1 Holomorfní a meromorfní funkce

Definice 1.1 (Holomorfní a meromorfní funkce)

Nechť $f : A \subseteq \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in A$. Potom je f holomorfní v bodě z_0, pokud je diferencovatelná na nějakém $\mathbb{S}$-okolí z_0. f je holomorfní na $B \subseteq A$, pokud je holomorfní v každém bodě.

f je meromorfní na $B \subseteq A$, pokud je v každém bodě B holomorfní, nebo zde má pól.

Důsledek
$\mathcal{H}(G) \subset \mathcal{M}(G) \subset \mathcal{C}(G)$. $P_f := \{z_0 \in G | f \text{ má pól v } z_0\}$ nemá hromadný bod v G.

Tvrzení 1.1 (Cauchy-Riemann)

Nechť f je komplexní funkce definovaná na nějakém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{S}$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- $\exists f'(z_0)$;
- $\exists df(z_0)$ *a* $df(z_0)$ *je* $\mathbb{C}$*-lineární;*
- $\exists df(z_0)$, $\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0)$ *a* $\frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0)$.

Tvrzení 1.2

Funkce f je konstantní na oblasti $G \subseteq \mathbb{S}$, právě když $f' = 0$ na G.

TODO Cauchyho odhady?

Věta 1.3 (Liouville)

Je-li f holomorfní a omezená funkce na $\mathbb{C}$, potom je f konstantní.

Věta 1.4 (Weierstrass)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f_n \in \mathcal{H}(G)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f$ na G. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$ a $f_n^{(k)} \overset{loc.}{\rightrightarrows} f^{(k)}$ na G pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Tvrzení 1.5 (O rozvoji holomorfní funkce do mocninné řady na kruhu)

Nechť $R \in (0, +\infty]$ a $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$. Potom existuje jediná mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, která má na $U(z_0, R)$ součet f. Navíc $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Tvrzení 1.6 (O nulovém bodě)

Nechť f je holomorfní funkce na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z_0) = 0$. Potom buď $\exists r > 0$: $f = 0$ na $U(z_0, r)$, nebo $\exists r > 0$: $f \neq 0$ na $P(z_0, r)$.

Tvrzení 1.7 (O jednoznačnosti pro holomorfní a meromorfní funkce)

Nechť $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{S}$ je oblast a $f, g \in \mathcal{M}(G)$. Následující je ekvivalentní:

- *$f = g$ na G;*
- *$\{z \in G | f(z) = g(z)\}$ má v G hromadný bod;*
- *$\exists z_0 \in G$, že $f^{(k)}(z_0) = f^{(k)}(z_0)$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.*

Tvrzení 1.8 (Princip maxima modulu)

Nechť $G \subseteq \mathbb{S}$ je oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f je na G konstantní, pokud $|f|$ nabývá v G lokálního maxima.

TODO Casorati-Weierstrass?

Tvrzení 1.9 (O Laurentově rozvoji holomorfní funkce na mezikruží)

Nechť $P := P(z_0, r, R)$, kde $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$. Nechť $f \in \mathcal{H}(P)$. Pak existuje jediná Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, která má na P součet f. Navíc $a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\varrho} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{m+1}}$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $r < \varrho < R$.

TODO O Laurentově rozvoji kolem izolované singularity?

Věta 1.10 (O násobné hodnotě)

Buďte $z_0, w_0 \in \mathbb{S}$, f holomorfní funkce a $P(z_0) = w_0$ $p \in \mathbb{N}$ krát. Buď navíc $\delta_0 > 0$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ a $0 < \delta < \delta_0$ taková, že pro libovolné $w \in P(w_0, \varepsilon)$ existuje právě p různých bodů $z_1, \dots, z_p$ v $P(z_0, \delta)$, že $f(z_j) = w$. Navíc $f(z_j) = w$ jedenkrát.

Důsledek

Buď $G \subseteq \mathbb{S}$ oblast, $f \in \mathcal{H}(G)$ a f není konstantní v G. Potom f je otevřené zobrazení.

Důsledek

Buď f holomorfní funkce v $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom $f'(z_0) \neq 0$ právě tehdy, když existuje $U(z_0)$ takové, že $f|_{U(z_0)}$ je prosté.

Věta 1.11 (O holomorfní inverzi)

Buď $G \subseteq \mathbb{C}$ otevřená a $f : G \to \mathbb{C}$ prostá holomorfní (tedy konformní) funkce, potom $f' \neq 0$ na G, $\Omega := f(G)$ je otevřená a $f_{-1} : \Omega \xrightarrow{na} G$ je holomorfní. Navíc $(f_{-1})' = \frac{1}{f' \circ f_{-1}}$ na Ω.

Věta 1.12 (Hurwitz)

Buď $G \subseteq \mathbb{C}$ oblast, $f_n \in \mathcal{H}(G)$, $f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f$ na G a $f \not\equiv 0$. Dále buď $z_0 \in G$ nulový bod. Potom $\exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ a podposloupnost $\{f_{k_n}\}$ posloupnost $\{f_n\}$ taková, že $z_n \to 0$ a $f_{k_n}(z_n) = 0$.

Důsledek

Buď $G \subseteq \mathbb{C}$ oblast, f_n konformní funkce na G a $f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ na G. Potom f je buď konformní nebo konstantní.

Tvrzení 1.13

Ať f je nenulová holomorfní funkce na jednoduše souvislé oblasti $G \subseteq \mathbb{C}$. Potom existuje $L \in \mathcal{H}(G)$ taková, že $f = e^L$ na G.

2 Prostor $\mathcal{H}$, $\mathcal{C}$ a $\mathcal{M}$

Věta 2.1

$\mathcal{H}(\mathbb{S})$ = konstantní funkce.

Tvrzení 2.2

Pro $f_n, f \in \mathcal{C}(G)$ a K_m kompaktní v G takové, že $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = G$ a $\forall m \in \mathbb{N} : K_m \subseteq \operatorname{int} K_{m+1}$ je následující ekvivalentní:

- $f_n f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f$ *na G;*
- *pro každý kompakt K v G, $\|f_n - f\|_K \to 0$;*
- $\forall m \in \mathbb{N} : \|f_n - f\|_{K_m} \to 0$;
- $\varrho(f_n, f) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{\|f_n - f\|_{K_m}}{1 + \|f_n - f\|_{K_m}} \to 0$

Věta 2.3 (Moore–Osgood, Montöl)

Buď $G \subseteq \mathbb{C}$ otevřená a $\{f_n\} \subset \mathcal{H}(G)$ lokálně stejnoměrně omezená. Potom existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}$, která konverguje lokálně stejnoměrně na G.

Tvrzení 2.4 ($\mathcal{H}^*(\mathbb{D})$)

Buď $L \in \mathcal{H}^*(\mathbb{D})$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Potom $L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$, kde $b_n := L(z^n) \in \mathbb{C}$ a $r := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} < 1$. (A opačně.)

Tvrzení 2.5 (Integrální podoba L)

Buď $\{b_n\} \subseteq \mathbb{C}$ *tak, že* $r := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} < 1$. *Definujme* $\lambda(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^{n+1}}$, $|z| > r$.

Potom $\lambda \in \mathcal{H}(\mathbb{S}\backslash\overline{U(0,r)})$, $\lambda(\infty) = 0$ *a* $b_n = \frac{\lambda^{(n+1)}(\infty)}{(n+1)!}$. *Navíc pokud* $R \in (r,1)$, $\varphi(t) := Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, *a* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, *pak*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} f(z)\cdot\lambda(z)dz = L(f).$$

Tvrzení 2.6

$\lambda \in \mathcal{H}_0(\mathbb{S}\backslash\mathbb{D})$. $L(z^n) = \frac{\lambda^{(n+1)}(\infty)}{(n+1)!}$, $n \in \mathbb{N}_0$. $\lambda(w) = L\left(\frac{1}{w-z}\right)$, $|w| \geqslant 1$.

Důsledek

$$\mathcal{H}^*(\mathbb{D}) = \mathcal{H}_0(\mathbb{S}\backslash\mathbb{D}).$$

Důsledek

$$\mathcal{H}^*(G) = \mathcal{H}_0(\mathbb{S}\backslash G), \qquad G = \bigcup_{j=0}^{n} D_j, D_j \cap D_k = \varnothing, j \neq k.$$

Lemma 2.7

Buď $L : E \to \mathbb{C}$ *lineární. Potom* $L \in E^*$ *právě tehdy, pokud existuje kompakt* K *v* E *a existuje* $M \in [0, +\infty)$ *tak, že* $|L(f)| \leqslant M \cdot \|f\|_K$, $f \in E$.

Věta 2.8 (Hahn–Banach)

Buď A *podprostor* E. *Potom*

- *pokud* $L \in A^*$, *potom existuje* $\tilde{L} \in E^*$ *takové, že* $\tilde{L}|_A = L$;
- *pokud* A *je uzavřené a* $0 \neq b \in E\backslash A$, *potom existuje* $L \in E^*$ *takové, že* $L(b) = 1$ *a* $L(A) = \{0\}$;
- $\overline{A} = E$ *právě tehdy, když z* $L \in E^*$, $L(A) = \{0\}$ *vyplývá* $L(E) = \{0\}$.

Věta 2.9

$$\mathcal{H}^*(G) = \mathcal{H}_0(\mathbb{S}\backslash G).$$

3 Cauchyovy věty, reziduální věty a další

Tvrzení 3.1 (O existenci primitivní funkce)

Nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ je oblast a f je spojitá na G, pak následující je ekvivalentní:

- *f má na G primitivní funkci;*
- *$\int_\varphi f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G;*
- *$\int_\varphi f$ nezávisí v G na křivce φ;*
- *TODO Dodatek?*

Věta 3.2 (Cauchy pro hvězdovité oblasti)

Nechť $G \subseteq \mathbb{S}$ je hvězdovitá oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má na G primitivní funkci, tedy $\int_\varphi f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G.

Definice 3.1 (Index bodu křivky)

Nechť φ je uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ a $s \in \mathbb{C} \backslash \langle \varphi \rangle$. Potom číslo $\operatorname{ind}_\varphi s := \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z-s}$ nazveme indexem bodu vzhledem ke křivce φ.

Věta 3.3 (Cauchyův vzorec na kruhu)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ a $f \in \mathcal{H}(G)$. Nechť $\overline{U(z_0, r)} \subseteq G$ a $\varphi(t) = z_0 + r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom platí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z-s} dz = \begin{cases} f(s), & |s - z_0| < r \\ 0, & |s - z_0| > r. \end{cases}$$

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)dz}{(z-s)^{k+1}} = f^{(k)}(s), \qquad |s - z_0| < r, k \in \mathbb{N}_0.$$

Věta 3.4 (Morera ($\implies$ je Goursatovo lemma))

Nechť f je spojitá funkce na otevřené $G \subset \mathbb{C}$. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$, právě když $\int_{\partial \triangle} f = 0$, $\forall \triangle \subset G$.

Věta 3.5 (Cacuhyho vzorec na mezikruží)

Nechť $f \in \mathcal{H}(P(z_0, r, R))$. Nechť $r < r_0 < R_0 < R$ a $s \in P(z_0, r_0, R_0)$. Potom platí

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z)dz}{z-s} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z)dz}{z-s}.$$

Definice 3.2 (Reziduum)

Nechť $f \in \mathcal{H}(P(z_0))$ a nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in P(z_0)$. Potom reziduem f v z_0 nazveme číslo $\operatorname{res}_{z_0} f := a_{-1}$.

Věta 3.6 (Reziduová na hvězdovitých oblastech)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast $M \subseteq G$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \setminus M)$. Nechť φ je uzavřená křivka v $G \setminus M$. Potom máme $\int_\varphi f = 2\pi i \sum_{s \in M} \operatorname{res}_s f \cdot \operatorname{ind}_\varphi s$.

TODO Reziduová a Cauchyho pro cykly?

Definice 3.3 (Logaritmický integrál)

Ať $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je (regulární) křivka a f je nenulová holomorfní funkce na $\langle \varphi \rangle$. Potom definujeme logaritmický integrál jako

$$I := \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\varphi(t))\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(f(\varphi(t)))'}{f(\varphi(t))} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \varphi} \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(\Phi(b) - \Phi(a)).$$

Kde Φ je jednoznačná větev logaritmu $f \circ \varphi$. Navíc, pokud je φ uzavřená, pak $I = \operatorname{ind}_{f \circ \varphi} 0 \in \mathbb{Z}$.

Věta 3.7 (Princip argumentu)

Buď $G \subseteq \mathbb{C}$ oblast, φ uzavřená křivka v G a $f \in \mathcal{M}(G)$. Navíc buď $\operatorname{int} \varphi \subseteq G$ a $\langle \varphi \rangle \cap (N_f \cup P_f) = \emptyset$. Potom

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f'}{f} = \sum_{s \in \operatorname{int} \varphi, f(s)=0} n_f(s) \cdot \operatorname{ind}_\varphi s - \sum_{s \in \operatorname{int} \varphi, f(s)=\infty} p_f(s) \cdot \operatorname{ind}_\varphi s =: \Sigma(f, \varphi).$$

Věta 3.8 (Rouché)

Buď $G \subseteq \mathbb{C}$ oblast, $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(G)$ a φ buď uzavřená křivka v G taková, že $\operatorname{int} \varphi \subseteq G$. Předpokládejme

$$\forall z \in \langle \varphi \rangle : |f_1(z) - f_2(z)| < |f_1(z)| < \infty.$$

Potom $\Sigma(f_1, \varphi) = \Sigma(f_2, \varphi)$.

Věta 3.9 (Cauchyho vzorec pro kompakty)

Buďte $G \subset \mathbb{C}$ otevřená a $K \subset G$ kompaktní. Potom existuje cyklus $\Gamma \subset G$, $K \subseteq \operatorname{int} \Gamma \subseteq G$ a $\forall a \in \operatorname{int} \Gamma : \operatorname{ind}_\Gamma a = 1$. Navíc

$$\forall f \in \mathcal{H}(G) : \int_\Gamma f = 0 \wedge \forall a \in \operatorname{int} \Gamma : f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

4 Aproximační věty a hledání funkcí

Tvrzení 4.1 (Rozklad holomorfní funkce s konečně mnoha izolovnými singularitami)

Nechť $G \subseteq \mathbb{S}$ je otevřená, $M \subseteq F$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \backslash M)$. Pro každé $s \in M$ označme H_s součet hlavní části Laurentova rozvoje funkce f kolem s. Potom existuje jediná $h \in \mathcal{H}(G)$ tak, že $f = \sum_{s \in M} H_s + h$ na $G \backslash M$.

Věta 4.2 (Mittag–Leffler)

Buď $\{s_j\} \subset \mathbb{C}$ prostá posloupnost, že $s_j \to \infty$ a $s_0 := 0 < |s_1| \leqslant |s_2| \leqslant \ldots \leqslant |s_j| \leqslant \ldots$

Buďte $P_0, P_1, \ldots, P_j, \ldots$ polynomy tak, že $P_j(0) = 0$. Potom funkce

$$f(z) := P_0\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{j=1}^{\infty}\left(P_j\left(\frac{1}{z - s_j}\right) - Q_j(z)\right)$$

pro nějaké polynomy Q_j splňuje:

- *Suma v definici konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C}$, tj. na libovolném kompaktu $K \subset \mathbb{C}$ řada konverguje, pokud vynecháme konečně mnoho členů, které zde mají póly.*
- *$f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ a f má póly právě v $s_0, s_1, \ldots, s_j, \ldots$, v každém je hlavní část rozvoje f rovna $P_j\left(\frac{1}{z-s_j}\right)$.*
- *Pokud $g \in \mathcal{M}(G)$ splňuje předchozí dva body, potom existuje $h \in \mathcal{H}(G)$ tak, že $g = f + h$ na G.*

Věta 4.3

Buď $M \subseteq \mathbb{C}$, $u_j : M \to \mathbb{C}$ buďte omezené a $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|$ konverguj stejnoměrně na M. Potom $p_n := \prod_{j=1}^{n}(1 + u_j)$ konverguje stejnoměrně k $f : M \to \mathbb{C}$ a platí, že $f = \prod_{j=1}^{\infty}(1 + u_{n(j)})$ na M, kde n je bijekce na $\mathbb{N}$.

Navíc, pokud $z_0 \in M$, potom $f(z_0) = 0$ tehdy a jen tehdy, když $u_{j_0}(z_0) = -1$ pro nějaké $j_0 \in \mathbb{N}$.

Důsledek

Buď $G \subseteq \mathbb{C}$ otevřená, $f_n \in \mathcal{H}(G)$ a $f_n \not\equiv 0$ na žádné komponentě G. Předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|$ konverguje lokálně stejnoměrně na G. Potom $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálně stejnoměrně na G, $f \in \mathcal{H}(G)$ a výsledný nekonečný součin nezávisí na pořadí f_n. Navíc $n_f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} n_{f_k}(s)$, $s \in G$, kde položíme $n_f(s) = 0$, když $f(s) \neq 0$.

Lemma 4.4 (Weierstrassův faktor)

Buď $E_0(z) := (1-z)$ *a* $E_m(z) := (1-z)\cdot e^{z+\dots+\frac{z^m}{m}}$, $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$. *Potom* $|1-E_m(z)| \leqslant |z|^{m+1}$, $|z| \leqslant 1$.

Věta 4.5 (Weierstrassova faktorizace v $\mathbb{C}$)

Ať $k \in \mathbb{N}_0$ *a* $0 \neq z_i \to \infty$. *Potom existuje* $\{m_j\} \subseteq \mathbb{N}_0$ *taková, že*

$$f(z) := z^k \cdot \prod_{j=1}^{\infty} E_{m_j}\left(\frac{z}{z_j}\right)$$

konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *a* f *má v nule nulový bod násobnosti* k *a* $0 \neq$ *nulové body právě v* $z_1, z_2, \dots, z_j, \dots$ *s násobností danou počtem jejich výskytů v* $\{z_j\}$.

Navíc můžeme vždy položit $m_j := j-1$, $j \in \mathbb{N}$.

Nakonec pokud $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *má stejné nulové body jako* f *včetně násobnosti, pak existuje* $L \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *taková, že* $g = f \cdot e^L$ *na* $\mathbb{C}$.

Věta 4.6 (Weierstrassova faktorizace v obecné otevřené množině)

Buď $G \subsetneq \mathbb{S}$ *otevřená,* $N \subset G$ *bez hromadných bodů v* G *a* $n : N \to \mathbb{N}$. *Potom existuje* $f \in \mathcal{H}(G)$ *taková, že* $N_f = N$ *a* $n_f(s) = n(s)$, $s \in N_f$.

Lemma 4.7

Pokud $G \subseteq \mathbb{C}$ *je otevřená a* $f \in \mathcal{M}(G)$, *pak existují* $g, h \in \mathcal{H}(G)$, *že* $f = \frac{g}{h}$ *na* G.

Věta 4.8 (Runge (speciální))

Buď $G \subset \mathbb{C}$ *konečné sjednocení navzájem disjunktních otevřených koulí. Potom pro každou* $f \in \mathcal{H}(G)$ *existují polynomy* P_n, $n \in \mathbb{N}$, *že* $P_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f$ *na* G.

Definice 4.1

Označme $\mathcal{F}(E, m)$ systém funkcí, který sestává z $\frac{1}{z-e}$ pro $e \in E \cap \mathbb{C}$ a $m(e)M < \infty$, $\frac{1}{(z-e)^k}$ pro $e \in E \cap \mathbb{C}$ a $m(e) = \infty$, $k \in \mathbb{N}$, a nakonec z^k pokud $\infty \in E$, $m(\infty) = \infty$.

Věta 4.9 (Runge)

Buď $G \subseteq \mathbb{C}$ *otevřená,* $E \subseteq \mathbb{S} \backslash G$ *a* $m : E \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. *Pokud* (E, m) *má hromadný bod v každé komponentě* $\mathbb{S} \backslash G$, *potom lineární obal* $\mathcal{F}(E, m)$ *je hustý v* $\mathcal{H}(G)$.

Věta 4.10 (Runge, klasická verze)

Buď $G \subset \mathbb{C}$ otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom existují racionální funkce R_n, $n \in \mathbb{N}$, s póly mimo G takové, že $R_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f$ na G. Navíc, pokud $\mathbb{S}\backslash G$ je souvislá, potom nahradíme racionální funkce polynomy.

Věta 4.11 (Runge, pro kompakty)

Buď K kompaktní v $\mathbb{C}$ a mějme $S \subset \mathbb{S}\backslash K$ obsahující alespoň jeden bod z každé komponenty $\mathbb{S}\backslash K$. Potom pro každé $f \in \mathcal{H}(K)$ existují racionální funkce R_n s póly v S takové, že $R_n \rightrightarrows f$ na K.

5 Jednoduše souvislé množiny

Věta 5.1 (Charakterizace jednoduše souvislé množiny)

Buď $G \subset \mathbb{C}$ otevřená. Pak následující je ekvivalentní:

1. *pokud φ je uzavřená (regulární) křivka v G, potom $\operatorname{int}\varphi \subset \mathbb{G}$;*
2. *$\mathbb{S}\backslash G$ je souvislá;*
3. *$\forall f \in \mathcal{H}(G)$ $\exists$polynomy $P_n : P_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f$ na G;*
4. *$\forall f \in \mathcal{H}(G) : \int_\varphi f = 0$ pro libovolnou uzavřenou křivku φ v G;*
5. *$\forall f \in \mathcal{H}(G)$ $\exists F \in \mathcal{H}(G) : F' = f$ na G;*
6. *$\forall f \in \mathcal{H}(G)$, $f \neq 0$ na G, $\exists g \in \mathcal{H}(G) : f = e^g$ na G;*
7. *$\forall f \in \mathcal{H}(G)$, $f \neq 0$ na G, $\exists h \in \mathcal{H}(G) : h^2 = f$ na G;*
8. *každá smyčka φ v G je homotopická (v G) konstantní smyčce.*

Věta 5.2 (Riemann)

Ať $\emptyset \neq G_0 \subsetneq \mathbb{C}$ je oblast splňující sedmý bod. Pak existuje konformní zobrazení $h : G_0 \overset{na}{\to} \mathbb{D}$.

Věta 5.3

Nechť φ, ψ jsou homotopické smyčky na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{C}$. Potom $\operatorname{ind}_\varphi z_0 = \operatorname{ind}_\psi z_0$ pro každé $z_0 \in \mathbb{C}\backslash G$.

Tvrzení 5.4

Existují 4 třídy konformně ekvivalentních (lze je na sebe zobrazit konformním zobrazením) *jednoduše souvislých oblastí v $\mathbb{S}$:*

$$\varnothing, \qquad \mathbb{S}, \qquad [\mathbb{C}], \qquad [\mathbb{D}].$$

6 Další

Lemma 6.1

Buď $G \subseteq \mathbb{C}$ otevřená. Potom existují kompakty K_n, $n \in \mathbb{N}$, v G takové, že $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, $K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1})$ a pro každý kompakt K v G, existuje $n \in \mathbb{N}$, že $K \subseteq K_n$.

Tvrzení 6.2

Buď $G \subseteq \mathbb{S}$ otevřená a $M \subset G$ nemá žádný limitní bod v G. Potom $G \backslash M$ je otevřená; $K \cap M$ je konečný (tedy pro $G = \mathbb{S}$ je M konečná); M je nanejvýš spočetná, a pokud M je nekonečná, tak $\varnothing \neq M' \subseteq \partial G$; pokud je $G \subseteq \mathbb{C}$ oblast, pak $G \backslash M$ je oblast.

Lemma 6.3

Buďte $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ uzavřené křivky a $s \in \mathbb{C} \backslash (\langle \varphi_1 \rangle \cup \langle \varphi_2 \rangle)$. Předpokládejme, že pro $t \in [a,b]$ je $|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < |\varphi_1(t) - s|$. Potom $\operatorname{ind}_{\varphi_1} s = \operatorname{ind}_{\varphi_2} s$.

Věta 6.4 (Schwarzovo lemma)

Ať $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ a $f(0) = 0$. Potom $|f(z)| \leqslant |z|$, $z \in \mathbb{D}$ a $|f'(0)| \leqslant 1$. Pokud nastane rovnost v první nerovnosti pro $z \in \mathbb{D} \backslash \{0\}$ nebo v druhé nerovnosti, pak f je rotace.

Lemma 6.5

Pro $\alpha \in \mathbb{D}$ položme $\varphi_\alpha(z) := \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$. Potom

- *$\varphi_\alpha \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C} \backslash \left\{\frac{1}{\overline{\alpha}}\right\}\right)$, φ_α je prosté, $\varphi_\alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\varphi_\alpha(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$;*
- *$(\varphi_\alpha)_{-1} = \varphi_{-\alpha}$;*
- *$\varphi_\alpha(\alpha) = 0$, $\varphi'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$, $\varphi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2$.*

Věta 6.6 (Konformní transformace $\mathbb{D}$)

Funkce f je konformní zobrazení $\mathbb{D}$ na $\mathbb{D}$ právě tehdy, když existují $\theta \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{D}$ tak, že

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z} = \operatorname{rot}_\theta \circ \varphi_\alpha, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Věta 6.7 (Schwarz–Pick)

Ať $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $F(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ a $F(\alpha) = \beta$. Potom $|F'(\alpha)| \leqslant \frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$. Pokud nastane rovnost, pak $F(z) = \varphi_{-\beta}(\lambda\varphi_\alpha(z))$, $z \in \mathbb{D}$, pro nějaké $\lambda \in \mathbb{T}$. Neboli $F'(0) < 1$ pokud F není rotace.

Věta 6.8

Buďte $G, \Omega \subset \mathbb{C}$ otevřené. Potom $f : G \to \Omega$ je konformní právě tehdy, když f je difeomorfismus G na Ω zachovávající úhly v libovolném bodu G.