Organizační úvod

Poznámka (složení předmětu)
Předmět má přednášku, cvičení a proseminář z Matematické analýzy.

Poznámka (Motivace)
TODO

Poznámka (Jak studovat)
Studujte průběžně, ptejte se…

Poznámka (Literatura)

- skripta – viz homepage
- příklady – Koláček & spol. – Příklady z matematické analýzy pro fyziky 1, 2, 3
- další příklady – viz homepage

Motivace

Poznámka (Používá se v)

- Fyzice (viz pohyb planet, např. Proč obíhají planety po elipsách?)
- Ekonomii (viz úroky, např. Lze předpovědět změny úroků v ekonomice a na burze?)
- Meteorologii (např. Jak ovlivňují teplé mořské proudy počasí v Evropě?)
- Lékařství (např. Jak dlouho bude koncentrace léku v krvi na účinné úrovni?)
- Epidemiologie (např. Proč se epidemie šíří nejprve rychle a potom pomalu?)
- Architektura (viz mosty (vibrace), např. Jak se ujistit, že most nespadne v bouři?)
- Inženýrství (viz letadla, např. Jak zkonstruovat nové křídlo pro letadlo? (Většina peněz i času při konstrukci jsou simulace.))

- Informatika (viz MP3, JPEG, např. Jak uchovat informaci o dané funkci v co nejmenším počtu čísel? (Používá se Fourierova transformace = převod funkce na siny a cosiny))

Poznámka (Proč se analýzu učíme my?)

- Abychom uměli látku (hledat extrémy funkcí, umět integrovat)
- Měli solidní matematické základy
- Přečíst návod, jak používat nějaké matematické modely (např. Uplatnění v bance – MFF nese mnoho peněz (nejvíce žádané práce jsou práce stylu statistik))
- Myslet, analyzovat, nedělat chyby (nezapomínat na další možnosti)
- Abychom se naučili způsob myšlení – matematici / matematičky dělají činnosti lépe (ze dvou lidí, co ji neumí, je matematik ten, kdo ji zvládne lépe, nikoliv ten druhý.)

1 Úvod

Dosti možná spíše opakování střední

1.1 Výroky

Definice 1.1 (Výrok)

Tvrzení, o kterém má smysl říct, že je pravdivé, či ne.

Například
„Obloha je modrá.“
„Vídeň je hlavní město ČR.“

Poznámka (Vytváření nových výroků)
Děje se pomocí spojek a, nebo, implikací, ekvivalencí, atd.

A	B	konjunkce $A\&B$	disjunkce AvB	implikace $A \implies B$	ekvivalence $A \Leftrightarrow B$	negace A $\neg A$
0	0	0	0	1!	1	1
0	1	0	1	1!	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

$A \implies B$ = A je postačující podmínka pro B = B je nutná podmínka pro A.

Například (Pravdivé výroky)
$1 = 2 \implies 2 = 3$
já jsem papež $\implies$ všechna letadla jsou modrá

Příklad

- $$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg B \implies \neg B$$
- $$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg(A \& \neg B))$$
- $$\neg(A \& B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$
- $$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \& \neg B)$$
- $$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \implies B) \& (B \implies A)$$

Definice 1.2 (Kvantifikátory)

Dále existují tzv. kvantifikátory: Obecný (= pro všechna) $\forall$ a Existenční (= existuje) $\exists$.

Úmluva
$\forall x \in \mathbb{N}, x > 10\ A(x)$ značí $\forall x \in \mathbb{N}(x > 10 \implies A(x))$

Například

- Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$ je: $\forall x \in M : A(x)$
- Existuje $x \in M$ tak, že platí $A(x)$ je $\exists x \in M : A(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m$

Například (Negace výroků)

- $\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$
- $\neg(\exists x \in M : A(x) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$
- $\neg$(Nikdo mě nemá rád.) $\Leftrightarrow$ Existuje alespoň jeden člověk, který mě má rád.
- $\neg(\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \neg(\forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$$

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \neg(\exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$$

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n + m)$$

Pozor
Na pořadí kvantifikátorů záleží!

Například
M...Muži
Ž...Ženy
L(m, ž)...muži m se líbí žena ž

$$\forall m \in M\ \exists \in\ : L(m,)$$

$$\exists \in\ \forall m \in M : L(m,)$$

První je, že pro každého muže existuje nějaká žena, která se mu líbí, naopak druhá říká, že existuje žena, která se líbí všem mužům.

1.2 Metody důkazů tvrzení

Definice 1.3 (Důkaz sporem)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow \neg(A \& \neg B)$$

Například ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)
($A : x = \sqrt{2}$, $B : x \notin \mathbb{Q}$)

Důkaz (Důkaz sporem:)
Nechť $x = \sqrt{2}$ a $x \in \mathbb{Q}$. $x \in \mathbb{Q} \implies x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$, nesoudělná.
$x^2 = 2$, $2 = x^2 = \frac{p^2}{q^2} \implies 2q^2 = p^2 \implies p = 2k \implies 2q^2 = 4k^2 \implies q^2 = 2k^2 \implies q = 2l$
$p = 2k \ \& \ q = 2l \implies p$ a q soudělná. ↯ □

Definice 1.4 (Přímý důkaz)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (A \implies C_1 \implies C_2 \implies \dots \implies C_n \implies B)$$

Například

$$n^2\text{liché} \implies n\text{liché}$$

Důkaz

$$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k \implies n^2 = p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_k^2$$
$$n^2\text{liché} \implies 2 \nmid p_1 \ \& \ \dots \ \& \ 2 \nmid p_k \implies n\text{liché}$$

□

Definice 1.5 (Nepřímý důkaz)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg B \implies \neg A)$$

Například

$$n^2\text{liché} \implies n\text{liché}$$

Důkaz

$$n\text{sudé} \Leftrightarrow n = 2k \implies n^2 = 4k^2 \implies n^2\text{sudé}$$

□

Definice 1.6 (Matematická indukce)

$$(\forall n \in \mathbb{N} : V(n)) \Leftrightarrow (V(1) \;\&\; \forall n \in \mathbb{N} : V(n) \implies V(n+1))$$

Například

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} n \cdot (n+1)$$

Důkaz
1. $n = 1$: $1 = \frac{1}{2} 1 \cdot 2$
2.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \implies \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1) \cdot (n+2)$$

□

Příklad
Všechna auta mají stejnou barvu.

Důkaz
1. $n = 1$: Jedno auto má stejnou barvu jako ono samo.
2. $n \to n+1$: vezmu prvních n aut, ty mají stejnou barvu, vezmu posledních n aut, ty mají také stejnou barvu. Tedy dohromady mají stejnou barvu. □

(Spoiler: $n = 2$)

1.3 Množina reálných čísel

Poznámka (Množiny čísel)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

Definice 1.7 (Omezená množina)

Nechť $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}$. Řekněme, že $\mathbb{M}$ je omezená shora (omezená zdola), jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ = horní (dolní) závora tak, že pro všechna $x \in \mathbb{M}$ platí $x \leq a$ ($x \geq a$).

Definice 1.8 (Supremum a infimum)

Nechť $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}$ je shora (zdola) omezená. Číslo $s \in R$ nazýváme supremem (infimem) $\mathbb{M}$, pokud:

$$\forall x \in \mathbb{M} : x \leq s (s \geq x)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < s (y > s) \exists x \in \mathbb{M}, y < x (x > y)$$

Například

- $\sup [0, 1] = 1$ (dokázat obě podmínky pro 1 (x z druhé podmínky volím 1)...)
- $\sup(0, 1) = 1$ (taktéž dokázat obě podmínky pro 1 (pozor na záporná y) (x z druhé podmínky zvolíme často $\frac{s+y}{2}$))

Definice 1.9 (Reálná čísla)

Na množině $\mathbb{R}$je dána relace $\leq$ ($\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), operace sčítání $+$ a operace násobení $\cdot$ a množina $\mathbb{R}$obsahuje prvky 0 a 1 tak, že platí:

Viz skripta (takové ty tělesové / grupové podmínky, podmínky uspořádání a *existence suprema*)

Věta 1.1 (o existenci infima)

Nechť $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}$ *je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje* $\inf \mathbb{M}$.

Důkaz
Označme $-\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{M}\}$. Zřejmě $\mathbb{M} \neq \emptyset$. $\mathbb{M}$ je zdola omezená $\implies$ $-\mathbb{M}$ je shora omezená. ($\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{M} x > K \implies \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in -\mathbb{M} x < -K$). Z axiomů $\mathbb{R}$tedy existuje $s = \sup -\mathbb{M}$. Položme $i = -s$. Tvrdím $i = \inf M$. (Dokážeme z definice suprema a infima, viz skripta). $\square$

Věta 1.2 (Archimedova vlastnost)

Ke každému $x \in \mathbb{R}$ *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *tak, že* $x < n$

Důkaz (Sporem)

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} x \geq n$$

Tedy $\mathbb{N}$ je omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Tedy existuje $x' \mathbb{R} x" = \sup \mathbb{N}$. Tedy $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq x'$. Pak také $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 \leq x'$. To ale tvrdí, že $x' - 1$ je také $\sup \mathbb{N}$. To je ale spor, protože můžeme zvolit $y = x' - \frac{1}{2}$, pak $y < x'$, tedy z druhé vlastnosti suprema $\exists n \in \mathbb{N} : x' - \frac{1}{2} < n$, ale zároveň už víme, že $\forall n \in \mathbb{N} : n < x' - 1$. □

Věta 1.3 (Hustota $\mathbb{Q}$a $\mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$)

*Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Pak existují $q \in \mathbb{Q}$ a $\in \mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$ tak, že $q \in (a, b)$ a $r \in (a, b)$.*

Důkaz
Podle $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{b-a} < n$, tedy $\frac{1}{n} < b - a$. Zvolme $q = \frac{\lceil an \rceil + 1}{n}$, pak jistě $a < q < b$ a $q \in \mathbb{Q}$.

Poté použijeme $q_1 \in (a, b)$ a $q_2 \in (q_1, b)$. Zvolme $r = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}}$. Pak (jelikož druhá část je kladná) $r > q_1$. A $r < q_2 \Leftrightarrow q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}} < q_2 \Leftrightarrow \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}} < q_2 - q_1$.

Tedy $r \in (a, b)$ a $r \in \mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$, jelikož $r = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}} = p \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{2} = \frac{q_2 - q_1}{p - q_1}$, ale levá strana je jistě iracionální a pravá racionální. Spor. □

Věta 1.4 (O n-té odmocnině (BD = bez důkazu))

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, \infty)$, pak existuje právě jedno $y \in [0, \infty)$ tak, že $y^n = x$.

Důkaz
Idea: Položme $\mathbb{M} = \{z \in \mathbb{R}\}$. Ukážeme, že $\mathbb{M} \neq \emptyset$ shora omezená $\implies \exists s = \sup \mathbb{M}$. Nyní ukážeme $s^n = x$. □

1.4 Krátký výlet do nekonečna

Definice 1.10 (Mohutnost množin)

Řekněme, že množiny $\mathbb{A}$a $\mathbb{B}$mají stejnou mohutnost, pokud existuje bijekce $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$. Značíme $\mathbb{A} \approx \mathbb{B}$.

Řekněme, že množina $\mathbb{A}$má mohutnost menší, nebo rovnu mohutnosti $\mathbb{B}$, pokud existuje prosté zobrazení $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$. Značíme $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$.

Řekněme, že množina $\mathbb{A}$má menší mohutnost než $\mathbb{B}$, pokud $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, ale neplatí $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$.

Značíme $\mathbb{A} \prec \mathbb{B}$

Například
1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$ (prosté z $\mathbb{N}$do $\mathbb{Z}$je triviální, opačně si očísluji $\mathbb{Z}$)
2) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$: $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ (obdobně, čísluji diagonálně)
3) $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$: $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ (důkaz sporem, přes diagonálu, vezmu první desetinou cifru z $f(1)$, druhou z $f(2)$... a pozměním je...)

Tvrzení 1.5 (Viz proseminář)

$\mathbb{A} \preceq \mathbb{B} \wedge \mathbb{B} \preceq \mathbb{A} \implies \mathbb{A} \approx \mathbb{B}$

Definice 1.11

Řekněme, že množina $\mathbb{A}$je konečná, má-li konečný počet prvků.

Řekněme, že $\mathbb{A}$je spočetná, jestliže $\mathbb{A} \approx \mathbb{N}$, nebo je $\mathbb{A}$konečná.

Řekněme, že $\mathbb{A}$je nespočetná, jestliže $\mathbb{N} \prec \mathbb{A}$.

Tvrzení 1.6 (Cantor)

Nechť $\mathbb{X}$je množina, pak $\mathbb{X} \prec \mathcal{P}(\mathbb{X})$, kde $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ je množina všech podmnožin $\mathbb{X}$.

Důkaz
Zobrazení $\varphi : \mathbb{X} \to \mathcal{P}(\mathbb{X})$ definované $\varphi(x) = \{x\}$ je prosté.

Tvrdím, že neplatí, že $\mathbb{X} \approx \mathcal{P}(\mathbb{X})$. Důkaz sporem: Nechť existuje bijekce $\varphi : \mathbb{X} \to \mathcal{P}(\mathbb{X})$. Označme $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{X} : x \notin \varphi(x)\}$. φ je bijekce $\implies \exists a \in \mathbb{X} : \varphi(a) = \mathbb{A}$.

Nyní buď a) $a \in \mathbb{A} \implies a \notin \varphi(a) = \mathbb{A}$ nebo b) $a \notin \mathbb{A} \implies a \in \varphi(a) = \mathbb{A}$. □

Poznámka („Nebrali jsme“ Hypotéza kontinua)
Otázka: Existuje $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$, že $\mathbb{N} \prec \mathbb{A}$ a $\mathbb{A} \prec \mathbb{R}$?

Odpověď: Může a nemusí. (Hypotéza kontinua je ze standardních axiomů teorie množin tzv. nerozhodnutelná.)

Tvrzení 1.7

Nechť $\mathbb{A}_n, n \in \mathbb{N}$, jsou spočetné množiny, pak:

$$\mathbb{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_n = \mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 \cup \dots$$

je spočetná.

Důkaz
Napíšu si množiny $\mathbb{A}_i$ do matice a očísluji po diagonálách. Tím získám $\mathbb{N} \succeq \mathbb{A}$. □

2 Posloupnost

2.1 Úvod

Definice 2.1

Jestliže ke každému $n \in \mathbb{N}$ je přiřazeno $a_n \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ je posloupnost reálných čísel.

Například

- $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$
- $\{2^n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, 8, \ldots\}$
- $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ (rekurentně zadaná posloupnost)

Definice 2.2

Řekněme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je:

- neklesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- nerostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- klesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- rostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$

Například
$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je klesající a nerostoucí
$\{2^n\}$ je rostoucí a neklesající

Definice 2.3

Řekněme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, jestliže množina členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Analogicky definujeme omezenost shora a omezenost zdola.

Například
$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je omezená
$\{2^n\}$ je pouze omezená zdola

2.2 Vlastní limita posloupnosti

Definice 2.4 (Limita)

Nechť $A \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Řekněme, že A je (vlastní) limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon$$

Značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Například

Ve videu, při pochopení limity nejsou moc zajímavé.

Příklad ($\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$)

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \Leftrightarrow n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} + \ldots \geq 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} a_n^2$$

$$\frac{2(n-1)}{n \cdot (n-1)} \geq a_n^2 \implies \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \geq a_n \geq 0$$

Věta 2.1 (Jednoznačnost vlastní limity (2.1))

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz (Sporem)

Nechť tedy existuje více limit. Dvě z nich označme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = B$, $A > B$. Zvolme $\varepsilon = \frac{A-B}{3}$. Z definice limity k našemu ε existují $n_A, n_B \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_A |a_n - A| < \varepsilon$ a $\forall n \geq n_B |b_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Z trojúhelníkové nerovnosti[a] $|A - B| = |(A - a_{n_0}) + (a_{n_0} - B)| \leq |A - a_{n_0}| + |a_{n_0} - B| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}(A - B)$. □

[a] $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$

Věta 2.2 (O omezenosti konvergentní posloupnosti)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu. Pak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená.

Důkaz

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = 1$. K tomuto $\varepsilon = 1$ $existsn_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) = (A - 1, A + 1)$. Množina $\{a_n | n = 1, 2, \ldots, n_0\}$ je konečná, tedy omezená. Položme $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |A| + 1\}$. Potom jistě $\forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq K$ (protože $\forall n \leq n_0 |a_n| \leq \max\{|a_i|; i \leq n_0\}$ a $\forall n > n_0 a_n \in (A - 1, A + 1) \implies |a_n| \leq |A| + 1 \leq K$). □

Příklad

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \implies \exists n_0 \forall n > n_0 a_n \text{ je monotónní}$$

Definice 2.5 (Vybraná podposloupnost)

Řekněme, že posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $b_n = a_{k_n}$

Věta 2.3 (o limitě vybrané podposloupnosti)

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ *a nechť* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je vybraná z* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Pak* $\lim_{n\to\infty} b_n = A$

Důkaz

K $\varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$. Chceme dokázat $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

K $\varepsilon > 0$ zvolme k_0, kde n_0 je z definice $\lim_{n\to\infty} a_n$. Nechť $k \geq k_0$, pak $n_k \geq k \geq k_0 \geq n_0$. Tedy $|b_k - A| = |a_{n_k} - A| < \varepsilon$ □

Věta 2.4 (Aritmetika limit)

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$*. Pak platí:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = A \cdot B$$

$$\forall b_n \neq 0 \wedge B \neq 0 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$