

1 Ohniska kuželoseček

1.1 Konstrukce s imaginárními elementy

Poznámka

Všimněme si, že projektivita dvou souměrných soustav určuje jednoznačně pár samodružných elementů, ale opačně ne. Pokud však vezmeme involuci, tak ta už má jednoznačnou korespondenci involuce s párem samodružných elementů.

Příklad (Konstrukce)

Je-li dána projektivita souměrných bodových soustav na přímce, určete involuci, která má tyto samodružné body. (Totéž duálně.)

┌

Řešení (Duální)

Zvolíme pomocnou kružnici procházející daným bodem. Převědeme soustavy na bodové soustavy na kružnici. Vezmeme směrovou přímku za poláru a najdeme k ní (přes tečny) pól. Nyní uvažujeme involuci se středem v tomto bodě. Obraz v hledané involuci najdeme tak, že vzor převedeme na kružnici, zobrazíme v této involuci, a vrátíme zpět.

┌

┌

Poznámka

Pokud směrová přímka vyjde mimo kružnici, budou samodružné body komplexní a pól najdeme tak, že leží na polárách k bodům (pólům) ležícím na dané poláře.

┌

Věta 1.1

Pro eliptickou involuci (bodových soustav na přímce) existují právě dva body v rovině, z nichž se tato involuce promítá absolutní involucí (to znamená involucí kolmic).

┌

Důkaz

Pro eliptickou involuci se její páry rozdělují. Tedy nad úsečkami vzor – obraz si uděláme Thaletovy kružnice a hledané body budou jejich průsečíky. □

┌

Definice 1.1

Body z předchozí věty se nazývají pomocné body eliptické involuce.

Poznámka (Platí)

Absolutní involuce je eliptická involuce, jejíž samodružné přímky jsou imaginární. Nazývají se izotropické přímky a jejich směry jsou $[0 : 1 : i]$ a $[0 : 1 : -i]$.

Poznámka

Izotropické body leží na každé kružnici v rovině. Každé izotropická přímka je kolmá sama na sebe (v reálném skalárním součinu, z definice absolutní involuce)

1.2 Ohnisko středových kuželoseček

Důsledek

Pokud kuželosečka není kružnice, pak izotropické body na ní neleží, tedy z každého izotropického bodu k takové kuželosečce existují 2 tečny (? 4 imaginární přímky). Lze ukázat, že ze 6 průsečíků těchto 4 přímek jsou vždy dva reálné.

Definice 1.2 (Ohnisko)

Těmto dvěma bodům budeme říkat ohniska dané kuželosečky.

Věta 1.2

Bod je ohniskem kuželosečky \Leftrightarrow involuce sdružených polár indukovaná v tomto bodě kuželosečkou je involuce absolutní.

┌

Důkaz

└ Samodružné přímky involuce sdružených polár jsou právě tečny z tohoto bodu. □

Věta 1.3

1. Kuželosečka má 2 ohniska (E, F) (pro kružnici splývající), jsou umístěna symetricky podle středu na jedné z os kuželosečky. Ohniska jsou samodružné body involuce bodů na této ose, jejíž páry jsou vytaty sdruženými kolmými polárami. A tedy i páry tečna+jejich normála (kolmice v bodě dotyku = pól tečny).

2. Každé z ohnisek je pomocným bodem eliptické involuce, kterou na druhé ose vytínají sdružené kolmé poláry (a tedy i dvojice tečna+normála).

3. Každá kružnice opsaná trojúhelníku danému druhou osou a sdruženými kolmými polárami protíná původní osu v ohniscích. (Vyplyvá z předchozí části.)

┌

Důkaz

└ Bez důkazu. □

Definice 1.3 (Hlavní osa, vedlejší osa)

Ose z předchozí věty se říká hlavní osa, druhé pak vedlejší.

Příklad (Konstrukce)

Dány osy elipsy s vrcholy, najděte ohniska.

┌

Řešení (Podobné hledání hyperoskulační kružnice.)

K spojnici hlavního a vedlejšího vrcholu umíme najít pól (průsečík tečen = kolmic na osy). Z tohoto pólu vedeme kolmici, čímž jsme získali dvojici kolmých sdružených polár, tedy použijeme předchozí větu, bod 3.

└

Totéž pro hyperbolu: na hlavní ose máme zadané vrcholy, na vedlejší náhradní body.

┌

Řešení

Polára bude tentokrát průsečík „těch druhých dvou kolmic v hlavním a vedlejším vrcholu“, neboť pomocné body jsou takové, že přesně tento bod leží na asymptotě (tečně v nevlastním bodě).

└

1.3 Ohnisko paraboly

Definice 1.4 (Ohnisko)

(Stejná.) Ohnisko paraboly je reálný průsečík izotropických tečen.

┌

Poznámka

Tuto definici splňují 2 body: vlastní ohnisko F a nevlastní ohnisko = střed = směr průměrů = směr osy.

└

┌

Poznámka

Polára vlastního ohniska = řídící přímka.

└

Věta 1.4

1. Bod je ohniskem paraboly \Leftrightarrow involuce sdružených polár v tomto bodě je involuce absolutní. (Tj. sdružené poláry v F jsou vzájemně kolmé.)

2. Spojnice vlastního a nevlastního ohniska = osa paraboly, vlastní ohnisko pólí každou úsečku vyřatou na ose sdruženými kolmými polárami (speciálně tečnou a její normálou).

Příklad (Konstrukce)

Zkonstruuje ohnisko paraboly zadané 4 tečnami.

┌

Řešení

Najdeme osu a bod dotyku na libovolné nevrcholové tečně. Z něj vedeme kolmici a použijeme předchozí větu bod 2.

└

Věta 1.5

Ohnisko jsou pro kuželosečku 2 podmínky.

Důkaz

Ohnisko zadává 2 izotropické tečny, tedy 2 podmínky. \square

Poznámka

2 ohniska + 1 bod (mimo osu = jejich spojnice) nezadávají jednoznačně kuželosečku, zadávají však jednoznačně elipsu a hyperbolu. A tyto dvě kuželosečky se v daném bodu protínají kolmo (úhel mezi tečnami).

2 Analytická geometrie

Definice 2.1 (Projektivní prostor, geometrický bod, aritmetický zástupce)

(Reálný) projektivní prostor dimenze n je množina

$$\mathbb{R}P^n = \{\langle v \rangle, v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{o}\}\} = \text{množina všech přímk (procházejících počátkem) v } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Prvek $\langle v \rangle \in \mathbb{R}P^n$ se nazývá geometrický bod a v jeho aritmetický zástupce

Poznámka (Platí)

$\langle v \rangle = \langle w \rangle$ (tj. stejné geometrické body) $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : w = \alpha \cdot v$ (tj. aritmetičtí zástupci se liší pouze násobkem $\neq 0$).

Definice 2.2 (Homogenní souřadnice)

Je-li $v = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{o}\}$, pak homogenní souřadnice geometrického bodu $\langle v \rangle$ jsou $[x_0 : \dots : x_n]$.

Poznámka

Jsou určeny až na násobek $\neq 0$.

Definice 2.3 (Projektivní přímka, projektivní rovina, projektivní prostor)

$\mathbb{R}P^1$ říkáme projektivní přímka. $\mathbb{R}P^2$ říkáme projektivní rovina. $\mathbb{R}P^3$ říkáme projektivní prostor.

Poznámka (Značení)

Místo $\langle a \rangle$ budeme psát A .

Poznámka

$\mathbb{R}P^1$: Dva body A, B jsou totožné \Leftrightarrow vektory a, b jsou lineárně závislé.

$\mathbb{R}P^2$: Tři body A, B, C leží na jedné přímce (po dvou různé) $\Leftrightarrow a, b, c$ jsou lineárně závislé (po dvou lineárně nezávislé), tj. leží v jedné rovině.

$\mathbb{R}P^3$: Čtyři body A, B, C, D leží v rovině $\Leftrightarrow a, b, c, d$ jsou lineárně závislé, tj. leží v jednom prostoru.

Obecně $\mathbb{R}P^n$: $n+1$ bodů A_0, \dots, A_n leží v $n-1$ -dimenzionálním projektivním prostoru \Leftrightarrow vektory a_0, \dots, a_n leží v nadrovině v \mathbb{R}^{n+1} (jsou lineárně závislé).

Poznámka

Procesu „zakázu \mathbf{o} a ztotožnění násobky“ říkáme projektivizace.

Definice 2.4 (Projektivní rozšíření afinního prostoru, vlastní bod, nevlastní bod)

Projektivní rozšíření afinního prostoru \mathbb{R}^n na projektivní prostor $\mathbb{R}P^n$ (= kanonické vnoření \mathbb{R}^n do $\mathbb{R}P^n$) je zobrazení, které bodu $[x_1, \dots, x_n]$ přiřadí $[1 : x_1 : \dots : x_n]$ a vektoru (x_1, \dots, x_n) přiřadí $[0 : x_1 : \dots : x_n]$.

Prvním říkáme body vlastní, druhý nevlastní.

TODO?

Definice 2.5 (Homogenní souřadnice přímky)

V $\mathbb{R}P^2$ zavádíme homogenní souřadnice přímky $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ jako homogenní trojici $(a_0 : a_1 : a_2)$.

┌

Poznámka

└ Opět určeny až na násobek $\neq 0$.

Například

$(0 : 1 : 0)$ je osa y , $(0 : 0 : 1)$ je osa x , $(1 : 0 : 0)$ je nevlastní přímka.

Příklad (Hledání průsečíku dvou přímek)

TODO?

Příklad (Incidence bodů)

$X = [x_0 : x_1 : x_2]$, $a = (a_0 : a_1 : a_2)$. $X \in a \Leftrightarrow a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$.

┌ *Důsledek*

Lze zaměnit bod za přímku \implies dualita.

└ Tj. například spojnice bodů se počítá stejně jako průsečík přímek.

Poznámka (Trik na nalezení spojnice (/průsečíku))

Dány body $Y = [y_0 : y_1 : y_2]$, $Z = [z_0 : z_1 : z_2]$. Chceme rovnici jejich spojnice: $X \in a = YZ \Leftrightarrow a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ pro hledané souřadnice $(a_0 : a_1 : a_2) \Leftrightarrow$ vektory X , Y a Z jsou závislé $\Leftrightarrow \det((X|Y|Z)^T) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1) \cdot x_0 + (-y_0 \cdot z_2 + y_2 \cdot z_0) \cdot x_1 + (y_0 \cdot z_1 - y_1 \cdot z_0) \cdot x_2 = 0.$$

2.1 Dvojpoměr

Definice 2.6 (Dvojpoměr)

Dvojpoměr 4 vektorů v rovině a, b, c, d , po dvou lineárně nezávislých, ale po třech lineárně závislých (tj. BÚNO $c = \alpha_1 a + \beta_1 b$, $d = \alpha_2 \cdot a + \beta_2 b$) definujeme jako $(abcd) := \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\alpha_1 \cdot \beta_2} \in \mathbb{R}$.

┌ *Poznámka*

Zřejmě tato hodnota nezávisí na volbě (nenulového) násobku každého vektoru.

Dvojpoměr 4 bodů $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^n$ ležících na jedné přímce definujeme jako $(ABCD) := (abcd)$.

Tvrzení 2.1 (Už jsme si dokázali)

A, B, C, D jsou čtyři různé $\implies (ABCD) \neq 0, 1, \infty$. (Např. $C = A \vee B = D \Leftrightarrow (ABCD) = 0$.)

A, B, C, D vlastní $\implies (ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$. A, B, C vlastní, D nevlastní $\implies (ABCD) = (ABC)$.

Věta o 4 determinantech (pro $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^1$):

$$(ABCD) = \frac{(a_0 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_0) \cdot (b_0 \cdot d_1 - b_1 \cdot d_0)}{(a_0 \cdot d_1 - a_1 \cdot d_0) \cdot (b_0 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_0)}.$$

Definice 2.7 (Harmonická čtveřice)

$$(ABCD) = -1$$

Příklad (Pak jsme počítali. V jednu chvíli nám vyšlo:)

Parametrizace přímky procházející A, B je $t_1 \cdot A + t_2 \cdot B$, kde například $t_1 + t_2 = 1$; lépe $t \cdot A + (1 - t) \cdot B$.

Definice 2.8 (Projektivní souřadný systém (PSS))

Projektivní souřadný systém v $\mathbb{R}P^n$ je $(n + 1)$ -tice různých bodů $A_0, \dots, A_n \in \mathbb{R}P^n$. Pak $\forall X \in \mathbb{R}P^n$ definujeme souřadnice bodu X vůči PSS (A_0, \dots, A_n) jako homogenní $(n + 1)$ -tici $[x_0 : \dots : x_n]$ takovou, že $x = \sum_{i=0}^n x_i \cdot a_i$.

TODO!!! (Projektivita na $\mathbb{R}P^n$: je dána regulární maticí $(n + 1) \times (n + 1)$ určenou až na násobek $\neq 0$ (píšeme $A \sim k \cdot A$, pro $k \neq 0$).)

TODO!!! (Ukázání si, že taková matice zachovává dvojpoměr.)

TODO!!! (Projektivita je dána svými hodnotami na $n + 2$ bodech.)

TODO!!! (A mnoho dalšího.)

2.2 Samodružné body projektivit

Definice 2.9 (Samodružný bod projektivity)

$\langle \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}P^n$ je samodružný bod projektivity dané maticí $A \equiv \langle A \cdot \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle$.

┌
Poznámka

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} : A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} \quad (\Leftrightarrow (A - \lambda E) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0)$$

$\Leftrightarrow \lambda \neq 0$ je vlastním číslem matice A $\mathbf{0} \neq \mathbf{v}$ je vlastním vektorem matice A příslušným vlastnímu číslu λ .

└
Poznámka

Matice projektivity je regulární, tedy nemá vlastní číslo nula.

TODO? (Hromada lineární algebry.)

2.3 Klasifikace projektivit na projektivní přímce

Poznámka

Klasifikace projektivit na projektivní přímce podle možných Jordanových tvarů:

- $J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pro $\lambda = 1$ je to identická projektivita. Pro $\lambda \neq 1$ má dva reálné samodružné body;
- $J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tehdy má jediný samodružný bod (a ten je reálný);
- $J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Tehdy má dva komplexní samodružné body.

Důsledek

To dokazuje větu ze zimního semestru (\exists 2/1/0 samodružné body projektivity soustav).

2.4 Charakteristika projektivity

Poznámka (Opakování zimního semestru)

Jsou-li S, T samodružné body projektivity na $\mathbb{R}P^1$, pak její charakteristika je číslo $w = (XX'ST)$ pro libovolný pár $X \mapsto X'$.

Věta: Hodnota w nezávisí na volbě bodu X .

Věta 2.2

Hodnota w nezávisí na volbě bodu X , a je-li projektivita dána maticí A , platí

$$w = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{D}}{\operatorname{tr} A - \sqrt{D}}, \quad D := (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A.$$

Důkaz

Pro dvojpoměr platí (věta o čtyřech determinantech)

$$(XX'ST) = \frac{[XS] \cdot [X'T]}{[XT] \cdot [X'S]}, \quad [AB] = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Pro danou A spočítejme její vlastní čísla: $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A) \cdot \lambda + \det A$, tj. $\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{D}}{2}$.

Pak pro samodružné body platí: $S' = S, T' = T$, tedy $\mathbf{s}' = A \cdot \mathbf{s} = \lambda_1 \cdot \mathbf{s}, \mathbf{t}' = A \cdot \mathbf{t} = \lambda_2 \cdot \mathbf{t}$.
Pak

$$[\mathbf{x}'\mathbf{s}] = [\mathbf{x}' \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{s}'] = \frac{1}{\lambda_1} [\mathbf{x}'\mathbf{s}'] = \frac{1}{\lambda_1} \cdot |A| \cdot [\mathbf{x}\mathbf{s}], \quad [\mathbf{x}'\mathbf{t}] = \dots = \frac{1}{\lambda_2} \cdot |A| \cdot [\mathbf{x}\mathbf{t}].$$

Dosadíme: $w = \frac{[\mathbf{x}\mathbf{s}] \cdot \frac{1}{\lambda_2} \cdot |A| \cdot [\mathbf{x}\mathbf{t}]}{[\mathbf{x}\mathbf{t}] \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot |A| \cdot [\mathbf{x}\mathbf{s}]} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{D}}{\operatorname{tr} A - \sqrt{D}}.$

□

2.5 Involuce

Poznámka (Opakování zimního semestru)

Involuce je projektivita souměrných soustav splňující $w = -1 \Leftrightarrow \forall X : X'' = X \Leftrightarrow \exists X : X'' = X$.

Definice 2.10 (Involuce)

Involuce je projektivita (na \mathbb{RP}^n) daná maticí A , která splňuje $A^2 \sim E$.

Věta 2.3

Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ zadává neidentickou projektivitu na \mathbb{RP}^1 ($A \neq E$). Pak NáPoJE:

1. $A^2 \sim E$ (je to involuce);

2. $\text{tr } A = 0$;

3. $w = -1$.

┌

Důkaz

Pišme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Pak $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d) \cdot b \\ (a+d) \cdot c & bc + d^2 \end{pmatrix}$.

„1. \implies 2.“: $A^2 \sim E$ máme, chceme $\text{tr } A = a + d = 0$. Předpoklad nám dává $(a+d) \cdot b = 0 = (a+d) \cdot c$. Pro spor $(a+d) \neq 0$. Pak $b = c = 0$ a $A = \text{diag}(a, d)$, tedy $\text{diag}(a^2, d^2) \sim \text{diag}(1, 1)$, tedy $a^2 = d^2$, tj. $a = \pm d$. Takže buď $a + d = 0$ nebo $A \sim E$. \nmid

„2. \implies 1.“: předpokládáme $a + d = 0$. Pak ale $A^2 = \text{diag}(a^2 + bc, bc + d^2) \stackrel{a=-d}{=} \text{diag}(a^2 + bc, a^2 + bc) \sim E$.

„2. \Leftrightarrow 3.“: $w = \frac{\text{tr } A + \sqrt{D}}{\text{tr } A - \sqrt{D}}$, tedy pro $\text{tr } A = 0$ je $w = -1$, a pokud $w = -1$, pak $\text{tr } A + \sqrt{D} = -\text{tr } A + \sqrt{D}$, tedy $\text{tr } A = -1$. (Přitom $D = (\text{tr } A)^2 - 4 \det A = -4 \det A \neq 0$.) \square

└

Důsledek

Stará definice involuce sedí s tou novou.

2.6 Parabolická involuce

Poznámka

Parabolická involuce odpovídá singulární matici A , která splňuje $\text{tr } A = 0$.

┌
Poznámka

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \implies c = \frac{-a^2}{b}.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a^2 & ba \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a^2 & ba \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot (ax_0 + bx_1) \\ -a \cdot (ax_0 + bx_1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

└
┌
Důsledek

Tedy parabolická involuce zobrazuje všechny body do jednoho bodu.

Poznámka

Klasifikace involucí na $\mathbb{R}P^1$ podle Jordanova tvaru:

- $J_A \sim \text{diag}(1, -1) \implies p_A(\lambda) = \lambda^2 + \det A = \lambda^2 - a^2$, tedy 2 reálné samodružné body, tj. hyperbolická involuce;
- $J_A = \text{diag}(\lambda, \bar{\lambda}) \implies p_A(\lambda) = \lambda^2 + \det A = \lambda^2 + a^2$, tedy 2 imaginární body, tj. eliptická involuce.
- $J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tj. parabolická involuce.