

1 Úvod

Definice 1.1 (Metrika, metrický prostor)

M množina, $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ je metrika, pokud $\forall x, y, z \in M$ platí:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$d(y, x) = d(x, y),$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Dvojice (M, d) se pak nazývá metrický prostor.

Definice 1.2 (Norma a normovaný lineární prostor (NLP))

Ať \mathbf{V} je vektorový prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, pak $\|\cdot\| : \mathbf{V} \rightarrow [0, \infty)$ je norma, pokud $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o},$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{F} : \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Dvojice $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ se pak nazývá normovaný lineární prostor.

Definice 1.3 (Otevřená a uzavřená koule)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $x \in \mathbb{M}$, $r > 0$. Pak otevřená koule o středu x a poloměru r je množina $B(x, r) := \{y \in \mathbb{M}; d(x, y) < r\}$. Uzavřená koule o středu x a poloměru r je množina $\overline{B}(x, r) := \{y \in \mathbb{M}; d(x, y) \leq r\}$.

Věta 1.1

$(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ je NLP pro $d \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$.

┌
Důkaz

1. krok: $B = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\|_p \leq 1\}$ je konvexní množina (tj. $\forall \lambda \in (0, 1) \forall x, y \in B : \lambda x + (1 - \lambda)y \in B$). Pro $p = \infty$:

$$\forall i \in [d] : |\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i| \leq \lambda|x_i| + (1 - \lambda)|y_i| \leq \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 = 1$$

Pro $p < \infty$:

$$\forall i \in [d] : |\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i|^p \leq \lambda|x_i|^p + (1 - \lambda)|y_i|^p,$$

protože $t \mapsto t^p$ je konvexní funkce. Dopočítáním obou nerovností získáme, že je to opravdu konvexní množina.

2. krok: Pokud $\|\cdot\|$ splňuje (i) + (ii) a B je konvexní, pak $\|\cdot\|$ je norma. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, BÚNO $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, položme $\tilde{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$, $\tilde{\mathbf{y}} := \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$, tedy:

$$\frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} = \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \tilde{\mathbf{x}} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \tilde{\mathbf{y}} \in B \text{ (zlomky jsou } \lambda, 1 - \lambda).$$

$$\left\| \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \right\| \leq 1 \implies \frac{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

3. $\|\cdot\|_p$ zřejmě splní (i) + (ii) a B je konvexní podle 1. kroku. Tedy $\|\cdot\|_p$ je norma. \square

Poznámka (Značení)

$$l_p^d := (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p).$$

Definice 1.4 (Konvergence)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost v \mathbb{M} , $x \in \mathbb{M}$. Pak (x_n) konverguje k x pokud $d(x_n, x)$ konverguje k 0. Píšeme $x_n \rightarrow x$ nebo také $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

2 Otevřené a uzavřené množiny

Definice 2.1 (Vnitřek, vnějšek, hranice)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP. $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak $x_0 \in \mathbb{M}$ je vnitřní bod $A \equiv \exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq A$. Dále vnitřek (interior) množiny A je množina

$$\text{int}(A) = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je vnitřní bod } A\}.$$

Dále $x_0 \in \mathbb{M}$ je vnější bod $A \equiv \exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$. Vnějšek (exterior) množiny A je množina

$$\text{ext}(A) = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je vnější bod } A\}.$$

Nakonec $x_0 \in \mathbb{M}$ je hraniční bod $A \equiv x \in \mathbb{M} \setminus (\text{int}(A) \cup \text{ext}(A))$. Hranice množiny A je množina

$$\partial A = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je hraniční bod } A\}.$$

Pozorování

Zřejmě $\text{int}(A) \subseteq A$.

Zřejmě $\text{ext}(A) = \text{int}(\mathbb{M} \setminus A) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$.

Definice 2.2 (Otevřená a uzavřená množina)

Buď (\mathbb{M}, d) MP a $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak A je otevřená $\equiv A \cap \partial A = \emptyset$.

Dále uzávěr množiny A je množina $\overline{A} = A \cup \partial A$. Množina A je poté uzavřená $\equiv \partial A \subseteq A$.

Pozorování

Zřejmě A je otevřená $\Leftrightarrow A = \text{int}(A)$.

Otevřená koule je otevřená množina.

Lemma 2.1

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subseteq N \times A : x_n \rightarrow x$. Zároveň následující podmínky jsou ekvivalentní:

$$a) A \text{ je uzavřená,} \quad b) A = \overline{A}, \quad \forall (x_n \in A) : x_n \rightarrow x \in \mathbb{M} \implies x \in A.$$

┌

Důkaz

\implies : Ať $x \in \overline{A}$. Pokud $x \in A$, polož $x_n = x$. Pokud $x \notin A$, pak $x \in \partial A$, tedy $\forall n \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Pak $x_n \rightarrow x$ ($0 \leq d(x_n, x) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$).

\Leftarrow Ať (x_n) je posloupnost v A , $x_n \rightarrow x$. Pokud $x \in A$, jsme hotovi. Pokud $x \notin A$, pak $\forall \varepsilon > 0 \exists r_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in B(x, \varepsilon) \cap A$. Tedy $x \in \overline{A}$.

$$a) \Leftrightarrow b) \quad A \text{ je uzavřená} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \partial A \subseteq A \Leftrightarrow A = A \cup \partial A = \overline{A}.$$

$$b) \implies c) \implies a) \quad A = \overline{A} \implies \forall (x_n) : x_n \rightarrow x \implies x \in A \quad \text{První část} \implies \partial A \subseteq A. \quad \square$$

Věta 2.2 (Základní vlastnosti otevřených množin)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP. Pak

(i) \mathbb{M} a \emptyset jsou otevřené.

(ii) Sjednocení libovolně mnoha otevřených je otevřený.

(iii) Průnik konečně mnoha otevřených je otevřený.

┌

Důkaz

(i) Triviální. (ii) $x \in \bigcup_i M_i$, pak $\exists j : x \in M_j$. Potom M_j je otevřená, tedy existuje $r > 0 : B(x, r) \subseteq M_j \subseteq \bigcup_i M_i$. Tedy $\bigcup_i M_i$ je otevřená. (iii) $x \in \bigcap_i M_i$, pak $\forall i \exists r_i : B(x, r_i) \subseteq M_i$. Polož $r = \min_i r_i > 0$ (protože i je z konečné množiny, tedy existuje minimum a to je jistě jeden z těch poloměrů, tedy > 0), pak $B(x, r) \subseteq \bigcap_i M_i$. Tedy $\bigcap_i M_i$ je otevřená. \square

└

Věta 2.3 (Vztah otevřená a uzavřené množiny)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $A \subseteq M$. Pak A je otevřená $\Leftrightarrow \mathbb{M} \setminus A$ je uzavřená.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Zvol (x_n) posloupnost v $\mathbb{M} \setminus A$, $x_n \rightarrow x$. Sporem. Nechť $x \in A$. Potom $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$, ale pak $\exists n : x_n \in A$. ∇ .

\Rightarrow : Zvol $x \in A$. Protože $\mathbb{M} \setminus A$ je uzavřená, tedy $\partial(\mathbb{M} \setminus A) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$, $x \notin \partial(\mathbb{M} \setminus A)$, tedy $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ (to nelze) nebo $B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{M} \setminus A) = \emptyset$. Tedy $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{M} \setminus A) = \emptyset$, tj. $B(x, \varepsilon) \subseteq A$, tedy A je otevřená. \square

└

Věta 2.4 (Základní vlastnosti uzavřených množin)

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak

(i) \mathbb{M} a \emptyset jsou uzavřené.

(ii) Průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřený.

(iii) Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřené.

┌

Důkaz

Plyne z věty výše a de-Morganových pravidel. \square

└

Věta 2.5

Ať (\mathbb{M}, d) je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak $\text{int}(A) = \bigcup \{G \subseteq A \mid G \text{ otevřená}\}$. $\overline{A} = \bigcap \{F \supseteq A \mid F \text{ uzavřená}\}$.

┌ *Důkaz*

\subseteq : $x \in \text{int}(A) \implies \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$, stačí položit $G = B(x, \varepsilon)$.

\supseteq : Ať $G \subseteq A$ otevřená, pak $G = \text{int}(G) \subseteq \text{int}(A)$.

\subseteq : $x \in \overline{A}$, pak $\exists (x_n) \text{ v } A : x_n \rightarrow x$. Zvol $F \supseteq A$ uzavřená, pak $x_n \rightarrow x \in F$ (z uzavřené se nedá vykonvergovat).

\supseteq : Položme $F = \overline{A} \supseteq A$.

□

3 Spojitost v metrických prostorech

Definice 3.1 (Spojitost v bodě, spojitost, k -Lipschitzovskost, Lipschitzovskost)

Ať $(M, d), (N, e)$ jsou MP, $f : M \rightarrow N$, $a \in M$. Potom f je spojitá v $a \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : d(x, a) < \delta \implies e(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

f je spojitá na $M \equiv \forall a \in M : f$ je spojitá v a .

f je k -Lipschitzovská ($k > 0$) $\equiv \forall x, y \in M : e(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$.

f je Lipschitzovská $\equiv \exists k > 0 : f$ je k -Lipschitzovská.

Pozorování

f je k -Lipschitzovská $\implies f$ je spojitá.

Definice 3.2 (Značení)

Ať (M, d) je MP, $A \subseteq M$, $x \in M$. Pak $\text{dist}(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$.

Lemma 3.1

Ať (M, d) je MP, $A \subseteq M$. Pak

$$(i) \forall x \in M : d(x, A) = d(x, \overline{A}),$$

$$(ii) \forall x \in M : d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A},$$

$$(iii) \text{dist}(\cdot, A) : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ je } 1\text{-Lipschitzovská.}$$

┌

Důkaz

(i) \geq : Jasně (infimum přes menší množinu). \leq : Pro $n \in \mathbb{N}$ zvolme $y_n \in \bar{A}$: $d(x, y_n) < \text{dist}(x, \bar{A}) + \frac{1}{n}$. Zvolme dále $x_n \in B(y_n, \frac{1}{n}) \cap A$, pak $\text{dist}(x, A) \leq d(x, x_n) \leq d(x, y_n) + d(y_n, x_n) < \text{dist}(x, \bar{A}) + \frac{1}{n}$, celkem $\forall n \in \mathbb{N} : \text{dist}(x, A) < \text{dist}(x, \bar{A}) + \frac{2}{n} \implies \text{dist}(x, A) \leq \text{dist}(x, \bar{A})$.

(ii): BÚNO A je uzavřená (jinak podle (i)). \implies Jasně (do inf dosadíme x). $\implies \forall n \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ protože $d(x, A) = 0$. Pak ale $x_n \rightarrow x$, tedy $x \in A$ z uzavřenosti.

(iii): Zvolme $x, y \in \mathbb{M}$. BÚNO $d(x, A) \geq d(y, A)$. Fixujeme $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $y_n \in A$: $d(y, y_n) < \text{dist}(y, A) + \frac{1}{n}$. Pak

$$|d(x, A) - d(y, A)| = d(x, A) - d(y, A) < d(x, y_n) - \left(d(y, y_n) - \frac{1}{n}\right) \triangleq \frac{1}{n} + d(x, y).$$

\implies (n bylo libovolné, přejdeme k limitě) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq 1 \cdot d(x, y)$. □

Lemma 3.2

Ať (\mathbb{M}, d) je MP. Pak

(i) $\forall x \neq y \in \mathbb{M} \exists f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-Lipschitzovská, že $f(x) \neq f(y)$,

(ii) Projekce $\pi_i : (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p) \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_i$ jsou Lipschitzovské, $d \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$.

┌

Důkaz

(i) Zvol $f := d(\cdot, \{x\})$.

(ii) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d : |\pi_i(x_1, \dots, x_d) - \pi_i(y_1, \dots, y_d)| = |x_i - y_i|$

$$\leq \begin{cases} p = \infty : & \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty \\ p \neq \infty : & \sqrt[p]{\sum_{j=1}^d |x_j - y_j|^p} \end{cases}.$$

└

□

Tvrzení 3.3

Ať $(\mathbb{M}, d), (\mathbb{N}, e)$ jsou MP, $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) f je spojitá,

(ii) $f^{-1}(U)$ je otevřená, kdykoliv $U \subseteq \mathbb{N}$ je otevřená,

(iii) $f^{-1}(F)$ je uzavřená, kdykoliv $F \subseteq \mathbb{N}$ je uzavřená.

┌
Důkaz

(ii) \Leftrightarrow (iii): Z věty o doplňcích a toho, že $f^{-1}(\mathbb{N} \setminus U) = \mathbb{M} \setminus f^{-1}(U)$.

(i) \Rightarrow (ii): Necht $U \subseteq \mathbb{N}$ otevřená, $x \in f^{-1}(U)$. Pak $f(x) \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$. \Rightarrow (f spojitá) $\exists \delta > 0 : y \in B(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$, pak $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.

(ii) \Rightarrow (i): Necht $x \in \mathbb{M}, \varepsilon > 0$. Pak $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ je otevřená dle (ii). $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Tedy $d(x, y) < \delta \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$. \square

└

Definice 3.3 (Stejněměrná spojitost)

Ať (\mathbb{M}, d) a (\mathbb{N}, e) jsou MP, $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$. Pak f je stejněměrně spojitá, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \mathbb{M} : d(x, y) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Důsledek

f je stejněměrně spojitá $\Rightarrow f$ je spojitá. (Ale naopak to neplatí.)

f je Lipschitzovská $\Rightarrow f$ je stejněměrně spojitá. (Stejně tak tohle naopak neplatí.)

Definice 3.4 (Izometrie)

Ať (\mathbb{M}, d) a (\mathbb{N}, e) jsou MP, $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$. Pak f je izometrie, pokud $\forall x, y \in \mathbb{M} : d(x, y) = e(f(x), f(y))$.

Důsledek

Izometrie je 1-Lipschitzovská. (Ale ne naopak.)

Definice 3.5 (Homeomorfismus)

Ať (\mathbb{M}, d) a (\mathbb{N}, e) jsou MP, $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$. Pak f je homeomorfismus, pokud f je spojitá bijekce a f^{-1} je spojitá.

Důsledek

Izometrie na je homeomorfismus. (Ale opačně to neplatí.)

Lemma 3.4

I interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, že $|f'(x)| \leq C, \forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow f$ je C -Lipschitzovská.

┌

Důkaz

Ať $a < b \in I \Rightarrow$ (Lagrange) $\exists \zeta \in (a, b) : \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = |f'(\zeta)| \leq C$, tj. $|f(b) - f(a)| \leq C|b - a|$. \square

└
