\hat{f}) = f|_Y = \varphi$. □

Věta 6.3

Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak platí

1. $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,
2. $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$,
3. $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,

4. T^* je prostý, právě když $\operatorname{Rng} T$ je hustý.

Důkaz
1. $y^* \in \operatorname{Ker} T^* \Leftrightarrow T^* y^* = 0 \Leftrightarrow y^* \circ T = 0 \Leftrightarrow y^*|_{\operatorname{Rng} T} = 0$.

2. $x \in \operatorname{Ker} T \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \forall y^* \in Y^* : y^*(Tx) = 0 \Leftrightarrow \forall y^* \in Y^* : T^* y^*(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$.

3. $\overline{\operatorname{Rng} T} = ((\operatorname{Rng} T)^\perp)_\perp = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$.

4. T^* prostý $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} T = \{\mathbf{o}\}$, ale $\{\mathbf{o}\} \perp = Y$, tedy dle 3. $\overline{\operatorname{Rng} R} = Y$. Naopak sporem: Ať $\exists x \in Y / \overline{\operatorname{Rng} T}$. Potom dle H-B věty $\exists f \in Y^* : f(x) \neq 0 \wedge f|_{\operatorname{Rng} T} = 0$. Pak ale

$$T^* f(x_0) = f(Tx_0) = 0, \forall x_0 \in X \implies T^* f = 0 \implies f \in \operatorname{Ker} T^*. \lightning.$$

□

Definice 6.2 (Druhý duál, evaluační funkcionál)

Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^*. Tento prostor nazýváme druhým duálem.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$. Zobrazení $\varepsilon : X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá kanonické vnoření X do X^{**}.

Tvrzení 6.4

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon : X \to X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy navíc X Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**}.

Důkaz
Linearita zřejmá. Izometrie

$$||\varepsilon_x|| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\varepsilon_x(x^*)| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| = ||x||.$$

□

Tvrzení 6.5 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Důkaz (Ze skript)
Nechť $x \in X$. Pro každé $f \in Y^*$ platí

$$(\varepsilon_Y(Tx))(f) = f(Tx) = T^*f(x) = (\varepsilon_X(x))(T^*f) = (T^{**}(\varepsilon_X(x)))(f),$$

tudíž $\varepsilon_Y(Tx) = T^{**}(\varepsilon_X(x))$. Odtud $\varepsilon_Y \circ T = T^{**} \circ \varepsilon_X$. □

Věta 6.6

Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor.

Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X, pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2, která je na X identitou.

Důkaz
Položme $\hat{X} = \overline{\varepsilon(X)} \subseteq X^{**}$. Z toho plyne existence.

Pokud X má skalární součin, pak platí rovnoběžníkové pravidlo. To platí i v $\hat{X}$, tedy $\hat{X}$ je Hilbertův.

Ať $I_1 : X \to X_1$ je izometrie, $\overline{I_1(X)} = X_1$, $I_2 : X \to X_2$ je izometrie, $\overline{I_2(X)} = X_2$. Pak $I_1 \circ I_2^{-1}|_{I_2(X)} : I_2(X) \to X_1$ je spojitý lineární operátor, tedy $\exists! S_1 : X_2 \to X_1$ spojitý lineární, že $S_1 \supset I_1 \circ I_2^{-1}|_{I_2(X)}$. Obdobně existuje $S_2 : X_1 \to X_2$. Pak se snadno ověří, že $(S_2 \circ S_1)|_{I_2(x)} = \mathrm{id}\,|_{I_2(x)}$, tedy $S_2 \circ S_1 = \mathrm{id}$. Analogicky $S_1 \circ S_2 = \mathrm{id}$.

Následně se ukáže, že S_1 je izometrie: Zvol $x \in X_2$, ať pro $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, posloupnost v X, je $I_2(x_n) \to x$. Pak

$$||S_1 x|| = \lim_{n\to\infty} ||S_1(I_2(x_n))|| = \lim_{n\to\infty} ||I_1(x_n)|| = \lim_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x||.$$

Analogicky S_2 je izometrie, tedy X_1, X_2 jsou izometrické. □

Věta 6.7

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

1. *T je izomorfismus na, právě když T^* je izomorfismus na. V tomto případě navíc platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*
2. *T je izometrie na, právě když T^* je izometrie na.*

Speciálně, jsou-li X a Y lineárně izometrické, pak jsou také X^* a Y^* lineárně izometrické.

Důkaz
$\implies$ (1.):

$$\forall y^* \in Y^* : ((T^{-1})^* T^*(y^*))(y) = T^* y^*(T^{-1}y) = y^*(TT^{-1}y) = y^*(y).$$

Analogicky $T^* \circ (T^{-1})^* = \operatorname{id} x^*$.

$\Leftarrow$ (1.): Dle první části: T^* je izomorfismus $\implies$ T^{**} je izomorfismus $\implies$ $\varepsilon_Y \circ T$ je izomorfismus $\implies$ T je izomorfismus.

$\implies$ (2.): Dle 1. stačí: T^* je izometrie:

$$\forall y^* \in Y^* : ||T^* y^*|| = \sup_{x \in B_X} |y^*(Tx)| = \sup_{y \in B_y} |y^*(y)| = ||y^*||.$$

Opačná implikace analogicky jako v 1. $\square$

Definice 6.3 (Reflexivní prostor)

Banachův prostor X se nazývá reflexivní, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Pozor
Existují i prostory, pro které je X izometrické X^{**}, ale ne pomocí ε.

Věta 6.8

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

- *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*
- *Je-li Y uzavřený podprostor X, X reflexivní $\implies$ Y reflexivní.*
- *Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.*
- *Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.*

Důkaz
1. Zvol $y^{**} \in Y^{**}$. Ať $T : Y \to X$ je izomorfismus. Pak $T^{**}y^{**} \in X^{**} \implies \exists x \in X : \varepsilon_X(x) = T^{**}y^{**}$. Polož $y = T^{-1}x \in Y$. Následně dokážeme, že $\varepsilon_Y(y) = y^{**}$:

$$\forall y^* \in Y^* : \varepsilon_Y(y)(y^*) = y^*(y) = y^*(T^{-1}x) = (T^{-1})^*y^*(x) = T^{**}y^{**}((T^{-1})^*y^*) =$$

$$= y^{**}(T^*(T^{-1})^*y^*) = y^{**}(y^*).$$

2. Zvol $y^{**} \in Y^{**}$ a uvažujme

$$F(X^*) = y^{**}(x^*|_Y), x^* \in X^*.$$

Pak $F \in X^{**}$ (lehké ověřit) $\implies \exists x \in X : F = \varepsilon_X(x)$. $x \in Y$, jelikož: Ať ne, pak (dle H-B) $\exists f \in X^* : 0 \neq f(x) \wedge f|_Y \equiv 0$. Pak $F(f) = y^{**}(0) = 0$, $\lightning$.

Teď už jen ověříme, že $\varepsilon_Y(x) = y^{**}$: Zvol $y^* \in Y^*$. Dle H-B existuje $x^* \in X^*$, že $x^*|_Y = y^*$. Pak

$$y^{**}(y^*) = y^{**}(x|_Y) = F(x^*) = x^*(x) = \varepsilon_Y(x)(x^*)$$

3. $\implies$: Zvol $x^{***} \in X^{***}$. Uvažuj $x^* = x^{***} \circ \varepsilon_X \in X^*$. Pak

$$\forall x \in X : x^{***}(\varepsilon_X(x)) = x^*(x) = \varepsilon_X(x)(x^*) = \varepsilon_{X^*}(x^*)(\varepsilon_X(x))$$

$$\implies x^{***} = \varepsilon_{X^*}(x^*), \text{ na } \varepsilon_X(x) = x^{**}.$$

Ať $\varphi \in (X/Y)^{**}$, pak

$$I^*(\varphi) = (Y^\perp)^* \implies \exists F \in X^{**} : I^*(\varphi) \subset F \implies \exists x \in X : F = \varepsilon_X(x).$$

Potom už jen chceme $\varepsilon_{X/Y}(q(x)) = \varphi$:

$$\forall f \in Y^\perp : \varepsilon_{X/Y}(q(x))(I(f)) = I(f)(q(x)) = f(x) = F(f) = (I^*(\varphi))(f) = \varphi(If) \implies$$

$$\implies \varepsilon_{X/Y}(q(x)) = \varphi.$$

□

Věta 6.9

Banachův prostor X je reflexivní, právě když pro každé $x^* \in X^*$ existuje $x \in B_X$ splňující $||x^*|| = x^*(x)$.

Důkaz
Bez důkazu. □

7 Slabá konvergence

Definice 7.1 (Slabá konvergence, s. konvergence s hvězdičkou)

Nechť X je normovaný lineární prostor.

- Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ v prostoru X slabě konverguje k $x \in X$ (značíme $x_n \xrightarrow{w} x$) pokud pro každé $x^* \in X^*$ platí $x^*(x_n) \to x^*(x)$.
- Řekneme, že posloupnost $\{x_n^*\}$ v prostoru X^* slabě s hvězdičkou konverguje k $x^* \in X^*$ (značíme $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$) pokud pro každé $x \in X$ platí $x_n^*(x) \to x^*(x)$.

Lemma 7.1

Nechť X je normovaný lineární prostor, $\{x_n\}$ posloupnost v X a $\{x_n^*\}$ posloupnost v X^*.

1. *Existuje nejvýše jedno $x \in X$ splňující $x_n \xrightarrow{w} w$.*
2. *Existuje nejvýše jedno $x^* \in X^*$ splňující $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.*
3. *Pokud $x \in X$ a $x_n \to x$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$.*
4. *Pokud $x^* \in X^*$ a $x_n^* \xrightarrow{w} x^*$, pak $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.*

Důkaz

1.–4. triviální. □

Věta 7.2

Nechť X je separabilní normovaný lineární prostor a $\{x_n^*\}$ omezená posloupnost v X^*. Pak $\{x_n^*\}$ má w^*-konvergentní podposloupnost.

Důkaz
Ať $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq B_x$ hustá v B_x. 1. krok: Najdeme $(x^*_{n_k})$, že $x^*_{n_k}(x_n)$ je konvergentní pro $n \in \mathbb{N}$: Ať $A_1 \subset \mathbb{N}$ nekonečná. K $((x^*_k)(x_1))_{k \in A_1}$ je konvergentní. Totéž pro A_2 a x_2, A_3 a x_3, ... Potom vybereme prvky na diagonále.

2. krok: Pak $x^*_{n_k}(x)$ konverguje pro $x \in B_x$: $\varepsilon > 0$ dáno. Ať $n \in \mathbb{N}$, že $||x_n - x|| < \varepsilon$.

$$k_0 \in \mathbb{N} \forall k, l \geq k_0 : |x^*_{n_k}(x_n) - x^*_{n_k}(x_n)| < \varepsilon.$$

Pak

$$\forall k, l \geq k_0 : |x^*_{n_k}(x) - x^*_{n_k}(x)| \leq |x^*_{n_k}(x - x_n)| + |x^*_{n_k}(x_n) - x^*_{n_l}(x_n)| + |x^*_{n_l}(x_n) - x^*_{n_l}(x)| <$$

$$< \varepsilon(||x^*_{n_k}|| + 1 + ||x^*_{n_l}||).$$

3. kror: Tedy z linearity $x^*_{n_k}(x)$ konverguje pro $x \in X$: Polož $x^*(x) = \lim_{k \to \infty} x^*_{n_k}(x)$. Pak $x* \in X^*$ □

Věta 7.3

Banachův prostor X je reflexivní, právě když každá omezená posloupnost $\{x_n\}$ v X má slabě konvergentní podposloupnost.

Důkaz
$\Leftarrow$ nebude (teď je těžký, bude ve funkcionální analýze). $\implies$ plyne z následující věty: Polož $Y = \overline{\text{span}}(x_n) \subset X$, pak Y je separabilní a reflexivní $\implies$ Y^* je (reflexivní +) separabilní, dle následující věty. $\implies$ $\exists (x_{n_k})$, w^*-konvergentní podposloupnost v $Y^{**} \equiv \varepsilon(Y)$ $\implies$ $\exists y \in Y : \varepsilon(x_{n_k}) \overset{w^*}{\to} \varepsilon(y) \Leftrightarrow x_{n_k} \overset{w}{\to} y$. □

Věta 7.4

Nechť X je normovaný lineární prostor a X^* je separabilní. Pak X je separabilní.

Důkaz
Zvol $\{x^*_n | n \in \mathbb{N}\} \subset S_{X^*}$ hustou podmnožinu (existuje ze separability). Pro $n \in \mathbb{N}$ najdi $x_n \in B_x : x^*_n(x_n) > \frac{1}{2}$. Pak $\overline{\text{span}}\{x_n | n \in \mathbb{N}\} = X$ (a tím bude hotovo, protože $\overline{\text{span}}(x_n) = \overline{\text{span}_*}(x_n)$): Ať ne, pak existuje $f \in S_{X^*} : f|_{\overline{\text{span}}} = 0$, $f \neq 0$. Zvol $n \in \mathbb{N}$, že $||x^*_n - f|| < \frac{1}{4}$. Pak

$$0 = |f(x_n)| \geq |x^*_n(x_n)| - |(x^*_n - f)(x_n)| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} > 0. \lightning$$

□

8 Omezené operátory v Banachových prostorech

Definice 8.1 (Kompaktní operátor, konečněrozměrný operátor)

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní (tj. její uzávěr je kompaktní) v Y.

Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá konečněrozměrný, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi.

$\mathcal{F}(X, Y)$ značí množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y.

Poznámka

X je MP, $A \subset X$. Pak

- A je relativně kompaktní $\Leftrightarrow$ z každé posloupnosti v A lze vybrat konvergentní posloupnost v X.
- Pokud X je úplný, pak A je relativně kompaktní $\Leftrightarrow$ A je totálně omezená.

Tvrzení 8.1

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T : X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *T je kompaktní.*
2. *$T(B_X)$ je relativně kompaktní.*
3. *Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X, pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.*

Důkaz

1. $\implies$ 2: triviální. 2. $\implies$ 3: Ať (x_n) je posloupnost v $B(\mathbf{o}, r)$ (kde $r > 0$). Pak $(\frac{x_n}{r})$ je posloupnost v $B_x \implies$ dle 2. $\exists (n_k)$, že $T(\frac{x_{n_k}}{r})$ je konvergentní, tedy $T(x_{n_k})$ je konvergentní.

3. $\implies$ 1.: Ať $A \subset X$ omezená, ať (y_n) je posloupnost v $T(a)$. Pak $\exists x_n \in A : Tx_n = y_n$, $n \in \mathbb{N}$. $\implies \exists (n_k) : T_{x_{n_k}}$ je konvergentní v Y. $\square$

Věta 8.2

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

1. *Operátor $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.*

2. *$\mathcal{K}(X,Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X,Y)$ a $\mathcal{F}(X,Y)$ podprostor $\mathcal{K}(X,Y)$.*

3. *$\mathcal{K}(X,Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X,Y)$.*

4. *Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem (zleva či zprava), dostaneme opět kompaktní operátor.*

Důkaz
1. $\Leftarrow$: Jasné protože pak $\operatorname{Rng} T \subset \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\}$. $\implies$: Ať $y_1, \dots, y_n$ je báze $\operatorname{Rng} T$. Uvažujme $g_i \in (\operatorname{Rng} T)^*$, $g_i(y_j) = \delta_{ij}$. Polož $f_i = g_i \circ T \in X^*$, $i \in [n]$. Pak $T(x) = \sum_{i=1}^n g_i(Tx) y_i = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$.

2. Ať $S, T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Pak $(S+T)(B_x) = S(B_X) + T(B_X) \subseteq \overline{S(B_X)} + \overline{T(B_X)}$, což jsou kompaktní prostory. Protože součet kompaktů je kompakt (a uzavřený podprostor kompaktu také), $\overline{(S+T)(B_x)}$ je kompaktní. Násobení triviálně.

$T \in \mathcal{F}(x,y) \implies \operatorname{Rng} T$ je konečnědimenzionální, tedy uzavřená $\implies \overline{T(B_x)} \subseteq \operatorname{Rng} T \cong \mathbb{K}^n$. □

Důkaz (Ze skript (vlastními slovy))
3. Nechť $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{K}(X,Y)$ konvergující k $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že $||T_n - T|| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dále nalezneme množinu $\{x_1, \dots, x_k\} \subset B_X$ takovou, že $T_n(x_i)$ je konečná $\frac{\varepsilon}{3}$-síť pro $T_n(B_X)$. $T(x_i)$ je pak konečná ε-síť v $T(B_X)$ neboť $\forall x \in B_X$ nalezneme j tak, že $||T_n(x) - T_n(x_j)|| < \frac{\varepsilon}{3}$. Potom

$$||T(x) - T(x_i)|| \leq ||T(x) - T_n(x)|| + ||T_n(x) - T_n(x_j)|| + ||T_n(x_j) - T(x_j)|| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tedy $T(B_X)$ je totálně omezená, a protože Y je úplný, tak je T kompaktní dle předchozího tvrzení.

4. Spojitá zobrazení zachovávají omezenost i relativní kompaktnost, tedy složení s jiným operátorem na něj klade stejné podmínky pro kompaktnost, jako by byl samotný. □

Věta 8.3 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.

Důkaz (Ze skript)
$\Leftarrow$: Položme $K = \overline{T(B_X)}$ a $\mathcal{F} = \{f|_K | f \in B_{Y^*}\}$. Pak K je kompaktní a $\mathcal{F} \subset C(K)$. Dále pro každé $f \in B_{Y^*}$ díky spojitosti f platí

$$||f|_K||_{C(K)} = \sup_{y \in K} |f(y)| = \sup_{y \in T(B_X)} |f(y)| = \sup_{x \in B_X} |f(T(x))| \leq ||f|| \cdot ||T|| \leq ||T||.$$

Tedy $\mathcal{F} \subset C(K)$ je omezená množina stejně spojitých (dokonce 1-lipschitzovských) funkcí na kompaktním prostoru K. Podle Arzeláovy-Ascoliovy věty to znamená, že $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní v $C(K)$.

Nechť nyní $\{f_n\}$ je posloupnost v B_{Y^*}. Položme $g_n = f_n|_K$. Pak $\{g_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{F}$, a tedy existuje podposloupnost $\{g_{n_k}\}$ konvergentní v $C(K)$. Tvrdíme, že pak $\{T^* f_n\}$ je cauchyovská: Pro $k, l \in \mathbb{N}$ máme

$$||T^* f_{n_k} - T^* f_{n_l}|| = ||T^*(f_{n_k} - f_{n_l})|| = \sup_{x \in B_X} |T^*(f_{n_k} - f_{n_l})(x)| = \sup_{x \in B_X} |(f_{n_k} - f_{n_l})(Tx)| \leq$$

$$\leq \sup_{z \in K} |(f_{n_k} - f_{n_l})(z)| = ||g_{n_k} - g_{n_l}||_{C(K)}.$$

Protože $\{g_{n_k}\}$ je cauchyovská, je i $\{T^* f_{n_k}\}$ cauchyovská, a tedy konvergentní v X^*. Odtud plyne, že $T^*(B_{Y^*})$ je relativně kompaktní v X^*.

$\Longrightarrow$: Nechť $\varepsilon_X : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření. Podle první části důkazu je $T**$ kompaktní, takže je kompaktní i $S = T^{**}|_{\varepsilon_X(X)} : \varepsilon_X(X) \to Y^{**}$. Podprostor $\varepsilon_Y(Y)$ je uzavřený v Y^{**}, tedy S je kompaktní. Podle tvrzení a věty výše je $T = \varepsilon^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$ kompaktní. □

9 Úplnost v Banachových prostorech

Věta 9.1 (Princip stejnoměrné omezenosti)
Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $A \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak

$$\sup \{||T|| \mid T \in A\} < +\infty \Leftrightarrow \forall x \in X : \sup \{||T(x)|| \mid T \in A\} < +\infty.$$

Důkaz (Ze skript)
$\Longrightarrow$: Zřejmé. $\Leftarrow$: Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_n = \{x \in X \mid ||T(x)|| \leq n \text{ pro každé } T \in A\}.$$

Pak jsou F_n uzavřené množiny pokrývající celé X. Podle Baireovy věty existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že F_{n_0} má neprázdný vnitřek. Existuje tedy koule $B(x_0, r) \subset F_{n_0}$. Nechť nyní $T \in \mathcal{A}$ je libovolný. Pro každé $x \in B_X$ je $x_0 + rx \in B(x_0, r)$, a tedy $||T(rx)|| = ||T(x_0 + rx - x_0)|| \leq ||T(x_0 + rx)|| + ||T(x_0)|| \leq 2n_0$. Odtud $||T(x)|| \leq \frac{2n_0}{r}$, což znamená, že $||T|| \leq \frac{2n_0}{r}$. Proto je $\sup \{||T|| \mid T \in \mathcal{A}\} \leq \frac{2n_0}{r}$. □

Důsledek
Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X,Y)$ taková, že $\forall x \in X\ \exists T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $||T|| \leq \liminf ||T_n|| \in \mathbb{R}$.

Důkaz (Ze skript)
Nejprve ukážeme, že T je lineární. Zvolme $x, y \in X$ a skalár α libovolně. Pak díky spojitosti vektorových operací platí

$$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + T_n(y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) = T(x) + T(y),$$

$$T(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} \alpha T_n(x) = \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(X) = \alpha T(x).$$

Dále, pro pevné $x \in X$ ze spojitosti normy plyne $\lim ||T_n(x)|| = ||T(x)||$, speciálně posloupnost $\{||T_n(x)||\}$ je omezená. Z předchozí věty plyne, že posloupnost $\{||T(x)||\}$ je omezená. Pak pro libovolné $x \in B_X$ platí

$$||T(x)|| = \lim_{n\to\infty} ||T_n(x)|| = \liminf_{n\to\infty} ||T_n(x)|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||T_n|| \in \mathbb{R}.$$

Tedy T je spojitý lineární operátor a $||T|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||T_n||$. □

Tvrzení 9.2

Nechť X je Banachův prostor, $\{x_n^*\}$ je posloupnost v X^*, $x^* \in X^*$ a $D \subset X$ splňuje $\overline{\text{span}} D = X$. Pak $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, právě když $\{x_n^*\}$ je omezená a $x_n^*(d) \to x^*(d)$ pro každé $d \in D$.

Důkaz
$\Longrightarrow$: (x^*) je omezená dle principu stejnoměrné omezenosti. $\Leftarrow$: Víme (aplikace linearity):

$$\forall x \in \operatorname{span} D : x_n^*(x) \to x^*(x).$$

Nechť $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Ať $x_0 \in \operatorname{span} D : ||x - x_0|| \cdot \sup\{||x_n^*|| + ||x^*|| \mid n \in \mathbb{N}\} < \frac{\varepsilon}{3}$. Buď $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 |x_n^*(x_0) - x^*(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak $\forall n \geq n_0$:

$$|x_n^*(x) - x^*(x)| \leq ||x_n^*|| \cdot ||x - x_0|| + |x_n^*(x_0) - x^*(x_0)| + ||x^*|| \cdot ||x - x_0|| \leq \varepsilon.$$

□

Tvrzení 9.3

Nechť X je Banachův prostor, $\{x_n\}$ je posloupnost v X, $x \in X$ a $D \subset X^*$ splňuje $\overline{\text{span}} D = X^*$. Pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $d(x_n) \to d(x^*)$ pro každé $d \in D$.

Důkaz
$\Longrightarrow$: $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \varepsilon_X(x_n) \xrightarrow{w^*} \varepsilon_X(x)$. $\Rightarrow$: Analogicky jako v předchozím tvrzení. Tedy $x_n \xrightarrow{w} x \implies \varepsilon_X(x_n)$ je omezená dle předchozího tvrzení, tedy (x_n) je omezená. □

Definice 9.1 (Otevřené zobrazení)

Zobrazení $f : X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 9.4 (O otevřeném zobrazení (Juliusz Pawel Schauder 1930))

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.

Důkaz

Později. □

Lemma 9.5 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0,s) \subset \overline{T(\mathcal{U}(0,r))}$, pak dokonce $U(0,s) \subset T(\mathcal{U}(0,r))$

Důkaz (První část ze skript)

Nejprve si povšimněme, že lze bez újmy na obecnosti uvažovat pouze případ $r = s = 1$. Vskutku máme-li již dokázané tvrzení v tomto případě a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ splňuje předpoklady pro nějaká $r, s > 0$, pak operátor $\frac{r}{s}T$ splňuje $\mathcal{U}(0,1) \subset \overline{(\frac{r}{s}T)(\mathcal{U}(\mathbf{o},1))}$, a tedy podle případu $r = s = 1$ platí $\mathcal{U}(\mathbf{o},1) \subset (\frac{r}{s}T)(\mathcal{U}(\mathbf{o},1))$, odkud $\mathcal{U}(\mathbf{o},s) \subset T(\mathcal{U}(\mathbf{o},r))$.

Nechť tedy $r = s = 1$ a nechť je dáno $z \in U_Y$. Najdeme $\delta \in (0,1)$ takové, že $||z|| < 1-\delta$. Ukážeme, že $y = \frac{1}{1-\delta}z \in T\left(\frac{1}{1-\delta}\mathcal{U}_X\right)$. Pak totiž $z = (1-\delta)y \in (1-\delta)T\left(\frac{1}{1-\delta}\mathcal{U}_X\right) = T(\mathcal{U}_X)$. Pomocí matematické indukce najdeme $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ takové, že $y_0 = \mathbf{o}$, $||y - y_n|| < \delta^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1}\mathcal{U}_x)$: Je $||y|| < 1$, a tedy volbou $y_0 = \mathbf{o}$ je druhá podmínka splněna (a třetí se 0 netýká). Předpokládejme nyní, že $n \in \mathbb{N}$ a již máme nalezeny prvky $y_0, \dots, y_{n-1}$. Pak

$$y - y_{n-1} \in \delta^{n-1}\mathcal{U}_Y \subset \delta^{n-1}\overline{T(U_X)} = \overline{\delta^{n-1}T(U_X)} = \overline{T(\delta^{n-1}\mathcal{U}_X)},$$

a tedy existuje $w \in T(\delta^{n-1}\mathcal{U}_X)$ splňující $||y - y_{n-1} - w|| < \delta^n$. Pak $y_n = y_{n-1} + w$ splňuje požadované podmínky.

Z předchozí části $\exists (y_n)_{n=0}^{\infty}$, že $y_0 = 0$, $||y - y_n|| < \delta^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1}\mathcal{U}_x)$.

Zvolme $x_n \in \delta^{n-1}\mathcal{U}_x$, že $Tx_n = y_n - y_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n = \frac{1}{1-\delta} < \infty \overset{X \text{ je Banachův}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \exists x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, ||x|| < \frac{1}{1-\delta} \implies x \in \frac{1}{1-\delta}\mathcal{U}_x.$$

Zároveň $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} T_{x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} y_n - y_{n-1} = \lim_{n\to\infty} y_n - 0 = y$. □

Důkaz (Věty o otevřeném zobrazení)
Úvod: stačí $\exists\delta > 0 : \mathcal{U}(0,\delta) \subset T(\mathcal{U}_x)$: Zvol $G \subset X$ otevřená, $x \in G$. Pak $y = Tx \in T(G)$. G otevřená $\implies \exists R > 0 : \mathcal{U}(x,R) \subset G$. Pak $\mathcal{U}(y,\delta R) = y + R\mathcal{U}(0,\delta) \subset y + RT(\mathcal{U}(0,1)) = T(\mathcal{U}(x,R)) \subseteq T(G)$.

Stať:

Y úplný $\implies$ z Banachovy věty $\exists n_0 : \operatorname{int}(\overline{T(n_0\mathcal{U}_x)}) \neq \emptyset \implies \overline{n_0\mathcal{U}_x}$ (symetrická, konvexní, uzavřená) obsahuje kouli $\implies \exists\delta > 0 : \mathcal{U}(0,\delta) \subseteq \overline{T(n_0\mathcal{U}_x)}$. Z předchozího lemmatu $\mathcal{U}(0,\delta) \subseteq T(n_0\mathcal{U}_x) = nT(\mathcal{U}_x)$.

Závěr: $\mathcal{U}(0,\frac{\delta}{n_0}) \subset T(U_x)$. □

Důsledek (S. Banach, 1929)
Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T je prostý a na.

Důkaz
„ $\implies$ “ jasné. „$\Leftarrow$“: T^{-1} je spojitý plyne z předchozí věty ($(T^{-1})^{-1}(O) = T(O)$ je otevřené podle předchozí věty (O otevřená)). □

Důsledek
Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak platí

- Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $||x|| \leq c||y||$.
- Zobrazení $\hat{T} : X/\operatorname{Ker} T \to Y$ dané předpisem $\hat{T}(\hat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$.

Důkaz
První bod: Dle předchozí věty $\exists R > 0 : \mathcal{B}(0,R) \subset T(\mathcal{U}_x)$. Zvolíme $y \in Y \setminus \{0\}$. Pak $\exists x \in \mathcal{U}_x : Tx = \frac{y}{||y||} \cdot R \wedge ||\frac{x||y||}{R}|| \leq \frac{1}{R}||y||$. (Položíme $c = \frac{1}{R}$.)

Druhý bod: 1. krok: Je dobře definovaný: $\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x - y \in \operatorname{Ker} T \Leftrightarrow Tx = Ty$. 2. krok $\hat{T}$ je lineární a spojité: lineární triviálně, spojité z normy:

$$\forall \hat{x} \in \mathcal{U}_{X/\operatorname{Ker} T} : ||\hat{T}(\hat{h})|| \leq ||T|| \cdot ||x|| \leq ||T|| \cdot ||\hat{x}|| \implies ||\hat{T}|| \leq ||T||.$$

3. krok: $\hat{T}$ je na, protože T je na a navíc $\hat{T}$ je prosté, neboť $\hat{T}\hat{x} = 0 \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} T$. □

Definice 9.2 (Graf)

Je-li $f : X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y) \in X \times Y | y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f. Říkáme, že zobrazení $f : X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina $\operatorname{graf} f$ je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 9.6 (O uzavřeném grafu (S. Banach, 1932))

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když má uzavřený graf.

Důkaz

„ $\Longrightarrow$ “ triviální, platí vždy. „$\Leftarrow$“: $G := \{(x, Tx)|x \in X\} \subset X \oplus_\infty Y$ je uzavřený (tedy Banachův). Ať P_x, P_y jsou kanonické projekce (jsou spojité: $||P_x(x, y)|| = ||x||_x \le ||(x, y)||_\infty$).

Uvažujme $S : X \to G$, $Sx = (x, Tx)$, to je lineární a prosté. Ale nevíme, zda je S spojité. To dokážeme tak, že dokážeme spojitost S^{-1} a to, že je to izomorfismus. Z toho pak plyne spojitost S i T. $S^{-1} = P_x|_G$ je spojité, prosté a na, tudíž je izomorfismus z věty výše. Tedy S je spojité. Tedy je spojité $T = P_y \circ S$. □

Věta 9.7 (Z dřívějška, zopakovaná, důkaz je nový)

Nechť X je Banachův prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když Y a Z jsou uzavřené.

Důkaz

„P_y spojitá $\Longrightarrow$ Y, Z uzavřené“: lehké, protože $P_Z = \operatorname{id} - P_y$ spojitá a $Y = \operatorname{Ker} P_z = P_z^{-1}(0)$ je uzavřená a $Z = \operatorname{Ker} P_y = P_z^{-1}(0)$ je uzavřená.

Naopak ať Y, Z jsou uzavřené, pak chceme P_y má uzavřený graf (pak aplikujeme předchozí větu): Ať $(y_n, P(x_n)) \to (x, Z) \in Y \oplus_\infty Z \cong X$. Pak $x_n \to x$, $P_y(x_n) \to z$. Tedy $x_n - P_y(x_n) \to x - z \implies x - z \in Z$. Tudíž $x = z + x - z \implies P_y x = z$. Tudíž $(x, z) = (x, P_y x) \in \operatorname{graf} P_y$ □

10 Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

Tvrzení 10.1

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertibilní, právě když T je bijekce.

Důkaz
„$\implies$" $TS = \mathrm{id} \implies T$ je na, $ST = \mathrm{id} \implies T$ je prosté.

„$\Leftarrow$": Plyne z důsledku výše. $\square$

Tvrzení 10.2

Nechť X je Banachův prosotr.

- *Pokud $T \in \mathcal{L}(X)$ a $||T|| < 1$, pak $\mathrm{id}_X - T$ je invertibilní a platí $(\mathrm{id}_X - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.*
- *Pokud je T invertovatelný a $||S - T|| < \frac{1}{||T||^{-1}}$, pak S je invertovatelný a $S^{-1} = T^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{id} - ST^{-1})^n$. Speciálně, množina všech invertibilních operátorů v $\mathcal{L}(X)$ je otevřená.*

Důkaz
1. bod: máme $\sum_{n=0}^{\infty} ||T^n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||T||^n = \frac{1}{1-||T||} \implies \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(X)$. Zároveň

$$\forall x \in X : \left((\mathrm{id} - T) \circ \sum_{n=0}^{\infty} T^n \right)(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} (T^n - T^{n+1})(x) = \lim_{n \to \infty} (x - T^{n+1}(x)) = x.$$

Analogicky $\sum_{n=0}^{\infty} T^n \circ (\mathrm{id} - T) = \mathrm{id}_X$.

2. bod: Idea: $\frac{1}{S} = \frac{1}{S-T+T} = \frac{1}{T(T^{-1}(S-T)+\mathrm{id})}$.

Důkaz: Platí

$$S = S - T + T = T(T^{-1}(S-T) + \mathrm{id}) = T(\mathrm{id} - T^{-1}(T-S))$$

T má inverz, člen za mínus má normu menší 1, tedy id mínus on má inverz dle 1. bodu, tedy S^{-1} existuje a

$$S^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (T^{-1}(T-S))^n \right) \circ T^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{id} - T^{-1}S)^n \right) \circ T^{-1} = T^{-1} \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{id} - ST^{-1})^n \right).$$

$\square$

Definice 10.1 (Vlastní číslo, vlastní prostor, vlastní vektory, bodové spektrum, spektrum operátoru)

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá bodové spektrum operátoru T a značí se $\sigma_p(T)$.

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertibilní. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Věta 10.3

Nechť X je Banachův nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(x)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_x(0, ||T||)$. Je-li X komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.

Důkaz

„$\sigma(T) \subset B(0, ||T||)$“: Pokud $|\lambda| > ||T||$, pak $(\lambda I - T) = \lambda(I - \frac{T}{\lambda}) \implies (\lambda I - T)^{-1}$ existuje.

„$\sigma(T)$ uzavřená“: $\mathbb{K} \setminus \sigma(T)$ je otevřená podle tvrzení výše bod 2.

Důkaz druhé části vynechán (těžký a je potřeba Komplexka). $\square$

Věta 10.4

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$. Navíc, pokud je X Hilbertův, pak $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

Důkaz

Plyne z toho, že S^{-1} existuje $\Leftrightarrow$ $(S^*)^{-1}$ existuje a

$$(\lambda I - T)^* = \lambda I - T^*, \qquad (\lambda I - T)^\bigstar = \lambda I - T^\bigstar.$$

$\square$

Věta 10.5

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$.

1. *Jestliže* $\operatorname{Rng}(T)$ *je uzavřený, pak* $\dim \operatorname{Rng}(T) < \infty$.
2. *Jestliže* $\dim X = \infty$, *pak* $0 \in \sigma(T)$
3. *Jestliže* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, *pak* $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$ *a* $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ *je uzavřený.*

Důkaz

1. Máme $T : X \to \overbrace{\operatorname{Rng} T}^{\text{Banach}}$ je na. Z věty o otevřeném zobrazení $\overline{T(B_X)}_{\text{relativně kompaktní}} \supseteq \mathcal{U}(\mathbf{o}, r) \cap \operatorname{Rng} T \implies B(\mathbf{o}, r) \cap \operatorname{Rng} T$ je kompaktní $\implies \dim \operatorname{Rng} T < \infty$ (je v něm kompaktní koule, tak musí být kompaktní).

2. $0 \notin \sigma(T) \implies \exists T^{-1} \implies \mathrm{id} = T \circ T^{-1} \in \mathcal{K}(x)$. Tedy B_X je kompakt, a tudíž $\dim X < \infty$.

3. První krok „$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$“: BÚNO $\lambda I - T$ není prostý. Na $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ máme $T = \lambda I$. Uvažujme $T|_{\operatorname{Ker}(\lambda I - T)}$, to je kompaktní operátor.

$$\implies \overline{T(\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \cap B_x)} = \overline{\lambda(\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \cap B_x)} = \lambda(\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \cap B_x)$$

$\implies \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ je konečnědimenzionální.

Druhý krok: Tedy $\exists Z \subset X$ uzavřený, že $X = \operatorname{Ker}(\lambda I - T) \oplus_t Z$. Polož $S = (\lambda I - T)|_Z$. Pak S je prostý (tam kde není prosté, tak jsme v druhé souřadnici), $\operatorname{Rng} S = \operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ („$\subseteq$“ zřejmě, „$\supseteq$“:

$$\forall x \in X : (\lambda I - T)x = (\lambda I - T)(\underbrace{y}_{\operatorname{Ker}(\lambda I - T)} + \underbrace{z}_{Z}) = Sz$$

). Zbývá „S je izomorfismus“ (pak $\operatorname{Rng} S$ je uzavřený): Ať ne, pak $\exists (x_n)_{n=1}^{\infty}$ v $\mathcal{S}_Z$, že $||Sx_n|| \to 0$. Protože T je kompaktní, existuje $(n_k) \nearrow$ a $x \in X : T(x_{n_k}) \to x \in X$. Pak ale $\lambda x_{n_k} = (\lambda I - T)(x_{n_k}) + T(x_{n_k}) \to X$. Tedy $S(x_{n_k}) \to S(\frac{x}{\lambda}) \implies x = 0$, ale $||\lambda x_{n_k}|| = |\lambda| \to ||x|| = 0$, nebo $S(x_{n_k}) \to 0$. $\square$

Věta 10.6 (Fredholmova alternativa)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.

Důkaz
„$\implies$“: Pro spor předpokládejme, že S je prosté, ale není na. Polož $S = \lambda I - T$, $X_0 := X$, $X_{n+1} := S(X_n)$. Pak $X_{n+1} \subsetneq X_m$ (dokáže se indukcí) a X_n je uzavřený (dle předchozí věty bodu 3. $\operatorname{Rng} S$ je uzavřený, tedy $S : X \to \operatorname{Rng} S$ je prostý a na, tj. S je izomorfismus).

Z lemmatu o skoro kolmici najdeme $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost ve sféře, že $d(x_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak pro $m < n$:

$$T(x_n) - T(x_m) = \overbrace{\lambda x_n}^{X_n} - \overbrace{\lambda x_m}^{X_{n+1}} - \overbrace{Sx_n}^{\in X_{n+1}} + \overbrace{Sx_m}^{\in X_{n+1}}.$$

Polož $? = \lambda x_n - Sx_n + Sx_n \in X_{m+1}$. Pak

$$||T(x_n) - T(x_m)|| = |\lambda| \cdot ||x_m - \frac{?}{\lambda}|| \geq |\lambda| d(x_m, X_{m+1}) \geq \frac{|\lambda|}{2} > 0. \lightning$$

„$\Leftarrow$“: $\lambda I - T$ je na $\implies$ (z nějaké předchozí věty) $(\lambda I - T)^* = \lambda I - T^*$ je prostý $\implies$ $\lambda I - T^*$ je na $\implies$ $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) = (X^*)_\perp = \{0\}$ $\implies$ $\lambda I - T$ je prostý. ☐

Důsledek
Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_p(T)$.

Lemma 10.7

Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

Důkaz
$n = 1$ jasné, „$n \implies n+1$“: Ať $x_1, \dots, x_{n+1} \in X$ jsou vlastní vektory příslušné vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$. Ať $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$. Pak $0 = T(\sum_i \alpha_i x_i) - \lambda_{n+1}(\sum_i \alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1})x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1})x_i \implies \alpha_i = 0, i \leq n \implies \alpha_{n+1} = 0$. ☐

Věta 10.8

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K} | |\lambda| > r\}$ konečná.

Důkaz
Pro spor ať ne. Tj. $\exists r > 0\ \exists (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ po dvou různých λ_n, $|\lambda_n| > R$, $\lambda_n \in \sigma(T)$. Ať x_n je vlastní vektor příslušný λ_n. Položme $X_n \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Pak dle předchozího lemmatu $X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq X_3 \subsetneq \dots$.

Z lemmatu o skoro kolmici najdeme $(z_n)_{n=2}^{\infty}$, že $z_n \in S_{X_n} \wedge d(z_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Ať $z_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, pak $T(z_n) = \sum_i \alpha_i \lambda_i x_i$, $\lambda_n z_n - T(z_n) = \sum_i d_i(\lambda_i - \lambda_n)x_i = \sum_i^{n-1} \dots \in X_{n-1}$. Tedy

$$\forall m > n : ||T(z_m) - T(z_n)|| = ||\lambda_m z_m - (\underbrace{\lambda_m z_m - T(z_m)}_{\in X_{m-1}} + T(z_n))|| =$$

$$= |\lambda_m| \cdot ||z_m - \frac{\dots}{\lambda_m}|| \geq \frac{R}{2} > 0.$$

Tedy jsme nalezli $\frac{R}{2}$ separovanou množinu, tedy T není kompaktní. $\lightning$. $\square$

Důsledek
Nechť X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T, přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.

Věta 10.9 (Druhá Fredholmova věta)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = (\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*))_{\perp},$$

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = (\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T))^{\perp}.$$

Důkaz
Bez důkazu $\square$

Věta 10.10 (Třetí Fredholmova věta)

Nechť X je Banachův prostor, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) =$$

$$= \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

Důkaz
Bez důkazu $\square$

Definice 10.2 (Numerický range operátoru)

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Množina $N_T = \{\langle Tx, x\rangle \,|x \in S_H\}$ se nazývá numerický range operátoru T.

Tvrzení 10.11

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$.

1. $N_{\alpha I+\beta T} = \alpha + \beta N_T$ *pro libovolná* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
2. $\sigma_p(T) \subset N_T \subset B_{\mathbb{K}}(0, ||T||)$.
3. $\sigma(T) \subset \overline{N_T}$.

Důkaz

1. $\forall x \in S_H L \left\langle (\alpha I + \beta T)x, x\right\rangle = \alpha \langle x, x\rangle + \beta \langle Tx, x\rangle = \alpha + \beta \langle Tx, x\rangle$.

2. $\sigma_P(T) \subseteq N_T$: Ať $\lambda \in \sigma_p(T) \implies \exists x_0 \in S_H : \lambda x_0 = Tx$.

$$= \langle Tx_0, x_0\rangle = \langle \lambda x_0, x_0\rangle = \lambda$$

3. Ať $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_z(T)$. 1. případ: Ať $\lambda I - T$ je isomorfismus do (a ne na), pak $\mathrm{Rng}(\lambda I - T) \subsetneq H$ je uzavřený podprostor $\implies \exists x \in S_H \cap (\mathrm{Rng}(\lambda I - T))^{\perp}$, speciálně $0 = \langle \lambda x - Tx, x\rangle = \lambda - \langle Tx, x\rangle \implies \lambda \in N_T$.

2. případ: $\lambda I - T$ není izomorfismus, pak $\lambda I - T$ není sdola omezený, teď $\exists (x_n)$ v S_H, že $(\lambda I - T)(x_n) \to 0$, pak

$$|\lambda - \langle Tx_n, x_n\rangle| = |\langle \lambda x_n - Tx_n, x_n\rangle|$$

$\square$

Definice 10.3 (Samoadjungovaný operátor)

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Řekneme, že T je samoadjungovaný, pokud $T = T^{\bigstar}$.

Věta 10.12

Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pro každé $x, y \in H$. Pro T samoadjungovaný platí následující tvrzení:

- $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in H$.
- $N_T \subset \mathbb{R}$ *a označíme-li* $m_T = \inf N_T$, $M_T = \sup N_T$, *pak* $||T|| = \max\{|m_T|, |M_T|\}$ *a* $\{m_T, M_T\} \subset \sigma(T) \subset [m_T, M_T]$, *a tedy číslo* $||T||$ *nebo* $-||T||$ *leží v* $\sigma(T)$.

Důkaz
První bod: Víme $\forall x \in H : \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$. Tedy $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Druhý bod: Položme $M = \sup\{|x||\lambda \in N_T\}$. Chceme $||T|| = M$. „$\geq$“: $\forall x \in S_H$: $|\langle Tx, x\rangle| \leq ||T||$, „$\leq$“: Pro $x, y \in H$ polož $S(x, y) := \langle Tx, y\rangle$. Pak platí

$$\Re S(x, y) = \frac{1}{4}\left(S(x+y, x+y) - S(x-y, x-y)\right)$$

Neboť (pravou stranu tupě rozepíšeme dostaneme to, co na levé:)

$$LS = \frac{1}{2}(S(x, y) + \overline{S(x, y)}) = \frac{1}{2}(\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle).$$

Zvol $x \in S_H$, chceme „$||Tx|| \leq M$“: BÚNO $Tx \neq 0$. Položme $y = \frac{Tx}{||Tx||} \in S_H$. Pak $||Tx|| = \langle Tx, y\rangle = S(x, y) = |\Re S(x, y)| \leq \frac{1}{4}(|S(x+y, x+y)| + |S(x-y, x-y)|) \leq \frac{1}{4}M(||x+y||^2 + ||x-y||^2) = \frac{1}{2}M(||x||^2 + ||y||^2) = M$.

Tedy $||T|| = \sup\{|\lambda||\lambda \in N_T\} = \max\{m_T, M_T\}$ (Jelikož $N_T \subseteq \mathbb{R}$ je omezená $\implies \sup\{|\lambda||\lambda \in N_T\} = \max\{|\inf N_T|, |\sup N_T|\}$).

A tedy $\sigma(T) \subseteq \overline{N_T} \subseteq [m_T, M_T]$. Zbývá „$\{m_T, M_T\} \subseteq \sigma(T)$“: Polož $R = T - m_T I$. Pak $R = R^\star$, $N_R = N_T - m_T$, tedy $M_R = M_T - m_T \geq 0 = m_R \implies ||R|| = M_R$. Zvol $(x_n)_{n=1}^\infty$ z S_H, že $\langle Rx_n, x_n\rangle \to ||R|| = M_R$. Chceme „$||R||I - R$ není izomorfismus“: Máme $||(||R||)x_n - Rx_n||^2 = ||R||^2||x_n||^2 + ||Rx_n||^2 + 2\Re\langle -Rx_n, ||R||x_n\rangle \leq 2(||R||^2 - ||R||\Re\langle Rx_n, x_n\rangle) = 2||R|| \cdot (||R|| - \langle Rx_n, x_n\rangle) \to 0$. Tedy $||R||I - R$ není zdola omezený.

Tedy $M_R = ||R|| \in \sigma(R)$. Pak $M_T \in \sigma(T)$ (neboť máme $M_T I - T = (m_T + M_R)I - (m_T I + R) = M_R I - R$ nemá inverzi).

Zbývá „$m_T \in \sigma(T)$“: Máme $N_T = -N_T$, tedy $m_T = \inf N_T = -(\sup(-N_T)) = -M_{-T}$. $-M_{-T}$ je ve spektru (dle již dokázané části), tedy máme $m_T I - T = (-M_{-T}I - T = -(M_{-T}I - (-T)))$ nemá inverzi, tedy $m_T \in \sigma(T)$. $\square$

Definice 10.4 (Invariantní zobrazení)

Nechť A je množina a $f : A \to A$ je zobrazení. Množina $B \subset A$ se nazývá invariantní vůči f, pokud $f(B) \subset B$, tj. $f|_B : B \to B$.

Lemma 10.13

Nechť H je Hilbertův prostor a označme

$$SA(H) = \{T \in \mathcal{L}(H) | T = T^*\}.$$

Pak pro $T \in SA(H)$ platí následující tvrzení:

1. *$\lambda \in \sigma_p(T)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^\star)$. Vlastní prostor T příslušný vlastnímu číslu*

λ je shodný s vlastním prostorem $T^\star$ příslušným vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$.

2. *Pokud λ_1, λ_2 jsou různá vlastní čísla T, pak $\operatorname{Ker}(\lambda_1 I - T) \perp \operatorname{Ker}(\lambda_2 I - T)$.*

3. *Pokud $\sigma(T) = \{0\}$, pak $T = 0$.*

4. *$Y \in H$ uzavřený podprostor invariantní vůči T a $T^\star \implies T|_Y$ je samoadjungovaný.*

Důkaz
1. Pro $T = T^\star$ je $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ a tedy to je trivialita.

2. Ať $x_1 \in \operatorname{Ker}(\lambda_1 I - T)$, $x_2 \in \operatorname{Ker}(\lambda_2 I - T)$, pak $\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle Tx_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Tx_2 \rangle = \overline{\lambda_2} \langle x_1, x_2 \rangle$. Tedy $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

3. Plyne ihned z předchozí věty 2. bod.

4. $\forall x, y \in Y$ máme $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$. □

Věta 10.14 (Spektrální rozklad samoadjungovaného kompaktního operátoru (D. Hilbert (1904), Erhard Schmidt (1907)))

Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{K}(H)$ je samoadjungovaný. Pak existuje ortonormální báze B prostoru H tvořená vlastními vektory T. Vektorů z B příslušných nenulovým vlastním číslům T je spočetně mnoho, a seřadíme-li je libovolně do prosté posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^N$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, pak $\{e_n\}$ je ortonormální báze $\overline{\operatorname{Rng} T}$ a pro každé $x \in X$ je

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

kde λ_n je vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru e_n.

Důkaz (Jen za pomoci minulého lemmatu)
Ať B je sjednocením ON bází vlastních podprostorů. Označíme $Y = \overline{\operatorname{span}} B$. Chceme „$Y^\perp = \{0\}$“: 1. krok: Y je invariantní vůči T a $T^\star$. Ať $e_n \in B$, pak $T(e_n) = \lambda_n e_n \in Y$, $T^\star(e_n) = \overline{\lambda_n} e_n \in Y \implies T(\overline{\operatorname{span}}(e_n)) \subseteq Y$ a $T^\star(\overline{\operatorname{span}}(e_n)) \subseteq Y$.

2. krok: $Y^\perp$ je invariantní vůči T a $T^\star$. Ať $Z \in Y^\perp$, pak

$$\forall y \in Y : \langle Tz, y \rangle = \left\langle z, T^\star y \right\rangle = 0, \qquad \left\langle T^\star z, y \right\rangle = \langle z, Ty \rangle = 0.$$

Dle 1. bodu minulého lemmatu $T|_{Y^\perp}$ je samoadjungovaný a kompaktní. Navíc $\sigma_P(T|_{Y^\perp}) = \emptyset \implies T|_{Y^\perp} = 0$.

3. krok: $Y^\perp \subseteq \operatorname{Ker} T \subseteq Y \implies Y^\perp = Y^\perp \cap Y = \{0\}$. □

11 Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

Definice 11.1

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Konvoluce funkce f s funkcí g je funkce $f * g$ definovaná jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)d\mu(y)$$

pro taková $x \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál konverguje.

Věta 11.1

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g, h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

1. *Operace $*$ je komutativní (funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny).*
2. *Operace $*$ je distributivní vzhledem ke sčítání ($(f+g)*h = f*h+g*h$ na definičních oborech pravých stran).*

Důkaz

1. $(f * g)(x) = C \int f(y)g(x-y)dy = C \int f(x-z)g(z)dz = (g * f)(x)$.

2. $(f * (g+h))(x) = C \int f(y)(g+h)(x-y)d\lambda^d(y) =$

$$= C \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)d\lambda^d(y) + \int_{\mathbb{R}^d} f(y)h(x-y)d\lambda^d(y) \right) = (f * g)(x) + (f * h)(x)$$

$$(f+g) * h = h * (f+h) = h * f + h * g = f * h + g * h.$$

□

Lemma 11.2

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g \in L_1(\mu)$. Položíme-li $F(x,y) = f(y)g(x-y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^d$, pak $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $||F||_1 = ||f||_1 \cdot ||g||_1$.

Důkaz

$$\int\int |F(x,y)|d(\mu \times \mu)(x,y) = \int |f(y)| \int |g(x-y)|dxdy = \int |f(y)| \cdot ||g||_1 dy =$$
$$= ||f(y)||_1 \cdot ||g||_1.$$

□

Definice 11.2 (Posun)

Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x{-}y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 11.3

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f \in L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$. Pak zobrazení $\tau : \mathbb{R}^d \to L_p(\mu)$ dané předpisem $\tau(x) = \tau_x f$ je stejnoměrně spojité.

Důkaz

$$\tau_x f \in L_p : \int |\tau_x f(y)|^p dy = \int |f(x-y)|^p dy = \int |f(z)|^p dz \implies ||\tau_x f||_p = ||f||_p.$$

Zvol $\varepsilon > 0$, $f \in L_p$. Ať $g \in \mathcal{L}_C(\mathbb{R}^d)$, že $||f-g||_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Ať $B = B(0,r)$, že $\overline{g \neq 0} \subseteq B(0, r-1)$ (pro nějaké $r > 1$). Protože g je stejnoměrně spojitá na B,

$$\exists \sigma \in (0,1)\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d : ||x-y|| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \varepsilon'.$$

Ať $x, y \in \mathbb{R}^d$, $||x-y|| < \delta$. Pak

$$||\tau_x f - \tau_y f||_p \le ||\tau_y (f-g)|| + ||\tau_y g - \tau_x g|| + ||\tau_x (g-f)|| \le \frac{\varepsilon}{3} + ||\tau_y g - \tau_x g|| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$||\tau_x g - \tau_y g||_p^p = \int |g(t-x) - g(t-y)|^p dt = \int |g(z) - g(z+x-y)|^p dz =$$

(Jelikož pokud $g(z) \neq 0$, pak $z + x - y \in B(0, r-1+1) = B$. Obdobné pro $g(z+x-y)$.)

$$= |\int_B g(z) - g(z+x-y)|^p dz \le (\varepsilon')^p \cdot \mu(B) \le \frac{\varepsilon}{3},$$

pokud ε' zvolíme jako $\sqrt[p]{\frac{\varepsilon}{3\mu(B)}}$. $\square$

Věta 11.4

Nechť mu je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

1. *Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \le p, q \le \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^n$, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $||f * g||_\infty \le ||f||_p ||g||_q$.*

2. *Je-li $f \in L_1^{loc}(\mu)$ a jestliže $g \in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je spojitá a platí* $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.[a]

3. *Jsou-li f, d měřitelné, $D \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f * g$ je definována alespoň na D, pak $f * g$ je měřitelná na D.*

4. *Jsou-li $f, g \in L_1(\mu)$, pak $f * g$ je definovaná μ-skoro všude na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_1(\mu)$ a platí $||f * g||_1 \le ||f||_1 \cdot ||g||_1$.*

Důkaz
1. $\forall x \in \mathbb{R}^d : |f * g(x)| \leq \int |f(y)g(x-y)|dy \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$ z Höldera, pokud $p \neq 1, \infty$, $\leq ||g||_\infty \int |f(y)|dy = ||g||_\infty ||f||_1$, pokud $p = 1$ a analogicky, pokud $p = \infty$.

Tedy $f * g$ je definována všude a $||f + g||_\infty \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$. Zbývá „$f * g$ je stejnoměrně spojitá“: máme ($h(t) := g(-t)$, τ jsou správně posuny) pro $p \neq 1$:

$$|(f*g)(x) - (f*g)(y)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z)(g(x-z) - g(y-z))dz \right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)(h(z-x) - h(z-y))|dz \leq ||f||_p \cdot ||\tau_x h - \tau_y h||_q.$$

Dle předchozí věty je $f * g$ stejnoměrně spojitá ($p \neq 1$). Pro $p = 1$ můžeme použít komutativitu a prohodit p a q.

2. Máme

$$|(f*g)(x)| \leq \int |f(y)g(x-y)|dy = \int_{y \in x-K} |f(y)| \cdot |g(x-y)|dy \leq ||g||_\infty \int_{y \in x-K} |f(y)|dy < \infty$$

$\implies f * g$ je definovaná všude.

Supporty: Ať $x \notin \overline{\{f \neq 0\}} + \overline{\{g \neq 0\}}$ pak $(f*g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int_{f \neq 0} f(y)g(x-y)dy = 0$. Tedy $\{f * g \neq 0\} \subset \overline{\{f \neq 0\}} + \overline{\{g \neq 0\}}$, tudíž (vpravo je kompakt) $\overline{\{f * g \neq 0\}} \subset \overline{\{f \neq 0\}} + \overline{\{g \neq 0\}}$

Spojitost: Ať x dáno, $y \in B(x, 1)$. Pak ($h(z) = (\xi_{B(x,1)-K} f)(-z)$, τ jsou správné posuny)

$$|(f*g)(x) - (f*g)(y)| = \left| \int_K g(z)(f(x-z) - f(y-z))dz \right| =$$

$$= \left| \int_K g(z)(\tau_x h(z) - \tau_y(h(z)))dz \right| \leq ||g||_\infty \cdot ||\tau_x h - \tau_y h||_1.$$

To je stejnoměrně spojitý a z toho již plyne spojitost $(f * g)$ (v bodě x).

3. Vynechán. 4. (nemusí být ke zkoušce): $F(x, y) = f(y)g(x-y)$. Dle lemmatu výše je $F \in L_1(\mu \times \mu)$, $||F|| = ||f|| \cdot ||g||$.

$$\infty > \int_{(\mathbb{R}^d)} F = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dydx \implies |(f*g)(x)| < \infty \text{ skoro všude.}$$

Dále $||f * g||_1 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |F(x, y)|dydx = ||f|| \cdot ||g||$. □

---

[a]

$$L_1^{loc} \equiv \forall x \in \mathbb{R}^d \ \exists B(x, r) : \int_{B(x,r)} |f| < \infty$$

$$\Leftrightarrow \forall K \subset \mathcal{R}^d \text{ kompaktní} : \int_K |f| < \infty.$$

Definice 11.3 (Multiindex)

Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme multiindexem délky d. Řádem multiindexu α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^d \alpha_j$ a značíme jej $|\alpha|$.

Je-li α multiindex délky d, pak symbolem D^α označíme parciální derivaci řádu $|\alpha|$ danou multiindexem α, tj.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Symbol D^α se též nazývá diferenciální operátor.

Definice 11.4 (Prostor testovacích funkcí)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$. Množina

$$D(A, \mathbb{K}) = \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}) |\, \operatorname{supp} \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } A\right\}$$

se nazývá prostor testovacích funkcí na A.

Věta 11.5

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Je-li $f \in L_1^{loc}(\mu)$ a $g \in D(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ pro každý multiindex α délky d.

Důkaz

1. Víme $f * D^\alpha g$ je spojitá pro každé α dle předchozí věty bod 2. Tedy stačí $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$. To dokážeme indukcí podle $|\alpha| = k$: Pro $k = 1$ zafixujme $x \in \mathbb{R}^d$, $j \in [d]$. $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x + te_j - y) dy$. Pak $\varphi'(0) = \frac{\partial (f*g)}{\partial x_j}(x)$.

Chceme prohodit integrál a derivaci:

$$|\frac{\partial}{\partial t} F(t, y)| = |y \mapsto f(y) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x + te_j - y)| \leq$$

(to je nenula jen na kompaktu K)

$$\leq |\xi_K f| \cdot |\frac{\partial g}{\partial x_j}| \in L_1.$$

Ověřili jsme předpoklady o integrálu závislém na parametru, tedy

$$\varphi'(0) = \int f(y) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x - y) dy = \left(f * \frac{\partial g}{\partial x_j}\right)(x).$$

Ať $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j}$. Pak $D^\alpha(f * g) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f * D^{\alpha - e_j} g) = f * \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j} g = f * D^\alpha$. $\square$

Definice 11.5 (Regularizační jádro)

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat regularizačním jádrem (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $||g||_1 = 1$.

Věta 11.6

Nechť μ je kladným násobkem Lebesqgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, g je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$ a $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.

1. *Pokud je f stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$, potom $f * g_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*
2. *Pokud $f \in L_p(\mu)$ a $1 \leq p < \infty$, potom $f * g_n \xrightarrow{L_p} f$.*

Poznámka

$$\int g_n(x)dx = \int g(y)dy = 1$$

podle věty o substituci.

Důkaz

1. $f \in L_\infty \implies f * g_n$ definována všude (podle předchozí poznámky a tvrzení výše). Zafixujeme $\varepsilon > 0$.

Zvolme $R > 0$, že $\int_{B(0,R)} g > 1 - \frac{\varepsilon}{4||f||_\infty}$. Dále $\delta > 0$, že $|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$. n zvolíme tak, že $\frac{R}{n} < \delta$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^d |\left(f * g_n\right)(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) f(x-y) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) dy \right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) |f(x-y) - f(x)| dy =$$

$$= \int_{B(0,\frac{R}{n})} g_n(y) \underbrace{|f(x-y) - f(x)|}_{\frac{\varepsilon}{2}} dy + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\frac{R}{n})} \dots dy \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{B(0,\frac{R}{n})} n^d g(ny) dy + 2||f||_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\frac{R}{n})} n^d g(ny) dy =$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_{B(0,R)} g(z) dz + 2||f||_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\frac{R}{2})} g(z) dz < \varepsilon.$$

2. Důkaz vynecháme. □

Důsledek
Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $1 \leq p < \infty$. Pak množina $D(\Omega)$ je hustá v prostoru $L_p(\Omega, \mu)$ (ve smyslu restrikce na Ω).

Definice 11.6

Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak Fourierovou transformací funkce f rozumíme funkci $\hat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ definovanou jako

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle} d\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle} d\lambda_d(x), \qquad t \in \mathbb{R}^d.$$

Definice 11.7

(Banachovým) prostorem $C_b(\mathbb{R}^d) = C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ s normou $||f||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Definice 11.8

(Banachovým) prostorem $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\left\{x \in \mathbb{R}^d | |f(x)| \geq \varepsilon\right\}$ omezená. Na $C_0(\mathbb{R}^d)$ uvažujeme normu $||f||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Lemma 11.7 (Georg Friedrich Bernhard Riemann (1835), H. Lebesgue (1903))

Ať $f \in L_1(\mu_d)$. Pak

$$\lim_{||t|| \to \infty} \int f(x) e^{-i\langle t,x\rangle} d\mu_d(x) = 0$$

Důkaz

$$\forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{o}\} : \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle} d\mu_d(x) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} -f(x) e^{-i\left\langle t, x + \pi \frac{t}{||t||^2} \right\rangle} \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} -f\left(u - \pi \frac{t}{||t||^2}\right) e^{-i\langle t,u\rangle} d\mu \right|.$$

Sečtením polovin obou stran rovnice dostaneme

$$\frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left(f(x) - f\left(x - \pi \frac{t}{||t||^2}\right)\right) e^{-i\langle t,x\rangle} dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left| f(x) - f\left(x - \pi \frac{t}{||t||^2}\right) \right| dx =$$

$$= \frac{1}{2} ||\tau_0 f - \tau_P \pi \frac{t}{||t||^2} f||_1 \to 0.$$

$\square$

Věta 11.8

Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ a $j \in [d]$. Fourierova transformace má následující vlastnosti:

1. $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ *a* $||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$. *Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru* $L_1(\mathbb{R}^d)$ *do prostoru* $C_0(\mathbb{R}^d)$.
2. *Nechť* $y \in \mathbb{R}^d$. *Pak* $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-\langle y,t\rangle}\hat{f}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$ *a naopak pro funkci* $h(x) = e^{i\langle y,x\rangle}f(x)$ *platí* $\hat{h} = \tau_y \hat{f}$.
3. *Je-li* $c > 0$ *a* $h(x) = f\left(\frac{x}{c}\right)$, *pak* $\hat{h}(t) = c^d \hat{f}(ct)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$.
4. *Je-li* $h(x) = \overline{f(-x)}$, *pak* $\hat{h} = \overline{\hat{f}}$.
5. $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.
6. $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} g d\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f \hat{g} \mu_d$.
7. *Jestliže pro funkci* $h(x) = -ix_j f(x)$ *platí* $h \in L_1(\mu_d)$, *pak* $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}(t) = \hat{h}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$.
8. *Jestliže* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *existuje všude na* $\mathbb{R}^d$ *a jestliže* $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, *pak* $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j \hat{f}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$.

Důkaz (1.)
Nechť $t \in \mathbb{R}^d$ a $\{t_n\}$ je posloupnost v $\mathbb{R}^d$ konvergující k t. Pak díky spojitosti skalárního součinu pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí $f(x)e^{-i\langle t_n,x\rangle} \to f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}$. Protože $|f(x)e^{-i\langle t_n,x\rangle}| = |f(x)|$, je podle Lebesgueovy věty

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t_n,x\rangle} d\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle} d\mu_d = \hat{f}(t).$$

Tedy $\hat{f}$ je spojitá v t. Dále zjevně $|\hat{f}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| d\mu_d(x) = ||f||_1$. Fakt, že $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ nyní plyne z předchozího lemmatu. Konečně linearita Fourierovy transformace je zřejmá z definice. □

Důkaz (2.)
Z věty o substituci pro $t \in \mathbb{R}^d$:

$$\widehat{\tau_y f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)e^{-i\langle t,x\rangle} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-i\langle t,u\rangle}e^{-i\langle t,y\rangle} d\mu_d(u) = e^{-i\langle y,t\rangle}\hat{f}(t).$$

$$\hat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle y,x\rangle} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t-y,x\rangle} d\mu_d(x) = \hat{f}(t-y) = \tau_y \hat{f}(t).$$

□

Důkaz (3.)
Z věty o substituci pro $t \in \mathbb{R}^d$:

$$\hat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{x}{c}\right) e^{-i\langle t,x\rangle} d\mu_d(x) = |c|^d \int_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-i\langle t,cu\rangle} d\mu_d(u) = |c|^d \hat{f}(ct).$$

□

Důkaz (4.)
Z věty o substituci pro $t \in \mathbb{R}^d$:

$$\hat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)} e^{-i\langle t,x\rangle} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x) e^{-i\langle t,-x\rangle}} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x) e^{-i\langle t,x\rangle}} d\mu_d(x) = \overline{\hat{f}(t)}.$$

□

Důkaz (5.)
Zvolme pevně libovolné $t \in \mathbb{R}^d$. Dle lemmatu výše je funkce $F(x,y) = f(y)g(x-y)e^{-i\langle t,x\rangle}$ měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. Dále $|F(x,y)| = |f(y)| \cdot |g(x-y)|$ a aplikujeme lemma výše na $|F|$, dostaneme, že $F \in L_1(\mu_d \times \mu_d)$. Můžeme tedy použít Fubiniovu větu a substituci $\varphi(u) = u + y$ k výpočtu

$$\widehat{f * g}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) e^{-i\langle t,x\rangle} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) d\mu_d(y) \right) e^{-i\langle t,x\rangle} d\mu_d(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) e^{-i\langle t,x\rangle d\mu_d(x)} \right) d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(u) e^{-i\langle t,u+y\rangle} d\mu_d(u) \right) d\mu_d(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle t,y\rangle} d\mu_d(y) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g(u) e^{-i\langle t,u\rangle} d\mu_d(u) = \hat{f}(t)\hat{g}(t).$$

□

Důkaz (6.)
Položme $F(x,y) = f(y)g(x)e^{-i\langle x,y\rangle}$. Pak F je dle lemmatu výše měřitelná na $\left(\mathbb{R}^d\right)^2$. Máme

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x,y)| d\mu_d(x) \right) d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| d\mu_d(x) \right) \mu_d(y) = ||f||_1 ||g||_1 < \infty,$$

podle Fubiniovy věty, tedy $F \in L_1(\mu_d \times \mu_d)$. Proto můžeme použít Fubiniovu větu ještě jednou k výpočtu

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) g(x) d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle x,y\rangle} d\mu_d(y) \right) g(x) d\mu_d(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle x,y\rangle} g(x) d\mu_d(x) \right) d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \hat{g}(y) d\mu_d(y).$$

□

Důkaz (7.)
Zvolme pevně $t \in \mathbb{R}^d$ a položme $\varphi(u) = \hat{f}(t + ue_j)$ pro $u \in \mathbb{R}$. Dále položme $F(u, x) = f(x)e^{-i\langle t+ue_j, x\rangle}$ pro $u \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}^d$ a všimněme si, že $\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^d} F(u, x)d\mu_d(x)$. Pak pro každé $u \in \mathbb{R}$ je funkce $x \mapsto F(u, x)$ měřitelná. Dále pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $u \in \mathbb{R}$ je $\frac{\partial f}{\partial u}(u, x) = -ix_j f(x)e^{-i\langle t+ue_j, x\rangle} = h(x)e^{-i\langle t+ue_j, x\rangle}$, takže $\left|\frac{\partial F}{\partial t}(u, x)\right| = |h(x)|$. Dle předpokladu je tedy h integrovatelná majoranta. Konečně, zjevně $x \mapsto F(0, x) \in L_1(\mu_d)$. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru tak máme $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}(t) = \varphi'(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial F}{\partial u}(0, x)d\mu_d(x) = \hat{h}(t)$. □

Důkaz (8.)
Díky následujícímu lemmatu máme

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)e^{-i\langle t, x\rangle}d\lambda(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(-it_j)e^{-i\langle t, x\rangle}d\lambda(x) = it_j\hat{f}(t).$$

□

Lemma 11.9

Nechť $f \in L_1(\mathbb{R}^d, \lambda)$, $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je omezená a $j \in [d]$. Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ existují všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_b(\mathbb{R}^d)$, pak $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}d\lambda = -\int_{\mathbb{R}^d} f\frac{\partial g}{\partial x_j}d\lambda$.

Důkaz (Náznak pro $d = 1$)
Podle předpokladu je funkce fg' spojitá na $\mathbb{R}$ a má konvergentní Lebesgueův integrál. Tedy existuje i konečný Newtonův integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)dx$. Dále si můžeme všimnout, že $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (jinak by f nebyla z L_1, důkaz existence je přenechán čtenáři). Podle věty o integraci per partes tedy máme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g(x)dx.$$

Integrál vlevo konverguje dle předpokladů, tedy rovnost platí. □

Lemma 11.10

Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$. Položme $g_n(x) = n^d\hat{g}(-nx)$ a $h_n(x) = g\left(\frac{x}{n}\right)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)e^{i\langle t, x\rangle}h_n(t)d\mu_d(t)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz
Nechť $n \in \mathbb{N}$. Protože g_n je omezená, je $f * g_n$ definovaná na celém $\mathbb{R}^d$. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}^d$ tedy máme

$$(f * g_n)(x) = (g_n * f)(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g_n(y) d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) n^d \hat{g}(-ny) d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+t) n^d \hat{g}(nt) d\mu_d(t) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \tau_{-x} f(t) \widehat{h_n}(t) d\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\tau_{-x} f}(t) h_n(t) d\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} h_n(t) d\mu_d(t),$$

přičemž při výpočtu jsme použili postupně substituci $\varphi(y) = -y$ a předchozí větu. □

Věta 11.11 (O inverzi)

Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Je-li $\hat{f} \in L_1(\mu_d)$, pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d$ platí

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} d\mu_d(t) = \hat{\hat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Důkaz (TODO vlastnosti g)
Nechť $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je funkce $g(x) = e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|}$. Pak $x \mapsto \hat{g}(-x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \frac{1}{1+t_j^2}$ je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$. Všimněme si též, že $g(0) = 1$. Nechť g_n a h_n jsou funkce z předchozího lemmatu. Podle toho pro libovolné $x \in \mathbb{R}^d$ platí, že $(f * g_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} d\mu_d(t)$. Pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ je $h_n(t) \to g(0) = 1$. Protože $|\hat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} h_n(t)| \leq |\hat{f}(t)|$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a dle předpokladu $\hat{f} \in L_1(\mu_d)$, můžeme použít Lebesgueovu větu. Dostáváme tak $f * g_n(x) \to \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} d\mu_d(t)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Na druhou stranu podle věty o regularizačním jádru platí, že $f * g_n \to f$ v $L_1(\mu_d)$. Existuje tedy posloupnost $\{g_{n_k}\}$ taková, že $(f * g_{n_k})(x) \to f(x)$ pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d$. Z jednoznačnosti limity pak dostáváme, že $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} d\mu_d(t)$ pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Předpokládejme nyní, že je f navíc spojitá. Protože $x \mapsto \hat{\hat{f}}(-x)$ je spojitá dle věty o vlastnosti FT a $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$ na husté podmnožině $\mathbb{R}^d$, musejí se tyto funkce rovnat všude. □

Důsledek
Fourierova transformace $\mathcal{F} : L_1(\mu_d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ je prosté zobrazení. Je-li $g \in L_1(\mu_d)$ a $\hat{g} \in L_1(\mu_d)$, pak $g \in \operatorname{Rng} \mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \hat{g}(-x)$ pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Důsledek
Jsou-li $f, g \in L_1(\mu_d)$ takové, že $\hat{f}, \hat{g}, fg, \widehat{fg} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$.

Definice 11.9 (Schwartzův prostor)

Schwartzův prostor na $\mathbb{R}^d$ je definován následujícím způsobem:

$$\mathcal{S}_d = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) | P D^\alpha f \text{ je omezená pro každé } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ a každý polynom } P \text{ na } \mathbb{R}^d \right\}.$$

Lemma 11.12

Pro $N \in \mathbb{N}$ je funkce $x \mapsto (1+||x||^2)^N$ polynom na $\mathbb{R}^d$. Pro každý polynom P na $\mathbb{R}^d$ existují $N \in \mathbb{N}$ a $C > 0$ taková, že $|P(x)| \leq C(1+||x||^2)^N$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$.

Důkaz (Na přednášce byl pouze náznak)

První tvrzení je vidět z rozpisu $(1+||x||^2)^N = \left(1 + \sum_{j=1}^d x_j^2\right)^N$. Dále nechť $P(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| < k} c_\alpha x^\alpha$. Položme $C = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| < k} |c_\alpha|$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $j \in [d]$ máme $|x_j| \leq ||x|| \leq 1 + ||x||^2$ (neboť $||x|| \leq 1$ nebo $||x|| \leq ||x||^2$). Tedy

$$P(x) \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| < k} |c_\alpha| \cdot |x_1|^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot |x_d|^{\alpha_d} \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| < k} |c_\alpha| (1+||x||^2)^{|\alpha|} \leq C(1+||x||^2)^k.$$

$\square$

Lemma 11.13

Nechť $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $N > \frac{d}{2p}$ a $h(x) = \frac{1}{(1+||x||^2)^N}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $h \in L_p(\mu_d)$.

Důkaz (Na přednášce pouze náznak)

Podle věty o substituci použité na sférické souřadnice a dále podle Fubiniovy věty (integrujeme spojitou nezápornou funkci) platí

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{(1+||x||^2)^N} \right)^p d\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+||x||^2)^{pN}} d\lambda_d =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi} \ldots \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^{d-1}}{(1+r^2)^{pN}} \sin^{d-2} \varphi_1 \sin^{d-2} \varphi_1 \ldots \sin \varphi_{d-2} d\varphi_{d-2} \ldots d\varphi_1 dr =$$

$$= C_d \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{(1+r^2)^{pN}} dr,$$

kde konstanta $C_d > 0$ závisí jen na dimenzi d. Poslední integrál ovšem konverguje, neboť $2pN - d + 1 > 1$. $\square$

Tvrzení 11.14

Schwartzův prostor má následující vlastnosti:

1. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{1 \leq p < \infty} L_p(\mu_d)$.*
2. *Je-li $f \in \mathcal{S}_d$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ a $h(x) = f(ax+b)$, pak $h \in \mathcal{S}_d$.*

3. *Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a α multiindex délky d, pak $D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$.*

4. *Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a jestliže $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ je omezená a má omezené všechny parciální derivace všech řádů (speciálně, je-li $g \in \mathcal{S}_d$), pak $fg \in \mathcal{S}_d$.*

5. *Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ polynom, pak $Pf \in \mathcal{S}_d$.*

Důkaz (Pouze 1.)
Vztahy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d)$ již známe. Nechť $1 \leq p < \infty$. Podle předchozího lemmatu existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že funkce $x \mapsto \frac{1}{(1+||x||^2)^N}$ leží v $L_p(\mu_d)$. Je-li nyní $f \in \mathcal{S}_d$, pak existuje $C > 0$ takové, že $|f(x)|^p \leq \frac{C^p}{(1+||x||^2)^{Pn}}$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$, takže podle srovnávacího kritéria $f \in L_p(\mu_d)$. □

Tvrzení 11.15

Nechť $f \in \mathcal{S}_d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Pak $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \hat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a $D^\alpha \hat{f} = \widehat{m_\alpha f}$, kde $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

Důkaz
První vzorec plyne snadno indukcí dle $|\alpha|$ z věty o vlastnostech FT, přičemž v indukčním kroku jsou předpoklady splněny, neboť $D^\beta f \in \mathcal{S}_d \subset L_1(\mu_d)$ pro každé $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ dle vlastností Schwartzova prostoru.

Druhý vzorec plyne snadno indukcí dle $|\alpha|$ z věty o vlastnostech FT, přičemž v indukčním kroku jsou předpoklady splněny, neboť $m_\alpha f \in \mathcal{S}_d \subset L_1(\mu_d)$ dle vlastností Schwartzova prostoru. □

Definice 11.10

Pro $n \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathcal{S}_d$ položme

$$\nu_N(f) = \max_{|\alpha| \leq N} \left|\left| x \mapsto (1 + ||x||^2)^N \cdot D^\alpha f(x) \right|\right|_\infty .$$

Definujeme dále funkci $\sigma : \mathcal{S}_d \times \mathcal{S}_d \to [0, \infty)$ předpisem

$$\sigma(f, g) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \min \{\nu_N(f - g), 1\}, \qquad f, g \in \mathcal{S}_d.$$

Věta 11.16

$(\mathcal{S}_d, \sigma)$ je úplný metrický prostor splňující následující vlastnosti:

1. *Je-li (f_n) posloupnost v $\mathcal{S}_d$ a $f \in \mathcal{S}_d$, pak $f_n \xrightarrow{\sigma} f$, právě když pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ platí, že*

$$(1 + ||x||^2)^N \cdot D^\alpha f_n(x) \to (1 + ||x||^2)^N \cdot D^\alpha f(x) \text{ stejnoměrně na } \mathbb{R}^d.$$

2. *Jestliže $f_n \to f$ v prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$, pak $f_n \to f$ v $L_p(\mu_d)$ pro každé $1 \leq p < \infty$.*
3. *Je-li α multiindex délky d, P polynom na $\mathbb{R}^d$ a $g \in \mathcal{S}_d$, pak zobrazení $f \mapsto D^\alpha f$, $f \mapsto Pf$, $f \mapsto gf$ jsou spojitá jakožto zobrazení z $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ do $(\mathcal{S}_d, \sigma)$.*

Důkaz
Vynechán. $\square$

Důsledek
Pro $f, g \in \mathcal{S}_d$ platí $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$. Speciálně, prostor $\mathcal{S}_d$ je uzavřený na konvoluci.

Důkaz
Vynechán. $\square$

Věta 11.17

Existuje právě jedna lineární izometrie $F : L_2(\mu_d) \to L_2(\mu_d)$ na taková, že $F(f) = \hat{f}$ pro každou $f \in L_2(\mu_d) \cap L_1(\mu_d)$.

Důkaz
Vynechán. $\square$