Organizační úvod

Poznámka
Podmínkou zápočtu je splnění 1 domácí práce a 1 písemného testu. Není potřeba docházka.

Bude moodle (přístup dají cvičící). Budou tam poznámky k přednášce, cvičebnice a bude se tam odevzdávat domácí práce.

Je dobré umět míru.

1 Úvod

Poznámka
Pravděpodobnost popisuje modely popisující náhodné jevy.

Statistika se pak snaží popsat reálné věci za pomocí těchto modelů.

Poznámka (Historie)
Klasická pravděpodobnost navazuje na dílo Kolmogorova, který popisoval axiomatickou pravděpodobnost.

2 Pravděpodobnostní prostor

Definice 2.1 (Pravděpodobnostní prostor, pravděpodobnost)

Pravděpodobnostní prostor je trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde Ω je neprázdná množina, $\mathcal{A}$ je σ-algebra a P je pravděpodobnost.

Pravděpodobnost P je množinová funkce $\mathcal{A} \to [0, 1]$ splňující:

- $P(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$, (nezápornost)
- $P(\Omega) = 1$, (normovanost)
- jsou-li $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, pak $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. ($\sigma$-aditivita)

Poznámka (Interpretace)
Ω se často nazývá stavový prostor a obsahuje všechny „realizace náhody“ neboli elementární jevy, tj. všechny možnosti, o kterých uvažuji.

$\mathcal{A}$ je σ-algebra náhodných jevů. P pak obsahuje veškerou informaci o té dané náhodné situaci.

Pokud nastal $\omega \in A \in \mathcal{A}$ ($\omega \in \Omega$), pak nastal jev A.

Definice 2.2 (Klasický pravděpodobnostní prostor, diskrétní pravděpodobnostní prostor, spojitý pravděpodobnostní prostor, indikátor)

Ω konečná, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $P(\{a\}) = \frac{1}{n}$ $\forall a \in \Omega$ je klasický pravděpodobnostní prostor.

Ω spočetná (včetně konečná), $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $p : \Omega \to [0,1]$ je taková, že $p(\omega) \geq 0$ $\forall \omega \in \Omega$ a $\sum_{\omega \in \Omega} = 1$. Položíme $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ nazýváme diskrétní pravděpodobnostní prostor.

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$) a $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ měřitelná, že $\int_\mathbb{R} g(x)dx = 1$, pak definujeme $P(B) = \int_B g(x)dx$, $b \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}$ je spojitý pravděpodobnostní prostor. Speciálním případem $g(x) = 1_{[0,1]}(x)$ je pak tzv. indikátor.

Definice 2.3 (Jev jistý, jev nemožný, podjev, zároveň, alespoň jeden, jev opačný, neslučitelné jevy)

Ω je jev jistý, $\emptyset$ je jev nemožný, $A \subset B$ znamená „A je podjev B“, $A \cap B$ znamená „nastal A a zároveň B“, $A \cup B$ znamená „nastal A nebo B“, A^C je jev opačný, $A \cap B = \emptyset$ jsou neslučitelné jevy.

Věta 2.1

Buďte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravděpodobnostní prostor a $A, B, A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in \mathbb{N}$) náhodné jevy. Pak platí:

- $P(\emptyset) = 0$;
- P *je konečně aditivní;*
- $P(A^C) = 1 - P(A)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$; *(monotonie)*
- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \implies P\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_i)$; *(spojitost)*
- $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \implies P\left(\bigcap_{i=1}^\infty A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_i)$; *(spojitost)*
- $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \wedge \bigcap_{i=1}^\infty A_i = \emptyset \implies \lim_{n\to\infty} P(A_i) = 0$; *(spojitost v nule)*
- $B \subset A \implies P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

Důkaz
Vše z míry. Pravděbobnost je konečná, předposlední bod vyplývá z předchozího. □