

# 1 Metrické prostory

*Poznámka* (Opakovalo se:)

Metrický prostor, otevřená a uzavřená koule, otevřené a uzavřené množiny a jejich vlastnosti, vnitřní body, vnitřek, charakterizace vnitřku, hraniční bod, uzávěr, uzávěr a uzavřené množiny a nakonec vlastnosti uzávěru.

## 1.1 Konvergence a spojitá zobrazení v metrických prostorech

### Definice 1.1 (Konvergence v MP)

Nechť  $(P, \varrho)$  je MP a  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost prvků  $P$  a  $x \in P$ . Řekneme, že  $\{x_n\}$  konverguje k  $x$  (v  $(P, \varrho)$ ), pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0$ . Značíme  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , nebo  $x_n \xrightarrow{\varrho} x$ .

### Věta 1.1 (Vlastnosti konvergence)

Nechť  $(P, \varrho)$  je metrický prostor. Pak platí

1. Nechť pro posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  z  $P$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  a  $x \in P$  tak, že pro všechna  $n \geq n_0$  platí  $x_n = x$ . Pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y \implies x = y$ . (Jednoznačnost limity.)
3. Nechť  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  je vybraná posloupnost z  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  a nechť  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Pak  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ .

┌

Důkaz

1.  $\forall n \geq n_0 : \varrho(x_n, x) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0 \implies x_n \rightarrow x$ .

2.  $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, y) \rightarrow 0 \implies \varrho(x, y) = 0 \implies x = y$ .

3.  $\varrho(x_{n_k}, x)$  je vybraná podposloupnost z  $\varrho(x_n, x)$ . Podle věty o hodnotě limity vybrané podposloupnosti  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ . □

### Definice 1.2 (Spojitost v bodě a na množině)

Nechť  $(P, \varrho)$  a  $(Q, \sigma)$  jsou metrické prostory. Nechť  $M \subset P$ ,  $f : M \rightarrow Q$  a  $x_0 \in M$ . Řekneme, že  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$  (vzhledem k  $M$ ), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_{\varrho}(x_0, \delta) \cap M : f(x) \in B_{\sigma}(f(x_0), \varepsilon).$$

Řekneme, že  $f$  je spojitá na  $M$  (vzhledem k  $M$ ), jestliže je spojitá v každém bodě  $M$  (vzhledem k  $M$ ).

Nechť pro každé  $\delta > 0$  platí  $B_\delta(x_0) \cap M \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ . Řekneme, že  $f$  má v bodě  $x_0$  limitu (vzhledem k  $M$ ) rovnou  $y \in Q$ , jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(x_0, \delta) \cap M \setminus \{x_0\} : f(x) \in B_\sigma(y, \varepsilon).$$

### Věta 1.2 (Charakterizace spojitosti)

Nechť  $(P, \rho)$  a  $(Q, \sigma)$  jsou metrické prostory a  $f : P \rightarrow Q$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1.  $f$  je spojitá na  $P$ ,
2.  $\forall G \subset Q$  otevřenou, je  $f^{-1}(G)$  otevřená,
3.  $\forall F \subset Q$  uzavřenou, je  $f^{-1}(F)$  uzavřená.

┌

Důkaz

1.  $\implies$  2.: Nechť  $G$  je otevřená. Pokud  $f^{-1}(G) = \emptyset$ , pak jsme hotovy. Nechť je tedy  $x_0 \in f^{-1}(G)$ .  $G$  je otevřená, tedy  $\exists \varepsilon > 0 : B_\sigma(f(x_0), \varepsilon) \subset G$ . Z definice spojitosti

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 : f(B_\rho(x_0, \delta)) \subset B_\sigma(f(x_0), \varepsilon) \subset G &\implies B_\rho(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_\sigma(f(x_0), \varepsilon)) \implies \\ \implies f^{-1}(G) \text{ je otevřená.} \end{aligned}$$

2.  $\implies$  1.: Nechť  $x_0 \in P$ , chceme spojitost v  $P$ . Nechť  $\varepsilon > 0$ .  $B_\sigma(f(x_0), \varepsilon)$  je otevřená množina, tedy podle 2. je  $f^{-1}(B_\sigma(f(x_0), \varepsilon))$  je otevřená.

$x_0$  je prvkem této otevřené množiny  $\implies \exists \delta > 0 : B_\rho(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_\sigma(f(x_0), \varepsilon)) \implies f$  je spojitá v  $x_0$ .

2.  $\implies$  3.: Nechť  $F$  je uzavřená

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(Q \setminus (Q \setminus F)) = f^{-1}(Q \setminus F) = f^{-1}(Q) \setminus \underbrace{f^{-1}(\overbrace{Q \setminus F}^{\text{otevřená}})}_{\text{otevřená}} = P \setminus \text{ot.} = \text{uzavřená.}$$

3.  $\implies$  2.: Nechť  $G$  je otevřená

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(Q \setminus (Q \setminus G)) = f^{-1}(Q) \setminus \underbrace{f^{-1}(\overbrace{Q \setminus G}^{\text{uzavřená}})}_{\text{uzavřená}} = P \setminus \text{uz.} = \text{otevřená.}$$

└

□

### Věta 1.3 (Spojitost složeného zobrazení)

Nechť  $(P, \rho)$ ,  $(Q, \sigma)$  a  $(Z, \tau)$  jsou metrické prostory. Nechť  $f : P \rightarrow Q$  je spojitě zobrazení a  $g : Q \rightarrow Z$  je spojitě zobrazení. Pak  $g \circ f : P \rightarrow Z$  je spojitě zobrazení.

┌ *Důkaz*

Pro spojitost  $g \circ f$  použijeme předchozí větu 2.  $\implies$  1. Nechť  $G \subset Z$  je otevřená, potom  $g^{-1}(G)$  je otevřená v  $Q$ , potom  $f^{-1}(g^{-1}(G)) = (g \circ f)^{-1}(G)$  je otevřená v  $P \implies g \circ f$  je spojitý.  $\square$

└

### Věta 1.4 (Heine)

*Nechť  $(P, \varrho)$  a  $(Q, \sigma)$  jsou metrické prostory. Nechť  $M \subset P$ ,  $x_0 \in M$  a  $f : M \rightarrow Q$ . Pak je ekvivalentní:*

- $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} f(x) = f(x_0)$ , neboli  $f$  je spojitá v  $x_0$ ,
- pro každou posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  splňující  $x_n \in M$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

┌ *Důkaz*

$\implies$  : Mějme  $x_n \in M$  tak že  $x_n \rightarrow x_0$ . Nechť  $\varepsilon > 0$ . Pak existuje  $\delta > 0$  tak, že platí:

$$f(B_\varrho(x_0, \delta) \cap M) \subset B_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$

K tomuto  $\delta$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že  $\forall n \geq n_0$  platí  $f(x_n) \in B_\sigma(f(x_0), \varepsilon)$ .

$\Rightarrow$ : Sporem:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall \delta > 0, \delta = \frac{1}{n} \ \exists x_n \in B_\varrho\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap M : f(x_n) \notin B_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$

Víme, že  $x_n \in B_\varrho\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ . Z toho plyne, že  $x_n \rightarrow x_0$ , ale  $f(x_n)$  nekonverguje k  $f(x_0)$ .  $\nexists$ .  $\square$

└

## 1.2 Kompaktní množiny

### Věta 1.5 (Charakterizace kompaktních množin)

*Nechť  $(P, \varrho)$  je metrický prostor a  $F \subset P$ . Pak*

$$F \text{ je uzavřená} \Leftrightarrow (x_n \xrightarrow{\varrho} x \wedge x_n \in F \implies x \in F).$$

┌ *Důkaz*

$\implies$  : Sporem: Necht existuje  $x_n \in F$ ,  $x_n \rightarrow x$  a  $x \notin F$ . Pak  $x \in P \setminus F$ . Množina  $P \setminus F$  je otevřená, a tedy existuje  $r > 0$  tak, že  $B(x, r) \subset P \setminus F$ .

Z toho plyne, že  $\forall n$  platí  $x_n \notin B(x, r)$ , protože  $x_n \in F$ . Pak ale  $x_n$  nekonverguje k  $x$  a dostáváme spor.

$\Leftarrow$ : Sporem: Necht  $F$  není uzavřená. Pak  $P \setminus F$  není otevřená a tedy existuje  $x \in P \setminus F$  tak, že  $\forall r > 0$  platí, že  $B(x, r)$  není podmnožinou  $P \setminus F$ . Těto vlastnosti využijeme pro  $r = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Tedy

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) : x_n \notin P \setminus F \Leftrightarrow x_n \in F.$$

└ Celkem  $x_n \rightarrow x$ ,  $x_n \in F$ , ale  $x \notin F$ , jelikož  $x \in P \setminus F$ .  $\nabla$ . □

### **Definice 1.3** (Kompaktní množina)

Necht  $(P, \varrho)$  je metrický prostor a  $K \subset P$ . Řekneme, že  $K$  je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti prvků  $K$  lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v  $K$ .

### **Věta 1.6** (Vlastnosti uzavřených množin)

Necht  $(P, \varrho)$  je MP a  $K \subset P$  je kompaktní. Pak platí

1.  $K$  je uzavřená.
2. Je-li  $F \subset K$  uzavřená, pak je  $F$  kompaktní.
3.  $K$  je omezená (tedy  $\exists x \in P$ ,  $r > 0$ , že  $K \subset B(x, r)$ ).

┌ *Důkaz*

1. Z předchozí věty: Necht  $x_n \in K$  a  $x_n \rightarrow x$ . Z definice kompaktnosti existuje posloupnost  $x_{n_k} \rightarrow y \in K$ . Podposloupnost konverguje k tomu samému jako původní posloupnost, tedy  $x = y \in K$ .  $K$  je tedy uzavřená.

2. Necht  $x_n \in F$ .  $K$  je kompaktní, tedy existuje podposloupnost  $x_{n_k} \rightarrow x \in K$ . Dále jistě  $x_{n_k} \in F$  a navíc je  $F$  uzavřená. To znamená, že  $x \in F \implies F$  je kompaktní.

3. Sporem: Zvolme  $x_0 \in K$  libovolně.  $K$  není omezená. Z toho plyne, že  $\forall n \in \mathbb{N}$  existuje  $x_n \in K$  tak, že  $x_n \notin B(x_0, n)$ .  $K$  je ale kompaktní, a tedy existuje  $x_{n_k} \rightarrow y \in K$ . Tedy:

$$n_k \leq \varrho(x_0, x_{n_k}) \leq \varrho(x_0, y) + \varrho(y, x_{n_k}).$$

└ Dále  $\varrho(y, x_{n_k}) \rightarrow 0$ ,  $\varrho(x_0, y) \rightarrow \varrho(x_0, y)$  a  $n_k \rightarrow +\infty$ , tedy  $+\infty \leq \varrho(x_0, y)$ .  $\nabla$ . □

**Věta 1.7** (Charakterizace kompaktních množin  $\mathbb{R}^n$ )

*Množina  $K \subset \mathbb{R}^n$  je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

┌

*Důkaz*

$\implies$  z předchozí věty.  $\Leftarrow$ : víme z dřívějšího? (Každá omezená posloupnost v  $\mathbb{R}$  má konvergující podposloupnost (vybereme podposloupnost pro jednu dimenzi, z té pak pro další, ...) a posloupnost nemůže vykonvergovat z uzavřené množiny z charakterizace uzavřených množin)? □

**Věta 1.8** (Nabývá extrémů na kompaktu)

*Nechť  $(P, \varrho)$  je metrický prostor a  $K \subset P$  je kompaktní. Nechť  $f : K \rightarrow R$  je spojitá. Pak  $f$  nabývá na  $K$  svého maxima i minima. Speciálně je tedy  $f$  na  $K$  omezená.*

┌

*Důkaz*

Dokážeme jen pro maximum (minimum je ze stejného pro  $-f$ ). Jistě existuje  $x_n \in K$  tak, že  $f(x_n) \rightarrow \sup f$ . Dále  $x_n \in K$  a  $K$  je kompaktní, tedy existuje konvergentní podposloupnost  $x_n \rightarrow x$ . Zároveň  $f$  je spojitá v  $x$ , tedy dle Heineho věty  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = \sup f$ . □

**Věta 1.9** (Spojitý obraz kompaktu)

*Nechť  $(P, \varrho)$  a  $(Q, \tau)$  jsou metrické prostory a  $f : P \rightarrow Q$  je spojitě zobrazení. Nechť  $K \subset P$  je kompaktní množina. Potom  $f(K)$  je kompaktní.*

┌

*Důkaz*

Nechť  $y_n \in f(K)$ . Pak  $\exists x_n \in K$ ,  $f(x_n) = y_n$ . Z definice kompaktnosti  $\exists x \in K$ ,  $x_{n_k} \rightarrow x \in K$ . Podle Heineho věty  $f(x_{n_k}) = f(y_{n_k}) \rightarrow f(x) \in f(K)$ . □

**Definice 1.4**

Nechť  $(\mathbb{P}, \varrho)$  a  $(\mathbb{Q}, \tau)$  jsou metrické prostory,  $K \subset \mathbb{P}$  a  $f : K \rightarrow \mathbb{Q}$ . Řekneme, že  $f$  je na  $K$  stejnoměrně spojitá, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in K : (\varrho(x, y) < \delta \implies \tau(f(x), f(y))) .$$

**Věta 1.10** (O vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti na MP)

*Nechť  $(\mathbb{P}, \varrho)$  a  $(\mathbb{Q}, \tau)$  jsou MP,  $K \subset \mathbb{P}$  je kompaktní a nechť  $f : K \rightarrow \mathbb{Q}$  je spojitá. Pak  $f$  je stejnoměrně spojitá na  $K$ .*

┌ *Důkaz*

Nechť  $f$  je spojitá, ale ne stejnoměrně. Potom

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in K : \varrho(x, y) < \delta \wedge \tau(f(x), f(y)) \geq \varepsilon.$$

Zvolíme  $\delta_n = \frac{1}{n}$  a pro každé  $n$  si najdeme  $x_n, y_n$ .  $K$  je kompaktní, tedy existuje podposloupnost  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ .

$$\varrho(y_{n_k}, x_0) \leq \varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x_0) \leq \frac{1}{n_k} + \varrho(x_{n_k}, x_0) \rightarrow 0 \implies y_{n_k} \rightarrow x_0$$

Z Heineho věty  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$  a  $f(y_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ . Ale my máme, že jsou od sebe vzdáleny o  $\varepsilon$ .  $\zeta$ . □

└

## 2 Úplné metrické prostory

### Definice 2.1 (Cauchyovská posloupnost)

Nechť  $(\mathbb{P}, \varrho)$  je metrický prostor a  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost bodů z  $\mathbb{P}$ . Řekneme, že  $x_n$  splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku (případně, že je cauchyovská), jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

*Důsledek*

Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

### Definice 2.2 (Úplný prostor)

Řekneme, že metrický prostor  $(\mathbb{P}, \varrho)$  je úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

### Věta 2.1 (Vztah kompaktnosti a úplnosti)

Nechť  $(\mathbb{P}, \varrho)$  je MP a  $\mathbb{P}$  je kompaktní. Pak  $\mathbb{P}$  je úplný metrický prostor.

┌ *Důkaz*

Nechť  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  je cauchyovská posloupnost.  $\mathbb{P}$  kompaktní  $\implies \exists x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{P}$ . Nechť  $\varepsilon > 0$ . Najdu  $n_0$  z BC podmínky. Z  $x_n \rightarrow x \exists k_0 \forall k \geq k_0 : \varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ . Nalezneme  $n_k, k \geq k_0, n_k \geq n_0$ . Pak

$$\forall n \geq n_0 : \varrho(x_n, x) \leq \varrho(x_n, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < 2\varepsilon.$$

└

□

## Věta 2.2 (Úplnost a prostor spojitých funkcí)

Metrický prostor  $C([0, 1])$  se supremovou metrikou je úplný.

┌

*Důkaz*

Nechť  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  je cauchyovská posloupnost. Tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : \varrho(f_n, f_m) = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \quad (*)$$

Zvolme  $x \in [0, 1]$  pevné. Potom máme posloupnost reálných čísel místo funkcí, tedy z BC podmínky v  $\mathbb{R}$  je  $f_n(x)$  cauchyovská, tedy existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ . Takto jsme si zadefinovali novou funkci  $f$ .

$f_n \rightarrow f$ . Provedeme limitu  $n \rightarrow \infty$  na (\*).

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Tedy  $\varrho(f, f_n) \leq \varepsilon \implies f_n \rightarrow f$ .

$f$  je spojitá: Nechť  $y \in [0, 1]$ . Chceme dokázat, že  $f$  je spojitá v  $y$ . Nechť  $\varepsilon > 0$ . Z BC  $\exists n_0 \forall x \in [0, 1] : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ . Zafixujeme  $n_0$ .  $f_{n_0}$  je spojitá v  $y$ , tedy  $\exists \delta > 0 \forall x \in [0, 1], |x - y| < \delta : |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon$ . Nyní  $\forall x \in [0, 1], |x - y| < \delta$ :

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon.$$

(Třetí člen dostaneme tak, že zafixujeme  $m = n_0$  a  $n$  pošleme do nekonečna v BC podmínce výše.) □

└

## Věta 2.3 (Banachova, o kontrakci)

Nechť  $(\mathbb{P}, \varrho)$  je úplný MP a  $T : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  je kontrakce (tedy  $\exists \gamma \in (0, 1) \forall x, y \in P : \varrho(T(x), T(y)) \leq \gamma \cdot \varrho(x, y)$ ). Pak existuje právě jedno  $x \in \mathbb{P}$  tak, že  $T(x) = x$ .

┌  
Důkaz

Zvolme  $x_1 \in P$  libovolně. Definujeme indukci  $x_{n+1} = T(x_n)$ . Tvrdíme, že  $x_n$  je cauchyovská,  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\varrho(x_{n+1}, x_n) = \varrho(T(x_n), T(x_{n+1})) \leq \gamma \varrho(x_n, x_{n+1}) \leq \gamma^2 \varrho(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq \gamma^n \varrho(x_1, x_2).$$

Nechť  $\varepsilon > 0$ , zvolme  $n_0$ , aby  $\varrho(x_2, x_1) \gamma^{n_0-1} \frac{1}{1-\gamma} < \varepsilon$ . Nyní  $\forall m, n \geq n_0, m < n$ :

$$\begin{aligned} \varrho(x_m, x_n) &\leq \varrho(x_{m+1}, x_m) + \dots + \varrho(x_n, x_{n-1}) \leq \varrho(x_1, x_2) \cdot (\gamma^{m-1} + \dots + \gamma^{n-2}) \leq \\ &\leq \varrho(x_2, x_1) \gamma^{n_0-1} \frac{1}{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Tedy  $x_n$  je cauchyovská a má limitu.

Tvrdíme, že  $T(x_n) \rightarrow T(x)$ :  $T$  je spojitý v  $x$ . K  $\varepsilon > 0$  volme  $\delta = \varepsilon$ . Pak

$$\forall y \in B(x, \delta) : \varrho(x, y) < \delta \implies \varrho(T(x), T(y)) \leq \gamma \cdot \varrho(x, y) \leq \gamma \delta < \varepsilon.$$

Podle Heineho věty  $x_n \rightarrow x \implies T(x_n) \rightarrow T(x)$ . Víme, že  $x_{n+1} = T(x_n)$ , tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n).$$

Jednoznačnost: Nechť  $\exists x, y, T(x) = x$  a  $T(y) = y$ . Pak

$$\varrho(x, y) = \varrho(T(x), T(y)) \leq \gamma \cdot \varrho(x, y) \implies \varrho(x, y) = 0 \implies x = y.$$

└

□

## Věta 2.4 (O převedení na integrální tvar)

Nechť  $I \subset \mathbb{R}$  je otevřený interval,  $x_0 \in I$ ,  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spojitý a  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá. Pak  $y$  je řešením ODR  $y' = f(x, y(x))$  na  $I$  s počáteční podmínkou  $y(x_0) = y_0$  právě tehdy, když  $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \forall x \in I$ .

┌  
Důkaz

$\implies$  : víme  $y'(s) = f(s, y(s))$  je spojitý, tj. lze integrovat:

$$y(x) - y_0 = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

$\Leftarrow$  : zderivujeme (integrant je spojitý  $\implies$  integrál lze zderivovat)  $y'(x) = f(x, y(x))$ .

Zřejmě také  $f(x_0) = y_0$ . □

## Věta 2.5 (Picard)

Nechť  $I \subset \mathbb{R}^2$  je otevřený interval a  $(x_0, y_0) \in I$ . Nechť  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá a lokálně lipschitzovská vůči  $Y$ . Pak existuje  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  okolí  $x_0$  a funkce  $y(x)$  definovaná na



$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  tak, že  $y(x)$  splňuje ODR  $y'(x, y(x))$  na  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  s počáteční podmínkou  $y(x_0) = y_0$ . Navíc  $y$  je jediné řešení na  $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ .

┌  
Důkaz

Zvolme  $\delta, \Delta > 0$ , aby  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta] \subset I$ . Definujeme

$$X = \{y \in C([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \mid y(x) \in [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta]\}.$$

Definujeme operátor  $T : C([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \rightarrow C([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$  tak, že  $T[y](x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds$ .

Klíčové pozorování:  $y$  řeší naši ODR  $\Leftrightarrow T[y] = y$ . (Z předchozí věty.)

$X$  je úplný: Nejprve dokážeme, že  $X$  je uzavřená podmnožina  $C([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ :  $X$  lze zapsat (dokáže se velmi přímočaře) jako  $\overline{B(y_0, \Delta)}$ : Tj.  $X$  je uzavřená a úplnost se dědí na uzavřené podmnožiny.

Máme pevné  $\delta, \Delta > 0$ , že  $A := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta] \subset I$ .  $f$  spojitá na tomto kompaktu  $\Rightarrow \exists M > 0$ ,  $|f(x, y)| \leq M$  na  $A$ . Z lipschitzovskosti  $\exists x > 0 : \forall [x, y] \in A, \forall [x, \tilde{y}] |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq K \cdot |y - \tilde{y}|$ . Případným zmenšením  $\delta > 0$  dosáhneme

$$\delta \leq \min \left\{ \frac{\Delta}{M}, \frac{1}{2K} \right\}.$$

Ukážeme  $T : X \rightarrow X$ :  $y \in X, y(x) \in [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta]$ .

$$|T[y](x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds \right| \leq |x - x_0|M \leq \delta \cdot M \leq \Delta.$$

$$\Rightarrow T[y](x) \in [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta] \Rightarrow T[y] \in X.$$

Dokážeme, že je toto zobrazení kontrakce a pak už máme hotovo z věty výše. Kontrakce: Necht  $y, \tilde{y} \in X$  a  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ .

$$\begin{aligned} |T[y](x) - T[\tilde{y}](x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s)))ds \right| \leq \int_{x_0}^x \| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |K \cdot (y(s) - \tilde{y}(s))|ds < |x_0 - x| \cdot K \cdot \sup_{s \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} (y(s) - \tilde{y}(s)) \leq \delta \cdot K \cdot \varrho(y, \tilde{y}) \leq \frac{1}{2} \varrho(y, \tilde{y}). \end{aligned}$$

Supremum dá  $\varrho(T[y], T[\tilde{y}]) \leq \frac{1}{2} \varrho(y, \tilde{y})$ . □

## 3 Funkce více proměnných

### 3.1 Úvodní definice a spojitost

*Poznámka*

Většina definic je jen „opakování“ z letního semestru, nebo z definice spojitých funkcí na metrických prostorech.

**Definice 3.1** (Funkce více reálných proměnných, vektorová funkce)

Nechť  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Funkcí více reálných proměnných rozumíme zobrazení  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Vektorovou funkcí více reálných proměnných rozumíme zobrazení  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kde  $m \in \mathbb{N}$ .

**Definice 3.2** (Eukleidovská vzdálenost)

Pro  $[x_1, \dots, x_n], [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$  definujeme eukleidovskou vzdálenost (metriku) jako

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

**Definice 3.3** (Koule, prstencové okolí)

$B(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - c| < r\}$ .  $P(c, r) = B(c, r) \setminus \{c\}$ .

**Definice 3.4** (Limita funkce)

Nechť  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená. Řekneme, že  $f$  má v bodě  $a \in G$  limitu rovnou  $A \in \mathbb{R}^*$ , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Značíme  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ .

**Definice 3.5** (Spojitost)

Řekneme, že  $f$  je spojitá v  $a$ , jestliže  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Definice 3.6** (Spojitost a limita vektorové funkce)

Spojitost a limitu vektorové funkce definujeme po složkách.

*Poznámka*

Zřejmě platí aritmetika limit, věta o dvou polícajtech a věta o spojitosti složené funkce.

**Definice 3.7** (Limita posloupnosti bodů)

$$x_j \in \mathbb{R}^n, \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = a \in \mathbb{R}^n \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \forall j \geq j_0 : |x_j - a| < \varepsilon.$$

*Poznámka*

Následující větu lze dokázat analogicky věty výše.

**Věta 3.1** (Heine)Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  otevřená,  $a \in G$ ,  $A \in \mathbb{R}^*$  a  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Pak je ekvivalentní

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .
- $\forall$  posloupnost  $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$  splňující  $x_j \in G \setminus \{a\}$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = a$  platí  $\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) = A$ .

## 3.2 Parciální derivace a totální diferenciál

**Definice 3.8** (Parciální derivace)Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená,  $i \in [n]$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  a  $x \in G$ . Parciální derivací funkce  $f$  v bodě  $x$  podle  $i$ -té proměnné nazveme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cdot e_i) - f(x)}{t},$$

pokud tato limita existuje.

**Definice 3.9** (Extrémy)Nechť  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  a  $x_0 \in M$ . Řekneme, že  $f$  nabývá v bodě  $x_0$  svého minima (resp. lokálního minima, resp. maxima, lokálního maxima) vzhledem k  $M$ , jestliže  $\forall x \in M : f(x) \geq f(x_0)$  (resp.  $\exists \delta > 0 \forall x \in B(x_0, \delta)$ , resp.  $f(x) \leq f(x_0)$ ).**Věta 3.2** (Nutná podmínka existence extrému)Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená,  $i \in [n]$ ,  $a \in G$  a  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Má-li  $f$  v bodě  $a$  lokální minimum (maximum) a existuje-li  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ , pak  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ .

┌ *Důkaz*

Položme  $h(t) = f(a + t \cdot e_i)$ . Pak  $h$  je definováno na okolí 0.  $f$  má v  $a$  extrém, tedy  $h$  má v 0 extrém. Dále

$$h'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

└ Podle Fermatovy věty je  $h'(0) = 0$ . □

### Definice 3.10 (Derivace ve směru)

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in G$  a  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ . Derivací funkce  $f$  v bodě  $x \in G$  ve směru  $v$  nazveme

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t},$$

pokud limita existuje.

### Definice 3.11 (Totální diferenciál)

Nechť  $G$  je otevřená,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  a  $a \in G$ . Řekneme, že lineární zobrazení  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je totální diferenciál funkce  $f$  v bodě  $a$ , pokud  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{|h|} = 0$ .

Značíme  $D_f(a)$  a hodnotu v bodě  $h \in \mathbb{R}^n$  značíme  $D_f(a)(h)$ .

*Poznámka*

Lineární zobrazení  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lze reprezentovat jako  $L(h) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n$ .

Ekvivalentně lze definovat jako  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{|x-a|} = 0$ .

Geometrický význam je, že lineární funkce  $f(a) + L(x-a)$  je velmi blízko původní funkce  $f(x)$  na okolí  $a$ .

### Věta 3.3 (O tvaru totálního diferenciálu)

Nechť  $G$  je otevřená,  $a \in G$  a  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Nechť existuje totální diferenciál  $f$  v bodě  $a$ . Pak existují parciální derivace  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  a pro všechna  $h \in \mathbb{R}^n$  platí  $D_f(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n$ . Navíc pro  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$  platí  $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = D_f(a)(v)$ .

┌ *Důkaz*

Víme  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{|h|} = 0$ . Speciálně pro  $h = t \cdot e_i$ :

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a) - L(t \cdot e_i)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a) - A_i \cdot t}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - A_i.$$

Tj.  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = A_i$ . Obdobně pro  $v$ . □

### Definice 3.12 (Gradient)

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  a  $a \in G$ . Nechť  $f$  má v bodě  $a$  totální diferenciál. Pak definujeme gradient funkce  $f$  v bodě  $a$  jako vektor

$$\nabla f(a) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right].$$

Můžeme tedy psát  $Df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$ .

### Věta 3.4 (Geometrický význam gradientu)

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená,  $a \in G$  a  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Nechť existuje totální diferenciál  $f$  v bodě  $a$ , pak

$$\max \left\{ \frac{\partial f}{\partial v}(a) : \|v\| = 1 \right\} = \|\nabla f(a)\|.$$

┌ *Důkaz*

≤: Z minulé věty a Cauchyovy nerovnosti máme

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a)(v) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \|\nabla f(a)\| \cdot \|v\|.$$

≥: Položme  $v = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ , tedy  $\|v\| = 1$ . Potom

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}{\|\nabla f(a)\|} = \frac{\|\nabla f(a)\|^2}{\|\nabla f(a)\|} = \|\nabla f(a)\|.$$

□

### Věta 3.5 (O vztahu spojitosti a totálního diferenciálu)

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená,  $a \in G$  a  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Nechť existuje totální diferenciál  $f$  v bodě  $a$ , pak je  $f$  v bodě  $a$  spojitá.

┌  
Důkaz

Přímým výpočtem:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{\|h\|} \|h\| + f(a) + Df(a)(h) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{\|h\|} \|h\| \lim_{h \rightarrow 0} \|h\| + \lim_{h \rightarrow 0} f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} Df(a)(h) = \\ &= \dots \cdot 0 + f(a) + 0 = f(a).\end{aligned}$$

└

□

### Věta 3.6 (Postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu)

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená,  $a \in G$  a  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Nechť  $f$  má v bodě  $a \in \mathbb{R}^n$  spojitě parciální derivace, tedy funkce

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), j \in [n]$$

jsou spojitě v  $a$ . Pak  $Df(a)$  existuje.

┌  
Důkaz

└ Bez důkazu?

□

### Věta 3.7 (O aritmetice totálního diferenciálu)

Nechť  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a  $Df(a)$ ,  $Dg(a)$  existují. Pak existují i  $D(f+g)(a)$ ,  $D(cf)(a)$  pro  $c \in \mathbb{R}$ ,  $D(fg)(a)$ , a pokud  $g(a) \neq 0$  pak i  $D(f/g)(a)$  a platí

- $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$ ,
- $D(cf)(a) = cDf(a)$ ,
- $D(fg)(a) = f(a)Dg(a) + Df(a)g(a)$ ,
- $D(f/g)(a) = \frac{Df(a)g(a) - f(a)Dg(a)}{g(a)^2}$ .

┌ *Důkaz* (Pouze třetí bod)

$f(a)Dg(a) + Df(a)g(a)$  je zřejmě lineární zobrazení. Navíc platí

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)Dg(a)(h) - Df(a)(h)g(a) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a)}{\|h\|} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} g(a) \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{\|h\|} + \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) \frac{g(a+h) - g(a) - Dg(a)(h)}{\|h\|} + \\ + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a+h) - f(a)) Dg(a)(h)}{\|h\|} = 0, \end{aligned}$$

jelikož první dva členy jsou 0 z definice diferenciálu a pro třetí platí:

$$0 \leq |f(a+h) - f(a)| \left| \frac{Dg(a)(h)}{\|h\|} \right| \leq |f(a+h) - f(a)| \frac{\|\nabla g(a)\| \cdot \|h\|}{\|h\|} \rightarrow 0.$$

└

□

### Definice 3.13

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^k$  a  $a \in G$ . Řekneme, že lineární zobrazení  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  je derivací funkce  $f$  v bodě  $a$ , jestliže

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L(h)|}{|h|} = 0.$$

Značíme  $Df(a)$  a hodnotu v bodě  $h \in \mathbb{R}^n$  značíme  $Df(a)(h)$ .

*Poznámka*

Nechť  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  je lineární zobrazení. Potom existuje právě jedna  $n \times k$  matice  $A$  tak, že  $L(h) = Ah$ .

### Věta 3.8 (Reprezentace derivace maticí)

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená a  $f = [f_1, \dots, f_k] : G \rightarrow \mathbb{R}^k$  má derivaci v bodě  $a \in G$ . Pak  $Df(a)$  je reprezentováno maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

┌ *Důkaz*

Máme  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\|}{\|h\|} = 0$ , tedy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(a+h) - f_i(a) - Df_i(a)(h)}{\|h\|} = 0,$$

tudíž  $f_i$  má totální diferenciál v bodě  $a$  a ten můžeme zapsat jako

$$(Df(a))_i(h) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a)h_n.$$

└

□

*Poznámka*

Nechť  $L = Ah : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  je lineární zobrazení reprezentované maticí  $A$ . Pak existuje  $C > 0$  tak, že

$$\|Ah\| \leq C\|h\|$$

### Lemma 3.9

Nechť  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  má derivaci v bodě  $a \in \mathbb{R}^n$ . Pak existuje  $\delta_0 > 0$  a  $C \in \mathbb{R}$  tak, že

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq C\|h\|, \quad \forall h \in B(0, \delta_0).$$

┌ *Důkaz*

Z  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\|}{\|h\|} = 0$  existuje  $\delta_0 > 0$  tak, že  $\forall h \in B$  platí

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\|}{\|h\|} < 1 \implies$$

$$\begin{aligned} \implies \|f(a+h) - f(a)\| &= \left\| \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\|}{\|h\|} \|h\| + Df(a)(h) \right\| \leq \\ &\leq \|h\| + \|Df(a)(h)\| \leq (1 + \tilde{C})\|h\| =: C\|h\|. \end{aligned}$$

└

□

### Věta 3.10 (Derivace složeného zobrazení)

Nechť  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^s$ ,  $f$  má derivaci v  $a \in \mathbb{R}^n$  a  $g$  má derivaci v  $b = f(a) \in \mathbb{R}^k$ . Pak existuje derivace  $Dg \circ f(a)$  a platí

$$Dg \circ f(a) = Dg(b) \cdot Df(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a).$$



┌  
Důkaz

Podle předchozího lemmatu  $\exists \delta_0 > 0$  a  $C > 0$  tak, že  $\forall h \in B(0, \delta)$  platí  $\|f(a+h) - f(a)\| \leq C\|h\|$ . Necht  $\varepsilon > 0$ . Z definice  $Dg(b)$  existuje  $\eta > 0$  tak, že  $\forall y \in B(0, \eta)$  platí  $\|g(b+y) - g(b) - Dg(b)(y)\| < \varepsilon\|y\|$ .

Z definice  $Df(a)$  existuje  $\delta > 0$ ,  $\delta < \delta_0$ ,  $\delta < \frac{\eta}{C}$ , tak, že  $\forall h \in B(0, \delta)$  platí

$$\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\| < \varepsilon\|h\| \implies \|f(a+h) - f(a)\| \leq C\|h\| \leq C\delta \leq \eta.$$

Položme  $y = f(a+h) - f(a)$ . Potom:

$$\|g(b + f(a+h) - f(a)) - g(b) - Dg(b)(f(a+h) - f(a))\| \leq \varepsilon\|f(a+h) - f(a)\| \leq \varepsilon C\|h\|.$$

$$\|Dg(b)(f(a+h) - f(a)) - Dg(b)Df(a)(h)\| \leq \tilde{C}\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\| \leq \varepsilon\tilde{C}\|h\|.$$

Dohromady

$$\begin{aligned} & \frac{\|g(f(a+h)) - g(f(a)) - Dg(b)Df(a)(h)\|}{\|h\|} \leq \\ & \leq \frac{\|g(b + f(a+h) - f(a)) - g(f(a)) - Dg(b)(f(a+h) - f(a))\|}{\|h\|} + \\ & + \frac{\|Dg(b)(f(a+h) - f(a)) - Dg(b)Df(a)(h)\|}{\|h\|} \leq \\ & \leq \varepsilon C + \varepsilon \tilde{C} = \varepsilon(C + \tilde{C}). \end{aligned}$$

└

□

### Lemma 3.11 (Řetízkové pravidlo)

Necht  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  má derivaci v  $a \in \mathbb{R}^n$  a  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  má totální diferenciál v bodě  $b = f(a) = [f_1(a), \dots, f_k(a)]$ . Pak funkce

$$h(x) = g(f_1(x), \dots, f_k(x))$$

má totální diferenciál v  $a$  a platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

┌  
Důkaz

Z minulé věty:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = Dg(a) = Dg(b)Df(a) = \left( \frac{\partial g}{\partial y_1}(b), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

└

□

### Věta 3.12 (O přírůstku funkce)

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená a  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  má totální diferenciál v každém bodě  $G$ . Nechť  $a, b \in G$  a nechť úsečka  $L$  spojující  $a, b$  je obsažena v  $G$ , tj.  $L = \{(1-t) \cdot a + t \cdot b | t \in [0, 1]\} \subset G$ . Pak existuje  $\zeta \in L$  tak, že  $f(b) - f(a) = Df(\zeta) \cdot (b - a)$ .

┌

*Důkaz*

Položme  $F(t) = f(a + t(b - a))$ . Podle Lagrangeovy věty  $\exists \zeta_2 \in (0, 1)$  tak, že  $f(b) - f(a) = F(1) - F(0) = F'(\zeta_2)$ . Položme  $\zeta = a + \zeta_2(b - a)$ .

Podle řetízkového pravidla  $\frac{\partial F}{\partial t}(\zeta) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(\zeta)(b_j - a_j) = Df(\zeta)(b - a)$ . □

└

## 3.3 Parciální derivace vyšších řádů

### Definice 3.14

Nechť  $f$  má na otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^n$  parciální derivaci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, i \in [n],$$

pak definujeme pro  $a \in G$  a  $j \in [n]$  druhou parciální derivaci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a), i \neq j,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a), i = j.$$

Obdobně definujeme derivace vyšších řádů.

### Definice 3.15 ( $C^k(\mathbb{R})$ )

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená a  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $f \in C^1(G) = C^1(G, \mathbb{R})$ , pokud existují parciální derivace  $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i \in [n]$ , a jsou to spojité funkce.

Řekneme, že  $f \in C^k(G) = C^k(G, \mathbb{R})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , pokud existují všechny parciální derivace  $f$  až do řádu  $k$  včetně a jsou to spojité funkce.

*Důsledek*

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená. Z věty dříve dostáváme, že je-li  $f \in C^1(G)$ , pak existuje totální diferenciál  $f$  na  $G$ .

### Věta 3.13 (Záměnnost parciálních derivací)

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená,  $a \in G$  a  $f \in C^2(G, \mathbb{R})$ . Pak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

*Důkaz*

SLÚNO  $n = 2$ . Vezměme  $t$  dost malé, aby  $B_{\max}([a_1, a_2], t) \subset G$ . Položme  $W(t) = \frac{f(a_1+t, a_2+t) - f(a_1, a_2+t) - f(a_1+t, a_2) + f(a_1, a_2)}{t^2}$ . Položme  $\varphi(x) = f(x, a_2+t) - f(x, a_2)$ . Pak  $W(t) = \frac{1}{t^2}(\varphi(a_1+t) - \varphi(a_1))$ .

$\varphi$  je spojitá a  $\exists \varphi'$ . Lagrange:  $\exists c_1 \in (a_1, a_1+t)$ :

$$\frac{1}{t^2} \cdot \varphi'(c_1) \cdot (a_1+t - a_1) = \frac{1}{t} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, a_2+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, a_2) \right) = \frac{1}{t} (h(a_2+t) - h(a_2)),$$

$h(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, z)$  je spojitá a derivovatelná, tedy použijeme Lagrange:

$$= \frac{1}{t} \cdot h'(c_2) \cdot (a_2+t - a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_1, c_2) \leftarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2).$$

( $f$  má spojité druhé derivace, tedy můžeme prohodit  $f$  a limitu.) Totéž provedeme pro zaměněné souřadnice.  $\square$

### Definice 3.16 (Hessova matice)

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená a  $a \in G$ . Nechť  $f \in C^2(G)$ . Definujeme Hessovu matici  $f$  jako

$$D^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Podle předchozí věty je matice symetrická, a proto můžeme pracovat s následující kvadratickou formou

$$D^2 f(a)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T D^2 f(a) \cdot \mathbf{v}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2.$$

### Definice 3.17

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená a  $a \in G$ . Nechť  $f \in C^2(G)$ . Pak definujeme Taylorův polynom stupně 2 jako

$$T_2^{f,a}(x) := f(a) + Df(a)(x-a) + \frac{1}{2} D^2 f(a)(x-a, x-a).$$

### Věta 3.14 (Taylorova věta pro druhý řád)

Nechť  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je třídy  $C^2$  na okolí bodu  $a \in \mathbb{R}^n$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_2^{f,a}(x)}{|x - a|^2} = 0.$$

┌ Důkaz

└ Bez důkazu. □

*Poznámka*

Lze definovat i Taylorovy polynomy řádu  $k$  pomocí  $k$ -tých parciálních derivací.

### Věta 3.15 (O pozitivně definitní kvadratické formě)

Nechť  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je pozitivně definitní kvadratická forma. Potom

$$\exists \varepsilon > 0 \forall h \in \mathbb{R}^n : Q(h, h) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

┌ Důkaz

Funkce  $A(h) = Q(h, h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_j h_i$  je spojitá. Množina  $M = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\| = 1\}$  je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Funkce  $A(h)$  tedy nabývá na  $M$  svého minima v bodě  $h_0$ . Označme  $\varepsilon = Q(h_0, h_0) > 0$ .

Nyní  $\forall h \in \mathbb{R}^n$  :

$$Q(h, h) = Q\left(\frac{h}{\|h\|} \|h\|, \frac{h}{\|h\|} \|h\|\right) = \|h\|^2 Q\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right) \geq \|h\|^2 Q(h_0, h_0) = \|h\|^2 \varepsilon.$$

└ □

### Věta 3.16 (Postačující podmínky pro lokální extrém)

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $a \in G$  a nechť  $f \in \mathcal{C}^2(G)$ . Nechť  $Df(a) = 0$  (tedy je bod podezřelý na lokální extrém).

1. Je-li  $D^2f(a)$  pozitivně definitní, pak  $a$  je bod lokálního minima.
2. Je-li  $D^2f(a)$  negativně definitní, pak  $a$  je bod lokálního maxima.
3. Je-li  $D^2f(a)$  nedefinitní, pak v  $a$  nemá extrém.

┌ *Důkaz*

1) Z předchozí věty víme, že

$$\exists \varepsilon > 0 \forall h \in \mathbb{R}^n : D^2 f(a)(h, h) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

Z té ještě předchozejší víme, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - Df(a)(x - a) - \frac{1}{2} D^2 f(a)(x - a, x - a)}{\|x - a\|^2} = 0.$$

K zadanému  $\varepsilon > 0$  nalezneme  $\delta > 0$ :

$$\forall x \in P(a, \delta) : \frac{f(x) - f(a) - Df(a)(x - a) - \frac{1}{2} D^2 f(a)(x - a, x - a)}{\|x - a\|^2} > -\frac{1}{4} \varepsilon.$$

$$\text{Odtud } f(x) - f(a) - \frac{1}{2} D^2 f(a)(x - a, x - a) > -\frac{1}{4} \varepsilon \|x - a\|^2 \implies$$

$$f(x) > f(a) + \frac{1}{2} D^2 f(a)(x - a, x - a) - \frac{1}{4} \varepsilon \|x - a\|^2 \geq$$

$$\geq f(a) + \frac{1}{2} \varepsilon \|x - a\|^2 - \frac{1}{4} \varepsilon \|x - a\|^2 > f(a).$$

2) obdobně.

3) Tedy existují  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$  tak, že  $D^2 f(a)(h_1, h_1) > 0$  a  $D^2 f(a)(h_2, h_2) < 0$ . Uvažme funkci  $\varphi(t) = f(a + t \cdot h_1)$ , pak  $\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t \cdot h_1) \cdot (h_1)_i = Df(a + t \cdot h_1) \cdot h_1$ .  $\varphi'(0) = Df(a)h_1 = 0$ .

Dále  $\varphi''(t) = D^2 f(a + t \cdot h_1)(h_1, h_1)$ , tedy  $\varphi''(0) = D^2 f(a)(h_1, h_1) > 0$ . Tedy  $\varphi$  má v  $t = 0$  lokální minimum, tj.  $f$  nemá v bodě  $a$  lokální maximum. Analogicky pro  $h_2$ , z čehož dostaneme, že  $f$  nemá v  $a$  ani lokální minimum.  $\square$

└

### 3.4 Implicitní funkce a vázané extrémy

#### Věta 3.17 (O implicitní funkci)

Nechť  $p \in \mathbb{N}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  je otevřená množina,  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{y} \in \mathbb{R}$ ,  $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$  a nechť platí

1.  $F \in \mathcal{C}^p(G)$ ,
2.  $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ ,
3.  $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$ ,

*pak existuje okolí  $U \subset \mathbb{R}^n$  bodu  $\tilde{x}$  a okolí  $V \subset \mathbb{R}$  bodu  $\tilde{y}$  tak, že*

$$\forall x \in U \exists y \in V : F(x, y) = 0.$$

*Píšeme-li  $y = \varphi(x)$ , pak  $\varphi \in \mathcal{C}^p(U)$  a platí*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \forall x \in U \quad \forall j \in [n].$$

Důkaz

4 kroky: a)  $\exists \varphi$ , b)  $\varphi$  je spojitá, c)  $\varphi \in \mathcal{C}^1$ , d)  $\varphi \in \mathcal{C}^p$ .

a) BÚNO  $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ .  $F$  je  $\mathcal{C}^2$ , a tedy  $\exists \delta_1 > 0 \exists \zeta_1 > 0$ , tak  $\forall x \in B(\tilde{x}, \delta_1) \forall y \in B(\tilde{y}, \zeta_1)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ .  $\forall B(\tilde{y}, \zeta_1) : \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, y) > 0 \implies$  funkce  $y \mapsto F(\tilde{x}, y)$  je rostoucí, tj.  $F(\tilde{x}, \tilde{y} + \zeta_1) > 0$ ,  $F(\tilde{x}, \tilde{y} - \zeta_1) < 0$ . Nalezneme  $\delta_2 < \delta_1$  tak, že  $F(x, \tilde{y} + \zeta_1) > 0$ ,  $F(x, \tilde{y} - \zeta_1) < 0$ ,  $\forall x \in B(\tilde{x}, \delta_2)$ . Položme  $U = B(\tilde{x}, \delta_2)$  a  $V = B(\tilde{y}, \zeta_1)$ .

Nechť  $x \in B(\tilde{x}, \delta_2)$  je libovolné pevné. Víme, že  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ , tedy  $y \mapsto F(x, y)$  je rostoucí a spojitá, tedy podle Darbouxovy věty (o nabývání mezíhodnot)  $\exists ! y \in (\tilde{y} - \zeta_1, \tilde{y} + \zeta_1)$  tak, že  $F(x, y) = 0$ . Označme  $y = \varphi(x)$ .

b) Nechť  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon < \zeta_1$ . Mohu použít větu část a) na  $F$  a  $G^* = U \times (\tilde{y} - \varepsilon, \tilde{y} + \varepsilon)$ . Dostaneme  $\exists U^*$  okolí  $\tilde{x}$  a  $V^*$  okolí  $\tilde{y}$ , že  $\forall x \in U^* \exists ! y \in V^* F(x, y) = 0$ . Speciálně  $\varphi(U^*) \subset V^* \subset (\tilde{y} - \varepsilon, \tilde{y} + \varepsilon)$ . Tedy  $\varphi$  je spojité.

c) Chceme ukázat, že  $\varphi$  má totální diferenciál v  $\tilde{x}$ , tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B(\tilde{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n : |\varphi(\tilde{x} + h) - \varphi(\tilde{x}) - \sum_{i=1}^n -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} h_i| < \varepsilon \sum_{i=1}^n |h_i|.$$

Zvolme  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})} < \frac{1}{2}$ . Víme, že  $F$  má totální diferenciál v  $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ , tedy  $\exists \delta > 0$

$$\forall h \in B(0, \delta) |F(\tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{y} + h_{n+1}) - F(\tilde{x}, \tilde{y}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x}, \tilde{y}) h_i - \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) h_{n+1}| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n+1} \|h_i\|,$$

$$\left| F(\tilde{x} + \tilde{h}, \varphi(\tilde{x} + \tilde{h})) - F(\tilde{x}, \tilde{y}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot h_i - \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot (\varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi(\tilde{x})) \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot \left( \sum_{i=1}^n |h_i| + |\varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi(\tilde{x})| \right).$$

$$|(\varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi(\tilde{x})) - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})} \cdot h_i| \leq \frac{\varepsilon}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})} \cdot \left( \sum_{i=1}^n |h_i| + |\varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi(\tilde{x})| \right).$$

Tudíž stačí jen odhadnout  $|\varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi'(\tilde{x})|$ .

$$|\varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi'(\tilde{x})| \leq |\varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi'(\tilde{x}) - \sum_{i=1}^n \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})} \cdot h_i| + \left| \sum_{i=1}^n \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})} \cdot h_i \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})} \left( \sum_{i=1}^n |h_i| + |\varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi'(\tilde{x})| \right) + c_i \sum_{i=1}^n |h_i| \leq$$

□

┌ *Důkaz (Pokračování)*

$$\leq \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n |h_i| + |\varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi'(\tilde{x})| \right) + c_i \sum_{i=1}^n |h_i| \implies$$

$$|\varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi'(\tilde{x})| \leq c_2 \sum_{i=1}^n |h_i|.$$

Kombinací dosažených nerovností už dostaneme chtěnou nerovnost. Tedy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

d)  $F \in \mathcal{C}^p \implies \varphi \in \mathcal{C}^p$ . Indukcí:  $p = 1$  víme. Dále necht' víme  $\varphi \in \mathcal{C}^{p-1}$  a  $F \in \mathcal{C}^p$ . Víme, že

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

Toto  $(p-1)$ krát zderivujeme. Tím na pravé straně dostaneme výraz, kde bude  $F$  nanejvýš v  $((1+p-1)=p)$ -té derivaci a  $\varphi$  bude nanejvýš v  $(p-1)$ -té derivaci (podle vzorce pro derivaci složené funkce). □

### Věta 3.18 (O implicitních funkcích)

Necht'  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$  otevřená,  $F_j : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in [m]$ ,  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ ,  $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$  a necht' platí

- $F_j \in \mathcal{C}^p(G)$  pro  $j \in [m]$ ,
- $F_j(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ ,  $\forall j \in [m]$ ,
- determinant  $m \times m$  matic parciálních derivací  $F_j$  je nenulový.

Pak existuje  $U \subset \mathbb{R}^n$  okolí  $\tilde{x}$  a  $V \subset \mathbb{R}^m$  okolí  $\tilde{y}$  tak, že

$$\forall x \in U \exists! y \in V, F_j(x, y) = 0 \quad \forall j \in [m], (y_j = \varphi_j(x)) \implies \varphi_j \in \mathcal{C}^p(U), j \in [m].$$

### Věta 3.19 (Lagrangeova věta o vázaných extrémech)

Necht'  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $m < n$ ,  $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$  a mějme množinu  $M = \{z \in \mathbb{R}^n | g_1(z) = \dots = g_m(z) = 0\}$ . Je-li  $a \in M$  bodem lokálního extrému  $f$  vzhledem k  $M$  a vektory  $(\frac{\partial g_1}{\partial z_1}(a), \dots, \frac{\partial g_1}{\partial z_n}(a))$ , ...,  $(\frac{\partial g_m}{\partial z_1}(a), \dots, \frac{\partial g_m}{\partial z_n}(a))$  jsou lineárně nezávislé, pak existují čísla  $x_1, \dots, x_m$  tak, že

$$Df(a) + \lambda_1 Dg_1(a) + \dots + \lambda_m \cdot Dg_m(a) = 0.$$



*Důkaz*

Položme  $k = n - m$ ,  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ . Víme, že  $Dg_1(a), \dots, Dg_m(a)$  jsou LN  $\implies \exists m$  lineárně nezávislých sloupců, BÚNO jsou to poslední sloupce. Podle věty o implicitních funkcích  $\exists U$  okolí  $\tilde{x}$  a  $V$  okolí  $\tilde{y}$  tak, že  $\forall x \in U \exists! y \in V : g_j(x, y) = 0, j \in [m]$ . Píšeme  $y_j = \varphi_j(x) \in \mathcal{C}^1, j \in [m]$ .

Položme  $\psi(x) = f(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots) \in \mathcal{C}^1$ . Víme  $f$  má extrém vzhledem k  $M \implies \psi$  má extrém  $\implies \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) = 0, j \in [k]$ .

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial z_i} a \frac{\partial(x_i)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial z_{k+i}}(a) \frac{\partial \varphi_i(\tilde{x})}{\partial x_j} = 0 + \dots$$

Zderivováním  $g_l(x_1, \dots, \varphi \dots, \dots) = 0, l \in [m]$ , dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial z_j} g(x) = \frac{\partial g_l}{\partial z_j}(a) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_l}{\partial z_{k+i}}(a) \cdot \frac{\partial \varphi_i(\tilde{x})}{\partial x_j} = 0.$$

Označme si vektory  $v_j = (0, \dots, 1, \dots, 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(\tilde{x}), \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}(\tilde{x}))$  (1 je na  $j$ -tém místě),  $j \in [k]$ . Označme  $A = \text{LO}\{v_1, \dots, v_k\}$ .  $\dim A = k$ . Z toho plyne  $A^\perp = n - k = m$ . Derivace  $\psi$  říká, že  $Df(a) \in A^\perp$ . Derivace  $g$  říká, že  $Dg_l(a) \in A^\perp, \forall l \in [m]$ . Z předpokladu tvoří  $Dg_l(a)$  bázi  $A^\perp$  (jelikož jsou LN). Tj.  $Df(a)$  lze napsat jako L kombinaci prvků báze, tj.  $Dg_l(a)$ .  $\square$

## 3.5 Regulární zobrazení

### Definice 3.18 (Difeomorfismus)

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřené a  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Řekneme, že  $f$  je difeomorfismus na  $G$ , jestliže je  $f$  prostá na  $G$ ,  $U = f(G)$  je otevřená v  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(G)$  a  $f^{-1} \in C^1(U)$ .

### Definice 3.19 (Regulární zobrazení)

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená a  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Řekneme, že  $f$  je regulární zobrazení, jestliže  $f \in \mathcal{C}^1(G)$  a pro každé  $a \in G$  a pro každé  $a \in G$  platí  $J_f(a) \neq 0$ .

### Věta 3.20 (O lokálním difeomorfismu)

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená a  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  je třídy  $\mathcal{C}^1$ . Nechť pro  $a \in G$  platí  $J_f(a) \neq 0$ . Pak existuje  $V \subset G$  okolí  $a$  takové, že  $f|_V$  je difeomorfismus na  $V$ .

┌ *Důkaz*

Definujeme  $\Omega = \mathbb{R}^n \times G \subset \mathbb{R}^{2n}$  a  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F(y, x) = f(x) - y \in \mathbb{C}^1$ . Označme  $b = f(a)$ , pak  $F(b, a) = f(a) - b = 0$ . Dále Jacobián  $F$  podle druhých  $n$  souřadnic je roven  $J_f(a) \neq 0$ . Podle věty o implicitních funkcích existuje  $U_1$  okolí bodu  $b$  a  $V_1$  okolí bodu  $a$  v  $\mathbb{R}^n$ , že  $\forall y \in U_1 \exists! x \in V_1 : F(y, x) = 0$ . Tj. při označení  $x = \varphi(y)$  je  $\varphi \in \mathcal{C}^1(U_1)$  a  $0 = f(x) - y = f(\varphi(y)) - y \implies \varphi = b^{-1} \in \mathcal{C}^1$ . (Na  $A = V_1 \cap f^{-1}(U_1)$ , což je otevřená množina jako průnik otevřené a vzoru otevřené při spojitém zobrazení. Nyní  $f|_A$  je difeomorfismus a zobrazení  $A$  na otevřenou  $U_1$ .)  $\square$

└

## 4 Metrické prostory vol. II

### 4.1 Více o kompaktních a úplných prostorech

#### **Definice 4.1** (Kompaktní prostor podruhé)

$(P, \varrho)$  MP a  $K \subset P$ . Řekneme, že  $K$  je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti bodů z  $K$  lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v  $K$ .

Prostor  $P$  je kompaktní, pokud je jako svá podmnožina ( $K = P$ ) kompaktní.

#### **Definice 4.2** ( $\varepsilon$ -sít, totálně omezený)

Nechť  $(P, \varrho)$  je metrický prostor. Nechť  $\varepsilon > 0$  a  $H \subset P$ . Řekneme, že  $H$  je  $\varepsilon$ -sít prostoru  $P$ , pokud  $P \subset \bigcup_{x \in H} B(x, \varepsilon)$ .

Řekneme, že  $P$  je totálně omezený, pokud  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  konečná  $\varepsilon$ -sít prostoru  $P$ .

#### **Věta 4.1** (Omezenost a totální omezenost)

Nechť  $(P, \varrho)$  je totálně omezený metrický prostor. Potom je  $P$  omezený.

┌ *Důkaz*

$P$  je TO, a tedy existuje konečná 1-sít  $x_1, \dots, x_n$ . Označme  $d = \max \{\varrho(x_i, x_j) \mid i, j \in [n]\}$ . Nechť  $x, y \in P$ , pak  $\exists i, j \in [n] : x \in B(x_i, 1), y \in B(x_j, 1)$ . Nyní

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_i) + \varrho(x_i, x_j) + \varrho(x_j, y) < 1 + d + 1.$$

Volme  $x_0$  libovolně, pak  $P \subset B(x_0, d + 2)$ .  $\square$

└

#### **Věta 4.2** (Kompaktnost a totální omezenost)

Nechť  $(P, \varrho)$  je kompaktní metrický prostor. Potom je  $P$  totálně omezený.

┌ *Důkaz*

Sporem: Necht  $\exists \varepsilon > 0 \forall x_1, \dots, x_n \in P : P \not\subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ . Zvolme  $x_1 \in P$  libovolně. Víme  $P \not\subset B(x_1, \varepsilon)$ , tedy  $\exists x_2 : \varrho(x_2, x_1) \geq \varepsilon$ . Indukcí: Mějme  $x_1, \dots, x_{n-1}$  tak, že  $\varrho(x_i, x_j) \geq \varepsilon \forall i \neq j$ . Víme  $P \not\subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ , tedy  $\exists x_n \varrho(x_n, x_i) \geq \varepsilon \forall i \in [n-1]$ . Nakonec máme posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ .

Z definice kompaktnosti  $\exists x_{n_k} \rightarrow x \in P$ . Ale toto není možné, protože  $\varrho(x_i, x_j) \geq \varepsilon \forall i \neq j$ .

└

□

### Věta 4.3 (Kompaktnost a otevřené pokrytí)

*Metrický prostor  $(P, \varrho)$  je kompaktní právě tehdy, když z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí. Tedy platí (pro libovolnou indexovou množinu a  $G_\alpha$  otevřené)*

$$P \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \implies \exists \text{konečná } A_0 \subset A : P \subset \bigcup_{\alpha \in A_0} G_\alpha.$$

┌ *Důkaz*

„ $\implies$ “: Tvrdím, že  $\exists m \in \mathbb{N}$  tak, že  $\forall x \in P \ \alpha \in A : x \in B(x, \frac{1}{m}) \subset G_\alpha$ . To dokážeme sporem: Necht  $\exists x_m \in P \ \forall \alpha \in A : B(x_m, \frac{1}{m}) \not\subset G_\alpha$ .  $P$  je kompaktní, tedy  $\exists x_{m_k} \rightarrow x$ . Z otevřeného pokrytí  $\exists \alpha \in A : x \in G_\alpha$ ,  $G_\alpha$ .

$G_\alpha$  je otevřená, tedy  $\exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subset G_\alpha$ . Zvolme  $k$ , aby  $\frac{1}{m_k} \in B(x, \frac{\delta}{2})$ . Nyní  $\forall y \in B(x_{m_k}, \frac{1}{m_k})$  platí

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_{m_k}) + \varrho(x_{m_k}, y) < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{m_k} < \delta \implies y \in B(x, \delta) \implies B(x_{m_k}, \frac{1}{m_k}) \subset G_\alpha, \text{ } \nabla.$$

Takže tvrzení výše platí.  $(P, \varrho)$  je kompaktní, tedy podle věty 11.2 (ve výuce) je totálně omezený. Tedy pro naše  $m \in \mathbb{N} \ \exists$  konečná  $\frac{1}{m}$ -sít  $x_1, \dots, x_n$ . Nyní z toho tvrzení výše  $\forall j \in [n] \ \exists G_{\alpha_j} : B(x_j, \frac{1}{m}) \subset G_{\alpha_j}$ . Nyní  $P \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \frac{1}{n}) \subset \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j}$ .

„ $\Leftarrow$ “: Necht  $\{x_n\} \in P$ . Chceme  $x_{n_k} \rightarrow x \in P$ . Označme  $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Je-li  $D$  konečná, pak se nějaké  $x_n$  opakuje a je snadné vybrat konvergentní (= konstantní) podposloupnost.

Dále necht  $D$  je nekonečná. Máme 2 možnosti:

$A \exists y \in P \ \forall r > 0 : B(y, r) \cap D$  je nekonečná, nebo

$D \forall y \in P \ \exists r_y > 0 : B(y, r_y) \cap D$  konečná.

$A$ :  $r = 1$ :  $\exists x_{n_1} \in B(y, 1) \cap D$ ,  $r = \frac{1}{2}$ , protože prvků v libovolné kouli je nekonečno, tak  $\exists n_2 > n_1, x_{n_2} \in B(y, \frac{1}{2}) \cap D$ . Dále pokračujeme indukcí a dostaneme  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty, x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$ .

$B$ : Víme  $P \subset \bigcup_{y \in P} B(y, r_y)$  je otevřené pokrytí, tedy  $\exists y_1, \dots, y_n : P \subset \bigcup_{i=1}^n B(y_i, r_{y_i})$ .  $D = D \cap P \subset \bigcup_{i=1}^n (B(y_i, r_{y_i}) \cap F)$ .  $D$  je nekonečné, ale podle  $B$  je vpravo konečné sjednocení konečných množin, tedy konečná množina.  $\square$

*Důsledek* (Borelova věta)

Necht  $a, b \in \mathbb{K}$ ,  $a < b$  a  $\{I_\alpha\}$  je systém otevřených intervalů. Pak

$$[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \implies \exists A_0 \subset \text{konečná} \ [a, b] \subset_{\alpha \in A_0} I_\alpha.$$

*Důsledek*

Spojité funkce na  $[a, b]$  je omezená.

*Důsledek*

$f$  je spojitá na  $[a, b] \implies f$  je stejnoměrně spojitá na  $[a, b]$ .

### Definice 4.3 (B-C podmínka)

Nechť  $(P, \varrho)$  je metrický prostor a  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost bodů z  $P$ . Řekneme, že  $x_n$  splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku (případně, že je cauchyovská), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

### Definice 4.4 (Úplný prostor)

Řekneme, že metrický prostor  $(P, \varrho)$  je úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost bodů z  $P$  je konvergentní

### Věta 4.4 (Cantorova, o uzavřených množinách)

Nechť  $(P, \varrho)$  je úplný metrický prostor a  $F_n$  je posloupnost uzavřených neprázdných množin v  $P$  tak, že  $F_{n+1} \subset F_n$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0$ . Pak  $|\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n| = 1$ .

┌

Důkaz (Viz OM2/MetPro/MetPro.pdf Věta 6.1)

Zvolme  $x_n \in F_n$ . Tvrdíme, že  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  je cauchyovská. Ať  $\varepsilon > 0$ .  $\exists n_0 : \text{diam } F_{n_0} < \varepsilon$ . Nyní

$$\forall m, n \geq n_0 : x_n \in F_n \subset F_{n_0}, x_m \in F_m \subset F_{n_0} : \varrho(x_n, x_m) \leq \text{diam } F_{n_0} < \varepsilon.$$

$P$  je úplný, a tedy  $x_n \rightarrow x \in P$ . Nechť  $j \in \mathbb{N}$  je pevné a  $n \geq j$ , pak  $x_n \in F_n \subset F_j$  a  $x_n \rightarrow x$ , tedy ( $F_j$  je uzavřené)  $x \in F_j \forall j$ , tedy  $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j$ . Naopak pokud  $x, y \in \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j$ , pak zvolíme  $j$  tak, aby  $\text{diam } F_j < \varrho(x, y)$ , tedy buď  $x \notin F_j$  nebo  $y \notin F_j$ .  $\square$

└

### Věta 4.5 (O totální omezenosti a úplnosti)

Metrický prostor  $(P, \varrho)$  je kompaktní právě tehdy, když je totálně omezený a úplný.

┌

Důkaz

$\implies$  už máme hotové z věty výše a věty Kompaktnost a totální omezenost.  $\Leftarrow$ : Nechť  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P$ , chceme  $\exists x_{n_k} \rightarrow x$ .  $P$  je totálně omezený, tedy existuje konečná 1-sít  $P \subset \bigcup_{i=1}^{h_1} B(s_i, 1)$ .  $\{x_n\}$  je nekonečná  $\implies \exists$  kulička  $B_1 = B(s_i, 1)$  tak, že  $|\{x_n | x_n \in B_1\}| = +\infty$ . Zvolme  $x_{n_1} \in B_1$ .

Dále indukcí: Mějme  $B_1, \dots, B_{k-1}$  kuličky o poloměrech  $1, \dots, \frac{1}{k-1}$  tak, že pro  $A_{k-1} = B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}$  platí  $|\{x_n | x_n \in A_{k-1}\}| = +\infty$ , a mějme  $n_1 < \dots < n_{k-1}$  tak, že  $x_{n_j} \in A_j$ ,  $\forall j \in [k-1]$ .  $P$  je totálně omezený  $\implies \exists$  konečná  $\frac{1}{k}$ -sít  $A_{k-1} \subset P \subset \bigcup_{i=1}^{h_k} B(s_i, \frac{1}{k})$ . V  $A_{k-1}$  je nekonečně mnoho  $x_n$ , tedy  $\exists B_k = B(s_i, \frac{1}{k})$ , že pro  $A_k = A_{k-1} \cap B_k$  platí  $|\{x_n | x_n \in A_k\}| = +\infty$ . Dále zvolme  $n_k$  tak, aby  $n_k > n_{k-1}$  a  $x_{n_k} \in A_k$ .

$x_{n_k}$  je cauchyovská, neboť pro  $\varepsilon > 0 \exists n_0 : \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ , nechť  $k, l \geq n_0$ , pak  $x_{n_k} \in A_k \subset A_{n_0}$  a  $x_{n_l} \in A_l \subset A_{n_0}$ , tedy jelikož  $A_{n_0} \subset B_{n_0}$ ,  $\varrho(x_{n_k}, x_{n_l}) < \frac{2}{n_0} < 2\varepsilon$ .  $P$  je úplný, tedy existuje  $x$  tak, že  $x_{n_k} \rightarrow x$ .  $\square$

└

**Věta 4.6** (O zúplnění metrického prostoru)

Nechť  $(P, \varrho)$  je metrický prostor. Pak existuje úplný metrický prostor  $(\tilde{P}, \tilde{\varrho})$  tak, že  $P \subset \tilde{P}$  a  $\forall x, y \in P$  platí  $\varrho(x, y) = \tilde{\varrho}(x, y)$ .

┌ Důkaz

└ Bez důkazu. □

**Věta 4.7** (Arzela-Ascoli)

Nechť  $A \subset C([0, 1])$ . Pak  $\overline{A}$  je kompaktní právě tehdy, když jsou funkce z  $A$  stejně omezené a stejně stejnoměrně spojité. Tedy pokud  $\exists K > 0$ :

$$\forall f \in A \quad \forall x \in [0, 1] : |f(x)| \leq K,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in [0, 1] \quad \forall f \in A : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

┌

*Důkaz*

$\implies$  :  $\bar{A}$  je kompaktní  $\implies \bar{A}$  je omezená  $\implies A$  je omezená  $\subset B(0, K)$ . Tedy  $\forall f \in A \forall x \in [0, 1] : |f(x)| \leq K$ .

$\bar{A}$  je kompaktní  $\implies \bar{A}$  je totálně omezená. Necht  $\varepsilon > 0 \implies \exists$  konečná  $\varepsilon$ -sít  $\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^k B(f_i, \varepsilon)$ . Funkce  $f_i$  je spojitá na  $[0, 1] \implies f$  je stejnoměrně spojitá na  $[0, 1]$ . Tedy

$$\exists \delta_i > 0 \forall x, y : |x - y| < \delta_i \implies |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon.$$

Položme  $\delta = \min \{\delta_1, \dots, \delta_k\}$ . Necht  $f \in A, x, y \in [0, 1] : |x - y| < \delta$ . K tomuto  $f \in A$  najdu  $f_i$ , aby  $f \in B(f_i, \varepsilon)$ . Potom

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

$\Leftarrow$ : Chceme dokázat, že pro  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \bar{A} \exists f_{n+k} \rightarrow f$ . 1. krok, volba  $C$ : Necht  $m \in \mathbb{N}$ . Ze stejnoměrné spojitosti pro  $\varepsilon = \frac{1}{m}$

$$\exists \delta_m \forall x, y \forall n : |x - y| < \delta_m \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon = \frac{1}{m}.$$

Nyní  $[0, 1]$  pokryjeme  $[0, 1] \subset \bigcup_{j=1}^{k_m} B(c_j^m, \delta_m)$ . Položme  $C = \{C_j^m | m \in \mathbb{N}, j \in [k_m]\}$ .  $C$  je zřejmě spočetné (spočetné sjednocení konečných).

2. krok, volba  $f_{n_k}$ , aby  $\forall c \in C : f_{n_k}(c)$  konverguje.  $C$  je spočetná, tedy  $C = \{c_i, i \in \mathbb{N}\}$ . Ze stejné omezenosti  $|f_n(c_1)| \leq K$ , tedy existuje podposloupnost  $f_{n_{k,1}}(c_1)$  posloupnosti  $f_{n_k}(c_1)$ , která konverguje. Nyní ze stejné omezenosti víme, že  $|f_{n_{k,1}}(c_2)| \leq K$ , tedy opět vybereme podposloupnost  $f_{n_{k,2}}(c_2)$ , která konverguje. Dále pokračujeme indukcí.

Položme  $f_{n_k} = f_{n_{k,k}}$ . Tato vybraná podposloupnost z  $f_n$  konverguje ve všech bodech  $C$ .

3. krok,  $f_{n_k}$  je cauchyovská. Necht  $\varepsilon > 0$ , k čemuž nalezneme  $\frac{1}{m} < \varepsilon$ . Z 1. kroku máme  $\delta_m$  a  $c_1^m, \dots, c_{k_m}^m$ . Z 2. kroku víme, že  $f_{n_k}(c_j^m) \rightarrow \dots (c_j^m), \forall j \in [k_m]$ . Tedy z BC podmínky v těchto bodech

$$\exists k_0 \forall k, l \geq k_0 : |f_{n_k}(c_j^m) - f_{n_l}(c_j^m)| < \varepsilon, \quad \forall j \in [k_m].$$

Necht nyní  $x \in [0, 1]$ . Nalezneme  $c_j^m : |x - c_j^m| < \delta_m$ :

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| \leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(c_j^m)| + |f_{n_k}(c_j^m) - f_{n_l}(c_j^m)| + |f_{n_l}(c_j^m) - f_{n_l}(x)| < \frac{1}{m} + \varepsilon + \frac{1}{m} \leq 3\varepsilon.$$

Tedy  $f_{n_k}$  je cauchyovská a jelikož  $C([0, 1])$  je úplný, tak  $\exists f \in C([0, 1]) f_{n_k} \rightarrow f$ . Nyní z uzavřenosti  $\bar{A}$  je  $f \in \bar{A}$ . □

└

## 4.2 Prostory $L^p$

*Poznámka*

Většina vět této podsekcce i s důkazy se dá najít v W. Radim – Analýza v reálném a komplexním oboru.

*Poznámka* (Slovníček pro MIT a slabší povahy)

„Tyto skupiny nejsou totéž.“

- $\int_x f d\mu$  čteme  $(R) \int_0^1 f(x) dx$ .
- $f$  je měřitelná čteme  $f$  je spojitá.
- $f = 0$ ,  $\mu$ -s. v. čteme jako  $f = 0$  všude.
- $(X, \mathcal{A}, \mu)$  čteme jako  $([0, 1], dx)$ .

### **Věta 4.8** (Jensenova nerovnost)

Nechť  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  je pravděpodobnostní prostor ( $\mu$  nezáporná),  $f \in L^1(\mu)$ ,  $a, b \in [-\infty, \infty]$  a  $f : X \rightarrow (a, b)$ . Je-li  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konvexní funkce, pak

$$\varphi \left( \int_X f d\mu \right) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu.$$

┌

*Důkaz*

„Integrál je vlastně průměr a konvexní funkce je v průměru menší, než průměr jejich hodnot.“

Označme  $t = \int_x f d\mu$ .  $\mu(X) = 1 \implies a < t < b$ .  $\varphi$  je konvexní  $\implies$

$$\implies \exists \beta \in \mathbb{R} : \varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s - t) \quad \forall s \in (a, b).$$

Toto použijeme pro  $s = f(x)$ :

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + \beta \cdot (f(x) - t).$$

$f$  je měřitelná a  $\varphi$  spojitá (neboť je konvexní)  $\implies \varphi(f(x))$  je měřitelná.

Zintegrujeme:

$$\int_X \varphi(f(x)) \mu(x) \geq \int_X \varphi(t) d\mu(x) + \beta \int_X (f(x) - t) d\mu(x),$$

$$\int_X \varphi(f(x)) \mu(x) \geq \varphi(t) + \beta \cdot 0 = \varphi(t).$$

└

□



*Příklad*

Při  $f(x_i) = a_i \in \mathbb{R}$ ,  $\mu = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \delta_{x_i}$ ,  $\varphi = \exp$  dostaneme z minulé věty AG nerovnost.

*Příklad*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

, kde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  a  $a, b \geq 0$ .

┌  
*Řešení*

$$\exp\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \leq \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y,$$

$$e^{\frac{x}{p}} \cdot e^{\frac{y}{q}} \leq \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y.$$

K zadanému  $a, b > 0$  vezmeme  $x, y$  aby  $e^{\frac{x}{p}} = a$  a  $e^{\frac{y}{q}} = b$ . Pak

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

└ Pro  $a = 0$  nebo  $b = 0$  je důkaz triviální.

**Definice 4.5** (Sdružený index)

Nechť  $1 < p < \infty$ , pak číslo  $q$  splňující  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  nazveme sdružení. Pro  $p = 1$  definujeme  $q = \infty$  a opačně.

**Věta 4.9** (Hölderova a Minkowského)

Nechť  $X, \mathcal{A}, \mu$  je prostor s mírou,  $1 < p < \infty$ ,  $q$  je sdružený exponent k  $p$  a  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$  jsou měřitelné funkce. Potom platí Hölderova nerovnost:

$$\int_X f \cdot g d\mu \leq \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_X g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

a Minkowského nerovnost

$$\left( \int_X (f + g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

┌ *Důkaz*

Označme  $A = \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$  a  $B = \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$ . Pokud  $A = 0$  (nebo  $B = 0$ ), pak  $f = 0$  skoro všude a nerovnost platí. Pokud  $A = \infty$  nebo  $B = \infty$ , pak nerovnost také triviálně platí.

Položme  $F(x) = \frac{1}{A}f(x)$  a  $G(x) = \frac{1}{B} \cdot g(x)$ . Pak

$$\int_X F(x)^p d\mu = \frac{1}{A^p} \int_X f(x)^p d\mu = 1, \quad \int_X G(x)^q d\mu = 1.$$

Z  $F(x) \cdot G(x) \leq \frac{1}{p}(F(x))^p + \frac{1}{q}(G(x))^q$  (Jangova? nerovnost:  $\forall a, b \geq 0 : ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ ) dostaneme:

$$\int_X F(x)G(x) d\mu(x) \leq \frac{1}{p} \int_X (F(x))^p + \frac{1}{q} \int_X (G(x))^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad / \cdot AB$$

$$\int_X f(x)g(x) d\mu(x) \leq AB = \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$$\begin{aligned} \int_X (f+g)^p d\mu &= \int_X f \cdot (f+g)^{p-1} + g \cdot (f+g)^{p-1} d\mu \leq \\ &\leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \left[\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right] \cdot \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Je-li  $\int_X (f+g)^p d\mu \neq 0$  (triviální) a  $\neq \infty$  vydělíme

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{p=1-\frac{1}{q}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pokud je integrál výše roven  $\infty$ , pak využijeme konvexity funkce  $t \mapsto t^p$ :

$$\infty = \int_X \left(\frac{f(x)+g(x)}{2}\right)^p d\mu \leq \int_X \left(\frac{f(x)^p}{2} + \frac{g(x)^p}{2}\right) d\mu \implies \int f^p = \infty \vee \int g^p = \infty.$$

└

□

#### **Definice 4.6** ( $L^p$ prostory)

Nechť  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  je prostor s mírou a  $1 \leq p < \infty$ . Definujeme prostor  $L^p$  jako

$$L^p(X, \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{L^p} < \infty\}, \text{ kde } \|f\|_{L^p} := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nechť  $g : X \rightarrow [0, \infty]$  je měřitelná. Esenciální supremum  $g$  definujeme jako

$$\operatorname{esssup} g := \inf \{ \alpha \mid \mu(\{g > \alpha\}) = 0 \}.$$

(Pro  $p = \infty$ ) tedy definujeme

$$L^\infty(X, \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{L^\infty} < \infty\}, \text{ kde } \|f\|_{L^\infty} := \operatorname{esssup}_x |f|.$$

#### Věta 4.10 (Trojúhelníková nerovnost v $L^p$ )

Nechť  $1 \leq p \leq \infty$ . Pak pro  $f, g \in L^p(X, \mu)$  platí

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

┌

*Důkaz*

Pro  $1 \leq p < \infty$  viz Minkowski:  $f(x) = a(x) - c(x)$ ,  $g(x) = c(x) - b(x)$ ,  $f(x) + g(x) = a(x) - b(x)$ :

$$\left( \int_X |a(x) - b(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_X |a(x) - c(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X |c(x) - b(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pro  $p = \infty$ : z definice  $\operatorname{esssup} \exists N_1, N_2, N_3, \mu(N_1) = \mu(N_2) = \mu(N_3) = 0$ , ( $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ )

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in X \setminus N_1} |f(x)|, \|g\|_{L^\infty} = \sup_{x \in X \setminus N_2} |g(x)|, \|f + g\|_{L^\infty} = \sup_{x \in X \setminus N_3} |f(x) + g(x)|.$$

$$\sup_{x \in X \setminus N} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| + \sup_{x \in X \setminus N} |g(x)|.$$

└

□

*Poznámka*

Pokud budeme uvažovat  $L_p$  jako jeho kvocient podle rovnosti skoro všude, pak je  $\|\cdot\|_{L^p}$  norma a  $L^p$  je metrický prostor s metrikou.

#### Věta 4.11 (Úplnost $L^p$ prostorů)

Nechť  $1 \leq p \leq \infty$ . Pak je prostor  $L^p(X, \mu)$  úplný.

┌ *Důkaz*

$1 \leq p < \infty$ . Mějme  $f_n$  cauchyovskou nerovnost v  $L^p$ . Tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : \left( \int_X |f_n(x) - f_m(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Najdeme  $f(x)$  jako bodovou limitu (skoro všude) vhodně vybrané podposloupnosti. Z cauchyovskosti  $\exists k_1 < k_2 < \dots < k_j < \dots$  tak, že

$$\forall j : \int_X |f_{k_j}(x) - f_{k_{j+1}}(x)|^p d\mu \leq \frac{1}{2^j}.$$

Položme  $g_n(x) = \sum_{j=1}^n |f_{k_j}(x) - f_{k_{j+1}}(x)|$  a  $g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{k_j}(x) - f_{k_{j+1}}(x)|$ . Pak z Minkowského nerovnosti  $\|g_n\|_{L^p} \leq \sum_{j=1}^n \|f_{k_j} - f_{k_{j+1}}\|_{L^p} \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2^j}\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p$ .

Z Fatouova lemmatu

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n^p d\mu(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n^p(x) d\mu \leq C_p.$$

Tedy řada  $\sum_{j=1}^{\infty} (f_{k_j}(x) - f_{k_{j+1}}(x))$  konverguje absolutně skoro všude  $\implies$  funkce  $f(x) = f_{k_1}(x) - \sum_{j=1}^{\infty} (f_{k_j} - f_{k_{j+1}})$  je definována skoro všude. Nyní

$$f_{k_n}(x) = f_{k_1}(x) - \sum_{j=1}^{n-1} (f_{k_j}(x) - f_{k_{j+1}}(x)) \rightarrow f(x) \text{ skoro všude.}$$

Zbývá  $f \in L^p$  a  $f_n \xrightarrow{L^p} f$ . Víme, že  $f_n$  je cauchyovská. Z Fatouova lemmatu

$$\begin{aligned} \int_X |f(x) - f_n(x)|^p d\mu &= \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_{k_n} - f_m|^p d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_{k_n} - f_m|^p d\mu \leq \varepsilon \implies \\ \implies f - f_m &\in L^p \implies (f - f_m) + f_m \in L^p \wedge \varrho(f, f_m) \leq \varepsilon^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Tedy  $f_n \rightarrow f$ . □

┌ *Důkaz* ( $p = \infty$ , nebude na zkoušce)

Nechť  $f_n \in L^\infty(X, \mu)$  je cauchyovská posloupnost. Pak existují  $N_n, \mu(N_n), \|f_n\|_{L^\infty} = \sup_{x \in X \setminus N_n} |f_n(x)| = \sup_{x \in X \setminus N} |f_n(x)|$ .

Dokazovali jsme, že  $C([0, 1])$  je úplný metrický prostor. Analogicky to lze dokázat zde. □

## 4.3 Husté a řídké množiny

### Definice 4.7 (Hustá množina)

Nechť  $(P, \varrho)$  je metrický prostor. Řekneme, že  $A \subset P$  je hustá, pokud  $\overline{A} = P$ .

*Nechť  $(P, \varrho)$  je metrický prostor a  $A \subset P$ . Potom je  $A$  hustá v  $P$  právě tehdy, když pro každou otevřenou neprázdnou  $G \subset P$  platí  $G \cap A \neq \emptyset$ .*

„ $\implies$ “: Sporem: Necht  $\exists G \subset P$  otevřená,  $G \cap A = \emptyset$ , tedy  $\exists B(x, r) \subset G$ . Pak  $\text{dist}(x, A) \geq r \implies x \notin \overline{A}$ .  $\nabla$ .

„ $\Leftarrow$ “: Sporem:  $A$  není hustá  $\implies P \setminus \bar{A} \neq \emptyset$ .  $G = P \setminus \bar{A}$  je otevřená. Podle předpokladu  $(P \setminus \bar{A}) \cap A \neq \emptyset$ .  $\square$

Nechť  $G_1, G_2 \subset P$  jsou otevřené a husté v  $(P, \rho)$ . Pak  $G_1 \cap G_2$  je otevřená a hustá v  $P$ .

Nechť  $G \subset P$ ,  $G \neq \emptyset$  je otevřená, potom  $G_1 \cap G \neq \emptyset$  otevřená,  $G_2 \cap G_1 \cap G \neq \emptyset$ , tedy  $G_1 \cap G_2$  je hustá. (Libovolné  $G$  tedy protne  $G_1 \cap G_2$ .)  $\square$

Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor. Řekneme, že  $A \subset P$  je řídká, jestliže je  $P \setminus \overline{A}$  hustá.

*Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor a nechť  $A, B \subset P$ . Potom*

1. Je-li  $A$  řídká v  $P$  a  $B \subset A$ , pak je také  $B$  řídká v  $P$ .
2. Jsou-li  $A, B$  řídké v  $P$ , pak  $A \cup B$  je řídké v  $P$ .
3.  $A$  je řídká v  $P \Leftrightarrow \overline{A}$  je řídká v  $P$ .

$$1. B \subset A \implies \overline{B} \subset \overline{A} \implies P \setminus \overline{A} \subset P \setminus \overline{B} \implies P = \overline{P \setminus \overline{A}} \subset \overline{P \setminus \overline{B}} \implies P = \overline{P \setminus \overline{B}}.$$

3. Víme  $\overline{\overline{A}} = \overline{P} \implies P \setminus \overline{A} = P \setminus \overline{\overline{A}} \implies \overline{\setminus A} = \overline{\setminus \overline{A}}$ .

2.  $\overline{A \cup B} = \{x | \underline{\varrho}(x, A \subset B) = 0\} = \{x | \underline{\varrho}(x, A) = 0\} \cup \{x | \underline{\varrho}(x, B) = 0\} = \overline{A} \cup \overline{B}$ . Tedy  $P \setminus \overline{A \cup B} = P \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) = (P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B})$ . Tato množina už je zřejmě hustá (průnik dvou otevřených hustých množin), tedy  $A \cup B$  je řídká.  $\square$

**Definice 4.9** (Množiny 1. kategorie a 2. kategorie)

Nechť  $(P, \varrho)$  je metrický prostor. Řekneme, že  $A \subset P$  je 1. kategorie, jestliže existují řídké množiny  $A_n$  tak, že  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Řekneme, že  $C \subset P$  je 2. kategorie, jestliže  $C$  není 1. kategorie.

**Věta 4.14** (Baire)

Nechť  $(P, \varrho)$  je úplný metrický prostor. Nechť  $G_{n,m} \in \mathbb{N}$  jsou otevřené a husté v  $(P, \varrho)$ . Pak  $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  je hustá v  $(P, \varrho)$ .

┌  
Důkaz  
└ Příště. □

*Důsledek*

Úplný metrický prostor není 1. kategorie sám v sobě.

┌  
Důkaz  
Sporem nechť  $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $A_n$  řídké. Pak  $P \setminus \overline{A_n}$  jsou husté a otevřené  $\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} P \setminus \overline{A_n} \neq \emptyset$ . Ale  $\emptyset = P \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus A_n) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus \overline{A_n})$ .  $\nmid$ . □  
└

*Důkaz* (Bairova věta (o kategoriích))

Podle věty výše stačí ukázat, že  $\forall G \subset P$  otevřenou  $G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$ . Máme  $G$  otevřenou a  $G_1$  je hustá tedy  $\exists B(x_1, 2r_1) \subset G_1 \cap G$ ,  $r_1 < 1$ . Tedy  $\overline{B(x_1, r_1)} \subset G_1 \cap G$ .

$G_2$  je hustá,  $B(x_1, r_1)$  otevřená, tedy  $\exists B(x_2, 2r_2) \subset G_2 \cap B(x_1, r_1) \subset G_2 \cap G_1 \cap G$ .

Dále indukcí.  $(P, \varrho)$  je úplný,  $\overline{B(x_k, r_k)}$  jsou uzavřené,  $\text{diam}_{k \rightarrow \infty} \overline{B(x_k, r_k)} = 0$ . Podle věty ještě výše  $\exists a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B(x_k, r_k)} \subset \bigcap G_k \cap G \neq \emptyset$ . Tedy  $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$  je hustá. □

**Věta 4.15** (O nediferencovatelné funkce)

Existuje spojitá funkce  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , která nemá derivaci v žádném bodě z  $(0, 1)$ .

┌  
Důkaz  
Pro  $n \in \mathbb{N}$  definujeme

$$A_n := \{f \in C([0, 1]) \mid \exists t \in [0, 1], \forall s \in [0, 1] : |f(t) - f(s)| \leq n \cdot |t - s|\}.$$

Plán: Dokážeme, že  $A_n$  je uzavřená. Dále, že  $f$  má derivaci v nějakém bodě  $t$ , pak  $\exists n : f \in A_n$ . Potom dokážeme  $A_n$  řídká. Potom již  $\text{Dif} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , tedy  $\text{Dif}$  jsou 1. kategorie  $\implies$  (z důsledku Baira)  $\exists f \in C([0, 1]) \setminus \text{Dif}$ . □  
└

┌

*Důkaz* (1. krok –  $A_n$  uzavřená)

Podle věty ze dříve stačí ukázat  $f_k \in A_n, f_k \rightarrow f \implies f \in A_n$ .

$$f_k \in A_n \implies \exists t_k \in [0, 1] \forall s \in [0, 1] : |f_k(t_k) - f_k(s)| \leq n|t_k - s|.$$

Podle Weistrassovy věty  $\exists$  podposloupnost  $t_{k_j} \rightarrow t$ , označme ji  $t_k$ .

Nyní  $\forall s \in [0, 1]$ :

$$|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f_k(t)| + |f_k(t) - f_k(t_k)| + |f_k(t_k) - f_k(s)| + |f_k(s) - f(s)| \leq$$

To odhadneme podle nerovnosti výše (jednou s  $s = s$  a jednou s  $s = t$ ):

$$\leq |f(t) - f_k(t)| + n \cdot |t_k - t| + n \cdot |t_k - t| + |f_k(s) - f(s)|$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(t) - f(s)| \leq 0 + n \cdot 0 + n \cdot |t - s| + 0.$$

Tedy  $f \in A_n$ . □

└

┌

*Důkaz* (2. krok – derivovatelné jsou v  $A_n$ )

Mějme  $f \in C([0, 1])$ ,  $\exists f'(t) = a$ . Z definice derivace pro

$$\varepsilon = 1 \exists \delta > 0 \forall s \in (t - \delta, t + \delta) : \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - a \right| < 1$$

$$\begin{aligned} \implies \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \right| &\leq \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - a \right| + |a| \leq 1 + |a| \implies \\ &\implies |f(t) - f(s)| \leq (1 + |a|) \cdot |t - s|. \end{aligned}$$

Dále  $\forall s \in [0, 1] \setminus (t - \delta, t + \delta)$ :

$$|f(t) - f(s)| \leq 2 \sup_{[0,1]} f \leq \frac{2 \sup f}{\delta} |t - p|.$$

Zvolme  $n > \max \left\{ |a| + 1, \frac{2 \sup f}{\delta} \right\}$ , pak  $f \in A_n$ . □

└

┌

*Důkaz* (3. krok –  $A_n$  řídká)

Chceme  $P \setminus \overline{A_n} = P \setminus A_n$  je hustá. Podle věty výše tedy stačí ukázat, že

$$\forall g \in C([0, 1]) \quad \forall r \in 0(P \setminus A_n) \cap B(g, r) \neq \emptyset.$$

$g$  je spojitá  $\implies$  stejnoměrně spojitá na  $[0, 1]$ . Tedy k zadanému  $r$

$$\exists \delta > 0 \forall x, y \in [0, 1] : |x - y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \frac{r}{10}.$$

Tím jsme omezili „kmitání“  $g$ , aby nám nevyrušilo následné přičtení kmitající funkce: Definujme funkci  $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  (zubatě kmitající funkce) tak, aby  $p' = \pm c$ , kde  $c = \max \left\{ 3n, \frac{r}{2\delta} \right\}$ . Definujme  $f(x) = g(x) + p(x)$ . Zřejmě  $f \in C([0, 1])$  a  $f \in B(g, r)$ .

Tvrdíme  $f \notin A_n$ : Pro spor necht

$$\exists t \in [0, 1] \quad \forall s \in [0, 1] : |f(x) - f(t)| \leq n \cdot |t - s|.$$

K tomuto  $t$  nalezneme  $s$  „na stejném zubu“, aby  $|p(s) - p(t)| = \frac{r}{2}$ ,  $\left| \frac{p(s) - p(t)}{s - t} \right| = c$  a  $|s - t| \leq \delta$ .

$$\text{Nyní } \frac{r}{2} = |p(s) - p(t)| = c \cdot |t - s| \geq 3n|t - s|.$$

$$|f(t) - f(s)| \geq |p(t) - p(s)| - |g(t) - g(s)| \geq \frac{r}{2} - \frac{r}{10} = \frac{2}{5}r \geq \frac{2}{5}6n|t - s| > n \cdot |t - s|.$$

└

□

## 5 Hilbertovy prostory

*Poznámka*

Většina vět této sekce i s důkazy se dá najít v knize W. Rudim: Analýza v reálném a komplexním oboru.

### 5.1 Základní definice

#### Definice 5.1

Nechť  $H$  je reálný vektorový prostor. Řekneme, že  $H$  je prostor se skalárním součinem, jestliže existuje zobrazení  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^2 \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in H,$
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in H,$
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall x, y \in H \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$



- $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in H,$
- $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Definujeme  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Řekneme, že prvek  $x \in H$  je ortogonální k  $y \in H$ , značeno  $x \perp y$ , pokud  $\langle x, y \rangle = 0$ .

### Věta 5.1 (Schwarzova nerovnost)

Pro každé  $x, y \in H$  platí  $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$ .

┌

*Důkaz*

$\forall t \in \mathbb{R}$  platí  $h(t) = \langle x - ty, x - ty \rangle \geq 0$ .

$$\begin{aligned} h(t) &= \langle x, x - ty \rangle - \langle ty, x - ty \rangle = \langle x, x \rangle - t \langle x, y \rangle - t \langle y, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle = \\ &= \|x\|^2 - 2t \langle x, y \rangle + t^2 \|y\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Toto je nezáporná kvadratická funkce s determinantom  $4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0$ , tedy  $\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \geq \langle x, y \rangle^2$ . □

### Věta 5.2 (Trojúhelníková nerovnost)

Pro každé  $x, y \in H$  platí  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . Speciálně  $(H, \|\cdot\|)$  tvoří metrický prostor.

┌

*Důkaz*

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \leq \\ &\leq \|x\|^2 + \|x\| \cdot \|y\| + \|y\| \cdot \|x\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

└

□

### Definice 5.2

Nechť  $H$  je prostor se skalárním součinem. Řekneme, že  $H$  je Hilbertův prostor, pokud je metrický prostor  $(H, \|\cdot\|)$  úplný.

### Věta 5.3 (Spojitost skalárního součinu)

Nechť  $H$  je Hilbertův prostor, potom jsou zobrazení  $x \mapsto \langle x, y \rangle$  a  $x \mapsto \|x\|$  spojité na  $H$ .

┌

*Důkaz*

$$|\langle x_1, y \rangle - \langle x_2, y \rangle| = |\langle x_1 - x_2, y \rangle| \leq \|x_1 - x_2\| \cdot \|y\| \implies \text{spojitost.}$$

Druhá část: Z trojúhelníkové nerovnosti plyne  $\|x_1\| - \|x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$  a  $\|x_2\| - \|x_1\| \leq \|x_2 - x_1\| \implies \text{spojitost } \|\cdot\|$ . □

└

### Definice 5.3

Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $E \subset H$ . Řekneme, že  $E$  je konvexní, jestliže  $\forall x, y \in E \forall t \in [0, 1]$  platí  $t \cdot x + (1 - t) \cdot y \in E$ .

### Věta 5.4 (O existenci prvku s nejmenší normou)

Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $E \subset H$  je konvexní, neprázdná a uzavřená. Potom existuje právě jeden prvek  $E$  s nejmenší normou.

┌

*Důkaz*

Platí tzv. rovnoběžníkové pravidlo (dokážeme rozepsáním přes skalární součin, platí pouze pro normy ze skalárního součinu):

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

Označme  $\delta = \inf_{y \in E} \|y\|$ . Jednoznačnost nejbližšího prvku: Necht  $y_1, y_2 \in E$ ,  $\|y_1\| = \|y_2\| = \delta$ .

$$\|y_1 - y_2\|^2 = 2 \cdot \|y_1\|^2 + 2 \cdot \|y_2\|^2 - 4 \cdot \underbrace{\left\| \frac{y_1 + y_2}{2} \right\|^2}_{\in E} \leq 2 \cdot \|y_1\|^2 + 2 \cdot \|y_2\|^2 - 4\delta^2 = 0 \implies y_1 = y_2.$$

Existence: Mějme  $y_n \in E$ , že  $\|y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta$ .  $\|y_n - y_m\|^2 = 2 \cdot \|y_n\|^2 + 2 \cdot \|y_m\|^2 - 4 \cdot \left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 \leq 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4\delta^2 \implies y_n$  je cauchyovská posloupnost.  $H$  je úplný, takže  $\exists y \in H : y_n \rightarrow y$ .  $E$  je uzavřená, tedy  $y \in E$ . □

### Definice 5.4

Nechť  $M \subset H$  je lineární podprostor Hilbertova prostoru  $H$ . Definujeme ortogonální podprostor  $M^\perp = \{y \in H \mid \langle x, y \rangle = 0 \forall x \in M\}$ .

### Věta 5.5 (O projekci na podprostor)

Nechť  $M$  je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru  $H$ .

1. Každý prvek  $z \in H$  má jednoznačný rozklad  $x = P(x) + Q(x)$  tak, že  $P(x) \in M$  a  $Q(x) \in M^\perp$ .
2.  $P(x)$  je bod  $z \in M$  nejbližší  $x$ ,  $Q(x)$  je bod  $z \in M^\perp$  nejbližší  $x$ .
3. Zobrazení  $P : H \rightarrow M$  a  $Q : H \rightarrow M^\perp$  jsou lineární.
4.  $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$ .

┌  
Důkaz

1. Jednoznačnost: Necht  $x = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ ,  $x_1, x_2 \in M$  a  $y_1, y_2 \in M^\perp$

$$\implies M \ni x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \in M^\perp \implies 0 = x_1 - x_2 = y_2 - y_1.$$

Existence:  $x + M$  je uzavřený podprostor  $\implies$  podle předchozí věty  $\exists Q(x) \in x + M$  s nejmenší normou. Položme  $P(x) = x - Q(x)$ , tj.  $P(x) + Q(x) = x$ .

$$P(x) \in M : Q(x) \in x + M \implies Q(x) - x \in M \implies P(x) \in M.$$

$Q(x) \in M^\perp$ : Neboli  $\forall y \in M: \langle y, Q(x) \rangle = 0$ . BÚNO  $y \in M$  a  $\|y\| = 1$ .  $Q(x)$  je nejbližší v  $x + M \implies$

$$\begin{aligned} \|Q(x)\|^2 &\leq \|Q(x) - \alpha y\|^2 = \langle Q(x) - \alpha y, Q(x) - \alpha y \rangle = \|Q(x)\|^2 - 2\alpha \langle Q(x), y \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle \\ &\implies 0 \leq -2\alpha \langle Q(x), y \rangle + \alpha^2. \end{aligned}$$

Pro  $\alpha = \langle Q(x), y \rangle$  je  $0 \leq -\langle Q(x), y \rangle^2$ , tedy  $\langle Q(x), y \rangle = 0$ .

2. Necht  $y \in M$  je libovolné. Pak

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|Q(x) + P(x) - y\|^2 = \langle Q(x) + P(x) - y, Q(x) + P(x) - y \rangle = \\ &= \|Q(x)\|^2 + \|P(x) - y\|^2, \end{aligned}$$

takže je to nejmenší právě tehdy, když  $y = P(x)$ . Stejně se ověří i  $y = Q(x)$  pro libovolné  $y \in M^\perp$ .

4.  $\|x\|^2 =$  skalární součiny, jeden je nulový  $= \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$ .

3. Chceme  $P(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot P(x) + \beta \cdot P(y)$ .  $x = P(x) + Q(x)$ ,  $y = P(y) + Q(y)$ .  
 $\alpha x + \beta y = P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y)$ . Odečteme  $\alpha$  a  $\beta$  násobek rovnic od třetí, tím dostaneme

$$M^\perp \ni \alpha Q(x) + \beta Q(y) - Q(\alpha x + \beta y) = P(\alpha x + \beta y) - \alpha P(x) - \beta P(y) \in M.$$

A protože  $M \cap M^\perp = \{\emptyset\}$ , tak se to rovná 0, tedy

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y), Q(\alpha x + \beta y) = \alpha Q(x) + \beta Q(y).$$

└

□

Důsledek

Necht  $M$  je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru  $H$  a  $M \neq H$ . Pak existuje  $y \in M^\perp$ ,  $y \neq 0$ .

### Věta 5.6 (O reprezentaci lineárního funkcionálu)

Necht  $H$  je Hilbertův prostor a  $L : H \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitý lineární zobrazení. Pak existuje právě

jedno  $y \in H$  tak, že  $L(x) = \langle x, y \rangle$ .

┌

*Důkaz*

Jednoznačnost: Necht  $L(x) = \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$ . Pak  $\forall x : \langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0 \implies \|y_1 - y_2\| = 0$ .

Existence: Pro  $L = 0$  zvolme  $y = 0$ . Jinak mějme  $M = \{x \in H \mid L(x) = 0\}$ . Toto je lineární podprostor a je uzavřený ( $M = L^{-1}(\{0\})$ ). Podle předchozího důsledku  $\exists a \in M^\perp$ ,  $a \neq 0$ . BÚNO  $\|a\| = 1$ . Položme  $z = xL(a) - L(x)a$ , pak  $L(z) = L(x) \cdot L(a) - L(x) \cdot L(a) = 0 \implies z \in M$ . Nyní  $0 = \langle a, z \rangle = \langle a, xL(a) - L(x)a \rangle = \langle a, x \rangle L(a) - L(x) \langle a, a \rangle \implies L(x) = \langle a, x \rangle L(a) = \langle x, aL(a) \rangle$ . □

└

## 5.2 Rozklad do Schauderovy báze

**Definice 5.5** (Ortogonalní a ortonormální množina, Fourierovy koeficienty)

Necht  $H$  je Hilbertův prostor a  $A$  je indexová množina. Množina prvků  $u_\alpha \in H$ , kde  $\alpha \in A$ , se nazývá *ortogonalní*, pokud je  $\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = 0 \ \forall \alpha, \beta \in A$  různé.

Ortogonalní množina se nazývá *ortonormální*, pokud navíc  $\|u_\alpha\| = 1, \forall \alpha \in A$ .

Jestliže  $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\}$  je ortonormální množina, pak pro každé  $x \in H$  definujeme Fourierovy  $x$  vzhledem k  $u_\alpha$  jako

$$\hat{x}(a) = \langle x, u_\alpha \rangle.$$

**Věta 5.7** (O konečné ortonormální množině)

Necht  $H$  je Hilbertův prostor,  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$  je ortonormální množina a  $F \subset A$  je konečná množina. Označme  $M_F = \text{span} \{u_\alpha \mid \alpha \in F\}$ .

1. Necht  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$  je 0 mimo  $F$ . Pro vektor  $y = \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) \cdot u_\alpha$  platí  $\hat{y}(\alpha) = \varphi(\alpha)$  a  $\|y\|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\varphi(\alpha)|^2$ .
2. Je-li  $x \in H$  a  $s_F(x) = \sum_{\alpha \in F} \hat{x}(\alpha) \cdot u_\alpha$ , pak  $s_F(x) = P(x)$  je projekce na  $M$ . Navíc platí  $\sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$  (Besselova nerovnost).

┌

*Důkaz*

1.  $\langle \hat{\alpha} \rangle = \langle y, u_\alpha \rangle = \left\langle \sum_{\beta \in F} \varphi(\beta) u_\beta, u_\alpha \right\rangle = (\text{jelikož suma je konečná})$

$$= \sum_{\beta \in F} \varphi(\beta) \cdot \langle u_\beta, u_\alpha \rangle = \varphi(\alpha).$$

$$\|y\|^2 = \left\langle \sum_{\beta \in F} \varphi(\beta) u_\beta, \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) u_\alpha \right\rangle = \sum_{\alpha, \beta \in F} \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta) \cdot \langle u_\alpha, u_\beta \rangle = \sum_{\alpha \in F} (\varphi(\alpha))^2.$$

2.  $\langle x - s_F(x), u_\alpha \rangle = \langle x, u_\alpha \rangle - \left\langle \sum_{\beta \in F} \hat{x}(\beta) \cdot u_\beta, u_\alpha \right\rangle = \langle x, u_\alpha \rangle - \hat{x}(\alpha) = 0$ . Tedy  $x - s_F(x) \in M_F^\perp$ .

Nechť  $y \in M_F$ :  $\|x - y\|^2 = \langle x - s_F + s_F - y, x - s_F + s_F - y \rangle = \langle x - s_F, x - s_F \rangle + 2 \cdot \langle x - s_F, s_F - y \rangle + \langle s_F - y, s_F - y \rangle = \|x - s_F\|^2 + \|s_F - y\|^2 \geq \|x - s_F\|^2$ . Tedy  $s_F(x)$  je nejbližší k  $x$  v  $M_F$ , tedy projekce.

Pro  $y = 0$  máme  $\|x\|^2 \geq \|x - s_F\|^2 + \|s_F\|^2 \geq \|s_F\|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2$ . □

## Definice 5.6 (Izometrie)

Nechť  $(X, \varrho)$  a  $(Y, \tau)$  jsou MP. Pak  $f : X \rightarrow Y$  je izometrie, když  $\forall x_1, x_2 \in X : \varrho(x_1, x_2) = \tau(f(x_1), f(x_2))$

## Lemma 5.8

Nechť  $X, Y$  jsou metrické prostory,  $X$  je úplný a  $f : X \rightarrow Y$  je spojitý. Nechť  $X_0$  je hustá podmnožina  $X$  a nechť  $f(X_0)$  je hustá podmnožina  $Y$ . Nechť  $f$  je izometrie na  $X_0$ , pak  $f$  je izometrie  $X$  na  $Y$ .

*Důkaz*

Izometrie: Nechť  $x, a \in X$ ,  $X_0$  hustá  $\implies \exists x_n \in X_0 \rightarrow x, a_n \in X_0 \rightarrow a$ . Víme, že  $f$  je izometrie na  $X_0$ :  $\varrho(x_n, a_n) = \tau(f(x_n), f(a_n))$ ,  $\varrho(x_n, a_n) \rightarrow \varrho(x, a)$ ,  $\tau(f(x_n), f(a_n)) \rightarrow \tau(f(x), f(a))$ .

Na: Nechť  $y \in Y$ ,  $f(X_0)$  je hustá v  $Y \implies \exists x_n \in X, f(x_n) \rightarrow y \implies f(x_n)$  je Cauchyovská v  $Y$ , ale  $f$  je izometrie, tedy i  $x_n$  je Cauchyovská a  $X$  je úplný, tedy  $\exists x \in X : x_n \rightarrow x$ . Tudíž nutně  $f(x_n) \rightarrow f(x) = y \leftarrow f(x_n)$ , jelikož  $f$  je spojitý. □

## Věta 5.9 (Riesz-Fischerova věta)

Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $\{u_i\}_{i=1}^\infty$  je ortonormální množina. Nechť  $P$  je prostor všech

konečných lineárních kombinací vektorů  $u_i$ . Potom pro každé  $x \in H$  platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}(i)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Zobrazení  $x \rightarrow \hat{x}$  je spojitě lineární zobrazení  $H$  na  $l_2$ , jehož restrikce na  $\overline{P}$  je izometrie  $\overline{P}$  na  $l^2$ .

┌

*Důkaz*

Z předchozí věty víme, že  $\sum_{i=1}^n |\hat{x}(i)|^2 \leq \|x\|^2 \implies$

$$\implies \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}(i)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Tedy  $x \mapsto \hat{x}$  je z  $H$  do  $l^2$ . Toto zobrazení je lineární

$$x + y(i) = \langle x + y, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle + \langle y, u_i \rangle = \hat{x}(i) + \hat{y}(i).$$

Spojitosť:  $\forall x, y \in H$

$$\|x - y\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}(i) - \hat{y}(i)|^2$$

a z toho již plyne spojitost  $x \mapsto \hat{x}$ .

Podle předchozí věty je  $x \mapsto \hat{x}$  izometrie na  $P$ .

Použijeme předchozí lemma na  $X = \overline{P}$ ,  $X_0 = P$ ,  $Y = l^2$ . ( $X$  je uzavřená podmnožina úplného, tedy úplný,  $X_0$  je husté v  $X$  z definice uzávěru a  $x \mapsto \hat{x}$  je spojitě).  $f(X_0) = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 \mid \exists k a_n = 0 \forall n > k\}$  je podle příkladu na přednášce husté v  $l^2$ .  $\square$

└

*Důsledek*

$L^2(0, 1)$  je izometricky izomorfní  $l^2$ .

## Definice 5.7

Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $h_i \in H$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Řekneme, že  $\sum_{i=1}^{\infty} h_i$  konverguje k  $s \in H$ , pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s - \sum_{i=1}^n h_i\|_H = 0$ .

## Věta 5.10 (O maximální ortonormální množině)

Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  je ortonormální množina. NPJE

1.  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  je maximální ortonormální množina.
2. Množina  $P$  všech konečných lineárních kombinací prvků z  $\{u_i\}$  je hustá v  $H$ .
3.  $\forall x \in H: \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}(i)|^2$ .

$$4. \forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i \hat{y}_i.$$

$$5. x = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i u_i.$$

┌

*Důkaz*

„1.  $\implies$  2.“: Sporem: Necht  $\overline{P} \neq H$ .  $\overline{P}$  je uzavřený lineární podprostor  $H$ . Podle důsledku jedné z předchozích vět  $\exists u \in (\overline{P})^{\perp}$ ,  $u \neq 0$ . Pak ale  $\langle u, u_i \rangle = 0$ ,  $\forall i$ .  $\nabla$ .

„2.  $\implies$  3.“: Podle předchozí věty  $x \mapsto \hat{x}$  je izometrie na  $\overline{P} = H$  na  $l^2$ . Tedy  $\|x\|^2 = \|\hat{x}\|_{l^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2$ .

„3.  $\implies$  4.“:

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle - (\langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle) = 4 \langle x, y \rangle.$$

Analogicky

$$\|\hat{x} + \hat{y}\|^2 - \|\hat{x} - \hat{y}\|^2 = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i \hat{y}_i.$$

Podle 3. pak dokazovaná rovnost platí.

„4.  $\implies$  3.“: Prostým dosazením  $x = y$ .

„5.  $\implies$  1.“: Pro spor ať máme  $x \perp u_i$ ,  $\forall u_i$ . Pak  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i u_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

„3.  $\implies$  5.“: Chceme  $y^n = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i \cdot u_i \rightarrow x \Leftrightarrow \|y^n - x\|_H \rightarrow 0$ .

$$x - y^n, i \leq n : \langle x - y^n, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle - \sum_{j=1}^n \hat{x}_j \langle u_j, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle - \hat{x}_i = 0.$$

$$i > n : \langle x - y^n, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle - \sum_{j=1}^n \hat{x}_j \langle u_j, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle.$$

Použijeme 3. pro  $x - y^n$ :

$$\|x - y^n\|_H^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2 \rightarrow 0.$$

└

□

*Poznámka*

Obdoba této věty platí i pro Hilbertův prostor s „nespočetnou“ bází.

## 5.3 Trigonometrické řady

**Definice 5.8** (Fourierovy koeficienty funkce, Fourierova řada)

Nechť  $f \in L^2(0, 2R)$ . Potom čísla

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k \in \mathbb{N}_0 \text{ a}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \in \mathbb{N}$$

nazýváme Fourierovy koeficienty funkce  $f$ . Trigonometrickou řadu

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx)$$

nazýváme Fourierovou řadou funkce  $f$ .

**Věta 5.11** (O maximalitě trigonometrických funkcí)

*Systém trigonometrických funkcí*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

tvorí maximální ortonormální množinu v  $L^2(0, 2\pi)$ . Tedy existuje jediné  $f \in L^2(0, 2\pi)$  takové, že

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

je identicky nulová funkce.

┌

Důkaz

└

Bez důkazu.

□

*Důsledek*

Pro každé  $f \in L^2(0, 2\pi)$  a  $a_k, b_k$  Fourierovy koeficienty  $f$ . Pak platí

$$f(x) = F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ve smyslu rovnosti rovnosti  $L^2$  funkcí. Tedy v příslušném metrickém prostoru platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$



Navíc platí Parsevalova rovnost

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Speciálně tedy dostáváme, že trigonometrické polynomy jsou husté v  $L^2$ , a tedy spojitě funkce  $C([0, 2\pi])$  jsou husté v  $L^2(0, 2\pi)$ .

## 5.4 Separabilní metrické prostory

### Definice 5.9 (Separabilní prostor)

Metrický prostor  $(P, \varrho)$  se nazývá separabilní, jestliže existuje spočetná množina  $A \subset P$ , která je hustá v  $P$ .

### Věta 5.12 (Nutná podmínka separability)

Nechť  $(P, \varrho)$  je metrický prostor. Nechť existují nespočetná množina  $A$  a  $\delta > 0$  taková, že pro každá  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$ , platí  $\varrho(x, y) \geq \delta$ . Potom  $P$  není separabilní.

┌

*Důkaz*

Sporem: Nechť  $\Lambda$  a  $\delta$  jsou jako ve znění a  $M \subset P$  je spočetná množina taková, že  $\overline{M} = P$ . Pro  $a \in A$  uvažujeme  $B(a, \frac{\delta}{2})$ . Tyto koule jsou po dvou disjunktní. Z  $\overline{M} = P$  víme, že existuje, že existuje  $m_a \in M \cap B(a, \frac{\delta}{2})$ . Jelikož jsou koule disjunktní, tak zobrazení  $a \mapsto m_a$  je prosté. Je to ale zobrazení nespočetné množiny do spočetné.  $\nexists$ . □

### Definice 5.10

Nechť  $(P, \varrho)$  je metrický prostor a  $\mathcal{B}$  je nějaký systém otevřených podmnožin  $P$ . Řekneme, že  $\mathcal{B}$  je báze otevřených množin  $(P, \varrho)$ , jestliže pro každou otevřenou množinu  $G \subset P$  existuje  $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$  taková, že  $\bigcup \mathcal{B}^* = G$ .

### Věta 5.13 (Charakterizace separabilních prostorů)

Metrický prostor je separabilní právě tehdy, když v něm existuje spočetná báze otevřených množin.

┌ *Důkaz*

$\implies$  : Necht  $A$  je spočetná a  $\overline{A} = P$ . Položme  $\mathcal{B} = \{B(a, r) | a \in A \wedge r \in \mathbb{Q} \wedge r > 0\}$ .  $\mathcal{B}$  je spočetná. Dokážeme, že  $\mathcal{B}$  je báze. Necht  $G \subset P$  je otevřená. Položme  $\mathcal{B}^* = \{B(a, r) \in \mathcal{B} | B(a, r) \subset G\}$ . Dokážeme, že  $\bigcup \mathcal{B}^* = G$ :

Zřejmě  $\bigcup \mathcal{B} \subset G$ . Zbývá ověřit druhou inkluzi. Necht  $z \in G$ . Chceme ukázat, že  $z \in \mathcal{B}^*$ .  $G$  je otevřená, a tedy existuje  $B(z, r) \subset G$ .  $A$  je hustá, tudíž existuje  $a \in A \cap B(z, \frac{r}{4})$ . Dále existuje  $r^* \in \mathbb{Q} \cap (\frac{r}{2}, \frac{3}{4}r)$ . Pak  $B(a, r^*) \in \mathcal{B}$ . Navíc  $r^* > \frac{r}{2}$ , takže  $z \in B(a, r^*)$ . Dále  $\varrho(a, z) < \frac{r}{4}$  a  $r^* < \frac{3}{4}r$ , a tedy  $B(a, r^*) \subset B(z, r)$ , z čehož dostáváme, že  $B(a, r^*) \subset G$ . Pak také  $B(a, r^*) \in \mathcal{B}^*$ , tudíž  $\{z\} \in \bigcup \mathcal{B}^*$ . Nakonec máme, že  $G = \bigcup \mathcal{B}^*$ .

$\Leftarrow$ : Necht  $\mathcal{B}$  je spočetná báze otevřených množin, tedy  $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{S_i\}$ .  $A$  zvolíme tak, že z každé množiny vybereme libovolně jeden prvek. Pak  $A$  je spočetná. Chceme ukázat, že  $\overline{A} = P$ :

Necht  $G \subset P$  je otevřená. Dále existuje  $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$  tak, že  $G = \bigcup \mathcal{B}^*$ . Pak existuje  $S_i$  tak, že  $S_i \subset G$ , a tedy prvek vybraný z  $S_i$  je v  $G$ . Z toho máme, že  $G \cap A \neq \emptyset$ , tudíž  $A$  je hustá. □

### Věta 5.14 (Vztah totální omezenosti a separability)

*Necht je metrický prostor  $(P, \varrho)$  totálně omezený. Pak je separabilní.*

┌ *Důkaz*

Je-li  $(P, \varrho)$  totálně omezený, pak  $\forall \varepsilon > 0$  existuje konečná  $\varepsilon$ -sít. Speciálně  $\forall n \in \mathbb{N}$  existuje konečná  $\frac{1}{n}$ -sít tak, že  $P \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B(c_i^n, \frac{1}{n})$ . Pak  $A = \{c_i^n | n \in \mathbb{N} \wedge i \in [k_n]\}$ . Tato množina je spočetná. Dokážeme, že  $\overline{A} = P$ . Necht  $x \in P$ . Z definice  $\frac{1}{n}$ -sítě existuje  $x_n = c_i^n$  tak, že  $\varrho(x_n, x) < \frac{1}{n}$ . Pak jistě  $x_n \rightarrow x$ , což znamená, že  $A$  je hustá. □