

Organizační úvod

Poznámka

Zkouška bude snad ústní.

Úvod

Věta 0.1 (Lebesgueova míra)

Existuje právě jedna borelovská míra λ^n v \mathbb{R}^n taková, že

$$\lambda^n \left(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i), \quad -\infty < a_i \leq b_i < \infty, 1 \leq i \leq n.$$

┌
Poznámka

Zúplněnou σ -algebru značíme B_0^n a platí $B^n \subsetneq B_0^n$ (pro $n \geq 2$ jednoduché, pro $n = 1$ možná někdy příště).

λ^n je translačně a rotačně invariantní (posunutím a otočením se nezmění).

λ^n je σ -konečná.

λ^n je regulární (můžeme její hodnotu na množině aproximovat jejími hodnotami na otevřené nadmnožině a uzavřené podmnožině^a).

^a

$$\forall E \in B_0^n \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \subset E \subset G, F \text{ uzavřená}, G \text{ otevřená}, \lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon.$$

└

Definice 0.1

$\tilde{\mu} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ je pramíra (premeasure) na algebře \mathcal{A} podmnožin X , jestliže:

$$\tilde{\mu}(\emptyset) = 0,$$

$$A_i \in \mathcal{A}, \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}, A_i \text{ po dvou disjunktní} \implies \tilde{\mu} \left(\bigcup_i A_i \right) = \sum_i \tilde{\mu}(A_i).$$

Věta 0.2 (Hahn-Kolmogorov)

Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře \mathcal{A} . Pak existuje míra μ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\mu = \tilde{\mu}$ na \mathcal{A} . Je-li $\tilde{\mu}$ σ -konečná, je μ určena jednoznačně.

1 Konstrukce Lebesgueovy míry z vnější míry

Definice 1.1 (Vnější míra (outer measure))

Nechť $X \neq \emptyset$. Funkce $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ je vnější míra na X , jestliže:

$$\mu^*(\emptyset) = 0,$$

$$A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B), \text{ (monotonie)}$$

$$A_i \subset X (i \in \mathbb{N}) \implies \mu^*\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mu^*(A_i). \text{ (spočetná subaditivita)}$$

┌
Například

$$\mu^* \equiv 0,$$

$$\mu^* = \delta_x, x \in X,$$

$$\mu^*(A) = A,$$

$$\mu^*(A) := 0, A = \emptyset, \mu^*(A) := 1, A \neq \emptyset,$$

$$X = \mathbb{R}, \lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_i |I_i|, A \subset \bigcup_i I_i, I_i \text{ otevřené intervaly} \right\}$$

└

Definice 1.2 (Měřitelnost vůči vnější míře)

Řekneme, že množina $A \subset X$ je μ^* -měřitelná, jestliže

$$\forall T \subset X : \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A). (*)$$

Značíme $\mathcal{A}_{\mu^*} := \{A \subset X | A \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná}\}.$

┌
Poznámka

Ať μ^* je vnější míra na X , $Y \subset X$. Pak restrikce $\mu^*|_Y : A \mapsto \mu^*(A \cap Y)$ je vnější míra a platí:

$$\mathcal{A}_{\mu^*} \subset \mathcal{A}_{\mu^*|_Y}$$

┌
Důkaz

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}_{\mu^*} : \mu^*|_Y(T) &= \mu^*(T \cap Y) = \mu^*(T \cap Y \cap A) + \mu^*((T \cap Y) \setminus A) = \\ &= \mu^*|_Y(T \cap A) + \mu^*|_Y(T \setminus A). \end{aligned}$$

└

□

Věta 1.1 (Caratheodory)

\mathcal{A}_{μ^*} je σ -algebra na X a $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ je míra. Prostor $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ je úplný.

┌
Důkaz

$\emptyset \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ je zřejmé. Uzavřenost na komplement je také snadná, z definice \mathcal{A}_{μ^*} . Místo sjednocení ukážeme uzavřenost na konečný průnik: Víme $T \subset X : \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$, $\mu^*(T \cap A) = \mu^*(T \cup A \cap B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B)$ a $\mu^*(T \setminus (A \cap B)) = \mu^*((T \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu^*((T \setminus (A \cap B)) \setminus A) = \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A)$.

Tedy $\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \setminus (A \cap B))$.
Tudíž \mathcal{A}_{μ^*} je algebra.

Nyní chceme ukázat, že μ^* je σ -aditivní na \mathcal{A}_{μ^*} : Buďte $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ po dvou disjunktní. Volbou $T = A_1 \cup A_2$ dostaneme $\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \implies \mu^*$ je konečně aditivní na \mathcal{A}_{μ^*} .

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu^*(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

Opačná nerovnost plyne ze spočetné subaditivity. To znamená, že $\mu^* \left(\bigcup_i A_i \right) = \sum_i \mu^*(A_i)$, $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, po dvou disjunktní.

\mathcal{A}_{μ^*} je uzavřená na disjunktní spočetné sjednocení: $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, po dvou disjunktní, $T \subset X$.

$$\mu^*(T) = \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right) + \mu^* \left(T \cap \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \geq \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + (\mu^*|_T) \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \text{TODO}$$

Limitním přechodem $n \rightarrow \infty$ dostaneme

$$\mu^*(T) \geq \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*|_T)(A_i) = \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + (\mu^*|_T) \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

Z tohoto všeho plyne, že $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ je míra na σ -algebře \mathcal{A}_{μ^*} . Zbývá už jen úplnost:

$$\mu^*(A) = 0, T \subset X \implies \mu^*(T) \geq \underbrace{\mu^*(T \cap A)}_{=0} + \mu^*(T \setminus A) \implies A \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

└

□

TODO!!!

Věta 1.2 (Regularita Lebesgueovy míry)

Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$. Je ekvivalentní:

1. $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$,
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset E \subset G$, F uzavřená, G otevřená, $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$,
3. $\exists A \subset E \subset B$, $A, B \in \mathcal{B}^n$, $\lambda^n(B \setminus A) = 0$,
4. $E \in \mathcal{B}_0^n$.

┌
Důkaz

1 \implies 2: Mějme $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$, $\varepsilon > 0$. Nechť nejprve $\lambda^{n*}(E) < \infty$. Pak $\exists I_i \in \mathcal{O}_n$, $E \subset \bigcup_i I_i$, $\sum_i v(I_i) < \lambda^{n*}(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. Položme $G := \bigcup_i I_i$ (otevřená), $E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Je-li $\lambda^{n*}(E) = \infty$, pak ze σ -konečnosti je $E = \bigcup_m E_m$, $E_m := E \cap [-m, m]^n$. $\lambda^{n*}(E_m) < \infty \implies \exists G_m$ otevřená, $E_m \subset G_m$, $\lambda^n(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$. $G := \bigcup_m G_m$ otevřená, $E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus E) \leq \sum_m \lambda^n(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$E^c \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}} \implies \exists H$ otevřená, $E^c \subset H$, $\lambda^n(H \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. $F := H^c$ uzavřená, $F \subset E$, $\lambda^n(E \setminus F) = \lambda^n(E \setminus H^c) = \lambda^n(H \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. TODO

2 \implies 3: Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ splňuje 2.

$$\forall j \in \mathbb{N} \exists F_j \subset E \subset G_j, F_j \text{ uzavřená}, G_j \text{ uzavřená}, \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}.$$

Položme $A := \bigcup_j F_j$, $B := \bigcap_j G_j$, $A, B \in \mathcal{B}^n$, $A \subset E \subset B$. $\lambda^n(B \setminus A) \leq \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}$ pro libovolné $j \in \mathbb{N}$, tedy $\lambda^n(B \setminus A) = 0$.

3 \implies 4: Jsou-li $A \subset E \subset B$ jako v 3, pak $B \setminus A$ je λ^n -nulová množina, a tedy $E \in \mathcal{B}_0^n$.

4 \implies 1: $\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ obsahuje \mathcal{B}^n a nulové množiny, tedy obsahuje \mathcal{B}_0^n . □

└

Věta 1.3 (Luzinova (běžně bývá obecnější))

Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lebesgueovsky měřitelná. Buď $\varepsilon > 0$. Pak existuje $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená taková, že $\lambda^n(G) < \varepsilon$ a restrikce $f|_{G^c}$ je spojitá.

┌
Důkaz

Buď U_1, U_2, \dots posloupnost všech otevřených intervalů s racionálními koncovými body. f je lebesgueovsky měřitelná, tedy $\forall j, f^{-1}(U_j) \in \mathcal{B}_0^n$. Podle regularity pak $\exists F_j \subset f^{-1}(U_j) \subset G_j$, F_j uzavřená, G_j otevřená, $\lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$. Položme $G := \bigcup_j (G_j \setminus F_j)$. Zřejmě G je otevřená, $\lambda^n(G) \leq \sum_j \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \varepsilon$.

Pro restrikci $g := f|_{G^c}$ platí:

$$g^{-1}(U_j) = \{x \in G^c : f(x) \in U_j\} = f^{-1}(U_j) \cap G^c = G_j \cap G^c, j \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě $U \subset \mathbb{R}$ otevřená $\implies U = \bigcup_{U_j \subset U} U_j$, tedy $g^{-1}(U) = \bigcup_{U_j \subset U} g^{-1}(U_j)$ otevřená množina v G^c , tedy g je spojitá na G^c . □

└

Poznámka

Obecně nelze požadovat $\lambda^n(G) = 0$. Např. charakteristická funkce diskontinua kladné míry (podobně jako Cantorovo diskontinuum, ale nenulové míry), které dostaneme tak, že z prostředků intervalů v i -tém kroku vždy odebereme intervaly délky a_i tak, aby $a_1 + 2a_2 + 4a_3 + \dots < 1$. (G z minulé věty pak bude sjednocení malých okolíček krajních bodů odebíraných intervalů.)

2 Regularita borelovských měr

Definice 2.1 (Regulární borelovská míra)

Borelovská míra μ na topologickém (metrickém) prostoru X je regulární, jestliže $\forall B \in \mathcal{B}(X) : \mu(B) = \inf \{ \mu(G) \mid B \subset G, G \text{ otevřená} \}$.

Poznámka

1) Často se hovoří o vnější regularitě (outer regular measure). 2) Pro konečné míry: μ je regulární $\implies \forall B \in \mathcal{B} : \mu(B) = \sup \{ \mu(F) \mid F \subset B, F \text{ uzavřená} \}$.

Věta 2.1

Každá konečná borelovská míra na metrickém prostoru je regulární.

┌ *Důkaz*

(X, ϱ) metrický prostor, μ borelovská míra na X , $\mu(X) < \infty$. Označme

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}(X) \mid \varepsilon > 0 \exists F \subset B \subset G, F \text{ uzavřená}, G \text{ otevřená}, \mu(G \setminus F) < \varepsilon\}.$$

Ukážeme $\mathcal{D} := \mathcal{B}(X)$. \mathcal{D} obsahuje všechny množiny: $F \subset X$ uzavřená, $F_{<\varepsilon} := \{x \in X \mid \varrho(x, F) < \varepsilon\}$ (otevřená). Zřejmě $F_{<\frac{1}{j}} \searrow F, j \rightarrow \infty$ z uzavřenosti F . μ konečná \implies (spojitost míry) $\mu F_{<\frac{1}{j}} \rightarrow \mu(F)$.

\mathcal{D} je σ -algebra: $\emptyset \in \mathcal{D}, D \in \mathcal{D} \implies D^c \in \mathcal{D}$:

$$F \subset D \subset G, \mu(G \setminus F) < \varepsilon \implies G^c \subset D^c \subset F^c, \mu(F^c \setminus G^c) < \varepsilon.$$

$D_i \in \mathcal{D} \implies \bigcup_i D_i \in \mathcal{D}$:

$$\exists F_i \subset D_i \subset G_i, \mu(G_i \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

TODO!

$$\bigcup_{i=1}^N F_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i, N \in \mathbb{N}.$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \setminus \bigcup_{i=1}^F$$

□

┌ *Poznámka*

σ -konečné míry nemusí být regulární, viz prostor spočetně přímek procházejících počátkem v \mathbb{R}^2 .

Definice 2.2 (Těsnost (= vnitřní regularita))

Borelovská míra μ na metrickém (topologickém) prostoru X je těsná (= tight), jestliže $\forall B \in \mathcal{B}(X) : \mu(B) = \sup \{\mu(K) \mid K \subset B \text{ kompaktní}\}$.

Poznámka

μ je Radonova míra, jestliže je těsná a konečná na kompaktech.

Pokud μ je konečná a těsná, pak už je μ regulární.

Jestliže μ je konečná a regulární a $\mu(X) = \sup \{\mu(K) \mid K \subset X \text{ kompaktní}\}$, pak μ je těsná.

Věta 2.2

Pokud μ je konečná borelovská míra na úplném separabilním metrickém prostoru, potom už je těsná.

┌

Důkaz

Stačí ukázat $\mu(X) = \sup \{\mu(K) | K \subset X \text{ kompaktní}\}$: $S = \{x_1, x_2, \dots\} \subset X$ hustá spočetná (ze separability). $\forall n \in \mathbb{N} : \bigcup_i \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i) = X$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak $\forall n \exists k_n : \mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ (ze spojitosti míry).

Definujeme $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i) (\in \mathcal{B}(X))$. A je totálně omezená (tzn. $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset A$ kompaktní tak, že $A \subset \bigcup_{x \in F} \overline{B_\varepsilon(x)}$). \overline{A} je totálně omezená a uzavřená $\implies \overline{A}$ je úplný MP (+ totálně omezený), tedy \overline{A} je kompaktní.

$$\mu(X \setminus \overline{A}) \leq \mu(X \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)\right)\right).$$

└

□

3 Věta o rozšíření míry

Věta 3.1 (Hahn-Komogorov)

Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \implies$ existuje míra μ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\mu = \tilde{\mu}$ ne \mathcal{A} . Je-li $\tilde{\mu}$ σ -konečná, je μ určena jednoznačně.

┌

Důkaz

Pro $E \subset X$ položíme $\mu^*(E) := \inf \{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) | A_i \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}$. Ověříme, že μ^* je vnější míra.

$\forall A \in \mathcal{A} : \mu^*(A) = \tilde{\mu}(A)$. Zřejmě $\mu^*(A) \leq \tilde{\mu}(A)$, jelikož můžeme pokrýt A množinami $A, \emptyset, \emptyset, \dots$. Pro \geq mějme $A \subset \bigcup_i A_i, A_i \in \mathcal{A}$. $B_1 := A_1 \cap A, B_2 := (A_2 \cap A) \setminus B_1, \dots$ O nich víme, že $A = \bigcup_i B_i, B_i$ po dvou disjunktní, $B_i \in \mathcal{A}$. $\tilde{\mu}(A) = \sum_i \tilde{\mu}(B_i) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i)$, tedy z definice infima $\tilde{\mu}(A) \leq \inf_{A_i} \sum_i \tilde{\mu}(A_i) = \mu^*(A)$.

Zbývá ukázat, že $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$. TODO.

Jednoznačnost: \mathcal{A} uzavřená na konečné průniky, $\tilde{\mu}$ je σ -konečná $\implies \exists A_n \in \mathcal{A}, A_n \nearrow X, \tilde{\mu}(A_n) < \infty \implies \mu$ je jednoznačně určena (věta o jednoznačnosti míry, TMI1). □

Poznámka (Zobecnění příkladu z TMI1)

$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i$ úplné separabilní metrické prostory (např. $E_i = \mathbb{R}$), $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N} \dots E_I = E_i, E, E_I$ metrické prostory. $\pi_I : E \rightarrow E_I$ kanonická projekce. A následující věta:

Věta 3.2 (Daniell-Koleuogorov)

E_i úplné separabilní metrické prostory, $i \in \mathbb{N}$. Nechť pro každou $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$ existuje borelovská pravděpodobnostní míra μ_I na E_I . A nechť je splněna projektivní vlastnost:

$$\emptyset \neq I \subset J \subset \mathbb{N} \text{ konečná, } \forall B \in \mathcal{B}(E_I) : \mu_I(B) = \mu_J\left((\pi_I^J)^{-1}(B)\right),$$

pak $\exists!$ borelovská míra μ na $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ taková, že $\forall \emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$ konečná, $\forall B \in \mathcal{B}(E_I) : \mu(\pi_I^{-1}(B)) = \mu_I(B)$.

Lemma 3.3

$$1) x_n, x \in E : x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n(i) \rightarrow x(i), i \in \mathbb{N},$$

$$x_n, x \in E_I : x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n(i) \rightarrow x(i), i \in I$$

2) π_I, π_I^J jsou spojitá zobrazení.

3) $\forall I \in ?_f : E_I$ je úplný separabilní MP.

$$4) \mathcal{B}(E_I) = \otimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i).$$

┌ Důkaz

1 jsme nedokazovali, 2 a 3 jsou triviální.

$$4) \otimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i) = \sigma \{_{i \in I} B_i | B_i \in \mathcal{B}(E_i)\} = \sigma \{_{i \in I} G_i | G_i \subset E_i \text{ otevřené} \},$$

tedy $_{i \in I} G_i$ je otevřená v $E_I \implies \otimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i) \subset \mathcal{B}(E_I)$. Naopak $U \subset E_I$ otevřená $\implies U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, kde $U_n = G_i^n$, $G_i^n \subset E_i$ otevřená $\implies \mathcal{B}(E_I) \subset \otimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i)$. □

Věta 3.4 (Daniell-Kolmogorov)

E_i úplné separabilní metrické prostory $i \in \mathbb{N}$. Nechť pro každou $I \in ?_f$ existuje borelovská pravděpodobnostní míra μ_I na E_I . Nechť $I \subset J, I, J \in ?_f \implies \mu_I = \mu_J(\pi_I^J)^{-1}$. Pak existuje právě jedna borelovská pravděpodobnostní míra μ na E taková, že

$$\forall I \in ?_f : \mu_I = \mu(\pi_I)^{-1}.$$

┌ Důkaz

TODO!

└ TODO! □

4 Charakterizace Riemannovsky integrovatelných funkcí

Věta 4.1

Bud' $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ omezená. Pak

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \text{ je spojitá v } \lambda^1\text{-skoro všude na } (a, b).$$

Důkaz

(\mathcal{D}_n) posloupnost zjemňujících se dělení intervalu $[a, b]$.

$$\mathcal{D}_n = \left\{ a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{k_n}^{(n)} = b \right\}, n \in \mathbb{N}, ||\mathcal{D}_n|| = \max_{1 \leq i \leq k_n} (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Označme $s_n(x) := \inf_{[x^{(n)}_{i-1}, x^{(n)}_i]} f$, $S_n(x) := \sup_{[x^{(n)}_{i-1}, x^{(n)}_i]} f$, $x \in (x^{(n)}_{i-1}, x^{(n)}_i]$, $n \in \mathbb{N}$ a $S_n(x) := 0$, $S_n(x) := 0$ pro ostatní $x \in \mathbb{R}$. Toto jsou jednoduché měřitelné funkce.

Horní a dolní Riemannův součet splňuje

$$\int_a^b f n \rightarrow \infty \leftarrow s(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b s_n d\lambda^1, \overline{\int_a^b f n \rightarrow \infty \leftarrow S(f, \mathcal{D}_n)} = \int_a^b S_n d\lambda^1.$$

$|f| \leq M$, tedy $-M \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq S_2 \leq S_1 \leq M$. Označme $f_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, $f_2 := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ (bodové limity funkcí).

$$-M \leq s_n \searrow f_1 \leq f \leq f_2 \nearrow S_n \leq M, \text{ } qquad f_1, f_2 \text{ měřitelné.}$$

Ze zobecněné Leviho věty $\int_a^b s_n d\lambda^1 \rightarrow \int_a^b f_1 d\lambda^1$, $\int_a^b S_n d\lambda^1 \rightarrow \int_a^b f_2 d\lambda^1$.

$$\implies : \text{Nechť } f \in R[a, b], \text{ tedy } \int_a^b f = \overline{\int_a^b f}.$$

$$\implies \int_a^b f_1 d\lambda^1 = \int_a^b f_2 d\lambda^1 \implies \int_a^b (f_2 - f_1) d\lambda^1 = 0 \implies f_1 = f_2 \lambda^1\text{-s.v.}$$

$$N := \{x \in [a, b] | f_1(x) \neq f_2(x)\} \cup \left\{ x_i^{(n)} | 0 \leq i \leq k_n, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \lambda^1(N) = 0.$$

Ukážeme, že f je spojitá ve všech bodech množiny $(a, b) \setminus N$: Buď $x \in (a, b) \setminus N$, $\varepsilon > 0$. Potom $f_1(x) = f_2(x) \implies \exists n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) - s_n(x) < \varepsilon$. I_n nechť je otevřený interval dělení \mathcal{D}_n , pro nějž $x \in I_n$. Pak

$$s_n(x) \leq f(y) \leq S_n(x), y \in I_n \implies |f(y) - f(x)| \leq 2\varepsilon, y \in I_n \implies f \text{ je spojitá v bodě } x.$$

\Leftarrow : Nechť $\lambda^1(\mathcal{D}) = 0$, kde $\mathcal{D} := \{x \in (a, b) : f \text{ není spojitá v } x\}$. Ukážeme, že $S_n(x) - s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\implies S(f, \mathcal{D}_n) - s(f, \mathcal{D}_n) \rightarrow 0 \implies f \in R[a, b].$$

Nechť $x \in (a, b) \setminus \mathcal{D}$, $\varepsilon > 0$. Pak f je spojitá v bodě $x \implies \exists \delta > 0$, $|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Zvolme n_0 tak velké, aby $||\mathcal{D}_n|| < \delta$, $n \geq n_0$. Pak $S_n(x) - s_n(x) \leq 2 \sup \{|f(y) - f(x)| : |y - x| < \delta\} < 2\varepsilon$. □

□

5 Pokrývací věty

Poznámka (Úmluva)

Koulí se myslí uzavřená koule, $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq r\}$, $r > 0$, $B = B(x, r)$, $t > 0 \dots tB = B(x, t \cdot r)$.

Lemma 5.1 („ $5r$ “ covering)

Nechť \mathcal{F} je systém koulí v \mathbb{R}^n (uzavřené, nedegenerované), $\sup_{B \in \mathcal{F}} (B) < \infty$. Pak existuje disjunkttní podsystém $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ takový, že

$$\forall B \in \mathcal{F} \exists B' \in \mathcal{F}' : B \cap B' \neq \emptyset \wedge B \subset 5B'.$$

Důsledek

$$\bigcup \mathcal{F} \subset \bigcup_{B' \in \mathcal{F}'} 5B'$$