Organizační úvod

TODO!!!

Úvod

TODO!!!

Definice 0.1

Zúplnění míry λ^n_B nazveme Lebesgueovou mírou v $\mathbb{R}^n$.

Poznámka

1. Lebesgueova míra je σ-konečná.
2. Množinu $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n) := \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{N})$ nazýváme σ-algebrou lebesgueovsky měřitelných množin. Platí $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
3. Lebesgueova míra je regulární v následujícím smyslu:

$$\forall E \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \text{otevřená množina } G\, \exists \text{uzavřená množina } F : F \subset E \subset G \wedge \mu(G \setminus F) < \varepsilon.$$

Definice 0.2 (Značení)

Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \to Y$. Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak $f^{-1}(\mathcal{S}) := \{f^{-1}(S) | S \in \mathcal{S}\}$.

Věta 0.1 (O zobrazení $f : X \to Y$)

Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \to Y$.

1. *Je-li $\mathcal{M}$ σ-algebra na Y, pak $f^{-1}(\mathcal{M})$ je σ-algebra na X.*
2. *Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak $f^{-1}(\sigma(\mathcal{S})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{S}))$.*

Důkaz

Později. □

1 Měřitelná zobrazení

Definice 1.1 (Měřitelné zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{M})$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ nazveme měřitelným (vzhledem k $\mathcal{A}$ a $\mathcal{M}$), jestliže $f^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}$.

Jestliže některý z prostorů X, Y je metrický prostor, pak za příslušnou σ-algebru bereme σ-algebru borelovských podmnožin (pokud není řečeno jinak).

Měřitelné zobrazení mezi dvěma metrickými prostory se nazývá borelovsky měřitelné (krátce borelovské).

Poznámka

1. Snadno se ověří, e kompozice dvou měřitelných zobrazení je měřitelné zobrazení.
2. Z věty O zobrazení... plyne, že jsou-li $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{M})$ měřitelné prostory, pak zobrazení $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$, kde $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ je generátor σ-algebry $\mathcal{M}$. Speciálně je-li $(X, \mathcal{A})$ a Y metrický prostor, pak zobrazení $f : X \to Y$ je měřitelné $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ $\forall$otevřenou množinu $G \subset Y$.

Důsledek
Každé spojité zobrazení mezi dvěma metrickými prostory je měřitelné (borelovské).

Důkaz
Z věty O zobrazení... (vzory otevřených množin při spojitém zobrazení jsou otevřené množiny). $\square$

Věta 1.1 (Generátory $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$)

Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}^n$ je generována

1. *otevřenými intervaly $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, kde $-\infty < a_i < b_i < +\infty$,*
2. *systémem $\mathcal{S} := \{(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n)\}$, kde $a_i \in \mathbb{R}$.*

Věta 1.2 (O měřitelných zobrazeních)

Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor.

1. *Jsou-li $f : X \to \mathbb{R}^n$ a $g : X \to \mathbb{R}^n$ měřitelná zobrazení, pak zobrazení $(f, g) : X \to \mathbb{R}^{n+m}$ je měřitelné.*
2. *Jsou-li $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ měřitelná zobrazení, pak zobrazení $f \pm g$ jsou měřitelná zobrazení.*
3. *Jsou-li $f, g : X \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, pak také $f \cdot g, \max(f, g), \min(f, g)$ jsou měřitelné.*

Poznámka
Prostor $\mathbb{R}^*$ je metrický prostor s metrikou např. ϱ^* danou předpisem $\varrho^*(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$, kde $\varphi(x) := \frac{x}{1+|x|}$ pro konečné x a $\varphi(\pm\infty) = \pm 1$ (tzv. redukovaná metrika).

Redukovaná metrika má následující vlastnosti (viz Jarník – Diferenciální počet 2, str. 245, 246):

1. V množině $\mathbb{R}$ je ekvivalentní s eukleidovskou metrikou.
2. Konvergence v prostoru $(\mathbb{R}^*, \varrho^*)$ splývá s konvergencí zavedenou v $\mathbb{R}^*$ pomocí okolí bodů.

Platí $\mathcal{B}^* := \mathcal{B}(\mathbb{R}^*) = \sigma(\{\langle -\infty, a) \,|a \in \mathbb{R}\})$. Plyne z:

1. $\forall$ otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^*$ lze psát jako spočetné sjednocení intervalů typu $\langle -\infty, a), (a,b), (b, \infty\rangle$.
2. $\langle -\infty, a)$ je stejný jako v $\mathbb{R}^*$.
3. $(a, +\infty\rangle$ je $\mathbb{R}^* \setminus \langle -\infty, a)$.
4. $(a, +\infty\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\langle a + \frac{1}{n}, +\infty \right\rangle$.
5. $(a,b) = \langle -\infty, b) \cap (a, +\infty\rangle$.

Věta 1.3 (O měřitelných funkcích)

Buď $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. Pak platí

1. *$f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce právě tehdy, když $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$.*
2. *$f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná funkce právě tehdy, když $f^{-1}(\langle -\infty, a)) \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$.*

Důsledek
Nechť $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ jsou měřitelné funkce. Pak

1. množiny $\{x \in X | f(x) < g(x)\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}$ jsou měřitelné.
2. funkce $\max(f,g), \min(f,g)$ jsou měřitelné funkce.

Věta 1.4 (O měřitelných funkcích podruhé)

Jsou-li funkce $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ množiny $(X, \mathcal{A})$ do $\mathbb{R}^*$ měřitelné funkce, pak funkce $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \limsup_{n\in\mathbb{N}}$
jsou měřitelné.

Definice 1.2 (Jednoduchá funkce)

Funkce $S: \ X \to [0, +\infty)$ se nazývá jednoduchá, jestliže množina $S(X)$ je konečná.

Platí, že $s(x) = \sum_{\alpha \in S(X)} \alpha \cdot \chi_{S=\alpha}$. Součet na pravé straně této rovnosti nazveme kanonickým vyjádřením jednoduché funkce.

2 Abstraktní Lebesgueův integrál

Věta 2.1 (O nezáporné měřitelné funkci)

Nechť $f : (X, \mathcal{A}) \to \langle 0, +\infty \rangle$ je měřitelná funkce. Pak existuje posloupnost jednoduchých (nezáporných) měřitelných funkcí $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tak, že $s_n \nearrow f$ (konverguje nahoru).

Jestliže navíc f je omezená, pak $s_n \rightrightarrows f$.

Definice 2.1

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou.

1. Je-li $s : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty)$ jednoduchá měřitelná funkce, zapíšeme ji v kanonickém tvaru $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}$ a definujeme

$$\int_X s d\mu = \int_X s(x) d\mu(x) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j).$$

2. Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ měřitelná funkce, pak definujeme

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu | 0 \leq s \leq f \wedge s \text{ je jednoduchá} \right\}.$$

3. Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}*$, pak definujeme

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu, \text{ má li pravá strana smysl.}$$

Poznámka

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f, g jsou nezáporné měřitelné funkce na X splňující $0 \leq f < g$ na X, pak $0 \leq \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $E \in \mathcal{A}$, pak $\mathcal{A}_E := \{A \cap E, A \in \mathcal{A}\}$ je σ-algebra na E a $(E, \mathcal{A}_E, \mu)$ je prostor s mírou ($\implies \int_E f d\mu$ je definován).

Je-li f měřitelná funkce na X a $E \in \mathcal{A}$, pak $\int_X (f \chi_E) d\mu = \int_E f d\mu$.

Věta 2.2 (Leviho)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou a* $f_n, n \in \mathbb{N}$, *jsou nezáporné měřitelné funkce na* X *splňující* $f_n \nearrow f$, *pak* $\int_X f_n d\mu \nearrow \int_X f d\mu$.

Důkaz
Později. □

Věta 2.3 (Fatouovo lemma)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou a* $f_n, n \in \mathbb{N}$, *jsou nezáporné měřitelné funkce, pak*

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Důkaz
Později. □

Definice 2.2 (Skoro všude)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $E \in \mathcal{A}$, $x \in X$. Nechť $V(x)$ je nějaká vlastnost, kterou bod x může, ale nemusí mít. Řekneme, že $V(x)$ platí μ-skoro všude na E, jestliže

$$\exists N \in \mathcal{A}, N \subset E, \mu(N) = 0 : V(x) \text{ platí } \forall x \in E \setminus N.$$

Je-li $E = X$, pak místo μ-skoro všude na E, píšeme pouze μ-skoro všude. Nehrozí li nedorozumění, o jakou míru se jedná, pak místo μ-skoro všude píšeme skoro všude.

Lemma 2.4

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou a* f, g *měřitelné funkce na* X *takové, že* $f = g$ *skoro všude, pak* $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$, *jakmile má jedna strana rovnosti smysl.*

Definice 2.3 (Měřitelná funkce (skoro všude))

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $D \in \mathcal{A}$, $\mu(D^c) = 0$ a $f : D \to \mathbb{R}^*$. Řekneme, že f je měřitelná, jestliže $\forall$ otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$ platí $f^{-1}(G) \cap D \in \mathcal{A}$.

Pro měřitelnou funkci f pak definujeme $\int_X f d\mu := \int_X \tilde{f} d\mu$, kde $\tilde{f} = \begin{cases} f \text{ na } D, \\ 0 \text{ na } D^c. \end{cases}$

Definice 2.4 (Prostory $\mathcal{L}$)

Označíme $\mathcal{L}^*(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{R}^* | f \text{ je měřitelná na } X \wedge \exists \int_X f d\mu \right\}$.

Dále $\mathcal{L}^1(\mu) := \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu) | \int_X |f| d\mu \in \mathbb{R} \right\}$.

Věta 2.5 (Linearita integrálů)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak

$$\int_X (\lambda f) d\mu = \lambda \int_X f d\mu,$$

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu, \text{ pokud má pravá strana smysl.}$$

Důkaz

Později. □

Poznámka

Má-li pravá strana druhého bodu smysl, pak nemůže nastat případ, kdy by jedna funkcí f, g je rovna $+\infty$ a druhá $-\infty$ na množině kladné míry. Odtud plyne, že součet $f+g$ je definován skoro všude.

Důsledek

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, nezáporné měřitelné funkce. Pak

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Důkaz

Z minulé věty pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí $\int_X \left(\sum_{n=1}^{k} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{k} \int_X f_n d\mu$. Použitím limitního přechodu pro $k \to \infty$ a Leviho věty dostaneme příslušnou rovnost. □

Věta 2.6 (Zobecněná Leviho)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, měřitelné funkce na X splňující $f_n \nearrow f$ a $\int_X f_1 > -\infty$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Důkaz

$g_n = f_n - f_1 \geq 0$. Z Leviho věty pak snadno plyne tato. □

Důsledek

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f_n, n \in \mathbb{N}$, měřitelné funkce splňující $f_n \searrow f$ a $\int_X f_1 < +\infty$. Pak též můžeme prohodit limitu a integrál.

Důkaz
Aplikace předchozí věty na $-f_n$. $\square$

Věta 2.7 (Lebesgue)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce takové, že $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ na X, a existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu) : |f_n| \leq g$ skoro všude $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak

$$lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Důkaz
Později. $\square$

Důsledek
Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce na X takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje skoro všude. Jestliže existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že $|\sum_{n=1}^{k} f_n| \leq g$ skoro všude $\forall k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu.$$

Důkaz
Aplikace předchozí věty na posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. $\square$

Věta 2.8 (Další vlastnosti měřitelných funkcí a integrálu)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

- *Je-li f nezáporná měřitelná funkce na X a $\int_X f d\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.*
- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int_E f d\mu = 0$ $\forall E \in \mathcal{A}$, pak $f = 0$ skoro všude.*
- *Je-li f měřitelná, pak $\int_X f d\mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_X |f| d\mu$.*
- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$.*
- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak f je konečná skoro všude.*

Důkaz
Později. $\square$

2.1 Lebesqueův integrál v $\mathbb{R}$

Poznámka (Značení)
Restrikci míry λ^1 na interval $I \subset \mathbb{R}$ opět značíme λ^1.

Je-li $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$, pak

$$\int_a^b f d\lambda^1 := \int_{(a,b)} f d\lambda^1.$$

Věta 2.9 (Vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu)

Je-li $-\infty < a < b < +\infty$ *a* $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ *taková, že* $(R) \int_a^b f$ *existuje, pak* $\int_a^b f d\mu^1 \in \mathbb{R}$ *a platí*

$$\int_a^b f d\lambda^1 = (R) \int_a^b f.$$

Věta 2.10 (Vztah Newtonova a Lebesgueova integrálu)

Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *a* $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ *je spojitá a nezáporná. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- $(N) \int_a^b$ *existuje.*
- $\int_a^b d\lambda^1 \in \mathbb{R}$.

Zároveň pokud je jedna (tj. obě) z těchto podmínek splněna, potom

$$\int_a^b f d\lambda^1 = (N) \int_a^b f.$$

TODO!!!

Definice 2.5

Systém $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ nazveme d-systém (nebo Dynkinův systém) na X, jestliže

- $\emptyset \in \mathcal{D}$,
- $D \in \mathcal{D} \implies D^c \in \mathcal{D}$,
- $D_n \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N}, D_n \cap D_m\ \forall n \neq m \implies \bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$.

Poznámka
Každá σ-algebra je d-systém.

D-systém je uzavřený na konečné sjednocení disjunktních množin (jelikož $\emptyset \in \mathcal{D}$).

Je-li $A, B \in \mathcal{D}, A \subset B$, pak $B \setminus A \in \mathcal{D}$, neboť $B \setminus A = X \setminus ((X \setminus B) \cup A)$.

Jsou-li μ a ν dvě míry na $(X, \mathcal{A})$, pak $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} | \mu(A) = \nu(A)\}$ je d-systém.

Věta 2.11 (O průniku d-systémů)

Nechť $\mathcal{D}_\alpha$, $\alpha \in I$, jsou d-systémy na X (I je libovolná množina indexů). Pak $\bigcap_{\alpha \in I}$ je d-systém.

Důkaz
Přenechán čtenáři. □

Důsledek
Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, pak existuje nejmenší d-systém $d\mathcal{S}$ obsahující systém $\mathcal{S}$.

Poznámka
Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, pak $d\mathcal{S} \subset \sigma\mathcal{S}$.

Definice 2.6

Systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ nazveme π-systém, jestliže systém $\mathcal{S}$ je uzavřen na konečné průniky množin z $\mathcal{S}$.

Věta 2.12 (O rovnosti $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$)

Je-li $S \subset \mathcal{P}(X)$ zároveň π-systémem, pak $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$.

Důkaz
Využijeme následující 2 tvrzení. $d\mathcal{S}$ je d-systém, tedy z druhého tvrzení $d\mathcal{S}$ je π-systém. Z prvního tvrzení pak $d\mathcal{S}$ je σ algebra, tedy $\sigma\mathcal{S} \subset d\mathcal{S}$. Opačná implikace plyne z poznámky výše, $d\mathcal{S} \subset \sigma\mathcal{S}$, tedy $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$. □

Tvrzení 2.13

Je-li d-systém $\mathcal{D}$ na X zároveň π-systémem, pak $\mathcal{D}$ je σ-algebra na X.

Důkaz
Ověříme body σ-algebry. □

Tvrzení 2.14

Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ π-systém, pak $d\mathcal{S}$ je π-systém.

Důkaz

Ověříme, že $\mathcal{D} : \{D \in d\mathcal{S} | D \cap S \in d\mathcal{S} \forall S \in \mathcal{S}\}$ je d-systém. Zřejmě $\mathcal{D} = d\mathcal{D}$. Nyní buď $D \in d\mathcal{S}$ pevné a definujeme $\mathcal{D}_D := \{E \in \mathcal{P}(X) | E \cap D \in d\mathcal{S}\}$. O tom dokážeme, že je to d-systém. Následně dokážeme $\mathbb{S} \subset \mathcal{D}_D$, tedy $D = \mathcal{D}_D$. Vítězství! □

TODO?

Věta 2.15 (O jednoznačnosti míry)

Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je π-systém a μ, γ jsou dvě míry na $\sigma\mathcal{S}$ splňující $\mu(S) = \gamma(S)$, $\forall S \in \mathcal{S}$. Jestliže existují množiny $X_n \in \mathcal{S}$, $X_n \nearrow X$, $\mu(X_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pak $\mu = \gamma$ na $\sigma\mathcal{S}$.

Důkaz

Nejprve předpokládejme, že $\mu(X) < +\infty$. Pak definujme systém $\mathcal{D} := \{A \in \sigma\mathcal{S} | \mu(A) = \gamma(A)\}$. Platí $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$, tedy $d\mathcal{S} \subset d\mathcal{D} = \mathcal{D} \subset \sigma\mathcal{S}$, tedy $\mathcal{D} = \sigma\mathcal{S}$.

Je-li $\mu(X) = +\infty$, pak definujeme $\mathcal{D}_n := \{A \in \sigma\mathcal{S} | \ \mu(A \cap X_n) = \gamma(A \cap X_n)\}$, $n \in \mathbb{N}$. Platí $\mathcal{D}_n$ je d-systém $\forall n \in \mathbb{N}$ (ověř!). $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, neboť $S \in \mathcal{S} : \mu(S \cap X_n) = \gamma(S \cap X_n)$. $d\mathcal{S} \subset d\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n \subset \sigma\mathcal{S}$, tedy $\mathcal{D}_n = \sigma\mathcal{S}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nechť $A \in \sigma\mathcal{S}$. Pak $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap X_n) = \lim_{n\to\infty} \gamma(A \cap X_n) = \gamma(A)$. Tedy $\mu = \gamma$ na $\sigma\mathcal{S}$. □

3 Součin měr a Fubiniova věta

Poznámka (Předpoklady pro další 2 přednášky)
Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$, resp. $(Y, \mathcal{B}, \gamma)$, je prostor se σ konečnou mírou μ, resp. γ.

Definice 3.1 (Měřitelný obdélník, $\mathcal{O}$)

Množinu $A \times B \subset X \times Y$, kde $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, nazveme měřitelným obdélníkem.

Symbolem $\mathcal{O}$ označíme systém všech měřitelných obdélníků.

Definice 3.2 (Součinová σ-algebra)

Definujeme σ-algebru $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ předpisem $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma\mathcal{O}$.

$\forall E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ $\forall x \in X$ $\forall y \in Y$ definujeme řezy E_x, E^y množiny E takto:

$$E_x := \{y \in Y | [x,y] \in E\}, \qquad E^y := \{x \in X | [x,y] \in E\}.$$

Věta 3.1 (O součinové σ-algebře $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$)

Je-li $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, tak

1. $\forall x \in X : E_x \in \mathcal{B}$,
2. $\forall y \in Y : E^y \in \mathcal{A}$,
3. *funkce* $x \mapsto \gamma(E_x)$ *je měřitelná na* $(X, \mathbb{A})$,
4. *funkce* $y \mapsto \mu(E^y)$ *je měřitelná na* (Y, B).

Je-li funkce $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \mathbb{R}^*$ *měřitelná, pak*

1. $\forall x \in X$ *je funkce* $f_x : y \mapsto f(x,y)$ *je měřitelná na* $(Y, \mathcal{B})$,
2. $\forall y \in Y$ *je funkce* $f_y : x \mapsto f(x,y)$ *je měřitelná na* $(X, \mathcal{A})$.

Důkaz (Pouze lichá tvrzení, sudá jsou analogická)
Definujeme $\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} | E_x \in \mathcal{B}\}$. Ověříme, že $\mathcal{E}$ je σ-algebra.

TODO!!! □

Věta 3.2 (Existence a jednoznačnost součinové míry)

Existuje právě jedna míra $\mu \otimes \nu$ (tzv. součinová míra) na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ splňující $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{B}$.

Pro tuto míru platí

$$E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies (\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) \qquad \left(= \int_Y \mu(E^y) d\nu(y) \right).$$

Důkaz
1. Existence: Je-li $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, pak definujeme $(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x)$. O té dokážeme, že je mírou a že splňuje předpis v definici.

2. Jednoznačnost: Nechť τ je míra na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, která splňuje $\tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{B}$, tedy $\tau = \mu \otimes \nu$ na $\mathcal{O}$ to je π-systém. Prostory $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ jsou prostory s σ-konečnými mírami. Tj.

$$\exists X_n \in \mathcal{A}\ \forall nin\mathbb{N}, X_n \nearrow X, \mu(X_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N} \wedge$$

$$\wedge \exists Y_n \in \mathcal{B}\ \forall nin\mathbb{N}, Y_n \nearrow Y, \nu(Y_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$TODO.$$

□

Poznámka
Jsou-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ prostory s úplnými σ-konečnými mírami, pak $\mu \otimes \nu$ nemusí být úplná.

Věta 3.3 (Fubiniova)

Pro $\forall f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$ platí

1. $x \mapsto \int_Y f(x,y) d\nu(y)$ *je měřitelná na* X,
2. $y \mapsto \int_X f(x,y) d\nu(x)$ *je měřitelná na* Y,
3. $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x)\right) d\nu(y)$.

Důkaz
1) $f = \chi_E$, $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$: $\nu(E_x) = \int_Y$ TODO!!!(Dokáže se nejprve pro charakteristickou funkci, pak pro jednoduché nezáporné, nakonec pro všechny.) □

Poznámka (Značení)
Místo $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_0$ značíme $\mathcal{A} \overset{0}{\otimes} \mathcal{B}$ (budu značit $\mathcal{A} \otimes_0 \mathcal{B}$). A místo $(\mu \otimes \nu)_0$ píšeme ...(já píšu $\mathcal{A} \otimes_0 \nu$).

Věta 3.4 (Fubiniova věta pro zúplnění součinové míry)

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ jsou prostory s úplnými σ-konečnými mírami. Je-li $f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes_0 \nu)$, pak

- *funkce $x \mapsto f(x,y)$ je měřitelná na X pro μ-skoro všechna $y \in Y$,*
- *funkce $y \mapsto f(x,y)$ je měřitelná na Y pro μ-skoro všechna $x \in X$,*

- *funkce* $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ *je měřitelná na* X,
- *funkce* $y \mapsto \int_X f(x,y)d\nu(x)$ *je měřitelná na* Y,
- $\int_{X\times Y} fd(\mu\otimes_0\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y)$.

Důkaz

Z 2 následujících tvrzení a Fubiniovy věty se věta snadno dokáže. □

Tvrzení 3.5

Buď $(Z,\mathcal{C},\varrho)$ *prostor s mírou a* $(Z,\mathcal{C}_0,\varrho_0)$ *jeho zúplnění. Je-li* $f:(Z,\mathcal{C}_0)\to\mathbb{R}^*$ ϱ_0 *měřitelná funkce, pak existuje* ϱ *měřitelná funkce* $g:(Z,\mathcal{C})\to\mathbb{R}^*$ *tak, že* $f=g$ ϱ*-skoro všude na* Z.

Důkaz

Vynechán. □

Tvrzení 3.6

Nechť $(X<\mathcal{A},\mu)$ *a* $(Y,\mathcal{B},\nu)$ *jsou prostory s úplnými* σ*-konečnými mírami. Nechť* $h:(X\times Y,\mathcal{A}\otimes_0\mathcal{B})\to\mathbb{R}^*$ *je* $(\mu\otimes_0\nu)$*-měřitelná funkce a* $h(x,y)=0$ $\mu\otimes_0\nu$*-skoro všude na* $X\times Y$. *Pak pro* μ*-skoro všechna* $x\in X$ *je* $h(x,y)$ *rovno 0 pro* ν*-skoro všechna* $y\in Y$.

(Tzn, že pro μ*-skoro všechna* $x\in X$ *je funkce* h_x *rovna 0* ν*-skoro všude na* Y.*)*

Speciálně, funkce h_x *je měřitelná na* X *pro* ν*-skoro všechna* $y\in Y$.

Důkaz

Vynechán. □

Definice 3.3

$\lambda^n = (\lambda^*_{\mathcal{B}})_0$

Věta 3.7 (O míře $\lambda^p\otimes\lambda^q$)

Nechť $p,q\in\mathbb{N}$. *Pak*

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$,
- $\lambda^{p+q} = \lambda^p\otimes\lambda^q$.

Důkaz

Neuveden. □

Věta 3.8 (Fubiniova věta pro λ^{p+q})

Nechť $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^{p+q})$, $p, q \in \mathbb{N}$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f d\lambda^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) d\lambda^q(y) \right) \lambda^p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) d\lambda^p(x) \right) \lambda^q(y).$$

Definice 3.4 (Značení)

$p, q \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$. Definujeme projekce

$$\pi_1(x,y) = x, \qquad \pi_2(x,y) = y.$$

Důsledek

Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{B}_0^{p+q} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q})_0$. Je-li $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^{p+q})$ a projekce $\pi_1 A, \pi_2 A$ jsou měřitelné, pak

$$\int_A f d\lambda^{p+q} \int_{\pi_1 A} (f(x,y) d\lambda^q(y))\, \lambda^p(x) = \int_{\pi_2 A} (f(x,y) d\lambda^p(x))\, \lambda^q(y).$$

Poznámka (Značení)

Místo $d\lambda^p(x)$ píšeme dx a místo $d\lambda^q(y)$ píšeme dy.

Lemma 3.9

Lebesgueova míra λ^n je translačně invariantní (tzn. $\lambda^n(B + r) = \lambda^n(B)$).

Důkaz

λ^n a $\mu(B) := \lambda^n(B + r)$, $\forall B \in \mathcal{B}_0^n$, $r \in \mathbb{R}^n$, jsou míry, které se shodují na systémech otevřených intervalů v $\mathbb{R}^n$. Ty spolu s prázdnou množinou tvoří π-systém, takže se míry shodují i na Borelovských množinách $\implies$ jsou shodné. $\square$

Věta 3.10 (O obrazu míry)

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $(Y, \mathcal{B})$ je měřitelný prostor. Buď $\varphi : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ měřitelné zobrazení. Pak množinová funkce $\varphi(\mu)$ daná předpisem

$$\varphi(\mu)(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)), \forall B \in \mathcal{B}$$

je míra na Y (nazýváme ji obraz míry μ při zobrazení φ) a platí (má-li alespoň jedna strana smysl):

$$\int_Y f d\varphi(\mu) = \int_X f(\varphi(x)) d\mu(x).$$

Důkaz
Ověří se, že je to míra (bod po bodu). Rovnost integrálů pak postupně ověříme na charakteristické funkce, pro jednoduché funkce, pro „jednoznaménkové“ (jako monotónní limity jednoduchých) a potom pro všechny (jako součty kladných a záporných funkcí).

Pro charakteristické funkce:

$$\int_X f(\varphi(x))d\mu(x) = \int)X\chi_B(phi(x))d\mu = \int_X \chi_{\varphi^{-1}(B)}(x) = d\mu(x) = \mu(\varphi^{-1}(B)) =$$

$$\varphi(\mu)(B) = \int_Y \chi_B d\varphi(\mu) = \int_Y f d\varphi(\mu).$$

□

Věta 3.11

Nechť $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *je invertibilní lineární zobrazení.*

1. *Je-li* $\nu(A) := \lambda^n(L(A))$, $\forall A \in \mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, *pak* ν *je míra a platí* $\nu = |\det L|\lambda^n_{\mathcal{B}}$.
2. *Je-li* $\mu := |\det L|\lambda^n_{\mathcal{B}}$, *pak* $L\mu = \lambda^n_{\mathcal{B}}$ *a* $\forall f \in \mathcal{L}^*(\lambda^n_{\mathcal{B}})$ *platí*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L)|\det L| d\lambda^n_{\mathcal{B}}.$$

Důkaz
1. L je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, a tedy L je spojité. L je invertibilní $\implies$ $\exists$inverzní zobrazení L^{-1}, které je opět lineární a spojité. Tedy L je měřitelné.

$$(L^{-1}\lambda^n)(A) = \lambda^n(L(A)) = \nu(A), \forall A \in \mathcal{B}^n$$

$\implies$ nu je míra dle předchozí věty.

Z lineární algebry je známo, že L lze vyjádřit jako kompozici konečně mnoha „elementárních" lineárních zobrazení jednoho z následujících typů: $L_1(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, kde $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $L_2(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $j > i \in \mathbb{N}$, $L_3(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \ldots, x_n)$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $i, j \in \mathbb{N}$.

Protože determinant součinu matic se rovná součinu determinantů, stačí tvrzení ověřit pro „elementární" zobrazení. Ověříme na intervalech, L_1 ho jen natáhne o α, tedy na determinant násobek, L_2 „otočí" interval, ale λ^n se otočením nezmění, L_3 posune a zdeformuje interval, ale tím se λ^n nezmění (dokážeme přes Fubiniovu větu). Všechny 3 zobrazení stejně operují na prázdné množině, takže i na π systému $I \cup \{\emptyset\}$, tedy míry se rovnají všude.

2.

$$(L(\mu))(A) \overset{1.}{=} \mu(L^{-1}(A)) = |\det L|\lambda^n_{\mathcal{B}}(L^{-1}(A)) = |\det L| \cdot |\det L^{-1}|\lambda^n_{\mathcal{B}}(A) = \lambda^n_{\mathcal{B}}(A) \forall A \in \mathcal{B}^n,$$

tedy $L(\mu) = \lambda^n_{\mathcal{B}}$. Z předchozí věty pak plyne rovnost integrálů. □

Lemma 3.12

Buď $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zobrazení splňující Li. podmínku (tzn. $\exists C \in < 0, +\infty) : ||T(x) - T(y)|| \leq C||x - y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$). Je-li A λ^n-měřitelná, pak také $T(A)$ je λ^n-měřitelná množina.

Důkaz
Bez důkazu (není čas a důkaz je jednoduchý). □

Věta 3.13

Je-li L invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, pak

$$\int_{R^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L)|\det L| d\lambda^n,$$

má-li alespoň jedna strana smysl.

Tvrzení 3.14 (Opakování)

Je-li $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $T : G \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy C^1 na G, pak $Tx - Tx_0$, *kde $x_0 \in G$, lze lokálně aproximovat lineárním zobrazením, jehož matice je $(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x_0))_{i,j=1}^n$ a jehož determinant je $\mathrm{Jac}(T)(x_0)$.*

Lemma 3.15

$$\lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) = 0.$$

Důkaz

$\mathbb{R}^{n-1}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$, tedy je λ-měřitelná.

$$\mathbb{R}^{n-1} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,\varepsilon}, I_{k,\varepsilon} = (-k,k)^{n-1} \times \left(\frac{-\varepsilon}{(2k)^{n-1}} \frac{1}{2^k}, \frac{\varepsilon}{(2k)^{n-1}} \frac{1}{2^k} \right),$$

$$0 \leq \lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(I_{k,\varepsilon}) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{n-1} \frac{2\varepsilon}{(2k)^{n-1}} \frac{1}{2^k} = 2\varepsilon \implies \lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) = 0.$$

□

Věta 3.16 (O substituci)

Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ difeomorfimsus. Je-li $f : \varphi(G) \to \mathbb{R}$ λ^n-měřitelná funkce, pak

$$\int_G f(\varphi(x)) |\operatorname{Jac} \varphi(x)| dx = \int_{\varphi(G)} f(y) dy,$$

má li alespoň jedna strana smysl.

Důkaz

Bez důkazu. □