1 Úvod

Poznámka (Aplikace)
Transfinitní indukce, axiom výběru (= princip maximality = Zornovo lemma)

Poznámka (Cíl)
Vybudování matematiky na pevných základech. Porozumění nekonečen. Důkaz existence nealgebraických (= transcendentních) reálných čísel. Princip kompaktnosti. Banach-Tarského paradox.

Poznámka (Literatura)
Balcar, Štěpánek – Teorie množin
Seriál PraSete
Hrbáček, Jech – Introduction to set theory
Olšák – Esence teorie množin (videa)

Poznámka (Historie)
Bernard Bolzano (český matematik, 1781-1848, pojem množina), George Cantor (německý matematik, 1845 - 1918, zavedení aktuálního nekonečna, diagonální metoda, kardinální čísla, uzavřená množina), Bertrand Russell (1902, Russellův paradox = paradox holiče = holí holič holící všechny lidi, kteří se neholí sami, sebe?) + Berriho paradox (nechť m je nejmenší přirozené číslo, které nejde definovat méně než 100 znaky), Zermelo-Fraenkel (zavedli axiomatickou teorii množin).

Definice 1.1 (Symboly)

Proměnné pro množiny – $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$.

Binární predikátorový symbol = a bin. relační symbol $\in$.

Logické spojky $\neg, \vee, \wedge, \implies, \Leftrightarrow$.

Kvantifikátory $\forall, \exists$.

Závorky () {} []

Definice 1.2 (Formule)

Atomické ($x = y$, $x \in y$). Jsou-li φ a ψ formule, pak $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \implies \psi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jsou formule. Je-li φ formule, x proměnná, pak $(\forall x)\varphi$, $(\exists x)\varphi$ jsou formule. (Vázané vs. volné proměnné – proměnné formule, které do ní lze dosadit jsou volné, proměnné formule, které do ní nelze dosadit jsou vázané). Každou formuli lze dostat konečnou posloupností aplikací výše zmíněného.

Definice 1.3 (Rozšíření jazyka)

$x \neq y$ značí $\neg(x = y)$, $x \notin y$ znamená $\neg(x \in y)$, $x \subseteq y$ znamená $(\forall u)(u \in x \implies u \in y)$, $x \subset y$ značí $x \subseteq y \wedge x \neq y$. Dále uvidíme $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\emptyset$, $\{x \in a | \varphi(x)\}$.

Definice 1.4 (Axiomy logiky)

Vysvětlují, jak se chovají implikace, kvantifikátory, rovnost, …

Definice 1.5 (Axiomy TEMNA)

Říkají, jak se chová $\in$ a jaké množiny existují. Budeme používat Zermelo-Fraenkelovu teorii (ZF), tedy 9 axiomů (7 + 2 schémata). (Není minimální, tj. lze některé odvodit z jiných) + axiom výběru (AC) s ním se pak ZF značí ZFC.

Definice 1.6 (Axiomy ZFC)

1. Axiom existence množiny: $(\exists x)(x = x)$.
2. Axiom extenzionality: $(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \implies x = y$.
3. Schéma axiomů vydělení: je-li $\varphi(x)$ formule, která neobsahuje volnou proměnnou z, potom $(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x)))$ je axiom.
4. Axiom dvojice: $(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (x = a \vee x = b))$.
5. Axiom sumy: $(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a))$.
6. Axiom potence: $(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow x \subseteq a)$.
7. Schéma axiomů nahrazení[a] Je-li $\psi(u, v)$ formule s volnými proměnnými u, v, jež nemá volné proměnné w, z, pak

   $$(\forall u)(\forall v)(\forall w)((\psi(u,v) \wedge \psi(u,w)) \implies v = w) \implies (\forall a)(\exists z)(\forall v)(v \in z \Leftrightarrow (\exists u)(u \in a \wedge \psi(u,v)))$$

   je axiom.
8. Axiom fundovanosti (regularity): $(\forall a)(a \neq \emptyset \implies (\exists x)(x \in a \wedge x \cap a = \emptyset))$.

Později ještě:

- Axiom nekonečna
- Axiom výběru

[a] Slogan: Obraz množiny funkcí je množina.

Definice 1.7 (Značení)

$\{x|x \in a \wedge \varphi(x)\}$, zkráceně $\{x \in a|\varphi(x)\}$ je množina z axiomů vydělení.

Definice 1.8 (Průnik, množinový rozdíl, prázdná množina)

$a \cap b = \{x|x \in a \wedge x \in b\}$.

$a \setminus b = a - b = \{x|x \in a \wedge x \notin b\}$.

$\emptyset = \{x|x \in a \wedge x \neq x\}$. ($\emptyset$ je díky prvním třem axiomům dobře definována.)

Definice 1.9 (Neuspořádaná a uspořádaná dvojice)

$\{a, b\}$ je neuspořádaná dvojice, $\{a\}$ znamená $\{a, a\}$.

$(a, b) =< a, b >= \{\{a\}, \{a, b\}\}$ je uspořádaná dvojice.

Lemma 1.1

$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow (x = u \wedge y = v)$.

Důkaz

$\Leftarrow$ $x = u$, pak $\{x\} = \{u\}$ z axiomu extenzionality, stejně tak $\{x, y\} = \{u, v\}$, a tedy $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

$\implies$ $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ pak $\{x\} = \{u\}$ nebo $\{x\} = \{u, v\}$, každopádně $x = u$. Nyní $\{u, v\} = \{x\}$ nebo $\{u, v\} = \{x, y\}$ tedy $v = x$ nebo $v = y$. Pokud $v = y$, tak jsme skončili, pokud $v = x$ pak $v = u = x = y$. ☐

Definice 1.10 (Potenční množina)

$\mathcal{P}(a) = \{x|x \subseteq a\}$ je potenční množina (potence) a (z axiomu potence).

Definice 1.11 (Uspořádaná n-tice)

Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n$ množiny, definujeme uspořádanou n-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_n) =< \ldots >$ následovně: $(a_1) = a_1$, je-li definovaná $(a_1, \ldots, a_k)$, pak $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}) = ((a_1, a_2, \ldots, a_k), a_{k+1})$.

Lemma 1.2

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n)$.

Důkaz

Domácí cvičení. ☐

Definice 1.12 (Značení)

$$\bigcup a = \{x | (\exists y)(x \in y \wedge y \in a\} \,.$$

Definice 1.13

Pro $a = \{b, c\}$ definujeme $b \cup c = \bigcup a$.

Definice 1.14 (Neuspořádaná n-tice)

Neuspořádanou n-tici $\{a_1, \ldots, a_n\}$ (n-prvkovou množinu) definujeme rekurzivně: je-li definováno $\{a_1, \ldots, a_k\}$, pak $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\} = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{a_{k+1}\}$.

Poznámka
Axiom nahrazení se využívá v: transfinitní rekurzi, definici $\omega + \omega$, větě o typu dobrého uspořádání, Zornově lemmatu (tj. axiom výběru).

Příklad
Ukažte, že axiom fundovanosti zakazuje existenci konečných cyklů relace $\in$ (tj. takových množin y, pro které $y \in . \in \ldots \in . \in y$).

Důsledek
Všechny množiny lze vygenerovat z $\emptyset$ pomocí operací $\bigcup$ a $\mathcal{P}$ (zhruba).

1.1 Třídy

Definice 1.15

Nechť $\varphi(x)$ je formule, pak $\{x, \varphi(x)\}$ (čteme třída všech x, pro které platí $\varphi(x)$), tzv. třídový term, se nazývá třída (určená formulí x).

Důsledek
Pokud $\varphi(x)$ je tvaru $x \in a \wedge \varphi(x)$, pak je $\{x, \varphi(A)\}$ množina z axiomu vydělení. Obdobně pro axiom dvojice, sumy, …

Poznámka
Je-li y množina, pak y má stejné prvky jako třída $x, x \in y \wedge x = x$.

Poznámka (Vlastní třídy)
Existují i třídy (tzv. vlastní), které nejsou množiny (např. třída všech množin).

Definice 1.16 (Rozšíření jazyka)

Ve formulích na místech volných proměnných připustíme i Třídové termy a proměnné pro třídy (psané velkými písmeny). (Avšak je nebude možné kvantifikovat!)

Definice 1.17 (Eliminace (nahrazování) třídových termů)

x, y, z, X, Y proměnné (3 množinové + 3 třídové), $\varphi(x)$, $\psi(y)$ formule základního jazyka, X zastupuje $\{x, \varphi(x)\}$ a Y $\{y, \varphi(y)\}$.

$$z \in X \text{ (schéma formulí pro obecné } X\text{) zastupuje } z \in \{x, \varphi\} \text{ nahradíme } \varphi(z).$$

$$z = \{X\} \text{ zastupuje } z = \{x, \varphi(x)\} \text{ nahradíme } (\forall u)(u \in z \Leftrightarrow \varphi(u)).$$

$$X \in Y \text{ zastupuje } \{x, \varphi(x)\} \in \{y, \varphi(y)\} \text{ nahradíme } (\exists u)(u = \{x, \varphi(x)\}) \wedge u \in \{y, \psi(y)\}\,.$$

$$X \in y \text{ analogicky předchozí.}$$

$$X = Y \ldots\ldots\ldots\ldots (\forall u)(\varphi(u) \Leftrightarrow \psi(u)).$$

Poznámka
Třídy s rozšířenou formulí nepřináší díky eliminaci nic nového.

Definice 1.18 (Třídové operace)

$A \cap B$ je $\{x, x \in A \wedge x \in B\}$, $A \cup B$ je $\{x, x \in A \vee B\}$, $A \setminus B = A - B = \{x, x \in A \wedge x \notin B\}$.

Definice 1.19 (Univerzální třída, doplněk)

$\{x, x = x\}$ je tzv. univerzální třída a značí se V.

Buď A třída, pak (absolutní) doplněk A je $V - A$, který se značí $-A$.

Definice 1.20 (Inkluze)

$A \subseteq B$ ($A \subset B$) značí „A je (vlastní) částí (= podtřídou) B“.

Definice 1.21 (Suma a průnik)

$\bigcup A$ značící sumu třídy A je třída $\{x, (\exists a)(a \in A \wedge x \in a)\}$. $\bigcap A$ značící průnik třídy A je třída $\{x, (\forall a)(a \in A \to x \in a)\}$.

Lemma 1.3

V není množina.

Důkaz
Cvičení. □

Lemma 1.4

Je-li A třída, a množina, pak $a \cap A$ je množina.

Důkaz
V podstatě axiom vydělení. □

Definice 1.22 (Kartézský součin tříd)

Kartézský součin tříd A, B, značený $A \times B$, je třída $\{(a, b), a \in A, b \in B\}$ (zkrácený zápis pro $\{x, (\exists a)(\exists b)(x = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B)\}$).

Lemma 1.5

Jsou-li x, y množiny, pak $x \times y$ je množina.

Důkaz („Vnoření a vydělení")
Stačí dokázat, že $x \times y \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$ (vpravo je množina z axiomu potence, součin pak vydělíme): Pokud $u \in x$ a $v \in y$, pak $\{u\}, \{u, v\} \subseteq x \cup y$, tedy $\{u\}, \{u, v\} \in \mathcal{P}(x \cup y)$. Tedy $\{\{u\}, \{u, v\}\} \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$, tj. $\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$. □

Definice 1.23 (Mocnina)

X třída, pak $X^1 = X$ a $X^{n+1} = X^n \times X$. (Tj. X^n je třída všech uspořádaných n-tic s prvky v X.)

Pozorování
$V = V^1 \supset V^2 \supset \ldots$.

Příklad
Obecně neplatí $X \times X^2 = X^3$.

1.2 relace

Definice 1.24 (Relace)

Třída R je (binární) relace pokud, $R \subseteq V \times V$. (n-ární relace, pokud $R \subseteq V^n$.)

xRy je zkratka za $(x, y) \in R$.

Definice 1.25 (Definiční obor, obor hodnot, zúžení)

Je-li X relace (libovolná třída), pak $\mathrm{Dom}(X) := \{u, (\exists v)((u, v) \in X)\}$ je definiční obor třídy X.

Je-li X relace (libovolná třída), pak $\mathrm{Rang}(X) := \{v, (\exists u)((u, v) \in X)\}$ je obor hodnot třídy X.

Je-li navíc Y třída, pak $X''Y$ (nebo také $X[Y]$) $:= \{z, (\exists y)(y \in Y \wedge (y, z) \in X)\}$ je obraz třídy Y třídou X.

Je-li navíc Y třída, pak $X \restriction Y := \{(y, z), y \in Y \wedge (y, z) \in X)\}$ je zúžení třídy X na třídu Y (nebo také parcializace).

Lemma 1.6

Je-li x množina, Y třída, pak $\mathrm{Dom}(x)$*,* $\mathrm{Rang}(x)$*, $x \restriction Y$, $x''Y$ jsou množiny.*

Důkaz (Vnoření a vydělení)
$\mathrm{Dom}(x) \subseteq \bigcup(\bigcup x))$. Když $u \in \mathrm{Dom}(x)$, $\exists v$, že $(u, v) \in x$, $u \in \{u\} \in (u, v) \in x$, tedy $\{u\} \in \bigcup x$, tj. $u \in \bigcup(\bigcup x))$.

$\mathrm{Rang}(x) \subseteq \bigcup(\bigcup x))$. (Analogicky.) $x \restriction Y \subseteq x$, $x''Y \subseteq \mathrm{Rang}(x)$. □

Definice 1.26 (Inverzní relace, složení relací)

R, S relace, pak $R^{-1} := \{(u, v), (v, u) \in R\}$ je relace inverzní k R. Relace $R \circ S := \{(u, w), (\exists v)(uRv \wedge vSw)\}$ je složení relací R, S.

Definice 1.27 (Zobrazení, na, do, prosté)

Relace F je zobrazení (funkce), pokud $(\forall u)(\forall v)(\forall w)(((u, v) \in F \wedge (u, w) \in F) \implies v = w)$.

Zkracujeme $(u, v) \in F$ na $F(u) = v$.

F je zobrazení třídy X do (na) třídy Y $F : X \to Y$, pokud $\mathrm{Dom}(F) = X$ a $\mathrm{Rang}(F) \subseteq Y$ ($\mathrm{Rang}(F) = Y$).

Zobrazení F je prosté, pokud inverzní relace F^{-1} je zobrazení. (Zřejmě je pak i F^{-1} prosté).

Definice 1.28 (Zkratka)

A třída, φ formule, pak $(\exists x \in A)\varphi$ je zkratka za $(\exists x)(x \in A \wedge \varphi)$ a $(\forall x \in A)\varphi$ je zkratka za $(\forall x)(x \in A \implies \varphi)$.

Obraz (vzor) třídy X zobrazením F je $F[X]$ místo $F''X$ ($F^{-1}[X]$ místo $F^{-1''}X$).

Definice 1.29

A třída, a množina, pak ${}^aA := \{f, f : a \to A\}$ je třída všech zobrazení a do A.

Důkaz
Axiom nahrazení říká, že Rang f je množina, $f \subseteq a \times \mathrm{Rang}(f)$, libovolné f je tedy množina a tato třída je dobře definována. □

Důsledek
${}^{\emptyset}y = \{\emptyset\}$, ${}^x\emptyset = \emptyset$ $(x \neq \emptyset)$.

Lemma 1.7

Pro libovolné množiny x, y je ${}^xy$ množina. Je-li $x \neq \emptyset$, Y je vlastní třída, pak ${}^xY$ je vlastní třída.

Důkaz
$f \in^x y \ldots f : x \to y \ldots f \subseteq x \times y \ldots f \in \mathcal{P}(X \times y) \implies {}^xy \subseteq \mathcal{P}(x \times y)$.

Pro každé $y \in Y$ definujeme konstantní zobrazení $k_y : x \to Y$ tak, že $(\forall u \in x)(k_y(u) = y)$. Nechť $K = \{k_y, y \in Y\} \subseteq^x Y$. Sporem: pokud ${}^xY$ je množina, pak K je množina. Použijeme axiom nahrazení $F : K \to Y$, $F(k_y) = y$, tj. (protože F zobrazuje na Y) Y je množina. ↯. □

2 Uspořádání

Definice 2.1 (Reflexivní, antireflexivní, symetrická, slabě antisymetrická, antisymetrická, trichotomická, tranzitivní)

Relace $R(\subseteq V \times V)$ je na třídě A reflexivní (antireflexivní, symetrická, slabě antisymetrická, antisymetrická, trichotomická, tranzitivní), pokud … (…, …, $(\forall x \in A)(\forall y \in A)((xRy \wedge yRx) \implies x = y)$, $(\forall x \in A)(\forall y \in A)\neg(xRy \wedge yRx)$, $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \vee yRx \vee x = y)$, …).

Pozorování
Tyto vlastnosti jsou dědičné (tzn. platí i na každé podtřídě $B \subseteq A$).

Definice 2.2 (Uspořádání, porovnatelné)

Řekneme, že relace R je uspořádání na třídě A, je-li R na A reflexivní, slabě symetrická, tranzitivní.

$x, y \in A$ jsou porovnatelné relací R, pokud $xRy \vee yRx$.

Definice 2.3 (Značení)

$x \leq_R y$ znamená xRy, x je menší nebo rovno y vzhledem k R.

Definice 2.4 (Lineární uspořádání)

Uspořádání R je lineární, je-li R trichotomická relace.

Definice 2.5 (Ostré uspořádání)

Relace R' je ostré uspořádání, je-li $R' = R - \mathrm{id}$ a R je uspořádání.

Píšeme $x <_R y$, když $xR'y$.

Definice 2.6

Nechť R je uspořádání na třídě A, $X \subseteq A$. Říkáme, že $a \in A$ je (vzhledem k R, A): majoranta (horní mez, horní závora) třídy X, pokud $(\forall x \in X)(x \leq_R a)$, maximální prvek třídy X pokud $a \in X \wedge (\forall x \in X)(\neg a <_R x)$, největší prvek třídy X pokud $a \in X \wedge (\forall x \in X)(x \leq_R a)$, supremum třídy X, pokud a je nejmenší majoranta.

Obdobně (dolní mez, dolní závora), minimální, nejmenší, infimum.

Pozorování
Největší $\implies$ maximální. V lineárním uspořádání i naopak.

Definice 2.7 (Shora, zdola omezená množina, dolní, horní množina)

X je shora omezená v A, pokud existuje majorita X v A. X je dolní množina v A, pokud $\forall x \in X)(\forall y \in A)(y \leq_R x \implies y \in X)$. $x \in A$, pak $(\leftarrow, x]$ je $\{y, y \in A \wedge y \leq_R x\}$ hlavním ideálem určeným x.

Obdobně zdola uzavřená a horní množina. Lze definovat i pro třídy, ale to se nedělá.

Pozorování
R je uspořádání na A, pak pro libovolné $x, y \in A$ platí $x \leq_R y \Leftrightarrow (\leftarrow, x] \subseteq (\leftarrow, y]$.

Definice 2.8 (Dobré uspořádání)

Uspořádání R na třídě A je dobré, pokud každá neprázdná podmnožina $u \subseteq A$ má nejmenší prvek.

3 Srovnávání množin

Definice 3.1

Množiny x, y mají stejnou mohutnost (jsou ekvivalentní), $x \approx y$, pokud existuje prosté zobrazení x na y.

Definice 3.2

Množina x má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti y, $x \preceq y$, pokud existuje prosté zobrazení x do y. (Také říkáme x je subvalentní y). x má mohutnost menší než y, $x \prec y$, pokud $x \preceq y \wedge \neg(x \approx y)$.

Pozorování

$x \subseteq y \implies x \preceq y$. $x \subset y \implies x \preceq y$, ale ne nutně $x \prec y$ (viz přirozená čísla).

Lemma 3.1

Jsou-li x, y, z množiny, pak

$$1) x \approx x. \qquad \text{(id)}$$

$$2) x \approx y \implies y \approx x. \qquad ({}^{-}1)$$

$$3) (x \approx y \wedge y \approx z) \implies x \approx z. \qquad (\circ)$$

$$4) x \preceq x. \qquad \text{(id)}$$

$$5) (x \preceq y \wedge y \preceq z) \implies x \preceq z. \qquad (\circ)$$

Pozorování

$(x \approx y) \implies (x \preceq y \wedge y \preceq x)$.

Definice 3.3

Zobrazení $H : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ je monotónní vzhledem k inkluzi, pokud pro každé podmnožiny $u, v \subseteq x$ platí $u \subseteq v \implies H(u) \subseteq H(v)$.

Lemma 3.2

Je-li $H : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ zobrazení monotónní vzhledem k inkluzi, pak existuje podmnožina $c \subseteq c$, že $H(c) = c$.

Poznámka
Speciální případ Knaster-Tarski, kteří předpokládají jen úplný svaz.

Pozorování
$A \subseteq \mathcal{P}(x) \implies \sup_{\subseteq} A = \bigcup A$.

Důkaz
Nechť $A = \{u, u \subseteq x \wedge u \subseteq H(u)\}$. $c = \bigcup A$. $c \subseteq x$ zřejmě, $u \in A \implies u \subseteq c \wedge u \subseteq H(u) \subseteq H(c)$. Tedy $H(c)$ je majoranta A, tedy $c \subseteq H(c)$. Z monotonie H je $H(c) \subseteq H(H(c))$, tedy $H(c) \in A$, tedy $H(c) \subseteq c$. □

Věta 3.3 (Cantor-Bernstein)

$(x \preceq y \wedge y \preceq x) \implies x \approx y$.

Důkaz
Nechť $f : x \to y, g : y \to x$ jsou prostá zobrazení. Uvažujeme 'indukovaná' zobrazení $(\vec{f}) : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(y)$, $u \mapsto f[u]$. Definujeme $H : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ tak, že pro $u \subseteq u$ $H(u) = X - g[Y - f[u]$. H je monotónní vzhledem k inkluzi: $u_1 \subseteq u_2 \implies f[u_1] \subseteq f[u_2] \implies y - f[u_1] \supseteq f[u_2] \implies \ldots \implies H(u_1) \subseteq H(u_2)$. Podle lemmatu o pevném bodě existuje $c : H(c) = c$.

Tedy $c = x - g[y - f(c)]$, tj. $x - c = g[y - f[c]$. Tedy $g^{-1}|_{(x-c)}$ je prosté zobrazení $x - c$ na $y - f[c]$. Tedy definujeme $h : x \to y$, $h(a) = f(a)$ pro $a \in c$, $H(a) = g^{-1}(a)$ jinak. □

Lemma 3.4

x, y, z, x_1, y_1 množiny, pak 1)$x \times y \approx y \times x$, 2)$x \times (y \times z) \approx (x \times y) \times z$, 3)$(x \approx x_1 \wedge y \approx y_1) \implies (x \times y) \approx (x_1 \times y_1)$, 4)$x \approx y \implies \mathcal{P}(x) \approx \mathcal{P}(y)$, 5)$\mathcal{P}(x) \approx^x 2 =^x \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Důkaz
1-4) Triviální. Pro 5) definujeme charakteristickou funkci a je to triviální. □

Definice 3.4 (Konečná množina (Tarski))

Množina x je konečná (značíme $\mathrm{Fin}(x)$), pokud každá neprázdná podmnožina její potenční podmnožiny má vzhledem k inkluzi maximální prvek.

Pozorování
$Fin(x)$ právě tehdy, když každá neprázdná podmnožina $\mathcal{P}(x)$ má minimální prvek vzhledem k $\subseteq$.

Důkaz
$d : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x), y \mapsto x \setminus y$ vše obrátí. □

Definice 3.5 (Dedekindovsky konečná množina)

Množina a je dedekindovsky konečná, pokud má větší mohutnost než každá její vlastní podmnožina. (Tj. neexistuje prosté zobrazení a do b.)

Lemma 3.5

Je-li a konečná, potom je i dedekindovsky konečná.

Důkaz
Víme $b \subset a \implies b \preceq a$. Chceme tedy $a \neq b$. Sporem: Předpokládejme, že $b \subset a \wedge b \approx a$, $Y := \{b, b \subset a \wedge b \approx a\}$. Víme, že Y je neprázdná, $Y \subseteq \mathcal{P}(a)$. Nechť c je minimální prvek Y vzhledem k inkluzi. Existuje tedy bijekce $f : a \to c$. Nechť $d = f[c]$. Zřejmě $f|_c : c \to d$ je bijekce, tedy $c \approx d$ a z tranzitivity $d \approx a$. Tedy $d \in Y$. Ale $d \subset c$, jelikož $\exists s \in c, f^{-1}(s) \in a \setminus c$, tj. $s \notin d$. To je ale spor s volbou c. □

Poznámka
V ZF je opravdu konečnost silnější než dedekindovská konečnost.

Poznámka (Další definice konečnosti)
Existuje lineární uspořádání, které je dobré a jeho inverze je také dobré uspořádání.

Existuje lineární uspořádání a každá dvě lineární uspořádání jsou izomorfní.

Potenční množina od potenční množiny je dedekindovsky konečná.

Věta 3.6

1) Je-li a konečná množina uspořádaná relací (částečným uspořádáním) $\leq$, pak každá neprázdná podmnožina $b \subset a$ má maximální i minimální prvek (vzhledem k $\leq$). 2) Každé lineární uspořádání na konečné množině je dobré (každá podmnožina má nejmenší prvek).

Důkaz
1) $\implies$ 2): každá podmnožina má minimální prvek, ale ten je při lineárním uspořádání konečný.

1): Pro každé $x \in a$ uvažujeme $(\leftarrow, x] := \{y \in a | y \leq x\}$. To jsou zřejmě podmnožiny a. Nechť $u = \{(\leftarrow, x], x \in b\}$. $b \in u \subseteq \mathcal{P}(a)$, tedy z definice konečnosti má maximální prvek $(\leftarrow, m]$. $m \in b$ je maximální prvek v b. Minimum otočením $\leq$. □

Definice 3.6 (Izomorfismus)

F je zobrazení A_1 do A_2, R_1, R_2 jsou relace. F je izomorfismus tříd A_1 a A_2 vzhledem k R_1 a R_2, pokud F je bijekce (prosté zobrazení na) a $\forall x, y \in A_1 : xR_1y \Leftrightarrow F(x)R_2F(y)$.

Definice 3.7 (Počátkové vnoření)

A množina uspořádaná relací R, B relací S, potom zobrazení $F : A \to B$ je počátkové vnoření A do B, pokud $A_1 = \mathrm{Dom}(F)$ je dolní množina A, $B_1 = \mathrm{Rang}(F)$ je dolní podmnožina B a F je izomorfismus A_1 a B_1 vzhledem k R, S.

Lemma 3.7

Nechť F, G jsou počátková vnoření dvou dobře uspořádaných množin A, B. Pak $F \subseteq G \vee G \subseteq F$.

Důkaz

Nechť R resp. S je dané uspořádání A resp. B. Víme, že $\mathrm{Dom}(F), \mathrm{Dom}(G)$ jsou dolní podmnožiny. R je lineární (jelikož je dobré), tedy $\mathrm{Dom}(F) \subseteq \mathrm{Dom}(G)$ nebo $\mathrm{Dom}(G) \subseteq \mathrm{Dom}(F)$. BÚNO první možnost. Sporem dokážeme, že $(\forall x \in \mathrm{Dom}(F))(F(x) = G(x))$.

Nechť x je vzhledem k R nejmenší prvek množiny $\{z, z \in A \wedge F(z) \neq G(z)\}$. Tedy pro každé $y <_R x$ je $F(y) = G(y)$. Z linearity S $F(x) <_S G(x)$ nebo $F(x) >_S G(x)$. BÚNO první možnost. Nechť $b = F(x)$. $z \in \mathrm{Dom}(G)$, 1) $z <_R x \implies G(z) = f(z) <_S b$, 2) $z \geq_R x \implies G(z) \geq_s G(x) >_S b$. Tedy $b \notin \mathrm{Rang}\, G$ a $\mathrm{Rang}\, G$ není dolní množina. ↯. □

Věta 3.8 (O porovnávání dobrých uspořádání)

A je množina dobře uspořádaná R, B je množina dobře uspořádaná S, pak existuje právě jedno zobrazení F, které je izomorfismus A a dolní množiny B nebo izomorfismus dolní množiny A a B.

Důkaz

P množina všech počátkových vnoření z A do B. $F := \bigcup P$ je zobrazení: když (x, y_1) a (x, y_2) existují počátková vnoření F_1, F_2 taková, že $(x, y_1) \in F_1$ a $(x, y_2) \in F_2$. Podle lemma: $F_1 \subseteq F_2 \vee F_2 \subseteq F_1$, tedy $y_1 = y_2$.

F je počátkové vnoření: když $x_1 <_R x_2 \in \mathrm{Dom}(F)$, pak existuje počátkové vnoření $F' \in P$ takové, že $x_2 \in \mathrm{Dom}(F')$, tedy $x_1 \in \mathrm{Dom}(F') \subseteq \mathrm{Dom}\, F$, tedy $\mathrm{Dom}(F)$ je dolní množina. Symetricky pro $\mathrm{Rang}(F)$.

TODO.

$\mathrm{Dom}(F) = A \vee \mathrm{Rang}(F) = B$: Sporem: $A - \mathrm{Dom}(F)$, $B - \mathrm{Dom}(F)$ jsou neprázdné. Mají tedy nejmenší prvky a, b. Definujeme $F' := F \cup \{(a, b)\}$. F' je počátkové vnoření, přitom $F' \supseteq F$, ↯. □

Věta 3.9

a je konečná množina, pak každé dvě lineární uspořádání na a jsou izomorfní.

Důkaz

r, s dvě lineární uspořádání a. Podle věty výše jsou r, s dobrá, tedy a, r je izomorfní dolní množině b v a, s nebo naopak. Tzn. $a \approx b$, tedy z definice konečnosti $b = a$. □

Lemma 3.10 (Zachovávání konečnosti)

$$1)(\mathrm{Fin}(x) \wedge y \subseteq x) \implies \mathrm{Fin}(y).$$
$$2)(\mathrm{Fin}(x) \wedge y \approx x) \implies \mathrm{Fin}(y).$$
$$3)(\mathrm{Fin}(x) \wedge y \preceq x) \implies \mathrm{Fin}(y).$$

Důkaz

1) z definice. 2) $\mathcal{P}(x) \approx \mathcal{P}(y)$, dokonce jsou izomorfní vzhledem k $\subseteq$. 3) z 1) a 2). □

Lemma 3.11 (Sjednocení konečných množin)

$$1)(\mathrm{Fin}(x) \wedge \mathrm{Fin}(y)) \implies \mathrm{Fin}(x \cup y).$$
$$2)\,\mathrm{Fin}(x) \implies (\forall y)(\mathrm{Fin}(x \cup \{y\})).$$

Důkaz

1) $w \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$ neprázdná. $\mathcal{P}(x) \supseteq w_1 = \{u, (\exists t \in w)(u = t \cap x)\} \neq \emptyset$. Tedy w_1 má maximální prvek (v_1). Nechť $\emptyset \neq w_2 := \{u, (\exists t \in w)(t \cap x = v_1 \wedge t \cap y = u)\} \subseteq \mathcal{P}(y)$. Tedy w_2 má maximální prvek v_2. $v_1 \cup v_2$ je maximální prvek w.

2): důsledek 1). □

Definice 3.8 (Třída konečných množin)

Třída všech konečných množin je $\mathrm{Fin} := \{x, \mathrm{Fin}(x)\}$.

Věta 3.12 (Princip indukce pro konečné množiny)

Je-li X třída, pro kterou platí

$$1)\emptyset \in X, \qquad 2)x \in X \implies (\forall y)(x \cup \{y\} \in X),$$

potom $\mathrm{Fin} \subseteq X$.

Důkaz (Sporem)
Pokud $x \in \mathrm{Fin} \setminus X$, pak označme $w = \{v, v \subseteq x \wedge v \in X\} = \mathcal{P}(x) \cap X$. Potom z definice konečnosti má w (která obsahuje minimálně $\emptyset$) maximální prvek v_1. $v_0 \subseteq X, v_0 \neq x$, tedy $\exists y \in x \setminus v_0$ a $v_0 \subseteq v_0 \cup \{y\} \in X$, tím pádem jsme našli větší prvek než v_0, který je v w, $\lightning$. □

Lemma 3.13

$$\mathrm{Fin}(x) \implies \mathrm{Fin}(\mathcal{P}(x)).$$

Důkaz
Indukcí přes konečné množiny. Nechť $X = \{x, \mathrm{Fin}(\mathcal{P}(x))\}$. 1) $\emptyset \in X$, protože $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ je konečná. 2) Nechť $x \in X$, y množina. Chceme, aby $x \cup \{y\} \in X$. BÚNO $y \notin x$. Rozdělíme $\mathcal{P}(x \cup \{y\})$ na části $\mathcal{P}(x)$ a $z := \mathcal{P}(x \cup \{y\}) \setminus \mathcal{P}(x)$. Platí $\mathcal{P}(x) \approx z$: pro $u \in \mathcal{P}(x)$ definujeme $f(u) = u \cup \{y\}$. Podle IP $\mathrm{Fin}(\mathcal{P}(x))$, podle lemma $\mathrm{Fin}(z)$ a $\mathrm{Fin}(z \cup \mathcal{P}(x))$. □

Důsledek
$\mathrm{Fin}(x) \wedge \mathrm{Fin}(y) \implies \mathrm{Fin}(x \times y)$.

Lemma 3.14 (Sjednocení konečně mnoha konečných množin)

$(\mathrm{Fin}(a) \wedge (\forall b \in a)(\mathrm{Fin}(b))) \implies \mathrm{Fin}(\bigcup a)$.

Důkaz (Indukcí)
Nechť $X = \{x, x \subseteq \mathrm{Fin} \implies \mathrm{Fin}(\bigcup x)\}$. 1) $\emptyset \in X$, protože $\bigcup \emptyset = \emptyset$ je konečná. 2) Nechť $x \in X$, y množina. Nechť $x \cup \{y\} \subseteq \mathrm{Fin}$, speciálně $x \subseteq \mathrm{Fin}$. $\bigcup(x \cup \{y\}) = (\bigcup x) \cup y$, což je podle IP a lemmatu o sjednocení konečné. □

Důsledek (Dirichletův princip pro nekonečné množiny)
Je-li nekonečná množina sjednocením konečně mnoha množin, pak alespoň jedna z nich je nekonečná.