Organizační úvod

TODO!!!

Úvod

TODO!!!

Definice 0.1

Zúplnění míry λ_B^n nazveme Lebesgueovou mírou v $\mathbb{R}^n$.

Poznámka 1. Lebesgueova míra je σ-konečná.

2. Množinu $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n) := \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{N})$ nazýváme σ-algebrou lebesgueovsky měřitelných množin. Platí $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

3. Lebesgueova míra je regulární v následujícím smyslu:

$$\forall E \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \text{otevřená množina } G\, \exists \text{uzavřená množina } F : F \subset E \subset G \wedge \mu(G \setminus F) < \varepsilon.$$

Definice 0.2 (Značení)

Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \to Y$. Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak $f^{-1}(\mathcal{S}) := \{f^{-1}(S) | S \in \mathcal{S}\}$.

Věta 0.1 (O zobrazení $f : X \to Y$)

Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \to Y$.

1. *Je-li $\mathcal{M}$ σ-algebra na Y, pak $f^{-1}(\mathcal{M})$ je σ-algebra na X.*
2. *Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak $f^{-1}(\sigma(\mathcal{S})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{S}))$.*

Důkaz

Později. □

1 Měřitelná zobrazení

Definice 1.1 (Měřitelné zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{M})$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ nazveme měřitelným (vzhledem k $\mathcal{A}$ a $\mathcal{M}$), jestliže $f^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}$.

Jestliže některý z prostorů X, Y je metrický prostor, pak za příslušnou σ-algebru bereme σ-algebru borelovských podmnožin (pokud není řečeno jinak).

Měřitelné zobrazení mezi dvěma metrickými prostory se nazývá borelovsky měřitelné (krátce borelovské).

Poznámka

1. Snadno se ověří, e kompozice dvou měřitelných zobrazení je měřitelné zobrazení.
2. Z věty O zobrazení... plyne, že jsou-li $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{M})$ měřitelné prostory, pak zobrazení $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$, kde $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ je generátor σ-algebry $\mathcal{M}$. Speciálně je-li $(X, \mathcal{A})$ a Y metrický prostor, pak zobrazení $f : X \to Y$ je měřitelné $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ $\forall$otevřenou množinu $G \subset Y$.

Důsledek
Každé spojité zobrazení mezi dvěma metrickými prostory je měřitelné (borelovské).

Důkaz
Z věty O zobrazení... (vzory otevřených množin při spojitém zobrazení jsou otevřené množiny). $\square$

Věta 1.1 (Generátory $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$)

Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}^n$ je generována

1. *otevřenými intervaly $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, kde $-\infty < a_i < b_i < +\infty$,*
2. *systémem $\mathcal{S} := \{(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n)\}$, kde $a_i \in \mathbb{R}$.*

Věta 1.2 (O měřitelných zobrazeních)

Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor.

1. *Jsou-li $f : X \to \mathbb{R}^n$ a $g : X \to \mathbb{R}^n$ měřitelná zobrazení, pak zobrazení $(f, g) : X \to \mathbb{R}^{n+m}$ je měřitelné.*
2. *Jsou-li $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ měřitelná zobrazení, pak zobrazení $f \pm g$ jsou měřitelná zobrazení.*
3. *Jsou-li $f, g : X \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, pak také $f \cdot g, \max(f, g), \min(f, g)$ jsou měřitelné.*

Poznámka
Prostor $\mathbb{R}^*$ je metrický prostor s metrikou např. ϱ^* danou předpisem $\varrho^*(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$, kde $\varphi(x) := \frac{x}{1+|x|}$ pro konečné x a $\varphi(\pm\infty) = \pm 1$ (tzv. redukovaná metrika).

Redukovaná metrika má následující vlastnosti (viz Jarník – Diferenciální počet 2, str. 245, 246):

1. V množině $\mathbb{R}$ je ekvivalentní s eukleidovskou metrikou.
2. Konvergence v prostoru $(\mathbb{R}^*, \varrho^*)$ splývá s konvergencí zavedenou v $\mathbb{R}^*$ pomocí okolí bodů.

Platí $\mathcal{B}^* := \mathcal{B}(\mathbb{R}^*) = \sigma\left(\{\langle -\infty, a) \,|a \in \mathbb{R}\}\right)$. Plyne z:

1. $\forall$ otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^*$ lze psát jako spočetné sjednocení intervalů typu $\langle -\infty, a)\,, (a,b), (b,\infty\rangle$.
2. $\langle -\infty, a)$ je stejný jako v $\mathbb{R}^*$.
3. $(a, +\infty\rangle$ je $\mathbb{R}^* \setminus \langle -\infty, a)$.
4. $(a, +\infty\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\langle a + \frac{1}{n}, +\infty \right\rangle$.
5. $(a,b) = \langle -\infty, b) \cap (a, +\infty\rangle$.

Věta 1.3 (O měřitelných funkcích)

Buď $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. Pak platí

1. *$f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce právě tehdy, když $f^{-1}\left((-\infty, a)\right) \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$.*
2. *$f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná funkce právě tehdy, když $f^{-1}\left(\langle -\infty, a)\right) \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$.*

Důsledek
Nechť $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ jsou měřitelné funkce. Pak

1. množiny $\{x \in X | f(x) < g(x)\}\,, \{f \leq g\}\,, \{f = g\}$ jsou měřitelné.
2. funkce $\max(f,g), \min(f,g)$ jsou měřitelné funkce.

Věta 1.4 (O měřitelných funkcích podruhé)

Jsou-li funkce $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ množiny $(X, \mathcal{A})$ do $\mathbb{R}^*$ měřitelné funkce, pak funkce $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \limsup_{n\in\mathbb{N}} f$ jsou měřitelné.

Definice 1.2 (Jednoduchá funkce)

Funkce $S: X \to [0, +\infty)$ se nazývá jednoduchá, jestliže množina $S(X)$ je konečná.

Platí, že $s(x) = \sum_{\alpha \in S(X)} \alpha \cdot \chi_{S=\alpha}$. Součet na pravé straně této rovnosti nazveme kanonickým vyjádřením jednoduché funkce.

2 Abstraktní Lebesgueův integrál

Věta 2.1 (O nezáporné měřitelné funkci)

Nechť $f : (X, \mathcal{A}) \to \langle 0, +\infty \rangle$ je měřitelná funkce. Pak existuje posloupnost jednoduchých (nezáporných) měřitelných funkcí $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tak, že $s_n \nearrow f$ (konverguje nahoru).

Jestliže navíc f je omezená, pak $s_n \rightrightarrows f$.

Definice 2.1

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou.

1. Je-li $s : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty)$ jednoduchá měřitelná funkce, zapíšeme ji v kanonickém tvaru $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}$ a definujeme
$$\int_X s d\mu = \int_X s(x) d\mu(x) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j).$$
2. Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ měřitelná funkce, pak definujeme
$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu | 0 \le s \le f \wedge s \text{ je jednoduchá} \right\}.$$
3. Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}*$, pak definujeme
$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu, \text{ má li pravá strana smysl.}$$

Poznámka
Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f, g jsou nezáporné měřitelné funkce na X splňující $0 \le f < g$ na X, pak $0 \le \int_X f d\mu \le \int_X g d\mu$.

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $E \in \mathcal{A}$, pak $\mathcal{A}_E := \{A \cap E, A \in \mathcal{A}\}$ je σ-algebra na E a $(E, \mathcal{A}_E, \mu)$ je prostor s mírou ($\implies \int_E f d\mu$ je definován).

Je-li f měřitelná funkce na X a $E \in \mathcal{A}$, pak $\int_X (f\chi_E) d\mu = \int_E f d\mu$.

Věta 2.2 (Leviho)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou nezáporné měřitelné funkce na X splňující $f_n \nearrow f$, pak $\int_X f_n d\mu \nearrow \int_X f d\mu$.

Důkaz

Později. $\square$

Věta 2.3 (Fatouovo lemma)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou nezáporné měřitelné funkce, pak

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Důkaz

Později. $\square$

Definice 2.2 (Skoro všude)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $E \in \mathcal{A}$, $x \in X$. Nechť $V(x)$ je nějaká vlastnost, kterou bod x může, ale nemusí mít. Řekneme, že $V(x)$ platí μ-skoro všude na E, jestliže

$$\exists N \in \mathcal{A}, N \subset E, \mu(N) = 0 : V(x) \text{ platí } \forall x \in E \setminus N.$$

Je-li $E = X$, pak místo μ-skoro všude na E, píšeme pouze μ-skoro všude. Nehrozí li nedorozumění, o jakou míru se jedná, pak místo μ-skoro všude píšeme skoro všude.

Lemma 2.4

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f, g měřitelné funkce na X takové, že $f = g$ skoro všude, pak $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$, jakmile má jedna strana rovnosti smysl.

Definice 2.3 (Měřitelná funkce (skoro všude))

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $D \in \mathcal{A}$, $\mu(D^c) = 0$ a $f : D \to \mathbb{R}^*$. Řekneme, že f je měřitelná, jestliže $\forall$ otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$ platí $f^{-1}(G) \cap D \in \mathcal{A}$.

Pro měřitelnou funkci f pak definujeme $\int_X f d\mu := \int_X \tilde{f} d\mu$, kde $\tilde{f} = \begin{cases} f \text{ na } D, \\ 0 \text{ na } D^c. \end{cases}$

Definice 2.4 (Prostory $\mathcal{L}$)

Označíme $\mathcal{L}^*(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{R}^* | f \text{ je měřitelná na } X \wedge \exists \int_X f d\mu \right\}$.

Dále $\mathcal{L}^1(\mu) := \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu) | \ \int_X |f| d\mu \in \mathbb{R} \right\}$.

Věta 2.5 (Linearita integrálů)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou,* $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ *a* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Pak*

$$\int_X (\lambda f) d\mu = \lambda \int_X f d\mu,$$

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu, \text{ pokud má pravá strana smysl.}$$

Důkaz

Později. □

Poznámka

Má-li pravá strana druhého bodu smysl, pak nemůže nastat případ, kdy by jedna funkcí f, g je rovna $+\infty$ a druhá $-\infty$ na množině kladné míry. Odtud plyne, že součet $f+g$ je definován skoro všude.

Důsledek

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, nezáporné měřitelné funkce. Pak

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Důkaz

Z minulé věty pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí $\int_X \left(\sum_{n=1}^{k} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{k} \int_X f_n d\mu$. Použitím limitního přechodu pro $k \to \infty$ a Leviho věty dostaneme příslušnou rovnost. □

Věta 2.6 (Zobecněná Leviho)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou a* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *měřitelné funkce na* X *splňující* $f_n \nearrow f$ *a* $\int_X f_1 > -\infty$. *Pak*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Důkaz

$g_n = f_n - f_1 \geq 0$. Z Leviho věty pak snadno plyne tato. □

Důsledek

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f_n, n \in \mathbb{N}$, měřitelné funkce splňující $f_n \searrow f$ a $\int_X f_1 < +\infty$. Pak též můžeme prohodit limitu a integrál.

Důkaz
Aplikace předchozí věty na $-f_n$. $\square$

Věta 2.7 (Lebesgue)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce takové, že $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ na X, a existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu) : |f_n| \leq g$ skoro všude $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak

$$lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Důkaz
Později. $\square$

Důsledek
Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce na X takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje skoro všude. Jestliže existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že $|\sum_{n=1}^{k} f_n| \leq g$ skoro všude $\forall k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu.$$

Důkaz
Aplikace předchozí věty na posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. $\square$

Věta 2.8 (Další vlastnosti měřitelných funkcí a integrálu)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

- *Je-li f nezáporná měřitelná funkce na X a $\int_X f d\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.*
- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int_E f d\mu = 0$ $\forall E \in \mathcal{A}$, pak $f = 0$ skoro všude.*
- *Je-li f měřitelná, pak $\int_X f d\mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_X |f| d\mu$.*
- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$.*
- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak f je konečná skoro všude.*

Důkaz
Později. $\square$

2.1 Lebesqueův integrál v $\mathbb{R}$

Poznámka (Značení)
Restrikci míry λ^1 na interval $I \subset \mathbb{R}$ opět značíme λ^1.

Je-li $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$, pak

$$\int_a^b f d\lambda^1 := \int_{(a,b)} f d\lambda^1.$$

Věta 2.9 (Vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu)

Je-li $-\infty < a < b < +\infty$ a $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ taková, že $(R) \int_a^b f$ existuje, pak $\int_a^b f d\mu^1 \in \mathbb{R}$ a platí

$$\int_a^b f d\lambda^1 = (R) \int_a^b f.$$

Věta 2.10 (Vztah Newtonova a Lebesgueova integrálu)

Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $(N) \int_a^b$ *existuje.*
- $\int_a^b d\lambda^1 \in \mathbb{R}$.

Zároveň pokud je jedna (tj. obě) z těchto podmínek splněna, potom

$$\int_a^b f d\lambda^1 = (N) \int_a^b f.$$

TODO!!!

Definice 2.5

Systém $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ nazveme d-systém (nebo Dynkinův systém) na X, jestliže

- $\emptyset \in \mathcal{D}$,
- $D \in \mathcal{D} \implies D^c \in \mathcal{D}$,
- $D_n \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N}, D_n \cap D_m\ \forall n \neq m \implies \bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$.

Poznámka
Každá σ-algebra je d-systém.

D-systém je uzavřený na konečné sjednocení disjunktních množin (jelikož $\emptyset \in \mathcal{D}$).

Je-li $A, B \in \mathcal{D}, A \subset B$, pak $B \setminus A \in \mathcal{D}$, neboť $B \setminus A = X \setminus ((X \setminus B) \cup A)$.

Jsou-li μ a ν dvě míry na $(X, \mathcal{A})$, pak $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} | \mu(A) = \nu(A)\}$ je d-systém.

Věta 2.11 (O průniku d-systémů)

Nechť $\mathcal{D}_\alpha$, $\alpha \in I$, jsou d-systémy na X (I je libovolná množina indexů). Pak $\bigcap_{\alpha \in I}$ je d-systém.

Důkaz
Přenechán čtenáři. □

Důsledek
Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, pak existuje nejmenší d-systém $d\mathcal{S}$ obsahující systém $\mathcal{S}$.

Poznámka
Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, pak $d\mathcal{S} \subset \sigma\mathcal{S}$.

Definice 2.6

Systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ nazveme π-systém, jestliže systém $\mathcal{S}$ je uzavřen na konečné průniky množin z $\mathcal{S}$.

Věta 2.12 (O rovnosti $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$)

Je-li $S \subset \mathcal{P}(X)$ zároveň π-systémem, pak $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$.

Důkaz
Využijeme následující 2 tvrzení. $d\mathcal{S}$ je d-systém, tedy z druhého tvrzení $d\mathcal{S}$ je π-systém. Z prvního tvrzení pak $d\mathcal{S}$ je σ algebra, tedy $\sigma\mathcal{S} \subset d\mathcal{S}$. Opačná implikace plyne z poznámky výše, $d\mathcal{S} \subset \sigma\mathcal{S}$, tedy $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$. □

Tvrzení 2.13

Je-li d-systém $\mathcal{D}$ na X zároveň π-systémem, pak $\mathcal{D}$ je σ-algebra na X.

Důkaz
Ověříme body σ-algebry. □

Tvrzení 2.14

Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ π-systém, pak $d\mathcal{S}$ je π-systém.

Důkaz

Ověříme, že $\mathcal{D} : \{D \in d\mathcal{S} | D \cap S \in d\mathcal{S} \forall S \in \mathcal{S}\}$ je d-systém. Zřejmě $\mathcal{D} = d\mathcal{D}$. Nyní buď $D \in d\mathcal{S}$ pevné a definujeme $\mathcal{D}_D := \{E \in \mathcal{P}(X) | E \cap D \in d\mathcal{S}\}$. O tom dokážeme, že je to d-systém. Následně dokážeme $\mathbb{S} \subset \mathcal{D}_D$, tedy $D = \mathcal{D}_D$. Vítězství! $\square$

TODO?

Věta 2.15 (O jednoznačnosti míry)

Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je π-systém a μ, γ jsou dvě míry na $\sigma\mathcal{S}$ splňující $\mu(S) = \gamma(S)$, $\forall S \in \mathcal{S}$. Jestliže existují množiny $X_n \in \mathcal{S}$, $X_n \nearrow X$, $\mu(X_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pak $\mu = \gamma$ na $\sigma\mathcal{S}$.

Důkaz

Nejprve předpokládejme, že $\mu(X) < +\infty$. Pak definujme systém $\mathcal{D} := \{A \in \sigma\mathcal{S} | \mu(A) = \gamma(A)\}$. Platí $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$, tedy $d\mathcal{S} \subset d\mathcal{D} = \mathcal{D} \subset \sigma\mathcal{S}$, tedy $\mathcal{D} = \sigma\mathcal{S}$.

Je-li $\mu(X) = +\infty$, pak definujeme $\mathcal{D}_n := \{A \in \sigma\mathcal{S} | \ \mu(A \cap X_n) = \gamma(A \cap X_n)\}$, $n \in \mathbb{N}$. Platí $\mathcal{D}_n$ je d-systém $\forall n \in \mathbb{N}$ (ověř!). $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, neboť $S \in \mathcal{S} : \mu(S \cap X_n) = \gamma(S \cap X_n)$. $d\mathcal{S} \subset d\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n \subset \sigma\mathcal{S}$, tedy $\mathcal{D}_n = \sigma\mathcal{S}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nechť $A \in \sigma\mathcal{S}$. Pak $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap X_n) = \lim_{n\to\infty} \gamma(A \cap X_n) = \gamma(A)$. Tedy $\mu = \gamma$ na $\sigma\mathcal{S}$. $\square$

3 Součin měr a Fubiniova věta

Poznámka (Předpoklady pro další 2 přednášky)

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$, resp. $(Y, \mathcal{B}, \gamma)$, je prostor se σ konečnou mírou μ, resp. γ.

Definice 3.1 (Měřitelný obdélník, $\mathcal{O}$)

Množinu $A \times B \subset X \times Y$, kde $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, nazveme měřitelným obdélníkem.

Symbolem $\mathcal{O}$ označíme systém všech měřitelných obdélníků.

Definice 3.2 (Součinová σ-algebra)

Definujeme σ-algebru $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ předpisem $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma\mathcal{O}$.

$\forall E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ $\forall x \in X$ $\forall y \in Y$ definujeme řezy E_x, E^y množiny E takto:

$$E_x := \{y \in Y | [x, y] \in E\}, \qquad E^y := \{x \in X | [x, y] \in E\}.$$

Věta 3.1 (O součinové σ-algebře $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$)

Je-li $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, tak

1. $\forall x \in X : E_x \in \mathcal{B}$,
2. $\forall y \in Y : E^y \in \mathcal{A}$,
3. *funkce* $x \mapsto \gamma(E_x)$ *je měřitelná na* $(X, \mathbb{A})$,
4. *funkce* $y \mapsto \mu(E^y)$ *je měřitelná na* (Y, B).

Je-li funkce $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \mathbb{R}^*$ *měřitelná, pak*

1. $\forall x \in X$ *je funkce* $f_x : y \mapsto f(x,y)$ *je měřitelná na* $(Y, \mathcal{B})$,
2. $\forall y \in Y$ *je funkce* $f_y : x \mapsto f(x,y)$ *je měřitelná na* $(X, \mathcal{A})$.

Důkaz (Pouze lichá tvrzení, sudá jsou analogická)
Definujeme $\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} | E_x \in \mathcal{B}\}$. Ověříme, že $\mathcal{E}$ je σ-algebra.

TODO!!! $\square$

Věta 3.2 (Existence a jednoznačnost součinové míry)

Existuje právě jedna míra $\mu \otimes \nu$ (tzv. součinová míra) na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ splňující $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{B}$.

Pro tuto míru platí

$$E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies (\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) \qquad \left(= \int_Y \mu(E^y) d\nu(y) \right).$$

Důkaz
1. Existence: Je-li $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, pak definujeme $(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x)$. O té dokážeme, že je mírou a že splňuje předpis v definici.

2. Jednoznačnost: Nechť τ je míra na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, která splňuje $\tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{B}$, tedy $\tau = \mu \otimes \nu$ na $\mathcal{O}$ to je π-systém. Prostory $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ jsou prostory s σ-konečnými mírami. Tj.

$$\exists X_n \in \mathcal{A}\ \forall n in \mathbb{N}, X_n \nearrow X, \mu(X_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N} \wedge$$

$$\wedge \exists Y_n \in \mathcal{B}\ \forall n in \mathbb{N}, Y_n \nearrow Y, \nu(Y_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$TODO.$$

□

Poznámka
Jsou-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ prostory s úplnými σ-konečnými mírami, pak $\mu \otimes \nu$ nemusí být úplná.

Věta 3.3 (Fubiniova)

Pro $\forall f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$ platí

1. $x \mapsto \int_Y f(x,y) d\nu(y)$ *je měřitelná na* X,
2. $y \mapsto \int_X f(x,y) d\nu(x)$ *je měřitelná na* Y,
3. $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$.

Důkaz
1) $f = \chi_E$, $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$: $\nu(E_x) = \int_Y$ TODO!!!(Dokáže se nejprve pro charakteristickou funkci, pak pro jednoduché nezáporné, nakonec pro všechny.) □

Poznámka (Značení)
Místo $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_0$ značíme $\mathcal{A} \overset{0}{\otimes} \mathcal{B}$ (budu značit $\mathcal{A} \otimes_0 \mathcal{B}$). A místo $(\mu \otimes \nu)_0$ píšeme ...(já píšu $\mathcal{A} \otimes_0 \nu$).

Věta 3.4 (Fubiniova věta pro zúplnění součinové míry)

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ jsou prostory s úplnými σ-konečnými mírami. Je-li $f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes_0 \nu)$, pak

- *funkce* $x \mapsto f(x,y)$ *je měřitelná na* X *pro* μ*-skoro všechna* $y \in Y$,
- *funkce* $y \mapsto f(x,y)$ *je měřitelná na* Y *pro* μ*-skoro všechna* $x \in X$,

- *funkce* $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ *je měřitelná na* X,
- *funkce* $y \mapsto \int_X f(x,y)d\nu(x)$ *je měřitelná na* Y,
- $\int_{X\times Y} fd(\mu \otimes_0 \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y)$.

Důkaz
Z 2 následujících tvrzení a Fubiniovy věty se věta snadno dokáže. □

Tvrzení 3.5

Buď $(Z, \mathcal{C}, \varrho)$ *prostor s mírou a* $(Z, \mathcal{C}_0, \varrho_0)$ *jeho zúplnění. Je-li* $f : (Z, \mathcal{C}_0) \to \mathbb{R}^*$ ϱ_0 *měřitelná funkce, pak existuje* ϱ *měřitelná funkce* $g : (Z, \mathcal{C}) \to \mathbb{R}^*$ *tak, že* $f = g$ ϱ*-skoro všude na* Z.

Důkaz
Vynechán. □

Tvrzení 3.6

Nechť $(X < \mathcal{A}, \mu)$ *a* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *jsou prostory s úplnými* σ*-konečnými mírami. Nechť* $h : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes_0 \mathcal{B}) \to \mathbb{R}^*$ *je* $(\mu \otimes_0 \nu)$*-měřitelná funkce a* $h(x,y) = 0$ $\mu \otimes_0 \nu$*-skoro všude na* $X \times Y$. *Pak pro* μ*-skoro všechna* $x \in X$ *je* $h(x,y)$ *rovno 0 pro* ν*-skoro všechna* $y \in Y$.

(Tzn, že pro μ*-skoro všechna* $x \in X$ *je funkce* h_x *rovna 0* ν*-skoro všude na* Y*.)*

Speciálně, funkce h_x *je měřitelná na* X *pro* ν*-skoro všechna* $y \in Y$.

Důkaz
Vynechán. □

Definice 3.3

$\lambda^n = (\lambda^*_{\mathcal{B}})_0$

Věta 3.7 (O míře $\lambda^p \otimes \lambda^q$)

Nechť $p, q \in \mathbb{N}$. *Pak*

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$,
- $\lambda^{p+q} = \lambda^p \otimes \lambda^q$.

Důkaz
Neuveden. □

Věta 3.8 (Fubiniova věta pro λ^{p+q})

Nechť $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^{p+q})$, $p, q \in \mathbb{N}$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f d\lambda^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) d\lambda^q(y) \right) \lambda^p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) d\lambda^p(x) \right) \lambda^q(y).$$

Definice 3.4 (Značení)

$p, q \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$. Definujeme projekce

$$\pi_1(x,y) = x, \qquad \pi_2(x,y) = y.$$

Důsledek

Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{B}_0^{p+q} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q})_0$. Je-li $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^{p+q})$ a projekce $\pi_1 A, \pi_2 A$ jsou měřitelné, pak

$$\int_A f d\lambda^{p\ +q} \int_{\pi_1 A} \left(f(x,y) d\lambda^q(y) \right) \lambda^p(x) = \int_{\pi_2 A} \left(f(x,y) d\lambda^p(x) \right) \lambda^q(y).$$

Poznámka (Značení)

Místo $d\lambda^p(x)$ píšeme dx a místo $d\lambda^q(y)$ píšeme dy.

Lemma 3.9

Lebesgueova míra λ^n je translačně invariantní (tzn. $\lambda^n(B + r) = \lambda^n(B)$).

Důkaz

λ^n a $\mu(B) := \lambda^n(B + r)$, $\forall B \in \mathcal{B}_0^n$, $r \in \mathbb{R}^n$, jsou míry, které se shodují na systémech otevřených intervalů v $\mathbb{R}^n$. Ty spolu s prázdnou množinou tvoří π-systém, takže se míry shodují i na Borelovských množinách $\implies$ jsou shodné. $\square$

Věta 3.10 (O obrazu míry)

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $(Y, \mathcal{B})$ je měřitelný prostor. Buď $\varphi : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ měřitelné zobrazení. Pak množinová funkce $\varphi(\mu)$ daná předpisem

$$\varphi(\mu)(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)), \forall B \in \mathcal{B}$$

je míra na Y (nazýváme ji obraz míry μ při zobrazení φ) a platí (má-li alespoň jedna strana smysl):

$$\int_Y f d\varphi(\mu) = \int_X f(\varphi(x)) d\mu(x).$$

Důkaz
Ověří se, že je to míra (bod po bodu). Rovnost integrálů pak postupně ověříme na charakteristické funkce, pro jednoduché funkce, pro „jednoznaménkové“ (jako monotónní limity jednoduchých) a potom pro všechny (jako součty kladných a záporných funkcí).

Pro charakteristické funkce:

$$\int_X f(\varphi(x))d\mu(x) = \int)X\chi_B(phi(x))d\mu = \int_X \chi_{\varphi^{-1}(B)}(x) = d\mu(x) = \mu(\varphi^{-1}(B)) =$$

$$\varphi(\mu)(B) = \int_Y \chi_B d\varphi(\mu) = \int_Y f d\varphi(\mu).$$

□

Věta 3.11

Nechť $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je invertibilní lineární zobrazení.

1. *Je-li $\nu(A) := \lambda^n(L(A))$, $\forall A \in \mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, pak ν je míra a platí $\nu = |\det L|\lambda^n_{\mathcal{B}}$.*
2. *Je-li $\mu := |\det L|\lambda^n_{\mathcal{B}}$, pak $L\mu = \lambda^n_{\mathcal{B}}$ a $\forall f \in \mathcal{L}^*(\lambda^n_{\mathcal{B}})$ platí*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L)|\det L| d\lambda^n_{\mathcal{B}}.$$

Důkaz
1. L je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, a tedy L je spojité. L je invertibilní $\implies$ $\exists$inverzní zobrazení L^{-1}, které je opět lineární a spojité. Tedy L je měřitelné.

$$(L^{-1}\lambda^n)(A) = \lambda^n(L(A)) = \nu(A), \forall A \in \mathcal{B}^n$$

$\implies$ *nu* je míra dle předchozí věty.

Z lineární algebry je známo, že L lze vyjádřit jako kompozici konečně mnoha „elementárních“ lineárních zobrazení jednoho z následujících typů: $L_1(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, kde $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $L_2(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $j > i \in \mathbb{N}$, $L_3(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \ldots, x_n)$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $i, j \in \mathbb{N}$.

Protože determinant součinu matic se rovná součinu determinantů, stačí tvrzení ověřit pro „elementární“ zobrazení. Ověříme na intervalech, L_1 ho jen natáhne o α, tedy na determinant násobek, L_2 „otočí“ interval, ale λ^n se otočením nezmění, L_3 posune a zdeformuje interval, ale tím se λ^n nezmění (dokážeme přes Fubiniovu větu). Všechny 3 zobrazení stejně operují na prázdné množině, takže i na π systému $I \cup \{\emptyset\}$, tedy míry se rovnají všude.

2.

$$(L(\mu))(A) \stackrel{1.}{=} \mu(L^{-1}(A)) = |\det L|\lambda^n_{\mathcal{B}}(L^{-1}(A)) = |\det L|\cdot|\det L^{-1}|\lambda^n_{\mathcal{B}}(A) = \lambda^n_{\mathcal{B}}(A) \forall A \in \mathcal{B}^n,$$

tedy $L(\mu) = \lambda^n_{\mathcal{B}}$. Z předchozí věty pak plyne rovnost integrálů. □

Lemma 3.12

Buď $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zobrazení splňující Li. podmínku (tzn. $\exists C \in< 0, +\infty) : ||T(x) - T(y)|| \leq C||x - y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$). Je-li A λ^n-měřitelná, pak také $T(A)$ je λ^n-měřitelná množina.

Důkaz
Bez důkazu (není čas a důkaz je jednoduchý). □

Věta 3.13

Je-li L invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, pak

$$\int_{R^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L)|\det L| d\lambda^n,$$

má-li alespoň jedna strana smysl.

Tvrzení 3.14 (Opakování)

Je-li $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $T : G \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy C^1 na G, pak $Tx - Tx_0$, *kde $x_0 \in G$, lze lokálně aproximovat lineárním zobrazením, jehož matice je $(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x_0))_{i,j=1}^n$ a jehož determinant je $\operatorname{Jac}(T)(x_0)$.*

Lemma 3.15

$$\lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) = 0.$$

Důkaz
$\mathbb{R}^{n-1}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$, tedy je λ-měřitelná.

$$\mathbb{R}^{n-1} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,\varepsilon}, I_{k,\varepsilon} = (-k,k)^{n-1} \times \left(\frac{-\varepsilon}{(2k)^{n-1}}\frac{1}{2^k}, \frac{\varepsilon}{(2k)^{n-1}}\frac{1}{2^k}\right),$$

$$0 \le \lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(I_{k,\varepsilon}) = \sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n-1}\frac{2\varepsilon}{(2k)^{n-1}}\frac{1}{2^k} = 2\varepsilon \implies \lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) = 0.$$

□

Věta 3.16 (O substituci)

Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ difeomorfimsus. Je-li $f : \varphi(G) \to \mathbb{R}$ λ^n-měřitelná funkce, pak

$$\int_G f(\varphi(x))|\operatorname{Jac}\varphi(x)|dx = \int_{\varphi(G)} f(y)dy,$$

má li alespoň jedna strana smysl.

Důkaz
Bez důkazu. □

4 Důkazy

Důkaz (Věta 1.4?)
Označme $\tilde{\mathcal{A}}_0 = \{E \subset X \mid \exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset E \subset B, \mu(B \setminus A) = 0\}$. Ověříme, že $\tilde{\mathcal{A}}_0$ je σ-algebra.

TODO!!! □

Lemma 4.1

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a s jednoduchá nezáporná měřitelná funkce na X. Definujeme-li

$$\varphi(A) = \int_A s d\mu, \forall A \in \mathcal{A},$$

pak φ je míra na $\mathcal{A}$.

Důkaz
$s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot \chi_{E_j}$ kanonický tvar funkce s.

$$A \in \mathcal{A} \implies \varphi(A) = \int_A sd\mu = \int_X \chi_A \cdot sd\mu = \int_X \tilde{s}d\mu = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A \cap E_j), \forall A \in \mathcal{A}.$$

Následně ověříme body definice míry: $\varphi(\emptyset) = 0$.

$$A \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathbb{N}, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

$$\varphi(\bigcup_l A_l) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu((\bigcup_l A_l) \cap E_j) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_l \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_l \cup E_j) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \alpha_j \mu(A_i \cap E_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_l \mu(A_l \cap E_j) = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi(A_i).$$

□

Důkaz (Leviho věty)

$$f_n \le f_{n+1} \implies \int_X f_n d\mu \le \int_X f_{n+1} d\mu \implies \exists \alpha \in \langle 0, +\infty \rangle : \int_X f_n d\mu \to \alpha.$$

$$\int_X f_n d\mu \le \int_X f d\mu, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Obrácená nerovnost (pro s jednoduché měřitelné funkce):

$$\int_\lambda f d\mu = \sup_{0 \le s \le f} \int_X sd\mu.$$

$$\forall c : c \in (0,1) \implies f > cs.$$

$E_n = \{x \in X | f_n(x) \ge c \cdot s(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset X, X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n,$$

TODO. □

Lemma 4.2 (O míře s hustotou f)

Buď f nezáporná měřitelná funkce na $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a definujme $\nu(A) := \int_A f d\mu$, $\forall A \in \mathcal{A}$. Pak ν je míra na $\mathbb{A}$ a

$$\int_X g d\nu = \int_X g \cdot f d\mu.$$

Pro každou nezápornou měřitelnou funkci g na X.

Důkaz
Je jasné, že $\nu \geq 0$ a $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f d\mu = \int_X \chi_\emptyset f d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$.

Buď $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, $A_j \in \mathcal{A}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$.

$$\nu(A) = \nu(\bigcup_j A_j) = \int_{\bigcup_j A_j} f d\mu = \int_X \chi_{\bigcup_j A_j} f d\mu = \int_X (\sum_j \chi_{A_j}) f d\mu \overset{\text{Levi}}{=} \sum_j \int_X \chi_{A_j} f d\mu =$$

$$= \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j).$$

Rovnost ověříme postupně pro: $g = \chi_E$, $E \in \mathcal{A}$:

$$\int_X g d\nu = \int_X \chi_E d\nu = \int_E d\nu = \nu(E) = \int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu = \int_X g f d\mu.$$

Obdobně pokračujeme i pro další „typy“ funkcí. □

Definice 4.1 (Hustota míry)

Funkci f z předchozího lemmatu se říká hustota míry ν vzhledem k míře μ.

Definice 4.2 (Absolutně spojitá míra)

Nechť μ, ν jsou míry na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že míra ν je absolutně spojitá vzhledem k míře μ (značíme $\nu \ll \mu$), jestliže platí

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

Věta 4.3

TODO?

Věta 4.4 (Charakterizace faktu $\nu \ll \mu$ pro konečné míry)

Nechť ν, μ jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$. Pak $\nu \ll \mu$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \delta : \nu(A) < \varepsilon.$$

Důkaz
„ $\Longleftarrow$ “: Buď $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$. Pro $\varepsilon = \frac{1}{k}$ nám podmínka dává $\exists \delta_k > 0$, $\mu(A) < \delta_k \implies \nu(A) = \frac{1}{k}$, tedy $\nu(A) = 0$ (jelikož levá strana předchozí implikace je splněna vždy).

„ $\Longrightarrow$ “: Sporem. Nechť $\nu \ll \mu$ a předpokládejme, že podmínka neplatí, tj.

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \delta : \nu(A) \geq \varepsilon.$$

Volíme $\delta = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tedy $\exists A_n \in \mathcal{A}$, $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ a $\nu(A_n) \geq \varepsilon$. Nechť $B_k := \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n$, $k \in \mathbb{N}$. Tedy $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$. Z nějaké věty výše plyne $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k)$ a obdobně $\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \nu(B_k)$.

$\mu(B_k) \to 0$, $\nu(B_k) \to L \geq \varepsilon$. ↯ □

Lemma 4.5

Jestliže μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\forall A \in \mathcal{A} : \nu(A) \leq \mu(A)$. Pak existuje měřitelná funkce f splňující $0 \leq f \leq 1$ μ-skoro všude a platí

$$\forall A \in \mathcal{A} : \nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Důkaz
Definujeme funkcionál

$$Jg := \int_X g^2 d\mu - 2\int_X g d\nu, \qquad \forall g \in \mathcal{L}^2(\mu).$$

Definice J je korektní, protože konvergence v L^2 je silnější než konvergence v L^1 (nebo z Hölderovy nerovnosti), tedy oba integrály jsou pro $g \in L^2$ konečné. Dále definujeme $c := \inf_{g\in L^2(\mu)} Jg$.

$$Jg = \int_X g^2 d\mu - 2\int_X g d\nu \geq \int_X g^2 d\mu - 2\int_X |g| d\mu = \int_X (|g|-1)^2 d\mu - \mu(X) \geq -\mu(X) > -\infty, \forall g \in L^2(\mu).$$

Předpokládejme, že $\exists f\ c = Jf$. Buď $A \in \mathcal{A}$ pevná množina, definujeme $g(t) := J(f + t\chi_A)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Tedy g má minimum v bodě 0. Tudíž $g'(0) = 0$, pokud g' existuje. Ověříme výpočtem z definice existenci a dosadíme 0:

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{J(f + t\chi_A) - J(f)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[\int_X (f + t\chi_A)^2 d\mu - 2\int_X (f + t\chi_A) d\nu - \int_X f^2 \right.$$

$$\lim_{t\to 0} \left[\int_X 2f\chi_A d\mu + t\int_X \chi_A d\mu - 2\int_X \chi_A d\nu \right] = 2\left[\int_X f\chi_A d\mu - \int_X \chi_A d\nu \right] = 0$$

Tedy $\forall A \in \mathcal{A} : \nu(A) = \int_A f d\mu$.

$$0 \leq \int_{\{f>1\}} (f-1)^+ d\mu = \int_{\{f>1\}} (f-1) d\mu = \int_{\{f>1\}} d\mu - \int_{\{f>1\}} 1 d\mu = \nu(\{f > 1\}) - \mu(\{f > 1\}) \leq 0 \implies f$$

$$0 \leq \int_{\{f<0\}} f^- d\mu = -\int_{\{f<0\}} f d\mu = -nu(\{f < 0\}) \leq 0 \implies f \geq 0 \mu\text{-skoro všude}$$

$$J(g) + J(h) - J\left(\frac{g+h}{2}\right) = \int_X \frac{g^2 - 2gh + h^2}{2} d\mu = \frac{1}{2}\int_X (g-h)^2 d\mu = \frac{1}{2}||g-h||^2_{L^2(\mu)}.$$

$\exists \{f_n\} \subset L^2(\mu)$. $J(f_n) \to c$ pro $n \to \infty$. $g = f_n$, $h = f_m$:

$$J(f_n) + J(f_m) - 2J\left(\frac{f_n + f_m}{2}\right) = \frac{1}{2}||f_n - f_m||^2_{L^2(\mu)}, \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$\leq J(f_n) + J(f_n) - 2c \to 0 \implies \exists f \in L^2(\mu) : f_n \to f \in L^2(\mu).$$

$$\int_X |f_n - f| d\nu \leq \int_X |f_n - f| d\mu \leq \left(\int_X |f_n - f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (\mu(X))^{\frac{1}{2}} \to 0 \implies$$

$$\implies ||f_n - f||_{L^2(M)} \to 0 \implies J(f_n) \to J(f).$$

$\square$

Věta 4.6 (Radonova-Nikodymova věta)

Nechť μ, ν jsou σ-konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ splňující $\nu \ll \mu$. Pak existuje nezáporná měřitelná funkce f na X tak, že

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \forall A \in \mathcal{A}.$$

Této funkci se říká derivace míry ν vzhledem k mu, nebo také Radonova-Nikodymova hustota...

Důkaz

1. krok: Nejprve předpokládejme, že μ, ν jsou konečné míry. Platí $\nu \leq \mu + \nu$. (Z lemmatu někde výše $\exists h, 0 \leq h \leq 1$ $(\mu + \nu)$-skoro všude, že $\nu(A) = \int_A hd(\mu + \nu)$ $\forall A \in \mathcal{A}$, $= \int_A hd\mu + \int_A hd\nu = \int_X \xi_A hd\mu + \int_X \xi_A hd\nu$).

$\int_X \xi_A(1-h)d\nu = \int_X \xi_A hd\mu$. Z linearity $\int$ + $(h < 1, \text{skoro všude})$

$$\int_X g(1-h)d\nu = \int_X ghd\mu, \qquad \forall g \text{ jednoduchou, nezápornou, měřitelnou funkci na } X.$$

Volbou $g = \frac{1}{1-h}\xi_A$, $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \int \ldots = \int \xi_A d\mu$?

2. krok Nechť ν, μ jsou σ-konečné

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \mu(E_i) < \infty, E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq \ j,$$

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i, \nu(F_i), F_i \cap F_j = \emptyset, i \neq j,$$

$$D_{ij} = E_i \cap F_j, X = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} D_{ij}, \nu(D_{ij}) < +\infty, \mu(D_{ij}) < +\infty, \forall i, j \in \mathbb{N}$$

tedy jako v první části důkazu zvolíme f_{ij} měřitelné nezáporné na D_{ij}, aby $\nu|_{D_{ij}}(A) = \int_{D_{ij}} f_{ij} d\mu|_{D_{ij}}$. Nyní již $\forall x \in X \exists! i \in \mathbb{N}\ \exists! j \in \mathbb{N} : x \in D_{ij} \implies f(x) = f_{ij}(x)$. □

Definice 4.3 (Singulární míra)

Nechť ν, μ jsou míry na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že míra ν je singulární vzhledem k míře μ (značení $\nu \perp \mu$), jestliže

$$\exists S \in \mathcal{A} L \mu(S) = 0 \land \nu(X \setminus S) = 0.$$

Věta 4.7 (Lebesgueova dekompozice)

Buď $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor, μ míra na X, ν σ-konečná míra na X. Pak existují jednoznačně určené míry ν_a, ν_s na X tak, že $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$ a $\nu_a + \nu_s = \nu$.

Důkaz
1. krok: Nechť ν je konečná míra. Pak existence plyne z:

$$\mathcal{N}_\mu := \{B \in \mathcal{A} |\ \mu(B) = 0\},$$

$$c := \sup\{\nu(B) | V \in \mathcal{N}_\mu\} \leq \nu(X) < \infty$$

$$\exists \{B_j\} \subset \mathcal{A}, \lim_{j\to\infty} \nu(B_j) = e$$

$$N := \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \implies \mu(N) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = 0.$$

$$\nu_s(A) := \nu(A \cap N) \forall A \in \mathcal{A},$$

$$\nu(X \setminus N) - \nu(X \setminus N \cap N) = 0.$$

$$\nu_a(A) = \nu(A) - \nu_s(A) = \nu(A) - \nu(A \cap N) = \nu(A \setminus N) = \nu(A \cap N)$$

.

$\nu_a \ll \mu$: Buď $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$.

$$N \cup (A \cap N^c) \implies \mu(N \cup (A \cap N^c)) \leq \mu(N) +\ \mu(A \cap N^c) = 0.$$

Platí $\nu(A \cap N^c) = 0$, neboť (sporem) kdyby $\nu(A \cap N^c) > 0$, pak by

$$\nu(N \cup (A \cup N^c)) = \nu(N) + \nu(A \cap N^c) = c + (> 0).\lightning.$$

$$\nu(A \cup N^c) = \nu_a(A)$$

Jednoznačnost: Nechť $\nu = \nu_a + \nu_s$ a $\nu = \tilde{\nu}_a + \tilde{\nu}_s$, $\nu_a \ll \mu$, $\tilde{\nu}_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$, $\tilde{\nu}_s \perp \mu$.

$$\implies \exists N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0 \wedge \nu_s(N^c) = 0 \wedge$$

$$\wedge \exists \tilde{N} \in \mathcal{A} : \mu(\tilde{N}) = 0 \wedge \tilde{\nu}_s(\tilde{N}^c) = 0$$

$$\implies \nu_a(N) = 0, \tilde{\nu}_a(N) = 0, N_0 := N \cup \tilde{N} \implies \mu(N_0) = 0$$

$$\nu_s(C_0^c) = \nu_s(X \setminus N_0) \leq \nu_s(X \setminus N) = \nu_s(N^c) = 0 \implies \nu_s(N_0^c).$$

$$\nu_s(A) = \nu_s(A \cap N_0) = \nu(A \cap N_0) - \nu_a(A \cap N_0) = \nu(A \cap N_0).$$

Analogicky

$$\tilde{\nu}_s(A) = \tilde{\nu}_s(A \cap N_0) = \nu(A \cap N_0) - \tilde{\nu}_a(A \cap N_0) = \nu(A \cap N_0).$$

$$\implies \nu_s = \tilde{\nu}_s, \nu_a = \tilde{\nu}_a.$$

2. krok: Předpokládejme, že ν je σ-konečná. $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$, $D_k \in \mathcal{A}$, $D_k \cap D_l$, $k \neq l$, $\nu(D_k) < \infty$. Provedeme první krok na každé množině zvlášť a pak je dáme dohromady.

TODO $\square$

Definice 4.4 (Distribuční funkce)

Buď μ konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$. Pak funkci

$$F_\mu := \mu((-\infty, x\rangle), \forall x \in \mathbb{R},$$

nazýváme distribuční funkcí míry μ.

Lemma 4.8 (O distribuční funkci)

Funkce F_μ splňuje:

- *F_μ je neklesající.*
- *$F_\mu(-\infty) = 0,\ F_\mu(+\infty) = \mu(\mathbb{R}) < +\infty$.*
- *F_μ je zprava spojitá.*

Důkaz

První bod: $x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$. $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x\rangle) \leq \mu((-\infty, y\rangle) = F_\mu(y)$.

Druhý bod:

$$F_\mu(-\infty) = \lim_{n\to\infty} F_\mu(-n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, -n\rangle) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, n\rangle\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

$$F_\mu(+\infty) = \lim_{n\to\infty} F_\mu(n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, n\rangle) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, n\rangle\right) = \mu(\mathbb{R}) < +\infty.$$

Třetí bod: $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{y\to x_+} F_\mu(y) = \lim_{n\to+\infty} F_\mu\left(x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right\rangle\right) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right\rangle\right) = \mu((-\infty, x\rangle) =$$

$\square$

Věta 4.9 (O Lebesgueově-Stieltjesově míře)

Nechť $F:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce splňující

- *F je neklesající,*
- *$F_\mu(-\infty) = 0,\ F_\mu(+\infty) < +\infty$,*
- *F je zprava spojitá.*

Pak existuje právě jedna konečná borelovská míra na prostoru $\mathbb{R}$, že $F = F_\mu$.

Důkaz
Nedokazovali jsme. □

Definice 4.5 (Lebesgueův-Stieltjesův integrál)
Je-li F distribuční funkce (konečné borelovské míry μ) na $\mathbb{R}$ a $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pak

$$\int_A f dF := \int_A f d\mu, \qquad \text{pokud má pravá strana smysl.}$$

Věta 4.10 (Per partes pro L-S integrál)
Je-li F_μ distribuční funkce míry μ a G_ν distribuční funkce míry ν, pak platí

$$\forall -\infty < a < b < +\infty \in \mathbb{R} : F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_{\langle a,b\rangle} F(x)dG(x) + \int_{\langle a,b\rangle} G(x)dF(x).$$

Důkaz
$\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 | a < x \leq y \leq b\}$. Z Fubiniovy věty si spočteme dvěma způsoby:

$$(\mu \otimes \nu)(\Omega) = \int_{(a,b\rangle} \left(\int_{\langle x,b\rangle} dG(y) \right) dF(x) =$$

$$= \int_{(a,b\rangle} (G(b) - G(x))dF(x) = G(b)(F(b) - F(a)) - \int_{(a,b\rangle} G(x)dF(x).$$

$$(\mu \otimes \nu)(\Omega) = \int_{(a,b\rangle} \left(\int_{(a,y\rangle} dF(x) \right) dG(y) =$$

$$= \int_{(a,b\rangle} (F(y) - F(a))dG(y) = F(a)(G(b) - G(a)) - \int_{(a,b\rangle} F(y)dG(y)$$

Odečtením dostáváme dokazovanou rovnost. □

Lemma 4.11 (O míře absolutně spojité k λ^1)
Nechť μ je konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$. Jestliže $F_\mu \in C^1(\mathbb{R})$ a $\mu \ll \lambda^1$, pak platí

$$\frac{d\mu}{d\lambda^1} = F'_\mu.$$

Důkaz
$\mathcal{S}$ systém množin, který se skládá z $\emptyset$ a všech intervalů typu $(a, b\rangle$, kde $-\infty < a < b < +\infty$. Pak $\mathcal{S}$ je π-systém.

Buď ν mír daná předpisem $\nu(A) := \int_A F'_\mu d\lambda^1$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pak $\nu = \mu$ na $\mathcal{S}$, neboť $\nu(\emptyset) = 0 = \mu(\emptyset)$, $\mu((a, b\rangle) = F_\mu(b) - F_\mu(a) = \int_a^b F'_\mu(x)dx - \int_{(a,b\rangle} F'_\mu d\lambda^1 = \mu(\langle -u, u\rangle)$.

Z nějaké věty dříve plyne $\mu = \nu$ na $\sigma\mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \implies \mu(A) = \int_A F'_\mu d\lambda^1, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

TODO Důkaz Lebesgueovy věty.