

Organizační úvod

Poznámka (Zápočet)
Za vypracování domácích úloh.

Poznámka (Zkouška)
Písemná, ale Covid?

Úvod

MA je na rovném prostoru n . Naším cílem je vybudovat analýzu na nerovném? prostoru, tzv. varietě.

Poznámka (literatura)
Skripta – Krump, Souček, Těšínský: MA ve varietách
Sborník příkladů – Kopáček: Příklady z matematiky pro fyziky III.

1 Opakování

'Odvozovali' (přes limity velikosti rozdělení jdoucí k nule) jsme si:

Křivkový integrál 1. druhu, křivkový integrál 2. druhu. Integrální věty (pol. 19. stol, moderní formulace Cardan (1945)): Věta o potenciálu, Greenova věta

Plošný integrál 1. druhu, plošný integrál 2. druhu. Integrální věty: Stokesova věta, Gauss-Ostrogradského věta

2 Stokesova věta v n , diferenciální formy v n

Věta 2.1 (Moderní (= obecná) formulace Stokesovy věty = Cíl (Cartan 1945))

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

Kde S je buď 'singulární' -plocha v \mathbb{R}^n (tato část) nebo -varieta s okrajem (3. část).

2.1 Vnější algebra vektorového prostoru

Motivace: Jak násobit vektory z \mathbb{R}^n ?

Poznámka

Násobení na \mathbb{R}^n zachovává Euklidovskou normu (tzn. $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$) pouze v dimenzích 1, 2, 4, 8 (= \mathbb{R} , \mathbb{C} , kvaterniony, oktocykly).

Definice 2.1 (Algebra)

Algebra nad tělesem K (= \mathbb{R} nebo \mathbb{C}) je vektorový prostor nad K s bilineárním zobrazením \wedge ...

Algebra je asociativní, jestliže ano.

Algebra má jednotku, jestliže existuje (asi 1).

Definice 2.2

Nechť Λ je vektorový prostor nad K

Poznámka (Vlastnosti vnější algebry)

$\dim \Lambda^k = \binom{n}{k}$, protože každý vektor je určen báze vektory, kterých je jako podmnožin n prvků množiny

TODO

$$e_I \wedge e_J = 0, \text{ je-li } I \cap J \neq \emptyset \quad = \text{sgn}(\text{permutace}) e_{I \cup J}, \text{ je-li } I \cap J = \emptyset$$

Je-li $\omega \in \Lambda^k$ a $\tau \in \Lambda^l$, potom $\omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega \in \Lambda^{k+l}$.

┌

Důkaz

(Dokázat, že prohození je právě $k \cdot l$, následně z linearitě násobení)

□

Věta 2.2

Nechť je vektorový prostor s bází e_1, \dots, e_n . Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$, kde $1 \leq k \leq n$. Potom $v_i = \sum_{j=1}^n v_i^j e_j$ a označme $v_i = (v_i^j)_{j=1, \dots, n}$ je matice $n \times k$ jejich souřadnic (sloupec i je vektor v_i). Je-li J k -prvková podmnožina $\{1, \dots, n\}$, označ $W_J := (v_i^j)_{j \in J; i=1, \dots, k}$ (minor $k \times k$). Potom $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{|J|=k} (\det(W_J)) e_J$.

┌

Důkaz

Posčítáním. A dokázáním, že to je definice determinantu.

□

Definice 2.3 (Skalární součin na $\Lambda^*(V)$)

Nechť je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (symetrický) a e_1, \dots, e_n je ortonormální báze.

Definujeme skalární součin ve $\Lambda^*(V)$ jako:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

TODO!

Úmluva

V^n chápeme jako Euklidovský prostor se standardní bází e_1, \dots, e_n a TODO!

Například

Nechť R je rovnoběžnostěn v V^n určený vektory v_1, \dots, v_k , kde $1 \leq k \leq n$. Potom k -dimenzionální objem R je roven:

$$\text{vol}_k(R) = \|v_1 \wedge \dots \wedge v_k\|,$$

kde $\|x\|$ je euklidovská norma.

┌

Důkaz

└ TODO!

□

TODO TODO!

Definice 2.4 (Vektorový součin v V^n)

Nechť $v_1, \dots, v_{n-1} \in V^n$. Potom jejich vektorový součin $v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{n-1} \in V^n$ je definován jako $*(v_1 \times \dots \times v_{n-1}) = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$

┌

Poznámka

Ve skriptech označeno $[v_1, \dots, v_{n-1}]$.

└

┌

Poznámka (Platí)

$$v_1 \times \dots \times v_{n-1} = (-1)^{n-1} * (v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1})$$

$$\forall \omega \in V^n: \langle \omega, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle = \det(\omega | v_1 \cdots v_{n-1})$$

└

2.2 Rozložitelné k -vektory

Nechť je vektorový prostor. Nechť $\omega \in \Lambda^k()$. Položme

$$\ker \omega := \{v \in | \omega \wedge v = 0 \}.$$

Platí 1. $\ker \omega$ je podprostor

Definice 2.5 (Rozložitelné k -vektory)

$\omega \in \Lambda^k()$ je rozložitelný, pokud existují $v_1, \dots, v_k \in$ takové, že $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$.

Platí 2. $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0 \Leftrightarrow$ vektory v_1, \dots, v_k jsou lineárně nezávislé.

Platí 3. Nechť $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0$. Potom

$$\ker \omega = \text{LO}(v_1, \dots, v_k)$$

Definice 2.6

$$R_k() := \{ \omega \in \Lambda^k() \mid \omega \neq 0 \text{ rozložitelný} \}$$

$$G_k() := \{ L \mid L \text{ } k\text{-dimenzionální podprostor} \} \text{ (tzv. Grassmannian)}$$

Platí 4. Zobrazení $\varphi : R_k() \rightarrow G_k() : \omega \rightarrow \ker \omega$ je na, ale není prosté. Skutečně máme

$$\ker \omega = \ker \omega' \Leftrightarrow \exists \alpha \in ? : \omega' = \alpha \omega.$$

Například (Nerozložitelné k -vektory)

Platí 5. Pro $=^n$ jsou všechny 1-vektory, n -vektory i $(n-1)$ -vektory rozložitelné.

┌ Příklad

Rozložte $e_{123} + e_{124} + e_{234} \in \Lambda^3(4)$, kde $e_{123} = e_{\{1,2,3\}}$.

└

Musíme tedy hledat v 4 a „výše“.

┌ Příklad

Najděte nerozložitelný 2-vektor $\omega \in \Lambda^2(4)$

└

Poznámka (Projektivní prostor)

Mezi nejdůležitější Grassmanniany patří projektivní prostor:

Nechť je vektorový prostor. Polož $P(V) := \{1\text{-dimenzionální podprostor} \}$.

Tvrdíme $P() = G_1()$.

TODO?

Věta 2.3 (Plückerovo vnoření)

$$G_k() \rightarrow ?P(^{nnadk})$$

, je-li $\dim = n$

2.3 Diferenciální formy

$$x \in \mathbb{R}^n = (x_1, \dots, x_n)$$

Označme $T^*(\mathbb{R}^n)$ reálný vektorový prostor, jehož bázi tvoří symboly dx_1, \dots, dx_n tj.

$$T^*(\mathbb{R}^4) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Definice 2.7 (Diferenciální fomrma)

Diferenciální forma ω na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je zobrazení $\omega : \Omega \rightarrow \Lambda^*(T^*(\mathbb{R}^n))$ třídy \mathcal{S}^∞ (= je hladké).

Označme $\mathcal{E}^*(\Omega)$ vektorový prostor všech diferenciálních forem na Ω . Každé $a \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ lze jednoznačně psát jako

$$\omega(x) = \sum_I \omega_I(x) dx_I, \quad (1)$$

kde součet je přes všechny $I \subset \{1, \dots, n\}$, $\omega_I \in \mathcal{S}^\infty(\Omega)$ a $dx_I = dx_{i_1} \vee \dots \vee dx_{i_k}$ jsou-li prvky i_1, \dots, i_k množiny I uspořádány postupně

Definice 2.8 (Stupeň diferenciální formy)

Dále $\omega \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ má stupeň k (tzv. k -forma), pokud $\omega : \Omega \rightarrow \Lambda^k(T^*(\mathbb{R}^n))$ je hladké zobrazení. Označme $\mathcal{E}^k(\Omega)$ vektorový prostor všech k -forem na Ω .

┌

Poznámka

Každá $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ má tvar (1), kde je součet přes všechny $|I| = k$.

└

Zřejmě $\mathcal{E}^*(\Omega) = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{E}^k(\Omega)$ a $\mathcal{E}^0(\Omega) = \mathcal{S}^\infty(\Omega)$.

Definice 2.9 (Vnější násobení)

Na $\mathcal{E}^*(\Omega)$ definujeme vnější násobení

$$(\omega \vee \tau)(x) := \omega(x) \vee \tau(x), x \in \Omega, \omega, \tau \in \mathcal{E}^*(\Omega).$$

Definice 2.10 (Vnější (de Rhammův) diferenciál)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Potom definujeme zobrazení $d : \mathcal{E}^*(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ následovně:

(i) Je-li $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$, potom

$$(df)(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i, x \in \Omega$$

(ii) Nechť $\omega \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ je tvaru (1). Potom

$$d\omega := \sum_I (d\omega_I) \vee dx_I$$

┌
Například

$$\omega = e^{xy} dx + \cos(x+y) dy$$

$$d(e^{xy}) = e^{xy} y dx + e^{xy} x dy$$

$$(\cos(x+y)) = -\sin(x+y) dx - \sin(x+y) dy$$

$$d\omega = e^{xy} x dy \vee dx - \sin(x+y) dx \vee dy = -(xe^{xy} + \sin(x+y)) dx \vee dy$$

└

Poznámka

Nechť $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je i -tá souřadnice funkce, tzn. $\varphi_i(x) := x_i$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$d\varphi_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = dx_i.$$

Poznámka

V „rovném“ prostoru \mathbb{R}^n :

- tečný prostor $T_x(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$.
- kotečný prostor $T_x^*(\mathbb{R}^n) := (T_x(\mathbb{R}^n))^* \simeq (\mathbb{R}^n)^*$

Věta 2.4

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\omega, \tau \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ a $p = 0, \dots, n$. Potom platí

(i) $d(\omega + \tau) = d\omega + d\tau$ a $\forall \omega \in \mathcal{E}^p(\Omega) : d\omega \in \mathcal{E}^{p+1}(\Omega)$, kde $\mathcal{E}^{n+1}(\Omega) := \emptyset$.

(ii) Je-li $\omega \in \mathcal{E}^p(\Omega)$, potom $d(\omega \vee \tau) = d\omega \vee \tau + (-1)^p \omega \vee d\tau$.

(iii) $d(d\omega) = 0$.

┌ *Důkaz* (i) plyne z linearity \vee a definice.

(ii) Vzhledem k (i) stačí dokázat pro $\omega = \omega_I dx_I$ a $\tau = \tau_J dx_J$, kde $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, I je p -prvková a $I \cap J = \emptyset$.

Potom $d(\omega \vee \tau) = d(\omega_I \tau_J) \vee dx_I \vee dx_J$. Dále $d(\omega_I \tau_J) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\omega_I \tau_J)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J + \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} \right) dx_i$

Tedy $d(\omega \vee \tau) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J dx_i \vee dx_I \vee dx_J + \sum_{i=1}^n \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} dx_i \vee dx_I \vee dx_J$, kde musím v druhém členu posunout „ $d\tau$ “, k jeho dx_J

(iii) Pro $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ si to roznásobím a popáruji prohozené bázové vektory.

Díky (i) stačí rozbrat pro $\omega = \omega_I dx_I$, kde $I \subset \{1, \dots, n\}$. Potom $d(d\omega) = d(\omega_I dx_I)$, (dvojkou rozepíšu) a z první části a $d1 = 0$ je to rovno 0.

└

□

2.4 Přenášení diferenciálních forem pomocí zobrazení

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k$. V této části předpokládáme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $U \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená a $\varphi : U \rightarrow \Omega$ je hladké zobrazení.

Je tedy $x = \varphi(u)$, $u \in U$ a $x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_k)$, kde φ_i je i -tá složka φ .

Definice 2.11

Za předpokladů výše definujeme zobrazení $\varphi^* : \mathcal{E}^*(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^*(U)$ předpisem $\varphi^*(\omega) := \sum_I (\omega_I \circ \varphi) d\varphi_I$, kde $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$ je tvaru (1) a $d\varphi_I = d\varphi_{i_1} \vee \dots \vee d\varphi_{i_k}$, jsou-li prvky i_1, \dots, i_k uvnitř I uspořádány vzestupně.

┌

Poznámka

V souladu s definicí plošného integrálu 2. druhu.

└

Věta 2.5

Nechť φ je jako výše a $\omega, \tau \in \mathcal{E}^*(\Omega)$. Potom:

$$(i) \quad \varphi^*(\omega + \tau) = \varphi^*(\omega) + \varphi^*(\tau),$$

$$(ii) \quad \varphi^*(\omega \vee \tau) = \varphi^*(\omega) \vee \varphi^*(\tau),$$

$$(iii) \quad \varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*(\omega)).$$

$$(iv) \quad \text{Je-li } V \subset \mathbb{R}^l \text{ otevřená a } \psi : V \rightarrow U \text{ je hladká, potom } (\varphi \circ \psi)^*(\omega) = (\psi^* \circ \varphi^*)(\omega).$$

$$v \text{ Je-li } k = n, \omega \in \mathcal{E}^n(\Omega) \text{ a } \omega = f dx_1 \vee \dots \vee dx_n, \text{ potom } \varphi^*(\omega) = (f \circ \varphi) \det(\text{Jac } \varphi) du_1 \vee \dots \vee du_n, \text{ kde } \text{Jac } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \text{ je Jacobiho matice } x = \varphi(u).$$

┌ *Důkaz*
└ Jednoduchý.

□

Definice 2.12 (Uzavřené a exaktní formy)

Formule $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ se nazývá uzavřená, je-li $d\omega = 0$ a exaktní, existuje-li $\tau \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ takové, že $d\tau = \omega$.

Poznámka (Platí)

Je-li ω exaktní, potom je uzavřená.

Lemma 2.6 (Poincarého lemma)

Nechť Ω je otevřená koule v \mathbb{R}^n . Potom pro $k > 0$ každé $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, která je uzavřená, je i exaktní.

┌ *Poznámka*

Platí i pro hvězdovité (znáte z analýzy) nebo jednoduše souvislé (dá se stáhnout do bodu) oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Poznámka (Poncarého lemma platí pouze pro dané oblasti)

Nechť $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Potom $\omega := \frac{x}{x^2+y^2} dy - \frac{y}{x^2+y^2} dx \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ je uzavřená, ale není exaktní.

Definice 2.13 (De Rhanův komplex)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, potom

$$\mathcal{E}^0(\Omega) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(\Omega) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n(\Omega)$$

je komplex (tzn. posloupnost vektorových prostorů a lineární zobrazení mezi nimi s vlastností, že každá složka dvou po sobě jdoucích zobrazení je triviální (zde, $d \circ d = 0$, splněno))

TODO!

2.5 Stokesova věta pro řetězce

Poznámka (Cíl)

$$\int_C k\text{-dim. řet. v } \mathbb{R}^n d\omega = \int_{\partial C} (k-1)\text{-dim. } \omega$$

Definice 2.14

Nechť $E \in \mathbb{R}^k$ (je libovolná). Potom zobrazení $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ nazvěme hladké, pokud existuje otevřená $O \subset \mathbb{R}^k$ a $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^k$ hladké zobrazení takové, že $E \subset O$ a $\varphi = \Phi|_E$. Navíc Φ nazveme hladkým rozšířením φ . (\leftarrow Whitneyho rozšiřovací věta.)

Definice 2.15

Nechť $I_k = [0, 1]^k \subset \mathbb{R}^k$. Potom k -dimenzionální singulární krychle v \mathbb{R}^n rozumíme hladké zobrazení $I_k \rightarrow \mathbb{R}^n$. Píšeme $\langle \varphi \rangle = \varphi(I_k)$.

Poznámka

$\langle \varphi \rangle$ je 'hladká deformace' k -dimenzionální krychle, může být singulární, např. bod (je-li φ konet).

Definice 2.16

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená.

(i) Nechť $\omega \in {}^n(\Omega)$ a $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, kde $f \in \infty(\Omega)$. Je-li $E \subset \Omega$, potom definujeme

$$\int_E \omega = \int_E f d\lambda^n,$$

pokud int. vpravo existuje jako Lebesgueův vůči Lebesgueově míře λ^n na \mathbb{R}^n .

Pro $n = 0$ definujeme $\int f = 0$

(ii) Nechť $k = 0, \dots, n$ a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Nechť φ je k -dimenzionální supul? krychle v Ω (tzn. $\langle \varphi \rangle \in \Omega$).

Položme $\int_\varphi \omega := \int_{I_k} \Phi * (\omega)$, je-li $\Phi : O \rightarrow \Omega$ hladké rozšíření φ .

Poznámka

Definice (ii) je v pořádku, protože takové Φ vždy existuje (jinak $\varphi|_{\sigma_n \Phi^{-1}(\Omega)}$) a hodnota $\int_\varphi \omega$ nezávisí na hladkém rozšíření φ . Skutečně pro jiné takové hladké rozšíření Φ mějmé?, že

$$\Phi = \varphi = \psi \text{ na } I_k^0$$

$$\Phi * (\omega) = \psi * (\omega) \text{ na } I_k^0$$

$\Phi * (\omega) = \psi * (\omega)$ ze spojitosti funkcí Φ, ψ a jejich 1. parciálních derivací.

Úmluva

Často budeme ztotožňovat φ s Φ .

Věta 2.7 (Integrál nezávisí na parametrizaci, jen na orientaci)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Nechť $I_k \subset O, O' \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené a $\alpha : O' \rightarrow O$ (na) je hladký difeomorfismus (tzn. α i α^{-1} jsou hladká zobrazení), $\alpha(I_k) = I_k$. Nechť $\varphi : O \rightarrow \Omega$ je hladké a $\varphi' := \varphi \circ \alpha$.

Potom $\int_{\varphi'} \omega = \Theta \int_{\varphi} \omega$, kde $\Theta = +1$, je-li $J_{\alpha} := \det(\text{Jac}(\alpha)) > 0$ na I_k , $\Theta = -1$, je-li $J_{\alpha} := \det(\text{Jac}(\alpha)) < 0$ na I_k .

┌

Důkaz

Víme, že $J_{\alpha} \neq 0$ na O' . Tedy J_{α} (spojité funkce) nemění na I_k znaménko. TODO! □

└

TODO!

Věta 2.8 (Stokes)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Důkaz

Nechť $k = n$ a $C = I_n$. Potom $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\Omega)$ má tvar $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i$, kde $\omega_i = (-1)^{i+1} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$ a $f_i \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$.

Potom $d\omega_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ a

$$\int_{I_n} d\omega_i = \int_{[0,1]^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n \stackrel{\text{Fubini (věta) + Newtonův vzorec v } x_i}{=}$$

$$= \int_{[0,1]^{n-1}} (f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n =$$

$$(-1)^{i+1} \left(\int_{I_{(i,1)}^n} \omega_i - \int_{I_{(i,0)}^n} \omega_i \right) = \int_{\partial I_n} \omega_i,$$

protože $\int_{I_{j,\alpha}^n} \omega_i = 0$ pro $j \neq i$. Tedy $\int_{I_n} d\omega = \int_{\partial I_n} \omega$.

(2.) Nechť $c = \cos i$. Potom $\cos i$ □

Příklad (Singulární homologie Ω)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Dokažte, že pro každý k -řetězec $c \in C_k(\Omega)$ je $\partial c \in C_{k-1}(\Omega)$ a $\partial(\partial c) = 0$.

Důkaz

Nahlédneme, že každá část potenciální hranice se jednou „přičte“ a jednou „odečte“.

□

Věta 2.9 (De Rhamova (hluboká!))

Máme tedy $C_0(\Omega) \xleftarrow{\partial} C_1(\Omega) \xleftarrow{\partial} \dots \xleftarrow{\partial} C_n(\Omega)$.

Označme

$$Z_k(\Omega) := \{c \in C_k(\Omega) \mid \partial c = 0\} \text{ tzv. } k\text{-cykly}$$

Poznámka (Ze cvičení)

Nechť S je libovolná množina (i nekonečná). Potom volnou Abelovou grupou $\mathbb{Z}(S)$ generovanou S rozumíme grupu

$$\mathbb{Z}(S) := \{f' : S \rightarrow \mathbb{Z} \mid f(s) \neq 0 \text{ pro konečně mnoho } s \in S\}$$

s operací $(f + g)(s) := f(s) + g(s)$, $s \in S$.

Zřejmě každá $f \in \mathbb{Z}(S)$ lze jednoznačně psát jako $f = \sum_{s \in S} n_s z_s$, kde $n_s \in \mathbb{Z}$, $n_s \neq 0$ pro konečně $s \in S$ a $z_s(t) := 1, t = s$; $z_s(t) := 0, t \neq s$. Píšeme často s místo z_s

Poznámka (Ze cvičení)

Nechť S je libovolná množina. Položme $\mathbb{R}(S) := \{f : S \rightarrow \mathbb{R} \mid f(s) \neq 0 \text{ pro konečně } s \in S\}$. Potom $\mathbb{R}(S)$ je vektorový prostor nad \mathbb{R} s operacemi $(f + g)(s) := f(s) + g(s)$ a $(r \cdot f)(s) := r \cdot f(s)$, $f, g \in \mathbb{R}(S)$, $s \in S$ a $r \in \mathbb{R}$.

Dále $\mathbb{R}(S)$ má bázi $\{z_s \mid s \in S\}$, kde $z_s(t) := 1, t = s$; $z_s(t) := 0, t \neq s$.

3 Variety, Stokesova věta na varietách

3.1 Tenzory

Úmluva

Všechny vektorové prostory budou nad reálnými čísly a konečnědimenzionální.

Definice 3.1

Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor.

Jeho k -tou tenzorovou mocninou \mathbf{V}^k definujeme jako $\mathbf{V}^k := \mathcal{L}(\mathbf{V}^*, \dots, \mathbf{V}^*)$, kde položíme $\mathbf{V}^0 = \mathbb{R}$ a ztotožňujeme $\mathbf{V}^1 = \mathbf{V} * \mathbf{V}$.

Jeho tenzorovou algebru definujeme jako $T(\mathbf{V}) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbf{V}^k$. Násobení \otimes na $T(\mathbf{V})$ definujeme následovně:

- a) Je-li $\alpha \in \mathbf{V}^k$ a $\beta \in \mathbf{V}^m$, TODO
- b) násobení \otimes rozšíříme na $T(\mathbf{V})$ bilineárně TODO

Tvrzení 3.1 (Vlastnosti $T(\mathbf{V})$)

Je to ∞ -dimenzionální, nekomutativní, asociativní algebra s jednotkou $1 \in \mathbf{V}^0 = \mathbb{R}$.

Nechť \mathbf{V} má bázi e_1, \dots, e_n . Potom \mathbf{V}^k má bázi $e_A := e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_k}$, kde $A = (a_1, \dots, a_k) \in \{1, 2, \dots, n\}^k$. Speciálně $\dim \mathbf{V}^k = (\dim \mathbf{V})^k = n^k$.

┌
Důkaz
Triviální.

Nechť $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ je duální báze \mathbf{V}^* , tzn. $\varepsilon^i(e_j) = \delta_j^i = 1, i = j; = 0, i \neq j$.

Nechť $\sum_A \alpha^A e_A = \mathbf{o}$ s $\alpha^A \in \mathbb{R}$. Potom $\mathbf{o} = \sum_A \alpha_A (\varepsilon^{b_1}, \dots, \varepsilon^{b_k}) = \alpha_B$ TODO. □

Úmluva (Einsteinova sumační konvence)

V tenzorovém počtu vynecháváme symbol \sum pro každý index od 1 do n , který je „nahore i dole“. Ale příliš ji nebudeme používat.

Tvrzení 3.2 (Změna souřadnic tenzoru při změně báze)

Nechť e'_1, \dots, e'_n je jiná báze \mathbf{V} a nechť $E = (E_b^a)$ je matice přechodu od e_1, \dots, e_n k e'_1, \dots, e'_n , tzn.

$$e'_b = E_b^a e_a.$$

┌
Důkaz
Dosadíme (1) a (2) do

$$\alpha'_{b_1, \dots, b_r}{}^{a_1, \dots, a_s} = \alpha(\varepsilon'^{a_1}, \dots, \varepsilon'^{a_s}, e'_{b_1}, \dots, e'_{b_r})$$

└ □

Definice 3.2 (Symetrická a vnější algebra)

Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor. Nechť S_k je grupa permutací $\{1, 2, \dots, k\}$.

Potom $\alpha \in \mathbf{V}^k$ je symetrický, resp. antisymetrický, pokud $\forall f^1, \dots, f^k \in \mathbf{V} * \forall \pi \in S_k : \alpha(f^{\pi(1)}, \dots, f^{\pi(k)}) = \alpha(f^1, \dots, f^k)$ (resp. přenásobené $\text{sgn } \pi$). Označme Sym_k TODO.

Definice 3.3 (Symetrická algebra)

Symetrickou algebrou vektorového prostoru \mathbf{V} rozumíme algebru $(\mathbf{V}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} {}^k(\mathbf{V})$ s násobením definovaným následovně:

Je ... TODO

Definice 3.4 (Vnější algebra podruhé)

TODO

3.2 Topologické prostory

Viz Topologie: Definice topologie, topologie generovaná metrikou, uzavřená množina, okolí, vnitřek, uzávěr, hranice, topologický podprostor, Hausdorffův prostor (a to, že metrický prostor je Hausdorffův), indiskrétní τ_0 a diskrétní τ_1 topologie, τ_0 není pro více jak jednoprvkovou množinu hausdorffova, báze, spojitě zobrazení, homeomorfismus, kompaktnost, souvislost, spojitost funkce v bodě, spojitý obraz kompaktního (resp. souvislý) prostoru je kompaktní (resp. souvislý)

3.3 Variety

Definice 3.5 (Varieta)

TODO jestliže

1. \mathbb{X} je lokálně homeomorfní s \mathbb{R}^n , tzn. pro každé $x \in \mathbb{X}$ existuje otevřená $x \in U \subset \mathbb{X}$ a homeomorfismus φ množiny U na $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$
2. \mathbb{X} je Hausdorffův a
3. \mathbb{X} má spočetnou bázi a TODO.

Například

Tvorba základních dvourozměrných variet: viz tématko Topologie v M&M.

Definice 3.6 (Mapa)

Nechť (\mathbb{X}, τ) je topologická varieta dimenze n . Potom mapou (lokálním souřadnicovým systémem) na (\mathbb{X}, τ) nazveme (U, φ) , kde $U \subset \mathbb{X}$ je otevřené a φ homeomorfismus? TODO.

Nechť (V, ψ) je jiná mapa na \mathbb{X} . Potom buď $U \cap V = \emptyset$, nebo $U \cap V \neq \emptyset$ a tzv. přechodové funkce $\psi \circ \varphi^{-1}$ TODO

Definice 3.7 (Atlas)

System map $\mathcal{A} = \{\}$ TODO

TODO

Poznámka

Každý topologický prostor \mathbb{X} , který se dá pokrýt spočetně mnoha mapami, má spočetnou bázi otevřených množin.

Obecněji: Nechť $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ je varieta dimenze n . Je-li $Y \subset \mathbb{X}$ otevřená, potom

$$\mathcal{A}_Y := \{(U \cap Y, \varphi|_{U \cap Y}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

je atlas na Y a (Y, \mathcal{A}_Y) je varieta dimenze n .

Příklad

Rozmysli si, že 2rozměrné plochy v \mathbb{R}^3 zavedené a studované v přednášce z Geometrie v LS jsou příklady hladkých variet dimenze 2. (Ale s trochu jiným pojmem mapy.)