Příklad
Pro nějakou matici A známe první sloupec maticové exponenciály:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -3e^t + 4e^{-t} & . \\ 2e^t - 2e^{-t} & . \end{pmatrix}.$$

Najděte A, e^{At}, stabilní, nestabilní a centrální podprostory.

Řešení
Jelikož se v exponentu vyskytují koeficienty -1 a 1, jsou to vlastní čísla A. Tedy hledáme matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} e^{t\cdot\Lambda} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Tedy $a\cdot\alpha = -3$, $b\cdot\gamma = 4$, $c\cdot\alpha = 2$ a $d\cdot\gamma = -2$. Jelikož sloupce první matice jsou libovolné vlastní vektory, můžeme a a c zvolit BÚNO, např. $a = -3$, tj. $\alpha = 1$ a $c = 2$, a $b = 2$, tj. $\gamma = 2$ a $d = -1$ (zkrátil jsem to dvěma, aby nevycházely zlomky). β a δ dopočítáme na 2 a 3.

Tedy

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 2e^t \\ 2e^{-t} & 3e^{-t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3e^t + 4e^{-t} & -6e^t + 6e^{-t} \\ 2e^t - 2e^{-t} & 4e^t - 3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Stabilní, nestabilní a centrální prostory máme přímo z definice:

$$\sigma_-(A) = \{-1\}, \qquad V_-(A) = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\sigma_+(A) = \{1\}, \qquad V_+(A) = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\sigma_0(A) = \emptyset, \qquad V_0(A) = \emptyset,$$

Příklad

Nalezněte stacionární body následující soustavy a rozhodněte o jejich stabilitě:

$$x' = xy - 2x - y + 2,$$
$$y' = xy - yz + xz,$$
$$z' = 2y(z + 1).$$

Řešení

Stacionární body jsou ty, kde jsou derivace nulové. Tedy (z $z' = 0$) buď $y = 0$, takže potom $x' = 2 - 2x = 0$, tedy $x = 1$ a $y' = z = 0$. Nebo $z = -1$, tedy $y' = xy - x - y = 0$ a odečtením od první rovnice $x = 2$ a $y = 2$.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y-2 & y+z & 0 \\ x-1 & x+z & 2z+2 \\ 0 & x+y & 2y \end{pmatrix}, \nabla f(1,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \nabla f(2,2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tedy podle věty o linearizované stabilitě není ani jedno stacionární řešení stabilní, neboť první matice má vlastní čísla -2, 2, 1, tedy alespoň jedno (dokonce dvě) kladné, a druhá matice má vlastní čísla 4 (a φ a $-\frac{1}{\varphi}$), tedy také alespoň jedno kladné.