Příklad (1.)
The speedo of sound c is given by the formula $c^2 = \frac{\partial p_{th}}{\partial \varrho}(\varrho, \eta)$. Find explicit formula for the speed of sound in a calorically perfect ideal gas. Try to express the formula for the speed of sound using the temperature and the density.

Řešení
Z přednášky máme $p_{th} = \varrho^2 \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\eta, \varrho)$. Z pátého domácího úkolu máme

$$e(\eta, \varrho) = \frac{c_{V,ref} \cdot \theta_{ref}}{\varrho_{ref}^{\gamma-1}} \cdot \exp\left(\frac{\eta}{c_{V,ref}}\right) \cdot \varrho^{\gamma-1} =: C(\eta) \cdot \varrho^{\gamma-1}.$$

Tedy $c^2 = \frac{\partial p_{th}}{\partial \varrho}(\varrho, \eta) =$

$$= \frac{\partial \left(\varrho^2 \cdot \frac{\partial C(\eta) \cdot \varrho^{\gamma-1}}{\partial \varrho}\right)}{\partial \varrho} = \frac{\partial \left(\varrho^2 \cdot C(\eta) \cdot (\gamma-1)\varrho^{\gamma-2}\right)}{\partial \varrho} = (\gamma-1)\gamma \cdot C(\eta) \cdot \varrho^{\gamma-1} = (\gamma-1)\gamma \cdot e(\eta, \varrho).$$

Takže jsme vlastně vyjádřili c^2 jako funkci e (γ je konstanta), ale ze zadání pátého domácího úkolu také umíme e vyjádřit jako $e = e(\varrho, \theta) = c_{V,ref}\theta$. Tedy

$$c = \sqrt{(\gamma-1)\gamma \cdot e(\eta, \varrho)} = \sqrt{(\gamma-1)\gamma c_{v,ref}\theta}.$$

Příklad (2.)
Assume – wrongly – that the propagation of sound waves is an isothermal process. In this case the speed of sound would be given by the formula $c^2 = \frac{\partial p_{th}}{\partial \varrho}(\varrho, \theta)$. Use this – wrong – formula and find an explicit formula for the speed of sound in a calorically perfect ideal gas.

Řešení
Z přednášky víme, že pro $p_{th}(\varrho, \theta)$ platí $c^2 = \frac{\partial p_{th}}{\partial \varrho}(\varrho, \theta) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial (1/\varrho)^2} \cdot \frac{1}{\varrho^2}$. Ze sedmého domácího úkolu také víme, že

$$\psi(\theta, \varrho) = -c_{V,ref}\theta \left(\ln\left(\frac{\theta}{\theta_{ref}}\right) - 1\right) + c_{V,ref}\theta(\gamma-1)\ln\left(\frac{\varrho}{\varrho_{ref}}\right) =$$

$$=: C(\theta) + c_{V,ref}\theta(\gamma-1)\ln(\varrho) = \psi_\theta(\theta) + c_{V,ref}\theta(\gamma-1)\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{\varrho}}\right) = C(\theta) - c_{V,ref}\theta(\gamma-1)\ln(1/\varrho).$$

Tudíž

$$c^2 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial (1/\varrho)^2} \cdot \frac{1}{\varrho^2} = \frac{\partial^2 \left(C(\theta) - c_{V,ref}\theta(\gamma-1)\ln(1/\varrho)\right)}{\partial (1/\varrho)^2} \cdot \frac{1}{\varrho^2} = \frac{\partial \left(-c_{V,ref}\theta(\gamma-1)\frac{1}{1/\varrho}\right)}{\partial (1/\varrho)} \frac{1}{\varrho^2} =$$

$$= -\left(-c_{V,ref}\theta(\gamma-1)\frac{1}{(1/rho)^2}\right) \cdot \frac{1}{\varrho^2} = c_{V,ref}\theta(\gamma-1).$$

Tedy $c = \sqrt{c_{V,ref}\theta(\gamma-1)}$, což je skoro totéž, až na $\sqrt{\gamma}$, které je relativně blízko 1.