Příklad (a)
Spočtěte, nebo dokažte, že limita neexistuje

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\log\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n}-\log 2\right)$$

Řešení
Upravíme do tvaru

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{4}{(2n)^2}}\left(\log\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{2}\right)-\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2n}\right)^2}\left(\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\frac{1}{2n}\right).$$

Můžeme si všimnout, že kdybychom mohli počítat s funkcí, kde bychom nahradili $\frac{1}{2n}=x(\to 0)$, tak se nám výpočet výrazně zjednoduší:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2}\left(\log\left(1+x\right)-x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{4x^2}.$$

Logaritmus je v 1 spojitý, tedy jednoduchým použitím aritmetiky limit a věty o složené funkci dostaneme $\log(1+x)-x\xrightarrow{x\to 0}\log(1+0)-0=0$, dále zřejmě $4x^2\xrightarrow{x\to 0}0$, z aritmetiky derivací a známých derivací $\left(4x^2\right)'=4\left(x^2\right)'=8x$ a z AD, ZD a derivace složené funkce $(\log(1+x)-x)'=(1+x)'\cdot\log'(1+x)-x'=1\cdot\frac{1}{1+x}-1$. Tedy k tomu, abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo, nám schází dokázat existenci (a spočítat) limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)}{8x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{8+8x}\overset{\text{AL}}{=}\frac{-1}{8+8\cdot 0}=-\frac{1}{8}.$$

Tedy podle l'Hospitalova pravidla $\lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{1}{8}$. Tedy podle Heineho věty pro libovolnou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nenabývající 0 a jdoucí k nule, tedy i pro naši posloupnost $0\neq\frac{1}{2n}\to 0$, platí $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{1}{8}$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\log\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n}-\log 2\right)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2n}\right)=-\frac{1}{8}$$

Příklad (b)
Spočtěte, nebo dokažte, že limita neexistuje

$$\lim_{x\to 3}(x^2+x-11)^{\frac{1}{x^2-2x-3}}.$$

Řešení
Přepíšeme si výraz do tvaru

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 3}\exp\left(\log\left(x^2+x-11\right)\cdot\frac{1}{x^2-2x-3}\right)=\\
&=\lim_{x\to 3}\exp\left(\frac{\log\left((x^2+x-12)+1\right)}{x^2+x-12}\cdot\frac{x^2+x-12}{x^2-2x-3}\right)=\\
&=\lim_{x\to 3}\exp\left(\frac{\log\left((x^2+x-12)+1\right)}{x^2+x-12}\cdot\frac{(x+4)(x-3)}{(x+1)(x-3)}\right)=\\
&=\lim_{x\to 3}\exp\left(\frac{\log\left((x^2+x-12)+1\right)}{x^2+x-12}\cdot\frac{x+4}{x+1}\right).
\end{aligned}$$

Dále můžeme zjistit, jakou limitu má „vnitřní“ funkce

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{\log\left(x^2+x-12+1\right)}{x^2+x-12}\cdot\frac{x+4}{x+1}.$$

Víme, že $\frac{\log(y+1)}{y}\xrightarrow{y\to 0}1$, $x^2+x-12\xrightarrow{x\to 3}0$ a $x^2+x-12=0$ právě tehdy, když $x=3$ nebo $x=4$ (tj. můžeme zvolit prstencové okolí 3, na kterém x^2+x-12 nenabývá 0), tudíž můžeme použít větu o limitě složené funkce s podmínkou (P) na limitu

$$\lim_{x\to 3}\frac{\log\left(x^2+x-12+1\right)}{x^2+x-12}\overset{VoLSF(P)}{=}1$$

a triviální aritmetikou limit dostaneme

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+4}{x+1}=\frac{3+4}{3+1}=\frac{7}{4}.$$

Tedy (jelikož obě limity existují a nevzniká nedefinovaný výraz) z aritmetiky limit vyplývá

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{\log\left(x^2+x-12+1\right)}{x^2+x-12}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{x+4}{x+1}=1\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{4}.$$

Jelikož je exponenciela spojitá v bodě $\lim_{x\to 3}f(x)=\frac{7}{4}$, můžeme využít větu o složené funkci s podmínkou (S) a dostaneme:

$$\lim_{x\to 3}\exp\left(f(x)\right)=\lim_{y\to 7/4}\exp(y)=\exp\left(\frac{7}{4}\right)=e^{\frac{7}{4}}.$$

Příklad (c)
Nechť jsou dány funkce

$$f(x) = x + \cos x \sin x, \qquad g(x) = e^{\sin x}(x + \cos x \sin x).$$

Ukažte, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, ale není pravda, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Který předpoklad l'Hospitalova pravidla není splněn?

Řešení
Jelikož obor hodnot $\sin x$ i $\cos x$ je interval $[-1, 1]$, obor hodnot $\sin x \cos x$ je podmnožinou $[-1, 1]$, tedy

$$f(x) = x + \cos x \sin x > x - 1 \underset{\text{triviálně}}{\overset{x\to\infty}{\longrightarrow}} \infty.$$

Tedy podle věty o andělovi $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Obdobně jelikož obor hodnot $\forall x : \sin x \geq -1$ a exp je rostoucí (a obor hodnot $\sin x \cos x$ je podmnožinou $[-1, 1]$ stejně jako výše), tak

$$g(x) = e^{\sin x}(x + \cos x \sin x) \geq e^{-1}(x - 1) \underset{\text{triviálně}}{\overset{x\to\infty}{\longrightarrow}} e^{-1} \cdot \infty = \infty,$$

tedy podle věty o andělovi $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

Nyní podle aritmetiky derivací AD, derivace složené funkce DSF, základních derivací ZD ($(\exp x)' = \exp x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ a $x' = 1$), spojitosti exponenciely (používané v DSF) a Pythagorovy věty PV ($\forall x : \sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

$$\begin{aligned}
g'(x) &\overset{\text{AD}}{=} \left(e^{\sin x}\right)' (x + \sin x \cos x) + e^{\sin x}(x + \sin x \cos x)' \overset{\text{AD, DSF}}{=} \\
&= (\sin x)' \exp'(\sin x) \cdot (x + \sin x \cos x) + e^{\sin x}\left(x' + (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)'\right) \overset{\text{ZD}}{=} \\
&= \cos(x) \cdot e^{\sin x}(x + \sin x \cos x) + e^{\sin x}\left(1 + \cos^2 x - \sin^2 x\right) \overset{\text{PV}}{=} \\
&= \cos(x) \cdot e^{\sin x}(x + \sin x \cos x) + e^{\sin x} \cdot 2\cos^2 x = \\
&= \cos(x) \cdot e^{\sin x}(x + \sin x \cos x + 2\cos x).
\end{aligned}$$

Tedy funkce $g'(x)$ nabývá na libovolném (prstencovém) okolí ∞ hodnoty 0 (ve všech bodech $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ je totiž $\cos x = 0$), tudíž výraz $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ není definován na žádném (prstencovém) okolí ∞ a limita tohoto výrazu neexistuje (což je zároveň podmínka l'Hospitalova pravidla, která nebyla splněna).

Příklad (derivaceZPisemek, 6.)
Určete derivaci a jednostranné derivace funkce f ve všech bodech definičního oboru, kde existují.

$$f(x) = \max\left\{1, e^{\sin x}\right\}$$

Řešení
Derivace konstanty je rovna 0, tj. $1' = 0$. Derivace složené funkce, spojitost exp a známé derivace ($\exp' = \exp$ a $\sin' = \cos$) nám říkají, že $\left(e^{\sin x}\right)' = \sin' x \exp'(\sin x) = \cos x e^{\sin x}$. Tedy nám stačí zjistit, kdy je $f(x)$ rovno které z těchto funkcí, a vyřešit „přechodové" body.

Řešíme tedy, kdy $1 \gtreqless e^{\sin x}$, „zlogaritmováním" (log je rostoucí, tedy nezmění operátor nerovnosti) obou stran dostaneme $0 \gtreqless \sin x$. Z vlastností sin víme, že:

$$\begin{cases} 0 < \sin x \implies f(x) = e^{\sin x} & \text{když } x \in \bigcup\left\{(2k\pi; 2k\pi + \pi)\,|k \in \mathbb{Z}\right\} \\ 0 = \sin x \implies f(x) = e^{\sin x} = 1 & \text{když } x \in \{k\pi|k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 > \sin x \implies f(x) = 1 & \text{když } x \in \bigcup\left\{(2k\pi - \pi; 2k\pi)\,|k \in \mathbb{Z}\right\} \end{cases}$$

Derivace zprava a zleva v bodech $k\pi$ určíme snadno ze spojitosti obou funkcí ($\exp(\sin x)$ [složení dvou spojitých funkcí] a 1), protože víme, že pak stačí najít limity f' v daných bodech. $\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x \to a} 0 = 0$, tedy limity derivace f' v bodech $2k\pi$ zleva a v bodech $(2k-1)\pi$ zprava jsou 0.

Ze spojitosti $\cos x \cdot \exp(\sin x)$ (spojitá krát složení spojitých) víme, že $\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x \to a} \cos x \cdot \exp(\sin x) = \cos a \cdot \exp(\sin a)$, tedy v bodech $2k\pi$ zprava je limita derivace $\cos(2k\pi) \cdot \exp(\sin(2k\pi)) = 1 \cdot \exp^0 = 1$ a v bodech $(2k+1)\pi$ zleva je $\cos((2k+1)\pi) \cdot \exp(\sin((2k+1)\pi)) = -1 \cdot \exp^0 = -1$.

$$\begin{cases} f'(x) = \cos x e^{\sin x} & \text{když } x \in \bigcup\left\{(2k\pi; 2k\pi + \pi)\,|k \in \mathbb{Z}\right\} \\ f'_+(x) = 1 \wedge f'_-(x) = 0 & \text{když } x \in \{2k\pi|k \in \mathbb{Z}\} \\ f'_+(x) = 0 \wedge f'_-(x) = -1 & \text{když } x \in \{2k\pi + \pi|k \in \mathbb{Z}\} \\ f'(x) = 0 & \text{když } x \in \bigcup\left\{(2k\pi - \pi; 2k\pi)\,|k \in \mathbb{Z}\right\} \end{cases}$$

Příklad (derivaceZPisemek, 17.)
Určete derivaci a jednostranné derivace funkce f ve všech bodech definičního oboru, kde existují.

$$f(x) = \max\left\{x(x-1)^2 + x, x\right\}$$

Řešení
Zajímá nás tedy, kdy $x(x-1)^2 + x \gtreqless x \Leftrightarrow x(x-1)^2 \gtreqless 0$. Jelikož $(x-1)^2 \geq 0$, tak kromě bodu $x = 1$, kde, jak vidíme, nastane rovnost i v předchozí nerovnici, můžeme tímto výrazem bez změny relace vydělit předchozí rovnici: $x \gtreqless 0$:

$$\begin{cases} x < x(x-1)^2 + x \implies f(x) = x(x-1)^2 + x & \text{když } x \in (0,1) \cup (1,\infty) \\ x = x(x-1)^2 + x \implies f(x) = x(x-1)^2 + x = x & \text{když } x = 0 \vee x = 1 \\ x > x(x-1)^2 + x \implies f(x) = x & \text{když } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$x' = 1$ je známá derivace a $(x(x-1)^2 + x)' \overset{\text{AD}}{=} x'(x-1)^2 + x\left((x-1)^2\right)' + x' \overset{\text{AD, ZD, DSF}}{=} (x-1)^2 + x \cdot 2(x-1) \cdot (x-1)' + 1 \overset{\text{ZD}}{=} x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 2x + 1 = 3x^2 - 4x + 2$ dostaneme z aritmetiky derivací AD, derivace složené funkce DSF (+ faktu, že x^2 je spojitá) a známé derivace ZD $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{N}$.

Jediným „přechodovým“ bodem je 0, kde ze spojitosti x je $f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} 1 = 1$ a ze spojitosti polynomů a věty o limitě složené funkce s podmínkou (S) $f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} 3x^2 - 4x + 2 = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 = 2$. Tedy:

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 - 4x + 2 & \text{když } x > 0 \\ f'_+(x) = 2 \wedge f'_-(x) = 1 & \text{když } x = 0 \\ f'(x) = 1 & \text{když } x < 0 \end{cases}$$

Příklad (limityFciZPisemek, 36.)
Vypočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x}$$

Řešení
Převedeme funkci, ze které počítáme limitu, do tvaru (jelikož počítáme limitu zleva v 1 a rostoucí funkce ($2x$ a e^{2x}) nabývají na intervalu $(-\infty, 1]$ svého maxima v bodě 1, nedostali jsme rozdělením odmocniny nedefinovaný výraz):

$$\frac{e\sqrt{\frac{1-e^{2x-2}}{2-2x}\cdot(2-2x)}}{\arccos x} = e\cdot\sqrt{\frac{1-e^{2x-2}}{2-2x}}\cdot\frac{\sqrt{2-2x}}{\arccos x} = e\cdot\sqrt{\frac{e^{2x-2}-1}{2x-2}}\cdot\frac{\sqrt{2-2x}}{\arccos x}$$

Víme, že $\frac{e^y-1}{y}\xrightarrow{y\to 0} 1$ a zřejmě $y(x)=2x-2\xrightarrow{x\to 1} 0$ je prostá, tedy můžeme použít větu o limitě složené funkce s podmínkou (P) a získat

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x-2}-1}{2x-2}=1,$$

což nám (vzhledem k spojitosti $\sqrt{\ }$ v bodě jedna) umožňuje použít znovu větu o limitě složené funkce tentokrát s podmínkou (S) a zjistit, že

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{e^{2x-2}-1}{2x-2}}=\sqrt{1}=1.$$

Jelikož víme, že limita v bodě existuje tehdy, pokud existují limity zprava a zleva v tomto bodě, a všechny tři limity jsou pak shodné, tak:

$$\lim_{x\to 1-}\sqrt{\frac{e^{2x-2}-1}{2x-2}}=\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{e^{2x-2}-1}{2x-2}}=1.$$

Funkce $\sqrt{2-2x}$ i $\arccos x$ jsou spojité zleva v bodě 1, tedy obě jdou zleva v 1 ke svojí funkční hodnotě $2-2\cdot 1=\arccos 1=0$. Zároveň z aritmetiky derivací, derivace složené funkce a známých limit víme, že $\left(\sqrt{2-2x}\right)'=(2-2x)'\cdot(2-2x)^{1/2-1}=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2-2x}}$ a $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Tudíž po spočítání

$$\lim_{x\to 1-}\frac{-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2-2x}}}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 1-}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 1-}\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{(1-x)(1+x)}{1-x}}=\lim_{x\to 1-}\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+x},$$

což můžeme (pomocí faktu, že odmocnina je spojitá v bodě 2, aritmetiky limit a faktu, že pokud existuje oboustranná limita, existuje i limita zleva a rovná se jí) dopočítat na $\lim_{x\to 1-}\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+1}=2$, můžeme aplikovat l'Hospitalovo pravidlo a dostaneme

$$\lim_{x\to 1-}\frac{\sqrt{2-2x}}{\arccos x}=\lim_{x\to 1-}\frac{-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2-2x}}}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=2.$$

Nakonec tedy můžeme aritmetikou limit spočítat ($\lim_{x\to\text{cokoliv}} e=e$)

$$\lim_{x\to 1-}\frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\arccos x}=\lim_{x\to 1-} e\cdot\sqrt{\frac{e^{2x-2}-1}{2x-2}}\cdot\frac{\sqrt{2-2x}}{\arccos x}=e\cdot 1\cdot 2=2e.$$