

Organizační úvod

Poznámka

1 Úvod

Definice 1.1 (Diferenciální rovnice)

Diferenciální rovnice je rovnice, která obsahuje derivaci.

Poznámka (Motivace)

Fyzika (např. pružina: $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$), ekonomie (např. rovnice majetku?: $k' = \alpha \cdot k - c(t)$), biologie (např. model dravec-kořist: $d' = \alpha \cdot d \cdot k - \beta \cdot d \wedge k' = \gamma \cdot k - \delta \cdot d \cdot k$).

Poznámka (Co nás zajímá na DR)

Přesné řešení (často neumíme spočítat), existence a jednoznačnost řešení, jaké vlastnosti má řešení.

Poznámka (Předpoklady)

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $(x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times I$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x' = f(x, t)$. $I \subset \mathbb{R}$.

Definice 1.2 (Obyčejná diferenciální rovnice, řešení)

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice $x' = f(x, t)$ z předchozí poznámky.

Funkce $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je řešení DR, jestliže

- $\forall t \in I : (x(t), t) \in \Omega$,
- $\forall t \in I$ existuje vlastní derivace $x'(t)$,
- $\forall t \in I$ platí $x'(t) = f(x(t), t)$.

┌
Poznámka

└ První dvě podmínky jsou jen existenční podmínky k rovnici ve třetím bodě.

Typicky má DR nekonečně mnoho řešení, přidáváme proto počáteční podmínku $(x_0, t_0) \in \Omega$, $t_0 \in I$.

Lemma 1.1

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá a $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitou a takovou, že graf x ($\{(x(t), t) | t \in I\}$) leží v Ω . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- x je řešení DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$;
- $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds \quad \forall t \in I$.

┌

Důkaz

„ \implies “: x a f je spojitá, tedy $x' = f(x(t), t)$ je spojitá, tj. $x \in C^1(I) \implies \int_{t_0}^t x'(s) ds = x(t) - x(t_0)$.

„ \impliedby “: jelikož f i s je spojitá, tak integral je diferencovatelný a $x(t)$ je spojitá, tedy

$$x'(t) = 0 + f(x(t), t) \wedge x(t_0) = t_0 + 0.$$

└

□

Věta 1.2 (Peanova věta o lokální existenci)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá a $(x_0, t_0) \in \Omega$. Potom $\exists \delta > 0$ a funkce $x : B(t_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ taková, která je řešením DR a splňuje počáteční podmínku. (Stačí spojitá f a kompaktní Ω .)

Tvrzení 1.3 (Pomocné tvrzení)

Pokud $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ a f je omezená na Ω , pak $\forall T$ existuje řešení DR x na $[t_0 - T, t_0 + T]$ splňující počáteční podmínku.

┌

Důkaz

Když x_λ je definována na $[t_0 - \lambda, t]$, pak pravá strana má smysl $\forall t \in [t_0, t_0 + \lambda]$ tím pádem pravá strana integrálního tvaru má smysl $\forall t \in [t_0, t_0 + \lambda]$, tím pádem definujeme x_λ na $[t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$.

Nyní definujme $M := \{x_n|_{[t_0, t_0+T]}\}_{n=1}^\infty$ a ověříme, že M splňuje podmínky Arzela-Ascoliho věty:

$$|x_\lambda(t)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^t |f(x_\lambda(s - \lambda))| ds \leq |x_0| + \|f\|_\infty \cdot |t - t_0| \leq |x_0| + \|f\|_\infty \cdot T,$$

$$|x_\lambda(t) - x_\lambda(\tau)| = \left| \int_\tau^t f(x_\lambda(s - \lambda), s) ds \right| \leq \|f\|_\infty \cdot |t - \tau|.$$

Podle AA věty tedy existuje podposloupnost M , která konverguje stejnoměrně. Limitu si označme x , podposloupnost x_{n_k} .

Chceme dokázat, že x je řešení DR: TODO!!!

$$\lambda_k := \frac{1?}{n_k}$$

└

□

┌

Důkaz

Pro $\overline{K_1} \subset K_2$, $\overline{K_2} \subset \Omega$, $(x_0, t_0) \in K$, K_1 a K_2 kompaktní definujeme

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} 1, & (x, t) \in K_1, \\ 0, & (x, t) \in \Omega \setminus \overline{K_2}, \end{cases}$$

kterou spojitě dodefinujeme, a

$$\tilde{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t) \cdot \varphi(x, t), & (x, t) \in \Omega \\ 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dle prvního kroku (TODO?) $\exists \tilde{x}(t)$, $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\tilde{x}'(t) = \tilde{f}(\tilde{x}(t), t)$, $\tilde{x}(t_0) = x_0$.
 \tilde{x} je spojitá funkce $\implies \exists \delta > 0$ tak, že graf funkce $\tilde{x}|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$ leží v K_1 . Na K je $\tilde{f} = f$,
tedy $\tilde{x}'(t) = f(\tilde{x}(t), t)$, $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. □

└

1.1 Jednoznačnost řešení

Definice 1.3 (Lokální jednoznačnost, globální jednoznačnost)

Řekneme, že DR má vlastnost

- lokální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení $(x, I), (y, J)$ a $t_0 \in I \cap J, x(t_0) = y(t_0)$ pak $\exists \delta > 0 \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), x(t) = y(t)$,
- globální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení $(x, I), (y, J)$ a $t_0 \in I \cap J, x(t_0) = y(t_0)$, pak $\forall t \in I \cap J : x(t) = y(t)$.

Tvrzení 1.4

Globální jednoznačnost je ekvivalentní lokální jednoznačnosti.

┌

Důkaz

„ \implies “ je triviální. „ \impliedby “: Pro spor předpokládejme $\exists t_1 \in I \cap J, x(t_1) \neq y(t_1)$. BÚNO $t_1 > t_0$. Definujme

$$M := \{T \in I \cap J, t > t_0, x(t) \neq y(t)\} \neq \emptyset, \quad t_2 = \inf M.$$

Víme $x(t_2) = \lim_{t \rightarrow t_2^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_2^-} y(t) = y(t_2)$. Podíváme se lokální jednoznačností na bod t_2 . Tam existuje $\sigma > 0$ tak, že $\forall t \in (t_2 - \sigma, t_2 + \sigma) : x(t) = y(t)$. \nmid □

└

Definice 1.4 (Lokálně lipschitzovská)

Řekneme, že funkce $f = (x, t)$ je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x , jestliže

$$\forall (x_0, t_0) \in \Omega \exists \delta > 0 \exists L > 0 \forall t \in \mathcal{U}_\delta(t_0) \forall x, y \in \mathcal{U}_\delta(x_0) : |f(x, t) - f(y, t)| \leq L \cdot |x - y|$$

Věta 1.5 (Peanova věta o jednoznačnosti)

Buď f lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x , pak DR má v Ω vlastnost lokální jednoznačnosti.

┌

Důkaz

Ať $x(t), y(t)$ jsou řešení. $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds$. $x(t) - y(t) = \int_{t_0}^t (f(x(s), s) - f(y(s), s)) ds$. Vezmeme $\sigma > 0$. Grafy $x|_{[t-\sigma, t]}, y|_{[t-\delta, t+\delta]}$ leží v δ -okolí (x_0, t_0) .

$$\forall s \in [t - \sigma, t_0 + \sigma] : |f(x(s), s) - f(y(s), s)| \leq L \cdot |x(s) - y(s)|.$$

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(x(s), s) - f(y(s), s)| ds \leq \int_{t_0}^t L \cdot |x(s) - y(s)| ds, \quad t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \\ &\leq L \max_{s \in [t-\sigma, t+\sigma]} |x(s) - y(s)| \cdot \sigma \end{aligned}$$

└

□

Důsledek

Jestliže f je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x a $(x_0, t_0) \in \Omega$, pak

$$\exists \delta > 0 \exists ! x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ řešení DR s počáteční podmínkou } x(t_0) = x_0.$$

┌

Důkaz

Peanova věta o jednoznačnosti.

□

Tvrzení 1.6

Pokud $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ jsou spojitě v Ω , $j \in [n]$, pak f je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x .

┌

Důkaz

$$h(s) := f(x + s(y - x), t), s \in [0, 1], h(0) = f(x, t), h(1) = f(y, t).$$

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(s) ds = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + s(y - x)) \cdot (y_i - x_i) ds$$

$$\forall (x_0, t_0) \in \Omega \exists \mathcal{U}(x_0) \exists \mathcal{U}(t_0) M = \overline{\mathcal{U}(x_0)} \times \overline{\mathcal{U}(t_0)} \subset \Omega,$$

M je kompaktní, tedy $\exists K > 0 \forall (x, t) \in M : \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq K$. Tedy

$$|h(1) - h(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |(x + s(y - x))_i - x_i| ds \leq nK \cdot \max |y_i - x_i| \leq nK |x - y|.$$

└

□

2 Maximální řešení

Definice 2.1 (Prodloužení řešení, maximální řešení)

Řešení (\tilde{x}, \tilde{I}) je prodloužením řešení (x, I) , jestliže $\tilde{I} \supset I$ a $\forall t \in I : x(t) = \tilde{x}(t)$.

Řešení je maximální, pokud neexistuje netriviální prodloužení.

Věta 2.1 (O maximálním prodloužení)

Každé řešení (x, I) má alespoň jedno maximální prodloužení.

┌
Důkaz

Ať M je množina všech prodloužení (x, I) . Řekněme, že $(\tilde{x}, \tilde{I}) \leq (\hat{x}, \hat{I})$ právě tehdy, když (\hat{x}, \hat{I}) je prodloužení (\tilde{x}, \tilde{I}) .

Ať $N \subset M$ je řetězec (množina, na které je \leq lineární). Označme $I_0 = \bigcup_{(\tilde{x}, \tilde{I}) \in N} \tilde{I}$ a definujme $x : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ z toho, že $t \in I_0 \implies \exists (\tilde{x}, \tilde{I}) \in N, t \in \tilde{I}$, jako $x(t) = \tilde{x}(t)$.

Z Zornova lemmatu pak vyplývá, že existuje maximální řešení. □

Lemma 2.2

(x, I) řeší DR, $I = (a, b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \infty$. Pak řešení x lze prodloužit za bod b , když zároveň

- $b < \infty$;
- $\exists \lim_{t \rightarrow b} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$;
- $(x_0, b \in \Omega)$.

┌
Důkaz

„ \implies “ zřejmě, „ \impliedby “: Uvažujme DR s počáteční podmínkou $x(b) = x_0$. Dle Peanovy věty $\exists \tilde{x} : (b - \delta, b + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$. $x_1(t) = x(t)$, pokud $t \in (a, b)$, $\tilde{x}(t)$ jinak. x_1 tedy splňuje DR na (a, b) a $(b, b + \delta)$. Zbývá ověřit, že $x'_1(b) = f(x_1(b), b)$:

- x_1 je spojitá v b , neboť $\lim_{t \rightarrow b^-} x_1(t) = x_0 = \lim_{t \rightarrow b^+} x_1(t) = \tilde{x}(t)$.
- $\exists \lim_{t \rightarrow b^-} x'_1(t) = \lim_{t \rightarrow b^-} f(x(t), t) = f(x(b), b) = f(x_0, b)$.
- $\exists \lim_{t \rightarrow b^+} x'_1(t) = \lim_{t \rightarrow b^+} f(\tilde{x}(t), t) = f(\tilde{x}(b), b) = f(x_0, b)$.

└ □

Věta 2.3 (O opuštění kompaktu)

Bud' (x, I) maximální řešení DR. Nechť $K \subset \Omega$ kompaktní a $\exists t_0 : (x(t_0), t_0) \in K$. Pak $\exists t_1 > t_0, t_1 \in I$, že $(x(t_1), t_1) \in \Omega \setminus K$. $\exists t_2 \in I_2, t_2 < t_0$, že $(x(t_2), t_2) \in \Omega \setminus K$.

┌ *Důkaz*

Pro spor předpokládejme, že $\forall t_1 > t_0, t_1 \in I : (x(t_1), t_1) \in K$. Podle předchozí věty stačí dokázat $b < \infty$ (kdyby ne, tak K není kompaktní), $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \nearrow b$, $\{(x(t_k), t_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ vybereme konvergentní podposloupnost $(x(t_{k_n}), t_{k_n}) \rightarrow (x_0, t_0)$. Následně ověříme BC podmínku: víme $x(s) - x(t) = x'(\xi)(s - t)$, $\xi \in (s, t)$, tedy

$$|x(s) - x(t)| \leq |x'(\xi)| \cdot |s - t| = |f(x(\xi), \xi)| \cdot |s - t| \leq C \cdot |s - t|.$$

└ Zřejmě $(x_0, b) \in K \subset \Omega$, protože z kompaktního se nedá vykonvergovat. □

3 Závislost řešení na počáteční podmínce

Definice 3.1

Buď f v Ω lokálně Lipschitzovská vzhledem k x_0 . Řešící funkcí (DR) nazveme funkci $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^n : (t, t_0, x_0) \mapsto x(t)$, kde x je maximální řešení odpovídající DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$.

Věta 3.1 (Granwallovo Lemma)

Nechť $g, w : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g(t), w(t) \geq 0$, $\forall t \in I_0$. Nechť $t_0 \in I, K \geq 0$ a $\forall t \in I : w(t) \leq K + \left| \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds \right|$. Potom

$$w(t) \leq K \cdot \exp \left(\left| \int_{t_0}^t g(s)ds \right| \right).$$

┌ *Důkaz*

BÚNO $t > t_0$. Vezmeme $\varepsilon > 0$. Definujeme $\Phi(t) = K + \varepsilon + \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds$. $\Phi'(t) = w(t) \cdot g(t)$.

$$\Phi'(t) \leq g(t) \left(K + \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds \right) \leq g(t)\Phi(t), \quad \forall t \in (t_0, \sup I).$$

$$\forall t \in (t_0, \sup I) : \Phi(t) \geq 0. \quad \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq g(t), \quad \int_{t_0}^t \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} ds \leq \int_{t_0}^t g(s)ds.$$

$$\Phi(t_0) = K + \varepsilon, \quad \frac{\Phi(t)}{K + \varepsilon} \leq \exp \left(\int_{t_0}^t g(s)ds \right),$$

$$\Phi(t) \leq (K + \varepsilon) \exp \left(\int_{t_0}^t g(s)ds \right) \quad \forall \varepsilon > 0 \implies \Phi(t) \leq K \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t g(s)ds \right).$$

└ □

Důsledek

Nechť f je globálně L -lipschitzovská v první souřadnici. Nechť x a y jsou řešení DR na intervalu I s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Potom

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot e^{L \cdot |t - t_0|}.$$

┌

Důkaz

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), t), & y'(t) &= f(y(t), t). \\ x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds, & y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds, \\ x(t) - y(t) &= x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t (f(x(s), s) - f(y(s), s)) ds, \\ |x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + \left| \int_{t_0}^t L \cdot (x(s) - y(s)) ds \right|, \end{aligned}$$

└ Z Granwallova lemmatu potom $|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot \exp(L \cdot |t - t_0|)$. □

Věta 3.2

Buď G množina z definice řešící funkce, f lokálně lipschitzovská na G . Pak $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ otevřená a φ je spojitá v G .

┌

Důkaz

Vezmeme $(t, t_0, x_0) \in G$. Buď x maximální řešení DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. $\mathcal{D}_x \supset [t_0, t]$. BÚNO $t > t_0$.

$$K_\delta := \{(y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], |y - x(s)| \leq \delta\}.$$

Vezmeme $\varepsilon > 0$. Vezmeme $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $s_0 \in \mathbb{R}$, $|y_0 - x_0| < \varepsilon$, $|t_0 - s_0| < \varepsilon$. Definujeme y maximální řešení splňující $y(s_0) = y_0$. Co znamená, že $(\tilde{t}, s_0, y_0) \in G$? $\mathcal{D}_y \supset [s_0, \tilde{t}]$. Potřebujeme dokázat, že y je definováno na K_δ . Odhadneme

$$|y(s_0) - x(s_0)| \leq |y(s_0) - x(t_0)| + |x(t_0) - x(s_0)| = |y_0 - x_0| + |x(t_0) - x(s_0)| \leq \varepsilon + c_0 |t_0 - s_0| \leq \varepsilon \cdot (1 + c_0)$$

$$s \geq t_0 : |x(s) - y(s)| \leq |x(s_0) - y(s_0)| e^{L|s - s_0|} \leq \varepsilon(1 + c_0) e^{L|s - s_0|}.$$

Máme, že $\forall s > t_0 : |x(s) - y(s)| \leq \frac{\delta}{2}$, tedy y neopustí K_δ přes hranici $\implies y$ existuje až do času $t + \delta_0$, tj. G je otevřená.

Nyní „ Φ je spojitá“: $(t, t_0, x_0), (s, s_0, y_0) \in G$:

$$|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(s, s_0, y_0)| = |x(t) - y(s)| \leq |x(t) - x(s)| + |x(s) - y(s)| \leq c_0 |t - s| + |x(s_0) - y(s_0)| e^{L|s - s_0|} \leq T$$

└

□

Věta 3.3 (Věta o derivování řešení v počáteční podmínce?)

Bud' f je třídy C^1 vzhledem k x , φ je řešící funkce diferenciální rovnice. Potom $\forall (t, t_0, x_0) \in G$ a $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, |w| = 1$, existuje derivace φ podle x_0 ve směru w v bodě (t, t_0, x_0) , tj.

$$D_w \varphi(t, t_0, x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0)}{h}.$$

Označíme-li pro pevné (t_0, x_0) : $x(t) := \varphi(t, t_0, x_0)$, $u(t) := D_w \varphi(t, t_0, x_0)$, pak platí

$$u'(t) = [\nabla_x f(x(t), t)]u(t), \quad (\text{tzv. rovnice ve variacích})$$

$$u(t_0) = w.$$

┌ *Důkaz*

Vezmeme $(x_0, t_0) \in \Omega$. Definujeme $x(t) := \varphi(t, t_0, x_0)$, $y_h(t) := \varphi(t, t_0, x_0 + hw)$. To znamená, že

$$\eta_h(x) = \frac{\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0)}{h} - u(t) = \frac{y_h(t) - x(t)}{h} - u(t).$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds, \quad y_h(t) = x_0 + h \cdot w + \int_{t_0}^t f(y_h(s), s) ds.$$

$$y_h(t) - x(t) = h \cdot w + \int_{t_0}^t f(y_h(s), s) - f(x(s), s) ds.$$

Pro nějaké s, h $g(\vartheta) = f(x(s) + \vartheta(y_h(s) - x(s)), s)$, tedy $g(1) = f(y_h(s), s)$, $g(0) = f(x(s), s)$,

$$\begin{aligned} y_h(t) - x(t) &= h \cdot w + \int_{t_0}^t g(1) - g(0) ds = h \cdot w + \int_{t_0}^t \int_0^1 g'(\vartheta) d\vartheta ds = \\ &= h \cdot w + \int_{t_0}^t \int_0^1 \nabla_x f(x(s) + \vartheta(y_h(s) - x(s)), s) \cdot (y_h(s) - x(s)) d\vartheta ds. \end{aligned}$$

Buď $u(t)$ maximální řešení $u'(t) = [\nabla_x f(x(t), t)]u(t)$, $u(t_0) = w$. Tj.

$$u(t) = w + \int_{t_0}^t \nabla_x f(x(s), s) u(s) ds = w + \int_{t_0}^t \int_0^1 \nabla_x f(x(s), s) u(s) d\vartheta ds.$$

Odečteme od předcházejícího a dostaneme

$$\eta_h(x) = \int_{t_0}^t [\nabla_x f(x(s), s)] \eta_h(s) ds + \int_{t_0}^t \int_0^1 [\nabla_x f(x(s) + \vartheta(y_h(s) - x(s))) - \nabla_x f(x(s), s)] (y_h(s) - x(s)) d\vartheta ds$$

$$|\eta_h(t)| \leq \int_{t_0}^t C \cdot |\eta_h(s)| ds + \max_{\substack{s \in [t_0, t], \\ \vartheta \in [0, 1]}} |\nabla_x f(x(s) + \vartheta(y_h(s) - x(s)), s) - \nabla_x f(x(s), s)| \cdot \int_{t_0}^t e^{L \cdot (s - t_0)} ds.$$

Z důsledku předpředchozí věty

$$|y_h(s) - x(s)| \leq |y_h(t_0) - x(t_0)| e^{L \cdot |s - t_0|} = |hw| e^{L \cdot |s - t_0|} = |h| e^{L \cdot |s - t_0|}.$$

$$|\eta_h(t)| \leq K_h \cdot C_2 + \int_{t_0}^t C \cdot (\eta_h(s)) ds,$$

kde $K_h \rightarrow 0$. Z G. lemmatu pak plyne $|\eta_h(t)| \leq K_h \cdot C_2 \cdot \exp[C \cdot |t - t_0|] \implies \lim_{h \rightarrow 0} \eta_h(t) = 0$. □

└

4 Lineární ODR

Definice 4.1 (Lineární ODR)

$x' = A(t)x + b(t)$, $A : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojité funkce.

Věta 4.1

Nechť $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pak existuje právě jedno maximální řešení x (LODR) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. Funkce x je definovaná na (α, β) .

┌

Důkaz

Stačí dokázat, že x je definováno na celém (α, β) . Předpokládejme, že x je definované na (a, b) , BÚNO $b < \beta$, $t_0 \in [a, b]$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)x(s) + f(s)] ds,$$

$$|x(t)| \leq |x_0| + \max_{s \in [t_0, f]} |A(s)| \int_{t_0}^t |x(s)| ds + \max_{s \in [t_0, b]} |f(s)| \cdot |t - t_0|.$$

Z G. lemmatu plyne $|x(t)| \leq (|x_0| + \max_{s \in [t_0, b]} |f_s| \cdot |f - t_0|) e^{\max_{s \in [t_0, b]} |A(s)| \cdot |f - t_0|}$. Pak na intervalu (t_0, b) x neopustí nějaký kompakt. □

└

Definice 4.2 (Homogenní rovnice)

LODR nazveme homogenní, pokud $b \equiv 0$, tedy $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$.

Věta 4.2

Množina řešení H je vektorový prostor dimenze n .

┌

Důkaz

Součet řešení je řešení zřejmě. Stejně tak násobek. Dimenze n se dokazuje tak, že vezmeme bod a a řešení, která mají každé v tomto bodě jednu funkci 1 a ostatní 0. To jsou zřejmě LN řešení a dá se z nich složit libovolné jiné, protože máme jednoznačnost řešení s konkrétní počáteční podmínkou. Takže další řešení poskládáme z těchto. □

└

Definice 4.3 (Fundamentální řešení)

Fundamentálním řešením homogenní LODR nazveme každou bázi prostoru řešení. Budeme jej značit

$$\Phi(t) = (\varphi(t), \dots, \varphi(t)).$$

┌

Poznámka

Zřejmě $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.

└

Definice 4.4 (Wronského determinant (Wronskián))

$$W(t) = \det \Phi(t).$$

Věta 4.3 (Liouvilleova věta)

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right).$$

Důkaz

Chceme dokázat, že $W'(t) = W(t) \cdot (\operatorname{tr} A(t))$. Rozepsáním. □

Věta 4.4 (Variace konstant)

Nechť $x' = A(t)x + b(t)$, $A : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $b : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojité, je LODR, $\Phi(t)$ fundamentální matice homogenní rovnice $x' = A(t)x$. Potom řešení LODR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$) je dáno předpisem

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

Poznámka

Když budeme hledat řešení LODR ve tvaru $\varphi(t) \cdot C(t)$, dostaneme se k tomuto vzorci.

Důkaz

Zderivujeme a s použitím $\Phi'(t) = A(t) \cdot \Phi(t)$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \Phi(t) \cdot \Phi'(t_0) \cdot x_0 + \Phi'(t) \cdot \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) \cdot f(s)ds + \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t) \cdot b(t) = \\ &= A(t) \left(\Phi(t)\Phi^{-1}(t)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) \cdot f(s)ds \right) + b(t) = A(t)x + b(t). \end{aligned}$$

Navíc zjevně $x(t_0) = x_0$. □

5 Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Definice 5.1 (Lineární rovnice s konstantními koeficienty (LODRKK))

$$x' = Ax + b(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ spojitá.}$$

Poznámka

Ukážeme, že pro $n \in \mathbb{N}$ je řešení homogenní soustavy LODRKK se dá napsat ve tvaru $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$.

Definice 5.2 (Norma matice)

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}. \|A\| := \sup \{ |Ax| \mid x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1 \}.$$

Věta 5.1

Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak

1. $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
4. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$;
5. $|Av| \leq \|A\| \cdot |v|, v \in \mathbb{R}^n$;
6. $|Av| \geq \frac{|v|}{\|A^{-1}\|}, \forall v \in \mathbb{R}^n$, je-li A regulární.

┌

Důkaz

1.–3. za domácí úkol. V 5. se pouze vezme norma, 2. a definice. Pro 4. dvakrát použijeme 5. Nakonec u 6. použijeme $y = Av$, tedy $v = A^{-1}y$, tím dostaneme samé tvrzení jako v 5.. □

Věta 5.2

Funkce $U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k, t \in \mathbb{R}$ je fundamentální matice homogenního řešení LODRKK, $U(\mathbf{0}) = I_0$.

┌
Důkaz

Za prvé řada konverguje, neboť

$$\left\| \frac{1}{k!} t^k A^k \right\| \leq \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k \wedge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|A^k\| K.$$

Za druhé $[U(t)]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k [A^k]_{ij}$ a poloměr konvergence je ∞ , můžeme tedy derivovat člen po členu:

$$\frac{d}{dt}[U(t)]_{ij} = \dots = A \cdot U(t).$$

└

□

Věta 5.3

Pro $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definujeme $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. Potom platí:

- $e^{\lambda I} = e^{\lambda} \cdot I$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- pokud $AB = BA$, pak $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$;
- $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$, pokud je C regulární;
- $e^{-A} = (e^A)^{-1}$.

┌
Důkaz

Rozepsáním? TODO

└

□

Věta 5.4

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, Λ je její Jordanův kanonický tvar, $A = C\Lambda C^{-1}$, a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ je diagonála Λ . Potom $e^{tA} = C e^{t\Lambda} C^{-1}$, kde:

$$e^{t\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{t\Lambda_1} & 0 & \dots & \\ 0 & e^{t\Lambda_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{t\Lambda_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}) \cdot P(t), P_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \dots \\ 0 & 1 & t & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

┌
Důkaz

Jednoduchý, byl na cvičení.

└

□

Důsledek

Buď $\bar{a} = \max \{ \Re \lambda \mid \lambda \in \text{eig}(A) \}$, m je velikost Jordanovy buňky příslušná $\lambda : \Re \lambda = \bar{a}$. Pak

$\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\exists C > 0 : \|e^{tA}\| \leq C \cdot t^{n-1} \cdot e^{\bar{a}t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Obdobně když $\underline{a} = \min$, pak

$$\exists C > 0 : \|e^{tA}\| \leq C \cdot |t|^{n-1} \cdot e^{\underline{a}t}, \quad \forall t \leq 0.$$

┌ *Důkaz*

Operátorová norma $\|\cdot\|$ je ekvivalentní normě $\|A\|_\infty$. Z toho a předchozí věty už to odhadneme... □

Důsledek

Je-li $\Re \lambda < 0$, $\forall \lambda \in \text{eig}(A)$, pak $e^{At}x_0 \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$.

Definice 5.3 (Stabilní, nestabilní a centrální podprostor)

$$\sigma_-(A) = \{\lambda \in \text{eig}(A) | \Re \lambda < 0\}, V_- = \text{Lin} \{v \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda I)^k v = 0, \lambda \in \sigma_-\}$$

$$\sigma_+(A) = \{\lambda \in \text{eig}(A) | \Re \lambda > 0\}, V_+ = \text{Lin} \{v \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda I)^k v = 0, \lambda \in \sigma_+\}$$

$$\sigma_0(A) = \{\lambda \in \text{eig}(A) | \Re \lambda = 0\}, V_0 = \text{Lin} \{v \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda I)^k v = 0, \lambda \in \sigma_0\}.$$

Věta 5.5

$$\exists C > 0, \alpha > 0 \forall x_0 \in V_- : |e^{tA}x_0| \leq Ce^{-\alpha t}|x_0|, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\exists C > 0, \beta > 0 \forall x_0 \in V_+ : |e^{tA}x_0| \geq Ce^{\beta t}|x_0|, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C > 0 \forall x_0 \in V_0 : |e^{tA}x_0| \leq Ce^{\varepsilon t}|x_0|, \quad \forall t \geq 0.$$

┌ *Důkaz*

$$x_0 \in V_- : |e^{tA}x_0| = |Ce^{t\Lambda} \cdot C^{-1}x_0| \leq \|Ce^{t\Lambda}\|_{V_0} \|C^{-1}x_0\| \leq \|C\| \cdot \|e^{t\Lambda}\|_{V^{-1}} \cdot \|C^{-1}\| \cdot |x_0| \leq de^{-\alpha t}|x_0|.$$

└ TODO!!! (Příště?) □

6 Stabilita řešení

Definice 6.1 (Stabilní řešení, lokální atraktor, asymptotická stabilita)

DR $x' = f(x, t)$. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\{\mathbf{o}\} \times [\tau, +\infty) \subset \Omega$. Buď $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá a lokálně lipschitzovská vzhledem k x a $f(0, t) = 0$, $\forall t > \tau$. Značme $I = [\tau, +\infty)$. Nulové řešení DR se nazývá:

- stabilní, jestliže $\forall t_0 \in I \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0 : |x_0| < \delta \implies |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \forall t \geq t_0$;
- lokální atraktor, pokud $\forall t_0 \in I \exists \eta > 0 \forall x_0 : |x_0| < \eta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, t_0, x_0) = 0$;
- asymptoticky stabilní, pokud je stabilní a zároveň je lokálním atraktorem;
- uniformě stabilní, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t_0 \in I : |x_0| < \delta \implies |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \forall t \geq t_0;$$

- uniformě asymptoticky stabilní, je-li uniformě stabilní a

$$\exists \eta > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists \tau > 0 \forall t_0 \in I \forall x_0 : |x_0| < \eta \implies |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \forall t \geq t_0 + \tau.$$

Důkaz (Předchozí věty)

První bod:

$$e^{tA}x_0 = V e^{tJ} V^{-1}x_0$$

$$x_0 \in X_-(A) \implies V^{-1}x_0 \in V^-(J)$$

TODO (další část jsem nechápal, pravděpodobně to byl důkaz implikace na předchozím řádku)

Z první rovnice:

$$|e^{tA}x_0| \leq \|V\| \cdot |e^{tJ}(V^{-1}x_0)| = \|V\| \cdot |e^{tJ}|_{X^-(J)} \cdot |V^{-1}x_0| \leq \|V\| \cdot \|e^{tJ}|_{X^-(J)}\| \cdot |V^{-1}x_0| \leq \|V\| \cdot K \cdot e^{-\alpha t} \cdot \|V^{-1}x_0\|$$

Druhý bod: $x_0 \in X_+(A), e^{-At}y_0 = x_0, \|x_0\| = \|e^{-At}y_0\| \leq e^{\beta t}C|y_0|$ podobně jako v prvním bodě. $y_0 = e^{At}x \in X_+(A), t \geq 0$.

Třetí bod: $\|e^{tJ}|_{X_C(J)}\| \leq K \cdot t^m$, m je maximální velikost Jordanovy buňky odpovídající vlastním číslům z $\sigma_0(A)_0$. \square

Věta 6.1

Nulové řešení homogenní LODRKK $x' = Ax, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je

- asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(A) : \Re \lambda < 0$;
- stabilní $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(A) : \Re \lambda \leq 0$ a Jordanovy buňky příslušné vlastním číslům s $\Re \lambda = 0$ mají velikost 0.

Definice 6.2

x_0 je stabilní řešení $x' = f(x, t) \equiv 0$ je stabilní řešení $y' = g(y(t), t) = f(x_0(t) + y(t), t) - f(x_0(t), t)$. Obdobně pro další typy stability.

Lemma 6.2

Dána rovnice $x' = Ax + g(x, t)$. Nechť $\|e^{tA}\| \leq Ke^{-\alpha t}$, $\forall t \geq 0$, g spojitá v \mathbb{R}^{n+1} , $|g(x, t)| \leq \gamma \cdot |x|$, kde $\gamma < \frac{\alpha}{K}$. Pak nulové řešení je uniformě asymptoticky stabilní.

┌

Důkaz

Buď x řešení, $x'(t) = A \cdot x(t) + g(x(t), t)$, což napíšeme jako $x'(t) = Ax(t) + f(t)$. Použijeme variaci konstant:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s)ds.$$

Odhadneme: $t > t_0 : |x(t)| \leq |e^{A(t-t_0)}x_0| + \int_{t_0}^t |e^{A(t-s)}f(s)|ds,$

$$|x(t)| \leq K \cdot e^{-\alpha(t-t_0)} \cdot |x_0| + K \cdot \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)} \cdot \gamma |x(s)|ds,$$

$$|e^{\alpha t}x(t)| \leq K \cdot e^{\alpha t_0} \cdot |x_0| + K \cdot \int_{t_0}^t e^{\alpha s} \cdot \gamma |x(s)|ds.$$

Z G. lemmatu:

$$|e^{\alpha t}x(t)| \leq K \cdot e^{\alpha t_0} \cdot |x_0| \cdot e^{K\gamma(t-t_0)},$$

$$|x(t)| \leq K \cdot |x_0| \cdot e^{(K\gamma - \alpha)(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

Tudíž je uniformě asymptoticky stabilní.

└

□

Věta 6.3 (O linearizované stabilitě)

Dána rovnice (AR) $x' = f(x)$, kde f je třídy C^1 v okolí bodu x_0 . Nechť $f(x_0) = 0$ a $A = \nabla f(x_0)$ splňuje $\Re \lambda < 0 \forall \lambda \in \sigma(A)$. Pak $x(t) \equiv x_0$ je uniformě asymptoticky stabilní.

Pokud A splňuje $\exists \lambda \in \sigma(A)$, $\Re \lambda > 0$, pak $x(t) \equiv x_0$ není stabilní.

┌
Důkaz

Vize:

$$x' = f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) = 0 + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0).$$

Búno $x_0 = 0$. $x' = A \cdot x + g(x)$, kde $g(x) = f(x) - Ax_0$.

$$\exists \alpha > 0 \forall \lambda \in \sigma(A) : \Re \lambda < -\alpha_0.$$

Pak $|e^{At}| \leq K \cdot e^{-\alpha t}$, $\forall t \geq 0$. Pro g platí, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{|x|} = 0$, tedy $\exists \Delta > 0 : \forall x : |x| < \Delta \implies \frac{|g(x)|}{|x|} < \gamma$, kde $\gamma < \frac{\alpha}{K}$. Máme, že $|g(x)| < \gamma \cdot |x|$, $|x| < \Delta$.

Definujeme (tzv. seřazovací funkci)

$$\eta(s) = \begin{cases} 1, & s < \frac{\Delta}{2}, \\ \eta(s) \text{ spojitá, že } 0 < \eta(s) < 1, & s \in [\frac{\Delta}{2}, \Delta], \\ 0, & s > \Delta. \end{cases}$$

Definujeme $h(x) := g(x) \cdot \eta(x)$. Platí, že $|h(x)| \leq \gamma \cdot |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Podívejme se na $y' = Ay + h(y)$. To splňuje předpoklady předchozího lemmatu, tudíž nulové řešení je uniformě stabilní, tedy stabilní. Tj. existuje $\delta > 0 : |y(t_0)| < \delta \implies |y(t)| \leq \frac{\Delta}{2} \forall t \geq t_0$, tedy y splňuje $x' = Ax + g(x)$. A podle předchozí věty je x uniformě asymptoticky stabilní. \square

TODO!!!

Definice 6.3

Ať U_1, \dots, U_k jsou první integrály (AR). Řekneme, že jsou LN v bodě $x_0 \in \Omega$, pokud matice $\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)_{j \in [k], i \in [n]}$ má hodnotu k .

Věta 6.4

Budte U_1, \dots, U_k první integrály (AR), LN v bodě x_0 . Pak řešení procházející bodem x_0 lze lokálně popsat soustavou $n - k$ DR.

┌
Důkaz

$\text{rank} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_p} \right)_{j \in [k], p \in [n]} = k$. BÚNO $\text{rank} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_p} \right)_{j \in [k], p \in [k]} = k$. $x = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$,
 $y = (x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$. \square

Věta 6.5

$f(x_0) \neq 0 \implies \exists n - 1$ LN prvních integrálů v x_0 .

┌ Důkaz

BÚNO $f_n(x_0) \neq 0$. $x_0 = (y, a)$. $x'(t) = f(x(t))$, $x_0 = x(0) = (y, a)$. Chceme $\forall x \in O \exists! t \exists! z \in \mathbb{R}^{n-1} : \varphi(t, t_0 = 0, (z, a)) = x$.

Definujeme $\psi(t, z_1, \dots, z_n) = \varphi(t, 0, z_1, \dots, z_{n-1}, a)$.

└ TODO!!! □

7 Stabilita a Ljapunovské funkce

Definice 7.1

Mějme DR $x' = f(x, t)$, $f : \Omega \times [T, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $f(0, t) = 0, \forall t \in I$.

Funkci $\omega : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ nazveme pozitivně definitní, je-li $\omega(0) = 0$ a $\forall x \in \Omega \setminus \{0\} : \omega(x) \neq 0$.

Funkci $V(t, x) : I \times \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ nazveme ljapunovskou pro DR v Ω , je-li

- V spojitá, $\forall t \in I : V(t, 0) = 0$;
- funkce $t \mapsto V(t, x(t))$ je nerostoucí $\forall x$ řešení DR;
- existuje pozitivně definitní ω , že $V(t, x) \geq \omega(x) \forall x \in \mathbb{R} \forall t \in I$.

Věta 7.1

Nechť DR má ljapunovskou funkci. Potom nulové řešení je stabilní.

┌ Důkaz

└ $\varepsilon > 0$. Chceme najít $\delta : |x(t_0)| < \delta \implies |x(t)| < \varepsilon \forall t \geq t_0$. BÚNO $\overline{V(x_0, \varepsilon)} \subset \Omega$. □

Věta 7.2

Nechť DR má v Ω ljapunovskou funkci V , která splňuje následující podmínky: \exists pozitivně definitní funkce ω, λ, η v Ω , že

- $\omega(\zeta) \leq V(t, \zeta) \leq \lambda(\zeta) \forall t \in I \forall \zeta \in \Omega$;
- $\frac{d}{dt} [V(t, x(t))] \leq -\eta(x(t)) \forall$ řešení x v Ω .

Potom je řešení $x = 0$ asymptoticky stabilní.