

# Organizační úvod

*Poznámka*

Jako vždycky, jen v implikacích u zkoušky budou i pojmy z předchozích semestrů.

## 1 Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

### 1.1 Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

#### Definice 1.1

Nechť  $J \subset \mathbb{R}$  je interval a nechť máme funkce  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  a  $f_n : J \rightarrow \mathbb{R}$  pro  $n \in \mathbb{N}$ . Řekneme, že posloupnost funkcí  $\{f_n\}$

- konverguje bodově k  $f$  na  $J$ , pokud  $\forall x \in J : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , neboli:

$$\forall x \in J \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

- konverguje stejnoměrně k  $f$  na  $J$  (značíme  $f_n \rightrightarrows f$  na  $J$ ), pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

- konverguje lokálně stejnoměrně, pokud pro každý omezený uzavřený  $[a, b] \subset J$  platí  $f_n \rightrightarrows f$  na  $[a, b]$  (značíme  $f_n \xrightarrow{\text{Loc}} f$  na  $J$ ).

#### Věta 1.1 (Kritérium stejnoměrné konvergence)

Nechť  $f, f_n : J \rightarrow \mathbb{R}$ , pak

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } J \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

┌  
Důkaz

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 : \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

└

□

┌ Poznámka (Pro spojité funkce)

$$\Leftrightarrow \|f_n - f\|_{C(J)} \rightarrow 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{C(J)} f.$$

### Věta 1.2 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)

Nechť  $f_n : J \rightarrow \mathbb{R}$ , pak

$$(\exists f : f_n \rightrightarrows f \text{ na } J) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

┌ Důkaz

„ $\Rightarrow$ “: Víme  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Tedy

$$\forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon.$$

„ $\Leftarrow$ “: Víme  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ . Toto použijeme pro pevné  $x \in J$ . Pro posloupnost  $a_n = f_n(x)$  máme splněnou BC podmínku pro posloupnost reálných čísel, tj.  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ .

Označíme si  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Nyní v BC podmínce provedeme limitu  $n \rightarrow \infty$ . Tím dostaneme přesně definici stejnoměrné konvergence.  $\square$

### Věta 1.3 (Moore-Osgood)

Nechť  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  je krajní bod intervalu  $J$ . Nechť  $f_n, f : J \rightarrow \mathbb{R}$  splňují

- $f_n \rightrightarrows f$  na  $J$ ,
- existuje  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ .

Pak existují  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  a jsou si rovny.

┌ Důkaz

┌ Příště.  $\square$

Důsledek

Nechť  $f_n \rightrightarrows f$  na  $I$  a nechť  $f_n$  jsou spojité na  $I$ . Pak  $f$  je spojitá na  $I$ .

Poznámka

Obdobně lze definovat stejnoměrnou spojitost i pro libovolnou množinu  $A \subset \mathbb{R}^n$  a  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  a platí, že stejnoměrná limita je spojitá (stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá).

*Důkaz* (Moore-Osgood)

Z BC podmínky

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Provedeme  $\lim_{x \rightarrow x_0}$  a dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Tedy  $a_n$  splňuje BC podmínku, a tudíž  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ .

Nechť  $\varepsilon \geq 0$ . Z definice  $f_n \rightrightarrows f$

$$\exists n_0 \forall x \in J : |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zároveň předpokládejme  $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$  (zvolíme si  $n_0$  jako maximum). Máme pevnou funkci  $f_{n_0}$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{n_0}(x) = a_{n_0}$ . Tedy

$$\exists \delta > 0 \forall x \in P(x_0, \delta) \cap J : |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Nyní  $\forall x \in P(x_0, \delta) \cap J$  platí

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

□

### **Věta 1.4** (O záměně limity a derivace)

*Nechť funkce  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mají vlastní derivaci na intervalu  $(a, b)$  a nechť*

- $\exists x_0 \in (a, b) : \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje,
- pro derivace  $f'_n$  platí  $f'_n \xrightarrow{Loc} f'$  na  $(a, b)$ .

*Potom existuje funkce  $f$  tak, že  $f_n \xrightarrow{Loc} f$  na  $(a, b)$ ,  $f$  má vlastní derivaci a platí  $f'_n \xrightarrow{Loc} f'$  na  $(a, b)$ .*

┌

*Důkaz*

Nechť  $x_0 \in [c, d] \subset (a, b)$ . Víme  $f'_n \rightrightarrows$  na  $[c, d]$ . Chceme ukázat  $f_n \rightrightarrows f$  na  $[c, d]$  ( $\implies f_n \xrightarrow{\text{Loc}} f$  na  $(a, b)$ ). Nechť  $\varepsilon > 0$ . Z BC podmínky pro  $f'_n \rightrightarrows$

$$\exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in [c, d] : |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon$$

a zároveň  $\forall m, n \geq n_0 : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$ . Nyní  $\forall x \in [c, d]$  :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \\ &\leq |h(x) - h(x_0)| + \varepsilon \leq |x - x_0| \cdot |h'(\xi)| + \varepsilon \leq (d - c) \cdot \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

kde  $h = f_n - f_m$  a  $\xi \in (x_0, x)$  resp.  $(x, x_0)$  z Lagrangeovy věty (cvičení: předpoklady jsou splněné).

Zbývá dokázat „ $f'_n \rightrightarrows f'$  na  $[c, d]$ “: Zvolme  $z \in [c, d]$  a položme  $\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z}$  pro  $x \in [c, d] \setminus \{z\}$ . Nechť  $\varepsilon > 0$ . Z BC podmínky pro  $f'_n \rightrightarrows$

$$\exists n_0 \forall n, m \geq n_0 \forall x \in [c, d] : |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon.$$

Podobně jako v první části důkazu

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(z) - f_m(z))| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \cdot |x - z| < \varepsilon \cdot |x - z|.$$

Nyní  $\forall m, n \geq n_0 \forall x \in [c, d] \setminus \{z\}$ :

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \left| \frac{f_n(x) - f_m(z) - (f_m(x) - f_m(z))}{x - z} \right| < \frac{\varepsilon \cdot |x - z|}{|x - z|} = \varepsilon.$$

Podle BC  $\varphi_n \rightrightarrows$  na  $[c, d] \setminus \{z\}$ . Tedy  $\varphi_n$  splňuje předpoklady Moore-Osgoodovy věty ( $\lim_{x \rightarrow z} \varphi_n(x) = \lim_{x \rightarrow z} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} = f'(z)$ ). Tedy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow z} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} &= \lim_{x \rightarrow z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z) = \lim_{x \rightarrow z} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = f'(z). \end{aligned}$$

A jelikož víme, že  $f'_n \rightrightarrows$ , tak  $f'_n \rightarrow f' \implies f'_n \rightrightarrows f'$ . □

└

## 1.2 Stejnomořná konvergence řady funkcí

### Definice 1.2

Řekněme, že řada funkcí  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na intervalu  $J$ , pokud posloupnost částečných součtů  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$  konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na  $J$ .

**Věta 1.5** (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)

Nechť  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  je řada funkcí definovaných na intervalu  $J$ . Pokud  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow na J$ , pak posloupnost funkcí  $u_n(x) \Rightarrow 0$  na  $J$ .

┌  
Důkaz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$$

speciálně pro  $m = n + 1$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in J : \left| \sum_{i=1}^{n+1} u_i - \sum_{i=1}^n u_i \right| = |u_{n+1}(x)| < \varepsilon \implies u_n \Rightarrow 0.$$

└

□

**Věta 1.6** (Weierstrassovo kritérium)

Nechť  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  je řada funkcí definovaných na intervalu  $J$ . Pokud pro

$$\sigma_n = \sup \{|u_n(x)| : x \in J\}$$

platí, že číselná řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$  konverguje, pak  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow na J$ .

┌  
Důkaz

Nechť  $\varepsilon > 0$ . Z BC podmínky pro konečnou  $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$

$$\exists n_0 \forall m, n \geq n_0, m > n : \left| \sum_{k=n+1}^m \sigma_k \right| < \varepsilon.$$

Chceme ověřit BC podmínku pro  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ :

$$\begin{aligned} \forall m, n \geq n_0, m > n \forall x \in J : |s_m(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{k=1}^m u_k(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m \sigma_k < \varepsilon. \end{aligned}$$

┌ Tedy podle BC podmínky  $\sum u_k \Rightarrow$ .

□

**Věta 1.7** (O spojitosti a derivování řady funkcí)

Nechť  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  je řada funkcí definovaná na intervalu  $(a, b)$ .

- Nechť  $u_n$  jsou spojitě na  $(a, b)$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xRightarrow{Loc} na (a, b)$ . Pak  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  je spojitá na  $(a, b)$ .
- Nechť funkce  $u_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mají vlastní derivaci na  $(a, b)$  a nechť  $\exists x_0 \in (a, b) :$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  konverguje a  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \xrightarrow{Loc} na (a, b)$ . Pak je funkce  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  dobře definovaná a diferencovatelná a navíc  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{Loc} F(x)$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \xrightarrow{Loc} F'(x)$  na  $(a, b)$ .

┌  
Důkaz

„První bod“: Funkce  $s_n(x) = \sum_{n=1}^k u_n(x)$  jsou spojitě a  $s_k \xrightarrow{Loc} na (a, b)$ . Tedy podle důsledku věty z dřívějška (stejněměrná limita spojitých funkcí je spojitá) je jejich limita lokálně spojitá, tedy spojitá.

„Druhý bod“: Na  $s_k$  použijeme větu z dřívějška (pokud mají derivace stejnoměrnou limitu, pak i funkce ji mají a shoduje se až na derivaci). Ověříme podmínky, tedy že  $s_k(x) = \sum_{n=1}^k u_n(x)$  konverguje a  $s'_k = \sum_{n=1}^k u'_n \xrightarrow{Loc} na (a, b)$ . Podle tamté věty tedy  $\exists F(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  a tato funkce je diferencovatelná a

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{Loc} F(x) \quad \wedge \quad \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \xrightarrow{Loc} F'(x) \quad \text{na } (a, b).$$

└

□

### Věta 1.8 (Abel-Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)

Nechť  $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost funkcí definovaných na intervalu  $J$  a nechť  $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost funkcí na  $J$  taková, že  $b_1(x) \geq b_2(x) \geq \dots \geq 0$ . Jestliže je splněna některá z následujících podmínek, pak  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) \Rightarrow na J$ .

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \Rightarrow na J$  a  $b_1$  je omezená.

(D)  $b_n \Rightarrow 0$  na  $J$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  má omezené částečné součty, tedy

$$\exists K > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in J : |s_n(x)| = \left| \sum_{i=1}^m a_i(x) \right| < K.$$

┌ *Důkaz*

„Dirichlet“: Necht  $\varepsilon > 0$ . Nalezneme  $n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x)| < \varepsilon$ . Necht  $m, n \geq n_0$ . Označme  $\sigma_i(x) := \sum_{j=m}^i a_j(x)$ . Pak

$$|\sigma_i(x)| \leq \left| \sum_{j=1}^i a_j(x) - \sum_{j=1}^{n_0-1} a_j(x) \right| \leq K + K.$$

$$\begin{aligned} \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : \left| \sum_{j=n}^m a_j(x) \cdot b_j(x) \right| &= \\ &= |a_n \cdot b_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n)b_{n+1} + \dots + (\sigma_m - \sigma_{m-1})b_m| \leq \\ &\leq \sup_{j=n, \dots, m} |\sigma_j(x)| (b_n - b_{n-1} + b_{n-1} - b_{n-2} + \dots + b_{m-1} - b_m + b_m) = \\ &= \sup_{j=n, \dots, m} |\sigma_j(x)| \cdot |b_n(x)| \leq 2K \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

A z BC podmínky už  $\sum a_i(x)b_i(x) \Rightarrow$  na  $J$ .

„Abel“: Necht  $\varepsilon > 0$ . Z BC podmínky pro  $\Rightarrow$

$$\exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : \left| \sum_{j=n}^m a_j(x) \right| < \varepsilon.$$

Tedy pro  $\sigma_1(x) = \sum_{j=n}^m a_j(x)$  platí  $|\sigma_i(x)| < \varepsilon$ . Analogicky odhadu výše

$$\left| \sum_{j=n}^m a_j(x) \cdot b_j(x) \right| \leq \sup_{j=n, \dots, m} |\sigma_j(x)| \cdot |b_n(x)| \leq \varepsilon \sup_{x \in J} (b_1(x)) \leq \varepsilon \cdot K.$$

└ Tedy  $\sum a_i(x) \cdot b_i(x)$  splňuje BX podmínku. □

## 2 Mocninné řady

### Definice 2.1 (Mocninná řada)

Necht  $x_0 \in \mathbb{R}$  a  $a_n \in \mathbb{R}$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$ . Řadu funkcí  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  nazýváme mocninnou řadou s koeficienty  $a_n$  a středem  $x_0$ .

### Definice 2.2 (Poloměr konvergence)

Poloměrem konvergence mocninné řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$  nazveme

$$R = \sup \left\{ r \in [0, \infty) \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ konverguje } \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \right\}.$$

**Věta 2.1** (O poloměru konvergence mocninné řady)

Nechť  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$  je mocninná řada a  $R \in [0, \infty]$  je její poloměr konvergence. Pak řada konverguje absolutně  $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  a diverguje  $\forall x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$ . Navíc platí  $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ . Pokud existuje  $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ , potom  $R = Q$ .

┌  
Důkaz

Položme  $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ . Pak pro  $x : |x - x_0| < R$  platí

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - x_0|}{R} < 1 \implies \text{řada k. absolutně.}$$

Pro  $|x - x_0| > R$  dostaneme úplně stejně  $> 1$ , tedy řada diverguje.

Nechť existuje  $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ , pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1}|}{|a_n \cdot (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x - x_0| \cdot \frac{1}{Q}.$$

Pro  $|x - x_0| < \frac{1}{Q}$  řada konverguje, pro  $|x - x_0| > \frac{1}{Q}$  řada diverguje, tedy  $\frac{1}{Q}$  je poloměr konvergence. □

**Věta 2.2** (O stejnoměrné konvergenci mocninné řady)

Nechť  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$  je mocninná řada a  $R \in (0, \infty]$  je její poloměr konvergence. Pak řada konverguje lokálně stejnoměrně na  $(x_0 - R, x_0 + R)$ .

┌  
Důkaz

Nechť  $0 < r < R$ . Podle předchozí věty  $\sum a_n \cdot r^n$  konverguje absolutně. Nyní

$$\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] : |a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n.$$

Víme, že  $\sum |a_n| r^n$  konverguje, tedy podle Weierstrassova kritéria  $\sum a_n(x - x_0)^n \Rightarrow$  na  $[x_0 - r, x_0 + r]$ . Tedy konverguje lokálně stejnoměrně na  $(x_0 - R, x_0 + R)$ . □

**Věta 2.3** (O derivaci mocninné řady)

Nechť  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$  je mocninná řada s poloměrem konvergence  $R > 0$ . Pak  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$  je také mocninná řada se stejným středem a s poloměrem konvergence  $R$ .

Navíc pro  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  platí  $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$ .



┌ *Důkaz*

Položme  $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ . Poloměr konvergence  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1} \stackrel{x \neq x_0}{=} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^n}{x - x_0}$  je podle věty výše

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n| \cdot n}} = R \cdot \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n}} = R.$$

Následně použijeme větu o derivaci a stejnoměrné konvergenci (v bodě  $x = x_0$  řada jistě konverguje a z předchozí věty řada derivací konverguje lokálně stejnoměrně) □

*Důsledek* (O integrování mocninné řady)

Nechť  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$  je mocninná řada s poloměrem konvergence  $R > 0$ . Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

je mocninná řada se stejným poloměrem konvergence. Navíc platí

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1} + C \text{ na } (x_0 - R, x_0 + R).$$

┌ *Důkaz* (Hint k důkazu)

Mocninou řadu vpravo zderivujeme. □

## Věta 2.4 (Abelova)

Nechť  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  je mocninná řada s poloměrem konvergence  $R > 0$ . Nechť navíc  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n$  konverguje. Pak řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$  konverguje stejnoměrně na  $[x_0, x_0 + R]$  a platí  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n$ .

┌  
Důkaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n \cdot R^n}_{a_n(x)} \cdot \underbrace{\frac{(x - x_0)^n}{R^n}}_{b_n(x)}.$$

Víme, že  $b_n \geq b_{n+1} \geq 0$ , jelikož  $\frac{(x-x_0)^n}{R^n} \geq \frac{(x-x_0)^{n+1}}{R^{n+1}} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{x-x_0}{R}$ . Navíc  $b_0 = 1$ . Víme, že  $\sum a_n \cdot R^n$  konverguje, tedy podle BC podmínky pro konvergenci reálné řady:

$$\exists \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n}^m a_k \cdot R^k \right| < \varepsilon.$$

Z toho ale jednoduše (jelikož  $a_n(x)$  na  $x$  nezávisí)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in [x_0, x_0 + R] : \left| \sum_{k=n}^m a_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n}^m a_k \cdot R^k \right| < \varepsilon.$$

Tedy podle Abel-Dirichletova kritéria (části Abel)  $\sum a_n(x - x_0)^n \Leftarrow$  na  $[x_0, x_0 + R]$ .

Funkce  $a_n(x - x_0)^n$  jsou spojité a  $\sum \Leftarrow \implies F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$  je spojitá na  $[x_0, x_0 + R]$ . Tedy

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + R} F(x) = F(x_0 + R).$$

└

### 3 Absolutně spojitě funkce a funkce s konečnou variací

*Poznámka*

Všechny integrály v této kapitole jsou Lebesgueovy.

#### 3.1 Derivace monotónní funkce

**Definice 3.1** (Limes superior a limes inferior pro funkce)

Nechť  $x \in (a, b)$  a  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Definujeme limes superior a limes inferior jako

$$\limsup_{h \rightarrow 0} f(x+h) := \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{y \in (x-h, x) \cup (x, x+h)} f(y), \quad \liminf_{h \rightarrow 0} f(x+h) := \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{y \in (x-h, x) \cup (x, x+h)} f(y).$$

*Poznámka*

Analogicky jako u posloupnosti platí věta:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \limsup_{h \rightarrow 0} f(x+h) = \liminf_{h \rightarrow 0} f(x+h).$$

### Definice 3.2

Nechť  $I$  je interval,  $x$  je vnitřní bod  $I$  a  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce. Definujeme horní a dolní derivaci funkce  $f$  v bodě  $x$  jako

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$\underline{D}f(x) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

### Věta 3.1 (Míra vzoru a obrazu)

Nechť  $I \subset \mathbb{R}$  je interval. Nechť  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je neklesající funkce,  $M \subset I$  je měřitelná a  $c > 0$ .

- Je-li  $\overline{D}f(x) > c$  na  $M$ , potom  $\mathcal{L}^*(f(M)) \supseteq c \cdot \mathcal{L}(M)$ .
- Je-li  $\underline{D}f(x) < c$  na  $M$ , potom  $\mathcal{L}^*(f(M)) \subseteq c \cdot \mathcal{L}(M)$ .

┌ Důkaz

└ Bez důkazu. □

### Věta 3.2 (Derivace monotónní funkce)

Nechť  $I \subset \mathbb{R}$  je interval a  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je monotónní funkce. Potom ve skoro každém bodě  $x \in I$  existuje  $f'(x)$ .

┌ Důkaz

Nechť  $M_{p,q} = \{x \in I \mid \underline{D}f(x) < p < q < \overline{D}f(x)\}$ . Podle předchozí věty

$$q \cdot \mathcal{L}(M_{p,q}) \subseteq \mathcal{L}^*(f(M_{p,q})) \subseteq p \cdot \mathcal{L}(M_{p,q}).$$

Tedy, protože  $p < q$ , tak  $\mathcal{L}(M_{p,q}) = 0$ .

Tvrdíme, že pro množinu  $M$  bodů nediferencovatelnosti platí  $M = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}, p < q} M_{p,q} \implies$ , tedy spočetné sjednocení nulových množin, tudíž  $M$  je nulová: „ $\supseteq$ “:  $x \in M_{p,q}, p < q \implies \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x) \implies \nexists Df(x)$ . „ $\subseteq$ “: Nechť  $x \in M \implies \nexists Df(x) \implies \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)$ . □

### Věta 3.3 (Integrál derivace monotónní funkce)

Nechť  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je neklesající funkce. Potom  $f'$  je lebesgueovsky

integrovatelná na  $[a, b]$  a platí

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a).$$

┌

*Důkaz*

$f$  je neklesající, tedy je měřitelná. Dodefinujeme  $f(x) = f(b)$  pro  $x > b$ . Z předchozí věty víme, že pro skoro všechna  $x \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ . Definujeme funkce  $g_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$ . Tyto funkce jsou měřitelné a pro skoro všechna  $x$  platí  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f'(x)$ . Dále  $f$  je neklesající, tedy  $g_n(x) \geq 0$  a  $f'(x) \geq 0$ .

Podle Fatouova lemmatu

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)dx &= \int_a^b \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n(x)dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x)dx = \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b n \cdot \left( f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(t)dt - n \cdot \int_a^b f(x)dx \right) = \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(t)dt - n \cdot \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( f(b) - n \cdot \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)dx \right) = \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Tedy  $f'$  je integrovatelná.

□

└

## 3.2 Funkce s konečnou variací

### Definice 3.3 (Kladná, záporná a totální variace)

Nechť  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  je uzavřený interval,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a  $D$  dělení  $[a, b]$ . Definujeme kladnou variaci, zápornou variaci a (totální) variaci jako:

$$\begin{aligned} V^+(f, a, b) &= \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ \right\}, \\ V^-(f, a, b) &= \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \right\}, \\ V(f, a, b) &= \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right\}. \end{aligned}$$

Dále zavedeme značení  $V_f^+(x) = V^+(f, a, x)$ , atd.

**Definice 3.4** (Konečná variace)

Řekneme, že funkce  $f$  má na intervalu  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  konečnou variaci, jestliže  $V(f, a, b) < \infty$ . Množinu všech funkcí s konečnou variací značíme  $BV([a, b])$ .

*Poznámka*

Nechť  $[a, b] \in \mathbb{R}$  a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Pak

- je-li  $f$  neklesající na  $[a, b]$ , pak  $V(f, a, b) = V^+(f, a, b) = f(b) - f(a)$ ;
- $|V(f, a, b)| \geq |f(a) - f(b)|$ .

**Věta 3.4** (Vztah omezené variace a monotonie)

Nechť  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  a nechť  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Má-li  $f$  konečnou variaci na  $[a, b]$ , pak  $V_f(x) = V_f^+(x) + V_f^-(x)$  a  $f(x) - f(a) = V_f^+(x) - V_f^-(x)$ .
- $f \in BV(a, b)$  právě tehdy, když existují neklesající funkce  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tak, že  $f = v - u$ .

┌ *Důkaz*

„První bod“: Necht  $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ . Búno stačí pro  $x = b$ .

$$\begin{aligned} V(f, a, b) &\geq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ + \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \leq V^+(f, a, b) + V^-(f, a, b). \end{aligned}$$

Z těchto nerovností vezmeme supremum přes všechna dělení  $D$  a dostaneme  $V(f, a, b) = V^+(f, a, b) + V^-(f, a, b)$  ( $\geq$  z nerovnosti mezi prvním a třetím výrazem,  $\leq$  z nerovnosti mezi druhým a čtvrtým).

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \leq \\ &\leq V^+(f, a, b) - \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-. \end{aligned}$$

Infimum přes dělení  $D$  dá  $f(b) - f(a) \leq V^+(f, a, b) - \sup \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- = V^+(f, a, b) - V^-(f, a, b)$ .

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - V^-(f, a, b). \end{aligned}$$

Supremum přes dělení  $D$  dá  $f(b) - f(a) \geq \sup \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - V^-(f, a, b) = V^+(f, a, b) - V^-(f, a, b)$ .

„Druhý bod“: „ $\implies$ “: Z prvního bodu víme, že  $f(x) = (f(a) + V^+(f, a, x)) - V^-(f, a, x) = v(x) - u(x)$ .

„ $\impliedby$ “: Mějme tedy  $f(x) = v(x) - u(x)$

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^n |v(x_i) - v(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |u(x_i) - u(x_{i-1})| = v(b) - v(a) + u(b) - u(a),$$

což dá  $f \in BV(a, b)$ . □

└ *Důsledek*

$f \in BV \implies f$  má derivaci skoro všude.

*Důkaz*

Z předchozí věty  $f = v - u$  a věty před ní mají  $u, v$  derivace skoro všude.  $\square$

### 3.3 Absolutně spojitá funkce

#### Definice 3.5 (Absolutně spojitá funkce)

Nechť  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $f$  je absolutně spojitá na  $[a, b]$ , jestliže  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  : pro každý systém po dvou disjunktních intervalů  $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^n$ ,  $(a_j, b_j \subset [a, b])$  splňující  $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta \implies \sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$ . Množinu absolutně spojitých funkcí na intervalu  $[a, b]$  budeme značit  $AC([a, b])$ .

*Poznámka*

$f \in Lip([a, b]) \implies f \in AC([a, b]) \implies f \in BC([a, b]) \cap C([a, b])$  a žádnou implikaci nelze obrátit.

$AC([a, b])$  je lineární prostor.

$f \in AC \implies V^+ \in AC \wedge V^- \in AC$ .

#### Věta 3.5 (Integrál derivace absolutně spojité funkce)

Nechť  $f \in AC([a, b])$ . Potom  $f' \in L^1([a, b])$  a  $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$ .

*Důkaz*

BÚNO  $f$  je rostoucí ( $f \in AC \implies f \in BV \implies f(x) = (v(x) + x) - (u(x) + x)$ ,  $v(x) + x, u(x) + x$  jsou rostoucí ( $u, v$  neklesající, ale my potřebujeme rostoucí, proto  $+x$ ) a  $AC$ ). Podle věty výše víme, že  $\exists f'(x)$  skoro všude. Tedy  $[a, b]$  si můžeme rozdělit na tři množiny – s kladnou  $f'(D)$ , s nulovou  $f'(Z)$  a bez  $f'(N)$ .

Dokážeme, že  $|f(N)| = 0$ ,  $|f(Z)| = 0$ ,  $\int_D f'(x) = |f(D)|$ . Pak  $\int_a^b f'(x) = \int_D f'(x) dx = |f(D)| = |f(D) \cup f(Z) \cup f(N)| = f(b) - f(a)$ , neboť  $f$  je rostoucí, tedy prostá.

„ $|f(N)| = 0$ “: Víme  $|N| = 0$ . K  $\varepsilon > 0$  nalezneme  $\delta > 0$  z definice  $AC$ . K  $N$  nalezneme otevřenou množinu  $G$  tak, že  $N \subset G$  a  $|G| < \delta$ . Také  $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$  (resp.  $\bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i)$ ), kde  $(a_i, b_i)$  jsou po dvou disjunktní. Nyní  $\forall m \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^m b_i - a_i \leq |G| < \delta \implies \sum_{i=1}^m f(b_i) - f(a_i) < \varepsilon$ . Nakonec pro  $m \rightarrow \infty$  je  $\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$  a  $f(N) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f((a_i, b_i))$ , tudíž  $\sum_{i=1}^{\infty} f(b_i) - f(a_i) \leq \varepsilon$ .

„ $|f(Z)| = 0$ “: Necht  $\varepsilon > 0$  a víme, že  $f'(x) < \varepsilon$  na  $Z$ . Podle věty výše  $|f(Z)| \leq \varepsilon \cdot |Z| \leq \varepsilon \cdot (b - a)$ , tudíž  $|f(Z)| = 0$ .

„ $\int_D f'(x) = |f(D)|$ “: Necht  $\tau > 1$ . Označme  $D_k = \{x | T^k \leq f'(x) < \tau^{k+1}\}$ . Pak  $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k$ . Podle věty výše

$$\frac{1}{\tau} \int_{D_k} f'(x) dx \leq \tau^k |D_k| \leq |f(D_k)| \leq \tau^{k+1} |D_k| \leq \tau \int_{D_k} f' dx$$

Posčítáme a získáme  $\frac{1}{\tau} \int_D f'(x) dx \leq |f(D)| \leq \tau \int_D f'(x) dx$ . Limita přes  $\tau$  nám dá požadovanou rovnost.  $\square$

### Věta 3.6 (Neurčitý Lebesgueův integrál)

Necht  $\Theta \in L^1(a, b)$  a  $f$  je neurčitý Lebesgueův integrál  $\Theta$ , tj. existuje konstanta  $C$ , že

$$f(x) = \int_a^x \Theta(t) dt + C, \quad \forall x \in [a, b].$$

Pak  $f \in AC$  a  $f' = \Theta$  skoro všude.

### Tvrzení 3.7 (Pozorování z TMI)

$$\Theta \in L^1 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall M, |M| < \delta \implies \int_M |\Theta| < \varepsilon.$$



┌  
Důkaz

„ $f \in AC$ “: K  $\varepsilon > 0$  zvolme  $\delta > 0$  z pozorování z TMI. Necht  $(a_j, b_j)$  jsou po dvou disjunktní a  $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta$ . Nyní

$$\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| = \sum_{j=1}^n \left| \int_{a_j}^{b_j} \Theta(t) dt \right| \leq \int_{\bigcup (a_j, b_j)} |\Theta(t)| dt < \varepsilon \implies f \in AC.$$

„ $f' = \Theta$  skoro všude“: Víme z předchozí věty, že  $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$ . Také víme  $f(x) - C = \int_a^x \Theta(t) dt$ . Tedy  $C - f(a) = \int_a^x (f'(t) - \Theta(t)) dt$ . Při  $x = a$  máme  $C = f(a)$ , tedy  $\forall x \in [a, b] : \int_a^x (f'(t) - \Theta(t)) dt = 0$ . Z TMI víme, že  $f'(t) = \Theta(t)$  skoro všude.  $\square$

Důsledek

$$f \in AC([a, b]) \Leftrightarrow \exists \Theta \in L^1(a, b), f(x) = \int_a^x \Theta(t) dt + C.$$

### Věta 3.8 (Integrace per partes pro absolutně spojitě funkce)

Necht  $f, g \in AC([a, b])$ . Potom

$$\int_a^b f' g = [fg]_a^b - \int_a^b f g'.$$

┌  
Důkaz

┌ TODO!!!  $\square$

## 4 Fourierovy řady

### Definice 4.1

Symbolem  $P_{2\pi}$  značíme množinu všech lokálně integrovatelných  $2\pi$ -periodických funkcí na  $\mathbb{R}$ .

### Definice 4.2 (Trigonometrická řada, trigonometrický polynom)

Necht  $a_k, k \in \mathbb{N}_0$  a  $b_k, k \in \mathbb{N}$  jsou posloupnosti reálných čísel. Pak řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme trigonometrickou řadou. Je-li navíc  $n \in \mathbb{N}$ , pak funkci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme trigonometrickým polynomem stupně  $n$ .

#### Věta 4.1 (Fourierovy vzorce)

Nechť  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  a  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  jsou posloupnosti reálných čísel a řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(k \cdot x))$$

konverguje stejnoměrně k funkci  $f$  na  $\mathbb{R}$ . Potom

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(k \cdot x) dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(k \cdot x) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Důkaz

TODO!!!

□

#### Definice 4.3 (Fourierovy koeficienty, Fourierova řada, částečný součet Fourierovy řady)

Nechť  $f \in P_{2\pi}$ . Pak posloupnosti reálných čísel  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  a  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ , definované předpisy

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(k \cdot x) dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(k \cdot x) dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

nazýváme Fourierovými koeficienty funkce  $f$ . Trigonometrickou řadu

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \cdot x) + b_k \sin(k \cdot x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme Fourierovou řadou funkce  $f$ . Vztah mezi funkcí  $f$  a její Fourierovou řadou  $Sf$  značíme symbolem  $f \sim Sf$ . Pro  $n \in \mathbb{N}_0$  dále definujeme částečný součet Fourierovy řady funkce  $f$  předpisem

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k \cdot x) + b_k \sin(k \cdot x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Důsledek* (Vět z minulého semestru)

Nechť  $f \in L^2(0, 2\pi)$  a  $a_k, b_k$  jsou Fourierovy koeficienty  $f$ . Pak platí

$$f(x) = S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \cdot x) + b_k \sin(k \cdot x))$$

ve smyslu rovnosti  $L^2$  funkcí.

Navíc platí tzv. Parsevalova rovnost

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

┌

*Důkaz*

└ TODO!!!

□

## 4.1 Bodová konvergence Fourierových řad

### **Definice 4.4** (Dirichletovo jádro)

Nechť  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Potom funkce  $D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos n \cdot x$  nazýváme Dirichletovým jádrem.

### **Věta 4.2** (O částečných součtech Fourierovy řady)

Nechť  $f \in P_{2\pi}$  a  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Potom pro každé  $x \in \mathbb{R}$  platí

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_n(y) dy = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (f(x+y) + f(x-y)) D_n(y) dy.$$

┌  
Důkaz

$$\begin{aligned}
S_n f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(k \cdot t) dt \cdot \cos(k \cdot x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(k \cdot t) dt \cdot \sin(k \cdot x) = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(k \cdot t) \cos(k \cdot x) + \sin(k \cdot t) \sin(k \cdot x)) \right) dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k \cdot t - k \cdot x) \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot D_n(t - x) dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(y + x) \cdot D_n(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y + x) D_n(y) dy = \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^0 \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (f(x + y) + f(x - y)) \cdot D_n(y) dy.
\end{aligned}$$

└

□

### Věta 4.3 (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)

Nechť  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  je omezený interval a nechť  $f \in L^1(a, b)$ . Potom  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cdot \cos(t \cdot x) dx = 0$  a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(t \cdot x) dx = 0$ .

┌  
Důkaz

Pokud se nepletu, tak elegantnější důkaz je v 0M3/Funkcionalka/Funkcionalka.pdf str. 69.

$$1. \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b \chi_{(c,d)}(x) \cdot \cos(t \cdot x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_c^d \cos(t \cdot x) dx =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin(t \cdot x)}{t} \right]_c^d = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(t \cdot d) - \sin(t \cdot c)}{t} = 0.$$

$$2. G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (c_j, d_j) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \left| \bigcup_{j=j_0}^{\infty} (c_j, d_j) \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \int_a^b \chi_G(x) \cos(t \cdot x) dx \right| \leq 0 + \int_a^b \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \chi_{(c_j, d_j)}(x) dx < \varepsilon.$$

$$3. f = \chi_E, E \in \mathcal{B} \implies \forall \varepsilon > 0 \exists G \text{ otevřená} : E \subset G \wedge |G \setminus E| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b \chi_E \cos(t \cdot x) dx \right| \leq \left| \int_a^b \chi_G(x) \cos(t \cdot x) dx \right| + \left| \int_a^b \chi_{G \setminus E}(x) \cdot \cos(t \cdot x) dx \right| \leq 0 + \varepsilon.$$

4. Pro jednoduchou funkci je to triviální, neboť je to konečný součet 3.

5. K  $\varepsilon > 0 \exists s$  jednoduchá, že  $\int_a^b |f(x) - s(x)| dx < \varepsilon$ .

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \cos(t \cdot x) dx \right| \leq \left| \int_a^b s(x) \cos(t \cdot x) dx \right| + \left| \int_a^b (s(x) - f(x)) \cdot \cos(t \cdot x) dx \right| \rightarrow 0 + \varepsilon \rightarrow 0.$$

└

□

#### Věta 4.4 (Riemannova věta o lokalizaci)

Nechť  $f \in P_{2\pi}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  a  $s \in \mathbb{R}$ . Potom  $Sf(x) = s \Leftrightarrow \exists \delta \in (0, \pi)$  tak, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - 2s) \cdot D_n(t) dt = 0.$$

┌ *Důkaz*

Z věty výše víme, že  $S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+y) + f(x-y)) \cdot D_n(y) dy$ . Dále z vlastností Dirichletova jádra

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(y) \cdot 2s dy.$$

Chceme  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f(x) - s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi (f(x+y) + f(x-y) - 2s) D_n(y) dy =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\delta (f(x+y) + f(x-y) - 2s) \cdot D_n(y) dy + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \dots dy.$$

Stačí ukázat, že druhý integrál je roven nule. Z vlastností  $D_n$  je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^\pi (f(x+y) + f(x-y) - 2s) \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \cdot y)}{2 \cdot \sin \frac{y}{2}} dy = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^\pi \frac{f(x+y) + f(x-y) - 2s}{2 \sin \frac{y}{2}} \sin((n + \frac{1}{2})y) dy \end{aligned}$$

Pokud je první činitel  $L_1$ , pak je toto rovno 0 z Riemannova-Lebesgueova lemmatu. Ale první činitel je integrovatelný, neboť  $f(x+y)$ ,  $f(x-y)$  i  $2s$  jsou integrovatelné a  $\sin \frac{y}{2} > \sin \frac{\delta}{2}$ . □

### **Definice 4.5** (Značení)

Nechť  $x \in \mathbb{R}$  a  $f$  je reálná funkce na okolí  $x$ . Značíme  $f(x+) = \lim_{t \rightarrow x+} f(t)$  a  $f(x-) = \lim_{t \rightarrow x-} f(t)$

### **Věta 4.5** (Diniovo kritérium)

Nechť  $f \in P_{2\pi}$  a  $x \in \mathbb{R}$ . Nechť existují vlastní limity  $f(x+)$  a  $f(x-)$  a nechť existují limity

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x-t) - f(x-)}{t}.$$

Potom řada  $S_f$  konverguje v  $x$  a platí  $S_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ . Speciálně má-li  $f$  konečné jednostranné derivace v  $x$ , pak  $S_f(x) = f(x)$ .

┌  
Důkaz

Podle předchozí věty stačí ukázat

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 : 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - (f(x+) + f(x-))) \cdot D_n(t) dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \left( \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-)}{t} \right) \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \cdot \sin((n + \frac{1}{2}) \cdot t) dt \end{aligned}$$

Z definice limity jistě existuje  $\delta > 0$  tak, že  $\frac{f(x+t)-f(x+)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x-)}{t}$  je omezená. Dále  $\frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}}$  je omezená na  $[0, \pi]$ . Takže součin (značme ho  $F$ ) těchto dvou funkcí je v  $\mathcal{L}^1$ . Podle

Riemann-Lebesgueova lemmatu je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta F(t) \cdot \sin((n + \frac{1}{2}) \cdot t) dt = 0$ . □

└

### Věta 4.6 (Jordan-Dirichletovo kritérium)

Nechť  $f \in P_{2\pi}$  a nechť  $f \in BV([0, 2\pi])$ . Potom

- pro každé  $x \in [0, 2\pi]$  Fourierova řada konverguje a  $S_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ ,
- je-li  $f$  navíc spojitá na  $(a, b) \subset [0, 2\pi]$ , pak  $S_n f \xrightarrow{Loc} f$  na  $[a, b]$ .

## 4.2 Stejnomořná konvergence – Fejérova věta

### Definice 4.6 (Konvergence v Cesarově smyslu)

Nechť  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že  $a_n$  konverguje k  $a \in \mathbb{R}$  v Cesarově [Čezarově] smyslu, pokud  $\sigma_n = \frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1} \rightarrow a$ .

### Definice 4.7 (Fejérovo jádro)

Nechť  $n \in \mathbb{N}_0$ . Potom funkci  $K_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n D_k(x)$  nazýváme Fejérovým jádrem.

┌  
Poznámka

$K_n$  je sudá,  $2\pi$ -periodická a  $K_n(0) = \frac{n+1}{2}$ . Platí  $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) = \pi$ .

$$K_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left( \frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ (To se ukáže indukcí.)}$$

└

### Definice 4.8 (Částečné Fejérové součty)

Nechť  $f \in P_{2\pi}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  a  $n \in \mathbb{N}_0$ . Pak výraz

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n S_k f(x)$$

nazýváme  $n$ -tý částečný Fejérův součet  $f$ .

┌

*Poznámka*

To se z věty výše rovná  $\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \cdot D_k(y) dy$ .

└

### Věta 4.7 (Fejérova)

Nechť  $f \in P_{2\pi}$ .

- Jestliže pro nějaké  $x \in \mathbb{R}$  existují vlastní limity  $f(x+)$  a  $f(x-)$ , pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

- Je-li  $f$  spojitá na  $(a, b)$ , pak  $\sigma_n f \xrightarrow{Loc} f$  na  $(a, b)$ .

┌

*Důkaz (1. bod)*

Podle poznámky

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) \cdot K_n(t) dt$$

a  $s = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 2s \cdot K_n(t) dt$ . Tedy

$$s_n f(x) - s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2s) K_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right).$$

$$\text{K } \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in (0, \delta) : |f(x+t) + f(x-t) - (f(x+) + f(x-))| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \varepsilon \cdot |K_n(t)| dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varepsilon \cdot K_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - (f(x+) + f(x-))| dt \cdot \frac{1}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \rightarrow 0.$$

└

□



┌ *Důkaz* (2. bod)

Nechť  $[c, d] \subset (a, b)$ . Chceme  $\sigma_n f(x) \rightrightarrows f(x)$  na  $[c, d]$ , tedy  $|\sigma_n f(x) - f(x)| \leq$  něco malého, co nezávisí na  $x \in [c, d]$ . Nalezneme  $\gamma > 0$ , aby  $[c - \gamma, d + \gamma] \subset (a, b)$ . Ze stejnoměrné spojitosti  $f$  na  $[c - \gamma, d + \gamma]$  k  $\varepsilon > 0$  nalezneme  $\delta > 0$  tak, že

$$\forall s, t \in [c - \gamma, d + \gamma] : |s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Tedy  $\forall x \in [c, d] \quad \forall t \in (0, \gamma)$

$$|f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)| \leq |f(x + t) - f(x)| + |f(x - t) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Analogicky prvnímú bodu:

$$|\sigma_n f(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{\pi} \left( \int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) (f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)) \cdot K_n(t) dt \right|.$$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta 2\varepsilon \cdot K_n(t) dt \leq \varepsilon,$$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi |f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)| dt \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x + t)| + |f(x - t)| + 2M dt \cdot \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} (2 \int_0^{2\pi} |f(t)| dt + 2\pi 2M) \cdot \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \rightarrow 0$$

└ ( $f$  je spojitá na  $[c, d] \implies |f(x)| \leq M$ .) □

### Věta 4.8 (Weierstrassova – trigonometrická verze)

Nechť  $f \in P_{2\pi}$  je spojitá na  $\mathbb{R}$  a nechť  $\varepsilon > 0$ . Pak existuje trigonometrický polynom  $T$  splňující  $\|f - T\|_{C(\mathbb{R})} < \varepsilon$ .

┌ *Důkaz*

└ Z Fejerovy věty (2. bod). □

### Důsledek (Weierstrass)

Nechť  $f \in C([a, b])$  a  $\varepsilon > 0$ . Potom existuje polynom  $P$  tak, že  $\|f - P\|_{C([a, b])} < \varepsilon$ .

┌ *Důkaz* (Šel by udělat přes komplexní čísla, ale zde je důkaz bez nich.)

Z Taylorovy věty víme, že  $\forall [c, d] \forall \varepsilon > 0 \exists$  polynomy  $P, Q : |\sin x - P(x)| < \varepsilon$  a  $|\cos x - Q(x)| < \varepsilon$  na  $[c, d]$ . BÚNO  $[a, b] = [0, 2\pi]$  a  $f$  je periodická.

Z předchozí věty nalezneme trigonometrický polynom, že  $\|f - T\| < \varepsilon$ . Nyní  $T = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$ . Nalezneme polynomy  $P_k$  a  $Q_k$ , aby  $|\cos kx - P_k| < \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{|a_k|+1}$ ,  $|\sin kx - Q_k| < \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{|b_k|+1}$ . Položme  $P = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot P_k + b_k \cdot Q_k$ .  $P$  je polynom.

$$\begin{aligned} \|P - f\| &\leq \|f - T\| + \|T - P\| < \varepsilon + \left\| \sum_{k=1}^n a_k \cdot (\cos kx - P_k) + b_k (\sin kx - Q_k) \right\| < \\ &< \varepsilon + \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{|a_k|+1} + |b_k| \cdot \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{|b_k|+1} < 3 \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

└

□

### Věta 4.9 (Fourierovy koeficienty určují funkci)

Nechť  $f, g \in P_{2\pi}$  mají stejné Fourierovy koeficienty. Potom  $f = g$  skoro všude.

┌ *Důkaz*

Funkce  $f - g$  má nulové Fourierovy koeficienty. Tedy

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nxdx = 0 \quad \wedge \quad \int_0^{2\pi} f(x) \sin nxdx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

BÚNO  $f \neq 0, g = 0$ . Označme  $\mathcal{T} := \left\{ \varphi \in L^\infty(0, 2\pi) \mid \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \varphi(x) dx = 0 \right\}$ .

1.  $\mathcal{T}$  je zřejmě lineární prostor. 2. Nechť  $\varphi_n \in \mathcal{T}$ ,  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  skoro všude a  $\|\varphi_n\|_\infty \leq K \forall n$ . Pak  $\varphi \in \mathcal{T}$  z Lebesgueovy věty. 3. Trigonometrické polynomy  $\subset \mathcal{T}$ , neboť  $\cos nx \in \mathcal{T}$ ,  $\sin nx \in \mathcal{T}$  a použijeme jedničku. 4. Nechť  $\varphi$  je spojitá,  $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0$ . Podle předchozí věty existuje trigonometrický polynom  $T_n \rightrightarrows \varphi$ . Tedy  $\varphi \in \mathcal{T}$  z druhého bodu. 5.  $[a, b] \subset (0, 2\pi)$ , pak  $\chi_{(a,b)} \in \mathcal{T}$ , jelikož k ní konvergují „lichoběžníky“. 6.  $G \subset [0, 2\pi]$  otevřená, potom  $\chi_G \in \mathcal{T}$ , neboť  $G = \bigcup_{i=1}^\infty (a_i, b_i)$  a  $\sum_{i=1}^k \chi_{(a_i, b_i)} \rightarrow \chi_G$  skoro všude a sumy jsou stejně omezené  $K = 1$ . 7.  $E \subset (0, 2\pi)$  měřitelná, pak  $\chi_E \in \mathcal{T}$ , neboť pro každé  $n$  existuje  $G_n$  otevřená, že  $E \subset G_n \wedge |G_n \setminus E| < \frac{1}{2^n}$  (z TMI).

8.  $E_1 := \{f > 0\}$  a  $E_2 := \{f < 0\}$ :

$$\int_0^{2\pi} |f| = \int_{E_1} f - \int_{E_2} f = \int_0^{2\pi} \chi_{E_1} f - \int_0^{2\pi} \chi_{E_2} f = 0 \implies f = 0 \text{ skoro všude.}$$

└

□

*Důsledek*

Trigonometrické funkce tvoří bázi prostoru  $L^2(0, 2\pi)$ .

┌ *Důkaz*

Nechť pro spor BÚNO  $f \neq 0$  a  $\langle f, \sin nx \rangle = 0$  a  $\langle f, \cos nx \rangle = 0 \forall n$ . Pak je ale  $f \equiv 0$  z předchozí věty. □

*Poznámka* (Komplexní zápis)

$$Sf(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cdot e^{ikx} + c_{-k} \cdot e^{-ikx}),$$
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## 5 Fourierova transformace

**Definice 5.1** (Fourierova transformace, inverzní Fourierova transformace)

Nechť  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Pak Fourierova transformace je definována jako

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

A inverzní Fourierova transformace  $f$  je definována jako

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{-\infty} f(x) e^{i\omega x} dx.$$

*Poznámka*

Pro  $f \in \mathcal{L}^2$  platí  $\check{\check{f}} = f$  ve smyslu rovnosti  $\mathcal{L}^2$  funkcí.

Existuje-li vlastní derivace  $f$ , pak  $\check{\check{f}} = f$ .

Je-li  $f \in BV$ , pak  $\check{\check{f}}(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ , kde  $\check{f}$  je limita pro meze jdoucí do nekonečna.

**Definice 5.2** (Konvoluce, nezkouší se)

Nechť  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Pak konvoluce funkcí  $f$  a  $g$  je definována jako

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

**Věta 5.1** (Fourierova transformace konvoluce)

Nechť  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Pak  $\widehat{(f * g)}(u) = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$ .

┌ Poznámka

Analogicky lze dokázat

$$\sqrt{2\pi} \widehat{(f \cdot g)}(x) = (\check{f} * \check{g})(x).$$

└

┌ Poznámka

$f, g \in \mathcal{L}^1 \implies f * g \in \mathcal{L}^1$ . (Důkaz rozepsáním a prohozením integrálů.)

└

┌ Důkaz

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \right) e^{-i\omega x} dx =$$

(Pomocí Fubiniovy věty, integrovatelnost máme z poznámky.)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \cdot e^{-i\omega(x-y)} \right) e^{-i\omega y} dy = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \cdot e^{-i\omega y} \cdot \hat{f}(\omega) dy = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega). \end{aligned}$$

└

□

## Věta 5.2 (Fourierova transformace derivace)

Nechť  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ,  $f$  a  $f'$  spojitě na  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$  a  $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Pak

$$\widehat{f'}(\omega) = i \cdot \omega \cdot \hat{f}(\omega).$$

┌

Důkaz

$$\widehat{f'}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \cdot e^{-i\omega x} \stackrel{\text{per partes}}{=} 0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega e^{-i\omega x} \cdot f(x) dx = i\omega \hat{f}(\omega).$$

└

□

## 6 Souvislé a obloukově souvislé množiny metrické prostory

### Definice 6.1 (Obojetná množina)

Nechť  $(P, \varrho)$  je metrický prostor. Řekneme, že  $A \subset P$  je obojetná (clopen), jestliže je zároveň otevřená a uzavřená.

### Definice 6.2 (Souvislý metrický prostor)

Řekneme, že metrický prostor  $(P, \varrho)$  je souvislý, jestliže není sjednocením dvou disjunktních

neprázdných otevřených množin.

Řekneme, že  $A \subset P$  je souvislá, jestliže je  $MP(A, \varrho)$  souvislý.

### Věta 6.1 (Charakterizace souvislých prostorů)

Nechť  $(P, \varrho)$  je metrický prostor. Pak následující je ekvivalentní:

- $P$  není souvislý.
- Existují dvě uzavřené neprázdné množiny  $F_1, F_2 \subset P$ , které jsou disjunktní a  $P = F_1 \cup F_2$ .
- Existuje obojetná množina  $H \subset P$ ,  $H \neq \emptyset$  a  $H \neq P$ .

Důkaz

„1.  $\implies$  2.“:  $P$  není souvislý  $\implies P = G_1 \cup G_2$ ,  $G_1, G_2 \neq \emptyset$  otevřené,  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ . Položme  $F_1 = P \setminus G_1 = G_2$  a  $F_2 = P \setminus G_2 = G_1$ . Toto jsou uzavřené neprázdné disjunktní množiny a  $P = F_1 \cup F_2$ .

„2.  $\implies$  3.“: Položme  $H = F_1$ . Pak  $H \neq \emptyset$ ,  $H \neq P$ . Navíc  $H$  je uzavřená a  $P \setminus H = P \setminus F_1 = F_2$  je uzavřená, tedy  $H$  je otevřená.

„3.  $\implies$  1.“: Položme  $G_1 = H$  a  $G_2 = P \setminus H$ . Pak  $G_1 \cup G_2 = P$  a  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$  zřejmě,  $G_1, G_2 \neq \emptyset$ , neboť  $H \neq \emptyset$  a  $H \neq P$ . Dále  $G_1$  je otevřená, neboť  $H$  je otevřená a  $G_2$  je otevřená, protože  $P \setminus G_2 = H$  je uzavřená.  $\square$

### Věta 6.2 (Vlastnosti souvislých prostorů)

Nechť  $(P, \varrho)$  je metrický prostor. Pak

- Nechť  $(Q, \tau)$  je metrický prostor a  $f : P \rightarrow Q$  je spojitý. Nechť  $A \subset P$  je souvislá množina, pak  $f(A)$  je souvislá v  $Q$ .
- Nechť  $A \subset P$  je souvislá a  $A \subset B \subset \overline{A}$ . Pak  $B$  je souvislá, speciálně  $\overline{A}$  je souvislá.
- Nechť  $I \neq \emptyset$  a  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  jsou souvislé množiny v  $(P, \varrho)$ . Nechť každé dvě množiny  $A_\alpha, A_\beta$ ,  $\alpha, \beta \in I$  jsou disjunktní. Pak  $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  je souvislá.

┌ *Důkaz*

„První bod“ sporem: necht  $f(A) = G_1 \cup G_2$ ,  $G_1, G_2$  otevřené v  $Q \neq \emptyset$  disjunktní. Pak  $A = f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)$  jsou neprázdné disjunktní otevřené, což je spor se souvislostí  $A$ .

„Druhý bod“: necht pro spor  $B = G_1 \cup G_2$  jsou neprázdné disjunktní otevřené v množině  $(B, \varrho)$ . Pak  $A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2)$  jsou disjunktní otevřené (průnik otevřené množiny a  $X$  je otevřený v  $X$ ) množiny v  $(A, \varrho)$ .

Pokud  $A \cap G_1 \neq \emptyset$  a  $A \cap G_2 \neq \emptyset$ , pak máme spor se souvislostí  $A$ . Tedy BÚNO  $A \cap G_1 = \emptyset \implies A \subset G_2$ . Víme  $\exists x \in B \cap G_1 \implies x \in \bar{A} \implies \varrho(x, A) = 0$ . Ale  $B \cap G_1$  je otevřená v  $(B, \varrho) \implies \exists r > 0 : B(x, r) \subset G_1 \implies \varrho(x, G_2) \geq r \implies \varrho(x, A) \geq r, \nabla$ .

„Třetí bod“ sporem:  $A = G_1 \cup G_2$  otevřené, neprázdné, disjunktní. Pak  $A_\alpha = (A_\alpha \cap G_1) \cup (A_\alpha \cap G_2)$ , disjunktní, otevřené v  $(A_\alpha, \varrho)$ .  $A_\alpha$  souvislá  $\implies A_\alpha \cap G_1 = \emptyset$  nebo  $A_\alpha \cap G_2 = \emptyset$ . Zvolme pevné  $A_{\alpha_0}$  a BÚNO  $A_{\alpha_0} \subset G_1$ . Pak  $\forall \alpha : A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset \implies A_\alpha \cap G_1 \neq \emptyset$ . Tedy  $A \subset G_1 \implies G_2 = \emptyset, \nabla$ . □

*Důsledek*

Necht  $f$  je spojitě zobrazení  $I = [0, 1]$  do metrického prostoru. Pak  $f(I)$  je souvislá množina.

### Definice 6.3 (Komponenta)

Řekneme, že  $A$  je komponenta  $P$ , jestliže  $A$  je maximální souvislá podmnožina  $P$ .

### Věta 6.3 (Charakterizace komponent)

Necht  $(P, \varrho)$  je neprázdný metrický prostor.

1. Komponenty  $P$  jsou neprázdné a uzavřené.
2. Každý bod  $P$  je obsažen v nějaké komponentě.
3. Komponenty jsou navzájem disjunktní.

┌ *Důkaz*

„1.“: Jednobodové množiny jsou souvislé, takže  $\emptyset$  není maximální. Uzavěr souvislé množiny je také souvislý, tedy neuzavřené množiny také nejsou maximální.

„2.“: Necht  $x \in P$ . Definujme  $A = \bigcup \{M \mid M \text{ souvislá} \wedge x \in M\}$ .  $A$  je neprázdná, protože  $\{x\}$  je souvislá. Podle předchozí věty (třetí bod) je  $A$  souvislá ( $x \in M_1 \cap M_2$ ).  $A$  je maximální, neboť  $A$  je jedna z množin přes které sjednocujeme.  $x \in A$ .

„3.“: Necht pro spor  $A \neq B$  komponenty a  $A \cap B \neq \emptyset$ . Potom z minulé věty (třetí bod)  $A \cap B$  je souvislá množina, tedy  $A, B$  nejsou maximální. □

**Definice 6.4** (Křivková souvislost)

Řekneme, že metrický prostor  $(P, \varrho)$  je křivkově souvislý, jestliže pro každé  $x, y \in P$  existuje spojitě zobrazení  $\gamma : [0, 1] \rightarrow (P, \varrho)$  takové, že  $\gamma(0) = x$  a  $\gamma(1) = y$ .

Řekneme, že  $A \subset P$  je křivkově souvislý, jestliže je metrický prostor  $(A, \varrho)$  křivkově souvislý.

**Věta 6.4** (Souvislost souvislosti a křivkové souvislosti)

*Každá křivkově souvislá množina v metrickém prostoru je souvislá.*

┌

*Důkaz*

Sporem: Necht  $(A, \varrho)$  je křivkově souvislý, ale není souvislý. Tedy  $A = G_1 \cup G_2$ ,  $G_1$  a  $G_2$  otevřené neprázdné disjunktní množiny. Nalezneme  $x \in G_1$ ,  $x \in G_2$  a  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ ,  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(1) = y$ .

Nyní  $[0, 1] = \gamma^{-1}(G_1) \cup \gamma^{-1}(G_2)$ . Obě tyto množiny jsou otevřené disjunktní a neprázdné, tedy  $[0, 1]$  není souvislý.  $\nabla$

└

*Poznámka* (Souvislá křivkově nesouvislá množina)

$$\begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

**Věta 6.5** (Souvislost a otevřené množiny v  $\mathbb{R}^n$ )

*Necht  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená. Pak  $G$  je souvislá právě tehdy, když je křivkově souvislá.*

┌

*Důkaz*

„ $\Leftarrow$ “ víme. „ $\Rightarrow$ “: Necht  $G$  je souvislá. Zvolme  $x \in G$  libovolně. Definujme  $A = \{y \in G \mid \exists \text{ spojitá křivka z } x \text{ do } y\}$ . Chceme  $A = G$ , pak vždy dvojice bodů lze spojit křivkou (například skrz  $x$ ).

„ $A$  je otevřené“: Necht  $y \in A$ ,  $G$  je otevřené  $\Rightarrow \exists r > 0 : B(y, r) \subset G$ . Pak každý bod  $z \in B(y, r)$  lze spojit s  $x$ , neboť lze spojit  $x$  s  $y$  a  $y$  se  $z$ . Tedy  $B(y, r) \subset A \Rightarrow A$  otevřená.

„ $A$  je uzavřená“: Necht  $y \in \overline{A}$ ,  $G$  je otevřené  $\Rightarrow \exists B(y, r) \subset G$ . Tedy  $y \in \overline{A} \Rightarrow \exists z \in A \cap B(y, r)$ .  $x$  lze spojit se  $z$  křivkou a  $z$  lze spojit s  $y$ , tedy  $y \in A \Rightarrow \overline{A} = A \Rightarrow A$  je uzavřená.

Nyní  $G$  je souvislá a  $A$  je obojetná, tedy  $G \setminus A = \emptyset$  (neboť  $A$  je neprázdná, obsahuje  $x$ ), tedy  $A = G$ .  $\square$

└