

# Organizační úvod

## Úvod

*Poznámka* (Motivace)

Hledání řešení diferenciálních rovnic. (Např. nahradíme rovnici definicí operátoru a hledáme, kde je operátor identita. Tedy neřešíme rovnice, ale prostory, na kterých máme funkce.)

### Definice 0.1

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} \vee \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

## 1 Banachovy a Hilbertovy prostory

### Definice 1.1 (Normovaný lineární prostor)

Nechť  $X$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{K}$ . Funkci  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  nazveme normou na  $X$ , pokud

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{o},$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

$$\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

### Tvrzení 1.1

Nechť  $(X, \|\cdot\|)$  je normovaný lineární prostor nad  $\mathbb{K}$ .

*Funkce  $\varrho(x, y) = \|x - y\|$  je translačně invariantní metrika na  $X$ .*

*Norma je 1-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na  $x$ .*

*Zobrazení  $+: X \times X \rightarrow X$  a  $\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$  jsou spojitá.*

┌

*Důkaz*

První část byla na MA3. Druhá: Zvol  $x, y \in X$ . Pak  $\|y\|, \|x\| \leq \|x\| + \|x - y\|$ , tudíž  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ .

Třetí část: Připomenutí: Součin metrických prostorů s maximovou metrikou je metrický prostor. Důkaz tohoto i třetí části je pak jednoduché cvičení. □

└

**Definice 1.2** (Uzavřená a otevřená koule)

$$B_X(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\}.$$

$$U_X(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| < r\}.$$

$$S_X(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| = r\}.$$

$$B_X = B(0, 1)$$

$$U_X = U(0, 1)$$

$$S_X = S(0, 1)$$

**Definice 1.3** (Banachův prostor)

Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Dále se opakovaly metrické prostory. Úplnost, kompaktnost a Bairova věta.

**Tvrzení 1.2**

*Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $Y$  jeho podprostor. Potom a) Je-li  $Y$  Banachův, pak je  $Y$  uzavřený v  $X$ . b) Pokud je naopak  $X$  Banachův, pak  $Y$  je Banachův právě tehdy, když je uzavřený.*

┌

*Důkaz*

Je-li  $(P, \varrho)$  úplný, pak  $M \subseteq P$  je úplný  $\Leftrightarrow M$  je uzavřený. To dává speciálně b).

$(P, \varrho)$  je MP, pak  $M \subseteq P$  je úplný  $\implies M$  uzavřený. To dává speciálně a). □

└

*Například*

$(\mathbb{K}, \|\cdot\|_p)$ ,  $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$ , kde funkce je  $\Omega \rightarrow \mathbb{K}$  a norma je definována jako  $p$ -tá odmocnina z integrálu funkce na  $p$ .  $l_p(l)$  resp.  $l_p(l, \mathbb{K})$  je diskretní verze předchozího (tj. se sumou).  $\mathbb{C}(K)$ , kde  $K$  je hausdorffův a kompaktní TP.

$c$  jsou všechny posloupnosti se supremovou normou,  $c_0$  jsou všechny posloupnosti konvergující k 0 se supremovou normou.  $c_{00}$  sestává z těch posloupností, kde je jen konečně mnoho nenulových prvků (norma je maximová), je to lineární prostor, ale není Banachův.  $c_0(I)$  je zobecnění z  $c_0(\mathbb{N})$  na libovolnou diskretní množinu  $I$ , tj. obsahuje „posloupnosti“, kde pro každé  $\varepsilon$  je pouze konečně mnoho členů větších než  $\varepsilon$  (pak  $(c_0(I), \|\cdot\|_\infty)$  je Banachův).

$\mathcal{L}^1([0, 1], \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1})$  (prostor hladkých funkcí na intervalu  $[0, 1]$ ), kde  $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ .  $\mathcal{M}(K) = \{\mu : \text{Borel}(K) \rightarrow \mathbb{K} \mid \mu \text{ regulární míra}\}$ ,  $\|\mu\| := \sup \{\sum_{i=1}^\infty |\mu(B_i)| \mid \bigcup B_i = K, B_i \text{ Borelové}\}$ .

### Věta 1.3

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Důkaz

Později. □

### Lemma 1.4

Nechť  $X$  je vektorový prostor,  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_2$  jsou normy na  $X$ ,  $B_1 = B_{X,\|\cdot\|_1}$ ,  $B_2 = B_{X,\|\cdot\|_2}$  a  $a, b > 0$ . Pak  $a\|x\|^2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$  pro každé  $x \in X$ , právě když  $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$ . Speciálně  $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$  právě tehdy, když  $B_1 = B_2$ .

Důkaz

$\Rightarrow$ : Zvol  $x \in aB_1$ , pak  $\|\frac{x}{a}\|_1 \leq 1 \Rightarrow x \in B_2$ . Opačně: Zvol  $x \in B_2$ , pak  $\|x\|_2 \leq 1 \Rightarrow x \in B_1$ .

$\Leftarrow$ : Pokud  $x = 0$ , pak jsou nerovnosti jasné. Zvol  $x \neq 0$ . Pak  $\frac{x}{\|x\|_1} \in B_1$ . Pak  $\frac{ax}{\|x\|_1} \in B_1 \subset B_2 \Rightarrow a\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ . Analogicky pro druhý směr. □

### Tvrzení 1.5

Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_2$  jsou normy na  $X$  a  $B_1$  a  $B_2$  jako minule. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Normy  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_2$  jsou ekvivalentní.
2. Existují  $a, b > 0$  taková, že  $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$ .
3. Zobrazení  $\text{id} : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$  je homeomorfismus.
4. Otevřené množiny v  $(X, \|\cdot\|_1)$  splývají s otevřenými množinami  $(X, \|\cdot\|_2)$ .
5.  $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$ , právě když  $\|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$  pro  $\{x_n\} \subset X$ ,  $x \in X$ .

Důkaz

$1 \Leftrightarrow 2$  plyne z předchozího lemmatu.  $3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$  je lehké a platí ve všech MP.  $1 \Rightarrow 5$  jasné.

$5 \Rightarrow 1$ : Sporem posloupností jdoucí k 1. TODO □

### Definice 1.4

Nechť  $X$  je vektorový prostor. Řekneme, že množina  $M \subset X$  je konvexní, pokud pro každé  $x, y \in M$  a  $\lambda \in [0, 1]$  platí, že  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$ .

*Poznámka (Fakt)*

Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny. (A naopak každá konvexní množina může být koulí v nějaké normě.)

### Definice 1.5 (Konvexní obal)

Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $M \subset X$ . Konvexním obalem  $M$  nazveme množinu  $\text{conv } M = \bigcap \{C \supset M \mid C \subset X \text{ je konvexní}\}$ .

### Tvrzení 1.6

Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $M \subset X$ . Pak

$$\text{conv } M = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid x_i \in M, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

┌  
Důkaz

└: Stačí dokázat, že množina vpravo je konvexní. Přímočaré.

└: Stačí dokázat, že každý prvek vlevo je v konvexním obalu. Indukcí podle  $n$ , přímočaré. □

### Definice 1.6

Nechť  $X$  je vektorový prostor. Řekneme, že množina  $M \subset X$  je symetrická, pokud  $-M = M$ .

*Poznámka (Fakt)*

Nechť  $M$  je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru  $X$ , která obsahuje  $U(x, r)$  respektive  $B(x, r)$  pro nějaké  $x \in X$  a  $r \geq 0$ . Pak  $U(0, r) \subset M$ , resp.  $B(0, r) \subset M$ .

┌  
Důkaz  
└ Jednoduchý. □

### Definice 1.7

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $M \subset X$ . Pak definujeme uzavřený lineární obal  $M$  jako

$$\overline{\text{span}} M = \bigcap \{Y \supset M \mid Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$$

a uzavřený konvexní obal jako  $\overline{\text{conv}} M = \bigcap \{TODO\}$ .

*Poznámka (Fakt)*

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor,  $Y$  je podprostor  $X$  a  $C \subset X$  je konvexní. Pak  $\overline{Y}$  je podprostor  $X$  a  $\overline{C}$  je konvexní množina.

*Poznámka (Fakt)*

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $M \subset X$ . Pak  $\overline{\text{span}} M = \overline{\text{span } M}$  a  $\overline{\text{conv}} M = \overline{\text{conv } M}$ .

### Věta 1.7

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor,  $Y \subset X$  uzavřený podprostor a  $Z \subset X$  konečněrozměrný podprostor. Pak  $\text{span}(Y \cup Z)$  je uzavřený.

┌

*Důkaz*

Stačí dokázat pro  $\dim Z = 1$  (pak indukcí). Ať  $Z = \text{span}(e)$ ,  $e \notin Y$ . Ověříme, že  $\text{span}(Y \cup \{e\}) = \{y + ke | k \in \mathbb{K}\}$  je uzavřený: Ať  $x_n = y_n + k_n e \rightarrow x \in X$ . Chci  $x \in \text{span } Y$ .

1. krok:  $(t_n)$  je omezená. (Kdyby ne, pak má limitu nekonečno.) Pak ale  $\|\frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} + e\| = \frac{1}{|t_{n_k}|} \|x_{n_k}\| \rightarrow 0$ , tedy  $\frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} \rightarrow -e \notin Y$ , tedy  $Y$  není uzavřená.  $\nexists$

Tedy existuje posloupnost  $(n_k)$ , že  $t_{n_k} \rightarrow t \in \mathbb{K}$ . Pak ale  $y_{n_k} = x_{n_k} - t_{n_k} e \rightarrow x - te \in Y$ . Tedy  $\exists z \in Y : x - te = z$ , tj.  $x = z + te \in \text{span}(Y \cup \{e\})$ .  $\square$

└

*Důsledek*

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor  $X$  je uzavřený v  $X$ .

TODO

### Věta 1.8 (Test úplnosti)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor. Pak  $X$  je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

┌ *Důkaz*

$\Rightarrow$  : Ať  $X$  je Borelovský,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  je AK řada.  $s_N = \sum_{n=1}^N x_n$ . Chceme  $(s_n)$  je cauchy: Buď  $\varepsilon > 0$ . Ať  $n_0 \in \mathbb{N}$  je takové, že  $\sum_{n=N}^M \|x_n\| < \varepsilon$ ,  $n_0 \leq N < M$ . Pak ale pro  $n_0 \leq N < M$  je

$$\|s_N - s_M\| = \left\| \sum_{n=N+1}^M x_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \|x_n\| < \varepsilon.$$

Tedy  $(s_n)$  je konvergentní.

$\Leftarrow$  : Ať  $(x_n)$  je cauchyovská. Indukcí najdeme podposloupnost, že  $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Pak

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_1})$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - x_{n_1} + x_{n_1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - x_{n_1}) + \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_1} = z + x_{n_1}.$$

Celkem  $\exists (n_k) \nearrow$ , že  $\lim(x_{n_k})$  existuje. Značme  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ . Chceme  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . V metrickém prostoru konverguje Cauchyovská posloupnost právě tehdy, pokud existuje její konvergentní podposloupnost.  $\square$

### Definice 1.8 (Zobecněná řada)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor,  $\Gamma$  je množina a  $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  je kolekce prvků prostoru  $X$ . Symbol  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$  nazveme zobecněnou řadou.

Dále  $\mathcal{F}(\Gamma)$  značí systém všech konečných podmnožin  $\Gamma$ . Řekneme, že zobecněná řada ... konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k  $x \in X$ , pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \subseteq F : \left\| x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li  $x \in X$ , říkáme, že je zobecněná řada ... (bezpodmínečně) konvergentní a  $x$  nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|$ , pak se zobecněná řada  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$  nazývá absolutně konvergentní.

### Definice 1.9 (Bolzanova-Cauchyova podmínka)

Řekneme, že zobecněná řada TODO

### Věta 1.9 (Nutná podmínka konvergence)

Nechť  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$  je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru  $X$ . Pak je její součet určen jednoznačně a  $(\|x_\gamma\|)_{\gamma \in \Gamma} \in c_0(\Gamma)$ .

┌ *Důkaz (Jednoznačnost)*

At  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma = x \neq y = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ . Pak  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$\exists F_x \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F \supseteq F_x : \|x - \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists F_y \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F \supseteq F_y : \|y - \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro  $\varepsilon = \|x - y\| \leq \|x - \sum_{F_x \cup F_y} x_\gamma\| + \|\sum_{F_x \cup F_y} x_\gamma - y\| < \varepsilon$ . ✎

□

┌ *Důkaz (Existence)*

Chceme  $(\|x_\gamma\|) \in c_0(\Gamma)$ : At  $\varepsilon > 0$  libovolné. Najdeme

$$F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \supset F : \|x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro  $\gamma_0 \notin F$  máme

$$\|x_{\gamma_0}\| = \left\| \sum_{\gamma \in F \cup \{\gamma_0\}} x_\gamma - x + x - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma \right\| \leq \|\dots\| + \|\dots\| < \varepsilon.$$

Tedy  $\{\gamma \in \Gamma \mid \|x_\gamma\| > \varepsilon\} \subseteq F \in \mathcal{F}(\Gamma) \implies (\|x_\gamma\|) \in c_0(\Gamma)$ . (Je tam pouze konečný počet prvků větších než  $\varepsilon$ .)

□

## Věta 1.10

*Nechť  $X$  je Banachův prostor.*

1. *Zobecněná řada v  $X$  je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*
2. *Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v  $X$  je konvergentní.*
3. *Je-li zobecněná řada  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$  v  $X$  konvergentní a  $\Lambda \subset \Gamma$ , pak je i zobecněná řada  $\sum_{\gamma \in \Lambda} x_\gamma$  konvergentní.*

┌  
Důkaz (1.)

⇒ : Ať  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$  je konvergentní. Zvol  $\varepsilon > 0$ . Zvolíme

$$F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \supseteq F : \left\| \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro  $\tilde{F} \in \mathcal{F}(\Gamma)$ , že  $\tilde{F} \cap F = \emptyset$  máme:

$$\left\| \sum_{\gamma \in \tilde{F}} x_\gamma \right\| = \left\| \sum_{\gamma \in F \cup \tilde{F}} x_\gamma - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma + \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma \right\| \leq \|\dots\| + \|\dots\| < \varepsilon.$$

⇐: Ať  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$  splňuje B-C podmínku. Pak najdeme posloupnost  $(F_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}(\Gamma)^\mathbb{N}$ ,  
že

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \wedge \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma) : F' \cap F_n = \emptyset : \left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \frac{1}{n}.$$

Označ  $y_n = \sum_{\gamma \in F_n} x_\gamma$ . 1. krok:  $(y_n)$  je cauchyovská. (Dokáže se snadno.) 2. krok: Tedy existuje  $y \in X : \lim y_n = y$ . Chceme  $y = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ . Ať  $\varepsilon > 0$ .

$$\forall F' \supset F : \left\| y - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| \leq \left\| y_{n_0} - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| + \|y_{n_0} - y\| = \sum_{\gamma \in F' \setminus F_{n_0}} x_\gamma \leq \frac{1}{n_0} + \|y_{n_0} - y\| < \varepsilon.$$

□

┌  
Důkaz (2.)

Víme, že  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|$  je konvergentní. Dle tvrzení níže tedy

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\| = S = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\| : F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\}.$$

Ověříme, že  $\sum x_\gamma$  splní B-C podmínku: Ať  $\varepsilon > 0$ . Ať  $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$  tak, že  $S - \varepsilon < \sum_{\gamma \in F} \|x_\gamma\|$ . Pak  $\forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ , že  $F' \cap F = \emptyset$ :

$$\left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| \leq \sum_{\gamma \in F'} \|x_\gamma\| = \sum_{\gamma \in F' \cup F} \|x_\gamma\| - \sum_{\gamma \in F} \|x_\gamma\| < \varepsilon.$$

□

┌  
Důkaz (3.)

Snadný důsledek 1., protože B-C podmínka se zjevně dědí na podmnožiny.

□

## Tvrzení 1.11

Nechť  $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$  je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když  $\sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} a_\gamma : F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\} < +\infty$ . A navíc platí  $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} a_\gamma : F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\}$ .



┌ *Důkaz*

$\Rightarrow$  : Ať  $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$  konverguje. Pak zvolíme  $F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \supset F : \|\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma - \sum_{\gamma \in F} a_\gamma\| < 1$ . Pak  $\forall H \in \mathcal{F}(\Gamma) : \sum_{\gamma \in H} a_\gamma \leq \sum_{\gamma \in H \cup F} a_\gamma \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma + 1$ . Tedy  $\sup \dots \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma + 1 < \infty$ .

$\Leftarrow$  : Ať  $S := \sup \dots < \infty$ . Chceme  $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = S$ . Ať  $\varepsilon > 0$ . Ať  $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$  (z definice suprema) taková, že  $S - \varepsilon < \sum_{\gamma \in H} a_\gamma$ . Pak pro  $F' \supset H$  máme

$$|S - \sum_{\gamma \in F'} a_\gamma| = S - \sum_{\gamma \in F'} a_\gamma < S - \sum_{\gamma \in H} a_\gamma < \varepsilon.$$

└ Tedy  $\sum a_\gamma = S$ . □

## Tvrzení 1.12

*Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $\{x_n\} \subset X$ . Pak zobecněná řada  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$  je absolutně konvergentní, právě když řada  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  je konvergentní.*

┌ *Důkaz*

$\Rightarrow$  : Ať  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| =: S < \infty$ . Pak

$$\sup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \sum_{n \in F} \|x_n\| \leq \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^N \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = S < \infty,$$

neboť každá konečná množina v přirozených číslech má maximum (a odebráním kladných prvků sumu zmenšíme).

$\Leftarrow$  : Ať  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$  je konvergentní, pak dle předchozího tvrzení  $S := \sup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \sum_{n \in F} \|x_n\| < \infty$ . Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n \in [N]} \|x_n\| \leq S < \infty.$$

└ □

## Věta 1.13

*Nechť  $\{x_n\}$  je posloupnost v Banachově (pro normovaný lineární prostor je důkaz složitější) prostoru  $X$ . Pak následující tvrzení jsou konvergentní:*

1.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$  konverguje (říkáme  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  konverguje bezpodmínečně).
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$  konverguje pro každou permutaci  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ke stejnému součtu.
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$  konverguje pro každou permutaci  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

┌ *Důkaz*

1  $\implies$  2: Ať  $\varepsilon > 0$  a  $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$ . Ať  $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$  splňuje, že  $\forall F' \supseteq F : \|\sum_{n \in F'} x_n - x\| < \varepsilon$ , kde  $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ . Zvolme  $n_0 \in \mathbb{N} : F \subseteq \{\pi(1), \dots, \pi(n_0)\}$ . Pak  $\forall n \geq n_0 : \|\sum_{i=1}^n x_{\pi(i)} - x\| < \varepsilon$ . Tedy  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = x$ .

2  $\implies$  3: okamžitě. 3  $\implies$  1: Pro spor předpokládejme, že  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$  konverguje pro každou  $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$ , ale  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$  nesplňuje B-C podmínku. Zvolme  $\varepsilon > 0$  svědčící o tom, že B-C podmínka není splněna. Pak existuje  $(F_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ , že  $F_n \cap F_m = \emptyset \ \forall n \neq m$ ,  $\max F_n < \min F_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  a  $\|\sum_{i \in F_n} x_i\| \geq \varepsilon$ .

Zvolme  $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N})$  splňující, že existuje  $(n_k) \nearrow$  a  $(p_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , že  $\pi(\{n_k, n_k + 1, \dots, n_k + p_k\}) = F_k \ \forall k \in \mathbb{N}$ . Tedy  $\forall k \in \mathbb{N} : \|\sum_{i=n_k}^{n_k+p_k} x_{\pi(i)}\| = \|\sum_{i \in F_k} x_i\| \geq \varepsilon$ . To však znamená, že  $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$  nesplňuje B-C podmínku, tedy není konvergentní.  $\zeta$  □

## Věta 1.14

*Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.*

┌ *Důkaz*

Jasný z minulé věty. □

*Navíc v  $\mathbb{R}$  platí ekvivalence.*

## Věta 1.15

*Pokud  $\dim X = +\infty$ , pak  $\exists (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  konverguje, ale  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$  není konvergentní.*

# 2 Lineární operátory a funkcionály

*Poznámka* (Opakovali jsme)

Lineární zobrazení (viz lingeбра), dále:

## Věta 2.1

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory a  $T : X \rightarrow Y$  je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1.  $T$  je spojitý.
2.  $T$  je spojitý v jednom bodě.
3.  $T$  je spojitý v 0.
4.  $\exists C \geq 0$  tak, že  $\|T(x)\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X$ .
5.  $T$  je Lipschitzovské.
6.  $T$  je stejnoměrně spojitý.
7.  $T(A)$  je omezená pro každou omezenou  $A \subset X$ .
8.  $T(B_X)$  je omezená.
9.  $T(U(0, \delta))$  je omezená pro nějaké  $\delta > 0$ .

Prostor  $\mathcal{L}(X \rightarrow Y)$  s normou  $\|T\| = \sup_{x \in B_x} \|T(x)\|$  je normovaný lineární prostor.

## Lemma 2.2

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

- $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$  pro každé  $x \in X$ .
- $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$ .
- $\|T\| = \inf \{C \geq 0 \mid \|T(x)\| \leq C\|x\| \forall x \in X\}$ .

┌ *Důkaz*

Pro  $x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$  platí  $\|T(x)\| = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ .

$S_X \subseteq B_X$ , tedy  $\|T\| \geq \sup_{x \in S_X} \|T(x)\|$ .  $\forall x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$ :

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \sup_{y \in S_X} \|T(y)\|,$$

tedy  $\sup_{x \in S_X} \|T(x)\| \geq \sup_{x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} =: S_3$ . Pro  $x \in U_X \setminus \{\mathbf{o}\}$  platí  $\|T(x)\| \leq \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq S_3$ , tedy  $\sup_{x \in U_X} \|T(x)\| \leq S_3$ . Konečně, pro  $x \in B_x$ :  $\|T(x)\| \leftarrow \|T((1 - \frac{1}{n})x)\| \leq \sup_{x \in U_X} =: S_4$ , tedy  $\|T_x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(1 - \frac{1}{n})x\| \leq S_4 \implies \sup_{x \in B(x)} \|T(x)\| \leq S_4$ .

Dle prvního bodu máme nerovnost „ $\geq$ “. Pro „ $\leq$ “ zvolme  $\varepsilon > 0$  ... ať  $\tilde{c} > 0$  je takové, že  $\tilde{c} < \inf \{ \dots \} + \varepsilon$ . Pak  $\|T\| = \sup_{x \in B_x} \frac{\|T_x\|}{\|x\|} \leq \inf \{ \dots \}$ . □

## Definice 2.1

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor nad  $\mathbb{K}$ . Prostor  $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$  značíme  $X^*$  a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru  $X$ .

TODO!!!

TODO!!!

TODO!!!

*Poznámka* (Kvociet)

Nechť  $X$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{K}$  a  $Y$  jeho podprostor. Definujeme relaci ekvivalence  $\sim$  na  $X$  jako  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y$ .

Pro  $x \in X$  pak definujeme  $[x]$  jako třídu ekvivalence obsahující  $x$ .

Na množině  $X/Y = \{[x] | x \in X\}$  definujeme operace  $[x] + [y] = [x + y]$  a  $\alpha[x] = [\alpha x]$ .

## Definice 2.2 (Kvociet)

Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $Y$  jeho podprostor. Pak vektorový prostor  $X/Y$  nazýváme faktoprostorem prostoru  $X$  podle  $Y$  nebo též kvocientem  $X$  podle  $Y$ . Dále definujeme tzv. kanonecké kvocientové zobrazení  $q : X \rightarrow X/Y$  předpisem  $q(x) = [x]$ .

### Definice 2.3 (Norma na kvocientu)

Buď  $X$  normovaný lineární prostor a  $Y$  jeho uzavřený podprostor. Pak  $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$  je normovaný lineární prostor s normou

$$\|[x]\|_{X/Y} = \inf_{y \in [x]} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \text{dist}(x + Y, 0) = \text{dist}(x, Y).$$

Tato norma se nazývá kanonická kvocientová norma.

┌  
Důkaz (Je to norma)  
└ Triviální. □

### Tvrzení 2.3

*Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $Y$  jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení  $q : X \rightarrow X/Y$  je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje  $q(U_x) = U_{X/Y}$ . Je-li  $Y$  vlastní, pak  $\|q\| = 1$ .*

┌  
Důkaz  
└ Zřejmý. □

### Věta 2.4

*Nechť  $X$  je Banachův prostor. Potom TODO!*

┌  
Důkaz  
Přes test úplnosti ( $X$  je Banachův, právě když každá abs. konvergentní řada je konvergentní). Ať  $\{[x]_n | n \in \mathbb{N}\}$  splňuje  $\sum_{n=1}^{\infty} < \infty$ . Chceme  $\sum_{[x]_n}$ . Ať  $\{y_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y$  jsou takové, že  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + y_n\| < \infty$ . Pak  $\sum (x_n + y_n)$  je konvergentní (podle testu úplnosti) a je prvkem  $X$ , tedy  $q(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} q(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} [x_n]$ . Tudíž  $\sum_{n=1}^{\infty} [x_n]$  je v prostoru  $q(X) = X/Y$ . □  
└

*Poznámka (Zajímavosti)*

$l_{\infty}/c_0$  je docela zajímavý prostor (Rosemider? + Brech? 2012: Je nerozhodnutelné, zda  $l_{\infty}/c_0$  je izometricky univerzální Banachův prostor hustoty  $|\mathbb{R}|$ . Dokonce je nerozhodnutelné, zda takový prostor existuje.) ( $l_{\infty}/c_0 \equiv \mathcal{C}(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ )

### Definice 2.4 (Direktní součet)

Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $A, B$  jsou jeho podprostory. Říkáme, že  $X$  je direktním (též algebraickým) součtem  $A$  a  $B$  (značíme  $X = A \oplus B$ ) pokud  $A \cap B = \{\mathbf{o}\}$  a  $X = A + B = \text{span}\{A \cup B\}$ .

### Definice 2.5 (Projekce)

Nechť  $X$  je vektorový prostor. Lineární zobrazení  $P : X \rightarrow X$  se nazývá (lineární) projekce, pokud  $P^2 = P \circ P = P$ .

### Tvrzení 2.5 (Fakt)

Nechť  $X$  je vektorový prostor.

- Je-li  $P : X \rightarrow X$  lineární projekce, pak  $P \restriction_{\text{Rang } P} = \text{id}_{\text{Rang } P}$ .
- Je-li  $Y$  podprostor  $X$  a  $P : X \rightarrow Y$  lineární zobrazení splňující  $P \restriction_Y = \text{id}_Y$ , pak  $P$  je projekce  $X$  na  $Y$ .

┌ Důkaz

└ Triviální. □

### Tvrzení 2.6

Nechť  $X$  je vektorový prostor. Jsou-li  $P_A$  a  $P_B$  projekce příslušné rozkladu  $X = A \oplus B$ , pak  $P_A + P_B = \text{id}_X$ ,  $\text{Rang } P_A = A$ ,  $\text{Ker } P_A = B$ ,  $\text{Rang } P_B = B$  a  $\text{Ker } P_B = A$ .

┌ Důkaz

└ Jednoduchý. □

Na druhou stranu, je-li  $P$  lineární projekce v  $X$ , pak  $X = A \oplus B$ , kde  $A = \text{Rang } P$ ,  $B = \text{Ker } P$  a  $P = P_A$ .

┌ Důkaz

└ Jednoduchý. □

### Věta 2.7

Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $Y$  jeho podprostor.

- Prostor  $Y$  má algebraický doplněk v  $X$ .
- Je-li  $A$  algebraický doplněk  $Y$  v  $X$ , je  $A$  algebraicky izomorfní s  $X/Y$ , speciálně  $\dim(A) = \dim(X/Y)$ .

┌ *Důkaz*

Díky Zornovu lemmatu existuje algebraická báze  $B \subset Y$  prostoru  $Y$ . Stejně tak existuje  $B' \supset B$  báze  $X$ . Potom  $Z = \text{span}(B' \setminus B)$  je algebraický doplněk  $Y$  v  $X$ , neboli  $X = Y \oplus Z$ .

Ať  $X = Y \oplus A$ . Pak chceme  $q|_A: A \rightarrow X/Y$  je lineární izomorfismus: Víme  $q$  je lineární,  $q$  je prosté (ať  $x \in A, q(x) = 0$ , pak  $x \in Y$ , tedy  $x \in A \cap Y = \{0\}$ , takže  $x = 0$ ) a  $q$  je na (Ať  $x = y + a \in X$ , pak  $q(x) = q(a)$ , tedy  $q(x) \in q|_A(A)$ ). □

## Definice 2.6 (Kodimenze)

Je-li  $X$  vektorový prostor a  $Y$  jeho podprostor, pak kodimenzi (značíme  $\text{codim } Y$ ?)  $Y$  rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku  $Y$  (což je rovno dimenzi  $X/Y$ ).

## Definice 2.7

Je-li  $X$  normovaný lineární prostor a  $X = A \oplus B$ , pak říkáme, že  $X$  je topologickým součtem  $A$  a  $B$ , pokud jsou příslušné projekce  $P_A$  a  $P_B$  spojité. Tento fakt značíme  $X = A \oplus_t B$ . Je-li  $A$  podprostor  $X$ , pak každý podprostor  $B \subset X$  splňující  $A \oplus_t B = X$  se nazývá topologický doplněk  $A$  v  $X$ . Má-li  $A$  topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v  $X$ ).

## Věta 2.8

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $Y, Z$  jsou jeho podprostory splňující  $X = Y \oplus Z$ . Pak  $X = Y \oplus_t Z$ , právě když zobrazení  $T: X \rightarrow Y \oplus_1 Z, T(x) = (P_Y(x), P_Z(x))$  je izomorfismus.

┌ *Důkaz*

$\Rightarrow$  :  $\forall x \in X: \|T(x)\| = \|P_Y x\| + \|P_Z x\| \leq 2 \max(\|P_Y\|, \|P_Z\|) \|x\| \leq \|(P_Y + P_Z)x\| = \|x\|$ . Tedy  $T$  je izomorfismus.

$\Leftarrow$  :  $\forall x \in X: \|P_Y x\| \leq \|P_Y x\| + \|P_Z x\| = \|T x\| \leq \|T\| \|x\|$ , tedy  $\|P_Y\| \leq \|T\|$ . □

## Věta 2.9

Nechť  $X$  je Banachův prostor a  $Y, Z \subset X$  jeho podprostory splňující  $X = Y \oplus Z$ . Pak  $X = Y \oplus_t Z$ , právě když  $Y$  a  $Z$  jsou uzavřené.

┌ *Důkaz*

Zatím bez důkazu. □

## Věta 2.10

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory. Pak

- $Y$  je isomorfní komplementovanému podprostoru  $X$ , právě když existují lineární operátory  $S: X \rightarrow Y$  a  $T: Y \rightarrow X$  splňující  $S \circ T = \text{id}_Y$ .

- $Y$  je isometrické 1-komplementovanému podprostoru  $X$ , právě když existují lineární operátory  $S : X \rightarrow Y$  a  $T : Y \rightarrow X$  splňující  $S \circ T = \text{id}_Y$  a  $\max \{\|S\|, \|T\|\} \leq 1$ .

┌ *Důkaz*

$\Leftarrow$ : Polož  $p := T \circ S : X \rightarrow X$ . Pak  $p$  je zřejmě lineární a  $\|p\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$ , navíc  $p^2 = (T \circ S) \circ (T \circ S) = p$ , tedy  $p$  je projekce. Zároveň  $p(X) = T(S(X))$ , jelikož  $S \circ T$  je identita, tak  $S$  je na a  $p(X) = T(Y) = \text{Rang } T$ . Zbývá si uvědomit, že  $T$  je izomorfismus (izometrie, pokud  $\|S\|, \|T\| \leq 1$ ): Máme

$$\forall x \in X : \|Sx\| = \|ST Sx\| \leq \|S\| \cdot \|TSx\|,$$

tedy (protože  $S$  je na):

$$\forall y \in Y : \|y\| \frac{1}{\|S\|} \leq \|Ty\|,$$

tudíž  $T$  je izomorfismus.

$\Rightarrow$ : Ať  $P : X \rightarrow X$  je projekce,  $L : P(X) \rightarrow Y$  izomorfismus na. Položíme  $S := L \circ P$ ,  $T := L^{-1}$ , pak  $S \circ T = L \circ P \circ L^{-1} = L \circ L^{-1} = \text{id}$ . □

*Poznámka* (Zajímavosti pro všechny (nezkouší se))

Ví se ( $\dim X = +\infty$ ,  $X$  Banach)

- $X$  lze komplementovaně vnořit do  $l_p \implies X \cong l_p$ ,  $p \in [1, \infty]$ .
- $X$  lze komplementovaně vnořit do  $c_0 \implies X \cong l_0$ .
- Existuje nespočetně neizomorfních podprostorů  $L_p$ ,  $p \in (1, \infty)$ .

Neví se:

- $X$  lze komplementovaně vnořit do  $L_1 \implies X \in \{l_1, L_1\}$ .
- $X$  lze komplementovaně vnořit do  $\mathcal{C}([0, 1]) \implies X \cong \mathcal{C}(k?)$ .

Ví se:

- $X \cong l_2 \Leftrightarrow (\forall Z, \dim Z = +\infty, Z \text{ Banach}, Z \hookrightarrow l_2 \implies Z \cong l_2)$ .

Neví se, zda platí izometrická varianta předchozího.



### 3 Hilbertovy prostory

#### Lemma 3.1

$A^\perp$  je uzavřený podprostor.

┌

*Důkaz*

Pro  $y \in X$  ať  $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ . Pak  $f_y$  je lineární a spojitý (z Cauchy-Swartz).  $A^\perp = \bigcap_{y \in A} f_y^{-1}(0)$ . □

#### Definice 3.1

Prostor se skalárním součinem  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se nazývá Hilbertův prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud  $(X, \|\cdot\|)$  je Banachův prostor, kde  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

*Například* •  $l_2 \dots \langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ .

•  $L_2([0, 1]) \dots \langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ .

#### Tvrzení 3.2

Nechť  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  je prostor se skalárním součinem nad  $\mathbb{K}$ . Pak funkce  $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).

┌

*Důkaz*

Přímočarý s použitím Cauchy-Swartz. □

#### Tvrzení 3.3 (Polarizační vzorec)

Nechť  $X$  je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna  $x, y \in X$  platí

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

v komplexním.

┌

*Důkaz* (Reálný případ, v  $\mathbb{C}$  analogicky)

$$4\langle x, y \rangle = 2\langle x, y \rangle - 2\langle x, -y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|-y\|^2 = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

└

□

*Důsledek*

Nechť  $X, Y$  jsou prostory se skalárním součinem a  $T : X \rightarrow Y$  je lineární izometrie do. Pak  $T$  zachovává skalární součin, tj.  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  pro každé  $x, y \in X$ .

┌

*Důkaz*

└ Izometrie zachovává pravé strany v polarizačním vzorci. □

TODO!

### Věta 3.4

$(X, \|\cdot\|)$  je NLP. Pak  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  pro skalární součin  $\langle \cdot, \cdot \rangle \Leftrightarrow$  platí:

$$\forall x, y \in X : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

┌

*Důkaz* (Reálný případ, komplexní analogicky)

$\Rightarrow$  z Polarizačního vzorce. Pro  $\Leftarrow$  položíme  $\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ ,  $x, y \in X$ .  
Následně ověříme podmínky (kromě linearitu (speciálně aditivity) je ověření triviální).  
Aditivita: Chceme

$$LS = \forall x, y, z \in X : \langle x + y, z \rangle + \langle x - y, z \rangle = 2 \langle x, z \rangle = PS.$$

$$LS = \frac{1}{4} \left( \|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 + \|x - y + z\|^2 - \|x - y - z\|^2 \right) =$$

z předpokladu  $\stackrel{=}{=}$   $\frac{1}{4} \left( 2(\|x + z\|^2 + \|y\|^2) - 2(\|x - y\|^2 + \|y\|^2) \right) = \frac{1}{2}(\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2) = PS.$

Tuto rovnost aplikujeme na  $x = y$ :  $\langle 2x, z \rangle = 2 \langle x, z \rangle$ , a na  $\tilde{x} = \frac{1}{2}(x + y)$ ,  $\tilde{y} = \frac{1}{2}(x - y)$ :

$$\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 2 \left\langle \frac{1}{2}(x + y), z \right\rangle = \langle x + y, z \rangle.$$

└

□

### Věta 3.5 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť  $C$  je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru  $H$ . Pak pro každé  $x \in H$  existuje právě jedno  $y \in C$  tak, že  $\|x - y\| = \text{dist}(x, C)$ .

┌

*Důkaz*

Zvolme  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  posloupnost v  $C$ , že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x\| = d(x, C)$ . Chceme, že  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  je Cauchyovská. Tedy, protože  $C$  je uzavřená, existuje  $y \in C : y_n \rightarrow y$ . Pak ale  $d(x, C) = \|x - y\|$ .

Zbývá jednoznačnost: Ať  $y, z \in C$  taková, že  $\|x - y\| = \|x - z\| = \text{dist}(x, C)$ . Pak  $\|y - z\|^2 \leq 0$ , tedy  $y = z$ . □

└

### Věta 3.6 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť  $X$  je prostor se skalárním součinem,  $Y$  jeho podprostor a  $x \in X$ . Pak  $y \in Y$  splňuje  $\|x - y\| = \text{dist}(x, Y)$  právě tehdy, když  $x - y \in Y^\perp$ .

┌ Důkaz

└ Jednoduchý. □

### Věta 3.7 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť  $Y$  je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru  $H$ . Pak  $H = Y \oplus Y^\perp$  a projekce  $P_Y : H \rightarrow Y$  příslušná rozkladu  $H = Y \oplus Y^\perp$  má následující vlastnosti:

- $\|P_Y(x) - x\| = \text{dist}(x, Y) \leq \|x\|$  pro každé  $x \in H$ ,
- $\|P_Y\| \leq 1$ .

┌ Důkaz

$Y \cap Y^\perp = \{0\}$ : Ať  $x \in Y \cap Y^\perp$ . Pak  $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$ .

$H = Y + Y^\perp$ : Zvol  $x \in H$ . Dle vět výše existuje právě jedno  $y \in Y : x - y \in Y^\perp$ . Pak  $x = y + x - y \in Y + Y^\perp$ .

Tedy,  $H = Y \oplus Y^\perp$ , a zároveň z důkazu víme, že

$P_Y(x) =$  „jediný prvek  $y \in Y$ , že  $x - y \in Y^\perp$ “ = „j. p.  $y \in Y$ , že  $\|x - y\| = d(x, Y)$ “.

Tedy  $\|P_Y(x) - x\| = d(x, Y) \leq \|x\|$ . Zbývá  $\|P_Y\| \leq 1$ :  $\|P_Y x\|^2 =$  □

### Věta 3.8

Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$  je podposloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada  $\sum_{n=1}^\infty x_n$  konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.

┌

*Důkaz*

$\implies$  už víme.  $\Leftrightarrow$ : Víme  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  splňuje B-C podmínku. Tedy pro  $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ :

$$\forall m > n \geq n_0 : \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| < \varepsilon.$$

Polož  $F = \{1, \dots, n_0\}$ . Zvol  $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) : F' \cap F = \emptyset$ . Pak

$$\left\| \sum_{k \in F'} x_k \right\|^2 \stackrel{\text{Pyt. věta}}{=} \sum_{k \in F'} \|x_k\|^2 \leq \sum_{k \in \min F'}^{\max F'} \|x_k\|^2 = \left\| \sum_{\dots}^{\dots} x_k \right\|^2 < \varepsilon.$$

└

□

### Definice 3.2 (Ortogonalní, ortonormální, maximální ortonormální, úplný ortonormální, ortonormální báze)

Je-li  $X$  prostor se skalárním součinem a  $A \subset X$ , řekneme, že množina  $A$  je

- ortogonalní, pokud  $x \perp y$  pro všechna  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$ .
- ortonormální, pokud  $A$  je ortogonalní a  $A \subset S_X$ .
- maximální ortonormální, pokud  $A$  je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující  $A$  různá od  $A$ .
- úplný ortonormální, pokud  $A$  je ortonormální a  $\overline{\text{span}} A = X$ .
- ortonormální báze, pokud  $A = \{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$  je ortonormální množina a každé  $x \in X$  lze vyjádřit jako  $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$  pro nějaké skaláry  $x_\gamma$ .

TODO

### Tvrzení 3.9 (Fakt)

Je-li  $A$  ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak  $\|x - y\| = \sqrt{2}$  pro každé dva prvky  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$ .

┌

*Důkaz*

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

└

□

┌

*Poznámka*

Tedy, pokud  $X$  je separabilní se skalárním součinem  $\implies$  každý ON-systém je spočetný.

└

### Věta 3.10

*Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.*

┌

*Důkaz*

$\mathcal{P} = \{A \subset X \mid A \text{ je ON-systém}\}$  s uspořádáním inkluzí. Zvol  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$  lineárně uspořádané, pak  $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{P}$  je horní závora  $\mathcal{O} \implies$  (z Zornova lemmatu)  $\exists A \in \mathcal{P}$  maximální. To je hledaný maximální ON-systém.  $\square$

└

### Věta 3.11 (Besselova nerovnost)

*Je-li  $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  ortonormální soustava v prostoru  $X$  se skalárním součinem, platí  $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 \leq \|x\|^2$  pro každé  $x \in X$ .*

┌

*Důkaz*

Ať  $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ ,  $x_F := \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$ . Pak  $\|x\|^2 = \|x - x_F\|^2 + \|x_F\|^2$  podle Pythagorovy věty ( $x - x_F \perp x_F$ :  $\forall i \in F : \langle x - x_F, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x_F, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle \langle x, e_i \rangle e_i, e_i \rangle = 0$ ). Tj.  $\|x\|^2 \geq \|x_F\|^2 = \sum_{\gamma \in F} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$ . Tedy máme omezení pro všechny konečné součty, tudíž celý součet bude omezen stejně (celý součet je supremum z konečných podle tvrzení někde výše).  $\square$

└

### Věta 3.12

*Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  je ortonormální systém v  $H$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1.  $\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$  pro každé  $x \in H$  (tzv. Parsevalova rovnost).
2.  $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$  pro každé  $x \in H$ .
3.  $\{e_\gamma\}$  je ortonormální báze.
4.  $H = \overline{\text{span}} \{e_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ .
5.  $\{e_\gamma\}$  je maximální ortonormální systém.

┌  
Důkaz

1  $\implies$  2: Necht  $\varepsilon > 0$ . Zvolíme  $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ :  $\|x\|^2 - \varepsilon < \sum_{\gamma \in F} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$ . Zvolíme  $F' \supset F$ ,  $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ . Pak

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{\gamma \in F'} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|^2 &\stackrel{\text{cos + Pythagorova věta}}{=} \|x\|^2 + \sum_{\gamma \in F'} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 - 2\Re \left\langle x, \sum_{\gamma \in F'} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma \right\rangle = \\ &= \dots + \dots - 2\Re \sum_{\gamma \in F'} \overline{\langle x, e_\gamma \rangle} \langle x, e_\gamma \rangle = \|x\|^2 - \sum_{\gamma \in F'} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

2  $\implies$  3: Triviální. 3  $\implies$  4: Triviální. 4  $\implies$  1: Necht  $x \in H$  a  $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ , že existuje  $\sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma$  splňující  $\|x - \sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma\| < \varepsilon$ . Položme  $y := \text{span}(e_\gamma, \gamma \in F)$ , pak  $d(x, y) \leq \|x - \sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma\| < \varepsilon$ . (Jelikož  $d(x, y) = \|x - \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|$ , neboť z lemmatu někde výše stačí ověřit  $y \perp x - \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$ , tj. stačí  $\forall i \in F : \langle x - \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma, e_i \rangle = 0$ , což je jednoduché.)

Tedy  $\|x\| \leq \varepsilon + \|\sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|$  (z Besselovy nerovnosti víme, že suma konverguje a navíc víme, že v 1 platí  $\geq$ , tj. stačí dokázat  $\leq$ )

$$\|x\|^2 \leq \left( \varepsilon + \left\| \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma \right\| \right)^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon\|x\| + \sum_{\gamma \in F} \|\langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma\|^2 \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon\|x\| + \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2.$$

2  $\implies$  5: Ať  $x \in \{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}^\perp$  (chceme, že  $x = 0$ ). Z 2. víme, že  $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma = \sum 0 = 0$ .

5  $\implies$  4: Ať  $Y = \overline{\text{span}}(e_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ . Pak  $H = Y \oplus_t Y^\perp$  (zde se používá úplnost jako předpoklad věty, ze které toto plyne).  $H = Y \oplus_t \{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}^\perp \stackrel{5}{=} Y \oplus_t \{\mathbf{o}\}$ .  $\square$

Poznámka

Bez úplnosti jsou ekvivalentní 1, 2, 3 a 4 a vyplývá z nich 5.

TODO!

**Věta 3.13** (Ernst Sigismund Fisher (1907), Frigyes Riesz (1907))

TODO!!!

**Věta 3.14** (?)

TODO!!!

**Věta 3.15** (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))

Necht  $H$  je Hilbertův prostor. Pro každé  $y \in H$  označme  $f_y \in H^*$  funkcionál definovaný jako  $f_y(x) = \langle x, y \rangle$  pro  $x \in H$ . Pak zobrazení  $l : H \rightarrow H^*$ ,  $l(y) = f_y$  je sdruženě lineární

$(I(\alpha y) = \bar{\alpha}I(y))$  izometrie  $H$  na  $H^*$ .

┌

*Důkaz*

$\forall y \in H$  máme:  $f_y$  je lineární,  $\forall x \in H: f_y(x) \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , tedy  $f_y$  je spojitý a  $\|f_y\| \leq \|y\|$ ,  
 $f_y\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle = \|y\| \implies \|f_y\| = \|y\|, y \in H. \implies I$  je izometrie, sdruženě  
 lineární. Zbývá „na“. To se dokáže z následujícího lemmatu:

Zvol  $f \in H^*$ , pak  $H = \text{Ker } f \oplus (\text{Ker } f)^\perp$ . Tedy existuje  $z \in (\text{Ker } f)^\perp$  splňující  $H = \text{Ker } f \oplus \text{span } \{z\}$ . Položme  $y := f(z)z$ . Pak  $I(y) = f$ , jelikož:

$$\forall x \in H : I(y)(x) = \langle x, y \rangle = \langle x_{\text{Ker } f} + \alpha_x z, y \rangle = \langle \alpha_x z, y \rangle = \alpha_x \langle z, \overline{f(z)}z \rangle = f(\alpha_x z) = f(x).$$

└

□

### Lemma 3.16

Nechť  $X$  je vektorový prostor,  $f$  je lineární forma na  $X$  a  $x \in X \setminus \text{Ker } f$ . Pak  $X = \text{Ker } f \oplus \text{span } \{x\}$ . Tedy  $\text{codim Ker } f = 1$ .

┌

*Důkaz*

$\text{Ker } f \cap \text{span } \{x\} = \{\mathbf{0}\}$ : Ať  $\alpha \in \mathbb{K}$ , pak pokud  $\alpha x \in \text{Ker } f$ , pak  $\alpha f(x) = f(\alpha x) = 0$ , tedy  $\alpha = \mathbf{0}$ .

$$\text{Ať } y \in X. \text{ Pak } y = \left(y - \frac{f(y)}{f(x)}x\right) + \frac{f(y)}{f(x)}x.$$

└

□

### Definice 3.3

Nechť  $X$  je komplexní normovaný lineární prostor. Symbolem  $X_R$  označme prostor  $X$  uvažovaný jako reálný. Tj.  $X_R$  je tatáž množina jako  $X$  uvažovaná s operací sčítání jako v  $X$ , s násobením reálným číslem jako v  $X$  a stejně definovanou normou.

### Věta 3.17 (Reálná verze komplexního normovaného lineárního prostoru)

Nechť  $Z$  je komplexní normovaný lineární prostor. Pak platí

1.  $X_R$  je reálný normovaný lineární prostor. (Zřejmé.)
2.  $X_R$  je úplný, právě když  $X$  je úplný. (Norma je pořád tatáž.)
3.  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$  je lineární, právě když  $\Re \varphi : X_R \rightarrow \mathbb{R}$  je lineární a  $\Im \varphi(x) = -\Re \varphi(ix)$  pro každé  $x \in X$ .
4. Je-li  $\varphi \in X^*$ , pak funkcionál  $\psi(x) = \Re \varphi(x)$ ,  $x \in X_R$ , patří do  $(X_R)^*$  a platí  $\|\psi\| = \|\varphi\|$ .
5. Je-li  $\psi \in (X_R)^*$ , pak existuje právě jeden funkcionál  $\varphi \in X^*$  takový, že  $\psi(x) = \Re \varphi(x)$  pro  $x \in X_R$ . Je dán vzorcem  $\varphi(x) = \psi(x) - i\psi(ix)$  a splňuje  $\|\psi\| = \|\varphi\|$ .

6. Prostory  $(X_R)^*$  a  $(X^*)_R$  jsou izometrické.

┌  
Důkaz  
└  
TODO.

□

### Definice 3.4

Nechť  $X$  je reálný normovaný lineární prostor. Na  $X \times X$  definujeme:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in X,$$

$$(\alpha_1 + i\alpha_2) \cdot (x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in X,$$

$$\|(x_1, x_2)\|_{X_C} = \sup \{ |(\cos \alpha)x_1 + (\sin \alpha)x_2|_X \mid \alpha \in [0, 2\pi) \}, \quad x_1, x_2 \in X.$$

Symbolem  $(X_C, \|\cdot\|)$  značíme komplexní normovaný lineární prostor  $(X \times X, +, \cdot, \|\cdot\|_{X_C})$ .

### Věta 3.18 (Komplexifikace)

Je-li  $X$  reálný normovaný lineární prostor, pak je  $(X_C, \|\cdot\|)$  komplexní normovaný lineární prostor. Je-li navíc  $X$  Banachův, pak je  $X_C$  Banachův.

┌  
Důkaz

Linearitu nebudeme dokazovat (definice je zvolena tak, aby to vycházelo, lehké cvičení). Norma je taktéž jednoduchá, nejtěžší je dokázat, že lze vytýkat konstanty.

$X_C$  je Banachův plyne z toho, že  $X \oplus_\infty X$  je Banach a norma  $\|\cdot\|_{X_C}$  je ekvivalentní (konstanty 1 a 2) maximové normě, která je v definici součinu metrických prostorů a součin úplných metrických prostorů je úplný. □

### Definice 3.5 (Sublineární funkcionál, pseudonorma)

TODO!

### Věta 3.19 (Hans Hanh (1927), Stefan Banach (1929))

Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $Y$  je podprostor.

- Je-li  $X$  reálný,  $p$  je sublineární funkcionál na  $X$  a  $f$  je lineární forma na  $Y$  splňující  $f(x) \leq p(x)$  pro každé  $x \in Y$ , pak existuje lineární forma  $F$  na  $X$  taková, že  $F|_Y = f$  a  $F(x) \leq p(x)$  pro každé  $x \in X$ .
- Je-li  $p$  pseudonorma na  $X$  a  $t$  je lineární forma na  $Y$  splňující  $|f(x)| \leq p(x)$  pro každé  $x \in Y$ , pak existuje lineární forma  $F$  na  $X$  taková, že  $F|_Y = f$  a  $|F(x)| \leq p(x)$ ,  $x \in X$ .



┌  
Důkaz (1. bod)

1. krok: rozšíříme  $f$  o jednu dimenzi, tj. na  $Z = Y \oplus \text{span}(x)$ , kde  $x \notin Y$ . Položme  $F(y + tx) := f(y) + t\alpha$ ,  $y \in Y$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , kde  $\alpha \in \mathbb{R}$  je vhodně zvolená: Linearita  $f$  vyplývá z definice, tedy stačí  $f(y) + t\alpha \leq p(y + t\alpha)$ ,  $y \in Y$ ,  $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall t > 0 : \alpha \leq \frac{1}{t}(p(y + tx) - f(y)) \wedge \forall t < 0 : \alpha \geq \frac{1}{t}(p(y + tx) - f(y)), y \in Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall t > 0 : \alpha \leq p\left(\frac{y}{t} + x\right) - f\left(\frac{y}{t}\right) \wedge \forall t < 0 : \alpha \geq f\left(\frac{-y}{t}\right) - p\left(\frac{-y}{t} - x\right), y \in Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in Y : \alpha \in [f(y) - p(y - x), p(y + x) - f(y)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall y, z \in Y : f(y) - p(y - x) \leq p(z + x) - f(z),$$

tedy máme  $f(y) + f(z) = f(y + z) \leq p(y + z) \leq p(y - x) + p(z + x)$ . Tedy  $\alpha$  můžeme volit libovolně z intervalu  $[\sup_y f(y) - p(y - x), \inf_y p(y + x) - f(y)]$ .

2. krok: přidáme všechny dimenze (transfinitní) indukci. (Hanh-Banachova věta je ekvivalentní axiomu výběru.) □

┌  
Důkaz (2. bod)

1. krok: Pro  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  aplikujeme první bod: VIme, že existuje  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  lineární, že  $F|_Y = f$ . Pak ale  $F(x) \leq p(x)$ ,  $x \in X \wedge -F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x)$ ,  $x \in X \implies |F(x)| \leq p(x)$ ,  $x \in X$ .

2. krok: Pro  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ : Polož  $g = \Re f$ . Pak podle 1. části  $\exists G : X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  lineární, že  $G|_Y = g \wedge |G(x)| \leq p(x)$ ,  $x \in X$ . Pak máme  $f(x) = g(x) - ig(ix)$ ,  $x \in X$  a položíme  $F(x) := G(x) - iG(ix)$ ,  $x \in X$ . Pak  $f|_Y = f$ ,  $F$  je lineární a pro  $x \in X$  máme:

Zvolme  $|\lambda| = 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} : |F(x)| = \lambda F(x)$ , pak  $|F(x)| = F(\lambda x) = G(\lambda x) - iG(i\lambda x) = G(\lambda x) \leq P(\lambda x) \leq p(x)$ . □

### Věta 3.20 (Hahnova-Banachova)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor,  $Y$  je podprostor  $X$  a  $f \in Y^*$ . Pak existuje  $F \in X^*$  takové, že  $F|_Y = f$  a  $\|F\| = \|f\|$ .

┌  
Důkaz

Aplikujeme předchozí větu na  $p(x) := \|f\| \cdot \|x\|$ ,  $x \in X$ . Pak  $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| = p(x)$ ,  $x \in Y \implies \exists F : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineární,  $F|_Y = f$ ,  $|F| \leq p$ . Pak  $|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ ,  $x \in X$ , tedy  $\|F\| \leq \|f\|$  (opačná nerovnost triviální). □

### Důsledek

Nechť  $X$  je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé  $x \in X$  existuje  $f \in S_{X^*}$  takové, že  $f(x) = \|x\|$ . Odtud plyne, že jsou-li  $x, y \in X$  různé body, pak existuje  $f \in X^*$  takový, že  $f(x) \neq f(y)$  (říkáme, že  $X^*$  odděluje body  $X$ ).

┌ *Důkaz*

Zvol  $x \in X$ . BÚNO  $x \neq \mathbf{0}$ . Polož  $Y = \text{span}(x)$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{K}$  definujeme předpisem  $g(tx) := t\|x\|$ ,  $\forall t \in \mathbb{K}$ . Pak  $g$  je zřejmě lineární a  $\|g\| = 1$ , protože

$$|g(tx)| = |t| \cdot \|x\| = \|tx\|, \forall t \in \mathbb{K}.$$

Podle H-B  $\exists f \in X^* : f|_Y = g$ ,  $\|f\| = \|g\| = 1$ . Pak  $f(x) = \|x\|$ .

Ad „speciálně“: Zvol  $x + y$ . Najdi  $f \in S_{X^*} : f(x - y) = \|x - y\|$ , pak  $f(x) \neq f(y)$ , protože  $\|x - y\| \neq 0$ . □

*Důsledek*

Je-li  $X$  normovaný lineární prostor a  $x \in X$ , pak  $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$ .

┌ *Důkaz*

└ Triviální. □

*Důsledek* (Oddělování bodu a podprostoru)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor,  $Y$  je uzavřený podprostor  $X$  a  $x \notin Y$ . Pak existuje  $f \in S_{X^*}$  tak, že  $f|_Y = 0$  a  $f(x) = \text{dist}(x, Y) > 0$ .

┌ *Důkaz*

Zvolme  $Z := Y \oplus \text{span}(x) \subset X$ .  $f(y + \alpha x) := \alpha \text{dist}(x, Y)$ ,  $y \in Y$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Pak  $f : Z \rightarrow \mathbb{K}$  je lineární.  $\|f\| = 1$ :  $|f(y + \alpha x)| = |\alpha| \text{dist}(x, Y) \leq |\alpha| \cdot \|x + \frac{y}{\alpha}\| = \|\alpha x + y\|$ ,  $y \in Y$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Zvolme  $(y_n)_{n=1}^\infty$  v  $Y$ , že  $d(x, Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\|$ . Pak  $\frac{|f(y_n + x)|}{\|y_n + x\|} = \frac{d(x, Y)}{\|y_n + x\|} \rightarrow 1$ .

Nyní z H-B věty rozšíříme na celé  $Y$ :  $\exists F \in X^X : F|_Z = f \wedge \|F\| = 1$ . □

### Věta 3.21 (Oddělování konvexních množin)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $A, B \subset X$  jsou disjunktí konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení

- Je-li  $A$  otevřená, pak existuje  $f \in X^*$  takový, že  $\Re f(x) < \inf_B \Re f$  pro každé  $x \in A$ .
- Je-li  $A$  uzavřená a  $B$  kompaktní, pak existuje  $f \in X^*$  takový, že  $\sup_A \Re f < \inf_B \Re f$ .

┌ *Poznámka*

└ Ekvivalentní H-B větě.

┌ *Důkaz*

BÚNO  $X$  je nad  $\mathbb{R}$ . BÚNO  $A \neq \emptyset \neq B$ . První bod: Zvolíme  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Polož  $w = b - a$  a  $C = w + A - B$ . Pak  $w \notin C$ ,  $0 \in C$ ,  $C$  je konvexní ( $A$  i  $B$  jsou konvexní, takže i jejich posunutý rozdíl je konvexní) a otevřená ( $A$  je otevřená, posunutý rozdíl otevřené a libovolné je otevřená). Položme  $p_c(x) := \inf \{t > 0 \mid x \in tC\}$  (lehce se ověří, že  $p_c$ , tzv. Minkowského funkcionál, je sublineární).  $p_c(x) < +\infty$  (protože  $C$  obsahuje nulu a z otevřenosti i kouli kolem ní a každé  $x$  se vejde do dostatečně nafouklé koule).  $p_c \leq 1$  na  $C$  a  $p_c(w) \geq 1$ .

Položme  $Y := \text{span}(w)$ ,  $g(\alpha w) := \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  (pak  $g \leq p_c$ ). Z H-B tedy plyne:

$$\exists G : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineární, } G|_Y = g, G \leq p_c.$$

Pak  $G \in X^*$  protože  $G \leq p_c \leq 1$  na  $C$ , ale to obsahuje kouli, takže je  $G$  omezené na nějaké kouli  $\implies$  je spojitý.

Konečně  $\forall x \in A \forall y \in B : G(x) = G(y) + G(x - y + w) - G(w) \leq G(y) + 1 - 1 = G(y)$ .  
Rovnost nemůže nastat, protože  $A$  je otevřená. □

└

TODO

*Poznámka* (Nevím, kam patří)

Nějaký důsledek H-B, viz foto.

┌ *Důkaz*

Z kompaktnosti máme  $\max_B g < \inf_A f$ . Zvol  $f = -g$  a to je ta hledaná funkce. □

└

*Důsledek* (H-B věty)

$X$  je NLP,  $Y \subset X$  podprostor. Buď  $\dim Y < \infty$  nebo  $\text{codim } Y < \infty$ . Pak  $Y \xrightarrow{C} X$ . (Tj.  $\exists P : X \rightarrow Y$  spojitý, že  $P|_Y = \text{id}_Y$ .)

┌ *Důkaz*

$\dim Y < \infty$ : Ať  $\{e_1, \dots, e_n\}$  je báze  $Y$ ,  $\{f_1, \dots, f_n\}$  je duální báze  $Y$ . Pak  $f_1, \dots, f_n : Y \rightarrow \mathbb{K}$  jsou spojité ( $Y$  má konečnou dimenzi). Z H-B  $\exists F_1, \dots, F_n : X \rightarrow \mathbb{K}$  spojité,  $\|F_i\| = \|f_i\|$ ,  $F_i \supset f_i$ . Definujme  $P : X \rightarrow Y$  předpisem  $P(x) := \sum_{i=1}^n F_i(x)e_i \in Y$ .  $P$  je lineární,

$$\|Px\| \leq \sum_{i=1}^n \|F_i(x)\| \cdot \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|F_i\| \cdot \|x\| \cdot \|e_i\| \leq \left( n \cdot \max_{i \in [n]} \|F_i\| \cdot \|e_i\| \right) \cdot \|x\|.$$

$P$  je tedy spojitý. Zbývá ověřit  $P_y = \text{id}_n$ .

$$\forall y \in Y : P(y) = P\left(\sum_{i=1}^n f_i(y)e_i\right) = \sum_{i=1}^n f_i(y)P(e_i) = \sum_{i=1}^n f_i(y) \sum_{j=1}^n F_j(e_i)e_j = \sum_{i=1}^n f_i(y)e_i = y.$$

$\text{codim } Y < \infty$ : ( $\text{codim } Y = \dim(X/Y)$ ) ať  $\{q(e_1), \dots, q(e_n)\}$  je báze  $X/Y$  ( $q : x \mapsto [x]$ ) a  $\{f_1, \dots, f_n\}$  duální funkcionály. Ty jsou spojité. Polož  $F_i = f_i \circ q$  ( $i \in [n]$ ), což je složení dvou spojitých funkcionálů, tedy spojitý funkcionál. Definujme  $P : X \rightarrow \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ ,  $P(x) := \sum_{i=1}^n F_i(x)e_i$ ,  $x \in X$ . „ $P$  je lineární“ je jasné, stejně tak spojitost  $P$  (podobně jako v první části).

$$P|_{\text{span}(e_1, \dots, e_n)} = \text{id}:$$

$$\forall i \in [n] : P(e_i) = \sum_{j=1}^n F_j(e_i)e_j = \sum_{j=1}^n f_j(q(e_i))e_j = e_i.$$

Tedy  $P$  je spojitá lineární projekce a navíc  $\text{Ker } P = Y : Px = 0 \Leftrightarrow F_i(x) = 0 \forall i \in [n] \Leftrightarrow f_i(q(x)) = 0, \Leftrightarrow q(x) = 0$ . Máme  $X = \text{Rang } P \oplus_t \text{Ker } P$ . Položíme  $Q = \text{id} - P$ , pak  $\text{Rang } Q = \text{Ker } P = Y$ ,  $Q$  spojitá projekce.  $\square$

### Definice 3.6

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Operátor  $T^* : Y^* \rightarrow X^*$  definovaný předpisem  $T^*f(x) = f(Tx)$  pro  $f \in Y^*$  a  $x \in X$  se nazývá duální (nebo též adjungovaný) operátor k  $T$ .

Operátor  $(T^*)^*$  značíme  $T^{**}$ .

### Věta 3.22

Nechť  $X, Y, Z$  jsou normované lineární prostory.

1. Je-li  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , je  $T^*f \in X^*$  pro každé  $f \in Y^*$ . Dále  $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$  a  $\|T^*\| = \|T\|$ .
2. Zobrazení  $T \mapsto T^*$  je lineární izometrie z  $\mathcal{L}(X, Y)$  do  $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$ .

3.  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  a  $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ . Pak  $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ . Dále  $\text{id}_X^* = \text{id}_{X^*}$ .

┌

Důkaz

1. Spojitost  $T^* f$  je zřejmá z definice (složení dvou lineárních funkcí), stejně tak linearita  $T$ . Dále

$$\forall y^* \in B_{Y^*} : \|T^* y^*\| = \sup_{x \in B_X} |T^* y^*(x)| = \sup_{x \in B_X} |y^*(Tx)| \leq \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \|T\|,$$

tedy  $\|T^*\| \leq \|T\|$  a  $T$  je spojitý. Zbývá  $\|T\| \leq \|T^*\|$ . (Dokazujeme opačnou nerovnost k té výše.) Zvolme  $x \in B_X$ . Najdi (z jednoho z důsledků H-B)  $y^* \in S_{Y^*}$ .  $\|T_x\| = |y^*(Tx)|$ . Pak

$$\|Tx\| = |y^*(Tx)| = |T^* y^*(x)| \leq \|T^*\| \cdot \|y^*\| \cdot \|x\| \leq \|T^*\|.$$

Tj.  $\|T\| \leq \|T^*\|$ .

2. Linearita zobrazení plyne z předpisu a izometrie pak plyne z prvního bodu.

3.  $\forall z^* \in Z^* \forall x \in X :$

$$((S \circ T)^* z^*)(x) = z^*(S(T(x))) = S^* z^*(Tx) = (T^* S^* z^*)(x).$$

A to platí pro všechna  $x$  a  $z^*$ , tedy funkcionály na ně aplikované musí být tytéž. Identita je triviální z definice. □

### Věta 3.23

Nechť  $H_1, H_2$  jsou Hilbertovy prostory a  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ . Pak existuje jednoznačně určený operátor  $T^\star \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$  takový, že pro každé  $y \in H_2$  a  $x \in H_1$  platí

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y \rangle_{H_1}.$$

Dále platí, že  $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$ , kde  $I_j : H_j \rightarrow H_j^*$ ,  $j = 1, 2$  jsou příslušné sdružené lineární izometrie z věty výše (89 ve skriptech). ( $I_i : y \mapsto \langle \cdot, y \rangle \in H_1^*$ .)

┌

Důkaz

Zvol  $x \in H_1$ ,  $y \in H_2$ . Uvažuj  $g \in (H_1)^*$  definované předpisem  $\langle Tx, y \rangle_{H_2}$ . Dle věty 89 ve skriptech,  $\exists! z \in H_1 : g(x) = \langle x, z \rangle$ ,  $x \in H_1$ . Tedy rovnost z věty platí  $\Leftrightarrow T^\star y = z$ . Celkem  $\exists! T^\star : H_2 \rightarrow H_1$ , pro které platí rovnost ze znění.

Zbývá:  $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$  (pak operátor  $T^\star$  je lineární a spojitý). Stačí jen, že  $I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$  splňuje rovnost ze zadání, protože existuje právě jeden takový operátor. Z definice  $I_i$  a přelévání písmenek (definice sdruženého operátoru) tedy:

$$\begin{aligned} \forall x \in H_1 \forall y \in H_2 : \langle x, (I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2)(y) \rangle_{H_1} = \\ (I_1(I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2))(x) = (T^* \circ I_2)(x) = (I_2 y)(Tx) = \langle Tx, y \rangle. \end{aligned}$$

└

□

**Definice 3.7** (Hilbertovsky adjungovaný operátor)

Operátor  $T^\star$  z předcházející věty nazýváme hilbertovsky adjungovaným operátorem k  $T$ .

**Věta 3.24**

Nechť  $H_1, H_2, H_3$  jsou Hilbertovy prostory.

1. Je-li  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ , je  $T^{\star\star} = (T^\star)^\star = T$ .
2. Zobrazení  $T \mapsto T^\star$  je sdruženě lineární izometrie  $\mathcal{L}(H_1, H_2)$  na  $\mathcal{L}(H_2, H_1)$ .
3. Nechť  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  a  $S \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ . Pak  $(S \circ T)^\star = T^\star \circ S^\star$ . Dále  $(\text{id}_{H_1})^\star = \text{id}_{H_1}$ .

┌

Důkaz

1. Máme

$$\forall x \in H_1 \forall y \in H_2 : \langle T^{\star\star}x, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y \rangle_{H_1} = \langle Tx, y \rangle_{H_2}.$$

Tedy pro každé  $x, y$  jsou tyto operátory stejné, tedy  $T^{\star\star} = T$ .

2. Sdružená linearita: Zachování „+“ plyne ze vzorce, „zachování“ „·“:

$$\forall x, y \forall \alpha \in \mathbb{K} : \langle x, T^\star \alpha y \rangle = \langle Tx, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle Tx, y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, T^\star y \rangle$$

.

Izometrie plyne z toho, že  $T^\star$  je složení izometrií. To že na plyne z 1.

$$3. \forall x, y : \langle x, (S \circ T)^\star y \rangle = \langle S(Tx), y \rangle = \langle Tx, S^\star y \rangle = \langle x, T^\star S^\star y \rangle.$$

└

□

**Definice 3.8** (Sdružený exponent)

Nechť  $p \in \mathbb{R}$ ,  $p \geq 1$ , nebo  $p = \infty$ . Číslo  $q \in \mathbb{R}$ ,  $q \geq 1$ , nebo  $q = \infty$  nazýváme sdruženým exponentem k  $p$ , pokud platí  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Věta 3.25** (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)

Nechť  $I \neq \emptyset$ .

1. Prostor  $c_0(I)^*$  je lineárně izometrický s prostorem  $l_1(I)$  pomocí zobrazení  $I : l_1(I) \rightarrow c_0(I)^*$ ,  $I(y) = f_y$ , kde

$$f_y(x) = \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

2. Je-li  $1 \leq p < \infty$  a  $q$  je sdružený exponent k  $p$ , pak prostor  $l_p(I)^*$  je lineárně izometrický

s prostorem  $l_q(I)$  pomocí zobrazení  $I : l_q(I) \rightarrow l_p(I)^*$ ,  $I(y) = f_y$ , kde

$$f_y(x) = \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

3. Je-li  $(\Omega, S, \mu)$  libovolný prostor s mírou  $1 < p < \infty$  a  $q$  je sdružený exponent k  $p$ , pak prostor  $L_p(\mu)^*$  je lineárně izometrický s prostorem  $L_q(\mu)$  pomocí zobrazení  $I : L_q(\mu) \rightarrow L_p(\mu)^*$ ,  $I(g) = \varphi_g$ , kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} f \cdot g d\mu.$$

4. Je-li  $(\Omega, S, \mu)$  prostor se  $\sigma$ -konečnou mírou, pak prostor  $L_1(\mu)^*$  je lineárně izometrický s prostorem  $L_{\infty}(\mu)$  pomocí zobrazení  $I : L_{\infty}(\mu) \rightarrow L_1(\mu)^*$ ,  $I(g) = \varphi_g$ , kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} f \cdot g d\mu.$$

┌  
Důkaz (1.)

$\|I\| \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \forall y \in l_1(I) \forall x \in c_0(I) \forall F \in \mathcal{F}(I) : \left| \sum_{i \in F} y_i x_i \right| &\leq \sum_{i \in F} |y_i x_i| \leq \|x\|_{\infty} \cdot \sum_{i \in F} |y_i| \leq \|x\|_{\infty} \cdot \|y\|_1 \implies \\ \implies |I(y)(x)| &\leq \|x\|_{\infty} \cdot \|y\|_1, \end{aligned}$$

takže opravdu  $I(y) \in c_0(I)^*$  a navíc  $\|I(y)\| \leq \|y\|_1$ , tedy  $I$  je lineární, dobře definované,  $\|I\| \leq 1$ .

Izometrie: Zvol  $y \in l_1(I)$ , zvol  $F \in \mathcal{F}(I)$ . Polož  $x_F := \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|}{y(i)} e_i \in B_{c_0(I)}$ . Pak

$$\|I(y)\| \geq |I(y)(x_F)| = \left| \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} y(i) \cdot \frac{|y(i)|}{y(i)} \right| = \sum_{i \in F} |y(i)|.$$

Tedy, protože  $\|y\|_1 = \sup_{F \in \mathcal{F}(I)} \sum_{i \in F} y(i)$ , dostáváme  $\|I(y)\| \geq \|y\|$ .

Zbývá už jen „na“: Zvol  $f \in c_0(I)^*$ . Polož  $y(i) := f(e_i)$ ,  $i \in I$ . Pak  $y \in l_1(I)$ : Zvol  $F \in \mathcal{F}(I)$ . Pak

$$\sum_{i \in F} |y(i)| = \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} y(i) \cdot \frac{|y(i)|}{y(i)} = \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} f(e_i) \cdot \frac{|y(i)|}{y(i)} = f \left( \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|}{y(i)} \cdot e_i \right) \leq \|f\|.$$

Tudíž  $y \in l_1(I)$  (a  $\|y\|_1 \leq \|f\|$ ).

Chceme  $I(y) = f$ : Máme  $\forall i \in I : I(y)(e_i) = y(i) = f(e_i)$ . Tedy  $I(y) = f$  na  $e_i$ , takže z linearit a spojitosti na  $\overline{\text{span}}(e_i, i \in I) = c_0(I)$ .  $\square$

┌

Důkaz (2.)

Případ  $p = 1$ :  $\|I\| \leq 1$  se dokáže jako v důkazu 1:

$$\forall y \in l_\infty(I) \forall x \in l_1(I) \forall F \in \mathcal{F}(I) : \sum_{i \in F} |y_i x_i| \leq \|y\|_\infty \cdot \|x\|_1.$$

$I$  izometrie: Ať  $y \in l_\infty(I)$ , pak

$$\forall i \in I : \|I(y)\| \geq |I(y)(e_i)| = |y(i)| \implies \|I(y)\| \geq \sup_i |y(i)| = \|y\|_\infty.$$

$I$  je na: Ať  $f \in l_1(I)^*$ . Polož  $y(i) := f(e_i)$ ,  $i \in I$ . Pak  $y \in l_\infty(I)$  :

$$\forall i \in I : |y(i)| = |f(e_i)| \leq \|f\| \implies \|y\|_\infty \leq \|f\|.$$

$I(y) = f$  je totožné jako v důkazu 1.

2. Případ  $p > 1$ :  $\|I\| \leq 1$  se dokáže podobně jen se použije Hölder:

$$\forall y \in l_q(I) \forall x \in l_p(I) \forall F \in \mathcal{F}(I) : \sum_{i \in F} |y_i x_i| \leq \|y\|_q \cdot \|x\|_p.$$

$I$  izometrie: Ať  $y \in l_q(I)$ . Polož  $x_F = \frac{\sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|}{y(i)} e_i}{\| \text{---} \| \text{---} \|_p} \in S_{l_p(I)}$  (BÚNO  $\exists i \in F : y(i) \neq 0$ ).

$$x_F = \left( \sum |y(i)|^{p(q-1)} \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|^q}{y(i)} e_i$$

a zároveň

$$\|I(y)\| \geq I(y)(x_F) = \left( \sum |y(i)|^{p(q-1)} \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \sum_{i \in F} |y(i)|^q = \|y(i)\|_q.$$

$I$  je na: Ať  $f \in l_p(I)^*$ . Polož  $y(i) := f(e_i)$ ,  $i \in I$ . Pak  $y \in l_q(I)$ : Zvol  $F \in \mathcal{F}(I)$ . Pak polož  $x_F = \sum_{i \in F, y(i) \neq 0} \frac{|y(i)|^q}{y(i)} e_i$ .

$$\sum_{i \in F} |y(i)|^q = \sum_{i \in F} f(e_i) x_F(i) = f\left(\sum_{i \in F} x_F(i) \cdot e_i\right) \leq \|f\| \cdot \|x_F\|_p = \|f\| \left( \sum_{i \in F} |y(i)|^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

. Celkem

$$\inf_{F \in \mathcal{F}(I)} \left( \sum_{i \in F} |y(i)|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\|,$$

└ tedy  $y \in l_q(I)$  a  $\|y\|_q \leq \|f\|$ .

□



┌  
Důkaz (3, 4)

1. krok  $\mu$  konečný:  $I$  je spojitý, lineární a  $\|I\| \leq 1$ :  $p = 1$ :

$$|I(f)(g)| \leq \int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_{\infty} \int_{\Omega} |g| d\mu = \|f\|_{\infty} \cdot \|g\|_1.$$

Tedy  $I$  je dobře definované, lineární a  $\|I\| \leq 1$ .  $p > 1$ :

$$|I(f)(g)| \leq \int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_q \cdot \|g\|_p.$$

Tedy  $I$  je dobře definované, lineární a  $\|I\| \leq 1$ .

$I$  je izometrie:  $p > 1$ : Ať  $f \in L_q(\Omega)$ , BÚNO  $f \neq 0$ . Zvol

$$g(x) := \frac{\frac{|f(x)|^q}{f(x)} \chi_{\{x|f(x) \neq 0\}}}{\|f\|_q^{q-1}} \in S_{L_p(\mu)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^{p(q-1)} dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{|f(x)|^q}{f(x)} \chi_{\{x|f(x) \neq 0\}},$$

$$\|f\|_q \geq \|I(f)\| \geq I(f)(g) = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^q d\mu(x) \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \int_{\Omega} |f(x)|^q d\mu(x) = \|f\|_q.$$

Tedy  $\|I(f)\| = \|f\|$  a  $I$  je izometrie.

$p = 1$ : Ať  $f \in L_{\infty}(r)$ , BÚNO  $f \neq 0$ . Zvol  $\|f\|_{\infty} > \varepsilon > 0$  je libovolné, ať

$$A = \{x | f(x) > \|f\|_{\infty} - \varepsilon\}.$$

Pak  $\mu(A) > 0$ . Ať  $\mu(A) < \infty$  (v případě  $\sigma$ -konečné míry můžeme  $A$  aproximovat). Polož  $g(x) := \frac{|f(x)|}{f(x)} \frac{\chi_A}{\mu(A)} \in B_{L_1, \mu}$ . Pak

$$\|f\| \geq \|I(f)\| \geq I(f)(g) = \int_{\Omega} |f(x)| \chi_A(x) \cdot \frac{1}{\mu(A)} d\mu(x) > \frac{\|f\|_{\infty} - \varepsilon}{\mu(A)} \int_A 1 d\mu(x) = \|f\|_{\infty} - \varepsilon.$$

$I$  je na: Ať  $x^* \in (L_p)^*$ . Položme  $\nu(A) := x^*(\chi_A)$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . Pak  $\nu$  je  $\mathbb{K}$ -hodnotová míra:  $\nu(\emptyset) = x^*(0) = 0$ . Ať  $(A_j)_{j=1}^{\infty}$  posloupnost množin z  $\mathcal{A}$ , po 2 disjunktní. Pak

$$\|\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} - \chi_{\bigcup_{j=1}^n A_j}\|_p = \mu(TODO)$$

Tedy

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= x^*(\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^*(\chi_{\bigcup_{j=1}^n A_j}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^*(\chi_{A_1}) + \dots + x^*(\chi_{A_n}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i). \end{aligned}$$

Zároveň  $\nu \ll \mu$ :

$$\mu(A) = 0 \implies \chi_A = 0 \text{ skoro všude} \implies x^*(\chi_A) = 0.$$

└

□

┌ *Důkaz* (Pokračování 3, 4)

Tedy z R-M věty  $\exists g \in L_1(\mu)$ :  $\nu(A) = \int_A g d\mu$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . Pak  $x^*(s) = \int_{\Omega} g \cdot s d\mu$ , pro  $s$  jednoduchou funkci. Tedy pro  $f \in (L_p(\mu))$  najdu  $s_k \rightarrow f$ ,  $|s_k| \leq 4f$ ,  $s_k$  jednoduché. Pak ale  $s_k \xrightarrow{L_p} f$  (z Lebesgueovy věty, jelikož  $5f$  je integrovatelná majoranta). Tedy

$$x^*(f) = \lim_k x^*(s_k) = \lim_k \int_{\Omega} g \cdot s_k d\mu = \int_{\Omega} g \cdot f d\mu.$$

Poslední věc, co zbývá je  $g \in L_q(\mu)$ :  $p = 1$ : Chceme  $|g(x)| \leq \|x^*\|$  skoro všude. Pokud ne, pak  $A = \{x | |g(x)| > \|x^*\|\}$  má kladnou míru. Ať  $A_+ = \{x | g(x) > \|x^*\|\}$  má kladnou míru. Pak

$$\|x^*\| \mu(A_+) \leq \left| \int_{A_+} g d\mu \right| = |x^*(\chi_{A_+})| \leq \|x^*\| \mu(A_+).$$

Podobně pro  $A_- := \{x | g(x) < -\|x^*\|\}$ .  $p > 1$  vynecháme.

└ Další kroky byly vynechány. □

### Věta 3.26

*Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory a  $1 \leq p \leq \infty$ . Nechť  $q$  je sdružený exponent k  $p$ . Pak zobrazení  $I : X^* \oplus_q Y^* \rightarrow (X \oplus_p Y)^*$  dané předpisem*

$$I(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$$

*je lineární izometrie  $X^* \oplus_q Y^*$  na  $(X \oplus_p Y)^*$ .*

┌

*Důkaz*

$I(f, g)$  lineární pro  $(f, g) \in X^* \oplus_q Y^*$  lehké. Zvol  $(f, g) \in X^* \oplus_q Y^*$ . Pak

$$\begin{aligned} \|I(f, g)\| &= \sup_{(x, y) \in B_{X \oplus_p Y}} |f(x) + g(y)| \leq \sup_{(x, y) \in B_{X \oplus_p Y}} (\|f\| \cdot \|x\| + \|g\| \cdot \|y\|) = \\ &= \sup_{(\alpha, \beta) \in B_{(\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_p)}} \tilde{I}(\|f\|, \|g\|)(\alpha, \beta) = \|\tilde{I}(\|f\|, \|g\|)\| = \|(\|f\|, \|g\|)\|_q = \sqrt[q]{\|f\|^q + \|g\|^q} = \\ &= \|(f, g)\|_{X^* \oplus_q Y^*}. \end{aligned}$$

Tedy  $\|I\| \leq 1$ .

$I$  je izometrie: Ať  $(f, g) \in X^* \oplus_q Y^*$ , BÚNO  $(f, g) \neq 0$ . Zvol  $\varepsilon > 0$  libovolné. Ať  $\eta > 0$  je „dost malé“: Zvolme

$$x \in B_x : |f(x)| > \|f\| - \eta, |\alpha| = 1, |f(x)| = \alpha f(x),$$

$$y \in B_y : |f(y)| > \|f\| - \eta, |\beta| = 1, |f(y)| = \beta f(y).$$

Položme

$$u = \frac{(\|f\|^{q-1}\alpha x, \|g\|^{q-1}\beta y)}{(\|f\|^q + \|g\|^q)^{\frac{1}{p}}} = \frac{\dots}{C}.$$

$$\|u\| = \left( \frac{1}{C} \|f\|^{p(q-1)} \|\alpha x\|^p + \|g\|^{p(q-1)} \|\beta y\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{C} (\|f\|^q + \|g\|^q)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

tedy  $u \in B_{\dots}$ . Pak ale

$$\begin{aligned} \|I(f, g)\| &\geq I(f, g)(u) = \frac{1}{C} (\|f\|^{q-1} f(\alpha x) + \|g\|^{q-1} g(\beta y)) \geq \\ &\geq \frac{1}{C} (\|f\|^{q-1} (\|f\| - \eta) + \|g\|^{q-1} (\|g\| - \eta)) \rightarrow \frac{1}{C} \cdot (\|f\|^q + \|g\|^q) = \|(f, g)\|. \end{aligned}$$

$I$  je na: Ať  $\varphi \in (X \oplus_p Y)^*$ . Polož  $f(x) := \varphi(x, 0)$ ,  $x \in X$  a  $g(y) := \varphi(0, y)$ ,  $y \in Y$ . Pak  $f \in X^*$ ,  $g \in Y^*$  a  $I(f, g) = \varphi$ . □

### Definice 3.9

Nechť  $K$  je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál  $\Lambda$  na  $C(K)$  je nezáporný, jestliže  $\Lambda(f) \geq 0$  pro každou nezápornou funkci  $f \in C(K)$ .

### Věta 3.27 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$ )

Nechť  $K$  je kompaktní prostor a  $\Lambda$  je nezáporný lineární funkcionál na  $C(K)$ . Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra  $\mu$  na  $K$  splňující  $\Lambda(f) = \int_K f d\mu$  pro každé  $f \in C(K)$ .

┌ Důkaz  
└ Bez důkazu.

□

### Věta 3.28 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$ )

Je-li  $K$  kompaktní prostor, pak prostor  $C(K)^*$  je lineárně izometrický s prostorem  $M(K)$  všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na  $K$  pomocí zobrazení  $I : M(K) \rightarrow C(K)^*$ ,  $I(\mu)_k = \varphi_k$ , kde

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f d\mu.$$

┌ Důkaz  
└ Bez důkazu.

□

## 4 Anihilátory, dualita kvocientů a podprostorů

### Definice 4.1 (Horní a dolní anihilátor)

Je-li  $X$  normovaný lineární prostor a  $A \subset X$ , pak definujeme tzv. anihilátor množiny  $A$  jako

$$A^\perp = \{f \in X^* \mid f(x) = 0 \ \forall x \in A\}.$$

*Poznámka*

Vlastně je to zobecnění kolmého prostoru (v Hilbertových prostorech je to „totéž“).

Pro množinu  $B \subset X^*$  pak definujeme tzv. zpětný anihilátor jako

$$B_\perp = \{x \in X \mid f(x) = 0 \ \forall f \in B\}.$$

### Lemma 4.1

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $A \subset X$ ,  $B \subset X^*$ . Pak

- $A^\perp$  je uzavřený podprostor  $X^*$ ,
- $B_\perp$  je uzavřený podprostor,
- $(A^\perp)_\perp = \overline{\text{span}} A$ ,
- $(B_\perp)^\perp \supset \overline{\text{span}} B$ .

┌ Důkaz

└ První dva body triviální cvičení. Další dva body jsou lehké. □

## Věta 4.2

*Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $Y$  jeho podprostor.*

1. *Nechť  $Y$  je uzavřený. Zobrazení  $I : Y^\perp \rightarrow (X/Y)^*$  dané předpisem*

$$I(f)(\hat{x}) = f(x)$$

*je lineární izometrie  $Y^\perp$  na  $(X/Y)^*$ .*

2. *Zobrazení  $I : X^*/Y^\perp \rightarrow Y^*$  dané předpisem*

$$I(\hat{f}) = f|_Y$$

*je lineární izometrie  $X^*/Y^\perp$  na  $Y^*$ .*

┌ Důkaz

1. a)  $I(f)$  je dobře definované: Ať  $\hat{x} = \hat{y}$ , pak  $x - y \in Y$  a  $f \in Y^\perp$  (tj.  $f(x - y) = 0$ ), tedy  $f(x) = f(y)$ .

b) Zároveň  $\|I(f)\| = \sup_{\hat{x} \in U_{X/Y}} |I(f)(\hat{x})| = \sup_{x \in U_x} |I(f)(\hat{x})| = \sup_{x \in U_x} |f(x)| = \|f\|$ , tedy  $I$  je spojitý a izometrie (linearita je triviální).

c) Ať  $\varphi \in (X/Y)^*$ . Pak  $\varphi \circ q \in X^*$  a  $I(\varphi \circ q) = \varphi \wedge \varphi \circ q \in Y^\perp$ :  $\forall y \in Y : \varphi(q(y)) = \varphi(\hat{0}) = 0$ . Tedy  $\varphi \circ q \in Y^\perp$ .  $\forall \hat{x} \in X/Y : I(\varphi \circ q)(\hat{x}) = (\varphi \circ q)(x) = \varphi(\hat{x})$ , tedy  $I(\varphi \circ q) = \varphi$ .

2. a)  $I(\hat{f})$  je dobře definované: Ať  $\hat{f} = \hat{g}$ , pak  $f - g \in Y^\perp$ , tedy  $f|_Y = g|_Y$ .

b)  $I$  zřejmě lineární. Zároveň  $\|I(\hat{f})\| = \sup_{y \in B_y} \|f(y)\| = \|f|_Y\| \leq \inf_{h \in \hat{f}} \|h\| = \|\hat{f}\|$ .

c)  $I$  je izometrie: Ať  $\hat{f} \in X^*/Y^\perp$ . Zvol  $g \in X^* : g|_Y = f|_Y \wedge \|g\| = \|f|_Y\|$  z H-B věty. Pak  $\hat{g} = \hat{f}$  a  $\|I(\hat{f})\| = \|I(\hat{g})\| = \|g|_Y\| = \|g\| \geq \inf_{h \in \hat{f}} \|h\| = \|f|_Y\|$ .

d)  $I$  je na: Ať  $\varphi \in Y^*$ . Z H-B věty existuje  $f \in X^* : f|_Y = \varphi$ . Pak  $I(\hat{f}) = f|_Y = \varphi$ . □

## Věta 4.3

*Jsou-li  $X, Y$  normované lineární prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , pak platí*

1.  $\text{Ker } T^* = (\text{Rang } T)^\perp$ ,

2.  $\text{Ker } T = (\text{Rang } T^*)^\perp$ ,

$$3. \overline{\text{Rang } T} = (\text{Ker } T^*)^\perp,$$

4.  $T^*$  je prostý, právě když  $\text{Rang } T$  je hustý.

┌

*Důkaz*

$$1. y^* \in \text{Ker } T^* \Leftrightarrow T^*y^* = 0 \Leftrightarrow y^* \circ T = 0 \Leftrightarrow y^*|_{\text{Rang } T} = 0.$$

$$2. x \in \text{Ker } T \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \forall y^* \in Y^* : y^*(Tx) = 0 \Leftrightarrow \forall y^* \in Y^* : T^*y^*(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (\text{Rang } T^*)^\perp.$$

$$3. \overline{\text{Rang } T} = ((\text{Rang } T)^\perp)^\perp = (\text{Ker } T^*)^\perp.$$

4.  $T^*$  prostý  $\Leftrightarrow \text{Ker } T = \{\mathbf{0}\}$ , ale  $\{\mathbf{0}\}^\perp = Y$ , tedy dle 3.  $\overline{\text{Rang } T} = Y$ . Naopak sporem: Ať  $\exists x \in Y/\overline{\text{Rang } T}$ . Potom dle H-B věty  $\exists f \in Y^* : f(x) \neq 0 \wedge f|_{\text{Rang } T} = 0$ . Pak ale

$$T^*f(x_0) = f(Tx_0) = 0, \forall x_0 \in X \implies T^*f = 0 \implies f \in \text{Ker } T^* \text{.} \zeta.$$

└

□

## Definice 4.2 (Druhý duál, evaluační funkcionál)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor. Symbolem  $X^{**}$  značíme  $(X^*)^*$ , tj. duál k prostoru  $X^*$ . Tento prostor nazýváme druhým duálem.

Je-li  $x \in X$ , pak definujeme tzv. evaluační funkcionál  $\varepsilon_x \in X^{**}$  předpisem  $\varepsilon_x(f) = f(x)$  pro každé  $f \in X^*$ . Zobrazení  $\varepsilon : X \rightarrow X^{**}$  dané předpisem  $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$  se nazývá kanonické vnoření  $X$  do  $X^{**}$ .

## Tvrzení 4.4

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření  $\varepsilon : X \rightarrow X^{**}$  je lineární izometrie do. Je-li tedy navíc  $X$  Banachův, pak  $\varepsilon(X)$  je uzavřený podprostor  $X^{**}$ .

┌

*Důkaz*

Linearita zřejmá. Izometrie

$$\|\varepsilon_x\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\varepsilon_x(x^*)| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| = \|x\|.$$

└

□

*Důsledek*  
TODO.

## Tvrzení 4.5 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory,  $\varepsilon_X : X \rightarrow X^{**}$  a  $\varepsilon_Y :$

## Tvrzení 4.6

Komutování kanonických vnoření do duálů? TODO

┌  
Důkaz  
└ TODO

□

## Věta 4.7

Pro každý normovaný lineární prostor  $X$  existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že  $X$  je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem  $X$  existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že  $X$  je jeho hustý podprostor.

Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li  $X_1, X_2$  dvě zúplnění  $X$ , pak existuje lineární izometrie  $X_1$  na  $X_2$ , která je na  $X$  identitou.

┌  
Důkaz  
Položme  $\hat{X} = \overline{\varepsilon(X)} \subseteq X^{**}$ . Ztoho plyne existunce.

Pokud  $X$  má skalární součin, pak platí rovnoběžníkové pravidlo. To platí i v  $\hat{X}$ , tedy  $\hat{X}$  je Hilbertův.

Ať  $I_1 : X \rightarrow X_1$  je izometrie,  $\overline{I_1(X)} = X_1$ ,  $I_2 : X \rightarrow X_2$  je izometrie,  $\overline{I_2(X)} = X_2$ . Pak  $I_1 \circ I_2^{-1}|_{I_2(X)} : I_2(X) \rightarrow X_1$  je spojitý lineární operátor, tedy  $\exists! S_1 : X_2 \rightarrow X_1$  spojitý lineární, že  $S_1 \supset I_1 \circ I_2^{-1}|_{I_2(X)}$ . Obdobně existuje  $S_2 : X_1 \rightarrow X_2$ . Pak se snadno ověří, že  $(S_2 \circ S_1)|_{I_2(X)} = \text{id}|_{I_2(X)}$ , tedy  $S_2 \circ S_1 = \text{id}$ . Analogicky  $S_1 \circ S_2 = \text{id}$ .

Následně se ukáže, že  $S_1$  je izometrie: Zvol  $x \in X_2$ , ať pro  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , posloupnost v  $X$ , je  $I_2(x_n) \rightarrow x$ . Pak

$$\|S_1 x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_1(I_2(x_n))\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|I_1(x_n)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

┌ Analogicky  $S_2$  je izometrie, tedy  $X_1, X_2$  jsou izometrické.

□

## Věta 4.8

Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

1.  $T$  je izomorfismus na, právě když  $T^*$  je izomorfismus na. V tomto případě navíc platí  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .
2.  $T$  je izometrie na, právě když  $T^*$  je izometrie na.

Speciálně, jsou-li  $X$  a  $Y$  lineárně izometrické, pak jsou také  $X^*$  a  $Y^*$  lineárně izometrické.

┌ Důkaz

⇒ (1.):

$$\forall y^* \in Y^* : ((T^{-1})^* T^*(y^*))(y) = T^* y^*(T^{-1}y) = y^*(TT^{-1}y) = y^*(y).$$

Analogicky  $T^* \circ (T^{-1})^* = \text{id } x^*$ .

⇐ (1.): Dle první části:  $T^*$  je izomorfismus  $\Rightarrow T^{**}$  je izomorfismus  $\Rightarrow \varepsilon_Y \circ T$  je izomorfismus  $\Rightarrow T$  je izomorfismus.

⇒ (2.): Dle 1. stačí:  $T^*$  je izometrie:

$$\forall y^* \in Y^* : \|T^* y^*\| = \sup_{x \in B_X} |y^*(Tx)| = \sup_{y \in B_Y} |y^*(y)| = \|y^*\|.$$

└ Opačná implikace analogicky jako v 1. □

### Definice 4.3 (Reflexivní prostor)

Banachův prostor  $X$  se nazývá reflexivní, pokud  $X^{**} = \varepsilon(X)$ .

*Pozor*

Existují i prostory, pro které je  $X$  izometrické  $X^{**}$ , ale ne pomocí  $\varepsilon$ .

### Věta 4.9

*Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory.*

- *Je-li  $X$  izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i  $X$  reflexivní.*
- *Je-li  $Y$  uzavřený podprostor  $X$ ,  $X$  reflexivní  $\Rightarrow Y$  reflexivní.*
- *Prostor  $X$  je reflexivní právě tehdy, když jeho duál  $X^*$  je reflexivní.*
- *Je-li  $X$  reflexivní a  $Y$  jeho uzavřený podprostor, pak je  $X/Y$  reflexivní.*



┌

*Důkaz*

1. Zvol  $y^{**} \in Y^{**}$ . Ať  $T : Y \rightarrow X$  je izomorfismus. Pak  $T^{**}y^{**} \in X^{**} \implies \exists x \in X : \varepsilon_X(x) = T^{**}y^{**}$ . Polož  $y = T^{-1}x \in Y$ . Následně dokážeme, že  $\varepsilon_Y(y) = y^{**}$ :

$$\begin{aligned} \forall y^* \in Y^* : \varepsilon_Y(y)(y^*) &= y^*(y) = y^*(T^{-1}x) = (T^{-1})^*y^*(x) = T^{**}y^{**}((T^{-1})^*y^*) = \\ &= y^{**}(T^*(T^{-1})^*y^*) = y^{**}(y^*). \end{aligned}$$

2. Zvol  $y^{**} \in Y^{**}$  a uvažujme

$$F(X^*) = y^{**}(x^*|_Y), x^* \in X^*.$$

Pak  $F \in X^{**}$  (lehké ověřit)  $\implies \exists x \in X : F = \varepsilon_X(x)$ .  $x \in Y$ , jelikož: Ať ne, pak (dle H-B)  $\exists f \in X^* : 0 \neq f(x) \wedge f|_Y \equiv 0$ . Pak  $F(f) = y^{**}(0) = 0$ ,  $\nabla$ .

Ted' už jen ověříme, že  $\varepsilon_Y(x) = y^{**}$ : Zvol  $y^* \in Y^*$ . Dle H-B existuje  $x^* \in X^*$ , že  $x^*|_Y = y^*$ . Pak

$$y^{**}(y^*) = y^{**}(x^*|_Y) = F(x^*) = x^*(x) = \varepsilon_Y(x)(x^*)$$

3.  $\implies$  : Zvol  $x^{***} \in X^{***}$ . Uvažuj  $x^* = x^{***} \circ \varepsilon_X \in X^*$ . Pak

$$\begin{aligned} \forall x \in X : x^{***}(\varepsilon_X(x)) &= x^*(x) = \varepsilon_X(x)(x^*) = \varepsilon_{X^*}(x^*)(\varepsilon_X(x)) \\ \implies x^{***} &= \varepsilon_{X^*}(x^*), \text{ na } \varepsilon_X(x) = x^{**}. \end{aligned}$$

Ať  $\varphi \in (X/Y)^{**}$ , pak

$$I^*(\varphi) = (Y^\perp)^* \implies \exists F \in X^{**} : I^*(\varphi) \subset F \implies \exists x \in X : F = \varepsilon_X(x).$$

Potom už jen chceme  $\varepsilon_{X/Y}(q(x)) = \varphi$ :

$$\begin{aligned} \forall f \in Y^\perp : \varepsilon_{X/Y}(q(x))(I(f)) &= I(f)(q(x)) = f(x) = F(f) = (I^*(\varphi))(f) = \varphi(I f) \implies \\ \implies \varepsilon_{X/Y}(q(x)) &= \varphi. \end{aligned}$$

└

□

## Věta 4.10

*Banachův prostor  $X$  je reflexivní, právě když pro každé  $x^* \in X^*$  existuje  $x \in B_X$  splňující  $\|x^*\| = x^*(x)$ .*

┌

*Důkaz*

└

Bez důkazu.

□

## 5 Slabá konvergence

**Definice 5.1** (Slabá konvergence, s. konvergence s hvězdičkou)

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor.

- Řekneme, že posloupnost  $\{x_n\}$  v prostoru  $X$  slabě konverguje k  $x \in X$  (značíme  $x_n \xrightarrow{w} x$ ) pokud pro každé  $x^* \in X^*$  platí  $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$ .
- Řekneme, že posloupnost  $\{x_n^*\}$  v prostoru  $X^*$  slabě s hvězdičkou konverguje k  $x^* \in X^*$  (značíme  $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ ) pokud pro každé  $x \in X$  platí  $x_n^*(x) \rightarrow x^*(x)$ .

**Lemma 5.1**

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor,  $\{x_n\}$  posloupnost v  $X$  a  $\{x_n^*\}$  posloupnost v  $X^*$ .

1. Existuje nejvýše jedno  $x \in X$  splňující  $x_n \xrightarrow{w} x$ .
2. Existuje nejvýše jedno  $x^* \in X^*$  splňující  $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ .
3. Pokud  $x \in X$  a  $x_n \rightarrow x$ , pak  $x_n \xrightarrow{w} x$ .
4. Pokud  $x^* \in X^*$  a  $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ , pak  $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ .

Důkaz

1.–4. triviální. □

**Věta 5.2**

Nechť  $X$  je separabilní normovaný lineární prostor a  $\{x_n^*\}$  omezená posloupnost v  $X^*$ . Pak  $\{x_n^*\}$  má  $w^*$ -konvergentní podposloupnost.

Důkaz

Ať  $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq B_x$  hustá v  $B_x$ . 1. krok: Najdeme  $(x_{n_k}^*)$ , že  $x_{n_k}^*(x_n)$  je konvergentní pro  $n \in \mathbb{N}$ : Ať  $A_1 \subset \mathbb{N}$  nekonečná. K  $((x_k^*)(x_1))_{k \in A_1}$  je konvergentní. Totéž pro  $A_2$  a  $x_2$ ,  $A_3$  a  $x_3$ , ... Potom vybereme prvky na diagonále.

2. krok: Pak  $x_{n_k}^*(x)$  konverguje pro  $x \in B_x$ :  $\varepsilon > 0$  dáno. Ať  $n \in \mathbb{N}$ , že  $\|x_n - x\| < \varepsilon$ .

$$k_0 \in \mathbb{N} \forall k, l \geq k_0 : |x_{n_k}^*(x_n) - x_{n_l}^*(x_n)| < \varepsilon.$$

Pak

$$\forall k, l \geq k_0 : |x_{n_k}^*(x) - x_{n_l}^*(x)| \leq |x_{n_k}^*(x - x_n)| + |x_{n_k}^*(x_n) - x_{n_l}^*(x_n)| + |x_{n_l}^*(x_n) - x_{n_l}^*(x)| < \varepsilon(\|x_{n_k}^*\| + 1 + \|x_{n_l}^*\|)$$

3. krok: Tedy z linearit  $x_{n_k}^*(x)$  konverguje pro  $x \in X$ : Polož  $x^*(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^*(x)$ .

Pak  $x^* \in X^*$  □

### Věta 5.3

Banachův prostor  $X$  je reflexivní, právě když každá omezená posloupnost  $\{x_n\}$  v  $X$  má slabě konvergentní podposloupnost.

*Důkaz*

$\Leftarrow$  nebude (teď je těžký, bude v funkcionální analýze).  $\Rightarrow$  plyne z následující věty:  $X^*$  separabilní  $\Rightarrow X$  separabilní. Polož  $Y = \overline{\text{span}}(x_n) \subset X$ , pak  $Y$  je separabilní a reflexivní  $\Rightarrow Y^*$  je (reflexivní +) separabilní, dle následující věty.  $\Rightarrow \exists (x_{n_k}), w^*$ -konvergentní podposloupnost v  $Y^{**} \equiv \varepsilon(Y) \Rightarrow \exists y \in Y : \varepsilon(x_{n_k}) \xrightarrow{w^*} \varepsilon(y) \Leftrightarrow x_{n_k} \xrightarrow{w} y$ .  $\square$

### Věta 5.4

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $X^*$  je separabilní. Pak  $X$  je separabilní.

*Důkaz*

Zvol  $\{x_n^* | n \in \mathbb{N}\} \subset S_{X^*}$  TODO. Pro  $n \in \mathbb{N}$  najdi  $x_n \in B_x : x_n^*(x_n) > \frac{1}{2}$ . Pak  $\overline{\text{span}} \{x_n | n \in \mathbb{N}\} = X$  (a tím bude hotovo, protože  $\overline{\text{span}}(x_n) = \overline{\text{span}}_*(x_n)$ ): Ať ne, pak existuje  $f \in S_{X^*} : f|_{\overline{\text{span}}} = 0, f \neq 0$ . Zvol  $n \in \mathbb{N}$ , že  $\|x_n^* - f\| < \frac{1}{4}$ . Pak

$$0 = |f(x_n)| \geq |x_n^*(x_n)| - |(x_n^* - f)(x_n)| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} > 0. \nabla$$

$\square$

## 6 Omezené operátory v Banachových prostorech

### Definice 6.1 (Kompaktní operátor, konečněrozměrný operátor)

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory a  $T : X \rightarrow Y$  je lineární zobrazení. Pak  $T$  se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou  $A \subset X$  je množina  $T(A)$  relativně kompaktní (tj. její uzávěr je kompaktní) v  $Y$ .

Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z  $X$  do  $Y$  značíme  $\mathcal{K}(X, Y)$ .

Lineární operátor  $T$  se nazývá konečněrozměrný, pokud  $\text{Rang } T$  má konečnou dimenzi.

$\mathcal{F}(X, Y)$  značí množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z  $X$  do  $Y$ .

*Poznámka*

$X$  je MP,  $A \subset X$ . Pak

- $A$  je relativně kompaktní  $\Leftrightarrow$  z každé posloupnosti v  $A$  lze vybrat konvergentní po-

sloupnost v  $X$ .

- Pokud  $X$  je úplný, pak  $A$  je relativně kompaktní  $\leftrightarrow A$  je totálně omezená.

### Tvrzení 6.1

Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z  $X$  do  $Y$  je automaticky spojitý. Dále, je-li  $T : X \rightarrow Y$  lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1.  $T$  je kompaktní.
2.  $T(B_X)$  je relativně kompaktní.
3. Je-li  $\{x_n\}$  omezená posloupnost v  $X$ , pak posloupnost  $\{T(x_n)\}$  má konvergentní podposloupnost.

┌  
Důkaz

1.  $\implies$  2: triviální. 2.  $\implies$  3: Ať  $(x_n)$  je posloupnost v  $B(O, r)$  (kde  $r > 0$ ). Pak  $(\frac{x_n}{r})$  je posloupnost v  $B_x \implies$  dle 2.  $\exists(n_k)$ , že  $T(\frac{x_{n_k}}{r})$  je konvergentní, tedy  $T(x_{n_k})$  je konvergentní.

3.  $\implies$  1.: Ať  $A \subset X$  omezená, ať  $(y_n)$  je posloupnost v  $T(A)$ . Pak  $\exists x_n \in A : Tx_n = y_n$ ,  
 $n \in \mathbb{N} \implies \exists(n_k) : T_{x_{n_k}}$  je konvergentní v  $Y$ . □

### Věta 6.2

Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory.

1. Operátor  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  je konečněrozměrný právě tehdy, když existují  $f_1, \dots, f_n \in X^*$  a  $y_1, \dots, y_n \in Y$  takové, že  $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$  pro každé  $x \in X$ .
2.  $\mathcal{K}(X, Y)$  je podprostor  $\mathcal{L}(X, Y)$  a  $\mathcal{F}(X, Y)$  podprostor  $\mathcal{K}(X, Y)$ .
3.  $\mathcal{K}(X, Y)$  je uzavřený podprostor  $\mathcal{L}(X, Y)$ .
4. Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem (zleva či zprava), dostaneme opět kompaktní operátor.

┌  
Důkaz

1.  $\Leftarrow$ : Jasně protože pak  $\text{Rang } T \subset \text{span} \{y_1, \dots, y_n\}$ .  $\Rightarrow$ : Ať  $y_1, \dots, y_n$  je báze  $\text{Rang } T$ . Uvažujme  $g_i \in (\text{Rang } T)^*$ ,  $g_i(y_j) = \delta_{ij}$ . Polož  $f_i = g_i \circ T \in X^*$ ,  $i \in [n]$ . Pak  $T(x) = \sum_{i=1}^n g_i(Tx)y_i = \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$ .

2. Ať  $S, T \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Pak  $(S + T)(B_x) = S(B_x) + T(B_x) \subseteq \overline{S(B_x)} + \overline{T(B_x)}$ , což jsou kompaktní prostory. Protože součet kompaktních je kompaktní (a uzavřený podprostor kompaktní také),  $\overline{(S + T)(B_x)}$  je kompaktní. Násobení triviálně.

$T \in \mathcal{F}(x, y) \Rightarrow \text{Rang } T \text{ je konečnědimenzionální, tedy uzavřená} \Rightarrow \overline{T(B_x)} \subseteq \text{Rang } T \cong \mathbb{K}^n$ . □

└

TODO!!! (06. 12. 2021)

### Definice 6.2 (Otevřené zobrazení)

Zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  mezi metrickými prostory  $X, Y$  se nazývá otevřené, pokud  $f(G)$  je otevřená množina v  $Y$  pro každou otevřenou množinu  $G \subset X$ .

### Věta 6.3 (O otevřeném zobrazení (Juliusz Pawel Schauder 1930))

*Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  je na. Pak  $T$  je otevřené zobrazení.*

### Lemma 6.4 (J. P. Schauder, 1930)

*Nechť  $X$  je Banachův prostor,  $Y$  je normovaný lineární prostor a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Jestliže  $r, s > 0$  jsou taková, že  $U(0, s) \subset \overline{T(\mathcal{U}(0, r))}$ , pak dokonce  $U(0, s) \subset T(\mathcal{U}(0, r))$*

┌  
Důkaz

Zvol  $z \in \mathcal{U}_Y$ ,  $\delta > 0$ , že  $\|z\| < 1 - \delta$ . Chceme  $y = \frac{z}{1-\delta} \in T(\frac{1}{1-\delta}\mathcal{U}_x)$ . Minule (TODO!!!) jsme dělali  $\exists (y_n)_{n=0}^\infty$ , že  $y_0 = 0$ ,  $\|y - y_n\| < \delta^n$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  a  $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1}\mathcal{U}_x)$ .

Zvolme  $x_n \in \delta^{n-1}\mathcal{U}_x$ , že  $Tx_n = y_n - y_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n = \frac{1}{1-\delta} < \infty \quad X \text{ je Banachův} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \|x\| < \frac{1}{1-\delta} \Rightarrow x \in \frac{1}{1-\delta}\mathcal{U}_x.$$

Zároveň  $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n - y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - 0 = y$ . □

└

┌  
Důkaz (Věty o otevřeném zobrazení)

Úvod: stačí  $\exists \delta > 0 : \mathcal{U}(0, \delta) \subset T(\mathcal{U}_x)$ : Zvol  $G \subset X$  otevřená,  $x \in G$ . Pak  $y = Tx \in T(G)$ .  $G$  otevřená  $\Rightarrow \exists R > 0 : \mathcal{U}(x, R) \subset G$ . Pak  $\mathcal{U}(y, \delta R) = y + R\mathcal{U}(0, \delta) \subset y + RT(\mathcal{U}(0, 1)) = T(\mathcal{U}(x, R)) \subseteq T(G)$ .

Stat:

$Y$  úplný  $\implies$  z Banachovy věty  $\exists n_0 : \text{int}(\overline{T(n_0\mathcal{U}_x)}) \neq \emptyset \implies \overline{n_0\mathcal{U}_x}$  (symetrická, konvexní, uzavřená) obsahuje kouli  $\implies \exists \delta > 0 : \mathcal{U}(0, \delta) \subseteq \overline{T(n_0\mathcal{U}_x)}$ . Z předchozího lemmatu  $\mathcal{U}(0, \delta) \subseteq T(n_0\mathcal{U}_x) = nT(\mathcal{U}_x)$ .

Závěr:  $\mathcal{U}(0, \frac{\delta}{n_0}) \subset T(\mathcal{U}_x)$ . □

*Důsledek* (S. Banach, 1929)

Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Pak  $T$  je izomorfismus  $X$  na  $Y$ , právě když  $T$  je prostý a na.

*Důkaz*

„ $\implies$ “ jasné. „ $\Leftarrow$ “:  $T^{-1}$  je spojitý plyne z předchozí věty ( $(T^{-1})^{-1}(O) = T(O)$  je otevřené podle předchozí věty ( $O$  otevřená)). □

*Důsledek*

Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  je na. Pak platí

- Existuje  $c > 0$  takové, že pro každé  $y \in Y$  existuje  $x \in T^{-1}(y)$  splňující  $\|x\| \leq c\|y\|$ .
- Zobrazení  $\hat{T} : X/\text{Ker } T \rightarrow Y$  dané předpisem  $\hat{T}(\hat{x}) = T(x)$  je lineární izomorfismus na. Tedy prostor  $Y$  je izomorfní s  $X/\text{Ker } T$ .

*Důkaz*

První bod: Dle předchozí věty  $\exists R > 0 : \mathcal{B}(0, R) \subset T(\mathcal{U}_x)$ . Zvolíme  $y \in Y \setminus \{0\}$ . Pak  $\exists x \in \mathcal{U}_x : Tx = \frac{y}{\|y\|} \cdot R \wedge \|\frac{x\|y\|}{R}\| \leq \frac{1}{R}\|y\|$ . (Položíme  $c = \frac{1}{R}$ .)

Druhý bod: 1. krok: Je dobře definovaný:  $\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x - y \in \text{Ker } T \Leftrightarrow Tx = Ty$ . 2. krok  $\hat{T}$  je lineární a spojitý: lineární triviálně, spojitý z normy:

$$\forall \hat{x} \in \mathcal{U}_{X/\text{Ker } T} : \|\hat{T}(\hat{h})\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|\hat{x}\| \implies \|\hat{T}\| \leq \|T\|.$$

3. krok:  $\hat{T}$  je na, protože  $T$  je na a navíc  $\hat{T}$  je prosté, neboť  $\hat{T}\hat{x} = 0 \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker } T$ . □

### Definice 6.3 (Graf)

Je-li  $f : X \rightarrow Y$  zobrazení množiny  $X$  do množiny  $Y$ , pak množinu

$$\text{graf } f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení  $f$ . Říkáme, že zobrazení  $f : X \rightarrow Y$ , kde  $X, Y$  jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina  $\text{graf } f$  je uzavřená v  $X \times Y$ .

### Věta 6.5 (O uzavřeném grafu (S. Banach, 1932))

Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory a  $T : X \rightarrow Y$  je lineární zobrazení. Pak  $T$  je spojitý, právě když má uzavřený graf.

Důkaz

„ $\implies$ “ trivální, platí vždy. „ $\Leftarrow$ “:  $G := \{(x, Tx) | x \in X\} \subset X \oplus_\infty Y$  je uzavřený (tedy Banachův). At  $P_x, P_y$  jsou kanonické projekce (jsou spojitý:  $\|P_x(x, y)\| = \|x\|_x \leq \|(x, y)\|_\infty$ ).

Uvažujme  $S : X \rightarrow G, Sx = (x, Tx)$ , to je lineární a prosté. Ale nevíme, zda je  $S$  spojitý. To dokážeme tak, že dokážeme spojitost  $S^{-1}$  a to, že je to izomorfismus. Z toho pak plyne spojitost  $S$  i  $T$ .  $S^{-1} = P_x|_G$  je spojitý, prosté a na, tudíž je izomorfismus z věty výše. Tedy  $S$  je spojitý. Tedy je spojitý  $T = P_y \circ S$ .  $\square$

### Věta 6.6 (Z dřívějšíka, zopakovaná, důkaz je nový)

Nechť  $X$  je Banachův prostor a  $Y, Z \subset X$  jeho podprostory splňující  $X = Y \oplus Z$ . Pak  $X = Y \oplus_t Z$ , právě když  $Y$  a  $Z$  jsou uzavřené.

Důkaz

„ $P_y$  spojitá  $\implies Y, Z$  uzavřené“: lehké, protože  $P_Z = \text{id} - P_y$  spojitá a  $Y = \text{Ker } P_Z = P_Z^{-1}(0)$  je uzavřená a  $Z = \text{Ker } P_y = P_y^{-1}(0)$  je uzavřená.

Naopak at  $Y, Z$  jsou uzavřené, pak chceme  $P_y$  má uzavřený graf (pak aplikujeme předchozí větu): At  $(y_n, P(x_n)) \rightarrow (x, Z) \in Y \oplus_\infty Z \cong X$ . Pak  $x_n \rightarrow x, P_y(x_n) \rightarrow z$ . Tedy  $x_n - P_y(x_n) \rightarrow x - z \implies x - z \in Z$ . Tudíž  $x = z + x - z \implies P_y x = z$ . Tudíž  $(x, z) = (x, P_y x) \in \text{graf } P_y$   $\square$

## 7 Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

### Tvrzení 7.1

Nechť  $X$  je Banachův prostor a  $T \in (X)$ . Pak  $T$  je invertibilní, právě když  $T$  je bijekce.

Důkaz

„ $\implies$ “  $TS = \text{id} \implies T$  je na,  $ST = \text{id} \implies T$  je prosté.

„ $\Leftarrow$ “: Plyne z důsledku výše.  $\square$

### Tvrzení 7.2

Nechť  $X$  je Banachův prostor.

- Pokud  $T \in \mathcal{BL}(X)$  a  $\|T\| < 1$ , pak  $\text{id}_X - T$  je invertibilní a platí  $(\text{id}_X - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ .
- Pokud je  $T$  invertovatelný a  $\|S - T\| < \frac{1}{\|T\|^{-1}}$ , pak  $S$  je invertovatelný a  $S^{-1} = T^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\text{id} - ST^{-1})^n$ . Speciálně, množina všech invertibilních operátorů v  $\mathcal{L}(X)$  je otevřená.

┌

Důkaz

1. bod: máme  $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|} \implies \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(X)$ . Zároveň

$$\forall x \in X : \left( (\text{id} - T) \circ \sum_{n=0}^{\infty} T^n \right) (x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} (T^n - T^{n+1})(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x - T^{n+1}(x)) = x.$$

Analogicky  $\sum_{n=0}^{\infty} T^n \circ (\text{id} - T) = \text{id}_X$ .

$$2. \text{ bod: Idea: } \frac{1}{S} = \frac{1}{S - T + T} = \frac{1}{T(T^{-1}(S - T) + \text{id})}.$$

Důkaz: Platí

$$S = S - T + T = T(T^{-1}(S - T) + \text{id}) = T(\text{id} - T^{-1}(T - S))$$

$T$  má inverz, člen za mínus má normu menší 1, tedy  $\text{id} - T^{-1}(T - S)$  má inverz dle 1. bodu, tedy  $S^{-1}$  existuje a

$$S^{-1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (T^{-1}(T - S))^n \right) \circ T^{-1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (\text{id} - T^{-1}S)^n \right) \circ T^{-1} = T^{-1} \circ \left( \sum_{n=0}^{\infty} (\text{id} - ST^{-1})^n \right).$$

└

□