Příklad (5.7)
Parametrizujte průnik sféry s válcovou plochou, která prochází středem sféry a má poloviční průměr. Nalezněte body s největší křivostí a v těchto bodech spočítejte křivost, torzi a Frenetův repér.

Řešení (Parametrizování)
Z obrázku/představy je jasné, že křivka dvakrát oběhne válec, tedy můžeme začít tím, že křivku parametrizujeme v osách „kolmých" na válec. Válcová plocha je kružnice, jejíž parametrizace je zřejmě $(r\sin t, r\cos t, 0)$ (kde r je poloměr kružnice, $t \in [0, 2\pi]$), takže pokud ji chceme „oběhnout" dvakrát, tak jen změníme interval t na $[0, 4\pi]$. Také ji chceme posunout, aby střed koule byl v počátku, tedy $(r\sin t, -r + r\cos t, 0)$, $t \in [0, 4\pi]$. Ještě můžeme zaměnit poloměr r za polovinu poloměru koule $\frac{R}{2}$ a dostaneme $\left(\frac{R\sin t}{2}, \frac{R+R\cos t}{2}, 0\right)$, $t \in [0, 4\pi]$.

Hledaná křivka je na sféře, takže musí splňovat $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Tj.

$$R^2 = R^2 \frac{\sin^2 t + \cos^2 t + 2\cos t + 1}{4} + z^2,$$

$$z^2 = R^2 \left(1 - \frac{\cos t + 1}{2}\right) = R^2 \frac{1 - \cos t}{2},$$

$$z = \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos t}.$$

Parametrizace naší křivky je tedy

$$c(t) = \begin{cases} \left(\frac{R\sin t}{2}, \frac{R+R\cos t}{2}, \frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos t}\right) & \text{pro } t \in [0, 2\pi], \\ \left(\frac{R\sin t}{2}, \frac{R+R\cos t}{2}, -\frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos t}\right) & \text{pro } t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

Pro $t = 2\pi$ jsou obě části křivky rovny $(0, 1, 0)$, takže c je spojité.

Řešení (Křivost)
Křivost má křivka největší v bodech $t = \pi$ a $t = 3\pi$, což buď otrocky spočítáme, nahlédneme, nebo najde v Geogebře.

Derivace křivky jsou:

$$c'(t) = \left(\frac{R}{2}\cos t, -\frac{R}{2}\sin t, \pm\frac{R}{2\sqrt{2}}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos t}}\right),$$

$$c''(t) = \left(-\frac{R}{2}\sin t, -\frac{R}{2}\cos t, \pm\frac{R}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos t}} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\cos t}^3}\right)\right) =$$
$$= \left(-\frac{R}{2}\sin t, -\frac{R}{2}\cos t, \mp\frac{R}{4\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos t}\right),$$

(Mimochodem fungují i v $t = 2\pi$, jelikož $c'(t) \to \left(\frac{R}{2}, 0, -\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ a $c''(t) \to \left(0, -\frac{R}{2}, 0\right)$.) V bodech $t = \pi$ a $t = 3\pi$ je c' rovno $\left(-\frac{R}{2}, 0, 0\right)$, tedy $|c'|$ je $\frac{R}{2}$. c'' je zde rovno $\left(0, \frac{R}{2}, \mp\frac{R}{4}\right)$.

Znaménková křivost (v daných bodech, pro jednoduchost je tam nepíšu) je

$$\frac{||c' \times c''||}{||c'||^3} = \frac{\sqrt{\frac{R^4}{64} + \frac{R^4}{16}}}{\frac{R^3}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{R}.$$

Řešení (Torze)

$$c'''(t) = \left(-\frac{R}{2}\cos t, \frac{R}{2}\sin t, \mp\frac{R}{8\sqrt{2}}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos t}}\right).$$

Ta je tedy v π a 3π rovna $\left(\frac{R}{2}, 0, 0\right)$. Torze v těchto bodech je pak rovna nule (první a třetí derivace jsou lineárně závislé).

Řešení (Frenetův repér)
Tečna v daných bodech je $\mathbf{t} = c'/||c'|| = (-1, 0, 0)$. Binormálové vektory jsou

$$\mathbf{b}(\pi) = \frac{\left(0, -\frac{R^2}{8}, -\frac{R^2}{4}\right)}{\sqrt{\frac{R^4}{64} + \frac{R^4}{16}}} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right), \qquad \mathbf{b}(3\pi) = \frac{\left(0, \frac{R^2}{8}, -\frac{R^2}{4}\right)}{\sqrt{\frac{R^4}{64} + \frac{R^4}{16}}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right).$$

Normála je $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$, tedy

$$\mathbf{n}(\pi) = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \qquad \mathbf{n}(3\pi) = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$