Příklad (1.1)
Řešte soustavu diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení
Převedeme pomocí operátoru $\lambda(f) = f'$ na soustavu lineárních rovnic (pro jednoduchost na pravé straně uvádím jen koeficienty) a přičtením $\lambda - 1$ násobku druhé rovnice k první, odečtením druhé od třetí a odečtením $\lambda + 1$ násobku první od poslední získáme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda+1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & \lambda+1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \lambda^2 & 1 & 4\lambda-3 \\ -1 & \lambda+1 & 0 & 4 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \lambda^2 & 1 & 4\lambda-3 \\ -1 & \lambda+1 & 0 & 4 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1 & 0 & -4\lambda^2-\lambda+3 \end{array}\right),$$

$$y_2''' + y_2'' + y_2' + y_2 = 4 \cdot 4e^{2x} + 2e^{2x} - 3e^{2x} = 15e^{2x}.$$

Tuto rovnici řešíme nejprve jako homogenní: polynom $\gamma^3+\gamma^2+\gamma+1 = (\gamma+1)(\gamma^2+1)$ má kořeny $-1, i, -1$, tedy homogenní verze rovnice výše má řešení $C_1 e^{-x} + C_2\cos(x) + C_3\sin(x)$. Rovnice má speciální pravou stranu, pro $m = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$, (2 není kořen, tedy) $k = 0$, tedy hledáme jedno řešení ve tvaru Qe^{2x}:

$$8Qe^{2x} + 4Qe^{2x} + 2Qe^{2x} + Qe^{2x} = 15e^{2x}, \qquad Q = 1,$$

tudíž všechna řešení jsou (pro $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$):

$$y_2 = e^{2x} + C_1e^{-x} + C_2\cos(x) + C_3\sin(x).$$

Nyní už z druhé rovnice dopočítáme y_1 a z první y_3:

$$y_1 = y_2' + y_2 - 4e^{2x} = (C_2 + C_3)\cos(x) + (C_3 - C_2)\sin(x) - e^{2x},$$

$$y_3 = e^{2x} - y_2 + y_1 - y_1' = e^{2x} - C_1e^{-x} + C_2\cos(x) + C_3\sin(x).$$

Nakonec stačí jen najít konstanty tak, aby seděla počáteční podmínka:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} (C_2+C_3)\cos(0) + (C_3-C_2)\sin(0) - e^{2\cdot 0} \\ e^{2\cdot 0} + C_1e^{-0} + C_2\cos(0) + C_3\sin(0) \\ e^{2\cdot 0} - C_1e^{-0} + C_2\cos(0) + C_3\sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 + C_3 - 1 \\ 1 + C_1 + C_2 \\ 1 - C_1 + C_2 \end{pmatrix}:$$

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} -\cos(x) - 5\sin(x) - e^{2x} \\ e^{2x} + e^{-x} + 2\cos(x) - 3\sin(x) \\ e^{2x} - e^{-x} + 2\cos(x) - 3\sin(x) \end{pmatrix}$$

Příklad (1.2)
Spočtěte limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2y^3}{4x^2+y^2}.$$

Řešení
Nejprve ukažme, že (mimo bod $(0,0)$):

$$\left|\frac{x^3-2y^3}{4x^2+y^2}\right| \leq 3\max\left\{x,y\right\}.$$

Absolutní hodnota podílu je rovna absolutním podílu absolutních hodnot. Tudíž pro $(x,y)\neq 0$ je nerovnost ekvivalentní nerovnosti

$$\left|x^3-2y^3\right| \leq 3\max\left\{x,y\right\}\left|4x^2+y^2\right|.$$

S použitím trojúhelníkové nerovnosti a toho, že druhá mocnina je nezáporná, dostaneme:

$$\left|x^3-2y^3\right| = \left|x^3\right| + \left|y^3\right| + \left|y^3\right| \leq 3\max\left\{\left|x^3\right|,\left|y^3\right|\right\} = 3\max\left\{|x|,|y|\right\}\max\left\{x^2,y^2\right\} \leq$$

$$\leq 3\max\left\{|x|,|y|\right\}\left(x^2+y^2\right) \leq 3\max\left\{|x|,|y|\right\}\left|4x^2+y^2\right|$$

Funkce $(x,y)\mapsto \pm 3|x+y|$ jsou spojité a v počátku rovny 0, tedy jejich limita v počátku je 0 a jak jsme ukázali výše, „obklopují“ f shora i zespodu, tedy podle věty o dvou strážnících je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Příklad (1.3)
Nechť
$$f(x,y)=\sqrt[5]{x^5+2y^5}.$$
Rozhodněte, ve kterých bodech má funkce f totální diferenciál a určete jej.

Řešení (Parciální derivace)
Funkce je definována všude (pátá odmocnina je definována všude na $\mathbb{R}$, páté mocniny, součet a násobek taktéž). Kromě bodu $(x,y)=(0,0)$ má funkce parciální derivace:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^5+2y^5}^4}\cdot 5x^4=\frac{x^4}{\sqrt[5]{x^5+2y^5}^4},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^5+2y^5}^4}\cdot 5\cdot 2y^4=\frac{2y^4}{\sqrt[5]{x^5+2y^5}^4}.$$
Jediným problémovým bodem je bod $(0,0)$, tam jsou parciální derivace z definice rovny
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+\ h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{(0+h)^5+2\cdot 0^5}-\sqrt[5]{0^5+2\cdot 0^5}}{h}=1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{0^5+2\cdot(0+h)^5}-\sqrt[5]{0^5+2\cdot 0^5}}{h}=\sqrt[5]{2}.$$

Řešení (Totální diferenciál)
Parciální derivace f jsou kromě $(0,0)$ spojité, jelikož $g(x,y)=x$ resp. $g(x,y)=y$ jsou spojité a součet, mocnina, násobek, lichá odmocnina a podíl s nenulovým jmenovatelem jsou spojité, tedy pro $(x,y)\neq(0,0)$ je
$$Df((x,y))((a,b))=\frac{x^4}{\sqrt[5]{x^5+2y^5}^4}a+\frac{2y^4}{\sqrt[5]{x^5+2y^5}^4}b.$$

V bodě $(0,0)$ ukážeme neexistenci totálního diferenciálu sporem: Předpokládejme, že v $(0,0)$ Df existuje. Potom z věty o tvaru totálního diferenciálu:
$$Df((0,0))((a,b))=a+b\sqrt[5]{2},\qquad \frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0,0)=1+\sqrt[5]{2}.$$
Ale
$$\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(1,1))-f((0,0))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{h^5+\ 2h^5}}{h}=\sqrt[5]{3}\neq 1+\sqrt[5]{2}$$