Poznámka (Úmluva)
Všechny topologické prostory v tomto semestru budou Hausdorffovy (T_2). Tedy regulární jsou automaticky T_3, úplně regulární jsou automaticky T_π a normální jsou T_4.

Speciálně např. kompaktní prostory jsou T_4.

1 Parakompaktní prostory

Poznámka (Připomenutí)
Pokrytí, otevřené pokrytí, podpokrytí.

Definice 1.1 (Zjemnění)

Ať X je množina a $\mathcal{S}$ je pokrytí X. Řekneme, že systém $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(X)$ je zjemnění $\mathcal{S}$, pokud $\mathcal{T}$ je pokrytí a $\forall T \in \mathcal{T}\ \exists S \in \mathcal{S} : T \subseteq S$.

Definice 1.2 (Lokálně konečný systém)

Ať $\mathbb{X}$ je TP, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$. $\mathcal{S}$ se nazývá lokálně konečný, pokud

$$\forall x \in \mathbb{X}\ \exists U \in \mathcal{U}(x) : \{S \in \mathcal{S} | S \cap U \neq \emptyset\} \text{ je konečná.}$$

Systém $\mathcal{S}$ se nazve diskrétní, pokud

$$\forall x \in \mathbb{X}\ \exists U \in \mathcal{U}(x) : |\{S \in \mathcal{S} | S \cap U \neq \emptyset\}| \leq 1.$$

Systém $\mathcal{S}$ se nazve σ-lokálně konečný (resp. σ-diskrétní), pokud $\exists S_n$, že $= \bigcup_{n=1}^{\infty}$, že $\mathcal{S}_n$ jsou lokálně konečné (resp. diskrétní), $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka
Diskrétní systém je lokálně konečný. σ-diskrétní systém je σ-lokálně konečný.

Lemma 1.1 (Uzávěr lokálně konečného prostoru)

Ať $\mathbb{X}$ je TP, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ lokálně konečný systém. Pak $\left\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\right\}$ je opět lokálně konečný a platí $\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \left\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\right\}$.

Důkaz
Ať $x \in \mathbb{X}$ je libovolné. Existuje $U \in \mathcal{U}(x) : \{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$ je konečná. Ať $V = \int U, V \in \mathcal{U}(x)$. $\{A \in \mathcal{A} : A \cap V \neq \emptyset\}$ je zřejmě konečná. $V \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow V \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Tedy $\left\{A \in \mathcal{A} : \overline{A} \cap V \neq \emptyset\right\} = \{A \in \mathcal{A} : A \cap V \neq \emptyset\}$. Tedy $\left\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\right\}$ je konečná.

$\supseteq$: $\bigcup \mathcal{A} \supseteq A, A \in \mathcal{A}$, tedy $\overline{\bigcup \mathcal{A}} \supseteq \overline{A} \implies \overline{\bigcup \mathcal{A}} \supseteq \bigcup \left\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\right\}$.

$\subseteq$: Ať $x \in \overline{\bigcup \mathcal{A}}$. $\exists U \in \mathcal{U}(x)$ otevřená, že $\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq 0\} = \{A_1, \ldots, A_n\}$. $x \in \overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} \overset{\text{konečné}}{=} \overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$. $\exists i \leq n : x \in \overline{A_i}$. $\square$

Definice 1.3 (Parakompaktní)

TP $\mathbb{X}$ se nazývá parakompaktní, pokud každé jeho otevřené pokrytí má lokálně konečné otevřené zjemnění.

Poznámka
Kompaktní $\implies$ parakompaktní (protože podpokrytí je zjemnění a konečné je lokálně konečné).

Diskrétní TP $\implies$ parakompaktní.

Tvrzení 1.2

Uzavřený podprostor parakompaktního TP je parakompaktní.

Důkaz
$\mathbb{X}$ je parakompaktní TP a $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená. Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí F (otevřenými množinami v F). Z definice podprostoru $\forall U \in \mathcal{U}\ \exists V_U$ otevřená v $\mathbb{X} : U = F \cap V_U$. Uvažujme $\mathcal{V} = \{V_U | U \in \mathcal{U}\} \cup \{F \setminus F\}$. $\mathcal{V}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Existuje otevřené lokálně konečné zjemnění $\mathcal{W}$ tohoto $\mathcal{V}$. $\{F \cap W | W \in \mathcal{W}\}$ je otevřené pokrytí F a zároveň lokálně konečné. Navíc je to i zjemnění $\mathcal{U}$. $\square$

Věta 1.3 (Charakterizace parakompaktnosti)

Pro regulární TP $\mathbb{X}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

a) $\mathbb{X}$ je parakompaktní.

b) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má otevřené σ-lokálně konečné zjemnění.

c) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má lokálně konečné zjemnění (libovolnými množinami).

d) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má uzavřené lokálně konečné zjemnění.

Důkaz
a) $\implies$ *b*) : každé lokálně konečné zjemnění je σ-lokálně konečné.

b) $\implies$ *c*) : Ať $\mathbb{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Podle b) existuje otevřené zjemnění $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, $\mathcal{V}_n$ lokálně konečný systém. $W_n := \bigcup \mathcal{V}_n$ je otevřené $\{W_n | n \in \mathbb{N}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Ať $A_n := W_n \setminus \bigcup_{i<n} W_i$. $\{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ je lokálně konečné pokrytí $\mathbb{X}$ (každé $x \in \mathbb{X}$ je v nějakém W_n, takže už není ve větších A_n). $\{A_n \cap V | n \in \mathbb{N}, V \in \mathcal{V}_n\}$ je lokálně konečné zjemnění $\mathcal{U}$.

c) $\implies$ *d*) : Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Pro každé $x \in \mathbb{X}$ existuje $U_x \in U : x \in U_x$. Nyní máme bod v otevřené množině, tedy z regularity existují otevřené množiny $V_x \subseteq \mathbb{X} : x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$. $\mathcal{V} := \{V_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. $\mathcal{V}$ má lokálně konečné zjemnění $\mathcal{W}$ podle *c*). $\left\{\overline{W} | W \in \mathcal{W}\right\}$ je lokálně konečný systém podle lemmatu „Uzávěr lokálně konečného systému". Navíc je i pokrytí a zjemňuje $\mathcal{U}$.

d) $\implies$ *a*) Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Z d) existuje lokálně konečné uzavřené zjemnění $\mathcal{V}$. Pro $x \in \mathbb{X}$ existuje W_x otevřené okolí x protínající jen konečně mnoho prvků z $\mathcal{V}$. $\mathcal{W} := \{W_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Z d) existuje lokálně konečné uzavřené zjemnění $\mathcal{A}$ toho $\mathcal{W}$. Pro $V \in \mathcal{V}$ označíme $V^* := \mathbb{X} \setminus \bigcup \{A \in \mathcal{A} | A \cap V = \emptyset\}$. Zřejmě $V^* \supseteq V$. Tedy $\{V^* | V \in \mathcal{V}\}$ je otevřené (odčítáme uzavřenou množinu, neboť A jsou uzavřené a množina je lokálně konečná, tedy podle lemmatu … je uzavřené i sjednocení) pokrytí.

Ať $x \in \mathbb{X}$. $\exists U$ okolí x, které protíná jen konečně prvků $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Zřejmě $U \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Každé A_i je podmnožinou nějakého W_y, tj. (podle volby W_y) A_i protíná jen konečně mnoho prvků z $\mathcal{V}$. Navíc je-li $V \in \mathcal{V}$ a $A \in \mathcal{A}$, že $A \cap V = \emptyset$, pak $A \cap V^* = \emptyset$. Tedy každé A_i protíná pouze konečně mnoho prvků V^*, $V \in @V$. Pro každé $V \in @V$ fixujeme $U_v \in \mathcal{U} : V \subseteq U_V$. Zřejmě $V \subseteq U_V \cap V^*$. Pak $\{U_V \cap V^* | V \in \mathcal{V}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$, které je lokálně konečné a které je zjemnění $\mathcal{U}$. □

Důsledek
Každý Lindelöfův regulární prostor je parakompaktní.

Důkaz
Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Z lindolöfovosti existuje spočetné pokrytí $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. $\mathcal{V}$ je σ-lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{U}$. Tedy platí b) z minulé věty. □

Definice 1.4 (Skrčení)

Ať X je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (pokrytí X). Indexovaný systém $\{T_S : S \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se nazývá skrčení systému $\mathcal{S}$, pokud (je to pokrytí) a $T_S \subseteq S, S \in \mathcal{S}$.

Poznámka (Nadmutí)
Skrčení je speciální případ zjemnění.

Podobně jako skrčení lze definovat pojem nadmutí.

Lemma 1.4 (O skrčení)

Ať $\mathbb{X}$ je normální TP. Pak každé lokálně konečné (stačí bodově konečné) otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má uzavřené skrčení, jehož vnitřky tvoří pokrytí.

Důkaz
Ať $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \varkappa\}$, $\varkappa$ kardinál, $\mathcal{U}$ je lokálně kompaktní, otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Nyní $F_0 := \mathbb{X} \setminus \bigcup\{U_\alpha : 0 < \alpha < \varkappa\}$ uzavřená, $F_0 \subseteq U_0$ (z toho, že $\mathcal{U}$ je pokrytí). Z normality existuje otevřená $V_0 \subseteq \mathbb{X} : F_0 \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq U_0$.

Nyní indukcí: Nechť máme zkonstruované $V_\beta : \forall \beta < \alpha < \varkappa$. Označíme $F_\alpha := \mathbb{X} \setminus (\bigcup\{V_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup\{U_\gamma : \alpha < \gamma < \varkappa\})$. Z normality zas $V_\alpha \subseteq \mathbb{X} : F_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$.

$\mathcal{V} = \left\{\overline{V_\alpha} : \alpha < \varkappa\right\}$ je skrčení $\mathcal{U}$, $\operatorname{int} \overline{V_\alpha} \supseteq V_\alpha$ a $\bigcup_{\alpha<\varkappa} V_\alpha = \mathbb{X}$, tedy $\bigcup_{\alpha<\varkappa} \operatorname{int} \overline{V_\alpha} = \mathbb{X}$. $\square$

Definice 1.5 (Kolektivně normální)

TP $\mathbb{X}$ se nazývá kolektivně normální, pokud pro každý diskrétní systém $\mathcal{F}$ z uzavřených množin existuje disjunktní systém otevřených množin $\{U(F) : F \in \mathcal{F}\}$, že $F \subseteq U(F), F \in \mathcal{F}$ (tj. otevřené nadmutí).

Poznámka
Každý kolektivně normální prostor je normální.

Tvrzení 1.5

Každý parakompaktní prostor už je kolektivně normální, tedy i normální.

Důkaz
Ukážeme nejprve, že $\mathbb{X}$ je regulární. Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Pro $y \in F$ existuje otevřené okolí U_y bodu y, že $x \notin \overline{U_y}$. $\mathcal{U} := \{U_y : y \in F\} \cup \{\mathbb{X} \setminus F\}$ otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Ať $\mathcal{V}$ je lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{U}$. $G := \bigcup\{V \in \mathcal{V} : V \cap F \neq \emptyset\}$. Z lemmatu $\overline{G} = \bigcup\left\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}, V \cup F \neq \emptyset\right\} \not\ni x$. $G \supset F$, G otevřená. Tedy $\mathbb{X}$ je regulární.

Ať $\mathcal{F}$ je diskrétní soubor z uzavřených množin. Pro $F \in \mathcal{F}$ uvážíme $\bigcup\{H \in \mathcal{F} : H \neq F\}$ … uzavřená z lemmatu o uzávěru sjednocení lokálně kompaktního systému. Pro $x \in F$ existuje (z první části důkazu) U_x otevřená, že $x \in U_x$, $\overline{U_x} \cap H = \emptyset$ pro $H \neq F, H \in \mathcal{F}$. $\{U_x : x \in F \in \mathcal{F}\} \cup \{\mathbb{X} \setminus \bigcup F\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Ať $\mathcal{V}$ je otevřené lokálně konečné zjemnění. Pro $F \in \mathcal{F} : V(F) := \{V \in \mathcal{V} : V \cup F \neq \emptyset\} \setminus \bigcup\left\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}, V \cap H \neq \emptyset \text{ pro nějaké } H \in \mathcal{F}, H\right.$ Platí $F \subseteq V(F)$. Pro $F, F' \in \mathcal{F}, F \neq F' \implies V(F) \cap V(F') = \emptyset$. $\{V(F) : F \in \mathcal{F}\}$ je disjunktní otevřené nadmutí $\mathcal{F}$. $\square$

Definice 1.6 (Hvězda)

Ať $\mathbb{X}$ je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$, $x \in \mathbb{X}$, $A \subseteq \mathbb{X}$.

Hvězda bodu x vzhledem k $\mathcal{S}$ je $\operatorname{st}(x, \mathcal{S}) = \bigcup \{S \in \mathcal{S} : x \in S\}$.

Hvězda množiny A vzhledem k @S je $\operatorname{st}(A, \mathcal{S}) = \bigcup_{x \in A} \operatorname{st}(x, \mathcal{S})$.

Definice 1.7 (Barycentrické a hvězdovité zjemnění)

Ať $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou pokrytí $\mathbb{X}$. Řekneme, že $\mathcal{U}$ barycentricky zjemňuje $\mathcal{V}$, pokud $\{\operatorname{st}(x,\mathcal{U}) : x \in \mathbb{X}\}$ zjemňuje $\mathcal{V}$.

Řekneme, že $\mathcal{U}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{V}$, pokud $\{\operatorname{st}(U,\mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$ zjemňuje $\mathcal{V}$.

Například
Ať $(\mathbb{X}, \varrho)$ je MP. Ať $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou pokrytí $\mathbb{X}$ tvořená po řadě všemi $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon$ koulemi ($\varepsilon > 0$ pevné). Pak $\mathcal{U}$ zjemňuje barycentricky $\mathcal{V}$ a hvězdovitě $\mathcal{W}$.

Lemma 1.6 (Dvojité barycentrické zjemnění je hvězdovité)

Ať X je množina, $\mathcal{U}$ pokrytí $\mathcal{X}$, $\mathcal{V}$ barycentrické zjemnění $\mathcal{U}$ a $\mathcal{W}$ barycentrické zjemnění $\mathcal{V}$. Potom $\mathcal{W}$ je hvězdovité zjemnění $\mathcal{U}$.

Důkaz
Mějme $W \in \mathcal{W}$ libovolně. Chceme najít $U \in \mathcal{U} : \operatorname{st}(W, \mathcal{W}) \subseteq U$. $W = \emptyset$ triviální. $W \neq \emptyset$: Fixujeme $x_0 \in W$. Pro každé $x \in \mathbb{X}$ existuje $V_x \in \mathcal{V}$: $\operatorname{st}(x, \mathcal{W}) \subseteq V_x$. Nyní

$$\operatorname{st}(W, \mathcal{W}) = \bigcup \{T \in \mathcal{W} : T \cap W \neq \emptyset\} = \bigcup \{\{T \in \mathcal{W} | x \in T\} \,| x \in W\} = \bigcup \{\operatorname{st}(x, \mathcal{W}) | x \in W\} \subseteq \bigcup \{V$$

protože $W \subseteq V_x$ pro každé $x \in W$. $\mathcal{V}$ barycentricky zjemňuje $\mathcal{U}$, tedy existuje $u \in \mathcal{U}$: $\operatorname{st}(x_0, \mathcal{V}) \subseteq U$. □

Věta 1.7 (Charakterizace parakompaktnosti pomocí hvězdovitých zjemnění)

Pro TP $\mathbb{X}$ je ekvivalentní:

a) $\mathbb{X}$ je parakompaktní.

b) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má barycentrické zjemnění.

c) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má hvězdovité zjemnění.

d) Každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ má otevřené σ-diskrétní zjemnění a $\mathbb{X}$ je regulární.

Důkaz
a) $\implies$ *b)* Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Z a) vyplývá, že existuje jeho lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{V}$. Víme, že $\mathbb{X}$ je parakompaktní, tedy normální. Z lemmatu o skrčení existuje uzavřené pokrytí $\mathcal{W} = \{W_V | V \in \mathcal{V}\}$, $W_V \subseteq V$. $\mathcal{V}$ je lokálně konečné, tedy i $\mathcal{W}$ je lokálně konečné. Pro $x \in \mathbb{X}$ definujeme $A_x = \bigcap \{V | x \in W_V\}$. Jde o konečný průnik (vzhledem k lokální kompaktnosti), tedy A_x je otevřená. Položme $B_x = \bigcup \{W \in \mathcal{W} | x \notin W\}$. Podle lemmatu o sjednocení lokálně konečného systému je B_x uzavřená. Zřejmě $x \in A_x \setminus B_x =: C_x$ je otevřená. Tedy $\mathcal{C} = \{C_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$.

Ukážeme, že $\mathcal{C}$ barycentricky zjemňuje $\mathcal{U}$: Ať $y \in \mathbb{X}$. Chceme najít $V \in \mathcal{U}$: $\operatorname{st}(y, \mathcal{C}) \subseteq V$. Víme, že existuje $V \in \mathcal{V} : y \in W_V$. Ať $x \in \operatorname{st}(y, \mathcal{C})$. Pak $y \in C_x = A_x \setminus B_x$, tedy $y \notin B_x$, tudíž $x \in W_V \subseteq V$ (kdyby ne, pak $W_V \subseteq B_x$, tedy $y \notin C_x$).

b) $\implies$ *c)* k otevřenému pokrytí můžeme najít barycentrické zjemnění, ke kterému můžeme najít barycentrické zjemnění. Pak c) vyplývá z předchozího lemmatu.

c) $\implies$ *d)* $\mathbb{X}$ je regulární: Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Uvažujme otevřené pokrytí $\{\mathbb{X} \setminus F, \mathbb{X} \setminus x\}$. Podle c) existuje otevřené hvězdovité zjemnění $\mathcal{U}$. $\exists U \in \mathcal{U} : x \in U$. Nutně $U \cap F = \emptyset$. Pak $\overline{U} \subseteq \operatorname{st}(U, \mathcal{U}) \subseteq \mathbb{X} \subseteq \mathbb{X} \setminus F$. Tedy $\mathbb{X}$ je regulární.

Ať $\mathcal{U}_0$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Chceme najít σ-diskrétní zjemnění toho $\mathcal{U}_0$. Použijeme podmínku c) spočetně nekonečněkrát, abychom induktivně našli otevřená pokrytí $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$, že $\mathcal{U}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{U}_n$, $n \geq 0$. Oindexujme prvky $\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 = \{U_i | i \in I\}$. Pro $i \in I$ a pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme $U_{i,n} := \{x \in \mathbb{X} | x$ má okolí $V : \operatorname{st}(V, \mathcal{U}_n) \subseteq U_i\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N} : \{U_{i,n} | i \in I\}$ je otevřené zjemnění $\mathcal{U}$, ale ne nutně pokrytí.

Pomocné tvrzení: Pokud $x \in U_{i,n}, u \notin U_{i,n+1}$, pak neexistuje $U \in \mathcal{U}_{n+1}$, že $x, y \in U$. Důkaz: Pro $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ existuje $W \in \mathcal{U}_n : \operatorname{st}(U, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq W$. Tedy pokud $x \in U \cap U_{i,n}$, pak $W \subseteq \operatorname{st}(x, \mathcal{U}_n) \subseteq U_i$. Pak $\operatorname{st}(U, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq U_i$ a $u \subseteq U_{i,n+1}$. Tedy $y \notin U$, protože $y \notin U_{i,n+1}$.

Uvažme dobré uspořádání $<$ na I. Ať $V_{i_0,n} = U_{i_0,n} \setminus \bigcup \{U_{i,n+1} | i < i_0\}$, $i_0 \in I, n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $** = \{V_{i_0,n} | i_0 \in I, n \in \mathbb{N}\}$ je hledané σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{U}_0$. Pro $i_1 \neq i_2, i_1, i_2 \in I$, pak $i_1 < i_2$ nebo naopak. Podle toho buď $V_{i_2,n} \subseteq \mathbb{X} \setminus U_{i_1,n+1}$ nebo $V_{i_1,n} \subseteq \mathbb{X} \setminus U_{i_2,n+1}$. Podle pomocného tvrzení platí, že pokud $x \in V_{i_1,n}$ a $y \in V_{i_2,n}$, pak neexistuje $U \in \mathcal{U}_{n+1}$, že $x, y \in U$. To nám říká, že $\forall n \in \mathbb{N} : \{V_{i,n} | i \in I\}$ je diskrétní. Zbývá už jen ukázat, že $**$ je pokrytí: Ať $y \in \mathbb{X}$. Existuje $<$-nejmenší $i(y) \in I : y \in U_{i(y),n}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Nyní $y \notin U_{i,n+2}$ pro $i < i(y)$. Podle pomocného tvrzení použitého na $n+1$ platí $\operatorname{st}(y, \mathcal{U}_{n+2}) \cap \bigcup \{U_{i,n+1} | i < i(y)\} = \emptyset$. Tedy $y \in V_{i(y)}, n$.

d) $\implies$ *a)* Víme, že $\mathbb{X}$ je regulární, tedy můžeme aplikovat charakterizaci parakompaktnosti z minulého týdne, jelikož σ-diskrétní $\implies$ σ-lokálně konečný. $\square$

Věta 1.8 (Stone)

Každý metrizovatelný prostor je parakompaktní.

Důkaz

Ukážeme, že každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ má barycentrické zjemnění. Fixujeme na nějakém tom prostoru $\mathbb{X}$ kompatibilní metriku $\varrho \leq 1$. Navíc búno $\mathbb{X} \notin \mathcal{U}$. Pro každé $x \in \mathbb{X}$ a $U \in \mathcal{U}$, že $x \in U$, existuje největší možné $\varepsilon_{x,U} > 0$, že $B(x, 5\varepsilon_{x,U})$. Položíme $\mathcal{V} = \{B(x, \varepsilon_{x,U}) | x \in U \in \mathcal{U}\}$. Ověříme, že $\mathcal{V}$ barycentricky zjemňuje $\mathcal{U}$: Ať $x \in \mathbb{X}$. Chceme najít $U \in \mathcal{U} : \mathrm{st}(x, \mathcal{V}) \subseteq U$. Ať $\varepsilon_x = \sup \{\varepsilon_{x,U} | x \in U \in \mathcal{U}\}$. $0 < \varepsilon_x \leq 1$. Existuje $U \in \mathcal{U}$: $\varepsilon_{x,U} \geq \frac{\varepsilon_x}{2}$.

Ukážeme, že $\mathrm{st}(x, \mathcal{V}) \subseteq U$. Ať tedy $x \in B(y, \varepsilon_{y,v})$ pro nějaké $y \in V \in \mathcal{U}$. Chceme $B(y, \varepsilon_{y,v}) \subseteq U$. Máme $B(y, 5\varepsilon_{y,v}) \subseteq V$ a zároveň $\varrho(x, y) < \varepsilon_{U,V}$. Z $\triangle$-nerovnosti: $B(x, 4\varepsilon_{y,V}) \subseteq V$. Z maximality $\varepsilon_{x,V} \geq \frac{1}{5} 4\varepsilon_{y,V}$. Také $2\varepsilon_{x,U} > \varepsilon_x \geq \varepsilon_{x,V}$. Dohromady $2\varepsilon_{x,U} > \frac{4}{5}\varepsilon_{y,V}$, tj. $5\varepsilon_{x,U} > 2\varepsilon_{y,V}$. Pro $z \in B(y, \varepsilon_{y,V}) : \varrho(x, z) < 2\varepsilon_{y,V}$, a tedy $\varrho(x, z) < 5\varepsilon_{x,U}$. Proto $z \in U$. Tudíž $B(y, \varepsilon_{y,v}) \subseteq U$. □

Definice 1.8

Pro funkci $f : X \to \mathbb{R}$ značíme $\mathrm{supp}\, f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$.

Věta 1.9 (Rozklad jednotky)

Ať $\mathbb{X}$ je parakompaktní prostor, $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Pak existuje rozklad jednotky podřízený tomuto pokrytí, tj. systém spojitých funkcí $f_i : X \to [0, 1]$, $i \in I$, že $\{\mathrm{supp}\, f_i : i \in I\}$ je lokálně konečné zjemnění $\mathcal{U}$ a $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1, \forall x \in \mathbb{X}$.

Důkaz

$\mathbb{X}$ parakompaktní, tedy normální. Tedy existuje otevřené pokrytí $\mathcal{W}$ takové, že $\left\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\right\}$ zjemňuje $\mathcal{U}$. Ať $\mathcal{V}$ je lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{W}$. Víme, že existuje uzavřené skrčení $\{F_V : V \in \mathcal{V}\}$, $F_V \subseteq V$. Z normality existují spojité funkce $g_V : \mathbb{X} \to [0, 1]$, $g_V|_{F_V} = 1$, $g_V|_{\mathbb{X} \setminus V} = 0$. Položme $g(x) := \sum_{V \in \mathcal{V}} g_V(x)$. Funkce g je spojitá, protože spojitost je lokální pojem a g je lokálně součet konečně mnoha nenulových spojitých funkcí. Navíc zřejmě $g \geq 1$, protože $\{F_V : V \in \mathcal{V}\}$ je pokrytí $\mathbb{X}$. Tedy položme $f_V := \frac{g_V}{g}$. □

Věta 1.10 (Michaelova selekční)

Zdola polospojitá (vícehodnotová) funkce z parakompaktního prostoru do neprázdných uzavřených konvexních podmnožin Banachova prostoru má spojitou selekci.

Věta 1.11 (Dugunjiho)

Ať $\mathbb{X}$ je metrizovatelný a $A \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená. Pak existuje lineární zobrazení $L : C(A, \mathbb{R}) \to C(\mathbb{X}, \mathbb{R})$, že $L(f)$ rozšiřuje f pro $f \in C(A, \mathbb{R})$.

2 Metrizační věty

Poznámka (Opakování)
Uryshonova metrizační věta: Regulární prostor se spočetnou bází je metrizovatelný.

Věta 2.1 (Bing, Nagata, Smirnov)

Pro regulární prostor $\mathbb{X}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

a) $\mathbb{X}$ *je metrizovatelný.*

b) $\mathbb{X}$ *má σ-diskrétní bázi.*

c) $\mathbb{X}$ *má σ-lokálně konečnou bázi.*

Důkaz
a) $\implies$ *b*): Ať $\mathcal{B}_n$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ koulemi o poloměru $\frac{1}{n}$. $\mathbb{X}$ je parakompaktní podle Stoneovy věty. Z charakterizace parakompaktnosti máme, že $\mathcal{B}_n$ má σ-diskrétní otevřené zjemnění $\mathcal{V}_n$. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ je opět σ-diskrétní, navíc je to báze.

b) $\implies$ *c*): triviální.

c) $\implies$ *a*) Ať $B = \bigcup_{n=1}^{\infty}$ je báze $\mathbb{X}$, $\mathcal{B}_n$ lokálně konečný soubor. Uvědomíme si, že $\mathbb{X}$ je parakompaktní: Je-li totiž $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí $\mathbb{X}$, pak $\{B \in \mathcal{B} : \exists U \in \mathcal{U} : B \subseteq U\}$ je zjemnění U a vzhledem k tomu, že B je báze, tak je to i pokrytí. Navíc je σ-lokálně konečné. Tedy z charakterizace parakompaktnosti to máme.

Z parakompaktnosti dostáváme normalitu $\mathbb{X}$. Pro $n, k \in \mathbb{N}$ a $B \in \mathcal{B}_n$ položme $V_{k,n,B} := \bigcup \left\{C \in \mathcal{B}_k : \overline{C} \subseteq B\right\}$. $\mathcal{B}_k$ je lokálně konečný, tedy (z lemmatu o uzávěru lokálně konečného systému) $\overline{V_{k,n,B}} \subseteq B$. Tedy existují (z normality) spojité funkce $f_{k,n,B} : \mathbb{X} \to [0,1]$, $f_{k,n,B}(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{X} \setminus B$ a 1 pro $x \in \overline{V_{k,n,B}}$.

Definujeme $M_{k,n} \subseteq [0,1]^{\mathcal{B}_n}$ následovně $M_{k,n} = \{\varphi : \mathcal{B}_n \to [0,1] : \{B \in \mathcal{B}_n : \varphi(B) \neq 0\}$ je konečná$\}$. Na $M_{k,n}$ uvažme metriku $\varrho_{k,n}\varphi, \psi := \sum_{B\in\mathcal{B}_n} |\varphi(B) - \psi(B)|$. Ať $g_{k,n} : \mathbb{X} \to M_{k,n}$, $g_{k,n} = \triangle_{B\in\mathcal{B}_n} f_{k,n,B}$, $g_{k,n}(x) = (f_{k,n,B}(x))_{B\in\mathcal{B}_n}$.

Ověříme, že $g_{k,n} : \mathbb{X} \to (M_{k,n}, \varrho_{k,n})$ je spojité: Ať $x \in \mathbb{X}$, $\varepsilon > 0$, existuje U okolí x protínající jen konečně prvků $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}_n$. $f_{k,n,B_1}, \dots, f_{k,n,B_m}$ jsou spojitá, tedy existuje $V \subseteq U$ okolí x, že $|f_{k,n,B}(x) - f_{k,n,B_i}(y)| < \frac{\varepsilon}{m}$ pro $i \leq m, y \in V$. Nyní

$$\varrho_{k,n}(g_{k,n}(x), g_{k,n}(y)) = \sum_{i=1}^{m} |g_{k,n}(x)(B_i) - g_{k,n}(y)(V_i)| = \sum |f_{k,n,B}(x) - f_{k,n,B_i}(y)| < m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Pokud systém $\{g_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}\}$ odděluje body a uzavřené množiny, pak $\delta := \triangle_{k,n\in\mathbb{N}} g_{k,n} : \mathbb{X} \to \prod_{k,n\in\mathbb{N}} M_{k,n}$ je vnoření (podle lemmatu o Tichonovově vnoření). Tím jsme vnořili $\mathbb{X}$ do spočetného součinu metrizovatelných prostorů, tedy do metrizovatelného prostoru, tedy $\mathbb{X}$ je metrizovatelné.

$\{g_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}\}$ odděluje body a uzavřené množiny: Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ je uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Existuje $n \in \mathbb{N}$ a $B \in \mathcal{B}_n : x \in B \subseteq X \setminus F$. Z regularity existuje $C \in \mathcal{B}_k, k \in \mathbb{N}$. $g_{k,n}(x)(B) = f_{k,n,B}(x) = 1$ a $g_{k,n}(y)(B) = f_{k,n,B}(y) = 0$ pro $y \in \mathbb{X} \setminus B \supseteq F$. □

Definice 2.1

Ať $\mathbb{X}$ je TP. Posloupnost otevřených pokrytí $\mathcal{V}_n$ prostoru $\mathbb{X}$ se nazývá development, pokud pro každé $x \in \mathbb{X} : \{\mathrm{st}(x, \mathcal{V}_n) | n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí v bodě x.

Poznámka
Je-li (X, ϱ) MP, pak $\mathcal{V}_n := \left\{B(x, \frac{1}{n}) : x \in \mathbb{X}\right\}, n \in \mathbb{N}$ je development $\mathbb{X}$.

Věta 2.2 (Bing)

TP $\mathbb{X}$ je metrizovatelný $\Leftrightarrow$ je kolektivně normální a má development.

Důkaz

$\implies$: metrizovatelný $\implies$ má development (podle předchozí poznámky) a metrizovatelný $\implies$ parakompaktní $\implies$ kolektivně normální.

$\Leftarrow$: Dokážeme ve 4 částech:

1. Pro diskrétní soubor $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uzavřených množin v $\mathbb{X}$ existuje diskrétní soubor otevřených množin $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$, že $F_\alpha \subseteq W_\alpha$: Dle kolektivní normality existují otevřené disjunktní $U_\alpha : \alpha \in A, F_\alpha \subseteq U_\alpha$. Položme $F = \bigcup \mathcal{F}$, $Z = \mathbb{X} \setminus \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. F uzavřená (sjednocení lokálního systému uzavřených množin), Z uzavřená. $\mathbb{X}$ je kolektivně normální, tedy speciálně normální, tedy existují otevřené disjunktní V, W, že $Z \subseteq V$ a $F \subseteq W$. Položme $W_\alpha := U_\alpha \cap W$. Systém $\{W_\alpha\}$ už je diskrétní (je-li $x \in Z$, pak $x \in V$ a $V \cap W_\alpha = \emptyset$, je-li naopak x v U_α, pak $U_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$ pro $\beta \neq \alpha$) a $F_\alpha \subseteq W_\alpha$.

2. Ať $\mathcal{V}_n$ je development prostoru $\mathbb{X}$. Buď $\varkappa \geq \omega$ a očíslujme $\mathcal{V}_n = \{V_{\alpha,n} | \alpha < \varkappa\}$ (s případným opakováním prvků). Položme $D_{\alpha,n,k} = \{x \in V_{\alpha,n} | \operatorname{st}(x, V_k) \subseteq V_{\alpha,n}\}$ a $C_{\alpha,n,k} = D_{\alpha,n,k} \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} V_{\beta,n}$. $D_{\alpha,n,k}$ (a tudíž i $C_{\alpha,n,k}$) je uzavřená:

Volme $x \in \overline{D_{\alpha,n,k}}$. Pak pro libovolné $V \in \mathcal{V}_k$, že $x \in V$ platí, že existuje $y \in V \cap D_{\alpha,n,k}$. Pak $V \subseteq \operatorname{st}(y, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$. Tedy $\operatorname{st}(x, \mathcal{V}_k) = \bigcup \{V \in \mathcal{V}_k | x \in V\} \subseteq V_{\alpha,n}$. Tedy $x \in D_{\alpha,n,k}$, tudíž $D_{\alpha,n,k}$ je uzavřená.

3. Pro pevná $n, k \in \mathbb{N}$ je $\{C_{\alpha,n,k} | \alpha < \varkappa\}$ diskrétní: Buď $y \in \mathbb{X}$ libovolné. Pak existuje nejmenší $\beta < \varkappa : y \in V_{\beta,n}$. Najděme $V \in \mathcal{V}_k : y \in V$. Pro $\alpha > \beta : V_{\beta,n}$ je disjunktní s $C_{\alpha,n,k}$ a pro $\alpha < \beta : V$ je disjunktní s $C_{\alpha,n,k}$ (kdyby existovalo $z \in V \cap C_{\alpha,n,k}$ pak $\operatorname{st}(z, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$, speciálně $y \in V_{\alpha,n}$, což je spor s minimalitou β). Tedy $V \cap V_{\beta,n}$ je okolí bodu y, které protíná nejvýše jeden prvek systému $\{c_{\alpha,n,k} | \alpha \in A\}$ (a sice prvek $C_{\beta,n,k}$).

4. $\{C_{\alpha,n,k}\}$ je diskrétní soubor uzavřených množin (podle 2, 3). Podle 1 existuje diskrétní soubor otevřených nadmnožin $\{V_{\alpha,n,k} | \alpha < \varkappa\}$. Tedy $\mathcal{V}_{n,k} := \{V_{\alpha,n,k} \cap V_{\alpha,n} | \alpha < \varkappa\}$ je diskrétní (zmenšili jsme jeho množiny). Ukážeme, že $\mathcal{V} := \bigcup_{n,k \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_{n,k}$ je báze $\mathbb{X}$:

Ať $U \subseteq \mathbb{X}$ je otevřená, $x \in U$. $\exists n \in \mathbb{N} : \operatorname{st}(x, \mathcal{V}_n) \subseteq U$. Najdeme α nejmenší možné, že $x \in V_{\alpha,n}$. Zřejmě $V_{\alpha,n} \subseteq U$. Opět z vlastností developmentu existuje $k \in \mathbb{N} : \operatorname{st}(x, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$. Nyní $x \in C_{\alpha,n,k}$, tedy $x \in V_{\alpha,n,k} \cap V_{\alpha,n} \subseteq U$. Tudíž $\mathcal{V}$ je báze $\mathbb{X}$.

$\mathcal{V}$ je σ-diskrétní báze $\mathbb{X}$, tedy podle metrizační věty Bing-Nagata-Smirnov je $\mathbb{X}$ metrizovatelný. $\square$

3 Uniformní prostory

Poznámka
Zavedeno např. díky tomu, že stejnoměrnou spojitost nelze charakterizovat pomocí topologie.

Matematici Weil(1936), Tukey(1940) ... prvotní zkoumání UP.

Definice 3.1 (Značení)

Pro množinu $\mathbb{X}$ značíme $\triangle(X) = \{(x, x)|x \in X\}$.

Pro $E \subseteq X \times X$ značíme $E^{-1} = \{(y, x)|(x, y) \in E\}$.

Pro $C, D \in X \times X$ značíme $C \circ D = \{(x, z) \in X \times X|\exists y \in X : (x, y) \in C \wedge (y, z) \in D\}$.

$E[x] = \{y \in X|(x, y) \in E\}$.

Definice 3.2 (Uniformní prostor (UP))

Dvojice $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá uniformní prostor (UP), pokud $\mathbb{X}$ je množina a $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X \times X), \mathcal{D} \neq 0$ splňující

1. $\forall D \in \mathcal{D} : \triangle(\mathbb{X}) \subseteq D$,
2. $\forall C, D \in \mathcal{D} : C \cap D \in \mathcal{D}$,
3. $\forall D \in \mathcal{D}\ \exists C \in \mathcal{D} : C \circ C \subseteq D$,
4. $\forall D \in \mathcal{D} : D^{-1} \in \mathcal{D}$,
5. $\forall D \in \mathcal{D}\ \forall E \subseteq X \times X : D \subseteq E \implies E \in \mathcal{D}$,
6. $\forall x, y \in X : x \neq y \implies \exists D \in \mathcal{D} : (x, y) \notin D$. ($\Leftrightarrow \bigcap \mathcal{D} = \triangle(\mathbb{X})$.)

Prvky systému $\mathcal{D}$ nazýváme okolí diagonály.

Definice 3.3 (Báze uniformity)

Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}^2)$ se nazývá báze uniformity (resp. báze uniformity $\mathcal{D}$), pokud uzavřením $\mathcal{B}$ na nadmnožiny dostaneme $\mathcal{D}$.

Definice 3.4 (Subbáze uniformity)

Systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}^2)$ tvoří subbázi uniformity (resp. uniformity $\mathcal{D}$), pokud uzavřením na konečné průniky dostaneme bázi uniformity (resp. bázi uniformity $\mathcal{D}$).

Definice 3.5 (Uniformní zobrazení)

Jsou-li $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ a $(\mathbb{Y}, \mathcal{E})$ UP, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ se nazývá uniformní (stejnoměrně spojité), pokud $\forall E \in \mathcal{E} : (f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{D}$. ($\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E}\ \exists D \in \mathcal{D} : (f \times f)(D) \subseteq E$.) ($\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E}\ \exists D \in \mathcal{D}\ \forall x, y \in \mathbb{X} : (x, y) \in D \implies (f(x), f(y)) \in E$.)

Definice 3.6 (Uniformní izomorfismus)

Zobrazení f se nazývá uniformní izomorfismus, pokud f je bijekce a f i f^{-1} jsou uniformní.

Lemma 3.1

Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}^2)$ tvoří bázi nějaké uniformity na $\mathbb{X}$, pokud

$$a) \bigcap \mathcal{B} = \triangle(\mathbb{X}),$$

$$b) \forall C, D \in \mathcal{B}\ \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq C \cap D,$$

$$c) \forall D \in \mathcal{B}\ \exists C \in \mathcal{B} : C \circ C \subseteq D,$$

$$d) \forall D \in \mathcal{B}\ \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq D^{-1}.$$

Důkaz

$\mathcal{D} := \{C \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X} | \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq C\}$. Následně ověříme podmínky. □

Tvrzení 3.2 (Vytvoření UP z MP a TP z UP)

Je-li $(\mathbb{X}, \varrho)$ metrický prostor a $D_\varepsilon = \{(x, y) | \varrho(x, y) < \varepsilon\}$, potom $\{D_\varepsilon | \varepsilon > 0\}$ je báze nějaké uniformity na $\mathbb{X}$ – značíme ji $\mathcal{D}_\varrho$. Tato uniformita se nazývá generovaná metrikou ϱ.

Je-li $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ UP, pak systém $\tau_\mathcal{D} = \{A \subseteq X | \forall x \in A\ \exists D \in \mathcal{D} : D[x] \subseteq A\}$ je topologie na $\mathbb{X}$ a pro každé $x \in \mathbb{X}$ tvoří systém $\mathcal{B}(x) := \{D[x] | D \in \mathcal{D}\}$ bázi okolí v bodě x. Topologie $\tau_\mathcal{D}$ se nazývá generovaná uniformitou $\mathcal{D}$.

Pokud místo systému $\mathcal{D}$ použijeme v definici topologie $\tau_\mathcal{D}$ nějakou bázi $\mathcal{D}$, pak dostaneme stejnou topologii. Zároveň také $\tau_{\mathcal{D}_\varrho}$ je systém všech otevřených množin v $(\mathbb{X}, \varrho)$.

Důkaz

Ověříme definice. □

Definice 3.7

UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá metrizovatelný, pokud existuje metrika ϱ na $\mathbb{X}$, že $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\varrho$. TP $(\mathbb{X}, \tau)$ se nazývá metrizovatelný, pokud existuje uniformita $\mathcal{D}$ na $\mathbb{X}$, že $\tau = \tau_\mathcal{D}$

Definice 3.8

Ať $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$, $A \subseteq \mathbb{X}$, pak značíme $\operatorname{st}(A, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} | U \cap A \neq \emptyset\}$. $\mathcal{U}^* = \{\operatorname{st}(U, \mathcal{U}) | U \in \mathcal{U}\}$.

Pro $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ pokrytí $\mathbb{X}$, definujeme jejich společné zjemnění $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{U \cap V | U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$.

Poznámka
Pro $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ pokrytí množiny $\mathbb{X}$: $\mathcal{U}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{V}$, pokud $\mathcal{U}^*$ zjemňuje $\mathcal{V}$.

Definice 3.9

Ať $\mathbb{X}$ je množina, $\mathbf{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$ se nazývá pokrývací uniformita na $\mathbb{X}$, pokud:

- $\forall \mathcal{U} \in \mathbf{U} : \mathcal{U}$ je pokrytí $\mathbb{X}$,
- Je-li $\mathcal{U} \in \mathbf{U}, \mathcal{V}$ pokrytí $\mathbb{X}$ a $\mathcal{U}$ zjemňuje $\mathcal{V}$, pak $\mathcal{V} \in \mathbf{U}$,
- $\forall \mathcal{U} \in \mathbf{U}\ \exists \mathcal{V} \in \mathbf{U} : \mathcal{V}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{U}$,
- $\forall \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathbf{U} : \mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \in \mathbf{U}$,
- $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y\ \exists \mathcal{U} \in \mathbf{U}\ \forall U \in \mathcal{U} : |\{x, y\} \cap U| \leq 1$.

Prvky systému $\mathbf{U}$ se nazývají uniformní pokrytí.

Je-li $\mathbf{U}$ pokrývací uniformita na $\mathbb{X}$, pak položme

$$\mathcal{D}_{\mathbf{U}} := \{D \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X} | \exists \mathcal{U} \in \mathbf{U}\ \forall u \in \mathcal{U} : U \times U \subseteq D\}.$$

Je-li $\mathcal{D}$ (diagonální) uniformita na $\mathbb{X}$, pak položme

$$\mathcal{U}_{\mathcal{D}} := \{\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{X})) | \exists D \in \mathcal{D} : \{D[x] | x \in \mathbb{X}\} \text{ zjemňuje} \mathcal{U}\}.$$

Přiřazení $\mathbf{U} \mapsto \mathcal{D}_{\mathbf{U}}$ a $\mathcal{D} \mapsto \mathbf{U}_{\mathcal{D}}$ jsou navzájem inverzní bijekce systému všech pokrývacích uniformit na $\mathbb{X}$ a systém všech uniformit.

Lemma 3.3 (O pseudometrice)

Ať $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je UP a $D_i \in \mathcal{D}$, $D_i = D_i^{-1}$, $i \in \mathbb{N}_0$, $D_0 = \mathbb{X} \times X$, $D_{i+1} \circ D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$. Pak existuje pseudometrika d na $\mathbb{X}$, že pro každé $i \geq 1$: $\left\{(x, y) : d(x, y) < \frac{1}{2^i}\right\} \subseteq D_i \subseteq \left\{(x, y) | d(x, y) \leq \frac{1}{2^i}\right\}$.

Důkaz
Položme $d(x,y) := \inf\left\{\frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_k}} | x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{X} \wedge (x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j} \wedge x = x_0, y = x_k\right\}$. $d(x,y)$ je pseudometrika na $\mathbb{X}$. $D_i \subseteq \left\{(x,y) | d(x,y) \le \frac{1}{2^i}\right\}$ vidíme z toho, že pro $(x,y) \in D_i$ zvolíme $k = 1$. Zbývá dokázat $\left\{(x,y) | d(x,y) < \frac{1}{2^i}\right\} \subseteq D_i$. Tedy chceme, že $d(x,y) < \frac{1}{2^i}$, pak $(x,y) \in D_i$, tj. že pro každou posloupnost $x_0, \ldots, x_k$, kde $(x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j}$: pokud $\frac{1}{2^{i_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_k}} < \frac{1}{2^i}$, pak $(x_0, x_k) \in D_i$. To dokážeme indukcí podle k:

Pro $k = 1 : \frac{1}{2^{i_1}} < \frac{1}{2^i}$, tj. $i < i_1$, tedy $(x_0, x_k) \in D_{i_1} \subseteq D_i$. Nyní předpokládejme, že $m > 1$ a pro všechna $k < m$ uvedené tvrzení platí. Uvažme posloupnost $x_0, \ldots, x_m$, že $(x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j}, j = 1, \ldots, m$, a $\frac{1}{2^{i_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^i}$. Zřejmě buď $\frac{1}{2^{i_1}} < \frac{1}{2^{i+1}}$, nebo $\frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Ze symetrie obou případů můžeme BÚNO předpokládat platnost první nerovnosti.

Ať $n \le m - 1$ je největší takové, že $\frac{1}{2^{i_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_n}} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Pokud $n < m - 1$, pak $\frac{1}{2^{i+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_{n+1}}} \ge \frac{1}{2^{i+1}}$, tedy $\frac{1}{2^{i_{n+1}}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Podle indukčního předpokladu $x_0, n \in D_{i+1}$, $(x_{n+1}, x_m) \in D_{i+1}$. Navíc $\frac{1}{2^{i_{n+1}}} < \frac{1}{2^i}$, tedy $i < i_{n+1}$, $i + 1 \le i_{n+1}$, $D_{i_{n+1}} \subseteq D_{i+1}$. $(x_0, x_m) = (x_0, x_n) \circ (x_n, x_{n+1}) \circ (x_{n+1}, x_m) \in D_{i+1} \circ D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$.

Pokud $n = m - 1$, pak podle IP $x_0, x_{m-1} \in D_{i+1}$, a jelikož $\frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^i}$, tak $(x_{m-1}, x_m) \in D_{i_m} \subseteq D_{i+1}$. Tedy $(x_0, x_m) \in D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$. □

Věta 3.4 (Metrizovatelnost UP)

UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je metrizovatelný, právě když má spočetnou bázi uniformity.

Důkaz
$(\implies)$: Ať d je metrika na $\mathbb{X}$ generující $\mathcal{D}$. Pak $\left\{\left\{(x,y) : d(x,y) < \frac{1}{n}\right\} | n \in \mathbb{N}\right\}$ je báze $\mathcal{D}$.

$(\Leftarrow)$: Ať $\{C_n | n \in \mathbb{N}\}$ je báze $\mathcal{D}$. Indukcí najdeme posloupnost $D_n \in \mathcal{D}$, že jsou splněny předpoklady předchozího lemmatu. A že $D_i \subseteq C_i$: Předpokládejme, že $D_0, \ldots, D_n$ máme ($D_0 = \mathbb{X} \times \mathbb{X}$), pak víme, že $\exists E : E \circ E \subseteq D_n$, $\exists F : F \circ F \subseteq E$. Tedy $F \circ F \circ F \subseteq D_n$. Ať $D_{n+1} := (F \cap C_{i+1}) \cap (F \cap C_{i+1})^{-1}$. Tedy $D_{n+1} \circ D_{n+1} \circ D_{n+1} \subseteq D_n$, $D_{n+1} \subseteq C_{i+1}$. Tedy podle lemmatu o pseudometrice existuje pseudometrika d na $\mathbb{X}$, že

$$\left\{(x,y) | d(x,y) < \frac{1}{2^i}\right\} \subseteq D_i \subseteq \left\{(x,y) | d(x,y) \le \frac{1}{2^i}\right\}.$$

Pro $x, y \in \mathbb{X}, x \ne y$ $\exists C \in \mathcal{D} : (x,y) \notin C$. $\exists i \in \mathbb{N} : C_i \subseteq C$. $D_i \subseteq C_i$. $(x,y) \notin D_i$. Tedy $d(x,y) \ge \frac{1}{2^i} > 0$. Tedy d je metrika. d generuje uniformitu $\mathcal{D}$: Tj. pro $\varepsilon > 0$ $\{(x,y | d(x,y) < \varepsilon)\} \in \mathcal{D}$. To platí díky vlastnosti z předchozího lemmatu. A pro $D \in \mathcal{D}$ $\exists \varepsilon > 0 : \{(x,y) | d(x,y) < \varepsilon\} \subseteq D$. $D \in \mathcal{D}$ dané $\exists i \in \mathbb{N} : C_i \subseteq D$, $D_i \subseteq C_i \subseteq D$. $\varepsilon := \frac{1}{2^i}$. To máme také díky vlastnosti z předchozího lemmatu. □

Věta 3.5 (Jemná uniformita)

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP. Všechny otevřené podmnožiny $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ obsahující $\delta(\mathbb{X})$ tvoří bázi nějaké uniformity na $\mathbb{X}$ právě tehdy, když $\mathbb{X}$ je parakompaktní.

Poznámka (Reformulace)
Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP. Všechna otevřená pokrytí $\mathbb{X}$ tvoří bázi nějaké pokrývací uniformity na $\mathbb{X}$, právě když $\mathbb{X}$ je parakompaktní.

Důkaz
Pokud všechna otevřená pokrytí $\mathbb{X}$ tvoří bázi pokrývací uniformity, pak speciálně každé otevřené pokrytí má hvězdovité otevřené zjemnění. Tedy podle charakterizační věty je $\mathbb{X}$ parakompaktní.

Je-li $\mathbb{X}$ parakompaktní, tak podle charakterizační věty má každé otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ otevřené hvězdovité zjemnění a snadno se ověří, že $\{\mathcal{U}|\mathcal{U}$ je pokrytí $\mathbb{X}$, které je zjemňované nějakým otev
je pokrývací uniformita na $\mathbb{X}$. $\square$

Věta 3.6 (Uniformizovatelnost TP)

TP je uniformizovatelný (tj. generován nějakou uniformitou), právě když je Tichonovův.

Důkaz
Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je generovaný uniformitou $\mathcal{D}$. Buď $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Pak existuje $D \in \mathcal{D} : D[x] \subseteq \mathbb{X} \setminus F$. Ať d je pseudometrika z předchozího lemmatu, kde volíme $D_1 = D$. Pak $\mathrm{B}_d(x, \frac{1}{2}) \subseteq D[x]$. Definujeme $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, $f(y) = d(x, y)$, $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 0$ a f je spojitá. Pro $y \in F : f(y) \geq \frac{1}{2}$. Tedy $\mathbb{X}$ je T_π.

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je Tichonovův. Pak uvažme $\beta\mathbb{X}$. $\beta\mathbb{X}$ je (para)kompaktní. Tedy na $\beta\mathbb{X}$ máme jemnou uniformitu, která generuje topologii na $\beta\mathbb{X}$. Tuto jemnou uniformitu na $\beta\mathbb{X}$ můžeme zúžit na $\mathbb{X}$ a ta již generuje topologii τ. $\square$

3.1 Operace s uniformními prostory

Definice 3.10

Ať $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je UP, $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$. Pak uniformní podprostor $(\mathbb{Y}, \mathcal{D}_\mathbb{Y})$ je definován následovně $\mathcal{D}_\mathbb{Y} := \{D \cap (\mathbb{Y} \times \mathbb{Y}) | D \in \mathcal{D}\}$.

Jsou-li $(\mathbb{X}_i, \mathcal{D}_i)$ UP, pak suma těchto UP je definována jako $(\bigcup \mathbb{X}_i, \{\bigcup D_i | D_i \in \mathcal{D}_i\})$. Součin pak jako $(\prod \mathbb{X}_i | \{\prod D_i | D_i \in \mathcal{D}_i, \mathrm{Fin}(D_i \neq \mathbb{X}_i \times \mathbb{X}_i)\})$. (Tedy jsou různé od identity jen v konečně mnoha případech.)

3.2 Úplnost a totální omezenost

Definice 3.11 (Net)

Net $(x_i)_{i \in I}$ UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá cauchyovský, pokud $\forall D \in \mathcal{D}\ \exists i_0 \in I\ \forall i, j \geq i_0 : (x_i, x_j \in D)$.

Definice 3.12 (Úplný a totálněomezený prostor)

UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá úplný, pokud každý cauchyovský net v $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je konvergentní v $(\mathbb{X}, \tau_{\mathcal{D}})$.

UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá totálně omezený, pokud $\forall E \in \mathcal{D}\ \exists K \subseteq \mathbb{X}$ konečná: $E[K] = \mathbb{X}$.

Poznámka
MP je totálně omezený (úplný) $\Leftrightarrow$ UP jím generovaný je totálně omezený (úplný).

Poznámka
UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je totálně omezený $\Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{D}\ \exists$ konečné pokrytí $U_1, \dots, U_n$ prostoru $\mathbb{X}$, že $(U_1 \times U_1) \cup \ldots \cup (U_n \times U_n) \subseteq D$.

Věta 3.7

Buď $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ UP. Pak $(\mathbb{X}, \tau_{\mathcal{D}})$ je kompaktní $\Leftrightarrow$ $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je úplný a totálně omezený.

Důkaz
$\Longrightarrow$ Je-li $D \in \mathcal{D}$, pak $\{\operatorname{int} D[x] | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Tedy z kompaktnosti existuje konečné podpokrytí $\{\operatorname{int} D[x_1], \dots, \operatorname{int} D[x_n]\}$. Tedy pro $K := \{x_1, \dots, x_n\}$ je $D[K] = \bigcup D[x_i] \supseteq \bigcup \int D[x_i] = \mathbb{X}$.

Ať $(x_i)_{i \in I}$ je cauchyovský net v $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$. Z charakterizace kompaktnosti víme, že $(x_i)_{i \in I}$ má hromadný bod – řekněme x. Ukážeme, že x je limitou netu x_i (tj. x_i konverguje k x). Ať U je okolí x. Pak existuje symetrické $D \in \mathcal{D} : (D \circ D)[x] \subseteq U$. Z cauchyovskosti existuje i_0, že pro $i, j \geq i_0 : (x_i, x_j) \in D$

$\square$

TODO

4 Topologické grupy

Definice 4.1 (Topologická grupa)

$(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$ se nazývá topologická grupa (TG), pokud $(\mathbb{G}, \cdot)$ je grupa, $(\mathbb{G}, \tau)$ je TP a $\cdot : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ je spojité, $^{-1} : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ je spojité.

Pozorování
Ať $\mathbb{G}$ je TG. Pak:

- $^{-1}$ je homeomorfismus.
- $\forall g \in \mathbb{G} : L_g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, $L_g(h) := g \cdot h$ (tzv. levá translace) je homeomorfismus.

$(L_g^{-1} = L_{g^{-1}}.)$

- $\forall x, y \in \mathbb{G}\ \exists h : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ homeomorfismus: $h(x) = y$. $(L_{yx^{-1}}(x) = y.)$
- $\forall U$ okolí e $\exists V$ okolí e: $V \cdot V^{-1} := \{u \cdot v^{-1} | u \in V, v \in V\} \subseteq U$.
- Pro U otevřenou v $\mathbb{G}$ a $M \subseteq \mathbb{G}$ libovolnou $M \cdot U$ je otevřené.
- Uzávěr podgrupy $H \leq \mathbb{G}$ je opět grupa.
- Uzávěr normální (algebraicky) podgrupy je normální (algebraicky) podgrupa.
- Je-li H podgrupa $\mathbb{G}$ s neprázdným vnitřkem, pak je obojetná.
- Součin TG se součinovou topologií a operací po složkách je TG.

Tvrzení 4.1 (Uniformita na TG)

Ať $\mathbb{G}$ je TG. Pak systém $\{D_U | U$ je okolí $e\}$, kde $D_U = \{(x, y) | x \cdot y^{-1} \in U\}$, je bází nějaké uniformity na $\mathbb{G}$. (Tzv. pravá uniformita na $\mathbb{G}$). Tato uniformita je kompatibilní s topologií $\mathbb{G}$.

Důkaz

$\delta(G) \subseteq D_u$. Ať U je okolí e. Chceme najít $\mathbf{V}$ okolí e : $D_V \circ D_V \subseteq D_U$. Uvažme spojité zobrazení $(x, y) \mapsto x \cdot y$, $x, y \in \mathbb{G}$. $(e, e) \to e$.

Tedy existuje V okolí e: $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \subseteq U$. Nyní $D_V \circ D_V \subseteq D_u$: Ať $(a, b) \in D_V \circ D_V$. Pak existuje $c \in G : (a, c) \in D_V$, $(c, b \in D_V)$. $a \cdot c^{-1} \in V$ a $cb^{-1} \in V$, tedy $a \cdot c^{-1} \cdot c \cdot b^{-1} \in V \cdot V \subseteq U$. $a \cdot b^{-1} \in U$. $(a, b) \in D_U$. Pro V, W okolí e: $D_V \cap D_W \supseteq D_{V \cap W}$. Tedy $\{D_U | U$ okolí $e\}$ tvoří bázi uniformity.

Tato uniformita je kompatibilní s původní topologií na $\mathbb{G}$: Ať V okolí e, $x \in \mathbb{G}$. $D_V[x] = \{y \in \mathbb{G} | xy^{-1} \in V\} = \{y \in \mathbb{G} | y \in V^{-1} \cdot x\}\ i = V^{-1} \cdot x$ je okolí x. $\square$

Věta 4.2

Každá TG je Tichonovova.

Důkaz

Ať $(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$ je TG. Ať $\mathcal{D}$ je pravá uniformita na $(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$. Víme, že $(\mathbb{G}, \tau_{\mathcal{D}})$ je Tichonovův. Předchozí tvrzení dává, že $\tau_{\mathcal{D}} = \tau$. $\square$

Věta 4.3 (Metrizovatelnost TG)

TG je metrizovatelná, právě když má spočetný charakter.

Důkaz

$\implies$: Triviální (každý met. prostor má spočetný charakter). $\Leftarrow$: Ať $(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$ má spočetný charakter. Ať $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí v e. $D_n := \{(x, y) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G} | xy^{-1} \in U_n\}$, $\{D_n | n \in \mathbb{N}\}$ je báze pravé uniformity $\mathcal{D}$. Tedy $\mathcal{D}$ má spočetnou bázi. Tedy $(\mathbb{G}, \mathcal{D})$ je metrizovatelný, tedy $(\mathcal{G}, \tau)$ je metrizovatelný. $\square$

Poznámka (Informativně)
Věta (Birkhoff Kahutani): Každá metrizovatelná grupa má zleva (zprava) invariantní metriku, tj. metrika ϱ, že $\varrho(x, y) = \varrho(c \cdot x, c \cdot y)$, $\forall c, x, y \in \mathbb{G}$.

Tvrzení 4.4 (Spojitost homomorfismu)

Ať $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ jsou TG. $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ je homomorfismus grup. f je spojité $\Leftrightarrow$ f je spojité v $e \in \mathbb{G}$.

Důkaz

$\implies$: zřejmě. $\Leftarrow$: Ať $x \in \mathbb{G}$, $(x_i)_{i \in I}$ je net v $\mathbb{G}$, který konverguje k x. Chceme, že $(f(x_i))_{i \in I}$ konverguje k $f(x)$ v $\mathbb{H}$. $(x_i \cdot x^{-1})_{i \in I}$ je net v $\mathbb{G}$, konverguje k $x \cdot x^{-1} = e \in \mathbb{G}$. f spojité v e, tedy $f(x_i \cdot x^{-1})$ konverguje k $f(e) = e \in \mathbb{H}$. Tudíž $f(x_i) \cdot (f(x))^{-1} \to e \in \mathbb{H}$. Tudíž (po vynásobení $f(x)$) $f(x_i) \to f(x)$. Tedy f spojité v x. $x \in \mathbb{G}$ libovolné. Tedy f je spojité. $\square$

Věta 4.5 (Faktor TG)

Buď N uzavřená normální podgrupa TG $\mathbb{G}$. Pak faktogrupa $\mathbb{G}/N$ s kvocientovou topologií je TG a přirozená projekce (= kvocientové zobrazení) $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/N$, $\pi(g) := g \cdot N$, je spojitý a otevřený homeomorfismus.

Důkaz

Víme: π je spojitý homeomorfismus. π je otevřené: je-li $U \subseteq \mathbb{G}$ otevřené, pak $\pi(U) = \{xN : x \in U\} \subseteq G/N$, $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cdot N$ je otevřením. Tedy z definice kvocientové topologie je $\pi(U)$ otevřená množina.

$\mathbb{G}/N$ je TG: Násobení je spojité: $f : \mathbb{G} \times G \to \mathbb{G}/N$, $f(g, h) := g \cdot h \cdot N$ je spojité, jelikož je to složení součinu a kvocientového zobrazení. Poznamenejme, že můžeme přirozeně identifikovat $\mathbb{G} \times \mathbb{G}/N \times N$ a $(\mathbb{G}/N) \times (\mathbb{G}/N)$. Operace součinu na G/N je kvocientem spojitého zobrazení f. Tedy je také spojité podle charakterizace spojitosti a projektivně vytvořeného prostoru.

Spojitost $^{-1}$ se ukáže obdobně.

Zbývá ověřit, že $\mathbb{G}/N$ je Hausdorffův. Stačí ověřit, že je T_1. N je uzavřená, tedy $G \setminus N$ je otevřená. $\pi^{-1}(G/N \setminus \{N\}) = \mathbb{G} \setminus N$ je otevřená. Tedy z definice kvocientové topologie $G/N \setminus \{N\}$ je otevřená v G/N, ... $\square$

Tvrzení 4.6 (O homomorfismu)

Ať $\mathbb{G}, \mathbb{H}$ jsou TG a $f : G \to H$ spojitý homomorfismus. Pak $N := f^{-1}(e)$ je normální (uzavřená) podgrupa G a existuje spojitý homomorfismus $\overline{f} : G/N \to H$, že $\overline{f}\pi = f$ (kde $\pi : G \to G/N$ je přirozená projekce).

Poznámka
$\overline{f}$ nemusí být vnoření topologických prostorů.

Důkaz
Bez důkazu. □

Tvrzení 4.7 (O izomorfismu)

Ať $\mathbb{G}$ je TG, $K \subseteq H$ její uzavřené normální podgrupy. Pak H/K je uzavřenou normální podgrupou G/K a $(G/K)/(H/K)$ je izomorfně homeomorfní s G/H.

Důkaz
Bez důkazu. □

5 Souvislé prostory

Definice 5.1

TP se nazývá souvislý, pokud je neprázdný a nelze ho vyjádřit jako sjednocení dvou disjunktních otevřených neprázdných množin. (Tj. obsahuje právě dvě obojetné množiny, sám sebe a prázdný prostor.)

Tvrzení 5.1

Pro neprázdný TP $\mathbb{X}$ je ekvivalentní: a) $\mathbb{X}$ je souvislý, b) Je-li $\mathbb{X} = A \cup B$ a $\overline{A} \cap B = \emptyset = \overline{B} \cap A$, pak $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$. c) $\mathbb{X}$ neobsahuje vlastní obojetnou podmnožinu. d) Každé spojité zobrazení $f : \mathbb{X} \to \{0, 1\}$ je konstantní.

Důkaz
Přímočaré. □

Tvrzení 5.2

Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý.

Důkaz
Ať $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ je spojité zobrazení, $\mathbb{X}$ souvislé, f na. Sporem. $\mathbb{Y}$ není souvislý. Potom z minulého tvrzení $\exists g : \mathbb{Y} \to \{0,1\}$ spojitý nekonstantní. Potom ale $g \circ f : \mathbb{X} \to \{0,1\}$ je spojité a nekonstantní $\implies$ $\mathbb{X}$ není souvislý. $\lightning$. $\square$

Tvrzení 5.3 (Sjednocení souvislých množin)

Ať $C_i \subseteq \mathbb{X}, C_i$ souvislé, $i \in I, 0 \in I, C_i \cap C_0 \neq \emptyset$ pro $i \in I$. Pak $\bigcup C_i$ je souvislé.

Důkaz
Ať O je neprázdná obojetná množina v $\bigcup C_i$. Existuje $j \in I$, $C_j \cap O \neq \emptyset$. $C_j \cap O$ je obojetná v C_j, C_j je souvislá, tedy $C_j \subseteq O$. Tedy $C_0 \cap O \neq \emptyset$, tj. $C_0 \subseteq O$. Je-li $i \in I$ libovolná, pak $C_i \cap O \neq \emptyset$ a opět $C_i \subseteq O$.Tudíž $O = \bigcup C_i$, tj. $\bigcup C_i$ je souvislá. $\square$

Důsledek
Jsou-li C_i souvislé v TP $\mathbb{X}$, $i \in I$ a $\bigcap C_i \neq \emptyset$, pak $\bigcup_{i \in I} C_I$ je souvislá.

Důkaz
Předchozí s $C_0 := \{x_0\} \subseteq \bigcap C_i$. $\square$

Důsledek
Je-li $A \subseteq \mathbb{X}$ souvislá a $A \subseteq M \subseteq \overline{A}$, pak M je souvislá.

Důkaz
$C_a := A \cup \{a\}$ pro $a \in M \setminus A$. Vzhledem k předchozímu stačí ověřit, že C_a je souvislá ($M = \bigcup_{a \in M \setminus A} C_a$). $\square$

Věta 5.4

Buď $\mathbb{X}$ Tichonovův prostor. Pak $\mathbb{X}$ je souvislý $\Leftrightarrow$ $\beta\mathbb{X}$ je souvislý.

Důkaz
$\implies$: $\overline{\mathbb{X}} = \beta\mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ je souvislá $\implies$ $\overline{\mathbb{X}}$ je souvislá $\implies$ $\beta\mathbb{X}$ je souvislá.

$\Leftrightarrow$: Ať $\beta\mathbb{X}$ je souvislý. Ať $f : \mathbb{X} \to \{0,1\}$ je spojité zobrazení. Z vlastností $\beta\mathbb{X}$ existuje spojité rozšíření $\overline{f} : \beta\mathbb{X} \to \{0,1\}$. $\beta\mathbb{X}$ je souvislý $\implies$ $\overline{f}$ je konstantní $\implies$ f je konstantní $\implies$ $\mathbb{X}$ je souvislý. $\square$

Věta 5.5 (Součin souvislých prostorů)

Ať $\mathbb{X}_i : i \in I$ jsou TP. Pak $\prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$ je souvislý $\Leftrightarrow \forall i \in I : \mathbb{X}_i$ je souvislý.

Důkaz
Pokud některý $\mathbb{X}_i = \emptyset$, tvrzení platí. Dále ať $\mathbb{X}_i \neq \emptyset$, $i \in I$. $\implies$: Je-li $\prod \mathbb{X}_i$ souvislý, $\pi_j : \prod \mathbb{X}_i \to \mathbb{X}_j$ je spojité a na, tedy i $\mathbb{X}_j$ je souvislý.

$\Leftarrow$: Nejprve pro dva prostory $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$: $\mathbb{X} \times \mathbb{Y} = (\{x_0\} \times \mathbb{Y}) \cup \bigcup_{y \in \mathbb{Y}} \mathbb{X} \times \{y\}$. Tedy podle tvrzení výše je $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ souvislý. Indukcí dokážeme pro konečně mnoho. Obecně: $\forall i \in I$ fixujeme bod $x_i \in \mathbb{X}_i$.

$$M := \left\{ (y_i)_{i \in I} \in \prod \mathbb{X}_i : y_i = x_i \text{ pro všechna } i \in I \text{ až na konečně mnoho výjimek} \right\}.$$

$$M = \bigcup_{K \subseteq I \text{ konečná}} \left(\prod_{i \in K} \mathbb{X}_i \times \prod_{i \in I \setminus K} \{x_i\} \right).$$

To znamená, že M je souvislé, protože je sjednocením souvislých množin s průnikem obsahujícím $(x_i)_{i \in I}$. Ale M je hustá v $\prod \mathbb{X}_i$. $\overline{M}$ je souvislá, tedy $\prod \mathbb{X}_i$ je souvislá. □

Definice 5.2 (Komponenta souvislosti)

Ať $\mathbb{X}$ je TP, $x \in \mathbb{X}$, pak komponenta souvislosti bodu x je největší souvislá množina, která x obsahuje. Značíme ji C_x.

Důkaz (Existence)
Plyne z jednoho z důsledků: $\bigcup \{C | x \in C \wedge C \text{ je souvislá}\}$ je souvislá a maximální. Navíc je to vždy uzavřená množina. □

Poznámka
Komponenty souvislosti tvoří rozklad, tj. $C_x = C_y$ nebo $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Tvrzení 5.6

Jsou-li $\mathbb{X}_i$ TP a $x_i \in \mathbb{X}_i$, C_i komponenta bodu x_i v $\mathbb{X}_i$. Pak $\prod C_i$ je komponenta $(x_i)_{i \in I}$ v $\prod \mathbb{X}_i$.

Důkaz
Cvičení. □

Definice 5.3 (Kvazikomponenty)

Ať $\mathbb{X}$ je TP. Množina $Q \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá kvazikomponenta bodu $x \in \mathbb{X}$ v prostoru $\mathbb{X}$, pokud $Q = \bigcap \{Z | x \in Z \wedge Z \text{ obojetná}\}$. Značíme ji Q_x.

Poznámka
$\forall x \in \mathbb{X} : C_x \subseteq Q_x$. Navíc Q_x je uzavřená. A opět tvoří rozklad prostoru $\mathbb{X}$.

Například (TP $\mathbb{X}$, že $C_x \neq Q_x$)
$\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^2$ skládající se ze 2 bodů x, y a úseček k nim konvergujícím (: | | | | |). $C_x = \{x\}$, $Q_x = \{x, y\}$.

Lemma 5.7 (O průniku v kompaktu)

Buď $\mathbb{X}$ kompaktní TP, $\mathcal{A}$ soubor uzavřených množin v $\mathbb{X}$. $U \subseteq \mathbb{X}$ otevřená a $\bigcap \mathcal{A} \subseteq U$. Pak existuje konečný systém $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} : \bigcap \mathcal{F} \subseteq U$.

Důkaz
Kdyby ne, pak $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ konečné: $\bigcap \mathcal{F} \setminus U \neq \emptyset$. Tedy $\mathcal{A} \cup \{\mathbb{X} \setminus U\}$ má konečnou průnikovou vlastnost. $\mathbb{X}$ kompaktní: $\bigcap \mathcal{A} \cap (\mathbb{X} \setminus U) \neq \emptyset$. Tedy $\bigcap \mathcal{A} \not\subseteq U$. $\lightning$. □

Věta 5.8

V kompaktním TP komponenty a kvazikomponenty splývají.

Důkaz
Ať $x \in \mathbb{X}$. $C_x \subseteq Q_x$. Pro $Q_x \subseteq C_x$ stačí dokázat, že Q_x je souvislá. Předpokládejme $E \cup F$, E, F uzavřené (v Q_x, a tedy i v $\mathbb{X}$) disjunktní množiny. BÚNO $x \in E$. $\mathbb{X}$ je normální, tedy existují otevřené disjunktní množiny U, V: $E \subseteq U$, $F \subseteq V$. $Q_x = E \cup F \subseteq U \cup V$. Podle předchozího lemmatu existují obojetné množiny $Q_1, \ldots, Q_n : Q_1 \cap \ldots \cap O_n \subseteq U \cup V$. Otevřené $O \cap U = O \setminus V$ uzavřené, tedy $x \in O \cap U$, tedy $Q_x \subseteq O \cap U$. Tedy $F = \emptyset$. Proto Q_x je souvislá. □

Definice 5.4 (Křivková a oblouková souvislost)

TP $\mathbb{X}$ se nazývá obloukově (resp. křivkově) souvislý, pokud $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists f : [0,1] \to f([0,1])$ homeomorfní (resp. f spojité), že $f(0) = x$, $f(1) = y$.

Poznámka
Obecně je mezi nimi rozdíl, v Hausdorffových prostorech je to totéž.

6 Kontinua

Definice 6.1 (Kontinuum)

Kontinuum je kompaktní souvislý prostor.

Jednoprvkové kontinuum se nazývá degenerované, ostatní nedegenerovaná.

Tvrzení 6.1

Ať K_n je klesající (vzhledem k inkluzi) posloupnost kontinuí, pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ je opět kontinuum.

Důkaz

$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ je zřejmě kompaktní. Předpokládejme, že $K = E \cup F$, kde E, F jsou uzavřené disjunktní. Chceme $E = \emptyset$ nebo $F = \emptyset$. K_1 je normální, tedy existují otevřené disjunktní U, V, že $E \subseteq U$ a $F \subseteq V$. Podle lemmatu o průniku v kompaktu existuje $n \in \mathbb{N}$, že $K_n \subseteq U \cup V$, tedy $K_1 = (K_n \cap U) \cup (K_n \cap V)$. K_n je sovislá, tedy $K_n \cap U = \emptyset$ nebo $K_n \cap V = \emptyset$. Tedy $E = \emptyset$ nebo $F = \emptyset$. $\square$

Tvrzení 6.2 (Bum do hranice (Boundary bumping theorem))

Ať $\mathbb{X}$ je kontinuum, A vlastní uzavřená podmnožina $\mathbb{X}$. Pak každá komponenta množiny A protíná hranici A.

Důkaz

$A = \emptyset$ nemá žádnou komponentu. Tedy $A \neq \emptyset, x \in A$, C_x ... komponenta bodu x v A. Pro spor předpokládejme, že $C_x \cap \partial A = \emptyset$. $A \subset \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ je kontinuum, tedy $\partial A \neq \emptyset$. Víme, že C_x je kvazikomponenta $\mathbb{X}$, $C_x \subseteq A \setminus \partial A$. Tedy podle lemmatu o průniku v kompaktu existuje obojetná množina Z v A, že $C_x \subseteq Z \subseteq A \setminus \partial A$. Z je uzavřená v $\mathbb{X}$, neprázdná, vlastní. Navíc Z je otevřená v A a neprotíná hranici, tedy Z je otevřená v $\mathbb{X}$ (Z je otevřená v otevřené $A \setminus \partial A$). Z je tedy obojetná vlastní podmnožina v $\mathbb{X}$, $\lightning$. $\square$

Věta 6.3 (Sierpinski)

Ať $\mathbb{X}$ je kontinuum, $X_n, n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní uzavřené množiny v $\mathbb{X}$, že $X = \bigcup X_n$. Pak všechna $X_n = \emptyset$ až na jednu výjimku.

Důkaz
Je-li kontinuum $\mathbb{D}$ spočetným sjednocením uzavřených neprázdných disjunktních množin $Y_i, i \in \mathbb{N}$, pak pro každé $i \in \mathbb{N}$ existuje kontinuum $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{D}$, které je disjunktní s Y_i, ale není obsaženo v žádném $Y_j, j \in \mathbb{N}$ (protíná alespoň 2). Důkaz:

Fixujeme $j \neq i$: existují disjunktní otevřené U, V: $Y_j \subseteq U$, $Y_i \subseteq V$. Buď C komponenta libovolného bodu z Y_j v množině $\overline{U}$. Podle bum do hranice víme, že $C \cap \partial \overline{U} \neq \emptyset$. Tj. $\partial \overline{U} \cap Y_j = \emptyset$, tedy $C \nsubseteq Y_j$. $C \subseteq \overline{U} \subseteq \mathbb{D} \setminus V$, tedy $C \cap Y_i = \emptyset$.

Důkaz věty: Sporem: Existují alespoň dva indexy $n \neq m : X_n \neq \emptyset \neq X_m$. Kdyby $\{k \in \mathbb{N} : X_n \neq \emptyset\}$ byla konečná, pak $\mathbb{X}$ je sjednocením konečně mnoha disjunktních uzavřených neprázdných množin, tyto množiny by již byly obojetné, spor se souvislostí $\mathbb{X}$.

BÚNO (vyházíme prázdné a přeindexujeme) $X_n \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$. Indukcí najdeme posloupnost kontinuí C_n, že $C_{n+1} \subseteq C_n \wedge C_n \cap X_n = \emptyset \wedge C_n$ není obsaženo v žádném X_i, $i \in \mathbb{N}$. Podle prvního odstavce $\mathbb{X} = \mathbb{D}$, $X_j = Y_j$, $i = 1$ existuje $C = C_j$. Dále uvažme C_1. To protíná nekonečně mnoho z množin X_i. V druhém kroku indukce použijeme první odstavec na $\mathbb{D} = C_1$, $\{Y_i | i \in \mathbb{N}\} = \{C_1 \cap X_i | C_1 \cap X_i \neq \emptyset\}$, …

$\bigcap C_n \neq \emptyset$, ať tedy $c \in \bigcap C_n$. $c \notin \bigcup X_n = \mathbb{X}$. $\lightning$. $\square$

Definice 6.2 (Rozložitelné a nerozložitelné kontinuum)

Kontinuum $\mathbb{X}$ se nazývá rozložitelné, pokud existují dvě vlastní podkontinua $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ (ne nutně disjunktní), že $\mathbb{X} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$. Jinak je nerozložitelné.

Věta 6.4 (Charakterizace nerozložitelnosti)

Kontinuum $\mathbb{X}$ je nerozložitelné, právě když každé jeho vlastní podkontinuum je v něĺ řídké (tj. uzávěr má prázdný vnitřek).

Důkaz
$\Leftarrow$ Kdyby $X = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ vlastní podkontinua, pak $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ řídké. $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ je řídká v $\mathbb{X}$, $\lightning$.

$\Longrightarrow$: Ať $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ je vlastní podkontinuum $\mathbb{X}$, $\operatorname{int} \mathbb{Y} \neq \emptyset$. Ať $M = \overline{\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}}$. Pak M je souvislá: $\mathbb{X} = M \cup \mathbb{Y}$ a M je kontinuum, tedy $\mathbb{X}$ je rozložitelné. Nebo M je nesouvislá: $M = E \cup F$, kde E, F jsou uzavřené disjunktní neprázdné podmnožiny v M. Potom $(\mathbb{Y} \cup E) \cup (\mathbb{Y} \cup F)$. Ale tyto dvě množiny jsou vlastní uzavřené podmnožiny $\mathbb{X}$, které jsou souvislé (neboť každá komponenta E nebo F protíná jejich hranici a ta je podmnožinou $\mathbb{Y}$ a sjednocení souvislých protínajících se ve stejném bodě je souvislé). $\square$