Příklad (5.1)
Rozhodněte, která z následujících tvrzení platí pro každou reálnou čtvercovou matici A řádu k.

a. Pokud $A^2 = A$ a λ je vlastní číslo matice A, pak $\lambda \in \{0, 1\}$.

b. Pokud $A^2 = A$, pak 0 je vlastní číslo matice A.

c. Pokud $A^2 = A$, pak 1 je vlastní číslo matice A.

d. Pokud pro nějaké přirozené číslo n platí $A^n = 0_{k\times k}$ a λ je vlastní číslo matice A, pak $\lambda = 0$.

e. Pokud pro nějaké přirozené číslo n platí $A^n = 0_{k\times k}$, pak 0 je vlastní číslo matice A.

Řešení
a. (ANO) Můžeme si všimnout, že pokud $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, potom $A^2\mathbf{x} = A\lambda\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2 A\mathbf{x}$. Tedy (pro vlastní, tj. nenulový, vektor $\mathbf{x}$) je $\lambda^2 = \lambda$ a tedy $\lambda \in \{0, 1\}$.

b. a c. (NE) Pro matice I_k a $0_{k\times k}$ platí $A^2 = A$, ale víme, že vlastní čísla I_k jsou 1 (tedy 0 nemusí být vlastní číslo) a $o_{k\times k}$ (tedy 1 nemusí být vlastní číslo).

d. (ANO) Už jsme si ukázali, že $A^2\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$ (kde λ je vlastní číslo A a $\mathbf{x}$ vlastní vektor jemu příslušný). Indukcí se dá dokázat, že $A^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x}$. Ale my víme, že $A^n\mathbf{x} = o_{k\times k}\mathbf{x} = \mathbf{o} = 0\mathbf{x}$, tedy $\lambda = 0$.

e. (ANO) Determinant součinu matic je součin determinantů daných matic, tedy (jelikož $\det 0_{k\times k} = 0$ a součin v $\mathbb{R}$ je nulový pouze pokud je jeden činitel je 0) $\det A = 0$. Ale absolutní člen charakteristického polynomu je právě $\det A$, tedy 0 je rozhodně kořenem char. polynomu A, tedy vlastní číslo.

Příklad (5.2)
Máme k dispozici neomezenou zásobu tří druhů dlaždic – červené o rozměrech 1×1, modré o rozměrech 2×1 a zelené o rozměrech 2×1 (dlaždice stejného druhu jsou nerozlišitelné). Kolika různými způsoby lze vydláždit chodník o rozměru $n \times 1$?

Řešení
Označme a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, počet způsobů vydláždění chodníku rozměru $n \times 1$. Pak víme, že $\forall k > 1 : a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2}$, jelikož buď můžeme buď položit dlaždici 1×1 a zbytek vyplnit jako chodník délky $k-1$, nebo položit jednu z 2 dlaždic a zbude nám chodník délky $k-2$. Zároveň chodník délky 1 můžeme vyplnit jedním způsobem stejně jako chodník délky 0. Tedy lineární operátor a počáteční stav je např. (první řádek jen 'přesouvá' druhý prvek vektoru do prvního):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\cdot \begin{pmatrix} a_{k-2} \\ a_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ 2a_{k-2} + a_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_k \end{pmatrix} \right) \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

n-tý člen posloupnosti pak dostaneme jako první prvek vektoru $A^n\mathbf{x}$, tj. $(1,0) \cdot A^n\mathbf{x}$.

Nyní potřebujeme zjistit explicitní vzorec, tedy provedeme na A singulární rozklad: Charakteristický polynom A je $(0-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2$, jehož kořeny jsou $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 2$. Z prvního řádku A vidíme, že vlastní vektory budou mít druhý člen λ_i násobek prvního, tedy vlastní vektory jsou $\mathbf{v}_1 = (1,-1)^T$ a $\mathbf{v}_2 = (1,2)^T$.

Převedeme matici operátoru na matici vzhledem k bázi $B := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ a bázi B a obalíme příslušnými maticemi přechodu od kanonické báze k B a opačně. Ty jsou

$$[id]_K^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad [id]_B^K = \left([id]_K^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Tedy:

$$A = [id]_K^B [id]_B^K A [id]_K^B [id]_B^K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

A nakonec:

$$a_n = (1,0)\cdot A^n\mathbf{x} = (1,0) \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}^{I} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdots}^{n\text{krát}} \mathbf{x} =$$

$$(1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,0) \cdot \begin{pmatrix} \left((-1)^n + 2^{n+1}\right)/3 \\ \left((-1)^{n+1} + 2^{n+2}\right)/3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}$$