

# Úvod

*Poznámka (Motivace)*

Hledání řešení diferenciálních rovnic. (Např. nahradíme rovnici definicí operátoru a hledáme, kde je operátor identita. Tedy neřešíme rovnice, ale prostory, na kterých máme funkce.)

## Definice 0.1

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} \vee \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

## 1 Banachovy a Hilbertovy prostory

### Definice 1.1 (Normovaný lineární prostor)

Nechť  $X$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{K}$ . Funkci  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  nazveme normou na  $X$ , pokud

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{o},$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

$$\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

### Tvrzení 1.1

Nechť  $(X, \|\cdot\|)$  je normovaný lineární prostor nad  $\mathbb{K}$ .

*Funkce  $\varrho(x, y) = \|x - y\|$  je translačně invariantní metrika na  $X$ .*

*Norma je 1-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na  $x$ .*

*Zobrazení  $+: X \times X \rightarrow X$  a  $\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$  jsou spojitá.*

┌

*Důkaz*

První část byla na MA3. Druhá: Zvol  $x, y \in X$ . Pak z trojúhelníkové nerovnosti máme  $\|y\| \leq \|x\| + \|x - y\|$ ,  $\|x\| \leq \|y\| + \|x - y\|$ , tudíž (podle toho, zda je v absolutní hodnotě kladná nebo záporná hodnota, tak z první/druhé rovnice)  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ .

Třetí část: Připomenutí: Součin metrických prostorů s maximovou metrikou je metrický prostor. Důkaz tohoto i třetí části je pak jednoduché cvičení. □

### Definice 1.2 (Uzavřená a otevřená koule)

$$B_X(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\}.$$

$$U_X(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\| < r\}.$$

$$S_X(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\| = r\}.$$

$$B_X := B_X(\mathbf{o}, 1).$$

$$U_X := U_X(\mathbf{o}, 1).$$

$$S_X := S_X(\mathbf{o}, 1).$$

### Definice 1.3 (Banachův prostor)

Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Dále se opakovaly metrické prostory. Úplnost, kompaktnost a Bairova věta.

### Tvrzení 1.2

*Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $Y$  jeho podprostor. Potom*

- a) Je-li  $Y$  Banachův, pak je  $Y$  uzavřený v  $X$ .*
- b) Pokud je naopak  $X$  Banachův, pak  $Y$  je Banachův právě tehdy, když je uzavřený.*

┌ *Důkaz*

Je-li  $(P, \varrho)$  úplný, pak  $M \subseteq P$  je úplný  $\Leftrightarrow M$  je uzavřený. To dává speciálně b).

└  $(P, \varrho)$  je MP, pak  $M \subseteq P$  je úplný  $\implies M$  uzavřený. To dává speciálně a). □

*Například*

$(\mathbb{K}, \|\cdot\|_p)$ ,  $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$ , kde funkce je  $\Omega \rightarrow \mathbb{K}$  a norma je definována jako  $p$ -tá odmocnina z integrálu funkce na  $p$ .  $l_p(l)$  resp.  $l_p(l, \mathbb{K})$  je diskretní verze předchozího (tj. se sumou).  $\mathcal{C}(K)$ , kde  $K$  je hausdorffův a kompaktní TP.

$c$  jsou všechny posloupnosti se supremovou normou,  $c_0$  jsou všechny posloupnosti konvergující k 0 se supremovou normou.  $c_{00}$  sestává z těch posloupností, kde je jen konečně mnoho nenulových prvků (norma je maximová), je to lineární prostor, ale není Banachův.  $c_0(I)$  je zobecnění z  $c_0(\mathbb{N})$  na libovolnou diskretní množinu  $I$ , tj. obsahuje „posloupnosti“, kde pro každé  $\varepsilon$  je pouze konečně mnoho členů větších než  $\varepsilon$  (pak  $(c_0(I), \|\cdot\|_\infty)$  je Banachův).

$\mathcal{L}^1([0, 1], \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1})$  (prostor hladkých funkcí na intervalu  $[0, 1]$ ), kde  $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ .  $\mathcal{M}(K) = \{\mu : \text{Borel}(K) \rightarrow \mathbb{K} \mid \mu \text{ regulární míra}\}$ ,

$$\|\mu\| := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(B_i)|, \bigcup B_i = K, B_i \text{ Borelovská} \right\}.$$

### Definice 1.4 (Ekvivalentní normy)

Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  jsou normy na  $X$ . Řekneme, že normy  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_2$  jsou ekvivalentní, pokud existují  $A, B > 0$  takové, že pro každé  $x \in X$  platí  $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$ .

### Věta 1.3

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

┌ Důkaz

└ Později. □

### Lemma 1.4

Nechť  $X$  je vektorový prostor,  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_2$  jsou normy na  $X$ ,  $B_1 = B_{X, \|\cdot\|_1}$ ,  $B_2 = B_{X, \|\cdot\|_2}$  a  $a, b > 0$ . Pak  $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$  pro každé  $x \in X$ , právě když  $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$ . Speciálně  $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$  právě tehdy, když  $B_1 = B_2$ .

┌ Důkaz

$\Rightarrow$  : Zvol  $x \in aB_1$ , pak  $\|\frac{x}{a}\|_1 \leq 1 \Rightarrow x \in B_2$ . Opačně: Zvol  $x \in B_2$ , pak  $\|x\|_2 \leq 1 \Rightarrow x \in B_1$ .

$\Leftarrow$  : Pokud  $x = 0$ , pak jsou nerovnosti jasné. Zvol  $x \neq 0$ . Pak  $\frac{x}{\|x\|_1} \in B_1$ . Pak  $\frac{ax}{\|x\|_1} \in B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow a\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ . Analogicky pro druhý směr. □

### Tvrzení 1.5

Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_2$  jsou normy na  $X$  a  $B_1$  a  $B_2$  jako minule. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Normy  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_2$  jsou ekvivalentní.
2. Existují  $a, b > 0$  taková, že  $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$ .
3. Zobrazení  $\text{id} : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$  je homeomorfismus.
4. Otevřené množiny v  $(X, \|\cdot\|_1)$  splývají s otevřenými množinami  $(X, \|\cdot\|_2)$ .
5.  $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$ , právě když  $\|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$  pro  $\{x_n\} \subset X$ ,  $x \in X$ .

┌ *Důkaz*

$1 \Leftrightarrow 2$  plyne z předchozího lemmatu.  $3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$  je lehké a platí ve všech MP.  $1 \Rightarrow 5$  jasné.

$5 \Rightarrow 1$  : Sporem: Předpokládejme, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  existují  $x_n, y_n \in X$  splňující  $\|x_n - y_n\|_1 > n\|x_n - y_n\|_2$ . Položme  $z_n = \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|_1}$ . Pak  $\|z_n\|_1 = 1$ , ale  $\|z_n\|_2 < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .  
└  $\nabla$ . □

### **Definice 1.5** (Konvexní množina)

Nechť  $X$  je vektorový prostor. Řekneme, že množina  $M \subset X$  je konvexní, pokud pro každé  $x, y \in M$  a  $\lambda \in [0, 1]$  platí, že  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$ .

*Poznámka* (Fakt)

Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny. (A naopak každá konvexní množina může být koulí v nějaké normě.)

### **Definice 1.6** (Konvexní obal)

Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $M \subset X$ . Konvexním obalem  $M$  nazveme množinu  $\text{conv } M = \bigcap \{C \supset M \mid C \subset X \text{ je konvexní}\}$ .

### **Tvrzení 1.6**

Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $M \subset X$ . Pak

$$\text{conv } M = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid x_i \in M, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

┌ *Důkaz*

$\subseteq$ : Stačí dokázat, že množina vpravo je konvexní. Přímocaré.

$\supseteq$ : Stačí dokázat, že každý prvek vlevo je v konvexním obalu. Indukcí podle  $n$ , přímocaré. □

### **Definice 1.7**

Nechť  $X$  je vektorový prostor. Řekneme, že množina  $M \subset X$  je symetrická, pokud  $-M = M$ .

*Poznámka* (Fakt)

Nechť  $M$  je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru  $X$ , která obsahuje  $U(x, r)$  respektive  $B(x, r)$  pro nějaké  $x \in X$  a  $r \geq 0$ . Pak  $U(0, r) \subset M$ , resp.  $B(0, r) \subset M$ .

┌  
Důkaz  
Jednoduchý.  
└

□

### Definice 1.8

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $M \subset X$ . Pak definujeme uzavřený lineární obal  $M$  jako

$$\overline{\text{span}} M = \bigcap \{Y \supset M \mid Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$$

a uzavřený konvexní obal jako  $\overline{\text{conv}} M = \bigcap \{C \supset M \mid C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}.$

*Poznámka (Fakt)*

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor,  $Y$  je podprostor  $X$  a  $C \subset X$  je konvexní. Pak  $\overline{Y}$  je podprostor  $X$  a  $\overline{C}$  je konvexní množina.

*Poznámka (Fakt)*

Ať  $X$  je normovaný lineární prostor a  $M \subset X$ . Pak  $\overline{\text{span}} M = \overline{\text{span } M}$  a  $\overline{\text{conv}} M = \overline{\text{conv } M}$ .

### Věta 1.7

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor,  $Y \subset X$  uzavřený podprostor a  $Z \subset X$  konečněrozměrný podprostor. Pak  $\text{span}(Y \cup Z)$  je uzavřený.

┌  
Důkaz

Stačí dokázat pro  $\dim Z = 1$  (pak indukci). Ať  $Z = \text{span}(e)$ ,  $e \notin Y$ . Ověříme, že  $\text{span}(Y \cup \{e\}) = \{y + ke \mid k \in \mathbb{K}\}$  je uzavřený: Ať  $x_n = y_n + t_n e \rightarrow x \in X$ . Chceme  $x \in \text{span } Y$ .

1. krok:  $(t_n)$  je omezená. (Kdyby ne, pak má limitu  $\infty$  a  $\|\frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} + e\| = \frac{1}{|t_{n_k}|} \|x_{n_k}\| \rightarrow 0$ , tedy  $\frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} \rightarrow -e \notin Y$ , tedy  $Y$  není uzavřená.  $\nabla$ )

Tedy existuje posloupnost  $(n_k)$ , že  $t_{n_k} \rightarrow t \in \mathbb{K}$ . Pak ale  $y_{n_k} = x_{n_k} - t_{n_k} e \rightarrow x - te \in Y$ . Tedy  $\exists z \in Y : x - te = z$ , tj.  $x = z + te \in \text{span}(Y \cup \{e\})$ .  
└

□

*Důsledek*

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor  $X$  je uzavřený.

### Definice 1.9 (Konvergence řady v normovaných lineárních prostorech)

Nechť  $\{x_n\} \subset X$ . Řekneme, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  konverguje k  $x \in X$ , pokud  $x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n$ .

Řada je konvergentní, pokud existuje takové  $x$ . Řada je absolutně konvergentní, pokud  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ .

*Poznámka (Fakt)*

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  je konvergentní řada v  $X$ . Pak

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

### Věta 1.8 (Test úplnosti)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor. Pak  $X$  je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

┌

*Důkaz*

$\Rightarrow$  : Ať  $X$  je Borelovský,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  je AK řada.  $s_N = \sum_{n=1}^N x_n$ . Chceme  $(s_n)$  je Cauchy: Buď  $\varepsilon > 0$ . Ať  $n_0 \in \mathbb{N}$  je takové, že  $\sum_{n=N}^M \|x_n\| < \varepsilon$ ,  $n_0 \leq N < M$ . Pak ale pro  $n_0 \leq N < M$  je

$$\|s_N - s_M\| = \left\| \sum_{n=N+1}^M x_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \|x_n\| < \varepsilon.$$

Tedy  $(s_n)$  je konvergentní.

$\Leftarrow$  : Ať  $(x_n)$  je Cauchyovská. Indukcí najdeme podposloupnost, že  $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Pak

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_1})$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - x_{n_1} + x_{n_1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - x_{n_1}) + \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_1} = z + x_{n_1}.$$

Celkem  $\exists (n_k) \nearrow$ , že  $\lim(x_{n_k})$  existuje. Značme  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ . Chceme  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . V metrickém prostoru konverguje Cauchyovská posloupnost právě tehdy, pokud existuje její konvergentní podposloupnost.  $\square$

### Definice 1.10 (Zobecněná řada)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor,  $\Gamma$  je množina a  $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  je kolekce prvků prostoru  $X$ . Symbol  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$  nazveme zobecněnou řadou.

Dále  $\mathcal{F}(\Gamma)$  značí systém všech konečných podmnožin  $\Gamma$ . Řekneme, že zobecněná řada ... konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k  $x \in X$ , pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supseteq F : \left\| x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li  $x \in X$ , říkáme, že je zobecněná řada ... (bezpodmínečně) konvergentní a  $x$  nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|$ , pak se zobecněná řada  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$  nazývá absolutně konvergentní.

**Definice 1.11** (Bolzanova-Cauchyova podmínka)

Řekneme, že zobecněná řada  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$  v normovaném lineárním prostoru splňuje BC podmínku, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset : \left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

**Věta 1.9** (Nutná podmínka konvergence)

Nechť  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$  je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru  $X$ . Pak je její součet určen jednoznačně a  $(\|x_\gamma\|)_{\gamma \in \Gamma} \in c_0(\Gamma)$ .

┌

*Důkaz* (Jednoznačnost)

Ať  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma = x \neq y = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ . Pak  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$\exists F_x \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F \supseteq F_x : \|x - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists F_y \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F \supseteq F_y : \|y - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro  $\varepsilon = \|x - y\| \leq \|x - \sum_{F_x \cup F_y} x_\gamma\| + \|\sum_{F_x \cup F_y} x_\gamma - y\| < \varepsilon$ . ✎

□

└

┌

*Důkaz* (Limita)

Chceme  $(\|x_\gamma\|) \in c_0(\Gamma)$ : Ať  $\varepsilon > 0$  libovolné. Najdeme

$$F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \supset F : \|x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro  $\gamma_0 \notin F$  máme

$$\|x_{\gamma_0}\| = \left\| \sum_{\gamma \in F \cup \{\gamma_0\}} x_\gamma - x + x - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma \right\| \leq \|\dots\| + \|\dots\| < \varepsilon.$$

Tedy  $\{\gamma \in \Gamma \mid \|x_\gamma\| > \varepsilon\} \subseteq F \in \mathcal{F}(\Gamma) \implies (\|x_\gamma\|) \in c_0(\Gamma)$ . (Je tam pouze konečný počet prvků větších než  $\varepsilon$ .)

□

**Věta 1.10**

Nechť  $X$  je Banachův prostor.

1. Zobecněná řada v  $X$  je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.
2. Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v  $X$  je konvergentní.
3. Je-li zobecněná řada  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$  v  $X$  konvergentní a  $\Lambda \subset \Gamma$ , pak je i zobecněná řada

$\sum_{\gamma \in \Lambda} x_\gamma$  konvergentní.

┌

Důkaz (1.)

$\Rightarrow$  : Ať  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$  je konvergentní. Zvol  $\varepsilon > 0$ . Zvolíme

$$F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \supseteq F : \left\| \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro  $\tilde{F} \in \mathcal{F}(\Gamma)$ , že  $\tilde{F} \cap F = \emptyset$  máme:

$$\left\| \sum_{\gamma \in \tilde{F}} x_\gamma \right\| = \left\| \sum_{\gamma \in F \cup \tilde{F}} x_\gamma - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma + \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma \right\| \leq \|\dots\| + \|\dots\| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$  : Ať  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$  splňuje B-C podmínku. Pak najdeme posloupnost  $(F_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}(\Gamma)^\mathbb{N}$ , že

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \wedge \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F_n = \emptyset : \left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \frac{1}{n}.$$

Označ  $y_n = \sum_{\gamma \in F_n} x_\gamma$ . 1. krok:  $(y_n)$  je cauchyovská. (Dokáže se snadno.) 2. krok: Tedy existuje  $y \in X : \lim y_n = y$ . Chceme  $y = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ : Ať  $\varepsilon > 0$ .

$$\forall F' \supset F : \left\| y - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| \leq \left\| y_{n_0} - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| + \|y_{n_0} - y\| = \sum_{\gamma \in F' \setminus F_{n_0}} x_\gamma \leq \frac{1}{n_0} + \|y_{n_0} - y\| < \varepsilon.$$

□

└

┌

Důkaz (2.)

Víme, že  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|$  je konvergentní. Dle tvrzení níže tedy

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\| = S = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\| : F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\}.$$

Ověříme, že  $\sum x_\gamma$  splní B-C podmínku: Ať  $\varepsilon > 0$ . Ať  $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$  tak, že  $S - \varepsilon < \sum_{\gamma \in F} \|x_\gamma\|$ . Pak  $\forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ , že  $F' \cap F = \emptyset$ :

$$\left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| \leq \sum_{\gamma \in F'} \|x_\gamma\| = \sum_{\gamma \in F' \cup F} \|x_\gamma\| - \sum_{\gamma \in F} \|x_\gamma\| < \varepsilon.$$

□

└

┌

Důkaz (3.)

Snadný důsledek 1., protože B-C podmínka se zjevně dědí na podmnožiny.

□

└

## Tvrzení 1.11

Nechť  $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$  je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když



$\sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} a_\gamma : F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\} < +\infty$ . A navíc platí  $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} a_\gamma : F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\}$ .

┌

*Důkaz*

$\Rightarrow$  : Ať  $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$  konverguje. Pak zvolíme  $F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \supset F : \left\| \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma - \sum_{\gamma \in F} a_\gamma \right\| < 1$ . Pak  $\forall H \in \mathcal{F}(\Gamma) : \sum_{\gamma \in H} a_\gamma \leq \sum_{\gamma \in H \cup F} a_\gamma \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma + 1$ . Tedy  $\sup \dots \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma + 1 < \infty$ .

$\Leftarrow$  : Ať  $S := \sup \dots < \infty$ . Chceme  $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = S$ . Ať  $\varepsilon > 0$ . Ať  $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$  (z definice suprema) taková, že  $S - \varepsilon < \sum_{\gamma \in H} a_\gamma$ . Pak pro  $F' \supset H$  máme

$$\left| S - \sum_{\gamma \in F'} a_\gamma \right| = S - \sum_{\gamma \in F'} a_\gamma < S - \sum_{\gamma \in H} a_\gamma < \varepsilon.$$

Tedy  $\sum a_\gamma = S$ .

└

□

## Tvrzení 1.12

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $\{x_n\} \subset X$ . Pak zobecněná řada  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$  je absolutně konvergentní, právě když řada  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  je absolutně konvergentní.

┌

*Důkaz*

$\Rightarrow$  : Ať  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| =: S < \infty$ . Pak

$$\sup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \sum_{n \in F} \|x_n\| \leq \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^N \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = S < \infty,$$

neboť každá konečná množina v přirozených číslech má maximum (a odebráním kladných prvků sumu zmenšíme).

$\Leftarrow$  : Ať  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$  je konvergentní, pak dle předchozího tvrzení

$$S := \sup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \sum_{n \in F} \|x_n\| < \infty.$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n \in [N]} \|x_n\| \leq S < \infty.$$

└

□

## Věta 1.13

Nechť  $\{x_n\}$  je posloupnost v Banachově (pro normovaný lineární prostor je důkaz složitější) prostoru  $X$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$  konverguje (říkáme  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  konverguje bezpodmínečně).

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$  konverguje pro každou permutaci  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ke stejnému součtu.
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$  konverguje pro každou permutaci  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

┌  
Důkaz

$1 \implies 2$ : Ať  $\varepsilon > 0$  a  $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$ . Ať  $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$  splňuje, že  $\forall F' \supseteq F : \|\sum_{n \in F'} x_n - x\| < \varepsilon$ , kde  $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ . Zvolme  $n_0 \in \mathbb{N} : F \subseteq \{\pi(1), \dots, \pi(n_0)\}$ . Pak  $\forall n \geq n_0 : \|\sum_{i=1}^n x_{\pi(i)} - x\| < \varepsilon$ . Tedy  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = x$ .

$2 \implies 3$ : okamžitě.  $3 \implies 1$ : Pro spor předpokládejme, že  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$  konverguje pro každou  $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$ , ale  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$  nesplňuje B-C podmínku. Zvolme  $\varepsilon > 0$  svědčící o tom, že B-C podmínka není splněna. Pak existuje  $(F_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ , že  $F_n \cap F_m = \emptyset \ \forall n \neq m$ ,  $\max F_n < \min F_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  a  $\|\sum_{i \in F_n} x_i\| < \varepsilon$ .

Zvolme  $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$  splňující, že existuje  $(n_k) \nearrow$  a  $(p_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , že

$$\pi(\{n_k, n_k + 1, \dots, n_k + p_k\}) = F_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tedy  $\forall k \in \mathbb{N} : \|\sum_{i=n_k}^{n_k+p_k} x_{\pi(i)}\| = \|\sum_{i \in F_k} x_i\| \geq \varepsilon$ . To však znamená, že  $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$  nesplňuje B-C podmínku, tedy není konvergentní.  $\nmid$  □

### Věta 1.14

*Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.*

┌  
Důkaz

Jasný z minulé věty. □

*Navíc v  $\mathbb{R}$  platí ekvivalence.*

### Věta 1.15

*Pokud  $\dim X = +\infty$ , pak  $\exists(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  konverguje, ale  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$  není konvergentní.*

## 2 Lineární operátory a funkcionály

*Poznámka* (Opakovali jsme)

Lineární zobrazení (viz lingeбра), dále:

## Věta 2.1

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory a  $T : X \rightarrow Y$  je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1.  $T$  je spojité.
2.  $T$  je spojité v jednom bodě.
3.  $T$  je spojité v 0.
4.  $\exists C \geq 0$  tak, že  $\|T(x)\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X$ .
5.  $T$  je Lipschitzovské.
6.  $T$  je stejnoměrně spojité.
7.  $T(A)$  je omezená pro každou omezenou  $A \subset X$ .
8.  $T(B_X)$  je omezená.
9.  $T(U(0, \delta))$  je omezená pro nějaké  $\delta > 0$ .

Prostor  $\mathcal{L}(X, Y)$  s normou  $\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|$  je normovaný lineární prostor.

## Lemma 2.2

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

- $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$  pro každé  $x \in X$ .
- $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$ .
- $\|T\| = \inf \{C \geq 0 \mid \|T(x)\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X\}$ .

┌

*Důkaz*

Pro  $x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$  platí  $\|T(x)\| = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ .

$S_X \subseteq B_X$ , tedy  $\|T\| \geq \sup_{x \in S_X} \|T(x)\|$ .  $\forall x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$ :

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \sup_{y \in S_X} \|T(y)\|,$$

tedy  $\sup_{x \in S_X} \|T(x)\| \geq \sup_{x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} =: S_3$ . Pro  $x \in U_X \setminus \{\mathbf{o}\}$  platí  $\|T(x)\| \leq \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq S_3$ , tedy  $\sup_{x \in U_X} \|T(x)\| \leq S_3$ . Konečně, pro  $x \in B_x$ :  $\|T(x)\| \leftarrow \|T((1 - \frac{1}{n})x)\| \leq \sup_{x \in U_X} \|T(x)\| =: S_4$ , tedy  $\|T_x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T((1 - \frac{1}{n})x)\| \leq S_4 \implies \sup_{x \in B(x)} \|T(x)\| \leq S_4$ .

Dle prvního bodu máme nerovnost „ $\geq$ “. Pro „ $\leq$ “ zvolme  $\varepsilon > 0$  ... ať  $\tilde{c} > 0$  je takové, že  $\tilde{c} < \inf \{ \dots \} + \varepsilon$ . Pak  $\|T\| = \sup_{x \in B_x} \frac{\|T_x\|}{\|x\|} \leq \inf \{ \dots \}$ . □

## Definice 2.1

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor nad  $\mathbb{K}$ . Prostor  $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$  značíme  $X^*$  a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru  $X$ .

*Poznámka (Fakt)*

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory a  $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$  je posloupnost operátorů konvergující k  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  v prostoru  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Pak  $\{T_n\}$  konverguje k  $T$  bodově, tj. pro každé  $x \in X$  platí  $T_n(x) \rightarrow T(x)$  v prostoru  $Y$ .

┌

*Důkaz (Ze skript)*

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \|(T_n - T)(x)\| \leq \|T_n - T\| \cdot \|x\| \rightarrow 0.$$

└

□

*Poznámka (Fakt)*

Nechť  $X, Y, Z$  jsou normované lineární prostory,  $S \in \mathcal{L}(X, Y)$  a  $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$ . Pak  $\|T \circ S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$ .

┌

*Důkaz*

Jednoduchý. □

## Věta 2.3

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $Y$  je Banachův. Pak  $\mathcal{L}(X, Y)$  je Banachův prostor.

┌ *Důkaz* (Ze skript)

Mějme libovolnou cauchyovskou posloupnost  $\{T_n\}$  v  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Pro libovolné pevné  $x \in X$  platí

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \cdot \|x\| \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Tedy posloupnost  $\{T_n(x)\}$  je cauchyovská v  $Y$  a protože  $Y$  je úplný, existuje limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ , kterou označíme  $T(x)$ . Nyní stačí dokázat, že je  $T$  lineární. Linearita plyne ze spojitosti součtu a násobení.

Navíc pro  $x \in B_X$  platí

$$\|T(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| \leq \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \right) \|x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|.$$

Jelikož  $\{T_n\}$  je cauchyovská, tak je zřejmě i  $\{\|T_n\|\}$  cauchyovská, tudíž omezená, tedy  $\|T(x)\|$  je konečné, tedy  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

Nakonec je potřeba dokázat  $T_n \rightarrow T$  v  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Pro  $\varepsilon > 0$  zvolme  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že  $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$  pro každé  $n, m \geq n_0$ . Pak pro  $x \in B_X$  a pevné  $n \geq n_0$  máme

$$\begin{aligned} \|T_n(x) - T(x)\| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \\ &\leq \sup_{m \geq n_0} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup_{m \geq n_0} \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy  $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$  pro libovolné  $n \geq n_0$ . Proto  $T_n \rightarrow T$ . □

## Věta 2.4

*Je-li  $X$  normovaný lineární prostor, je prostor  $X^*$  úplný.*

┌ *Důkaz*

┌ Speciální případ předchozí věty. □

**Definice 2.2** (Izomorfismus, izomorfismus do, izometrie, izometrie do, izomorfni a izometrické prostory, izomorfně vnořený a izometricky vnořený prostor)

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Říkáme, že  $T$  je

- izomorfismus  $X$  na  $Y$  (nebo jen izomorfismus), pokud  $T$  je bijekce  $X$  na  $Y$  a inverzní operátor  $T^{-1}$  je spojitý;
- izomorfismus  $X$  do  $Y$  (nebo jen izomorfismus do), pokud  $T$  je izomorfismus  $X$  na  $\text{Rng } T$ ;
- izometrie  $X$  na  $Y$  (nebo jen izometrie), pokud  $T$  je na a  $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$  pro všechna  $x, y \in X$ ;

- izometrie  $X$  do  $Y$  (nebo jen izometrie do), pokud  $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$  pro všechna  $x, y \in X$ .

Dále říkáme, že prostory  $X$  a  $Y$  jsou izomorfní respektive izometrické, pokud existuje lineární izomorfismus resp. izometrie  $X$  na  $Y$ .

O prostoru  $X$  řekneme, že je izomorfne resp. izometricky vnořen do  $Y$ , pokud existuje lineární izomorfismus respektive izometrie  $X$  do  $Y$ .

#### Poznámka

Lineární zobrazení  $T$  je izometrie do, právě tehdy, když  $\forall z : \|Tz\| = \|z\|$ .

### Tvrzení 2.5

*Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory.*

1.  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty  $C_1, C_2 > 0$  takové, že  $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$  pro každé  $x \in X$ .
2. Je-li  $X$  izomorfní s  $Y$  a  $X$  je Banachův, pak je i  $Y$  Banachův.
3. Je-li  $X$  Banachův a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  je izomorfismus do, pak  $\text{Rng } T$  je uzavřený v  $Y$ .

┌

*Důkaz (Ze skript)*

1.  $\implies$  Máme  $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$  pro každé  $x \in X$ . Dále  $T^{-1} : \text{Rng } T \rightarrow X$  je spojitý, platí tedy pro každé  $y \in \text{Rng } T$  nerovnost  $\|T^{-1}(y)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|y\|$ . Tudíž  $\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq \|T^{-1}\| \|T(x)\|$  pro každé  $x \in X$ . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $X \neq \{\mathbf{0}\}$  a tedy  $\|T^{-1}\| > 0$ . Požadovaná nerovnost tak platí s konstantami  $C_1 = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$  a  $C_2 = \|T\|$ .

$\Leftarrow$  Splňují-li kladné konstanty  $C_1, C_2$  požadované nerovnosti, je  $T$  spojitý a prostý: Je-li  $T(x) = 0$ , pak  $\|x\| \leq \frac{1}{C_1} \|T(x)\| = 0$ , tedy  $\text{Ker } T = \{0\}$ . Existuje tedy inverzní operátor  $T^{-1} : \text{Rng } T \rightarrow X$ , který je lineární. Pro libovolné  $y \in \text{Rng } T$  máme  $\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{C_1} \|T(T^{-1}(y))\| = \frac{1}{C_1} \|y\|$ . Tedy  $T^{-1}$  je navíc spojitý.

2. Vezmeme libovolnou cauchyovskou posloupnost  $\{y_n\}$  v  $Y$ . Díky odhadu  $\|T^{-1}(y_n) - T^{-1}(y_m)\| \leq \|T^{-1}\| \|y_n - y_m\|$  pro každé  $m, n \in \mathbb{N}$  je cauchyovská i posloupnost  $\{T^{-1}(y_n)\}$ . Vzhledem k tomu, že  $X$  je úplný, konverguje  $\{T^{-1}(y_n)\}$  k nějakému  $x \in X$ . Pak ovšem ze spojitosti operátoru  $T$  plyne  $y_n = T(T^{-1}y_n) \rightarrow T(x)$ , tedy i  $\{y_n\}$  je konvergentní. Proto je  $Y$  úplný.

└

3. Podle 2. je  $\text{Rng } T$  Banachův prostor. Tedy je uzavřený v  $Y$  dle tvrzení výše.  $\square$

*Poznámka (Fakt)*

Nechť  $X, Y, Z$  jsou normované lineární prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ . Jsou-li  $S, T$  izomorfismy do, pak  $S \circ T$  je izomorfismus do. Jsou-li  $S, T$  izometrie do, pak  $S \circ T$  je izometrie do.

### Věta 2.6

Nechť  $X, \hat{X}$  a  $Y$  jsou normované lineární prostory,  $X$  je hustý v  $\hat{X}$  a  $Y$  je úplný. Nechť dále  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Pak existuje právě jeden operátor  $\hat{T} \in \mathcal{L}(\hat{X}, Y)$  rozšiřující  $T$ , tj.  $\hat{T}|_X = T$ . Navíc platí  $\|\hat{T}\| = \|T\|$ .

┌

Důkaz

Jednoduchý.

□

## 3 Konečně rozměrné prostory

### Lemma 3.1 (O skoro kolmici)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor. Je-li  $Y$  vlastní uzavřený podprostor  $X$ , pak pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $x \in S_X$  takové, že  $\text{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$ .

┌

Důkaz (Ze skript)

Nechť  $\varepsilon > 0$  je dáno. Zvolme  $u \in X \setminus Y$  a označme  $d = \text{dist}(u, Y)$ . Protože  $Y$  je uzavřený, je  $d > 0$  a můžeme nalézt  $\eta > 0$  tak, aby  $\frac{d}{d+\eta} > 1 - \varepsilon$ . Dále existuje  $v \in Y$  takové, že  $\|u - v\| \leq d + \eta$ . Položme  $x = \frac{u-v}{\|u-v\|}$ . Pak  $x \in S_X$ . Je-li  $y \in Y$  libovolné, je  $v + \|u - v\|y \in Y$ , a tedy

$$\|x - y\| = \left\| \frac{u - v}{\|u - v\|} - y \right\| = \frac{\|u - (v + \|u - v\|y)\|}{\|u - v\|} \geq \frac{d}{d + \eta}.$$

Dostáváme tak, že  $\text{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| \geq \frac{d}{d + \eta} > 1 - \varepsilon$ .

□

### Věta 3.2

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor nad  $\mathbb{K}$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1.  $\dim X < \infty$ .
2. Existuje  $n \in \mathbb{N}$  takové, že  $X$  je izomorfní s  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ .
3.  $B_X$  je kompaktní.
4. Každé lineární zobrazení z  $X$  do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojitě.
5. Každá lineární forma na  $X$  je spojitá.
6. Každé dvě normy na  $X$  jsou ekvivalentní.

┌ Důkaz (Ze skript)

1.  $\implies$  2.: Necht  $\{e_1, \dots, e_n\}$  je nějaká báze  $X$ . Definujeme zobrazení  $T : \mathbb{K}^n \rightarrow X$  předpisem  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Snadno je vidět, že  $T$  je lineární zobrazení a díky vlastnostem báze je to bijekce. Protože „projekce“  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$  jsou spojité, ze spojitosti vektorových operací plyne spojitost  $T$ .

Ukažme nyní i spojitost inverze  $T^{-1}$ . Množina  $S = S_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)}$  je kompaktní, neboť je uzavřená a omezená. Protože  $T$  je spojitý, je množina  $T(S)$  také kompaktní. Norma  $\|\cdot\|_X$  je spojitá na  $X$ , a tedy nabývá na  $T(S)$  minima  $C > 0$  ( $T(S)$  neobsahuje 0 díky prostotě  $T$ ). Pro libovolné  $y \in X \setminus \{0\}$  je  $\frac{T^{-1}(y)}{\|T^{-1}(y)\|_2} \in S$ , takže  $C \leq \left\| T \left( \frac{T^{-1}(y)}{\|T^{-1}(y)\|_2} \right) \right\|_X = \frac{\|y\|_X}{\|T^{-1}(y)\|_2}$ , odkud  $\|T^{-1}(y)\|_2 \leq \frac{1}{C} \|y\|_X$ .

2.  $\implies$  3.: Je-li  $T : \mathbb{K}^n \rightarrow X$  izomorfismus, je  $T^{-1}(B_X)$  uzavřená omezená podmnožina  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ , takže je kompaktní. Tedy i  $B_X = T(T^{-1}(B_X))$  je kompaktní.

3.  $\implies$  1.: Necht  $X$  je nekonečné dimenze. Indukcí najdeme posloupnost prvků  $\{x_n\}$  v  $S_X$  tak, že  $\text{dist}(x_{n+1}, \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}) \geq \frac{1}{2}$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ :  $x_1$  zvolíme libovolně, následně  $\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$  je vždy uzavřený a vlastní (neboť je konečně dimenzionální), tedy podle lemmatu o skoro kolmici najdeme  $x_{n+1}$  splňující  $\text{dist}(x_{n+1}, \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}) > \frac{1}{2}$ . Tedy  $B_X$  není kompaktní.

1.  $\implies$  6.: Necht  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_2$  jsou normy na  $X$ . Zafixujeme nějakou bázi  $\{e_1, \dots, e_n\}$  prostoru  $X$ . Označme eukleidovskou normu na  $\mathbb{K}^n$  jako  $\|\cdot\|_e$ . Necht  $T_1 : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_e)$  a  $T_2 : (X, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_e)$  jsou izomorfismy z důkazu 1.  $\implies$  2. Pak  $T_2^{-1} \circ T_1 = \text{id}_X$  a tedy  $\text{id}_X : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$  je izomorfismus, tj. normy  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_2$  jsou ekvivalentní.

6.  $\implies$  5.: Předpokládejme, že  $(X, \|\cdot\|)$  existuje nespojitá lineární forma  $f$ . Pro každé  $x \in X$  položíme  $\|x\|_0 = \|x\| + |f(x)|$ . Snadno je vidět, že  $\|\cdot\|_0$  je norma na  $X$ , která je ovšem neomezená na  $B_{(X, \|\cdot\|)}$ . Tedy normy  $\|\cdot\|$  a  $\|\cdot\|_0$  nejsou ekvivalentní.

5.  $\implies$  1.: Není-li  $X$  konečněrozměrný, má nekonečnou algebraickou bázi  $\{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ . Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že všechny vektory  $e_\gamma$  mají normu 1. Vybereme nekonečnou spočetnou množinu  $\{\gamma_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$  a položíme  $f(e_{\gamma_n}) = n$  pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $f(e_\gamma) = 0$  pro  $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_n | n \in \mathbb{N}\}$ . Pak  $f$  lze jednoznačně rozšířit na lineární formu na  $X$ , která ovšem není omezená na  $B_X$ .

1.  $\implies$  4.: Necht  $Y$  je nějaký normovaný lineární prostor a  $T : (X, \|\cdot\|) \rightarrow Y$  je lineární zobrazení. Zvolme bázi  $\{e_1, \dots, e_n\}$  prostoru  $X$  a uvažujme normu  $\|x\|_1 = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ . Díky tvrzení 4. stačí dokázat, že  $T : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow Y$  je spojitý. To je ale zřejmé z odhadu

$$\|T(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i T(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|T(e_i)\| \leq \max\{\|T(e_1)\|, \dots, \|T(e_n)\|\} \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

└ 4.  $\implies$  5.: Je triviální. □



## 4 Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

### Definice 4.1

Nechť  $(X, \|\cdot\|_X)$  a  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  jsou normované lineární prostory a  $1 \leq p \leq \infty$ . Pak prostorem  $X \oplus_p Y$  rozumíme normovaný lineární prostor  $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$ , kde norma  $\|\cdot\|_p$  je daná vzorcem

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}, & \text{pro } p = \infty. \end{cases}$$

### Poznámka (Kvociet)

Nechť  $X$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{K}$  a  $Y$  jeho podprostor. Definujeme relaci ekvivalence  $\sim$  na  $X$  jako  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y$ .

Pro  $x \in X$  pak definujeme  $[x]$  jako třídu ekvivalence obsahující  $x$ .

Na množině  $X/Y = \{[x] | x \in X\}$  definujeme operace  $[x] + [y] = [x + y]$  a  $\alpha[x] = [\alpha x]$ .

### Definice 4.2 (Kvociet)

Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $Y$  jeho podprostor. Pak vektorový prostor  $X/Y$  nazýváme faktorprostorem prostoru  $X$  podle  $Y$  nebo též kvocientem  $X$  podle  $Y$ . Dále definujeme tzv. kanonecké kvocientové zobrazení  $q : X \rightarrow X/Y$  předpisem  $q(x) = [x]$ .

### Definice 4.3 (Norma na kvocientu)

Buď  $X$  normovaný lineární prostor a  $Y$  jeho uzavřený podprostor. Pak  $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$  je normovaný lineární prostor s normou

$$\|[x]\|_{X/Y} = \inf_{y \in [x]} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \text{dist}(x + Y, 0) = \text{dist}(x, Y).$$

Tato norma se nazývá kanonická kvocientová norma.

┌ *Důkaz* (Je to norma)  
└ Triviální.

□

### Tvrzení 4.1

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $Y$  jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení  $q : X \rightarrow X/Y$  je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje  $q(U_x) = U_{X/Y}$ . Je-li  $Y$  vlastní, pak  $\|q\| = 1$ .

┌ *Důkaz*  
└ Zřejmý.

□

## Věta 4.2

Nechť  $X$  je Banachův prostor a  $Y$  jeho uzavřený podprostor. Pak  $X/Y$  je též Banachův prostor.

┌  
Důkaz

Přes test úplnosti ( $X$  je Banachův, právě když každá abs. konvergentní řada je konvergentní). Ať  $\{[x]_n | n \in \mathbb{N}\}$  splňuje  $\sum_{n=1}^{\infty} [x]_n < \infty$ . Chceme  $\sum_n [x]_n$  konverguje. Ať  $\{y_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y$  jsou takové, že  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + y_n\| < \infty$ . Pak  $\sum (x_n + y_n)$  je konvergentní (podle testu úplnosti) a je prvkem  $X$ , tedy  $q(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} q(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} [x]_n$ . Tudíž  $\sum_{n=1}^{\infty} [x]_n$  je v prostoru  $q(X) = X/Y$  konverguje.  $\square$

Poznámka (Zajímavosti)

$l_{\infty}/c_0$  je docela zajímavý prostor (Rosemider? + Brech? 2012: Je nerozhodnutelné, zda  $l_{\infty}/c_0$  je izometricky univerzální Banachův prostor hustoty  $|\mathbb{R}|$ . Dokonce je nerozhodnutelné, zda takový prostor existuje.) ( $l_{\infty}/c_0 \equiv \mathcal{C}(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ )

## Definice 4.4 (Direktní součet)

Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $A, B$  jsou jeho podprostory. Říkáme, že  $X$  je direktním (též algebraickým) součtem  $A$  a  $B$  (značíme  $X = A \oplus B$ ) pokud  $A \cap B = \{\mathbf{o}\}$  a  $X = A + B = \text{span}\{A \cup B\}$ .

## Definice 4.5 (Projekce)

Nechť  $X$  je vektorový prostor. Lineární zobrazení  $P : X \rightarrow X$  se nazývá (lineární) projekce, pokud  $P^2 := P \circ P = P$ .

## Tvrzení 4.3 (Fakt)

Nechť  $X$  je vektorový prostor.

- Je-li  $P : X \rightarrow X$  lineární projekce, pak  $P \upharpoonright_{\text{Rng } P} = \text{id}_{\text{Rng } P}$ .
- Je-li  $Y$  podprostor  $X$  a  $P : X \rightarrow Y$  lineární zobrazení splňující  $P \upharpoonright_Y = \text{id}_Y$ , pak  $P$  je projekce  $X$  na  $Y$ .

┌  
Důkaz

└ Triviální.  $\square$

## Tvrzení 4.4

Nechť  $X$  je vektorový prostor. Jsou-li  $P_A$  a  $P_B$  projekce příslušné rozkladu  $X = A \oplus B$ , pak  $P_A + P_B = \text{id}_X$ ,  $\text{Rng } P_A = A$ ,  $\text{ker } P_A = B$ ,  $\text{Rng } P_B = B$  a  $\text{Ker } P_B = A$ .

┌ Důkaz

Jednoduchý. □

Na druhou stranu, je-li  $P$  lineární projekce v  $X$ , pak  $X = A \oplus B$ , kde  $A = \text{Rng } P$ ,  $B = \text{Ker } P$  a  $P = P_A$ .

┌ Důkaz

Jednoduchý. □

## Věta 4.5

*Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $Y$  jeho podprostor.*

- *Prostor  $Y$  má algebraický doplněk v  $X$ .*
- *Je-li  $A$  algebraický doplněk  $Y$  v  $X$ , je  $A$  algebraicky izomorfní s  $X/Y$ , speciálně  $\dim(A) = \dim(X/Y)$ .*

┌ Důkaz

Díky Zornovu lemmatu existuje algebraická báze  $B \subset Y$  prostoru  $Y$ . Stejně tak existuje  $B' \supset B$  báze  $X$ . Potom  $Z = \text{span}(B' \setminus B)$  je algebraický doplněk  $Y$  v  $X$ , neboli  $X = Y \oplus Z$ .

Ať  $X = Y \oplus A$ . Pak chceme  $q \upharpoonright_A: A \rightarrow X/Y$  je lineární izomorfismus: Víme  $q$  je lineární,  $q$  je prosté (ať  $x \in A$ ,  $q(x) = 0$ , pak  $x \in Y$ , tedy  $x \in A \cap Y = \{\mathbf{o}\}$ , takže  $x = \mathbf{o}$ ) a  $q$  je na (Ať  $x = y + a \in X$ , pak  $q(x) = q(a)$ , tedy  $q(x) \in q|_A(A)$ ). □

## Definice 4.6 (Kodimenze)

Je-li  $X$  vektorový prostor a  $Y$  jeho podprostor, pak kodimenzi (značíme  $\text{codim } Y$ )  $Y$  rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku  $Y$  (což je rovno dimenzi  $X/Y$ ).

## Definice 4.7

Je-li  $X$  normovaný lineární prostor a  $X = A \oplus B$ , pak říkáme, že  $X$  je topologickým součtem  $A$  a  $B$ , pokud jsou příslušné projekce  $P_A$  a  $P_B$  spojité. Tento fakt značíme  $X = A \oplus_t B$ . Je-li  $A$  podprostor  $X$ , pak každý podprostor  $B \subset X$  splňující  $A \oplus_t B = X$  se nazývá topologický doplněk  $A$  v  $X$ . Má-li  $A$  topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v  $X$ ).

## Věta 4.6

*Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $Y, Z$  jsou jeho podprostory splňující  $X = Y \oplus Z$ . Pak  $X = Y \oplus_t Z$ , právě když zobrazení  $T: X \rightarrow Y \oplus_1 Z$ ,  $T(x) = (P_Y(x), P_Z(x))$  je izomorfismus.*

┌ Důkaz

$\implies : \forall x \in X: \|T(x)\| = \|P_Y x\| + \|P_Z x\| \leq 2 \max(\|P_Y\|, \|P_Z\|) \|x\| \leq \|(P_Y + P_Z)x\| = \|x\|$ . Tedy  $T$  je izomorfismus.

$\Leftarrow : \forall x \in X: \|P_Y x\| \leq \|P_Y x\| + \|P_Z x\| = \|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ , tedy  $\|P_Y\| \leq \|T\|$ .  $\square$

### Věta 4.7

Nechť  $X$  je Banachův prostor a  $Y, Z \subset X$  jeho podprostory splňující  $X = Y \oplus Z$ . Pak  $X = Y \oplus_t Z$ , právě když  $Y$  a  $Z$  jsou uzavřené.

┌ Důkaz

Zatím bez důkazu.  $\square$

### Věta 4.8

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory. Pak

- $Y$  je isomorfní komplementovanému podprostoru  $X$ , právě když existují lineární operátory  $S : X \rightarrow Y$  a  $T : Y \rightarrow X$  splňující  $S \circ T = \text{id}_Y$ .
- $Y$  je isometrické 1-komplementovanému podprostoru  $X$ , právě když existují lineární operátory  $S : X \rightarrow Y$  a  $T : Y \rightarrow X$  splňující  $S \circ T = \text{id}_Y$  a  $\max\{\|S\|, \|T\|\} \leq 1$ .

┌ Důkaz

$\Leftarrow : \text{Polož } p := T \circ S : X \rightarrow X$ . Pak  $p$  je zřejmě lineární a  $\|p\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$ , navíc  $p^2 = (T \circ S) \circ (T \circ S) = p$ , tedy  $p$  je projekce. Zároveň  $p(X) = T(S(X))$ , jelikož  $S \circ T$  je identita, tak  $S$  je na a  $p(X) = T(Y) = \text{Rng } T$ . Zbývá si uvědomit, že  $T$  je izomorfismus (izometrie, pokud  $\|S\|, \|T\| \leq 1$ ): Máme

$$\forall x \in X : \|Sx\| = \|STSx\| \leq \|S\| \cdot \|TSx\|,$$

tedy (protože  $S$  je na):

$$\forall y \in Y : \|y\| \frac{1}{\|S\|} \leq \|Ty\|,$$

tudíž  $T$  je izomorfismus.

$\implies : \text{Ať } P : X \rightarrow X \text{ je projekce, } L : P(X) \rightarrow Y \text{ izomorfismus na. Položíme } S := L \circ P, T := L^{-1}, \text{ pak } S \circ T = L \circ P \circ L^{-1} = L \circ L^{-1} = \text{id}.$   $\square$

*Poznámka* (Zajímavosti pro všechny (nezkouší se))

Ví se ( $\dim X = +\infty$ ,  $X$  Banach)

- $X$  lze komplementovaně vnořit do  $l_p \implies X \cong l_p, p \in [1, \infty]$ .

- $X$  lze komplementovaně vnořit do  $c_0 \implies X \cong l_0$ .
- Existuje nespočetně neizomorfních podprostorů  $L_p$ ,  $p \in (1, \infty)$ .

Neví se:

- $X$  lze komplementovaně vnořit do  $L_1 \implies X \in \{l_1, L_1\}$ .
- $X$  lze komplementovaně vnořit do  $\mathcal{C}([0, 1]) \implies X \cong \mathcal{C}(k?)$ .

Ví se:

- $X \cong l_2 \Leftrightarrow (\forall Z, \dim Z = +\infty, Z \text{ Banach}, Z \hookrightarrow l_2 \implies Z \cong l_2)$ .

Neví se, zda platí izometrická varianta předchozího.

## 5 Hilbertovy prostory

### Lemma 5.1

$A^\perp$  je uzavřený podprostor.

┌

*Důkaz*

Pro  $y \in X$  ať  $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ . Pak  $f_y$  je lineární a spojitý (z Cauchy-Swartz).  $A^\perp = \bigcap_{y \in A} f_y^{-1}(0)$ . □

└

### Definice 5.1

Prostor se skalárním součinem  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se nazývá Hilbertův prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud  $(X, \|\cdot\|)$  je Banachův prostor, kde  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

*Například* •  $l_2 \dots \langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ .

- $L_2([0, 1]) \dots \langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ .

### Tvrzení 5.2

*Nechť  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  je prostor se skalárním součinem nad  $\mathbb{K}$ . Pak funkce  $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).*

┌ Důkaz

└ Přímočarý s použitím Cauchy-Swartze. □

### **Tvrzení 5.3** (Polarizační vzorec)

Nechť  $X$  je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna  $x, y \in X$  platí

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

v komplexním.

┌ Důkaz (Reálný případ, v  $\mathbb{C}$  analogicky)

$$\begin{aligned} 4\langle x, y \rangle &= 2\langle x, y \rangle - 2\langle x, -y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|-y\|^2 = \\ &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2. \end{aligned}$$

└ □

Důsledek

Nechť  $X, Y$  jsou prostory se skalárním součinem a  $T : X \rightarrow Y$  je lineární izometrie do. Pak  $T$  zachovává skalární součin, tj.  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  pro každé  $x, y \in X$ .

┌ Důkaz

└ Izometrie zachovává pravé strany v polarizačním vzorci. □

### **Věta 5.4**

$(X, \|\cdot\|)$  je NLP. Pak  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  pro nějaký skalární součin  $\langle \cdot, \cdot \rangle \Leftrightarrow$  platí:

$$\forall x, y \in X : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

┌ *Důkaz* (Reálný případ, komplexní analogicky)

$\implies$  z Polarizačního vzorce. Pro  $\Leftarrow$  položme  $\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ ,  $x, y \in X$ . Následně ověříme podmínky (kromě linearit (speciálně aditivity) je ověření triviální). Aditivita: Chceme

$$LS = \forall x, y, z \in X : \langle x + y, z \rangle + \langle x - y, z \rangle = 2 \langle x, z \rangle = PS.$$

$$\begin{aligned} LS &= \frac{1}{4} \left( \|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 + \|x - y + z\|^2 - \|x - y - z\|^2 \right) \stackrel{\text{z předpokladu}}{=} \\ &= \frac{1}{4} \left( 2(\|x + z\|^2 + \|y\|^2) - 2(\|x - y\|^2 + \|y\|^2) \right) = \frac{1}{2} (\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2) = PS. \end{aligned}$$

Tuto rovnost aplikujeme na  $x = y$ :  $\langle 2x, z \rangle = 2 \langle x, z \rangle$ , a na  $\tilde{x} = \frac{1}{2}(x + y)$ ,  $\tilde{y} = \frac{1}{2}(x - y)$ :

$$\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 2 \left\langle \frac{1}{2}(x + y), z \right\rangle = \langle x + y, z \rangle.$$

└

□

### Věta 5.5 (Frigyes Riesz, 1934)

*Nechť  $C$  je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru  $H$ . Pak pro každé  $x \in H$  existuje právě jedno  $y \in C$  tak, že  $\|x - y\| = \text{dist}(x, C)$ .*

┌

*Důkaz*

Zvolme  $(y_n)_{n=1}^\infty$  posloupnost v  $C$ , že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x\| = d(x, C)$ . Chceme, že  $(y_n)_{n=1}^\infty$  je Cauchyovská. Tedy, protože  $C$  je uzavřená, existuje  $y \in C : y_n \rightarrow y$ . Pak ale  $d(x, C) = \|x - y\|$ .

Zbývá jednoznačnost: Ať  $y, z \in C$  taková, že  $\|x - y\| = \|x - z\| = \text{dist}(x, C)$ . Pak  $\|y - z\|^2 \leq 0$ , tedy  $y = z$ . □

└

### Věta 5.6 (Frigyes Riesz, 1934)

*Nechť  $X$  je prostor se skalárním součinem,  $Y$  jeho podprostor a  $x \in X$ . Pak  $y \in Y$  splňuje  $\|x - y\| = \text{dist}(x, Y)$  právě tehdy, když  $x - y \in Y^\perp$ .*

┌

*Důkaz*

Jednoduchý. □

└

### Věta 5.7 (Frigyes Riesz, 1934)

*Nechť  $Y$  je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru  $H$ . Pak  $H = Y \oplus Y^\perp$  a projekce  $P_Y : H \rightarrow Y$  příslušná rozkladu  $H = Y \oplus Y^\perp$  má následující vlastnosti:*

- $\|P_Y(x) - x\| = \text{dist}(x, Y) \leq \|x\|$  pro každé  $x \in H$ ,

- $\|P_Y\| \leq 1$ .

┌

*Důkaz*

$Y \cap Y^\perp = \{0\}$ : Ať  $x \in Y \cap Y^\perp$ . Pak  $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$ .

$H = Y + Y^\perp$ : Zvol  $x \in H$ . Dle vět výše existuje právě jedno  $y \in Y : x - y \in Y^\perp$ . Pak  $x = y + x - y \in Y + Y^\perp$ .

Tedy,  $H = Y \oplus Y^\perp$ , a zároveň z důkazu víme, že

$P_Y(x) =$  „jediný prvek  $y \in Y$ , že  $x - y \in Y^\perp$ “ = „j. p.  $y \in Y$ , že  $\|x - y\| = d(x, Y)$ “.

Tedy  $\|P_Y(x) - x\| = d(x, Y) \leq \|x\|$ . Zbývá  $\|P_Y\| \leq 1$ : Z Pythagorovy věty je:

$$\|P_Y x\|^2 = \|x\|^2 - \|x - P_Y x\|^2 \leq \|x\|^2.$$

└

□

## Věta 5.8

*Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$  je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada  $\sum_{n=1}^\infty x_n$  konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.*

┌

*Důkaz*

$\implies$  už víme.  $\Leftarrow$ : Víme  $\sum_{n=1}^\infty x_n$  splňuje B-C podmínku. Tedy pro  $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ :

$$\forall m > n \geq n_0 : \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| < \varepsilon.$$

Polož  $F = \{1, \dots, n_0\}$ . Zvol  $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) : F' \cap F = \emptyset$ . Pak

$$\left\| \sum_{k \in F'} x_k \right\|^2 \stackrel{\text{Pyt. věta}}{=} \sum_{k \in F'} \|x_k\|^2 \leq \sum_{k \in \min F'}^{\max F'} \|x_k\|^2 = \left\| \sum_{\dots}^{\dots} x_k \right\|^2 < \varepsilon.$$

└

□

## Definice 5.2 (Ortogonální, ortonormální, maximální ortonormální, úplný ortonormální, ortonormální báze)

Je-li  $X$  prostor se skalárním součinem a  $A \subset X$ , řekneme, že množina  $A$  je

- ortogonální, pokud  $x \perp y$  pro všechna  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$ .
- ortonormální, pokud  $A$  je ortogonální a  $A \subset S_X$ .
- maximální ortonormální, pokud  $A$  je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující  $A$  různá od  $A$ .



- úplný ortonormální, pokud  $A$  je ortonormální a  $\overline{\text{span}}A = X$ .
- ortonormální báze, pokud  $A = \{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$  je ortonormální množina a každé  $x \in X$  lze vyjádřit jako  $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$  pro nějaké skaláry  $x_\gamma$ .

### Tvrzení 5.9 (Fakt)

Je-li  $A$  ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak  $\|x - y\| = \sqrt{2}$  pro každé dva prvky  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$ .

┌ Důkaz

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

┌ Poznámka

Tedy, pokud  $X$  je separabilní se skalárním součinem  $\implies$  každý ON-systém je spočetný.

### Věta 5.10

Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.

┌ Důkaz

$\mathcal{P} = \{A \subset X | A \text{ je ON-systém}\}$  s uspořádáním inkluzí. Zvol  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$  lineárně uspořádané, pak  $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{P}$  je horní závora  $\mathcal{O} \implies$  (z Zornova lemmatu)  $\exists A \in \mathcal{P}$  maximální. To je hledaný maximální ON-systém.

□

### Věta 5.11 (Besselova nerovnost)

Je-li  $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  ortonormální soustava v prostoru  $X$  se skalárním součinem, platí

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

pro každé  $x \in X$ .

┌ Důkaz

Ať  $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ ,  $x_F := \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$ . Pak  $\|x\|^2 = \|x - x_F\|^2 + \|x_F\|^2$  podle Pythagorovy věty ( $x - x_F \perp x_F$ :  $\forall i \in F: \langle x - x_F, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x_F, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma, e_i \rangle = 0$ ). Tj.  $\|x\|^2 \geq \|x_F\|^2 = \sum_{\gamma \in F} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$ . Tedy máme omezení pro všechny konečné součty, tudíž celý součet bude omezen stejně (celý součet je supremum z konečných podle tvrzení někde výše).

□

### Věta 5.12

Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  je ortonormální systém v  $H$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1.  $\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$  pro každé  $x \in H$  (tzv. Parsevalova rovnost).
2.  $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$  pro každé  $x \in H$ .
3.  $\{e_\gamma\}$  je ortonormální báze.
4.  $H = \overline{\text{span}}\{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ .
5.  $\{e_\gamma\}$  je maximální ortonormální systém.

┌  
Důkaz

1  $\implies$  2: Necht  $\varepsilon > 0$ . Zvolíme  $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ :  $\|x\|^2 - \varepsilon < \sum_{\gamma \in F} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$ . Zvolíme  $F' \supset F$ ,  $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ . Pak

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{\gamma \in F'} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|^2 &\stackrel{\text{cos + Pythagorova věta}}{=} \|x\|^2 + \sum_{\gamma \in F'} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 - 2\Re \left\langle x, \sum_{\gamma \in F'} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma \right\rangle = \\ &= \dots + \dots - 2\Re \sum_{\gamma \in F'} \overline{\langle x, e_\gamma \rangle} \langle x, e_\gamma \rangle = \|x\|^2 - \sum_{\gamma \in F'} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

2  $\implies$  3: Triviální. 3  $\implies$  4: Triviální. 4  $\implies$  1: Necht  $x \in H$  a  $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ , že existuje  $\sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma$  splňující  $\|x - \sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma\| < \varepsilon$ . Položme  $y := \sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma$ , pak  $d(x, y) \leq \|x - \sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma\| < \varepsilon$ . (Jelikož  $d(x, y) = \|x - \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|$ , neboť z lemmatu někde výše stačí ověřit  $y \perp x - \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$ , tj. stačí  $\forall i \in F : \langle x - \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma, e_i \rangle = 0$ , což je jednoduché.)

Tedy  $\|x\| \leq \varepsilon + \|\sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|$  (z Besselovy nerovnosti víme, že suma konverguje a navíc víme, že v 1 platí  $\geq$ , tj. stačí dokázat  $\leq$ )

$$\|x\|^2 \leq \left( \varepsilon + \left\| \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma \right\| \right)^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon\|x\| + \sum_{\gamma \in F} \|\langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|^2 \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon\|x\| + \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2.$$

2  $\implies$  5: Ať  $x \in \{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}^\perp$  (chceme, že  $x = 0$ ). Z 2. víme, že  $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma = \sum 0 = 0$ .

5  $\implies$  4: Ať  $Y = \overline{\text{span}}(e_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ . Pak  $H = Y \oplus_t Y^\perp$  (zde se používá úplnost jako předpoklad věty, ze které toto plyne).  $H = Y \oplus_t \{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}^\perp \stackrel{5}{=} Y \oplus_t \{\mathbf{o}\}$ . □

*Poznámka*

Bez úplnosti jsou ekvivalentní 1, 2, 3 a 4 a vyplývá z nich 5.

### Věta 5.13 (Ernst Sigismund Fisher (1907), Frigyes Riesz (1907))

Je-li  $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  ortonormální báze Hilbertova prostoru  $H$ , je zobrazení  $T : H \rightarrow l_2(\Gamma)$ ,  $T(x) = \{\langle x, e_\gamma \rangle\}_{\gamma \in \Gamma}$  izometrie  $H$  a  $l_2(\Gamma)$ . Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický  $l_2(\Gamma)$  pro

vhodnou množinu  $\Gamma$ .

┌

*Důkaz* (Ze skript)

Zjevně  $T$  je lineární. Z Parsevalovy rovnosti plyne, že  $\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$  pro každé  $x \in H$ , a tedy  $T$  je izometrie do  $l_2(\Gamma)$ .  $\{T(e_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$  je množina kanonických bázových vektorů v  $l_2(\Gamma)$ . Díky linearitě tedy  $\text{Rng } T$  obsahuje všechny vektory v  $l_2(\Gamma)$ , které mají jen konečně mnoho nenulových souřadnic. Tyto vektory tvoří hustou podmnožinu v  $l_2(\Gamma)$ .

Podle tvrzení ze začátku předmětu je  $\text{Rng}$  uzavřený, tudíž je roven celému  $l_2(\Gamma)$ .  $\square$

└

### Věta 5.14 (Vyjádření ortogonální projekce)

*Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $Y$  jeho uzavřený podprostor. Nechť  $(e_j)_{j \in J}$  je nějaká ortonormální báze prostoru  $Y$ . Pak projekci na  $Y$  podél  $Y^\perp$  (tzv. ortogonální projekci) lze vyjádřit vzorcem*

$$Px = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j, \quad x \in H.$$

┌

*Důkaz*

Dle vět a lemmatu F. Riesz  $P_Y x = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j \Leftrightarrow x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j \in Y^\perp$ . Tedy stačí

$$\forall x \in H \quad \forall j_0 \in J : \left\langle x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j, e_{j_0} \right\rangle = 0 :$$

$$\begin{aligned} \forall x \in H \quad \forall j_0 \in J : \left\langle x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j, e_{j_0} \right\rangle &= \langle x, e_{j_0} \rangle - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_{j_0} \rangle = \\ &= \langle x, e_{j_0} \rangle - \langle x, e_{j_0} \rangle = 0. \end{aligned}$$

└

$\square$

### Věta 5.15 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))

*Nechť  $H$  je Hilbertův prostor. Pro každé  $y \in H$  označme  $f_y \in H^*$  funkcionál definovaný jako  $f_y(x) = \langle x, y \rangle$  pro  $x \in H$ . Pak zobrazení  $l : H \rightarrow H^*$ ,  $l(y) = f_y$  je sdruženě lineární ( $l(\alpha y) = \bar{\alpha} l(y)$ ) izometrie  $H$  na  $H^*$ .*

┌  
Důkaz

$\forall y \in H$  máme:  $f_y$  je lineární,  $\forall x \in H: f_y(x) \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , tedy  $f_y$  je spojitý a  $\|f_y\| \leq \|y\|$ ,  
 $f_y\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle = \|y\| \implies \|f_y\| = \|y\|, y \in H. \implies I$  je izometrie, sdruženě  
 lineární. Zbývá „na“. To se dokáže z následujícího lemmatu:

Zvol  $f \in H^*$ , pak  $H = \text{Ker } f \oplus (\text{Ker } f)^\perp$ . Tedy existuje  $z \in (\text{Ker } f)^\perp$  splňující  $H = \text{Ker } f \oplus \text{span}\{z\}$ . Položme  $y := f(z)z$ . Pak  $I(y) = f$ , jelikož:

$$\forall x \in H : I(y)(x) = \langle x, y \rangle = \langle x_{\text{Ker } f} + \alpha_x z, y \rangle = \langle \alpha_x z, y \rangle = \alpha_x \langle z, \overline{f(z)}z \rangle = f(\alpha_x z) = f(x).$$

└

□

### Lemma 5.16

Nechť  $X$  je vektorový prostor,  $f$  je lineární forma na  $X$  a  $x \in X \setminus \text{Ker } f$ . Pak  $X = \text{Ker } f \oplus \text{span}\{x\}$ . Tedy  $\text{codim Ker } f = 1$ .

┌  
Důkaz

$\text{Ker } f \cap \text{span}\{x\} = \{\mathbf{o}\}$ : Ať  $\alpha \in \mathbb{K}$ , pak pokud  $\alpha x \in \text{Ker } f$ , pak  $\alpha f(x) = f(\alpha x) = 0$ , tedy  $\alpha = \mathbf{o}$ .

$$\text{Ať } y \in X. \text{ Pak } y = \left(y - \frac{f(y)}{f(x)}x\right) + \frac{f(y)}{f(x)}x.$$

└

□

### Definice 5.3

Nechť  $X$  je komplexní normovaný lineární prostor. Symbolem  $X_R$  označme prostor  $X$  uvažovaný jako reálný. Tj.  $X_R$  je tatáž množina jako  $X$  uvažovaná s operací sčítání jako v  $X$ , s násobením reálným číslem jako v  $X$  a stejně definovanou normou.

### Věta 5.17 (Reálná verze komplexního normovaného lineárního prostoru)

Nechť  $X$  je komplexní normovaný lineární prostor. Pak platí

1.  $X_R$  je reálný normovaný lineární prostor. (Zřejmé.)
2.  $X_R$  je úplný, právě když  $X$  je úplný. (Norma je pořád tatáž.)
3.  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$  je lineární, právě když  $\Re \varphi : X_R \rightarrow \mathbb{R}$  je lineární a  $\Im \varphi(x) = -\Re \varphi(ix)$  pro každé  $x \in X$ . (Z definice linearity.)
4. Je-li  $\varphi \in X^*$ , pak funkcionál  $\psi(x) = \Re \varphi(x)$ ,  $x \in X_R$ , patří do  $(X_R)^*$  a platí  $\|\psi\| = \|\varphi\|$ . (Z předchozího bodu.)
5. Je-li  $\psi \in (X_R)^*$ , pak existuje právě jeden funkcionál  $\varphi \in X^*$  takový, že  $\psi(x) = \Re \varphi(x)$  pro  $x \in X_R$ . Je dán vzorcem  $\varphi(x) = \psi(x) - i\psi(ix)$  a splňuje  $\|\psi\| = \|\varphi\|$ . (4., 5.)
6. Prostory  $(X_R)^*$  a  $(X^*)_R$  jsou izometrické. (Vyplývá z 5.)

### Definice 5.4

Nechť  $X$  je reálný normovaný lineární prostor. Na  $X \times X$  definujeme:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2), & x_1, x_2, y_1, y_2 &\in X, \\ (\alpha_1 + i\alpha_2) \cdot (x_1, x_2) &= (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1), & \alpha_1, \alpha_2 &\in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in X, \\ \|(x_1, x_2)\|_{X_C} &= \sup \{ \|(\cos \alpha)x_1 + (\sin \alpha)x_2\|_X \mid \alpha \in [0, 2\pi) \}, & x_1, x_2 &\in X.\end{aligned}$$

Symbolem  $(X_C, \|\cdot\|)$  značíme komplexní normovaný lineární prostor  $(X \times X, +, \cdot, \|\cdot\|_{X_C})$ .

### Věta 5.18 (Komplexifikace)

*Je-li  $X$  reálný normovaný lineární prostor, pak je  $(X_C, \|\cdot\|)$  komplexní normovaný lineární prostor. Je-li navíc  $X$  Banachův, pak je  $X_C$  Banachův.*

*Důkaz*

Linearitu nebudeme dokazovat (definice je zvolena tak, aby to vycházelo, lehké cvičení). Norma je taktéž jednoduchá, nejtěžší je dokázat, že lze vytýkat konstanty.

$X_C$  je Banachův plyne z toho, že  $X \oplus_\infty X$  je Banach a norma  $\|\cdot\|_{X_C}$  je ekvivalentní (konstanty 1 a 2) maximové normě, která je v definici součinu metrických prostorů a součin úplných metrických prostorů je úplný.  $\square$

### Definice 5.5 (Sublineární funkcionál, pseudonorma)

Nechť  $X$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{K}$ . Funkce  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  se nazývá sublineární funkcionál, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  pro každé  $x, y \in X$ ,
- $p(tx) = tp(x)$  pro každé  $x \in X$  a  $t \in [0, +\infty)$ .

Funkce  $p : X \rightarrow [0, +\infty)$  se nazývá pseudonorma, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  pro každé  $x, y \in X$ ,
- $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$  pro každé  $x \in X$  a  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

### Věta 5.19 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))

*Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $Y$  je podprostor.*

- *Je-li  $X$  reálný,  $p$  je sublineární funkcionál na  $X$  a  $f$  je lineární forma na  $Y$  splňující  $f(x) \leq p(x)$  pro každé  $x \in Y$ , pak existuje lineární forma  $F$  na  $X$  taková, že  $F|_Y = f$  a  $F(x) \leq p(x)$  pro každé  $x \in X$ .*

- Je-li  $p$  pseudonorma na  $X$  a  $p$  je lineární forma na  $Y$  splňující  $|f(x)| \leq p(x)$  pro každé  $x \in Y$ , pak existuje lineární forma  $F$  na  $X$  taková, že  $F|_Y = f$  a  $|F(x)| \leq p(x)$ ,  $x \in X$ .

┌  
Důkaz (1. bod)

1. krok: rozšíříme  $f$  o jednu dimenzi, tj. na  $Z = Y \oplus \text{span}(x)$ , kde  $x \notin Y$ . Položme  $F(y + tx) := f(y) + t\alpha$ ,  $y \in Y$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , kde  $\alpha \in \mathbb{R}$  je vhodně zvolená: Linearita  $f$  vyplývá z definice, tedy stačí  $f(y) + t\alpha \leq p(y + tx)$ ,  $y \in Y$ ,  $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall t > 0 : \alpha \leq \frac{1}{t}(p(y + tx) - f(y)) \wedge \forall t < 0 : \alpha \geq \frac{1}{t}(p(y + tx) - f(y)), y \in Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall t > 0 : \alpha \leq p\left(\frac{y}{t} + x\right) - f\left(\frac{y}{t}\right) \wedge \forall t < 0 : \alpha \geq f\left(\frac{-y}{t}\right) - p\left(\frac{-y}{t} - x\right), y \in Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in Y : \alpha \in [f(y) - p(y - x), p(y + x) - f(y)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall y, z \in Y : f(y) - p(y - x) \leq p(z + x) - f(z),$$

tedy máme  $f(y) + f(z) = f(y + z) \leq p(y + z) \leq p(y - x) + p(z + x)$ . Tedy  $\alpha$  můžeme volit libovolně z intervalu  $[\sup_y f(y) - p(y - x), \inf_y p(y + x) - f(y)]$ .

2. krok: přidáme všechny dimenze (transfinitní) indukci. (Tato věta je dokonce ekvivalentní axiomu výběru, takže předpokládáme, že axiom výběru platí.) □

┌  
Důkaz (2. bod)

1. krok: Pro  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  aplikujeme první bod: Víme, že existuje  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  lineární, že  $F|_Y = f$ . Pak ale  $F(x) \leq p(x)$ ,  $x \in X \wedge -F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x)$ ,  $x \in X \Rightarrow |F(x)| \leq p(x)$ ,  $x \in X$ .

2. krok: Pro  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ : Polož  $g = \Re f$ . Pak podle 1. části  $\exists G : X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  lineární, že  $G|_Y = g \wedge |G(x)| \leq p(x)$ ,  $x \in X$ . Pak máme  $f(x) = g(x) - ig(ix)$ ,  $x \in X$  a položíme  $F(x) := G(x) - iG(ix)$ ,  $x \in X$ . Pak  $f|_Y = f$ ,  $F$  je lineární a pro  $x \in X$  máme:

Zvolme  $|\lambda| = 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} : |F(x)| = \lambda F(x)$ , pak  $|F(x)| = F(\lambda x) = G(\lambda x) - iG(i\lambda x) = G(\lambda x) \leq P(\lambda x) \leq p(x)$ . □

## Věta 5.20 (Hahnova-Banachova)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor,  $Y$  je podprostor  $X$  a  $f \in Y^*$ . Pak existuje  $F \in X^*$  takové, že  $F|_Y = f$  a  $\|F\| = \|f\|$ .

┌  
Důkaz

Aplikujeme předchozí větu na  $p(x) := \|f\| \cdot \|x\|$ ,  $x \in X$ . Pak  $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| = p(x)$ ,  $x \in Y \Rightarrow \exists F : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineární,  $F|_Y = f$ ,  $|F| \leq p$ . Pak  $|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ ,  $x \in X$ , tedy  $\|F\| \leq \|f\|$  (opačná nerovnost triviální). □

### Důsledek

Nechť  $X$  je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé  $x \in X$  existuje  $f \in S_{X^*}$  takové, že  $f(x) = \|x\|$ . Odtud plyne, že jsou-li  $x, y \in X$  různé body, pak existuje  $f \in X^*$  takový, že  $f(x) \neq f(y)$  (říkáme, že  $X^*$  odděluje body  $X$ ).

┌

### Důkaz

Zvol  $x \in X$ . BÚNO  $x \neq \mathbf{0}$ . Polož  $Y = \text{span}(x)$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{K}$  definujeme předpisem  $g(tx) := t\|x\|$ ,  $\forall t \in \mathbb{K}$ . Pak  $g$  je zřejmě lineární a  $\|g\| = 1$ , protože

$$|g(tx)| = |t| \cdot \|x\| = \|tx\|, \forall t \in \mathbb{K}.$$

Podle H-B  $\exists f \in X^* : f|_Y = g$ ,  $\|f\| = \|g\| = 1$ . Pak  $f(x) = \|x\|$ .

Ad „speciálně“: Zvol  $x$  a  $y$ . Najdi  $f \in S_{X^*} : f(x - y) = \|x - y\|$ , pak  $f(x) \neq f(y)$ , protože  $\|x - y\| \neq 0$ . □

### Důsledek

Je-li  $X$  normovaný lineární prostor a  $x \in X$ , pak  $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$ .

┌

### Důkaz

┌ Triviální. □

### Důsledek (Oddělování bodu a podprostoru)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor,  $Y$  je uzavřený podprostor  $X$  a  $x \notin Y$ . Pak existuje  $f \in S_{X^*}$  tak, že  $f|_Y = 0$  a  $f(x) = \text{dist}(x, Y) > 0$ .

┌

### Důkaz

Zvolme  $Z := Y \oplus \text{span}(x) \subset X$ .  $f(y + \alpha x) := \alpha \text{dist}(x, Y)$ ,  $y \in Y$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Pak  $f : Z \rightarrow \mathbb{K}$  je lineární.  $\|f\| = 1$ :  $|f(y + \alpha x)| = |\alpha| \text{dist}(x, Y) \leq |\alpha| \cdot \|x + \frac{y}{\alpha}\| = \|\alpha x + y\|$ ,  $y \in Y$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Zvolme  $(y_n)_{n=1}^\infty$  v  $Y$ , že  $d(x, Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\|$ . Pak  $\frac{|f(y_n + x)|}{\|y_n + x\|} = \frac{d(x, Y)}{\|y_n + x\|} \rightarrow 1$ .

Nyní z H-B věty rozšíříme na celé  $Y$ :  $\exists F \in X^* : F|_Z = f \wedge \|F\| = 1$ . □

## Věta 5.21 (Oddělování konvexních množin)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $A, B \subset X$  jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení

- Je-li  $A$  otevřená, pak existuje  $f \in X^*$  takový, že  $\Re f(x) < \inf_B \Re f$  pro každé  $x \in A$ .
- Je-li  $A$  otevřená a  $B$  kompaktní, pak existuje  $f \in X^*$  takový, že  $\sup_A \Re f < \inf_B \Re f$ .

┌

### Poznámka

┌ Ekvivalentní H-B větě.

┌ *Důkaz*

BÚNO  $X$  je nad  $\mathbb{R}$ . BÚNO  $A \neq \emptyset \neq B$ . První bod: Zvolíme  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Polož  $w = b - a$  a  $C = w + A - B$ . Pak  $w \notin C$ ,  $\mathbf{o} \in C$ ,  $C$  je konvexní ( $A$  i  $B$  jsou konvexní, takže i jejich posunutý rozdíl je konvexní) a otevřená ( $A$  je otevřená, posunutý rozdíl otevřené a libovolné je otevřená). Položme  $p_c(x) := \inf \{t > 0 \mid x \in tC\}$  (lehce se ověří, že  $p_c$ , tzv. Minkowského funkcionál, je sublineární).  $p_c(x) < +\infty$  (protože  $C$  obsahuje nulu a z otevřenosti i kouli kolem ní a každé  $x$  se vejde do dostatečně nafouklé koule).  $p_c \leq 1$  na  $C$  a  $p_c(w) \geq 1$ .

Položme  $Y := \text{span}(w)$ ,  $g(\alpha w) := \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  (pak  $g \leq p_c$ ). Z H-B tedy plyne:

$$\exists G : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineární, } G|_Y = g, G \leq p_c.$$

Pak  $G \in X^*$  protože  $G \leq p_c \leq 1$  na  $C$ , ale to obsahuje kouli, takže je  $G$  omezené na nějaké kouli  $\implies$  je spojitý.

Konečně  $\forall x \in A \forall y \in B : G(x) = G(y) + G(x - y + w) - G(w) \leq G(y) + 1 - 1 = G(y)$ .

Rovnost nemůže nastat, protože  $A$  je otevřená. □

└ *Důsledek* (H-B věty)

$X$  je NLP,  $Y \subset X$  podprostor. Buď  $\dim Y < \infty$  nebo  $\text{codim } Y < \infty$ . Pak  $Y \xrightarrow{C} X$ . (Tj.  $\exists P : X \rightarrow Y$  spojitý, že  $P|_Y = \text{id}_Y$ .)



*Důkaz*

$\dim Y < \infty$ : Ať  $\{e_1, \dots, e_n\}$  je báze  $Y$ ,  $\{f_1, \dots, f_n\}$  je duální báze  $Y$ . Pak  $f_1, \dots, f_n : Y \rightarrow \mathbb{K}$  jsou spojité ( $Y$  má konečnou dimenzi). Z H-B  $\exists F_1, \dots, F_n : X \rightarrow \mathbb{K}$  spojité,  $\|F_i\| = \|f_i\|$ ,  $F_i \supset f_i$ . Definujme  $P : X \rightarrow Y$  předpisem  $P(x) := \sum_{i=1}^n F_i(x)e_i \in Y$ .  $P$  je lineární,

$$\|Px\| \leq \sum_{i=1}^n \|F_i(x)\| \cdot \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|F_i\| \cdot \|x\| \cdot \|e_i\| \leq \left( n \cdot \max_{i \in [n]} \|F_i\| \cdot \|e_i\| \right) \cdot \|x\|.$$

$P$  je tedy spojitý. Zbývá ověřit  $P_y = \text{id}_n$ .  $\forall y \in Y$  :

$$P(y) = P\left(\sum_{i=1}^n f_i(y)e_i\right) = \sum_{i=1}^n f_i(Y)P(e_i) = \sum_{i=1}^n f_i(y) \sum_{j=1}^n F_j(e_i)e_j = \sum_{i=1}^n f_i(y)e_i = y.$$

$\text{codim } Y < \infty$ : ( $\text{codim } Y = \dim(X/Y)$ ) ať  $\{q(e_1), \dots, q(e_n)\}$  je báze  $X/Y$  ( $q : x \mapsto [x]$ ) a  $\{f_1, \dots, f_n\}$  duální funkcionály. Ty jsou spojité. Polož  $F_i = f_i \circ q$  ( $i \in [n]$ ), což je složení dvou spojitých funkcionálů, tedy spojitý funkcionál. Definujme  $P : X \rightarrow \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ ,  $P(x) := \sum_{i=1}^n F_i(x)e_i$ ,  $x \in X$ . „ $P$  je lineární“ je jasné, stejně tak spojitost  $P$  (podobně jako v první části).

$$P|_{\text{span}(e_1, \dots, e_n)} = \text{id}:$$

$$\forall i \in [n] : P(e_i) = \sum_{j=1}^n F_j(e_i)e_j = \sum_{j=1}^n f_j(q(e_i))e_j = e_i.$$

Tedy  $P$  je spojitá lineární projekce a navíc  $\text{Ker } P = Y$ :  $Px = 0 \Leftrightarrow F_i(x) = 0 \forall i \in [n] \Leftrightarrow f_i(q(x)) = 0, \Leftrightarrow q(x) = 0$ . Máme  $X = \text{Rng } P \oplus_t \text{Ker } P$ . Položíme  $Q = \text{id} - P$ , pak  $\text{Rng } Q = \text{Ker } P = Y$ ,  $Q$  spojitá projekce.  $\square$

## Definice 5.6

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Operátor  $T^* : Y^* \rightarrow X^*$  definovaný předpisem  $T^*f(x) = f(Tx)$  pro  $f \in Y^*$  a  $x \in X$  se nazývá duální (nebo též adjungovaný) operátor k  $T$ .

Operátor  $(T^*)^*$  značíme  $T^{**}$ .

## Věta 5.22

Nechť  $X, Y, Z$  jsou normované lineární prostory.

1. Je-li  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , je  $T^*f \in X^*$  pro každé  $f \in Y^*$ . Dále  $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$  a  $\|T^*\| = \|T\|$ .
2. Zobrazení  $T \mapsto T^*$  je lineární izometrie z  $\mathcal{L}(X, Y)$  do  $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$ .
3.  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  a  $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ . Pak  $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ . Dále  $\text{id}_X^* = \text{id}_{X^*}$ .

┌  
Důkaz

1. Spojitost  $T^*f$  je zřejmá z definice (složení dvou lineárních funkcí), stejně tak linearita  $T$ . Dále

$$\forall y^* \in B_{Y^*} : \|T^*y^*\| = \sup_{x \in B_X} |T^*y^*(x)| = \sup_{x \in B_X} |y^*(Tx)| \leq \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \|T\|,$$

tedy  $\|T^*\| \leq \|T\|$  a  $T$  je spojitý. Zbývá  $\|T\| \leq \|T^*\|$ . (Dokazujeme opačnou nerovnost k té výše.) Zvolme  $x \in B_X$ . Najdi (z jednoho z důsledků H-B)  $y^* \in S_{Y^*}$ .  $\|T_x\| = |y^*(Tx)|$ . Pak

$$\|Tx\| = |y^*(Tx)| = |T^*y^*(x)| \leq \|T^*\| \cdot \|y^*\| \cdot \|x\| \leq \|T^*\|.$$

Tj.  $\|T\| \leq \|T^*\|$ .

2. Linearita zobrazení plyne z předpisu a izometrie pak plyne z prvního bodu.

3.  $\forall z^* \in Z^* \forall x \in X :$

$$((S \circ T)^*z^*)(x) = z^*(S(T(x))) = S^*z^*(Tx) = (T^*S^*z^*)(x).$$

A to platí pro všechna  $x$  a  $z^*$ , tedy funkcionály na ně aplikované musí být tytéž. Identita je triviální z definice. □

## Věta 5.23

*Nechť  $H_1, H_2$  jsou Hilbertovy prostory a  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ . Pak existuje jednoznačně určený operátor  $T^\star \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$  takový, že pro každé  $y \in H_2$  a  $x \in H_1$  platí*

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y \rangle_{H_1}.$$

*Dále platí, že  $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$ , kde  $I_j : H_j \rightarrow H_j^*$ ,  $j = 1, 2$  jsou příslušné sdružené lineární izometrie z věty výše (89 ve skriptech). ( $I_i : y \mapsto \langle \cdot, y \rangle \in H_1^*$ .)*

┌  
Důkaz

Zvol  $x \in H_1$ ,  $y \in H_2$ . Uvažuj  $g \in (H_1)^*$  definované předpisem  $\langle Tx, y \rangle_{H_2}$ . Dle věty 89 ve skriptech,  $\exists! z \in H_1 : g(x) = \langle x, z \rangle$ ,  $x \in H_1$ . Tedy rovnost z věty platí  $\Leftrightarrow T^\star y = z$ . Celkem  $\exists! T^\star : H_2 \rightarrow H_1$ , pro které platí rovnost ze znění.

Zbývá:  $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$  (pak operátor  $T^\star$  je lineární a spojitý). Stačí jen, že  $I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$  splňuje rovnost ze zadání, protože existuje právě jeden takový operátor. Z definice  $I_i$  a přelévání písmenek (definice sdruženého operátoru) tedy:

$$\begin{aligned} \forall x \in H_1 \forall y \in H_2 : \langle x, (I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2)(y) \rangle_{H_1} = \\ (I_1(I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2))(x) = (T^* \circ I_2)(x) = (I_2y)(Tx) = \langle Tx, y \rangle. \end{aligned}$$

□

**Definice 5.7** (Hilbertovsky adjungovaný operátor)

Operátor  $T^\star$  z předcházející věty nazýváme hilbertovsky adjungovaným operátorem k  $T$ .

**Věta 5.24**

Nechť  $H_1, H_2, H_3$  jsou Hilbertovy prostory.

1. Je-li  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ , je  $T^{\star\star} = (T^\star)^\star = T$ .
2. Zobrazení  $T \mapsto T^\star$  je sdruženě lineární izometrie  $\mathcal{L}(H_1, H_2)$  na  $\mathcal{L}(H_2, H_1)$ .
3. Nechť  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  a  $S \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ . Pak  $(S \circ T)^\star = T^\star \circ S^\star$ . Dále  $(\text{id}_{H_1})^\star = \text{id}_{H_1}$ .

┌  
Důkaz

1. Máme

$$\forall x \in H_1 \forall y \in H_2 : \langle T^{\star\star}x, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y \rangle_{H_1} = \langle Tx, y \rangle_{H_2}.$$

Tedy pro každé  $x, y$  jsou tyto operátory stejné, tedy  $T^{\star\star} = T$ .

2. Sdružená linearita: Zachování „+“ plyne ze vzorce, „zachování“ „·“:

$$\forall x, y \forall \alpha \in \mathbb{K} : \langle x, T^\star \alpha y \rangle = \langle Tx, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle Tx, y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, T^\star y \rangle$$

.

Izometrie plyne z toho, že  $T^\star$  je složení izometrií. To že je na plyne z 1.

$$3. \forall x, y : \langle x, (S \circ T)^\star y \rangle = \langle S(Tx), y \rangle = \langle Tx, S^\star y \rangle = \langle x, T^\star S^\star y \rangle.$$

└

□

**Definice 5.8** (Sdružený exponent)

Nechť  $p \in \mathbb{R}$ ,  $p \geq 1$ , nebo  $p = \infty$ . Číslo  $q \in \mathbb{R}$ ,  $q \geq 1$ , nebo  $q = \infty$  nazýváme sdruženým exponentem k  $p$ , pokud platí  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Věta 5.25** (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)

Nechť  $I \neq \emptyset$ .

1. Prostor  $c_0(I)^*$  je lineárně izometrický s prostorem  $l_1(I)$  pomocí zobrazení  $I : l_1(I) \rightarrow c_0(I)^*$ ,  $I(y) = f_y$ , kde

$$f_y(x) = \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

2. Je-li  $1 \leq p < \infty$  a  $q$  je sdružený exponent k  $p$ , pak prostor  $l_p(I)^*$  je lineárně izometrický

s prostorem  $l_q(I)$  pomocí zobrazení  $I : l_q(I) \rightarrow l_p(I)^*$ ,  $I(y) = f_y$ , kde

$$f_y(x) = \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

3. Je-li  $(\Omega, S, \mu)$  libovolný prostor s mírou  $1 < p < \infty$  a  $q$  je sdružený exponent k  $p$ , pak prostor  $L_p(\mu)^*$  je lineárně izometrický s prostorem  $L_q(\mu)$  pomocí zobrazení  $I : L_q(\mu) \rightarrow L_p(\mu)^*$ ,  $I(g) = \varphi_g$ , kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} f \cdot g d\mu.$$

4. Je-li  $(\Omega, S, \mu)$  prostor se  $\sigma$ -konečnou mírou, pak prostor  $L_1(\mu)^*$  je lineárně izometrický s prostorem  $L_{\infty}(\mu)$  pomocí zobrazení  $I : L_{\infty}(\mu) \rightarrow L_1(\mu)^*$ ,  $I(g) = \varphi_g$ , kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} f \cdot g d\mu.$$

┌  
Důkaz (1.)  
 $\|I\| \leq 1$ :

$$\forall y \in l_1(I) \quad \forall x \in c_0(I) \quad \forall F \in \mathcal{F}(I) : \left| \sum_{i \in F} y_i x_i \right| \leq \sum_{i \in F} |y_i x_i| \leq \|x\|_{\infty} \cdot \sum_{i \in F} |y_i| \leq \|x\|_{\infty} \cdot \|y\|_1$$

$$\implies |I(y)(x)| \leq \|x\|_{\infty} \cdot \|y\|_1,$$

takže opravdu  $I(y) \in c_0(I)^*$  a navíc  $\|I(y)\| \leq \|y\|_1$ , tedy  $I$  je lineární, dobře definované,  $\|I\| \leq 1$ .

Izometrie: Zvol  $y \in l_1(I)$ , zvol  $F \in \mathcal{F}(I)$ . Polož  $x_F := \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|}{y(i)} e_i \in B_{c_0(I)}$ . Pak

$$\|I(y)\| \geq |I(y)(x_F)| = \left| \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} y(i) \cdot \frac{|y(i)|}{y(i)} \right| = \sum_{i \in F} |y(i)|.$$

Tedy, protože  $\|y\|_1 = \sup_{F \in \mathcal{F}(I)} \sum_{i \in F} y(i)$ , dostáváme  $\|I(y)\| \geq \|y\|$ .

Zbývá už jen „na“: Zvol  $f \in c_0(I)^*$ . Polož  $y(i) := f(e_i)$ ,  $i \in I$ . Pak  $y \in l_1(I)$ : Zvol  $F \in \mathcal{F}(I)$ . Pak

$$\sum_{i \in F} |y(i)| = \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} y(i) \cdot \frac{|y(i)|}{y(i)} = \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} f(e_i) \cdot \frac{|y(i)|}{y(i)} = f \left( \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|}{y(i)} \cdot e_i \right) \leq \|f\|.$$

Tudíž  $y \in l_1(I)$  (a  $\|y\|_1 \leq \|f\|$ ).

Chceme  $I(y) = f$ : Máme  $\forall i \in I : I(y)(e_i) = y(i) = f(e_i)$ . Tedy  $I(y) = f$  na  $e_i$ , takže z linearit a spojitosti na  $\overline{\text{span}}(e_i, i \in I) = c_0(I)$ .  $\square$

┌

Důkaz (2.)

Případ  $p = 1$ :  $\|I\| \leq 1$  se dokáže jako v důkazu 1:

$$\forall y \in l_\infty(I) \forall x \in l_1(I) \forall F \in \mathcal{F}(I) : \sum_{i \in F} |y_i x_i| \leq \|y\|_\infty \cdot \|x\|_1.$$

$I$  izometrie: Ať  $y \in l_\infty(I)$ , pak

$$\forall i \in I : \|I(y)\| \geq |I(y)(e_i)| = |y(i)| \implies \|I(y)\| \geq \sup_i |y(i)| = \|y\|_\infty.$$

$I$  je na: Ať  $f \in l_1(I)^*$ . Polož  $y(i) := f(e_i)$ ,  $i \in I$ . Pak  $y \in l_\infty(I)$  :

$$\forall i \in I : |y(i)| = |f(e_i)| \leq \|f\| \implies \|y\|_\infty \leq \|f\|.$$

$I(y) = f$  je totožné jako v důkazu 1.

2. Případ  $p > 1$ :  $\|I\| \leq 1$  se dokáže podobně jen se použije Hölder:

$$\forall y \in l_q(I) \forall x \in l_p(I) \forall F \in \mathcal{F}(I) : \sum_{i \in F} |y_i x_i| \leq \|y\|_q \cdot \|x\|_p.$$

$I$  izometrie: Ať  $y \in l_q(I)$ . Polož  $x_F = \frac{\sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|}{y(i)} e_i}{\| \text{---} \| \text{---} \|_p} \in S_{l_p(I)}$  (BÚNO  $\exists i \in F : y(i) \neq 0$ ).

$$x_F = \left( \sum |y(i)|^{p(q-1)} \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|^q}{y(i)} e_i$$

a zároveň

$$\|I(y)\| \geq I(y)(x_F) = \left( \sum |y(i)|^{p(q-1)} \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \sum_{i \in F} |y(i)|^q = \|y(i)\|_q.$$

$I$  je na: Ať  $f \in l_p(I)^*$ . Polož  $y(i) := f(e_i)$ ,  $i \in I$ . Pak  $y \in l_q(I)$ : Zvol  $F \in \mathcal{F}(I)$ . Pak polož  $x_F = \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|^q}{y(i)} e_i$ .

$$\sum_{i \in F} |y(i)|^q = \sum_{i \in F} f(e_i) x_F(i) = f\left(\sum_{i \in F} x_F(i) \cdot e_i\right) \leq \|f\| \cdot \|x_F\|_p = \|f\| \left( \sum_{i \in F} |y(i)|^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

. Celkem

$$\inf_{F \in \mathcal{F}(I)} \left( \sum_{i \in F} |y(i)|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\|,$$

└ tedy  $y \in l_q(I)$  a  $\|y\|_q \leq \|f\|$ .

□

┌  
Důkaz (3, 4)

1. krok  $\mu$  konečný:  $I$  je spojitý, lineární a  $\|I\| \leq 1$ :  $p = 1$ :

$$|I(f)(g)| \leq \int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_{\infty} \int_{\Omega} |g| d\mu = \|f\|_{\infty} \cdot \|g\|_1.$$

Tedy  $I$  je dobře definované, lineární a  $\|I\| \leq 1$ .  $p > 1$ :

$$|I(f)(g)| \leq \int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_q \cdot \|g\|_p.$$

Tedy  $I$  je dobře definované, lineární a  $\|I\| \leq 1$ .

$I$  je izometrie:  $p > 1$ : Ať  $f \in L_q(\Omega)$ , BÚNO  $f \neq 0$ . Zvol

$$g(x) := \frac{\frac{|f(x)|^q}{f(x)} \chi_{\{x|f(x) \neq 0\}}}{\|f\|_q^q} \in S_{L_p(\mu)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^{p(q-1)} dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{|f(x)|^q}{f(x)} \chi_{\{x|f(x) \neq 0\}},$$

$$\|f\|_q \geq \|I(f)\| \geq I(f)(g) = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^q d\mu(x) \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \int_{\Omega} |f(x)|^q d\mu(x) = \|f\|_q.$$

Tedy  $\|I(f)\| = \|f\|$  a  $I$  je izometrie.

$p = 1$ : Ať  $f \in L_{\infty}(r)$ , BÚNO  $f \neq 0$ . Zvol  $\|f\|_{\infty} > \varepsilon > 0$  je libovolné, ať

$$A = \{x | f(x) > \|f\|_{\infty} - \varepsilon\}.$$

Pak  $\mu(A) > 0$ . Ať  $\mu(A) < \infty$  (v případě  $\sigma$ -konečné míry můžeme  $A$  aproximovat). Polož  $g(x) := \frac{|f(x)|}{f(x)} \frac{\chi_A}{\mu(A)} \in B_{L_1, \mu}$ . Pak

$$\|f\| \geq \|I(f)\| \geq I(f)(g) = \int_{\Omega} |f(x)| \chi_A(x) \cdot \frac{1}{\mu(A)} d\mu(x) > \frac{\|f\|_{\infty} - \varepsilon}{\mu(A)} \int_A 1 d\mu(x) = \|f\|_{\infty} - \varepsilon.$$

$I$  je na: Ať  $x^* \in (L_p)^*$ . Položme  $\nu(A) := x^*(\chi_A)$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . Pak  $\nu$  je  $\mathbb{K}$ -hodnotová míra:  $\nu(\emptyset) = x^*(0) = 0$ . Ať  $(A_j)_{j=1}^{\infty}$  posloupnost množin z  $\mathcal{A}$ , po 2 disjunktní. Pak

$$\|\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} - \chi_{\bigcup_{j=1}^n A_j}\|_p = \mu \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= x^*(\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^*(\chi_{\bigcup_{j=1}^n A_j}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^*(\chi_{A_1}) + \dots + x^*(\chi_{A_n}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i). \end{aligned}$$

└

□

┌

Důkaz (Pokračování 3, 4)

Zároveň  $\nu \ll \mu$ :

$$\mu(A) = 0 \implies \chi_A = 0 \text{ skoro všude} \implies x^*(\chi_A) = 0.$$

Tedy z R-M věty  $\exists g \in L_1(\mu)$ :  $\nu(A) = \int_A g d\mu$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . Pak  $x^*(s) = \int_{\Omega} g \cdot s d\mu$ , pro  $s$  jednoduchou funkci. Tedy pro  $f \in (L_p(\mu))$  najdu  $s_k \rightarrow f$ ,  $|s_k| \leq 4f$ ,  $s_k$  jednoduché. Pak ale  $s_k \xrightarrow{L_p} f$  (z Lebesgueovy věty, jelikož  $5f$  je integrovatelná majoranta). Tedy

$$x^*(f) = \lim_k x^*(s_k) = \lim_k \int_{\Omega} g \cdot s_k d\mu = \int_{\Omega} g \cdot f d\mu.$$

Poslední věc, co zbývá je  $g \in L_q(\mu)$ :  $p = 1$ : Chceme  $|g(x)| \leq \|x^*\|$  skoro všude. Pokud ne, pak  $A = \{x | |g(x)| > \|x^*\|\}$  má kladnou míru. Ať  $A_+ = \{x | g(x) > \|x^*\|\}$  má kladnou míru. Pak

$$\|x^*\| \mu(A_+) \leq \left| \int_{A_+} g d\mu \right| = |x^*(\chi_{A_+})| \leq \|x^*\| \mu(A_+).$$

Podobně pro  $A_- := \{x | g(x) < -\|x^*\|\}$ .  $p > 1$  vynecháme.

Další kroky byly vynechány.

□

## Věta 5.26

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory a  $1 \leq p \leq \infty$ . Nechť  $q$  je sdružený exponent k  $p$ . Pak zobrazení  $I : X^* \oplus_q Y^* \rightarrow (X \oplus_p Y)^*$  dané předpisem

$$I(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie  $X^* \oplus_q Y^*$  na  $(X \oplus_p Y)^*$ .

┌

*Důkaz*

$I(f, g)$  lineární pro  $(f, g) \in X^* \oplus_q Y^*$  lehké. Zvol  $(f, g) \in X^* \oplus_q Y^*$ . Pak

$$\begin{aligned} \|I(f, g)\| &= \sup_{(x, y) \in B_{X \oplus_p Y}} |f(x) + g(y)| \leq \sup_{(x, y) \in B_{X \oplus_p Y}} (\|f\| \cdot \|x\| + \|g\| \cdot \|y\|) = \\ &= \sup_{(\alpha, \beta) \in B_{(\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_p)}} \tilde{I}(\|f\|, \|g\|)(\alpha, \beta) = \|\tilde{I}(\|f\|, \|g\|)\| = \|(\|f\|, \|g\|)\|_q = \sqrt[q]{\|f\|^q + \|g\|^q} = \\ &= \|(f, g)\|_{X^* \oplus_q Y^*}. \end{aligned}$$

Tedy  $\|I\| \leq 1$ .

$I$  je izometrie: Ať  $(f, g) \in X^* \oplus_q Y^*$ , BÚNO  $(f, g) \neq 0$ . Zvol  $\varepsilon > 0$  libovolné. Ať  $\eta > 0$  je „dost malé“: Zvolme

$$x \in B_x : |f(x)| > \|f\| - \eta, |\alpha| = 1, |f(x)| = \alpha f(x),$$

$$y \in B_y : |f(y)| > \|f\| - \eta, |\beta| = 1, |f(y)| = \beta f(y).$$

Položme

$$u = \frac{(\|f\|^{q-1}\alpha x, \|g\|^{q-1}\beta y)}{(\|f\|^q + \|g\|^q)^{\frac{1}{p}}} = \frac{\dots}{C}.$$

$$\|u\| = \left( \frac{1}{C} \|f\|^{p(q-1)} \|\alpha x\|^p + \|g\|^{p(q-1)} \|\beta y\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{C} (\|f\|^q + \|g\|^q)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

tedy  $u \in B_{\dots}$ . Pak ale

$$\begin{aligned} \|I(f, g)\| &\geq I(f, g)(u) = \frac{1}{C} (\|f\|^{q-1} f(\alpha x) + \|g\|^{q-1} g(\beta y)) \geq \\ &\geq \frac{1}{C} (\|f\|^{q-1} (\|f\| - \eta) + \|g\|^{q-1} (\|g\| - \eta)) \rightarrow \frac{1}{C} \cdot (\|f\|^q + \|g\|^q) = \|(f, g)\|. \end{aligned}$$

$I$  je na: Ať  $\varphi \in (X \oplus_p Y)^*$ . Polož  $f(x) := \varphi(x, 0)$ ,  $x \in X$  a  $g(y) := \varphi(0, y)$ ,  $y \in Y$ . Pak  $f \in X^*$ ,  $g \in Y^*$  a  $I(f, g) = \varphi$ . □

## Definice 5.9

Nechť  $K$  je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál  $\Lambda$  na  $C(K)$  je nezáporný, jestliže  $\Lambda(f) \geq 0$  pro každou nezápornou funkci  $f \in C(K)$ .

## Věta 5.27 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$ )

Nechť  $K$  je kompaktní prostor a  $\Lambda$  je nezáporný lineární funkcionál na  $C(K)$ . Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra  $\mu$  na  $K$  splňující  $\Lambda(f) = \int_K f d\mu$  pro každé  $f \in C(K)$ .



┌ Důkaz

└ Bez důkazu. □

### Věta 5.28 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$ )

Je-li  $K$  kompaktní prostor, pak prostor  $C(K)^*$  je lineárně izometrický s prostorem  $M(K)$  všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na  $K$  pomocí zobrazení  $I : M(K) \rightarrow C(K)^*$ ,  $I(\mu) = \varphi_\mu$ , kde

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f d\mu.$$

┌ Důkaz

└ Bez důkazu. □

## 6 Anihilátory, dualita kvocientů a podprostorů

### Definice 6.1 (Horní a dolní anihilátor)

Je-li  $X$  normovaný lineární prostor a  $A \subset X$ , pak definujeme tzv. anihilátor množiny  $A$  jako

$$A^\perp = \{f \in X^* \mid f(x) = 0 \ \forall x \in A\}.$$

*Poznámka*

Vlastně je to zobecnění kolmého prostoru (v Hilbertových prostorech je to „totéž“).

Pro množinu  $B \subset X^*$  pak definujeme tzv. zpětný anihilátor jako

$$B_\perp = \{x \in X \mid f(x) = 0 \ \forall f \in B\}.$$

### Lemma 6.1

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $A \subset X$ ,  $B \subset X^*$ . Pak

- $A^\perp$  je uzavřený podprostor  $X^*$ ,
- $B_\perp$  je uzavřený podprostor,
- $(A^\perp)_\perp = \overline{\text{span}} A$ ,
- $(B_\perp)^\perp \supset \overline{\text{span}} B$ .

┌ Důkaz

└ První dva body triviální cvičení. Další dva body jsou lehké. □

## Věta 6.2

*Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $Y$  jeho podprostor.*

1. *Nechť  $Y$  je uzavřený. Zobrazení  $I : Y^\perp \rightarrow (X/Y)^*$  dané předpisem*

$$I(f)(\hat{x}) = f(x)$$

*je lineární izometrie  $Y^\perp$  na  $(X/Y)^*$ .*

2. *Zobrazení  $I : X^*/Y^\perp \rightarrow Y^*$  dané předpisem*

$$I(\hat{f}) = f|_Y$$

*je lineární izometrie  $X^*/Y^\perp$  na  $Y^*$ .*

┌ Důkaz

1. a)  $I(f)$  je dobře definované: Ať  $\hat{x} = \hat{y}$ , pak  $x - y \in Y$  a  $f \in Y^\perp$  (tj.  $f(x - y) = 0$ ), tedy  $f(x) = f(y)$ .

b) Zároveň  $\|I(f)\| = \sup_{\hat{x} \in U_{X/Y}} |I(f)(\hat{x})| = \sup_{x \in U_x} |I(f)(\hat{x})| = \sup_{x \in U_x} |f(x)| = \|f\|$ , tedy  $I$  je spojitá a izometrie (linearita je triviální).

c) Ať  $\varphi \in (X/Y)^*$ . Pak  $\varphi \circ q \in X^*$  a  $I(\varphi \circ q) = \varphi \wedge \varphi \circ q \in Y^\perp$ :  $\forall y \in Y : \varphi(q(y)) = \varphi(\hat{0}) = 0$ . Tedy  $\varphi \circ q \in Y^\perp$ .  $\forall \hat{x} \in X/Y : I(\varphi \circ q)(\hat{x}) = (\varphi \circ q)(x) = \varphi(\hat{x})$ , tedy  $I(\varphi \circ q) = \varphi$ .

2. a)  $I(\hat{f})$  je dobře definované: Ať  $\hat{f} = \hat{g}$ , pak  $f - g \in Y^\perp$ , tedy  $f|_Y = g|_Y$ .

b)  $I$  zřejmě lineární. Zároveň  $\|I(\hat{f})\| = \sup_{y \in B_y} \|f(y)\| = \|f|_Y\| \leq \inf_{h \in \hat{f}} \|h\| = \|\hat{f}\|$ .

c)  $I$  je izometrie: Ať  $\hat{f} \in X^*/Y^\perp$ . Zvol  $g \in X^* : g|_Y = f|_Y \wedge \|g\| = \|f|_Y\|$  z H-B věty. Pak  $\hat{g} = \hat{f}$  a  $\|I(\hat{f})\| = \|I(\hat{g})\| = \|g|_Y\| = \|g\| \geq \inf_{h \in \hat{f}} \|h\| = \|f|_Y\|$ .

d)  $I$  je na: Ať  $\varphi \in Y^*$ . Z H-B věty existuje  $f \in X^* : f|_Y = \varphi$ . Pak  $I(\hat{f}) = f|_Y = \varphi$ . □

## Věta 6.3

*Jsou-li  $X, Y$  normované lineární prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , pak platí*

1.  $\text{Ker } T^* = (\text{Rng } T)^\perp$ ,

2.  $\text{Ker } T = (\text{Rng } T^*)_\perp$ ,

3.  $\overline{\text{Rng } T} = (\text{Ker } T^*)_\perp$ ,

4.  $T^*$  je prostý, právě když  $\text{Rng } T$  je hustý.

┌

*Důkaz*

$$1. y^* \in \text{Ker } T^* \Leftrightarrow T^*y^* = 0 \Leftrightarrow y^* \circ T = 0 \Leftrightarrow y^*|_{\text{Rng } T} = 0.$$

$$2. x \in \text{Ker } T \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \forall y^* \in Y^* : y^*(Tx) = 0 \Leftrightarrow \forall y^* \in Y^* : T^*y^*(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (\text{Rng } T^*)^\perp.$$

$$3. \overline{\text{Rng } T} = ((\text{Rng } T)^\perp)^\perp = (\text{Ker } T^*)^\perp.$$

4.  $T^*$  prostý  $\Leftrightarrow \text{Ker } T = \{\mathbf{o}\}$ , ale  $\{\mathbf{o}\}^\perp = Y$ , tedy dle 3.  $\overline{\text{Rng } T} = Y$ . Naopak sporem: Ať  $\exists x \in Y/\overline{\text{Rng } T}$ . Potom dle H-B věty  $\exists f \in Y^* : f(x) \neq 0 \wedge f|_{\text{Rng } T} = 0$ . Pak ale

$$T^*f(x_0) = f(Tx_0) = 0, \forall x_0 \in X \implies T^*f = 0 \implies f \in \text{Ker } T^* \text{.} \nabla$$

└

□

### Definice 6.2 (Druhý duál, evaluační funkcionál)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor. Symbolem  $X^{**}$  značíme  $(X^*)^*$ , tj. duál k prostoru  $X^*$ . Tento prostor nazýváme druhým duálem.

Je-li  $x \in X$ , pak definujeme tzv. evaluační funkcionál  $\varepsilon_x \in X^{**}$  předpisem  $\varepsilon_x(f) = f(x)$  pro každé  $f \in X^*$ . Zobrazení  $\varepsilon : X \rightarrow X^{**}$  dané předpisem  $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$  se nazývá kanonické vnoření  $X$  do  $X^{**}$ .

### Tvrzení 6.4

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření  $\varepsilon : X \rightarrow X^{**}$  je lineární izometrie do. Je-li tedy navíc  $X$  Banachův, pak  $\varepsilon(X)$  je uzavřený podprostor  $X^{**}$ .

┌

*Důkaz*

Linearita zřejmá. Izometrie

$$\|\varepsilon_x\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\varepsilon_x(x^*)| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| = \|x\|.$$

└

□

### Tvrzení 6.5 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory,  $\varepsilon_X : X \rightarrow X^{**}$  a  $\varepsilon_Y : Y \rightarrow Y^{**}$  jsou kanonická vnoření do druhých duálů a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Pak

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

┌ Důkaz (Ze skript)

Nechť  $x \in X$ . Pro každé  $f \in Y^*$  platí

$$(\varepsilon_Y(Tx))(f) = f(Tx) = T^*f(x) = (\varepsilon_X(x))(T^*f) = (T^{**}(\varepsilon_X(x)))(f),$$

└ tudíž  $\varepsilon_Y(Tx) = T^{**}(\varepsilon_X(x))$ . Odtud  $\varepsilon_Y \circ T = T^{**} \circ \varepsilon_X$ . □

## Věta 6.6

*Pro každý normovaný lineární prostor  $X$  existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že  $X$  je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem  $X$  existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že  $X$  je jeho hustý podprostor.*

*Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li  $X_1, X_2$  dvě zúplnění  $X$ , pak existuje lineární izometrie  $X_1$  na  $X_2$ , která je na  $X$  identitou.*

┌ Důkaz

Položme  $\hat{X} = \overline{\varepsilon(X)} \subseteq X^{**}$ . Z toho plyne existence.

Pokud  $X$  má skalární součin, pak platí rovnoběžníkové pravidlo. To platí i v  $\hat{X}$ , tedy  $\hat{X}$  je Hilbertův.

Ať  $I_1 : X \rightarrow X_1$  je izometrie,  $\overline{I_1(X)} = X_1$ ,  $I_2 : X \rightarrow X_2$  je izometrie,  $\overline{I_2(X)} = X_2$ . Pak  $I_1 \circ I_2^{-1}|_{I_2(X)} : I_2(X) \rightarrow X_1$  je spojitý lineární operátor, tedy  $\exists! S_1 : X_2 \rightarrow X_1$  spojitý lineární, že  $S_1 \supset I_1 \circ I_2^{-1}|_{I_2(X)}$ . Obdobně existuje  $S_2 : X_1 \rightarrow X_2$ . Pak se snadno ověří, že  $(S_2 \circ S_1)|_{I_2(X)} = \text{id}|_{I_2(X)}$ , tedy  $S_2 \circ S_1 = \text{id}$ . Analogicky  $S_1 \circ S_2 = \text{id}$ .

Následně se ukáže, že  $S_1$  je izometrie: Zvol  $x \in X_2$ , ať pro  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , posloupnost v  $X$ , je  $I_2(x_n) \rightarrow x$ . Pak

$$\|S_1 x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_1(I_2(x_n))\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|I_1(x_n)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

└ Analogicky  $S_2$  je izometrie, tedy  $X_1, X_2$  jsou izometrické. □

## Věta 6.7

*Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ .*

- 1.  $T$  je izomorfismus na, právě když  $T^*$  je izomorfismus na. V tomto případě navíc platí  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .*
- 2.  $T$  je izometrie na, právě když  $T^*$  je izometrie na.*

*Speciálně, jsou-li  $X$  a  $Y$  lineárně izometrické, pak jsou také  $X^*$  a  $Y^*$  lineárně izometrické.*

┌ *Důkaz*

$\implies$  (1.):

$$\forall y^* \in Y^* : ((T^{-1})^* T^*(y^*))(y) = T^* y^*(T^{-1}y) = y^*(TT^{-1}y) = y^*(y).$$

Analogicky  $T^* \circ (T^{-1})^* = \text{id } x^*$ .

$\iff$  (1.): Dle první části:  $T^*$  je izomorfismus  $\implies T^{**}$  je izomorfismus  $\implies \varepsilon_Y \circ T$  je izomorfismus  $\implies T$  je izomorfismus.

$\implies$  (2.): Dle 1. stačí:  $T^*$  je izometrie:

$$\forall y^* \in Y^* : \|T^* y^*\| = \sup_{x \in B_X} |y^*(Tx)| = \sup_{y \in B_Y} |y^*(y)| = \|y^*\|.$$

└ Opačná implikace analogicky jako v 1. □

### Definice 6.3 (Reflexivní prostor)

Banachův prostor  $X$  se nazývá reflexivní, pokud  $X^{**} = \varepsilon(X)$ .

*Pozor*

Existují i prostory, pro které je  $X$  izometrické  $X^{**}$ , ale ne pomocí  $\varepsilon$ .

### Věta 6.8

*Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory.*

- *Je-li  $X$  izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i  $X$  reflexivní.*
- *Je-li  $Y$  uzavřený podprostor  $X$ ,  $X$  reflexivní  $\implies Y$  reflexivní.*
- *Prostor  $X$  je reflexivní právě tehdy, když jeho duál  $X^*$  je reflexivní.*
- *Je-li  $X$  reflexivní a  $Y$  jeho uzavřený podprostor, pak je  $X/Y$  reflexivní.*

┌

*Důkaz*

1. Zvol  $y^{**} \in Y^{**}$ . Ať  $T : Y \rightarrow X$  je izomorfismus. Pak  $T^{**}y^{**} \in X^{**} \implies \exists x \in X : \varepsilon_X(x) = T^{**}y^{**}$ . Polož  $y = T^{-1}x \in Y$ . Následně dokážeme, že  $\varepsilon_Y(y) = y^{**}$ :

$$\begin{aligned} \forall y^* \in Y^* : \varepsilon_Y(y)(y^*) &= y^*(y) = y^*(T^{-1}x) = (T^{-1})^*y^*(x) = T^{**}y^{**}((T^{-1})^*y^*) = \\ &= y^{**}(T^*(T^{-1})^*y^*) = y^{**}(y^*). \end{aligned}$$

2. Zvol  $y^{**} \in Y^{**}$  a uvažujme

$$F(X^*) = y^{**}(x^*|_Y), x^* \in X^*.$$

Pak  $F \in X^{**}$  (lehké ověřit)  $\implies \exists x \in X : F = \varepsilon_X(x)$ .  $x \in Y$ , jelikož: Ať ne, pak (dle H-B)  $\exists f \in X^* : 0 \neq f(x) \wedge f|_Y \equiv 0$ . Pak  $F(f) = y^{**}(0) = 0$ ,  $\nabla$ .

Teď už jen ověříme, že  $\varepsilon_Y(x) = y^{**}$ : Zvol  $y^* \in Y^*$ . Dle H-B existuje  $x^* \in X^*$ , že  $x^*|_Y = y^*$ . Pak

$$y^{**}(y^*) = y^{**}(x^*|_Y) = F(x^*) = x^*(x) = \varepsilon_Y(x)(x^*)$$

3.  $\implies$  : Zvol  $x^{***} \in X^{***}$ . Uvažuj  $x^* = x^{***} \circ \varepsilon_X \in X^*$ . Pak

$$\begin{aligned} \forall x \in X : x^{***}(\varepsilon_X(x)) &= x^*(x) = \varepsilon_X(x)(x^*) = \varepsilon_{X^*}(x^*)(\varepsilon_X(x)) \\ \implies x^{***} &= \varepsilon_{X^*}(x^*), \text{ na } \varepsilon_X(x) = x^{**}. \end{aligned}$$

4. Ať  $\varphi \in (X/Y)^{**}$ , pak

$$I^*(\varphi) = (Y^\perp)^* \implies \exists F \in X^{**} : I^*(\varphi) \subset F \implies \exists x \in X : F = \varepsilon_X(x).$$

Potom už jen chceme  $\varepsilon_{X/Y}(q(x)) = \varphi$ :

$$\begin{aligned} \forall f \in Y^\perp : \varepsilon_{X/Y}(q(x))(I(f)) &= I(f)(q(x)) = f(x) = F(f) = (I^*(\varphi))(f) = \varphi(I f) \implies \\ \implies \varepsilon_{X/Y}(q(x)) &= \varphi. \end{aligned}$$

└

□

## Věta 6.9

*Banachův prostor  $X$  je reflexivní, právě když pro každé  $x^* \in X^*$  existuje  $x \in B_X$  splňující  $\|x^*\| = x^*(x)$ .*

┌

*Důkaz*

└ Bez důkazu.

□

## 7 Slabá konvergence

**Definice 7.1** (Slabá konvergence, s. konvergence s hvězdičkou)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor.

- Řekneme, že posloupnost  $\{x_n\}$  v prostoru  $X$  slabě konverguje k  $x \in X$  (značíme  $x_n \xrightarrow{w} x$ ) pokud pro každé  $x^* \in X^*$  platí  $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$ .
- Řekneme, že posloupnost  $\{x_n^*\}$  v prostoru  $X^*$  slabě s hvězdičkou konverguje k  $x^* \in X^*$  (značíme  $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ ) pokud pro každé  $x \in X$  platí  $x_n^*(x) \rightarrow x^*(x)$ .

**Lemma 7.1**

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor,  $\{x_n\}$  posloupnost v  $X$  a  $\{x_n^*\}$  posloupnost v  $X^*$ .

1. Existuje nejvýše jedno  $x \in X$  splňující  $x_n \xrightarrow{w} x$ .
2. Existuje nejvýše jedno  $x^* \in X^*$  splňující  $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ .
3. Pokud  $x \in X$  a  $x_n \rightarrow x$ , pak  $x_n \xrightarrow{w} x$ .
4. Pokud  $x^* \in X^*$  a  $x_n^* \xrightarrow{w} x^*$ , pak  $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ .

┌  
Důkaz

└ 1.–4. triviální. □

**Věta 7.2**

Nechť  $X$  je separabilní normovaný lineární prostor a  $\{x_n^*\}$  omezená posloupnost v  $X^*$ . Pak  $\{x_n^*\}$  má  $w^*$ -konvergentní podposloupnost.

┌ *Důkaz*

Ať  $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq B_x$  hustá v  $B_x$ . 1. krok: Najdeme  $(x_{n_k}^*)$ , že  $x_{n_k}^*(x_n)$  je konvergentní pro  $n \in \mathbb{N}$ : Ať  $A_1 \subset \mathbb{N}$  nekonečná. K  $((x_k^*)(x_1))_{k \in A_1}$  je konvergentní. Totéž pro  $A_2$  a  $x_2$ ,  $A_3$  a  $x_3$ , ... Potom vybereme prvky na diagonále.

2. krok: Pak  $x_{n_k}^*(x)$  konverguje pro  $x \in B_x$ :  $\varepsilon > 0$  dáno. Ať  $n \in \mathbb{N}$ , že  $\|x_n - x\| < \varepsilon$ .

$$k_0 \in \mathbb{N} \forall k, l \geq k_0 : |x_{n_k}^*(x_n) - x_{n_l}^*(x_n)| < \varepsilon.$$

Pak

$$\begin{aligned} \forall k, l \geq k_0 : |x_{n_k}^*(x) - x_{n_l}^*(x)| &\leq |x_{n_k}^*(x - x_n)| + |x_{n_k}^*(x_n) - x_{n_l}^*(x_n)| + |x_{n_l}^*(x_n) - x_{n_l}^*(x)| < \\ &< \varepsilon(\|x_{n_k}^*\| + 1 + \|x_{n_l}^*\|). \end{aligned}$$

3. krok: Tedy z linearit  $x_{n_k}^*(x)$  konverguje pro  $x \in X$ : Polož  $x^*(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^*(x)$ .

└ Pak  $x^* \in X^*$  □

### Věta 7.3

*Banachův prostor  $X$  je reflexivní, právě když každá omezená posloupnost  $\{x_n\}$  v  $X$  má slabě konvergentní podposloupnost.*

┌ *Důkaz*

$\Leftarrow$  nebude (teď je těžký, bude ve funkcionální analýze).  $\Rightarrow$  plyne z následující věty: Polož  $Y = \overline{\text{span}}(x_n) \subset X$ , pak  $Y$  je separabilní a reflexivní  $\Rightarrow Y^*$  je (reflexivní +) separabilní, dle následující věty.  $\Rightarrow \exists (x_{n_k}), w^*$ -konvergentní podposloupnost v  $Y^{**} \equiv \varepsilon(Y) \Rightarrow \exists y \in Y : \varepsilon(x_{n_k}) \xrightarrow{w^*} \varepsilon(y) \Leftrightarrow x_{n_k} \xrightarrow{w} y$ . □

### Věta 7.4

*Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $X^*$  je separabilní. Pak  $X$  je separabilní.*

┌ *Důkaz*

Zvol  $\{x_n^* | n \in \mathbb{N}\} \subset S_{X^*}$  hustou podmnožinu (existuje ze separability). Pro  $n \in \mathbb{N}$  najdi  $x_n \in B_x : x_n^*(x_n) > \frac{1}{2}$ . Pak  $\overline{\text{span}}\{x_n | n \in \mathbb{N}\} = X$  (a tím bude hotovo, protože  $\overline{\text{span}}(x_n) = \overline{\text{span}}_*(x_n)$ ): Ať ne, pak existuje  $f \in S_{X^*} : f|_{\overline{\text{span}}} = 0, f \neq 0$ . Zvol  $n \in \mathbb{N}$ , že  $\|x_n^* - f\| < \frac{1}{4}$ . Pak

$$0 = |f(x_n)| \geq |x_n^*(x_n)| - |(x_n^* - f)(x_n)| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} > 0. \nabla$$

└ □

## 8 Omezené operátory v Banachových prostorech



### Definice 8.1 (Kompaktní operátor, konečněrozměrný operátor)

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory a  $T : X \rightarrow Y$  je lineární zobrazení. Pak  $T$  se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou  $A \subset X$  je množina  $T(A)$  relativně kompaktní (tj. její uzávěr je kompaktní) v  $Y$ .

Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z  $X$  do  $Y$  značíme  $\mathcal{K}(X, Y)$ .

Lineární operátor  $T$  se nazývá konečněrozměrný, pokud  $\text{Rng } T$  má konečnou dimenzi.

$\mathcal{F}(X, Y)$  značí množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z  $X$  do  $Y$ .

*Poznámka*

$X$  je MP,  $A \subset X$ . Pak

- $A$  je relativně kompaktní  $\Leftrightarrow$  z každé posloupnosti v  $A$  lze vybrat konvergentní posloupnost v  $X$ .
- Pokud  $X$  je úplný, pak  $A$  je relativně kompaktní  $\Leftrightarrow A$  je totálně omezená.

### Tvrzení 8.1

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z  $X$  do  $Y$  je automaticky spojitý. Dále, je-li  $T : X \rightarrow Y$  lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1.  $T$  je kompaktní.
2.  $T(B_X)$  je relativně kompaktní.
3. Je-li  $\{x_n\}$  omezená posloupnost v  $X$ , pak posloupnost  $\{T(x_n)\}$  má konvergentní podposloupnost.

┌

*Důkaz*

1.  $\Rightarrow$  2: triviální. 2.  $\Rightarrow$  3: Ať  $(x_n)$  je posloupnost v  $B(\mathbf{0}, r)$  (kde  $r > 0$ ). Pak  $(\frac{x_n}{r})$  je posloupnost v  $B_x$   $\Rightarrow$  dle 2.  $\exists (n_k)$ , že  $T(\frac{x_{n_k}}{r})$  je konvergentní, tedy  $T(x_{n_k})$  je konvergentní.

3.  $\Rightarrow$  1.: Ať  $A \subset X$  omezená, ať  $(y_n)$  je posloupnost v  $T(A)$ . Pak  $\exists x_n \in A : Tx_n = y_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  $\Rightarrow \exists (n_k) : T_{x_{n_k}}$  je konvergentní v  $Y$ .  $\square$

└

### Věta 8.2

Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory.

1. Operátor  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  je konečněrozměrný právě tehdy, když existují  $f_1, \dots, f_n \in X^*$  a  $y_1, \dots, y_n \in Y$  takové, že  $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$  pro každé  $x \in X$ .
2.  $\mathcal{K}(X, Y)$  je podprostor  $\mathcal{L}(X, Y)$  a  $\mathcal{F}(X, Y)$  podprostor  $\mathcal{K}(X, Y)$ .
3.  $\mathcal{K}(X, Y)$  je uzavřený podprostor  $\mathcal{L}(X, Y)$ .
4. Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem (zleva či zprava), dostaneme opět kompaktní operátor.

┌  
Důkaz

1.  $\Leftarrow$  : Jasně protože pak  $\text{Rng } T \subset \text{span}\{y_1, \dots, y_n\}$ .  $\Rightarrow$  : Ať  $y_1, \dots, y_n$  je báze  $\text{Rng } T$ . Uvažujme  $g_i \in (\text{Rng } T)^*$ ,  $g_i(y_j) = \delta_{ij}$ . Polož  $f_i = g_i \circ T \in X^*$ ,  $i \in [n]$ . Pak  $T(x) = \sum_{i=1}^n g_i(Tx)y_i = \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$ .

2. Ať  $S, T \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Pak  $(S + T)(B_X) = S(B_X) + T(B_X) \subseteq \overline{S(B_X)} + \overline{T(B_X)}$ , což jsou kompaktní prostory. Protože součet kompaktních je kompaktní (a uzavřený podprostor kompaktního také),  $\overline{(S + T)(B_X)}$  je kompaktní. Násobení triviálně.

$T \in \mathcal{F}(X, Y) \Rightarrow \text{Rng } T$  je konečnědimenzionální, tedy uzavřená  $\Rightarrow \overline{T(B_X)} \subseteq \text{Rng } T \cong \mathbb{K}^n$ . □

┌  
Důkaz (Ze skript (vlastními slovy))

3. Nechť  $\{T_n\}$  je posloupnost v  $\mathcal{K}(X, Y)$  konvergující k  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Nechť  $\varepsilon > 0$  je dáno. Pak existuje takové  $n \in \mathbb{N}$ , že  $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Dále nalezneme množinu  $\{x_1, \dots, x_k\} \subset B_X$  takovou, že  $T_n(x_i)$  je konečná  $\frac{\varepsilon}{3}$ -sít pro  $T_n(B_X)$ .  $T(x_i)$  je pak konečná  $\varepsilon$ -sít v  $T(B_X)$  neboť  $\forall x \in B_X$  nalezneme  $j$  tak, že  $\|T_n(x) - T_n(x_j)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Potom

$$\|T(x) - T(x_i)\| \leq \|T(x) - T_n(x)\| + \|T_n(x) - T_n(x_j)\| + \|T_n(x_j) - T(x_j)\| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tedy  $T(B_X)$  je totálně omezená, a protože  $Y$  je úplný, tak je  $T$  kompaktní dle předchozího tvrzení.

4. Spojitá zobrazení zachovávají omezenost i relativní kompaktnost, tedy složení s jiným operátorem na něj klade stejné podmínky pro kompaktnost, jako by byl samotný. □

### Věta 8.3 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor,  $Y$  je Banachův prostor a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Pak  $T^*$  je kompaktní, právě když  $T$  je kompaktní.

┌ *Důkaz* (Ze skript)

$\Leftarrow$  : Položme  $K = \overline{T(B_X)}$  a  $\mathcal{F} = \{f|_K | f \in B_{Y^*}\}$ . Pak  $K$  je kompaktní a  $\mathcal{F} \subset C(K)$ . Dále pro každé  $f \in B_{Y^*}$  díky spojitosti  $f$  platí

$$\|f|_K\|_{C(K)} = \sup_{y \in K} |f(y)| = \sup_{y \in T(B_X)} |f(y)| = \sup_{x \in B_X} |f(T(x))| \leq \|f\| \cdot \|T\| \leq \|T\|.$$

Tedy  $\mathcal{F} \subset C(K)$  je omezená množina stejně spojitých (dokonce 1-lipschitzovských) funkcí na kompaktním prostoru  $K$ . Podle Arzeláovy-Ascoliovy věty to znamená, že  $\mathcal{F}$  je relativně kompaktní v  $C(K)$ .

Nechť nyní  $\{f_n\}$  je posloupnost v  $B_{Y^*}$ . Položme  $g_n = f_n|_K$ . Pak  $\{g_n\}$  je posloupnost v  $\mathcal{F}$ , a tedy existuje podposloupnost  $\{g_{n_k}\}$  konvergentní v  $C(K)$ . Tvrdíme, že pak  $\{T^*f_n\}$  je cauchyovská: Pro  $k, l \in \mathbb{N}$  máme

$$\begin{aligned} \|T^*f_{n_k} - T^*f_{n_l}\| &= \|T^*(f_{n_k} - f_{n_l})\| = \sup_{x \in B_X} |T^*(f_{n_k} - f_{n_l})(x)| = \sup_{x \in B_X} |(f_{n_k} - f_{n_l})(Tx)| \leq \\ &\leq \sup_{z \in K} |(f_{n_k} - f_{n_l})(z)| = \|g_{n_k} - g_{n_l}\|_{C(K)}. \end{aligned}$$

Protože  $\{g_{n_k}\}$  je cauchyovská, je i  $\{T^*f_{n_k}\}$  cauchyovská, a tedy konvergentní v  $X^*$ . Odtud plyne, že  $T^*(B_{Y^*})$  je relativně kompaktní v  $X^*$ .

$\Rightarrow$  : Nechť  $\varepsilon_X : X \rightarrow X^{**}$  a  $\varepsilon_Y : Y \rightarrow Y^{**}$  jsou kanonická vnoření. Podle první části důkazu je  $T^{**}$  kompaktní, takže je kompaktní i  $S = T^{**}|_{\varepsilon_X(X)} : \varepsilon_X(X) \rightarrow Y^{**}$ . Podprostor  $\varepsilon_Y(Y)$  je uzavřený v  $Y^{**}$ , tedy  $S$  je kompaktní. Podle tvrzení a věty výše je  $T = \varepsilon^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$  kompaktní.  $\square$

## 9 Úplnost v Banachových prostorech

### Věta 9.1 (Princip stejnoměrné omezenosti)

*Nechť  $X$  je Banachův prostor,  $Y$  je normovaný lineární prostor a  $A \subset \mathcal{L}(X, Y)$ . Pak*

$$\sup \{\|T\| \mid T \in A\} < +\infty \Leftrightarrow \forall x \in X : \sup \{\|T(x)\| \mid T \in A\} < +\infty.$$

┌ *Důkaz* (Ze skript)

$\Rightarrow$  : Zřejmé.  $\Leftarrow$  : Pro  $n \in \mathbb{N}$  položme

$$F_n = \{x \in X \mid \|T(x)\| \leq n \text{ pro každé } T \in A\}.$$

Pak jsou  $F_n$  uzavřené množiny pokrývající celé  $X$ . Podle Baireovy věty existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že  $F_{n_0}$  má neprázdný vnitřek. Existuje tedy koule  $B(x_0, r) \subset F_{n_0}$ . Nechť nyní  $T \in \mathcal{A}$  je libovolný. Pro každé  $x \in B_X$  je  $x_0 + rx \in B(x_0, r)$ , a tedy  $\|T(rx)\| = \|T(x_0 + rx - x_0)\| \leq \|T(x_0 + rx)\| + \|T(x_0)\| \leq 2n_0$ . Odtud  $\|T(x)\| \leq \frac{2n_0}{r}$ , což znamená, že  $\|T\| \leq \frac{2n_0}{r}$ . Proto je  $\sup \{\|T\| \mid T \in \mathcal{A}\} \leq \frac{2n_0}{r}$ .  $\square$

### Důsledek

Nechť  $X$  je Banachův prostor,  $Y$  je normovaný lineární prostor a  $\{T_n\}$  je posloupnost v  $\mathcal{L}(X, Y)$  taková, že  $\forall x \in X \exists T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ . Pak  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  a  $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \in \mathbb{R}$ .

┌

*Důkaz* (Ze skript)

Nejprve ukážeme, že  $T$  je lineární. Zvolme  $x, y \in X$  a skalár  $\alpha$  libovolně. Pak díky spojitosti vektorových operací platí

$$T(x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + T_n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(y) = T(x) + T(y),$$

$$T(\alpha x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha T_n(x) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \alpha T(x).$$

Dále, pro pevné  $x \in X$  ze spojitosti normy plyne  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| = \|T(x)\|$ , speciálně posloupnost  $\{\|T_n(x)\|\}$  je omezená. Z předchozí věty plyne, že posloupnost  $\{\|T(x)\|\}$  je omezená. Pak pro libovolné  $x \in B_X$  platí

$$\|T(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \in \mathbb{R}.$$

Tedy  $T$  je spojitý lineární operátor a  $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$ .

□

### Tvrzení 9.2

Nechť  $X$  je Banachův prostor,  $\{x_n^*\}$  je posloupnost v  $X^*$ ,  $x^* \in X^*$  a  $D \subset X$  splňuje  $\overline{\text{span} D} = X$ . Pak  $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ , právě když  $\{x_n^*\}$  je omezená a  $x_n^*(d) \rightarrow x^*(d)$  pro každé  $d \in D$ .

┌

*Důkaz*

$\Rightarrow$  :  $(x^*)$  je omezená dle principu stejnoměrné omezenosti.  $\Leftarrow$  : Víme (aplikace linearity):

$$\forall x \in \text{span } D : x_n^*(x) \rightarrow x^*(x).$$

Nechť  $x \in X$  a  $\varepsilon > 0$ . Ať  $x_0 \in \text{span } D : \|x - x_0\| \cdot \sup \{\|x_n^*\| + \|x^*\| \mid n \in \mathbb{N}\} < \frac{\varepsilon}{3}$ . Buď  $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 |x_n^*(x_0) - x^*(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Pak  $\forall n \geq n_0$ :

$$|x_n^*(x) - x^*(x)| \leq \|x_n^*\| \cdot \|x - x_0\| + |x_n^*(x_0) - x^*(x_0)| + \|x^*\| \cdot \|x - x_0\| \leq \varepsilon.$$

└

□

### Tvrzení 9.3

Nechť  $X$  je Banachův prostor,  $\{x_n\}$  je posloupnost v  $X$ ,  $x \in X$  a  $D \subset X^*$  splňuje  $\overline{\text{span} D} = X^*$ . Pak  $x_n \xrightarrow{w} x$ , právě když  $\{x_n\}$  je omezená a  $d(x_n) \rightarrow d(x^*)$  pro každé  $d \in D$ .

┌

*Důkaz*

$\Rightarrow$  :  $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \varepsilon_X(x_n) \xrightarrow{w^*} \varepsilon_X(x)$ .  $\Rightarrow$ : Analogicky jako v předchozím tvrzení. Tedy  $x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow \varepsilon_X(x_n)$  je omezená dle předchozího tvrzení, tedy  $(x_n)$  je omezená.

└

□

**Definice 9.1** (Otevřené zobrazení)

Zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  mezi metrickými prostory  $X, Y$  se nazývá otevřené, pokud  $f(G)$  je otevřená množina v  $Y$  pro každou otevřenou množinu  $G \subset X$ .

**Věta 9.4** (O otevřeném zobrazení (Juliusz Pawel Schauder 1930))

Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  je na. Pak  $T$  je otevřené zobrazení.

┌ Důkaz

└ Později. □

**Lemma 9.5** (J. P. Schauder, 1930)

Nechť  $X$  je Banachův prostor,  $Y$  je normovaný lineární prostor a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Jestliže  $r, s > 0$  jsou taková, že  $U(0, s) \subset \overline{T(\mathcal{U}(0, r))}$ , pak dokonce  $U(0, s) \subset T(\mathcal{U}(0, r))$

┌ Důkaz (První část ze skript)

Nejprve si povšimněme, že lze bez újmy na obecnosti uvažovat pouze případ  $r = s = 1$ . Vskutku máme-li již dokázané tvrzení v tomto případě a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  splňuje předpoklady pro nějaká  $r, s > 0$ , pak operátor  $\frac{r}{s}T$  splňuje  $\mathcal{U}(0, 1) \subset (\frac{r}{s}T)(\mathcal{U}(\mathbf{o}, 1))$ , a tedy podle případu  $r = s = 1$  platí  $\mathcal{U}(\mathbf{o}, 1) \subset (\frac{r}{s}T)(\mathcal{U}(\mathbf{o}, 1))$ , odkud  $\mathcal{U}(\mathbf{o}, s) \subset T(\mathcal{U}(\mathbf{o}, r))$ .

Nechť tedy  $r = s = 1$  a nechť je dáno  $z \in U_Y$ . Najdeme  $\delta \in (0, 1)$  takové, že  $\|z\| < 1 - \delta$ . Ukážeme, že  $y = \frac{1}{1-\delta}z \in T(\frac{1}{1-\delta}\mathcal{U}_X)$ . Pak totiž  $z = (1 - \delta)y \in (1 - \delta)T(\frac{1}{1-\delta}\mathcal{U}_X) = T(\mathcal{U}_X)$ . Pomocí matematické indukce najdeme  $(y_n)_{n=0}^\infty$  takové, že  $y_0 = \mathbf{o}$ ,  $\|y - y_n\| < \delta^n$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  a  $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1}\mathcal{U}_x)$ : Je  $\|y\| < 1$ , a tedy volbou  $y_0 = \mathbf{o}$  je druhá podmínka splněna (a třetí se 0 netýká). Předpokládejme nyní, že  $n \in \mathbb{N}$  a již máme nalezeny prvky  $y_0, \dots, y_{n-1}$ . Pak

$$y - y_{n-1} \in \delta^{n-1}\mathcal{U}_Y \subset \delta^{n-1}\overline{T(\mathcal{U}_X)} = \overline{\delta^{n-1}T(\mathcal{U}_X)} = \overline{T(\delta^{n-1}\mathcal{U}_X)},$$

a tedy existuje  $w \in T(\delta^{n-1}\mathcal{U}_X)$  splňující  $\|y - y_{n-1} - w\| < \delta^n$ . Pak  $y_n = y_{n-1} + w$  splňuje požadované podmínky.

Z předchozí části  $\exists (y_n)_{n=0}^\infty$ , že  $y_0 = 0$ ,  $\|y - y_n\| < \delta^n$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  a  $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1}\mathcal{U}_x)$ .

Zvolme  $x_n \in \delta^{n-1}\mathcal{U}_x$ , že  $Tx_n = y_n - y_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n = \frac{1}{1-\delta} < \infty \stackrel{X \text{ je Banachův}}{\implies}$$

$$\implies \exists x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \|x\| < \frac{1}{1-\delta} \implies x \in \frac{1}{1-\delta}\mathcal{U}_x.$$

┌ Zároveň  $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n - y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - 0 = y$ . □

*Důkaz* (Věty o otevřeném zobrazení)

Úvod: stačí  $\exists \delta > 0 : \mathcal{U}(0, \delta) \subset T(\mathcal{U}_x)$ : Zvol  $G \subset X$  otevřená,  $x \in G$ . Pak  $y = Tx \in T(G)$ .  $G$  otevřená  $\implies \exists R > 0 : \mathcal{U}(x, R) \subset G$ . Pak  $\mathcal{U}(y, \delta R) = y + R\mathcal{U}(0, \delta) \subset y + RT(\mathcal{U}(0, 1)) = T(\mathcal{U}(x, R)) \subseteq T(G)$ .

Stať:  $Y$  úplný  $\implies$  z Banachovy věty  $\exists n_0 : \text{int}(\overline{T(n_0\mathcal{U}_x)}) \neq \emptyset \implies \overline{n_0\mathcal{U}_x}$  (symetrická, konvexní, uzavřená) obsahuje kouli  $\implies \exists \delta > 0 : \mathcal{U}(0, \delta) \subseteq \overline{T(n_0\mathcal{U}_x)}$ . Z předchozího lemmatu  $\mathcal{U}(0, \delta) \subseteq T(n_0\mathcal{U}_x) = nT(\mathcal{U}_x)$ .

Závěr:  $\mathcal{U}(0, \frac{\delta}{n_0}) \subset T(\mathcal{U}_x)$ . □

*Důsledek* (S. Banach, 1929)

Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Pak  $T$  je izomorfismus  $X$  na  $Y$ , právě když  $T$  je prostý a na.

┌

*Důkaz*

„  $\implies$  “ jasné. „  $\impliedby$  “:  $T^{-1}$  je spojitý plyne z předchozí věty ( $(T^{-1})^{-1}(O) = T(O)$  je otevřené podle předchozí věty ( $O$  otevřená)). □

└

*Důsledek*

Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  je na. Pak platí

- Existuje  $c > 0$  takové, že pro každé  $y \in Y$  existuje  $x \in T^{-1}(y)$  splňující  $\|x\| \leq c\|y\|$ .
- Zobrazení  $\hat{T} : X/\text{Ker } T \rightarrow Y$  dané předpisem  $\hat{T}(\hat{x}) = T(x)$  je lineární izomorfismus na. Tedy prostor  $Y$  je izomorfní s  $X/\text{Ker } T$ .

┌

*Důkaz*

První bod: Dle předchozí věty  $\exists R > 0 : \mathcal{B}(0, R) \subset T(\mathcal{U}_x)$ . Zvolíme  $y \in Y \setminus \{0\}$ . Pak  $\exists x \in \mathcal{U}_x : Tx = \frac{y}{\|y\|} \cdot R \wedge \|\frac{x\|y\|}{R}\| \leq \frac{1}{R}\|y\|$ . (Položíme  $c = \frac{1}{R}$ .)

Druhý bod: 1. krok: Je dobře definovaný:  $\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x - y \in \text{Ker } T \Leftrightarrow Tx = Ty$ . 2. krok  $\hat{T}$  je lineární a spojitý: lineární triviálně, spojitý z normy:

$$\forall \hat{x} \in \mathcal{U}_{X/\text{Ker } T} : \|\hat{T}(\hat{h})\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|\hat{x}\| \implies \|\hat{T}\| \leq \|T\|.$$

3. krok:  $\hat{T}$  je na, protože  $T$  je na a navíc  $\hat{T}$  je prosté, neboť  $\hat{T}\hat{x} = 0 \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker } T$ . □

└

## Definice 9.2 (Graf)

Je-li  $f : X \rightarrow Y$  zobrazení množiny  $X$  do množiny  $Y$ , pak množinu

$$\text{graf } f = \{(x, y) \in X \times Y | y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení  $f$ . Říkáme, že zobrazení  $f : X \rightarrow Y$ , kde  $X, Y$  jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina graf  $f$  je uzavřená v  $X \times Y$ .

### Věta 9.6 (O uzavřeném grafu (S. Banach, 1932))

Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory a  $T : X \rightarrow Y$  je lineární zobrazení. Pak  $T$  je spojitý, právě když má uzavřený graf.

*Důkaz*

„ $\implies$ “ trivální, platí vždy. „ $\impliedby$ “:  $G := \{(x, Tx) | x \in X\} \subset X \oplus_\infty Y$  je uzavřený (tedy Banachův). Ať  $P_x, P_y$  jsou kanonické projekce (jsou spojitý:  $\|P_x(x, y)\| = \|x\|_x \leq \|(x, y)\|_\infty$ ).

Uvažujme  $S : X \rightarrow G$ ,  $Sx = (x, Tx)$ , to je lineární a prosté. Ale nevíme, zda je  $S$  spojitý. To dokážeme tak, že dokážeme spojitost  $S^{-1}$  a to, že je to izomorfismus. Z toho pak plyne spojitost  $S$  i  $T$ .  $S^{-1} = P_x|_G$  je spojitý, prosté a na, tudíž je izomorfismus z věty výše. Tedy  $S$  je spojitý. Tedy je spojitý  $T = P_y \circ S$ .  $\square$

### Věta 9.7 (Z dřívějšíka, zopakovaná, důkaz je nový)

Nechť  $X$  je Banachův prostor a  $Y, Z \subset X$  jeho podprostory splňující  $X = Y \oplus Z$ . Pak  $X = Y \oplus_t Z$ , právě když  $Y$  a  $Z$  jsou uzavřené.

*Důkaz*

„ $P_Y$  spojitý  $\implies Y, Z$  uzavřené“: lehké, protože  $P_Z = \text{id} - P_Y$  spojitý a  $Y = \text{Ker } P_Z = P_Z^{-1}(0)$  je uzavřená a  $Z = \text{Ker } P_Y = P_Y^{-1}(0)$  je uzavřená.

Naopak ať  $Y, Z$  jsou uzavřené, pak chceme  $P_Y$  má uzavřený graf (pak aplikujeme předchozí větu): Ať  $(x_n, P_Y(x_n)) \rightarrow (x, y) \in X \oplus_\infty Y \cong X$ . Pak  $x_n \rightarrow x$ ,  $P_Y(x_n) \rightarrow y$ . Tedy  $x_n - P_Y(x_n) \rightarrow x - y \implies x - y \in Z$ . Tudíž  $x = y + x - y \implies P_Y x = y$ . Tudíž  $(x, y) = (x, P_Y x) \in \text{graf } P_Y$ .  $\square$

## 10 Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

### Tvrzení 10.1

Nechť  $X$  je Banachův prostor a  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Pak  $T$  je invertibilní, právě když  $T$  je bijekce.

*Důkaz*

„ $\implies$ “  $TS = \text{id} \implies T$  je na,  $ST = \text{id} \implies T$  je prosté.

„ $\impliedby$ “: Plyne z důsledku výše.  $\square$

## Tvrzení 10.2

Nechť  $X$  je Banachův prosotr.

- Pokud  $T \in \mathcal{L}(X)$  a  $\|T\| < 1$ , pak  $\text{id}_X - T$  je invertibilní a platí  $(\text{id}_X - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ .
- Pokud je  $T$  invertovatelný a  $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ , pak  $S$  je invertovatelný a  $S^{-1} = T^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\text{id} - ST^{-1})^n$ . Speciálně, množina všech invertibilních operátorů v  $\mathcal{L}(X)$  je otevřená.

┌

Důkaz

1. bod: máme  $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|} \implies \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(X)$ . Zároveň

$$\forall x \in X : \left( (\text{id} - T) \circ \sum_{n=0}^{\infty} T^n \right) (x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (T^n - T^{n+1})(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x - T^{n+1}(x)) = x.$$

Analogicky  $\sum_{n=0}^{\infty} T^n \circ (\text{id} - T) = \text{id}_X$ .

2. bod: Idea:  $\frac{1}{S} = \frac{1}{S - T + T} = \frac{1}{T(T^{-1}(S - T) + \text{id})}$ .

Důkaz: Platí

$$S = S - T + T = T(T^{-1}(S - T) + \text{id}) = T(\text{id} - T^{-1}(T - S))$$

$T$  má inverz, člen za mínus má normu menší 1, tedy  $\text{id}$  mínus on má inverz dle 1. bodu, tedy  $S^{-1}$  existuje a

$$S^{-1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (T^{-1}(T - S))^n \right) \circ T^{-1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (\text{id} - T^{-1}S)^n \right) \circ T^{-1} = T^{-1} \circ \left( \sum_{n=0}^{\infty} (\text{id} - ST^{-1})^n \right).$$

└

□

## Definice 10.1 (Vlastní číslo, vlastní prostor, vlastní vektory, bodové spektrum, spektrum operátoru)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor nad  $\mathbb{K}$  a  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Číslo  $\lambda \in \mathbb{K}$  nazýváme vlastním číslem operátoru  $T$ , pokud  $\text{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$ , tj. pokud  $T(x) = \lambda x$  pro nějaké  $x \in X$ ,  $x \neq 0$ . Prostor  $\text{Ker}(\lambda I - T)$  pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu  $\lambda$ . Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu  $\lambda$  se nazývají vlastní vektory příslušné číslu  $\lambda$ . Množina všech vlastních čísel operátoru  $T$  se nazývá bodové spektrum operátoru  $T$  a značí se  $\sigma_p(T)$ .

Spektrum operátoru  $T$  je množina všech čísel  $\lambda \in \mathbb{K}$ , pro která operátor  $\lambda I - T$  není invertibilní. Spektrum operátoru  $T$  značíme  $\sigma(T)$ .



### Věta 10.3

Nechť  $X$  je Banachův nad  $\mathbb{K}$  a  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Pak  $\sigma(T)$  je kompaktní podmnožina  $\mathbb{K}$  splňující  $\sigma(T) \subset B_X(0, \|T\|)$ . Je-li  $X$  komplexní, pak  $\sigma(T)$  je neprázdné.

┌

Důkaz

„ $\sigma(T) \subset B(0, \|T\|)$ “: Pokud  $|\lambda| > \|T\|$ , pak  $(\lambda I - T) = \lambda(I - \frac{T}{\lambda}) \implies (\lambda I - T)^{-1}$  existuje.

„ $\sigma(T)$  uzavřená“:  $\mathbb{K} \setminus \sigma(T)$  je otevřená podle tvrzení výše bod 2.

Důkaz druhé části vynechán (těžký a je potřeba Komplexka).

└

□

### Věta 10.4

Nechť  $X$  je Banachův prostor a  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Pak  $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$ . Navíc, pokud je  $X$  Hilbertův, pak  $\sigma(T^\star) = \overline{\sigma(T)}$ .

┌

Důkaz

Plyne z toho, že  $S^{-1}$  existuje  $\Leftrightarrow (S^*)^{-1}$  existuje a

$$(\lambda I - T)^* = \lambda I - T^*, \quad (\lambda I - T)^\star = \bar{\lambda} I - T^\star.$$

└

□

### Věta 10.5

Nechť  $X$  je Banachův prostor a  $T \in \mathcal{K}(X)$ .

1. Jestliže  $\text{Rng}(T)$  je uzavřený, pak  $\dim \text{Rng}(T) < \infty$ .
2. Jestliže  $\dim X = \infty$ , pak  $0 \in \sigma(T)$
3. Jestliže  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , pak  $\dim \text{Ker}(\lambda I - T) < \infty$  a  $\text{Rng}(\lambda I - T)$  je uzavřený.

Důkaz

1. Máme  $T : X \rightarrow \overbrace{\text{Rng } T}^{\text{Banach}}$  je na. Z věty o otevřeném zobrazení  $\overline{T(B_X)}_{\text{relativně kompaktní}} \supseteq \mathcal{U}(\mathbf{o}, r) \cap \text{Rng } T \implies B(\mathbf{o}, r) \cap \text{Rng } T$  je kompaktní  $\implies \dim \text{Rng } T < \infty$  (je v něm kompaktní koule, tak musí být konečnědimenzionální).

2.  $0 \notin \sigma(T) \implies \exists T^{-1} \implies \text{id} = T \circ T^{-1} \in \mathcal{K}(X)$ . Tedy  $B_X$  je kompaktní, a tudíž  $\dim X < \infty$ .

3. První krok „ $\dim \text{Ker}(\lambda I - T) < \infty$ “: BÚNO  $\lambda I - T$  není prostý. Na  $\text{Ker}(\lambda I - T)$  máme  $T = \lambda I$ . Uvažujme  $T|_{\text{Ker}(\lambda I - T)}$ , to je kompaktní operátor.

$$\implies \overline{T(\text{Ker}(\lambda I - T) \cap B_x)} = \overline{\lambda(\text{Ker}(\lambda I - T) \cap B_x)} = \lambda(\text{Ker}(\lambda I - T) \cap B_x)$$

$\implies \text{Ker}(\lambda I - T)$  je konečnědimenzionální.

Druhý krok: Tedy  $\exists Z \subset X$  uzavřený, že  $X = \text{Ker}(\lambda I - T) \oplus_t Z$ . Polož  $S = (\lambda I - T)|_Z$ . Pak  $S$  je prostý (tam kde není prosté, tak jsme v druhé souřadnici),  $\text{Rng } S = \text{Rng}(\lambda I - T)$  („ $\subseteq$ “ zřejmě, „ $\supseteq$ “:

$$\forall x \in X : (\lambda I - T)x = (\lambda I - T)(\underbrace{y}_{\text{Ker}(\lambda I - T)} + \underbrace{z}_Z) = Sz$$

). Zbývá „ $S$  je izomorfismus“ (pak  $\text{Rng } S$  je uzavřený): Ať ne, pak  $\exists (x_n)_{n=1}^\infty$  v  $\mathcal{S}_Z$ , že  $\|Sx_n\| \rightarrow 0$ . Protože  $T$  je kompaktní, existuje  $(n_k) \nearrow$  a  $x \in X : T(x_{n_k}) \rightarrow x \in X$ . Pak ale  $\lambda x_{n_k} = (\lambda I - T)(x_{n_k}) + T(x_{n_k}) \rightarrow X$ . Tedy  $S(x_{n_k}) \rightarrow S(\frac{x}{\lambda}) \implies x = 0$ , ale  $\|\lambda x_{n_k}\| = |\lambda| \rightarrow \|x\| = 0$ , nebo  $S(x_{n_k}) \rightarrow 0$ .  $\square$

## Věta 10.6 (Fredholmova alternativa)

Nechť  $X$  je Banachův prostor nad  $\mathbb{K}$ ,  $T \in \mathcal{K}(X)$  a  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Pak operátor  $\lambda I - T$  je na, právě když je prostý.

┌ *Důkaz*

„ $\implies$ “: Pro spor předpokládejme, že  $S$  je prosté, ale není na. Polož  $S = \lambda I - T$ ,  $X_0 := X$ ,  $X_{n+1} := S(X_n)$ . Pak  $X_{n+1} \subsetneq X_n$  (dokáže se indukcí) a  $X_n$  je uzavřený (dle předchozí věty bodu 3. Rng  $S$  je uzavřený, tedy  $S : X \rightarrow \text{Rng } S$  je prostý a na, tj.  $S$  je izomorfismus).

Z lemmatu o skoro kolmici najdeme  $(x_n)_{n=1}^\infty$  posloupnost ve sféře, že  $d(x_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pak pro  $m < n$ :

$$T(x_n) - T(x_m) = \underbrace{\lambda x_n}_{X_n} - \underbrace{\lambda x_m}_{X_{n+1}} - \underbrace{Sx_n}_{\in X_{n+1}} + \underbrace{Sx_m}_{\in X_{n+1}}.$$

Polož  $? = \lambda x_n - Sx_n + Sx_m \in X_{m+1}$ . Pak

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| = |\lambda| \cdot \|x_n - \frac{?}{\lambda}\| \geq |\lambda| d(x_n, X_{m+1}) \geq \frac{|\lambda|}{2} > 0.$$

„ $\Leftarrow$ “:  $\lambda I - T$  je na  $\implies$  (z nějaké předchozí věty)  $(\lambda I - T)^* = \lambda I - T^*$  je prostý  $\implies \lambda I - T^*$  je na  $\implies \text{Ker}(\lambda I - T) = (X^*)_\perp = \{0\} \implies \lambda I - T$  je prostý.  $\square$

*Důsledek*

Nechť  $X$  je Banachův prostor a  $T \in \mathcal{K}(X)$ . Pak  $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_p(T)$ .

## Lemma 10.7

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Jsou-li  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  různá vlastní čísla operátoru  $T$  a  $x_1, \dots, x_n \in X$  vlastní vektory příslušné číslům  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

┌ *Důkaz*

$n = 1$  jasné, „ $n \implies n + 1$ “: Ať  $x_1, \dots, x_{n+1} \in X$  jsou vlastní vektory příslušné vlastním číslům  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ . Ať  $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$ . Pak  $0 = T(\sum_i \alpha_i x_i) - \lambda_{n+1}(\sum_i \alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) x_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) x_i \implies \alpha_i = 0, i \leq n \implies \alpha_{n+1} = 0$ .  $\square$

## Věta 10.8

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor nad  $\mathbb{K}$  a  $T \in \mathcal{K}(X)$ . Pak pro každé  $r > 0$  je množina  $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| > r\}$  konečná.

┌ *Důkaz*

Pro spor ať ne. Tj.  $\exists r > 0 \exists (\lambda_n)_{n=1}^\infty$  po dvou různých  $\lambda_n$ ,  $|\lambda_n| > R$ ,  $\lambda_n \in \sigma(T)$ . Ať  $x_n$  je vlastní vektor příslušný  $\lambda_n$ . Položme  $X_n = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ . Pak dle předchozího lemmatu  $X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq X_3 \subsetneq \dots$

Z lemmatu o skoro kolmici najdeme  $(z_n)_{n=2}^\infty$ , že  $z_n \in S_{X_n} \wedge d(z_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ . Ať  $z_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ , pak  $T(z_n) = \sum_i \alpha_i \lambda_i x_i$ ,  $\lambda_n z_n - T(z_n) = \sum_i d_i (\lambda_i - \lambda_n) x_i = \sum_i^{n-1} \dots \in X_{n-1}$ . Tedy

$$\begin{aligned} \forall m > n : \|T(z_m) - T(z_n)\| &= \|\lambda_m z_m - \underbrace{(\lambda_m z_m - T(z_m))}_{\in X_{m-1}} + T(z_n)\| = \\ &= |\lambda_m| \cdot \|z_m - \frac{\dots}{\lambda_m}\| \geq \frac{R}{2} > 0. \end{aligned}$$

└ Tedy jsme našli  $\frac{R}{2}$  separovanou množinu, tedy  $T$  není kompaktní.  $\nexists$ . □

*Důsledek*

Nechť  $X$  je nekonečněrozměrný Banachův prostor a  $T \in \mathcal{K}(X)$ . Potom  $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$ , kde  $\{\lambda_n\}$  je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru  $T$ , přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.

### Věta 10.9 (Druhá Fredholmova věta)

Nechť  $X$  je Banachův prostor nad  $\mathbb{K}$ ,  $T \in \mathcal{K}(X)$  a  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Pak

$$\text{Rng}(\lambda I_X - T) = (\text{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*))^\perp,$$

$$\text{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = (\text{Ker}(\lambda I_X - T))^\perp.$$

┌ *Důkaz*

└ Bez důkazu □

### Věta 10.10 (Třetí Fredholmova věta)

Nechť  $X$  je Banachův prostor,  $T \in \mathcal{K}(X)$  a  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Pak

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(\lambda I_X - T) &= \text{codim Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \text{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \\ &= \text{codim Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty. \end{aligned}$$

┌ *Důkaz*

└ Bez důkazu □

**Definice 10.2** (Numerický range operátoru)

Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Množina  $N_T = \{\langle Tx, x \rangle \mid x \in S_H\}$  se nazývá numerický range operátoru  $T$ .

**Tvrzení 10.11**

Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $T \in \mathcal{L}(H)$ .

1.  $N_{\alpha I + \beta T} = \alpha + \beta N_T$  pro libovolná  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .
2.  $\sigma_p(T) \subset N_T \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$ .
3.  $\sigma(T) \subset \overline{N_T}$ .

┌

*Důkaz*

$$1. \forall x \in S_H : \langle (\alpha I + \beta T)x, x \rangle = \alpha \langle x, x \rangle + \beta \langle Tx, x \rangle = \alpha + \beta \langle Tx, x \rangle.$$

$$2. \sigma_p(T) \subseteq N_T: \text{Ať } \lambda \in \sigma_p(T) \implies \exists x_0 \in S_H : \lambda x_0 = Tx_0.$$

$$= \langle Tx_0, x_0 \rangle = \langle \lambda x_0, x_0 \rangle = \lambda$$

$N_T \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$  z Cauchy-Schwartz.

3. Ať  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_z(T)$ . 1. případ: Ať  $\lambda I - T$  je isomorfismus do (a ne na), pak  $\text{Rng}(\lambda I - T) \subsetneq H$  je uzavřený podprostor  $\implies \exists x \in S_H \cap (\text{Rng}(\lambda I - T))^\perp$ , speciálně  $0 = \langle \lambda x - Tx, x \rangle = \lambda - \langle Tx, x \rangle \implies \lambda \in N_T$ .

2. případ:  $\lambda I - T$  není izomorfismus, pak  $\lambda I - T$  není sdola omezený, tedy  $\exists (x_n) \text{ v } S_H$ , že  $(\lambda I - T)(x_n) \rightarrow 0$ , pak

$$|\lambda - \langle Tx_n, x_n \rangle| = |\langle \lambda x_n - Tx_n, x_n \rangle| \leq \|\lambda x_n - Tx_n\| \rightarrow 0.$$

└

□

**Definice 10.3** (Samoadjungovaný operátor)

Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Řekneme, že  $T$  je samoadjungovaný, pokud  $T = T^\star$ .

**Věta 10.12**

Nechť  $H$  je netriviální Hilbertův prostor a  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Pak  $T$  je samoadjungovaný, právě když  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$  pro každé  $x, y \in H$ . Pro  $T$  samoadjungovaný platí následující tvrzení:

- $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H$ .
- $N_T \subset \mathbb{R}$  a označíme-li  $m_T = \inf N_T$ ,  $M_T = \sup N_T$ , pak  $\|T\| = \max\{|m_T|, |M_T|\}$  a  $\{m_T, M_T\} \subset \sigma(T) \subset [m_T, M_T]$ , a tedy číslo  $\|T\|$  nebo  $-\|T\|$  leží v  $\sigma(T)$ .

┌ *Důkaz*

První bod: Víme  $\forall x \in H : \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$ . Tedy  $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ .

Druhý bod: Položme  $M = \sup \{ \|x\| \mid \lambda \in N_T \}$ . Chceme  $\|T\| = M$ . „ $\geq$ “:  $\forall x \in S_H : |\langle Tx, x \rangle| \leq \|T\|$ , „ $\leq$ “: Pro  $x, y \in H$  polož  $S(x, y) := \langle Tx, y \rangle$ . Pak platí

$$\Re S(x, y) = \frac{1}{4} (S(x + y, x + y) - S(x - y, x - y))$$

Neboť (pravou stranu tupě rozepíšeme dostaneme to, co na levé:)

$$LS = \frac{1}{2} (S(x, y) + \overline{S(x, y)}) = \frac{1}{2} (\langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle).$$

Zvol  $x \in S_H$ , chceme „ $\|Tx\| \leq M$ “: BÚNO  $Tx \neq 0$ . Položme  $y = \frac{Tx}{\|Tx\|} \in S_H$ . Pak  $\|Tx\| = \langle Tx, y \rangle = S(x, y) = |\Re S(x, y)| \leq \frac{1}{4} (|S(x + y, x + y)| + |S(x - y, x - y)|) \leq \frac{1}{4} M (\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) = \frac{1}{2} M (\|x\|^2 + \|y\|^2) = M$ .

Tedy  $\|T\| = \sup \{ \|\lambda\| \mid \lambda \in N_T \} = \max \{ m_T, M_T \}$  (Jelikož  $N_T \subseteq \mathbb{R}$  je omezená  $\implies \sup \{ \|\lambda\| \mid \lambda \in N_T \} = \max \{ |\inf N_T|, |\sup N_T| \}$ ).

A tedy  $\sigma(T) \subseteq \overline{N_T} \subseteq [m_T, M_T]$ . Zbývá „ $\{m_T, M_T\} \subseteq \sigma(T)$ “: Polož  $R = T - m_T I$ . Pak  $R = R^\star$ ,  $N_R = N_T - m_T$ , tedy  $M_R = M_T - m_T \geq 0 = m_R \implies \|R\| = M_R$ . Zvol  $(x_n)_{n=1}^\infty$  z  $S_H$ , že  $\langle Rx_n, x_n \rangle \rightarrow \|R\| = M_R$ . Chceme „ $\|R\|I - R$  není izomorfismus“: Máme  $\|(|R|)x_n - Rx_n\|^2 = \|R\|^2 \|x_n\|^2 + \|Rx_n\|^2 + 2\Re \langle -Rx_n, \|R\|x_n \rangle \leq 2(\|R\|^2 - \|R\|\Re \langle Rx_n, x_n \rangle) = 2\|R\| \cdot (\|R\| - \langle Rx_n, x_n \rangle) \rightarrow 0$ . Tedy  $\|R\|I - R$  není zdola omezený.

Tedy  $M_R = \|R\| \in \sigma(R)$ . Pak  $M_T \in \sigma(T)$  (neboť máme  $M_T I - T = (m_T + M_R)I - (m_T I + R) = M_R I - R$  nemá inverzi).

Zbývá „ $m_T \in \sigma(T)$ “: Máme  $N_T = -N_T$ , tedy  $m_T = \inf N_T = -(\sup(-N_T)) = -M_{-T}$ .  $-M_{-T}$  je ve spektru (dle již dokázané části), tedy máme  $m_T I - T = (-M_{-T} I - T = -(M_{-T} I - (-T)))$  nemá inverzi, tedy  $m_T \in \sigma(T)$ . □

## Definice 10.4 (Invariantní množina)

Nechť  $A$  je množina a  $f : A \rightarrow A$  je zobrazení. Množina  $B \subset A$  se nazývá invariantní vůči  $f$ , pokud  $f(B) \subset B$ , tj.  $f|_B : B \rightarrow B$ .

## Lemma 10.13

Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a označme

$$SA(H) = \{ T \in \mathcal{L}(H) \mid T = T^* \}.$$

Pak pro  $T \in SA(H)$  platí následující tvrzení:

1.  $\lambda \in \sigma_p(T)$  právě tehdy, když  $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^\star)$ . Vlastní prostor  $T$  příslušný vlastnímu číslu

$\lambda$  je shodný s vlastním prostorem  $T^\star$  příslušným vlastnímu číslu  $\bar{\lambda}$ .

2. Pokud  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou různá vlastní čísla  $T$ , pak  $\text{Ker}(\lambda_1 I - T) \perp \text{Ker}(\lambda_2 I - T)$ .

3. Pokud  $\sigma(T) = \{0\}$ , pak  $T = 0$ .

4.  $Y \in H$  uzavřený podprostor invariantní vůči  $T$  a  $T^\star \implies T|_Y$  je samoadjungovaný.

┌  
Důkaz

1. Pro  $T = T^\star$  je  $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$  a tedy to je trivialita.

2. Ať  $x_1 \in \text{Ker}(\lambda_1 I - T)$ ,  $x_2 \in \text{Ker}(\lambda_2 I - T)$ , pak  $\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle Tx_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Tx_2 \rangle = \bar{\lambda}_2 \langle x_1, x_2 \rangle$ . Tedy  $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ .

3. Plyne ihned z předchozí věty 2. bod.

4.  $\forall x, y \in Y$  máme  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ . □

**Věta 10.14** (Spektrální rozklad samoadjungovaného kompaktního operátoru (D. Hilbert (1904), Erhard Schmidt (1907)))

Nechť  $H$  je netriviální Hilbertův prostor a  $T \in \mathcal{K}(H)$  je samoadjungovaný. Pak existuje ortonormální báze  $B$  prostoru  $H$  tvořená vlastními vektory  $T$ . Vektorů z  $B$  příslušných nenulovým vlastním číslům  $T$  je spočetně mnoho, a seřadíme-li je libovolně do prosté posloupnosti  $\{e_n\}_{n=1}^N$ ,  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , pak  $\{e_n\}$  je ortonormální báze  $\overline{\text{Rng } T}$  a pro každé  $x \in X$  je

$$Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

kde  $\lambda_n$  je vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru  $e_n$ .

┌  
Důkaz (Jen za pomoci minulého lemmatu)

Ať  $B$  je sjednocením ON bází vlastních podprostorů. Označíme  $Y = \overline{\text{span}} B$ . Chceme „ $Y^\perp = \{0\}$ “: 1. krok:  $Y$  je invariantní vůči  $T$  a  $T^\star$ . Ať  $e_n \in B$ , pak  $T(e_n) = \lambda_n e_n \in Y$ ,  $T^\star(e_n) = \bar{\lambda}_n e_n \in Y \implies T(\overline{\text{span}}(e_n)) \subseteq Y$  a  $T^\star(\overline{\text{span}}(e_n)) \subseteq Y$ .

2. krok:  $Y^\perp$  je invariantní vůči  $T$  a  $T^\star$ . Ať  $Z \in Y^\perp$ , pak

$$\forall y \in Y : \langle Tz, y \rangle = \langle z, T^\star y \rangle = 0, \quad \langle T^\star z, y \rangle = \langle z, Ty \rangle = 0.$$

Dle 1. bodu minulého lemmatu  $T|_{Y^\perp}$  je samoadjungovaný a kompaktní. Navíc  $\sigma_P(T|_{Y^\perp}) = \emptyset \implies T|_{Y^\perp} = 0$ .

3. krok:  $Y^\perp \subseteq \text{Ker } T \subseteq Y \implies Y^\perp = Y^\perp \cap Y = \{0\}$ . □

# 11 Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

## Definice 11.1

Nechť  $\mu$  je kladným násobkem Lebesgueovy míry na  $\mathbb{R}^d$  a  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ . Konvoluce funkce  $f$  s funkcí  $g$  je funkce  $f * g$  definovaná jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)d\mu(y)$$

pro taková  $x \in \mathbb{R}^d$ , pro která integrál konverguje.

## Věta 11.1

Nechť  $\mu$  je kladným násobkem Lebesgueovy míry na  $\mathbb{R}^d$  a  $f, g, h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ .

1. Operace  $*$  je komutativní (funkce  $f * g$  a  $g * f$  mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny).
2. Operace  $*$  je distributivní vzhledem ke sčítání  $((f + g) * h = f * h + g * h$  na definičních oborech pravých stran).

┌  
Důkaz

$$1. (f * g)(x) = C \int f(y)g(x - y)dy = C \int f(x - z)g(z)dz = (g * f)(x).$$

$$\begin{aligned} 2. (f * (g + h))(x) &= C \int f(y)(g + h)(x - y)d\lambda^d(y) = \\ &= C \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)d\lambda^d(y) + \int_{\mathbb{R}^d} f(y)h(x - y)d\lambda^d(y) \right) = (f * g)(x) + (f * h)(x) \\ (f + g) * h &= h * (f + g) = h * f + h * g = f * h + g * h. \end{aligned}$$

└

□

## Lemma 11.2

Nechť  $\mu$  je kladným násobkem Lebesgueovy míry na  $\mathbb{R}^d$  a  $f, g \in L_1(\mu)$ . Položíme-li  $F(x, y) = f(y)g(x - y)$  pro  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , pak  $F \in L_1(\mu \times \mu)$  a  $\|F\|_1 = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ .

┌  
Důkaz

$$\begin{aligned} \int \int |F(x, y)|d(\mu \times \mu)(x, y) &= \int |f(y)| \int |g(x - y)|dxdy = \int |f(y)| \cdot \|g\|_1 dy = \\ &= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \end{aligned}$$

└

□



### Definice 11.2 (Posun)

Nechť  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$  a  $y \in \mathbb{R}^d$ . Pak definujeme posun funkce  $f$  do bodu  $y$  jako funkci  $\tau_y f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$  danou předpisem  $\tau_y f(x) = f(x-y)$  pro  $x \in \mathbb{R}^d$ .

### Věta 11.3

Nechť  $\mu$  je kladným násobkem Lebesgueovy míry na  $\mathbb{R}^d$  a  $f \in L_p(\mu)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Pak zobrazení  $\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow L_p(\mu)$  dané předpisem  $\tau(x) = \tau_x f$  je stejnoměrně spojitý.

┌

Důkaz

$$\tau_x f \in L_p : \int |\tau_x f(y)|^p dy = \int |f(x-y)|^p dy = \int |f(z)|^p dz \implies \|\tau_x f\|_p = \|f\|_p.$$

Zvol  $\varepsilon > 0$ ,  $f \in L_p$ . Ať  $g \in \mathcal{L}_C(\mathbb{R}^d)$ , že  $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ . Ať  $B = B(0, r)$ , že  $\overline{g \neq 0} \subseteq B(0, r-1)$  (pro nějaké  $r > 1$ ). Protože  $g$  je stejnoměrně spojitá na  $B$ ,

$$\exists \sigma \in (0, 1) \forall x, y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \varepsilon'.$$

Ať  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ,  $\|x - y\| < \delta$ . Pak

$$\|\tau_x f - \tau_y f\|_p \leq \|\tau_y(f - g)\| + \|\tau_y g - \tau_x g\| + \|\tau_x(g - f)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|\tau_y g - \tau_x g\| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\|\tau_x g - \tau_y g\|_p^p = \int |g(t-x) - g(t-y)|^p dt = \int |g(z) - g(z+x-y)|^p dz =$$

(Jelikož pokud  $g(z) \neq 0$ , pak  $z+x-y \in B(0, r-1+1) = B$ . Obdobné pro  $g(z+x-y)$ .)

$$= \int_B |g(z) - g(z+x-y)|^p dz \leq (\varepsilon')^p \cdot \mu(B) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

pokud  $\varepsilon'$  zvolíme jako  $\sqrt[p]{\frac{\varepsilon}{3\mu(B)}}$ .

□

└

### Věta 11.4

Nechť  $\mu$  je kladným násobkem Lebesgueovy míry na  $\mathbb{R}^d$  a  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ .

1. Je-li  $f \in L_p(\mu)$  a  $g \in L_q(\mu)$ , kde  $1 \leq p, q \leq \infty$  jsou sdružené exponenty, pak funkce  $f * g$  je definována v každém bodě  $\mathbb{R}^d$ , je stejnoměrně spojitá a omezená a platí  $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .
2. Je-li  $f \in L_1^{loc}(\mu)$  a jestliže  $g \in L_\infty(\mu)$  má kompaktní nosič, pak funkce  $f * g$  je definována v každém bodě  $\mathbb{R}^d$ , je spojitá a platí  $\text{supp } f * g \subset \text{supp } f + \text{supp } g$ .<sup>a</sup>
3. Jsou-li  $f, g$  měřitelné,  $D \subset \mathbb{R}^d$  měřitelná a  $f * g$  je definována alespoň na  $D$ , pak  $f * g$  je měřitelná na  $D$ .
4. Jsou-li  $f, g \in L_1(\mu)$ , pak  $f * g$  je definovaná  $\mu$ -skoro všude na  $\mathbb{R}^d$ ,  $f * g \in L_1(\mu)$  a platí  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ .

┌  
Důkaz

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^d : |f * g(x)| \leq \int |f(y)g(x-y)|dy \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$  z Höldera, pokud  $p \neq 1, \infty$ ,  
 $\leq \|g\|_\infty \int |f(y)|dy = \|g\|_\infty \|f\|_1$ , pokud  $p = 1$  a analogicky, pokud  $p = \infty$ .

Tedy  $f * g$  je definována všude a  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ . Zbývá „ $f * g$  je stejnoměrně spojitá“: máme  $(h(t) := g(-t), \tau$  jsou správně posuny) pro  $p \neq 1$ :

$$\begin{aligned} |(f * g)(x) - (f * g)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z)(g(x-z) - g(y-z))dz \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)(h(z-x) - h(z-y))|dz \leq \|f\|_p \cdot \|\tau_x h - \tau_y h\|_q. \end{aligned}$$

Dle předchozí věty je  $f * g$  stejnoměrně spojitá ( $p \neq 1$ ). Pro  $p = 1$  můžeme použít komutativitu a prohodit  $p$  a  $q$ .

2. Máme

$$|(f * g)(x)| \leq \int |f(y)g(x-y)|dy = \int_{y \in K} |f(y)| \cdot |g(x-y)|dy \leq \|g\|_\infty \int_{y \in K} |f(y)|dy < \infty$$

$\implies f * g$  je definovaná všude.

Supporty: Ať  $x \notin \overline{\{f \neq 0\}} + \overline{\{g \neq 0\}}$  pak  $(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int_{f \neq 0} f(y)g(x-y)dy = 0$ . Tedy  $\{f * g \neq 0\} \subset \overline{\{f \neq 0\}} + \overline{\{g \neq 0\}}$ , tudíž (vpravo je kompakt)  $\overline{\{f * g \neq 0\}} \subset \overline{\{f \neq 0\}} + \overline{\{g \neq 0\}}$

Spojitosť: Ať  $x$  dáno,  $y \in B(x, 1)$ . Pak  $(h(z) = (\xi_{B(x,1)-K}f))(-z)$ ,  $\tau$  jsou správné posuny)

$$\begin{aligned} |(f * g)(x) - (f * g)(y)| &= \left| \int_K g(z)(f(x-z) - f(y-z))dz \right| = \\ &= \left| \int_K g(z)(\tau_x h(z) - \tau_y(h(z)))dz \right| \leq \|g\|_\infty \cdot \|\tau_x h - \tau_y h\|_1. \end{aligned}$$

To je stejnoměrně spojitý a z toho již plyne spojitost  $(f * g)$  (v bodě  $x$ ).

3. Vynechán. 4. (nemusí být ke zkoušce):  $F(x, y) = f(y)g(x-y)$ . Dle lemmatu výše je  $F \in L_1(\mu \times \mu)$ ,  $\|F\| = \|f\| \cdot \|g\|$ .

$$\infty > \int_{(\mathbb{R}^d)} F = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dydx \implies |(f * g)(x)| < \infty \text{ skoro všude.}$$

Dále  $\|f * g\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |F(x, y)|dydx = \|f\| \cdot \|g\|$ . □

a

$$\begin{aligned} L_1^{loc} &\equiv \forall x \in \mathbb{R}^d \exists B(x, r) : \int_{B(x, r)} |f| < \infty \\ &\Leftrightarrow \forall K \subset \mathbb{R}^d \text{ kompaktní} : \int_K |f| < \infty. \end{aligned}$$

└

**Definice 11.3** (Multiindex)

Nechť  $d \in \mathbb{N}$ . Pak  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$  nazýváme multiindexem délky  $d$ . Řádem multiindexu  $\alpha$  nazýváme číslo  $\sum_{i=1}^d \alpha_i$  a značíme jej  $|\alpha|$ .

Je-li  $\alpha$  multiindex délky  $d$ , pak symbolem  $D^\alpha$  označíme parciální derivaci řádu  $|\alpha|$  danou multiindexem  $\alpha$ , tj.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Symbol  $D^\alpha$  se též nazývá diferenciální operátor.

**Definice 11.4** (Prostor testovacích funkcí)

Nechť  $A \subset \mathbb{R}^d$ . Množina

$$D(A, \mathbb{K}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}) \mid \text{supp } \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } A\}$$

se nazývá prostor testovacích funkcí na  $A$ .

**Věta 11.5**

Nechť  $\mu$  je kladným násobkem Lebesgueovy míry na  $\mathbb{R}^d$  a  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ . Je-li  $f \in L_1^{loc}(\mu)$  a  $g \in D(\mathbb{R}^d)$ , pak  $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  a  $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$  pro každý multiindex  $\alpha$  délky  $d$ .

┌

*Důkaz*

1. Víme  $f * D^\alpha g$  je spojitá pro každé  $\alpha$  dle předchozí věty bod 2. Tedy stačí  $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ . To dokážeme indukcí podle  $|\alpha| = k$ : Pro  $k = 1$  zafixujme  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $j \in [d]$ .  $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x + te_j - y)dy$ . Pak  $\varphi'(0) = \frac{\partial(f*g)}{\partial x_j}(x)$ .

Chceme prohodit integrál a derivaci:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} F(t, y) \right| = \left| y \mapsto f(y) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x + te_j - y) \right| \leq$$

(to je nenula jen na kompaktu  $K$ )

$$\leq |\xi_K f| \cdot \left| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right| \in L_1.$$

Ověřili jsme předpoklady o integrálu závislém na parametru, tedy

$$\varphi'(0) = \int f(y) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x - y)dy = \left( f * \frac{\partial g}{\partial x_j} \right)(x).$$

At  $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j}$ . Pak  $D^\alpha(f * g) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f * D^{\alpha - e_j} g) = f * \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j} g = f * D^\alpha$ .  $\square$

└

**Definice 11.5** (Regularizační jádro)

Nechť  $\mu$  je kladným násobkem Lebesgueovy míry na  $\mathbb{R}^d$ . Funkci  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  budeme nazývat regularizačním jádrem (vzhledem k  $\mu$ ), pokud  $g$  je nezáporná,  $g \in L_1(\mu)$  a  $\|g\|_1 = 1$ .

**Věta 11.6**

Nechť  $\mu$  je kladným násobkem Lebesgueovy míry na  $\mathbb{R}^d$ ,  $g$  je regularizační jádro na  $\mathbb{R}^d$  a  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ . Položme  $g_n(x) = n^d g(nx)$  pro  $x \in \mathbb{R}^d$  a  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Pokud je  $f$  stejnoměrně spojitá a omezená na  $\mathbb{R}^d$ , potom  $f * g_n \rightarrow f$  stejnoměrně na  $\mathbb{R}^d$ .
2. Pokud  $f \in L_p(\mu)$  a  $1 \leq p < \infty$ , potom  $f * g_n \xrightarrow{L_p} f$ .

Poznámka

$$\int g_n(x) dx = \int g(y) dy = 1$$

podle věty o substituci.

Důkaz

1.  $f \in L_\infty \implies f * g_n$  definována všude (podle předchozí poznámky a tvrzení výše). Zafixujeme  $\varepsilon > 0$ .

Zvolme  $R > 0$ , že  $\int_{B(0,R)} g > 1 - \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$ . Dále  $\delta > 0$ , že  $|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$ .  $n$  zvolíme tak, že  $\frac{R}{n} < \delta$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^d \quad |f * g_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) f(x - y) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) |f(x - y) - f(x)| dy = \\ &= \int_{B(0, \frac{R}{n})} g_n(y) \underbrace{|f(x - y) - f(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} dy + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, \frac{R}{n})} \dots dy \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{B(0, \frac{R}{n})} n^d g(ny) dy + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, \frac{R}{n})} n^d g(ny) dy = \\ &\frac{\varepsilon}{2} \int_{B(0,R)} g(z) dz + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, \frac{R}{2})} g(z) dz < \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Důkaz vynecháme.

□

*Důsledek*

Nechť  $\mu$  je kladným násobkem Lebesgueovy míry na  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  otevřená a  $1 \leq p < \infty$ . Pak množina  $D(\Omega)$  je hustá v prostoru  $L_p(\Omega, \mu)$  (ve smyslu restrikce na  $\Omega$ ).

### Definice 11.6

Nechť  $f \in L_1(\mu_d)$ . Pak Fourierovou transformací funkce  $f$  rozumíme funkci  $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$  definovanou jako

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\lambda_d(x), \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

### Definice 11.7

(Banachovým) prostorem  $C_b(\mathbb{R}^d) = C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$  rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na  $\mathbb{R}^d$  s normou  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$ .

### Definice 11.8

(Banachovým) prostorem  $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$  rozumíme prostor spojitých funkcí na  $\mathbb{R}^d$  takových, že pro každé  $\varepsilon > 0$  je množina  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$  omezená. Na  $C_0(\mathbb{R}^d)$  uvažujeme normu  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$ .

**Lemma 11.7** (Georg Friedrich Bernhard Riemann (1835), H. Lebesgue (1903))

Ať  $f \in L_1(\mu_d)$ . Pak

$$\lim_{\|t\| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = 0$$

┌  
Důkaz

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{o}\} : \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} -f(x) e^{-i\langle t, x + \pi \frac{t}{\|t\|^2} \rangle} d\mu_d(x) \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} -f\left(u - \pi \frac{t}{\|t\|^2}\right) e^{-i\langle t, u \rangle} d\mu_d(u) \right|. \end{aligned}$$

Sečtením polovin obou stran rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left( f(x) - f\left(x - \pi \frac{t}{\|t\|^2}\right) \right) e^{-i\langle t, x \rangle} dx \right| &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left| f(x) - f\left(x - \pi \frac{t}{\|t\|^2}\right) \right| dx = \\ &= \frac{1}{2} \|\tau_0 f - \tau_P \pi \frac{t}{\|t\|^2} f\|_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

└

□

## Věta 11.8

Nechť  $f, g \in L_1(\mu_d)$  a  $j \in [d]$ . Fourierova transformace má následující vlastnosti:

1.  $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$  a  $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ . Fourierova transformace je tedy spojitě lineární zobrazení z prostoru  $L_1(\mathbb{R}^d)$  do prostoru  $C_0(\mathbb{R}^d)$ .
2. Nechť  $y \in \mathbb{R}^d$ . Pak  $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y, t \rangle} \hat{f}(t)$  pro každé  $t \in \mathbb{R}^d$  a naopak pro funkci  $h(x) = e^{i\langle y, x \rangle} f(x)$  platí  $\hat{h} = \tau_y \hat{f}$ .
3. Je-li  $c > 0$  a  $h(x) = f\left(\frac{x}{c}\right)$ , pak  $\hat{h}(t) = c^d \hat{f}(ct)$  pro každé  $t \in \mathbb{R}^d$ .
4. Je-li  $h(x) = \overline{f(-x)}$ , pak  $\hat{h} = \overline{\hat{f}}$ .
5.  $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$ .
6.  $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} g d\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f \hat{g} d\mu_d$ .
7. Jestliže pro funkci  $h(x) = -ix_j f(x)$  platí  $h \in L_1(\mu_d)$ , pak  $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}(t) = \hat{h}(t)$  pro každé  $t \in \mathbb{R}^d$ .
8. Jestliže  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  existuje všude na  $\mathbb{R}^d$  a jestliže  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$ , pak  $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j \hat{f}(t)$  pro každé  $t \in \mathbb{R}^d$ .

┌

Důkaz (1.)

Nechť  $t \in \mathbb{R}^d$  a  $\{t_n\}$  je posloupnost v  $\mathbb{R}^d$  konvergující k  $t$ . Pak díky spojitosti skalárního součinu pro každé  $x \in \mathbb{R}^d$  platí  $f(x)e^{-i\langle t_n, x \rangle} \rightarrow f(x)e^{-i\langle t, x \rangle}$ . Protože  $|f(x)e^{-i\langle t_n, x \rangle}| = |f(x)|$ , je podle Lebesgueovy věty

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t_n, x \rangle} d\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d = \hat{f}(t).$$

Tedy  $\hat{f}$  je spojitá v  $t$ . Dále zjevně  $|\hat{f}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| d\mu_d(x) = \|f\|_1$ . Fakt, že  $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$  nyní plyne z předchozího lemmatu. Konečně linearita Fourierovy transformace je zřejmá z definice. □

┌

Důkaz (2.)

Z věty o substituci pro  $t \in \mathbb{R}^d$ :

$$\widehat{\tau_y f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-i\langle t, u \rangle} e^{-i\langle t, y \rangle} d\mu_d(u) = e^{-i\langle y, t \rangle} \hat{f}(t).$$

$$\hat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle y, x \rangle} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t - y, x \rangle} d\mu_d(x) = \hat{f}(t - y) = \tau_y \hat{f}(t).$$

└

□

┌  
Důkaz (3.)

Z věty o substituci pro  $t \in \mathbb{R}^d$ :

$$\hat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{x}{c}\right) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = |c|^d \int_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-i\langle t, cu \rangle} d\mu_d(u) = |c|^d \hat{f}(ct).$$

┐

┌  
Důkaz (4.)

Z věty o substituci pro  $t \in \mathbb{R}^d$ :

$$\hat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)} e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)} e^{-i\langle t, -x \rangle} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \overline{\hat{f}(t)}.$$

┐

┌  
Důkaz (5.)

Zvolme pevně libovolné  $t \in \mathbb{R}^d$ . Dle lemmatu výše je funkce  $F(x, y) = f(y)g(x - y)e^{-i\langle t, x \rangle}$  měřitelná na  $(\mathbb{R}^d)^2$ . Dále  $|F(x, y)| = |f(y)| \cdot |g(x - y)|$  a aplikujeme lemma výše na  $|F|$ , dostaneme, že  $F \in L_1(\mu_d \times \mu_d)$ . Můžeme tedy použít Fubiniovu větu a substituci  $\varphi(u) = u + y$  k výpočtu

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) d\mu_d(y) \right) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^d} g(x - y) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) \right) d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^d} g(u) e^{-i\langle t, u + y \rangle} d\mu_d(u) \right) d\mu_d(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle t, y \rangle} d\mu_d(y) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g(u) e^{-i\langle t, u \rangle} d\mu_d(u) = \hat{f}(t) \hat{g}(t). \end{aligned}$$

┐

┌  
Důkaz (6.)

Položme  $F(x, y) = f(y)g(x)e^{-i\langle x, y \rangle}$ . Pak  $F$  je dle lemmatu výše měřitelná na  $(\mathbb{R}^d)^2$ . Máme

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |F(x, y)| d\mu_d(x) \right) d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left( \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| d\mu_d(x) \right) d\mu_d(y) = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty,$$

podle Fubiniovy věty, tedy  $F \in L_1(\mu_d \times \mu_d)$ . Proto můžeme použít Fubiniovu větu ještě jednou k výpočtu

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x) d\mu_d(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle x, y \rangle} d\mu_d(y) \right) g(x) d\mu_d(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle x, y \rangle} g(x) d\mu_d(x) \right) d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \hat{g}(y) d\mu_d(y). \end{aligned}$$

┐

┌  
Důkaz (7.)

Zvolme pevně  $t \in \mathbb{R}^d$  a položme  $\varphi(u) = \hat{f}(t + ue_j)$  pro  $u \in \mathbb{R}$ . Dále položme  $F(u, x) = f(x)e^{-i\langle t+ue_j, x \rangle}$  pro  $u \in \mathbb{R}$  a  $x \in \mathbb{R}^d$  a všimněme si, že  $\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^d} F(u, x) d\mu_d(x)$ . Pak pro každé  $u \in \mathbb{R}$  je funkce  $x \mapsto F(u, x)$  měřitelná. Dále pro každé  $x \in \mathbb{R}^d$  a  $u \in \mathbb{R}$  je  $\frac{\partial F}{\partial u}(u, x) = -ix_j f(x)e^{-i\langle t+ue_j, x \rangle} = h(x)e^{-i\langle t+ue_j, x \rangle}$ , takže  $|\frac{\partial F}{\partial u}(u, x)| = |h(x)|$ . Dle předpokladu je tedy  $h$  integrovatelná majoranta. Konečně, zjevně  $x \mapsto F(0, x) \in L_1(\mu_d)$ . Podle věty o derivaci integrálu podle parametru tak máme  $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}(t) = \varphi'(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial F}{\partial u}(0, x) d\mu_d(x) = \hat{h}(t)$ .  $\square$

┌  
Důkaz (8.)

Díky následujícímu lemmatu máme

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\lambda(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (-it_j) e^{-i\langle t, x \rangle} d\lambda(x) = it_j \hat{f}(t).$$

┌ $\square$

### Lemma 11.9

Nechť  $f \in L_1(\mathbb{R}^d, \lambda)$ ,  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$  je omezená a  $j \in [d]$ . Jestliže  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  a  $\frac{\partial g}{\partial x_j}$  existují všude na  $\mathbb{R}^d$  a jestliže  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$  a  $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_b(\mathbb{R}^d)$ , pak  $\int_{\mathbb{R}^d} g \frac{\partial f}{\partial x_j} d\lambda = - \int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial g}{\partial x_j} d\lambda$ .

┌  
Důkaz (Náznak pro  $d = 1$ )

Podle předpokladu je funkce  $fg'$  spojitá na  $\mathbb{R}$  a má konvergentní Lebesgueův integrál. Tedy existuje i konečný Newtonův integrál  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ . Dále si můžeme všimnout, že  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$  (jinak by  $f$  nebyla z  $L_1$ , důkaz existence je přenechán čtenáři). Podle věty o integraci per partes tedy máme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g(x)dx.$$

┌ Integrál vlevo konverguje dle předpokladů, tedy rovnost platí.  $\square$

### Lemma 11.10

Nechť  $f, g \in L_1(\mu_d)$ . Položme  $g_n(x) = n^d \hat{g}(-nx)$  a  $h_n(x) = g\left(\frac{x}{n}\right)$  pro  $x \in \mathbb{R}^d$  a  $n \in \mathbb{N}$ . Pak  $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) e^{i\langle t, x \rangle} h_n(t) d\mu_d(t)$  pro každé  $x \in \mathbb{R}^d$  a  $n \in \mathbb{N}$ .



┌ *Důkaz*

Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Protože  $g_n$  je omezená, je  $f * g_n$  definovaná na celém  $\mathbb{R}^d$ . Pro libovolné  $x \in \mathbb{R}^d$  tedy máme

$$\begin{aligned} (f * g_n)(x) &= (g_n * f)(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g_n(y)d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)n^d\hat{g}(-ny)d\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+t)n^d\hat{g}(nt)d\mu_d(t) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \tau_{-x}f(t)\widehat{h_n}(t)d\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\tau_{-x}f}(t)h_n(t)d\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)e^{i\langle x,t \rangle}h_n(t)d\mu_d(t), \end{aligned}$$

└ přičemž při výpočtu jsme použili postupně substituci  $\varphi(y) = -y$  a předchozí větu.  $\square$

### Věta 11.11 (O inverzi)

Nechť  $f \in L_1(\mu_d)$ . Je-li  $\hat{f} \in L_1(\mu_d)$ , pak pro skoro všechna  $x \in \mathbb{R}^d$  platí

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)e^{i\langle x,t \rangle}d\mu_d(t) = \hat{\hat{f}}(-x).$$

Je-li navíc  $f$  spojitá, pak vzorec platí pro všechna  $x \in \mathbb{R}^d$ .

┌ *Důkaz* (TODO vlastnosti  $g$ )

Nechť  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce  $g(x) = e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|}$ . Pak  $x \mapsto \hat{g}(-x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \frac{1}{1+x_j^2}$  je regularizační jádro na  $\mathbb{R}^d$ . Všimněme si též, že  $g(0) = 1$ . Nechť  $g_n$  a  $h_n$  jsou funkce z předchozího lemmatu. Podle toho pro libovolné  $x \in \mathbb{R}^d$  platí, že  $(f * g_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)e^{i\langle x,t \rangle}d\mu_d(t)$ . Pro každé  $t \in \mathbb{R}^d$  je  $h_n(t) \rightarrow g(0) = 1$ . Protože  $|\hat{f}(t)e^{i\langle x,t \rangle}h_n(t)| \leq |\hat{f}(t)|$  pro každé  $t \in \mathbb{R}^d$  a dle předpokladu  $\hat{f} \in L_1(\mu_d)$ , můžeme použít Lebesgueovu větu. Dostáváme tak  $f * g_n(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)e^{i\langle x,t \rangle}d\mu_d(t)$  pro každé  $x \in \mathbb{R}^d$ . Na druhou stranu podle věty o regularizačním jádru platí, že  $f * g_n \rightarrow f$  v  $L_1(\mu_d)$ . Existuje tedy posloupnost  $\{g_{n_k}\}$  taková, že  $(f * g_{n_k})(x) \rightarrow f(x)$  pro skoro všechna  $x \in \mathbb{R}^d$ . Z jednoznačnosti limity pak dostáváme, že  $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)e^{i\langle x,t \rangle}d\mu_d(t)$  pro skoro všechna  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Předpokládejme nyní, že je  $f$  navíc spojitá. Protože  $x \mapsto \hat{\hat{f}}(-x)$  je spojitá dle věty o vlastnosti FT a  $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$  na husté podmnožině  $\mathbb{R}^d$ , musejí se tyto funkce rovnat všude.  $\square$

### Důsledek

Fourierova transformace  $\mathcal{F} : L_1(\mu_d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$  je prosté zobrazení. Je-li  $g \in L_1(\mu_d)$  a  $\hat{g} \in L_1(\mu_d)$ , pak  $g \in \text{Rng } \mathcal{F}$  a  $\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \hat{g}(-x)$  pro skoro všechna  $x \in \mathbb{R}^d$ .

### Důsledek

Jsou-li  $f, g \in L_1(\mu_d)$  takové, že  $\hat{f}, \hat{g}, f\hat{g}, \widehat{fg} \in L_1(\mu_d)$ , pak  $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$ .

**Definice 11.9** (Schwartzův prostor)

Schwartzův prostor na  $\mathbb{R}^d$  je definován následujícím způsobem:

$$\mathcal{S}_d = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \mid PD^\alpha f \text{ je omezená pro každé } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ a každý polynom } P \text{ na } \mathbb{R}^d\}.$$

**Lemma 11.12**

Pro  $N \in \mathbb{N}$  je funkce  $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N$  polynom na  $\mathbb{R}^d$ . Pro každý polynom  $P$  na  $\mathbb{R}^d$  existují  $N \in \mathbb{N}$  a  $C > 0$  taková, že  $|P(x)| \leq C(1 + \|x\|^2)^N$  pro každé  $x \in \mathbb{R}^d$ .

┌

Důkaz (Na přednášce byl pouze náznak)

První tvrzení je vidět z rozpisu  $(1 + \|x\|^2)^N = \left(1 + \sum_{j=1}^d x_j^2\right)^N$ . Dále necht  $P(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| < k} c_\alpha x^\alpha$ . Položme  $C = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| < k} |c_\alpha|$ . Pro každé  $x \in \mathbb{R}^d$  a  $j \in [d]$  máme  $|x_j| \leq \|x\| \leq 1 + \|x\|^2$  (neboť  $\|x\| \leq 1$  nebo  $\|x\| \leq \|x\|^2$ ). Tedy

$$P(x) \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| < k} |c_\alpha| \cdot |x_1|^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot |x_d|^{\alpha_d} \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| < k} |c_\alpha| (1 + \|x\|^2)^{|\alpha|} \leq C(1 + \|x\|^2)^k.$$

└

□

**Lemma 11.13**

Necht  $d \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $N > \frac{d}{2p}$  a  $h(x) = \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^N}$  pro  $x \in \mathbb{R}^d$ . Pak  $h \in L_p(\mu_d)$ .

┌

Důkaz (Na přednášce pouze náznak)

Podle věty o substituci použité na sférické souřadnice a dále podle Fubiniovy věty (integrujeme spojitou nezápornou funkci) platí

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^N} \right)^p d\mu_d &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^{pN}} d\lambda_d = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^{d-1}}{(1 + r^2)^{pN}} \sin^{d-2} \varphi_1 \sin^{d-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{d-2} d\varphi_{d-2} \dots d\varphi_1 dr = \\ &= C_d \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{(1 + r^2)^{pN}} dr, \end{aligned}$$

kde konstanta  $C_d > 0$  závisí jen na dimenzi  $d$ . Poslední integrál ovšem konverguje, neboť  $2pN - d + 1 > 1$ . □

└

**Tvrzení 11.14**

Schwartzův prostor má následující vlastnosti:

1.  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{1 \leq p < \infty} L_p(\mu_d)$ .
2. Je-li  $f \in \mathcal{S}_d$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $b \in \mathbb{R}^d$  a  $h(x) = f(ax + b)$ , pak  $h \in \mathcal{S}_d$ .

3. Je-li  $f \in \mathcal{S}_d$  a  $\alpha$  multiindex délky  $d$ , pak  $D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$ .
4. Je-li  $f \in \mathcal{S}_d$  a jestliže  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  je omezená a má omezené všechny parciální derivace všech řádů (speciálně, je-li  $g \in \mathcal{S}_d$ ), pak  $fg \in \mathcal{S}_d$ .
5. Je-li  $f \in \mathcal{S}_d$  a  $P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  polynom, pak  $Pf \in \mathcal{S}_d$ .

┌ Důkaz (Pouze 1.)

Vztahy  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d)$  již známe. Necht  $1 \leq p < \infty$ . Podle předchozího lemmatu existuje  $N \in \mathbb{N}$  takové, že funkce  $x \mapsto \frac{1}{(1+||x||^2)^N}$  leží v  $L_p(\mu_d)$ . Je-li nyní  $f \in \mathcal{S}_d$ , pak existuje  $C > 0$  takové, že  $|f(x)|^p \leq \frac{C^p}{(1+||x||^2)^{pN}}$  pro každé  $x \in \mathbb{R}^d$ , takže podle srovnávacího kritéria  $f \in L_p(\mu_d)$ . □

└

### Tvrzení 11.15

Necht  $f \in \mathcal{S}_d$  a  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ . Pak  $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \hat{f}(t)$  pro každé  $t \in \mathbb{R}^d$  a  $D^\alpha \hat{f} = \widehat{m_\alpha f}$ , kde  $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$ .

┌ Důkaz

První vzorec plyne snadno indukcí dle  $|\alpha|$  z věty o vlastnostech FT, přičemž v indukčním kroku jsou předpoklady splněny, neboť  $D^\beta f \in \mathcal{S}_d \subset L_1(\mu_d)$  pro každé  $\beta \in \mathbb{N}_0^d$  dle vlastností Schwartzova prostoru.

Druhý vzorec plyne snadno indukcí dle  $|\alpha|$  z věty o vlastnostech FT, přičemž v indukčním kroku jsou předpoklady splněny, neboť  $m_\alpha f \in \mathcal{S}_d \subset L_1(\mu_d)$  dle vlastností Schwartzova prostoru. □

└

### Definice 11.10

Pro  $N \in \mathbb{N}$  a  $f \in \mathcal{S}_d$  položme

$$\nu_N(f) = \max_{|\alpha| \leq N} \left\| x \mapsto (1 + ||x||^2)^N \cdot D^\alpha f(x) \right\|_\infty.$$

Definujeme dále funkci  $\sigma : \mathcal{S}_d \times \mathcal{S}_d \rightarrow [0, \infty)$  předpisem

$$\sigma(f, g) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \min \{ \nu_N(f - g), 1 \}, \quad f, g \in \mathcal{S}_d.$$

### Věta 11.16

$(\mathcal{S}_d, \sigma)$  je úplný metrický prostor splňující následující vlastnosti:

1. Je-li  $(f_n)$  posloupnost v  $\mathcal{S}_d$  a  $f \in \mathcal{S}_d$ , pak  $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ , právě když pro každé  $N \in \mathbb{N}_0$  a  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$  platí, že

$$(1 + ||x||^2)^N \cdot D^\alpha f_n(x) \rightarrow (1 + ||x||^2)^N \cdot D^\alpha f(x) \text{ stejnoměrně na } \mathbb{R}^d.$$

2. Jestliže  $f_n \rightarrow f$  v prostoru  $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ , pak  $f_n \rightarrow f$  v  $L_p(\mu_d)$  pro každé  $1 \leq p < \infty$ .

3. Je-li  $\alpha$  multiindex délky  $d$ ,  $P$  polynom na  $\mathbb{R}^d$  a  $g \in \mathcal{S}_d$ , pak zobrazení  $f \mapsto D^\alpha f$ ,  $f \mapsto Pf$ ,  $f \mapsto gf$  jsou spojitá jakožto zobrazení z  $(\mathcal{S}_d, \sigma)$  do  $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ .

┌ Důkaz

└ Vynechán. □

*Důsledek*

Pro  $f, g \in \mathcal{S}_d$  platí  $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$ . Speciálně, prostor  $\mathcal{S}_d$  je uzavřený na konvoluci.

┌ Důkaz

└ Vynechán. □

### Věta 11.17

Existuje právě jedna lineární izometrie  $F : L_2(\mu_d) \rightarrow L_2(\mu_d)$  na taková, že  $F(f) = \hat{f}$  pro každou  $f \in L_2(\mu_d) \cap L_1(\mu_d)$ .

┌ Důkaz

└ Vynechán. □