

# Organizační úvod

*Poznámka*

Zkouška bude snad ústní.

## Úvod

### Věta 0.1 (Lebesgueova míra)

Existuje právě jedna borelovská míra  $\lambda^n$  v  $\mathbb{R}^n$  taková, že

$$\lambda^n(X_{i=1}^n[a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i), -\infty < a_i \leq b_i < \infty, 1 \leq i \leq n.$$

┌  
*Poznámka*

Zúplnění  $B^n$  značíme  $B_0^n$  a platí  $B^n \subsetneq B_0^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  (pro  $n \geq 2$  jednoduché, pro  $n = 1$  možná někdy příště).

$\lambda^n$  je translačně a rotačně invariantní (posunutím a otočením se nezmění).

$\lambda^n$  je  $\sigma$ -konečná.

$\lambda^n$  je regulární (můžeme její hodnotu na množině aproximovat jejími hodnotami na otevřené nadmnožině a uzavřené podmnožině<sup>a</sup>).

<sup>a</sup>

$$\forall E \in B_0^n \forall \varepsilon > 0 \exists F \subset E \subset G, F \text{ uzavřená}, G \text{ otevřená}, \lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon.$$

└

### Definice 0.1 (Pramíra)

$\tilde{\mu} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  je pramíra (premeasure) na algebře  $\mathcal{A}$  podmnožin  $X$ , jestliže:

$$\tilde{\mu}(\emptyset) = 0,$$

$$A_i \in \mathcal{A}, \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}, A_i \text{ po dvou disjunktní} \implies \tilde{\mu}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \tilde{\mu}(A_i).$$

### Věta 0.2 (Hahn-Kolmogorov (viz dále))

Bud'  $\tilde{\mu}$  pramíra na algebře  $\mathcal{A}$ . Pak existuje míra  $\mu$  na  $\sigma\mathcal{A}$  taková, že  $\mu = \tilde{\mu}$  na  $\mathcal{A}$ . Je-li  $\tilde{\mu}$   $\sigma$ -konečná, je  $\mu$  určená jednoznačně.

# 1 Konstrukce Lebesgueovy míry z vnější míry

## Definice 1.1 (Vnější míra (outer measure))

Nechť  $X \neq \emptyset$ . Funkce  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  je vnější míra na  $X$ , jestliže:

$$\mu^*(\emptyset) = 0,$$

$$A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B), \text{ (monotonie)}$$

$$A_i \subset X \ (i \in \mathbb{N}) \implies \mu^*\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mu^*(A_i). \text{ (spočetná subaditivita)}$$

┌  
*Například*

$$\mu^* \equiv 0,$$

$$\mu^* = \delta_x, x \in X,$$

$$\mu^*(A) = \text{card } A,$$

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{pokud } A = \emptyset, \\ 1, & \text{pokud } A \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$X = \mathbb{R}, \lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_i |I_i|, A \subset \bigcup_i I_i, I_i \text{ otevřené intervaly} \right\}$$

└

## Definice 1.2 (Měřitelnost vůči vnější míře)

Řekneme, že množina  $A \subset X$  je  $\mu^*$ -měřitelná, jestliže

$$\forall T \subset X : \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A).$$

Značíme  $\mathcal{A}_{\mu^*} := \{A \subset X \mid A \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná}\}$ .

┌  
*Poznámka*

Ať  $\mu^*$  je vnější míra na  $X$ ,  $Y \subset X$ . Pak restrikce  $\mu^*|_Y : A \mapsto \mu^*(A \cap Y)$  je vnější míra a platí:

$$\mathcal{A}_{\mu^*} \subset \mathcal{A}_{\mu^*|_Y}$$

┌  
*Důkaz*

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}_{\mu^*} : \mu^*|_Y(T) &= \mu^*(T \cap Y) = \mu^*(T \cap Y \cap A) + \mu^*((T \cap Y) \setminus A) = \\ &= \mu^*|_Y(T \cap A) + \mu^*|_Y(T \setminus A). \end{aligned}$$

└

□

**Věta 1.1** (Caratheodory)

$\mathcal{A}_{\mu^*}$  je  $\sigma$ -algebra na  $X$  a  $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$  je míra. Prostor  $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$  je úplný.

┌

*Důkaz*

$\emptyset \in \mathcal{A}_{\mu^*}$  je zřejmé. Uzavřenost na komplement je také snadná, z definice  $\mathcal{A}_{\mu^*}$ . Místo sjednocení ukážeme uzavřenost na konečný průnik: Víme  $T \subset X : \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$ ,  $\mu^*(T \cap A) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B)$  a  $\mu^*(T \setminus (A \cap B)) = \mu^*((T \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu^*((T \setminus (A \cap B)) \setminus A) = \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A)$ .

Tedy  $\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \setminus (A \cap B))$ .  
Tudíž  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  je algebra.

Nyní chceme ukázat, že  $\mu^*$  je  $\sigma$ -aditivní na  $\mathcal{A}_{\mu^*}$ : Budte  $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$  po dvou disjunktní. Volbou  $T = A_1 \cup A_2$  dostaneme  $\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \implies \mu^*$  je konečně aditivní na  $\mathcal{A}_{\mu^*}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu^*(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^* \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \mu^* \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

Opačná nerovnost plyne ze spočetné subaditivity. To znamená, že

$$\mu^* \left( \bigcup_i A_i \right) = \sum_i \mu^*(A_i), A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}, \text{ po dvou disjunktní.}$$

„ $\mathcal{A}_{\mu^*}$  je uzavřená na disjunktní spočetné sjednocení“:  $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ , po dvou disjunktní,  $T \subset X$ .

$$\begin{aligned} \mu^*(T) &= \mu^* \left( T \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right) + \mu^* \left( T \cap \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \geq \mu^* \left( T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + (\mu^*|_T) \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \\ &= \mu^* \left( T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + \sum_{i=1}^n (\mu^*|_T)(A_i). \end{aligned}$$

Limitním přechodem  $n \rightarrow \infty$  dostaneme

$$\mu^*(T) \geq \mu^* \left( T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*|_T)(A_i) = \mu^* \left( T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + (\mu^*|_T) \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

Z tohoto všeho plyne, že  $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$  je míra na  $\sigma$ -algebře  $\mathcal{A}_{\mu^*}$ . Zbývá už jen úplnost:

$$\mu^*(A) = 0, T \subset X \implies \mu^*(T) \geq \underbrace{\mu^*(T \cap A)}_{=0} + \mu^*(T \setminus A) \implies A \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

└

□

**Definice 1.3** (Metrická vnější míra)

Buď  $(X, \varrho)$  metrický prostor. Řekneme, že vnější míra  $\mu^*$  na  $X$  je metrická, jestliže pro dvě množiny  $A, B \subset X$  splňující  $\text{dist}(A, B) > 0$  platí

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

**Věta 1.2**

Nechť  $\mu^*$  je metrická vnější míra na metrickém prostoru  $(X, \varrho)$ . Pak  $B(X) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$ .

┌

*Důkaz*

Buď  $F \subset X$  uzavřená. Ukážeme, že  $F \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ . Označme

$$F_\varepsilon := \{x \in X \mid \varrho(x, F) \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Nechť je dána  $T \subset X$ . Ověříme, že

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap F) + \mu^*(T \setminus F).$$

BÚNO  $\mu^*(T) < \infty$ . Protože  $\text{dist}(T \cap F, T \setminus F_\varepsilon) \geq \varepsilon > 0$ , tak

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap F) + \mu^*(T \setminus F_\varepsilon)$$

protože  $\mu^*$  je metrická. Nyní stačí  $\mu^*(T \setminus F_{\frac{1}{j}}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mu^*(T \setminus F)$ . Označme  $D_i := (F_{\frac{1}{i}} \setminus F_{\frac{1}{(i+1)}}) \cap T, i \in \mathbb{N}$ . Platí  $T \setminus F = (T \setminus F_{\frac{1}{j}}) \cup \bigcup_{i=j}^{\infty} D_i$ , a tedy ze spočetné subaditivity  $\mu^*$  plyne

$$\mu^*(T \setminus F) \leq \mu^*(T \setminus F_{\frac{1}{j}}) + \sum_{i=j}^{\infty} \mu^*(D_i).$$

Je-li  $|i - j| > 2$  je  $\text{dist}(D_i, D_j) > 0$  a tedy

$$\sum_{i=1}^n \mu^*(D_{2i}) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n D_{2i}\right) \leq \mu^*(T) < \infty,$$

$$\sum_{i=1}^n \mu^*(D_{2i-1}) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n D_{2i-1}\right) \leq \mu^*(T) < \infty.$$

Z toho už plyne, že  $\sum_{i=j}^{\infty} \mu^*(D_i) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ . □

└

**Definice 1.4** (Kvádry v  $\mathbb{R}^n$ , objem kváдру)

Symbolem  $\mathcal{O}_n$  budeme značit množinu všech otevřených omezených kvádrů v  $\mathbb{R}^n$  (včetně prázdné množiny). Objemem kváдру  $I = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \in \mathcal{O}_n$  budeme myslet

$$v(I) := (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

### Tvrzení 1.3

Budte  $I, I_1, \dots, I_k \in \mathcal{O}_n$

1. Je-li  $I \subset \overline{I_1} \cup \dots \cup \overline{I_k}$ , platí  $v(I) \leq v(I_1) + \dots + v(I_k)$ .
2. Je-li  $\overline{I} = \overline{I_1} \cup \dots \cup \overline{I_k}$  a jsou-li kvádry  $I_{[k]}$  po dvou disjunktní, platí  $v(I) = v(I_1) + \dots + v(I_k)$ .

┌

*Důkaz*

1. krok: Necht  $I = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ ,  $\mathcal{D}_i$  je dělení intervalu  $(a_i, b_i)$ ,  $i \in [n]$  a označme symbolem  $\mathcal{J}$  systém všech otevřených kvádrů  $J_1 \times \dots \times J_n$ , kde  $J_i$  je otevřený interval z dělení  $\mathcal{D}_i$ . Pak zřejmě

$$\overline{I} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J, \quad v(I) = \sum_{J \in \mathcal{J}} v(J).$$

2. krok: Jsou-li  $I_1, \dots, I_k$  jako v druhém bodě, převedeme situaci snadno na případ uvažovaný v 1. kroku. Tím je dokázán druhý bod.

3. krok: První bod plyne z druhého, jelikož z libovolného pokrytí kvádrů  $I$  kvádry  $I_1, \dots, I_k$  snadno vyrobíme disjunktní pokrytí. □

### Definice 1.5

Pro množinu  $E \subset \mathbb{R}^n$  klademe

$$\lambda^{n*}(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) \mid E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \wedge I_i \in \mathcal{O}_n \right\}.$$

Pro  $\delta > 0$  definujeme

$$\lambda_{\delta}^{n*}(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) \mid E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \wedge I_i \in \mathcal{O}_n \wedge \text{diam}(I_i) < \delta \right\}.$$

### Tvrzení 1.4

Pro  $E \subset \mathbb{R}^n$  a  $\delta > 0$  platí  $\lambda^*(E) = \lambda_{\delta}^{n*}(E)$ .

┌ *Důkaz*

Nerovnost  $\lambda^{n*}(E) \leq \lambda_\delta^{n*}$  je z definice. „ $\geq$ “ BÚNO  $\lambda^{n*}(E) < \infty$ . Zvolme  $\varepsilon > 0$ . Z definice  $\lambda^{n*}(E)$  existují  $I_1, \dots \in \mathcal{O}_n$  takové, že  $E \subset \bigcup_i I_i$  a

$$\sum_i v(I_i) < \lambda^{n*}(E) + \varepsilon.$$

Každý z kvádrů  $I_i$  můžeme rozdělit na konečný počet disjunktních kvádrů  $J_s^{[k(i)]}$  s diametry menšími než  $\delta$ , přitom  $\overline{I_i} = \bigcup \overline{J_i^{[k(i)]}}$ . Podle předchozího tvrzení platí  $v(I_i) = \sum v(J_i^{[k(i)]})$ . Zřejmě existují  $I_i^j \in \mathcal{O}_n$  takové že  $\overline{J_i^j} \subset I_i^j$ ,  $\text{diam } I_i^j < \delta$  a  $v(I_i^j) < v(J_i^j) + \frac{\varepsilon}{k(i)2^i}$ . Pak  $E \subset \bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{j \in [k(i)]} I_i^j$ , a tedy

$$\lambda_\delta^{n*}(E) \leq \sum_{i=1}^\infty \sum_{j \in [k(i)]} v(I_i^j) + \varepsilon < \lambda^{n*}(E) + 2\varepsilon.$$

Nyní už limitním přechodem  $\varepsilon \rightarrow 0$  dostaneme  $\lambda_\delta^{n*}(E) \leq \lambda^{n*}(E)$ . □

## Věta 1.5

---

$\lambda^{n*}$  je metrická vnější míra na  $\mathbb{R}^n$  a  $\forall I \in \mathcal{O}_n$  platí  $\lambda^{n*}(I) = v(I)$ .

┌ *Důkaz*

Množinová funkce  $\lambda^{n*}$  je zřejmě monotónní a platí  $\lambda^{n*}(\emptyset) = 0$ . Ukážeme spočetnou subaditivitu. Budte  $E_i \subset \mathbb{R}^n$  a předpokládejme, že  $\lambda^{n*}(E_i) < \infty$ . Zvolme  $\varepsilon > 0$ . Podle definice  $\lambda^{n*}$  existují  $I_i^j \in \mathcal{O}_n$  takové, že  $E_i \subset \bigcup_j I_i^j$  a  $\sum_j v(I_i^j) < \lambda^{n*}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$ . Pak ale platí  $\bigcup_i E_i \subset \bigcup_{i,j} I_i^j$ , a tedy

$$\lambda^{n*}\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_{i,j} v(I_i^j) < \sum_i \lambda^{n*}(E_i) + \varepsilon.$$

Limitním přechodem  $\varepsilon \rightarrow 0$  dostáváme spočetnou subaditivitu.  $\lambda^{n*}$  je tedy vnější míra.

Dále ukážeme, že  $\lambda^{n*}$  je metrická, tedy pro  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  takové, že  $\text{dist}(A, B) > 0$  platí

$$\lambda^{n*}(A \cup B) \geq \lambda^{n*}(A) + \lambda^{n*}(B).$$

Je-li  $\lambda^{n*}(A \cup B) = \infty$ , nerovnost zřejmě platí. BÚNO ted  $\lambda^{n*}(A \cup B) < \infty$ . Zvolme  $\varepsilon > 0$ . Podle předchozího tvrzení existují  $I_i \in \mathcal{O}_n$  takové že  $\text{diam}(I_i) < \frac{\text{dist}(A,B)}{2}$  a  $\sum_i v(I_i) < \lambda^{n*}(A \cup B) + \varepsilon$ . Označme

$$\mathcal{I}_A := \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap A \neq \emptyset\}, \mathcal{I}_B := \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap B \neq \emptyset\}.$$

Žádný z kvádrů  $I_i$  nemůže zasáhnout obě množiny  $A, B$ , proto jsou tyto množiny disjunktní. Navíc zřejmě  $A \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}_A} I_i$  a  $B \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}_B} I_i$ . Proto

$$\lambda^{n*}(A) + \lambda^{n*}(B) \leq \sum_{i \in \mathcal{I}_A \cup \mathcal{I}_B} v(I_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) < \lambda^{n*}(A \cup B) + \varepsilon.$$

Limitním přechodem  $\varepsilon \rightarrow 0$  dostaneme požadovanou nerovnost.

Zbývá „ $\forall I \in \mathcal{O}_n : \lambda^{n*}(I) = v(I)$ “. Nerovnost  $\lambda^{n*}(I) \leq v(I)$  je zřejmá, stačí zvolit pokrytí  $I_1 = I$ .

Předpokládejme pro spor, že  $\lambda^{n*}(I) < v(I)$ . Pak existují  $I_i \in \mathcal{O}_i$  takové, že  $I \subset \bigcup_i I_i$  a  $\sum_i v(I_i) < v(I)$ . Zřejmě existuje  $J \in \mathcal{O}_n$  takový, že  $\bar{J} \subset I$  a  $\sum_i v(I_i) < v(J)$ . Protože  $\bar{J}$  je kompaktní, existuje  $k \in \mathbb{N}$  takové, že  $\bar{J} \subset \bigcup I_{[k]}$ . Pak ale  $v(J) \leq \sum v(I_{[k]})$  podle tvrzení výše, což je spor.  $\square$

## 2 Znaménkové míry

### Definice 2.1 (Znaménková míra, náboj)

Řekneme, že funkce  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^*$  je znaménková míra na měřitelném prostoru  $(X, \mathcal{A})$ , jestliže

- $\sigma(\emptyset) = 0$ ,

- $\sigma$  nabývá nejvýše jedné z hodnot  $\pm\infty$ ,
- ( $\sigma$ -aditivita) pro libovolnou posloupnost po dvou disjunktních množin  $A_n \in \mathcal{A}$  platí

$$\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n).$$

Konečná znaménková míra se též nazývá náboj.

## Definice 2.2 (Kladná a záporná množina)

Buď  $\sigma$  znaménková míra na  $(X, \mathcal{A})$ . Řekneme, že množina  $A \in \mathcal{A}$  je kladná pro  $\sigma$ , jestliže pro každou měřitelnou množinu  $E \subset A$  platí  $\sigma(E) \geq 0$ . Množina  $A \in \mathcal{A}$  je záporná pro  $\sigma$ , jestliže pro každou měřitelnou množinu  $E \subset A$  platí  $\sigma(E) \leq 0$ .

## Tvrzení 2.1

Buď  $\sigma$  znaménková míra na  $(X, \mathcal{A})$  a  $E \in \mathcal{A}$  množina taková, že  $0 < \sigma(E) < \infty$ . Pak existuje kladná množina  $A \subset E$  taková, že  $\sigma(A) > 0$ .

*Důkaz*

Kdyby sama  $E$  byla kladná, položíme  $A := E$ . Pokud ne, definujeme

$$t_1 := \inf \{\sigma(B) \mid B \subset E \wedge B \in \mathcal{A}\} < 0$$

a vybereme  $E_1 \subset E$  takovou, že  $\sigma(E_1) < \max\{\frac{t_1}{2}, -1\}$ . Platí  $\sigma(E \setminus E_1) = \sigma(E) - \sigma(E_1) > \sigma(E) > 0$ , a pokud je množina  $E \setminus E_1$  již kladná, vybereme ji za  $A$  a jsme hotovi.

Pokud ne, pokračujeme stejnou konstrukcí, tedy položíme

$$t_2 := \inf \{\sigma(B) \mid B \subset E \setminus E_1 \wedge B \in \mathcal{A}\} < 0$$

a zvolíme  $E_2 \subset E \setminus E_1$  takovou, že  $\sigma(E_2) < \max\{\frac{t_2}{2}, -1\}$ . Tímto způsobem buď po konečném počtu kroků najdeme kladnou množinu  $A \subset E$  kladné míry, nebo sestrojíme posloupnost disjunktních měřitelných množin  $E_1, E_2, \dots \subset E$  a posloupnost záporných čísel  $t_1, t_2, \dots$  takové, že  $\sigma(E_i) < \max\{\frac{t_i}{2}, -1\} < 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

Položme  $A := E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ . Ze spočetné aditivity dostaneme

$$\sigma(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(E_i) = \sigma(E) > 0,$$

tedy  $\sigma(A) > \sigma(E) > 0$  a řada  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(E_i)$  konverguje, tedy nutně  $\sigma(E_i) \rightarrow 0$ . Pak ale  $t_i \rightarrow 0$ . Ukážeme, že  $A$  je kladná: Pro libovolnou  $B \subset A$  měřitelnou platí  $B \cap E_i = \emptyset$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , tedy  $\sigma(B) \geq t_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  a protože  $t_i \rightarrow 0$  je  $\sigma(B) \geq 0$ .  $\square$



### Věta 2.2 (Hahn-Banachův rozklad)

Buď  $\sigma$  znaménková míra na  $(X, \mathcal{A})$ . Pak existuje rozklad  $X = P \cup N$  takový, že  $P$  je kladná a  $N$  záporná množina pro  $\sigma$ .

┌

*Důkaz*

BÚNO  $\sigma(E) < \infty$  pro každou  $E \in \mathcal{A}$ . (Kdyby ne, pracovali bychom s mírou  $-\sigma$ .) Položme  $\lambda := \sup \{\sigma(E) \mid E \in \mathcal{A} \wedge E \text{ kladná pro } \sigma\}$ . Zřejmě  $\lambda \geq 0$  ( $\emptyset$  je kladná).

Buďte  $A_i \in \mathcal{A}$  kladné takové, že  $\sigma(A_i) \rightarrow \lambda$  (existence plyne z definice suprema). Pak množina  $P := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  je kladná a ze vztahu

$$\sigma(P) = \sigma(A_i) + \sigma(P \setminus A_i) \geq \sigma(A_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

plyne  $\sigma(P) = \lambda$ . Ukážeme dále, že množina  $N := X \setminus P$  je záporná. Necht  $B \subset N$  je měřitelná. Kdyby  $\sigma(B) > 0$ , pak by podle předchozího tvrzení existovala měřitelná kladná množina  $B' \subset B$ , pro niž  $\sigma(B') > 0$ . Pak by ale  $P \cup B'$  byla rovněž kladná množina s mírou

$$\sigma(P \cup B') = \sigma(P) + \sigma(B') > \sigma(B) = \lambda,$$

└ což by byl spor s definicí  $\lambda$ .

□

### Definice 2.3 (Jordanův rozklad)

Buď  $\sigma$  znaménková míra na  $(X, \mathcal{A})$ . Pak (nezáporné míry)  $\sigma_+(\cdot) := \sigma(\cdot \cap P)$  a  $\sigma_-(\cdot) := -\sigma(\cdot \cap N)$  nazýváme kladnou a zápornou částí  $\sigma$  a platí  $\sigma = \sigma_+ - \sigma_-$ .

Míru  $|\sigma| := \sigma_+ + \sigma_-$  nazýváme totální variací znaménkové míry  $\sigma$ .

### Tvrzení 2.3

Je-li  $\sigma = \sigma'_+ - \sigma'_-$  jiný rozklad znaménkové míry  $\sigma$  na rozdíl dvou nezáporných měr, pak  $\sigma'_+ \geq \sigma_+$  a  $\sigma'_- \geq \sigma_-$ .

┌

*Důkaz*

Pro libovolnou  $E \in \mathcal{A}$  platí

$$\sigma_+(E) = \sigma(E \cap P) = \sigma'_+(E \cap P) - \sigma'_-(E \cap P) \leq \sigma'_+(E \cap P) \leq \sigma'_+(E).$$

└ Podobné se ukáže, že  $\sigma'_-(E) \geq \sigma_-(E)$ .

□

### Věta 2.4 (Regularita Lebesgueovy míry)

Necht  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Je ekvivalentní:

1.  $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ ,
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset E \subset G$ ,  $F$  uzavřená,  $G$  otevřená,  $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$ ,
3.  $\exists A \subset E \subset B$ ,  $A, B \in \mathcal{B}^n$ ,  $\lambda^n(B \setminus A) = 0$ ,

4.  $E \in \mathcal{B}_0^n$ .

┌  
Důkaz

1  $\implies$  2: Mějme  $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Necht nejprve  $\lambda^{n*}(E) < \infty$ . Pak  $\exists I_i \in \mathcal{O}_n$ ,  $E \subset \bigcup_i I_i$ ,  $\sum_i v(I_i) < \lambda^{n*}(E) + \frac{\varepsilon}{2}$ . Položme  $G := \bigcup_i I_i$  (otevřená),  $E \subset G$ ,  $\lambda^n(G \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Je-li  $\lambda^{n*}(E) = \infty$ , pak ze  $\sigma$ -konečnosti je  $E = \bigcup_m E_m$ ,  $E_m := E \cap [-m, m]^n$ .  $\lambda^{n*}(E_m) < \infty \implies \exists G_m$  otevřená,  $E_m \subset G_m$ ,  $\lambda^n(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$ .  $G := \bigcup_m G_m$  otevřená,  $E \subset G$ ,  $\lambda^n(G \setminus E) \leq \sum_m \lambda^n(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

$E^c \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}} \implies \exists H$  otevřená,  $E^c \subset H$ ,  $\lambda^n(H \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$ .  $F := H^c$  uzavřená,  $F \subset E \subset G$ ,  $\lambda^n(G \setminus F) = \lambda^n(G \setminus E) = \lambda^n(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

2  $\implies$  3: Necht  $E \subset \mathbb{R}^n$  splňuje 2.

$$\forall j \in \mathbb{N} \exists F_j \subset E \subset G_j, F_j \text{ uzavřená}, G_j \text{ otevřená}, \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}.$$

Položme  $A := \bigcup_j F_j$ ,  $B := \bigcap_j G_j$ ,  $A, B \in \mathcal{B}^n$ ,  $A \subset E \subset B$ .  $\lambda^n(B \setminus A) \leq \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}$  pro libovolné  $j \in \mathbb{N}$ , tedy  $\lambda^n(B \setminus A) = 0$ .

3  $\implies$  4: Jsou-li  $A \subset E \subset B$  jako v 3, pak  $B \setminus A$  je  $\lambda^n$ -nulová množina, a tedy  $E \in \mathcal{B}_0^n$ .

4  $\implies$  1:  $\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$  obsahuje  $\mathcal{B}^n$  a nulové množiny, tedy obsahuje  $\mathcal{B}_0^n$ . □

## Věta 2.5 (Luzinova (běžně bývá obecnější))

Bud  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lebesgueovsky měřitelná. Bud  $\varepsilon > 0$ . Pak existuje  $G \subset \mathbb{R}^n$  otevřená taková, že  $\lambda^n(G) < \varepsilon$  a restrikce  $f|_{G^c}$  je spojitá.

┌  
Důkaz

Bud  $U_1, U_2, \dots$  posloupnost všech otevřených intervalů s racionálními koncovými body.  $f$  je lebesgueovsky měřitelná, tedy  $\forall j, f^{-1}(U_j) \in \mathcal{B}_0^n$ . Podle regularity pak  $\exists F_j \subset f^{-1}(U_j) \subset G_j$ ,  $F_j$  uzavřená,  $G_j$  otevřená,  $\lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$ . Položme  $G := \bigcup_j (G_j \setminus F_j)$ . Zřejmě  $G$  je otevřená,  $\lambda^n(G) \leq \sum_j \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \varepsilon$ .

Pro restrikci  $g := f|_{G^c}$  platí:

$$g^{-1}(U_j) = \{x \in G^c : f(x) \in U_j\} = f^{-1}(U_j) \cap G^c = G_j \cap G^c, j \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě  $U \subset \mathbb{R}$  otevřená  $\implies U = \bigcup_{U_j \subset U} U_j$ , tedy  $g^{-1}(U) = \bigcup_{U_j \subset U} g^{-1}(U_j)$  otevřená množina v  $G^c$ , tedy  $g$  je spojitá na  $G^c$ . □

*Poznámka*

Obecně nelze požadovat  $\lambda^n(G) = 0$ . Např. charakteristická funkce diskontinua kladné míry (podobně jako Cantorovo diskontinuum, ale nenulové míry), které dostaneme tak, že z prostředků intervalů v  $i$ -tém kroku vždy odebereme intervaly délky  $a_i$  tak, aby  $a_1 + 2a_2 + 4a_3 + \dots < 1$ . ( $G$  z minulé věty pak bude sjednocení malých okolíček krajních bodů odebíraných intervalů.)

### 3 Regularita borelovských měr

#### **Definice 3.1** (Regulární borelovská míra)

Borelovská míra  $\mu$  na topologickém (metrickém) prostoru  $X$  je regulární, jestliže  $\forall B \in \mathcal{B}(X) : \mu(B) = \inf \{ \mu(G) \mid B \subset G, G \text{ otevřená} \}$ .

*Poznámka*

1) Často se hovoří o vnější regularitě (outer regular measure). 2) Pro konečné míry:  $\mu$  je regulární  $\implies \forall B \in \mathcal{B} : \mu(B) = \sup \{ \mu(F) \mid F \subset B, F \text{ uzavřená} \}$ .

#### **Věta 3.1**

*Každá konečná borelovská míra na metrickém prostoru je regulární.*

┌ *Důkaz*

$(X, \varrho)$  metrický prostor,  $\mu$  borelovská míra na  $X$ ,  $\mu(X) < \infty$ . Označme

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}(X) \mid \varepsilon > 0 \exists F \subset B \subset G, F \text{ uzavřená}, G \text{ otevřená}, \mu(G \setminus F) < \varepsilon\}.$$

Ukážeme, že  $\mathcal{D} := \mathcal{B}(X)$ . Nejprve  $\mathcal{D}$  obsahuje všechny množiny:  $F \subset X$  uzavřená,  $F_{<\varepsilon} := \{x \in X \mid \varrho(x, F) < \varepsilon\}$  (otevřená). Zřejmě  $F_{<\frac{1}{j}} \searrow F$ ,  $j \rightarrow \infty$  z uzavřenosti  $F$ .  $\mu$  konečná  $\implies$  (spojitost míry)  $\mu(F_{<\frac{1}{j}}) \rightarrow \mu(F)$ .

„ $\mathcal{D}$  je  $\sigma$ -algebra“:  $\emptyset \in \mathcal{D}$ ,  $D \in \mathcal{D} \implies D^c \in \mathcal{D}$ :

$$F \subset D \subset G, \mu(G \setminus F) < \varepsilon \implies G^c \subset D^c \subset F^c, \mu(F^c \setminus G^c) < \varepsilon.$$

„ $D_i \in \mathcal{D} \implies \bigcup_i D_i \in \mathcal{D}$ “:

$$\exists F_i \subset D_i \subset G_i, \mu(G_i \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

$$\bigcup_{i=1}^N F_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i, N \in \mathbb{N}.$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

□

┌ *Poznámka*

$\sigma$ -konečné míry nemusí být regulární, viz prostor spočetně přímek procházejících počátkem v  $\mathbb{R}^2$ .

### Definice 3.2 (Těsnost (= vnitřní regularita))

Borelovská míra  $\mu$  na metrickém (topologickém) prostoru  $X$  je těsná (= tight), jestliže  $\forall B \in \mathcal{B}(X) : \mu(B) = \sup \{\mu(K) \mid K \subset B \wedge K \text{ kompaktní}\}$ .

*Poznámka*

$\mu$  je Radonova míra, jestliže je těsná a konečná na kompaktech.

Pokud  $\mu$  je konečná a těsná, pak už je  $\mu$  regulární.

Jestliže  $\mu$  je konečná a regulární a  $\mu(X) = \sup \{\mu(K) \mid K \subset X \text{ kompaktní}\}$ , pak  $\mu$  je těsná.

### Věta 3.2

Pokud  $\mu$  je konečná borelovská míra na úplném separabilním metrickém prostoru, potom už je těsná.

┌ *Důkaz*

Stačí ukázat  $\mu(X) = \sup \{\mu(K) | K \subset X \text{ kompaktní}\}$ :  $S = \{x_1, x_2, \dots\} \subset X$  hustá spočetná (ze separability).  $\forall n \in \mathbb{N} : \bigcup_i \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i) = X$ . Necht' je dáno  $\varepsilon > 0$ . Pak  $\forall n \exists k_n : \mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}$  (ze spojitosti míry).

Definujeme  $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i) (\in \mathcal{B}(X))$ .  $A$  je totálně omezená (tzn.  $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset A$  kompaktní tak, že  $A \subset \bigcup_{x \in F} B_{\varepsilon}(x)$ ).  $\overline{A}$  je totálně omezená a uzavřená  $\implies \overline{A}$  je úplný MP (+ totálně omezený), tedy  $\overline{A}$  je kompaktní.

$$\mu(X \setminus \overline{A}) \leq \mu(X \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)\right)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)\right) < \varepsilon.$$

└ □

## 4 Věta o rozšíření míry

### Věta 4.1 (Hahn-Kolmogorov)

Bud'  $\tilde{\mu}$  *pramíra* na algebře  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \implies$  existuje míra  $\mu$  na  $\sigma\mathcal{A}$  taková, že  $\mu = \tilde{\mu}$  na  $\mathcal{A}$ . Je-li  $\tilde{\mu}$   $\sigma$ -konečná, je  $\mu$  určena jednoznačně.

*Důkaz*

Pro  $E \subset X$  položme  $\mu^*(E) := \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i) \mid A_i \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \}$ . Ověříme, že  $\mu^*$  je vnější míra.

„ $\forall A \in \mathcal{A} : \mu^*(A) = \tilde{\mu}(A)$ “: Zřejmě  $\mu^*(A) \leq \tilde{\mu}(A)$ , jelikož můžeme pokrýt  $A$  množinami  $A, \emptyset, \emptyset, \dots$ . Pro  $\geq$  mějme  $A \subset \bigcup_i A_i, A_i \in \mathcal{A}$ .  $B_1 := A_1 \cap A, B_2 := (A_2 \cap A) \setminus B_1, \dots$  O nich víme, že  $A = \bigcup_i B_i, B_i$  po dvou disjunktní,  $B_i \in \mathcal{A}$ .  $\tilde{\mu}(A) = \sum_i \tilde{\mu}(B_i) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i)$ , tedy z definice infima  $\tilde{\mu}(A) \leq \inf_{A_i} \sum_i \tilde{\mu}(A_i) = \mu^*(A)$ .

Zbývá ukázat, že  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$ . Necht  $A \in \mathcal{A}, T \subset X, \mu^*(T) < \infty$ . Stačí ukázat, že  $\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$ . K danému  $\varepsilon > 0$  existuje pokrytí  $T \subset \bigcup_i A_i$  množinami  $A_i \in \mathcal{A}$  takové že  $\sum_i \tilde{\mu}(A_i) < \mu^*(T) + \varepsilon$ . Protože  $T \cap A \subset \bigcup_i (A_i \cap A), T \setminus A \subset \bigcup_i (A_i \setminus A)$  a množiny  $A_i \cap A$  i  $A_i \setminus A$  patří do  $\mathcal{A}$ , platí

$$\mu^*(T \cap A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \cap A), \quad \mu^*(T \setminus A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \setminus A).$$

Sečtením dostaneme

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \cap A) + \sum_i \tilde{\mu}(A_i \setminus A) = \sum_i \tilde{\mu}(A_i) < \mu^*(T) + \varepsilon,$$

z čehož plyne dokazovaná nerovnost. Podle C. věty je  $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$  míra, která navíc podle druhé části důkazu rozšiřuje pramíru  $\tilde{\mu}$  a podle třetí je definovaná na  $\sigma\mathcal{A}$ .

Jednoznačnost:  $\mathcal{A}$  uzavřená na konečné průniky,  $\tilde{\mu}$  je  $\sigma$ -konečná  $\implies \exists A_n \in \mathcal{A}, A_n \nearrow X, \tilde{\mu}(A_n) < \infty \implies \mu$  je jednoznačně určena (věta o jednoznačnosti míry, TMI1).  $\square$

*Poznámka* (Zobecnění příkladu z TMI1)

$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i$  úplné separabilní metrické prostory (např.  $E_i = \mathbb{R}$ ),  $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N} \dots E_I = E_i, E, E_I$  metrické prostory.  $\pi_I : E \rightarrow E_I$  kanonická projekce. A následující věta:

### Věta 4.2 (Daniell-Kolmogorov)

$E_i$  úplné separabilní metrické prostory,  $i \in \mathbb{N}$ . Necht pro každou  $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$  existuje borelovská pravděpodobnostní míra  $\mu_I$  na  $E_I$ . A necht je splněna projektivní vlastnost:

$$\emptyset \neq I \subset J \subset \mathbb{N} \text{ konečná}, \forall B \in \mathcal{B}(E_I) : \mu_I(B) = \mu_J \left( (\pi_I^J)^{-1}(B) \right),$$

pak  $\exists!$  borelovská míra  $\mu$  na  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  taková, že  $\forall \emptyset \neq I \subset \mathbb{N} \text{ konečná}, \forall B \in \mathcal{B}(E_I) : \mu(\pi_I^{-1}(B)) = \mu_I(B)$ .

### Lemma 4.3

$$1) x_n, x \in E : x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n(i) \rightarrow x(i), i \in \mathbb{N},$$

$$x_n, x \in E_I : x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n(i) \rightarrow x(i), i \in I$$

2)  $\pi_I, \pi_I^J$  jsou spojitá zobrazení.

3)  $\forall I \in \mathcal{I}_f: E_I$  je úplný separabilní MP.

4)  $\mathcal{B}(E_I) = \otimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i)$ .

┌

Důkaz

1 jsme nedokazovali, 2 a 3 jsou triviální.

$$4) \otimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i) = \sigma \{X_{i \in I} B_i | B_i \in \mathcal{B}(E_i)\} = \sigma \{X_{i \in I} G_i | G_i \subset E_i \text{ otevřené}\},$$

tedy  $X_{i \in I} G_i$  je otevřená v  $E_I \implies \otimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i) \subset \mathcal{B}(E_I)$ . Naopak  $U \subset E_I$  otevřená  $\implies U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ , kde  $U_n = X G_i^n$ ,  $G_i^n \subset E_i$  otevřená  $\implies \mathcal{B}(E_I) \subset \otimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i)$ .  $\square$

└

#### Věta 4.4 (Daniell-Kolmogorov)

$E_i$  úplné separabilní metrické prostory  $i \in \mathbb{N}$ . Necht pro každou  $I \in \mathcal{I}_f$  existuje borelovská pravděpodobnostní míra  $\mu_I$  na  $E_I$ . Necht  $I \subset J \wedge I, J \in \mathcal{I}_f \implies \mu_I = \mu_J(\pi_I^J)^{-1}$ . Pak existuje právě jedna borelovská pravděpodobnostní míra  $\mu$  na  $E$  taková, že

$$\forall I \in \mathcal{I}_f: \mu_I = \mu(\pi_I)^{-1}.$$

┌

Důkaz

Položme  $\mathcal{A} := \{\pi_I^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}(E_i), I \in \mathcal{I}_f\}$ . Ukážeme nejprve, že systém  $\mathcal{A}$  je algebra. (Prostě se ověří podmínky.)

Definujeme množinovou funkci  $\tilde{\mu}$  na  $\mathcal{A}$  předpisem

$$\tilde{\mu}(A) = \mu_I(B), A = \pi_I^{-1}(B), B \in \mathcal{B}_I.$$

Ukážeme nejprve konzistenci této definice (dvě vyjádření podle předpokladů dávají stejný výsledek, když se rozepíší).

Dále se ukáže, že  $\tilde{\mu}$  je konečně aditivní množinová funkce. (Jednoduché.) Dále dokážeme, že je to pramíra (že splňuje podmínku spojitosti v prázdné množině).

Podle Hahn-Kolmogorovovy věty lze tedy pramíru  $\tilde{\mu}$  jednoznačně rozšířit na pravděpodobnostní míru  $\mu$  na  $\sigma\mathcal{A}$ . Zbývá ukázat, že  $\sigma\mathcal{A} = \mathcal{B}(E)$ . Protože projekce jsou spojitě, je vzor každé otevřené množiny otevřená, tedy borelovská množina. Platí tedy  $\sigma\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(E)$ . Pro opačnou inkluzi si uvědomme, že borelovská  $\sigma$ -algebra separabilního prostoru  $E$  je generována uzavřenými okolími  $\overline{U}_\varepsilon(x)$  bodů  $x \in E$ ,  $\varepsilon > 0$ . Z definice metriky v  $E$  a  $E_{[n]}$  snadno dostaneme vztah

$$\overline{U}_\varepsilon(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi_{[n]}^{-1}(\overline{U}_\varepsilon(\pi_{[n]}(x))),$$

tedy  $\overline{U}_\varepsilon(x) \in \sigma\mathcal{A}$ . Platí tedy i  $\mathcal{B}(E) \subset \sigma\mathcal{A}$  a důkaz je ukončen.

└

$\square$

## 5 Charakterizace Riemannovsky integrovatelných funkcí

### Věta 5.1

*Bud'  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  omezená. Pak*

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \text{ je spojitá v } \lambda^1\text{-skoro všude na } (a, b).$$



┌  
Důkaz

$(\mathcal{D}_n)$  posloupnost zjemňujících se dělení intervalu  $[a, b]$ .

$$\mathcal{D}_n = \left\{ a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{k_n}^{(n)} = b \right\}, n \in \mathbb{N}, \|\mathcal{D}_n\| = \max_{1 \leq i \leq k_n} (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Označme  $s_n(x) := \inf_{[x^{(n)}_{i-1}, x^{(n)}_i]} f$ ,  $S_n(x) := \sup_{[x^{(n)}_{i-1}, x^{(n)}_i]} f$ ,  $x \in (x^{(n)}_{i-1}, x^{(n)}_i]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  a  $S_n(x) := 0$ ,  $S_n(x) := 0$  pro ostatní  $x \in \mathbb{R}$ . Toto jsou jednoduché měřitelné funkce.

Horní a dolní Riemannův součet splňuje

$$\int_a^b f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b s_n d\lambda^1, \overline{\int_a^b f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{D}_n)} = \int_a^b S_n d\lambda^1.$$

$|f| \leq M$ , tedy  $-M \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq S_2 \leq S_1 \leq M$ . Označme  $f_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ,  $f_2 := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  (bodové limity funkcí).

$$-M \leq s_n \searrow f_1 \leq f \leq f_2 \nearrow S_n \leq M, \quad f_1, f_2 \text{ měřitelné.}$$

Ze zobecněné Leviho věty  $\int_a^b s_n d\lambda^1 \rightarrow \int_a^b f_1 d\lambda^1$ ,  $\int_a^b S_n d\lambda^1 \rightarrow \int_a^b f_2 d\lambda^1$ .

„ $\implies$ “: Necht  $f \in R[a, b]$ , tedy  $\underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f}$ . Proto

$$\int_a^b f_1 d\lambda^1 = \int_a^b f_2 d\lambda^1 \implies \int_a^b (f_2 - f_1) d\lambda^1 = 0 \implies f_1 = f_2 \lambda^1\text{-s.v.}$$

$$N := \{x \in [a, b] | f_1(x) \neq f_2(x)\} \cup \left\{ x_i^{(n)} | 0 \leq i \leq k_n, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \lambda^1(N) = 0.$$

Ukážeme, že  $f$  je spojitá ve všech bodech množiny  $(a, b) \setminus N$ : Buď  $x \in (a, b) \setminus N$ ,  $\varepsilon > 0$ . Potom  $f_1(x) = f_2(x) \implies \exists n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n(x) - s_n(x) < \varepsilon$ .  $I_n$  necht je otevřený interval dělení  $\mathcal{D}_n$ , pro nějž  $x \in I_n$ . Pak

$$s_n(x) \leq f(y) \leq S_n(x), y \in I_n \implies |f(y) - f(x)| \leq 2\varepsilon, y \in I_n \implies f \text{ je spojitá v bodě } x.$$

$\Leftarrow$  : Necht  $\lambda^1(\mathcal{D}) = 0$ , kde  $D := \{x \in (a, b) : f \text{ není spojitá v } x\}$ . Ukážeme, že  $S_n(x) - s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\implies S(f, \mathcal{D}_n) - s(f, \mathcal{D}_n) \rightarrow 0 \implies f \in R[a, b].$$

Necht  $x \in (a, b) \setminus \mathcal{D}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Pak  $f$  je spojitá v bodě  $x \implies \exists \delta > 0$ ,  $|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon$ .

Zvolme  $n_0$  tak velké, aby  $\|\mathcal{D}_n\| < \delta$ ,  $n \geq n_0$ . Pak

$$S_n(x) - s_n(x) \leq 2 \sup \{|f(y) - f(x)| : |y - x| < \delta\} < 2\varepsilon.$$

└

## 6 Pokrývací věty

*Poznámka (Úmluva)*

Koulí se myslí uzavřená koule,  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq r\}$ ,  $r > 0$ ,  $\text{rad } B = r$ ,  $t > 0 \implies tB = B(x, t \cdot r)$ .

### Lemma 6.1 („ $5r$ “ covering)

Nechť  $\mathcal{F}$  je systém koulí v  $\mathbb{R}^n$  (uzavřené, nedegenerované),  $\sup_{B \in \mathcal{F}} (\text{rad } B) < \infty$ . Pak existuje disjunkttní podsystém  $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$  takový, že

$$\forall B \in \mathcal{F} \exists B' \in \mathcal{F}' : B \cap B' \neq \emptyset \wedge B \subset 5B'.$$

*Důsledek*

$$\bigcup \mathcal{F} \subset \bigcup_{B' \in \mathcal{F}'} 5B'$$

*Důkaz („ $5r$ “ covering)*

Označme  $R := \sup_{B \in \mathcal{F}} \text{rad } B$ .  $\mathcal{F}_k := \{B \in \mathcal{F} \mid \text{rad } B \in (\frac{R}{2^{k+1}}, \frac{R}{2^k}]\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Dále definujeme indukci systémy  $\mathcal{B}_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ :  $\mathcal{B}_0$  libovolný maximální disjunkttní podsystém  $\mathcal{F}_0$ . Máme-li  $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_k$ :  $\mathcal{B}_{k+1}$  libovolný maximální disjunkttní podsystém

$$\{B \in \mathcal{F}_{k+1} \mid \forall B' \in \mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k : B \cap B' = \emptyset\},$$

$\mathcal{F}' := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k$  disjunkttní podsystém  $\mathcal{F}$ .

Nyní už jen ověříme vztah ze znění: Nechť  $B \in \mathcal{F}$ , pak  $B \in \mathcal{F}_k \implies \exists B' \in \mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ ,  $B \cap B' \neq \emptyset$  (z maximality). Dále víme, že  $\frac{R}{2^{k+1}} < \text{rad } B \leq \frac{R}{2^k}$  a  $\frac{R}{2^{k+1}} < \text{rad } B'$ , tedy  $\text{rad } B < 2 \text{rad } B'$ . Navíc  $B = B(x, r)$  a  $B' = B(x', r')$ ,  $r < 2r'$ ,  $B \cap B' \neq \emptyset$ , tedy  $\|x - x'\| \leq r + r'$ , tj.  $\forall y \in B : \|y - x'\| \leq \|y - x\| + \|x - x'\| \leq r + r + r' < 5r'$ .  $\square$

### Definice 6.1 (Vitaliovo pokrytí)

Nechť  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Řekneme, že systém uzavřených koulí  $\mathcal{F}$  je Vitaliovým pokrytím (Vitaly Cover) množiny  $A$ , jestliže

$$\forall a \in A \forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathcal{F} : a \in B, \text{rad } B < \varepsilon.$$

### Věta 6.2 (Vitaly Covering Theorem)

Nechť  $A \subset \mathbb{R}^n$  a  $\mathcal{F}$  je Vitaliovo pokrytí  $A$ . Pak existuje disjunkttní  $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$  takový, že  $\lambda^n(A \setminus \bigcup \mathcal{F}') = 0$ .

┌ *Důkaz*

BÚNO nechť  $\sup_{B \in \mathcal{F}} (\text{rad } B) \leq 1$ . „5r“ covering lemma nám pak říká, že  $\exists \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$  disjunkt ní takový, že platí

$$\forall B \in \mathcal{F} \exists B' \in \mathcal{F}' : B \cap B' \neq \emptyset \wedge B \subset 5B.$$

Ukážeme, že  $\lambda^n(A \setminus \bigcup \mathcal{F}') = 0$ . Označme  $Z_r := (A \setminus \bigcup \mathcal{F}') \cap U_r(\mathbf{o})$ ,  $\forall r > 0$ . Ukážeme, že  $\lambda^n(Z_r) = 0$ .

Označme  $\mathcal{F}'' := \{B' \in \mathcal{F}' \mid B' \cap U_r(\mathbf{o}) \neq \emptyset\}$  a  $\mathcal{F}_k'' := \{B' \in \mathcal{F}'' \mid \text{rad } B' \in (\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}]\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$   $\mathcal{F}'$  je disjunkt ní, tudíž

$$\sum_{B' \in \mathcal{F}''} \lambda^n(B') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{B' \in \mathcal{F}_k''} \lambda^n(B') \leq \lambda^n(B(0, r+2)) < \infty$$

$\implies \mathcal{F}_k''$  je konečný  $\forall k$ . Nechť je dáno  $\varepsilon > 0$ . Pak

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \sum_{k > k_0} \sum_{B' \in \mathcal{F}_k''} \lambda^n(B') < \varepsilon.$$

Zvolme pevně  $z \in Z_r$ . Zřejmě  $z \notin \bigcup_{k=0}^{k_0} \bigcup_{B' \in \mathcal{F}_k''} B' =: K$  (kompakt). Z vlastnosti Vitaliova pokrytí pak:

$$\exists B \in \mathcal{F} : B \cap K = \emptyset, z \in B, B \subset U_r(0).$$

Z vlastnosti pokrytí  $F'$  zřejmě  $B' \in \mathcal{F}''$ ,  $B' \notin \bigcup_{k=0}^{k_0} \bigcup \mathcal{F}_k''$ , tj.  $z \in 5B' \implies Z_r \subset \bigcup_{k > k_0} \bigcup_{B' \in \mathcal{F}_k''} 5B' \implies \lambda^{n*}(Z_r) \leq \sum_{k > k_0} \sum_{B' \in \mathcal{F}_k''} \lambda^n(5B') < 5^n \varepsilon$ .  $\varepsilon \rightarrow 0$  nám dá  $\lambda^n(Z_r) = 0$ . □

## Definice 6.2 (Lebesgueova hustota)

Pro  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  definujeme  $\Theta^{n*}(A, a) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\lambda^{n*}(A \cap B(a, \varepsilon))}{\lambda^n(B(a, \varepsilon))} (\leq 1)$  a  $\Theta_*^n(A, a) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\lambda^{n*}(A \cap B(a, \varepsilon))}{\lambda^n(B(a, \varepsilon))}$ , tzv. horní a dolní hustota množiny  $A$  v  $a$ . Pokud  $\Theta^{n*}(A, a) = \Theta_*^n(A, a)$ , pak definujeme Lebesgueovu hustotu  $A$  v  $a$  vztahem  $\Theta^n(A, a) = \Theta^{n*}(A, a)$ .

## Věta 6.3 (Lebesgueova o hustotě (Lebesgue Density Theorem))

Pokud  $A \subset \mathbb{R}^n$  je lebesgueovsky měřitelná, potom  $\Theta^n(A, \cdot) = \chi_A(\cdot)$   $\lambda^n$ -skoro všude.

┌  
Důkaz

Stačí ukázat, že  $\Theta^n(A, a) = 1$  pro  $\lambda^n$ -skoro všechna  $a \in A$ . BÚNO nechť  $A$  je omezená (obecně:  $A \cap B(0, n)$ ,  $n \rightarrow \infty$ ). Pro číslo  $0 < \delta < 1$  označme

$$A_\delta := \left\{ a \in A \mid \liminf_{r \rightarrow 0+} \frac{\lambda^n(A \cap B(a, r))}{\lambda^n(B(a, r))} < \delta \right\}.$$

Ukážeme, že  $\lambda^n(A_\delta) = 0$ . Z toho pak bude plynout, že  $\Theta_*^n(A, a) = 1$ , a tedy  $\Theta^n(A, a) = 1$ , pro skoro všechna  $a \in A$ .

Nechť pro spor  $\lambda^{n*}(A_\delta) > 0$  pro nějaké  $\delta < 1$ . Z regularity Lebesgueovy míry (nebo z definice vnější míry  $\lambda^{n*}$ ) víme, že existuje otevřená množina  $G \supseteq A_\delta$  taková, že  $\lambda^n(G) < \delta^{-1} \lambda^{n*}(A_\delta)$ . Položme

$$\mathcal{F} := \{B(a, r) \mid a \in A_\delta, B(a, r) \subset G, \lambda^n(A \cap B(a, r)) < \delta \lambda^n(B(a, r))\}.$$

Z definice množiny  $A_\delta$ , je vidět, že  $\mathcal{F}$  je Vitaliovým pokrytím množiny  $A_\delta$ . Podle Vitaliovy věty tedy existují po dvou disjunktní koule  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$  takové, že  $\lambda^n(A_\delta \setminus \bigcup_i B_i) = 0$ . Pak ale

$$\begin{aligned} \lambda^{n*}(A_\delta) &= \lambda^{n*}(A_\delta \cap \bigcup_i B_i) \leq \sum_i \lambda^{n*}(A_\delta \cap B_i) \leq \sum_i \lambda^n(A \cap B_i) < \\ &< \delta \sum_i \lambda^n(B_i) \leq \delta \lambda^n(G) < \lambda^{n*}(A_\delta). \quad \text{✗} \end{aligned}$$

└

□

## 7 Důkaz věty o substituci

### Věta 7.1

Je-li  $A \subset \mathbb{R}^n$  lebesgueovsky měřitelná a  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$   $L$ -lipschitzovské, platí  $\lambda^{n*}(f(A)) \leq L^n \lambda^n(A)$ .

┌  
Důkaz

Je-li  $A \subset B = B(x, r)$ , pak  $f(A) \subset f(B) \subset B(f(x), L \cdot r) \implies \lambda^{n*}(f(A)) \leq L^n \lambda^n(B)$ .

Ukážeme, že pro  $N \subset \mathbb{R}^n$  nulovou (tj.  $\lambda^n(N) = 0$ ) je  $\lambda^n(f(N)) = 0$ :  $N$  nulová  $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists I_i$  otevřené kvádry,  $N \subset \bigcup_i I_i$ ,  $\sum_i \lambda^n(I_i) < \varepsilon$ .

Můžeme zařídit, aby  $\frac{r(I_i)}{R(I_i)} \geq \eta > 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , kde  $R(I)$  a  $r(I)$  jsou poloměry opsané a vepsané koule  $I$ : Rozdělíme intervaly vůči delší straně.

Když  $B_i$  jsou koule opsané  $\bar{I}_i$ , pak  $\lambda^n(B_i) \leq \eta^{-n} \lambda^n(I_i)$  ( $B'_i \subset I_i \subset B_i \dots \lambda^n(I_i) > \lambda^n(B'_i) \geq \eta^n \lambda^n(B_i)$ ).

$$\begin{aligned} \lambda^{n*}(f(N)) &\leq \lambda^{n*}\left(\bigcup_i f(I_i)\right) \leq \lambda^{n*}\left(\bigcup_i f(B_i)\right) \leq \sum_i \lambda^{n*}(f(B_i)) \leq L^n \sum_i \lambda^n(B_i) \leq \\ &\leq \left(\frac{L}{\eta}\right)^n \sum_i \lambda^n(I_i) < \left(\frac{L}{\eta}\right)^n \varepsilon. \\ \varepsilon &\rightarrow 0 \dots \lambda^{n*}(f(N)) = 0. \end{aligned}$$

$A \subset \mathbb{R}^n$  měřitelná,  $\varepsilon > 0$ , BÚNO nechť  $\lambda^n(A) < \infty$  (jinak je nerovnost triviální).  $\lambda^n$  regulární  $\implies \exists G \supset A$  otevřená, že  $\lambda^n(G) < \lambda^n(A) + \varepsilon$ .  $\mathcal{F} := \{B \text{ uzavřená koule} \mid B \subset G\}$  Vitaliovo pokrytí  $G \implies B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$  disjunktní,  $\lambda^n(G \setminus \bigcup_i B_i) = 0$ .

$$\begin{aligned} \lambda^{n*}(f(A)) &\leq \lambda^{n*}(f(G)) \leq \lambda^{n*}\left(\bigcup_i f(B_i) \cup f(N)\right) \leq \sum_i \lambda^{n*}(f(B_i)) + \lambda^{n*}(f(N)) \leq \\ &\leq L^n \sum_i \lambda^n(B_i) = L^n \lambda^n(G) < L^n \lambda^n(A) + L^n \varepsilon \rightarrow L^n \lambda^n(A). \end{aligned}$$

└

□

### Definice 7.1 (Funkcionální norma)

Pro  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineární zobrazení, definujeme  $\|L\| := \sup_{\|u\| \leq 1} \|Lu\|$ .

Poznámka

Označme  $\delta(L) := \inf_{\|u\|=1} \|Lu\|$ ,  $L$  regulární  $\Leftrightarrow \delta(L) > 0$ . Tedy platí

$$\delta(L)\|u\| \leq \|Lu\| \leq \|L\| \cdot \|u\|, u \in \mathbb{R}^n.$$

## Tvrzení 7.2

$L, M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dvě regulární lineární zobrazení. Nechť existuje  $\gamma > 0$  takové, že  $\forall u \in \mathbb{R}^n : \|Lu\| \leq \gamma \|Mu\|$ . Pak  $|\det L| \leq \gamma^n |\det M|$ .

┌

*Důkaz*

a) Nechť  $M = \text{id}$ . Z předpokladů plyne, že pro každou kouli  $B = B(O, R)$  je  $L(B) \subset \gamma B$ , tedy

$$|\det L| \lambda^n(B) = \lambda^n(L(B)) \leq \gamma^n \lambda^n(B) \implies |\det L| \leq \gamma^n.$$

b) Pro  $M$  obecné: ( $v = Mu$ ),

$$\|LM^{-1}v\| \leq \gamma \|v\|, v \in \mathbb{R}^n \implies |\det LM^{-1}| \leq \gamma^n \implies |\det L| \leq \gamma^n |\det M|.$$

└

□

*Důkaz* (Věty o substituci)

Ať je dáno  $\varepsilon > 0$ .  $\forall x \in \mathcal{U} \exists r_x > 0 \forall y \in B(x, r_x)$ :

$$1. \|Dg(y) - Dg(x)\| < \varepsilon \cdot \delta(Dg(x)) \quad (\text{ze spojitosti diferenciálu } (Dg(\cdot))),$$

$$2. \|g(y) - g(x) - Dg(x)(y - x)\| < \varepsilon \cdot \delta(Dg(x)) \|y - x\| \quad (\text{ze spojitosti diferenciálu } (Dg(x))).$$

$$\exists \delta(L) \|u\| \leq \|Lu\| \leq \|L\| \cdot \|u\| \text{ je}$$

$$1.' \|Dg(y)u - Dg(x)u\| < \varepsilon \cdot \|Dg(x)u\|, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

$$2.' \|g(y) - g(x) - Dg(x)(y - x)\| < \varepsilon \cdot \|Dg(x)(y - x)\|.$$

$\exists \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathcal{U}$  (spočetná) taková, že  $\mathcal{U} = \bigcup_i B(x_i, r_{x_i})$ . (Nebot existují  $K_j$  kompaktní, které  $K_j \nearrow \mathcal{U}$ .)  $B_i := B(x_i, r_{x_i})$ ,  $L_i = Dg(x_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

$$1.' \implies 1.'' (1 - \varepsilon) \|L_i u\| \leq \|Dg(x)u\| \leq (1 + \varepsilon) \|L_i u\|, u \in \mathbb{R}^n, x \in B_i, i \in \mathbb{N}.$$

Existuje měřitelný rozklad  $U = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} E_{i,j}$  tak, že:

$$(a) E_{i,j} \subset B_i, \quad (b) \text{diam } E_{i,j} < \frac{1}{j}, \quad (c) \forall x \in E_{i,j} : r_x > \frac{1}{j}.$$

$$\implies \forall x, y \in E_{i,j} : \|g(y) - g(x)\| \stackrel{2'}{\leq} (1 + \varepsilon) \|Dg(x)(y - x)\| \stackrel{1''}{\leq} (1 + \varepsilon)^2 \|L_i(y - x)\|,$$

$$\|g(y) - g(x)\| \geq (1 - \varepsilon) \|Dg(x)(y - x)\| \geq (1 - \varepsilon)^2 \|L_i(y - x)\|.$$

$\implies$  zobrazení  $g \circ L_i^{-1} : L_i(\mathcal{U}) \rightarrow g(\mathcal{U})$  je  $(1 + \varepsilon)^2$ -lipschitzovské, stejně jako zobrazení  $L_i \circ g^{-1} : g(\mathcal{U}) \rightarrow L_i(\mathcal{U})$  je  $(1 - \varepsilon)^{-2}$ -lipschitzovské. Označme  $\eta := \max \{(1 + \varepsilon)^2, (1 - \varepsilon)^{-2}\}$ .

$$\begin{aligned}
\lambda^n(g(A)) &= \lambda^n(g(\bigcup_{i,j} E_{i,j})) = \lambda^n(\bigcup_{i,j} g(E_{i,j})) = \sum_{i,j} \lambda^n(g(E_{i,j})) \leq \eta^n \sum_{i,j} \lambda^n(L_i(E_{i,j})) \stackrel{\text{TMI1}}{=} \\
&= \eta^n \sum_{i,j} |\det L_i| \lambda^n(E_{i,j}) = \eta^n \sum_{i,j} \int_{E_{i,j}} |\det L_i| dx \leq \eta^{2n} \sum_{i,j} \int_{E_{i,j}} |Jg(x)| dx = \\
&= \eta^{2n} \int_A |Jg(x)| dx.
\end{aligned}$$

Podobně

$$\lambda^n(g(A)) \geq \eta^{-n} \sum_{i,j} \lambda^n(L(E_{i,j})) \geq \eta^{-n} \sum_{i,j} \int_{E_{i,j}} \eta^{-n} |Jg(x)| dx = \eta^{-2n} \int_A |Jg(x)| dx.$$

Následně pro  $\varepsilon \rightarrow 0$  je  $\eta \rightarrow 1$  a  $\lambda^n(g(A)) = \int_A |J(g(x))| dx$ . □

## 8 Konvergence posloupnosti funkcí

*Poznámka* (Připomenutí TMI1)

$f_n, f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$  jsou měřitelné.

$$f_n \xrightarrow{s.v.} f \equiv \mu \{x | f_n(x) \not\rightarrow f(x)\} = 0.$$

$$f_n \xrightarrow{L^p} f \equiv \|f_n - f\|_p \rightarrow 0.$$

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \equiv \forall \varepsilon > 0 : \mu \{x | \|f_n(x) - f(x)\| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0.$$

### Tvrzení 8.1

$$f_n, f \in L^p(\mu), f_n \xrightarrow{L^p} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

$$\mu(X) < \infty : f_n \xrightarrow{s.v.} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

$$\mu(X) < \infty : f_n \xrightarrow{\mu} f \implies \exists f_{n_k}, f_{n_k} \xrightarrow{s.v.} f.$$

$$\mu(X) < \infty : 1 \leq p < q \leq \infty \implies L^p(\mu) \supset L^q(\mu), f_n \xrightarrow{L^q} f \implies f_n \xrightarrow{L^p} f.$$

### Věta 8.2 (Lebesgueova věta + upgrade)

$$f_n \xrightarrow{s.v.} f, \exists g \in L^1(\mu), |f_n| \leq g \ \forall n \implies \int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

$$\text{Dokonce } f_n \xrightarrow{L^1} f.$$

┌ *Důkaz*

BÚNO  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $x \in X$  (například v těch bodech předefinujeme všechny funkce na 0).

$$g_n := \inf \{f_n, f_{n+1}, \dots\}, h_n := \sup \{f_n, f_{n+1}\}.$$

$$-g \leq g_n \leq f_n \leq h_n \leq g, \quad g_n \nearrow f \searrow h_n.$$

$$|f_n - f| \leq h_n - g_n \leq 2g \in L^1(\mu), \quad h_n - g_n \searrow 0 \xrightarrow{\text{Levi}} \int (h_n - g_n) d\mu \rightarrow 0 \implies$$

$$\implies \int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{L^1} f.$$

└

□

*Poznámka*

$$f \in L^1(\mu) \implies \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{x: |f(x)| \leq c} |f(x)| d\mu(x) = 0.$$

### Definice 8.1 (Stejněměrně integrovatelná posloupnost)

Řekneme, že posloupnost  $(f_n)$  měřitelných funkcí na  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  je stejněměrně integrovatelná (uniformly integrable), jestliže

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n \int_{|f_n| \geq c} |f_n| d\mu = 0.$$

### Tvrzení 8.3

$\mu$  konečná,  $(f_n)$  stejněměrně integrovatelná  $\implies f_n \in L^1(\mu)$ ,  $\sup_n \|f_n\|_1 < \infty$ .

┌ *Důkaz*

$$\int |f_n| = \underbrace{\int_{|f_n| < c} |f_n| d\mu}_{\leq c \cdot \mu(X)} + \underbrace{\int_{|f_n| > c} |f_n| d\mu}_{< 1 \text{ pro } c \text{ dostatečně velké}} \leq c\mu(X) + 1 \text{ pro dostatečně velká } c.$$

└

□

### Věta 8.4

Nechť  $\mu(X) < \infty$  a  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ . Pak  $f_n \xrightarrow{L^1} f \Leftrightarrow (f_n)$  je stejněměrně integrovatelná.



Důkaz

„ $\Leftarrow$ “: Necht  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ,  $(f_n)$  je stejnoměrně integrovatelná. Pak  $f_n \in L^1(\mu)$  a existuje vybraná podposloupnost  $(f_{n_j})$ ,  $f_{n_j} \xrightarrow{s.v.} f$ .

$$\int |f| d\mu = \int (\lim_{j \rightarrow \infty} |f_{n_j}|) d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int |f_{n_j}| d\mu < \infty \implies f \in L^1(\mu).$$

Předpokládejme nejprve, že  $\exists c \in \mathbb{R}$ ,  $|f_n| < c$ ,  $|f| \leq c$  skoro všude. Buď  $\varepsilon > 0$ , položme  $\delta := \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}$ .

$$\begin{aligned} \int |f_n - f| d\mu &= \int_{\{|f_n - f| \leq \delta\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\{|f_n - f| > \delta\}} |f_n - f| d\mu \leq \\ &\leq \delta \mu(X) + 2c \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) \stackrel{n \geq n_0}{<} \frac{\varepsilon}{2} + 2c \frac{\varepsilon}{4c} < \varepsilon \implies f_n \xrightarrow{L_1} f. \end{aligned}$$

Nyní  $f_n, f \in L^1$  libovolné,  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ,  $(f_n)$  stejnoměrně integrovatelná,  $\varepsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} &\int |f_n - f| d\mu \leq \\ &\leq \int_{\{|f_n| \leq c \wedge |f| \leq c\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\{|f_n| > c\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\{|f| > c\}} |f_n - f| d\mu =: I_n^1(c) + I_n^2(c) + I_n^3(c), \\ &\quad I_n^2(c) \leq \\ &\leq \int_{\{|f_n| > c\}} |f_n| d\mu + \int_{\{|f_n| > c \wedge |f| \leq c\}} |f| d\mu + \int_{\{|f_n| > c \wedge |f| > c\}} |f| d\mu \leq 2 \int_{\{|f_n| > c\}} |f_n| + \int_{\{|f| > c\}} |f|, \\ &\quad I_n^3(c) \leq \\ &\leq \int_{\{|f| > c\}} |f| d\mu + \int_{\{|f_n| > c \wedge |f| > c\}} |f_n| d\mu + \int_{\{|f_n| \leq c \wedge |f| > c\}} |f_n| d\mu \leq \int_{\{|f_n| > c\}} |f_n| + 2 \int_{\{|f| > c\}} |f|, \\ &\quad I_n^2(c) + I_n^3(c) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall c \geq c_0, \end{aligned}$$

z první části navíc  $I_n^1(c) < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\forall n \geq n_0$ . Tedy  $\int |f_n - f| d\mu < \varepsilon$ .

„ $\implies$ “: Necht  $f_n \xrightarrow{L_1} f$ ,  $\varepsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} \forall c: \int_{\{|f_n| > c\}} |f_n| d\mu &\leq \int_{\{|f_n| > c\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\{|f_n| > c \wedge |f| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}} |f| + \int_{\{|f_n| > c \wedge |f| > \frac{\varepsilon}{2}\}} |f| \leq \\ &\leq \int |f_n - f| d\mu + \frac{c}{2} \mu\left\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{c}{2}\right\} + \int_{\{|f| > \frac{\varepsilon}{2}\}} |f| d\mu \leq 2\|f_n - f\|_1 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Protože  $f \in L^1$ , existuje  $c_0 > 0$  takové, že  $\int_{\{|f| > \frac{\varepsilon}{2}\}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$  pro  $c > c_0$ . Rovněž pro každou funkci  $f_1, \dots, f_{n_0}$  existuje  $c_i > 0$  takové, že  $\int_{\{|f_i| > c\}} |f_i| < \varepsilon$ ,  $c > c_i$ ,  $i \in [n_0]$ . Pro  $c > \max\{c_{[n_0]_0}\}$  pak platí  $\int_{\{|f_n| > c\}} |f_n| < \varepsilon$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ . Tím je dokázána stejnoměrná integrovatelnost  $f_n$ .  $\square$

# A Hausdorffova míra

## Definice A.1 (Hausdorffova míra)

$A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $s \geq 0$ ,  $\delta > 0$ :

$$\mathcal{H}_\delta(A)^s := \inf_{A \subset \bigcup_i G_i, \text{diam } G_i \leq \delta} \sum_i \omega_s \left( \frac{\text{diam } G_i}{2} \right)^s,$$

kde  $\omega_s := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$  a  $G_i$  je nejvýše (kvůli  $s = 0$ ) spočetné pokrytí  $A$ . Hausdorffovu míru pak definujeme jako

$$\mathcal{H}^s := \lim_{\delta \rightarrow 0_+} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

┌

*Poznámka*

Konstanta  $\omega_s$  je zvolena tak, aby  $\omega_k = \lambda^k(B(0, 1))$  pro  $k \in \mathbb{N}$ .

└

## Tvrzení A.1

Pro  $\mathcal{H}^s$  platí:

1.  $\mathcal{H}_\delta^s, \mathcal{H}^s$  jsou vnější míry v  $\mathbb{R}^n$ .
2.  $\mathcal{H}^s$  jsou metrické vnější míry ( $s \geq 0$ ).
3.  $\mathcal{H}^s$  je borelovsky regulární (tj.  $\forall A \in \mathbb{R}^n \exists B \supset A, B \in \mathcal{B}^n, \mathcal{H}^s(B) = \mathcal{H}^s(A)$ ).
4.  $\mathcal{H}^0(A) = \text{card } A$ .
5.  $\mathcal{H}^s$  jsou translačně a rotačně invariantní.

┌ *Důkaz*

1. stejné jako u  $\lambda^{n*}$ .

2. Nechť  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\varrho := \text{dist}(A, B) > 0$ . Dokážeme, že  $\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ . Předpokládejme, že  $\mathcal{H}^s(A \cup B) < \infty$ , jinak je nerovnost zřejmá.  $\mathcal{H}^s$  je limita  $\mathcal{H}_\delta^s$ , takže stačí zvolit okolí, na kterém počítáme limitu, dostatečně malé ( $\text{diam} < \frac{\varrho}{2}$ ) a pak každá množina z pokrytí v  $\mathcal{H}_\delta^s$  zasáhne pouze jednu z množin z  $A, B$ .

3.  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Pokud  $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ , pak volíme  $B = \mathbb{R}^n$ . Jinak  $\forall n$  existuje  $A \subset \bigcup_i G_i^n$ ,  $\text{diam } G_i^n \leq \frac{1}{n}$ ,  $\sum_i \omega_s \left( \frac{\text{diam } G_i^n}{2} \right)^s < \mathcal{H}_{\frac{1}{n}}^s(A) + \frac{1}{n}$ .

$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_i \overline{G_i^n} \dots \quad (\text{borelovská množina}).$$

Zřejmě  $A \subset B$ .  $\mathcal{H}_{\frac{1}{n}}^s(B) \leq \sum_i \omega_s \left( \frac{\text{diam } \overline{G_i^n}}{2} \right)^s = \sum_i \omega_s \left( \frac{\text{diam } G_i^n}{2} \right)^s < \mathcal{H}_{\frac{1}{n}}^s(A) + \frac{1}{n}$ . Limitním přechodem  $n \rightarrow \infty$  pak dostaneme chtěnou nerovnost.

4.  $A$  je konečná – při dostatečně malém  $\delta$  potřebujeme na pokrytí každého bodu jednu množinu (na bod). Pro nekonečnou množinu plyne z monotonie.

5. 6. plynou přímo z definice. □

## Lemma A.2

$$\mathcal{H}^n \leq \lambda^n$$

┌ *Důkaz*

$G \subset \mathbb{R}^n$  otevřená  $\bar{?} \implies \mathcal{H}^n(G) \leq \lambda^n(G)$ .

$\delta > 0 \dots \mathcal{F} := \{B \subset G \mid B \text{ uzavřená koule, } \text{diam } B \leq \delta\} \dots$  Vitaliovo pokrytí  $G$ .

Z Vitaliovy věty plyne, že existuje spočetný disjunktní systém  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$ ,  $\lambda^n(G \setminus \bigcup_i B_i) = 0$ .

$$\mathcal{H}^n \ll \lambda^n \implies \mathcal{H}^n(G \setminus \bigcup_i B_i) = 0 \implies \mathcal{H}_\delta^n(G \setminus \bigcup_i B_i) = 0.$$

$$\varepsilon > 0 \implies \exists G \setminus \bigcup_i B_i \subset \bigcup_j D_j, \text{diam } D_j \leq \delta, \sum_j \omega_n \left( \frac{\text{diam } D_j}{2} \right)^n < \varepsilon.$$

$$G \subset \bigcup_i B_i \cup \bigcup_j D_j \implies \mathcal{H}_j^n(G) \leq \sum_i \omega_n \left( \frac{\text{diam } B_i}{2} \right)^n + \sum_j \omega_n \left( \frac{\text{diam } D_j}{2} \right)^n < \lambda^n(G) + \varepsilon.$$

┌ A limitním přechodem jsme vyhráli. S pomocí další věty? □

**Věta A.3** (Izodiametrická nerovnost)

---

$$\lambda^n(A) \leq \omega_n \left( \frac{\text{diam } A}{2} \right)^n, \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$

*Důsledek*

$$\mathcal{H} \geq \lambda^n.$$

┌

*Důkaz*

$$\begin{aligned} A \subset \bigcup_i G_i &\implies \lambda^n(A) \leq \sum_i \lambda^n(G_i) \leq \sum_i \omega_n \left( \frac{\text{diam } G_i}{2} \right)^n \implies \\ &\implies \mathcal{H}_\delta^n(A) \geq \lambda^n(A) \forall \delta > 0 \implies \mathcal{H}^n(A) \geq \lambda^n(A). \end{aligned}$$

└

□