Příklad (2.1)
Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ jednoznačně funkci f proměnné $f(0) = 0$. Spočtěte $f'(0)$ a $f''(0)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[0,0]$ a rozhodněte, zda je f na okolí bodu 0 konvexní nebo konkávní.

$$F(x,y) = \arcsin(x+y) + \arctan(x+y) + xy = 0.$$

Řešení
Ověříme podmínky věty o implicitní funkci (na otevřeném[a] okolí G bodu $[0,0]$ daného $(x+y)^2 < 1$, aby měla F derivace):

$F(0,0) = \arcsin(0)+\arctan(0)+0 = 0+0+0 = 0$. (Tj.$f(0) = 0$, až dokážeme, že existuje.)

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} + \frac{1}{1+(x+y)^2} + y \in C(G),$$
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} + \frac{1}{1+(x+y)^2} + x \in C(G).$$
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{1-0}} + \frac{1}{1+0} + 0 = 1+1 = 2 \neq 0.$$

Podle věty o implicitní funkci tedy na nějakém okolí U funkce f existuje (svojí definicí je určena jednoznačně) a její derivace je ($f(0) = 0$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}(x, f(x))(0) = \left(-\frac{\frac{1}{\sqrt{1-(x+f(x))^2}} + \frac{1}{1+(x+f(x))^2} + f(x)}{\frac{1}{\sqrt{1-(x+f(x))^2}} + \frac{1}{1+(x+f(x))^2} + x} \right)(0) =$$

$$= \left(-1 - \frac{f(x)-x}{\frac{1}{\sqrt{1-(x+f(x))^2}} + \frac{1}{1+(x+f(x))^2} + f(x)} \right)(0) = -1 - \frac{0}{2} = -1.$$

Druhou derivaci spočítáme jako počítáme derivace běžně ($f(0) = 0$, $f'(0) = -1$):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(0) = \frac{f'(x)-1}{\frac{1}{\sqrt{1-(x+f(x))^2}} + \frac{1}{1+(x+f(x))^2} + f(x)} + \frac{f(x)-x}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-(x+f(x))^2}} + \frac{1}{1+(x+f(x))^2} + f(x)\right)^2} \cdot$$

$$\cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2(x+\ f(x))(1+f'(x))}{\sqrt{1-(x+f(x))^2}^3} - \frac{2(x+\ f(x))(1+f'(x))}{(1-(x+f(x))^2)^3} + f'(x) \right) = \frac{-2}{2} + \frac{0}{4} \cdot (-1) = -1$$

Tečna má směrnici $f'(0) = -1$ a prochází $[0, f(0)] = [0,0]$, tedy její rovnice je $y = x$. A jelikož je druhá derivace f v 0 záporná, tak musí existovat okolí bodu 0, na kterém je f konkávní.

[a] Je otevřené, protože je vzorem $(-1,1)$ při spojitém zobrazení $(x,y) \mapsto (x+\ y)^2$.

Příklad (2.2)
Vyšetřete lokální extrémy (na $\mathbb{R}^3$) funkce

$$f(x, y, z) = 3y^4 + 3yx^2 - x^3 + z^2 - z.$$

Řešení
Jelikož je funkce všude na $\mathbb{R}^3$ definována a je zřejmě $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ (každý polynom je C^∞), tak lokální extrémy mohou být pouze tam, kde jsou všechny parciální derivace nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6yx - 3x^2 = 3x(2y - x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12y^3 + 3x^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 1.$$

Tedy lokální extrémy mohou být jen tam, kde $z = \frac{1}{2}$. A tam, kde buď $x = 0$ (a tedy $y = 0$) nebo $x = 2y$ (a tedy $12y^3 = -12y^2$, tj. $y = 0$, $x = 0$ nebo $y = -1$, $x = -2$).

V bodě $\left[0, 0, \frac{1}{2}\right]$ lokální extrém není, protože funkce $x \mapsto f\left(x, 0, \frac{1}{2}\right) = x^3 - \frac{1}{4}$ má v 0 inflexní bod. (Pro $x < 0$ je menší než $\frac{1}{4}$ a pro $x > 0$ je větší.)

V bodě $[-2, -1, \frac{1}{2}]$ spočítáme Hessovu matici:

$$\begin{pmatrix} 6y - 6x & 6x & 0 \\ 6x & 36y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left(-2, -1, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 \\ -12 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ta je zde pozitivně definitní, neboť hlavní minory jsou 6, 72, 144 > 0. Tedy funkce má jediný lokální extrém a to minimum v bodě $\left[-2, -1, \frac{1}{2}\right]$.

Příklad (2.3)
Najděte globální maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M. (Načrtněte M.)

$$f(x,y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3, \qquad M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \leq 0\right\}.$$

Řešení (Načrtněte M)
M je zřejmě („levý“) polokruh o poloměru 2.

Řešení
Jelikož je M omezená ($||(x,y)|| \leq 4$) a je průnikem dvou uzavřených množin,[a] tak je M kompaktní, tedy f na ní nabývá minima i maxima. Tedy nalezneme všechny body podezřelé z extrému a porovnáme funkční hodnoty v nich. Na podezřelé body máme 2 možnosti, buď jsou ve vnitřku M, nebo na hranici.

Pokud je ve vnitřku, tak musí mít všechny derivace nulové (bod extrému na otevřené množině je bod lokálního extrému), tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4x^2 = 0 = -2y = \frac{\partial f}{\partial y} \implies y = 0 \wedge x \in \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}.$$

Ale $[0,0]$ je na hranici, ne ve vnitřku. Tedy z vnitřních bodů je podezřelý pouze $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

Pro body na hranici platí $g(x,y) := (x^2 + y^2 - 4) \cdot x = 0$. Zřejmě $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, jelikož jsou to polynomy. Jestliže je v (x,y) maximum, potom podle Lagrangeových multiplikátorů je buď $\nabla g = (3x^2 + y^2 - 4, 2yx) = (0,0)$, nebo $\nabla f = (2x + 4x^2, -2y)$ je násobkem ∇g.

V prvním případu je buď $y = 0$ (a $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$) nebo $x = 0$ (a $y = \pm 2$). Z těchto bodů jsou na ∂M pouze $[0,2]$ a $[0,-2]$.

V druhém případě je buď $\nabla f = (0,0)$, tedy $y = 0$ a $x \in \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$, nebo $2yx = -2\lambda y$ a $3x^2 + y^2 - 4 = 2\lambda x + 4\lambda x^2$, tedy z prvního buď $y = 0$, ale to jsou jen 2 body, tak je podezírejme oba, $[-2,0]$ i $[0,0]$, nebo $\lambda = -x$ a potom $3x^2 + y^2 - 4 = -2x^2 - 4x^3$, tj. $5x^2 + 4x^3 + y^2 - 4 = 0$. Hledáme body z hranice, tedy buď $x = 0$, pak dostaneme body $[0,2]$ a $[0,-2]$, nebo $x^2 + y^2 - 4 = 0$, tudíž $4x^2 + 4x^3 = 0$, tedy body $[0, \pm 2]$ nebo $[-1, \sqrt{3}]$ a $[-1, -\sqrt{3}]$.

Celkově podezřelé body jsou: $[-2,0]$, $[0,0]$, $[0,2]$, $[0,-2]$, $[-1,\sqrt{3}]$, $[-1,-\sqrt{3}]$, $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. V těch jsou funkční hodnoty po řadě $-\frac{20}{3}$, 0, -4, -4, $-\frac{10}{3}$, $-\frac{10}{3}$, $\frac{1}{12}$. Tedy maximum je $\frac{1}{12}$ (v bodě $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$) a minimum je $-\frac{20}{3}$ (v bodě $[-2,0]$).

[a] Množina daná $x^2 + y^2 \leq 4$ je vzor $[0,4]$ při spojitém zobrazení $x^2 + y^2$, tedy je uzavřená. Množina $x \leq 0$ je vzor $(-\infty, 0]$ při spojitém zobrazení $(x,y) \mapsto x$, tedy také uzavřená.