

# Organizační úvod

Přednáška bude asi touto formou celý semestr.

## *Pozor*

Bude důležitá zpětná vazba (přímo přes Zoom, kde bude snad nějaký cvičící, nebo přes diskuzi k předmětu v Moodle, či kvízy (od 5. 10.)).

## *Poznámka*

Číst mail a popis předmětu na webu.

## *Poznámka (Organizace)*

2krát týdně přednáška na Zoomu. K zápočtu jsou třeba 2 věci:

Průběžná práce (nejlépe přečíst skriptu už před přednáškou, na dotazy bude přihlíženo) = kvízy (od 5. 10., 3 / 4 otázky a,b,c, za jeden kvíz až 2 body do bodovacího systému) + domácí úkoly (zadávány se zpožděním = další týden, odevzdává se ve středu, za jeden úkol až 8 bodů), počítá se 10 nejlepších kvíz + úkol (minimum pro zápočet je 60%).

Aktivní účast alespoň na 9 cvičeních. Je to záměrně trochu neurčité (optimálně připojit se na cvičení a počítat příklady a interagovat s cvičícím (v menších skupinkách)), dá se i bez toho (např. méně interaktivně) podle domluvy se cvičícími.

Odevzdávání bude elektronické, většinou v Moodle. Pro skenování přes mobil používat aplikace jako Adobe scan / Genius scan. Nepoužívejme aplikace na automatické výpočty (1. je potřeba i postup, 2. děláme to pro sebe), ale můžeme je používat pro experimenty, ověření nebo představu.

Sociální stránka, spolupracujme (viz cvičení, klidně si na cvičeních můžete skupinky domluvit), ale úkol zkusme vypracovat každý sám.

Zkouška je standardně nějakých 5 termínů + jeden záchranný v září?, kdy bude 3hodinový test, požadavky ke zkoušce budou na webu. Midtermy (konec listopadu a půlka prosince) budou takové menší zkoušky, které se možná budou počítat ke zkoušce (minimálně si to můžeme vyzkoušet nanečisto).

## *Poznámka (Materiály)*

- Skriptu (Barto & Tůma, na webu), kapitola 1-7
- Cvičení, přímočaré úlohy (nejen mechanicky řešit)
- Přednášky nejsou směrodatný studijní materiál!

*Pozor*

Přednášky nejsou směrodatný studijní materiál! (Protože jejich cílem je pomoci nám látku pochopit, ne přečíst skriptu. Navíc matematiku musí pochopit každý sám (doporučit přečíst text J. Hrnčíře <https://msekcce.karlin.mff.cuni.cz/~smid/pmwiki/uploads/Main/vzkazHrncir.pdf>).)

# 1 Opakování (?)

- Analytická geometrie
- Komplexní čísla
- Zobrazení (hlavně terminologie)

*Poznámka* (Co je lineární algebra)

Abstraktní studium rovných útvarů a hezkých zobrazení mezi nimi.

Rovný útvar: Přímka, rovina, 3D prostor  $\mathbb{R}^3 \equiv \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ .

Hezkých zobrazení:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

$$(x, y) \longrightarrow \text{otočení } (x, y) \text{ o } \frac{\pi}{6} \tag{2}$$

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Abstraktní: Časem dojdeme k tomu, že nás zajímají pouze vlastnosti.

*Poznámka* (Proč lineární algebra)

- Často se vyskytuje na různých místech matematiky
- Geometrie
- Matematická analýza (na limitním okolí bodu jsou funkce většinou také rovné)
- Kvantová teorie (a celkově fyzika)
- Trisekce úhlu
- Z historie – nalezení planetky Ceres

- Moderní aplikace – komprese dat (JPEG, ...), kódování a šifrování (samoopravné kódy, RSA)

## 1.1 Analytická geometrie

*Poznámka* (Názvosloví) • Body vs. vektory: bod hranatou závorkou, vektor (jako rozdíl bodů) kulatou  $\leftarrow$  je to skoro to samé, budeme uvažovat jen vektory (body jsou dané polohovými vektory)

- Operace s vektory: sčítání (sečteme po složkách), násobení skalárem (vynásobíme po složkách).
- Souřadnicové systémy (často nejsou kartézské)

*Poznámka* (Jak zadat přímku v  $\mathbb{R}^2$ ) • Bod a směrový vektor (parametricky)

- 2 různé body
- Rovnicí přímky:  $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$   $a, b, c \in \mathbb{R}$  (implicitně)

*Poznámka* (Jak zadat rovinu v  $\mathbb{R}^3$ ) • Bod a 2 vektory s jiným směrem (parametricky)

- 3 různé body
- přímka a bod, který na ní neleží
- Rovnicí roviny:  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  (implicitně)

*Poznámka* (Jak zadat rovinu v  $\mathbb{R}^3$ ) • Bod a směrový vektor

- 2 různé body
- 2 roviny (soustava 2 lineárních rovnic)

## 1.2 Zobrazení

$X, Y$  množiny

$f : X \longrightarrow Y$   $x \in X \longrightarrow |f| \longrightarrow f(x) \in Y$

*Například*

$$X = \{\text{Různé symboly}\}, Y = \{A, B, \dots, Z\}$$

- Zadání pomocí definice:  $f(x) := \text{První písmeno tvaru } x$

- Zadání pomocí tabulky: tabulka (jeden řádek symboly ( $x$ ), druhý písmena ( $f(x)$ ))
- Zadání pomocí grafu: Graf (jedna osa symboly, druhá písmena)

### Definice 1.1 (Rovnost zobrazení)

$$f : X \longrightarrow Y = g : M \longrightarrow Y \Leftrightarrow$$

### Definice 1.2 (Prosté (= injektivní))

$$\forall x, y \in X, x \neq y : f(x) \neq f(y)$$

### Definice 1.3 (Na (= surjektivní))

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$

### Definice 1.4 (Vzájemně jednoznačné (= bijektivní))

Prosté a na.

### Definice 1.5 (Skládání)

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z, g \circ f(x) = g(f(x))$$

Dále obraz zobrazení je množina NA kterou se zobrazuje, obraz množiny v zobrazení je množina, na kterou zobrazí zobrazení prvky dané množiny. Vzor obdobně (z které zobrazuje, ).

### Definice 1.6 (Inverze)

$f : X \longrightarrow Y$  má inverzi  $g : Y \longrightarrow X$ , pokud  $f \circ g = id_Y$  (identita na  $Y$ )

### Věta 1.1

$f$  má inverzi, právě když je bijektivní

┌

*Důkaz*

Nechť má inverzi, když není na, tak v  $Y$  přebývají prvky, které se nikam nezobrazují, když není prosté, tak chybí (TODO zlepšit popis).

└

Nechť je bijektivní, pak zřejmě má inverzi.

□

## 2 Soustavy lineárních rovnic

6 motivačních příkladů v části 2.1 skript

### Definice 2.1 (lineární rovnice)

Lineární rovnice o  $n$  neznámých s reálnými koeficienty je rovnice tvaru  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ , kde  $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$  jsou koeficienty a  $x_1, \dots, x_n$  jsou neznámé.

*Pozor* (Jak vypadá definice)

- Psát celé věty!
- Vysvětlit použité symboly!
- Nezahlcovat definice balastem!

### Definice 2.2 (Soustava lineárních rovnic (SLR))

Soustavou  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých (s reálnými koeficienty) je soustava tvaru:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots + \dots + \dots \cdot x_n &= \dots a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m, \end{aligned}$$

kde každý řádek je ve smyslu předchozí definice.

### Definice 2.3 (Aritmetické vektory (nad $\mathbb{R}$ ))

Aritmetickým vektorem rozumíme uspořádanou  $n$ -tici reálných čísel. Zapisujeme ho jako:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

### Definice 2.4 (Množina řešení SLR)

Množina řešení SLR ve smyslu definice výše je množina:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_i1x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \forall 1 \leq i \leq m \right\}$$

### Definice 2.5 (Operace s (aritm.) vektory ( $n$ fixní))

$v, w \in \mathbb{R}^n \rightarrow v + w$  sčítání po složkách

$t \in \mathbb{R} \rightarrow t \cdot w$  násobení po složkách

$-v := (-1) \cdot v$

$v - w := v + (-w)$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

### Definice 2.6 (Elementární úpravy SLR)

Elementární úpravy dané SLR jsou:

1. Prohození pořadí 2 rovnic
2. Vynásobíme jednu rovnici číslem  $t \in \mathbb{R} - \{0\}$
3. Přičteme  $t$ -násobek jedné rovnice ( $t \in \mathbb{R}$ ) k jiné rovnici.

### Tvrzení 2.1

*Elementární úpravy jsou ekvivalentními úpravami.*

┌  
Důkaz  
Skripta

□

*Poznámka*

1. lze nahradit kombinací druhých dvou.

*Pozor*

V přednášce jsou tvrzení (věty, lemmata, ...). Typicky mají strukturu: Pokud platí ...předpoklad..., pak platí ...závěr....

### Definice 2.7 (Gaussova eliminace)

Algoritmus na úpravu matice do odstupňovaného tvaru za pomoci elementárních úprav.

### Definice 2.8 (Pivot)

První nenulový prvek v řádku v odstupňovaném tvaru.

Pokud je pivot až ve „vektoru“, SLR nemá řešení.

Počet pivotů je počet bázevých proměnných, počet neznámých - počet pivotů je počet

volných proměnných (neboli parametrů).

### Definice 2.9 (Odstupňovaný tvar matice)

Matice  $m \times n$  je v odstupňovaném tvaru, jestliže

$\exists r \in \mathbb{N}, r < m$ , že řádky  $r + 1, \dots, m$  jsou nulové a

$k_1 < k_2 < \dots < k_r$ , kde  $k_i$  je index prvního nenulového prvku v  $i$ -tém řádku.

### Definice 2.10 (Hodnost matice)

Buď  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  matice. Potom  $\text{rank}(A) = r(A)$  je tzv. hodnost matice, tedy počet nenulových řádků v odstupňovaném tvaru matice.

#### Pozor

Počet nenulových řádků v odstupňovaném tvaru nezáleží na volbě algoritmu, kterým jsme se do OT dostali.

#### Poznámka

$\text{rank}(A) \leq m$  a  $\text{rank}(A) \leq n$

#### Poznámka (Geometrický význam)

Řádky popisují jednotlivé rovnice, netriviální rovnice má za množinu řešení nadrovinu v  $\mathbb{R}^n$ , řádky popisují proměnné, významově jsou lineárními kombinacemi.

## 3 Tělesa

Otázka: V jakých číselných oborech můžeme řešit soustavy lineárních rovnic?

#### Poznámka (Těleso budeme zavádět jako)

Uvažujme množinu „čísel“  $\mathbb{T}$  s binárními operacemi  $+, \cdot, +, \cdot : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ .

Pak  $(\mathbb{T}, +, \cdot)$  je těleso, pokud splňuje:...

#### Poznámka (Co musí splňovat?)

Uvažujme množinu  $\mathbb{T}$  s jednou binární operací  $\Delta : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ .

Budeme požadovat tyto vlastnosti:

(H1)  $\forall a, b, c \in \mathbb{T} : (a \Delta b) \Delta c = a \Delta (b \Delta c)$  (Asociativita)

(H2)  $\exists 0 \in \mathbb{T} \forall a \in \mathbb{T} : 0 \Delta a = a = a \Delta 0$  (Existence neutrálního prvku)

(H3)  $\forall a \in \mathbb{T} \exists (-a) \in \mathbb{T} : a \Delta (-a) = 0 = (-a) \Delta a$  (Existence opačného / inverzního prvku)

### Tvrzení 3.1

Ať  $(\mathbb{T}, \Delta)$  splňuje axiomy (H1), (H2), (H3). Pak pro každé  $a \in \mathbb{T}$  je prvek  $(-1)$  z (H3) určen jednoznačně.

┌

*Důkaz*

Předpokládejme, že pro prvek  $a \in \mathbb{T}$  existují prvky  $b, c \in \mathbb{T}$  splňující:

$$a \Delta b = 0 = b \Delta a \wedge a \Delta c = 0 = c = c \Delta a$$

Pak:

$$(b \Delta a) \Delta c \stackrel{(H1)}{=} b \Delta (a \Delta c)$$

$$c \stackrel{(H2)}{=} 0 \Delta c = b \Delta 0 \stackrel{(H2)}{=} b$$

$$b = c$$

└

□

*Poznámka* (Ještě často doplňujeme)

(H4)  $\forall a, b \in \mathbb{T} : a \Delta b = b \Delta a$

### Definice 3.1 (Těleso)

Tělesem (angl. field) rozumíme množinu  $\mathbb{T}$  s binárními operacemi  $+, \cdot : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ , které splňují tyto axiomy:

(S1)  $\forall a, b, c \in \mathbb{T} : (a + b) + c = a + (b + c)$

(S2)  $\exists 0 \in \mathbb{T} \forall a \in \mathbb{T} : a + 0 = a$

(S3)  $\forall a \in \mathbb{T} \exists (-a) \in \mathbb{T} : a + (-1) = 0$

(S4)  $\forall a, b \in \mathbb{T} : a + b = b + a$

(N1)  $\forall a, b, c \in \mathbb{T} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(N2)  $\exists 1 \in \mathbb{T} : a \cdot 1 = a$

(N3)  $\forall a \in \mathbb{T}, a \neq 0 \exists a^{-1} \in \mathbb{T} : a \cdot a^{-1} = 1$

(N4)  $\forall a, b \in \mathbb{T} : a \cdot b = b \cdot a$

(D)  $\forall a, b, c \in \mathbb{T} : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

(¬T)  $|\mathbb{T}| > 1$  (jinými slovy  $0 \neq 1$ )

*Například*

$(\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot), (\{0, 1\}, XOR, AND)$

### Tvrzení 3.2 (Další vlastnosti těles)

Je-li  $a, b \in \mathbb{T}, a \neq 0$ , pak  $a \cdot x + b = 0$  má v  $\mathbb{T}$  právě jedno řešení ( $x = \frac{-b}{a}$ ).

$$\forall a \in \mathbb{T} : a \cdot 0 = 0 \quad (a \cdot 0 + a \cdot 0 \stackrel{(D)}{=} a \cdot (0 + 0) \stackrel{(S2)}{=} a \cdot 0, \text{ odečteme dvakrát pomocí (S2)})$$



$$a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$$

$0 \neq 1$  (Vezměme libovolné  $a \in \mathbb{T}$ . Kdyby  $0 = 1$ , pak  $0 = 0 \cdot a = 1 \cdot a = a$ )

*Například*

Buď  $n > 2$  a  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Uvažujme násobení a dělení modulo. Potom  $\mathbb{Z}_n$  splňuje všechny axiomy kromě (4N), které splňuje pokud  $n$  je prvočíslo.

### Definice 3.2 (Charakteristika tělesa)

Nechť  $\mathbb{T}$  je těleso, čísla  $1, 2, 3, 4, \dots$  budeme značit součty  $1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, \dots$ . Charakteristikou tělesa budeme značit nejmenší číslo z  $1, 2, 3, 4, \dots$ , které je rovno 0. Pokud takové neexistuje je charakteristika rovna 0.

┌ *Například*

Char.  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$  je 0. Char.  $\mathbb{Z}_p$  je  $p$ .

### Tvrzení 3.3

*Je-li  $\mathbb{T}$  těleso, pak charakteristika  $\mathbb{T}$  je buď 0 nebo prvočíslo.*

┌ *Důkaz (Sporem)*

Předpokládejme, že char.  $\mathbb{T}$  je  $n \neq 0$  a  $n$  je složené číslo, tj.  $n = k \cdot l$ ,  $1 < k, l < n$ . Všimněme si<sup>a</sup>  $(1 + \dots + 1) = (1 + \dots + 1) \cdot (1 + \dots + 1)$  ( $n = k \cdot l$  v  $\mathbb{T}$ ). Z předpokladu  $n = 0$  v  $\mathbb{T}$ , tak  $0 = k \cdot l$  v  $\mathbb{T}$ ,  $k, l \neq 0$  a z vlastnosti těles . □

<sup>a</sup> $n, k$  a  $l$  jedniček.

## 3.1 Matice a operace s nimi

### Definice 3.3 (Matice nad tělesem)

Matice typu  $m \times n$  nad tělesem  $\mathbb{T}$  je obdélníkové schéma prvků  $\mathbb{T}$ ,  $m$  řádků,  $n$  sloupců.

*Poznámka (Speciální případy)*

$n = 1$  – sloupcový aritmetický vektor.

$m = 1$  – řádkový vektor.

*Poznámka (Operace)*

Podobně jako vektory lze matice sčítat a násobit prvkem z  $\mathbb{T}$ .

### Věta 3.4 (Vlastnosti operace)

$(A + B) + C = A + (B + C)$  Má-li jedna strana smysl ( $A, b, c$  stejného typu)

$$A + B = B + A, 0 + A = A$$

$$(s + t) \cdot A = s \cdot A + t \cdot A, (s \cdot t) \cdot A = s \cdot (t \cdot A), s \cdot (A + B) = s \cdot A + s \cdot B$$

### Definice 3.4 (Čtvercová matice)

Matice je čtvercová, pokud je typu  $n \times n$ ,  $n \geq 1$ .

┌

*Například*

Jednotková matice  $\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ .

Trojúhelníkové matice (horní tj.  $a_{ij} = 0 \forall i > j$  a dolní tj.  $a_{ij} = 0 \forall j > i$ ).

Diagonální (horní a dolní trojúhelníková zároveň)  $a_{ij} = 0 \forall j \neq i$ .

Permutační tj. v každém řádku a v každém sloupci je právě jedna 1, jinak 0.

└

### Definice 3.5 (Transponovaná matice)

Je-li  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , pak  $A^T = (b_{ij})_{n \times m}$ , kde  $b_{ij} := a_{ji}$ , je matice transponovaná.

### Definice 3.6 (Symetrická matice)

Matice  $A$  je symetrická, pokud je čtvercová a  $A = A^T$ .

### Definice 3.7 (Násobení matic)

Ať  $A, B$  jsou matice nad tělesem  $\mathbb{T}$ ,  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{jk})_{n \times p}$ . Potom  $AB = (\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk})_{m \times p}$

*Poznámka* (Proč násobení matic)

Uvažujme SLR. Dá se zapsat jako  $Ax = b$

*Poznámka* (Další pohledy na součin matic)

Sloupcový: sloupce výsledné matice jsou lineární kombinace sloupců první matice s koeficienty ze sloupců v druhé matici.

Řádkový pohled: totéž transponovaně.

Blokové násobení: můžeme násobit matice v maticích!

*Pozor*

$$AB \neq BA$$

$$(AB)C = A(BC) \text{ Má-li jedna strana smysl.}$$

$$(A+B)C = AC + BC, C(E+F) = CE + CF$$

$$\mathcal{I}A = A = A\mathcal{I}$$

$$s \in \mathbb{T}, s(AB) = (sA)B = A(sB)$$

## 3.2 Matice jako zobrazení

Budeme se zabývat speciálním případem maticového násobení, kdy druhá matice má šířku 1 (je to sloupcový vektor).

### Definice 3.8 (Zobrazení určené maticí)

Buď  $A$  pevně zvolená matice typu  $m \times n$  nad  $T$ . Zobrazením určeným maticí  $A$  rozumíme  $f_A : T^n \rightarrow T^m, x \rightarrow A \cdot x$

*Příklad*

Jak popsat zobrazení rotace  $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

┌

*Řešení*

Nejdříve vyzkoušíme na speciálních vektorech, např. vektorech tzv. kanonické báze  $\mathbb{R}^2$  :  $e_1 = (10)^T, e_2 = (01)^T$ :

$$r_\alpha(e_1) = (\cos \alpha \ \sin \alpha)^T$$

$$r_\alpha(e_2) = (-\sin \alpha \ \cos \alpha)^T$$

Následuje pozorování, že  $r_\alpha$  je tzv. lineární zobrazení:

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \forall t \in \mathbb{R} : r_\alpha(t \cdot v) = t \cdot r_\alpha(v)$$

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2 : r_\alpha(u + v) = r_\alpha(u) + r_\alpha(v)$$

Je-li  $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}$  obecný vektor, pak  $u = u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2$ . Tedy  $r_\alpha(u) = u_1 \cdot r_\alpha(e_1) + u_2 \cdot r_\alpha(e_2) = u_1 \cdot (\cos \alpha \ \sin \alpha)^T + u_2 \cdot (-\sin \alpha \ \cos \alpha)^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} (u_1 u_2)^T$

└

**Tvrzení 3.5** (Vlastnosti zobrazení určeného maticí)

Bud'  $A$  matice  $n \times m$  nad  $T$ ,  $f_A : T^n \rightarrow T^m$  jako výše,  $x, y \in T^n, s \in T$ . Pak platí

$$f_A(s \cdot x) = s \cdot f_A(x),$$

$$f_A(x + y) = f_A(x) + f_A(y)$$

┌  
Důkaz

$$f_A(s \cdot x) \stackrel{\text{DEF}}{=} A \cdot (s \cdot x) = x \cdot (A \cdot s) \stackrel{\text{DEF}}{=} s \cdot f_A(x)$$

$$f_A(x + y) \stackrel{\text{DEF}}{=} A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y \stackrel{\text{DEF}}{=} f_A(x) + f_A(y)$$

└

□

**Definice 3.9** (Prvky kanonické báze  $T^n$ )

Prvky kanonické báze  $T^n$  jsou vektory  $e_i = (0 \dots 010 \dots 0)^T \in T^n, i \in \{1, \dots, n\}$ .

Důsledek

$$f_A((x_1 \dots x_n)^T) = x_1 \cdot f_A(e_1) + \dots + x_n \cdot f_A(e_n) = (f_A(e_1) \mid \dots \mid f_A(e_n)) \cdot (x_1 \dots x_n)^T$$

Tedy pro  $A, B$  matice  $m \times n$  nad  $T$  platí  $(f_A = f_B) \Leftrightarrow (A = B)$ .

Poznámka (Další pozorování)

Splňuje-li nějaké zobrazení  $f : T^n \rightarrow T^m$  vlastnosti zobrazení daného maticí, pak je to zobrazení určené maticí.

**Tvrzení 3.6** (Skládání zobrazení určených maticí)

Mějme zobrazení  $f_A : T^n \rightarrow T^m$  a  $f_B : T^p \rightarrow T^p$ , dané maticemi  $A$  a  $B$ . Potom zobrazení  $f_A \circ f_B$  je dáno maticí  $A \times B$ .

┌  
Důkaz

Totíž pro libovolné  $x \in T^p$  platí

$$f_A \circ f_B(x) = f_A(f_B(x)) = f_A(B \cdot x) = A \cdot (B \cdot x) = (A \cdot B) \cdot x = f_{A \cdot B}(x)$$

└

□

*Příklad*

Složení otočení o úhly  $\alpha$  a  $\beta$ .

### 3.3 Soustavy lineárních rovnic podruhé (oddíl 4.5.1, skriptu)

Zvolme těleso  $T$ .

*Poznámka* (Vztah dvou řešení SLR)

$Ax = b$ ,  $Ay = b$ , potom

$$A(x - y) = Ax - Ay = b - b = 0$$

#### Definice 3.10 (Homogenní SLR)

Soustava rovnic tvaru  $A \cdot x = 0$  se nazývá homogenní.

*Poznámka*

SLR budeme řešit tak, že najdeme jedno řešení (nebo zjistíme, že žádné neexistuje) a poté budeme hledat řešení homogenní SLR, čímž můžeme podle poznámky výše už jednoduše získat všechna řešení původní rovnice.

#### Definice 3.11 (Jádro / nulový prostor)

Je-li  $A$  matice typu  $m \times n$ , pak

$$\{v \in T^n : A \cdot v = 0\} (= f_A^{-1}(0) = \{v : \text{vřeší } A \cdot x = 0\})$$

se nazývá jádrem (anglicky Kerner), nebo též nulovým prostorem, a značí se  $\text{Ker } A$ .

#### Věta 3.7

Máme-li SLR  $A \cdot x = b$  a známe-li jedno řešení  $v \in T^n$ , pak množina všech řešení je tvaru  $v + \text{Ker } A := \{v + w : w \in \text{Ker } A\}$ .

┌

*Důkaz*

Označme  $S = \{u \in T^n : A \cdot u = b\}$ . Chceme ukázat  $S = \{v + w : w \in \text{Ker } A\}$ .

$S \subseteq v + \text{Ker } A$ : Vezměme libovolné  $u \in S$ , tj.  $A \cdot u = b$ . Pak  $A \cdot (u - v) = 0$  (poznámka výše),  $w := u - v \in \text{Ker } A$ , tj.  $u = v + w \in v + \text{Ker } A$ .

$v + \text{Ker } A \subseteq S$ : Vezměme libovolné  $u \in v + \text{Ker } A$ , tj.  $u = v + w, w \in \text{Ker } A$ . Pak  $A \cdot u = A \cdot (v + w) = A \cdot v + A \cdot w = b + 0 = b$ , tj.  $u \in S$ . □

└

*Příklad*

Ukazovalo se jedno řešení SLR pomocí jádra. Jádro má tu výhodu, že má bázi (vektory s 1 v jedné proměnné a nulami jinde).

### **Definice 3.12** (Elementární matice)

SKRIPTA oddíl 4.2.3

## 3.4 Inverzní matice

*Poznámka* (Motivace)

$$A \cdot x = b \rightarrow x = A^{-1} \cdot b$$

Inverzní zobrazení (tedy  $f_A$  musí být prosté / na / bijekce).

### **Definice 3.13**

Buď  $A$  matice typu  $m \times n$  nad  $T$ . Pak:

- $A$  je zprava invertovatelná, pokud  $\exists X \in T^{n \times m} : A \cdot X = I_m$ .
- $A$  je zleva invertovatelná, pokud  $\exists Y \in T^{n \times m} : Y \cdot A = I_n$ .
- $A$  je invertovatelná, pokud  $n = m$  a existuje  $X \in T^{n \times n} : A \cdot X = I_n = X \cdot A$ .

┌ *Poznámka*

V posledním případě značíme  $X = A^{-1}$  a jednoduše se dokáže, že existuje nejvýše jedna  $A^{-1}$ .

### **Tvrzení 3.8** ((T4.67))

Buď  $A$  matice typu  $m \times n$  nad  $T$ . Potom následující je ekvivalentní:

- $A$  je zprava invertovatelná.
- $f_A : T^n \rightarrow T^m$  je na.
- Matice  $C$ , kterou dostaneme z  $A$  Gaussovou eliminací, má všechny řádky nenulové.
- $\text{rank}(A) = m$

┌ *Důkaz*

1  $\implies$  2: Předpoklad  $\exists X : A \cdot X = I_m$ . Vezměme  $b \in T^m$ , pak  $A(X \cdot b) = (AX)b = I_m \cdot b = b$

2  $\implies$  3: Předpoklad  $f_A$  je na ( $Ax = b$  má řešení  $\forall b$ ). Kdyby  $C$  měla nulový  $i$ -tý řádek, pak  $C \cdot x = e_i$  nemá řešení  $\implies Ax = e_i$  nemá řešení, .

3  $\implies$  1: Předpokládáme (3). Hledáme  $X$ :  $A \cdot X = I_m$ , čili  $A \cdot (x_1 | \dots | x_m) = (e_1 | \dots | e_m)$ , čili řešíme SLR. SLR upravíme  $(A|e_j) \sim \dots \sim (C|d_j) \implies C \cdot x_j = d_j$  má podle (3) řešení. □

└

*Důsledek*

Pokud je  $A \in T^{m \times n}$  invertovatelná zprava, pak  $n \geq \text{rank } A = m$ .

Pokud je navíc čtvercová, pak  $(A|I_n) \sim \dots \sim (I_n|A^{-1})$ , tedy  $A$  je invertovatelná.

### **Tvrzení 3.9** (Čtvercové matice a inverze)

*Buď  $A$  čtvercová matice řádu  $n$  nad  $T$ . Pak následující je ekvivalentní:  $A$  je invertovatelná zprava,  $A$  je invertovatelná zleva,  $A$  je invertovatelná.*

┌ *Důkaz*

(1  $\implies$  3): Viz důsledek výše.

(3  $\implies$  2): Triviální.

(2  $\implies$  1): Transpozice. (1  $\implies$  3). A transpozice znovu. □

└

*Poznámka* (Jak najdeme inverzi zleva)

Matici transponujeme a hledáme inverzi z prava. Nebo použijeme EŘÚ podobně jako u čtvercových.

### **Tvrzení 3.10** ((4.70))

*Buď  $A$  matice typu  $m \times n$  nad  $\mathbf{T}$ . pak NPJE (následující podmínky jsou ekvivalentní):*

1  $A$  je invertovatelná zleva,

2  $f_A : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^m$  je prosté,

3  $Ax = 0$  má právě jedno řešení  $x = 0$ ,

4 Matice  $C$  vzniklá z  $A$  Gaussovou eliminací má všechny sloupce bázové,

5  $\text{rank}(A) = n$ .

┌ *Důkaz*

(1  $\implies$  2): Předpoklad:  $\exists Y : Y \cdot A = I_n$ . Vezměme  $x, y \in \mathbf{T}^n$  takové, že  $f_A(x) = f_A(y)$ . Vynásobíme  $Y$  zleva:  $x = y$ .

(2  $\implies$  3): (3) je speciální případ (2).

(3  $\implies$  4): Předpokládejme, že neplatí (4). Pak dostáváme více řešení  $Ax = Cx = 0$  (pokud je  $i$ -tý sloupec nulový, pak za  $i$ -tou proměnnou lze dosadit cokoliv).

(4  $\implies$  1(5))  $C$  má čtvercovou „podmatici“ řádu  $n$ , můžeme upravovat tak, aby podmaticí  $C$  byla  $I_n$ . Součin elementárních matic měnících  $A$  na  $I_n$  je inverze zleva (s několika řádky navíc, je to přesně postup na hledání inverze zleva).

(5  $\implies$  4) Necháno na rozmyšlení. □

└

## 3.5 Regulární matice

### Definice 3.14 (Regulární matice)

Matice  $A$  nad  $\mathbf{T}$  je regulární, pokud  $f_A : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^m$  je bijekce.

### Věta 3.11 (V4.81 (+ T4.88))

10 (+1) ekvivalentních podmínek pro Regulární matice, viz skripta.

## 3.6 Inverzní matice k horním a dolním trojúhelníkovým maticím

### Tvrzení 3.12 (T4.98)

Buď  $A$  dolní trojúhelníková matice (tj. čtvercová) s nenulovými prvky na diagonále. Pak  $A$  je regulární a  $A^{-1}$  je dolní trojúhelníková. Měla-li na diagonále samé 1, pak  $A^{-1}$ , pak  $A^{-1}$  je má také. Podobně pro horní trojúhelníkové rovnice.

### Definice 3.15 (Vektorový prostor)

Buď  $\mathbb{T}$  těleso. Vektorový prostor nad tělesem  $\mathbb{T}$  je množina  $\mathbf{V}$  (množina vektorů) s operací sčítání na  $\mathbf{V}$  ( $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ ) a operací násobení skalárem ( $\mathbb{T} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ ), které splňují tyto axiomy:

$$\text{vS1 } \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V} : (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

$$\text{vS2 } \exists \mathbf{o} \in \mathbf{V} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} : \mathbf{o} + \mathbf{v} = \mathbf{v},$$

$$\text{vS3 } \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \exists (-\mathbf{v}) \in \mathbf{V} : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{o},$$



$$vS4 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} : \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$

$$vN1 \quad \forall a, b \in \mathbb{T} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} : (a \cdot b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot (b \cdot \mathbf{v}),$$

$$vN2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} : 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v},$$

$$vD1 \quad \forall a, b \in \mathbb{T} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} : (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v},$$

$$vD2 \quad \forall a \in \mathbb{T} \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} : a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}.$$

*Například*

$\mathbb{T}$  těleso,  $n \geq 0$ ,  $\mathbf{V} = \mathbb{T}^n$  s běžnými operacemi na aritmetických vektorech tvoří vektorový prostor.

$\mathbb{T}$  těleso,  $\mathbf{V} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{T}^3 : x + y + z = 0\} \subseteq \mathbb{T}^3$ . Operace z  $\mathbb{T}^3$  zúžené na  $\mathbf{V}$ .

### **Tvrzení 3.13** (Vlastnosti vektorových prostorů)

- *Nulový vektor je určen jednoznačně.*
- *Opačný vektor je určen jednoznačně.*
- *Vektorový prostor nikdy není prázdný, ale existuje tzv. nulový vektorový prostor.*
- *Pro  $\mathbf{v} \in \mathbf{V} : 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{o}$ .*

### **Definice 3.16** (Vektorový podprostor)

Buď  $\mathbb{T}$  těleso a  $\mathbf{V}$  vektorový prostor nad  $\mathbb{T}$ . Podprostorem rozumíme množinu  $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$  takovou, že operace lze zúžit na  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{U}$  s těmito operacemi tvoří samo  $\mathbf{V}$ . P. nad  $\mathbb{T}$ .

### **Tvrzení 3.14** (T5.12)

*Vezměme  $\mathbb{T}$  a  $\mathbf{V}$  jako výše. Pak  $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$  tvoří podprostor právě tehdy, když je uzavřený na sčítání a násobení skalárem.*

*Poznámka*

Prostor  $\mathbf{U}$  je podprostorem  $\mathbf{V}$  značíme  $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ .

Nulový vektorový prostor a prostor sám sobě je podprostorem (tzv. triviální nebo nevlastní podprostory).

### *Například*

Prostor všech polynomů stupně  $n$  je podprostor všech polynomů stupně  $n+1$  je podprostor všech polynomů.

Prostor všech spojitých funkcí (spolu s bodovým sčítáním a násobením konstantou,  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ) je podprostorem všech zobrazení nad  $\mathbb{R}$ . Prostor polynomiálních funkcí je podprostorem spojitých funkcí...

$\mathbb{R} \leq \mathbb{C}$  se sčítáním na  $\mathbb{C}$  a násobením zúženým na  $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

### **Definice 3.17**

Buď  $\mathbf{V}$  vektorový prostor nad  $\mathbb{T}$ . Vezměme  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$ ,  $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{T}$ . Pak vektor

$$t_1 \cdot \mathbf{v} + \dots + t_k \cdot \mathbf{v}_k$$

se nazývá lineární kombinace vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  (s koeficienty  $t_1, \dots, t_k$ ).

### **Definice 3.18**

Buď  $\mathbf{V}$  V.P. nad  $\mathbb{T}$ , vezměme  $X \subseteq \mathbf{V}$ . Pak

$$\text{LO } X = \{t_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + t_k \cdot \mathbf{v}_k : k \in \mathbb{N}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in X, t_1, \dots, t_k \in T\} \subseteq \mathbf{V}$$

se nazývá lineární obal  $X$  (v prostoru  $\mathbf{V}$ ).

### **Tvrzení 3.15**

Buď  $x \subseteq \mathbf{V}$ . Pak  $\text{LO } X \leq \mathbf{V}$ .

### **Definice 3.19**

Buď  $\mathbf{V}$  vektorový prostor nad  $\mathbb{T}$  a  $X \in \mathbf{V}$ . pak řekneme, že  $X$  generuje  $\mathbf{V}$  ( $X$  je množina generátorů  $\mathbf{V}$ ), pokud  $\text{LO } X = \mathbf{V}$