Příklad (7.7)
Uvažujme aritmetický afinní prostor $\mathbb{R}^4$ se zaměřením $\mathbb{R}^4$. Definujme jeho podprostory

$$D_1 = \mathrm{AO}\left\{\begin{pmatrix}4\\-4\\6\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-1\\9\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-3\\7\\-1\end{pmatrix}\right\},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix}1\\-12\\9\\9\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-1\\-4\end{pmatrix}\right\}.$$

Pro oba podprostory určete jejich dimenzi a nalezněte jejich rovnicové vyjádření. Určete jejich vzájemnou polohu a v případě různoběžnosti i jejich průsečík.

Řešení (Dimenze a rovnice)
Jako první přepíšeme D_1 do „parametrického“ tvaru: $D_1 =$

$$\begin{pmatrix}4\\-4\\6\\2\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}5\\-1\\9\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-4\\6\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-3\\7\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-4\\6\\2\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}4\\-4\\6\\2\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\-3\end{pmatrix}\right\},$$

Zřejmě jsou v „LO“ v obou případech nezávislé vektory (buď na první pohled vidíme, že jsou nezávislé, nebo spočítáme determinant prvních dvou souřadnic). Tedy $\dim D_1 = \dim D_2 = 2$. Jsou to tedy ($\mathbb{R}^2$) roviny v $\mathbb{R}^4$, tudíž jsou rovnicově vyjádřeny jako hodnoty skalárního součinu souřadnic s nezávislými „normálovými“ vektory.

Vektory kolmé na roviny spočítáme jednoduše jako vektory kolmé na „LO“, tedy řešení rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&3&1&0\\2&1&1&-3&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}0&1&1&1&0\\2&1&1&-3&0\end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-2&0&0\\2&2&-1&-4&0\end{array}\right),$$

Tedy rovnice budou například (můžu zvolit libovolná dvě nezávislá řešení u obou rovnic)

$$\begin{array}{rccccccccccc}D_1: & 0 & + & y & - & z & + & 0 & + & c_1 & = & 0\\ & -2x & + & y & + & 0 & - & u & + & c_2 & = & 0\\ D_2: & 2x & + & 2y & + & 4z & + & 1u & + & c_3 & = & 0\\ & 8x & + & 0 & + & 4z & + & 3u & + & c_4 & = & 0\end{array}$$

Když dosadíme z obou roviny do jejich rovnic bod, který máme, vyjde nám $c_1 = 10$, $c_2 = 14$, $c_3 = 23$ a -71, tedy:

$$\begin{array}{rccccccccccc}D_1: & 0 & + & y & - & z & + & 0 & + & 10 & = & 0\\ & -2x & + & y & + & 0 & - & u & + & 14 & = & 0\\ D_2: & 2x & + & 2y & + & 4z & + & 1u & + & 23 & = & 0\\ & 8x & + & 0 & + & 4z & + & 3u & - & 71 & = & 0\end{array}$$

Řešení (Vzájemná poloha)
Pro vzájemnou polohu nejdříve najdeme průsečík. Řešíme tedy soustavu rovnic:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&-1&0&-10\\-2&1&0&-1&-14\\2&2&4&1&-23\\8&0&4&3&71\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}0&1&-1&0&-10\\0&3&4&0&-37\\0&8&12&1&-163\\8&0&4&3&71\end{array}\right).$$

Průsečík je tedy pouze bod $(33, -11, -1, -63)^T$. Tedy roviny jsou různoběžné.