

### Příklad (1)

Pro která  $n$  existuje graf na  $n$  vrcholech takový, že on i jeho doplněk jsou bipartitní.

┌

#### Řešení

Nechť  $A, B$  jsou partiti dané tím, že hledaný graf je bipartitní. Nechť  $C, D$  jsou partiti dané tím, že doplněk hledaného grafu je bipartitní. Potom dokážu, že  $|A \cap C| \leq 1$ ,  $|A \cap D| \leq 1$ ,  $|B \cap C| \leq 1$ ,  $|B \cap D| \leq 1$ . Kdyby totiž nějaká taková podmnožina měla alespoň dva vrcholy, pak mezi nimi buď v hledaném grafu, nebo doplňku existuje hrana, to je ale spor s tím, že oba vrcholy patří do jedné partity. Tedy  $n \leq 4$ . Na 4 a 3 existuje, např.  $([4], \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\})$  a  $([3], \{\{1, 2\}\})$ , na 2 vrcholech jsou zjevně všechny grafy bipartitní. Naopak pro  $n = 1$  už neexistuje rozdělení na 2 množiny, tedy odpověď je  $n \in \{2, 3, 4\}$ .

└

### Příklad (2)

Kolik existuje na  $[n]$  různých (ale ne nutně neizomorfních):

1. Úplných bipartitních grafů?
2. Kružnic?

┌

#### Řešení (Úplných bipartitních grafů)

Úplné bipartitní grafy jsou určeny partitou. Tedy počet úplných bipartitních grafů můžeme zjistit pomocí počtu podmnožin, kterých je  $2^n$ . Nesmíme však zapomenout, že každý takový graf jsme započítali 2krát, jednou „za podmnožinu“, jednou „za její doplněk“. Navíc jsme započítali i bipartitní graf sestávající z prázdné a úplné podmnožiny, tedy ještě musíme odečíst 1. Odpověď je tedy  $2^{n-1} - 1$ .

└

┌

#### Řešení (Kružnic)

První vrchol můžeme spojit s jedním z  $n - 1$  zbylých vrcholů, ten zas nezávisle na tom s jedním z  $n - 2, \dots$ , „předposlední“ vrchol spojujeme s jedním dalším vrcholem a „poslední“ vrchol s prvním. Tím jsme napočítali  $(n - 1)!$  grafů, ale každý jsme započítali dvakrát, protože jsme určili orientaci kružnice tím, s kterým vrcholem jsme spojili první vrchol. Tedy odpověď je  $\frac{(n-1)!}{2}$ .

Druhá možnost je, že kružnice budeme počítat jako cesty, které spojíme v koncových bodech. Podle toho, spojením kterých vrcholů vznikla kružnice, mohla daná kružnice vzniknout z  $n$  cest (kružnice má  $n$  hran a jednu z nich odebereme). Tedy počet kružnic je  $\frac{\text{počet cest}}{n} = \frac{n!}{2 \cdot n} = \frac{(n-1)!}{2}$ .

└

*Příklad (3)*

V grafu na 15 vrcholech má každý vrchol stupeň nejméně 7. Je tento graf už nutně souvislý?

┌

*Řešení (Sporem)*

Nechť existují dva vrcholy, mezi nimiž neexistuje cesta. Potom množiny jejich sousedů musí být disjunktní a jelikož mají stupeň nejméně 7, tak množiny sousedů musí být minimálně velikosti 7. Tedy dohromady máme nejméně 14 vrcholů mezi sousedy. Zároveň vrchol nemůže sousedit se sebou samým a z toho, jak jsme si dané 2 vrcholy definovali, tak nemohou sousedit ani tyto dva vrcholy. Tedy k těmto 14 vrcholům máme ještě další 2. Tudíž dohromady minimálně 16 vrcholů.  $\nexists$ . Tedy graf musí být spojitý.

└