

1 Úvod

Definice 1.1 (Metrika, metrický prostor)

M množina, $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ je metrika, pokud $\forall x, y, z \in M$ platí:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$d(y, x) = d(x, y),$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Dvojice (M, d) se pak nazývá metrický prostor.

Definice 1.2 (Norma a normovaný lineární prostor (NLP))

Ať \mathbf{V} je vektorový prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, pak $\|\cdot\| : \mathbf{V} \rightarrow [0, \infty)$ je norma, pokud $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o},$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{F} : \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Dvojice $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ se pak nazývá normovaný lineární prostor.

Definice 1.3 (Otevřená a uzavřená koule)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $x \in \mathbb{M}$, $r > 0$. Pak otevřená koule o středu x a poloměru r je množina $B(x, r) := \{y \in \mathbb{M} | d(x, y) < r\}$. Uzavřená koule o středu x a poloměru r je množina $\bar{B}(x, r) := \{y \in \mathbb{M} | d(x, y) \leq r\}$.

Věta 1.1

$(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ je NLP pro $d \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$.

┌
Důkaz

1. krok: $B = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\|_p \leq 1\}$ je konvexní množina (tj. $\forall \lambda \in (0, 1) \forall x, y \in B : \lambda x + (1 - \lambda)y \in B$). Pro $p = \infty$:

$$\forall i \in [d] : |\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i| \leq \lambda|x_i| + (1 - \lambda)|y_i| \leq \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 = 1$$

Pro $p < \infty$:

$$\forall i \in [d] : |\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i|^p \leq \lambda|x_i|^p + (1 - \lambda)|y_i|^p,$$

protože $t \mapsto t^p$ je konvexní funkce. Dopočítáním obou nerovností získáme, že je to opravdu konvexní množina.

2. krok: Pokud $\|\cdot\|$ splňuje (i) + (ii) a B je konvexní, pak $\|\cdot\|$ je norma. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, BÚNO $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, položme $\tilde{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$, $\tilde{\mathbf{y}} := \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$, tedy:

$$\frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} = \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \tilde{\mathbf{x}} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \tilde{\mathbf{y}} \in B \text{ (zlomky jsou } \lambda, 1 - \lambda).$$

$$\left\| \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \right\| \leq 1 \implies \frac{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

3. $\|\cdot\|_p$ zřejmě splní (i) + (ii) a B je konvexní podle 1. kroku. Tedy $\|\cdot\|_p$ je norma. \square

Poznámka (Značení)

$$l_p^d := (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p).$$

Definice 1.4 (Konvergence)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost v \mathbb{M} , $x \in \mathbb{M}$. Pak (x_n) konverguje k x pokud $d(x_m, x)$ konverguje k 0. Píšeme $x_n \rightarrow x$ nebo také $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

2 Otevřené a uzavřené množiny

Definice 2.1 (Vnitřek, vnějšek, hranice)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP. $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak $x_0 \in \mathbb{M}$ je vnitřní bod $A \equiv \exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq A$. Dále vnitřek (interior) množiny A je množina

$$\text{int}(A) = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je vnitřní bod } A\}.$$

Dále $x_0 \in \mathbb{M}$ je vnější bod $A \equiv \exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$. Vnějšek (exterior) množiny A je množina

$$\text{ext}(A) = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je vnější bod } A\}.$$

Nakonec $x_0 \in \mathbb{M}$ je hraniční bod $A \equiv x \in \mathbb{M} \setminus (\text{int}(A) \cup \text{ext}(A))$. Hranice množiny A je množina

$$\partial A = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je hraniční bod } A\}.$$

Pozorování

Zřejmě $\text{int}(A) \subseteq A$.

Zřejmě $\text{ext}(A) = \text{int}(\mathbb{M} \setminus A) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$.

Definice 2.2 (Otevřená a uzavřená množina)

Buď (\mathbb{M}, d) MP a $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak A je otevřená $\equiv A \cap \partial A = \emptyset$.

Dále uzávěr množiny A je množina $\overline{A} = A \cup \partial A$. Množina A je poté uzavřená $\equiv \partial A \subseteq A$.

Pozorování

Zřejmě A je otevřená $\Leftrightarrow A = \text{int}(A)$.

Otevřená koule je otevřená množina.

Lemma 2.1

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subseteq \mathbb{N} \times A : x_n \rightarrow x$. Zároveň následující podmínky jsou ekvivalentní:

$$a) A \text{ je uzavřená,} \quad b) A = \overline{A}, \quad \forall (x_n \in A) : x_n \rightarrow x \in \mathbb{M} \implies x \in A.$$

┌

Důkaz

\implies : Ať $x \in \overline{A}$. Pokud $x \in A$, polož $x_n = x$. Pokud $x \notin A$, pak $x \in \partial A$, tedy $\forall n \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Pak $x_n \rightarrow x$ ($0 \leq d(x_n, x) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$).

\Leftarrow : Ať (x_n) je posloupnost v A , $x_n \rightarrow x$. Pokud $x \in A$, jsme hotovi. Pokud $x \notin A$, pak $\forall \varepsilon > 0 \exists r_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in B(x, \varepsilon) \cap A$. Tedy $x \in \overline{A}$.

$$a) \Leftrightarrow b) A \text{ je uzavřená} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \partial A \subseteq A \Leftrightarrow A = A \cup \partial A = \overline{A}.$$

$$b) \implies c) \implies a) A = \overline{A} \implies \forall (x_n) : x_n \rightarrow x \implies x \in A \quad \text{První část} \implies \partial A \subseteq A. \quad \square$$

Věta 2.2 (Základní vlastnosti otevřených množin)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP. Pak

(i) \mathbb{M} a \emptyset jsou otevřené.

(ii) Sjednocení libovolně mnoha otevřených je otevřené.

(iii) Průnik konečně mnoha otevřených je otevřený.

┌

Důkaz

(i) Triviální. (ii) $x \in \bigcup_i M_i$, pak $\exists j : x \in M_j$. Potom M_j je otevřená, tedy existuje $r > 0 : B(x, r) \subseteq M_j \subseteq \bigcup_i M_i$. Tedy $\bigcup_i M_i$ je otevřená. (iii) $x \in \bigcap_i M_i$, pak $\forall i \exists r_i : B(x, r_i) \subseteq M_i$. Polož $r = \min_i r_i > 0$ (protože i je z konečné množiny, tedy existuje minimum a to je jistě jeden z těch poloměrů, tedy > 0), pak $B(x, r) \subseteq \bigcap_i M_i$. Tedy $\bigcap_i M_i$ je otevřená. \square

└

Věta 2.3 (Vztah otevřená a uzavřené množiny)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak A je otevřená $\Leftrightarrow \mathbb{M} \setminus A$ je uzavřená.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Zvol (x_n) posloupnost v $\mathbb{M} \setminus A$, $x_n \rightarrow x$. Sporem. Nechť $x \in A$. Potom $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$, ale pak $\exists n : x_n \in A$. \nmid

\Leftarrow : Zvol $x \in A$. Protože $\mathbb{M} \setminus A$ je uzavřená, tedy $\partial(\mathbb{M} \setminus A) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$, $x \notin \partial(\mathbb{M} \setminus A)$, tedy $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ (to nelze) nebo $B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{M} \setminus A) = \emptyset$. Tedy $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{M} \setminus A) = \emptyset$, tj. $B(x, \varepsilon) \subseteq A$, tedy A je otevřená. \square

└

Věta 2.4 (Základní vlastnosti uzavřených množin)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak

(i) \mathbb{M} a \emptyset jsou uzavřené.

(ii) Průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřený.

(iii) Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřené.

┌

Důkaz

Plyne z věty výše a de-Morganových pravidel. \square

└

Věta 2.5

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak

$$\text{int}(A) = \bigcup \{G \subseteq A \mid G \text{ otevřená}\},$$

$$\overline{A} = \bigcap \{F \supseteq A \mid F \text{ uzavřená}\}.$$

┌ *Důkaz*

\subseteq : $x \in \text{int}(A) \implies \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$, stačí položit $G = B(x, \varepsilon)$.

\supseteq : Ať $G \subseteq A$ otevřená, pak $G = \text{int}(G) \subseteq \text{int}(A)$.

\subseteq : $x \in \overline{A}$, pak $\exists (x_n) \text{ v } A : x_n \rightarrow x$. Zvol $F \supseteq A$ uzavřená, pak $x_n \rightarrow x \in F$ (z uzavřené se nedá vykonvergovat).

\supseteq : Položme $F = \overline{A} \supseteq A$.

□

3 Spojitost v metrických prostorech

Definice 3.1 (Spojitost v bodě, spojitost, $(k-)$ Lipschitzovskost)

Ať $(M, d), (N, e)$ jsou MP, $f : M \rightarrow N, a \in M$. Potom f je spojitá v $a \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : d(x, a) < \delta \implies e(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

f je spojitá na $M \equiv \forall a \in M : f$ je spojitá v a .

f je k -Lipschitzovská ($k > 0$) $\equiv \forall x, y \in M : e(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$.

f je Lipschitzovská $\equiv \exists k > 0 : f$ je k -Lipschitzovská.

Pozorování

f je k -Lipschitzovská $\implies f$ je spojitá.

Definice 3.2 (Značení)

Ať (M, d) je MP, $A \subseteq M, x \in M$. Pak $\text{dist}(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$.

Lemma 3.1

Ať (M, d) je MP, $A \subseteq M$. Pak

$$(i) \forall x \in M : d(x, A) = d(x, \overline{A}),$$

$$(ii) \forall x \in M : d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A},$$

$$(iii) \text{dist}(\cdot, A) : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ je } 1\text{-Lipschitzovská.}$$

┌

Důkaz

(i) \geq : Jasně (infimum přes menší množinu). \leq : Pro $n \in \mathbb{N}$ zvolme $y_n \in \bar{A}$: $d(x, y_n) < \text{dist}(x, \bar{A}) + \frac{1}{n}$. Zvolme dále $x_n \in B(y_n, \frac{1}{n}) \cap A$, pak $\text{dist}(x, A) \leq d(x, x_n) \leq d(x, y_n) + d(y_n, x_n) < \text{dist}(x, \bar{A}) + \frac{1}{n}$, celkem $\forall n \in \mathbb{N} : \text{dist}(x, A) < \text{dist}(x, \bar{A}) + \frac{1}{n} \implies \text{dist}(x, A) \leq \text{dist}(x, \bar{A})$.

(ii): BÚNO A je uzavřená (jinak podle (i)). \implies Jasně (do inf dosadíme x). $\implies \forall n \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ protože $d(x, A) = 0$. Pak ale $x_n \rightarrow x$, tedy $x \in A$ z uzavřenosti.

(iii): Zvolme $x, y \in \mathbb{M}$. BÚNO $d(x, A) \geq d(y, A)$. Fixujeme $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $y_n \in A$: $d(y, y_n) < \text{dist}(y, A) + \frac{1}{n}$. Pak

$$|d(x, A) - d(y, A)| = d(x, A) - d(y, A) < d(x, y_n) - \left(d(y, y_n) - \frac{1}{n}\right) \triangleq \frac{1}{n} + d(x, y).$$

\implies (n bylo libovolné, přejdeme k limitě) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq 1 \cdot d(x, y)$. □

Lemma 3.2

Ať (\mathbb{M}, d) je MP. Pak

(i) $\forall x \neq y \in \mathbb{M} \exists f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-Lipschitzovská, že $f(x) \neq f(y)$,

(ii) Projekce $\pi_i : (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p) \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_i$ jsou Lipschitzovské, $d \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$.

┌

Důkaz

(i) Zvol $f := d(\cdot, \{x\})$.

(ii) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d : |\pi_i(x_1, \dots, x_d) - \pi_i(y_1, \dots, y_d)| = |x_i - y_i|$

$$\leq \begin{cases} p = \infty : & \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty \\ p \neq \infty : & \sqrt[p]{\sum_{j=1}^d |x_j - y_j|^p} \end{cases}.$$

└

□

Tvrzení 3.3

Ať $(\mathbb{M}, d), (\mathbb{N}, e)$ jsou MP, $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) f je spojitá,

(ii) $f^{-1}(U)$ je otevřená, kdykoliv $U \subseteq \mathbb{N}$ je otevřená,

(iii) $f^{-1}(F)$ je uzavřená, kdykoliv $F \subseteq \mathbb{N}$ je uzavřená.

┌
Důkaz

(ii) \Leftrightarrow (iii): Z věty o doplňcích a toho, že $f^{-1}(\mathbb{N} \setminus U) = \mathbb{M} \setminus f^{-1}(U)$.

(i) \Rightarrow (ii): Nechť $U \subseteq \mathbb{N}$ otevřená, $x \in f^{-1}(U)$. Pak $f(x) \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$. \Rightarrow (f spojitá) $\exists \delta > 0 : y \in B(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$, pak $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.

(ii) \Rightarrow (i): Nechť $x \in \mathbb{M}, \varepsilon > 0$. Pak $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ je otevřená dle (ii). $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Tedy $d(x, y) < \delta \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$. \square
└

Definice 3.3 (Stejněměrná spojitost)

Ať (\mathbb{M}, d) a (\mathbb{N}, e) jsou MP, $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$. Pak f je stejněměrně spojitá, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \mathbb{M} : d(x, y) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Důsledek

f je stejněměrně spojitá $\Rightarrow f$ je spojitá. (Ale naopak to neplatí.)

f je Lipschitzovská $\Rightarrow f$ je stejněměrně spojitá. (Stejně tak tohle naopak neplatí.)

Definice 3.4 (Izometrie)

Ať (\mathbb{M}, d) a (\mathbb{N}, e) jsou MP, $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$. Pak f je izometrie, pokud $\forall x, y \in \mathbb{M} : d(x, y) = e(f(x), f(y))$.

Důsledek

Izometrie je 1-Lipschitzovská. (Ale ne naopak.)

Definice 3.5 (Homeomorfismus)

Ať (\mathbb{M}, d) a (\mathbb{N}, e) jsou MP, $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$. Pak f je homeomorfismus, pokud f je spojitá bijekce a f^{-1} je spojitá.

Důsledek

Izometrie na je homeomorfismus. (Ale opačně to neplatí.)

Lemma 3.4

I interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, že $|f'(x)| \leq C, \forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow f$ je C -Lipschitzovská.

┌

Důkaz

Ať $a < b \in I \Rightarrow$ (Lagrange) $\exists \zeta \in (a, b) : \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = |f'(\zeta)| \leq C$, tj. $|f(b) - f(a)| \leq C|b - a|$. \square
└

Definice 3.6 (Topologicky ekvivalentní)

Řekneme, že σ a σ_1 jsou topologicky ekvivalentní, pokud

$$\{A \subseteq \mathbb{Y} \mid A \text{ je otevřená v } (\mathbb{Y}, \sigma)\} = \{A \subseteq \mathbb{Y} \mid A \text{ je otevřená v } (\mathbb{Y}, \sigma_1)\}.$$

Tvrzení 3.5

Budte (\mathbb{X}, ϱ) , (\mathbb{Y}, σ) MP, $f : (\mathbb{X}, \varrho) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$ homeomorfismus. Definujeme pro všechna $y, y' \in \mathbb{Y}$ zobrazení $\sigma_1 : \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \rightarrow [0, \infty)$ předpisem

$$\sigma_1(y, y') = \varrho(f^{-1}(y), f^{-1}(y')).$$

Pak σ_1 je metrika na \mathbb{Y} , $f : (\mathbb{X}, \varrho) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma_1)$ je izometrie a metriky σ a σ_1 jsou topologicky ekvivalentní.

┌
Důkaz

Metrika: Banální, cvičení pro nás. Izometrie: Necht $x, x' \in \mathbb{X}$ jsou libovolné body.

$$\sigma_1(f(x), f(x')) = \varrho(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(x'))) = \varrho(x, x'),$$

a tedy f je izometrie.

Topologická ekvivalence: Necht $U \subseteq \mathbb{Y}$ je otevřená vzhledem k σ . Pak $f^{-1}(U)$ je otevřená (f je homeomorfismus), ale f je izometrie, tedy f^{-1} je izometrie, tudíž f^{-1} je spojitá. Tj.

$$U = f(f^{-1}(U)) = (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(U)) \text{ je otevřená.}$$

└ Podobně pokud U je σ_1 -otevřená, je σ -otevřená. □

Věta 3.6

Budte ϱ_1, ϱ_2 metriky na \mathbb{X} . Pak ϱ_1 a ϱ_2 jsou topologicky ekvivalentní \Leftrightarrow

$$(\forall x \in \mathbb{X} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{X} : \varrho_1(x, y) < \delta \implies \varrho_2(x, y) < \varepsilon) \wedge$$

$$\wedge (\forall x \in \mathbb{X} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{X} : \varrho_2(x, y) < \delta \implies \varrho_1(x, y) < \varepsilon).$$

┌
Důkaz

└ Snadné cvičení. □

Definice 3.7 (Diametr, omezená množina)

Bud (\mathbb{X}, ϱ) MP, $A \subseteq \mathbb{X}$. Definujeme $\text{diam}_\varrho(A) = \sup \{\varrho(x, y) : x, y \in A\}$.

Řekneme, že A je omezená, pokud $\text{diam}_\varrho(A) < \infty$.

Definice 3.8 (Omezená metrika)

ϱ je na \mathbb{X} omezená, pokud je množina \mathbb{X} omezená.

4 Operace s metrickými prostory

Definice 4.1 (Operace)

Je-li (\mathbb{X}, ϱ) MP, $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$, pak metrický prostor $(\mathbb{Y}, \varrho|_{\mathbb{Y} \times \mathbb{Y}})$ nazýváme podprostorem prostoru (\mathbb{X}, ϱ) , značíme (\mathbb{Y}, ϱ) .

Důkaz

Že (\mathbb{Y}, ϱ) je MP je zřejmé. □

Tvrzení 4.1

Bud' (\mathbb{X}, ϱ) MP, $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$. Pak:

- 1) *Pokud $G \subseteq \mathbb{X}$ je otevřená v (\mathbb{X}, ϱ) , pak $G' = G \cap \mathbb{Y}$ je otevřená v (\mathbb{Y}, ϱ) .*
- 2) *Pokud $G' \subseteq \mathbb{Y}$ je otevřená v (\mathbb{Y}, ϱ) , pak $\exists G \subseteq \mathbb{X}$ otevřená v $(\mathbb{X}, \varrho) : G' = G \cap \mathbb{Y}$.*

Důkaz

1) Necht' $y \in G'$. Protože G je otevřená v \mathbb{X} , tak $\exists r > 0 : B_{\mathbb{X}, \varrho}(y, r) \subseteq G$. Tedy $B_{\mathbb{Y}, \varrho}(y, r) = B_{\mathbb{X}, \varrho}(y, r) \cap \mathbb{Y} \subseteq G \cap \mathbb{Y} = G'$.

2) Necht' je dána G' otevřená v (\mathbb{Y}, ϱ) . Pak $\forall x \in G' \exists \varepsilon(x) > 0 : B_{\mathbb{Y}, \varrho}(x, \varepsilon(x)) \subseteq G'$. Zřejmě $G' = \bigcup_{x \in G'} B_{\mathbb{Y}, \varrho}(x, \varepsilon(x))$.

Položme $G = \bigcup_{x \in G'} B_{\mathbb{X}, \varrho}(x, \varepsilon(x))$. Potom je $G \cap \mathbb{Y} = G'$. G je otevřená, jelikož je sjednocením otevřených množin. □

Definice 4.2 (Součet MP)

Mějme MP $\{\mathbb{X}_\alpha, \varrho_\alpha\}_{\alpha \in I}$, které splňují $\forall \alpha \in I \forall x, y \in \mathbb{X}_\alpha : \varrho_\alpha(x, y) \leq 1$. Sumou prostorů $(\mathbb{X}_\alpha, \varrho_\alpha)$ nazýváme prostor

$$\sum_{\alpha \in I} (\mathbb{X}_\alpha, \varrho_\alpha) = (\mathbb{X}, \varrho),$$

kde

$$\mathbb{X} = \coprod_{\alpha \in I} \mathbb{X}_\alpha = \{(x, \alpha) | x \in \mathbb{X}_\alpha, \alpha \in I\},$$

$$\varrho((x, \alpha), (y, \beta)) = 1, \text{ pokud } \alpha \neq \beta, \varrho_\alpha(x, y), \text{ pokud } \alpha = \beta.$$

Definice 4.3 (Součin (spočetně mnoha) MP)

Budte $\{\mathbb{X}_i, \varrho_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ MP, že $\forall i \in \mathbb{N} : \text{diam}(\mathbb{X}_i) \leq 1$. Součinem prostorů $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ nazýváme metrický prostor (je nutno, ale jednoduché dokázat)

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} := (\mathbb{X}, \varrho), \quad \mathbb{X} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{X}_i \wedge \forall f, g \in \mathbb{X} : \varrho(f, g) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\varrho_i(f(i), g(i))}{2^i}.$$

Tvrzení 4.2

Budte $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$, $i \in \mathbb{N}$, MP, kde $\text{diam} \mathbb{X}_i \leq 1$. Necht $(\mathbb{X}, \varrho) = \prod_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ a budiž $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{X}$ posloupnost bodů v \mathbb{X} , $f \in \mathbb{X}$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ v $(\mathbb{X}, \varrho) \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i) = f(i)$ v $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Necht $f_n \rightarrow f$. Budiž dáno libovolné $i_0 \in \mathbb{N}$. Necht $\varepsilon > 0$. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\forall n \geq n_0 : \varrho(f_n, f) < \varepsilon \cdot 2^{-i_0}$. Tedy pro

$$n \geq n_0 : \varepsilon \cdot 2^{-i_0} > \varrho(f_n, f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} \geq \frac{\varrho_{i_0}(f_n(i_0), f(i_0))}{2^{i_0}},$$

tj. $\varrho_{i_0}(f_n(i_0), f(i_0)) < \varepsilon$. tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i_0) = f(i_0)$.

\Leftarrow : Necht $\forall i \in \mathbb{N} : f_n(i) \rightarrow f(i)$. Necht $\varepsilon > 0$. Najdeme $i_0 \in \mathbb{N}$, že $\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, i_0\}$ najdeme n_i , že $\forall n \geq n_i : \varrho_i(f_n(i), f(i)) < \frac{\varepsilon}{i_0}$. Položme $\tilde{n} := \max \{n_1, n_2, \dots, n_{i_0}\}$. Pak $n \geq \tilde{n}$: jest

$$\begin{aligned} \varrho(f_n, f) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} = \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\varepsilon/i_0}{2} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

└

□

5 Totálně omezené a separabilní MP

Definice 5.1 (ε -sít, ε -separovanost)

Bud (\mathbb{M}, d) MP, $A \subseteq \mathbb{M}$, $\varepsilon > 0$.

Řekneme, že A je ε -sít pro \mathbb{M} , jestliže $\forall x \in \mathbb{M} \exists a \in A : d(x, a) < \varepsilon$.

A je ε -separovaná, pokud $\forall x, y \in A : d(x, y) \geq \varepsilon$.

Definice 5.2 (Totálně omezený prostor, separabilní prostor)

M je totálně omezený, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subseteq M : A$ je konečná ε -sít pro M .

M je separabilní, pokud $\exists A \subseteq M$ spočetná: $\overline{A} = M$. (Tj. A je hustá v M .)

Věta 5.1

$MP(M, d)$ je totálně omezený, právě když $\forall \varepsilon > 0$ je každá ε -separovaná množina konečná.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Necht $\varepsilon > 0$, $B \subseteq M$ je ε -separovaná. Chceme B je konečná. Protože M je TO, existuje konečná $\frac{\varepsilon}{4}$ -sít $A \subseteq M$. Pro každé $x \in B$ zvolíme nějaký bod $a_x \in A : d(x, a_x) < \frac{\varepsilon}{4}$. Pak pro $x \neq y$, $x, y \in B$ platí $a_x \neq a_y$: $d(a_x, a_y) \geq d(x, y) - d(x, a_x) - d(y, a_y) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Tj. zobrazení $B \rightarrow A : x \mapsto a_x$ je prosté. Ale A je konečná tedy B je konečná.

\Leftarrow : Necht $\varepsilon > 0$; chceme najít konečnou ε -sít. Vezmeme si $B \subseteq M$ ε -separovaná, která je maximální (co do inkluze). Tvrdíme, že B je automaticky ε sít: Zvolme $x \in M$. Pak existuje $b \in B : d(x, b) < \varepsilon$. Kdyby ne: $\forall b \in B : d(x, b) \geq \varepsilon$. To by znamenalo, že $B \cup \{x\} \supset B$ je ε -separovaná, což je spor s maximalitou B . Tj. B je opravdu ε -sít pro M .

Druhá část důkazu však potřebuje tzv. Zornovo lemma, abychom mohli brát B maximální. □

Věta 5.2

Bud (M, d) MP, $N \subseteq M$. Pokud (M, d) je TO, pak i (N, d) je TO. (Tedy TO se zachovává na podprostory.)

┌

Důkaz

Necht $A \subseteq N$ je ε -separovaná. Chceme: A je konečná. (Pak (N, d) je TO podle V18). Ale $A \subseteq N \subseteq M$, tedy $A \subseteq M$ je ε -separovaná v M . Ale M je TO, takže A musí být konečná. □

Věta 5.3

(M, d) je MP, $N \subseteq M$. Je-li (N, d) TO, pak (\overline{N}, d) je TO. (TO se zachovává na uzávěři.)

┌

Důkaz

$\varepsilon > 0$ dáno, chceme konečnou ε -sít v prostoru (\overline{N}, d) . Necht $A \subseteq N$ je konečná $\varepsilon/2$ -sít pro N (ta existuje, neboť (N, d) je TO). Chceme A je ε -sít pro (\overline{N}, d) . Zvolme libovolný bod $x \in \overline{N}$. Chceme $\exists y \in A : d(x, y) < \varepsilon$.

Protože $x \in \overline{N}$, existuje $z \in N : d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože A je $\varepsilon/2$ -sít pro N , existuje $y \in A : d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Tudíž A je ε -sít pro \overline{N} . □

Věta 5.4

Nechť $(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$, $\alpha \in I$ jsou MP, $\text{diam } \mathbb{M}_\alpha \leq 1$, $\forall \alpha \in I$. Pak $\sum_{\alpha \in I} (\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ je TO $\Leftrightarrow I$ je konečná a $\forall \alpha \in I : (\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ je TO.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Nechť \sum je TO. Nechť $\varepsilon > 0$. Pokud $\varepsilon \geq 1$, pak libovolná jednobodová množina je ε -sít. $\varepsilon < 1$. Nechť $A \subseteq \sum (\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ je konečná ε -sít. Položme $A_\alpha := \{x \in \mathbb{M}_\alpha \mid (x, \alpha) \in A\}$. Potom A_α je zřejmě ε -sít $(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$.

\Leftarrow : Podle předpokladů, pro dané $\varepsilon > 0$, $\forall \alpha \in I \exists A_\alpha \subseteq \mathbb{M}_\alpha : A_\alpha$ je konečná ε -sít (protože $(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ jsou TO). $A \cup_{\alpha \in I} A_\alpha \times \{\alpha\}$ je ε -sít pro $\sum_{\alpha \in I} (\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$. \square

Věta 5.5

Nechť (\mathbb{M}_i, d_i) jsou MP, $i \in \mathbb{N}$, a necht' $\forall i : \text{diam } \mathbb{M}_i \leq 1$. Pak $(\mathbb{M}, d) = \prod_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{M}_i, d_i)$ je TO $\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : (\mathbb{M}_i, d_i)$ je TO.

┌

Důkaz

\Rightarrow : (Lze provést i důkaz přímo z definic) Zvolme $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \mathbb{M}$. Definujeme zobrazení $\varphi : (\mathbb{M}_i, d_i) \rightarrow (\mathbb{M}, d)$ tak, že $\varphi(x) = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots) \in \mathbb{M}$. Pak φ je izometrie. Tedy $(\mathbb{M}_i, \frac{d_i}{2^i})$ lze chápat jako podprostor (neboli izometrickou kopii podprostoru) (\mathbb{M}, d) . Ale \mathbb{M} je TO, tedy i jeho podprostor je TO.

\Leftarrow : Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolíme $i_0 \in \mathbb{N} : \sum_{i=i_0}^\infty \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro $i \in \{1, \dots, i_0 - 1\}$ najdeme konečné $\varepsilon/2$ -sítě A_i pro \mathbb{M}_i . $S = \{(x_i) \in \mathbb{M} \mid x_i \in A_i, i \in \{1, \dots, i_0 - 1\} \vee x_i = a_i, i \geq i_0\}$. S je konečná, neboť $|S| \prod_{i=1}^{i_0-1} |A_i|$. S je ε -sít pro \mathbb{M} . \square

Věta 5.6

Bud' (\mathbb{M}, d) MP. Pak následující je ekvivalentní: 1) \mathbb{M} je separabilní, 2) existuje spočetná množina otevřených podmnožin $B_n \subseteq \mathbb{M}$ tak, že $\forall G \subseteq \mathbb{M}$ otevřená: $\exists I \subseteq \mathbb{N} : G = \bigcup_{n \in I} B_n$, 3) každý podprostor \mathbb{M} je separabilní, 4) každá ε -separovaná množina je spočetná.

┌ *Důkaz*

1) \implies 2): Uvažujme nějakou spočetnou hustou podmnožinu $D \subseteq \mathbb{M}$. $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. $B_{(i,j)} := B(x_i, 1/j)$. \mathbb{N}^2 je spočetná, tedy těchto koulí je spočetně mnoho. Nechť je dána libovolná otevřená $G \subseteq \mathbb{M}$. Chceme $G = \bigcup_{(i,j) \in I} B_{(i,j)}$, kde $I := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid B_{(i,j)} \subseteq G\}$. Zvolme $x \in G$. Chceme $\exists (i,j) \in I : x \in B_{(i,j)}$. Protože G je otevřená, $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq G$. Podle definice hustoty najdeme $\frac{1}{j} < \frac{\varepsilon}{2}$. $\exists i \in \mathbb{N} : x_i \in (x, \frac{1}{j})$. Pak $B_{(i,j)} \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq G$. Tedy $x \in \bigcup_{(i,j) \in I} B_{(i,j)}$.

2) \implies 1): Nechť B_n mají vlastnost z 2). Chceme ukázat, že M je separabilní. Vybereme $x_n \in B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je hustá. Skutečně, budiž $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{M}$ otevřená, pak $G = \bigcup_{n \in I} B_n$ pro nějaké $I \subseteq \mathbb{M}$. Tím pádem $\forall n \in I : x_n \in B_n \subseteq G$, tj. ($I \neq \emptyset$) některé prvky D jsou v G .

2) \implies 3): Buď $\mathbb{O} \subseteq \mathbb{M}$ libovolný podprostor. Chceme: \mathbb{O} je separabilní. Stačí, že \mathbb{O} splňuje 2), tj. má spočetnou bázi otevřených množin. \mathbb{M} má spočetnou bázi otevřených množin $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tvrdíme, že $\{B_n \cap \mathbb{O} \mid n \in \mathbb{N}\}$ má vlastnost z 2) (tj. je to báze) pro \mathbb{O} . Tedy všechny podprostory \mathbb{M} jsou separabilní.

3) \implies 4): Nechť \mathbb{M} splňuje 3). Budiž dáno $\varepsilon > 0$ a libovolná ε -separovaná podmnožina $A \subseteq \mathbb{M}$. Chceme $|A| \leq |\mathbb{N}|$. A , jakožto podprostor \mathbb{M} , je separabilní. Pro libovolné $x \in A$ jest $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$. Je-li nyní D spočetná hustá v (A, d) , pak $\forall x : A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, tj. $\forall x \in A : x \in D$, tedy $D = A$ a A je spočetná.

4) \implies 1): Zornovo lemma: Pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ uvažujme maximální $\frac{1}{n}$ -separovanou podmnožinu $S_n \subseteq \mathbb{M}$. Dokážeme, že $S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ je hustá v \mathbb{M} : Nechť $x \in \mathbb{M}$, $\varepsilon > 0$ jsou dány. Najdeme $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$. Tvrdíme, že existuje $y \in S_n : d(x, y) < \frac{1}{n}$. Kdyby ne, pak $S_n \cup \{x\}$ by byla $\frac{1}{n}$ -separovaná, což by byl spor s maximalitou S_n . Tedy $y \in S$ a $d(x, y) < \frac{1}{n} < \varepsilon$. \square

Tvrzení 5.7

Pro prostory (\mathbb{M}_n, d_n) , $n \in \mathbb{N}$ splňující $\text{diam } \mathbb{M}_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, platí $\prod_{i=1}^{\infty} (\mathbb{M}_i, d_i)$ je separovaný $\Leftrightarrow \forall i : (\mathbb{M}_i, d_i)$ je separabilní.

┌ *Důkaz*

└ Cvičení. \square

Důsledek

\mathbb{M} je separovaný $\implies \mathbb{M}$ je TO.

6 Úplné prostory

Definice 6.1 (Cauchyovská posloupnost, úplný prostor)

Buď (\mathbb{M}, ϱ) MP, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků \mathbb{M} . Řekneme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská, jestliže

platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Řekneme, že prostor (\mathbb{M}, ϱ) je úplný, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost konverguje (tj. $\exists x \in \mathbb{M} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$).

Věta 6.1 (Cantorův princip)

Bud' (\mathbb{M}, ϱ) MP. \mathbb{M} je úplný \Leftrightarrow pro každou posloupnost uzavřených množin $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, $F_n \subseteq \mathbb{M}$, kde $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ a $\text{diam } F_n \rightarrow 0$, platí $\bigcap F_n \neq \emptyset$.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Vybereme prvky $x_n \in F_n, n \in \mathbb{N}$ libovolně. Máme tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Tato posloupnost je Cauchyovská, jelikož pro $\varepsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\forall n \geq n_0 : \text{diam } F_n < \varepsilon$. Pak $\forall n, m \geq n_0 : x_n \in F_n, x_m \in F_m \subseteq F_{n_0}$, tj. $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Tedy existuje $x \in \mathbb{M} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Tvrdíme, že $x \in \bigcap F_n$. Necht' je dána $m \in \mathbb{N}$. Pak $\forall n \geq m : x_n \in F_m$. Ale F_m je uzavřená, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in F_m$.

\Leftarrow : Necht' platí podmínka věty. Bud' $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{M}$ cauchyovská. Chceme dokázat, že je konvergentní. Položme $F_n = \overline{\{x_i | i \geq n\}}$. Zřejmě $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ $\text{diam } F_n \rightarrow 0$, protože $\{x_n\}$ je cauchyovská. Tedy podle předpokladů existuje $x \in \bigcap F_n$.

Ukážeme, že $x = \lim x_n$: Necht' je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N} : \text{diam } F_{n_0} < \varepsilon$. Pro libovolné $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x) \leq \text{diam } F_n \leq \text{diam } F_{n_0} < \varepsilon$. Tedy $x_n \rightarrow x$. \square

Věta 6.2 (Úplnost a podprostory)

Bud' (\mathbb{M}, ϱ) MP, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$ jeho podprostor. Potom (\mathbb{N}, ϱ) je úplný $\Leftrightarrow \mathbb{N}$ je uzavřený v \mathbb{M} .

┌

Důkaz

\Rightarrow : Kdyby \mathbb{N} nebyla uzavřená množina, existovala by posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{N}$. Ale protože $\{x_n\}$ je konvergentní v \mathbb{M} , je cauchyovská v \mathbb{M} , a tedy i v \mathbb{N} . Nemá ale v \mathbb{N} limitu a tak \mathbb{N} není úplný.

\Leftarrow : Necht' $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$ je uzavřená v \mathbb{M} . Necht' $\{x_n\}$ je cauchyovská v \mathbb{N} , pak je cauchyovská i v \mathbb{M} , a protože \mathbb{M} je úplný, tak $\exists x \in \mathbb{M} : x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Ale \mathbb{N} je uzavřený, takže $x \in \mathbb{N}$. \square

Věta 6.3 (Úplnost a součin)

Necht' $(\mathbb{M}_i, \varrho_i)$, $i \in \mathbb{N}$ jsou MP, že $\forall i \in \mathbb{N} : \text{diam } \mathbb{M}_i \leq 1$. Pak $\prod_{i=1}^{\infty} (\mathbb{M}_i, \varrho_i)$ je úplný $\Leftrightarrow \forall i : (\mathbb{M}_i, \varrho_i)$ je úplný.

┌ *Důkaz*

\implies : $(\mathbb{M}_i, \varrho_i)$ lze chápat jako podprostor součinu $\prod(\mathbb{M}_i, \varrho_i)$. Lze si snadno rozmyslet, že je uzavřený (cvičení). Tedy podle předchozí věty je úplný.

\Leftarrow : Necht $\{x_n\} \subseteq \prod(\mathbb{M}_i, \varrho_i) =: \mathbb{M}$ je cauchyovská posloupnost v \mathbb{M} , $x_n(i) \in \mathbb{M}_i$. Tvrdíme, že $\forall i \in \mathbb{N} : \{x_n(i)\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská v \mathbb{M}_i . Buď $\varepsilon > 0$. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\forall m, n \geq n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2^i}$.

$$\varrho(x_n, x_m) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varrho_j(x_n(j), x_m(j))}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Tedy $\varrho_i(x_n(i), x_m(i)) < \varepsilon$. Tudíž existuje limita $x(i) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(i)$, tj. $x \in \prod_{j=1}^{\infty} (\mathbb{M}_j, \varrho_j)$. Jednoduše (standardní zanedbatelnost „vocasů řady“) dokážeme, že $\varrho(x_n, x) \rightarrow 0$. \square

Věta 6.4 (Bairova)

Necht (\mathbb{M}, ϱ) je úplný MP. Necht U_n jsou otevřené, husté podmnožiny \mathbb{M} , $n \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ je hustá.

┌ *Důkaz*

Stačí, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ protne libovolnou kouli. Mějme tedy dáno x, ε . Buď $B := B(x, \varepsilon)$. Protože U_1 je hustá, existuje $x_1 \in U_1 \cap B$. Ale U_1 i B jsou otevřené, takže i $U_1 \cap B$ je otevřená, takže existuje $\varepsilon_1 > 0$, že $B(x_1, 2\varepsilon_1) \subseteq U_1 \cap B$. Tedy $\overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \subseteq U_1 \cap B$. Analogicky pokračujeme (navíc chceme, aby $\varepsilon_i > \varepsilon_{i+1}$).

Tím jsme dostali klesající (co do inkluze) posloupnost uzavřených množin, jejichž diametr jde k 0. Tedy průnik těchto množin je neprázdný podle Cantorova principu. \square

Důsledek

Existuje spojitá funkce, která nemá v žádném bodě derivaci.

Definice 6.2 (Zajímavost)

I množina, $l_\infty := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ je omezená}\}$. $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$.

Tvrzení 6.5 (Zajímavost)

(l_∞, d_∞) je úplný.

Věta 6.6 (Zajímavost)

Necht (\mathbb{M}, ϱ) je MP, $\overline{D} = \mathbb{M}$. Pak existuje izometrie $\varphi : (\mathbb{M}, \varrho) \rightarrow l_\infty(D)$.

7 Kompaktnost

Definice 7.1 (Pokrytí, otevřené pokrytí, konečná průniková vlastnost)

Ať \mathcal{S} je systém podmnožin množiny X . Řekneme, že \mathcal{S} je pokrytí X , pokud $\bigcup \mathcal{S} = X$.

Je-li (\mathbb{X}, ϱ) MP, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$, říkáme, že \mathcal{S} je otevřené pokrytí \mathbb{X} , pokud \mathcal{S} je pokrytí \mathbb{X} a každá $S \in \mathcal{S}$ je otevřená množina v (\mathbb{X}, ϱ) .

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ má konečnou průnikovou vlastnost $\equiv \forall n \in \mathbb{N} \forall S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S} : \bigcap S_i \neq \emptyset$.

Definice 7.2 (Kompaktní prostor)

MP (\mathbb{X}, ϱ) se nazývá kompaktní, pokud z každého otevřeného pokrytí \mathcal{S} lze vybrat konečnou $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} : \bigcup \mathcal{S}' = \mathbb{X}$.

Definice 7.3

Ať (\mathbb{M}, ϱ) je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Řekneme, že $x \in \mathbb{M}$ je hromadným bodem množiny A , pokud $\forall \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Věta 7.1 (Charakterizace kompaktnosti)

Pro (\mathbb{M}, ϱ) je ekvivalentní:

1. \mathbb{M} je kompaktní.
2. Je-li $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{M})$ soubor uzavřených množin s konečnou průnikovou vlastností, pak $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.
3. Je-li $A \subseteq \mathbb{M}$ nekonečná, pak A má hromadný bod v \mathbb{M} .
4. Z každé posloupnosti v \mathbb{M} lze vybrat konvergentní podposloupnost.
5. Každá spojitá funkce $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená.
6. Každá spojitá funkce $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ nabývá svého minima a maxima.
7. Z každého spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné pokrytí.

Důkaz

1 \implies 2: Ať \mathcal{F} je soubor uzavřených množin v (\mathbb{M}, ϱ) s konečnou průnikovou vlastností. Pro spor ať $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Ať $\mathcal{S} := \{\mathbb{M} \setminus F \mid F \in \mathcal{F}\}$. $\mathbb{M} \setminus F$ je otevřená pro $F \in \mathcal{F}$. $\bigcup \mathcal{S} = \mathbb{M} \setminus \bigcap \mathcal{F} = \mathbb{M} \setminus \emptyset = \mathbb{M}$. Tedy \mathcal{S} je otevřené pokrytí \mathbb{M} . \mathbb{M} je kompaktní, tedy $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S} : S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = \mathbb{M}$. $\forall i \leq n \exists F_i \in \mathcal{F} : S_i = \mathbb{M} \setminus F_i$. $F_1 \cap \dots \cap F_n = \mathbb{M} \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_n) = \mathbb{M} \setminus \mathbb{M} = \emptyset$. Tedy \mathcal{F} nemá konečnou průnikovou vlastnost. \nexists □

┌
Důkaz

2 \implies 3: Ať $A \subseteq \mathbb{M}$ je nekonečná. Ať pro spor A nemá hromadný bod. Uvažujme $a \in A$, $A \setminus \{a\}$ je uzavřená množina (protože jinak by bod $z \in \overline{A} \setminus A$ byl hromadným bodem). $\mathcal{F} := \{A \setminus \{a\} \mid a \in A\}$ je soubor uzavřených množin a navíc má konečnou průnikovou vlastnost (můžeme odečíst pouze konečně mnoho $a_i \in A$, ale těch je nekonečně). Dle 2) je $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Ale $\bigcap \{A \setminus \{a\} \mid a \in A\} = A \setminus A = \emptyset$. ζ . \square

┌
Důkaz

3 \implies 4: Ať $x_n \in \mathbb{M}$. Pokud $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je konečná, najdeme konstantní (tedy konvergentní) podposloupnost. Jinak A má hromadný bod $x \in \mathbb{M}$. Najdeme podposloupnost konvergující k x , indukcí $n_1 := 1$, $n_i < n_{i+1}$: $\varrho(x_{n_k}) < \frac{1}{k}$, $k > 1$:

$B(x_{n_k}, \frac{1}{k+1}) \cap A$ je nekonečná, tedy existuje $n_{k+1} > n_k$, že je splněna chtěná podmínka. Jednoduše následně ukážeme i to, že tato posloupnost konverguje k x . \square

┌
Důkaz

4 \implies 5: Zase sporem: Ať $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá neomezená funkce. Tj. $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \mathbb{M} : |f(x_n)| \geq n$. Dle 4) ale víme, že posloupnost x_n má konvergentní podposloupnost x_{n_k} . $x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{M}$. Ale f je spojitá, tedy $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$. ζ .

5 \implies 6: $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá, f nenabývá maxima (búno). Dle 5 je f omezená, tedy $\sup_{x \in \mathbb{M}} f(x) = \alpha < \infty$. $g := \frac{1}{\alpha - f}$, $\forall x \in \mathbb{M} : f(x) \neq \alpha$, tedy g je spojitá (a dobře definovaná). $\exists x_n \in \mathbb{M} : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$. $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \infty$. Tedy g není omezená, spor s 5. \square

┌
Důkaz

6 \implies 7: Ať $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots\}$ je spočetné otevřené pokrytí \mathbb{M} . Položme $V_n := S_1 \cup \dots \cup S_n$. Ať pro spor \mathcal{S} nemá konečné podpokrytí. Tedy $V_n \subset \mathbb{M}$, $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$, $\bigcup V_n = \mathbb{M}$. Můžeme předpokládat, že $V_i \subset V_{i+1}$. Vybereme $x_i \in V_{i+1} \setminus V_i$ libovolně. Pro $i \in \mathbb{N}$ ať $\varepsilon_i = \min_{j \leq i} \varrho(x_i, x_j)$ a splňuje $B(x_i, \varepsilon_i) \subseteq V_{i+1}$.

$$f(x) = \frac{4k}{\varepsilon_k} \left(\frac{\varepsilon_k}{4} - \varrho(x, x_n) \right), \text{ pro } x \in B(x_{n_k}, \frac{\varepsilon_k}{4}), \text{ a } f(x) = 0 \text{ jinak.}$$

$f(x_k) = k$, $k \in \mathbb{N}$, tedy f není omezená. Ale je spojitá. Spor s 6. \square

┌ *Důkaz*

7 \implies 1: Nejprve ukážeme, že \mathbb{M} je separabilní, sporem: \mathbb{M} není separabilní, tedy podle charakterizace separability existuje $\varepsilon > 0$ a existuje $A \subseteq \mathbb{M}$, A nespočetná, A je ε -separovaná. Ať $A' \subseteq A$ je spočetná, nekonečná. Zřejmě A' je ε -separovaná. A' je uzavřená v \mathbb{M} . $\{M \setminus A'\} \cup \{B(a, \frac{\varepsilon}{2}) | a \in A'\}$ spočetné otevřené pokrytí \mathbb{M} . Tento systém ale nemá konečné podpokrytí, což je spor s 7, tedy \mathbb{M} je separabilní.

Ať \mathcal{S} je otevřené pokrytí \mathbb{M} . \mathbb{M} je separabilní, tedy existuje systém $\{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ otevřených množin, že $\forall G \subseteq \mathbb{M}$ otevřenou $\exists J \subseteq \mathbb{N}$:

$$G = \bigcup \{B_n | n \in J\}.$$

Tedy $\forall S \in \mathcal{S} \exists J_S \subseteq \mathbb{N} : S = \bigcup \{B_n | n \in J_S\}$. $J := \bigcup_{S \in \mathcal{S}} J_S \subseteq \mathbb{N}$. $\forall n \in J \exists S_n \in \mathcal{S} : B_n \subseteq S_n$. Tj. $\bigcup B_n = \bigcup \mathcal{S} = \mathbb{M}$. Tedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = M$. Tedy $\{S_1, S_2, \dots\}$ je spočetné podpokrytí \mathbb{M} . Dle 7 existuje $k \in \mathbb{N} : S_1 \cup \dots \cup S_k = \mathbb{M}$. \square

Věta 7.2

Ať (\mathbb{M}, ϱ) je MP. Pak \mathbb{M} je kompaktní, právě když \mathbb{M} je úplný a totálně omezený.

┌ *Důkaz*

\implies : Úplnost: Ať $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ jsou uzavřené neprázdné a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0$. Chceme, že $\bigcap F_n \neq \emptyset$. $\mathcal{F} := \{F_1, F_2, \dots\}$ je systém uzavřených množin s konečnou průnikovou vlastností. Podle předchozí věty je $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Tj. $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Totální omezenost: Ať $\varepsilon > 0$. $\{B(x, \varepsilon) | x \in \mathbb{M}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{M} . Z kompaktnosti existuje konečné podpokrytí, tj. $\exists n \in \mathbb{N} \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{M} : B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon) = \mathbb{M}$. Tedy $\{x_1, \dots, x_n\}$ je ε -sít pro \mathbb{M} . Tedy (\mathbb{M}, ϱ) je totálně omezený.

\Leftarrow : Ukážeme, že každá nekonečná $A \subseteq \mathbb{M}$ má hromadný bod. Indukcí najdeme klesající posloupnost $B_n, n \in \mathbb{N}$, uzavřených množin, že $\text{diam } B_n \leq \frac{1}{n}$, $B_n \cap A$ je nekonečná:

Z totální omezenosti \mathbb{M} existuje konečné pokrytí \mathbb{M} uzavřenými koulemi U_1, \dots, U_n s diametrem ≤ 1 . $\exists i \leq n : U_i \cap A$ je nekonečná. Položme $B_1 := U_i$.

Máme-li B_1, \dots, B_n , víme, že B_n je totálně omezená, $B_n \cap A$ je nekonečná. Z totální omezenosti B_n existují uzavřené V_1, \dots, V_l , že $B_n = V_1 \cup \dots \cup V_l$, že $B_n = V_1 \cup \dots \cup V_l$, $\text{diam } V_l \leq \frac{1}{n+1}$. Existuje $j \leq l : V_j \cap A$ je nekonečná. $B_{n+1} := V_j$. $B_{n+1} \subseteq B_n$.

Nyní z úplnosti \mathbb{M} je $\bigcap B_n \neq \emptyset$. Ať $a \in \bigcap B_n$. a je hromadným bodem A : Ať $\varepsilon > 0$, pak $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. $B_n \subseteq B(a, \varepsilon)$, $B(a, \varepsilon) \cap A$ je nekonečná, tedy a je hromadný bod A . \square

Tvrzení 7.3 (Zachovávání kompaktnosti operacemi)

1. Je-li (\mathbb{X}, ϱ) kompaktní MP a $Y \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, pak $(Y, \varrho|_Y)$ je kompaktní.

2. Je-li (\mathbb{X}, ϱ) kompaktní MP a (Y, ϱ) MP, $f : (\mathbb{X}, \varrho) \rightarrow (Y, \sigma)$ spojitý, pak $(f(\mathbb{X}), \sigma_{f(\mathbb{X})})$ je kompaktní.

3. Je-li (\mathbb{X}, ϱ) MP a $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$, že $(\mathbb{Y}, \varrho|_{\mathbb{Y}})$ je kompaktní, pak \mathbb{Y} je uzavřená v (\mathbb{X}, ϱ) .

4. Jsou-li $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ kompaktní MP, $i \in \mathbb{N}$, $\varrho_i \leq 1$, pak $\prod_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ je kompaktní.

5. Jsou-li $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ MP a (\mathbb{X}, ϱ) je suma prostorů $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$, $i \in I$. Pak (\mathbb{X}, ϱ) je kompaktní $\Leftrightarrow \forall i \in I: (\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ je kompaktní a $\{i \in I | \mathbb{X}_i \neq \emptyset\}$ je konečná.

┌

Důkaz

1. Kompaktnost \Leftrightarrow úplnost + totální omezenost. Uzavřený podprostor úplného je úplný, tedy \mathbb{Y} je úplný (jelikož \mathbb{X} je úplný). Podprostor totálně omezeného je totálně omezený, tedy \mathbb{Y} je totálně omezený. Tedy \mathbb{Y} je kompaktní.

2. Ať \mathcal{U} je otevřené pokrytí $f(\mathbb{X})$. f je spojitě, tedy $f^{-1}(U)$ jsou otevřené pro $U \in \mathcal{U}$. Navíc $\{f^{-1}(U) | U \in \mathcal{U}\}$ je pokrytí \mathbb{X} . \mathbb{X} je kompaktní, tedy existuje konečné podpokrytí $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)\}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$. $\mathbb{X} = f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_n) = f^{-1}(U_1 \cup \dots \cup U_n)$, tedy $f(\mathbb{X}) \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$, tedy $\{U_1, \dots, U_n\} \subseteq \mathcal{U}$ je konečné podpokrytí $f(\mathbb{X})$. Tedy $f(\mathbb{X})$ je kompaktní.

3. \mathbb{Y} je kompaktní, tedy úplný. Ale tím pádem je uzavřený (úplný podprostor je nutně uzavřený).

4. Převedením na úplnost a totální omezenost (součin spočetně mnoha úplných MP je úplný, stejně tak součin spočetně mnoha totálně omezených MP je totálně omezený).

5. \Rightarrow $J := \{i \in I | \mathbb{X}_i \neq \emptyset\}$ je konečná sporem: Ať J je nekonečná. Pro $j \in J$ vybereme $x_j \in \mathbb{X}_j$. $A := \{x_k | j \in J\}$. A je nekonečná, \mathbb{X} kompaktní, tedy podle charakterizace kompaktnosti má A hromadný bod $a \in \sum(\mathbb{X}_i, \varrho)$. $B(a, \frac{1}{2}) \cap A$ nekonečná, $\exists i \neq j, i, j \in J : x_i, x_j \in B(a, \frac{1}{2})$. $\varrho(x_i, x_j) < 1$, spor, neboť $\varrho(x_i, x_j) = 1$.

$\forall i \in I : \mathbb{X}_i$ je kompaktní: \mathbb{X}_i je uzavřená podmnožina $\sum(\dots \mathbb{X}_i, \varrho_i)$. Podle 1. je \mathbb{X}_i kompaktní.

\Leftarrow : $\{i \in I | \mathbb{X}_i \neq \emptyset\}$ je konečná, $\forall i \in I : \mathbb{X}_i$ kompaktní. Chceme, že $\sum(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ je kompaktní. Ať $A \subseteq \sum(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ je nekonečná. Nutně existuje $i \in I : \mathbb{X}_i \cap A$ má hromadný bod v \mathbb{X}_i . Ten je zřejmě hromadným bodem celé množiny A . Tedy podle charakterizace kompaktnosti pomocí hromadných bodů nekonečných množin je $\sum(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$. \square

Lemma 7.4 (Lebesgueovo číslo)

Ať (\mathbb{X}, ϱ) je kompaktní MP a \mathcal{U} otevřené pokrytí \mathbb{X} . Pak existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in \mathbb{X}$ existuje $U \in \mathcal{U} : B(x, \delta) \subseteq U$.

Důkaz

\mathbb{X} kompaktní, tedy existuje konečné podpokrytí \mathcal{U} : $\{U_1, \dots, U_n\} \subseteq \mathcal{U}$. Pokud existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $U_i = \mathbb{X}$, jsme hotovi, $\delta = 1$. Předpokládejme tedy, že $\forall i \leq n : U_i \subsetneq \mathbb{X}$. Ať $C_i := \mathbb{X} \setminus U_i$, C_i uzavřené, $C_i \neq \emptyset$. Ať $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{dist}_\rho(x, C_i)$. f je spojitý. $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty)$, $\forall x \in \mathbb{X} : \exists i \in \{1, \dots, n\} : x \in U_i, x \notin C_i, \text{dist}_\rho(x, C_i) > 0$. tedy $f : \mathbb{X} \rightarrow (0, \infty)$. \mathbb{X} kompaktní, tedy f nabývá svého minima $\delta := \min f(\mathbb{X}) > 0$.

Nyní pro $x \in \mathbb{X} : f(x) \geq \delta$. $f(x)$ = aritmetický průměr n čísel, tedy $\exists i \in \{1, \dots, n\} : \text{dist}_\rho(x, C_i) \geq \delta$. Tj. $B_\rho(x, \delta) \cap C_i = \emptyset$, tj. $B_\rho(x, \delta) \subseteq U_i$. \square

Důsledek

Ať (\mathbb{X}, ρ) , (\mathbb{Y}, σ) jsou MP, (\mathbb{X}, ρ) kompaktní, $f : (\mathbb{X}, \rho) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$ spojitá. Pak f je stejnoměrně spojitá.

Důkaz

Ať $\varepsilon > 0$ dáno. $\{f^{-1}(B_\sigma(y, \frac{\varepsilon}{2})) \mid y \in \mathbb{Y}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} (f spojitá, tedy vzor otevřené je otevřená). \mathbb{X} kompaktní. Tedy ať δ je Lebesgueovo číslo z předchozího lematu příslušné uvedenému otevřenému pokrytí, tj. $\forall x \in \mathbb{X} \exists y \in \mathbb{Y} : B_\rho(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_\sigma(y, \frac{\varepsilon}{2}))$. $f(B_\rho(x, \delta)) \subseteq B_\sigma(y, \frac{\varepsilon}{2})$. Tedy pokud $x, x' \in \mathbb{X}, \rho(x, x') < \delta$, pak $x' \in B_\rho(x, \delta)$ a pak $f(x), f(x') \in B_\sigma(y, \frac{\varepsilon}{2})$ pro nějaké $y \in \mathbb{Y}$. Tedy $\sigma(f(x), f(x')) < \varepsilon$. \square

Lemma 7.5

Ať (\mathbb{X}, ρ) a (\mathbb{Y}, σ) jsou MP, (\mathbb{X}, ρ) kompaktní, $f : (\mathbb{X}, \rho) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$ spojitá bijekce. Pak f je homeomorfismus.

Důkaz

Potřebujeme pouze ověřit, že $f^{-1}(\mathbb{Y}, \sigma) \rightarrow (\mathbb{X}, \rho)$ je spojitý. Ať $G \subseteq \mathbb{X}$ je otevřená. $(f^{-1})^{-1}(G)$ je otevřená v (\mathbb{Y}, σ) , jelikož $f(G) = \mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{X} \setminus G)$ je otevřený (vzor je uzavřená, tedy kompaktní, tedy obraz je kompaktní, tedy uzavřený, tedy doplněk je otevřený). Tedy f^{-1} je spojitý. \square

Věta 7.6 (Vlastnosti Cantorova diskontinua a Hilbertovy kostky)

Pro každý neprázdný kompaktní MP (\mathbb{X}, ρ) existuje spojitá surjekce $f : C \rightarrow \mathbb{X}$. Pro každý separabilní MP (\mathbb{Y}, σ) existuje spojitá $g : \mathbb{Y} \rightarrow Q$, že $g : \mathbb{Y} \rightarrow g(\mathbb{Y})$ je homeomorfismus.

8 Souvislost

Definice 8.1 (Souvislý prostor)

MP (\mathbb{X}, ρ) se nazývá souvislý, pokud $\mathbb{X} \neq \emptyset$ a pokud $\mathbb{X} = U \cup V$ pro U, V otevřené, neprázdné, pak $U \cap V \neq \emptyset$.

Poznámka

(\mathbb{X}, ϱ) není souvislý, právě když $\mathbb{X} = \emptyset$ nebo $\mathbb{X} = U \cup V$, že $U \cap V = \emptyset$, U, V otevřené neprázdné. (Tj. existuje obojetná množina $\neq \emptyset, \mathbb{X}$.)

Souvislost je topologický pojem.

Věta 8.1 (Charakterizace souvislosti)

Pro neprázdný MP (\mathbb{X}, ϱ) je ekvivalentní: 1) \mathbb{X} je souvislý, 2) \mathbb{X} má právě 2 obojetné podmnožiny, 3) je-li $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ spojitá a $f(\mathbb{X}) \supseteq \{0, 1\}$, pak je f na.

┌

Důkaz

1) \implies 2) : \emptyset, \mathbb{X} jsou vždy obojetné, $\mathbb{X} \neq \emptyset$. Kdyby existovala obojetná $A \subsetneq \mathbb{X}$, pak $A \neq \emptyset, \mathbb{X}$, $\mathbb{X} \setminus A \neq \emptyset, \mathbb{X}$, pak $\mathbb{X} = A \cup (\mathbb{X} \setminus A)$ je sjednocení dvou otevřených neprázdných disjunktních množin, tedy spor se souvislostí.

2) \implies 3) : Ať $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ je spojitá, $f(\mathbb{X}) \supseteq \{0, 1\}$. Ať $\exists r \in (0, 1) : f^{-1}(r) = \emptyset$. Intervaly $[0, r)$ a $(r, 1]$ jsou otevřené množiny v $[0, 1]$, tedy i jejich vzory (neprázdné disjunktní množiny) jsou otevřené. Tj. $\mathbb{X} = f^{-1}([0, 1]) = f^{-1}([0, r)) \cup f^{-1}(r) \cup f^{-1}((r, 1]) = f^{-1}([0, r)) \cup f^{-1}((r, 1])$. A tedy $\emptyset, \mathbb{X}, f^{-1}((r, 1]), f^{-1}([0, r))$ jsou obojetné množiny. \nless

3) \implies 1) : Ať $\mathbb{X} = U \cup V$, kde U, V jsou otevřené neprázdné. Chceme $U \cap V \neq \emptyset$. Sporem: $U \cap V = \emptyset$. Definujeme $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = 0$, $x \in U$ a $f(x) = 1$, $x \in V$. f je spojitá, jelikož $f^{-1}(G) \in \{\emptyset, \mathbb{X}, U, V\}$, pro $G \subseteq [0, 1]$, což jsou otevřené množiny. f tedy nenabývá např. hodnoty $1/2$. \nless □

└

Důsledek

$[0, 1]$ je souvislá.

┌

Důkaz

Každá spojitá funkce $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ má Darbouxovu vlastnost, tedy z předchozí charakterizace je $[0, 1]$ souvislá. □

└

Věta 8.2

Ať (\mathbb{X}, ϱ) je MP a ať pro každou dvojici $a, b \in \mathbb{X}$ existuje souvislá množina $S(a, b)$, že $S(a, b) \supseteq \{a, b\}$. Pak \mathbb{X} je souvislý.

┌

Důkaz

Sporem: $\mathbb{X} = U \cup V$, $U \neq \emptyset \neq V$, U, V otevřené, $U \cap V = \emptyset$. Ať $a \in U, b \in V$ libovolné. $S(a, b)$ je souvislá, ale $S(a, b) = (S(a, b) \cap U) \cup (S(a, b) \cap V)$, což jsou otevřené neprázdné (obsahují a a b), tedy máme spor se souvislostí $S(a, b)$. □

└

Věta 8.3

Ať (\mathbb{X}, ϱ) je MP a \mathcal{S} je soubor nějakých souvislých podmnožin \mathbb{X} , pro který je $\bigcap \mathcal{S} \neq \emptyset$, pak $\bigcup \mathcal{S}$ je souvislý podprostor \mathbb{X} .

Důkaz

Ať U, V jsou otevřené v $\bigcup \mathcal{S}$ a $U \cap V = \emptyset$. Chceme dokázat $U = \emptyset$ nebo $V = \emptyset$. Fixujeme $x_0 \in \bigcap \mathcal{S}$. BÚNO $x_0 \in U$. Pro libovolné $y \in \bigcup \mathcal{S}$ existuje $S \in \mathcal{S} : y \in S$. $S = (S \cap U) \cup (S \cap V)$, což jsou otevřené množiny a $S \cap U$ neprázdná, tedy $S \cap V = \emptyset$, jelikož S je souvislá. Tudíž $S \subseteq U$. Celkově $\bigcup \mathcal{S} \subseteq U$. Tedy $V = \emptyset$. \square

Důsledek

Je-li A souvislá podmnožina MP (\mathbb{X}, ϱ) , pak každá množina M , splňující $A \subseteq M \subseteq \overline{A}$, je souvislá.

Důkaz

Ať $x \in \overline{A} \setminus A$. Ukážeme, že $A \cup \{x\}$ je souvislá: Ať $A \cup \{x\} = U \cup V$, kde U, V jsou disjunktní otevřené v $A \cup \{x\}$. BÚNO $x \in U$. U otevřená, $x \in \overline{A}$, tedy $A \cap U \neq \emptyset$.

$A = (A \cap V) \cup (A \cap U)$, kde $A \cap U \neq \emptyset$ a $A \cap V = V$ jsou otevřené množiny, tedy $V = \emptyset$. Tedy $A \cup \{x\}$ je souvislá.

Ať M splňuje předpoklady, $\mathcal{S} := \{A \cup \{x\} \mid x \in M\}$. $\bigcup \mathcal{S} = M$, $\bigcap \mathcal{S} = A \neq \emptyset$, tedy M je souvislá. \square

Věta 8.4

Obraz souvislého MP při spojitém zobrazení je souvislý prostor.

Důkaz

Ať $f : (\mathbb{X}, \varrho) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$ na a (\mathbb{X}, ϱ) souvislý. Chceme, že \mathbb{Y} je souvislý. Ať $g : \mathbb{Y} \rightarrow [0, 1]$ je spojitá a $g(\mathbb{Y}) \supseteq \{0, 1\}$. Chceme g je na. Ale $h := g \circ f$ je spojitá a zjevně na $[0, 1]$ podle charakterizace souvislosti, tedy podle char. souv. g je na. \square

Definice 8.2

Ať (\mathbb{X}, ϱ) je MP. Množina $M \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá oblouk, pokud M je homeomorfní s $[0, 1]$.

Body $h(0), h(1)$ se nazývají krajní body oblouku M .

Prostor (\mathbb{X}, ϱ) se nazývá obloukově souvislý, pokud $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y$ existuje $M \subseteq \mathbb{X}$ oblouk s krajními body x a y .

Důsledek

Každý obloukově souvislý prostor \mathbb{X} je souvislý.

┌ *Důkaz*

$\forall a, b \in X, S(a, b) = \{a\}$, pokud $a = b$, nebo $S(a, b) =$ oblouk s krajními body a, b .

└ Z předchozích vět je tak \mathbb{X} souvislý. \square

Definice 8.3

Ať (\mathbb{X}, ϱ) je MP. Množina C_x se nazývá komponenta (souvislosti) bodu x v prostoru \mathbb{X} , pokud C_x je největší souvislá podmnožina \mathbb{X} obsahující x .

┌ *Důkaz* (Korektnost „největší“)

Z předchozích vět víme, že pokud vezmeme souvislé množiny obsahující bod x , tak jejich sjednocení je souvislé. \square

Poznámka

$\{C_x | x \in \mathbb{X}\}$ tvoří rozklad MP (\mathbb{X}, ϱ) .

Definice 8.4

Souvislý kompaktní MP se nazývá kontinuum.

Poznámka

Kontinuum je topologický pojem.

Spojité obraz kontinua je kontinuum.

Věta 8.5

Ať K_n je kontinuum pro každé $n \in \mathbb{N}$.

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$$

Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ je kontinuum.

┌
Důkaz

Každé K_n je kompaktní, tedy uzavřené v K_1 . $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ je uzavřená v K_1 , K_1 kompaktní, tedy $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ je kompaktní.

Souvislost $K := \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$: Ať pro spor K není souvislé: $K = A \cup B$, A, B jsou otevřené v K , $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cap B = \emptyset$. $\exists U, V$ otevřené disjunktní v K_1 , že $U \cap K = A$, $V \cap K = B$. $K \subseteq U \cup V$ otevřené v K_1 . Tvrdíme, že existuje $n \in \mathbb{N} : K_n \subseteq U \cup V$. To dokážeme sporem: kdyby ne, $K_n \setminus (U \cup V) \neq \emptyset, n \in \mathbb{N}$. $F_n := K_n \setminus (U \cup V)$ kompaktní neprázdný, $F_{n+1} \subseteq F_n$. Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$, protože $\{F_n | n \in \mathbb{N}\}$ má konečnou průnikovou vlastnost. $x \in \bigcap F_n \subseteq \bigcap K_n, x \in K_n \setminus (U \cup V)$, Spor s $K \subseteq U \cup V$.

Tedy $K_n = (K_n \cap U) \cup (K_n \cap V)$, což jsou neprázdné otevřené (v K_n) disjunktní množiny. \nmid . □

9 Hausdorffova metrika

Poznámka (Značení)

Ať \mathbb{X} je MP. Označíme

$$\mathcal{K}(\mathbb{X}) = \{K \subseteq \mathbb{X} | K \neq \emptyset, K \text{ kompaktní}\}.$$

Definice 9.1

Pro MP (\mathbb{X}, ϱ) definujeme $\varrho_H : \mathcal{K}(\mathbb{X}) \times \mathcal{K}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varrho_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \text{dist}_{\varrho}(x, B), \sup_{x \in B} \text{dist}_{\varrho}(x, A) \right\}.$$

ϱ_H se nazývá Hausdorffova metrika, $(\mathcal{K}(\mathbb{X}), \varrho_H)$ se nazývá hyperprostor.

Věta 9.1

ϱ_H je metrika na $\mathcal{K}(\mathbb{X})$.

┌

*Důkaz*Ať $A \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$: $\varrho_H(A, A) = 0$.

Ať $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, $A \neq B$, $\varrho_H(A, B) \stackrel{?}{>} 0$. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq \emptyset$. Ať $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
 $\varrho(x, A) > 0$ nebo $\varrho(x, B) > 0$. Tedy $\varrho_H(A, B) > 0$.

Symetrie je triviální.

Pomocné tvrzení: Ať $C \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, $x, y \in \mathbb{X}$. Pak $\varrho(x, C) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, C)$. Důkaz: Je-li
 $c \in C$: $\varrho(x, c) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, c)$. Přejdeme k infimu: $\varrho(x, C) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, C)$.

Ať $A, B, C \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$. Pro $a \in A$, $b \in B$: $\varrho(a, C) \leq \varrho(a, b) + \varrho(b, C) \leq \varrho(a, b) + \varrho_H(B, C)$.
 Přejdeme k infimu:

$$\varrho(a, C) \leq \varrho(a, B) + \varrho_H(B, C) \leq \varrho_H(A, B) + \varrho_H(B, C).$$

To platí pro všechna $a \in A$, tedy přejdeme k supremu:

$$\sup_{a \in A} \varrho(a, C) \leq \varrho_H(A, B) + \varrho_H(B, C).$$

Analogicky $\sup_{c \in C} \varrho(c, A) \leq \dots$ Tedy $\varrho_H(A, C) \leq \varrho_H(A, B) + \varrho_H(B, C)$. □

Tvrzení 9.2

Ať (\mathbb{X}, ϱ) je MP, pak zobrazení $f : (\mathbb{X}, \varrho) \rightarrow (\mathcal{K}(\mathbb{X}), \varrho_H)$, $f(x) = \{x\}$ je izometrické vnoření
 na uzavřenou podmnožinu $\mathcal{K}(\mathbb{X})$.

┌

Důkaz $\varrho_H(f(x), f(y)) = \varrho(x, y)$ triviálně.

$M := \{\{x\} \mid x \in \mathbb{X}\}$ je uzavřená v $\mathcal{K}(\mathbb{X})$: Doplněk je otevřená: Ať $A \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, $|A| \geq 2$
 (tj. A je v doplňku M). Fixujeme $x, y \in A$, $x \neq y$: $\varrho(x, y) =: \varepsilon > 0$. $B_{\varrho_H}(A, \frac{\varepsilon}{3}) \cap M = \emptyset$
 sporem: Kdyby existovalo $z \in \mathbb{X} : \{z\} \in B_{\varrho_H}(A, \frac{\varepsilon}{3})$, pak $\varrho_H(\{z\}, A) < \frac{\varepsilon}{3}$, $\varrho(x, z) < \frac{\varepsilon}{3}$,
 $\varrho(y, z) < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\varepsilon = \varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(y, z) < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

└. □

Věta 9.3

Pro MP (\mathbb{X}, ϱ) platí:

1. (\mathbb{X}, ϱ) je úplný $\Leftrightarrow (\mathcal{K}(\mathbb{X}), \varrho_H)$ je úplný.
2. (\mathbb{X}, ϱ) je totálně omezený $\Leftrightarrow (\mathcal{K}(\mathbb{X}), \varrho_H)$ je totálně omezený.
3. (\mathbb{X}, ϱ) je kompaktní $\Leftrightarrow (\mathcal{K}(\mathbb{X}), \varrho_H)$ je kompaktní.

4. (\mathbb{X}, ϱ) je kontinuum $\Leftrightarrow (\mathcal{K}(\mathbb{X}), \varrho_H)$ je kontinuum.

┌

Důkaz (Pouze náznak)

1), 2) \leftarrow : Z předchozího je \mathbb{X} uzavřený podprostor úplného (tot. omezeného) prostoru, tedy úplný (tot. omezený) prostor.

1) \Rightarrow : Předpokládejme, že (A_n) je cauchyovská v $(\mathcal{K}(\mathbb{X}), \varrho_H)$. $B_n := \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}$. $B := \bigcap B_n$. Lze ukázat, že $B \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, $A_n \rightarrow B$.

2) \Rightarrow : Ať $\varepsilon > 0$. Ať A_0 je konečná ε -sít v (\mathbb{X}, ϱ) . $\mathcal{P}(A_0) \setminus \{\emptyset\}$ (je konečná a) je ε -sít v $(\mathcal{K}(\mathbb{X}), \varrho_H)$.

3) plyne z 1) a 2). 4) bez náznaku. □

└

9.1 Iterované funkční systémy

Definice 9.2

Ať (\mathbb{X}, ϱ) , (\mathbb{Y}, σ) jsou MP, $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ se nazývá kontrakce, pokud existuje $K < 1$, že $\forall x, y \in \mathbb{X} : \sigma(f(x), f(y)) \leq K \cdot \varrho(x, y)$.

Věta 9.4 (Banachova věta)

Ať (\mathbb{X}, ϱ) je neprázdný úplný MP, $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ kontrakce. Pak f má právě jeden pevný bod, tj. bod $x \in \mathbb{X} : f(x) = x$.

┌

Důkaz

Ať $x_0 \in \mathbb{X}$ libovolně. $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ je cauchyovská:

$$\varrho(x_{n+1}, x_n) \leq K \cdot \varrho(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq K^n \cdot \varrho(x_1, x_0).$$

$\sum_{n=1}^\infty K^n \cdot \varrho(x_1, x_0)$ konverguje. Tedy pro $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \sum_{n=n_0}^\infty K^n \cdot \varrho(x_1, x_0) < \varepsilon$. Tedy $m \geq n > n_0$:

$$\varrho(x_m, x_n) \leq \varrho(x_m, x_{m-1}) + \varrho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + \varrho(x_{n+1}, x_n) \leq \sum_{i=n}^m K^i \varrho(x_1, x_0) \leq \varepsilon.$$

(\mathbb{X}, ϱ) je úplný, (x_n) cauchyovská, tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{X}$. Tvrdíme, že $f(x) = x$:

$$f(x) = f(* \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \stackrel{f \text{ spojitá}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

Jednoznačnost: Kdyby $f(x) = x$, $f(y) = y$, pak

$$\varrho(x, y) \leq K \cdot \varrho(f(x), f(y)) = K \varrho(x, y) \implies \varrho(x, y) = 0 \implies x = y.$$

└

□

Definice 9.3

Ať (\mathbb{X}, ϱ) je MP, $f_1, \dots, f_n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ kontrakce, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\{f_1, \dots, f_n\}$ se nazývá iterovaný funkční systém. Množina $K \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá invariantní (vůči tomuto IFS), pokud $K = f_1(K) \cup \dots \cup f_n(K)$.

Věta 9.5

Ať (\mathbb{X}, ϱ) je úplný neprázdný MP a $\{f_1, \dots, f_n\}$ IFS na \mathbb{X} . Pak existuje jediná kompaktní neprázdna invariantní množina pro tento IFS.

┌

Důkaz

Víme $(\mathcal{K}(\mathbb{X}), \varrho_H)$ je úplný. Definujeme $F : \mathcal{K}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{X})$, $F(L) := f_1(L) \cup \dots \cup f_n(L) \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$. F je kontrakce. Podle Banachovy věty existuje právě jedno $K \in \mathcal{K}(\mathbb{X}) : F(K) = K$.

Tím je důkaz hotov. □

└