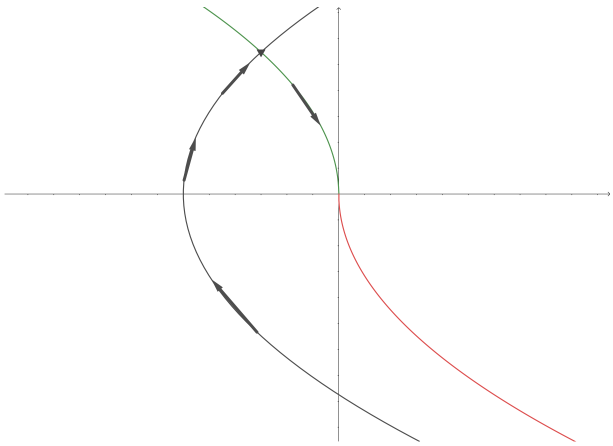
Máme systém $x' = y, y' = u$, kde $|u| \leqslant 1$.

Příklad (I)
Pro bod (x_0, y_0) ukažte, jak jej můžeme přivést do počátku.

Řešení
Jednoduchý způsob jak přivést systém do počátku je podívat se, co se stane, když zvolíme konstantní $u(t) = 1$ respektive $u(t) = -1$. V takovém případě se pohybujeme po parabolách $c + \frac{y^2}{2} = x$ ve směru rostoucího y respektive po $c - \frac{y^2}{2} = x$ ve směru klesajícího y. Tedy pokud se dostaneme na správnou „polovinu“ $\frac{y^2}{2} = x$ nebo $-\frac{y^2}{2} = x$, tak už se dostaneme do počátku.

Pokud je tedy $y_0 < (-\operatorname{sign} x_0)\sqrt{2|x_0|}$, tudíž jsme pod křivkou (sjednocení příslušných „polovin“ parabol), ze které se už umíme dostat do počátku, tak se můžeme po příslušné (té procházející (x_0, y_0)) $c + \frac{y^2}{2} = x$ dostat na tuto křivku. V opačném případě můžeme naopak využít trajektorií $c - \frac{y^2}{2} = x$, kde y klesá, kterými se právě zase dostaneme do bodů, ze kterých už můžeme jít do počátku.



(V $(0, 0)$ následně můžeme zůstat nastavením $u(t) = 0$.)

Ze všech příslušných trajektorií ukažte, že minimální čas nastává pro funkci $u(t)$ nabývající pouze hodnot 1, -1.

Důkaz
Nemá smysl mít $y = 0$ po delší časový interval než samotný bod. Tím pádem nás u zajímá pouze v bodech, kde $y \neq 0$, neboť při změnění u v množině míry nula (jednotlivých bodech, jelikož je y spojitá, tak takových osamělých bodů nemůže mít více než spočetno) se nám řešení nezmění (pokud nepřestane existovat).

Mějme tedy bod, kde BÚNO $y_0 = y(t_0) > 0$ (případ $y_0 < 0$ je analogický). Jelikož je y spojitá, máme nějaké okolí $[t_1, t_2]$ času t_0, že $\forall t \in [t_1, t_2] : y(t) > 0$. Zajímá nás, jak se můžeme dostat nejrychleji z $(x_1, y_1) = (x(t_1), y(t_1))$ do $(x_2, y_2) = (x(t_2), y(t_2))$.

Speciálně se podíváme na vývoj x – jelikož $y > 0$, tak x roste. Abychom se dostali nejrychleji z x_1 do x_2, tak $x' = y$ musí být co největší. To bude, když na začátku bude $y'(t) = u(t) = 1$, neboť $y = \int_{t_1}^{t} u(s)ds + y_0 \leqslant (t - t_1) \cdot \sup u(s) + y_0 \leqslant (t - t_1) + y_0$, kde rovnost nastává právě, když $u = 1$ skoro všude (tj. můžeme předpokládat všude). Když se na situaci podíváme s časem „jdoucím pozpátku“, stejným argumentem dokážeme, že na konci musí být $u = -1$, tedy budeme mít pořád $u = 1$ a pak $u = -1$.

Takže každé řešení můžeme v okolí každého bodu $y \neq 0$ nezhoršit tím, že použijeme $u = \pm 1$. Konkrétně pokud je na nějakém intervalu $u \neq \pm 1$, tak dostáváme výše ostrou nerovnost, takže můžeme řešení dokonce zlepšit. □

Je nejrychlejší trajektorie zároveň nejkratší trajektorie?

Řešení
Není, neboť například z bodu $(-1, 0)$ se do bodu $(0, 0)$ můžeme dostat tak, že chvíli budeme mít $u(t) \geqslant 0$, než se dostaneme do $y = \varepsilon$. Pak budeme mít $u(t) = 0$ po nějakou dobu, čímž zvětšíme x až skoro k nule, načež zvolíme $u(t) \leqslant 0$, abychom se dostali do $(0, 0)$.

Takto jsme se pohybovali téměř po úsečce, takže zřejmě „nejkratší trajektorií“ (přímo po úsečce se pohybovat nemůžeme), ale očividně bude o dost pomalejší (má velmi malou derivaci v x) než po parabolách.

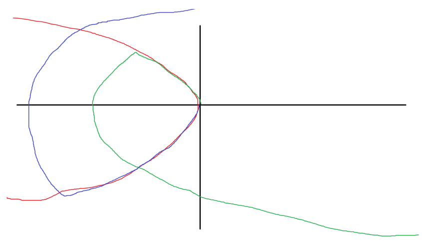
Definujme přímku procházející body (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jako trajektorii, která nás přivede z bodu (x_1, y_1) do bodu (x_2, y_2) za nejkratší čas.

Příklad (II)
Jak vypadají přímky procházející počátkem?

Řešení
Do počátku musí přijít po už zmiňované křivce, tj. po některé z daných dvou parabol (protože musí být $u = \pm 1$). Zároveň pokud z počátku ještě někam pokračuje, tak po druhé „polovině“ dané paraboly, neboť z „poloviny“ jedné paraboly se umíme dostat do „poloviny“ druhé paraboly rychleji (v počátku máme zbytečně $x' = 0$), takže by to nesplňovalo definici přímky. Tedy jedněmi přímkami jsou celé paraboly $\pm\frac{y^2}{2} = x$.

Nebo může do přímky patřit parabola až do té doby než protíná inkriminovanou křivku, načež se pokračuje po této křivce do počátku (pak ale pokračovat nemůže, protože z bodů mimo inkriminovanou přímku se dá dostat na druhou „polovinu“ dané paraboly rychleji než po inkriminované křivce).

Nebo může v počátku přímka začínat, pokračovat po „polovině“ jedné z parabol procházejících počátkem a v nějakém bodě pokračovat po parabole procházející tímto bodem. Ale zase nemůže obsahovat nic jiného, nebo se „lámat“ v dalším bodě.



Příklad (III)
Jak vypadají obecné přímky (nemusí tedy nutně procházet počátkem)?

Řešení
Vypadají úplně stejně, jen dvě hlavní paraboly budou mít vrchol v jiném bodě na ose x, jelikož musí být zase (alespoň v malém okolí nějakého bodu) paraboly a „lámat“ se mohou nanejvýš jednou.