1 Metrické prostory

Poznámka (Opakovalo se:)
Metrický prostor, otevřená a uzavřená koule, otevřené a uzavřené množiny a jejich vlastnosti, vnitřní body, vnitřek, charakterizace vnitřku, hraniční bod, uzávěr, uzávěr a uzavřené množiny a nakonec vlastnosti uzávěru.

1.1 Konvergence a spojitá zobrazení v metrických prostorech

Definice 1.1 (Konvergence v MP)

Nechť (P, ϱ) je MP a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků P a $x \in P$. Řekneme, že $\{x_n\}$ konverguje k x (v (P, ϱ)), pokud $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Značíme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, nebo $x_n \xrightarrow{\varrho} x$.

Věta 1.1 (Vlastnosti konvergence)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak platí

1. *Nechť pro posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z P existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $x_n = x$. Pak $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*
2. $\lim_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = y \implies x = y$. *(Jednoznačnost limity.)*
3. *Nechť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nechť $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Pak $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.*

Důkaz
TODO!!! □

Definice 1.2 (Spojitost v bodě a na množině)

Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Nechť $M \subset P$, $f : M \to Q$ a $x_0 \in M$. Řekneme, že f je spojitá v bodě x_0 (vzhledem k M), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B_\varrho(x_0, \delta) \cap M : f(x) \in B_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$

Řekneme, že f je spojitá na M (vzhledem k M), jestliže je spojitá v každém bodě M (vzhledem k M).

Nechť pro každé $\delta > 0$ platí $B_\varrho(x_0) \cap M \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. Řekneme, že f má v bodě x_0 limitu (vzhledem k M) rovnou $y \in Q$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B_\varrho(x_0, \delta) \cap M \setminus \{x_0\} : f(x) \in B_\sigma(y, \varepsilon).$$

Věta 1.2 (Charakterizace spojitosti)

Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *f je spojitá na P,*
2. *$\forall G \subset Q$ otevřenou, je $f^{-1}(G)$ otevřená,*
3. *$\forall F \subset Q$ uzavřenou, je $f^{-1}(F)$ uzavřená.*

Důkaz

TODO!!! □

Věta 1.3 (Spojitsot složeného zobrazení)

Nechť (P, ϱ), (Q, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory. Nechť $f : P \to Q$ je spojité zobrazení a $g : Q \to Z$ je spojité zobrazení. Pak $g \circ f : P \to Z$ je spojité zobrazení.

Důkaz

TODO!!! □

Věta 1.4 (Heine)

Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Nechť $M \subset P$, $x_0 \in M$ a $f : M \to Q$. Pak je ekvivalentní:

1. *$\lim_{x \to x_0, x \in M} f(x) = f(x_0)$, neboli f je spojitá v x_0,*
2. *pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňující $x_n \in M$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ platí*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Důkaz

TODO!!! □

1.2 Kompaktní množiny

Věta 1.5 (Charakterizace uzavřených množin)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $F \subset P$. Pak

$$F \text{ je uzavřená } \Leftrightarrow (x_n \xrightarrow{\varrho} x \wedge x_n \in F \implies x \in F).$$

Důkaz

TODO!!! $\square$

Definice 1.3 (Kompaktní množina)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$. Řekneme, že K je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti prvků K lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v K.

Věta 1.6 (Charakterizace kompaktních množin $\mathbb{R}^n$)

Množina $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

Důkaz

TODO!!! $\square$

Věta 1.7 (Nabývá extrémů na kompaktu)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$ je kompaktní. Nechť $f : K \to R$ je spojitá. Pak f nabývá na K svého maxima i minima. Speciálně je tedy f na K omezená.

Důkaz

TODO!!! $\square$

Věta 1.8 (Spojitý obraz kompaktu)

Nechť (P, ϱ) a (Q, τ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$ je spojité zobrazení. Nechť $K \subset P$ je kompaktní množina. Potom $f(K)$ je kompaktní.

Důkaz

Nechť $y_n \in f(K)$. Pak $\exists x_n \in K$, $f(x_n) = y_n$. Z definice kompaktnosti $\exists x \in K, x_{n_k} \to x \in K$. Podle Heineho věty $f(x_{n_k}) = f(y_{n_k}) \to f(x) \in f(K)$. $\square$

Definice 1.4

Nechť $(\mathbb{P}, \varrho)$ a $(\mathbb{Q}, \tau)$ jsou metrické prostory, $K \subset \mathbb{P}$ a $f : K \to \mathbb{Q}$. Řekneme, že f je na K stejnoměrně spojitá, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in K : (\varrho(x, y) < \delta \implies \tau(f(x), f(y)))\,.$$

Věta 1.9 (O vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti na MP)

Nechť $(\mathbb{P}, \varrho)$ *a* $(\mathbb{Q}, \tau)$ *jsou MP,* $K \subset \mathbb{P}$ *je kompaktní a nechť* $f: K \to \mathbb{Q}$ *je spojitá. Pak* f *je stejnoměrně spojitá na* K*.*

Důkaz

Nechť f je spojitá, ale ne stejnoměrně. Potom

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in K : \varrho(x, y) < \delta \wedge \tau\left(f(x), f(y)\right) \geq \varepsilon.$$

Zvolíme $\delta_n = \frac{1}{n}$ a pro každé si najdeme x_n, y_n. K je kompaktní, tedy existuje podposloupnost $x_{n_k} \to x_0 \in K$.

$$\varrho(y_{n_k}, x_0) \leq \varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \varrho(x_n, x_0) \leq \frac{1}{n_k} + \varrho(x_n, x_0) \to 0 \implies y_{n_k} \to x_0$$

Z Heineho věty $f(x_{n_k}) \to f\left(x_0\right)$ a $f\left(y_{n_k}\right) \to f\left(x_0\right)$. Ale my máme, že jsou od sebe vzdáleny o ε. $\lightning$ $\square$

2 Úplné metrické prostory

Definice 2.1 (Cauchyovská posloupnost)

Nechť $(\mathbb{P}, \varrho)$ je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů z $\mathbb{P}$. Řekneme, že x_n splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku (případně, že je cauchyovská), jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 : \varrho\left(x_n, x_m\right) < \varepsilon.$$

Důsledek

Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

Definice 2.2 (Úplný prostor)

Řekneme, že metrický prostor $(\mathbb{P}, \varrho)$ je úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Věta 2.1 (Vztah kompaktnosti a úplnosti)

Nechť $(\mathbb{P}, \varrho)$ *je MP a* $\mathbb{P}$ *je kompaktní. Pak* $\mathbb{P}$ *je úplný metrický prostor.*

Důkaz
Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost. $\mathbb{P}$ kompaktní $\implies \exists x_{n_k} \to x \in \mathbb{P}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Najdu n_0 z BC podmínky. Z $x_n \to x \exists k_0 \forall k \geq k_0 : \varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$. Nalezneme n_k, $k \geq k_0$, $n_k \geq n_0$. Pak

$$\forall n \geq n_0 : \varrho(x_n, x) \leq \varrho(x_n, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < 2\varepsilon.$$

□

Věta 2.2 (Úplnost a prostor spojitých funkcí)
Metrický prostor $C([0,1])$ se supremovou metrikou je úplný.

Důkaz
Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost. Tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m, n \geq n_0 : \varrho(f_n, f_m) = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Zvolme $x \in [0,1]$ pevné. Potom máme posloupnost reálných čísel místo funkcí, tedy z BC podmínky v $\mathbb{R}$ je $f_n(x)$ cauchyovská, tedy existuje $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$. Takto jsme si zadefinovali novou funkci f.

$f_n \to f$. Provedeme limitu $n \to \infty$ na $(*)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m, n \geq n_0 : \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Tedy $\varrho(f, f_n) \leq \varepsilon \implies f_n \to f$.

f je spojitá: Nechť $y \in [0,1]$. Chceme dokázat, že f je spojitá v y. Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC $\exists n_0 \; \forall x \in [0,1] : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Zafixujeme n_0. f_{n_0} je spojitá v y, tedy $\exists \delta > 0 \; \forall x \in [0,1], |x - y| < \delta : |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon$. Nyní $\forall x \in [0,1], |x - y| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_n(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon.$$

(Třetí člen dostaneme tak, že zafixujeme $m = n_0$ a n pošleme do nekonečna v BC podmínce výše.)

□

Věta 2.3 (Banachova, o kontrakci)
Nechť $(\mathbb{P}, \varrho)$ je úplný MP a $T : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ je kontrakce (tedy $\exists \gamma \in (0,1) \; \forall x, y \in P : \varrho(T(x), T(y)) \leq \gamma \cdot \varrho(x, y)$). Pak existuje právě jedno $x \in \mathbb{P}$ tak, že $T(x) = x$.

Důkaz
Zvolme $x_1 \in P$ libovolně. Definujeme indukcí $x_{n+1} = T(x_n)$. Tvrdíme, že x_n je cauchyovská, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\varrho(x_{n+1}, x_n) = \varrho(T(x_n), T(x_{n+1})) \leq \gamma \varrho(x_n, x_{n+1}) \leq \gamma^2 \varrho(x_{n-1}, x_n) \leq \ldots \leq \gamma^n \varrho(x_1, x_2).$$

Nechť $\varepsilon > 0$, zvolme n_0, aby $\varrho(x_2, x_1) \gamma^{n_0-1} \frac{1}{1-\gamma} < \varepsilon$. Nyní $\forall m, n \geq n_0$, $m < n$:

$$\varrho(x_m, x_n) \leq \varrho(x_{m+1}, x_m) + \ldots + \varrho(x_n, x_{n-1}) \leq \varrho(x_1, x_2) \cdot \left(\gamma^{m-1} + \ldots + \gamma^{n-2}\right) \leq$$

$$\leq \varrho(x_2, x_1) \gamma^{n_0-1} \frac{1}{1-\gamma}.$$

Tedy x_n je cauchyovská a má limitu.

Tvrdíme, že $T(x_n) \to T(x)$: T je spojité v x. K $\varepsilon > 0$ volme $\delta = \varepsilon$. Pak

$$\forall y \in B(x, \delta) : \varrho(x, y) < \delta \implies \varrho(T(x), T(y)) \leq \gamma \cdot \varrho(x, y) \leq \gamma\delta < \varepsilon.$$

Podle Heineho věty $x_n \to x \implies T(x_n) \to T(x)$. Víme, že $x_{n+1} = T(x_n)$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(x_n).$$

Jednoxznačnost: Nechť $\exists x, y$, $T(x) = x$ a $T(y) = y$. Pak

$$\varrho(x, y) = \varrho(T(x), T(y)) \leq \gamma \cdot \varrho(x, y) \implies \varrho(x, y) = 0 \implies x = y.$$

□

Věta 2.4 (O převedení na integrální tvar)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $x_0 \in I$, $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojité a $y : I \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak y je řešení ODR $y' = f(x, y(x))$ na I s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ právě tehdy, když $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$, $\forall xz \in I$.

Důkaz
$\implies$: víme $y'(s) = f(s, y(s))$ je spojité, tj. lze integrovat:

$$y(x) - y_0 = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'(s)ds = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds.$$

$\Leftarrow$: zderivujeme (integrant je spojitý $\implies$ integrál lze zderivovat) $y'(x) = f(x, y(x))$. Zřejmě také $f(x_0) = y_0$. □

Věta 2.5 (Picard)

Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je otevřený interval a $(x_0, y_0) \in I$.

Poznámka

Stačí libovolná otevřená množina.

Důkaz

Nechť $f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá a lokálně lipschitzovská vůči Y. Pak existuje $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ okolí x_0 a funkce $y(x)$ definovaná na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že $y(x)$ splňuje ODR $y'(x, y(x))$ na $(x_0 - \delta, x_0 + \ \delta)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Navíc y je jediné řešení na $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$. $\square$

Důkaz

Zvolme $\delta, \Delta > 0$, aby $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta] \subset I$. Definujeme

$$X = \{y \in C([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) | y(x) \in [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta]\}.$$

Definujeme operátor $T : C([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \to C([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ tak, že $T[y](x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s)) ds$.

Klíčové pozorování: y řeší naši ODR $\Leftrightarrow T[y] = y$. (Z předchozí věty.)

X je úplný: Nejprve dokážeme, že X je uzavřená podmnožina $C([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$: X lze zapsat (dokáže se velmi přímočaře) jako $\overline{B(y_0, \Delta)}$: Tj. X je uzavřená a úplnost se dědí na uzavřené podmnožiny.

Máme pevné $\delta, \Delta > 0$, že $A := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta] \subset I$. f spojitá na tomto kompaktu $\implies \exists M > 0$, $|f(x, y)| \leq M$ na A. Z lipschitzovskosti $\exists x > 0 : \forall [x, y] \in A, \forall [x, \tilde{y}] |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq K \cdot |y - \tilde{y}|$. Případným zmenšením $\delta > 0$ dosáhneme

$$\delta \leq \min \left\{ \frac{\Delta}{M}, \frac{1}{2K} \right\}.$$

Ukážeme $T : X \to X$: $y \in X$, $y(x) \in [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta]$.

$$|T[y](x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(s, y(x)) ds| \leq |x - x_0| M \leq \delta \cdot M \leq \Delta.$$

$$\implies T[y](x) \in [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta] \implies T[y] \in X.$$

Dokážeme, že je toto zobrazení kontrakce a pak už máme hotovo z věty výše. Kontrakce: Nechť $y, \tilde{y} \in X$ a $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

$$T[y](x) - T[\tilde{y}](x)| = |\int_{x_0}^{x} (f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))) ds| \leq \int || \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |K \cdot (y(s) - \tilde{y}(s))| ds < |x_0 - x| \cdot K \cdot \sup_{s \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} (y(s) - \tilde{y}(s)) \leq \delta \cdot K \cdot \varrho(y, \tilde{y}) \leq \frac{1}{2} \varrho(y, \tilde{y}).$$

Supremum dá $\varrho(T[y], T[\tilde{y}]) \leq \frac{1}{2} \varrho(y, \tilde{y})$. $\square$

3 Funkce více proměnných

3.1 Úvodní definice a spojitost

Poznámka
Většina definice je jen „opakování“ z letního semestru, nebo z definice spojitých funkcí na metrických prostorech.

Definice 3.1 (Funkce více reálných proměnných, vektorová funkce)

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Funkcí více reálných proměnných rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$.

Vektorovou funkcí více reálných proměnných rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{R}^m$, kde $m \in \mathbb{N}$.

Definice 3.2 (Eukleidovská vzdálenost)

Pro $[x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n] \in \mathbb{R}^n$ definujeme eukleidovskou vzdálenost (metriku) jako

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Definice 3.3 (Koule, prstencové okolí)

$B(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | |x - c| < r\}$. $P(c, r) = B(c, r) \setminus \{c\}$.

Definice 3.4 (Limita funkce)

Nechť $F : G \to \mathbb{R}$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená. Řekneme, že f má v bodě $a \in G$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Značíme $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$.

Definice 3.5 (Spojitost)

Řekneme, že f je spojitá v a, jestliže $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definice 3.6 (Spojitost a limita vektorové funkce)

Spojitost a limitu vektorové funkce definujeme po složkách.

Poznámka
Zřejmě platí aritmetika limit, věta o dvou policajtech a věta o spojitosti složené funkce.

Definice 3.7 (Limita posloupnosti bodů)

$$x_j \in \mathbb{R}^n, \lim_{j \to \infty} x_j = a \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists j_0 \forall j \geq j_0 : |x_j - a| < \varepsilon.$$

Poznámka
Následující větu lze dokázat analogicky věty výše.

Věta 3.1 (Heine)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $a \in G$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $f : G \to \mathbb{R}$. Pak je ekvivalentní

- $\lim_{x \to a} f(x) = A$.
- $\forall$ *posloupnost* $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ *splňující* $x_j \in G \setminus \{a\}$, $\lim_{j \to \infty} x_j = a$ *platí* $\lim_{j \to \infty} f(x_j) = A$.

3.2 Parciální derivace a totální diferenciál

Definice 3.8 (Parciální derivace)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $i \in [n]$, $f : G \to \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{G}$. Parciální derivací funkce f v bodě x podle i-té proměnné nazveme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot e_i) - f(x)}{t},$$

pokud tato limita existuje.

Definice 3.9 (Extrémy)

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $f : M \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in M$. Řekneme, že f nabývá v bodě x_0 svého minima (resp. lokálního minima, resp. maxima, lokálního maxima) vzhledem k M, jestliže $\forall x \in M : f(x) \geq f(x_0)$ (resp. $\exists \delta > 0 \ \forall x \in B(x_0, \delta)$, resp. $f(x) \leq f(x_0)$).

Věta 3.2 (Nutná podmínka existence extrému)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $i \in [n]$, $a \in G$ a $f : G \to \mathbb{R}$. Má-li f v bodě a lokální minimum (maximum) a existuje-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Důkaz
Položme $h(t) = f(a + t \cdot e_i)$. Pak h je definováno na okolí 0. f má v a extrém, tedy h má v 0 extrém. Dále

$$h'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Podle Fermatovy věty je $h'(0) = 0$. □

Definice 3.10 (Derivace ve směru)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{R}$, $x \in G$ a $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. Derivací funkce f v bodě $x \in G$ ve směru v nazveme

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t},$$

pokud limita existuje.

Definice 3.11 (Totální diferenciál)

Nechť G je otevřená, $f : G \to \mathbb{R}$ a $a \in G$. Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je totální diferenciál funkce f v bodě a, pokud $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(n) - L(h)}{|h|} = 0$.

Značíme $D_f(a)$ a hodnotu v bodě $h \in \mathbb{R}^n$ značíme $D_f(a)(h)$.

Poznámka
Lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lze reprezentovat jako $L(h) = A_i h_1 + \ldots + A_n h_n$.

Ekvivalentně lze definovat jako $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{|x-a|} = 0$.

Geometrický význam je, že lineární funkce $f(a) + L(x - a)$ je velmi blízko původní funkce $f(x)$ na okolí a.

Věta 3.3 (O tvaru totálního diferenciálu)

Nechť G je otevřené, $a \in G$ a $f : G \to \mathbb{R}$. Nechť existuje totální diferenciál f v bodě a. Pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ a pro všechna $h \in \mathbb{R}^n$ platí $D_f(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n$. Navíc pro $\mathbf{o} \neq v \in \mathbb{R}^n$ platí $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = D_f(a)(v)$.

Důkaz
Víme $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{|h|} = 0$. Speciálně pro $h = t \cdot e_i$:

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\cdot e_i) - f(a) - L(t\cdot e_i)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\cdot e_i) - f(a) - A_i \cdot t}{t} = \frac{\partial f}{x_i}(a) - A_i.$$

Tj. $\frac{\partial f}{x_i}(a) = A_i$. Obdobně pro v. □

Definice 3.12 (Gradient)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{R}$ a $a \in G$. Nechť f má v bodě a totální diferenciál. Pak definujeme gradient funkce f v bodě a jako vektor

$$\nabla f(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right].$$

Můžeme tedy psát $Df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h\rangle$.

Věta 3.4 (Geometrický význam gradientu)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f : G \to \mathbb{R}$. Nechť existuje totální diferenciál f v bodě a, pak

$$\max\left\{\frac{\partial f}{\partial v}(a) : ||v|| = 1\right\} = ||\nabla f(a)||.$$

Důkaz
TODO!!! □

Věta 3.5 (O vztahu spojitosti a totálního diferenciálu)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f : G \to \mathbb{R}$. Nechť f má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ spojité parciální derivace, tedy funkce

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), j \in [n]$$

jsou spojité v a. Pak $Df(a)$ existuje.

Důkaz
TODO!!!! □

Věta 3.6 (O aritmetice totálního diferenciálu)

Nechť $a \in \mathbb{R}^n$, $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $Df(a)$, $Dg(a)$ existují. Pak existují i $D(f+g)(a)$, $D(cf)(a)$ pro $c \in \mathbb{R}$, $D(fg)(a)$, a pokud $g(a) \neq 0$ pak i $D(f/g)(a)$ a platí

- $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$,
- $D(cf)(a) = cD(f)(a)$,

- $D(fg)(a) = f(a)Dg(a) + Df(a)g(a)$,
- $D(f/g)(a) = \frac{Df(a)g(a) - f(a)Dg(a)}{g(a)^2}$.

Důkaz (Pouze třetí bod)
TODO!!! □

Definice 3.13

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{R}^k$ a $a \in G$. Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je derivací funkce f v bodě a, jestliže

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L(h)|}{|h|} = 0.$$

Značíme $Df(a)$ a hodnotu v bodě $h \in \mathbb{R}^n$ značíme $Df(a)(h)$.

Poznámka
Nechť $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je lineární zobrazení. Potom existuje právě jedna $n \times k$ matice A tak, že $L(h) = Ah$.

Věta 3.7 (Reprezentace derivace maticí)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f = [f_1, \dots, f_k] : G \to \mathbb{R}^k$ má derivaci v bodě $a \in G$. Pak $Df(a)$ je reprezentováno maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Důkaz
TODO!!! □

Lemma 3.8 (Derivace složeného zobrazení)

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$, f má derivaci v $a \in \mathbb{R}^n$ a g má derivaci v $b = f(a) \in \mathbb{R}^k$. Pak existuje derivace $Dg \circ f(a)$ a platí

$$Dg \circ f(a) = Dg(b) \cdot Df(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a).$$

Důkaz
TODO!!! □

Věta 3.9 (Řetízkové pravidlo)

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *má derivaci v* $a \in \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *má totální diferenciál v bodě* $b = f(a) = [f_1(a), \ldots, f_k(a)]$*. Pak funkce*

$$h(x) = g(f_1(x), \ldots, f_k(x))$$

má totální diferenciál v a *a platí*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

Důkaz

TODO!!! □

Věta 3.10 (O přírůstku funkce)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená a* $f : G \to \mathbb{R}$ *má totální diferenciál v každém bodě* G*. Nechť* $a, b \in G$ *a nechť úsečka* L *spojující* a, b *je obsažena v* G*, tj.* $L = \{(1-t) \cdot a + t \cdot b | t \in [0,1]\} \subset G$*. Pak existuje* $\zeta \in L$ *tak, že* $f(b) - f(a) = Df(\zeta) \cdot (b - a)$*.*

Důkaz

Položme $F(t) = f(a + t(b-a))$. Podle Lagrangeovy věty $\exists \zeta_2 \in (0,1)$ tak, že $f(b) - f(a) = F(1) - F(0) = F'(\zeta_2)$. Položme $\zeta = a + \zeta_2(b-a)$.

Podle řetízkového pravidla $\frac{\partial F}{\partial t}(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\zeta)(b_j - a_j) = Df(\zeta)(b-a)$. □

3.3 Parciální derivace vyšších řádů

Definice 3.14

Nechť f má na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ parciální derivaci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, i \in [n],$$

pak definujeme pro $a \in G$ a $j \in [n]$ druhou parciální derivaci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a), i \neq j,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a), i = j.$$

Obdobně definujeme derivace vyšších řádů.

Definice 3.15 ($C^k(\mathbb{R})$)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $f \in C^1(G) = C^1(G, \mathbb{R})$, pokud existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i \in [n]$, a jsou to spojité funkce.

Řekneme, že $f \in C^k(G) = C^k(G, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, pokud existují všechny parciální derivace f až do řádu k včetně a jsou to spojité funkce.

Důsledek

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Z věty dříve dostáváme, že je-li $f \in C^1(G)$, pak existuje totální diferenciál f na G.

Věta 3.11 (Záměnnost parciálních derivací)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f \in C^2(G, \mathbb{R})$. Pak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Důkaz

SLÚNO $n = 2$. Vezměme t dost malé, aby $B_{\max}([a_1, a_2], t) \subset G$. Položme $W(t) = \frac{f(a_1+t, a_2+t) - f(a_1, a_2+t) - f(a_1+t, a_2) + f(a_1, a_2)}{t^2}$. Položme $\varphi(x) = f(x, a_2 + t) - f(x, a_2)$. Pak $W(t) = \frac{1}{t^2}(\varphi(a_1 + t) - \varphi(a_1))$.

φ je spojitá a $\exists \varphi'$. Lagrange: $\exists c_1 \in (a_1, a_1 + t)$:

$$\frac{1}{t^2} \cdot \varphi'(c_1) \cdot (a_1 + t - a_1) = \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_1, a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, a_2)\right) = \frac{1}{t}(h(a_2 + t) - h(a_2)),$$

$h(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, z)$ je spojitá a derivovatelná, tedy použijeme Lagrange:

$$= \frac{1}{t} \cdot h'(c_2) \cdot (a_2 + t - a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_1, c_2) \leftarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2).$$

(f má spojité druhé derivace, tedy můžeme prohodit f a limitu.) Totéž provedeme pro zaměněné souřadnice. □

Definice 3.16 (Hessova matice)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $a \in G$. Nechť $f \in C^2(G)$. Definujeme Hessovu matici f jako

$$D^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Podle předchozí věty je matice symetrická, a proto můžeme pracovat s následující kvadratickou formou

$$D^2 f(a)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u^T D^2 f(a) \cdot v, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2.$$

Definice 3.17

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $a \in G$. Nechť $f \in C^2(G)$. Pak definujeme Taylorův polynom stupně 2 jako

$$T_2^{f,a}(x) := f(a) + Df(a)(x-a) + \frac{1}{2} D^2 f(a)(x-a, x-a).$$

Věta 3.12 (Taylorova věta pro druhý řád)

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je třídy C^2 na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$. Pak

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - T_2^{f,a}(x)}{|x-a|^2} = 0.$$

Důkaz
Bez důkazu. □

Poznámka
Lze definovat i Taylorovy polynomy řádu k pomocí k-tých parciálních derivací.

Věta 3.13 (O pozitivně definitní kvadratické formě)

Nechť $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je pozitivně definitní kvadratická forma. Potom

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n : Q(h,h) \geq \varepsilon ||h||^2.$$

Důkaz
Funkce $A(h) = Q(h,h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_j h_i$ je spojitá. Množina $M \, \{h \in \mathbb{R}^n | ||h|| = 1\}$ je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Funkce $A(h)$ tedy nabývá na M svého minima v bodě h_0. Označme $\varepsilon = Q(h_0, h_0) > 0$.

Nyní $\forall h \in \mathbb{R}^n$:

$$Q(h,h) = Q\left(\frac{h}{||h||}||h||, \frac{h}{||h||}||h||\right) = ||h||^2 Q\left(\frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||}\right) \geq ||h||^2 Q\left(h_0, h_0\right) = ||h||^2 \varepsilon.$$

□

Věta 3.14 (Postačující podmínky pro lokální extrém)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a nechť $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Nechť $Df(a) = 0$ (tedy je bod podezřelý na lokální extrém).

1. Je-li $D^2f(a)$ pozitivně definitní, pak a je bod lokálního minima.

2. Je-li $D^2f(a)$ negativně definitní, pak a je bod lokálního maxima.

3. Je-li $D^2f(a)$ nedefinitní, pak v a nemá extrém.

Důkaz
1) Z předchozí věty víme, že

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall h \in \mathbb{R}^n : D^2f(a)(h,h) \geq \varepsilon ||h||^2.$$

Z té ještě předchozejší víme, že

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) - \frac{1}{2}D^2f(a)(x-a, x-a)}{||x-a||^2} = 0.$$

K zadanému $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$:

$$\forall x \in P(a,\delta) : \frac{f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) - \frac{1}{2}D^2f(a)(x-a, x-a)}{||x-a||^2} > -\frac{1}{4}\varepsilon.$$

Odtud $f(x) - f(a) - \frac{1}{2}D^2f(a)(x-a,x-a) > -\frac{1}{4}\varepsilon||x-a||^2 \implies$

$$f(x) > f(a) + \frac{1}{2}D^2f(a)(x-a,x-a) - \frac{1}{4}\varepsilon||x-a||^2 \geq$$

$$\geq f(a) + \frac{1}{2}\varepsilon||x-a||^2 - \frac{1}{4}\varepsilon||x-a||^2 > f(a).$$

2) obdobně.

3) Tedy existují $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$ tak, že $D^2f(a)(h_1,h_1) > 0$ a $D^2f(a)(h_2,h_2) < 0$. Uvažme funkci $\varphi(t) = f(a + t \cdot h_1)$, pak $\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + t \cdot h_1) \cdot (h_1)_i = Df(a + t \cdot h_1) \cdot h_1$. $\varphi'(0) = Df(a)h_1 = 0$.

Dále $\varphi''(t) = D^2f(a + t \cdot h_1)(h_1, h_1)$, tedy $\varphi''(0) = D^2f(a)(h_1,h_1) > 0$. Tedy φ má v $t = 0$ lokální minimum, tj. f nemá v bodě a lokální maximum. Analogicky pro h_2, z čehož dostaneme, že f nemá v a ani lokální minimum. $\square$

3.4 Implicitní funkce a vázané extrémy

Věta 3.15 (O implicitní funkci)

Nechť $p \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí

1. $F \in \mathcal{C}^p(G)$,

2. $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,

3. $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$,

pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ *bodu* $\tilde{x}$ *a okolí* $V \subset \mathbb{R}$ *bodu* $\tilde{y}$ *tak, že*

$$\forall x \in U \ \exists! y \in V : F(x, y) = 0.$$

Píšeme-li $y = \varphi(x)$*, pak* $\varphi \in \mathcal{C}^p(U)$ *a platí*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \forall x \in U \ \forall j \in [n].$$

Důkaz
4 kroky: a) $\exists \varphi$, b) φ je spojitá, c) $\varphi \in \mathcal{C}^1$, d) $\varphi \in \mathcal{C}^p$.

a) BÚNO $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$. F je $\mathcal{C}^2$, a tedy $\exists \delta_1 > 0$ $\exists \zeta_1 > 0$, tak $\forall x \in B(\tilde{x},\delta_1)$ $\forall y \in B(\tilde{y},\zeta_1)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$. $\forall B(\tilde{y},\zeta_1) : \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},y) > 0 \implies$ funkce $y \mapsto F(\tilde{x},y)$ je rostoucí, tj. $F(\tilde{x},\tilde{y}+\zeta_1) > 0$, $F(\tilde{x},\tilde{y}-\zeta_1) < 0$. Nalezneme $\delta_2 < \delta_1$ tak, že $F(x,\tilde{y}+\zeta_1) > 0$, $F(x,\tilde{y}-\zeta_1) < 0$, $\forall x \in B(\tilde{x},\delta_2)$. Položme $U = B(\tilde{x},\delta_2)$ a $V = B(\tilde{y},\zeta_1)$.

Nechť $x \in B(\tilde{x},\delta_2)$ je libovolné pevné. Víme, že $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$, tedy $y \mapsto F(x,y)$ je rostoucí a spojitá, tedy podle Darbouxovy věty (o nabývání mezihodnot) $\exists! y \in (\tilde{y} - \zeta_1, \tilde{y} + \zeta 1)$ tak, že $F(x,y) = 0$. Označme $y = \varphi(x)$.

b) Nechť $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \zeta_1$. Mohu použít větu část *a)* na F a $G^* = U \times (\tilde{y}-\varepsilon,\tilde{y}+\varepsilon)$. Dostaneme $\exists U^*$ okolí $\tilde{x}$ a V^* okolí $\tilde{y}$, že $\forall x \in U^* \exists! y \in V^* F(x,y) = 0$. Speciálně $\varphi(U^*) \subset V^* \subset (\tilde{y}-\varepsilon,\tilde{y}+\varepsilon)$. Tedy φ je spojité.

c) Chceme ukázat, že φ má totální diferenciál v $\tilde{x}$, tedy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B(\tilde{x},\delta) \subset \mathbb{R}^n : |\varphi(\tilde{x}+h) - \varphi(\tilde{x}) - \sum_{i=1}^{n} - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))} h_i| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |h_i|.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})} < \frac{1}{2}$. Víme, že F má totální diferenciál v $[\tilde{x},\tilde{y}]$, tedy

$$\exists \delta > 0\ \forall h \in B(0,\delta) |F(\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{y}+h_{n+1}) - F(\tilde{x},\tilde{y}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x},\tilde{y}) h_i - TODO$$

$$|F(\tilde{x}+\tilde{h},\varphi(\tilde{x}+\ \tilde{h})) - F(\tilde{x},\tilde{y}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x},\tilde{y}) \cdot h_i - \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y}) \cdot (\varphi(\tilde{x}+\tilde{h}) - \varphi(\tilde{x}))| \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot (\sum_{i=1}^{n} |h_i| + |\varphi(\tilde{x}+\ \tilde{h}) - \varphi(\tilde{x})|).$$

$$|(\varphi(\tilde{x}+\tilde{h}) - \varphi(\tilde{x})) - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x},\tilde{y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})} \cdot h_i| \leq \frac{\varepsilon}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})} \cdot (\sum_{i=1}^{n} |h_i| + |\varphi(\tilde{x}+\ \tilde{h}) - \varphi(\tilde{x})|).$$

Tudíž stačí jen odhadnout $|\varphi(\tilde{x}+\tilde{h}) - \varphi'(\tilde{x})|$.

$$|\varphi(\tilde{x}+\tilde{h}) - \varphi'(\tilde{x})| \leq |\varphi(\tilde{x}+\tilde{h}) - \varphi'(\tilde{x}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x},\tilde{y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})} \cdot h_i| + |\sum_{i=1}^{n} \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x},\tilde{y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})} \cdot h_i| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})} \left(\sum_{i=1}^{n} |h_i| + |\varphi(\tilde{x}+\tilde{h}) - \varphi'(\tilde{x})| \right) + c_i \sum_{i=1}^{n} |h_i| \leq$$

□

Důkaz (Pokračování)

$$\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}|h_i| + |\varphi(\tilde{x}+\tilde{h}) - \varphi'(\tilde{x})|\right) + c_i\sum_{i=1}^{n}|h_i| \implies$$

$$|\varphi(\tilde{x}+\tilde{h}) - \varphi'(\tilde{x})| \leq c_2\sum_{i=1}^{n}|h_i|.$$

Kombinací dosažených nerovností už dostaneme chtěnou nerovnost. Tedy

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))}.$$

d) $F \subset \mathcal{C}^p \implies \varphi \in \mathcal{C}^p$. Indukcí: $p = 1$ víme. Dále nechť víme $\varphi \in \mathcal{C}^{p-1}$ a $F \in \mathcal{C}^p$. Víme, že

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))}.$$

Toto $(p-1)$krát zderivujeme. Tím na pravé straně dostaneme výraz, kde bude F nanejvýš v $((1+p-1)=p)$-té derivaci a φ bude nanejvýš v $(p-1)$-té derivaci (podle vzorce pro derivaci složené funkce). □

Věta 3.16 (O implicitních funkcích)

Nechť $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ otevřená, $F_j : G \to \mathbb{R}$, $j \in [m]$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{x},\tilde{y}] \in G$ a nechť platí

- *$F_j \in \mathcal{C}^p(G)$ pro $j \in [m]$,*
- *$F_j(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$, $\forall j \in [m]$,*
- *determinant $m \times m$ matic parciálních derivací F_j je nenulový.*

Pak existuje $U \subset \mathbb{R}^n$ okolí $\tilde{x}$ a $V \subset \mathbb{R}^m$ okolí $\tilde{y}$ tak, že

$$\forall x \in U\ \exists! y \in V, F_j(x,y) = 0\ \forall j \in [m], (y_j = \varphi_j(x)) \implies \varphi_j \in \mathcal{C}^p(U), j \in [m].$$

Věta 3.17 (Lagrangeova věta o vázaných extrémech)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $m < n$, f, $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$ a mějme množinu $M = \{z \in \mathbb{R}^n | g_1(z) = \ldots = g_m(z) = 0\}$. Je-li $a \in M$ bodem lokálního extrému f vzhledem k M a vektory $(\frac{\partial g_1}{\partial z_1}(a), \ldots, \frac{\partial g_1}{\partial z_n}(a))$, ..., $(\frac{\partial g_m}{\partial z_1}(a), \ldots, \frac{\partial g_m}{\partial z_n}(a))$ jsou lineárně nezávislé, pak existují čísla $x_1, \ldots, x_m$ tak, že

$$Df(a) + \lambda_1 Dg_1(a) + \ldots + \lambda_m \cdot Dg_m(a) = 0.$$

Důkaz
Položme $k = n - m$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Víme, že $Dg_1(a), \dots, Dg_m(a)$ jsou LN $\implies \exists\, m$ lineárně nezávislých sloupců, BÚNO jsou to poslední sloupce. Podle věty o implicitních funkcích $\exists U$ okolí $\tilde{x}$ a V okolí $\tilde{y}$ tak, že $\forall x \in U\ \exists! y \in V : g_j(x, y) = 0$, $j \in [m]$. Píšeme $y_j = \varphi_j(x) \in \mathcal{C}^1$, $j \in [m]$.

Položme $\psi(x) = f(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots) \in \mathcal{C}^1$. Víme f má extrém vzhledem k $M \implies \psi$ má extrém $\implies \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) = 0$, $j \in [k]$.

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial z_i} a \frac{\partial (x_i)}{x_j} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_{k+i}}(a) \frac{\partial \varphi_i(\tilde{x})}{\partial x_j} = 0 + \dots .$$

Zderivováním $g_l(x_1, \dots, \varphi \dots, \dots) = 0$, $l \in [m]$, dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial z_j} g(x) = \frac{\partial g_l}{\partial z_j}(a) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_l}{\partial z_{k+i}}(a) \cdot \frac{\partial \varphi_i(\tilde{x})}{\partial x_j} = 0.$$

Označme si vektory $v_j = (0, \dots, 1, \dots, 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(\tilde{x}), \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}(\tilde{x}))$ (1 je na j-tém místě), $j \in [k]$. Označme $A = \mathrm{LO}\{v_1, \dots, v_k\}$. $\dim A = k$. Z toho plyne $A^\perp = n - k = m$. Derivace ψ říká, že $Df(a) \in A^\perp$. Derivace g říká, že $Dg_l(a) \in A^\perp$, $\forall l \in [m]$. Z předpokladu tvoří $Dg_l(a)$ bázi $A^\perp$ (jelikož jsou LN). Tj. $Df(a)$ lze napsat jako L kombinaci prvků báze, tj. $Dg_l(a)$. $\square$

3.5 Regulární zobrazení

Definice 3.18 (Difeomorfismus)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřené a $f : G \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je difeomorfismus na G, jestliže je f prostá na G, $U = f(G)$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(G)$ a $f^{-1} \in C^1(U)$/

Definice 3.19 (Regulární zobrazení)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je regulární zobrazení, jestliže $f \in \mathcal{C}^1(G)$ a pro každé $a \in G$ a pro každé $a \in G$ platí $J_f(a) \neq 0$.

Věta 3.18 (O lokálním difeomorfismu)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{R}^n$ je třídy $\mathcal{C}^1$. Nechť pro $a \in G$ platí $J_f(a) \neq 0$. Pak existuje $V \subset G$ okolí a takové, že $f|_V$ je difeomorfismus na V.

Důkaz
Definujeme $\Omega = \mathbb{R}^n \times G \subset \mathbb{R}^{2n}$ a $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $F(y, x) = f(x) - y \in \mathbb{C}^1$. Označme $b = f(a)$, pak $F(b, a) = f(a) - b = 0$. Dále Jacobián F podle druhých n souřadnic je roven $J_f(a) \neq 0$. Podle věty o implicitních funkcích existuje U_1 okolí bodu b a V_1 okolí bodu a v $\mathbb{R}^n$, že $\forall y \in U_1\ \exists! x \in V_1 : F(y, x) = 0$. Tj. při označení $x = \varphi(y)$ je $\varphi \in \mathcal{C}^1(U_1)$ a $0 = f(x) - y = f(\varphi(y)) - y \implies \varphi = b^{-1} \in \mathcal{C}^1$. (Na $A = V_1 \cap f^{-1}(U_1)$, což je otevřená množina jako průnik otevřené a vzoru otevřené při spojitém zobrazení. Nyní $f|_A$ je difeomorfismus a zobrazení A na otevřenou U_1.) □

4 Metrické prostory vol. II

4.1 Více o kompaktních a úplných prostorech

Definice 4.1 (Kompaktní prostor podruhé)

(P, ϱ) MP a $K \subset P$. Řekneme, že K je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti bodů z K lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v K.

Prostor P je kompaktní, pokud je jako svá podmnožina ($K = P$) kompaktní.

Definice 4.2 (ε-síť, totálně omezený)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Nechť $\varepsilon > 0$ a $H \subset P$. Řekneme, že H je ε-síť prostoru P, pokud $P \subset \bigcup_{x \in H} B(x, \varepsilon)$.

Řekneme, že P je totálně omezený, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ konečná ε-síť prostoru P.

Věta 4.1 (Omezenost a totální omezenost)

Nechť (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P omezený.

Důkaz
P je TO, a tedy existuje konečná 1-síť $x_1, \dots, x_n$. Označme $d = \max\{\varrho(x_i, x_j) |\ i, j \in [n]\}$. Nechť $x, y \in P$, pak $\exists i, j \in [n] : x \in B(x_i, 1), y \in B(x_j, 1)$. Nyní

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_i) + \varrho(x_i, x_j) + \varrho(x_j, y) < 1 + d + 1.$$

Volme x_0 libovolně, pak $P \subset B(x_0, d + 2)$. □

Věta 4.2 (Kompaktnost a totální omezenost)

Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P totálně omezený.

Důkaz

Sporem: Nechť $\exists\varepsilon > 0\ \forall x_1, \dots, x_n \in P : P \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Zvolme $x_1 \in P$ libovolně. Víme $P \not\subset B(x_1, \varepsilon)$, tedy $\exists x_2 : \varrho(x_2, x_1) \geq \varepsilon$. Indukcí: Mějme $x_1, \dots, x_{n-1}$ tak, že $\varrho(x_i, x_j) \geq \varepsilon\ \forall i \neq j$. Víme $P \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$, tedy $\exists x_n \varrho(x_n, x_i) \geq \varepsilon \forall i \in [n-1]$. Nakonec máme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Z definice kompaktnosti $\exists x_{n_k} \to x \in P$. Ale toto není možné, protože $\varrho(x_i, x_j) \geq \varepsilon \forall i \neq j$. $\square$

Věta 4.3 (Kompaktnost a otevřené pokrytí)

Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí. Tedy platí (pro libovolnou indexovou množinu a G_α otevřené)

$$P \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \implies \exists \textit{konečná } A_0 \subset A : P \subset \bigcup_{\alpha A_0} G_\alpha.$$

Důkaz
„$\implies$“: Tvrdím, že $\exists m \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall x \in P\ \alpha \in A : x \in B(x, \frac{1}{m}) \subset G_\alpha$. To dokážeme sporem: Nechť $\exists x_m \in P\ \forall \alpha \in A :\ B(x_m, \frac{1}{m}) \not\subset G_\alpha$. P je kompaktní, tedy $\exists x_{m_k} \to x$. Z otevřeného pokrytí $\exists \alpha \in A : x \in G_\alpha$, G_α.

G_α je otevřená, tedy $\exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subset G_\alpha$. Zvolme k, aby $\frac{1}{m_k} \in B(x, \frac{\delta}{2})$. Nyní $\forall y \in B(x_{m_k}, \frac{1}{m_k})$ platí

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_{m_k}) + \varrho(x_{m_k}, y) < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{m_k} < \delta \implies y \in B(x, \delta) \implies B(x_{m_k}, \frac{1}{m_k}) \subset G_\alpha, \lightning.$$

Takže tvrzení výše platí. (P, ϱ) je kompaktní, tedy podle věty 11.2 (ve výuce) je totálně omezený. Tedy pro naše $m \in \mathbb{N}$ $\exists$ konečná $\frac{1}{n}$ síť $x_1, \ldots, x_n$. Nyní z toho tvrzení výše $\forall j \in [n]\ \exists G_{\alpha_j} : B(x_j, \frac{1}{m}) \subset G_{\alpha_j}$. Nyní $P \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \frac{1}{n}) \subset \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j}$.

„$\Leftarrow$“: Nechť $\{x_n\} \in P$. Chceme $x_{n_k} \to x \in P$. Označme $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Je-li D konečná, pak se nějaké x_n opakuje a je snadné vybrat konvergentní (= konstantní) podposloupnost.

Dále nechť D je nekonečná. Máme 2 možnosti:

$$A \exists y \in P\ \forall r > 0 : B(y, r) \cap D \text{ je nekonečná, nebo}$$

$$D \forall y \in P\ \exists r_y > 0 : B(y, r_y) \cap D \text{ konečná.}$$

A: $r = 1$: $\exists x_{n_1} \in B(y, 1) \cap D$, $r = \frac{1}{2}$, protože prvků v libovolné kouli je nekonečno, tak $\exists n_2 > n_1, x_{n_2} \in B(y, \frac{1}{2}) \cap D$. Dále pokračujeme indukcí a dostaneme $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty, x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\to} y$.

B: Víme $P \subset \bigcup_{y \in P} B(y, r_y)$ je otevřené pokrytí, tedy $\exists y_1, \ldots, y_n : P \subset \bigcup_{i=1}^n B(y_1, r_{y_i})$. $D = D \cap P \subset \bigcup_{i=1}^n (B(y_i, r_{y_i}) \cap F)$. D je nekonečné, ale podle B je vpravo konečné sjednocení konečných množin, tedy konečná množina. $\lightning$. □

Důsledek (Borelova věta)
Nechť $a, b \in \mathbb{K}$, $a < b$ a $\{I_\alpha\}$ je systém otevřených intervalů. Pak

$$[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \implies \exists A_0 \subset \text{ konečná } [a, b] \subset_{\alpha \in A_0} I_\alpha.$$

Důsledek
Spojitá funkce na $[a, b]$ je omezená.

Důsledek
f je spojitá na $[a, b] \implies f$ je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.

Definice 4.3 (B-C podmínka)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost bodů z P. Řekneme, že x_n splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku (případně, že je cauchyovská), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Definice 4.4 (Úplný prostor)

Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost bodů z P je konvergentní

Věta 4.4 (Cantorova, o uzavřených množinách)

Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a F_n je posloupnost uzavřených neprázdných množin v P tak, že $F_{n+1} \subset F_n$ a $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$. Pak $|\bigcap_{n=1}^\infty F_n| = 1$.

Důkaz (Viz OM2/MetPro/MetPro.pdf Věta 6.1)
Zvolme $x_n \in F_n$. Tvrdíme, že $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská. Ať $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 : \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Nyní

$$\forall m, n \geq n_0 : x_n \in F_n \subset F_{n_0}, x_m \in F_m \subset F_{n_0} : \varrho(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon.$$

P je úplný, a tedy $x_n \to x \in P$. Nechť $j \in \mathbb{N}$ je pevné a $n \geq j$, pak $x_n \in F_n \subset F_j$ a $x_n \to x$, tedy (F_j je uzavřené) $x \in F_j \forall j$, tedy $x \in \bigcap_{j=1}^\infty F_j$. Naopak pokud $x, y \in \bigcap_{j=1}^\infty F_j$, pak zvolíme j tak, aby $\operatorname{diam} F_j < \varrho(x, y)$, tedy buď $x \notin F_j$ nebo $y \notin F_j$. $\square$

Věta 4.5 (O totální omezenosti a úplnosti)

Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když je totálně omezený a úplný.

Důkaz
$\Longrightarrow$ už máme hotové z věty výše a věty Kompaktnost a totální omezenost. $\Leftarrow$: Nechť $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset P$, chceme $\exists x_{n_k} \to x$. P je totálně omezený, tedy existuje konečná 1-síť $P \subset \bigcup_{i=1}^{h_1} B(s_i, 1)$. $\{x_n\}$ je nekonečná $\Longrightarrow$ $\exists$ kulička $B_1 = B(s_i, 1)$ tak, že $|\{x_n | x_n \in B_1\}| = +\infty$. Zvolme $x_{n_1} \in B_1$.

Dále indukcí: Mějme $B_1, \ldots, B_{k-1}$ kuličky o poloměrech $1, \ldots, \frac{1}{k-1}$ tak, že pro $A_{k-1} = B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}$ platí $|\{x_n|\ x_n \in A_{k-1}\}| = +\infty$, a mějme $n_1 < \ldots < n_{k-1}$ tak, že $x_{n_j} \in A_j$, $\forall j \in [k-1]$. P je totálně omezený $\Longrightarrow$ $\exists$ konečná $\frac{1}{k}$-síť $A_{k-1} \subset P \subset \bigcup_{i=1}^{h_k} B(s_i, \frac{1}{k})$. V A_{k-1} je nekonečně mnoho x_n, tedy $\exists B_k = B(s_i, \frac{1}{k})$, že pro $A_k = A_{k-1} \cap B_k$ platí $|\{x_n | x_n \in A_k\}| = +\infty$. Dále zvolme n_k tak, aby $n_k > n_{k-1}$ a $x_{n_k} \in A_k$.

x_{n_k} je cauchyovská, neboť pro $\varepsilon > 0\ \exists n_0 : \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, nechť $k, l \geq n_0$, pak $x_{n_k} \in A_k \subset A_{n_0}$ a $x_{n_l} \in A_l \subset A_{n_0}$, tedy jelikož $A_{n_0} \subset B_{n_0}$, $\varrho(x_{n_k}, x_{n_l}) < \frac{2}{n_0} < 2\varepsilon$. P je úplný, tedy existuje x tak, že $x_{n_k} \to x$. $\square$

Věta 4.6 (O zúplnění metrického prostoru)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak existuje úplný metrický prostor $(\tilde{P}, \tilde{\varrho})$ tak, že $P \subset \tilde{P}$ a $\forall x, y \in P$ platí $\varrho(x, y) = \tilde{\varrho}(x, y)$.

Důkaz
Bez důkazu. □

Věta 4.7 (Arzela-Ascoli)

Nechť $A \subset C([0,1])$. Pak $\overline{A}$ je kompaktní právě tehdy, když jsou funkce z A stejně omezené a stejně stejnoměrně spojité. Tedy pokud $\exists K > 0$:

$$\forall f \in A \ \forall x \in [0,1] : |f(x)| \leq K,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in [0,1] \ \forall f \in A : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Důkaz

$\implies$: $\overline{A}$ je kompaktní $\implies$ $\overline{A}$ je omezená $\implies$ A je omezená $\subset B(0,K)$. Tedy $\forall f \in A\ \forall x \in [0,1] : |f(x)| \leq K$.

$\overline{A}$ je kompaktní $\implies$ $\overline{A}$ je totálně omezená. Nechť $\varepsilon > 0$ $\implies$ $\exists$konečná ε-síť $\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(f_i, \varepsilon)$. Funkce f_i je spojitá na $[0,1]$ $\implies$ f je stejnoměrně spojitá na $[0,1]$. Tedy

$$\exists \delta_i > 0\ \forall x, y : |x-y| < \delta_i \implies |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon.$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$. Nechť $f \in A$, $x, y \in [0,1]$: $|x-y| < \delta$. K tomuto $f \in A$ najdu f_i, aby $f \in B(f_i, \varepsilon)$. Potom

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

$\Leftarrow$: Chceme dokázat, že pro $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{A}\ \exists f_{n+k} \to f$. 1. krok, volba C: Nechť $m \in \mathbb{N}$. Ze stejnoměrné spojitosti pro $\varepsilon = \frac{1}{m}$

$$\exists \delta_m\ \forall x, y\ \forall n : |x-y| < \delta_m \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon = \frac{1}{m}.$$

Nyní $[0,1]$ pokryjeme $[0,1] \subset \bigcup_{j=1}^{k_m} B(c_j^m, \delta_m)$. Položme $C = \left\{C_j^m | m \in \mathbb{N}, j \in [k_m]\right\}$. C je zřejmě spočetné (spočetné sjednocení konečných).

2. krok, volba f_{n_k}, aby $\forall c \in C : f_{n_k}(c)$ konverguje. C je spočetná, tedy $C = \{c_i, i \in \mathbb{N}\}$. Ze stejné omezenosti $|f_n(c_1)| \leq K$, tedy existuje podposloupnost $f_{n_{k,1}}(c_1)$ posloupnosti $f_{n_k}(c_1)$, která konverguje. Nyní ze stejné omezenosti víme, že $|f_{n_{k,1}}(c_2)| \leq K$, tedy opět vybereme podposloupnost $f_{n_{k,2}}(c_2)$, která konverguje. Dále pokračujeme indukcí.

Položme $f_{n_k} = f_{n_{k,k}}$. Tato vybraná podposloupnost z f_n konverguje ve všech bodech C.

3. krok, f_{n_k} je cauchyovská. Nechť $\varepsilon >\ 0$, k čemuž nalezneme $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Z 1. kroku máme δ_m a $c_1^m, \dots, c_{k_m}^m$. Z 2. kroku víme, že $f_{n_k}(c_j^m) \to \dots (c_j^m)$, $\forall j \in [k_m]$. Tedy z BC podmínky v těchto bodech

$$\exists k_0\ \forall k, l \geq k_0 : |f_{n_k}(c_j^m) - f_{n_k}(c_j^m)| < \varepsilon, \qquad \forall j \in [k_m].$$

Nechť nyní $x \in [0,1]$. Nalezneme $c_j^m \cdot |x - c_j^m| < \delta_m$:

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| \leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(c_j^m)| + |f_{n_k}(c_j^m) - f_{n_l}(c_j^m)| + |f_{n_l} - f_{n_l}(c_j^m)| < \frac{1}{m} + \varepsilon + \frac{1}{m} \leq 3\varepsilon.$$

Tedy f_{n_k} je cauchyovská a jelikož $C([0,1])$ je úplný, tak $\exists f \in C([0,1]) f_{n_k} \to f$. Nyní z uzavřenosti $\overline{A}$ je $f \in \overline{A}$. $\square$

4.2 Prostory L^p

Poznámka
Většina vět této podsekce i s důkazy se dá najít v W. Radim – Analýza v reálném a komplexním oboru.

Poznámka (Slovníček pro MIT a slabší povahy)
„Tyto skupiny nejsou totéž."

- $\int_x f d\mu$ čteme $(R)\int_0^1 f(x)dx$.
- f je měřitelná čteme f je spojitá.
- $f = 0$, μ-s. v. čteme jako $f = 0$ všude.
- $(X, \mathcal{A}, \mu)$ čteme jako $([0,1], dx)$.

Věta 4.8 (Jensenova nerovnost)

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je pravděpodobnostní prostor (μ nezáporná), $f \in L^1(\mu)$, $a, b \in [-\infty, \infty]$ a $f : X \to (a, b)$. Je-li $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konvexní funkce, pak

$$\varphi(\int_X f d\mu) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu.$$

Důkaz
„Integrál je vlastně průměr a konvexní funkce je v průměru menší, než průměr jejich hodnot."

Označme $t = \int_x f d\mu$. $\mu(X) = 1 \implies a < t < b$. φ je konvexní $\implies$

$$\implies \exists \beta \in \mathbb{R} : \varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s - t) \qquad \forall s \in (a, b).$$

Toto použijeme pro $s = f(x)$:

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + \beta \cdot (f(x) - t).$$

f je měřitelná a φ spojitá (neboť je konvexní) $\implies \varphi(f(x))$ je měřitelná.

Zintegrujeme:

$$\int_X \varphi(f(x))\mu(x) \geq \int_X \varphi(t)d\mu(x) + \beta\int_X (f(x) - t)d\mu(x),$$

$$\int_X \varphi(f(x))\mu(x) \geq \varphi(t) + \beta \cdot 0 = \varphi(t).$$

$\square$

Příklad
Při $f(x_i) = a_i \in \mathbb{R}$, $\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\delta_{x_i}$, $\varphi = \exp$ dostaneme z minulé věty AG nerovnost.

Příklad

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $a, b \geq 0$.

Řešení

$$\exp(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y) \leq \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y,$$

$$e^{\frac{x}{p}} \cdot e^{\frac{y}{q}} \leq \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y.$$

K zadanému $a, b > 0$ vezmeme x, y aby $e^{\frac{x}{p}} = a$ a $e^{\frac{y}{q}} = b$. Pak

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Pro $a = 0$ nebo $b = 0$ je důkaz triviální.

Definice 4.5 (Sdružený index)

Nechť $1 < p < \infty$, pak číslo q splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nazveme sdružení. Pro $p = 1$ definujeme $q = \infty$ a opačně.

Věta 4.9 (Hölderova a Minkowského)

Nechť $X, \mathcal{A}, \mu$ je prostor s mírou, $1 < p < \infty$, q je sdružený exponent k p a $f, g : X \to [0, \infty]$ jsou měřitelné funkce. Potom platí Hölderova nerovnost:

$$\int_X f \cdot g dx \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

a Minkowského nerovnost

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Důkaz
Označme $A = \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ a $B = \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$. Pokud $A = 0$ (nebo $B = 0$), pak $f = 0$ skoro všude a nerovnost platí. Pokud $A = \infty$ nebo $B = \infty$, pak nerovnost také triviálně platí.

Položme $F(x) = \frac{1}{A} f(x)$ a $G(x) = \frac{1}{B} \cdot g(x)$. Pak

$$\int_X F(x)^p d\mu = \frac{1}{A^p} \int_X f(x)^p d\mu = 1, \qquad \int_X G(x)^q d\mu = 1.$$

Z $F(x) \cdot G(x) \leq \frac{1}{p}(F(x))^p + \frac{1}{q}(G(x))^q$ (Jangova? nerovnost: $\forall a, b \geq 0 : ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$) dostaneme:

$$\int_X F(x)G(x)d\mu(x) \leq \frac{1}{p}\int_X (F(x))^p + \frac{1}{q}\int_X (G(x))^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad / \cdot AB$$

$$\int_X f(x)g(x)d\mu(x) \leq AB = \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$$\int_X (f+g)^p d\mu = \int_X f \cdot (f+g)^{p-1} + g \cdot (f+g)^{p-1} d\mu \leq$$

$$\leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f \;\; = g)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left[\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right] \cdot \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Je-li $\int_X (f \;\; + g)^p d\mu \neq 0$ (triviální) a $\neq \infty$ vydělíme

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{p=1-\frac{1}{q}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pokud je integrál výše roven ∞, pak využijeme konvexity funkce $t \mapsto t^p$:

$$\infty = \int_X \left(\frac{f(x)+g(x)}{2}\right)^p d\mu \leq \int_X \left(\frac{f(x)^p}{2} + \frac{g(x)^p}{2}\right) d\mu \implies \int f^p = \infty \vee \int g^p = \infty.$$

□

Definice 4.6 (L^p prostory)

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $1 \leq p < \infty$. Definujeme prostor L^p jako

$$L^p(X, \mu) := \{f : X \to \mathbb{R} | ||f||_{L^p} < \infty\}, \text{ kde } ||f||_{L^p} := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nechť $g : X \to [0, \infty]$ je měřitelná. Esenciální supremum g definujeme jako

$$\operatorname{esssup} g := \inf \{\alpha | \mu(q > \alpha) = 0\}.$$

(Pro $p = \infty$) tedy definujeme

$$L^\infty(X, \mu) := \{f : X \to \mathbb{R} | ||f||_{L^p} < \infty\}, \text{ kde } ||f||_{L^\infty} := \operatorname{esssup}_x |f|.$$

Věta 4.10 (Trojúhelníková nerovnost v L^p)

Nechť $1 \le p \le \infty$. *Pak pro* $f, g \in L^p(X, \mu)$ *platí*

$$||f + g||_{L^p} \le ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}.$$

Důkaz

Pro $1 \le p < \infty$ viz Minkowski: $f(x) = a(x) - c(x)$, $g(x) = c(x) - b(x)$, $f(x) + g(x) = a(x) - b(x)$:

$$\left(\int_X |a(x) - b(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_X |a(x) - c(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |c(x) - b(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pro $p = \infty$: z definice esssup $\exists N_1, N_2, N_3$, $\mu(N_1) = \mu(N_2) = \mu(N_3) = 0$, $(N = N_1 \cup N_2 \cup N_3)$

$$||f||_{L^\infty} = \sup_{x \in X \setminus N_1} |f(x)|, ||g||_{L^\infty} = \sup_{X \setminus N_2} |g(x)|, ||f + g||_{L^\infty} = \sup_{x \in X \setminus N_3} |f(x) + g(x)|.$$

$$\sup_{x \in X \setminus N} |f(x) + g(x)| \le \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| + |g(x)| \le \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| + \sup_{x \in X \setminus N} |g(x)|.$$

□

Poznámka

Pokud budeme uvažovat L_p jako jeho kvocient podle rovnosti skoro všude, pak je $|| \cdot ||_{L^p}$ norma a L^p je metrický prostor s metrikou.

Věta 4.11 (Úplnost L^p prostorů)

Nechť $1 \le p \le \infty$. *Pak je prostor* $L^p(X, \mu)$ *úplný.*

Důkaz
$1 \leq p < \infty$. Mějme f_n cacuhyovskou nerovnost v L^p. Tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m, n \geq n_0 : \left(\int_X |f_n(x) - f_m(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Najdeme $f(x)$ jako bodovou limitu (skoro všude) vhodně vybrané podposloupnost. Z cauchyovskosti $\exists k_1 < k_2 < \ldots < k_j < \ldots$ tak, že

$$\forall j : \int_X |f_{k_j}(x) - f_{k_{j+1}}(x)|^p d\mu \leq \frac{1}{2^j}.$$

Položme $g_n(x) = \sum_{j=1}^n |f_{k_j}(x) - f_{k_{j+1}(x)}|$ a $g(x) = \sum_{j=1}^\infty |f_{k_j}(x) - f_{k_{j+1}}(x)|$. Pak z Minkowského nerovnosti $||g_n||_{L^p} \leq \sum_{j=1}^n ||f_{k_j} - f_{k_{j+1}}||_{L^p} \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2^j}\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p$.

Z Fatouova lemmatu

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} g_n^p d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n^p(x) d\mu \leq C_p.$$

Tedy řada $\sum_{j=1}^\infty (f_{k_j}(x) - f_{k_{j+1}(x)})$ konverguje absolutně skoro všude $\implies$ funkce $f(x) = f_{k_1}(x) - \sum_{j=1}^\infty (f_{k_j} - f_{k_{j+1}})$ je definována skoro všude. Nyní

$$f_{k_n}(x) = f_{k_1}(x) - \sum_{j=1}^{n-1} (-f_{k_j}(x) - f_{k_j}(x)) \to f(x) \text{ skoro všude.}$$

Zbývá $f \in L^p$ a $f_n \stackrel{L^p}{\to} f$. Víme, že f_n je cauchyovská. Z Fatouova lemmatu

$$\int_X |f(x) - f_n(x)|^p d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} |f_{k_n} - f_m|^p d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_{k_n} - f_m|^p d\mu \leq \varepsilon \implies$$

$$\implies f - f_m \in L^p \implies (f - f_m) + f_m \in L^p \wedge \varrho(f, f_m) \leq \varepsilon^{\frac{1}{p}}.$$

Tedy $f_n \to f$. □

Důkaz ($p = \infty$, nebude na zkoušce)
Nechť $f_n \in L^\infty(X, \mu)$ je cauchyovská posloupnost. Pak existují N_n, $\mu(N_n)$, $||f_n||_{L^\infty} = \sup_{x \in X \setminus N_n} |f_n(x)| = \sup_{x \setminus N} |f_n(x)|$.

Dokazovali jsme, že $C([0,1])$ je úplný metrický prostor. Analogicky to lze dokázat zde. □

4.3 Husté a řídké množiny

Definice 4.7 (Hustá množina)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset P$ je hustá, pokud $\overline{A} = P$.

Věta 4.12 (Charakterizace hustých množin)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom je A hustá v P právě tehdy, když pro každou otevřenou neprázdnou $G \subset P$ platí $G \cap A \neq \emptyset$.

Důkaz

„$\implies$“: Sporem: Nechť $\exists G \subset P$ otevřená, $G \cap A = \emptyset$, tedy $\exists B(x,r) \subset G$. Pak $\operatorname{dist}(x, A) \geq r \implies x \notin \overline{A}$. ↯.

„$\Leftarrow$“: Sporem: A není hustá $\implies P \setminus \overline{A} \neq \emptyset$. $G = P \setminus \overline{A}$ je otevřená. Podle předpokladu $(P \setminus \overline{A}) \cap A \neq \emptyset$. □

Důsledek

Nechť $G_1, G_2 \subset P$ jsou otevřené a husté v (P, ϱ). Pak $G_1 \cap G_2$ je otevřená a hustá v P.

Důkaz

Nechť $G \subset P$, $G \neq \emptyset$ je otevřená, potom $G_1 \cap G \neq \emptyset$ otevřená, $G_2 \cap G_1 \cap G \neq \emptyset$, tedy $G_1 \cap G_2$ je hustá. (Libovolné G tedy protne $G_1 \cap G_2$.) □

Definice 4.8 (Řídká množina)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset P$ je řídká, jestliže je $P \setminus \overline{A}$ hustá.

Věta 4.13 (Vlastnosti řídkých množin)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $A, B \subset P$. Potom

1. *Je-li A řídká v P a $B \subset A$, pak je také B řídká v P.*
2. *Jsou-li A, B řídké v P, pak $A \cup B$ je řídké v P.*
3. *A je řídká v $P \Leftrightarrow \overline{A}$ je řídká v P.*

Důkaz

1. $B \subset A \implies \overline{B} \subset \overline{A} \implies P \setminus \overline{A} \subset P \setminus \overline{B} \implies P = \overline{P \setminus \overline{A}} \subset \overline{P \setminus \overline{B}} \implies P = \overline{P \setminus \overline{B}}$.

3. Víme $\overline{\overline{A}} = \overline{P} \implies P \setminus \overline{A} = P \setminus \overline{\overline{A}} \implies \overline{\setminus \overline{A}} = \overline{\setminus \overline{\overline{A}}}$.

2. $\overline{A \cup B} = \{x | \varrho(x, A \subset B) = 0\} = \{x | \varrho(x, A) = 0\} \cup \{x | \varrho(x, B) = 0\} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Tedy $P \setminus \overline{A \cup B} = P \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) = (P \setminus \overline{A}) \cup (P \setminus \overline{B})$. Tato množina už je zřejmě hustá (průnik dvou otevřených hustých množin), tedy $A \cup B$ je řídká. □

Definice 4.9 (Množiny 1. kategorie a 2. kategorie)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset P$ je 1. kategorie, jestliže existují řídké množiny A_n tak, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Řekneme, že $C \subset P$ je 2. kategorie, jestliže C není 1. kategorie.

Věta 4.14 (Baire)

Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor. Nechť $G_{n,m} \in \mathbb{N}$ jsou otevřené a husté v (P, ϱ). Pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ je hustá v (P, ϱ).

Důkaz
Příště. □

Důsledek
Úplný metrický prostor není 1. kategorie sám v sobě.

Důkaz
Sporem nechť $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n řídké. Pak $P \backslash \overline{A_n}$ jsou husté a otevřené $\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} P \backslash \overline{A_n} \neq \emptyset$. Ale $\emptyset = P \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus A_n) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus \overline{A_n})$. ↯. □

Důkaz (Bairova věta (o kategoriích))
Podle věty výše stačí ukázat, že $\forall G \subset P$ otevřenou $G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$. Máme G otevřenou a G_1 je hustá tedy $\exists B(x_1, 2r_1) \subset G_1 \cap G$, $r_1 < 1$. Tedy $\overline{B(x_1, r_1)} \subset G_1 \cap G$.

G_2 je hustá, $B(x_1, r_1)$ otevřená, tedy $\exists B(x_2, 2r_2) \subset G_2 \cap B(x_1, r_1) \subset G_2 \cap G_1 \cap G$.

Dále indukcí. (P, ϱ) je úplný, $\overline{B(x_k, r_k)}$ jsou uzavřené, $\operatorname{diam}_{k \to \infty} \overline{B(x_k, r_k)} = 0$. Podle věty ještě výše $\exists a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B(x_k, r_k)} \subset \bigcap G_k \cap G \neq \emptyset$. Tedy $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ je hustá. □

Věta 4.15 (O nediferencovatelné funkce)

Existuje spojitá funkce $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, která nemá derivaci v žádném bodě z $(0, 1)$.

Důkaz
Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$A_n := \{f \in C([0, 1]) | \exists t \in [0, 1], \forall s \in [0, 1] : |f(t) - f(s)| \leq n \cdot |t - s|\}.$$

Plán: Dokážeme, že A_n je uzavřená. Dále, že f má derivaci v nějakém bodě t, pak $\exists ni$: $f \in A_n$. Potom dokážeme A_n řídká. Potom již $Dif \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, tedy Dif jsou 1. kategorie $\implies$ (z důsledku Baira) $\exists f \in C([0, 1]) \setminus Dif$. □

Důkaz (1. krok – A_n uzavřená)
Podle věty ze dříve stačí ukázat $f_k \in A_n$, $f_k \to f \implies f \in A_n$.

$$f_k \in A_n \implies \exists t_k \in [0,1]\ \forall s \in [0,1] : |f_k(t_k) - f_k(s)| \leq n|t_k - s|.$$

Podle Weistrassovy věty $\exists$ podposloupnost $t_{k_j} \to t$, označme ji t_k.

Nyní $\forall s \in [0,1]$:

$$|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f_k(t)| + |f_k(t) - f_k(t_k)| + |f_k(t_k) - f_k(s)| + |f_k(s) - f(s)| \leq$$

To odhadneme podle nerovnosti výše (jednou s $s = s$ a jednou s $s = t$):

$$\leq |f(t) - f_k(t)| + n \cdot |t_k - t| + n \cdot |t_k - t| + |f_k(s) - f(s)|$$

$$\lim_{k \to \infty} |f(t) - f(s)| \leq 0 + n \cdot 0 + n \cdot |t - s| + 0.$$

Tedy $f \in A_n$. □

Důkaz (2. krok – derivovatelné jsou v A_n)
Mějme $f \in C([0,1])$, $\exists f'(t) = a$. Z definice derivace pro

$$\varepsilon = 1\ \exists \delta > 0\ \forall s \in (t - \delta, t + \delta) : \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - a \right| < 1$$

$$\implies \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \right| \leq \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - a \right| + |a| \leq 1 + |a| \implies$$

$$\implies |f(t) - f(s)| \leq (1 + |a|) \cdot |t - s|.$$

Dále $\forall s \in [0,1] \setminus (t - \delta, t + \delta)$:

$$|f(t) - f(s)| \leq 2 \sup_{[0,1]} f \leq \frac{2 \sup f}{\delta} |t - p|.$$

Zvolme $n >\ \max\left\{|a| + 1, \frac{2 \sup f}{\delta}\right\}$, pak $f \in A_n$. □

Důkaz (3. krok – A_n řídká)
Chceme $P \setminus \overline{A_n} = P \setminus A_n$ je hustá. Podle věty výše tedy stačí ukázat, že

$$\forall g \in C([0,1])\ \forall r \in 0 (P \setminus A_n) \cap B(g,r) \neq \emptyset.$$

g je spojitá $\implies$ stejnoměrně spojitá na $[0,1]$. Tedy k zadanému r

$$\exists \delta > 0 \forall x, y \in [0,1] : |x-y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \frac{r}{10}.$$

Tím jsme omezili „kmitání“ g, aby nám nevyrušilo následné přičtení kmitající funkce: Definujme funkci p : /\/\/\ (zubatě kmitající funkce) tak, aby $p' = \pm c$, kde $c = \max\left\{3n, \frac{r}{2\delta}\right\}$. Definujeme $f(x) = g(x) + p(x)$. Zřejmě $f \in C([0,1])$ a $f \in B(g,r)$.

Tvrdíme $f \notin A_n$: Pro spor nechť

$$\exists t \in [0,1]\ \forall s \in [0,1] : |f(x) - f(t)| \leq n \cdot |t-s|.$$

K tomuto t nalezneme s „na stejném zubu“, aby $|p(s) - p(t)| = \frac{r}{2}$, $\left|\frac{p(s)-p(t)}{s-t}\right| = c$ a $|s-t| \leq \delta$.

Nyní $\frac{r}{2} = |p(s) - p(t)| = c \cdot |t-s| \geq 3n|t-s|$.

$$|f(t) - f(s)| \geq |p(t) - p(s)| - |g(t) - g(s)| \geq \frac{r}{2} - \frac{r}{10} = \frac{2}{5}r \geq \frac{2}{5}6n|t-s| > n \cdot |t-s|.$$

□

5 Hilbertovy prostory

Poznámka
Většina vět této sekce i s důkazy se dá najít v knize W. Rudim: Analýza v reálném a komplexním oboru.

5.1 Základní definice

Definice 5.1

Nechť H je reálný vektorový prostor. Řekneme, že H je prostor se skalárním součinem, jestliže existuje zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^2 \to \mathbb{R}$ takové, že

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in H$,
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in H$,
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in H\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

- $\langle x, x\rangle \geq 0, \forall x \in H$,
- $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definujeme $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Řekneme, že prvek $x \in H$ je ortogonální k $y \in H$, značeno $x \perp y$, pokud $\langle x, y\rangle = 0$.

Věta 5.1 (Schwarzova nerovnost)

Pro každé $x, y \in H$ platí $\langle x, y\rangle \leq ||x|| \cdot ||y||$.

Důkaz

$\forall t \in \mathbb{R}$ platí $h(t) =< x - ty, x - ty >\geq 0$.

$$h(t) =< x, x - ty > - < ty, x - ty >=< x, x > -t < x, y > -t < y, x > +t < y, y >=$$

$$= ||x||^2 - 2t < x, y > +t^2||y||^2 \geq 0.$$

Toto je nezáporná kvadratická funkce s determinantem $4 < x, y >^2 -4||x||^2 \cdot ||y||^2 > 0$, tedy $||x||^2 \cdot ||y||^2 \geq< x, y >^2$. □

Věta 5.2 (Trojúhelníková nerovnost)

Pro každé $x, y \in H$ platí $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$. Speciálně $(H, || \cdot ||)$ tvoří metrický prostor.

Důkaz

$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle =< x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y >\leq$$
$$\leq ||x||^2 + ||x|| \cdot ||y|| + ||y|| \cdot ||x|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2.$$

□

Definice 5.2

Nechť H je prostor se skalárním součinem. Řekneme, že H je Hilbertův prostor, pokud je metrický prostor $(H, || \cdot ||)$ úplný.

Věta 5.3 (Spojitost skalárního součinu)

Nechť H je Hilbertův prostor, potom jsou zobrazení $x \mapsto< x, y >$ a $x \mapsto ||x||$ spojitá na H.

Důkaz

$| < x_1, y > - < x_2, y > | = | < x_1 - x_2, y > | \leq ||x_1 - x_2|| \cdot ||y|| \implies$ spojitost.

Druhá část: Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $||x_1||-||x_2|| \leq ||x_1-x_2||$ a $||x_2||-||x_1|| \leq ||x_2 - x_1|| \implies$ spojitost $|| \cdot ||$. □

Definice 5.3

Nechť H je Hilbertův prostor a $E \subset H$. Řekneme, že E je konvexní, jestliže $\forall x, y \in E$ $\forall t \in [0,1]$ platí $t \cdot x + (1-t) \cdot y \in E$.

Věta 5.4 (O existenci prvku s nejmenší normou)

Nechť H je Hilbertův prostor a $E \subset H$ je konvexní, neprázdná a uzavřená. Potom existuje právě jeden prvek E s nejmenší normou.

Důkaz

Platí tzv. rovnoběžníkové pravidlo (dokážeme rozepsáním přes skalární součin, platí pouze pro normy ze skalárního součinu):

$$2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x+y||^2 + ||x-y||^2$$

Označme $\delta = \inf_{y \in E} ||y||$. Jednoznačnost nejbližšího prvku: Nechť $y_1, y_2 \in E$, $||y_1|| = ||y_2|| = \delta$.

$$||y_1 - y_2||^2 = 2 \cdot ||y_1||^2 + 2 \cdot ||y_2||^2 - 4 \cdot ||\underbrace{\frac{y_1 + y_2}{2}}_{\in E}||^2 \leq 2 \cdot ||y_1||^2 + 2||y_2||^2 - 4\delta^2 = 0 \implies y_1 = y_2.$$

Existence: Mějme $y_n \in E$, že $||y_n|| \overset{n\to\infty}{\to} \delta$. $||y_n - y_m||^2 = 2 \cdot ||y_n||^2 + 2 \cdot ||y_m||^2 - 4||\frac{y_n + y_m}{2}||^2 \leq 2||y_n||^2 - 2||y_m||^2 - 4\delta^2 \implies y_n$ je cauchyovská posloupnost. H je úplný, takže $\exists y \in H : y_n \to y$. E je uzavřená, tedy $y \in E$. □

Definice 5.4

Nechť $M \subset H$ je lineární podprostor Hilbertova prostoru H. Definujeme ortogonální podprostor $M^\perp = \{y \in H | \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in M\}$.

Věta 5.5 (O projekci na podprostor)

Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H.

1. *Každý prvek z H má jednoznačný rozklad $x = P(x) + Q(x)$ tak, že $P(x) \in M$ a $Q(x) \in M^\perp$.*
2. *$P(x)$ je bod z M nejbližší k x, $Q(x)$ je bod z $M^\perp$ nejbližší k x.*
3. *Zobrazení $P : H \to M$ a $Q : H \to M^\perp$ jsou lineární.*
4. *$||x||^2 = ||P(x)||^2 + ||Q(x)||^2$.*

Důkaz
1. Jednoznačnost: Nechť $x = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, $x_1, x_2 \in M$ a $y_1, y_2 \in M^\perp$

$$\implies M \ni x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \in M^\perp \implies 0 = x_1 - x_2 = y_2 - y_1.$$

Existence: $x + M$ je uzavřený podprostor $\implies$ podle předchozí věty $\exists Q(x) \in x + M$ s nejmenší normou. Položme $P(x) = x - Q(x)$, tj. $P(x) + Q(x) = x$.

$$P(x) \in M : Q(x) \in x + M \implies Q(x) - x \in M \implies P(x) \in M.$$

$Q(x) \in M^\perp$: Neboli $\forall y \in M$: $\langle y, Q(x) \rangle = 0$. BÚNO $y \in M$ a $||y|| = 1$. $Q(x)$ je nejbližší v $x + M \implies$

$$||Q(x)||^2 \leq ||Q(x) - \alpha y||^2 = \langle Q(x) - \alpha y, Q(x) - \alpha y \rangle = ||Q(x)||^2 - 2\alpha \langle Q(x), y \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle$$

$$\implies 0 \leq -2\alpha \langle Q(x), y \rangle + \alpha^2.$$

Pro $\alpha = \langle Q(x), y \rangle$ je $0 \leq -\langle Q(x), y \rangle^2$, tedy $\langle Q(x), y \rangle = 0$.

2. Nechť $y \in M$ je libovolné. Pak

$$||x - y||^2 = ||Q(x) + P(x) - y||^2 = \langle Q(x) + P(x) - y, Q(x) + P(x) - y \rangle =$$

$$= ||Q(x)||^2 + ||P(x) - y||^2,$$

takže je to nejmenší právě tehdy, když $y = P(x)$. Stejně se ověří i $y = Q(x)$ pro libovolné $y \in M^\perp$.

4. $||x||^2 =$ skalární součiny, jeden je nulový $= ||P(x)||^2 + ||Q(x)||^2$.

3. Chceme $P(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot P(x) + \beta \cdot P(y)$. $x = P(x) + Q(x)$, $y = P(y) + Q(y)$. $\alpha x + \beta y = P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y)$. Odečteme α a β násobek rovnic od třetí, tím dostaneme

$$M^\perp \ni \alpha Q(x) + \beta Q(y) - Q(\alpha x + \beta y) = P(\alpha x + \beta y) - \alpha P(x) - \beta P(y) \in M.$$

A protože $M \cap M^\perp = \{\emptyset\}$, tak se to rovná 0, tedy

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y), Q(\alpha x + \beta y) = \alpha Q(x) + \beta Q(y).$$

$\square$

Důsledek
Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H a $M \neq H$. Pak existuje $y \in M^\perp$, $y \neq 0$.

Věta 5.6 (O reprezentaci lineárního funkcionálu)

Nechť H je Hilbertův prostor a $L : H \to \mathbb{R}$ je spojité lineární zobrazení. Pak existuje právě *jedno $y \in H$ tak, že $L(x) = \langle x, y \rangle$.*

Důkaz
Jednoznačnost: Nechť $L(x) = \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$. Pak $\forall x : \langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0 \implies ||y_1 - y_2|| = 0$.

Existence: Pro $L = 0$ zvolme $y = 0$. Jinak mějme $M = \{x \in H |\ L(x) = 0\}$. Toto je lineární podprostor a je uzavřený ($M = L^{-1}(\{0\})$). Podle předchozího důsledku $\exists a \in M^{\perp}$, $a \neq 0$. BÚNO $||a|| = 1$. Položme $z = xL(a) - L(x)a$, pak $L(z) = L(x) \cdot L(a) - L(x) \cdot L(a) = 0 \implies z \in M$. Nyní $0 = \langle a, z \rangle = \langle a, xL(a) - L(x)a \rangle = \langle a, x \rangle L(a) - L(x) \langle a, a \rangle \implies L(x) = \langle a, x \rangle L(a) = \langle x, aL(a) \rangle$. □

5.2 Rozklad do Schauderovy báze

Definice 5.5 (Ortogonální a ortonormální množina, Fourierovy koeficienty)

Nechť H je Hilbertův prostor a A je indexová množina. Množina prvků $u_\alpha \in H$, kde $\alpha \in A$, se nazývá ortogonální, pokud je $\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = 0\ \forall \alpha, \beta \in A$ různé.

Ortogonální množina se nazývá ortonormální, pokud navíc $||u_\alpha|| = 1$, $\forall \alpha \in A$.

Jestliže $\{u_\alpha | \alpha \in A\}$ je ortonormální množina, pak pro každé $x \in H$ definujeme Fourierovy x vzhledem k u_α jako

$$\hat{x}(a) = \langle x, u_\alpha \rangle .$$

Věta 5.7 (O konečné ortonormální množině)

Nechť H je Hilbertův prostor, $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je ortonormální množina a $F \subset A$ je konečná množina. Označme $M_F = \operatorname{span}\{u_\alpha | \alpha \in F\}$.

1. *Nechť $\varphi : A \to \mathbb{R}$ je 0 mimo F. Pro vektor $y = \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) \cdot u_\alpha$ platí $\hat{y}(\alpha) = \varphi(\alpha)$ a $||y||^2 = \sum_{\alpha \in F} |\varphi(\alpha)|^2$.*
2. *Je-li $x \in H$ a $s_F(x) = \sum_{\alpha \in F} \hat{x}(\alpha) \cdot u_\alpha$, pak $s_F(x) = P(x)$ je projekce na M. Navíc platí $\sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq ||x||^2$ (Besselova nerovnost).*

Důkaz
1. $\hat{(\alpha)} = \langle y, u_\alpha \rangle = \left\langle \sum_{\beta\in F} \varphi(\beta) u_\beta, u_\alpha \right\rangle =$ (jelikož suma je konečná)

$$= \sum_{\beta\in F} \varphi(\beta) \cdot \langle u_\beta, u_\alpha \rangle = \varphi(\alpha).$$

$$||y||^2 = \left\langle \sum_{\beta\in F} \varphi(\beta) u_\beta, \sum_{\alpha\in F} \varphi(\alpha) u_\alpha \right\rangle = \sum_{\alpha,\beta\in F} \varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)\cdot\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = \sum_{\alpha\in F} (\varphi(\alpha))^2.$$

2. $\langle x - s_F(x), u_\alpha \rangle = \langle x, u_\alpha \rangle - \left\langle \sum_{\beta\in F} \hat{x}(\beta)\cdot u_\beta, u_\alpha \right\rangle = \langle x, u_\alpha\rangle - \hat{x}(\alpha) = 0$. Tedy $x - s_F(x) \in M_F^\perp$.

Nechť $y \in M_F$: $||x-y||^2 = \langle x - s_f + s_f - y, x - s_F + \ s_F - y \rangle = \langle x - s_F, x - s_F \rangle + 2 \cdot \langle x - s_F, s_F - y \rangle + \ \langle s_F - y, s_F - y \rangle = ||x - s_F||^2 + ||s_F - y|| \geq ||x - s_F||^2$. Tedy $s_F(x)$ je nejbližší k x v M_F, tedy projekce.

Pro $y = 0$ máme $||x||^2 \geq ||x - s_F||^2 + ||s_F||^2 \geq ||s_F||^2 = \sum_{\alpha\in F} |\hat{x}(\alpha)|^2$. □

Definice 5.6 (Izometrie)

Nechť (X, ϱ) a (Y, τ) jsou MP. Pak $f : X \to Y$ je izometrie, když $\forall x_1, x_2 \in X : \varrho(x_1, x_2) = \tau(f(x_1), f(x_2))$

Lemma 5.8

Nechť X, Y jsou metrické prostory, X je úplný a $f: \ X \to Y$ je spojité. Nechť X_0 je hustá podmnožina X a nechť $f(X_0)$ je hustá podmnožina Y. Nechť f je izometrie na X_0, pak f je izometrie X na Y.

Důkaz
Izometrie: Nechť $x, a \in X$, X_0 hustá $\implies \exists x_n (\in X_0) \to x$, $a_n (\in X_0) \to a$. Víme, že f je izometrie na X_0: $\varrho(x_n, a_n) = \tau(f(x_n), f(a_n))$, $\varrho(x_n, a_n) \to \varrho(x, a)$, $\tau(f(x_n), f(a_n)) \to \tau(f(x), f(a))$.

Na: Nechť $y \in Y$, $f(X_0)$ je hustá v $Y \implies \exists x_n \in X$, $f(x_n) \to y \implies f(x_n)$ je cauchyovská v Y, ale f je izometrie, tedy i x_n je cauchyovská a X je úplný, tedy $\exists x \in X : x_n \to x$. Tudíž nutně $f(x_n) \to f(x) = y \leftarrow f(x_n)$, jelikož f je spojitá. □

Věta 5.9 (Riesz-Fischerova věta)

Nechť H je Hilbertův prostor a $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ je ortonormální množina. Nechť P je prostor všech *konečných lineární kombinací vektorů u_i. Potom pro každé $x \in H$ platí*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}(i)|^2 \leq ||x||^2.$$

Zobrazení $x \to \hat{x}$ je spojité lineární zobrazení H na l_2, jehož restrikce na $\overline{P}$ je izometrie $\overline{P}$ na l^2.

Důkaz
Z předchozí věty víme, že $\sum_{i=1}^{n} |\hat{x}(i)|^2 \leq ||x||^2 \implies$

$$\implies \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}(i)|^2 \leq ||x||^2.$$

Tedy $x \mapsto \hat{x}$ je z H do l^2. Toto zobrazení je lineární

$$x \hat{+} y(i) = \langle x + \; y, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle + \langle y, u_i \rangle = \hat{x}(i) + \hat{y}(i).$$

Spojitost: $\forall x, y \in H$

$$||x - y||^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}(i) - \hat{y}(i)|^2$$

a z toho již plyne spojitost $x \mapsto \hat{x}$.

Podle předchozí věty je $x \mapsto \hat{x}$ izometrie na P.

Použijeme předchozí lemma na $X = \overline{P}$, $X_0 = P$, $Y = l^2$. (X je uzavřená podmnožina úplného, tedy úplný, X_0 je husté v X z definice uzávěru a $x \mapsto \hat{x}$ je spojité). $f(X_0) = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 | \exists k a_n = 0 \forall n > k\}$ je podle příkladu na přednášce husté v l^2. □

Důsledek
$L^2(0,1)$ je izometricky izomorfní l^2.

Definice 5.7

Nechť H je Hilbertův prostor a $h_i \in H$, $i \in \mathbb{N}$. Řekneme, že $\sum_{i=1}^{\infty} h_i$ konverguje k $s \in H$, pokud $\lim_{n \to \infty} ||s - \sum_{i=1}^{n} h_1||_H = 0$.

Věta 5.10 (O maximální ortonormální množině)

Nechť H je Hilbertův prostor a $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ortonormální množina. NPJE

1. *$\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je maximální ortonormální množina.*
2. *Množina P všech konečných lineárních kombinací prvků z $\{u_i\}$ je hustá v H.*
3. *$\forall x \in H$: $||x||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2$.*

4. $\forall x,y \in H : \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i \hat{y}_i$.

5. $x = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i u_i$.

Důkaz
„1. $\implies$ 2.“: Sporem: Nechť $\overline{P} \neq H$. $\overline{P}$ je uzavřený lineární podprostor H. Podle důsledku jedné z předchozích vět $\exists u \in \left(\overline{P}\right)^{\perp}$, $u \neq 0$. Pak ale $\langle u, u_i\rangle = 0$, $\forall i$. ↯.

„2. $\implies$ 3.“: Podle předchozí věty $x \mapsto \hat{x}$ je izometrie na $\overline{P} = H$ na l^2. Tedy $||x||^2 = ||\hat{x}||_{l^2} = \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2$.

„3. $\implies$ 4.“:

$$||x+y||^2 - ||x-y||^2 = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle - (\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle) = 4\langle x,y\rangle .$$

Analogicky

$$||\hat{x}+\hat{y}||^2 - ||\hat{x}-\hat{y}||^2 = 4\sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i\hat{y}_i.$$

Podle 3. pak dokazovaná rovnost platí.

„4. $\implies$ 3.“: Prostým dosazením $x = y$.

„5. $\implies$ 1.“: Pro spor ať máme $x \perp u_i$, $\forall u_i$. Pak $x = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i u_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{o} = \mathbf{o}$.

„3. $\implies$ 5.“: Chceme $y^n = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \cdot u_i \to x \Leftrightarrow ||y^n - x||_H \to 0$.

$$x - y^n, i \leq n : \langle x - y^n, u_i\rangle = \langle x, u_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \langle u_j, u_i\rangle = \langle x, u_i\rangle - \hat{x}_i = 0.$$

$$i > \ n : \langle x - y^n, u_i\rangle = \langle x, y_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_i \langle u_j, u_i\rangle = \langle x, u_i\rangle .$$

Použijeme 3. pro $x - y^n$:

$$||x - y^n||_H^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2 \to 0.$$

□

Poznámka
Obdoba této věty platí i pro Hilbertův prostor s „nespočetnou“ bází.

5.3 Trigonometrické řady

Definice 5.8 (Fourierovy koeficienty funkce, Fourierova řada)

Nechť $f \in L^2(0, 2R)$. Potom čísla

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \qquad k \in \mathbb{N}_0 \text{ a}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \qquad k \in \mathbb{N}$$

nazýváme Fuourierovy koeficienty funkce f. Trigonometrickou řadu

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx)$$

nazýváme Fourierovou řadou funkce f.

Věta 5.11 (O maximalitě trigonometrických funkcí)

Systém trigonometrických funkcí

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

tvoří maximální ortonormální množinu v $L^2(0, 2\pi)$. *Tedy existuje jediné* $f \in L^2(0, 2\pi)$ *takové, že*

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0 \ \forall nin\mathbb{N} \wedge \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0 \ \forall nin\mathbb{N}_0$$

je identicky nulová funkce.

Důkaz
Bez důkazu. □

Důsledek
TODO!!!

5.4 Separabilní metrické prostory

Definice 5.9 (Separabilní prostor)

Metrický prostor (P, ϱ) se nazývá separabilní, jestliže existuje spočetná množina $A \subset P$, která je hustá v P.

Věta 5.12 (Nutná podmínka separability)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Nechť existují nespočetná množina A a $\delta > 0$ taková, že pro každá $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\varrho(x, y) \geq \delta$. Potom P není separabilní.

Důkaz

TODO!!! $\square$

Definice 5.10

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\mathcal{B}$ je nějaký systém otevřených podmnožin P. Řekneme, že $\mathcal{B}$ je báze otevřených množin (P, ϱ), jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subset P$ existuje $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ taková, že $\bigcup \mathcal{B}^* = G$.

Věta 5.13 (Charakterizace separabilních prostorů)

Metrický prostor je separabilní právě tehdy, když v něm existuje spočetná báze otevřených množin.

Důkaz

TODO!!! $\square$

Věta 5.14 (Vztah totální omezenosti a separability)

Nechť je metrický prostor (P, ϱ) totálně omezený. Pak je separabilní.

Důkaz

TODO!!! $\square$