

# 1 Úvod

*Poznámka* (Aplikace)

Transfinitní indukce, axiom výběru (= princip maximality = Zornovo lemma)

*Poznámka* (Cíl)

Vybudování matematiky na pevných základech. Porozumění nekonečen. Důkaz existence nealgebraických (= transcendentních) reálných čísel. Princip kompaktnosti. Banach-Tarského paradox.

*Poznámka* (Literatura)

Balcar, Štěpánek – Teorie množin

Seriál PraSete

Hrbáček, Jech – Introduction to set theory

Olšák – Esence teorie množin (videa)

*Poznámka* (Historie)

Bernard Bolzano (český matematik, 1781-1848, pojem množina), George Cantor (německý matematik, 1845 - 1918, zavedení aktuálního nekonečna, diagonální metoda, kardinální čísla, uzavřená množina), Bertrand Russell (1902, Russellův paradox = paradox holiče = holí holič holící všechny lidi, kteří se neholí sami, sebe?) + Berriho paradox (necht m je nejmenší přirozené číslo, které nejde definovat méně než 100 znaky), Zermelo-Fraenkel (zavedli axiomatickou teorii množin).

## Definice 1.1 (Symboly)

Proměnné pro množiny –  $x, y, z, x_1, x_2, \dots$

Binární predikátorový symbol = a bin. relační symbol  $\in$ .

Logické spojky  $\neg, \vee, \wedge, \implies, \Leftrightarrow$ .

Kvantifikátory  $\forall, \exists$ .

Závorky  $() \{ \} [ ]$

## Definice 1.2 (Formule)

Atomické ( $x = y, x \in y$ ). Jsou-li  $\varphi$  a  $\psi$  formule, pak  $\neg\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \implies \psi, \varphi \Leftrightarrow \psi$  jsou formule. Je-li  $\varphi$  formule,  $x$  proměnná, pak  $(\forall x)\varphi, (\exists x)\varphi$  jsou formule. (Vázané vs. volné proměnné – proměnné formule, které do ní lze dosadit jsou volné, proměnné formule, které do ní nelze dosadit jsou vázané). Každou formuli lze dostat konečnou posloupností aplikací výše zmíněného.

### Definice 1.3 (Rozšíření jazyka)

$x \neq y$  značí  $\neg(x = y)$ ,  $x \notin y$  znamená  $\neg(x \in y)$ ,  $x \subseteq y$  znamená  $(\forall u)(u \in x \implies u \in y)$ ,  $x \subset y$  značí  $x \subseteq y \wedge x \neq y$ . Dále uvidíme  $\cup, \cap, \setminus, \{x_1, \dots, x_n\}, \emptyset, \{x \in a \mid \varphi(x)\}$ .

### Definice 1.4 (Axiomy logiky)

Vysvětlují, jak se chovají implikace, kvantifikátory, rovnost, ...

### Definice 1.5 (Axiomy TEMNA)

Říkají, jak se chová  $\in$  a jaké množiny existují. Budeme používat Zermelo-Fraenkelovu teorii (ZF), tedy 9 axiomů (7 + 2 schémata). (Není minimální, tj. lze některé odvodit z jiných) + axiom výběru (AC) s ním se pak ZF značí ZFC.

### Definice 1.6 (Axiomy ZFC)

1. Axiom existence množiny:  $(\exists x)(x = x)$ .
2. Axiom extenzionality:  $(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \implies x = y$ .
3. Schéma axiomů vydělení: je-li  $\varphi(x)$  formule, která neobsahuje volnou proměnnou  $z$ , potom  $(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x)))$  je axiom.
4. Axiom dvojice:  $(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (x = a \vee x = b))$ .
5. Axiom sumy:  $(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a))$ .
6. Axiom potence:  $(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow x \subseteq a)$ .
7. Schéma axiomů nahrazení<sup>a</sup> Je-li  $\psi(u, v)$  formule s volnými proměnnými  $u, v$ , jež nemá volné proměnné  $w, z$ , pak

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)((\psi(u, v) \wedge \psi(u, w)) \implies v = w) \implies (\forall a)(\exists z)(\forall v)(v \in z \Leftrightarrow (\exists u)(u \in a \wedge \psi(u, v)))$$

je axiom.

8. Axiom fundovanosti (regularity):  $(\forall a)(a \neq \emptyset \implies (\exists x)(x \in a \wedge x \cap a = \emptyset))$ .

Později ještě:

- Axiom nekonečna
- Axiom výběru

<sup>a</sup>Slogan: Obraz množiny funkcí je množina.

**Definice 1.7** (Značení)

$\{x|x \in a \wedge \varphi(x)\}$ , zkráceně  $\{x \in a|\varphi(x)\}$  je množina z axiomů vydělení.

**Definice 1.8** (Průnik, množinový rozdíl, prázdná množina)

$a \cap b = \{x|x \in a \wedge x \in b\}$ .

$a \setminus b = a - b = \{x|x \in a \wedge x \notin b\}$ .

$\emptyset = \{x|x \in a \wedge x \neq x\}$ . ( $\emptyset$  je díky prvním třem axiomům dobře definována.)

**Definice 1.9** (Neuspořádaná a uspořádaná dvojice)

$\{a, b\}$  je neuspořádaná dvojice,  $\{a\}$  znamená  $\{a, a\}$ .

$(a, b) = \langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$  je uspořádaná dvojice.

**Lemma 1.1**

$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow (x = u \wedge y = v)$ .

┌

*Důkaz*

$\Leftarrow$   $x = u$ , pak  $\{x\} = \{u\}$  z axiomu extenzionality, stejně tak  $\{x, y\} = \{u, v\}$ , a tedy  $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ .

$\Rightarrow$   $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$  pak  $\{x\} = \{u\}$  nebo  $\{x\} = \{u, v\}$ , každopádně  $x = u$ .  
Nyní  $\{u, v\} = \{x\}$  nebo  $\{u, v\} = \{x, y\}$  tedy  $v = x$  nebo  $v = y$ . Pokud  $v = y$ , tak jsme skončili, pokud  $v = x$  pak  $v = u = x = y$ . □

└

**Definice 1.10** (Potenční množina)

$\mathcal{P}(a) = \{x|x \subseteq a\}$  je potenční množina (potence)  $a$  (z axiomu potence).

**Definice 1.11** (Uspořádaná  $n$ -tice)

Jsou-li  $a_1, a_2, \dots, a_n$  množiny, definujeme uspořádanou  $n$ -tici  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = \langle \dots \rangle$  následovně:  $(a_1) = a_1$ , je-li definovaná  $(a_1, \dots, a_k)$ , pak  $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) = ((a_1, a_2, \dots, a_k), a_{k+1})$ .

**Lemma 1.2**

$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_n = b_n)$ .

┌

*Důkaz*

Domácí cvičení. □

└

**Definice 1.12** (Značení)

$$\bigcup a = \{x | (\exists y)(x \in y \wedge y \in a)\}.$$

**Definice 1.13**

Pro  $a = \{b, c\}$  definujeme  $b \cup c = \bigcup a$ .

**Definice 1.14** (Neuspořádaná  $n$ -tice)

Neuspořádanou  $n$ -tici  $\{a_1, \dots, a_n\}$  ( $n$ -prvkovou množinu) definujeme rekurzivně: je-li definováno  $\{a_1, \dots, a_k\}$ , pak  $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\} = \{a_1, \dots, a_k\} \cup \{a_{k+1}\}$ .

*Poznámka*

Axiom nahrazení se využívá v: transfinitní rekurzi, definici  $\omega + \omega$ , větě o typu dobrého uspořádání, Zornově lemmatu (tj. axiom výběru).

*Příklad*

Ukažte, že axiom fundovanosti zakazuje existenci konečných cyklů relace  $\in$  (tj. takových množin  $y$ , pro které  $y \in \dots \in y$ ).

┌

*Důsledek*

Všechny množiny lze vygenerovat z  $\emptyset$  pomocí operací  $\bigcup$  a  $\mathcal{P}$  (zhruba).

└

## 1.1 Třídy

**Definice 1.15**

Nechť  $\varphi(x)$  je formule, pak  $\{x, \varphi(x)\}$  (čteme třída všech  $x$ , pro které platí  $\varphi(x)$ ), tzv. třídivý term, se nazývá třída (určená formulí  $x$ ).

*Důsledek*

Pokud  $\varphi(x)$  je tvaru  $x \in a \wedge \varphi(x)$ , pak je  $\{x, \varphi(A)\}$  množina z axiomu vydělení. Obdobně pro axiom dvojice, sumy, ...

*Poznámka*

Je-li  $y$  množina, pak  $y$  má stejné prvky jako třída  $x, x \in y \wedge x = x$ .

*Poznámka* (Vlastní třídy)

Existují i třídy (tzv. vlastní), které nejsou množiny (např. třída všech množin).

### **Definice 1.16** (Rozšíření jazyka)

Ve formulích na místech volných proměnných připustíme i Třídivé termy a proměnné pro třídy (psané velkými písmeny). (Avšak je nebude možné kvantifikovat!)

### **Definice 1.17** (Eliminace (nahrazování) třídivých termů)

$x, y, z, X, Y$  proměnné (3 množinové + 3 třídivé),  $\varphi(x), \psi(y)$  formule základního jazyka,  $X$  zastupuje  $\{x, \varphi(x)\}$  a  $Y$   $\{y, \varphi(y)\}$ .

$z \in X$  (schéma formulí pro obecné  $X$ ) zastupuje  $z \in \{x, \varphi\}$  nahradíme  $\varphi(z)$ .

$z = \{X\}$  zastupuje  $z = \{x, \varphi(x)\}$  nahradíme  $(\forall u)(u \in z \Leftrightarrow \varphi(u))$ .

$X \in Y$  zastupuje  $\{x, \varphi(x)\} \in \{y, \varphi(y)\}$  nahradíme  $(\exists u)(u = \{x, \varphi(x)\} \wedge u \in \{y, \varphi(y)\})$ .

$X \in y$  analogicky předchozí.

$X = Y \dots (\forall u)(\varphi(u) \Leftrightarrow \psi(u))$ .

*Poznámka*

Třídy s rozšířenou formulí nepřinášejí díky eliminaci nic nového.

### **Definice 1.18** (Třídivé operace)

$A \cap B$  je  $\{x, x \in A \wedge x \in B\}$ ,  $A \cup B$  je  $\{x, x \in A \vee x \in B\}$ ,  $A \setminus B = A - B = \{x, x \in A \wedge x \notin B\}$ .

### **Definice 1.19** (Univerzální třída, doplněk)

$\{x, x = x\}$  je tzv. univerzální třída a značí se  $V$ .

Buď  $A$  třída, pak (absolutní) doplněk  $A$  je  $V - A$ , který se značí  $-A$ .

### **Definice 1.20** (Inkluze)

$A \subseteq B$  ( $A \subset B$ ) značí „ $A$  je (vlastní) částí (= podtřídou)  $B$ “.

### **Definice 1.21** (Suma a průnik)

$\bigcup A$  značící sumu třídy  $A$  je třída  $\{x, (\exists a)(a \in A \wedge x \in a)\}$ .  $\bigcap A$  značící průnik třídy  $A$  je třída  $\{x, (\forall a)(a \in A \rightarrow x \in a)\}$ .

### Lemma 1.3

$V$  není množina.

┌

*Důkaz*

└ Cvičení. □

### Lemma 1.4

Je-li  $A$  třída,  $a$  množina, pak  $a \cap A$  je množina.

┌

*Důkaz*

└ V podstatě axiom vydělení. □

### Definice 1.22 (Kartézský součin tříd)

Kartézský součin tříd  $A, B$ , značený  $A \times B$ , je třída  $\{(a, b), a \in A, b \in B\}$  (zkrácený zápis pro  $\{x, (\exists a)(\exists b)(x = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B)\}$ ).

### Lemma 1.5

Jsou-li  $x, y$  množiny, pak  $x \times y$  je množina.

┌

*Důkaz* („Vnoření a vydělení“)

Stačí dokázat, že  $x \times y \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$  (vpravo je množina z axiomu potence, součin pak vydělíme): Pokud  $u \in x$  a  $v \in y$ , pak  $\{u\}, \{u, v\} \subseteq x \cup y$ , tedy  $\{u\}, \{u, v\} \in \mathcal{P}(x \cup y)$ . Tedy  $\{\{u\}, \{u, v\}\} \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$ , tj.  $\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$ . □

### Definice 1.23 (Mocnina)

$X$  třída, pak  $X^1 = X$  a  $X^{n+1} = X^n \times X$ . (Tj.  $X^n$  je třída všech uspořádaných  $n$ -tic s prvky v  $X$ .)

*Pozorování*

$$V = V^1 \supset V^2 \supset \dots$$

*Příklad*

Obecně neplatí  $X \times X^2 = X^3$ .

## 1.2 relace

**Definice 1.24** (Relace)

Třída  $R$  je (binární) relace pokud,  $R \subseteq V \times V$ . ( $n$ -ární relace, pokud  $R \subseteq V^n$ .)

$xRy$  je zkratka za  $(x, y) \in R$ .

**Definice 1.25** (Definiční obor, obor hodnot, zúžení)

Je-li  $X$  relace (libovolná třída), pak  $\text{Dom}(X) := \{u, (\exists v)((u, v) \in X)\}$  je definiční obor třídy  $X$ .

Je-li  $X$  relace (libovolná třída), pak  $\text{Rang}(X) := \{v, (\exists u)((u, v) \in X)\}$  je obor hodnot třídy  $X$ .

Je-li navíc  $Y$  třída, pak  $X''Y$  (nebo také  $X[Y]$ )  $:= \{z, (\exists y)(y \in Y \wedge (y, z) \in X)\}$  je obraz třídy  $Y$  třídou  $X$ .

Je-li navíc  $Y$  třída, pak  $X \upharpoonright Y := \{(y, z), y \in Y \wedge (y, z) \in X\}$  je zúžení třídy  $X$  na třídu  $Y$  (nebo také parcializace).

**Lemma 1.6**

Je-li  $x$  množina,  $Y$  třída, pak  $\text{Dom}(x)$ ,  $\text{Rang}(x)$ ,  $x \upharpoonright Y$ ,  $x''Y$  jsou množiny.

┌

*Důkaz* (Vnoření a vydělení)

$\text{Dom}(x) \subseteq \bigcup(\bigcup x)$ . Když  $u \in \text{Dom}(x)$ ,  $\exists v$ , že  $(u, v) \in x$ ,  $u \in \{u\} \in (u, v) \in x$ , tedy  $\{u\} \in \bigcup x$ , tj.  $u \in \bigcup(\bigcup x)$ .

└

$\text{Rang}(x) \subseteq \bigcup(\bigcup x)$ . (Analogicky.)  $x \upharpoonright Y \subseteq x$ ,  $x''Y \subseteq \text{Rang}(x)$ . □

**Definice 1.26** (Inverzní relace, složení relací)

$R, S$  relace, pak  $R^{-1} := \{(u, v), (v, u) \in R\}$  je relace inverzní k  $R$ . Relace  $R \circ S := \{(u, w), (\exists v)(uRv \wedge vSw)\}$  je složení relací  $R, S$ .

**Definice 1.27** (Zobrazení, na, do, prosté)

Relace  $F$  je zobrazení (funkce), pokud  $(\forall u)(\forall v)(\forall w)((u, v) \in F \wedge (u, w) \in F) \implies v = w$ .

Zkracujeme  $(u, v) \in F$  na  $F(u) = v$ .

$F$  je zobrazení třídy  $X$  do (na) třídy  $Y$   $F : X \rightarrow Y$ , pokud  $\text{Dom}(F) = X$  a  $\text{Rang}(F) \subseteq Y$  ( $\text{Rang}(F) = Y$ ).

Zobrazení  $F$  je prosté, pokud inverzní relace  $F^{-1}$  je zobrazení. (Zřejmě je pak i  $F^{-1}$  prosté).

### Definice 1.28 (Zkratka)

$A$  třída,  $\varphi$  formule, pak  $(\exists x \in A)\varphi$  je zkratka za  $(\exists x)(x \in A \wedge \varphi)$  a  $(\forall x \in A)\varphi$  je zkratka za  $(\forall x)(x \in A \implies \varphi)$ .

Obraz (vzor) třídy  $X$  zobrazením  $F$  je  $F[X]$  místo  $F''X$  ( $F^{-1}[X]$  místo  $F^{-1}''X$ ).

### Definice 1.29

$A$  třída,  $a$  množina, pak  ${}^aA := \{f, f : a \rightarrow A\}$  je třída všech zobrazení  $a$  do  $A$ .

┌

*Důkaz*

Axiom nahrazení říká, že  $\text{Rang } f$  je množina,  $f \subseteq a \times \text{Rang}(f)$ , libovolné  $f$  je tedy množina a tato třída je dobře definována. □

└

*Důsledek*

$\emptyset y = \{\emptyset\}$ ,  ${}^x\emptyset = \emptyset$  ( $x \neq \emptyset$ ).

### Lemma 1.7

Pro libovolné množiny  $x, y$  je  ${}^xy$  množina. Je-li  $x \neq \emptyset$ ,  $Y$  je vlastní třída, pak  ${}^xY$  je vlastní třída.

┌

*Důkaz*

$f \in {}^x y \dots f : x \rightarrow y \dots f \subseteq x \times y \dots f \in \mathcal{P}(X \times y) \implies {}^xy \subseteq \mathcal{P}(x \times y)$ .

Pro každé  $y \in Y$  definujeme konstantní zobrazení  $k_y : x \rightarrow Y$  tak, že  $(\forall u \in x)(k_y(u) = y)$ . Nechť  $K = \{k_y, y \in Y\} \subseteq {}^x Y$ . Sporem: pokud  ${}^xY$  je množina, pak  $K$  je množina. Použijeme axiom nahrazení  $F : K \rightarrow Y$ ,  $F(k_y) = y$ , tj. (protože  $F$  zobrazuje na  $Y$ )  $Y$  je množina.  $\zeta$ . □

└

## 2 Uspořádání

### Definice 2.1 (Reflexivní, antireflexivní, symetrická, slabě antisymetrická, antisymetrická, trichotomická, tranzitivní)

Relace  $R(\subseteq V \times V)$  je na třídě  $A$  reflexivní (antireflexivní, symetrická, slabě antisymetrická, antisymetrická, trichotomická, tranzitivní), pokud ... (...),  $(\forall x \in A)(\forall y \in A)((xRy \wedge yRx) \implies x = y)$ ,  $(\forall x \in A)(\forall y \in A)\neg(xRy \wedge yRx)$ ,  $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \vee yRx \vee x = y)$ , ...).

*Pozorování*

Tyto vlastnosti jsou dědičné (tzn. platí i na každé podtřídě  $B \subseteq A$ ).



**Definice 2.2** (Uspořádání, porovnatelné)

Řekneme, že relace  $R$  je uspořádání na třídě  $A$ , je-li  $R$  na  $A$  reflexivní, slabě symetrická, tranzitivní.

$x, y \in A$  jsou porovnatelné relací  $R$ , pokud  $xRy \vee yRx$ .

**Definice 2.3** (Značení)

$x \leq_R y$  znamená  $xRy$ ,  $x$  je menší nebo rovno  $y$  vzhledem k  $R$ .

**Definice 2.4** (Lineární uspořádání)

Uspořádání  $R$  je lineární, je-li  $R$  trichotomická relace.

**Definice 2.5** (Ostré uspořádání)

Relace  $R'$  je ostré uspořádání, je-li  $R' = R - \text{id}$  a  $R$  je uspořádání.

Píšeme  $x <_R y$ , když  $xR'y$ .

**Definice 2.6**

Nechť  $R$  je uspořádání na třídě  $A$ ,  $X \subseteq A$ . Říkáme, že  $a \in A$  je (vzhledem k  $R$ ,  $A$ ): majoranta (horní mez, horní závora) třídy  $X$ , pokud  $(\forall x \in X)(x \leq_R a)$ , maximální prvek třídy  $X$  pokud  $a \in X \wedge (\forall x \in X)(\neg a <_R x)$ , největší prvek třídy  $X$  pokud  $a \in X \wedge (\forall x \in X)(x \leq_R a)$ , supremum třídy  $X$ , pokud  $a$  je nejmenší majoranta.

Obdobně (dolní mez, dolní závora), minimální, nejmenší, infimum.

*Pozorování*

Největší  $\implies$  maximální. V lineárním uspořádání i naopak.

**Definice 2.7** (Shora, zdola omezená množina, dolní, horní množina)

$X$  je shora omezená v  $A$ , pokud existuje majorita  $X$  v  $A$ .  $X$  je dolní množina v  $A$ , pokud  $\forall x \in X)(\forall y \in A)(y \leq_R x \implies y \in X)$ .  $x \in A$ , pak  $(\leftarrow, x]$  je  $\{y, y \in A \wedge y \leq_R x\}$  hlavním ideálem určeným  $x$ .

Obdobně zdola uzavřená a horní množina. Lze definovat i pro třídy, ale to se nedělá.

*Pozorování*

$R$  je uspořádání na  $A$ , pak pro libovolné  $x, y \in A$  platí  $x \leq_R y \Leftrightarrow (\leftarrow, x] \subseteq (\leftarrow, y]$ .

### Definice 2.8 (Dobré uspořádání)

Uspořádání  $R$  na třídě  $A$  je dobré, pokud každá neprázdná podmnožina  $u \subseteq A$  má nejmenší prvek.

## 3 Srovnávání množin

### Definice 3.1

Množiny  $x, y$  mají stejnou mohutnost (jsou ekvivalentní),  $x \approx y$ , pokud existuje prosté zobrazení  $x$  na  $y$ .

### Definice 3.2

Množina  $x$  má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti  $y$ ,  $x \leq y$ , pokud existuje prosté zobrazení  $x$  do  $y$ . (Také říkáme  $x$  je subvalentní  $y$ ).  $x$  má mohutnost menší než  $y$ ,  $x < y$ , pokud  $x \leq y \wedge \neg(x \approx y)$ .

*Pozorování*

$x \subseteq y \implies x \leq y$ .  $x \subset y \implies x \leq y$ , ale ne nutně  $x < y$  (viz přirozená čísla).

### Lemma 3.1

*Jsou-li  $x, y, z$  množiny, pak*

$$1) x \approx x. \quad (\text{id})$$

$$2) x \approx y \implies y \approx x. \quad (\neg 1)$$

$$3) (x \approx y \wedge y \approx z) \implies x \approx z. \quad (\circ)$$

$$4) x \leq x. \quad (\text{id})$$

$$5) (x \leq y \wedge y \leq z) \implies x \leq z. \quad (\circ)$$

*Pozorování*

$(x \approx y) \implies (x \leq y \wedge y \leq x)$ .

### Definice 3.3

Zobrazení  $H : \mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x)$  je monotónní vzhledem k inkluzi, pokud pro každé podmnožiny  $u, v \subseteq x$  platí  $u \subseteq v \implies H(u) \subseteq H(v)$ .

### Lemma 3.2

*Je-li  $H : \mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x)$  zobrazení monotónní vzhledem k inkluzi, pak existuje podmnožina  $c \subseteq x$ , že  $H(c) = c$ .*

┌ *Poznámka*

Speciální případ Knaster-Tarski, kteří předpokládají jen úplný svaz.

┌ *Pozorování*

$$A \subseteq \mathcal{P}(x) \implies \sup_{\subseteq} A = \bigcup A.$$

┌ *Důkaz*

Nechť  $A = \{u, u \subseteq x \wedge u \subseteq H(u)\}$ .  $c = \bigcup A$ .  $c \subseteq x$  zřejmě,  $u \in A \implies u \subseteq c \wedge u \subseteq H(u) \subseteq H(c)$ . Tedy  $H(c)$  je majoranta  $A$ , tedy  $c \subseteq H(c)$ . Z monotonie  $H$  je  $H(c) \subseteq H(H(c))$ , tedy  $H(c) \in A$ , tedy  $H(c) \subseteq c$ .  $\square$

### Věta 3.3 (Cantor-Bernstein)

$$(x \leq y \wedge y \leq x) \implies x \approx y.$$

┌ *Důkaz*

Nechť  $f : x \rightarrow y, g : y \rightarrow x$  jsou prostá zobrazení. Uvažujeme 'indukovaná' zobrazení  $(\vec{f}) : \mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{P}(y), u \mapsto f[u]$ . Definujeme  $H : \mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x)$  tak, že pro  $u \subseteq x$   $H(u) = X - g[Y - f[u]]$ .  $H$  je monotónní vzhledem k inkluzi:  $u_1 \subseteq u_2 \implies f[u_1] \subseteq f[u_2] \implies y - f[u_1] \supseteq y - f[u_2] \implies \dots \implies H(u_1) \subseteq H(u_2)$ . Podle lemmatu o pevném bodě existuje  $c : H(c) = c$ .

Tedy  $c = x - g[y - f(c)]$ , tj.  $x - c = g[y - f(c)]$ . Tedy  $g^{-1}|_{(x-c)}$  je prosté zobrazení  $x - c$  na  $y - f(c)$ . Tedy definujeme  $h : x \rightarrow y, h(a) = f(a)$  pro  $a \in c, H(a) = g^{-1}(a)$  jinak.  $\square$

### Lemma 3.4

$x, y, z, x_1, y_1$  množiny, pak 1)  $x \times y \approx y \times x$ , 2)  $x \times (y \times z) \approx (x \times y) \times z$ , 3)  $(x \approx x_1 \wedge y \approx y_1) \implies (x \times y) \approx (x_1 \times y_1)$ , 4)  $x \approx y \implies \mathcal{P}(x) \approx \mathcal{P}(y)$ , 5)  $\mathcal{P}(x) \approx^x 2^x = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ .

┌ *Důkaz*

1-4) Triviální. Pro 5) definujeme charakteristickou funkci a je to triviální.  $\square$

### Definice 3.4 (Konečná množina (Tarski))

Množina  $x$  je konečná (značíme  $\text{Fin}(x)$ ), pokud každá neprázdná podmnožina její potenční podmnožiny má vzhledem k inkluzi maximální prvek.

┌ *Pozorování*

$\text{Fin}(x)$  právě tehdy, když každá neprázdná podmnožina  $\mathcal{P}(x)$  má minimální prvek vzhledem k  $\subseteq$ .

┌ *Důkaz*

$d : \mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x), y \mapsto x \setminus y$  vše obrátí.

□

### Definice 3.5 (Dedekindovsky konečná množina)

Množina  $a$  je dedekindovsky konečná, pokud má větší mohutnost než každá její vlastní podmnožina. (Tj. neexistuje prosté zobrazení  $a$  do  $b$ .)

### Lemma 3.5

*Je-li  $a$  konečná, potom je i dedekindovsky konečná.*

┌ *Důkaz*

Víme  $b \subset a \implies b \leq a$ . Chceme tedy  $a \neq b$ . Sporem: Předpokládejme, že  $b \subset a \wedge b \approx a$ ,  $Y := \{b, b \subset a \wedge b \approx a\}$ . Víme, že  $Y$  je neprázdná,  $Y \subseteq \mathcal{P}(a)$ . Necht  $c$  je minimální prvek  $Y$  vzhledem k inkluzi. Existuje tedy bijekce  $f : a \rightarrow c$ . Necht  $d = f[c]$ . Zřejmě  $f|_c : c \rightarrow d$  je bijekce, tedy  $c \approx d$  a z tranzitivity  $d \approx a$ . Tedy  $d \in Y$ . Ale  $d \subset c$ , jelikož  $\exists s \in c, f^{-1}(s) \in a \setminus c$ , tj.  $s \notin d$ . To je ale spor s volbou  $c$ . □

*Poznámka*

V ZF je opravdu konečnost silnější než dedekindovská konečnost.

*Poznámka (Další definice konečnosti)*

Existuje lineární uspořádání, které je dobré a jeho inverze je také dobré uspořádání.

Existuje lineární uspořádání a každá dvě lineární uspořádání jsou izomorfní.

Potenční množina od potenční množiny je dedekindovsky konečná.

### Věta 3.6

1) Je-li  $a$  konečná množina uspořádaná relací (částečným uspořádáním)  $\leq$ , pak každá neprázdná podmnožina  $b \subset a$  má maximální i minimální prvek (vzhledem k  $\leq$ ). 2) Každé lineární uspořádání na konečné množině je dobré (každá podmnožina má nejmenší prvek).

┌ *Důkaz*

1)  $\implies$  2): každá podmnožina má minimální prvek, ale ten je při lineárním uspořádání konečný.

1): Pro každé  $x \in a$  uvažujeme  $(\leftarrow, x] := \{y \in a \mid y \leq x\}$ . To jsou zřejmě podmnožiny  $a$ . Necht  $u = \{(\leftarrow, x], x \in b\}$ .  $b \in u \subseteq \mathcal{P}(a)$ , tedy z definice konečnosti má maximální prvek  $(\leftarrow, m]$ .  $m \in b$  je maximální prvek v  $b$ . Minimum otočením  $\leq$ . □

### Definice 3.6 (Izomorfismus)

$F$  je zobrazení  $A_1$  do  $A_2$ ,  $R_1, R_2$  jsou relace.  $F$  je izomorfismus tříd  $A_1$  a  $A_2$  vzhledem k  $R_1$  a  $R_2$ , pokud  $F$  je bijekce (prosté zobrazení na) a  $\forall x, y \in A_1 : xR_1y \Leftrightarrow F(x)R_2F(y)$ .

### Definice 3.7 (Počátkové vnoření)

$A$  množina uspořádaná relací  $R$ ,  $B$  relací  $S$ , potom zobrazení  $F : A \rightarrow B$  je počátkové vnoření  $A$  do  $B$ , pokud  $A_1 = \text{Dom}(F)$  je dolní množina  $A$ ,  $B_1 = \text{Rang}(F)$  je dolní podmnožina  $B$  a  $F$  je izomorfismus  $A_1$  a  $B_1$  vzhledem k  $R, S$ .

### Lemma 3.7

Nechť  $F, G$  jsou počátková vnoření dvou dobře uspořádaných množin  $A, B$ . Pak  $F \subseteq G \vee G \subseteq F$ .

┌

*Důkaz*

Nechť  $R$  resp.  $S$  je dané uspořádání  $A$  resp.  $B$ . Víme, že  $\text{Dom}(F), \text{Dom}(G)$  jsou dolní podmnožiny.  $R$  je lineární (jelikož je dobré), tedy  $\text{Dom}(F) \subseteq \text{Dom}(G)$  nebo  $\text{Dom}(G) \subseteq \text{Dom}(F)$ . BÚNO první možnost. Sporem dokážeme, že  $(\forall x \in \text{Dom}(F))(F(x) = G(x))$ .

Nechť  $x$  je vzhledem k  $R$  nejmenší prvek množiny  $\{z, z \in A \wedge F(z) \neq G(z)\}$ . Tedy pro každé  $y <_R x$  je  $F(y) = G(y)$ . Z linearity  $S$   $F(x) <_S G(x)$  nebo  $F(x) >_S G(x)$ . BÚNO první možnost. Nechť  $b = F(x)$ .  $z \in \text{Dom}(G)$ , 1)  $z <_R x \implies G(z) = f(z) <_S b$ , 2)  $z \geq_R x \implies G(z) \geq_S G(x) >_S b$ . Tedy  $b \notin \text{Rang } G$  a  $\text{Rang } G$  není dolní množina.  $\nexists$ .  $\square$

### Věta 3.8 (O porovnávání dobrých uspořádání)

$A$  je množina dobře uspořádaná  $R$ ,  $B$  je množina dobře uspořádaná  $S$ , pak existuje právě jedno zobrazení  $F$ , které je izomorfismus  $A$  a dolní množiny  $B$  nebo izomorfismus dolní množiny  $A$  a  $B$ .

┌

*Důkaz*

$P$  množina všech počátkových vnoření z  $A$  do  $B$ .  $F := \bigcup P$  je zobrazení: když  $(x, y_1)$  a  $(x, y_2)$  existují počátková vnoření  $F_1, F_2$  taková, že  $(x, y_1) \in F_1$  a  $(x, y_2) \in F_2$ . Podle lemma:  $F_1 \subseteq F_2 \vee F_2 \subseteq F_1$ , tedy  $y_1 = y_2$ .

$F$  je počátkové vnoření: když  $x_1 <_R x_2 \in \text{Dom}(F)$ , pak existuje počátkové vnoření  $F' \in P$  takové, že  $x_2 \in \text{Dom}(F')$ , tedy  $x_1 \in \text{Dom}(F') \subseteq \text{Dom } F$ , tedy  $\text{Dom}(F)$  je dolní množina. Symetricky pro  $\text{Rang}(F)$ .

TODO.

$\text{Dom}(F) = A \vee \text{Rang}(F) = B$ : Sporem:  $A - \text{Dom}(F)$ ,  $B - \text{Dom}(F)$  jsou neprázdné. Mají tedy nejmenší prvky  $a, b$ . Definujeme  $F' := F \cup \{(a, b)\}$ .  $F'$  je počátkové vnoření, přitom  $F' \supsetneq F$ ,  $\nexists$ .  $\square$

### Věta 3.9

*a je konečná množina, pak každé dvě lineární uspořádání na a jsou izomorfní.*

*Důkaz*

*r, s dvě lineární uspořádání a. Podle věty výše jsou r, s dobrá, tedy a, r je izomorfní dolní množině b v a, s nebo naopak. Tzn.  $a \approx b$ , tedy z definice konečnosti  $b = a$ .  $\square$*

### Lemma 3.10 (Zachovávání konečnosti)

$$1) (\text{Fin}(x) \wedge y \subseteq x) \implies \text{Fin}(y).$$

$$2) (\text{Fin}(x) \wedge y \approx x) \implies \text{Fin}(y).$$

$$3) (\text{Fin}(x) \wedge y \leq x) \implies \text{Fin}(y).$$

*Důkaz*

1) z definice. 2)  $\mathcal{P}(x) \approx \mathcal{P}(y)$ , dokonce jsou izomorfní vzhledem k  $\subseteq$ . 3) z 1) a 2).  $\square$

### Lemma 3.11 (Sjednocení konečných množin)

$$1) (\text{Fin}(x) \wedge \text{Fin}(y)) \implies \text{Fin}(x \cup y).$$

$$2) \text{Fin}(x) \implies (\forall y) (\text{Fin}(x \cup \{y\})).$$

*Důkaz*

1)  $w \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$  neprázdná.  $\mathcal{P}(x) \supseteq w_1 = \{u, (\exists t \in w)(u = t \cap x)\} \neq \emptyset$ . Tedy  $w_1$  má maximální prvek ( $v_1$ ). Necht  $\emptyset \neq w_2 := \{u, (\exists t \in w)(t \cap x = v_1 \wedge t \cap y = u)\} \subseteq \mathcal{P}(y)$ . Tedy  $w_2$  má maximální prvek  $v_2$ .  $v_1 \cup v_2$  je maximální prvek  $w$ .

2): důsledek 1).  $\square$

### Definice 3.8 (Třída konečných množin)

Třída všech konečných množin je  $\text{Fin} := \{x, \text{Fin}(x)\}$ .

### Věta 3.12 (Princip indukce pro konečné množiny)

*Je-li X třída, pro kterou platí*

$$1) \emptyset \in X, \quad 2) x \in X \implies (\forall y)(x \cup \{y\} \in X),$$

*potom  $\text{Fin} \subseteq X$ .*

┌ *Důkaz (Sporem)*

Pokud  $x \in \text{Fin} \setminus X$ , pak označme  $w = \{v, v \subseteq x \wedge v \in X\} = \mathcal{P}(x) \cap X$ . Potom z definice konečnosti má  $w$  (která obsahuje minimálně  $\emptyset$ ) maximální prvek  $v_1$ .  $v_0 \subseteq X, v_0 \neq x$ , tedy  $\exists y \in x \setminus v_0$  a  $v_0 \subseteq v_0 \cup \{y\} \in X$ , tím pádem jsme našli větší prvek než  $v_0$ , který je v  $w$ ,  $\nexists$ .  $\square$

### Lemma 3.13

$$\text{Fin}(x) \implies \text{Fin}(\mathcal{P}(x)).$$

┌ *Důkaz*

Indukcí přes konečné množiny. Necht  $X = \{x, \text{Fin}(\mathcal{P}(x))\}$ . 1)  $\emptyset \in X$ , protože  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$  je konečná. 2) Necht  $x \in X, y$  množina. Chceme, aby  $x \cup \{y\} \in X$ . BÚNO  $y \notin x$ . Rozdělíme  $\mathcal{P}(x \cup \{y\})$  na části  $\mathcal{P}(x)$  a  $z := \mathcal{P}(x \cup \{y\}) \setminus \mathcal{P}(x)$ . Platí  $\mathcal{P}(x) \approx z$ : pro  $u \in \mathcal{P}(x)$  definujeme  $f(u) = u \cup \{y\}$ . Podle IP  $\text{Fin}(\mathcal{P}(x))$ , podle lemma  $\text{Fin}(z)$  a  $\text{Fin}(z \cup \mathcal{P}(x))$ .  $\square$

*Důsledek*

$$\text{Fin}(x) \wedge \text{Fin}(y) \implies \text{Fin}(x \times y).$$

### Lemma 3.14 (Sjednocení konečně mnoha konečných množin)

$$(\text{Fin}(a) \wedge (\forall b \in a)(\text{Fin}(b))) \implies \text{Fin}(\bigcup a).$$

┌ *Důkaz (Indukcí)*

Necht  $X = \{x, x \subseteq \text{Fin} \implies \text{Fin}(\bigcup x)\}$ . 1)  $\emptyset \in X$ , protože  $\bigcup \emptyset = \emptyset$  je konečná. 2) Necht  $x \in X, y$  množina. Necht  $x \cup \{y\} \subseteq \text{Fin}$ , speciálně  $x \subseteq \text{Fin}$ .  $\bigcup(x \cup \{y\}) = (\bigcup x) \cup y$ , což je podle IP a lemmatu o sjednocení konečné.  $\square$

*Důsledek* (Dirichletův princip pro nekonečné množiny)

Je-li nekonečná množina sjednocením konečně mnoha množin, pak alespoň jedna z nich je nekonečná.

TODO

## 4 Přirozená čísla

### Definice 4.1 (Přirozené číslo (von neumann))

Přirozené číslo je množina všech menších přirozených čísel.

### Definice 4.2

$w$  je induktivní množina, pokud  $0 \in w \wedge (\forall v \in w)(v \cup \{v\} \in w)$

### Definice 4.3 (Axiom nekonečna)

$\exists w$ . Neboli

$$(\exists z)(\emptyset \in z \wedge (\forall x)(x \in z \implies x \cup \{x\} \in z)).$$

### Definice 4.4 (Množina všech přirozených čísel)

Množina všech přirozených čísel (značíme  $\omega$ ), je  $\bigcap \{w | w \text{ je induktivní množina}\}$ .

┌

*Důkaz* ( $\omega$  je induktivní)

$\emptyset \in \omega$ , protože  $\emptyset$  je prvkem každé induktivní množiny. Stejně tak, pokud  $x \in \omega$ , pak  $(\forall w \text{ induktivní})(w | x \in w)$ , tedy i  $x \cup \{x\}$  patří do každé induktivní množiny.  $\square$

└

### Definice 4.5 (Následník)

Funkce následník je  $S : \omega \rightarrow \omega$ . Pro  $v \in \omega : S(v) = v \cup \{v\}$ .

### Věta 4.1 (Princip indukce pro přirozená čísla)

*Je-li  $X \subseteq \omega$  taková, že  $\emptyset \in X$  a  $x \in X \implies S(x) \in X$ . Pak  $X = \omega$ .*

┌

*Důkaz*

Z podmínek na  $X$  víme, že  $X$  je induktivní množina, tedy  $\omega \subseteq X$ . Tedy  $\omega = X$ .  $\square$

└

### Lemma 4.2 ( $\in$ je ostré uspořádání na $\omega$ )

$$1) n \in \omega \implies n \subseteq \omega.$$

$$2) m \in n \implies m \subseteq n.$$

$$3) n \notin n.$$

┌

*Důkaz* (Indukcí)

1) 1. krok  $\emptyset \subseteq \omega$ . 2. krok: Nechť  $n \in \omega \wedge n \subseteq \omega$ . Pak  $\{n\} \subseteq \omega$ . Tedy i  $n \cup \{n\} \subseteq \omega$ .

2) 1. krok  $\nexists m \in \emptyset$ . 2. krok. Nechť  $m \in S(n) = n \cup \{n\}$ , potom  $m = n$ , tj.  $m \subseteq n$ , nebo  $m \in n$  pak z IP  $m \subseteq n$ .

3) 1. krok  $\emptyset \notin \emptyset$  platí. 2. krok předpokládejme, že  $n \in \omega$  a  $n \notin n$ . Sporem: Nechť  $S(n) \in S(n) = n \cup \{n\}$ . Tedy  $S(n) = n$ , tj.  $n \in S(n) \in n$ , nebo  $S(n) \in n$ . Tedy podle 2  $n \in n$ .  $\nabla$ .  $\square$

└



**Lemma 4.3** (Přirozená čísla jsou konečná)

$$(\forall n \in \omega)(\text{Fin}(n)).$$

┌

*Důkaz*

$\text{Fin}(\emptyset)$  a podle lemma sjednocení dvou konečných je konečná, tj.  $\text{Fin}(x) \implies \text{Fin}(S(x))$ . □

└

**Věta 4.4**

*Množina  $x$  je konečná  $\Leftrightarrow (\exists n \in \omega)(x \approx n)$ .*

┌

*Důkaz*

$\Leftarrow$  plyne z předchozího lemmatu a zachovávání konečnosti při  $\approx$ .

$\implies$  indukci podle konečných množin:  $\emptyset \approx 0$ . Nechť to pro  $x$  platí a  $y$  je množina.

Máme  $x \approx n$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$ . Buď  $y \in x$ , pak  $x \cup \{y\} = x \approx n$ . Jinak  $x \cup \{y\} \approx S(n)$  (bijekci rozšíříme o  $(y, n)$ ). □

└

**Lemma 4.5**

*Množina  $\omega$  i každá induktivní množina je nekonečná.*

┌

*Důkaz*

Podle lemmatu výše 1)  $n \in \omega \implies n \subseteq \omega$ , tedy  $n \in \mathcal{P}_\omega$ . Tudíž  $\omega \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ .  $\omega$  je neprázdná, ale nemá maximální prvek vzhledem k  $\subseteq$ , jelikož  $n \in \omega \implies n \notin n$ , tj.  $n \subset n \cup \{n\}$ , tedy  $n$  není maximální.

Je-li  $W$  induktivní, potom  $\omega \subseteq W$  a podle dřívějšího lemma (konečnost se zachovává na podmnožinu) je  $W$  nekonečná. □

└

*Příklad (Cvičení)*

Dokažte, že  $\omega$  je dedekindovsky nekonečná.

**Lemma 4.6** (Linearita  $\in$  na  $\omega$ )

1)  $m \in n \Leftrightarrow m \subset n$ .

2)  $m \in n \vee m = n \vee n \in m$ .

┌  
Důkaz

1) Víme  $m \in n \implies m \subseteq n$ .  $\implies$  : Kdyby ale  $m = n$ , pak  $n \in n$ ,  $\nexists$ .  $\Leftarrow$ : Indukcí podle  $n$ .  $n = 0$  nelze splnit  $m \subset n$ . Necht platí pro nějaké  $n$  a všechna  $m$ . Necht  $m \subset S(n)$ , pak platí  $m \subseteq n$ . Kdyby  $n \in m$ , pak  $n \subseteq m$  TODO?

2) Pro  $n \in \omega$  necht  $A(n) = \{m \in \omega; m \in n \vee m = n \vee n \in m\}$ . Dokážeme, že  $A(n)$  je induktivní indukci podle  $m$ .  $n = 0$  :  $0 \in A(0)$ , protože  $0 = 0$ . Pokud  $m \in A(0)$ , pak  $0 \in m \vee m = 0 \dots 0 \in \{m\}$ , tj.  $0 \in m \cup \{m\} = S(m)$ . Tedy  $A(0) = \omega$ .

Tedy také  $(\forall n \in \omega) 0 \in A(n)$ . necht  $n, m \in \omega$ ,  $m \in A(n)$ . Ukážeme, že  $S(m) \in A(n)$ .  
a)  $m \in n$ : Podle 1)  $m \subset n$ ,  $\{m\} \subseteq n$ , tedy  $S(m) \subseteq n$ :  $S(m) = n \vee S(m) \subset n$  a podle 1)  $S(m) \in n \subseteq S(n)$ . b)  $m = n \vee n \in m \implies n \in m \cup \{m\} = S(m)$ . Ve všech případech tedy  $S(m) \in A(n)$ . □

## Věta 4.7

Množina  $\omega$  je dobře ostře uspořádaná relací  $\in$ .

┌  
Důkaz

Necht  $a \subseteq \omega$ ,  $a \neq \emptyset$ . Zvolme  $n \in a$ . Kdyby  $n$  bylo minimální, jsme hotovi, není-li  $n$  minimální, definujeme  $b = a \cup n$ . Z konečnosti plyne, že  $b$  má minimum, které je zároveň hledaným minimem. □

Příklad (Cvičení)

Dokažte princip silné indukce na  $\omega$ .

$f : \omega \rightarrow X$ ,  $f$  je zobrazení na, pak  $X \leq \omega$ .

## Věta 4.8 (Charakterizace uspořádání $\in$ na $\omega$ )

Necht  $A$  je nekonečná množina, lineárně ostře uspořádaná relací  $<$  tak, že pro každé  $a \in A$  je dolní množina  $(\leftarrow, a]$  konečná. Potom  $<$  je dobré ostré uspořádání na  $A$  a množiny  $A$ ,  $\omega$  jsou izomorfní vzhledem k  $<, \in$ .

┌  
Důkaz

$<$  je dobré:  $\emptyset \neq C \subseteq A$ , necht  $a \in c$ . Pokud  $a$  není minimální, necht  $b = c \cap (\leftarrow, a]$  podle předchozího je  $b$  konečná, neprázdná a má minimální prvek  $m$ .  $m$  je i minimální v  $c$  (kdyby  $x \in c$ ,  $x < m$ , pak  $x \in b$ ).

Izomorfismus: Podle věty o porovnávání dobrých uspořádání 1)  $A$  je izomorfní dolní množině  $B \subseteq \omega$ , pak  $B$  není shora omezená (jinak  $B \subseteq S(n)$ , tedy  $B$  by byla konečná). Tedy každé  $n \in \omega$  je menší než nějaký prvek  $B$ . Tedy  $n \in B$ . Tedy  $B = \omega$ .

2)  $\omega$  je izomorfní s dolní množinou  $C \in A$ , pak  $C$  není shora omezená (obdobně jako v předchozím odstavci), tedy  $C = A$ . □

## 5 Spočetné množiny

### Definice 5.1

Množina  $x$  je spočetná, pokud  $x \approx \omega$ .  $x$  je nejvýše spočetná, je-li konečná nebo spočetná. Jinak je nespočetná.

#### Poznámka

V ZF nelze dokázat, že každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu. Platí totiž  $x$  je dedekindovsky nekonečná  $\Leftrightarrow \omega \leq x$ .

### Věta 5.1

1) Každá shora omezená podmnožina  $\omega$  je konečná, každá shora neomezená podmnožina  $\omega$  je spočetná.

2) Každá podmnožina spočetné množiny je nejvýše spočetná.

┌

#### Důkaz

1)  $A$  je shora omezená  $(\exists n \in \omega)(\forall a \in A)(a \in n \vee a = n)$ , tedy  $A \subseteq S(n)$ , tedy  $\text{Fin}(A)$ . (Naopak konečná  $\Rightarrow$  shora omezená.)

$A$  shora neomezená, pak  $A$  je nekonečná, dobře ostře uspořádaná  $\in$ , pro každé  $a \in A$  tedy platí, že  $(\leftarrow, a]$  je konečná. Tedy podle ? věty  $A \approx \omega$ , tedy  $A$  je spočetná.

2)  $A$  spočetná,  $f$  prosté zobrazení  $A$  na  $\omega$ .  $B \subseteq A$ ,  $B \approx f[B] \subseteq \omega$ , podle 1) je konečná nebo spočetná.  $\square$

### Definice 5.2 (Lexikografické uspořádání)

Lexikografické uspořádání na  $\omega \times \omega$  je relace  $(n_1, m_1) <_L (n_2, m_2) \Leftrightarrow (n_1 \in m_1 \vee (n_1 = n_2 \wedge m_1 \in m_2))$ .

#### Důsledek

$<_L$  je dobré na  $\omega \times \omega$ .  $<_L$  na  $\omega \times 2$  (ne opačně!) je izomorfní s  $\omega$  uspořádanou  $\in$ .

### Definice 5.3 (Maximum)

Maximum  $n, m$  je  $\max(m, n) = m$ , pokud  $n \in m$ , a  $n$  jinak.

### Definice 5.4 (Maximo-lexikografické uspořádání)

Maximo-lexikografické uspořádání na  $\omega \times \omega$  je relace  $(n_1, m_1) <_{ML} (n_2, m_2) \Leftrightarrow (\max n_1, m_1 < \max(n_2, m_2) \vee (\max(n_1, m_1) = \max(n_2, m_2) \wedge (n_1, m_1) <_L (n_2, m_2)))$ .

*Pozorování*

$<_{ML}$  je izomorfní s  $\in$ . Tudíž  $\omega \times \omega \approx \omega$ .

### Věta 5.2 (O zachování spočetnosti)

*Jsou-li  $A, B$  spočetné množiny, pak  $A \cup B$  a  $A \times B$  jsou spočetné.*

┌

*Důkaz*

$f : A \rightarrow \omega, g : B \rightarrow \omega$  bijekce. Definujeme zobrazení  $h : A \cup B \rightarrow \omega \times 2$ , že  $h(x) = (f(x), 0)$ , pokud  $x \in A$ ,  $h(x) = (g(x), 1)$  jinak ( $x \in B \setminus A$ ).  $h$  je prosté. Podle Cantor-Bernstein  $A \cup B \approx \omega$ .

└

$k : A \times B \rightarrow \omega \times \omega \approx \omega$  jako  $k((a, b)) = (f(a), g(b))$ , tedy  $k$  je bijekce. □

*Důsledek*

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  jsou spočetné.

*Důsledek (Pouze s axiomem výběru)*

Spočetné sjednocení spočetných množin je spočetné.

### Věta 5.3 (Cantorova věta)

*Pro každou množinu  $x$  platí, že  $x < \mathcal{P}(x)$ . (Dokonce neexistuje zobrazení  $x$  na  $\mathcal{P}(x)$ .)*

┌

*Důkaz*

$x \leq \mathcal{P}(x)$ . Díky zobrazení  $f(y) = \{y\}$ .

necht' nyní  $f : x \rightarrow \mathcal{P}(x)$ . Ukážeme, že  $\text{Rang}(f) \neq \mathcal{P}(x)$ .  $y = \{t, t \in x \wedge t \notin f(t)\}$ .  
 $y \in \mathcal{P}(x)$ , ale nemá vzor při  $f$  (jinak by tento vzor nemohl a musel být ve svém obrazu). □

└

┌

*Důsledek*

$(\omega)$  je nespočetná a  $V$  je vlastní.

### Věta 5.4

$\mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R} \approx [0, 1]$ .

┌ *Důkaz*

Víme, že  $\mathcal{P}(\omega) = {}^\omega 2$ , tj. množina posloupností  $(a_0, a_1, \dots)$ , kde  $a_i \in \{0, 1\}$ . Každé  $a \in [0, 1]$  lze zapsat binárně jako  $a = 0$  nebo  $a = 0, a_0 a_1 a_2 \dots$ . Pokud jsou možné 2 zápisy, tak si vybereme ten, kde je nekonečně mnoho pozic rovných 1. Tím získáváme prosté zobrazení  $[0, 1]$  do  ${}^\omega 2$ .

Prosté zobrazení  ${}^\omega 2$  do  $[0, 1]$  použijeme trojkovou soustavu:  $(a_0, a_1, \dots) \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^{i+1}}$ . Následně použijeme Cantor-Bernstein na  ${}^\omega 2 \approx [0, 1]$ .

Pro  $[0, 1] \approx \mathbb{R}$  stačí uvažovat něco jako  $\frac{\pi/2 + \arctg(x)}{\pi}$  a  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ . □

*Poznámka* (Algebraická čísla)

Pro definici viz Algebru. Je jich spočetně mnoho.

## 6 Hypotéza kontinua

*Poznámka* (Historie)

Cantor 1878, zkracuje se CH. První z 23 Hilbertových problémů (1900). Bezespornost s ZFC dokázána 1940 Gödelem. 1963-4 Cohen ukázal, že i negace je bezesporná s ZFC.

### Definice 6.1 (CH)

Každá nekonečná podmnožina  $\mathbb{R}$  je buď spočetná nebo ekvivalentní s  $\mathbb{R}$ . ( $\Leftrightarrow$  Neexistuje množina  $x \subseteq \mathbb{R}$  pro kterou  $\omega < x < \mathcal{P}(\omega)$ .)

## 7 Axiom výběru

### Definice 7.1 (Princip výběru (starší verze))

Pro každý rozklad  $r$  množiny  $X$  existuje výběrová množina (tj. množina  $v \subseteq X$ , pro kterou platí  $(\forall u \in r)(\exists x)(v \cap u = \{x\})$ ) (někdy také transverzála, viz Algebra).

### Definice 7.2 (Selektor)

Je-li  $X$  množina, pak funkce  $f$  definovaná na  $X$  a splňující  $(y \in X \wedge y \neq \emptyset) \implies f(y) \in y$  se nazývá selektor na množině  $X$ .

### Definice 7.3 (Axiom výběru (AC))

Na každé množině existuje selektor.

┌ *Například* (Ekvivalentní tvrzení)

Každou množinu lze dobře uspořádat.

Relace subvalence ( $\leq$ ) je trichotomická.

└ Zornovo lemma.

*Důsledek*

Každý vektorový prostor má bázi.

Součin kompaktních prostorů je kompaktní.

Hall-Banachova věta (o oddělování nadrovinou).

Princip kompaktnosti.

### **Definice 7.4** (Indexovaný soubor množin)

$\langle F_j, j \in J \rangle$ , kde  $F$  je zobrazení s definičním oborem  $J$ , pro  $j \in J$  je  $F_j = F(j)$ , je indexová třída (množina), prvky  $J$  se nazývají indexy.

$$\bigcup_{j \in J} F_j = \{x, (\exists j \in J) x \in F_j\} = \bigcup_{j \in J} F_j = \bigcup \text{Rang } F.$$
$$\bigcap_{j \in J} F_j = \{x, (\forall j \in J) x \in F_j\} = \bigcap_{j \in J} F_j = \bigcap \text{Rang } F.$$

### **Definice 7.5** (Kartézský součin souboru množin)

$$\times_{j \in J} F_j := \{f, f : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} F_j \wedge (\forall j \in J) f(j) \in F_j\}$$

### **Lemma 7.1**

*Je-li  $J$  množina, pak  $\times_{j \in J} F_j$  je množina.*

*Je-li  $(\forall j \in J) F_j = y$ , pak  $\times_{j \in J} F_j =^J y$ .*

┌ *Důkaz*

$J$  množina, tedy z axiomu  $\text{Rang } F$  je množina, tedy  $\bigcup \text{Rang}(F)$  je množina,  $^J \bigcup \text{Rang } F$  je množina,  $\times_{j \in J} F_j \subseteq ^J \bigcup \text{Rang } F \subseteq J \times (\bigcup \text{Rang } F)$ .  $\square$

## Lemma 7.2

Následující je ekvivalentní:

1. Axiom výběru.
2. Princip výběru.
3. Pro každou množinovou relaci  $S$  existuje funkce  $F \subseteq S$  tak, že  $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(S)$ .
4. Kartézský součin  $\times_{i \in x} a_i$  neprázdného souboru neprázdných množin je neprázdný.

┌  
Důkaz

1  $\implies$  2:  $r$  rozklad  $X$ . Podle 1) existuje selektor  $f$  na  $r$ , potom  $\text{Rang}(f)$  je výběrová množina na  $r$ .

2  $\implies$  3: BÚNO  $S \neq \emptyset$ : utvoříme rozklad  $S$ .  $r = \{\{i\} \times S''\{i\}, i \in \text{Dom}(S)\} = \{(i, x) | (i, x) \in S, i \in \text{Dom}(S)\}$ . Výběrová množina  $r$  je přesně funkce  $f \subseteq S$ .  $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(S)$ .

3  $\implies$  4:  $\langle a_i, i \in x \rangle$ . Vytvoříme relaci  $S = \{(i, y), i \in x \wedge y \in a_i\}$ . Funkce  $f$  z 3) je prvkem  $\times_{i \in x} a_i$ .

4  $\implies$  1:  $X$  množina, BÚNO  $X \neq \emptyset$  a  $\emptyset \notin X$ . □

## Lemma 7.3 (AC)

Sjednocení (nejvýše) spočetného souboru (nejvýše) spočetných množin je spočetné.

┌  
Důkaz

$\langle B_j, j \in J \rangle$ , BÚNO  $J = \omega$ . Najdeme prosté zobrazení z  $\bigcup_{j \in J} B_j$  do  $\omega \times \omega$ . Uvažujme soubor  $\langle E_j, j \in \omega \rangle$ , kde  $E_j$  je množina všech prostých zobrazení  $B_j$  do  $\omega$ . Z předpokladu  $E_j \neq \emptyset$ . Podle Lemma o AC bod 4) je  $\times_{j \in \omega} E_j$  neprázdný. Existuje tedy soubor prostých zobrazení  $\langle f_j, j \in \omega \rangle$ , kde  $f_j \subseteq E_j$ .

Definujeme  $h = \bigcup_j B_j \rightarrow \omega \times \omega$  jako  $h(x) = (j, f_j(x))$ , kde  $j$  je  $\min\{i | x \in B_i\}$ . Toto zobrazení už je zřejmě prosté, tedy  $\bigcup_i B_i \leq \omega \times \omega \approx \omega$ . □

## Definice 7.6 (Řetězec)

$A$  je množina uspořádaná  $\leq$ . Pak  $B \subseteq A$  je řetězec, pokud  $B$  je lineárně uspořádaná  $\leq$ .

## Definice 7.7 (Zornovo lemma (princip maximality) (PM))

Je-li  $A$  množina uspořádaná relací  $\leq$  tak, že každý řetězec má horní mez, pak  $\forall a \in A \exists$  maximální prvek  $b \in A$  takový, že  $a \leq b$ .

*Poznámka*  
 Ekvivalentní s AC.

### Definice 7.8 (Princip maximality II (PMS))

Je-li  $A$  množina uspořádaná relací  $\leq$  tak, že každý řetězec má supremum, pak  $\forall a \in A \exists$  maximální prvek  $b \in A$  takový, že  $a \leq b$ .

*Poznámka*  
 Taktéž ekvivalentní s AC.

### Definice 7.9 (Princip trichotomie relace subvalence (PT))

Pro libovolné množiny  $x, y$  platí  $x \leq y$  nebo  $y \leq x$ . (Každé dvě množiny dokážeme porovnat podle velikosti.)

### Lemma 7.4

$(PM) \implies (PT)$ .

*Důkaz*

Definujeme  $D = \{f \mid f \text{ prosté zobrazení} \wedge \text{Dom}(f) \leq x \wedge \text{Rang}(f) \subseteq y\}$ .  $(D, \subseteq)$  splňuje předpoklady (PM). Nechť  $g$  je maximální prvek  $(D, \subseteq)$ : Sporem: Kdyby  $x \setminus \text{Dom}(g)$  a  $y \setminus \text{Rang}(g)$  byly neprázdné, lze  $g$  rozšířit o další dvojici – spor. Pokud  $\text{Dom}(g) = x$ , je  $x \leq y$ . Pokud  $\text{Rang}(g) = y$ , pak  $g^{-1} \upharpoonright y : y \rightarrow x$  je prosté, tedy  $y \leq x$ .  $\square$

*Důsledek*

Pro každou nekonečnou množinu  $x$  platí  $\omega \leq x$ .

### Definice 7.10 (Princip dobrého uspořádání (WO))

Každou množinu lze dobře uspořádat.

*Poznámka*  
 Také ekvivalentní s AC

### Lemma 7.5

$(WO) \implies (AC)$ .

*Důkaz*

$X \neq \emptyset, \emptyset \notin X$ . Použijeme (WO) na  $\bigcup X$  a získáme  $\leq$ . Definujeme si (tzv. selektor)  $f : X \rightarrow \bigcup x$  jako  $f(y) = \min_{\leq}(y)$ .  $\square$



## 8 Ordinální čísla

*Poznámka (Historie)*

Historicky se ordinální čísla definovala jako typy dobře uspořádaných množin.

Kardinální čísla  $\subseteq$  ordinální čísla. Jsou to mohutnosti dobře uspořádaných množin (s AC libovolných množin).

Ordinální čísla jsou dobře uspořádaná  $\in$  a platí pro ně transfinitní indukce.

### Definice 8.1 (Tranzitivní třída)

Třída  $X$  je tranzitivní, pokud  $x \in \mathbb{X} \implies x \subseteq X$ .

### Lemma 8.1

*Jsou-li  $X, Y$  tranzitivní, pak  $X \cap Y$  a  $X \cup Y$  jsou tranzitivní.*

*Je-li  $X$  třída a každý prvek  $x \in X$  je tranzitivní množina, pak  $\bigcap X, \bigcup X$  jsou tranzitivní.*

*Je-li  $X$  tranzitivní, pak  $\in$  je tranzitivní na  $X \Leftrightarrow$  každé  $x \in \mathbb{X}$  je tranzitivní množina.*

┌

*Důkaz*

└ Cvičení. □

### Definice 8.2 (Ordinál)

Množina  $x$  je ordinální číslo (ordinál), pokud  $x$  je tranzitivní množina a  $\in$  je dobré ostré uspořádání  $x$ .

Třidu všech ordinálních čísel značíme  $O_n$ .

### Lemma 8.2

*$O_n$  je tranzitivní třída (prvky ordinálů jsou ordinály).*

┌

*Důkaz*

Nechť  $y \in x \in O_n$ .  $x$  je ordinální číslo, takže je tranzitivní:  $y \subseteq x$ ,  $\in$  je dobré uspořádání na  $x$ , tedy je to dobré uspořádání i na  $y$ . Také z toho vyplývá, že  $\in$  je tranzitivní na  $x \implies y$  je tranzitivní podle předchozího lemma. □

*Důsledek*

$\in$  je tranzitivní na  $O_n$ .

### Lemma 8.3

$x, y \in O_n$ , pak 1)  $x \notin x$ , 2)  $x \cap y \in O_n$ , 3)  $x \in y \Leftrightarrow x \subset y$ .

┌

*Důkaz*

1) sporem z antireflexivity  $\in$  na  $x$ , 2) přímo z definice, 3) cvičení. □

### Věta 8.4

$\in$  je dobré ostré uspořádání třídy  $O_n$ .

┌

*Důkaz*

$\in$  je ostré uspořádání (víme z dřívějších). Trichotomie:  $x, y \in O_n \implies x \cap y \in O_n$ . Pro spor předpokládejme, že  $x \cap y \not\subseteq x, y$ . Podle předchozího lemmatu (3. část)  $x \cap y \in x, y$ , tj.  $x \cap y \in x \cap y$ ,  $\nabla$ . Tedy buď  $x \cap y = x = y$ , pak jsme hotovi, nebo BÚNO  $x \cap y = x \neq y$ , pak  $x \subset y$  a tedy  $x \in y$ .

„Dobrota“:  $A \subseteq O_n$ ,  $A \neq \emptyset$ . Zvolíme si  $\alpha \in A$ . Když je minimální, pak máme hotovo, tedy předpokládejme, že není minimální.  $b := \alpha \cap A$ ,  $b \subseteq \alpha$ ,  $b \neq \emptyset$ .  $b$  má nejmenší prvek (podmnožina ordinálu), označme ho  $\beta$ .  $\beta$  je minimální v  $A$ : Sporem  $\exists \gamma \in \beta$ ,  $\gamma \in A$ ,  $\beta \in b \subseteq \alpha$ ,  $\alpha$  je tranzitivní, tedy  $\gamma \in \alpha$ , tedy i  $\gamma \in b$ .  $\nabla$ . □

*Důsledek*

$O_n$  není množina. (Jinak  $O_n$  je ordinální číslo, tedy  $O_n \in O_n$ ,  $\nabla$ .)

*Důsledek*

Je-li  $X$  vlastní tranzitivní třída, kde  $\in$  je dobré ostré uspořádání na  $X$ , pak  $X = O_n$ .

*Poznámka (Značení)*

Ordinály se značí malými řeckými písmeny.

Místo  $\alpha \in \beta$  se píše  $\alpha < \beta$ . Obdobně  $\alpha \leq \beta$ .

### Lemma 8.5

1) Množina  $x \subseteq O_n$  je ordinální číslo  $\Leftrightarrow x$  je tranzitivní.

2)  $A \subseteq O_n$ ,  $A \neq \emptyset$  třída, pak  $\bigcap A$  je nejmenší prvek  $A$ .

3)  $a \subseteq O_n$  množina, pak  $\bigcup a \in O_n$  a  $\bigcup a = \sup a$ .

*Důsledek*

$\omega$  je supremum množiny všech přirozených čísel v  $O_n$ . ( $\omega = \sup \omega$ .)

Konečné ordinály jsou právě přirozená čísla.

### Lemma 8.6

$\alpha \in O_n$ , pak  $\alpha \cup \{\alpha\}$  je nejmenší ordinál větší než  $\alpha$ .

┌

*Důkaz*

Z tranzitivity  $O_n$  máme  $\alpha \subseteq O_n$ , tedy  $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq O_n$ . Je-li  $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$ , pak buď  $\beta \in \alpha$  nebo  $\beta = \alpha$ . □

### Definice 8.3 (Následník, předchůdce)

$\alpha \cup \{\alpha\}$  se nazývá následník  $\alpha$ ;  $\alpha$  je předchůdce  $\alpha \cup \{\alpha\}$ .

### Definice 8.4 (Izolovaný, limitní ordinál)

$\alpha$  je izolovaný, pokud  $\alpha = 0$  nebo  $\alpha$  má předchůdce. Jinak se nazývá limitní.

### Věta 8.7

Je-li  $a$  množina dobře uspořádaná relací  $r$ , pak existuje právě jedno ordinální číslo  $\alpha$  a právě jeden izomorfismus  $(a, r)$  na  $(\alpha, <)$ .

### Definice 8.5 (Typ)

$\alpha$  se nazývá typ uspořádání  $r$ .

┌

*Poznámka*

Takto definoval ordinální čísla Cantor 1895. (Naše definice je Von Neumann 1923.)

┌

┌

*Důkaz*

V dalším semestru (předmět o nekonečných množinách). □

┌

*Poznámka*

Na  $O_n^2 = O_n \times O_n$  lze definovat lexikografické uspořádání, maximo-lexikografické uspořádání, která jsou dobrá a maximo-lexikografické je úzké ( $(\leftarrow, x]$  je množina  $\forall x$ ).

### Věta 8.8 (Princip transfinite indukce)

*Je-li  $A \subseteq O_n$  třída splňující  $(\forall \alpha \in O_n)(\alpha \subseteq A \implies \alpha \in A)$ , pak  $A = O_n$ .*

*Důkaz*

Sporem: předpokládejme, že  $O_n \setminus A \neq \emptyset$ , pak díky dobrému uspořádání  $O_n$  existuje nejmenší prvek  $\alpha \in O_n \setminus A$ , tedy každé  $\beta \in \alpha$  už je prvek  $A$ , tedy  $\alpha \subseteq A$  a podle předpokladu  $\alpha \in A$ .  $\nabla$ . □

### Věta 8.9 (PTI 2. verze:)

*Je-li  $A \subseteq O_n$  třída splňující  $0 \in A$  a pro každé  $\alpha \in O_n : \alpha \in A \implies \alpha \cup \{\alpha\} \in A$  nebo  $\alpha \subseteq A \implies \alpha \in A$ , pokud  $\alpha$  je limitní, pak  $A = O_n$ .*

### Věta 8.10 (O konstrukci transfinite rekurzí)

*Je-li  $G : V \rightarrow V$  třídové zobrazení, pak existuje právě jedno (třídové) zobrazení  $F : O_n \rightarrow V$  splňující  $\forall \alpha \in O_n : F(\alpha) = G(F|_\alpha)$ . (Další varianty jsou  $F(\alpha) = G(F[\alpha])$ ,  $F(\alpha) = G(\alpha, F|_\alpha)$ , jiné varianty pro limitní a pro izolované).*

*Důkaz*

Transfinite indukci a Axiomem nahrazení  $\rightarrow$  v navazujícím předmětu. □

*Důkaz ( $AC \implies WO$ , náznak)*

$A$  množina,  $g$  selektor na  $\mathcal{P}(A)$ .  $f(0) = g(A)$ ,  $f(\beta) = g(A \setminus f[\beta])$ . □

*Příklad (Pro zajímavost)*

$\mathbb{R}^3$  je disjunkt ní sjednocení jednotkových kružnic.

*Důkaz*

Očíslují se všechny body v  $\mathbb{R}^3$  pomocí ordinálních čísel. Potom sestrojíme soubor  $\langle C_\alpha, \alpha < 2^\omega \rangle$  disjunkt ní jednotkových kružnic (a prázdných množin) tak, že  $x_\alpha \in C_\alpha$  nebo  $x_\alpha \in \bigcup_{\beta \subseteq \alpha} C_\beta$ .

$C_\alpha$  definujeme rekurzivně. Protože  $\alpha < |\mathbb{R}|$ , tak vždy najdeme rovinu bez kružnice a na ní kružnici, která neprotíná žádnou jinou (každá kružnice protínající tuto rovinu nám zakáže maximálně 2 kružnice). □