Organizační úvod

Poznámka (složení předmětu)
Předmět má přednášku, cvičení a proseminář z Matematické analýzy.

Poznámka (Motivace)
TODO

Poznámka (Jak studovat)
Studujte průběžně, ptejte se…

Poznámka (Literatura)

- skripta – viz homepage
- příklady – Koláček & spol. – Příklady z matematické analýzy pro fyziky 1, 2, 3
- další příklady – viz homepage

Motivace

Poznámka (Používá se v)

- Fyzice (viz pohyb planet, např. Proč obíhají planety po elipsách?)
- Ekonomii (viz úroky, např. Lze předpovědět změny úroků v ekonomice a na burze?)
- Meteorologii (např. Jak ovlivňují teplé mořské proudy počasí v Evropě?)
- Lékařství (např. Jak dlouho bude koncentrace léku v krvi na účinné úrovni?)
- Epidemiologie (např. Proč se epidemie šíří nejprve rychle a potom pomalu?)
- Architektura (viz mosty (vibrace), např. Jak se ujistit, že most nespadne v bouři?)
- Inženýrství (viz letadla, např. Jak zkonstruovat nové křídlo pro letadlo? (Většina peněz i času při konstrukci jsou simulace.))

- Informatika (viz MP3, JPEG, např. Jak uchovat informaci o dané funkci v co nejmenším počtu čísel? (Používá se Fourierova transformace = převod funkce na siny a cosiny))

Poznámka (Proč se analýzu učíme my?)

- Abychom uměli látku (hledat extrémy funkcí, umět integrovat)
- Měli solidní matematické základy
- Přečíst návod, jak používat nějaké matematické modely (např. Uplatnění v bance – MFF nese mnoho peněz (nejvíce žádané práce jsou práce stylu statistik))
- Myslet, analyzovat, nedělat chyby (nezapomínat na další možnosti)
- Abychom se naučili způsob myšlení – matematici / matematičky dělají činnosti lépe (ze dvou lidí, co ji neumí, je matematik ten, kdo ji zvládne lépe, nikoliv ten druhý.)

1 Úvod

Dosti možná spíše opakování střední

1.1 Výroky

Definice 1.1 (Výrok)

Tvrzení, o kterém má smysl říct, že je pravdivé, či ne.

Například
„Obloha je modrá.“
„Vídeň je hlavní město ČR.“

Poznámka (Vytváření nových výroků)
Děje se pomocí spojek a, nebo, implikací, ekvivalencí, atd.

A	B	konjunkce $A\&B$	disjunkce AvB	implikace $A \implies B$	ekvivalence $A \Leftrightarrow B$	negace A $\neg A$
0	0	0	0	1!	1	1
0	1	0	1	1!	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

$A \implies B = A$ je postačující podmínka pro $B = B$ je nutná podmínka pro A.

Například (Pravdivé výroky)
$1 = 2 \implies 2 = 3$
já jsem papež $\implies$ všechna letadla jsou modrá

Příklad

- $$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg B \implies \neg B$$
- $$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg(A \& \neg B))$$
- $$\neg(A \& B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$
- $$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \& \neg B)$$
- $$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \implies B) \& (B \implies A)$$

Definice 1.2 (Kvantifikátory)

Dále existují tzv. kvantifikátory: Obecný (= pro všechna) $\forall$ a Existenční (= existuje) $\exists$.

Úmluva
$\forall x \in \mathbb{N}, x > 10\ A(x)$ značí $\forall x \in \mathbb{N}(x > 10 \implies A(x))$

Například

- Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$ je: $\forall x \in M : A(x)$
- Existuje $x \in M$ tak, že platí $A(x)$ je $\exists x \in M : A(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m$

Například (Negace výroků)

- $\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$

- $\neg(\exists x \in M : A(x) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$
- $\neg$(Nikdo mě nemá rád.) $\Leftrightarrow$ Existuje alespoň jeden člověk, který mě má rád.
- $\neg(\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \neg(\forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$$

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \neg(\exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$$

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n + m)$$

Pozor
Na pořadí kvantifikátorů záleží!

Například
M...Muži
Ž...Ženy
L(m, ž)...muži m se líbí žena ž

$$\forall m \in M\ \exists \in\ : L(m,)$$

$$\exists \in\ \forall m \in M : L(m,)$$

První je, že pro každého muže existuje nějaká žena, která se mu líbí, naopak druhá říká, že existuje žena, která se líbí všem mužům.

1.2 Metody důkazů tvrzení

Definice 1.3 (Důkaz sporem)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow \neg(A \& \neg B)$$

Například ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)
($A : x = \sqrt{2}$, $B : x \notin \mathbb{Q}$)

Důkaz (Důkaz sporem:)
Nechť $x = \sqrt{2}$ a $x \in \mathbb{Q}$. $x \in \mathbb{Q} \implies x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$, nesoudělná.
$x^2 = 2$, $2 = x^2 = \frac{p^2}{q^2} \implies 2q^2 = p^2 \implies p = 2k \implies 2q^2 = 4k^2 \implies q^2 = 2k^2 \implies q = 2l$
$p = 2k\ \&\ q = 2l \implies p$ a q soudělná. ↯ $\square$

Definice 1.4 (Přímý důkaz)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (A \implies C_1 \implies C_2 \implies \dots \implies C_n \implies B)$$

Například

$$n^2\text{liché} \implies n\text{liché}$$

Důkaz

$$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k \implies n^2 = p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_k^2$$
$$n^2\text{liché} \implies 2 \nmid p_1 \;\&\; \dots \;\&\; 2 \nmid p_k \implies n\text{liché}$$

□

Definice 1.5 (Nepřímý důkaz)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg B \implies \neg A)$$

Například

$$n^2\text{liché} \implies n\text{liché}$$

Důkaz

$$n\text{sudé} \Leftrightarrow n = 2k \implies n^2 = 4k^2 \implies n^2\text{sudé}$$

□

Definice 1.6 (Matematická indukce)

$$(\forall n \in \mathbb{N} : V(n)) \Leftrightarrow (V(1) \;\&\; \forall n \in \mathbb{N} : V(n) \implies V(n+1))$$

Například

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n \cdot (n+1)$$

Důkaz
1. $n = 1$: $1 = \frac{1}{2}1 \cdot 2$
2.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n \cdot (n+1) \implies \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}n \cdot (n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1) \cdot (n+2)$$

$\square$

Příklad
Všechna auta mají stejnou barvu.

Důkaz
1. $n = 1$: Jedno auto má stejnou barvu jako ono samo.
2. $n \to n+1$: vezmu prvních n aut, ty mají stejnou barvu, vezmu posledních n aut, ty mají také stejnou barvu. Tedy dohromady mají stejnou barvu. $\square$

(Spoiler: $n = 2$)

1.3 Množina reálných čísel

Poznámka (Množiny čísel)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}\right\}$$

Definice 1.7 (Omezená množina)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Řekněme, že M je omezená shora (omezená zdola), jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ = horní (dolní) závora tak, že pro všechna $x \in M$ platí $x \leq a$ ($x \geq a$).

Definice 1.8 (Supremum a infimum)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je shora (zdola) omezená. Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazýváme supremem (infimem) M, pokud:

$$\forall x \in M : x \leq s (s \geq x)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < s (y > s) \exists x \in M, y < x (x > y)$$

Například

- $\sup[0,1] = 1$ (dokázat obě podmínky pro 1 (x z druhé podmínky volím 1)...)
- $\sup(0,1) = 1$ (taktéž dokázat obě podmínky pro 1 (pozor na záporná y) (x z druhé podmínky zvolíme často $\frac{s+y}{2}$))

Definice 1.9 (Reálná čísla)

Na množině $\mathbb{R}$ je dána relace $\leq$ ($\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), operace sčítání $+$ a operace násobení $\cdot$ a množina $\mathbb{R}$ obsahuje prvky 0 a 1 tak, že platí:

Viz skripta (takové ty tělesové / grupové podmínky, podmínky uspořádání a *existence suprema*)

Věta 1.1 (o existenci infima)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje $\inf M$.

Důkaz

Označme $-M = \{x \in \mathbb{R} : -x \in M\}$. Zřejmě $M \neq \emptyset$. M je zdola omezená $\implies$ $-M$ je shora omezená. ($\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M x > K \implies \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in -M x < -K$). Z axiomů $\mathbb{R}$ tedy existuje $s = \sup -M$. Položme $i = -s$. Tvrdím $i = \inf M$. (Dokážeme z definice suprema a infima, viz skripta). $\square$

Věta 1.2 (Archimedova vlastnost)

Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x < n$

Důkaz (Sporem)

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} x \geq n$$

Tedy $\mathbb{N}$ je omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Tedy existuje $x' \in \mathbb{R}, x' = \sup \mathbb{N}$. Tedy $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq x'$. Pak také $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 \leq x'$. To ale tvrdí, že $x' - 1$ je také $\sup \mathbb{N}$. To je ale spor, protože můžeme zvolit $y = x' - \frac{1}{2}$, pak $y < x'$, tedy z druhé vlastnosti suprema $\exists n \in \mathbb{N} : x' - \frac{1}{2} < n$, ale zároveň už víme, že $\forall n \in \mathbb{N} : n < x' - 1$. $\square$

Věta 1.3 (Hustota $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Pak existují $q \in \mathbb{Q}$ a $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tak, že $q \in (a,b)$ a $r \in (a,b)$.

Důkaz
Podle $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{b-a} < n$, tedy $\frac{1}{n} < b - a$. Zvolme $q = \frac{\lceil an \rceil + 1}{n}$, pak jistě $a < q < b$ a $q \in \mathbb{Q}$.

Poté použijeme $q_1 \in (a, b)$ a $q_2 \in (q_1, b)$. Zvolme $r = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}}$. Pak (jelikož druhá část je kladná) $r > q_1$. A $r < q_2 \Leftrightarrow q_1 + \frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}} < q_2 \Leftrightarrow \frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}} < q_2 - q_1$.

Tedy $r \in (a, b)$ a $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, jelikož $r = q_1 + \frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}} = p \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{2} = \frac{q_2-q_1}{p-q_1}$, ale levá strana je jistě iracionální a pravá racionální. Spor. $\square$

Věta 1.4 (O n-té odmocnině (BD = bez důkazu))

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, \infty)$, pak existuje právě jedno $y \in [0, \infty)$ tak, že $y^n = x$.

Důkaz
Idea: Položme $M = \{z \in \mathbb{R}\}$. Ukážeme, že $M \neq \emptyset$ shora omezená $\implies \exists s = \sup M$. Nyní ukážeme $s^n = x$. $\square$

1.4 Krátký výlet do nekonečna

Definice 1.10 (Mohutnost množin)

Řekněme, že množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ mají stejnou mohutnost, pokud existuje bijekce $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$. Značíme $\mathbb{A} \approx \mathbb{B}$.

Řekněme, že množina $\mathbb{A}$ má mohutnost menší, nebo rovnu mohutnosti $\mathbb{B}$, pokud existuje prosté zobrazení $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$. Značíme $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$.

Řekněme, že množina $\mathbb{A}$ má menší mohutnost než $\mathbb{B}$, pokud $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, ale neplatí $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$. Značíme $\mathbb{A} \prec \mathbb{B}$.

Například
1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$ (prosté z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}$ je triviální, opačně si očísluji $\mathbb{Z}$)
2) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$: $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ (obdobně, čísluji diagonálně)
3) $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$: $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ (důkaz sporem, přes diagonálu, vezmu první desetinou cifru z $f(1)$, druhou z $f(2)$… a pozměním je…)

Tvrzení 1.5 (Viz proseminář)

$\mathbb{A} \preceq \mathbb{B} \land \mathbb{B} \preceq \mathbb{A} \implies \mathbb{A} \approx \mathbb{B}$

Definice 1.11

Řekněme, že množina $\mathbb{A}$ je konečná, má-li konečný počet prvků.

Řekněme, že $\mathbb{A}$ je spočetná, jestliže $\mathbb{A} \approx \mathbb{N}$, nebo je $\mathbb{A}$ konečná.

Řekněme, že $\mathbb{A}$ je nespočetná, jestliže $\mathbb{N} \prec \mathbb{A}$.

Tvrzení 1.6 (Cantor)

Nechť X je množina, pak $X \prec \mathcal{P}(X)$, kde @$P(X)$ je množina všech podmnožin X.

Důkaz
Zobrazení $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$ definované $\varphi(x) = \{x\}$ je prosté.

Tvrdím, že neplatí, že $X \approx \mathcal{P}(X)$. Důkaz sporem: Nechť existuje bijekce $\varphi : X \to$ P(X). Označme $A = \{x \in X : x \notin \varphi(x)\}$. φ je bijekce $\implies \exists a \in X : \varphi(a) = A$.

Nyní buď a) $a \in A \implies a \notin \varphi(a) = A$ nebo b) $a \notin A \implies a \in \varphi(a) = A$. $\square$

Poznámka („Nebrali jsme“ Hypotéza kontinua)
Otázka: Existuje $A \subset \mathbb{R}$, že $\mathbb{N} \prec A$ a $A \prec \mathbb{R}$?

Odpověď: Může a nemusí. (Hypotéza kontinua je ze standardních axiomů teorie množin tzv. nerozhodnutelná.)

Tvrzení 1.7

Nechť $A_n, n \in \mathbb{N}$, jsou spočetné množiny, pak:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

je spočetná.

Důkaz
Napíšu si množiny A_i do matice a očísluji po diagonálách. Tím získám $\mathbb{N} \succeq A$. $\square$

2 Posloupnost

2.1 Úvod

Definice 2.1

Jestliže ke každému $n \in \mathbb{N}$ je přiřazeno $a_n \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ je posloupnost reálných čísel.

Například

- $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$
- $\{2^n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, 8, \dots\}$
- $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ (rekurentně zadaná posloupnost)

Definice 2.2

Řekněme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je:

- neklesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- nerostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- klesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- rostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$

Například
$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je klesající a nerostoucí
$\{2^n\}$ je rostoucí a neklesající

Definice 2.3

Řekněme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, jestliže množina členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Analogicky definujeme omezenost shora a omezenost zdola.

Například
$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je omezená
$\{2^n\}$ je pouze omezená zdola

2.2 Vlastní limita posloupnosti

Definice 2.4 (Limita)

Nechť $A \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Řekněme, že A je (vlastní) limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon$$

Značíme $\lim_{n \to \infty} a_n = A$.

Například
Ve videu, při pochopení limity nejsou moc zajímavé.

Příklad ($\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$)

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \Leftrightarrow n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} + \ldots \geq 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} a_n^2$$

$$\frac{2(n-1)}{n \cdot (n-1)} \geq a_n^2 \implies \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \geq a_n \geq 0$$

Věta 2.1 (Jednoznačnost vlastní limity (2.1))

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz (Sporem)
Nechť tedy existuje více limit. Dvě z nich označme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = B$, $A > B$. Zvolme $\varepsilon = \frac{A-B}{3}$. Z definice limity k našemu ε existují $n_A, n_B \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_A |a_n - A| < \varepsilon$ a $\forall n \geq n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Z trojúhelníkové nerovnosti[a] $|A - B| = |(A - a_{n_0}) + (a_{n_0} - B)| \leq |A - a_{n_0}| + |a_{n_0} - B| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}(A - B)$. □

[a] $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$

Věta 2.2 (O omezenosti konvergentní posloupnosti)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má vlastní limitu. Pak* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená.*

Důkaz
Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = 1$. K tomuto $\varepsilon = 1 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) = (A - 1, A + 1)$. Množina $\{a_n | n = 1, 2, \ldots, n_0\}$ je konečná, tedy omezená. Položme $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |A| + 1\}$. Potom jistě $\forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq K$ (protože $\forall n \leq n_0 |a_n| \leq \max\{|a_i|; i \leq n_0\}$ a $\forall n > n_0 a_n \in (A - 1, A + 1) \implies |a_n| \leq |A| + 1 \leq K$). □

Příklad

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \implies \exists n_0 \forall n > n_0 a_n \text{ je monotónní}$$

Definice 2.5 (Vybraná podposloupnost)

Řekněme, že posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $b_n = a_{k_n}$

Věta 2.3 (o limitě vybrané podposloupnosti)

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ *a nechť* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je vybraná z* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Pak* $\lim_{n\to\infty} b_n = A$

Důkaz
K $\varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$. Chceme dokázat $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

K $\varepsilon > 0$ zvolme k_0, kde n_0 je z definice $\lim_{n\to\infty} a_n$. Nechť $k \geq k_0$, pak $n_k \geq k \geq k_0 \geq n_0$. Tedy $|b_k - A| = |a_{n_k} - A| < \varepsilon$ □

Věta 2.4 (Aritmetika limit)

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$. *Pak platí:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = A \cdot B$$

$$\forall b_n \neq 0 \land B \neq 0 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

Důkaz
Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = A \exists n_A \in \mathbb{N} \forall n > n_A |a_n - A| < \varepsilon$, z $\lim_{n\to\infty} b_n = B \exists n_B \in \mathbb{N} \forall n > n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí $|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. (A tady se použije lemmátko, které jsem ani nepsal a které je o tom, že ε můžeme na konci definice limity vynásobit libovolnou konstantou.)

$\exists \lim_{n\to\infty} b_n = B \overset{\text{V2.2}}{\implies}$ b je omezená, tedy $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |b_n| \leq K$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = A \exists n_A \in \mathbb{N} \forall n > n_A |a_n - A| < \varepsilon$, z $\lim_{n\to\infty} b_n = B \exists n_B \in \mathbb{N} \forall n > n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max n_A, n_B$. Pak $\forall n > n_0$ platí $|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - b_n A + b_n A - AB| \leq |a_n b_n - b_n A| + |b_n A - AB| \leq |a_n - A||b_n| + |b_n - B||A| \leq \varepsilon \cdot K + \varepsilon \cdot |A| = \varepsilon \cdot (K + |A|)$.

K $\varepsilon_1 = \frac{|B|}{2}$ z $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = B \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n > n_A |a_n - A| < \varepsilon_1 = \frac{|B|}{2} \implies |b_n| > \frac{|B|}{2}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = A \exists n_A \in \mathbb{N} \forall n > n_A |a_n - A| < \varepsilon$, z $\lim_{n\to\infty} b_n = B \exists n_B \in \mathbb{N} \forall n > n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max n_A, n_B, n_1$. Pak $\forall n > n_0$ platí $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}| = \frac{|a_n B - AB + AB - b_n A|}{|b_n| \cdot |B|} \leq \frac{|a_n B - AB|}{|b_n| \cdot |B|} + \frac{|A - B - b_n A|}{|b_n| - |B|} = \frac{|a_n - A| \cdot |B|}{|b_n| \cdot |B|} + \frac{|A| \cdot |B - b_n|}{|b_n| \cdot |B|} < \varepsilon \cdot (\frac{2}{|B|} + \frac{|A|}{|B|} \cdot \frac{2}{|B|})$. □

Věta 2.5 (Limita a uspořádání)

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

Jestliže $A < B$, *pak existuje* $n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n < b_n$.

Jestliže $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že* $\forall n > n_0$ *platí* $a_n \geq b_n$, *pak* $A \geq B$

Důkaz
Položme $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$. Z existence limit vyplývá $\exists n_A \forall n \geq n_A |a_n - A| < \varepsilon \implies a_n < A + \varepsilon = A + \frac{B-A}{2} = \frac{B+A}{2}$ a $\exists n_B \forall n \geq n_B |b_n - B| < \varepsilon \implies b_n > B - \varepsilon = B - \frac{B-A}{2} = \frac{B+A}{2}$. Zvolme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí $b_n > \frac{A+B}{2} > a_n$.

Sporem. Nechť $A < B$. Pak podle předchozí části $\exists n_1 \forall n > n_1 a_n < b_n$. Zároveň z předpokladu $\forall n \geq n_0 a_n \geq b_n$. Pak pro libovolné $n \geq n_1$ a $n \geq n_0$ platí $(a_n < b_n) \wedge (b_n < a_n)$ □

Věta 2.6 (O dvou strážnících)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti splňující* $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$ *a* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \in \mathbb{R}$.

Pak $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

Důkaz
Nechť ε je kladné. Potom $\exists n_A \forall n \geq n_A |a_n - A| < \varepsilon$ a $\exists n_B \forall n \geq n_B |b_n - A| < \varepsilon$, tedy zvolme $n_C = \max\{n_A, n_B\}$, tudíž $\forall n \geq n_C c_n \in (a_n, b_n) \subseteq (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. □

Věta 2.7 (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a* $\{b_n\}$ *je omezená. Pak* $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Důkaz
Posloupnost $\{b_n\}$ je omezená $\implies \exists K > 0 \forall n \in \mathbb{N} |b_n| \leq K$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ k zadanému $\varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |a_0 - 0| < \varepsilon$. K tomuto $\varepsilon > 0$ volme stejné n_0, pak $\forall n \geq n_0 |a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| \leq |a_n| \cdot |b_n| \leq \varepsilon \cdot K$ □

Například

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice 2.6 (Nevlastní limita)

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, má (nevlastní) limitu $+\infty$ (respektive $-\infty$), pokud

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K$$

(

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n < K$$

)

Například

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

Tvrzení 2.8

Věty: jednoznačnost limity (2.1), limita vybrané posloupnosti (2.3), limita a uspořádání (2.5), o dvou strážnících (2.6, stačí jeden z nich).

Důkaz
Analogicky □

Definice 2.7 (Rozšířená reálná osa)

Rozšířená reálná osa je množina $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. S následujícími vlastnostmi:

- Uspořádání: $\forall a \in \mathbb{R} : -\infty < a < +\infty$
- Absolutní hodnota: $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$
- Sčítání: $\forall a \in \mathbb{R}* \setminus \{-\infty\} : +\infty + a = +\infty$
  $\forall a \in \mathbb{R}* \setminus \{+\infty\} : -\infty + a = -\infty$
- Násobení: $\forall a \in \mathbb{R}* \, a > 0 : a(\pm\infty) = \pm\infty$
  $\forall a \in \mathbb{R}* \, a < 0 : a(\pm\infty) = \mp\infty$
- Dělení: $\forall a \in \mathbb{R} : \frac{a}{\pm\infty} = 0.$
- Výrazy $-\infty + \infty, 0(\pm\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{\text{cokoliv}}{0}$ nejsou definovány (z dobrého důvodu!).

Poznámka (Rozšířená definice suprema a infima)
Je-li $\mathbb{A} \neq \emptyset$ shora neomezená, pak definujeme $\sup \mathbb{A} = +\infty$.

Je-li $\mathbb{A} \neq \emptyset$ zdola neomezená, pak definujeme $\inf \mathbb{A} = -\infty$.

$\sup \emptyset = -\infty, \inf \emptyset = +\infty$

Věta 2.9 (Aritmetika limit podruhé (L2.4))

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}*$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}*$. *Pak platí:*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován.*
2. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$, *pokud je výraz* $A \cdot B$ *definován.*
3. *Pokud* $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *a* $B \neq 0$, *pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, *pokud je výraz* $\frac{A}{B}$ *definován.*

Důkaz (Část)
1. $A, B \in \mathbb{R}$ víme. $A = +\infty, B \in \mathbb{R}$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ libovolně. Z toho, že $\lim_{n\to\infty} = B \in \mathbb{R}$ k $\varepsilon = 1 \exists n_1 \forall n \geq n_1 |b_n - B| < 1 \implies b_n > B - 1$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ plyne, že k $K' = K - B + 1 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n > K' = K - B + 1$. Pak $\forall n \geq n_0' = \max\{n_0, n_1\}$: $a_n + b_n > K - B + 1 + B - 1 = K$. □

Věta 2.10 (Limita typu $\frac{A}{0}$)

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}*, A > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a* $\exists n_0 \forall n \geq n_0$ *platí* $b_n > 0$. *Pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

Důkaz
Zvolme $K \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \left\langle \begin{array}{l} A = +\infty : \exists n_1 \forall n \geq n_1 a_n > 1 \\ A \in \mathbb{R} : \varepsilon = \frac{A}{2} \exists n_1 \forall n \geq n_1 |a_n - A| < \varepsilon = \frac{A}{2} \implies a_n > \frac{A}{2} \end{array} \right.$$

Tedy položme $\tilde{A} = \min\left\{1, \frac{A}{2}\right\}$. Pak $\forall n \geq n_1 : a_n > \tilde{A}$. Z $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ k $\varepsilon = \frac{\tilde{A}}{K} \exists n_2 \forall n \geq n_2 |b_n - 0| < \frac{\tilde{A}}{K} \implies 0 < b_n < \frac{\tilde{A}}{K}$.

Položme $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ pak

$$\forall n \geq n_3 \frac{a_n}{b_n} > \tilde{A} \cdot \frac{K}{\tilde{A}} = K$$

□

2.4 Hlubší věty o limitách

Věta 2.11 (O limitě monotónní posloupnosti (L2.9))

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Důkaz
BÚNO a_n je neklesající. Označme $A = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$.

1. $A = +\infty$. Nechť $K \in \mathbb{R}$, $\sup\{a_n\} = +\infty \implies a_n$ není shora omezená $\implies \exists n_0 a_{n_0} > K$. a_n je neklesající $\implies \forall n \geq n_0 a_n \geq a_{n_0} > K$. To je ale definice $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

2. $A \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0 A - \varepsilon < A$. Z definice suprema musí existovat $n_0 : a_{n_0} > A - \varepsilon$. Jelikož a_n je neklesající, je $\forall n \geq n_0 a_n \geq a_{n_0} > A - \varepsilon$. Z definice suprema $a_n \leq A < A + \varepsilon$, tedy $\forall n \geq n_0 |a_n - A| < \varepsilon$. □

Poznámka
Monotónní posloupnost: neklesající (shora omezená = vlastní limita, shora neomezená = limita $+\infty$), nerostoucí (sdola omezená = vlastní limita, sdola neomezená = limita $-\infty$).

Příklad

$$a_1 = 10, a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$$

Řešení
Napíšu prvních pár členů a tipneme, že je klesající a $a_n \geq 5$. Pak vše dokážeme. A použijeme aritmetiku limit.

Pozor
V předchozím příkladu je použití věty 2.9 nutné!.

Věta 2.12 (Cantorův princip vložených intervalů)

Nechť $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost uzavřených intervalů splňující* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$. *Pak je množina* $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ *jednobodová.*

Důkaz
Z první podmínky na interval vidíme $a_{n+1} \geq a_n$ a $b_{n+1} \leq b_n$. Navíc a_n je shora omezená b_1 a b_n je sdola omezená a_1. Podle $V2.9 \exists \lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

$$0 = \lim_{n\to\infty} b_n - a_n \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = B - A \implies A = B$$

Tedy $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{A\}$. □

Věta 2.13 (Bolzano-Weirstrass)

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Důkaz (Tzv. půlením intervalu)
$\{a_n\}$ je omezená, tedy $\exists c_1, d_1 \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} c_1 \leq a_n \leq d_1$. Zvolme $a_{n_1} \in [c_1, d_1\}$ libovolně. Rozdělme $[c_1, d_1]$ na $\left[c_1, \frac{c_1+d_1}{2}\right]$ a $\left[\frac{c_1+d_1}{2}, d_1\right]$. V alespoň jednom tomto intervalu je ∞ mnoho a_n. Pokud $\#\left\{n : a_n \in \left[c_1, \frac{c_1+d_1}{2}\right]\right\} = +\infty$, položme $c_2 = c_1, d_2 = \frac{c_1+d_1}{2}$. Jinak $\#\left\{n : a_n \in \left[\frac{c_1+d_1}{2}, d_1\right]\right\} = +\infty$, položme $c_2 = \frac{c_1+d_1}{2}, d_2 = d_1$. Nalezneme $n_2 > n_1$ a $a_{n_2} \in [c_2, d_2]$. Dále pokračujeme indukcí.

Nechť $\#\{n : a_n \in [c_k, d_k]\} = +\infty$. Rozdělme $[c_k, d_k]$ na $\left[c_k, \frac{c_k+d_k}{2}\right]$ a $\left[\frac{c_k+d_k}{2}, d_k\right]$. V alespoň jednom tomto intervalu je ∞ mnoho a_n. Pokud $\#\left\{n : a_n \in \left[c_k, \frac{c_k+d_k}{2}\right]\right\} = +\infty$, položme $c_{k+1} = c_k, d_{k+1} = \frac{c_k+d_k}{2}$. Jinak $\#\left\{n : a_n \in \left[\frac{c_k+d_k}{2}, d_k\right]\right\} = +\infty$, položme $c_{k+1} = \frac{c_k+d_k}{2}, d_{k+1} = d_k$. Nalezneme $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}]$.

Nyní máme posloupnost intervalů $[c_k, d_k]$ a $a_{n_k} \in [c_k, d_k]$. Víme, že $[c_{k+1}, d_{k+1}] \subset [c_k, d_k]$ a $d_{k+1} - c_{k+1} = \frac{d_k - c_k}{2} = \frac{d_1 - c_1}{2^k}$, tedy $\lim_{k\to\infty} d_k - c_k = 0$.

Podle V2.10 $\exists A = \bigcap_{k=1}^{\infty} [c_k, d_k]$ a $\lim_{k\to\infty} c_k = A = \lim_{k\to\infty} d_k$. Nyní n_k je rostoucí posloupnost, tedy a_{n_k} je vybraná podposloupnost z $\{a_n\}$. Víme, že $a_{n_k} \in [c_k, d_k] \Leftrightarrow c_k \leq a_{n_k} \leq d_k$ a podle Věty o dvou strážnících je $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A \in \mathbb{R}$. □

Definice 2.8 (Limes superior)

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a označme $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ a $c_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$. (Pak b_n je nerostoucí a c_n je neklesající.)

Je-li $\{a_n\}$ shora neomezená, pak klademe $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Je-li $\{a_n\}$ sdola neomezená, pak klademe $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

Číslo $\lim_{n\to\infty} b_n$ nazýváme limes superior posloupnosti $\{a_n\}$ a značíme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Číslo $\lim_{n\to\infty} c_n$ nazýváme limes inferior posloupnosti $\{a_n\}$ a značíme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Důkaz
Existence limit je zaručena V 2.9 (o limitě monotónní posloupnosti). □

Poznámka
Zřejmě $\forall c_n \leq a_n \leq b_n$.

Například

$$\limsup_{n\to\infty} (-1)^n = 1$$
$$\liminf_{n\to\infty} (-1)^n = -1$$

Věta 2.14 (Vztah limity, limes superior a limes inferior (T2.12))

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel a* $A \in \mathbb{R}*$. *Pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = A.$$

Důkaz
Důkaz jen pro $A \in \mathbb{R}$. Jinak by byl podobný.

$\implies \lim_{n\to\infty} a_n = A$, tedy posloupnost je omezená dle věty 2.2. Můžeme tedy definovat b_n a $c_n \in \mathbb{R}$. Posloupnosti b_n a c_n jsou monotónní a platí $c_n \leq b_n$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z definice $\lim_{n\to\infty} a_n \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |a_n - A| < \varepsilon$, tj. $\forall n_0 b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \leq A + \varepsilon$ a $\forall n_0 c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \geq A - \varepsilon$.

Podle V 2.5 o limitě a uspořádání $\lim_{n\to\infty} c_n \in [A-\varepsilon, A+\varepsilon]$, $\lim_{n\to\infty} b_n \in [A-\varepsilon, A+\varepsilon]$, pro libovolné ε.

$\Leftarrow$ Podle definice b_n a c_n je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená, tedy můžeme definovat b_n a c_n. Z poznámky víme, že $c_n \leq a_n \leq b_n$ a podle věty o dvou strážnících tedy $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A$. $\square$

Příklad

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

Definice 2.9 (Hromadná hodnota)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}*$. Řekněme, že A je hromadná hodnota posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\})$.

Například
$H(\{(-1)^n\} = \{0, 1\})$

Věta 2.15 (O hromadných hodnotách posloupnosti)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel, potom* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *a* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ *jsou hromadnými hodnotami posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a pro každou hromadnou hodnotu* $A \in \mathbb{R}*$ *této posloupnosti platí* $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq A \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Důkaz
Opět pouze pro $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Pak a_n je shora omezená. Označme b_n jako vždy, b_n je nerostoucí a $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

Z $\lim_{n\to\infty} b_n = A$ $\varepsilon = 1 \exists m_1$ tak, že $|b_{m_1} - A| < 1$. Nyní z $b_{m_1} = \sup\{a_{m_1}, a_{m_1+1}, \dots\}$ existuje $n_1 \geq m_1$ tak, že $b_{m_1} - 1 < a_{n_1} \leq b_{m_1} \implies |a_{n_1} - b_{m_1}| < 1 \implies |a_{n_1} - A| \leq |a_{n_1} - b_{n_1}| + |b_{m_1} - A| < 2$. Dále indukcí.

Mějme $m_1, \dots, m_k$ a $n_1, \dots, n_k$. Z $\lim_{n\to\infty} b_n = A, \varepsilon = \frac{1}{k+1} \exists m_k > n_k |b_{m_k} - A| < \frac{1}{n+1}$. Z $b_{m_{k+1}} = \sup\left\{a_{m_{k+1}}, \dots\right\} \exists n_{k+1} \geq m_{k+1}$ tak, že $b_{m_{k+1}} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} \leq b_{m_{k+1}} \implies |a_{n_{k+1} - b_{m_{k+1}}}| < \frac{1}{k+1} \implies |a_{n_{k+1}} - A| \leq |a_{n_{k+1}} - b_{m_{k+1}}| + |b_{m_{k+1}} - A| < \frac{2}{k+1}$.

Tedy jsme dostali rostoucí posloupnost n_k tak že $|a_{n_k} - A| < \frac{2}{k} \implies \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Tedy $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = A \in H(\{a_n\})$.

Úplně stejně pro $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Stačí dokázat $\forall A \in H(\{a_n\})$ $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq A \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Nechť n_k je rostoucí posloupnost taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Z poznámky víme $c_{n_k} \leq a_{n_k} \leq b_{n_k}$, tedy podle V2.5 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

$\square$

Důsledek
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Pak

- $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$,
- $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \min H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}), \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \max H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$,
- Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, pak $H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{A\}$.

Věta 2.16 (Bolzano-Cauchyova podmínka (T2.14))

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku, tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Důkaz

$\implies$: Z $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ vyplývá $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| \leq |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Opačná implikace: Nechť $\{a_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$. Toto použiji pro $m = n_0$ a dostanu $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$. Tedy a_n je omezená posloupnost a definujeme $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ a $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$. Z definice b_n a c_n dostaneme $\forall n > n_0 : a_{n_0} - \varepsilon \leq c_n \leq b_n \leq a_{n_0} + \varepsilon$. Tedy podle věty o uspořádání a ..., $a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon$.

Odtud $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n - \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq 2\varepsilon$. Toto platí $\forall \varepsilon > 0$, tedy $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Podle V2.12 $\exists \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. $\square$

Poznámka (Organizační věci ke zkoušce)
Písemná část (příklady, stačí udělat jednou i na více pokusů, 50b, minimum 25, libovolná literatura, žádná elektronika) $\to$ ústní část (teoretická, 40b (+10 pro jedničkáře), minimum 25b, lze se na ni dostat nejenom s úspěšnou písemnou částí, ale i s 3 neúspěšnými písemnými částmi).

3 pokusy. (Jeden termín i v září.) Nezapomenout si s sebou doklad totožnosti.

RADA 1 (písemná): Začněte příklady 1 (limita posloupnosti 10b), 2 (limita funkce 10b), 3 (průběh funkce 20b), až potom udělat 4 (teoretický příklad, 10b).

Ústní část = klíčový pojem (0b), 3 definice nebo znění vět (3×4b = 12b), LV+důkaz (4+8b = 12b), TV+důkaz(4+12 = 16b). Nemá časový limit.

RADA 2 (ústní): Musím umět důkazy? ANO! Stačí lehké? ANO!

$<$ 50b :(, $[50, 59)$ (3), $\geq$ 60b (bonusová otázka 10b): $\geq$ 70b (2), $\geq$ 85b (1).

3 Funkce jedné reálné proměnné - limita a spojitost

3.1 Základní definice

Definice 3.1 (Funkce jedné reálné proměnné)

Funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subseteq \mathbb{R}$.

Definice 3.2 (Sudá, lichá a periodická funkce)

Řekněme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$ je sudá, jestliže $\forall x \in M : (-x \in M) \wedge (f(x) = f(-x))$, je lichá, jestliže $\forall x \in M : (-x \in M) \wedge (f(x) = -f(-x))$, je periodická, jestliže $\exists p > 0, \forall x \in M : (x + p \in M) \wedge (f(x) = f(x + p))$.

Definice 3.3 (Funkce omezená, omezená shora, omezená zdola)

Řekněme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, je omezená (omezená shora, omezená zdola), jestliže $f(M)$ je omezená (omezená shora, omezená zdola).

Definice 3.4 (Prstencové okolí bodu, okolí bodu (+ levé a pravé))

Nechť $\delta > 0$ a $a \in \mathbb{R}$. Prstencové okolí bodu $\mathrm{P}(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, $\mathrm{P}(+\infty, \delta) = \left(\frac{1}{\delta}, +\infty\right)$, $\mathrm{P}(-\infty, \delta) = \left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right)$.

Pravé a levé prstencové okolí bodu a je $\mathrm{P}_+(a, \delta) = (a, a + \delta), \mathrm{P}_-(a, \delta) = (a - \delta, a)$.

Okolí bodu $\mathrm{B}(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$, $\mathrm{B}(+\infty, \delta) = \left(\frac{1}{\delta}, +\infty\right)$, $\mathrm{B}(-\infty, \delta) = \left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right)$.

Pravé a levé okolí bodu a je $\mathrm{B}_+(a, \delta) = [a, a + \delta)\,, \mathrm{B}_-(a, \delta) = (a - \delta, a]$.

Definice 3.5 (Limita funkce)

Nechť $f : M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}*$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathrm{P}(a, \delta) : f(x) \in \mathrm{B}(A, \varepsilon),$$

značíme $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

Poznámka

Pro reálné a lze zapsat definici podobně jako limitu posloupnosti.

Definici lze také zapsat jako $\lim_{x \to a} f(x) = A \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(\mathrm{P}(a, \delta)) \subseteq \mathrm{B}(A, \varepsilon)$.

Definice 3.6 (Limita zprava / zleva)

Nechť $f : M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu zprava (zleva) rovnou $A \in \mathbb{R}*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in \mathrm{P}_{+(-)} : f(x) \in B(A, \varepsilon),$$

značíme $\lim_{x \to a_{+(-)}} f(x) = A$.

Poznámka

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = A \wedge \lim_{x \to a-} f(x) = A$$

Definice 3.7 (Spojitost v bodě (+ zprava a zleva))

Nechť $f : M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}, a \in M$. Řekneme, že f je v bodě $a \in \mathbb{R}$ spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva), jestliže

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \left(\lim_{x\to a+} f(x) = f(a), \lim_{x\to a-} f(x) = f(a) \right)$$

Například

$f(x) = x$ je spojitá. Dirichletova funkce (D(x) je 1 pro $x \in \mathbb{Q}$, je 0 pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) není spojitá (a nemá nikde limitu). Riemanova funkce ((R(x) je $\frac{1}{q}$ pro $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ nesoudělná, je 0 pro $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$) je spojitá v každém iracionálním čísle a nespojitá v každém racionálním.

3.2 Věty o limitách

Věta 3.1 (Heineho věta (T3.1))

Nechť $A \in \mathbb{R}*, f : M \to \mathbb{R}$ a f je definována na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}*$. Následující podmínky jsou ekvivalentní (NPJE):
(i) $\lim_{x\to a} = A$,
(ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \in M, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq a, \lim_{n\to\infty} = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Důkaz

($\implies$): Mějme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující předpoklady bodu (ii). Nechť $\varepsilon > 0$ Podle (i) $\exists\delta > 0 \forall x \in \mathrm{P}(a,\delta) : f(x) \in B(A,\varepsilon)$. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, tedy k tomuto $\delta > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in \mathrm{B}(c,\delta)$. Dále $x_n \neq a$, tedy $x_n \in \mathrm{P}(a,\delta)$. Tudíž dostáváme $f(x_n) \in B(A,\varepsilon)$. ($\Leftarrow$): Dokažme $\neg(i) \implies \neg(ii)$. $\neg(i) : \exists\varepsilon > 0 \forall\delta > 0 \exists x \in \mathrm{P}(a,\delta) : \neg(f(x) \in B(A,\varepsilon))$. Toto použijeme pro $\delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Dostaneme $\exists x_n \in \mathrm{P}(a, \frac{1}{n}) : f(x_n) \notin B(A,\varepsilon)$. Nyní $x_n \to a$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq a \implies \{x_n\}$ splňuje podmínky (ii) a dostaneme $\lim_{n\to\infty} = A$. Toto je spor s $f(x_n) \notin \mathrm{B}(A,\varepsilon)$. □

Poznámka

Existují i varianty pro limitu zprava a zleva a pro Spojitost

Věta 3.2 (O jednoznačnosti limity)

Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.

Důkaz
Sporem. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} f(x) = B$, $A \neq B$. Podle Heineho věty $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B$. Toto je spor s jednoznačností limity posloupnosti. . □

Věta 3.3 (limita a omezenost)

Nechť f má vlastní limitu v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že f je na $\mathrm{P}(a, \delta)$ omezená.

Důkaz
Označme $A = \lim_{x\to a} f(x)$. Víme $A \in \mathbb{R}$. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ tak, že

$$\forall x \in \mathrm{P}(a, \delta) : f(x) \in \mathrm{B}(A, 1) = (A - 1, A + 1).$$

Tedy $f(\mathrm{P}(a, \delta)) \subseteq (A - 1, A + 1)$. Z toho plyne, že f je na $\mathrm{P}(a, \delta)$ omezená. □

Věta 3.4 (O aritmetice limit)

Nechť $a \in \mathbb{R}*$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}*$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}*$. Pak platí (má li pravá strana smysl):

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$$

$$lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

Důkaz
Heineho věta. □

Důsledek
Nechť jsou funkce f a g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak jsou funkce $f + g$, $f \cdot g$ spojité v a. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak f/g je spojitá v a.

Speciálně polynomy jsou spojité na $\mathbb{R}$ a racionální lomené funkce $\frac{P(x)}{Q(q)}$ jsou spojité ve všech $x : Q(x) \neq 0$.

Věta 3.5 (O limitě a uspořádání a o dvou policajtech)

Nechť $a \in \mathbb{R}*$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$. Pak existuje prstencové okolí $\mathrm{P}(a, \delta)$ tak, že $\forall x \in \mathrm{P}(a, \delta) : f(x) > g(x)$.

Nechť existuje prstencové okolí bodu $\mathrm{P}(a, \delta)$ tak, že $\forall x \in \mathrm{P}(a, \delta) : f(x) \leq g(x)$. Nechť existují $\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)$. Potom platí $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

Nechť na nějakém prstencovém okolí $\mathrm{P}(a, \eta)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) =$

$\lim_{x\to a} g(x)$. *Pak existuje* $\lim_{x\to a} h(x)$ *a rovná se jim.*

Důkaz
$\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x) \implies f(x) > g(x)$ na $\mathrm{P}(a,\delta)$. Označme $A = \lim_{x\to a} f(x)$ a $B = \lim_{x\to a} g(x)$. Víme $A > B$. Nalezneme $\varepsilon > 0$ tak, aby $\mathrm{B}(A,\varepsilon) \cap \mathrm{B}(B,\varepsilon) = \emptyset$. Navíc $\forall c \in \mathrm{B}(A,\varepsilon) \forall d \in \mathrm{B}(B,\varepsilon)$ platí $c > d$. K tomuto ε nalezneme $\delta_1 > 0$ a $\delta_2 > 0$ tak, že $\forall x \in \mathrm{P}(c,\delta_1) : f(x) \in \mathrm{B}(A,\varepsilon)$ a $\forall x \in \mathrm{P}(c,\delta_2) : g(x) \in \mathrm{B}(B,\varepsilon)$. Položme $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$. Pak $\forall x \in \mathrm{P}(c,\delta) : f(x) \in \mathrm{B}(A,\varepsilon)\ landg(x) \in \mathrm{B}(B,\varepsilon) \implies f(x) > g(x)$.

Sporem z první části.

Označme $A = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Nechť nejprve $A \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 > 0$ tak, že $\forall x \in \mathrm{P}(a,\delta_1)$ platí $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, $A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon$. Nechť $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Pak $\forall x \in \mathrm{P}(a,\delta) : h(x) \in \mathrm{B}(a,\varepsilon)$.

Pro $A = \pm\infty$ obdobně. □

Věta 3.6 (Limita složené funkce)

Nechť funkce f *a* g *splňují* $\lim_{x\to a} g(x) = A$ *a* $\lim_{y\to A} f(x) = B$. *Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek: (S)* f *je spojitá v* A, *(P)* $\exists \eta > 0 \forall x \in \mathrm{P}(a,\eta) : g(x) \neq A$. *Pak platí* $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

Důkaz
(S) Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{y\to A} f(x) = B$. $\exists \psi > 0$ tak, že $f(\mathrm{P}(A,\psi)) \subseteq \mathrm{B}(B,\varepsilon)$. f je spojitá v $A \implies B = \lim_{y\to A} f(x) = f(A) \implies$ dokonce $f(\mathrm{B}(A,\psi)) \subseteq \mathrm{B}(B,\varepsilon)$.

K našemu $\psi > 0$ z $\lim_{x\to a} g(x) = A \exists \delta > 0 : g(\mathrm{P}(a,\delta)) \subseteq \mathrm{B}(A,\psi)$. Nyní $f(g(\mathrm{P}(a,\delta))) \subseteq f(\mathrm{B}(A,\psi)) \subseteq \mathrm{B}(B,\varepsilon) \implies \lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

(P) Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{y\to A} f(x) = B$. $\exists \psi > 0$ tak, že $f(\mathrm{P}(A,\psi)) \subseteq \mathrm{B}(B,\varepsilon)$. K $\psi > 0$ z $\lim_{x\to a} g(x) = A \exists \delta > 0 : g(\mathrm{P}(a,\delta))\,\mathrm{B}(A,\psi)$. BÚNO $\delta < \eta$. Z (P) $g(x) \neq A \forall x \in \mathrm{P}(a,\delta) \subseteq \mathrm{P}(a,\eta)$. Tedy dokonce $g(P(a,\delta)) \subseteq \mathrm{P}(A,\psi)$.

Nyní $f(g(\mathrm{P}(a,\delta))) \subseteq f(\mathrm{P}(A,\psi)) \subseteq \mathrm{B}(B,\varepsilon) \implies \lim_{x\to a} f(g(x)) = B$. □

Věta 3.7 (Limita monotónní funkce)

Nechť f *je monotónní na intervalu* (a,b), $a, b \in \mathbb{R}*$. *Potom existuje* $\lim_{x\to a+} f(x)$ *a* $\lim_{x\to b-} f(x)$.

Důkaz
Nechť f je neklesající, pro nerostoucí je důkaz analogický. Označme $m = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$. Dokážeme $\lim_{x\to a+} f(x) = m$ v případě $m \in \mathbb{R}$. Případ $m = -\infty$ a důkaz pro $\lim_{x\to b-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)}$ je analogický.

Nechť $\varepsilon > 0$. Z vlastnosti infima $\exists y \in f((a,b))$ tak, že $y < m + \varepsilon$. Z definice $f((a,b)) \exists x' \in (a,b) : f(x') = y$. f je neklesající, a proto $\forall x \in (a,x') : f(x) \leq f(x') = y < m + \varepsilon$. m je také dolní závora $f((a,b))$ tedy $\forall x \in (a,b) : m - \varepsilon < m \leq f(x)$.

Celkem $\forall x \in (a,x') : m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon$. Tedy $\lim_{x\to a+} f(x) = m$. □

Věta 3.8 (T3.8, Bolzano-Cauchyova podmínka pro funkce)

Nechť $a \in \mathbb{R}*$ a $\delta_0 > 0$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na $\mathrm{P}(a,\delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x\to a} f(x)$ právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzano-Cauchyova) podmínka:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x,y \in \mathrm{P}(a,\delta) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Důkaz
($\implies$) Nechť $\varepsilon > 0$ a $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Z definice limity $\exists\delta > 0 \forall x \in \mathrm{P}(o,\delta) : f(x) \in \mathrm{B}(A,\varepsilon)$. Toto δ použijeme pro BC podmínku a $\forall x,y \in \mathrm{P}(a,\delta) : |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Toto je ekvivalentní BC podmínce.

($\Leftarrow$) Použijeme BC podmínku pro posloupnosti a Heineho větu. Víme BC a chceme $\exists A \in \mathbb{R} : \lim_{x\to a} f(x) = A$. Z heineho věty je tato „limita“ ekvivalentní s $\forall x_n \to a, x_n \neq a : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Nechť tedy $x_n \to a, x_n \neq a$. Tvrdím, že $a_n = f(x_n)$ splňuje BC podmínku pro posloupnost. Nechť $\varepsilon > 0$, nalezneme $\delta > 0$ z BC podmínky pro funkci. K tomuto $\delta > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in \mathrm{P}(a,\delta)$, neboť $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, tedy $\forall m,n \geq n_0 : |a_n - a_m| = |f(x_n) - f(x_m)| \overset{\text{z BC podmínky}}{<} \varepsilon$. Tedy $a_n = f(x_n)$ splňuje BC podmínku pro posloupnosti, tedy $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in \mathbb{R}$.

Nyní nechť $x_n \to a, x_n \neq a$ a $y_n \to a, y_n \neq a$. Podle předchozího $\exists A,B \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \wedge \lim_{n\to\infty} b(y_n) = B$. Nechť $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ je nová posloupnost splňující podmínky. Pak existuje její limita $\implies A = B$ podle věty o limitě podposloupnost. □

3.3 Funkce spojité na intervalu (3.3)

Definice 3.8 (Vnitřní body)

Vnitřními pody intervalu J rozumíme ty body J, které nejsou krajními.

Definice 3.9 (Funkce spojitá na intervalu)

Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je spojitá na J, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě. Je-li počáteční bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zprava v tomto bodě. Analogicky pro koncový bod požadujeme spojitost zleva.

Definice 3.10 (Darboux)

Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a platí $f(a) < f(b)$. Pak pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) = y$.

Poznámka
Pro $f(a) > f(b)$ platí analogie.

Důkaz
Nechť $y \in (f(a), f(b))$ a položme $M = \{z \in [a,b] : f(z) < y\}$. Množina M je neprázdná (obsahuje např. a), shora omezená (b), tedy existuje $x_0 = \sup M$. Zřejmě $x_0 \in [a,b]$. Dokážeme, že $f(x_0) = y$ vyloučením případů:

$f(x_0) > y$, potom ze spojitosti ($\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > y$) plyne $\exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f(x) > y$ $(0 < \varepsilon < f(x_0) - y)$. Tedy z definice M, že $(x_0 - \delta, x_0)$ neleží v $M \implies x_0$ není nejmenší horní závora M, .

$f(x_0) < y$, potom ze spojitosti plyne $\exists \delta \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) < y$, tedy $\exists x > x_0 : f(x) < y$, tedy x není horní závora, .

Tedy $f(x_0) = y$ (zřejmě $b \neq x_0 \neq a$, tedy $x_0 \in [a,b]$). □

Důsledek
Nechť J je interval a funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak je $f(J)$ interval.

Definice 3.11 (Maximum (minimum))

Nechť $f : M \to \mathbb{R}, m \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $a \in M$ maxima (resp. minima, ostrého maxima, ostrého minima) na M, jestliže $forall x \in M : f(x) \overset{(\geq, <, >)}{\leq} f(a)$ (samozřejmě při ostrých $x \neq a$).

Řekneme, že f nabývá v bodě $a \in M$ lokálního maxima (ostrého lokálního maxima, ostrého likoálního minima, lokálního minima), jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že f nabývá na $M \cap \mathrm{B}(a, \delta)$ svého maxima (...).

Věta 3.9 (Spojitost funkce a nabývání extrémů)

Nechť f je spojitá na $[a,b]$. Pak f nabývá na $[a,b]$ svého maxima a minima.

Důkaz
Použijeme Bolzano-Weirstrassovu větu a Heineho větu pro spojitost.

Označme $G = \sup f([a, b])$. Z definice suprema $\exists y_n \in f([a, b])$ tak, že $y_n \to G$. Z definice $f([a, b]) \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) = y_n$. Podle Bolzano-Weirstrass $\exists x_{n_k} \to x* \in [a, b]$ (díky strážníkům). Podle Heineho věty (pro spojitost) $x_{n_k} \to x* \implies f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to f(x*)$. Ale $y_n \to G \implies y_{n_k} \to G$.

Tedy $G = f(x*) \implies$ v $x*$ je nabyto maximum. Minimum lze dokázat analogicky. □

Důsledek
Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Pak funkce f je na $[a, b]$ omezená.

Definice 3.12 (Prostá a inverzní funkce na intervalu)

Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je prostá na J, jestliže pro všechna $x, y \in J$ platí $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$.

Pro prostou funkci $f : J \to \mathbb{R}$ definujeme funkci $f^{-1} : f(J) \to \mathbb{R}$ předpisem $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Věta 3.10 (O inverzní funkci)

Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom je f^{-1} spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

Důkaz
BÚNO f je spojitá a rostoucí. Víme, že f^{-1} je definováno na $f(J)$. Tvrdím, že f^{-1} je rostoucí: Sporem: Nechť $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$, ale $f^{-1}(y_1) = x_1 \geq f^{-1}(y_2) = x_2$. Pak ale $x_1 \geq x_2 \overset{f \text{ rostoucí}}{\implies} f(x_1) = y_1 \geq f(x_2) = y_2$.

$y_0 \in f(J)$ vnitřní bod: spojitost: Víme, že $f^{-1}(y_0) = x_0$ a x_0 je vnitřní bod J. Nechť $\varepsilon > 0$. Existují $x_1, x_2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap J$. Pak $f(x_1) < f(x_0) = y_0 < f(x_2)$. Zvolme $\delta = \min\{f(x_2) - f(x_0), f(x_0) - f(x_1)\}$. Pak $\mathrm{B}(f(x_0), \delta) = \mathrm{B}(y_0, \delta) \subseteq (f(x_1), f(x_2))$. Nyní $f^{-1}(\mathrm{B}(y_0, \delta)) \subseteq (x_1, x_2) \subseteq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \implies \lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$.

$y_0 \in f(J)$ levý krajní bod: spojitost zprava: $f^{-1}(y_0) = x_0$ a x_0 je levý krajní bod J. Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $x_1 \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ tak, že $x_0 < x_1 \implies f(x_0) < f(x_1)$. Položme $\delta = f(x_1) - f(x_0)$, pak $\mathrm{B}_+(y_0, \delta) = [y_0, y_0 + \delta) = [y_0, f(x_1))$. Nyní $f^{-1}(\mathrm{B}_+(y_0, \delta)) = [x_0, x_1) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

$y_0 \in f(J)$ pravý krajní bod: spojitost zleva: Analogicky. □

Například
Funkce $x \to x^n$ je spojitá a rostoucí na $[0, \infty)$, proto je i funkce $x \to \sqrt[n]{x}$ spojitá a rostoucí na $[0, \infty)$.

3.4 Elementární funkce (3.4)

Věta 3.11 (Zavedení exponenciely)

Existuje funkce $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující: a)* $\exp(x)$ *je rostoucí na* $\mathbb{R}$*, b)* $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$*, c)* $\exp(0) = 1$*, d)* $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$*, e)* $\exp(x)$ *je spojitá na* $\mathbb{R}$*.*

Poznámka (Další možnosti zavedení)

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{y}\, dy$$

$$e^x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Důkaz

Položme $\exp x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}$. Nejdříve chceme ukázat $\exists \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nechť x je pevné.[a]

Podle věty Bolzano-Cauchyova podmínka pro posloupnost stačí ověřit BC podmínku. Nechť $\varepsilon > 0$, zvolme $n_0 \geq 2k_0 \wedge \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, kde $k_0 = \lfloor |x| \rfloor + 1$. Nechť $m, k \geq n_0$. BÚNO $m > k$:

$$\left|\sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}\right| = \left|\sum_{n=k+1}^{m} \frac{x^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=k+1}^{m} \left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=k+1}^{m} |x|^{k_0+2} \cdot \frac{1}{n\cdot(n-1)} = |x|^{k_0+2} \cdot \frac{1}{k} < |x|^{k_0+2} \cdot \varepsilon,$$

což je přesně BC podmínka, tedy naše posloupnost je dobře definována.

a) $0 \leq x \leq y \implies \frac{x^n}{n!} \leq \frac{y^n}{n!} \implies \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{k} \frac{y^n}{n!} \implies \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{y^n}{n!} \implies \exp x \leq \exp y$.

$x \leq y \leq 0 \implies -x \geq -y \geq 0 \implies \exp(-x) \geq \exp(-y) \overset{\text{z b), viz dále}}{\implies} \exp x = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{\exp(-y)} = \exp y$.

$x \leq 0 \leq y \implies \exp x \leq \exp 0 \leq \exp y$

b)[b] Označme $s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} x^i \overset{n\to\infty}{\to} s = \exp x$, $\sigma_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} y^j \overset{n\to\infty}{\to} \sigma = \exp y$, $\varrho_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \frac{x^{k-j}}{(k-j)!} \cdot \frac{y^j}{j!} \overset{n\to\infty}{\to} \varrho = \exp(x+y)$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Pak z BC podmínky $\exists n_0$, že $\sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{|x|^i}{i!} < \varepsilon$, $\sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{|y|^j}{j!} < \varepsilon$ a zároveň $|s_{n_0} \cdot \sigma_{n_0} - s \cdot \sigma| < \varepsilon$. Nechť $n \geq 2n_0$, pak

$$|\varrho_n - s\cdot\sigma| \leq |\varrho_n - s_{n_0}\sigma_{n_0}| + |s_{n_0}\sigma_{n_0} - s\cdot\sigma| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \cdot \frac{|y|^i}{i!} + \sum_{j=n_0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \cdot \frac{|y|^i}{i!} + \varepsilon \leq,$$

jelikož všechny členy, které se neodečetly, mají alespoň jeden index $\geq n_0$ jinak se vyskytují v $s_{n_o}\sigma_{n_0}$. Pokračujeme:

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \cdot \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{|y|^i}{i!} + \sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|y|^i}{i!} + \varepsilon < e^{|x|} \cdot \varepsilon + \varepsilon e^{|y|} + \varepsilon.$$

c) $\exp 0 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{0^n}{n!} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1$.

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + x\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!}\right) \overset{\text{další rovnost}}{=} 1$

$$\left| x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \right| \overset{|x|\leq 1}{\leq} |x| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq |x| \cdot e \to 0$$

e) Chceme $\lim_{h\to 0} \exp(x+h) = \exp x$ (tj. spojitost v x).

$$\lim_{h\to 0} \exp(x+h) - \exp x + \exp x = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x)\cdot\exp(h) - \exp x}{h} \cdot h + \exp x = \lim_{h\to 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} \cdot h + \exp x$$

$\square$

[a] $\exists \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n\cdot(n-1)} = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{k} = 1$. Pak existuje $k_0 > |x|$ ($k_0 = \lfloor x \rfloor + 1$). $\forall n \geq 2k_0$ platí

Poznámka (Vlastnosti exp)

- $\exp(n \cdot x) = (\exp x)^n$ (Matematická indukce).
- $\exp x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ($\exp x = \left(\exp \frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$, kdyby $\exp x = 0$, pak $\exp \frac{x}{2^i} = 0 \implies \exp 0 = 0$).
- Z a) je exponenciela rostoucí rostoucí $\implies \lim_{x\to\infty} \exp x$ existuje. $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \lim_{n\to\infty} (\exp 1)^n = +\infty \implies \lim_{x\to a} \exp(x) = +\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ ($= \lim_{x\to-\infty} \exp(x) \cdot \frac{\exp -x}{\exp -x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\exp 0}{\exp -x} = \frac{1}{+\infty} = 0$).
- $\exp \mathbb{R} = (0, \infty)$ (funkce nabývá mezihodnot).

Řešení
Nechť pro spor $e = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{N}$ nesoudělná.

$$\sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} < e = \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)!} \cdot \frac{1}{(q+1)^{n-(q+1)}} = \frac{1}{(q+1)!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^j} = \frac{1}{(q+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} + \frac{1}{q! \cdot q} . (/ \cdot$$

$$m < pq! < m+1, \quad m \in \mathbb{N}, \ .$$

Definice 3.13 (Logaritmus)

Funkci inverzní k exponenciele (exp) je logaritmus (log)

Věta 3.12 (Vlastnosti logaritmu)

Funkce log *splňuje: a)* $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *je spojitá a rostoucí funkce, b)* $\forall x, y > 0 : \log(x \cdot y) = \log x + \log y$*, c)* $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

Důkaz
a) exp je spojitá a rostoucí $\implies$ existuje inverzní funkce, exp : $\mathbb{R} \to (0,\infty)$ $\implies$ $\log(0,\infty) \to \mathbb{R}$. Podle věty o inverzní funkci je log spojitá a rostoucí funkce.

b) $\log x = A, \log y = B \Leftrightarrow \exp A = x, \exp B = y$. Z definice exponenciely $x \cdot y = \exp A \cdot \exp B = \exp(A+B) \implies \log(x \cdot y) = A + B = \log x + \log y$.

c) označme $f(y) = \frac{\exp y - 1}{y}, y \neq 0$ a $g(x) = \log x$, pak $g(x) \neq 0 \forall x \neq 1$ víme $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$ z definice exponenciely $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$. Podle VOLSF (P) dostaneme $1 = \lim_{x\to 1} f(g(x)) = \lim_{x\to 1} \frac{\exp(\log x) - 1}{\log x} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\log x}$. □

Definice 3.14

Nechť $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$. Pak definujeme $a^b = \exp(b \log(a))$. Je-li $b > 0$, pak definujeme $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$.

Poznámka
$x \cdot x = x^2 = x^2 = \exp(2 \cdot \log x) = \exp(\log x) \cdot \exp(\log x) = x \cdot x$. Obdobně pro $x^n, n \in \mathbb{N}$.

Příklad
$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{Heine}}{=} \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\log(1+x)} \overset{\text{VOLSF (S)}}{=} e^1 = e$.

Věta 3.13 (Zavedení sinu a cosinu)

Existují funkce $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující: a)* $\forall x, y \in \mathbb{R} : \sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$, $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$, $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, *b) existuje kladné číslo* π *tak, že* sin *je rostoucí na* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *a* $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, *c)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Důkaz (Bez důkazu, jen nástřel)
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n$. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot (-1)^n$. □

Definice 3.15 (tan a cotg)

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ a $y \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ definujeme funkce tangens a cotangens předpisem

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Věta 3.14 (Spojitost sinu a cosinu)

Funkce sin, cos, tan, cotg *jsou spojité na svém definičním oboru.*

Důkaz
a) sin, pak b) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ a složení spojitých funkcí je spojitá funkce, c) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ jsou spojité z aritmetiky limit.

a) $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$: 1. v 0: $\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot x \overset{\text{AL}}{=} 1 \cdot 0 = \sin 0$. 2. $\lim_{x\to a}(\sin x - \sin a) = \lim_{x\to a} f(x) 2 \cdot \sin\frac{x-a}{2} \cdot \cos\frac{x+a}{2} \overset{\text{AL}}{=} 2 \cdot \lim_{x\to a} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2} \overset{\text{VOLSF (P)}}{=} 2 \cdot 0 \cdot \cos a = 0$. □

Definice 3.16 (Inverzní funkce)

Nechť $\sin *x = \sin x$ pro $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nechť $\cos *x = \cos x$ pro $x \in [0, \pi]$. Nechť $\tan *x = \tan x$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Nechť $\operatorname{cotg} *x = \operatorname{cotg} x$ pro $x \in (0, \pi)$.

Definujeme arcsin (respektive arccos, arctan, arccotg) jako inverzní funkce k $\sin *$ (respektive $\cos *$, $\tan *$, $\operatorname{cotg} *$).

3.5 Derivace a Taylorův polynom

Definice 3.17 (Derivace)

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak derivací f v bodě a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

derivací f v bodě a zprava budeme rozumět

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a derivací f v bodě a zleva budeme rozumět

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Poznámka
Limita buď existuje a pak je vlastní nebo nevlastní, nebo vůbec neexistuje.

Ekvivalentní definice je

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$f'(a) = A \Leftrightarrow (f'_+(a) = A \wedge f'_-(a) = A).$$

Věta 3.15 (Vztah derivace a spojitosti)

Nechť má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}$. Pak je f v bodě a spojitá.

Důkaz

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a) \overset{\text{AL}}{=} f'(a)\cdot 0 + f(a) = f(a).$$

□

Věta 3.16 (Aritmetika derivací (T4.2))

Nechť $f'(a)$ a $g'(a)$ existují. Pak (pokud mají pravé strany smysl)

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Nechť g je spojitá v a, pak

$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a).$$

Nechť je g spojitá v a a $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

Důkaz

$$(f{+}g)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+g(a+h)-(f(a)+g(a))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = f'$$

$$(f{\cdot}g)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot g(a+h) - f(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(a+h) + f(a)\cdot g(a+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot g(a$$

Víme, že $g(a)\neq 0$ a g je spojitá v a. Tedy $\exists\delta > 0$ tak, že $g(a+h)\neq 0 \forall h \in \mathrm{B}(0,\delta)$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(a+h)}{g(a+h)\cdot g(a)\cdot h} \overset{\text{AL}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(h+a)\cdot g(a)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot$$

□

Věta 3.17 (Derivace složené funkce)

Nechť má f derivaci v bodě y_0, g má derivaci v x_0, je v x_0 spojitá a $y_0 = g(x_0)$. Pak (je-li pravá strana definována)

$$(f\circ g)'(x_0) = f'(y_0)\cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

Důkaz
Myšlenka:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\overset{\text{VOLSF}}{=}\lim_{y\to y_0}\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}\cdot$$

Funkce f má v bodě $y_0\in\mathbb{R}$ derivaci, a proto je f definována na jistém okolí $\mathrm{B}(y_0,\eta)$. Funkce g je spojitá v $x_0\in\mathbb{R}, g(x_0)=y_0$, a proto je funkce $f(g(x))$ definována na jistém okolí $\mathrm{B}(x_0,\delta$.

1. Předpokládejme nejprve, že $f'(y_0)\in\mathbb{R}$. Definujeme pomocnou funkci $S(y)=f'(y_0), y=y_0$ a $S(y)=\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}, y\in D(f)\setminus\{y_0\}$. Platí $\lim_{y\to y_0}S(y)=S(y_0)$, tedy S je v bodě y_0 spojitá. Pro $x\in D(f\circ g)$ platí

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=S(g(x))\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x_-x_0}\text{(Získáme z } 0=0 \text{ a rozšíření jinak.).}$$

Odtud z VOLSF s podmínkou (S)

$$(f\circ g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}S(g(x))\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=S(g(x_0))\cdot g'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

2. Nechť nyní $f'(y_0)=\pm\infty$. Pak ale $g(x_0)\neq 0$, aby byl výraz vpravo definován. Pak existuje $\tilde{\eta}>0$ tak, že $\forall x\in\mathrm{P}(x_0,\eta):\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\neq 0$. Takže $\forall x\in\mathrm{P}(x_0,\tilde{\eta}g(x)\neq g(x_0)$, odtud

$$(f\circ g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}S(g(x))\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x_-x_0}=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0),$$

kde jsme použili VOLSF s podmínkou (P). □

Věta 3.18 (Derivace inverzní funkce)

Nechť f je na intervalu (a,b) spojitá a rostoucí (resp. klesající). Nechť f má navíc v bodě $x_0\in(a,b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0=f(x_0)$ a platí

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Poznámka
Existují i varianty pro $f'(x_0)=0$ a $f'(x_0)=\pm\infty$.

Důkaz
Z věty o inverzní funkci víme, že f^{-1} existuje a je spojitá na $f((a,b))$ a y_0 je vnitřní bod $f((a,b))$. Víme, že $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ a $\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$ + víme podmínku (P), neboť f^{-1} je rostoucí. Podle VOLSF s podmínkou (P) dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(f^{-1}(y)) - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}.$$

Odtud

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Poznámka (Derivace elementárních funkcí)

- $(const)' = 0$
- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $(\log x)' = \frac{1}{x}, x \in (0,\infty)$
- $(\exp x)' = \exp x, x \in \mathbb{R}$
- $(a^x)' = a^x \log a, x \in \mathbb{R}, a \in R^+$
- $(\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R}$
- $(\cos x)' = -\sin x, x \in \mathbb{R}$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(\tan)$
- $(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}, x \in D(\operatorname{cotg})$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$

Věta 3.19 (Fermatova (L4.5))

Nechť $a \in \mathbb{R}$ je bod lokálního extrému funkce f ne M. Pak $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.

Důkaz
Sporem. Nechť a je bod lokálního extrému f na M, $\exists f'(a)$, ale $f'(a) \neq 0$. BÚNO $f'(a) > 0$. Pak $\exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in \mathrm{P}(a,\delta) : \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Nyní $a < x \implies f(x) > f(a)$ a $a > x \implies f(x) > f(a)$ (obojí na intervalu $x \in \mathrm{P}(a,\delta)$). Tedy zde není ani maximum, ani minimum, tj. není zde extrém . ☐

Věta 3.20 (Rolleova)

Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (a,b)$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $\zeta \in (a,b)$ tak, že $f'(\zeta) = 0$.

Důkaz
Je-li $f(x) = f(a)$ $\forall x \in (a,b)$, volme *zeta* libovolně v (a,b).

Nechť $\exists x \in (a,b) f(x) \neq f(a) = f(b)$. BÚNO $f(x) > f(a)$. Podle věty o spojitosti funkce a nabývání extrémů existuje bod $\zeta \in [a,b]$ tak, že $f(\zeta) = \max\{f(x), x \in [a,b]\}$ $f(x_0) > f(a) \implies \zeta \neq a, \zeta \neq b \implies \zeta \in (a,b)$. Víme, že $\exists f'(\zeta)$, protože $f'(x)$ existuje všude na (a,b). Podle Fermatovy věty je $f'(\zeta = 0)$. ☐

Věta 3.21 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$ a má derivaci v každém bodě intervalu (a,b). Pak existuje $\zeta \in (a,b)$ tak, že $f'(\zeta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Důkaz
Položme $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$. Pak F je spojitá na $[a,b]$ (součet spojitých funkcí) $F(a) = 0 = F(b)$. Dále $\exists F'(a) \forall x \in (a,b)$. Tudíž podle Rolleovy věty $\exists \zeta \in (a,b)$ tak, že $F'(\zeta) = 0$. Nyní $0 = F'(\zeta) = f'(\zeta) - 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \implies f'(\zeta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ☐

Důsledek
Nechť $f'(x) = 0$ pro všechny $x \in (a,b)$. Pak je f konstantní na (a,b). ($\forall x, y \in (a,b) \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\zeta) = 0$.)

Definice 3.18 (Vnitřek intervalu)

Nechť J je interval. Množinu všech vnitřních bodů J nazýváme vnitřek J a značíme $\operatorname{Int} J$.

Věta 3.22 (O vztahu derivace a monotonie)

Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval a f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J má derivaci. a) Je-li $f'(x) > 0$ na $\operatorname{Int} J$, pak je f rostoucí na J. b) Je-li $f'(x) < 0$ na $\operatorname{Int} J$, pak je f klesající na J. c) Je-li $f'(x) \geq 0$ na $\operatorname{Int} J$, pak je f neklesající na J. d) Je-li $f'(x) \leq 0$ na $\operatorname{Int} J$, pak je f nerostoucí na J.

Důkaz
a) Nechť $a, b \in J, a < b$. Pak f je na $[a,b]$ spojitá a existuje $f'(x) \forall x \in (a,b)$. Podle Lagrangeovy věty $\exists \zeta \in (a,b) \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\zeta) > 0 \implies f(b) > f(a)$.

Ostatní body analogicky. $\square$

Věta 3.23 (Cauchyova věta o střední hodnotě)

Nechť f, g jsou spojité funkce na intervalu $[a,b]$ takové, že f má v každém bodě (a,b) derivaci a g má v každém bodě (a,b) vlastní derivaci různou od nuly. Pak existuje $\zeta \in (a,b)$ tak, že $\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Důkaz
Tvrdíme, že $f(b) - g(a) \neq 0$, jinak by podle Rolleovy věty $\exists \zeta \in (a,b), g'(\zeta) = 0$. .

Definujme $H(x) = [f(x)-f(a)]\cdot[g(b)-g(a)]-[f(b)-f(a)][g(x)-g(a)]$. Pak H je spojitá na $[a,b]$ a $H(a) = 0\cdot[]-[]\cdot 0$. a $H(b) = 0$. Dále $H'(x) = f'(x)\cdot[g(b)-g(a)]-[f(b)-f(a)]\cdot g'(x)$. Podle Rolleovy věty $\exists \zeta \in (a,b)$ tak, že $0 = H'(\zeta) = f'(\zeta)\cdot[g(b)-g(a)]-[f(b)-f(a)]\cdot g'(\zeta)$. Tj.

$$\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

$\square$

Věta 3.24 (l'Hospitalovo pravidlo)

1. Nechť $a \in \mathbb{R}*$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ a nechť existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. 2. Nechť $a \in \mathbb{R}*$, $\lim_{x\to a+} |g(x)| = +\infty$ a nechť existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Poznámka
Platí i pro $\lim_{x\to a-}$ a $\lim_{x\to a}$.

Důkaz
1. „$\frac{0}{0}$“, tj. „$f(a) = g(a) = 0$“: a) $a \in \mathbb{R}$. Víme $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Tedy $\exists \delta > 0\ \forall x \in P_+(a,\delta) : g'(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) \in \mathbb{R}$. Definujeme $f(a) = g(a) = 0$. Pak f a g jsou spojité na $[a, a+\delta)$ a existují tam f' a g'. Jsou splněny předpoklady (V 4.9.) na intervalu $[a,x] \forall x \in (a, a+\delta)$. Existuje tedy $\zeta(x) \in (a,x)$ tak, že

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\zeta(x))}{g'(\zeta(x))}.$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ existuje $0 < \delta_0 < \delta$ tak, že $\forall y \in (a, a+\delta_0) : \frac{f'(y)}{g'(y)} \in \mathrm{B}(A,\varepsilon)$. Nyní $\forall x \in (a, a+\delta_0)$ máme $\zeta(x) \in (a,x) \subset (a, a|\delta_0)$, tedy $\frac{f'(\zeta(x))}{g'(\zeta(x))} \in \mathrm{B}(A,\varepsilon)$, a tedy díky výrazu kus výše $\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathrm{B}(A,\varepsilon) \implies \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

b) $a = -\infty$ ($a = +\infty$ analogicky) Platí $\lim_{x\to-\infty} h(x) = B \in \mathbb{R}* \Leftrightarrow \lim_{y\to 0+} h\left(-\frac{1}{y}\right) = B$. Zavedeme pomocné funkce $F(y) = f\left(-\frac{1}{y}\right)$ a $G(y) = g\left(-\frac{1}{y}\right)$, pak na jistém $P_+(0,\delta)$ platí $F'(y) = f'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-1}{y^2}$ a $G'(y) = g'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-1}{y^2}$. Nyní $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0+} \frac{F(y)}{G(y)}$ a

$$\lim_{y\to 0+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to 0+} \frac{f'\left(-\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{-1}{y^2}}{g'\left(-\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{-1}{y^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Nyní z části 1. a) pro bod 0, F a G dostaneme $A = \lim_{y\to 0+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to a} f(x)g(x)$.

2. Dokážeme pouze v případě $\lim_{x\to a+} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta_1 > 0$, že $\forall z \in \mathrm{P}_+(a,\delta_1) : \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - A\right| < \varepsilon$. Zafixujme si $y \in \mathrm{P}_+(a,\delta_1)$. Zvolme $0 < \delta_2 < \delta_1$, že $\forall x \in \mathrm{P}_+(a,\delta_2) : \frac{1}{|g(x)|}\left(|f(y)| + |g(y)|(|A|+\varepsilon)\right) < \varepsilon$. Zvolme libovolně $x \in \mathrm{P}_+(a,\delta_2) \cup (a,y)$. Na intervalu $[x,y]$ jsou splněny předpoklady V4.9, tj. $\exists \zeta \in (x,y)$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \implies$$

$$f(y) - f(x) = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \cdot g(y) - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \cdot g(x) \implies$$

$$\frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \implies$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}\right| = \left|\frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)}\right| \le \frac{|f(y)|}{|g(x)|} + \left|\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}\right| \cdot \frac{|g(y)|}{|g(x)|} \le \frac{|f(y)|}{|g(x)|} + (|A|+\varepsilon) \cdot \frac{|g(y)|}{|g(x)|} \le \varepsilon.$$

Dále můžeme pokračovat v odhadech:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \le \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}\right| + \left|\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - A\right| < \varepsilon + \varepsilon.$$

$\square$

Věta 3.25 (derivace a limita derivace)

Nechť je funkce f spojitá zprava v a a nechť existuje $\lim_{x\to a+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. *Pak* $f'_+(a) = A$.

Důkaz

Z definice derivace

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{„0/0"}{=} \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{1} = A.$$

□

3.6 Konvexní a konkávní funkce

Definice 3.19

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a nechť f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $(n+1)$-ní derivací v bodě a budeme rozumět $f^{(n+1)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a+h)-f^{(n)}(a)}{h}$.

Definice 3.20

Funkce f na intervalu I nazveme konvexní (konkávní), jestliže $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ $(\ge)$.

Funkci nazveme ryze konvexní (ryze konkávní), jsou-li příslušné nerovnosti ostré.

Poznámka

Ekvivalentně lze definovat, že funkce f je na I konvexní, pokud $\forall x, y \in I, x < y \; \forall \alpha \in (0,1):$

$$f(\alpha \cdot x + (1-\alpha)y) \le \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha) \cdot f(y).$$

Lemma 3.26 (Lemmátko)

Nechť je funkce f na intervalu I konvexní, pak

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Platí i pro ryze konvexní případ (jen s ostrými nerovnostmi).

Důkaz

$$\frac{1}{x_3 - x_1}\cdot(f(x_3)-f(x_1)) = \frac{1}{x_3 - x_1}\left(f(x_3) - f(x_2) + f(x_2) - f(x_1)\right) \geq \frac{1}{x_3 - x_1}\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_3 - x$$

Druhá nerovnost se ukáže analogicky. $\square$

Věta 3.27 (Vztah druhé derivace a konvexity (konkávity))

Nechť f má na intervalu (a, b) spojitou první derivaci.

Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$, pak f je ryze konvexní na intervalu (a, b). Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$, pak f je ryze konkávní na intervalu (a, b).

Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$, pak f je konvexní na intervalu (a, b). Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) \leq 0$, pak f je konkávní na intervalu (a, b).

Důkaz (Třetí část, zbytek analogicky)
Z $f''(x) \geq 0$ a věty 4.8 (vztah derivace a monotonie) máme f' je neklesající na (a, b). Zvolme $x_1 < x_2 < x_3 \in (a, b)$. Podle věty 3.7 (Lagrange) $\exists \zeta_1 \in (x_1, x_2), \zeta_2 \in (x_2, x_3)$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\zeta_1) \qquad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\zeta_2)$$

$\zeta_1 < \zeta_2 \overset{f' \text{ neklesající}'}{f}(\zeta_1) \leq f'(\zeta_2) \implies \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ $\square$

Věta 3.28 (Konvexita a jednostranné derivace)

Nechť f je konvexní na otevřeném J a $a \in \operatorname{Int} J$. Pak $f'_+(a) \in \mathbb{R}$ a $f'_-(a) \in \mathbb{R}$.

Důkaz
Z definice $f'_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Nechť $a < x_1 < x_2$. Z lemmatu víme, že $\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} \leq \frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}$. Tedy funkce $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ je klesající. Podle věty 3.7 (limita monotónní funkce) tedy $\exists \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}^*$.

Zvolme $y \in J$, $y < a$, y pevné. Nyní $\forall x \in J$, $x > a$, platí

$$\frac{f(a) - f(y)}{a - y} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Tedy $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ je zdola omezená na jistém $P^+(a, \delta) \implies f'_+(a) \in \mathbb{R}$. $\square$

Věta 3.29 (Konvexita a spojitost)

Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J. Pak f je spojitá na J.

Důkaz
$a \in J \implies a \in \operatorname{Int} J \implies \exists f'_+(a) \in \mathbb{R} \left(\exists f'_-(a) \in \mathbb{R}\right)$. Z analogie věty 4.1 pro jednostranné limity je, jelikož má vlastní derivaci v a, f spojitá zleva (zprava) v bodě a. $\square$

Definice 3.21 (Tečna, inflexní bod)

Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Označme $T_a^f = \{[x, y] : x \in \mathbb{R}, y = f(a) + f'(a)(x - a)\}$.

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$, $x \in D_f$ leží nad (pod) tečnou T_a^f jestliže platí $f(x) \overset{(<)}{>} f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$.

Funkce f má v bodě a inflexi (a je inflexní bod), jestliže $f'(a) \in \mathbb{R}$ a existuje $\Delta > 0$ tak, že:

$$(i) \forall x \in (a - \Delta, a) : [x, f(x)] \text{ leží nad tečnou,}$$

$$(ii) \forall x \in (a, a + \Delta) : [x, f(x)] \text{ leží pod tečnou,}$$

nebo

$$(i) \forall x \in (a - \Delta, a) : [x, f(x)] \text{ leží pod tečnou,}$$

$$(ii) \forall x \in (a, a + \Delta) : [x, f(x)] \text{ leží nad tečnou,}$$

Věta 3.30 (Nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $f''(a) \neq 0$. Pak a není inflexní bod funkce f.

Důkaz
BÚNO $f''(a) > 0$, tedy $f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0$. Standardním způsobem odvodíme $\exists \Delta > 0 \forall h \in \mathrm{P}(0, \Delta) : \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0$. Tj.

$$\forall x \in (a, a + \Delta) : f'(x) > f'(a) \qquad \forall x \in (a - \Delta, a) : f'(x) < f'(a)$$

Pro $y \in (a, a + \Delta)$ platí podle Lagrangeovy věty 4.7 $\frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(\zeta) > f'(a)$. Odtud $f(y) - f(a) > f'(a) \cdot (y - a) \implies f(y) > f(a) + f'(a) \cdot (y - a)$. Analogicky pro $y \in (a - \Delta, a)$ platí $f(y) > f(a) + f'(a) \cdot (y - a)$. Tedy a není inflexní bod. $\square$

Věta 3.31 (Postačující podmínka pro inflexi)

Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b). Nechť $z \in (a, b)$ a platí

$$\forall x \in (a, z) : f''(x) > 0 \wedge \forall x \in (z, b) : f''(x) < 0.$$

Pak z je inflexní bod.

Důkaz
Podle V 4.8 (derivace a monotonie) víme, že f' klesá na $[z, b)$. Podle věty 4.7 (Lagrange o střední hodnotě) pro $x \in [z, b)$ nalezneme $\zeta \in (z, x) : \frac{f(x)-f(z)}{x-z} = f'(\zeta)$. Tj. $f(x) = f(z)+f'(\zeta)(x-z) < f(z)+f'(z)\cdot(x-z)$. Analogicky $\forall x \in (a, z] : f(x) > f(z)+f'(z)\cdot(x-z)$. Tj. z je inflexní bod f. □

Poznámka
Platí analogicky pro $f'' < 0$ na (a, z) a $f'' > 0$ na (z, b).

3.7 Průběh funkce

Definice 3.22

Řekneme, že funkce $ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ je asymptota funkce f v $+\infty$ (resp. $-\infty$) jestliže $\lim_{x\to+\infty(-\infty)}[f(x) - (ax + b)]$.

Věta 3.32 (Tvar asymptoty)

Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $ax + b \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ a $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = b$.

Poznámka
Věta platí analogicky i pro $-\infty$.

Důkaz
$(\implies)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{a} \overset{\text{AL}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{ax + b}{x} = \frac{0}{+\infty} + a = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax \overset{\text{AL}}{=} \lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) + \lim_{x\to+\infty} b = 0 + b = b$$

$(\Leftarrow)$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] \overset{\text{AL}}{=} \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) + \lim_{x\to+\infty}(-b) = b + (-b) = 0$$

□

Poznámka (Průběh funkce)
Vyšetřujeme:

- Určíme definiční obor a obor spojitosti.
- Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.

- Zjistíme symetrii funkce: lichost, sudost, periodicita.
- Dopočítáme limity v „krajních bodech“ definičního oboru.
- Spočteme první derivaci (i jednostranné v problematických bodech).
- Určíme intervaly monotonie a nalezneme extrémy (lokální i globální).
- Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce konvexní / konkávní, určíme inflexní body.
- Vypočteme asymptoty funkce.
- Načrtneme graf funkce a určíme obor hodnot.

3.8 Taylorův polynom

Definice 3.23

Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní n-tá derivace f v bodě a. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + f''(a) \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

nazýváme Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.

Poznámka
Stupeň $T_n^{f,a}(x) \le n$.

$\left(T_n^{f,a}\right)' = T_{n-1}^{f,a}$.

Věta 3.33 (O nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n. Pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P(x) = T_n^{f,a}.$$

Důkaz
($\Leftarrow$) MI: $n = 1$: $T_1^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = 0.$$

$n-1 \to n$:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} l'Hospital \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \left(T_n^{f,a}(x)\right)'}{n\cdot(x-a)^{n-1}} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \left(T_{n-1}^{f,a}(x)\right)'}{n\cdot(x-a)^{n-1}} \stackrel{\text{IP}}{=} 0.$$

($\Longrightarrow$)

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x\to a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0 + 0 = 0.$$

Podle následujícího lemmatu (stupeň $P - T_n^{f,a} \leq n$) $P - T_n^{f,a} = 0$. $\square$

Lemma 3.34 (K důkazu výše)

Nechť Q je polynom, $a \in \mathbb{R}$, $\deg(Q) \leq n$ a $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak $Q(x) = 0$.

Důkaz (Indukcí)
$n = 1$: $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{x-a} = 0 \stackrel{\text{Je definováno}}{\Longrightarrow} Q(a) = 0 \implies Q(x) = c(x-a)$. Nyní $\lim_{x\to a} \frac{c\cdot(x-a)}{(x-a)} = c = 0 \implies Q(x) = 0$.

$n-1 \to n$: $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(a-x)^n} = 0 \implies Q(a) = 0 \implies Q(x) = (x-a)\cdot R(x)$, kde stupeň $R \leq n-1$. Tedy $\lim_{x\to a} \frac{(x-a)R(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}} \stackrel{\text{ind. předpoklad}}{\Longrightarrow} R(x) = 0 \implies Q(x) = 0$. $\square$

Věta 3.35 (Taylor)

Nechť má funkce f vlastní $(n+1)$-ní derivaci v intervalu $[a,x]$ a nechť φ je spojitá funkce v $[a,x]$ a má vlastní derivaci v (a,x), která je v každém bodě tohoto intervalu nenulová. Pak existuje $\zeta \in (a,x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\zeta)} \cdot f^{(n+1)}(\zeta) \cdot (x-\zeta)^n.$$

Definice 3.24

$R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{=} f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme zbytek po Taylorově polynomu stupně n.

Důsledek (Lagrangeův tvar zbytku)
Speciálně existuje $\zeta_1 \in (a,x)$ tak, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\zeta_1) \cdot (x-a)^{n+1}$.

Důkaz
Položme $\varphi(t) = (x-t)^{t+1}$, pak $\varphi'(t) = (n+1)(n-t)^n(-1)$, tedy

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{0-(x-a)^n+1}{(n+1)(x-\zeta)^n} \cdot f^{(n+1)}(\zeta_1) \cdot (x-\zeta_1)^n .$$

□

Důsledek (Cauchyův tvar zbytku)
Speciálně existuje $\zeta_2 \in (a,x)$ tak, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\zeta_2) \cdot (x-\zeta_2)^n \cdot (x-a)$.

Důkaz
Položme $\varphi(t) = t$. □

Poznámka (Taylorovy polynomy)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$