

# 1 Úvod

## Definice 1.1 (Diferenciální rovnice)

Diferenciální rovnice je rovnice, která obsahuje derivaci.

*Poznámka (Motivace)*

Fyzika (např. pružina:  $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$ ), ekonomie (např. rovnice majetku?:  $k' = \alpha \cdot k - c(t)$ ), biologie (např. model dravec-kořist:  $d' = \alpha \cdot d \cdot k - \beta \cdot d \wedge k' = \gamma \cdot k - \delta \cdot d \cdot k$ ).

*Poznámka (Co nás zajímá na DR)*

Přesné řešení (často neumíme spočítat), existence a jednoznačnost řešení, jaké vlastnosti má řešení.

*Poznámka (Předpoklady)*

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  otevřená,  $(x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times I$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x' = f(x, t)$ .  $I \subset \mathbb{R}$ .

## Definice 1.2 (Obyčejná diferenciální rovnice, řešení)

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice  $x' = f(x, t)$  z předchozí poznámky.

Funkce  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  je řešení DR, jestliže

- $\forall t \in I : (x(t), t) \in \Omega$ ,
- $\forall t \in I$  existuje vlastní derivace  $x'(t)$ ,
- $\forall t \in I$  platí  $x'(t) = f(x(t), t)$ .

*Poznámka*

První dvě podmínky jsou jen existenční podmínky k rovnici ve třetím bodě.

Typicky má DR nekonečně mnoho řešení, přidáváme proto počáteční podmínku

$$(x_0, t_0) \in \Omega, \quad t_0 \in I.$$

## Lemma 1.1

Nechť  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  otevřená,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  spojitá a  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  spojitou a takovou, že graf  $x$  ( $\{(x(t), t) | t \in I\}$ ) leží v  $\Omega$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $x$  je řešení DR s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0$ ;
- $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds \quad \forall t \in I$ .

┌  
Důkaz

„ $\implies$ “:  $x$  a  $f$  je spojitá, tedy  $x' = f(x(t), t)$  je spojitá, tj.  $x \in C^1(I) \implies \int_{t_0}^t x'(s) ds = x(t) - x(t_0)$ .

„ $\impliedby$ “: jelikož  $f$  i  $x$  je spojitá, tak integral je diferencovatelný a  $x(t)$  je spojitá, tedy

$$x'(t) = 0 + f(x(t), t) \wedge x(t_0) = t_0 + 0.$$

└

□

### Věta 1.2 (Peanova věta o lokální existenci)

Nechť  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  otevřená,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  spojitá a  $(x_0, t_0) \in \Omega$ . Potom  $\exists \delta > 0$  a funkce  $x : B(t_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  taková, která je řešením DR a splňuje počáteční podmínku. (Stačí spojitá  $f$  a kompaktní  $\Omega$ .)

### Tvrzení 1.3 (Pomocné tvrzení)

Pokud  $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$  a  $f$  je omezená na  $\Omega$ , pak  $\forall T$  existuje řešení DR  $x$  na  $[t_0 - T, t_0 + T]$  splňující  $x(t) = x_0$  pro  $x \in [t_0 - T, t_0]$  a  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \lambda), s) ds$  jinak.

┌

Důkaz

Když  $x_\lambda$  je definována na  $[t_0 - \lambda, t]$ , pak pravá strana má smysl  $\forall t \in [t_0, t_0 + \lambda]$  tím pádem pravá strana integrálního tvaru má smysl  $\forall t \in [t_0, t_0 + \lambda]$ , tím pádem definujeme  $x_\lambda$  na  $[t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$ . □

└

*Důkaz*

Nyní definujme  $M := \{x_n|_{[t_0, t_0+T]}\}_{n=1}^{\infty}$  a ověříme, že  $M$  splňuje podmínky Arzela-Ascoliho věty:

$$|x_\lambda(t)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^t |f(x_\lambda(s - \lambda))| ds \leq |x_0| + \|f\|_\infty \cdot |t - t_0| \leq |x_0| + \|f\|_a \cdot T,$$

$$|x_\lambda(t) - x_\lambda(\tau)| = \left| \int_\tau^t f(x_\lambda(s - \lambda), s) ds \right| \leq \|f\|_\infty \cdot |t - \tau|.$$

Podle AA věty tedy existuje podposloupnost  $M$ , která konverguje stejnoměrně. Limitu si označme  $x$ , podposloupnost  $x_{n_k}$ .

Chceme dokázat, že  $x$  je řešení DR:

$$\lambda_k := \frac{1}{n_k}, \quad x_{n_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_{n_k}(s - \lambda_k), s) ds \rightarrow \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds.$$

Pro  $\overline{K_1} \subset K_2$ ,  $\overline{K_2} \subset \Omega$ ,  $(x_0, t_0) \in K$ ,  $K_1$  a  $K_2$  kompaktní definujeme

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} 1, & (x, t) \in K_1, \\ 0, & (x, t) \in \Omega \setminus \overline{K_2}, \end{cases}$$

kterou spojitě dodefinujeme, a

$$\tilde{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t) \cdot \varphi(x, t), & (x, t) \in \Omega \\ 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dle prvního kroku (TODO?)  $\exists \tilde{x}(t)$ ,  $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ ,  $\tilde{x}'(t) = \tilde{f}(\tilde{x}(t), t)$ ,  $\tilde{x}(t_0) = x_0$ .  $\tilde{x}$  je spojitá funkce  $\implies \exists \delta > 0$  tak, že graf funkce  $\tilde{x}|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$  leží v  $K_1$ . Na  $K$  je  $\tilde{f} = f$ , tedy  $\tilde{x}'(t) = f(\tilde{x}(t), t)$ ,  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ .  $\square$

*Důkaz* (Vzhledem k rozbitosti předchozího důkazu tu nanačím myšlenku:)

Definujeme si  $x_\lambda$  z pomocného tvrzení. Pak ověříme, že splňují podmínky AA, tedy z posloupnosti  $x_{\frac{1}{n}}$  můžeme vybrat konvergující podposloupnost. O její limitě pak epsilon delta gymnastikou ověříme, že splňuje integrální formu DR.  $\square$

## 1.1 Jednoznačnost řešení

### Definice 1.3 (Lokální jednoznačnost, globální jednoznačnost)

Řekneme, že DR má vlastnost

- lokální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení  $(x, I)$ ,  $(y, J)$  a  $t_0 \in I \cap J$ ,  $x(t_0) = y(t_0)$  pak  $\exists \delta > 0 \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ ,  $x(t) = y(t)$ ,

- globální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení  $(x, I), (y, J)$  a  $t_0 \in I \cap J, x(t_0) = y(t_0)$ , pak  $\forall t \in I \cap J : x(t) = y(t)$ .

## Tvrzení 1.4

*Globální jednoznačnost je ekvivalentní lokální jednoznačnosti.*

┌ *Důkaz*

„ $\implies$ “ je triviální. „ $\impliedby$ “: Pro spor předpokládejme  $\exists t_1 \in I \cap J, x(t_1) \neq y(t_1)$ . BÚNO  $t_1 > t_0$ . Definujme

$$M := \{T \in I \cap J, t > t_0, x(t) \neq y(t)\} \neq \emptyset, \quad t_2 = \inf M.$$

Víme  $x(t_2) = \lim_{t \rightarrow t_2^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_2^-} y(t) = y(t_2)$ . Podíváme se lokální jednoznačností na bod  $t_2$ . Tam existuje  $\sigma > 0$  tak, že  $\forall t \in (t_2 - \sigma, t_2 + \sigma) : x(t) = y(t)$ .  $\nexists$ . □

## Definice 1.4 (Lokálně lipschitzovská)

Řekneme, že funkce  $f = f(x, t)$  je lokálně lipschitzovská v  $\Omega$  vzhledem k  $x$ , jestliže

$$\forall (x_0, t_0) \in \Omega \exists \delta > 0 \exists L > 0 \forall t \in \mathcal{U}_\delta(t_0) \forall x, y \in \mathcal{U}_\delta(x_0) : |f(x, t) - f(y, t)| \leq L \cdot |x - y|$$

## Věta 1.5 (Peanova věta o jednoznačnosti)

*Buď  $f$  lokálně lipschitzovská v  $\Omega$  vzhledem k  $x$ , pak DR má v  $\Omega$  vlastnost lokální jednoznačnosti.*

┌ *Důkaz*

Ať  $x(t), y(t)$  jsou řešení.  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds$ .  $x(t) - y(t) = \int_{t_0}^t (f(x(s), s) - f(y(s), s)) ds$ . Vezmeme  $\sigma > 0$ . Grafy  $x|_{[t-\sigma]}, y|_{[t-\delta, t+\delta]}$  leží v  $\delta$ -okolí  $(x_0, t_0)$ .

$$\forall s \in [t - \sigma, t_0 + \sigma] : |f(x(s), s) - f(y(s), s)| \leq L \cdot |x(s) - y(s)|.$$

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(x(s), s) - f(y(s), s)| ds \leq \int_{t_0}^t L \cdot |x(s) - y(s)| ds, \quad t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \\ &\leq L \max_{s \in [t-\sigma, t+\sigma]} |x(s) - y(s)| \cdot \sigma \end{aligned}$$

└ □

*Důsledek*

Jestliže  $f$  je lokálně lipschitzovská v  $\Omega$  vzhledem k  $x$  a  $(x_0, t_0) \in \Omega$ , pak

$$\exists \delta > 0 \exists ! x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ řešení DR s počáteční podmínkou } x(t_0) = x_0.$$

┌  
Důkaz

Peanova věta o jednoznačnosti.

┐

## Tvrzení 1.6

Pokud  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  jsou spojité v  $\Omega$ ,  $j \in [n]$ , pak  $f$  je lokálně lipschitzovská v  $\Omega$  vzhledem k  $x$ .

┌  
Důkaz

$$h(s) := f(x + s(y - x), t), s \in [0, 1], h(0) = f(x, t), h(1) = f(y, t).$$

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(s) ds = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + s(y - x), t) \cdot (y_i - x_i) ds$$

$$\forall (x_0, t_0) \in \Omega \exists \mathcal{U}(x_0) \exists \mathcal{U}(t_0) M = \overline{\mathcal{U}(x_0)} \times \overline{\mathcal{U}(t_0)} \subset \Omega,$$

$M$  je kompaktní, tedy  $\exists K > 0 \forall (x, t) \in M : \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq K$ . Tedy

$$|h(1) - h(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |(x + s(y - x))| \cdot |y_i - x_i| ds \leq nK \cdot \max |y_i - x_i| \leq nK |x - y|.$$

┐

## 2 Maximální řešení

### Definice 2.1 (Prodloužení řešení, maximální řešení)

Řešení  $(\tilde{x}, \tilde{I})$  je prodloužením řešení  $(x, I)$ , jestliže  $\tilde{I} \supset I$  a  $\forall t \in I : x(t) = \tilde{x}(t)$ .

Řešení je maximální, pokud neexistuje netriviální prodloužení.

### Věta 2.1 (O maximálním prodloužení)

Každé řešení  $(x, I)$  má alespoň jedno maximální prodloužení.

┌  
Důkaz

Ať  $M$  je množina všech prodloužení  $(x, I)$ . Řekněme, že  $(\tilde{x}, \tilde{I}) \leq (\hat{x}, \hat{I})$  právě tehdy, když  $(\hat{x}, \hat{I})$  je prodloužení  $(\tilde{x}, \tilde{I})$ .

Ať  $N \subset M$  je řetězec (množina, na které je  $\leq$  lineární). Označme  $I_0 = \bigcup_{(\tilde{x}, \tilde{I}) \in N} \tilde{I}$  a definujme  $x : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  z toho, že  $t \in I_0 \implies \exists (\tilde{x}, \tilde{I}) \in N, t \in \tilde{I}$ , jako  $x(t) = \tilde{x}(t)$ .

Z Zornova lemmatu pak vyplývá, že existuje maximální řešení.

┐

### Lemma 2.2

$(x, I)$  řeší DR,  $I = (a, b)$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \infty$ . Pak řešení  $x$  lze prodloužit za bod  $b$ , když zároveň

- $b < \infty$ ;
- $\exists \lim_{t \rightarrow b} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$ ;
- $(x_0, b \in \Omega)$ .

┌

*Důkaz*

„ $\implies$ “ zřejmě, „ $\impliedby$ “: Uvažujme DR s počáteční podmínkou  $x(b) = x_0$ . Dle Peanovy věty  $\exists \tilde{x} : (b - \delta, b + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $x_1(t) = x(t)$ , pokud  $t \in (a, b)$ ,  $\tilde{x}(t)$  jinak.  $x_1$  tedy splňuje DR na  $(a, b)$  a  $(b, b + \delta)$ . Zbývá ověřit, že  $x'_1(b) = f(x_1(b), b)$ :

- $x_1$  je spojitá v  $b$ , neboť  $\lim_{t \rightarrow b^-} x_1(t) = x_0 = \lim_{t \rightarrow b^+} x_1(t) = \tilde{x}(t)$ .
- $\exists \lim_{t \rightarrow b^-} x'_1(t) = \lim_{t \rightarrow b^-} f(x(t), t) = f(x(b), b) = f(x_0, b)$ .
- $\exists \lim_{t \rightarrow b^+} x'_1(t) = \lim_{t \rightarrow b^+} f(\tilde{x}(t), t) = f(\tilde{x}(b), b) = f(x_0, b)$ .

└

□

### Věta 2.3 (O opuštění kompaktu)

Bud'  $(x, I)$  maximální řešení DR. Nechť  $K \subset \Omega$  kompaktní a  $\exists t_0 : (x(t_0), t_0) \in K$ . Pak  $\exists t_1 > t_0$ ,  $t_1 \in I$ , že  $(x(t_1), t_1) \in \Omega \setminus K$ .  $\exists t_2 \in I_2$ ,  $t_2 < t_0$ , že  $(x(t_2), t_2) \in \Omega \setminus K$ .

┌

*Důkaz*

Pro spor předpokládejme, že  $\forall t_1 > t_0, t_1 \in I : (x(t_1), t_1) \in K$ . Podle předchozí věty stačí dokázat  $b < \infty$  (kdyby ne, tak  $K$  není kompaktní),  $\{t_k\}_{k=1}^\infty \nearrow b$ ,  $\{(x(t_k), t_k)\}_{k=1}^\infty \subset K$  vybereme konvergentní podposloupnost  $(x(t_{k_n}), t_{k_n}) \rightarrow (x_0, t_0)$ . Následně ověříme BC podmínku: víme  $x(s) - x(t) = x'(\xi)(s - t)$ ,  $\xi \in (s, t)$ , tedy

$$|x(s) - x(t)| \leq |x'(\xi)| \cdot |s - t| = |f(x(\xi), \xi)| \cdot |s - t| \leq C \cdot |s - t|.$$

Zřejmě  $(x_0, b) \in K \subset \Omega$ , protože z kompaktu se nedá vykonvergovat.

└

□

## 3 Závislost řešení na počáteční podmínce

### Definice 3.1

Bud'  $f$  v  $\Omega$  lokálně Lipschitzovská vzhledem k  $x_0$ . Řešící funkcí (DR) nazveme funkci  $\varphi$  :

$G \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^n : (t, t_0, x_0) \mapsto x(t)$ , kde  $x$  je maximální řešení odpovídající DR s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0$ .

### Věta 3.1 (Grönwallovo Lemma)

Nechť  $g, w : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $g(t), w(t) \geq 0$ ,  $\forall t \in I_0$ . Nechť  $t_0 \in I, K \geq 0$  a  $\forall t \in I : w(t) \leq K + \left| \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds \right|$ . Potom

$$w(t) \leq K \cdot \exp \left( \left| \int_{t_0}^t g(s)ds \right| \right).$$

┌

*Důkaz*

BÚNO  $t > t_0$ . Vezmeme  $\varepsilon > 0$ . Definujeme  $\Phi(t) = K + \varepsilon + \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds$ .  $\Phi'(t) = w(t) \cdot g(t)$ .

$$\Phi'(t) \leq g(t) \left( K + \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds \right) \leq g(t)\Phi(t), \quad \forall t \in (t_0, \sup I).$$

$$\forall t \in (t_0, \sup I) : \Phi(t) \geq 0. \quad \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq g(t), \quad \int_{t_0}^t \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} ds \leq \int_{t_0}^t g(s)ds.$$

$$\Phi(t_0) = K + \varepsilon, \quad \frac{\Phi(t)}{K + \varepsilon} \leq \exp \left( \int_{t_0}^t g(s)ds \right),$$

$$\Phi(t) \leq (K + \varepsilon) \exp \left( \int_{t_0}^t g(s)ds \right) \quad \forall \varepsilon > 0 \implies \Phi(t) \leq K \cdot \exp \left( \int_{t_0}^t g(s)ds \right).$$

└

□

*Důsledek*

Nechť  $f$  je globálně  $L$ -lipschitzovská v první souřadnici. Nechť  $x$  a  $y$  jsou řešení DR na intervalu  $I$  s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ . Potom

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot e^{L \cdot |t - t_0|}.$$

┌  
Důkaz

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(x(t), t), & y'(t) &= f(y(t), t). \\x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds, & y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds, \\x(t) - y(t) &= x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t (f(x(s), s) - f(y(s), s)) ds, \\|x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + \left| \int_{t_0}^t L \cdot (x(s) - y(s)) ds \right|,\end{aligned}$$

└ Z Grönwallova lemmatu potom  $|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot \exp(L \cdot |t - t_0|)$ . □

### Věta 3.2

Buď  $G$  množina z definice řešící funkce,  $f$  lokálně lipschitzovská na  $G$ . Pak  $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$  otevřená a  $\varphi$  je spojitá v  $G$ .

┌  
Důkaz

Vezmeme  $(t, t_0, x_0) \in G$ . Buď  $x$  maximální řešení DR s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0$ .  $\mathcal{D}_x \supset [t_0, t]$ . BÚNO  $t > t_0$ .

$$K_\delta := \{(y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], |y - x(s)| \leq \delta\}.$$

Vezmeme  $\varepsilon > 0$ . Vezmeme  $y_0 \in \mathbb{R}^n, s_0 \in \mathbb{R}, |y_0 - x_0| < \varepsilon, |t_0 - s_0| < \varepsilon$ . Definujeme  $y$  maximální řešení splňující  $y(s_0) = y_0$ . Co znamená, že  $(\tilde{t}, s_0, y_0) \in G$ ?  $\mathcal{D}_y \supset [s_0, \tilde{t}]$ . Potřebujeme dokázat, že  $y$  je definováno na  $K_\delta$ . Odhadneme

$$\begin{aligned}|y(s_0) - x(s_0)| &\leq |y(s_0) - x(t_0)| + |x(t_0) - x(s_0)| = |y_0 - x_0| + |x(t_0) - x(s_0)| \leq \varepsilon + c_0 |t_0 - s_0| \leq \\&\leq \varepsilon \cdot (1 + c_0)\end{aligned}$$

$$s \geq t_0 : |x(s) - y(s)| \leq |x(s_0) - y(s_0)| e^{L|s-s_0|} \leq \varepsilon(1 + c_0) e^{L|s-s_0|}.$$

Máme, že  $\forall s > t_0 : |x(s) - y(s)| \leq \frac{\delta}{2}$ , tedy  $y$  neopustí  $K_\delta$  přes hranici  $\implies y$  existuje až do času  $t + \delta_0$ , tj.  $G$  je otevřená.

Nyní „ $\Phi$  je spojitá“:  $(t, t_0, x_0), (s, s_0, y_0) \in G$ :

$$\begin{aligned}|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(s, s_0, y_0)| &= |x(t) - y(s)| \leq |x(t) - x(s)| + |x(s) - y(s)| \leq \\&\leq c_0 |t - s| + |x(s_0) - y(s_0)| e^{L|s-s_0|} \leq \text{TODO}\end{aligned}$$

└ □

### Věta 3.3 (Diferencovatelnost řešící funkce)

Buď  $f$  je třídy  $C^1$  vzhledem k  $x$ ,  $\varphi$  je řešící funkce diferenciální rovnice. Potom  $\forall (t, t_0, x_0) \in$



$G$  a  $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, |w| = 1$ , existuje derivace  $\varphi$  podle  $x_0$  ve směru  $w$  v bodě  $(t, t_0, x_0)$ , tj.

$$D_w \varphi(t, t_0, x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0)}{h}.$$

Označíme-li pro pevné  $(t_0, x_0)$ :  $x(t) := \varphi(t, t_0, x_0)$ ,  $u(t) := D_{\mathbf{w}} \varphi(t, t_0, x_0)$ , pak platí

$$u'(t) = [\nabla_x f(x(t), t)]u(t), \quad (\text{tzv. rovnice ve variacích})$$

$$u(t_0) = \mathbf{w}.$$

┌ *Důkaz*

Vezmeme  $(x_0, t_0) \in \Omega$ . Definujeme  $x(t) := \varphi(t, t_0, x_0)$ ,  $y_h(t) := \varphi(t, t_0, x_0 + h\mathbf{w})$ . To znamená, že

$$\eta_h(x) = \frac{\varphi(t, t_0, x_0 + h\mathbf{w}) - \varphi(t, t_0, x_0)}{h} - u(t) = \frac{y_h(t) - x(t)}{h} - u(t).$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s)ds, \quad y_h(t) = x_0 + h \cdot \mathbf{w} + \int_{t_0}^t f(y_h(s), s)ds.$$

$$y_h(t) - x(t) = h \cdot \mathbf{w} + \int_{t_0}^t f(y_h(s), s) - f(x(s), s)ds.$$

Pro nějaké  $s, h$   $g(\vartheta) = f(x(s) + \vartheta(y_h(s) - x(s)), s)$ , tedy  $g(1) = f(y_h(s), s)$ ,  $g(0) = f(x(s), s)$ ,

$$\begin{aligned} y_h(t) - x(t) &= h \cdot \mathbf{w} + \int_{t_0}^t g(1) - g(0)ds = h \cdot \mathbf{w} + \int_{t_0}^t \int_0^1 g'(\vartheta)d\vartheta ds = \\ &= h \cdot \mathbf{w} + \int_{t_0}^t \int_0^1 \nabla_x f(x(s) + \vartheta(y_h(s) - x(s)), s) \cdot (y_h(s) - x(s))d\vartheta ds. \end{aligned}$$

Buď  $u(t)$  maximální řešení  $u'(t) = [\nabla_x f(x(t), t)]u(t)$ ,  $u(t_0) = \mathbf{w}$ . Tj.

$$u(t) = \mathbf{w} + \int_{t_0}^t \nabla_x f(x(s), s)u(s)ds = \mathbf{w} + \int_{t_0}^t \int_0^1 \nabla_x f(x(s), s)u(s)d\vartheta ds.$$

Odečteme od předcházejícího a dostaneme

$$\begin{aligned} \eta_h(x) &= \int_{t_0}^t [\nabla_x f(x(s), s)]\eta_h(s)ds + \\ &+ \int_{t_0}^t \int_0^1 [\nabla_x f(x(s) + \vartheta(y_h(s) - x(s))) - \nabla_x f(x(s), s)] (y_h(s) - x(s))d\vartheta ds. \\ |\eta_h(t)| &\leq \int_{t_0}^t C \cdot |\eta_h(s)|ds + \max_{\substack{s \in [t_0, t], \\ \vartheta \in [0, 1]}} |\nabla_x f(x(s) + \vartheta(y_h(s) - x(s)), s) - \nabla_x f(x(s), s)| \cdot \int_{t_0}^t e^{L \cdot (s - t_0)} ds. \end{aligned}$$

Z důsledku předpředchozí věty

$$|y_h(s) - x(s)| \leq |y_h(t_0) - x(t_0)|e^{L \cdot |s - t_0|} = |h\mathbf{w}|e^{L \cdot |s - t_0|} = |h|e^{L \cdot |s - t_0|}.$$

$$|\eta_h(t)| \leq K_h \cdot C_2 + \int_{t_0}^t C \cdot (\eta_h(s))ds,$$

kde  $K_h \rightarrow 0$ . Z G. lemmatu pak plyne  $|\eta_h(t)| \leq K_n \cdot C_2 \cdot \exp[C \cdot |t - t_0|] \implies \lim_{h \rightarrow 0} \eta_h(t) = 0$ . □

└

## 4 Lineární ODR

### Definice 4.1 (Lineární ODR)

$x' = A(t)x + b(t)$ ,  $A : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ ,  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  spojité funkce.

### Věta 4.1

Nechť  $t_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Pak existuje právě jedno maximální řešení  $x$  (LODR) s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0$ . Funkce  $x$  je definovaná na  $(\alpha, \beta)$ .

┌  
Důkaz

Stačí dokázat, že  $x$  je definováno na celém  $(\alpha, \beta)$ . Předpokládejme, že  $x$  je definované na  $(a, b)$ , BÚNO  $b < \beta$ ,  $t_0 \in [a, b]$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)x(s) + f(s)] ds,$$

$$|x(t)| \leq |x_0| + \max_{s \in [t_0, f]} |A(s)| \int_{t_0}^t |x(s)| ds + \max_{s \in [t_0, b]} |f(s)| \cdot |t - t_0|.$$

Z G. lemmatu plyne  $|x(t)| \leq (|x_0| + \max_{s \in [t_0, b]} |f_s| \cdot |f - t_0|) e^{\max_{s \in [t_0, b]} |A(s)| \cdot |f - t_0|}$ . Pak na intervalu  $(t_0, b)$   $x$  neopustí nějaký kompakt. □

### Definice 4.2 (Homogenní rovnice)

LODR nazveme homogenní, pokud  $b \equiv 0$ , tedy  $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$ .

### Věta 4.2

Množina řešení  $H$  je vektorový prostor dimenze  $n$ .

┌  
Důkaz

Součet řešení je řešení zřejmě. Stejně tak násobek. Dimenze  $n$  se dokazuje tak, že vezmeme bod  $a$  a řešení, která mají každé v tomto bodě jednu funkci 1 a ostatní 0. To jsou zřejmě LN řešení a dá se z nich složit libovolné jiné, protože máme jednoznačnost řešení s konkrétní počáteční podmínkou. Takže další řešení poskládáme z těchto. □

### Definice 4.3 (Fundamentální řešení)

Fundamentálním řešením homogenní LODR nazveme každou bázi prostoru řešení. Budeme jej značit

$$\Phi(t) = (\varphi(t), \dots, \varphi(t)).$$

┌  
Poznámka

Zřejmě  $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ .

**Definice 4.4** (Wronského determinant (Wronskián))

$$W(t) = \det \Phi(t).$$

**Věta 4.3** (Liouvilleova věta)

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp \left( \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right).$$

┌ *Důkaz*

└ Chceme dokázat, že  $W'(t) = W(t) \cdot (\operatorname{tr} A(t))$ . Rozepsáním. □

**Věta 4.4** (Variace konstant)

*Nechť  $x' = A(t)x + b(t)$ ,  $A : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  spojité, je LODR,  $\Phi(t)$  fundamentální matice homogenní rovnice  $x' = A(t)x$ . Potom řešení LODR s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0$  ( $t_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ) je dáno předpisem*

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds.$$

┌ *Poznámka*

└ Když budeme hledat řešení LODR ve tvaru  $\Phi(t) \cdot C(t)$ , dostaneme se k tomuto vzorci.

┌ *Důkaz*

└ Zderivujeme a s použitím  $\Phi'(t) = A(t) \cdot \Phi(t)$ :

$$\begin{aligned} x'(t) &= \Phi(t) \cdot \Phi'(t_0) \cdot x_0 + \Phi'(t) \cdot \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) \cdot b(s)ds + \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t) \cdot b(t) = \\ &= A(t) \left( \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) \cdot b(s)ds \right) + b(t) = A(t)x + b(t). \end{aligned}$$

└ Navíc zjevně  $x(t_0) = x_0$ . □

## 5 Lineární rovnice s konstantními koeficienty

**Definice 5.1** (Lineární rovnice s konstantními koeficienty (LODRKK))

$$x' = Ax + b(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ spojité.}$$

*Poznámka*

Ukážeme, že pro  $n \in \mathbb{N}$  je řešení homogenní soustavy LODRKK se dá napsat ve tvaru  $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$ .

**Definice 5.2** (Norma matice)

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}. \|A\| := \sup \{|Ax| \mid x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}.$$

**Věta 5.1**

*Nechť  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Pak*

1.  $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ;
2.  $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ;
3.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ;
4.  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ ;
5.  $|Av| \leq \|A\| \cdot |v|, v \in \mathbb{R}^n$ ;
6.  $|Av| \geq \frac{|v|}{\|A^{-1}\|}, \forall v \in \mathbb{R}^n$ , je-li  $A$  regulární.

┌

*Důkaz*

1.–3. za domácí úkol. V 5. se pouze vezme norma, 2. a definice. Pro 4. dvakrát použijeme 5. Nakonec u 6. použijeme  $y = Av$ , tedy  $v = A^{-1}y$ , tím dostaneme samé tvrzení jako v 5.. □

**Věta 5.2**

*Funkce  $U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k, t \in \mathbb{R}$  je fundamentální matice homogenního řešení LODRKK,  $U(0) = I_0$ .*

┌  
Důkaz

Za prvé řada konverguje, neboť

$$\left\| \frac{1}{k!} t^k A^k \right\| \leq \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k \wedge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|A^k\| K.$$

Za druhé  $[U(t)]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k [A^k]_{ij}$  a poloměr konvergence je  $\infty$ , můžeme tedy derivovat člen po členu:

$$\frac{d}{dt}[U(t)]_{ij} = \dots = A \cdot U(t).$$

└

□

### Věta 5.3

Pro  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definujeme  $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ . Potom platí:

- $e^{\lambda I} = e^{\lambda} \cdot I$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- pokud  $AB = BA$ , pak  $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ ;
- $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^AC$ , pokud je  $C$  regulární;
- $e^{-A} = (e^A)^{-1}$ .

┌  
Důkaz

└  
TODO

□

### Věta 5.4

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\Lambda$  je její Jordanův kanonický tvar,  $A = C\Lambda C^{-1}$ , a  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  je diagonála  $\Lambda$ . Potom  $e^{tA} = Ce^{t\Lambda}C^{-1}$ , kde:

$$e^{t\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{t\Lambda_1} & 0 & \dots & \\ 0 & e^{t\Lambda_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{t\Lambda_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}) \cdot P(t), P_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

┌  
Důkaz

└  
Jednoduchý, byl na cvičení.

□

Důsledek

Buď  $\bar{a} = \max \{\Re \lambda | \lambda \in \text{eig}(A)\}$ ,  $m$  je velikost Jordanovy buňky příslušná  $\lambda : \Re \lambda = \bar{a}$ . Pak  $\det(A - \lambda I) = 0$ :

$$\exists C > 0 : \|e^{tA}\| \leq C \cdot t^{n-1} \cdot e^{\bar{a}t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Obdobně když  $\underline{a} = \min$ , pak

$$\exists C > 0 : \|e^{tA}\| \leq C \cdot |t|^{n-1} \cdot e^{\underline{a}t}, \quad \forall t \leq 0.$$

*Důkaz*

Operátorová norma  $\|\cdot\|$  je ekvivalentní normě  $\|A\|_\infty$ . Z toho a předchozí věty už to odhadneme...  $\square$

*Důsledek*

Je-li  $\Re \lambda < 0$ ,  $\forall \lambda \in \text{eig}(A)$ , pak  $e^{At}x_0 \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow +\infty$ .

**Definice 5.3** (Stabilní, nestabilní a centrální podprostor)

$$\sigma_-(A) = \{\lambda \in \text{eig}(A) | \Re \lambda < 0\}, V_- = \text{Lin} \{v \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda I)^k v = 0, \lambda \in \sigma_-\}$$

$$\sigma_+(A) = \{\lambda \in \text{eig}(A) | \Re \lambda > 0\}, V_+ = \text{Lin} \{v \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda I)^k v = 0, \lambda \in \sigma_+\}$$

$$\sigma_0(A) = \{\lambda \in \text{eig}(A) | \Re \lambda = 0\}, V_0 = \text{Lin} \{v \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda I)^k v = 0, \lambda \in \sigma_0\}.$$

**Věta 5.5**

$$\exists C > 0, \alpha > 0 \quad \forall x_0 \in V_- : |e^{tA}x_0| \leq Ce^{-\alpha t}|x_0|, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\exists C > 0, \beta > 0 \quad \forall x_0 \in V_+ : |e^{tA}x_0| \geq Ce^{\beta t}|x_0|, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall x_0 \in V_0 : |e^{tA}x_0| \leq Ce^{\varepsilon t}|x_0|, \quad \forall t \geq 0.$$

## 6 Stabilita řešení

**Definice 6.1** (Stabilní řešení, lokální atraktor, asymptotická stabilita)

DR  $x' = f(x, t)$ . Buď  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\{\mathbf{o}\} \times [\tau, +\infty) \subset \Omega$ . Buď  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  spojitá a lokálně lipschitzovská vzhledem k  $x$  a  $f(0, t) = 0$ ,  $\forall t > \tau$ . Značme  $I = [\tau, +\infty)$ . Nulové řešení DR se nazývá:

- stabilní, jestliže  $\forall t_0 \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0 : |x_0| < \delta \implies |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$ ;
- lokální atraktor, pokud  $\forall t_0 \in I \quad \exists \eta > 0 \forall x_0 : |x_0| < \eta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, t_0, x_0) = 0$ ;
- asymptoticky stabilní, pokud je stabilní a zároveň je lokálním atraktorem;
- uniformě stabilní, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t_0 \in I : |x_0| < \delta \implies |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0;$$

- uniformě asymptoticky stabilní, je-li uniformě stabilní a

$$\exists \eta > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau > 0 \ \forall t_0 \in I \ \forall x_0 : |x_0| < \eta \implies |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \ \forall t \geq t_0 + \tau.$$

*Důkaz* (Předchozí věty)

První bod:

$$e^{tA}x_0 = V e^{tJ} V^{-1} x_0$$

$$x_0 \in X_-(A) \implies V^{-1}x_0 \in V^-(J)$$

TODO (další část jsem nechápal, pravděpodobně to byl důkaz implikace na předchozím řádku)

Z první rovnice:

$$\begin{aligned} |e^{tA}x_0| &\leq \|V\| \cdot |e^{tJ}(V^{-1}x_0)| = \|V\| \cdot |e^{tJ}|_{X^-(J)} \cdot |V^{-1}x_0| \leq \|V\| \cdot \|e^{tJ}|_{X^-(J)}\| \cdot |V^{-1}x_0| \leq \\ &\leq \|V\| \cdot K \cdot e^{-\alpha t} \cdot \|V^{-1}\| \cdot |x_0| = C \cdot e^{-\alpha t} \cdot |x_0|. \end{aligned}$$

Druhý bod:  $x_0 \in X_+(A)$ ,  $e^{-At}y_0 = x_0$ .  $\|x_0\| = \|e^{-At}y_0\| \leq e^{\beta t}C|y_0|$  podobně jako v prvním bodě.  $y_0 = e^{At}x \in X_+(A)$ ,  $t \geq 0$ .

Třetí bod:  $\|e^{tJ}|_{X_C(J)}\| \leq K \cdot t^m$ ,  $m$  je maximální velikost Jordanovy buňky odpovídající vlastním číslům z  $\sigma_0(A)_0$ . □

## Věta 6.1

Nulové řešení homogenní LODRKK  $x' = Ax$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je

- asymptoticky stabilní  $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(A) : \Re \lambda < 0$ ;
- stabilní  $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(A) : \Re \lambda \leq 0$  a Jordanovy buňky příslušné vlastním číslům s  $\Re \lambda = 0$  mají velikost 0.

## Definice 6.2

$x_0$  je stabilní řešení  $x' = f(x, t) \equiv 0$  je stabilní řešení  $y' = g(y(t), t) = f(x_0(t) + y(t), t) - f(x_0(t), t)$ . Obdobně pro další typy stability.

## Lemma 6.2

Dána rovnice  $x' = Ax + g(x, t)$ . Necht  $\|e^{tA}\| \leq K e^{-\alpha t}$ ,  $\forall t \geq 0$ ,  $g$  spojitá v  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $|g(x, t)| \leq \gamma \cdot |x|$ , kde  $\gamma < \frac{\alpha}{K}$ . Pak nulové řešení je uniformě asymptoticky stabilní.



┌ *Důkaz*

Buď  $x$  řešení,  $x'(t) = A \cdot x(t) + g(x(t), t)$ , což napíšeme jako  $x'(t) = Ax(t) + f(t)$ . Použijeme variaci konstant:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s)ds.$$

Odhadneme:  $t > t_0 : |x(t)| \leq |e^{A(t-t_0)}x_0| + \int_{t_0}^t |e^{A(t-s)}f(s)|ds,$

$$|x(t)| \leq K \cdot e^{-\alpha(t-t_0)} \cdot |x_0| + K \cdot \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)} \cdot \gamma |x(s)|ds,$$

$$|e^{\alpha t}x(t)| \leq K \cdot e^{\alpha t_0} \cdot |x_0| + K \cdot \int_{t_0}^t e^{\alpha s} \cdot \gamma |x(s)|ds.$$

Z G. lemmatu:

$$|e^{\alpha t}x(t)| \leq K \cdot e^{\alpha t_0} \cdot |x_0| \cdot e^{K\gamma(t-t_0)},$$

$$|x(t)| \leq K \cdot |x_0| \cdot e^{(K\gamma - \alpha)(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

└ Tudíž je uniformě asymptoticky stabilní. □

### **Věta 6.3** (O linearizované stabilitě)

*Dána rovnice (AR)  $x' = f(x)$ , kde  $f$  je třídy  $C^1$  v okolí bodu  $x_0$ . Nechť  $f(x_0) = 0$  a  $A = \nabla f(x_0)$  splňuje  $\Re \lambda < 0 \ \forall \lambda \in \sigma(A)$ . Pak  $x(t) \equiv x_0$  je uniformě asymptoticky stabilní.*

*Pokud  $A$  splňuje  $\exists \lambda \in \sigma(A), \Re \lambda > 0$ , pak  $x(t) \equiv x_0$  není stabilní.*

┌  
Důkaz

Vize:

$$x' = f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) = 0 + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0).$$

Búno  $x_0 = 0$ .  $x' = A \cdot x + g(x)$ , kde  $g(x) = f(x) - Ax_0$ .

$$\exists \alpha > 0 \ \forall \lambda \in \sigma(A) : \Re \lambda < -\alpha_0.$$

Pak  $|e^{At}| \leq K \cdot e^{-\alpha t}$ ,  $\forall t \geq 0$ . Pro  $g$  platí, že  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{|x|} = 0$ , tedy  $\exists \Delta > 0 : \forall x : |x| < \Delta \implies \frac{|g(x)|}{|x|} < \gamma$ , kde  $\gamma < \frac{\alpha}{K}$ . Máme, že  $|g(x)| < \gamma \cdot |x|$ ,  $|x| < \Delta$ .

Definujeme (tzv. seřazovací funkci)

$$\eta(s) = \begin{cases} 1, & s < \frac{\Delta}{2}, \\ \eta(s) \text{ spojitá, že } 0 < \eta(s) < 1, & s \in [\frac{\Delta}{2}, \Delta], \\ 0, & s > \Delta. \end{cases}$$

Definujeme  $h(x) := g(x) \cdot \eta(x)$ . Platí, že  $|h(x)| \leq \gamma \cdot |x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Podívejme se na  $y' = Ay + h(y)$ . To splňuje předpoklady předchozího lemmatu, tudíž nulové řešení je uniformě stabilní, tedy stabilní. Tj. existuje  $\delta > 0 : |y(t_0)| < \delta \implies |y(t)| \leq \frac{\Delta}{2} \ \forall t \geq t_0$ , tedy  $y$  splňuje  $x' = Ax + g(x)$ . A podle předchozí věty je  $x$  uniformě asymptoticky stabilní.  $\square$

└

## 7 První integrál

### Definice 7.1 (AR)

$$x' = f(x), \quad f \text{ spojitá lokálně lipschitzovská v otevřené množině } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

### Definice 7.2 (První integrál)

Funkce  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme 1. integrálem AR, jestliže  $U$  není konstantní a funkce  $t \mapsto U(x(t))$  je konstantní  $\forall x$  řešení AR.

### Věta 7.1

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  otevřená,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  spojitá,  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  třídy  $C^1$ . Pak následující je ekvivalentní:

- $U$  je první integrál AR.
- $\nabla U(\zeta) \cdot f(\zeta) = 0 \ \forall \zeta \in \Omega$ .

┌ *Důkaz*

„ $\Leftarrow$ “:  $x'(t) = f(x(t))$ . Chceme dokázat, že  $U(x(t))$  je konstantní.

$$\frac{d}{dt}U(x(t)) = \nabla U(x(t)) \cdot x'(t) = \nabla U(x(t)) \cdot f(x(t)) = 0.$$

„ $\Rightarrow$ “:  $\zeta \in \Omega$  pevné. Existuje řešení  $x(t)$ , že  $x(0) = \zeta$ . Tedy  $U(x(t)) = U(x(0))$  a zderivováním

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla U(x(t)) \cdot x'(t) = \nabla U(x(t)) \cdot f(x(t)) \quad \forall t \\ \Rightarrow t=0 : \nabla U(x(0)) \cdot f(x(0)) &= \nabla U(\zeta) \cdot f(\zeta) = 0. \end{aligned}$$

└

□

### Definice 7.3 (LN první integrály)

Ať  $U_1, \dots, U_k$  jsou první integrály (AR). Řekneme, že jsou LN v bodě  $x_0 \in \Omega$ , pokud matice  $\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)_{j \in [k], i \in [n]}$  má hodnotu  $k$ .

### Věta 7.2

Budte  $U_1, \dots, U_k$  první integrály (AR), LN v bodě  $x_0$ . Pak řešení procházející bodem  $x_0$  lze lokálně popsat soustavou  $n - k$  DR.

┌

*Důkaz*

$\text{rank} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_p} \right)_{j \in [k], p \in [n]} = k$ . BÚNO  $\text{rank} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_p} \right)_{j \in [k], p \in [k]} = k$ .  $x = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ ,  
 $y = (x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ .

└

□

### Věta 7.3

$$f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists n-1 \text{ LN prvních integrálů v } x_0.$$

┌

*Důkaz*

BÚNO  $f_n(x_0) \neq 0$ .  $x_0 = (y, a)$ .  $x'(t) = f(x(t))$ ,  $x_0 = x(0) = (y, a)$ . Chceme  $\forall x \in O \exists ! t \exists ! z \in \mathbb{R}^{n-1} : \varphi(t, t_0 = 0, (z, a)) = x$ .

Definujeme  $\psi(t, z_1, \dots, z_n) = \varphi(t, 0, z_1, \dots, z_{n-1}, a)$ .

└

TODO!!!

□

## 8 Stabilita a Ljapunovské funkce

### Definice 8.1

Mějme DR  $x' = f(x, t)$ ,  $f : \Omega \times [T, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  otevřená,  $f(0, t) = 0, \forall t \in I$ .

Spojitou funkci  $\omega : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  nazveme pozitivně definitní, je-li  $\omega(0) = 0$  a  $\forall x \in \Omega \setminus \{0\} : \omega(x) \neq 0$ .

Funkci  $V(t, x) : I \times \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  nazveme l'apunovskou pro DR v  $\Omega$ , je-li

- $V$  spojitá,  $\forall t \in I : V(t, 0) = 0$ ;
- funkce  $t \mapsto V(t, x(t))$  je nerostoucí  $\forall x$  řešení DR;
- existuje pozitivně definitní  $\omega$ , že  $V(t, x) \geq \omega(x) \forall x \in \Omega \forall t \in I$ .

### Věta 8.1

*Nechť DR má l'apunovskou funkci. Potom nulové řešení je stabilní.*

### Věta 8.2

*Nechť DR má v  $\Omega$  l'apunovskou funkci  $V$ , která splňuje následující podmínky:  $\exists$  pozitivně definitní funkce  $\omega, \lambda, \eta$  v  $\Omega$ , že*

- $\omega(\zeta) \leq V(t, \zeta) \leq \lambda(\zeta) \forall t \in I \forall \zeta \in \Omega$ ;
- $\frac{d}{dt} [V(t, x(t))] \leq -\eta(x(t)) \forall$  řešení  $x$  v  $\Omega$ .

*Potom je řešení  $x = 0$  asymptoticky stabilní.*

*Důkaz (Předpředchozí věty)*

Chceme:

$$\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0 : |x_0| < \delta \implies |x(t)| < \varepsilon \forall t \geq t_0.$$

To stačí dokázat pouze pro  $\varepsilon > 0$ , že  $\overline{\mathcal{U}(0, \varepsilon)} \subset \Omega$ .  $\omega$  na  $\{\zeta : |\zeta| = \varepsilon\}$  nabývá minima  $d$ , neboť je spojitá a to je kompaktní množina.

$V(t_0, 0) = 0$  a  $V$  je spojitá, tedy  $\exists \delta > 0, \delta \leq \varepsilon \forall \zeta, |\zeta| < \delta : V(t_0, \zeta) < d$ .

Pro spor nechť  $\exists t_2 > t_0 : |x(t_2)| > \varepsilon$  a volíme  $\forall x_0 : |x_0| < \delta : x(t_0) = x_0 \implies \exists t_1 : t_0 < t_1 < t_2 : |x(t_1)| = \varepsilon$ .

$$\alpha > V(t_0, x(t_0)) \geq V(t_1, x(t_1)) \geq \omega(x(t_1)) \geq \alpha, \text{?}$$

□

### Lemma 8.3

Bud'  $\omega$  pozitivně definitní funkce na  $\Omega$ .  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}(0, \varepsilon)$ ,  $\overline{\mathcal{U}(0, \varepsilon)} \subset \Omega$ ,  $\omega(x_n) \rightarrow 0$ . Pak  $x_n \rightarrow 0$ .

┌

Důkaz

$$\forall \tilde{\varepsilon} < \varepsilon \exists N, x_n \subset U(0, \tilde{\varepsilon})$$

chceme.  $K = \overline{\mathcal{U}(0, \varepsilon)} \setminus \mathcal{U}(0, \tilde{\varepsilon})$  je kompakt, tedy funkce  $\omega$  na něm nabývá minima,  $\exists x_0 \in K : \omega(x) \geq \omega(x_0) > 0 \forall x \in K_0 \implies \exists N : \forall n > N : x_n \notin K \implies x_n \in U(0, \tilde{\varepsilon})$ .  $\square$

Důkaz

$$\exists \varepsilon > 0 \overline{\mathcal{U}(0, \varepsilon)} \subset \Omega \exists \delta > 0, \delta < \varepsilon \forall x_0 : |x_0| < \delta \implies |x(t)| < \varepsilon \forall t \geq t_0.$$

Bereme  $\forall x_0 : |x_0| < \delta_0$ . Stačí dokázat „ $x(t) \rightarrow 0$ “:

$$V(t, x(t)) \searrow C \geq 0 \implies \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t, x(t)) = a \geq 0.$$

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{ds} V(s, x(s)) ds \leq - \int_{t_0}^t \eta(x(s)) ds, V(t, x(t)) + \int_{t_0}^t \eta(x(s)) ds \leq V(t_0, x(t_0)).$$

Tedy existuje  $\int_{t_0}^{\infty} \eta(x(s)) ds < \infty \implies \exists \{t_k\}_{k=1}^{\infty} \nearrow \cdot \eta(x(t_k)) \rightarrow 0, |x(t_k)| < \varepsilon(sta?) \implies x(t_k) \rightarrow 0$ .

$$3. V(t_k, x(t_k)) \leq \lambda(x(t_k)) \wedge x(t_k) \rightarrow 0 \implies \lambda(x(t_k)) \rightarrow 0 \implies V(t_k, x(t_k)) \rightarrow 0 \implies a = 0.$$

4.  $\omega(x(t)) \leq V(t, x(t)) \forall t \geq t_0$ . Chceme důkaz, že  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(x(t)) = 0$ . Berme libovolnou posloupnost  $\mathcal{F}_k \nearrow +\infty$ .  $\omega(x(\tilde{t}_k)) \leq V(\tilde{t}_k, x(\tilde{t}_k)) \rightarrow 0$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(x(\tilde{t}_k)) = 0 \wedge |x(\tilde{t}_k)| < \varepsilon \implies x(\tilde{t}_k) \rightarrow 0 \implies \exists \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

$\square$

Poznámka (Zkouška)

Bude písemná část cca od devíti do půl jedenácté a pak bude od dvanácti.

### Věta 8.4

Ať  $x' = Ax$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní

- 0 je uniformě asymptoticky stabilní;
- $\forall \lambda \in \sigma(A) : \Re \lambda < 0$ ;
- $\exists \alpha, c > 0 : \|e^{tA}\| \leq ce^{-\alpha t} \forall t \geq 0$ ;

- $\exists$  symetrická pozitivně definitní  $B$ , že  $A^T B + BA = -I$ .

┌ Důkaz

└ Bez důkazu. □

## 9 Šturnova srovnávací věta

*Poznámka*

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0,$$

$t \in I$ ,  $I$  interval,  $a_j$  spojité v  $I$ ,  $a_0(t) \neq 0$ ,  $t \in I$ .

Buď  $t_0 \in I$ ,  $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R} \implies \exists! x$  splňující předchozí rovnici,  $x(t_0) = \eta_0$ ,  $x'(t_0) = \eta_1$ .

Problém: rozložení nulových bodů netriviálního řešení.

### Lemma 9.1

$x(t)$  netriviální řešení předchozí poznámky na  $I$ . Potom

- je-li  $x(t_0) = 0$ , pak  $x'(t_0) \neq 0$ ;
- je-li  $x(t_0) = 0$ ,  $y(t_0) = 0$  ( $y$  takéž řešení), pak  $\exists \lambda : y(t) = \lambda x(t) \ \forall t \in I$ ;
- $N(x) = \{t \in I | x(t) = 0\}$  nemá v  $I$  hromadný bod.

┌

*Důkaz*„První bod“:  $x(t_0) = x'(t_0) = 0 \implies x(t) = 0 \forall t \in I$ .

„Druhý bod“:

$$y(t_0) = 0, x(t_0) = 0, x \neq 0 \implies x'(t_0) \neq 0$$

$$z(t) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \cdot x(t), t \in I_0.$$

$$z(t_0) = 0, z'(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \cdot x'(t_0) = y'(t_0).$$

$$z(t_0) = y(t_0), z'(t_0) = y'(t_0) \implies z(t) = y(t) \forall t \in I_0.$$

„Třetí bod“:  $\exists t_0 \in (a, b), \exists t_n \rightarrow t_0, x(t_n) = 0$ .

$$x'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \text{ Heine } x'(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0} = 0.$$

$$x(t_n) = 0, x'(t_n) = 0 \implies x(t_0) = 0 \forall t \in I_0.$$

└

□

*Poznámka*Každý kompaktní má konečný průnik s  $N(x)$ , tj. má smysl mluvit o sousedních nulových bodech.**Lemma 9.2**Rovnice z poznámky výše (kde  $\exists b'$  spojitá) je převoditelná na tvar  $y''(t) + q(t)y(t) = 0$ ,  $q \in C(I)$ .

┌

*Důkaz*

$$x''(t) + b_1(t)x'(t) + b_2(t)x(t) = 0, \quad b_j = \frac{a_j}{a_0(t)}.$$

$$x(t) = v(t) \cdot y(t) \implies$$

$$\implies v(t) \cdot y''(t) + y'(t)(2v'(t) + b_1(t)v(t)) + y(t) \overbrace{(v''(t) + b_1(t)v'(t) + b_0(t)v(t))}^q = 0.$$

Chceme vynulovat člen u  $y'(t)$ , tedy hledáme  $v$ , aby

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = -\frac{b_1(t)}{2}, \quad v(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int^t b_1(s) ds\right).$$

└

□

### Lemma 9.3

Rovnici z poznámky výše lze převést na tvar  $(p(t)x')' + q(t)x = 0$ ,  $p \neq 0$ ,  $p, q, p'$  spojitě.

┌

Důkaz

$$\begin{aligned} p \cdot x'' + p'x' + qx &= 0, & x'' + \frac{p'}{p}x' + \frac{q}{p}x &= 0, \\ \frac{p'}{p} &= \frac{a_1(t)}{a_0(t)} =: b_1(t), & p(t) &= \exp \left( \int_{t_0}^t b_1(s) ds \right), \\ q(t) &:= p(t) \cdot \frac{a_2(t)}{a_0(t)}. \end{aligned}$$

└

□

### Věta 9.4

$$\begin{aligned} (p(t)x')' + q_1(t)x &= 0, & (p(t)y')' + q_2(t)y &= 0 \\ p, p', q_1, q_2 &\text{ spojitě v } I, p(t) > 0, q_2(t) \geq q_1(t) \text{ na } I. \end{aligned}$$

Bud'  $t_1, t_2 \in I$  sousední nulové body  $x$ ,  $t_1 < t_2$ , potom bud'

$$\exists t_3 \in (t_1, t_2) : y(t_3) = 0,$$

nebo

$$q_1(t) = q_2(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2] \wedge \exists \lambda : y(t) = \lambda x(t).$$

┌

Důkaz

$$\begin{aligned} (p(t)x'(t))'y(t) - (p(t)y'(t))'x(t) &= (q_2(t) - q_1(t))x(t)y(t) & \int \\ \int_{t_1}^{t_2} [\dots] &= \int_{t_1}^{t_2} (q_2(t) - q_1(t))x(t)y(t)dt & \text{per partes:} \\ [p(t)x'(t) \cdot y(t)]_{t_1}^{t_2} - [p(t) \cdot y'(t)x(t)]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} 0dt &= \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)(q_2(t) - q_1(t))dt \\ p(t_2) \cdot x'(t_2) \cdot y(t_2) - p(t_1)x'(t_1)y(t_1) &= \int \dots \end{aligned}$$

Pro spor předpokládejme  $y \neq 0$  na  $(t_1, t_2)$ , potom BÚNO  $y > 0$  na  $(t_1, t_2)$ . BÚNO také tam  $x > 0$ .  $x'(t_1) > 0$ ,  $x'(t_2) < 0$ . Pak

$$p(t_2) \cdot x'(t_2)y(t_2) = 0 \implies y(t_2) = 0 \implies p(y_1)x'(y_1)y(t_1) = 0, q_2(t) = q_1(t) \quad \forall t \in (t_1, t_2).$$

└

□



### Věta 9.5 (Šturnova)

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = 0, \quad p, p', q \text{ spojité na } I, p \neq 0 \text{ na } I.$$

$\{u(t), v(t)\}$  libovolný fundamentální systém funkcí této rovnice. Potom

$$N(u) \cap N(v) = \emptyset;$$

$$\forall t_1, t_2 \in N(u) \exists t_3 \in (t_1, t_2) \cap N(v).$$

┌

*Důkaz*

1. vztah sporem:  $\exists t_0 \in N(u) \cap N(v) \implies u(t_0) = v(t_0) = 0 \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : v(t) = \lambda u(t).$

2. vztah: předchozí věta:  $q_1 = q_2, x = u, y = v$ . Pak  $\forall t_1, t_2 \in N(u) \exists t_3 \in N(v) : t_3 \in (t_1, t_2).$  □

└

## 10 Flaquetova teorie

### Lemma 10.1

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det A \neq 0 \implies \exists B \in \mathbb{C}^{n \times n} : e^B = A. \quad (B = \log A).$$

┌

*Důkaz*

$$\log(I + M) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} M^i}{i}.$$

Pokud je  $M$  horní trojúhelníková s nulami na diagonále, tak je tento součet konečný. Pro obecnou  $A$  můžeme  $A$  rozdělit na Jordanovu matici a matici přechodů:

$$A = VJV^{-1} = V \cdot D(I + M)V^{-1} \implies \log A := V(\log D + \log(I + M))V^{-1}$$

kde logaritmus je v komplexním oboru. □

└

*Poznámka*

Řešíme rovnici (LRP)  $x' = A(t)x + b(t)$ ,  $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $T > 0$ ,  $A(t + T) = A(t)$ ,  $b(t) = b(t + T)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

- $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists!$  maximální řešení definované na celém  $\mathbb{R}$ .
- $x(t)$  je řešení homogenní rovnice  $\implies y(t) = x(t + T)$  je řešení homogenní rovnice.
- $x$  je řešení homogenní rovnice, pak  $x$  je  $T$ -periodické  $\Leftrightarrow x(0) = x(T)$ .

- $\varphi(t)$  je fundamentální matice homogenní rovnice,  $\varphi(0) = I$ .  $x$  je řešením homogenní rovnice. Pak  $x$  je  $T$ -periodické  $\Leftrightarrow \varphi(T)x_0 = x_0$ .

### Definice 10.1

$C = \varphi(T)$  se nazývá maticí monotonie.

### Věta 10.2

$\varphi(t) = Q(t)e^{Bt}$ , kde  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $Q \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n \times n})$   $T$ -periodická.

┌

*Důkaz*

$\varphi(T) = C$  regulární,  $\exists \tilde{B} : e^{\tilde{B}} = C = e^{TB}$ ,  $B := \frac{1}{T}\tilde{B}$ .  $\psi(t) = \varphi(t+T)C^{-1}$ ,

$$\psi'(t) = \varphi'(t+T)C^{-1} = A(t+T) \cdot \varphi'(t+T)C^{-1} = A(t) \cdot \psi(t).$$

$\psi(0) = \varphi(T) \cdot C^{-1} = I$ . Z toho  $\psi(t) = \varphi(t)$ .

$$\varphi(t+T) \cdot \varphi(T^{-1}) = \psi(t), \forall t, \varphi(t+T) = \varphi(t) \cdot \varphi(T).$$

└

□

### Tvrzení 10.3

Pokud  $\sigma(C) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , pak 0 je asymptoticky stabilním řešením.

┌

*Důkaz*

└ TODO?

□

### Věta 10.4

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $LRP$  má právě jedno  $T$ -periodické řešení.
- Homogenní rovnice má pouze triviální  $T$ -periodické řešení.
- $1 \notin \sigma(C)$ .

┌ *Důkaz*

„Z prvního do druhého bodu“: Pro spor předpokládejme  $y' = A(t)y$ ,  $y \neq 0$ . Pokud  $x$  je řešení LRP, pak  $x + y$  je jiné řešení LRP, které je též  $T$ -periodické.

„Z druhého do prvního bodu“: Pro spor předpokládejme, že  $y_1, y_2$  jsou  $T$ -periodická řešení LRP. Potom  $y_1 - y_2$  je netriviální  $T$ -periodické řešení homogenní soustavy.

„Ze třetího do druhého bodu“: Pokud  $x$  je nenulové řešení homogenní rovnice.  $x$  je  $T$ -periodické  $\Leftrightarrow x(T) = x(0)$ .  $x(t) = \varphi(t)x_0$ ,  $x_0 = x(T) = \varphi(T)x_0 = Cx_0$ . Tedy  $x_0$  je vlastní vektor příslušící vlastnímu číslu 1.  $\nabla$ .

„Z druhého do třetího bodu“: Kdyby 1 byla vlastní číslo, pak existuje nenulový vlastní vektor matice  $C$  jemu příslušející, tedy existuje nenulové řešení.  $\square$

*Důsledek*

Nulové řešení homogenní rovnice je stabilní (asymptoticky stabilní)  $\Leftrightarrow$  nulové řešení rovnice  $y' = By$  je stabilní (asymptoticky stabilní).

┌ *Důkaz*

„ $\Leftarrow$ “:  $x(t) = \varphi(t)x_0 = Q(t) \cdot \underbrace{e^{Bt}x_0}_{y(t)} \cdot \|x(t)\| \leq \|Q(t)\| \cdot |y(t)| \leq \max_{t \in [0, T]} \|Q(t)\| \cdot |y(t)| \leq \text{const} |y(t)|$ .

„ $\Rightarrow$ “:  $y(t) = Q(t)^{-1}x(t) \implies |y(t)| \leq \max_{[0, 1]} |Q^{-1}(t)| \cdot |x(t)|$ .  $\square$