Příklad (11)
Let $X = C^\infty([0,1])$ be the space of C^∞ functions on $[0,1]$ (i.e., C^∞ functions on $(0,1)$ such that all the derivatives can be continuously extended to $[0,1]$) equipped with the family of seminorms $\mathcal{P}$:

$$p_n(f) = \sup_{t\in[0,1]} \left|f^{(n)}(t)\right|, \qquad f \in X \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\,.$$

1. Describe a base of neighborhoods of zero.

Řešení
Podle Věty 5 je báze okolí **o** rovná

$$\{\{x \in X | p_1(x) < c_1, \ldots, p_k(x) < c_k\} | p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{P}, c_1, \ldots, c_k > 0\}\,,$$

tedy jsou to množiny těch funkcí, které mají vždy určité (konečný počet) derivace omezené určitými konstantami.

2. Is X Hausdorff? Is X metrizable? Is it a Fréchet space?

Řešení
Je Hausdorfův, protože pro každou nenulovou $f \in C^\infty$ je už p_0 nenulová (a použijeme Větu 5 z přednášky). Z Věty 5 také plyne, že X je (s kanonickou topologií) LCS, tedy podle Věty 22 (i a iv) je X metrizovatelný.

Aby to byl Fréchetův prostor, musíme ukázat, že je úplný: Mějme tedy cauchyovskou posloupnost (podle tvrzení 21. je tedy cauchyovská v každé p_n). To znamená, že každá i-tá derivace konverguje stejnoměrně, tedy konverguje k derivaci $(i-1)$-ní derivaci (o záměně limity a derivace) a zároveň k spojité funkci (stejnoměrná konvergence spojitých funkcí je spojitá), tedy limita posloupnosti má všechny derivace spojité.

3. Is X normable?

Řešení

Podle Věty 23 nám stačí rozhodnout, zda existuje omezené (podle lemma 15 omezené v každé normě) okolí **o**. Každé okolí **o** musí obsahovat množinu z báze okolí **o**. Ale taková množina je omezená vždy jen v konečně mnoha normách. Je-li p_n poslední norma (to neznamená, že v nějaké menší není omezena), ve které je daná množina omezená, ε minimum z konstant z definice báze okolí **o** (BÚNO $\varepsilon < 1$), pak můžeme pro každé $1 < K \in \mathbb{R}$ najít $f(x) = \varepsilon \frac{\varepsilon^n}{K^n} gon_n \left(\frac{K}{\varepsilon} x\right)$, kde ($gon_i$ je sin pro sudé i a cos pro liché i), což je funkce, která je jistě C^∞, pro $k \leqslant n$ je

$$p_k(f) = \sup_{x \in [0,1]} \left| f^{(k)}(x) \right| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{n-k}}{K^{n-k}} gon_{n-k} \left(\frac{K}{\varepsilon} x \right) \right| \leqslant \sup_{x \in [0,1]} \varepsilon \cdot 1 \cdot 1 = \varepsilon,$$

ale

$$p_{n+1}(f) = \sup_{x \in [0,1]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| = \sup_{x \in [0,1]} \left| K \cdot \cos \left(\frac{K}{\varepsilon} x \right) \right| = K.$$

Tedy p_{n+1} na tomto okolí je neomezená. Tedy neexistuje okolí **o**, které by bylo omezené, tedy prostor X není normovatelný.

4. Describe all the continuous linear functionals on X.

Řešení

$X \subset C([0,1])$ a libovolný spojitý lineární funkcionál na X je zřejmě lineární i v $C([0,1])$ a zároveň musí být spojitý vůči p_0, což je norma na $C([0,1])$, tedy musí být spojitý i na množině X jako podprostoru $C([0,1])$ a z Hahnovy–Banachovy věty ho lze rozšířit na spojitý lineární funkcionál na $C([0,1])$. Tedy „$X^* \subset C([0,1])^* = \mathcal{M}([0,1])$" (regulární borelovské znaménkové míry).

My víme (ze spojitosti), že pro $\mu \in C([0,1])^*$ existuje C tak, že $\forall f \in C([0,1]), p_0 = \|f\|_\infty < 1 : \mu(f) < C$, tedy po libovolné $\mu \in C([0,1])^*$ existuje okolí **o** ($\{f | p_0(f) < 1\}$), že μ je na tomto okolí omezené. Tedy podle Tvrzení 14 je μ spojité.

Jediné, co zbývá, je ukázat, že různé $\mu, \nu \in C([0,1])^*$ jsou jako prvky X^* také různé (tedy že existuje jednoznačná korespondence mezi X^* a $\mathcal{M}([0,1])$). To ale víme, protože z Weierstrassovy věty je X jako množina hustě v $C([0,1])$ a spojité funkce jsou jednoznačně určené hodnotami na husté podmnožině.