Příklad (A)
Označme $F = C^\infty(\mathbb{R}^3)$ prostor hladkých funkcí a $\mathcal{F}^3$ prostor vektorových polí na $\mathbb{R}^3$. Ukažte, že následující posloupnost diferenciálních operátorů tvoří komplex, tj. že složení dvou po sobě následujících operátorů je triviální.

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\text{grad}} \mathcal{F}^3 \xrightarrow{\text{rot}} \mathcal{F}^3 \xrightarrow{\text{div}} \mathcal{F}$$

Důkaz (Z definic rot ∘ grad)

$$\forall F \in \mathcal{F} : \operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} F =$$

$$= \left(\frac{\partial (\operatorname{grad} F)_z}{\partial y} - \frac{\partial (\operatorname{grad} F)_y}{\partial z}; \frac{\partial (\operatorname{grad} F)_x}{\partial z} - \frac{\partial (\operatorname{grad} F)_z}{\partial x}; \frac{\partial (\operatorname{grad} F)_y}{\partial x} - \frac{\partial (\operatorname{grad} F)_x}{\partial y} \right)^T =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}; \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} \right)^T = (0,0,0)^T,$$

Jelikož z matematické analýzy víme, že nezáleží na pořadí parciálního derivování. □

Důkaz (Z definic div ∘ rot)

$$\forall \vec{F} \in \mathcal{F}^3 : \operatorname{div} \circ \operatorname{rot} \vec{F} =$$

$$= \frac{\partial \left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)_x}{\partial x} + \frac{\partial \left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)_y}{\partial y} + \frac{\partial \left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} = 0$$

Ze stejného důvodu jako výše. □

Příklad (B)
Ukažte, že následující diagram je komutativní diagram, tj. že složení operátorů spojujících libovolné dva uzly diagramu nezávisí na volbě cesty mezi příslušnými dvěma uzly.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "grad"] \arrow[d, "A_0"] & \mathcal{F}^3 \arrow[r, "rot"] \arrow[d, "A_1"] & \mathcal{F}^3 \arrow[r, "div"] \arrow[d, "A_2"] & \mathcal{F} \arrow[d, "A_3"] \\
\mathcal{E}^0 \arrow[r, "d"] & \mathcal{E}^1 \arrow[r, "d"] & \mathcal{E}^2 \arrow[r, "d"] & \mathcal{E}^3
\end{tikzcd}
$$

$$A_0 = \mathrm{id}, \quad A_1(\vec{F}) = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz, \quad A_2(\vec{F}) = F_x\,dy \wedge dz + F_y\,dz \wedge dx + F_z\,dx \wedge dy,$$

$$A_3(F) = F\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

Důkaz (Z definic $d \circ A_0 = A_1 \circ \mathrm{grad}$)

$$\forall F \in \mathcal{F} : (d \circ A_0)(F) = dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz =$$

$$= (\mathrm{grad}\,F)_x\,dx + (\mathrm{grad}\,F)_y\,dy + (\mathrm{grad}\,F)_z\,dz = A_1 \circ \mathrm{grad}\,F.$$

□

Důkaz (Z definic $d \circ A_1 = A_2 \circ \mathrm{rot}$)

$$\forall \vec{F} \in \mathcal{F}^3 : (d \circ A_1)(\vec{F}) = d(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) =$$

$$= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}dx + \frac{\partial F_x}{\partial y}dy + \frac{\partial F_x}{\partial z}dz\right) \wedge dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}dx + \frac{\partial F_y}{\partial y}dy + \frac{\partial F_y}{\partial z}dz\right) \wedge dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial F_z}{\partial x}dx + \frac{\partial F_z}{\partial y}dy + \frac{\partial F_z}{\partial z}dz\right) \wedge dz =$$

$$0 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) dz \wedge dx + 0 + \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz + 0 =$$

$$= (\mathrm{rot}\,\vec{F})_x\,dy \wedge dz + (\mathrm{rot}\,\vec{F})_y\,dz \wedge dx + (\mathrm{rot}\,\vec{F})_z\,dx \wedge dy = A_2 \circ \mathrm{rot}\,\vec{F}.$$

□

Důkaz (Z definic $d \circ A_2 = A_3 \circ \operatorname{div}$)

$$\forall \vec{F} \in \mathcal{F}^3 : (d \circ A_2)(\vec{F}) = d(F_x\, dy \wedge dz + F_y\, dz \wedge dx + F_z\, dx \wedge dy) =$$
$$= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} dx + \frac{\partial F_x}{\partial y} dy + \frac{\partial F_x}{\partial z} dz\right) \wedge dy \wedge dz +$$
$$+ \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} dx + \frac{\partial F_y}{\partial y} dy + \frac{\partial F_y}{\partial z} dz\right) \wedge dz \wedge dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} dx + \frac{\partial F_z}{\partial y} dy + \frac{\partial F_z}{\partial z} dz\right) \wedge dx \wedge dy =$$
$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz + 6 \cdot 0 = \operatorname{div} \vec{F}\, dx \wedge dy \wedge dz = A_3 \circ \operatorname{div} \vec{F}.$$

□

Důkaz (Zbylé)
Komutativita složení více (>2) operátorů vyplývá z předchozích. □