

TODO!!!

### Definice 0.1 (Lineární PDR)

Parciální diferenciální rovnice (PDR) je lineární, jde-li ji zapsat ve tvaru

$$\sum_{|\alpha| \leq m, \alpha \in (\mathbb{N}_0)^n} a_\alpha D^\alpha u = f$$

pro neznámou funkci  $u$ ,  $f(x)$  a  $a_\alpha(x)$  je dáno ( $x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$ ).

Je-li  $f \equiv 0$ , pak říkáme, že PDR je homogenní (bez pravé strany). Pokud  $a_\alpha$  jsou konstanty, pak říkáme, že PDR je s konstantními koeficienty.

### Definice 0.2 (Semilineární PDR)

Semilineární rovnice má tvar

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u + b = 0,$$

kde  $a(x)$  a  $b(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^{n-1} u)$  je dáno.

### Definice 0.3 (Kvazilineární PDR)

Kvazilineární rovnice je

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u + f = 0,$$

kde  $a_\alpha(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^{m-1} u)$  a  $f(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^{m-1} u)$  je dáno.

### Definice 0.4 (Řád rovnice)

$m$  v předchozích definicích nazýváme řád rovnice.

### Definice 0.5 (Korektně zadaný problém)

Problém je korektně zadaný podle Hadamarda, pokud má řešení, řešení je jednoznačné a řešení závisí spojitě na datech.

### Definice 0.6 (Klasické řešení)

Rovnice platí bodově, derivace jsou spojitě.

### Definice 0.7 (Okrajové podmínky)

Dirichlet: zadaná hodnota na hranici.

Neumann: zadány normálové tečny na hranici.

# 1 Cauchyova úloha pro kvazilineární rovnici 1. řádu

## Definice 1.1

Buď  $a_1, \dots, a_n, f \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Rovnici

$$\sum_{j=1}^n a_j(u(x), x) \partial_j u(x) = f(u(x), x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

nazveme kvazilineární rovnici prvního řádu.

Počáteční podmínku předepisujeme ve tvaru  $u(0, \bar{x}) = u_0(\bar{x})$ , kde  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Funkci  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$  nazveme klasickým řešením Cauchyovy úlohy pro kvazilineární rovnici 1. řádu, pokud  $u \in \mathbb{C}^1(\Omega)$  a podmínky platí bodově v  $\Omega$ .

# 2 Klasifikace lineárních rovnic 2. řádu

*Poznámka* (Lineární rovnice druhého řádu)

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_i \partial_j u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u(x) + c(x) u(x) = f(x),$$

kde  $a_{ij}, b_i, c, f$  jsou dané funkce,  $i, j \in [n]$ ,  $u$  neznámá funkce.

Zafixujeme  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , aby rovnice byla definována na nějakém  $U(x_0)$ . Chceme také rovnici transformovat tak, aby  $A = (a_{ij})$  byla diagonální. Budeme pp.  $A$  je symetrická (neboť pro  $u \in C^2(\dots)$ :  $\partial_i \partial_j u = \partial_j \partial_i u$ )

## Definice 2.1 (Transformace diferenciální rovnice)

Vezmeme nějaké  $y_0$  a  $U(y_0)$  a hladké? zobrazení  $\varphi(y_0) = x_0$  a  $\varphi(U(y_0)) \subset U(x_0)$ .

Definujeme funkci  $v$ :  $u(x) = v(P \cdot x)$ , kde  $P \in M^{n \times n}$  je regulární matice.  $u(\overbrace{P^{-1}y}^{\varphi(y)}) = v(y)$ .

Dosadíme do rovnice výše:

$$\begin{aligned} \partial_i u(x) &= \sum_{k=1}^n \partial_k v(Px) P_{ki}, & \partial_j \partial_i u(x) &= \sum_{k=1}^m P_{ki} \sum_{l=1}^n P_{lj} \partial_k \partial_l v(Px), \\ \sum_{i,j,k,l=1}^n \partial_k \partial_l v(Px) P_{ki} a_{ij}(x) (P^T)_{jl} &= \sum_{k,l=1}^n \partial_k \partial_l v(Px) (PA(x) P^T)_{kl} \end{aligned}$$

LA:  $A(x_0)$  je symetrická, tedy ze Sylvestrova zákona setrvačnosti existuje  $P$  regulární taková, že  $PA(x_0)P^T = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  pro  $d_i \in \{-1, 0, 1\}$ . Pozor,  $P$  není určena jednoznačně, ale  $d_1, \dots, d_n$  ano až na permutaci.

Taktéž lze najít  $P$  tak, aby  $P^T = P^{-1}$  a  $PA(x_0)P^{-1} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  pro  $d \in \mathbb{R}$ .

*Například*

Vlnová rovnice v 1D:  $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ .

Laplaceova rovnice v 2D:  $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ .

Rovnice vedení tepla:  $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ .

## Definice 2.2 (Typy diferenciální rovnice 2. řádu)

Řekneme, že lineární diferenciální rovnice je

eliptická v  $x_0$ , pokud  $\text{sgn } A(x_0) = (n, 0, 0)$  nebo  $(0, 0, n)$ ; (Laplace)

hyperbolická v  $x_0$ , pokud  $\text{sgn } A(x_0) = (n-1, 0, 1)$  nebo  $(1, 0, n-1)$ ; (vlnová)

parabolická v  $x_0$ , pokud  $\text{sgn } A(x_0) = (n-1, 1, 0)$  nebo  $(0, 1, n-1)$  a v případě  $\text{sgn } A(x_0) = (n-1, 1, 0)$  navíc požadujeme, aby koeficient  $b_n$  (odpovídající  $d_n = 0$ ) po transformaci byl v bodě  $x_0$  záporný, a v opačném případě kladný; (vedení tepla)

## Věta 2.1

Buď  $S$  hyperbolická na okolí  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $a_{11}, a_{12}, a_{22} \in C^1(U(x_0))$ ,  $a_{11} \neq 0$  na  $U(x_0)$ . Pak lze

$$a_{11}\partial_1^2 u + 2a_{12}\partial_1\partial_2 u + a_{22}\partial_2^2 u = 0$$

transformovat do tvaru  $\partial_1\partial_2 v = f(\partial_1 v, \partial_2 v, v)$  na  $V(x_0)$  pro vhodnou funkci  $f$  a okolí  $V$ .

┌

*Důkaz*

└

Dokázáno na cvičení.

□

## 3 Vlnová rovnice

### Tvrzení 3.1 (Obecné řešení vlnové rovnice v 1D)

Řešení  $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ , kterou lze transformovat na  $\partial_1\partial_2 v = 0$ , dostaneme skrze  $\partial_2 v(\varrho\sigma) = V_1(\sigma)$ , tedy  $\int_0^\infty V_1(\tau)d\tau + V_2(\varrho) = V_1(\sigma) + V_2(\varrho) = v(\varrho, \sigma)$ .

Obecným řešením je tedy

$$u(t, x) = V_1(x - ct) + V_2(x + ct),$$

pro dost hladké funkce  $V_1, V_2$ .

*Poznámka* (Úloha pro vlnovou rovnicí (Cauchyova úloha))

Pro dané  $f : (0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Hledáme řešení  $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f \text{ v } (0, T) \times \mathbb{R}.$$

A  $u(0, x) = u_0(x)$ ,  $\partial_t u(0, x) = u_1(x)$  ( $\partial_t u$  musí jít spojitě rozšířit do  $(0, x)$  a  $\partial_t u(0, x)$  je hodnota tohoto rozšíření).

### Definice 3.1 (d'Alembertova formule)

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) ds.$$

### Lemma 3.2

$$\partial_t \int_0^t u_\tau(t, x) d\tau = u_t(t, x) + \int_0^t \partial_1 u_\tau(t, x) d\tau$$

┌  
Důkaz

$U(t, s, x) := \int_0^t u_\tau(s, x) d\tau$ . Chceme  $\partial_t[U(t, t, x)] = (\partial_1 U)(t, t, x) + (\partial_2 U)(t, t, x)$ .

$$\partial_t u(t, x) = u_t(t, x) + \int_0^t \partial_1 u_\tau(t, x) d\tau.$$

└

□

*Poznámka* (Duhamelův princip)

Aneb jak určit řešení (libovolné lineární rovnice) pro  $f \not\equiv 0$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 0$  (pokud známe řešení pro  $f = 0$ ).

Najdeme řešení  $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$  v  $(\tau, T) \times \mathbb{R}$  ( $\tau \in (0, T)$ ) s počátečními podmínkami  $u(\tau, x) = 0$  a  $\partial_t u(\tau, x) = f(\tau, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Označme ho  $u_\tau$ .

Tvrdíme, že  $u(t, x) := \int_0^t u_\tau(t, x) d\tau$  je řešení s  $f \not\equiv 0$ .

$$\partial_t u(t, x) = u_t(t, x) + \int_0^t \partial_1 u_\tau(t, x) d\tau = 0 + \int_0^t \partial_1 u_\tau(t, x) d\tau$$

$$\partial_t^2 u(t, x) = \partial_1 u_t(t, x) + \int_0^t \partial_1^2 u_\tau(t, x) d\tau = f(t, x) + \int_0^t \partial_1^2 u_\tau(t, x) d\tau$$

$$\partial_t^2 u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = f(t, x) + \int_0^t (\partial_1^2 u_\tau(t, x) - \partial_2^2 u_\tau(t, x)) d\tau = f(t, x) + \int_0^t 0 d\tau = f(t, x).$$

Očividně navíc  $u(0, x) = 0$  a  $\partial_t u(0, x) = 0$ .

Dosazením řešení z d’Alambertovy formule:

$$u(t, x) = \int_0^t u_\tau(t, x) d\tau = \int_0^t \frac{1}{2} \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau, s) ds d\tau$$

### Definice 3.2

Buď  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  otevřená,  $k \in \mathbb{N}_0$ .  $C^k(\overline{\Omega}) = \{f \in \Omega \rightarrow \mathbb{R} | \alpha \in (\mathbb{N}_0)^n, |\alpha| \leq k \implies D^\alpha f \text{ je možné spojitě rozšířit}\}$

Pro  $T > 0$  definujeme  $C^k([0, T] \times \mathbb{R}) := \{f : (0, T) \times \mathbb{R} | \alpha \in (\mathbb{N}_0)^2, |\alpha| \leq k \implies D^\alpha f \text{ lze spojitě rozšířit}\}$

┌ *Poznámka*

Podobné prostory zavedeme podobně.

Pro omezené  $\Omega$  lze zavést i tím, že  $D^\alpha f$  jsou stejnoměrně spojitě.

└ Nerozlišujeme mezi  $D^\alpha f$  a jeho rozšířením na hranici.

### Lemma 3.3

Ať  $f, \partial_2 f \in C([0, T] \times \mathbb{R})$  pro zvolené  $T > 0$ . Pak pro  $F(t, x) := \int_0^t f(\tau, x) d\tau$  je

$$F \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}) \wedge \partial_1 F(t, x) = f(t, x) \wedge \partial_2 F(t, x) = \int_0^t \partial_2 f(\tau, x) d\tau.$$

┌ *Důkaz (Náznak)*

Platí  $\partial_1 F(t, x) = f(t, x)$  pro  $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}$ , protože pro pevné  $x \in \mathbb{R}$  je  $\tau \mapsto f(\tau, x)$  spojitě  $\implies \partial_1 F_t \in C([0, T] \times \mathbb{R})$ .

$$\partial_2 F(t, x) = \int_0^t \partial_2 f(\tau, x) d\tau,$$

protože derivujeme integrál dle parametru  $x$ ,  $t$  je pevné.  $(f(\cdot, x))$  je měřitelná ze spojitosti,  $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(\cdot, x_0) \in L^1(0, t)$  ze spojitosti pro  $t < T$ ,  $\exists \partial_2 f(t, x)$  všude (tj. i skoro všude) z  $\partial_2 \in C(\dots)$ , integrovatelná majoranta existuje z  $|\partial_2 f(t, x)| \leq \max_{[0, t] \times [-K, K]} \partial_2 f$  pro vhodné  $K > 0$ .  $\square$

### Věta 3.4

Buď  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $T > 0$ ,  $f \in C^1([0, T] \times \mathbb{R})$ . Definujeme

$$u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x),$$

kde  $u_1, u_2$  jsou  $u$  z d’Alambertovy formule a Duhamelova principu. Pak platí  $u \in C^2([0, T] \times \mathbb{R})$ ,  $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = f$  v  $(0, T) \times \mathbb{R}$ ,  $u = u_0$ ,  $\partial_t u = u_1$  v  $\{0\} \times \mathbb{R}$ .

┌ *Důkaz*

„ $u_2 \in C^1([0, T) \times \mathbb{R})$ “: Ano, pokud  $F(\tau, t, x) := \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau, s)ds$  splňuje  $F, \partial_2 F, \partial^3 F \in C([0, T) \times \mathbb{R})$ .  $G(\tau, \alpha, \beta) := \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau, s)ds$  je spojitá na  $[0, T) \times \mathbb{R}^2$  z vlastností  $f$ , tedy  $F$  podmínky splňuje.

Z lemmatu tedy máme

$$u_2 \in C^1([0, T) \times \mathbb{R}), \partial u_2(t, x) = \frac{1}{2}F(t, t, x) + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_2 F(\tau, t, x) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \partial_2 F(\tau, t, x) d\tau$$

Podobně  $\partial_t u_2 \in C^1([0, T) \times \mathbb{R})$ .

$$\partial_t^2 u_2(t, x) = \frac{1}{2} \partial_2 F(t, t, x) + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_2^2 F(\tau, t, x) d\tau.$$

$$\partial_2 F(\tau, t, x) = f(\tau, x + (t - \tau)) + f(\tau, x - (t - \tau))$$

$$\partial_2 = F(t, t, x) = 2f(t, x),$$

$$\partial_t^2 u_2(t, x) = f(t, x) + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_2 f(\tau, x + (t - \tau)) - \partial_2 f(\tau, x - (t - \tau)) d\tau.$$

Existence  $\partial_x^2$  stejně jako v předchozím. Její výpočet:

$$\partial_3^2 F(\tau, t, x) = (\partial_2 f)(\tau, x + t - \tau) - (\partial_3 f)(\tau, x - t + \tau)$$

$$\partial_x^2 u_2(t, x) = \frac{1}{2} \int_0^t \partial_3^2 F(\tau, t, x) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \partial_2 f(\tau, x + t - \tau) - \partial_2 f(\tau, x - t + \tau) d\tau.$$

└ Tedy  $\partial_t^2 u_2 - \partial_x^2 u_2 = f$  na  $(0, T) \times \mathbb{R}$ .  $u_2 = 0$  a  $\partial_t u_2 = 0$  v  $\{0\} \times \mathbb{R}$ . □

### Lemma 3.5 (O rozšiřování)

Bud'  $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{g}$  liché rozšíření na  $\mathbb{R}$ .

- Je-li  $g(0) = 0$  a  $g \in C([0, +\infty))$ , je  $\tilde{g} \in C(\mathbb{R})$ .
- Je-li  $g(0) = 0$  a  $g \in C^1([0, +\infty))$ , je  $\tilde{g} \in C^1(\mathbb{R})$ .
- Je-li  $g''(0) = g(0) = 0$  a  $g \in C^2([0, +\infty))$ , je  $\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R})$ .

┌ *Důkaz*

Pro  $x < 0$ :  $\tilde{g}(x) = -g(-x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0-} \tilde{g}(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} -g(-x) = \lim_{y \rightarrow 0+} -g(y) = 0$ .

Pro  $x < 0$ :  $\tilde{g}(x) = -g(-x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0-} \tilde{g}'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g'(-x) = \lim_{y \rightarrow 0+} g'(y)$ . Tedy  $\tilde{g}'_+(0) = \tilde{g}'_-(0) = \tilde{g}'(0)$ .

└ Třetí případ je analogicky. □

*Poznámka* (Počátečně okrajová úloha v  $(0, T) \times (0, +\infty)$ )

Pro dané funkce  $u_0, u_1 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T > 0$ ,  $f : [0, T) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  najděte  $u : [0, T) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , které řeší  $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = f$  v  $(0, T) \times (0, +\infty)$ ,  $u = 0$  v  $[0, T) \times \{0\}$ ,  $u = u_0$  a  $\partial_t u = u_1$  v  $\{0\} \times [0, \infty)$ .

Definujeme  $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{f}$  jako lichá rozšíření.

$$u(t, x) := \frac{1}{2} (\tilde{u}_0(x+t) + \tilde{u}_0(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{u}_1(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\tau, s) ds d\tau.$$

Upočítali jsme to a vyšlo to.

### Věta 3.6

Bud'  $T > 0$ ,  $f \in C^1([0, T) \times [0, \infty))$ ,  $u_0 \in C^2([0, +\infty))$ ,  $u_1 \in C^1([0, +\infty))$ ,  $f(t, 0) = 0$   $\forall t \in [0, T)$ ,  $u_0(0) = u_0''(0) = 0$ ,  $u_1(0) = 0$ . Pak  $u$  definované

$$u(t, x) = \begin{cases} \text{formule z předchozí věty,} \\ u(t, x) = \frac{1}{2} (u_0(t+x) - u_0(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} u_1(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau, s) ds d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{t-x} \int_{t-\tau-x}^{x+t-\tau} \end{cases}$$

┌

Důkaz

└ Přímočarý. □

*Poznámka* (Počátečně okrajová úloha v  $(0, T) \times (0, l)$ )

Pro dané funkce  $u_0, u_1 : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $l > 0$  a  $f : (0, T) \times (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$  najděte  $u : (0, T) \times (0, l)$ ,  $u = u_0$  a  $\partial_1 u = u_1$  v  $\{0\} \times (0, l)$ ,  $u = 0$  v  $(0, T) \times \{0, l\}$ .

### Věta 3.7

Obdobně předchozí větě, jen rozšiřujeme „liše periodicky“.

┌

Důkaz

└ Obdobně předchozí větě, jen rozšiřujeme „liše periodicky“. □

*Poznámka*

Pak jsme ještě vyměnili podmínku  $u = 0$  v  $(0, T) \times \{0\}$  za  $\partial_t u = 0$  v  $(0, T) \times \{0\}$ . Takže jsme rozšířili sudě a za cvičení vymysleli znění věty...

### Definice 3.3 (Fourierova metoda (separace proměnných))

Řešení hledáme ve tvaru řady

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x).$$

Pokud  $X_0$  volíme vhodně, PDR TODO!!!

### Věta 3.8

Nechť  $u_0 \in C^3([0, l])$ ,  $u_1 \in C^3([0, l])$ ,  $l > 0$  a  $u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = u_1(0) = u_1(l) = 0$ . Pak řešení nalezené Fourierovou metodou splňuje

$u \in C^2([0, +\infty) \times [0, l])$ ,  $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$  v  $(0, +\infty) \times (0, l)$ ,  $u = 0$  na  $(0, +\infty) \times \{0, l\}$ ,  $u = u_0$ ,  $\partial_t u = u_1$  v  $\{0\} \times (0, l)$

┌

*Důkaz*

Dokážeme pouze, že  $u \in C^2([0, \infty) \times [0, l])$  a že řadu je možné derivovat člen po členu. Jen pro část

$$R(t, x) := \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \hat{u}_{0k} \cos\left(\frac{k\pi}{l}t\right)$$

Typická 2. der:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{l}t\right) \hat{u}_{0k}.$$

Pro stejnoměrnou konvergenci 2. derivace počítejme  $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\hat{u}_{0k}| < \infty$ .

$$\hat{u}_{0k} = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(y) \sin \frac{k\pi}{l} y dy = \frac{2}{l} \underbrace{[u_0(y)]_0^l}_{=0} + \frac{2}{l} \int_0^l u_0'(y) \cos \frac{k\pi}{l} y dy \frac{l}{k\pi} = \dots$$

$$\dots = -\frac{2}{l} \int_0^l u_0''(y) \cos \frac{k\pi}{l} y dy \left(\frac{l}{k\pi}\right)^3$$

$$|k^2 \hat{u}_{0k}| \leq \frac{1}{k} p_k := \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \left| \int_0^l u_0'''(y) \cos \frac{k\pi}{l} y dy \right|.$$

( $\|y\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{g}_k^2$  pro ortonormální bázi.) Parsevalova nerovnost:  $u_0''' \in L^2(0, l) \implies \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 < \infty$ .

$$|k^2 \hat{u}_{0k}| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + p_k^2\right) \implies \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\hat{u}_{0k}| < \infty.$$

└

□

*Poznámka*

V předchozí větě lze předpokládat, že  $u_0'', u_1' \in AC([0, l])$ ,  $u_0'', u_0''' \in L^2(0, l)$ .

### Věta 3.9 (Gauss-Green-Ostrogradsky)

Ať  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  otevřená omezená s  $C^1$  hranicí a vnější normálou  $\nu$ . Ať  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pak  $\forall i \in [n] : \int_{\Omega} \partial_i u = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu_i ds$ . Pokud  $U \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $U : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n : \int_{\Omega} \operatorname{div} U d\lambda^n =$



$$\int_{\partial\Omega} U \cdot \nu dS.$$

### Věta 3.10 (Greenovy ?)

Ať  $\Omega$  jako v minulé větě,  $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $w \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $u, v, w : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pak

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u w &= \int_{\partial\Omega} w(\nabla u \cdot \nu) dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla w. \\ \int_{\Omega} (\Delta u)v - u(\Delta v) &= \int_{\partial\Omega} v(\nabla u \cdot \nu) - u(\nabla v \cdot \nu) dS. \end{aligned}$$

Důkaz

Druhá rovnost plyne z první. První:

$$\operatorname{div}(\nabla u \cdot w) = \dots = \Delta u w + \nabla u \cdot \nabla w.$$

Nyní už z GGO. □

### Lemma 3.11

Bud'  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ ,  $u$  spojitá na  $\partial U(0, r)$ . Pak  $\int_{\partial U(x, 1)} u ds = \int_{\partial U(0, 1)} u(x + rz) dS(z)$ . Kde

$$\int_M f d\mu = \int_M f d\mu / \int_M 1 d\mu, \text{ pro } \mu(M) \neq 0.$$

Důkaz

Plyne z definice plošného integrálu (ukázali jsme si pouze v  $n = 3$ ). Převedeme na sférické souřadnice, vydělíme objemem daných koulí a vyjde to. □

### Lemma 3.12

Bud'  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $R > 0$ ,  $u \in C(\mathcal{U}(x, R))$ . Pak  $\partial_l \left[ \int_{\mathcal{U}(x, r)} dx \right] = \partial_r \left[ \int_0^r \int_{\partial \mathcal{U}(x, \varrho)} u dS d\varrho \right] = \int_{\partial \mathcal{U}(x, R)} u dS$ .

Důkaz

Prý byl někdy na cvičení. □

### Lemma 3.13

$$n \int_{\mathcal{U}(0, 1)} 1 = \int_{\partial \mathcal{U}(0, 1)} 1 dS.$$

### Definice 3.4

$$\alpha_n := \lambda^n(\mathcal{U}(0, 1)), n\alpha_n := \int_{\partial\mathcal{U}(0,1)} dS.$$

### Lemma 3.14

Bud'  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $R > 0$ ,  $u \in C^1(\mathcal{U}(x, R))$ . Označme  $u^x(r) = \int_{\partial\mathcal{U}(x,r)} u dS$ . Pak platí

$$\partial_r u^x(r) = \int_{\partial\mathcal{U}(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y), \quad r \in (0, R).$$

Je-li navíc  $u \in C^2(\mathcal{U}(x, R))$ , je

$$\partial_r u^x(r) = \frac{r}{n} \int_{\mathcal{U}(x,r)} \Delta u(y) d\lambda(y).$$

$$\partial_r^2 u^x(r) = \left(\frac{1}{n} - 1\right) \int_{\mathcal{U}(x,r)} \Delta u(y) d\lambda(y) + \int_{\partial\mathcal{U}(x,r)} \Delta u(y) dS(y), \quad r \in (0, R).$$

┌  
Důkaz

Podle lemmatu výše, derivace integrálů podle parametru a znovu tohoto lemmatu:

$$\begin{aligned} \partial_r u^x(r) &= \partial_r \left( \int_{\partial\mathcal{U}(0,1)} u(x + rz) dS(z) \right) = \int_{\partial\mathcal{U}(0,1)} (\nabla u)(x + rz) \cdot z ds(z) = \int_{\partial\mathcal{U}(x,1)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) = \\ &\stackrel{u \in C^2}{=} \frac{1}{n\alpha_n r^{n-1}} \int_{\mathcal{U}(x,r)} \Delta u(y) d\lambda^n(y) = \frac{r}{n} \int_{\mathcal{U}(x,1)} \Delta u(y) d\lambda^n(y). \end{aligned}$$

└

□