

1 Úvod

Definice 1.1 (Matice)

Reálná matice typu $m \times n$ je obdélníkové schéma (tabulka) reálných čísel. Prvek na pozici (i, j) matice A značíme a_{ij} nebo A_{ij} . A i -tý řádek matice A značíme A_{i*} a j -tý řádek matice A značíme A_{*j} .

Definice 1.2 (Vektor)

Reálný n -rozměrný aritmetický sloupcový vektor (standardní) je matice typu $n \times 1$ a řádkový $1 \times n$.

Definice 1.3 (Soustava lineárních rovnic)

Lineární = neznámé jsou v 1. mocnině.

Soustava = více rovnic.

Rovnice výraz z neznámých (bez absolutního členu) a koeficientů rovný konstantě.

Definice 1.4 (Řešení)

Řešením rozumíme každý vektor hodnot neznámých vyhovující všem rovnicím.

Definice 1.5 (Matice soustavy)

Matice soustavy je matice koeficientů u neznámých.

Rozšířená matice soustavy je matice soustavy „následována“ vektorem hodnot konstant jednotlivých rovnic.

Poznámka (Geometrický význam)

Průsečík n „přímek“ v n rozměrném prostoru

Definice 1.6 (Elementární řádkové úpravy)

- Vynásobení řádku nenulovým reálným číslem.
- Přičtení jednoho řádku k druhému.
- Výměna dvou řádků. (Není elementární, protože jde vytvořit pomocí prvních dvou.)

Tvrzení 1.1

Elementární řádkové operace zachovávají množinu řešení soustavy.

┌

Důkaz

Elementární úpravou neztratíme žádné řešení, protože pokud je x řešením před úpravou, je i po úpravě. A naopak ho lze invertovat, takže žádné řešení ani nepřibude. \square

└

Definice 1.7 (Odstupňovaný tvar matice REF)

Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je v řádkově odstupňovaném tvaru, pokud existuje r takové, že platí: řádky $1, \dots, r$ (tzv. bazické) jsou nenulové (obsahují alespoň 1 nenulový prvek), řádky $r + 1, \dots, m$ jsou nulové, a navíc označíme-li jako $p_i = \min j; a_{ij} \neq 0$ (tzv. pivot) pozici prvního nenulového prvku v i -tém řádku, tak platí: $p_1 < p_2 < \dots < p_r$.

┌

Například

Matice, které jsou, a matice, které nejsou.

└

Definice 1.8 (Hodnota matice)

Počet nenulových řádků po převodu do odstupňovaného tvaru (nebo libovolného s maximálním počtem nulových řádků) značený $\text{rank}(A)$.

Dále jsme dělali Gaussovu eliminaci (nemá řešení ($\text{rank}(A) \neq \text{rank}(A|b)$), má 1 řešení ($\text{rank}(A|b) = n$), má mnoho řešení (pak bazické proměnné vyjádřím pomocí nebazických)).

Definice 1.9 (Redukovaný odstupňovaný tvar matice RREF)

Matice v odstupňovaném tvaru je v redukovaném OT, jestliže $\forall 0 \leq i \leq r, i \in \mathbb{N} : a_{ip_i} = 1 \wedge \forall i > x \in \mathbb{R} a_{xp_i} = 0$.

Poznámka

Tento tvar je jednoznačný.

Definice 1.10 (Rovnost matic)

Dvě matice se rovnají, pokud mají stejné rozměry a stejné prvky na stejných souřadnicích.

Definice 1.11 (Součet matic)

Pro součet musí mít matice stejné rozměry a poté sčítáme po složkách.

┌

Poznámka (Vlastnosti)

Komutativita (pokud jsou prvky matice komutativní).

└

Definice 1.12 (Násobení skalárem)

Násobíme po složkách.

Definice 1.13 (Součin matic)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n \times o}$ jsou matice. Potom matice $C \in \mathbb{R}^{m \times o}$ definovaná jako $c_{ij} = a_{i*} \cdot b_{*j}$ je jejich součinem.

┌

Poznámka (Vlastnosti)

Komutativita neplatí.

Asociativita, distributivita zleva a distributivita zprava platí. Stejně tak „asociativita“ násobení skalárem.

Definice 1.14 (Transpozice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Potom $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ definována jako $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ je transponovaná matice A .

Poznámka (Vlastnosti)

Je sama sobě inverzním zobrazením. Distributivita pro všechny operace (pozor u násobení je antisymetrická).

$$\begin{aligned}(A^T)^T &= A \\ (A + B)^T &= A^T + B^T \\ (\alpha A)^T &= \alpha A^T \\ (AB)^T &= B^T A^T\end{aligned}$$

Definice 1.15 (Symetrická a antisymetrická matice)

Matice A je symetrická, pokud $A = A^T$, a antisymetrická $A = -A^T$.

Poznámka (Vlastnosti)

Symetrické matice jsou uzavřené na součet, ale na součin ne.

Definice 1.16 (Jednotkový vektor)

e_j definovaný jako $(e_j)_j = 1$ a $\forall i \neq j (e_j)_i = 0$ je j -tý jednotkový vektor.

┌
Poznámka (Vlastnosti)

$$Ae_i = A_{*i}$$

$$e_i^T = A_{i*}$$

└

Definice 1.17 (Skalární součin vektorů)

$u \cdot v = u^T v$ je skalární součin vektorů u a v .

uv^T je ? součin vektorů u a v

Poznámka (Zápis SLR jako maticové násobení)

SLR lze zapsat jako $Ax = b$.

Poznámka (Matice a lineární zobrazení $x \rightarrow Ax$)

Je užitečné se na matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jako na určité zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m definované předpisem $x \rightarrow Ax$.

Na řešení SLR se lze pak dívat jako na vzor b v zobrazení dané A .

Zároveň na maticový součin se lze dívat na skládání $(BA)x = B(Ax)$. (Základní motivace, aby se součin definoval tak, jak je.)

TODO?

Definice 1.18 (Regulární matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. A je regulární,
2. $\text{RREF}(A) = \mathcal{I}_n$,
3. $\text{rank}(A) = n$
4. pro nějaké $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ jediné řešení,
5. pro všechna $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ jediné řešení.

Matice A nesplňující tvrzení je singulární.

Tvrzení 1.2 (Uzavřenost na součin)

Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární matice. Pak AB je také regulární.

┌
Důkaz

Buď x řešení soustavy $ABx = 0$. Chceme ukázat, že x musí být nulový vektor. Z předchozího tvrzení $\forall y Ay = 0$ má jediné řešení. Zároveň $\forall y Bx = y$ má jediné řešení. \square
└

Tvrzení 1.3

Je-li alespoň jedna z matic $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pak AB je také singulární.

┌
Důkaz

Je-li matice B singulární, pak $Bx = 0$ pro nějaké $x \neq 0$. Z toho ale plyne $(AB)x = A(Bx) = A(0) = 0$, tedy i AB je singulární.

Nyní předpokládejme, že matice B je regulární, tedy matice A singulární a existuje $y \neq 0$ takové, že $Ay = 0$. Z regularity matice B existuje $x \neq 0$ takové, že $Bx = y$. Celkem dostáváme $(AB)x = A(Bx) = Ay = 0$, tedy AB je singulární. \square
└

Definice 1.19 (Matice elementárních úprav)

Elementární úpravy jdou reprezentovat násobením tzv. elementární maticí zleva: $E_i(\alpha)$ jako násobení řádku i číslem α je jednotková matice s α místo i -té jedničky. E_{ij} jako prohození řádků i, j je jednotková matice s prohozeným i -tým a j -tým řádkem, ...

Tyto matice jsou regulární.

Věta 1.4

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak $\text{RREF}(A) = QA$ pro nějakou regulární matici $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

┌
Důkaz

$\text{RREF}(A)$ získáme aplikací konečně mnoha elementárních řádkových úprav a součin regulárních matic je regulární matice. \square
└

Tvrzení 1.5

Každá regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dá vyjádřit jako součin konečně mnoha elementárních matic.

┌
Důkaz

Elementární úpravy lze invertovat elementárními úpravami, tedy i inverze úprav regulární matice na \mathcal{I} je regulární (a \mathcal{I} je také regulární). \square
└

Definice 1.20 (Inverzní matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak A^{-1} je inverzní maticí k A , pokud splňuje $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathcal{I}_n$.

┌ *Například*

$\mathcal{I}_n^{-1} = \mathcal{I}_n$, 0_n^{-1} neexistuje.

Věta 1.6 (O existenci inverzní matice)

Bud' $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Je-li A regulární, pak k ní existuje inverzní matice a je určena jednoznačně. Naopak, existuje-li A^{-1} , pak A je regulární.

┌ *Důkaz*

Existence: A je regulární, tedy soustava $Ax = e_j$ má řešení x_j pro každé j . Ukážeme, že $A^{-1} = (x_1 | x_2 | \dots | x_n)$ je hledaná inverze. (Porovnáním po sloupcích: $(AA^{-1})_{*j} = Ax_j = e_j = \mathcal{I}_{*j}$. Komutativní výraz dokážeme $A(A^{-1}A - \mathcal{I}) = AA^{-1}A - A = \mathcal{I}A - A = 0$, $A^{-1}A - \mathcal{I}$ je vektor, který je jednoznačně určen tím, že A je regulární.)

Jednoznačnost. Nechť pro nějakou matici B platí $AB = BA = \mathcal{I}$. Pak

$$B = B\mathcal{I} = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = \mathcal{I}A^{-1} = A^{-1}.$$

Naopak. Nechť pro A existuje inverzní matice. Bud' x řešení soustavy $Ax = 0$. Pak

$$x = \mathcal{I}x = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 = 0,$$

┌ tedy A je regulární. □

Tvrzení 1.7 (Vlastnosti inverzní matice)

Je-li A regulární, pak A^T je regulární.

┌ *Důkaz*

Je-li A regulární, pak existuje inverze a platí $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathcal{I}_n$. Po transponování všech stran dostaneme

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = \mathcal{I}_n^T,$$

neboli

$$(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = \mathcal{I}_n.$$

Matice A^T má inverzi a je tudíž regulární. (Navíc $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, občas se značí A^{-T}).

Věta 1.8 (Jedna rovnost stačí)

Bud' $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Je-li $BA = I_n$, pak obě matice A, B jsou regulární a navzájem k sobě inverzní, to jest $B = A^{-1}$ a $A = B^{-1}$.

┌ *Důkaz*

Regularita vyplývá z dřívějšího tvrzení vzhledem k regularitě \mathcal{I}_n . Tudíž existují inverze A^{-1} , B^{-1} . Odvodíme

$$B = B\mathcal{I}_n = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = \mathcal{I}_n A^{-1} = A^{-1}.$$

└ Úplně stejně druhá rovnost. □

Poznámka (Výpočet inverzní matice)

Důkaz věty ukázal návod: j -tý sloupec A^{-1} je řešením soustavy $Ax = e_j$.

Věta 1.9 (Výpočet inverzní matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Je-li $\text{RREF}(A|\mathcal{I}_n) = (\mathcal{I}_n|B)$, pak $B = A^{-1}$, jinak je A singulární.

┌ *Důkaz*

Je-li $\text{RREF}(A|\mathcal{I}_n) = (\mathcal{I}_n|B)$, potom existuje regulární Q tak, že $(\mathcal{I}_n|B) = Q(A|\mathcal{I}_n)$. Po roztržení na dvě části $\mathcal{I}_n = QA$ tj. $Q = A^{-1}$ a $B = Q\mathcal{I}_n = Q = A^{-1}$.

└ Pokud není toho tvaru, pak z definice A není regulární. □

Tvrzení 1.10 (Vlastnosti inverzní matice)

Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární. Pak:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
3. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1} \quad \dots \quad (\alpha \neq 0)$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

┌ *Důkaz*

└ 1., 2. triviální, 3. vynásobím $A\alpha$, 4. přezávorkuji. □

┌ *Poznámka*

└ Pro $(A+B)^{-1}$ žádný jednoduchý vzoreček není.

Poznámka (Inverzní matice a soustava rovnic)

Buď Q regulární. Pak soustava $Ax = b$ je ekvivalentní s $(QA)x = (Qb)$.

Důkaz

Žádné řešení neztratíme, zpět se dostaneme přednásobením Q^{-1} zleva. □

Věta 1.11 (Soustava rovnic a inverzní matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární. Pak řešení soustavy $Ax = b$ je dáno vzorcem $A^{-1}b = x$.

Poznámka (Inverzní matice - geometrie)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární matice. Pro každé $y \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jedno $x \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Ax = y$, zobrazení je tedy bijekcí.

Poznámka

Skládání zobrazení nám může dát i vzhled do toho, jak funguje inverze součinu matic.

2 Grupy

Abstraktní algebraické struktury k popisu symetrií.

Definice 2.1 (Grupa)

Grupa je dvojicí (G, \circ) , kde G je množina a $\circ : G^2 \rightarrow G$ je binární operace na množině splňující

$$\forall a, b, c \in G : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c, \text{ (asociativita)}$$

$$\exists e \in G \forall a \in G : e \circ a = a \circ e = a, \text{ neutrální prvek}$$

$$\forall a \in G \exists b \in G : a \circ b = b \circ a = e. \text{ (inverzní prvek)}$$

Definice 2.2 (Abelova grupa)

Abelova grupa je grupa, která splňuje

$$\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a. \text{ (komutativita)}$$

Poznámka

Je-li operací sčítání, pak neutrální prvek značíme 0 a opačný $-a$.

Je-li operací sčítání, pak neutrální prvek značíme 1 a opačný $\frac{1}{a}$.

Například

Abelovy grupy: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, grupa matic $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$, $(\mathbb{R}^{m \times n} \setminus \{0\}, \cdot)$

Ne nutně abelovy grupy: množina všech zobrazení na množině s operací skládání, množina regulárních matic řádu n s násobením, ...

Negrupy: $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, :)$, ...

Tvrzení 2.1 (Vlastnosti grup)

Prvky grupy (G, \circ) splňují následující vlastnosti

1. $a \circ c = b \circ c$ implikuje $a = b$ (krácení),
2. neutrální prvek je jednoznačně určen,
3. $\forall a \in G$ je jeho inverzní prvek určen jednoznačně,
4. rovnice $a \circ x = b$ má právě jedno řešení $\forall a, b \in G$,
5. $(a^{-1})^{-1} = a$,
6. $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

┌

Důkaz

1. $a \circ c = b \circ c \implies a \circ (c \circ c^{-1}) = b \circ (c \circ c^{-1}) \implies a \circ e = b \circ e \implies a = b$.
2. Necht e_1, e_2 jsou neutrální prvky $\implies e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2$.
3. Inverzní prvky a_1 a a_2 k a $\implies a_1 \circ a = e = a_2 \circ a \implies a_2 = a_1$.
4. Vynásobením rovnice prvkem a^{-1} zleva dává $x = a^{-1} \circ b$.
5. $e = e \implies (a^{-1})^{-1} \circ a^{-1} = a \circ a^{-1}$.
6. $e = e \implies (a \circ b)^{-1} \circ (a \circ b) = b^{-1} \circ b = b^{-1} \circ e \circ b = (b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b)$.

└

□

Definice 2.3 (Podgrupa)

Podgrupa grupy (G, \circ) je grupa (H, \circ_H) taková, že platí $H \subseteq G$ a pro všechna $a, b \in H$ platí $a \circ b = a \circ_H b$.

Neboli v H platí uzavřenost TODO.

2.1 permutace

Definice 2.4 (Vzájemně jednoznačné)

Zobrazení je vzájemně jednoznačné (bijekce), pokud je prosté a na.

Definice 2.5 (Permutace)

Permutace je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny na sebe samu.

Poznámka (Možné zápisy permutací)

Tabulkou (nahore vzory, dole obrazy), grafem (šipka vede ze vzoru do obrazu), rozložením na cykly (v závorce jsou ve skupinkách čísla, které se postupně zobrazují na sebe, prvky které se zobrazují sami na sebe, tak se nemusí psát)

Definice 2.6 (Identita, transpozice, inverzní permutace)

Permutace zobrazující každý prvek na sebe se nazývá identita (id).

Transpozice je permutace, která prohazuje dva prvky. (Permutace s jediným „nejednotkovým“ cyklem, který má 2 prvky).

Pro permutace p, q je složená permutace $p \circ q$ daná předpisem $(p \circ q)(i) = p(q(i))$.

Inverzní permutace (p^{-1}) k permutaci p je daná předpisem $p \circ p^{-1} = id$. (Např transpozice sama k sobě.)

Definice 2.7 (Znaménko permutace)

Pokud se permutace $p \in S_n$ skládá z k cyklů, pak znaménkem permutace je číslo $\text{sgn}(p) = (-1)^{n-k}$.

┌

Například

$\text{sgn}(id) = 1, \text{sgn}((i, j)) = -1, \text{sgn}((1, 3, 4)(2, 5)) = -1$

└

Věta 2.2 (O znaménku složení permutace s transpozicí)

Bud' $p \in S_n$ permutace a $t = (i, j) \in S_n$ transpozice. Pak

$$\text{sgn}(p) = -\text{sgn}(t \circ p) = -\text{sgn}(p \circ t)$$

┌

Důkaz

Stačí dokázat jednu rovnost, druhá je analogicky. Rozlišíme dva případy, pokud jsou i, j ve stejném cyklu, pak se transpozicí rozpadne, pokud jsou v jiném, tak se naopak spojí, tedy se v obou případech změní počet cyklů o 1 a znaménko tedy na $-$ původní. \square

└

Věta 2.3

Každou permutaci lze rozložit na složení transpozic.

Důkaz

Postupně na transpozice rozložíme všechny cykly. □

Důsledek

Platí $\text{sgn}(p) = (-1)^r$, kde r je počet transpozic v rozkladu permutace p .

Pro $p, q \in S_n$ platí $\text{sgn}(p \circ q) = \text{sgn}(p) \cdot \text{sgn}(q)$.

Pro $p \in S_n$ platí $\text{sgn}(p) = \text{sgn}(p^{-1})$.

Definice 2.8 (Symetrická grupa)

Množina permutací S_n tvoří s operací skládání \circ takzvanou symetrickou grupu (S_n, \circ) .

Poznámka

Symetrické grupy popisují symetrie různých objektů.

Každá grupa je isomorfní nějaké podgrupě symetrické grupy (např. rubikova grupa (popisující r. kostku) je isomorfní S_{48}).

2.2 Algebraická tělesa

Zobecnění číselných oborů jako např. \mathbb{R} .

Definice 2.9 (Těleso)

Těleso je množina \mathbb{T} spolu se dvěma komutativními binárními operacemi $+$ a \cdot splňujícími: $(\mathbb{T}, +)$ je Abelova grupa (neutrální prvek 0, inverzním k a je $-a$), $(\mathbb{T} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa (neutrální prvek 1, inverzním k a je a^{-1}), $\forall a, b, c \in \mathbb{T} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivita).

Poznámka

Operace nemusí představovat klasické sčítání a násobení.

Budeme psát ab místo $a \cdot b$.

Každé těleso má alespoň dva prvky, protože $0 \neq 1$

Zavedeme značení pro inverzní operace, jak je známe.

Například

Tělesa jsou \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_p (např. nejmenší možné těleso \mathbb{Z}_2), kvaterniony (pokud definujeme těleso jako ne nutně komutativní).

\mathbb{Z} ne.

Tvrzení 2.4 (Vlastnosti těles)

$0a = 0, ab = 0$ implikuje $a = 0$ nebo $b = 0$, $-a = (-1)a$.

┌

Důkaz

└ Jednoduchý, podobný vlastnostem grup.

□