Příklad
Dokažte, že pro daný okruh R a monoid M, a α, β ze cvičení platí:

Je-li $\gamma : R \to S$ okruhový homomorfismus a $\delta : M \to (S, \cdot, 1)$ monoidový homomorfismus a platí-li navíc $(\forall r \in R)(\forall m \in M)\ \gamma(r) \cdot \delta(m) = \delta(m) \cdot \gamma(r)$, existuje právě jeden okruhový homomorfismus $\varepsilon : R[M] \to S$ takový, že $\varepsilon \circ \alpha = \gamma$ a $\varepsilon \circ \beta = \delta$.

Důkaz (Existence)
Definujme ε následovně: Pro $f \in R[M]$ můžeme psát „$f = \sum_{m \in \operatorname{supp} f} f_m \cdot m$“ (tj. $f(m) = f_m$ pro $m \in \operatorname{supp} f$ a $f(m) = 0$ jinak). $\varepsilon(f)$ potom položíme rovné[a] $\sum_{m \in \operatorname{supp} f} \gamma(f_m) \cdot \delta(m)$.

Zřejmě[b] $\varepsilon \circ \alpha = \gamma$ a $\varepsilon \circ \beta = \delta$. Nyní ověříme, že je to okruhový homomorfismus:

„sčítání“: Je-li $f, g \in R[M]$, pišme „$f = \sum \{m \in \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g\}\, f_m \cdot m$“, kde $f_m = 0$ pro $m \notin \operatorname{supp} f$, a obdobně pro g. Potom „$f + g = \sum \{m \in \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g\}\, (f_m + g_m) \cdot m$“, tedy

$$\varepsilon(f+g) = \sum_{m \in \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g} \gamma(f_m + g_m) \cdot \delta(m) = \sum_{m \in \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g} (\gamma(f_m) + \gamma(g_m)) \cdot \delta(m) =$$

$$= \sum_{m \in \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g} \gamma(f_m) \cdot \delta(m) + \sum_{m \in \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g} \gamma(g_m) \cdot \delta(m) = \varepsilon(f) + \varepsilon(g).$$

„násobení“: (zde potřebujeme „komutativitu“ ze zadání)

$$\varepsilon(f \cdot g) = \sum_{k \in \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} \delta(k) \cdot \sum_{m,n \in M, m+n=k} \gamma(f(m) \cdot g(n)) =$$

$$= \sum_{k \in \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} \sum_{m,n \in M, m+n=k} \gamma(f(m)) \cdot \delta(m+n) \cdot \gamma(g(n)) =$$

$$= \sum_{m,n \in \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g} \gamma(f(m)) \cdot \delta(m) \cdot \delta(n) \cdot \gamma(g(n)) =$$

$$= \left(\sum_{m \in \operatorname{supp} f} \gamma(f_m) \cdot \delta(m) \right) \cdot \left(\sum_{n \in \operatorname{supp} g} \gamma(g_n) \cdot \delta(n) \right) = \varepsilon(f) \cdot \varepsilon(g).$$

□

[a] Jelikož $\operatorname{supp} f$ je konečné, $\gamma(f_m), \delta(m) \in S$ a jelikož rozklad „$f = \sum_{m \in \operatorname{supp} f} f_m \cdot m$“ je jednoznačný (až na nulové prvky, ale $\gamma(0) = 0$), je $\varepsilon(f)$ dobře definovaná funkce $R[M] \to S$.

[b] Platí $\varepsilon \circ \alpha = \gamma$ a $\varepsilon \circ \beta = \delta$, protože ($\gamma(1_R) = 1_S = \delta(1_M)$ je vlastnost homomorfismu):

$$\varepsilon(\alpha(r)) = \varepsilon\left(„\sum_{m \in \{1\}} r \cdot m“ \right) = \sum_{m \in \{1\}} \gamma(r) \cdot \delta(1) = \gamma(r) \cdot 1 = \gamma(r),$$

$$\varepsilon(\beta(k)) = \varepsilon\left(„\sum_{m \in \{k\}} 1 \cdot m“ \right) = \sum_{m \in \{k\}} \gamma(1) \cdot \delta(m) = 1 \cdot \delta(k) = \delta(k).$$

Důkaz (Jednoznačnost)
Jelikož $\varepsilon(f+g) = \varepsilon(f) + \varepsilon(g)$ můžeme jednoznačnost ověřovat pouze na „$f = f_m \cdot m$“ pro nějaké $f_m \in R$ a $m \in M$. Jelikož $\varepsilon(f \cdot g) = \varepsilon(f) \cdot \varepsilon(g)$, stačí jednoznačnost ověřit na $f_m \cdot 1_M$ a $1_R \cdot m$. Nakonec $\varepsilon(f_m \cdot 1_M) = \varepsilon(\alpha(f_m)) = \gamma(f_m)$ a $\varepsilon(1_R \cdot m) = \varepsilon(\beta(m)) = \delta(m)$. □