1 Cvičení 29. 9. 2020

Zápočet bude za 2 zápočtové písemky + docházka (připojení se k cvičení / odpověď na mail, alespoň 50%), scan přes mobil např. přes Adobe scan, nebo Clear scanner.

1.1 Rovnice a nerovnice

Příklad

$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$$

Řešení

$$\frac{x-2-(2x-8}{2x-8} \geq 0$$

$$\frac{-x+6}{2(x-4)} \geq 0$$

(nulové body 4, 6)

$$x \in (4, 6]$$

Příklad

$$|1-|x-1|| < 3$$

Řešení
(nulové body 0, 1, 2) 1. $x > 1$

$$|1-(x-1)| < 3$$

$$x \in [1, 5)$$

2. $x < 1$

$$|1+x-1)| < 3$$

$$x \in (-3, 1)$$

Celkově:

$$x \in (-3, 5)$$

Příklad

$$\sqrt{2x-1} \geq x$$

Řešení
Podmínka: $x \geq \frac{1}{2}$

$$2x - 1 \geq x^2$$
$$0 \geq x^2 - 2x + 1$$
$$0 \geq (x-1)^2$$
$$x = 1$$

Splňuje podmínky

Příklad (x^y)

$$2^x > 3$$

Řešení (Aplikuji $\log_2()$ na obě strany)

$$2 > \log_2(3)$$

1.2 Samovýpočet

Příklad

$$\frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}$$

Řešení
Podmínky: $x \neq -3 \wedge x \neq -6$ 1. $-6 < x < -3$

$$(x+2)(x+6) < (2x+3)(x+3)$$

$$x^2 + 8x + 12 < 2x^2 + 9x + 9$$

$$0 < x^2 + x - 3$$

Což má kořeny mimo interval $(-6, -3)$ a třeba pro $x = -4$ je nerovnost splněna, tedy je splněna pro všechna $x \in (-6, 6)$
2. $x < -6 \vee x > -3$

$$(x+2)(x+6) > (2x+3)(x+3)$$

$$x^2 + 8x + 12 > 2x^2 + 9x + 9$$

$$0 > x^2 + x - 3$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

A v -1 je nerovnost splněna, tedy je splněna v intervalu $(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2})$
Celkově: $x \in (-6, -3) \cup (\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2})$

Příklad

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 2) \geq 0$$

Řešení
Podmínky: $x^2 - 3x + 2 > 0$

$$x^2 - 3x + 2 \leq 1$$

$$x^2 - 3x + 1 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$$

Podmínky splňuje:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$$

Celkově tedy:

$$x \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1 \right) \cup \left(2, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right]$$

Příklad

$$|x - |x+1|| \leq 2x$$

Řešení

Nulové body (-1)

1. $x \leq -1$

$$|x + x - 1| \leq 2x$$

$$-2x + 1 \leq 2x$$

$$1 \leq 4x$$

Nesplňuje žádné $x \leq -1$

2. $x > -1$

$$|x - x - 1| \leq 2x$$

$$1 \leq 2x$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

Celkově: $x \geq \frac{1}{2}$

Příklad

$$\sin 2x < \cos x$$

Řešení

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cos x < \cos x$$

1. $\cos > 0$

$$2 \sin x < 1$$

$$\sin x < \frac{1}{2}$$

Nedořešeno

2 Cvičení 2. 10. 2020

2.1 Výroky + formální důkazy

Příklad
Máme formuli:

$$\forall x \in \mathbb{M} \exists y \in \mathbb{M} \exists z \in \mathbb{M} : x = y + z$$

Je splněna pro $\mathbb{M} = \mathbb{N}$? Dokažte.

Důkaz

$$\text{platí} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{M} \exists y \in \mathbb{M} : x - y \in \mathbb{M}$$

Tvrdíme: výraz neplatí. Dokazujeme negaci:

$$\neg\text{platí} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : x - y \notin \mathbb{M}$$

Zvolme $x = 1$. Víme, že $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$. Ale $\forall y \in \mathbb{N} : x - y \leq 1 - 1 = 0 \implies x - y \notin \mathbb{N}$. □

Příklad
Je formule z předchozího příkladu splněna pro $\mathbb{M} = (0, 1)$?

Důkaz
Tvrdím, že je. Zafixuji $x \in (0, 1)$, zvolím $y = z = \frac{x}{2}$. Jistě $y, z \in (0, 1)$ a $x = y + z = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$. □

Příklad

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{R} (|y - x| < \delta \implies y < x + \frac{\varepsilon}{3})$$

Důkaz
Zafixujeme $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Položme $\delta = \frac{\varepsilon}{100}$. Zafixujeme $y \in \mathbb{R}$, že $|y - x| < \delta$ (jinak implikace platí). Tj. $x - \delta < y < x + \delta$. Pak $y < x + \delta = x + \frac{\varepsilon}{100} < x + \frac{\varepsilon}{3}$. □