Organizační úvod

TODO!!!

Úvod

TODO!!!

Definice 0.1

Zúplnění míry λ_B^n nazveme Lebesgueovou mírou v $\mathbb{R}^n$.

Poznámka

1. Lebesgueova míra je σ-konečná.
2. Množinu $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n) := \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{N})$ nazýváme σ-algebrou lebesgueovsky měřitelných množin. Platí $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
3. Lebesgueova míra je regulární v následujícím smyslu:

$$\forall E \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \text{otevřená množina } G\, \exists \text{uzavřená množina } F : F \subset E \subset G \wedge \mu(G \setminus F) < \varepsilon.$$

Definice 0.2 (Značení)

Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \to Y$. Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak $f^{-1}(\mathcal{S}) := \{f^{-1}(S) | S \in \mathcal{S}\}$.

Věta 0.1 (O zobrazení $f : X \to Y$)

Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \to Y$.

1. *Je-li $\mathcal{M}$ σ-algebra na Y, pak $f^{-1}(\mathcal{M})$ je σ-algebra na X.*
2. *Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak $f^{-1}(\sigma(\mathcal{S})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{S}))$.*

Důkaz

Později. □

1 Měřitelná zobrazení

Definice 1.1 (Měřitelné zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{M})$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ nazveme měřitelným (vzhledem k $\mathcal{A}$ a $\mathcal{M}$), jestliže $f^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}$.

Jestliže některý z prostorů X, Y je metrický prostor, pak za příslušnou σ-algebru bereme σ-algebru borelovských podmnožin (pokud není řečeno jinak).

Měřitelné zobrazení mezi dvěma metrickými prostory se nazývá borelovsky měřitelné (krátce borelovské).

Poznámka

1. Snadno se ověří, e kompozice dvou měřitelných zobrazení je měřitelné zobrazení.
2. Z věty O zobrazení... plyne, že jsou-li $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{M})$ měřitelné prostory, pak zobrazení $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$, kde $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ je generátor σ-algebry $\mathcal{M}$. Speciálně je-li $(X, \mathcal{A})$ a Y metrický prostor, pak zobrazení $f : X \to Y$ je měřitelné $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ $\forall$otevřenou množinu $G \subset Y$.

Důsledek
Každé spojité zobrazení mezi dvěma metrickými prostory je měřitelné (borelovské).

Důkaz
Z věty O zobrazení... (vzory otevřených množin při spojitém zobrazení jsou otevřené množiny). □

Věta 1.1 (Generátory $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$)

Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}^n$ je generována

1. *otevřenými intervaly $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, kde $-\infty < a_i < b_i < +\infty$,*
2. *systémem $\mathcal{S} := \{(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n)\}$, kde $a_i \in \mathbb{R}$.*

Věta 1.2 (O měřitelných zobrazeních)

Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor.

1. *Jsou-li $f : X \to \mathbb{R}^n$ a $g : X \to \mathbb{R}^n$ měřitelná zobrazení, pak zobrazení $(f, g) : X \to \mathbb{R}^{n+m}$ je měřitelné.*
2. *Jsou-li $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ měřitelná zobrazení, pak zobrazení $f \pm g$ jsou měřitelná zobrazení.*
3. *Jsou-li $f, g : X \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, pak také $f \cdot g, \max(f, g), \min(f, g)$ jsou měřitelné.*

Poznámka
Prostor $\mathbb{R}^*$ je metrický prostor s metrikou např. ϱ^* danou předpisem $\varrho^*(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$, kde $\varphi(x) := \frac{x}{1+|x|}$ pro konečné x a $\varphi(\pm\infty) = \pm 1$ (tzv. redukovaná metrika).

Redukovaná metrika má následující vlastnosti (viz Jarník – Diferenciální počet 2, str. 245, 246):

1. V množině $\mathbb{R}$ je ekvivalentní s eukleidovskou metrikou.
2. Konvergence v prostoru $(\mathbb{R}^*, \varrho^*)$ splývá s konvergencí zavedenou v $\mathbb{R}^*$ pomocí okolí bodů.

Platí $\mathcal{B}^* := \mathcal{B}(\mathbb{R}^*) = \sigma\left(\{\langle -\infty, a)\,|a \in \mathbb{R}\}\right)$. Plyne z:

1. $\forall$ otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^*$ lze psát jako spočetné sjednocení intervalů typu $\langle -\infty, a), (a,b), (b,\infty\rangle$.
2. $\langle -\infty, a)$ je stejný jako v $\mathbb{R}^*$.
3. $(a, +\infty\rangle$ je $\mathbb{R}^* \setminus \langle -\infty, a)$.
4. $(a, +\infty\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\langle a + \frac{1}{n}, +\infty\right\rangle$.
5. $(a,b) = \langle -\infty, b) \cap (a, +\infty\rangle$.

Věta 1.3 (O měřitelných funkcích)

Buď $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. Pak platí

1. *$f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce právě tehdy, když $f^{-1}\left((-\infty, a)\right) \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$.*
2. *$f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná funkce právě tehdy, když $f^{-1}\left(\langle -\infty, a)\right) \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$.*

Důsledek
Nechť $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ jsou měřitelné funkce. Pak

1. množiny $\{x \in X | f(x) < g(x)\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}$ jsou měřitelné.
2. funkce $\max(f,g), \min(f,g)$ jsou měřitelné funkce.

Věta 1.4 (O měřitelných funkcích podruhé)

Jsou-li funkce $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ množiny $(X, \mathcal{A})$ do $\mathbb{R}^*$ měřitelné funkce, pak funkce $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \limsup_{n\in\mathbb{N}}$ j jsou měřitelné.

Definice 1.2 (Jednoduchá funkce)

Funkce $S: X \to [0, +\infty)$ se nazývá jednoduchá, jestliže množina $S(X)$ je konečná.

Platí, že $s(x) = \sum_{\alpha \in S(X)} \alpha \cdot \chi_{S=\alpha}$. Součet na pravé straně této rovnosti nazveme kanonickým vyjádřením jednoduché funkce.

2 Abstraktní Lebesgueův integrál

Věta 2.1 (O nezáporné měřitelné funkci)

Nechť $f: (X, \mathcal{A}) \to \langle 0, +\infty \rangle$ je měřitelná funkce. Pak existuje posloupnost jednoduchých (nezáporných) měřitelných funkcí $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tak, že $s_n \nearrow f$ (konverguje nahoru).

Jestliže navíc f je omezená, pak $s_n \rightrightarrows f$.

Definice 2.1

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou.

1. Je-li $s: (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty)$ jednoduchá měřitelná funkce, zapíšeme ji v kanonickém tvaru $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}$ a definujeme
$$\int_X s d\mu = \int_X s(x) d\mu(x) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j).$$
2. Je-li $f: (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ měřitelná funkce, pak definujeme
$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu | 0 \le s \le f \wedge s \text{ je jednoduchá} \right\}.$$
3. Je-li $f: (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}*$, pak definujeme
$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu, \text{ má li pravá strana smysl.}$$

Poznámka
Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f, g jsou nezáporné měřitelné funkce na X splňující $0 \le f < g$ na X, pak $0 \le \int_X f d\mu \le \int_X g d\mu$.

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $E \in \mathcal{A}$, pak $\mathcal{A}_E := \{A \cap E, A \in \mathcal{A}\}$ je σ-algebra na E a $(E, \mathcal{A}_E, \mu)$ je prostor s mírou ($\implies \int_E f d\mu$ je definován).

Je-li f měřitelná funkce na X a $E \in \mathcal{A}$, pak $\int_X (f \chi_E) d\mu = \int_E f d\mu$.

Věta 2.2 (Leviho)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou a* $f_n, n \in \mathbb{N}$, *jsou nezáporné měřitelné funkce na* X *splňující* $f_n \nearrow f$, *pak* $\int_X f_n d\mu \nearrow \int_X f d\mu$.

Důkaz

Později. □

Věta 2.3 (Fatouovo lemma)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou a* $f_n, n \in \mathbb{N}$, *jsou nezáporné měřitelné funkce, pak*

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Důkaz

Později. □

Definice 2.2 (Skoro všude)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $E \in \mathcal{A}$, $x \in X$. Nechť $V(x)$ je nějaká vlastnost, kterou bod x může, ale nemusí mít. Řekneme, že $V(x)$ platí μ-skoro všude na E, jestliže

$$\exists N \in \mathcal{A}, N \subset E, \mu(N) = 0 : V(x) \text{ platí } \forall x \in E \setminus N.$$

Je-li $E = X$, pak místo μ-skoro všude na E, píšeme pouze μ-skoro všude. Nehrozí li nedorozumění, o jakou míru se jedná, pak místo μ-skoro všude píšeme skoro všude.

Lemma 2.4

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou a* f, g *měřitelné funkce na* X *takové, že* $f = g$ *skoro všude, pak* $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$, *jakmile má jedna strana rovnosti smysl.*

Definice 2.3 (Měřitelná funkce (skoro všude))

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $D \in \mathcal{A}$, $\mu(D^c) = 0$ a $f : D \to \mathbb{R}^*$. Řekneme, že f je měřitelná, jestliže $\forall$ otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$ platí $f^{-1}(G) \cap D \in \mathcal{A}$.

Pro měřitelnou funkci f pak definujeme $\int_X f d\mu := \int_X \tilde{f} d\mu$, kde $\tilde{f} = \begin{cases} f \text{ na } D, \\ 0 \text{ na } D^c. \end{cases}$

Definice 2.4 (Prostory $\mathcal{L}$)

Označíme $\mathcal{L}^*(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{R}^* | f \text{ je měřitelná na } X \wedge \exists \int_X f d\mu \right\}$.

Dále $\mathcal{L}^1(\mu) := \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu) | \int_X |f| d\mu \in \mathbb{R} \right\}$.

Věta 2.5 (Linearita integrálů)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak

$$\int_X (\lambda f) d\mu = \lambda \int_X f d\mu,$$

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu, \text{ pokud má pravá strana smysl.}$$

Důkaz

Později. □

Poznámka

Má-li pravá strana druhého bodu smysl, pak nemůže nastat případ, kdy by jedna funkcí f, g je rovna $+\infty$ a druhá $-\infty$ na množině kladné míry. Odtud plyne, že součet $f + g$ je definován skoro všude.

Důsledek

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, nezáporné měřitelné funkce. Pak

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Důkaz

Z minulé věty pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí $\int_X \left(\sum_{n=1}^{k} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{k} \int_X f_n d\mu$. Použitím limitního přechodu pro $k \to \infty$ a Leviho věty dostaneme příslušnou rovnost. □

Věta 2.6 (Zobecněná Leviho)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, měřitelné funkce na X splňující $f_n \nearrow f$ a $\int_X f_1 > -\infty$. Pak

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Důkaz

$g_n = f_n - f_1 \geq 0$. Z Leviho věty pak snadno plyne tato. □

Důsledek

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f_n, n \in \mathbb{N}$, měřitelné funkce splňující $f_n \searrow f$ a $\int_X f_1 < +\infty$. Pak též můžeme prohodit limitu a integrál.

Důkaz
Aplikace předchozí věty na $-f_n$. □

Věta 2.7 (Lebesgue)

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce takové, že $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ na X, a existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu) : |f_n| \leq g$ skoro všude $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak

$$lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Důkaz
Později. □

Důsledek
Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce na X takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje skoro všude. Jestliže existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že $|\sum_{n=1}^{k} f_n| \leq g$ skoro všude $\forall k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu.$$

Důkaz
Aplikace předchozí věty na posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. □

Věta 2.8 (Další vlastnosti měřitelných funkcí a integrálu)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

- *Je-li f nezáporná měřitelná funkce na X a $\int_X f d\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.*
- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int_E f d\mu = 0$ $\forall E \in \mathcal{A}$, pak $f = 0$ skoro všude.*
- *Je-li f měřitelná, pak $\int_X f d\mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_X |f| d\mu$.*
- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$.*
- *Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak f je konečná skoro všude.*

Důkaz
Později. □

2.1 Lebesqueův integrál v $\mathbb{R}$

Poznámka (Značení)
Restrikci míry λ^1 na interval $I \subset \mathbb{R}$ opět značíme λ^1.

Je-li $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$, pak

$$\int_a^b f d\lambda^1 := \int_{(a,b)} f d\lambda^1.$$

Věta 2.9 (Vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu)

Je-li $-\infty < a < b < +\infty$ *a* $f :< a,b >\to \mathbb{R}$ *taková, že* $(R)\int_a^b f$ *existuje, pak* $\int_a^b f d\mu^1 \in \mathbb{R}$ *a platí*

$$\int_a^b f d\lambda^1 = (R)\int_a^b f.$$

Věta 2.10 (Vztah Newtonova a Lebesgueova integrálu)

Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *a* $f :< a,b >\to \mathbb{R}$ *je spojitá a nezáporná. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- $(N)\int_a^b$ *existuje.*
- $\int_a^b d\lambda^1 \in \mathbb{R}$.

Zároveň pokud je jedna (tj. obě) z těchto podmínek splněna, potom

$$\int_a^b f d\lambda^1 = (N)\int_a^b f.$$

TODO!!!

Definice 2.5

Systém $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ nazveme d-systém (nebo Dynkinův systém) na X, jestliže

- $\emptyset \in \mathcal{D}$,
- $D \in \mathcal{D} \implies D^c \in \mathcal{D}$,
- $D_n \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N}, D_n \cap D_m\ \forall n \neq m \implies \bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$.

Poznámka
Každá σ-algebra je d-systém.

D-systém je uzavřený na konečné sjednocení disjunktních množin (jelikož $\emptyset \in \mathcal{D}$).

Je-li $A, B \in \mathcal{D}, A \subset B$, pak $B \setminus A \in \mathcal{D}$, neboť $B \setminus A = X \setminus ((X \setminus B) \cup A)$.

Jsou-li μ a ν dvě míry na $(X, \mathcal{A})$, pak $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} | \mu(A) = \nu(A)\}$ je d-systém.

Věta 2.11 (O průniku d-systémů)

Nechť $\mathcal{D}_\alpha$, $\alpha \in I$, jsou d-systémy na X (I je libovolná množina indexů). Pak $\bigcap_{\alpha \in I}$ je d-systém.

Důkaz
Přenechán čtenáři. □

Důsledek
Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, pak existuje nejmenší d-systém $d\mathcal{S}$ obsahující systém $\mathcal{S}$.

Poznámka
Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, pak $d\mathcal{S} \subset \sigma\mathcal{S}$.

Definice 2.6

Systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ nazveme π-systém, jestliže systém $\mathcal{S}$ je uzavřen na konečné průniky množin z $\mathcal{S}$.

Věta 2.12 (O rovnosti $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$)

Je-li $S \subset \mathcal{P}(X)$ zároveň π-systémem, pak $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$.

Důkaz
Využijeme následující 2 tvrzení. $d\mathcal{S}$ je d-systém, tedy z druhého tvrzení $d\mathcal{S}$ je π-systém. Z prvního tvrzení pak $d\mathcal{S}$ je σ algebra, tedy $\sigma\mathcal{S} \subset d\mathcal{S}$. Opačná implikace plyne z poznámky výše, $d\mathcal{S} \subset \sigma\mathcal{S}$, tedy $d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$. □

Tvrzení 2.13

Je-li d-systém $\mathcal{D}$ na X zároveň π-systémem, pak $\mathcal{D}$ je σ-algebra na X.

Důkaz
Ověříme body σ-algebry. □

Tvrzení 2.14

Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ π-systém, pak $d\mathcal{S}$ je π-systém.

Důkaz

Ověříme, že $\mathcal{D} : \{D \in d\mathcal{S} | D \cap S \in d\mathcal{S} \forall S \in \mathcal{S}\}$ je d-systém. Zřejmě $\mathcal{D} = d\mathcal{D}$. Nyní buď $D \in d\mathcal{S}$ pevné a definujeme $\mathcal{D}_D := \{E \in \mathcal{P}(X) | E \cap D \in d\mathcal{S}\}$. O tom dokážeme, že je to d-systém. Následně dokážeme $\mathbb{S} \subset \mathcal{D}_D$, tedy $D = \mathcal{D}_D$. Vítězství! $\square$

TODO?