1 Ohniska kuželoseček

1.1 Konstrukce s imaginárními elementy

Poznámka
Všimněme si, že projektivita dvou soumístných soustav určuje jednoznačně pár samodružných elementů, ale opačně ne. Pokud však vezmeme involuci, tak ta už má jednoznačnou korespondenci involuce s párem samodružných elementů.

Příklad (Konstrukce)
Je-li dána projektivita soumístných bodových soustav na přímce, určete involuci, která má tytéž samodružné body. (Totéž duálně.)

Řešení (Duální)
Zvolíme pomocnou kružnici procházející daným bodem. Převedeme soustavy na bodové soustavy na kružnici. Vezmeme direkční přímku za poláru a najdeme k ní (přes tečny) pól. Nyní uvažujme involuci se středem v tomto bodě. Obraz v hledané involuci najdeme tak, že vzor převedeme na kružnici, zobrazíme v této involuci, a vrátíme zpět.

Poznámka
Pokud direkční přímka vyjde mimo kružnici, budou samodružné body komplexní a pól najdeme tak, že leží na polárách k bodům (pólům) ležícím na dané poláře.

Věta 1.1

Pro eliptickou involuci (bodových soustav na přímce) existují právě dva body v rovině, z nichž se tato involuce promítá absolutní involucí (to znamená involucí kolmic).

Důkaz
Pro eliptickou involuci se její páry rozdělují. Tedy nad úsečkami vzor – obraz si uděláme Thaletovy kružnice a hledané body budou jejich průsečíky. □

Definice 1.1

Body z předchozí věty se nazývají pomocné body eliptické involuce.

Poznámka (Platí)
Absolutní involuce je eliptická involuce, jejíž samodružné přímky jsou imaginární. Nazývají se izotropické přímky a jejich směry jsou $[0 : 1 : i]$ a $[0 : 1 : -1]$.

Poznámka
Izotropické body leží na každé kružnici v rovině. Každé izotropická přímka je kolmá sama na sebe (v reálném skalárním součinu, z definice absolutní involuce)

1.2 Ohnisko středových kuželoseček

Důsledek
Pokud kuželosečka není kružnice, pak izotropické body na ní neleží, tedy z každého izotropického bodu k takové kuželosečce existují 2 tečny (? 4 imaginární přímky). Lze ukázat, že ze 6 průsečíků těchto 4 přímek jsou vždy dva reálné.

Definice 1.2 (Ohnisko)

Těmto dvěma bodům budeme říkat ohniska dané kuželosečky.

Věta 1.2

Bod je ohniskem kuželosečky ⇔ involuce sdružených polár indukovaná v tomto bodě kuželosečkou je involuce absolutní.

Důkaz
Samodružné přímky involuce sdružených polár jsou právě tečny z tohoto bodu. □

Věta 1.3

1. Kuželosečka má 2 ohniska (E, F) (pro kružnici splývající), jsou umístěna symetricky podle středu na jedné z os kuželosečky. Ohniska jsou samodružné body involuce bodů na této ose, jejíž páry jsou vyťaty sdruženými kolmými polárami. A tedy i páry tečna+jejich normála (kolmice v bodě dotyku = pól tečny).

2. Každé z ohnisek je pomocným bodem eliptické involuce, kterou na druhé ose vytínají sdružené kolmé poláry (a tedy i dvojice tečna+normála).

3. Každá kružnice opsaná trojúhelníku danému druhou osou a sdruženými kolmými polárami protíná původní osu v ohniscích. (Vyplývá z předchozí části.)

Důkaz
Bez důkazu. □

Definice 1.3 (Hlavní osa, vedlejší osa)

Ose z předchozí věty se říká hlavní osa, druhé pak vedlejší.

Příklad (Konstrukce)
Dány osy elipsy s vrcholy, najděte ohniska.

Řešení (Podobné hledání hyperoskulační kružnice.)
K spojnici hlavního a vedlejšího vrcholu umíme najít pól (průsečík tečen = kolmic na osy). Z tohoto pólu vedeme kolmici, čímž jsme získali dvojici kolmých sdružených polár, tedy použijeme předchozí větu, bod 3.

Totéž pro hyperbolu: na hlavní ose máme zadané vrcholy, na vedlejší náhradní body.

Řešení
Polára bude tentokrát průsečík „těch druhých dvou kolmic v hlavním a vedlejším vrchole“, neboť pomocné body jsou takové, že přesně tento bod leží na asymptotě (tečně v nevlastním bodě).

1.3 Ohnisko paraboly

Definice 1.4 (Ohnisko)

(Stejná.) Ohnisko paraboly je reálný průsečík izotropických tečen.

Poznámka
Tuto definici splňují 2 body: vlastní ohnisko F a nevlastní ohnisko = střed = směr průměrů = směr osy.

Poznámka
Polára vlastního ohniska = řídící přímka.

Věta 1.4

1. Bod je ohniskem paraboly ⇔ involuce sdružených polár v tomto bodě je involuce absolutní. (Tj. sdružené poláry v F jsou vzájemně kolmé.)

2. Spojnice vlastního a nevlastního ohniska = osa paraboly, vlastní ohnisko půlí každou úsečku vyťatou na ose sdruženými kolmými polárami (speciálně tečnou a její normálou).

Příklad (Konstrukce)
Zkonstruujte ohnisko paraboly zadané 4 tečnami.

Řešení
Najdeme osu a bod dotyku na libovolné nevrcholové tečně. Z něj vedeme kolmici a použijeme předchozí větu bod 2.

Věta 1.5

Ohnisko jsou pro kuželosečku 2 podmínky.

Důkaz
Ohnisko zadává 2 izotropické tečny, tedy 2 podmínky. □

Poznámka
2 ohniska + 1 bod (mimo osu = jejich spojnice) nezadávají jednoznačně kuželosečku, zadávají však jednoznačně elipsu a hyperbolu. A tyto dvě kuželosečky se v daném bodu protínají kolmo (úhel mezi tečnami).

2 Analytická geometrie

Definice 2.1 (Projektivní prostor, geometrický bod, aritmetický zástupce)

(Reálný) projektivní prostor dimenze n je množina

$$\mathbb{R}P^n = \left\{\langle v\rangle, v \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\mathbf{o}\right\} = \text{ množina všech přímek (procházejících počátkem) v } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Prvek $\langle v\rangle \in \mathbb{R}P^n$ se nazývá geometrický bod a v jeho aritmetický zástupce

Poznámka (Platí)
$\langle v\rangle = \langle w\rangle$ (tj. stejné geometrické body) $\Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : w = \alpha\cdot v$ (tj. aritmetičtí zástupci se liší pouze násobkem $\neq 0$).

Definice 2.2 (Homogenní souřadnice)

Je-li $v = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{\mathbf{o}\}$, pak homogenní souřadnice geometrického bodu $\langle v\rangle$ jsou $[x_0 : \ldots : x_n]$.

Poznámka
Jsou určeny až na násobek $\neq 0$.

Definice 2.3 (Projektivní přímka, projektivní rovina, projektivní prostor)

$\mathbb{R}P^1$ říkáme projektivní přímka. $\mathbb{R}P^2$ říkáme projektivní rovina. $\mathbb{R}P^3$ říkáme projektivní prostor.

Poznámka (Značení)
Místo $\langle a\rangle$ budeme psát A.

Poznámka
$\mathbb{R}P^1$: Dva body A, B jsou totožné $\Leftrightarrow$ vektory a, b jsou lineárně závislé.

$\mathbb{R}P^2$: Tři body A, B, C leží na jedné přímce (po dvou různé) $\Leftrightarrow$ a, b, c jsou lineárně závislé (po dvou lineárně nezávislé), tj. leží v jedné rovině.

$\mathbb{R}P^3$: Čtyři body A, B, C, D leží v rovině $\Leftrightarrow$ a, b, c, d jsou lineárně závislé, tj. leží v jednom prostoru.

Obecně $\mathbb{R}P^n$: $n+1$ bodů $A_0, \ldots, A_n$ leží v $n-1$-dimenzionálním projektivním prostoru $\Leftrightarrow$ vektory $a_0, \ldots, a_n$ leží v nadrovině v $\mathbb{R}^{n+1}$ (jsou lineárně závislé).

Poznámka
Procesu „zakážu **o** a ztotožníme násobky“ říkáme projektivizace.

Definice 2.4 (Projektivní rozšíření afinního prostoru, vlastní bod, nevlastní bod)

Projektivní rozšíření afinního prostoru $\mathbb{R}^n$ na projektivní prostor $\mathbb{R}P^n$ (= kanonické vnoření $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}P^n$) je zobrazení, které bodu $[x_1, \ldots, x_n]$ přiřadí $[1 : x_1 : \ldots : x_n]$ a vektoru $(x_1, \ldots, x_n)$ přiřadí $[0 : x_1 : \ldots : x_n]$.

Prvním říkáme body vlastní, druhý nevlastní.

TODO?

Definice 2.5 (Homogenní souřadnice přímky)

V $\mathbb{R}P^2$ zavádíme homogenní souřadnice přímky $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ jako homogenní trojici $(a_0 : a_1 : a_2)$.

Poznámka
Opět určeny až na násobek $\neq 0$.

Například
$(0 : 1 : 0)$ je osa y, $(0 : 0 : 1)$ je osa x, $(1 : 0 : 0)$ je nevlastní přímka.

Příklad (Hledání průsečíku dvou přímek)
TODO?

Příklad (Incidence bodů)
$X = [x_0 : x_1 : x_2]$, $a = (a_0 : a_1 : a_2)$. $X \in a \Leftrightarrow a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$.

Důsledek
Lze zaměnit bod za přímku $\implies$ dualita.

Tj. například spojnice bodů se počítá stejně jako průsečík přímek.

Poznámka (Trik na nalezení spojnice (/průsečíku))
Dány body $Y = [y_0 : y_1 : y_2]$, $Z = [z_0 : z_1 : z_2]$. Chceme rovnici jejich spojnici: $X \in a = YZ \Leftrightarrow a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ pro hledané souřadnice $(a_0 : a_1 : a_2) \Leftrightarrow$ vektory X, Y a Z jsou závislé $\Leftrightarrow \det\left((X|Y|Z)^T\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1) \cdot x_0 + (-y_0 \cdot z_2 + y_2 \cdot z_0) \cdot x_1 + (y_0 \cdot z_1 - y_1 \cdot z_0) \cdot x_2 = 0.$$

2.1 Dvojpoměr

Definice 2.6 (Dvojpoměr)

Dvojpoměr 4 vektorů v rovině a, b, c, d, po dvou lineárně nezávislých, ale po třech lineárně závislých (tj. BÚNO $c = \alpha_1 a + \beta_1 b$, $d = \alpha_2 \cdot a + \beta_2 b$) definujeme jako $(abcd) := \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\alpha_1 \cdot \beta_2} \in \mathbb{R}$.

Poznámka
Zřejmě tato hodnota nezávisí na volbě (nenulového) násobku každého vektoru.

Dvojpoměr 4 bodů $A, B, C, D \in \mathbb{R}P^n$ ležících na jedné přímce definujeme jako $(ABCD) := (abcd)$.

Tvrzení 2.1 (Už jsme si dokázali)

A, B, C, D jsou čtyři různé $\implies (ABCD) \neq 0, 1, \infty$. (Např. $C = A \vee B = D \Leftrightarrow (ABCD) = 0$.)

A, B, C, D vlastní $\implies (ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$. A, B, C vlastní, D nevlastní $\implies (ABCD) = (ABC)$.

Věta o 4 determinantech (pro $A, B, C, D \in \mathbb{R}P^1$):

$$(ABCD) = \frac{(a_0 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_0) \cdot (b_0 \cdot d_1 - b_1 \cdot d_0)}{(a_0 \cdot d_1 - a_1 \cdot d_0) \cdot (b_0 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_0)}.$$

Definice 2.7 (Harmonická čtveřice)

$$(ABCD) = -1$$

Příklad (Pak jsme počítali. V jednu chvíli nám vyšlo:)
Parametrizace přímky procházející A, B je $t_1 \cdot A + t_2 \cdot B$, kde například $t_1 + t_2 = 1$; lépe $t \cdot A + (1-t) \cdot B$.

Definice 2.8 (Projektivní souřadný systém (PSS))

Projektivní souřadný systém v $\mathbb{R}P^n$ je $(n+1)$-tice různých bodů $A_0, \ldots, A_n \in \mathbb{R}P^n$. Pak $\forall X \in \mathbb{R}P^n$ definujeme souřadnice bodu X vůči PSS $(A_0, \ldots, A_n)$ jako homogenní $(n+1)$-tici $[x_0 : \ldots : x_n]$ takovou, že $x = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot a_i$.

TODO!!! (Projektivita na $\mathbb{R}P^n$: je dána regulární maticí $(n+1) \times (n+1)$ určenou až na násobek $\neq 0$ (píšeme $A \sim k \cdot A$, pro $k \neq 0$).)

TODO!!! (Ukázání si, že taková matice zachovává dvojpoměr.)

TODO!!! (Projektivita je dána svými hodnotami na $n+2$ bodech.)

TODO!!! (A mnoho dalšího.)

2.2 Samodružné body projektivit

Definice 2.9 (Samodružný bod projektivity)

$\langle \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}P^n$ je samodružný bod projektivity dané maticí $A \equiv \langle A \cdot \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle$.

Poznámka

$$\Leftrightarrow \ \exists \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} : A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} \qquad (\Leftrightarrow (A - \lambda E) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{o} \Leftrightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0)$$

$\Leftrightarrow \lambda \neq 0$ je vlastním číslem matice A $\mathbf{o} \neq \mathbf{v}$ je vlastním vektorem matice A příslušným vlastnímu číslu λ.

Poznámka
Matice projektivity je regulární, tedy nemá vlastní číslo nula.

TODO? (Hromada lineární algebry.)

2.3 Klasifikace projektivit na projektivní přímce

Poznámka
Klasifikace projektivit na projektivní přímce podle možných Jordanových tvarů:

- $J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pro $\lambda = 1$ je to identická projektivita. Pro $\lambda \neq 1$ má dva reálné samodružné body.
- $J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tehdy má jediný samodružný bod (a ten je reálný).
  Navíc je podobná matici $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, což je násobek $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- $J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Tehdy má dva komplexní samodružné body.

Důsledek
To dokazuje větu ze zimního semestru ($\exists$ 2/1/0 samodružné body projektivity soustav).

2.4 Charakteristika projektivity

Poznámka (Opakování zimního semestru)
Jsou-li S, T samodružné body projektivity na $\mathbb{R}P^1$, pak její charakteristika je číslo $w = (XX'ST)$ pro libovolný pár $X \mapsto X'$.

Věta: Hodnota w nezávisí na volbě bodu X.

Věta 2.2

Hodnota w nezávisí na volbě bodu X, a je-li projektivita dána maticí A, platí

$$w = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{D}}{\operatorname{tr} A - \sqrt{D}}, \qquad D := (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A.$$

Důkaz
Pro dvojpoměr platí (věta o čtyřech determinantech)

$$(XX'ST) = \frac{[XS] \cdot [X'T]}{[XT] \cdot [X'S]}, \qquad [AB] = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Pro danou A spočítejme její vlastní čísla: $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A) \cdot \lambda + \det A$, tj. $\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{D}}{2}$.

Pak pro samodružné body platí: $S' = S$, $T' = T$, tedy $\mathbf{s}' = A \cdot \mathbf{s} = \lambda_1 \cdot \mathbf{s}$, $\mathbf{t}' = A \cdot \mathbf{t} = \lambda_2 \cdot \mathbf{t}$. Pak

$$[\mathbf{x}'\mathbf{s}] = [\mathbf{x}' \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{s}'] = \frac{1}{\lambda_1} [\mathbf{x}'\mathbf{s}'] = \frac{1}{\lambda_1} \cdot |A| \cdot [\mathbf{xs}], \quad [\mathbf{x}'\mathbf{t}] = \ldots = \frac{1}{\lambda_2} \cdot |A| \cdot [\mathbf{xt}].$$

Dosadíme: $w = \frac{[\mathbf{xs}] \cdot \frac{1}{\lambda_2} \cdot |A| \cdot [\mathbf{xt}]}{[\mathbf{xt}] \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot |A| \cdot [\mathbf{xs}]} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{D}}{\operatorname{tr} A - \sqrt{D}}$. □

2.5 Involuce

Poznámka (Opakování zimního semestru)
Involuce je projektivita soumístných soustav splňující $w = -1 \Leftrightarrow \forall X : X'' = X \Leftrightarrow \exists X : X'' = X$.

Definice 2.10 (Involuce)

Involuce je projektivita (na $\mathbb{R}P^n$) daná maticí A, která splňuje $A^2 \sim E$.

Věta 2.3

Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ zadává neidentickou projektivitu na $\mathbb{R}P^1$ ($A \nsim E$). Pak NáPoJE:

1. *$A^2 \sim E$ (je to involuce);*
2. $\operatorname{tr} A = 0$*;*
3. *$w = -1$.*

Důkaz
Pišme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Pak $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)\cdot b \\ (a+d)\cdot c & bc+d^2 \end{pmatrix}$.

„1. $\implies$ 2.“: $A^2 \sim E$ máme, chceme $\operatorname{tr} A = a + d = 0$. Předpoklad nám dává $(a+d)\cdot b = 0 = (a+d)\cdot c$. Pro spor $(a+d) \neq 0$. Pak $b = c = 0$ a $A = \operatorname{diag}(a,d)$, tedy $\operatorname{diag}(a^2,d^2) \sim \operatorname{diag}(1,1)$, tedy $a^2 = d^2$, tj. $a = \pm d$. Takže buď $a + d = 0$ nebo $A \sim E$. $\lightning$.

„2. $\implies$ 1.“: předpokládáme $a + d = 0$. Pak ale $A^2 = \operatorname{diag}(a^2+bc, bc+d^2) \overset{a=-d}{=} \operatorname{diag} a^2 + bc, a^2 + bc \sim E$.

„2. $\Leftrightarrow$ 3.“: $w = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{D}}{\operatorname{tr} A - \sqrt{D}}$, tedy pro $\operatorname{tr} A = 0$ je $w = -1$, a pokud $w = -1$, pak $\operatorname{tr} A + \sqrt{D} = -\operatorname{tr} A + \sqrt{D}$, tedy $\operatorname{tr} A = -1$. (Přitom $D = (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A = -4\det A \neq 0$.) □

Důsledek
Stará definice involuce sedí s tou novou.

2.6 Parabolická involuce

Poznámka
Parabolická involuce odpovídá singulární matici A, která splňuje $\operatorname{tr} A = 0$.

Poznámka

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \implies c = \frac{-a^2}{b}.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a^2 & ba \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a^2 & ba \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot (ax_0 + bx_1) \\ -a \cdot (ax_0 + bx_1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

Důsledek

Tedy parabolická involuce zobrazuje všechny body do jednoho bodu.

Poznámka

Klasifikace involucí na $\mathbb{R}P^1$ podle Jordanova tvaru:

- $J_A \sim \operatorname{diag}(1, -1) \implies p_A(\lambda) = \lambda^2 + \det A = \lambda^2 - a^2$, tedy 2 reálné samodružné body, tj. hyperbolická involuce;
- $J_A = \operatorname{diag}(\lambda, \overline{\lambda}) \implies p_A(\lambda) = \lambda^2 + \det A = \lambda^2 + a^2$, tedy 2 imaginární body, tj. eliptická involuce.
- $J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tj. parabolická involuce.

3 Projektivity na $\mathbb{R}P^2$

Například (Známé projektivity)

Všechny eukleidovské shodnosti. Všechny afinity (násobení bodu v $\mathbb{R}^2$ regulární maticí). Tj. i stejnolehlosti.

Poznámka (Působení projektivity na přímku)

Nechť je dána projektivita dána maticí A (3×3 regulární). Na bodech $x \mapsto Ax$. Na přímkách tedy $p^T \mapsto p^T A^{-1}$, protože projektivita zachovává incidenci.

Důsledek

Projektivita na $\mathbb{R}P^2$ má samodružné body a samodružné přímky. (A jsou to vlastní vektory matice A^{-T}.)

Věta 3.1

Nechť A má n různých vlastních čísel. Označme $v_1, \ldots, v_n$ vlastní vektory A (odpovídající $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$) a $u_1, \ldots, u_n$ vlastní vektory A^T (odpovídající stejným $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$). Pak pro $i \neq j : \langle u_j, v_i \rangle = 0$.

Důkaz

$$\lambda_j \cdot \langle u_j, v_i \rangle = \lambda_j \mathbf{u}_j^T \cdot \mathbf{v}_i = (\lambda_j \mathbf{u}_j)^T \cdot \mathbf{v}_i = (A^T \cdot \mathbf{u}_j)^T \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_j^T \cdot A \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_j^T \cdot (\lambda_i \mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{u}_j^T \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_i \cdot \langle u_j, v_i \rangle \stackrel{i \neq j}{\Longrightarrow} \langle u_j$$

□

Důsledek
Jsou-li $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ samodružné přímky a $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n$ samodružné body projektivity, pak $i \neq j \implies \mathbf{V}_i \in \mathbf{u}_j$.

Definice 3.1 (Silně a slabě samodružná)
Samodružná přímka je silně samodružná, pokud se každý její bod zobrazí sám na sebe, a slabě samodružná v opačném případě.

Samodružný bod je silně samodružný, pokud se každá jím procházející přímka zobrazí sama na sebe, a slabě samodružný v opačném případě.

Poznámka
Přímka/bod je silně samodružná/-ý právě tehdy, pokud příslušný vlastní podprostor má dimenzi $\geqslant 2$ (tj. existují 2 lineárně nezávislé vlastní vektory).

3.1 Klasifikace projektivit na $\mathbb{R}P^2$

Poznámka (Hrubá klasifikace)
Jordanovy buňky mohou být buď 3, 2 nebo 1.

Poznámka (Podpřípady)
3 buňky:

- $J_{1a} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (3 různá reálná vlastní čísla). $\implies$ 3 slabě samodružné body a 3 slabě samodružné přímky.
- $J_{1b} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_3)$, kde λ_1 je komplexní číslo, které není reálné, a λ_2 je reálné číslo. Je podobná s maticí $\mathrm{diag}(R_\varphi, \lambda_2)$, rotace + stejnolehlost (= spirální podobnost). 1 slabě samodružný bod a 1 slabě samodružná přímka.
- $J_{1c} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) \sim \mathrm{diag}(\lambda_1', 1, 1)$. Jeden silně a jeden slabě samodružný bod, jedna silně a jedna slabě samodružná přímka. Toto zobrazení je perspektivní (nebo také středová) kolineace.
- $J_{1d} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) \sim E$ je identita.

2 buňky:

- $J_{2a} = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \lambda\right)$, kde $\lambda \neq 1$. 2 slabě samodružné přímky a 2 slabě samodružné body. Je to stejnolehlost složená s elací (tj. s osovou afinitou, kde směr je rovnoběžný s osou).
- $J_{2b} = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, 1\right)$. 1 silně samodružná přímka a jeden silně samodružný bod.

1 buňka:

- $J_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (to je jediná až na podobnost matice se 3 Jordanovy buňky). Jeden slabě samodružný bod a jedna slabě samodružná přímka.

TODO? (definice bilineární formy; antisymetrické a symetrické BL formy; (jednoznačný) rozklad na symetrickou a antisymetrickou část; kvadratická forma (g_2) určená BL formou g neboli její symetrickou částí g_s; zpětná rekonstrukce g_s z g_2; polární báze (to je ta, ve které je matice kvadratické formy diagonální); Sylvestrův zákon setrvačnosti; signatura; Sylvestrovo kritérium; regulární matice má počet nul v signatuře nulový a opačně)

Definice 3.2 (Vrchol symetrické bilineární formy)

Vrchol symetrické bilineární formy g na $\mathbb{R}^n$ je množina $V(g) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n | \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$.

Poznámka

Ekvivalentně $g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$. Maticově $\forall \mathbf{v} : \mathbf{u}^T G \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}^t \cdot G = \mathbf{o}$ nebo $G \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}$.

Čili $V(g) = \operatorname{Ker} G$.

4 Kvadriky

Definice 4.1 (Kvadrika)

Kvadrika v $\mathbb{R}P^n$ určená kvadratickou formou g_2 (na $\mathbb{R}^{n+1}$) je množina $Q_g := \{\langle \mathbf{u} \rangle \in \mathbb{R}P^n | g_2(\mathbf{u}) = 0\}$.

Například

TODO?

$$G = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

je formálně reálná kuželosečka (nemá reálné body).

TODO?

Důsledek
Kvadrika na $\mathbb{R}P^n$ je dána symetrickou maticí $(n+1) \times (n+1)$ určenou až na násobek $\neq 0$.

Důsledek
Kvadrika v $\mathbb{R}P^n$ je určena symetrickou maticí 3×3, tedy 6 čísly, až na násobek, tedy o jedno číslo méně, tj. 5 čísly.

Důsledek
$X = \langle \mathbf{x} \rangle \in Q_g \Leftrightarrow x^T \cdot G \cdot x = 0$, tedy zadání 5 bodů je stejné jako zadání 5 lineárních rovnic (o 6 neznámých).

Definice 4.2 (Regulární kvadrika, singulární kvadrika)

Kvadrika je regulární/singulární, pokud její matice vůči libovolné bázi je regulární/singulární.

Poznámka
To je ekvivalentní s nulou/nenulou v počtu nul v signatuře matice.

Definice 4.3 (Vrchol kvadriky)

Vrchol kvadriky je množina $V(Q) := \{X | \mathbf{x} \in V(g) = \operatorname{Ker} G\}$.