Mějme diferenciální rovnici

$$x'' + q(t) \cdot x = 0$$

na intervalu $I = (K, +\infty)$, $K > 0$.

Příklad (6.1)
Najděte všechna řešení rovnice $x''(t) + \frac{1}{ct^2}x(t) = 0$ na I, kde $c > 0$ je parametr.

Řešení
Hledáme fundamentální řešení ve tvaru $x(t) = t^a$. Dosadíme:

$$0 = x''(t) + \frac{1}{c \cdot t^2} \cdot x(t) = (t^a)'' + \frac{1}{c \cdot t^2} \cdot t^a = a \cdot (a-1) \cdot t^{a-2} + \frac{1}{c} \cdot t^{a-2} = t^{a-2} \cdot \left(a \cdot (a-1) + \frac{1}{c}\right)$$

Tedy $a \cdot (a-1) = -\frac{1}{c}$, tj. $a = \frac{1 \pm \sqrt{1-4/c}}{2}$. To jsou dvě fundamentální řešení, všechna řešení jsou pak lineární obal těchto.

Příklad
Ukažte, že je-li $q(t) \leqslant \frac{1}{4t^2}$ na I, pak má každé netriviální řešení rovnice nejvýše jeden nulový bod v I.

Důkaz
Rovnice $y''(t) + \frac{1}{4t^2}y(t) = 0$ má podle předchozího příkladu jedno z řešení $y(t) = t^{1/2} = \sqrt{t}$. Pokud by řešení původní rovnice mělo alespoň dva nulové body (na I), tak z $\frac{1}{4t^2} \geqslant q(t)$ musí mít $y(t)$ mezi těmito body také nulový bod ze Šturmovy věty. Ale $y(t)$ na I nulový bod nemá, tedy řešení původní rovnice má nejvýše jeden nulový bod. □

Příklad
Ukažte, že je-li $q(t) \geqslant \frac{1}{ct^2}$ na I pro nějaké $c < 4$, pak má každé netriviální řešení rovnice nekonečně mnoho nulových bodů v I.

Důkaz
Rovnice $y''(t) + \frac{1}{ct^2}y(t) = 0$ má pro $c < 4$ z prvního příkladu řešení t^a, kde a je komplexní číslo, tedy reálná řešení budou exponenciela krát sinusoida. Takže toto řešení bude mít nekonečně nulových bodů. Z $q(t) \geqslant \frac{1}{c \cdot t^2}$ a Šturmovy věty pak vyplývá, že i řešení původní rovnice musí mít nekonečně nulových bodů (neboť musí mít nulový bod mezi každými sousedními nulovými body řešení $y(t)$). □