

1 Úvod

Definice 1.1 (Metrika, metrický prostor)

M množina, $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ je metrika, pokud $\forall x, y, z \in M$ platí:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$d(y, x) = d(x, y),$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Dvojice (M, d) se pak nazývá metrický prostor.

Definice 1.2 (Norma a normovaný lineární prostor (NLP))

Ať \mathbf{V} je vektorový prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, pak $\|\cdot\| : \mathbf{V} \rightarrow [0, \infty)$ je norma, pokud $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o},$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{F} : \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Dvojice $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ se pak nazývá normovaný lineární prostor.

Definice 1.3 (Otevřená a uzavřená koule)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $x \in \mathbb{M}$, $r > 0$. Pak otevřená koule o středu x a poloměru r je množina $B(x, r) := \{y \in \mathbb{M}; d(x, y) < r\}$. Uzavřená koule o středu x a poloměru r je množina $\overline{B}(x, r) := \{y \in \mathbb{M}; d(x, y) \leq r\}$.

Věta 1.1

$(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ je NLP pro $d \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$.

┌

Důkaz

1. krok: $B = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\|_p \leq 1\}$ je konvexní množina (tj. $\forall \lambda \in (0, 1) \forall x, y \in B : \lambda x + (1 - \lambda)y \in B$). Pro $p = \infty$:

$$\forall i \in [d] : |\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i| \leq \lambda|x_i| + (1 - \lambda)|y_i| \leq \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 = 1$$

Pro $p < \infty$:

$$\forall i \in [d] : |\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i|^p \leq \lambda|x_i|^p + (1 - \lambda)|y_i|^p,$$

protože $t \mapsto t^p$ je konvexní funkce. Dopočítáním obou nerovností získáme, že je to opravdu konvexní množina.

2. krok: Pokud $\|\cdot\|$ splňuje (i) + (ii) a B je konvexní, pak $\|\cdot\|$ je norma. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, BÚNO $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, položme $\tilde{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$, $\tilde{\mathbf{y}} := \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$, tedy:

$$\frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} = \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \tilde{\mathbf{x}} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \tilde{\mathbf{y}} \in B \text{ (zlomky jsou } \lambda, 1 - \lambda).$$

$$\left\| \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \right\| \leq 1 \implies \frac{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

3. $\|\cdot\|_p$ zřejmě splní (i) + (ii) a B je konvexní podle 1. kroku. Tedy $\|\cdot\|_p$ je norma. \square

Poznámka (Značení)

$$l_p^d := (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p).$$

Definice 1.4 (Konvergence)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost v \mathbb{M} , $x \in \mathbb{M}$. Pak (x_n) konverguje k x pokud $d(x_m, x)$ konverguje k 0. Píšeme $x_n \rightarrow x$ nebo také $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

2 Otevřené a uzavřené množiny

Definice 2.1 (Vnitřek, vnějšek, hranice)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP. $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak $x_0 \in \mathbb{M}$ je vnitřní bod $A \equiv \exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq A$. Dále vnitřek (interior) množiny A je množina

$$\text{int}(A) = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je vnitřní bod } A\}.$$

Dále $x_0 \in \mathbb{M}$ je vnější bod $A \equiv \exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$. Vnějšek (exterior) množiny A je množina

$$\text{ext}(A) = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je vnější bod } A\}.$$

Nakonec $x_0 \in \mathbb{M}$ je hraniční bod $A \equiv x \in \mathbb{M} \setminus (\text{int}(A) \cup \text{ext}(A))$. Hranice množiny A je množina

$$\partial A = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je hraniční bod } A\}.$$

Pozorování

Zřejmě $\text{int}(A) \subseteq A$.

Zřejmě $\text{ext}(A) = \text{int}(\mathbb{M} \setminus A) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$.

Definice 2.2 (Otevřená a uzavřená množina)

Buď (\mathbb{M}, d) MP a $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak A je otevřená $\equiv A \cap \partial A = \emptyset$.

Dále uzávěr množiny A je množina $\overline{A} = A \cup \partial A$. Množina A je poté uzavřená $\equiv \partial A \subseteq A$.

Pozorování

Zřejmě A je otevřená $\Leftrightarrow A = \text{int}(A)$.

Otevřená koule je otevřená množina.

Lemma 2.1

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subseteq N \times A : x_n \rightarrow x$. Zároveň následující podmínky jsou ekvivalentní:

$$a) A \text{ je uzavřená,} \quad b) A = \overline{A}, \quad \forall (x_n \in A) : x_n \rightarrow x \in \mathbb{M} \implies x \in A.$$

┌
Důkaz

\implies : Ať $x \in \overline{A}$. Pokud $x \in A$, polož $x_n = x$. Pokud $x \notin A$, pak $x \in \partial A$, tedy $\forall n \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Pak $x_n \rightarrow x$ ($0 \leq d(x_n, x) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$).

\Leftarrow Ať (x_n) je posloupnost v A , $x_n \rightarrow x$. Pokud $x \in A$, jsme hotovi. Pokud $x \notin A$, pak $\forall \varepsilon > 0 \exists r_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in B(x, \varepsilon) \cap A$. Tedy $x \in \overline{A}$.

$$a) \Leftrightarrow b) \quad A \text{ je uzavřená} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \partial A \subseteq A \Leftrightarrow A = A \cup \partial A = \overline{A}.$$

$$b) \implies c) \implies a) \quad A = \overline{A} \implies \forall (x_n) : x_n \rightarrow x \implies x \in A \quad \text{První část} \implies \partial A \subseteq A. \quad \square$$

Věta 2.2 (Základní vlastnosti otevřených množin)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP. Pak

(i) \mathbb{M} a \emptyset jsou otevřené.

(ii) Sjednocení libovolně mnoha otevřených je otevřený.

(iii) Průnik konečně mnoha otevřených je otevřený.

┌

Důkaz

(i) Triviální. (ii) $x \in \bigcup_i M_i$, pak $\exists j : x \in M_j$. Potom M_j je otevřená, tedy existuje $r > 0 : B(x, r) \subseteq M_j \subseteq \bigcup_i M_i$. Tedy $\bigcup_i M_i$ je otevřená. (iii) $x \in \bigcap_i M_i$, pak $\forall i \exists r_i : B(x, r_i) \subseteq M_i$. Polož $r = \min_i r_i > 0$ (protože i je z konečné množiny, tedy existuje minimum a to je jistě jeden z těch poloměrů, tedy > 0), pak $B(x, r) \subseteq \bigcap_i M_i$. Tedy $\bigcap_i M_i$ je otevřená. \square

└

Věta 2.3 (Vztah otevřená a uzavřené množiny)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $A \subseteq M$. Pak A je otevřená $\Leftrightarrow \mathbb{M} \setminus A$ je uzavřená.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Zvol (x_n) posloupnost v $\mathbb{M} \setminus A$, $x_n \rightarrow x$. Sporem. Nechť $x \in A$. Potom $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$, ale pak $\exists n : x_n \in A$. ∇ .

\Rightarrow : Zvol $x \in A$. Protože $\mathbb{M} \setminus A$ je uzavřená, tedy $\partial(\mathbb{M} \setminus A) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$, $x \notin \partial(\mathbb{M} \setminus A)$, tedy $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ (to nelze) nebo $B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{M} \setminus A) = \emptyset$. Tedy $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{M} \setminus A) = \emptyset$, tj. $B(x, \varepsilon) \subseteq A$, tedy A je otevřená. \square

└

Věta 2.4 (Základní vlastnosti uzavřených množin)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak

(i) \mathbb{M} a \emptyset jsou uzavřené.

(ii) Průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřený.

(iii) Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřené.

┌

Důkaz

Plyne z věty výše a de-Morganových pravidel. \square

└

Věta 2.5

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak $\text{int}(A) = \bigcup \{G \subseteq A \mid G \text{ otevřená}\}$. $\overline{A} = \bigcap \{F \supseteq A \mid F \text{ uzavřená}\}$.

┌ *Důkaz*

\subseteq : $x \in \text{int}(A) \implies \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$, stačí položit $G = B(x, \varepsilon)$.

\supseteq : Ať $G \subseteq A$ otevřená, pak $G = \text{int}(G) \subseteq \text{int}(A)$.

\subseteq : $x \in \overline{A}$, pak $\exists (x_n) \text{ v } A : x_n \rightarrow x$. Zvol $F \supseteq A$ uzavřená, pak $x_n \rightarrow x \in F$ (z uzavřené se nedá vykonvergovat).

\supseteq : Položme $F = \overline{A} \supseteq A$.

□

3 Spojitost v metrických prostorech

Definice 3.1 (Spojítost v bodě, spojitost, k -Lipschitzovskost, Lipschitzovskost)

Ať $(M, d), (N, e)$ jsou MP, $f : M \rightarrow N$, $a \in M$. Potom f je spojitá v $a \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : d(x, a) < \delta \implies e(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

f je spojitá na $M \equiv \forall a \in M : f$ je spojitá v a .

f je k -Lipschitzovská ($k > 0$) $\equiv \forall x, y \in M : e(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$.

f je Lipschitzovská $\equiv \exists k > 0 : f$ je k -Lipschitzovská.

Pozorování

f je k -Lipschitzovská $\implies f$ je spojitá.

Definice 3.2 (Značení)

Ať (M, d) je MP, $A \subseteq M$, $x \in M$. Pak $\text{dist}(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$.

Lemma 3.1

Ať (M, d) je MP, $A \subseteq M$. Pak

$$(i) \forall x \in M : d(x, A) = d(x, \overline{A}),$$

$$(ii) \forall x \in M : d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A},$$

$$(iii) \text{dist}(\cdot, A) : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ je } 1\text{-Lipschitzovská.}$$

┌

Důkaz

(i) \geq : Jasně (infimum přes menší množinu). \leq : Pro $n \in \mathbb{N}$ zvolme $y_n \in \bar{A}$: $d(x, y_n) < \text{dist}(x, \bar{A}) + \frac{1}{n}$. Zvolme dále $x_n \in B(y_n, \frac{1}{n}) \cap A$, pak $\text{dist}(x, A) \leq d(x, x_n) \leq d(x, y_n) + d(y_n, x_n) < \text{dist}(x, \bar{A}) + \frac{1}{n}$, celkem $\forall n \in \mathbb{N} : \text{dist}(x, A) < \text{dist}(x, \bar{A}) + \frac{2}{n} \implies \text{dist}(x, A) \leq \text{dist}(x, \bar{A})$.

(ii): BÚNO A je uzavřená (jinak podle (i)). \implies Jasně (do inf dosadíme x). $\implies \forall n \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ protože $d(x, A) = 0$. Pak ale $x_n \rightarrow x$, tedy $x \in A$ z uzavřenosti.

(iii): Zvolme $x, y \in \mathbb{M}$. BÚNO $d(x, A) \geq d(y, A)$. Fixujeme $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $y_n \in A$: $d(y, y_n) < \text{dist}(y, A) + \frac{1}{n}$. Pak

$$|d(x, A) - d(y, A)| = d(x, A) - d(y, A) < d(x, y_n) - \left(d(y, y_n) - \frac{1}{n}\right) \triangleq \frac{1}{n} + d(x, y).$$

\implies (n bylo libovolné, přejdeme k limitě) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq 1 \cdot d(x, y)$. □

Lemma 3.2

Ať (\mathbb{M}, d) je MP. Pak

(i) $\forall x \neq y \in \mathbb{M} \exists f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-Lipschitzovská, že $f(x) \neq f(y)$,

(ii) Projekce $\pi_i : (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p) \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_i$ jsou Lipschitzovské, $d \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$.

┌

Důkaz

(i) Zvol $f := d(\cdot, \{x\})$.

(ii) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d : |\pi_i(x_1, \dots, x_d) - \pi_i(y_1, \dots, y_d)| = |x_i - y_i|$

$$\leq \begin{cases} p = \infty : & \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty \\ p \neq \infty : & \sqrt[p]{\sum_{j=1}^d |x_j - y_j|^p} \end{cases}.$$

└

□

Tvrzení 3.3

Ať $(\mathbb{M}, d), (\mathbb{N}, e)$ jsou MP, $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) f je spojitá,

(ii) $f^{-1}(U)$ je otevřená, kdykoliv $U \subseteq \mathbb{N}$ je otevřená,

(iii) $f^{-1}(F)$ je uzavřená, kdykoliv $F \subseteq \mathbb{N}$ je uzavřená.

┌
Důkaz

(ii) \Leftrightarrow (iii): Z věty o doplňcích a toho, že $f^{-1}(\mathbb{N} \setminus U) = \mathbb{M} \setminus f^{-1}(U)$.

(i) \Rightarrow (ii): Necht $U \subseteq \mathbb{N}$ otevřená, $x \in f^{-1}(U)$. Pak $f(x) \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$. \Rightarrow (f spojitá) $\exists \delta > 0 : y \in B(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$, pak $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.

(ii) \Rightarrow (i): Necht $x \in \mathbb{M}, \varepsilon > 0$. Pak $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ je otevřená dle (ii). $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Tedy $d(x, y) < \delta \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$. \square

└

Definice 3.3 (Stejněměrná spojitost)

Ať (\mathbb{M}, d) a (\mathbb{N}, e) jsou MP, $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$. Pak f je stejněměrně spojitá, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \mathbb{M} : d(x, y) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Důsledek

f je stejněměrně spojitá $\Rightarrow f$ je spojitá. (Ale naopak to neplatí.)

f je Lipschitzovská $\Rightarrow f$ je stejněměrně spojitá. (Stejně tak tohle naopak neplatí.)

Definice 3.4 (Izometrie)

Ať (\mathbb{M}, d) a (\mathbb{N}, e) jsou MP, $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$. Pak f je izometrie, pokud $\forall x, y \in \mathbb{M} : d(x, y) = e(f(x), f(y))$.

Důsledek

Izometrie je 1-Lipschitzovská. (Ale ne naopak.)

Definice 3.5 (Homeomorfismus)

Ať (\mathbb{M}, d) a (\mathbb{N}, e) jsou MP, $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$. Pak f je homeomorfismus, pokud f je spojitá bijekce a f^{-1} je spojitá.

Důsledek

Izometrie na je homeomorfismus. (Ale opačně to neplatí.)

Lemma 3.4

I interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, že $|f'(x)| \leq C, \forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow f$ je C -Lipschitzovská.

┌

Důkaz

Ať $a < b \in I \Rightarrow$ (Lagrange) $\exists \zeta \in (a, b) : \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = |f'(\zeta)| \leq C$, tj. $|f(b) - f(a)| \leq C|b - a|$. \square

└

Definice 3.6 (Topologicky ekvivalentní)

Řekneme, že σ a σ_1 jsou topologicky ekvivalentní, pokud

$$\{A \subseteq \mathbb{Y} : A \text{ je otevřená v } (\mathbb{Y}, \sigma)\} = \{A \subseteq \mathbb{Y} : A \text{ je otevřená v } (\mathbb{Y}, \sigma_1)\}.$$

Tvrzení 3.5

Budte (\mathbb{X}, ϱ) , (\mathbb{Y}, σ) MP, $f : (\mathbb{X}, \varrho) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$ homeomorfismus. Definujeme pro všechna $y, y' \in \mathbb{Y}$ zobrazení $\sigma_1 \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \rightarrow [0, \infty)$ předpisem

$$\sigma_1(y, y') = \varrho(f^{-1}(y), f^{-1}(y')).$$

Pak σ_1 je metrika na \mathbb{Y} , $f : (\mathbb{X}, \varrho) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma_1)$ je izometrie a metriky σ a σ_1 jsou topologicky ekvivalentní.

┌

Důkaz

Metrika: Banální, cvičení pro nás. Izometrie: Necht $x, x' \in \mathbb{X}$ jsou libovolné body.

$$\sigma_1(f(x), f(x')) = \varrho(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(x'))) = \varrho(x, x'),$$

a tedy f je izometrie.

Topologická ekvivalence: Necht $U \subseteq \mathbb{Y}$ je otevřená vzhledem k σ . Pak $f^{-1}(U)$ je otevřená (f je homeomorfismus), ale f je izometrie, tedy f^{-1} je izometrie, tudíž f^{-1} je spojitá. Tj.

$$U = f(f^{-1}(U)) = (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(U)) \text{ je otevřená.}$$

Podobně pokud U je σ_1 -otevřená, je σ -otevřená.

└

□

Věta 3.6

Budte ϱ_1, ϱ_2 metriky na \mathbb{X} . Pak ϱ_1 a ϱ_2 jsou topologicky ekvivalentní \Leftrightarrow

$$(\forall x \in \mathbb{X} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{X} : \varrho_1(x, y) < \delta \implies \varrho_2(x, y) < \varepsilon) \wedge (\forall x \in \mathbb{X} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{X} : \varrho_2(x, y) < \delta \implies \varrho_1(x, y) < \varepsilon)$$

┌

Důkaz

└ Snadné cvičení.

□

Definice 3.7 (Diametr, omezená množina)

Bud (\mathbb{X}, ϱ) MP, $A \subseteq \mathbb{X}$. Definujeme $\text{diam}_\varrho(A) = \sup \{\varrho(x, y) : x, y \in A\}$.

Řekneme, že A je omezená, pokud $\text{diam}_\varrho(A) < \infty$.

Definice 3.8 (Omezená metrika)

ϱ je na \mathbb{X} omezená pokud \mathbb{X} je omezená.

4 Operace s metrickými prostory

Definice 4.1 (Operace)

Je-li (\mathbb{X}, ϱ) MP, $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$, pak metrický prostor $(\mathbb{Y}, \varrho|_{\mathbb{Y} \times \mathbb{Y}})$ nazýváme podprostorem prostoru (\mathbb{X}, ϱ) , značíme (\mathbb{Y}, ϱ) .

┌

Důkaz

Že (\mathbb{Y}, ϱ) je MP je zřejmé.

└

□

Tvrzení 4.1

Bud' (\mathbb{X}, ϱ) MP, $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$. Pak:

- 1) *Pokud $G \subseteq \mathbb{X}$ je otevřená v (\mathbb{X}, ϱ) , pak $G' = G \cap \mathbb{Y}$ je otevřená v (\mathbb{Y}, ϱ) .*
- 2) *Pokud $G' \subseteq \mathbb{Y}$ je otevřená v (\mathbb{Y}, ϱ) , pak $\exists G \subseteq \mathbb{X}$ otevřená v $(\mathbb{X}, \varrho) : G' = G \cap \mathbb{Y}$.*

┌

Důkaz

1) Necht' $y \in G'$. Protože G je otevřená v \mathbb{X} , tak $\exists r > 0 : B_{\mathbb{X}, \varrho}(y, r) \subseteq G$. Tedy $B_{\mathbb{Y}, \varrho}(y, r) = B_{\mathbb{X}, \varrho}(y, r) \cap \mathbb{Y} \subseteq G \cap \mathbb{Y} = G'$.

2) Necht' je dána G' otevřená v (\mathbb{Y}, ϱ) . Pak $\forall x \in G' \exists \varepsilon(x) > 0 : B_{\mathbb{Y}, \varrho}(x, \varepsilon(x)) \subseteq G'$. Zřejmě $G' = \bigcup_{x \in G'} B_{\mathbb{Y}, \varrho}(x, \varepsilon(x))$.

Položme $G = \bigcup_{x \in G'} B_{\mathbb{X}, \varrho}(x, \varepsilon(x))$. Potom je $G \cap \mathbb{Y} = G'$. G je otevřená, jelikož je sjednocením otevřených množin.

└

□

Definice 4.2 (Součet MP)

Mějme MP $\{\mathbb{X}_\alpha, \varrho_\alpha\}_{\alpha \in I}$, které splňují $\forall \alpha \in I \forall x, y \in \mathbb{X}_\alpha : \varrho_\alpha(x, y) \leq 1$. Sumou prostorů $(\mathbb{X}_\alpha, \varrho_\alpha)$ nazýváme prostor

$$\sum_{\alpha \in I} (\mathbb{X}_\alpha, \varrho_\alpha) = (\mathbb{X}, \varrho),$$

kde

$$\mathbb{X} = \coprod_{\alpha \in I} \mathbb{X}_\alpha = \{(x, \alpha) | x \in \mathbb{X}_\alpha, \alpha \in I\},$$

$$\varrho((x, \alpha), (y, \beta)) = 1, \text{ pokud } \alpha \neq \beta, \varrho_\alpha(x, y), \text{ pokud } \alpha = \beta.$$

Definice 4.3 (Součin (spočetně mnoha) MP)

Budte $\{\mathbb{X}_i, \varrho_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ MP, že $\forall i \in \mathbb{N} : \text{diam}(\mathbb{X}_i) \leq 1$. Součinem prostorů $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ nazýváme metrický prostor (je nutno, ale jednoduché dokázat)

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} := (\mathbb{X}, \varrho), \quad \mathbb{X} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{X}_i \wedge \forall f, g \in \mathbb{X} : \varrho(f, g) = \sum_{i=1}^* \frac{\varrho_i(f(i), g(i))}{2^i}.$$

Tvrzení 4.2

Budte $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$, $i \in \mathbb{N}$, MP, kde $\text{diam} \mathbb{X}_i \leq 1$. Necht $(\mathbb{X}, \varrho) = \prod_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ a budiž $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{X}$ posloupnost bodů v \mathbb{X} , $f \in \mathbb{X}$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ v $(\mathbb{X}, \varrho) \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i) = f(i)$ v $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Necht $f_n \rightarrow f$. Budiž dáno libovolné $i_0 \in \mathbb{N}$. Necht $\varepsilon > 0$. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\forall n \geq n_0 : \varrho(f_n, f) < \varepsilon \cdot 2^{-i_0}$. Tedy pro

$$n \geq n_0 : \varepsilon \cdot 2^{-i_0} > \varrho(f_n, f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} \geq \frac{\varrho_{i_0}(f_n(i_0), f(i_0))}{2^{i_0}},$$

tj. $\varrho_{i_0}(f_n(i_0), f(i_0)) < \varepsilon$. tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i_0) = f(i_0)$.

\Leftarrow : Necht $\forall i \in \mathbb{N} : f_n(i) \rightarrow f(i)$. Necht $\varepsilon > 0$. Najdeme $i_0 \in \mathbb{N}$, že $\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, i_0\}$ najdeme n_i , že $\forall n \geq n_i : \varrho_i(f_n(i), f(i)) < \frac{\varepsilon}{i_0}$. Položme $\tilde{n} := \max\{n_1, n_2, \dots, n_{i_0}\}$. Pak $n \geq \tilde{n}$: jest

$$\varrho(f_n, f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} = \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\varepsilon/i_0}{2} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

└

□

5 Totálně omezené a separabilní MP

Definice 5.1 (ε -sít, ε -separovanost, totální omezenost)

Bud (\mathbb{M}, d) MP, $A \subseteq \mathbb{M}$, $\varepsilon > 0$. Řekneme, že A je ε -sít pro \mathbb{M} , jestliže $\forall x \in \mathbb{M} \exists a \in A \forall x \in B(a, \varepsilon) : d(x, a) < \varepsilon$.

A je ε -separovaná, pokud $\forall x, y \in A : d(x, y) \geq \varepsilon$.

\mathbb{M} je totálně omezený, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subseteq \mathbb{M} : A$ je konečná ε -sít pro \mathbb{M} .

\mathbb{M} je separabilní, pokud $\exists A \subseteq \mathbb{M}$ spočetná: $\overline{A} = \mathbb{M}$. (Tj. A je hustá v \mathbb{M} .)

Věta 5.1

$MP(\mathbb{M}, d)$ je totálně omezený, právě když $\forall \varepsilon > 0$ je každá ε -separovaná množina konečná.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Necht $\varepsilon > 0$, $B \subseteq \mathbb{M}$ je ε -separovaná. Chceme B je konečná. Protože \mathbb{M} je TO, existuje konečná $\frac{\varepsilon}{4}$ -sít $A \subseteq \mathbb{M}$. Pro každé $x \in B$ zvolíme nějaký bod $a_x \in A : d(x, a_x) < \frac{\varepsilon}{4}$. Pak pro $x \neq y$, $x, y \in B$ platí $a_x \neq a_y$: $d(a_x, a_y) \geq d(x, y) - d(x, a_x) - d(y, a_y) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Tj. zobrazení $B \rightarrow A : x \mapsto a_x$ je prosté. Ale A je konečná tedy B je konečná.

\Leftarrow Necht $\varepsilon > 0$; chceme najít konečnou ε -sít. Vezmeme si $B \subseteq M$ ε -separovaná, která je maximální (co do inkluze). Tvrdíme, že B je automaticky ε sít: Zvolme $x \in \mathbb{M}$. Pak existuje $b \in B : d(x, b) < \varepsilon$. Kdyby ne: $\forall b \in B : d(x, b) \geq \varepsilon$. To by znamenalo, že $B \cup \{x\} \supset B$ je ε -separovaná, což je spor s maximalitou B . Tj. B je opravdu ε -sít pro \mathbb{M} .

Druhá část důkazu však potřebuje tzv. Zornovo lemma, abychom mohli brát B maximální. □

Věta 5.2

Bud (\mathbb{M}, d) MP , $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$. Pokud (\mathbb{M}, d) je TO , pak i (\mathbb{N}, d) je TO . (Tedy TO se zachovává na podprostory.)

┌

Důkaz

Necht $A \subseteq \mathbb{N}$ je ε -separovaná. Chceme: A je konečná. (Pak (\mathbb{N}, d) je TO podle V18). Ale $A \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$, tedy $A \subseteq \mathbb{M}$ je ε -separovaná v \mathbb{M} . Ale \mathbb{M} je TO , takže A musí být konečná. □

Věta 5.3

(\mathbb{M}, d) je MP , $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$. Je-li (\mathbb{N}, d) TO , pak $(\overline{\mathbb{N}}, d)$ je TO . (TO se zachovává na uzávěr.)

┌

Důkaz

$\varepsilon > 0$ dáno, chceme konečnou ε -sít v prostoru $(\overline{\mathbb{N}}, d)$. Necht $A \subseteq \mathbb{N}$ je konečná $\varepsilon/2$ -sít pro \mathbb{N} (ta existuje, neboť (\mathbb{N}, d) je TO). Chceme je ε -sít pro $(\overline{\mathbb{N}}, d)$. Zvolme libovolný bod $x \in \overline{\mathbb{N}}$. Chceme $\exists y \in A : d(x, y) < \varepsilon$.

Protože $x \in \overline{\mathbb{N}}$, existuje $z \in \mathbb{N} : d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože A je $\varepsilon/2$ -sít pro \mathbb{N} , existuje $y \in A : d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Tudíž A je ε -sít pro $\overline{\mathbb{N}}$. □

Věta 5.4

Necht $(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$, $\alpha \in I$ jsou MP , $\text{diam } M_\alpha \leq 1$, $\forall \alpha \in I$. Pak $\sum_{\alpha \in I} (\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ je $TO \Leftrightarrow I$ je konečná a $\forall \alpha \in I : (\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ je TO .

┌ *Důkaz*

\Rightarrow : Necht \sum je TO. Necht $\varepsilon > 0$. Pokud $\varepsilon \geq 1$, pak libovolná jednobodová množina je ε -sít. $\varepsilon < 1$. Necht $A \subseteq \sum(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ je konečná ε -sít. Položme $A_\alpha := \{x \in \mathbb{M}_\alpha \mid (x, \alpha) \in A\}$. Potom A_α je zřejmě ε -sít $(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$.

\Leftarrow : Podle předpokladů, pro dané $\varepsilon > 0$, $\forall \alpha \in I \exists A_\alpha \subseteq \mathbb{M}_\alpha$: A_α je konečná ε -sít (protože $(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ jsou TO). $A \cup_{\alpha \in I} A_\alpha \times \{\alpha\}$ je ε -sít pro $\sum_{\alpha \in I}(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$. \square

└

Věta 5.5

Necht (\mathbb{M}_i, d_i) jsou MP, $i \in \mathbb{N}$, a necht $\forall i : \text{diam } \mathbb{M}_i \leq 1$. Pak $(\mathbb{M}, d) = \prod_{i \in \mathbb{N}}(\mathbb{M}_i, d_i)$ je TO $\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : (\mathbb{M}_i, d_i)$ je TO.

┌ *Důkaz*

\Rightarrow : (Lze provést i důkaz přímo z definic) Zvolme $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \mathbb{M}$. Definujeme zobrazení $\varphi : (\mathbb{M}_i, d_i) \rightarrow (\mathbb{M}, d)$ tak, že $\varphi(x) = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots) \in \mathbb{M}$. Pak φ je izometrie. Tedy $(\mathbb{M}_i, \frac{d_i}{2^i})$ lze chápat jako podprostor (neboli izometrickou kopii podprostoru) (\mathbb{M}, d) . Ale \mathbb{M} je TO, tedy i jeho podprostor je TO.

\Leftarrow : Necht $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolíme $i_0 \in \mathbb{N} : \sum_{i=i_0}^\infty \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro $i \in \{1, \dots, i_0 - 1\}$ najdeme konečné $\varepsilon/2$ -sítě A_i pro \mathbb{M}_i . $S = \{(x_i) \in \mathbb{M} \mid x_i \in A_i, i \in \{1, \dots, i_0 - 1\} \vee x_i = a_i, i \geq i_0\}$. S je konečná, neboť $|S| \prod_{i=1}^{i_0-1} |A_i|$. S je ε -sít pro \mathbb{M} . \square

└