

Příklad (1)

Na konferenci potkal matematik 5 svých dobrých známých. Jelikož program byl bohatý, setkávali se pouze u obědů. Kolik dní trvala konference, pokud:

1. s každým jednotlivcem obědval 10 krát,
2. s každou dvojicí 5 krát,
3. s každou trojicí 3 krát,
4. s každou čtveřicí 2 krát,
5. s celou pěticí právě jednou,
6. vždy obědval alespoň s jedním z těchto pěti kamarádů.

┌

Řešení

Rozmyslíme si, kolikrát obědval přesně s 1, 2, 3, 4, 5 lidmi (s více nemohl, protože jich tam více není, s 0 nemohl podle bodu 6.). Začal bych s pěticí, protože s pěticí se mohl setkat jen jedním způsobem. Necht se tedy 1 den setkal se všemi 5 (1 den).

Následně mě zajímá, kolikrát se setkal se čtveřicí. S každou čtveřicí už se setkal, když se setkal se všemi, tedy s každými právě 4 se potká 1 (5 dní).

S každou trojicí se setkal již jednou při setkání s pěticí a dvakrát ve čtveřici (s každým z dalších dvou jednou), tedy s právě 3 neobědval (0 dní).

S dvěma obědval jednou za pětici a třikrát za čtveřicí (za každého chybějícího z ostatních jednou), tedy s každými přesně 2 obědval 1 ($\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ dní).

Ve všech předchozích případech se dohromady potkal s $1 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 45$ obědolidmi. Ale s každým obědval desetkrát, což je 50 obědolidí, tedy musel ještě 5 krát obědvat s právě jedním člověkem (5 dní).

└

Dohromady tedy $1 + 5 + 0 + 10 + 5 = 21$ dní.

Příklad (2)

Ve volbách se o post prezidenta ucházeli Alice, Bob a Charlie. Dezinformační web přinesl zprávu, že:

1. 65 procent voličů by bylo spokojeno, kdyby byla zvolena Alice,
2. 57 procent voličů by bylo spokojeno, kdyby byl zvolena Bob,
3. 58 procent voličů by bylo spokojeno, kdyby byl zvolena Charlie,
4. 28 procent voličů by bylo spokojeno, kdyby byl zvolen kdokoli z dvojice Alice, Bob,
5. 30 procent voličů by bylo spokojeno, kdyby byl zvolen kdokoli z dvojice Alice, Charlie,
6. 27 procent voličů by bylo spokojeno, kdyby byl zvolen kdokoli z dvojice Bob, Charlie,
7. 12 procent voličů bude s prezidentem spokojeno, ať bude zvolen kterýkoli kandidát.

David chtěl spočítat, kolik procent voličů nebude spokojeno s žádným z možných výsledků voleb, ale dospěl k názoru, že neumí počítat. Ukažte, že chyba nebyla (jen) na jeho straně a že web, který tuto zprávu přinesl, je skutečně dezinformační.

┌

Řešení

„spokojeno, kdyby byl zvolen kdokoli z dvojice / kterýkoli“ značí přesně průnik voličů jednotlivých lidí. Tedy počet voličů, kteří budou spokojeni z nějakého výsledku voleb je podle PIE:

$$\underbrace{65 + 57 + 58}_{\text{Voliči jednotlivých lidí.}} \underbrace{- 28 - 30 - 27}_{\text{Průniky voličů 2 lidí.}} \underbrace{+ 12}_{\text{Průnik voličů 3 lidí.}} = \underbrace{107\%}_{\text{Sjednocení lidí.}}$$

└ , což je jaksí více než kolik je voličů. Tudíž web je jistě dezinformační (nebo idnes.cz).

Příklad (3)

Nechť M je množina přirozených čísel menších nebo rovných 4200, která jsou dělitelná 2, 3 nebo 7. Každý z vás si jistě dokáže programem na pět řádků včetně výpisu spočítat, že součet čísel v množině M je 6302100. Dokážete to ale spočítat i bez počítače pomocí PIE?

┌

Řešení

Ano.

Důkaz: Čísel dělitelných 2 menších než 4200 je $\frac{4200}{2} = 2100$, tedy jejich součet je $2 \cdot \frac{2100 \cdot 2101}{2}$, dělitelných 3 je $\frac{4200}{3} = 1400$, tedy součet $3 \cdot \frac{1400 \cdot 1401}{2}$, dělitelných 7 je $\frac{4200}{7} = 600$, součet $7 \cdot \frac{600 \cdot 601}{2}$.

Pokud je ale sečteme, tak jsme všechna dělitelná 6, 14 nebo 21 započítali dvakrát, tedy odečteme $\frac{4200}{6} = 700$, součet $6 \cdot \frac{700 \cdot 701}{2}$, $\frac{4200}{14} = 300$, součet $14 \cdot \frac{300 \cdot 301}{2}$, a $\frac{4200}{21} = 200$, součet $21 \cdot \frac{200 \cdot 201}{2}$.

Nyní ale zase nepočítáme ty dělitelná 42, tedy přičteme $\frac{4200}{42} = 100$, součet $42 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2}$. Tedy výsledek je:

$$\begin{aligned} & \frac{2 \cdot 2100 \cdot 2101 + 3 \cdot 1400 \cdot 1401 + 7 \cdot 600 \cdot 601}{2} + \\ & + \frac{-6 \cdot 700 \cdot 701 - 14 \cdot 300 \cdot 301 - 21 \cdot 200 \cdot 201 + 100 \cdot 101 \cdot 42}{2} = 6302100. \end{aligned}$$

└