# 1 Řady

## 1.1 Úvod

**Definice 1.1**

Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost. Číslo $s_m = a_1+a_2+\ldots+a_m$ nazveme $m$-tým částečným součtem řady $\sum a_n$. Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, pokud tato limita existuje. Je-li tato limita konečná, pak řekneme, že řada je konvergentní. Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je divergentní. Tuto limitu budeme značit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Věta 1.1** (Nutná podmínka konvergence)

*Jestliže je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

*Důkaz*
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m = s \in \mathbb{R}$. $a_n = s_n - s_{n-1}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$ $\square$

*Pozor*
Tato věta je pouze a jen implikace.

**Věta 1.2** (konvergence součtu řad)

*Nechť $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\cdot a_n$ konverguje.*

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

*Důkaz*
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\exists$ limita z $s_m \to s \in \mathbb{R}$ a to je z AL právě tehdy, když konverguje $\alpha s_m \to \alpha\cdot s \in \mathbb{R}$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\cdot a_n$ konverguje.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma \in \mathbb{R}$ konvergují, tedy konverguje i $s_m + \sigma_m \to s+\sigma \in \mathbb{R}$. $\square$

## 1.2 Řady s nezápornými členy

*Pozorování*
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je řada s nezápornými členy. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, nebo má součet $+\infty$.

*Důkaz*
$s_m = a_1 + \ldots + a_m \leq a_1 + \ldots + a_{m+1} = s_{m+1}$. $s_m \geq 0$ neklesající $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m \in [0, \infty]$. □

**Věta 1.3** (Srovnávací kritérium)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.*

*Důkaz*
a) Označme $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ a $\sigma_n = b_1 + \ldots + b_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$s_n = a_1 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n \leq a_1 + \ldots + a_{n_0} + b_{n_0+1} + \ldots + b_n \leq a_1 + \ldots + a_{n_0} + \sigma_n \leq a_1 + \ldots + a_{n_0} + \sigma$$

A to je konečné, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tedy $\sigma \in \mathbb{R}$. $s_n$ neklesající a omezená $\implies$ $\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$.

b) Nepřímím důkazem z a). □

**Věta 1.4** (Limitní srovnávací kritérium)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže $A \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Jestliže $A = 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Jestliže $A = \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.*

*Důkaz*
(i) Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in (0, \infty)$ plyne, k $\varepsilon = \frac{K}{2} \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon = \frac{K}{2}$, tedy $\frac{K}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}K$.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\overset{\text{konvergence součtu řad}}{\implies}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}K \cdot b_n$ konverguje $\wedge a_n \leq \frac{3}{2}K \cdot b_n \overset{\text{Srov. kritérium}}{\implies}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\wedge \frac{K}{2} \cdot b_n \leq a_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{2} \cdot b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

(ii) Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ plyne, k $\varepsilon = 1 \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon = 1$, tedy $a_n < b_n$, a pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle srovnávacího kritéria.

(iii) Úplně stejně jako (ii). □

**Věta 1.5** (Cauchyovo odmocninové kritérium)

*Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy, potom*

$$(i) \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(iv) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje,}$$

$$(v) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

*Důkaz*
$(i)$ $b_n = q^n$. Víme, že $a_n < b_n$ $\forall n \geq n_0$, tedy použijeme srovnávací kritérium.

$(i) \implies (ii)$ : $b_n = \left\{ \sqrt[n]{a_n}, \sqrt[n+1]{a_n}, \dots \right\}$. $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}_n < 1$. Nalezneme $q \in \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, 1\right)$. Z definice $\lim_{n\to\infty} b_n$ pro $\varepsilon = q - \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ je $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : b_n < q$, tedy $\forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q$, tedy podle $(i)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(ii) \implies (iii)$ : $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \implies \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, tedy podle $(ii)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(iv)$ : podobně jako v $(i) \implies (ii)$ dostaneme $\forall n_0 > n_k : b_{n_0} > q > 1$, tedy $\forall n_0\ \exists n > n_0 : \sqrt[n]{a_n} > q > 1 \implies a_n > 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tedy podle nutné podmínky konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

$(iv) \implies (v)$ : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. □

**Věta 1.6** (d'Alambertovo podílové kritérium)

*Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy. Potom:*

$$(i) \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$

$$(iv) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje,}$$

*Důkaz*
$(i)$ Víme indukcí $a_{n_0+k} < q^k a_{n_0}$ a z konvergence geometrické řady $\sum_{k=1}^{\infty} q^k a_n$ konverguje $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(i) \implies (ii)$: $b_n = \sup\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}, \dots\right\}$. $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Zvolíme $q \in (\lim_{n\to\infty} b_n, 1)$. Tedy $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : b_n < q \implies \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, tudíž podle $(i)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(ii) \implies (iii)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, tedy podle $(ii)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$(iv)$: Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ definicí limity pro $\varepsilon < \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1$ vyplývá $\exists n_0\ \forall n \geq n_0$ : $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies a_{n+1} > a_n$. Máme rostoucí posloupnost kladných čísel $\implies \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tedy podle nutné podmínky konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. $\square$

**Věta 1.7** (Kondenzační kritérium)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy splňující $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ konverguje.*

*Důkaz*
Pro $k \in \mathbb{N} : s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j\ t_k = \sum_{j=0}^{k} 2^j \cdot a_{2^j}$.

$\Leftarrow$: Označme $A = \sum_{j=0}^{k} 2^j \cdot a_{2^j}$, pak $A \in \mathbb{R}$. Nechť $m \in \mathbb{N}$ a nalezneme $k in \mathbb{N}$, $m < 2^k$. Pak $t_k \leq A$ a:

$$s_m \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^{k-1}} + \dots + a_{2^k - 1}) \leq t_{k-1} \leq A.$$

Tedy $s_m$ je shora omezená a rostoucí $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m \in \mathbb{R} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\implies$ : Označme $B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$ a nalezneme $m \in \mathbb{N}$, aby $2^k \leq m$. Pak $s_m \leq B$ a platí:

$$s_m \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}) \geq a_1 + \frac{1}{2}(t_k - 1 \cdot a_1) \leq \frac{1}{2} t_k \implies$$

$t_k$ je shora omezená rostoucí posloupnost $\implies \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. $\square$

## 1.3 Neabsolutní konvergence řad

**Definice 1.2**

Nechť pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

**Věta 1.8** (Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci řad)

*Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když je splněna následující podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 : \left| \sum_{n=j}^{m} a_n \right| < \varepsilon.$$

*Důkaz*

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \overset{\text{BC}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 :$ $|s_m - s_{n-1}| < \varepsilon$. Což je přesně výraz (po odečtení $s_m - s_{n-1}$) ve větě. $\square$

**Věta 1.9** (Vztah konvergence a absolutní konvergence)

*Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

*Důkaz*

Z BC podmínky: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 : \sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon$. Chceme dokázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Stačí ověřit BC podmínku. K $\varepsilon > 0$ volme $n_0$ jako výše, pak $\forall m, n \geq n_0 : \left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j| \leq \varepsilon \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. $\square$

**Věta 1.10** (Leibnitzovo kritérium (T5.10))

*Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel, pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

*Důkaz*

$\Longrightarrow$ : z nutné podmínky (V5.1) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \cdot a_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\Leftarrow$: $s_{2k+2} - s_{2k} = (-1)^{2k+2} \cdot a_{2k+2} + (-1)^{2k+1} \cdot a_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0 \implies s_{2k}$ je nerostoucí. Obdobně $s_{2k+1} - s_{2k-1} = a_{2k+1} - a_{2k} \geq 0 \implies s_{2k+1}$ je neklesající. Navíc $s_2k = (-a_1 + a_2) + \ldots + (-a_{2k-1} + a_{2k}) \leq 0 + \ldots + 0 = 0$. Analogicky $s_{2k+1} \geq -a_1$.

Nyní $0 \geq s_{2k} = s_{2k+1} + a_{2k+1} \geq -a_1 + a_{2k+1} \geq -a_1$. Analogicky $-a_1 \leq s_{2k+1} \leq 0$. Tedy obě vybrané podposloupnosti jsou omezené a monotónní, tedy konvergují. $\lim_{n\to\infty} s_{2k} = S_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = S_2 \in \mathbb{R}$. Navíc

$$S_2 = \lim_{n\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2k} - a_{2k+1} \overset{\text{AL}}{=} S_1 - 0 = S_1.$$

Tedy jelikož existuje limita sudých i lichých členů a rovnají se, existuje i limita $s_n$. □

**Lemma 1.11** (Abelova parciální sumace)

*Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $m \leq n$ a nechť $a_m, \ldots,, a_n, b_m, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Označme $s_k = \sum_{i=m}^{k} a_i$. Pak platí*

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i = \sum_{i=m}^{n} s_i \cdot (b_i - b_{i+1}) + s_n \cdot b_n.$$

*Důkaz*

$$= a_m \cdot b_m + a_{m+1} \cdot b_{m+1} + \ldots + a_n \cdot b_n = s_m \cdot b_m + (s_{m+1} - s_m) \cdot b_{m+1} + \ldots + (s_n - s_{n-1}) \cdot b_n = \sum_{i=m}^{n} s_i \cdot (b_i - b_{i+1}) + s_n \cdot b_n$$

□

**Věta 1.12** (Abel-Dirichletovo kritérium)

*Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

*(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní. (D) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty (tj. $\exists K > 0\ \forall m \in \mathbb{N} : |s_m| = |\sum_{n=1}^{m} a_n| < K$).*

*Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konvergentní.*

*Důkaz*
Podle V 5.8 budeme ověřovat BC podmínku pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$. Označme $s_k = \sum_{n=m}^{k} a_n$. $b_n$ je nerostoucí a $b_n > 0 \implies \forall i : b_i - b_{i+1} \geq 0$ a $\exists K\ \forall n : |b_n| \leq K$.

(A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

$$\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall i \geq m \geq n_0 |\sum_{n=m}^{i} a_n| = |s_i| < \varepsilon.$$

Nyní k $\varepsilon > 0$ volme $n_0$ jako výše a nechť $n \geq m \geq n_0$:

$$|\sum_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i| \overset{\text{Abel PS}}{\leq} \sum_{i=m}^{n-1} |s_i \cdot (b_i - b_{i+1})| + |s_n| \cdot |b_n| \leq \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (b_i - b_{i+1}) + \varepsilon \cdot b_n = \varepsilon \cdot (b_m - b_n) + \varepsilon \cdot b_n \leq \varepsilon \cdot K.$$

A podle BC podmínky máme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konverguje.

(D) Z předpokladů víme, že $\exists M > 0\ \forall i \geq m : |s_i| = |\sum_{n=1}^{i} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n| \leq M$ (volme $M = 2K$). Z $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ k $\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |b_n| < \varepsilon$. Nyní

$$\forall n \geq m \geq n_0 : |\sum_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i| \leq \sum_{i=m}^{n-1} |s_i (b_i - b_{i+1})| + |s_n| \cdot |b_n| \leq \sum_{i=m}^{n-1} M \cdot (b_i - b_{i+1}) + M \cdot b_n = M \cdot (b_m - b_n) + M \cdot b_n \leq$$

A podle BC podmínky máme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konverguje. □

*Příklad*
$\sin n$ a $\cos n$ má omezené částečné součty.

*Důkaz*
Buď sečtením $\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n =$ vzoreček.

Nebo dokážeme dokonce $\forall x \neq 2k\pi$ $\sin nx$ a $\cos nx$ má omezené částečné součty.

$$e^i x = \cos x + i \cdot \sin x \implies \sum_{k=0}^{n} e^{i \cdot k \cdot x} = \sum_{k=0}^{n} \cos k \cdot x + i \cdot \sum_{k=0}^{n} \sin k \cdot x.$$

Z geometrické řady ale víme, že

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i \cdot k \cdot x} = \frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}} = \frac{1 - \cos x \cdot (n+1) - i \cdot \sin x \cdot (n+1)}{1 - \cos x - i \sin x} \cdot \frac{1 - \cos x + i \cdot \sin x}{1 - \cos x + i \cdot \sin x} = \frac{A_n \cdot B}{(1 - \cos x)^2 + (\mathrm{s}}$$

Zřejmě $|A_n| \leq 3$ a $|B| \leq 3$, jmenovatel je nenulový a není závislý na $n$, tedy pro všechna $n$ je výraz omezen konstantou. □

## 1.4 Přerovnání a součin řad

**Definice 1.3** (Přerovnání řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ nazýváme přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Věta 1.13** (O přerovnání absolutně konvergentní řady)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je její přerovnání. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je absolutně konvergentní a má stejný součet.*

*Důkaz*

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje $\implies$ splňuje BC podmínku. Tedy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq m \geq n_0 |\sum_{i=n}^{m} a_i| < \varepsilon \implies \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq \varepsilon.$$

Zvolme $n_0' = \max\{p(1), p(2), \dots, p(n_0)\}$. Pak $\forall n' \geq n_0' : p^{-1}(n') \geq n_0$. Tedy

$$\forall n' \geq m' \geq n_0' : \sum_{i=m'}^{n'} |a_{p(i)}| \leq \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| < \varepsilon.$$

Tedy podle BC podmínky $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{p(n)}|$ konverguje, tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ konverguje.

Konverguje k tomu samému? $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = A'$. Víme, že k $\varepsilon > 0\ \exists n_0 \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq \varepsilon$. Zvolme $n_0' \geq \max_{i \leq n_0} p(i)$, aby $\sum_{i=n_0'}^{\infty} |a_{p(i)}| \leq \varepsilon$. Pak $|\sum_{i=1}^{n_0} a_i - A| \leq \varepsilon$ a $|\sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)} - A'| \leq \varepsilon$. Nyní

$$|A - A'| \leq |\sum_{i=1}^{n_0} a_i - A| + |\sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)} - A'| + |\sum_{i=1}^{n_0} a_i - \sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)}| \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq 3\varepsilon$$

□

**Věta 1.14** (Rieman)

*Neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat k libovolnému součtu $s \in \mathbb{R}^*$.*

*Důkaz*

Bez důkazu (idea: rozdělíme na kladné a záporné členy (mají součty $+\infty$ a $-\infty$) a jdeme nahoru dolu nahoru dolu (vždy alespoň o 1 prvek), abychom se co nejvíce blížili $s$). □

**Definice 1.4** (Cauchyovský součin)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady. Cauchyovským součinem těchto řad nazveme řadu $\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{k-1} (a_{k-i} \cdot b_i)$.

**Věta 1.15** (O součinu řad)

*Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergují absolutně. Pak* $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)\cdot(\sum_{n=1}^{\infty} b_n) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}(a_{k-i}\cdot b_i)$.

*Důkaz*

Označme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \to A \in \mathbb{R}$, $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \to B \in \mathbb{R}$ a $\varrho_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i}b_i\right) \overset{\text{Chceme}}{\to} A \cdot B \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak $\exists n_0 : \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| < \varepsilon$ a $\sum_{j=n_0}^{\infty} |b_j| < \varepsilon$ (z BC podmínky) a zároveň $|s_{n_0} \cdot \sigma_{n_0} - A \cdot B| < \varepsilon$. Nechť $n \geq 2n_0$, pak

$$|\varrho_n - A \cdot B| \leq |\varrho_n - s_{n_0} \cdot \sigma_{n_0}| + |s_{n_0} \cdot \sigma_{n_0} - A \cdot B| \leq$$

$$\leq |(a_1b_1)+(a_1b_2+a_2b_1)+\ldots+(a_{n-1}\cdot b_1+\ldots+a_1\cdot b_{n-1})-(a_1+\ldots+a_{n_0})\cdot(b_1+\ldots+b_{n_0})|+\varepsilon \leq$$

$$\leq \sum_{i\geq n_0 \vee j \geq n_0} |a_ib_j| + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty}|a_i| \cdot \sum_{j=n_0}^{\infty}|b_j| + \sum_{i=n_0}^{\infty}|a_i| \cdot \sum_{j=1}^{\infty}|b_j| + \varepsilon \leq A\varepsilon + B\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon \cdot \text{konst.}$$

□

## 1.5 Limita posloupnosti a součet řady v $\mathbb{C}$

**Definice 1.5**

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti. Pak $c_n = a_n + ib_n$ je komplexní posloupnost.

Řekneme, že $\lim_{n\to\infty} c_n = A + iB$, pokud existují $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

**Definice 1.6**

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti a $c_n = a_n+ib_n$. Řekneme, že komplexní řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje k $A+iB$, pokud konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$.

**Věta 1.16** (Vztah konvergence a absolutní konvergence pro komplexní řady)

*Nechť* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je komplexní posloupnost a řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ *konverguje. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *konverguje.*

*Důkaz*
Z BC podmínky pro konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m \geq n \geq n_0 : \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon.$$

Víme $c_n = a_n + ib_n$. Nyní $\forall m \geq n \geq n_0$ :

$$\sum_{j=n}^{m} |a_j| \leq \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon \wedge \sum_{j=n}^{m} |b_j| \leq \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ splňují BC podmínku, tedy konvergují. Podle V5.9 (vztah KaAK), tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, tedy konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. □

# 2 Primitivní funkce

## 2.1 Základní vlastnosti

**Definice 2.1** (Primitivní funkce, integrál)

Nechť je funkce $f$ definována na otevřeném intervalu $I$. Řekneme, že funkce $F$ je primitivní funkce k funkci $f$, pokud pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a $F'(x) = f(x)$.

Množinu všech primitivních funkcí k $f$ na $I$ značíme $\int f(x)\,dx$

**Věta 2.1** (O jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu)

*Nechť $F$ a $G$ jsou primitivní funkce k $f$ na otevřeném intervalu $I$. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro všechna $x \in I$.*

*Důkaz*
Označme $H(x) = F(x) - G(x)$. Pak $(H(x))' = (F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$. Tedy (např. z Lagrangeovy věty) $\exists c \in \mathbb{R} : H(x) = c$ na $I$. □

*Poznámka*
Značíme $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Nechť $F$ je primitivní funkce k $f$. Pak $F$ je spojitá (protože má všude vlastní derivaci).

**Věta 2.2** (O vztahu spojitosti a existence primitivní funkce)

*Nechť $I$ je otevřený interval a $f$ je spojitá funkce na $I$. Pak $f$ má na $I$ primitivní funkci.*

*Důkaz*
Později. $\square$

**Věta 2.3** (Linearita primitivní funkce)

*Nechť $f$ má primitivní funkci $F$ a $g$ má primitivní funkci $G$ na otevřeném intervalu $I$ a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ má primitivní funkci $\alpha F + \beta G$.*

*Důkaz*

$$(\alpha \cdot F(x) + \beta \cdot G(x))' \overset{\text{AD}}{=} \alpha \cdot F'(x) + \beta \cdot G'(x) = \alpha \cdot f + \beta \cdot g.$$

$\square$

*Poznámka* (Tabulkové integrály)

- $\int x^n \, dx = \frac{x^n}{n+1} + C, ((x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}) \vee (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}))$.
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + C, (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.
- $\int e^x \, dx = e^x + C, (x \in \mathbb{R})$.
- TODO

**Věta 2.4** (Nutná podmínka existence primitivní funkce)

*Nechť $f$ má na otevřeném intervalu $I$ primitivní funkci. Pak $f$ má na $I$ Darbouxovu vlastnost, tedy pro každý interval $J \subseteq I$ je $f(J)$ interval.*

*Důkaz*
Nechť $J \in I$ je interval. Nechť $y_1, y_2 \in f(J)$ a $y_1 < z < y_2$. Chceme ukázat $z \in f(J)$. Nechť $F$ je primitivní funkce k funkci $f$ na intervalu $I$. Definujeme $H(x) = F(x) - z \cdot x$ pro $x \in I$. Pak $H$ je spojitá na $I$ a $\forall x \in I : (H(x))' = f(x) - z$. Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ tak, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Nechť $x_1 < x_2$, v opačném případě je důkaz analogický. Funkce $H$ je spojitá na $[x_1, x_2]$, a tedy tam nabývá minima.

Víme $H'(x_1) = f(x_1) - z < f(x_1) - y_1 = 0$, tedy $\exists \delta > 0$, že $\forall x \in [x_1, x_1 + \delta], H(x) < H(x_1)$, tedy v $x_1$ není minimum. Obdobně v $x_2$ není minimum. Tedy minimum je v $x_0 \in (x_1, x_2) \overset{\text{Fermat}}{\Longrightarrow} 0 = H'(x_0) = f(x_0) - z$, tj. $f(x_0) = z$. $\square$