Příklad (8.1)
V prostoru $\mathbf{V}$ reálných polynomů jedné proměnné x stupně nejvýše 3 (s běžnými operacemi) uvažujme podprostor $\mathbf{W}$ určený množinou

$$\mathbf{W} = \{f \in \mathbf{V} : f(-2) = 0\}\,.$$

Najděte nějakou bázi prostoru $\mathbf{W}$.

Řešení
Každý polynom proměnné x je dělitelný všemi $x - r$, kde r je kořen, tedy každý náš polynom $f(x)$ můžeme vyjádřit jako $(x + 2) \cdot g(x)$, kde $g(x) = \frac{f(x)}{x+2}$ je polynom stupně nejvýše 2 (pokud by měl větší stupeň, tak po vynásobení $(x + 2)$ dostaneme polynom stupně větší než 3). Prostor polynomů stupně nejvýše dva má bázi například $(1,\ x,\ x^2)$ (z definice polynomu), tedy každý polynom (a naopak žádné jiné) $f(x) = (x + 2) \cdot g(x)$ vyjádříme právě jedním způsobem jako lineární kombinaci prvků posloupnosti (tj. báze) $(1(x + 2),\ x(x + 2),\ x^2(x + 2)) = (x + 2,\ x^2 + 2x,\ x^3 + 2x^2)$.

Příklad (7.2)
Ve vektorovém prostoru $\mathbf{V} \leq \mathbb{Z}_5^{2\times 2}$ máme báze B a C. Určete bázi C, víte-li, že matice přechodu od báze B k bázi C je A a platí

$$B = (\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{V} = \mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení
Podle definice 5.78 ze skript je matice přechodu od báze B k bázi C definována jako $A = [id]_C^B = ([\mathbf{v}_1]_C|[\mathbf{v}_2]_C|[\mathbf{v}_3]_C)$. Tedy při značení $C = (\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3)$ získáváme:

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$$

$$\mathbf{v}_2 = 1\mathbf{u}_1 + 1\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$$

$$\mathbf{v}_3 = 0\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3$$

Z toho již vidíme, že $\mathbf{u}_3 = 2\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$ (sečtením dvojnásobku první, druhé, a dvojnásobku třetí) a $\mathbf{u}_2 = 1\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$ a $\mathbf{u}_1 = 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$, tj.

$$C = \left(\begin{pmatrix} 0\cdot 2 + 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 0\cdot 4 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 2 + 4\cdot 0 & 1\cdot 4 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 3\cdot 1 + 4\cdot 3 & 1\cdot 2 + 3\cdot 1 + 4\cdot 0 \end{pmatrix},$$

$$\left. \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 2\cdot 4 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 2\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$$