Příklad (1.)
a) Show that for any Lipschitz domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ with $d \geqslant 2$ the embedding $W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ does not hold.

b) Show that if $u \in W^{1,d}(\Omega)$ then it has bounded mean oscillations, i.e., for any $q \in [1, \infty)$, there exists a constant C such that for all balls $B_R(x_0) \subset \Omega$, we have

$$\frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} \left| u(x) - \frac{1}{|B_R(x_0)|} \left(\int_{B_R(x_0)} u(y) dy \right) \right|^q dx \leqslant C(q, d) \|\nabla u\|_{L^d(\Omega)}^q.$$

Jinak zapsáno

$$\fint_{B_R(x_0)} \left| u - \fint_{B_R(x_0)} u \right|^q \leqslant C(q, d) \|\nabla u\|_d^q.$$

Řešení (a, špatně, muselo by se použít ln $\|x\|^\alpha$, někde jsem špatně derivoval...)
Mějme bod $\tilde{x} \in \Omega$. Z otevřenosti Ω víme, že nějaká (dostatečně malá) koule se středem $\tilde{x}$ je stále v Ω. Definujme $f = \frac{1}{|x-\tilde{x}|^\alpha}$ ($\alpha > 0$ zvolíme později). Tato funkce jistě není $L^\infty(\Omega)$, neboť hodnoty větší než libovolná konstanta nabývá na dostatečně malé kouli (množina nenulové míry) se středem $\tilde{x}$. To nám bude sporovat $W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Nyní potřebujeme k ověření $f \in W^{1,d}(\Omega)$ ukázat 3 věci: že $f \in L^d(\Omega)$, že $D_i f := \frac{\partial f}{\partial x_i}$ existuje a že $D_i f \in L^d(\Omega)$. Začneme existencí derivace: Pokud z Ω vyjmeme $\tilde{x}$, dostaneme otevřenou podmnožinu, na které je f (nekonečně) diferencovatelná s derivacemi

$$D_i f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = (-\alpha) \cdot \frac{1}{|x-\tilde{x}|^{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{|x-\tilde{x}|} \cdot (x_i - \tilde{x}_i) = (-\alpha) \cdot \frac{x_i - \tilde{x}_i}{|x-\tilde{x}|^{\alpha-2}}.$$

Pokud tedy $D_i f$ existuje (všude na Ω), musí být rovna tomuto (na hodnotě v $\tilde{x}$ nezáleží). To dokážeme z definice, a to tím, že vyřízneme z Ω kouli o středu $\tilde{x}$ (tím nám bude ze spojitosti platit per partes) a její poloměr pošleme k nule:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \int_{\Omega \setminus B_r(\tilde{x})} \frac{1}{|x-x|^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \overset{\text{per partes}}{=}$$

$$= \int_{\partial(\Omega \setminus B_r(\tilde{x}))} \varphi(x) \cdot \frac{1}{|x-\tilde{x}|^\alpha} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i dx - \int_{\Omega \setminus B_r(\tilde{x})} (-\alpha) \frac{x_i - \tilde{x}_i}{|x-\tilde{x}|^{\alpha-2}} \varphi(x) dx.$$

Z kompaktního supportu víme, že

$$\int_{\partial(\Omega \setminus B_r(\tilde{x}))} \varphi(x) \cdot \frac{1}{|x-\tilde{x}|^\alpha} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i dx = - \int_{\partial B_r(\tilde{x})} \varphi(x) \cdot \frac{1}{|x-\tilde{x}|^\alpha} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i dx.$$

$$\left| - \int_{\partial B_r(\tilde{x})} \varphi(x) \cdot \frac{1}{|x-\tilde{x}|^\alpha} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i dx \right| \leqslant \|\varphi\|_\infty \cdot \left| \int_{S_r(\tilde{x})} \frac{1}{r^\alpha} dx \right| = \|\varphi\|_\infty \cdot \frac{1}{r^\alpha} \cdot |S_r| = \|\varphi\|_\infty \cdot |S| \cdot r^{d-1-\alpha}.$$

My potřebujeme, aby tato hodnota šla k 0, pokud poloměr pošleme také do 0. Tím pádem zvolíme $\alpha < d-1$. Pak už (posláním $r \to 0$ v rovnici výše) dostaneme definici slabé derivace:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \int_\Omega \frac{1}{|x-x|^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \overset{\text{per partes}}{=} - \int_\Omega (-\alpha) \frac{x_i - \tilde{x}_i}{|x-\tilde{x}|^{\alpha-2}} \varphi(x) dx.$$

Teď dokážeme $f \in L^d$ a $D_i f \in L^d$:

$$\int_\Omega \left| \frac{1}{|x-\tilde{x}|^\alpha} \right|^d dx = \int_{\dots} \frac{1}{r^{\alpha d}} \cdot r^{d-1} \cdot \cos \dots \cdot \dots \cdot \sin \dots \leqslant \text{konst} \cdot \int_0^R r^{d-1-\alpha d} \overset{?}{<} \infty.$$

$$\int_\Omega \left| (-\alpha) \cdot \frac{x_i - \tilde{x}_i}{|x-\tilde{x}|^{\alpha-2}} \right|^d dx = \int_{\dots} \alpha^d \cdot \frac{r^d \cdot \sin \dots}{r^{\alpha d}} \cdot r^{d-1} \cdot \cos \dots \cdot \dots \leqslant \text{konst} \cdot \int_0^R r^{2d-\alpha d-1} \overset{?}{<} \infty.$$

(R, protože Lipschitzovská oblast je omezená.) A to zařídíme volbou $d-1-\alpha d > -1$ a $2d - \alpha d - 1 > -1$, tedy $\alpha < \frac{d}{d} = 1$ a $\alpha < \frac{2d}{d} = 2$. Tedy všechny podmínky na α splňuje např. $\alpha = 1/2$.

Řešení (b)
BÚNO $\Omega = B_R(x_0)$ (neboť zvětšením Ω zvětšíme pouze pravou stranu).

Máme-li $R, R_0 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ a funkci $u \in W^{1,d}(B_R(x_0))$, pak zřejmě

$$u_0(x) := u\left(R\frac{x}{R_0} + x_0\right) \in W^{1,d}(B_{R_0}(\mathbf{o}))$$

a z derivace složené funkce a věty o substituci:

$$\|\nabla u_0\|_d^d = \int_{B_{R_0}(\mathbf{o})} |\nabla_y u_0(y)|_{y=x}|^d \, dx = \int_{B_{R_0}(\mathbf{o})} \left|\nabla_y u\left(R\frac{y}{R_0} + x_0\right)|_{y=x}\right|^d dx =$$

$$= \int_{B_{R_0}(\mathbf{o})} \left|\nabla_z u(z)|_{z=R\frac{x}{R_0}+x} \cdot \frac{R}{R_0}\right|^d dx = \int_{B_{R_0}(\mathbf{o})} \left|\nabla_z u(z)|_{z=R\frac{x}{R_0}+x}\right|^d \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^d dx =$$

$$= \int_{B_R(x_0)} |\nabla_z u(z)|_{z=w}|^d \cdot 1 dw = \|\nabla u\|_d^d.$$

Z věty o substituci a poměrů objemů koulí

$$\fint_{B_{R_0}(\mathbf{o})} \left|u_0 - \fint_{B_{R_0}(\mathbf{o})} u_0\right|^q = \fint_{B_{R_0}(\mathbf{o})} \left|u_0 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^d \fint_{B_R(x_0)} u_0 \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^d\right|^q =$$

$$= \left(\frac{R_0}{R}\right)^d \fint_{B_R(x_0)} \left|u_0 - \fint_{B_R(x_0)} u\right| \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^d = \fint_{B_R(x_0)} \left|u - \fint_{B_R(x_0)} u\right|^q.$$

Zafixujme d a zvolme BÚNO $\Omega = B_R(\mathbf{o})$, kde R je poloměr koule o objemu 1, a $x_0 = \mathbf{o}$. (Tj. můžeme přestat škrtat integrály.)

Nechť $v = u - \int_{B_R(\mathbf{o})} u$. Potom zřejmě $\nabla u = \nabla v$, tedy nerovnost můžeme přepsat jako

$$\int_{B_R(\mathbf{o})} |v|^q = \|v\|_q^q \leqslant C(q,d)\|\nabla v\|_d^q.$$

Řešení (b, pokračování)

Pro spor předpokládejme $\exists v_n = u_n - \int u_n$ že $\forall n \in \mathbb{N} : \|v_n\|_q^q > n \cdot \|\nabla v_n\|_d^q$, tj. $\frac{1}{n^{d/q}} > \frac{\|\nabla v_n\|_d^d}{\|v_n\|_q^d}$. Zadefinujeme-li $w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{1,d}}$, pak s využitím faktu[a] $c \cdot \|v_n\|_{1,d} \geqslant \|v_n\|_q$ z linearity derivace dostáváme $\frac{1}{n^{d/q}} > \frac{1}{c^d} \cdot \|\nabla w_n\|_d^d$, tedy $\|\nabla w_n\|_d^d \to 0$.

Zároveň však $\|w_n\|_{1,d} = 1$, tedy w_n je omezená množina v $W^{1,p}$, a proto má w_n hromadný bod w v $L^{\tilde{q}}$ pro libovolné $1 \leqslant \tilde{q} < \infty$ z věty o (kompaktním) vnoření W. Použijme $\tilde{q} = 1$, pak z Lebesgueovy věty, protože w_n je omezená v L^1 (zase z kompaktnosti vnoření), plyne

$$\int w = \int \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \int w_n = \lim_{n\to\infty} \int \frac{u_n - \int u_n}{\|v_n\|_{1,d}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int u_n - \int u_n}{\|v_n\|_{1,d}} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

a zároveň $\nabla w = 0$ (neboť[b] $\nabla w_n \to \nabla w$ a $\|\nabla w_n\| \to 0$), tj. $w =$ konst, tudíž $w = 0$. Ale (protože norma je spojitá) $\|w\|_{1,d} = \lim_{n\to\infty} \|w_n\|_{1,d} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. ↯.

[a] Jelikož $W^{1,d}$ se kompaktně vnořuje do L^q, a obrazem $\{\|\cdot\|_{1,d} \leqslant 1\}$ tak musí být kompaktní, čili c-omezená množina. Zbytek plyne z linearity normy.

[b]
$$-\int D_i w\varphi = \int w D_i\varphi = \int \lim_{n\to\infty} w_n D_i\varphi = \lim_{n\to\infty} \int w_n D_i\varphi = \lim_{n\to\infty} -\int \varphi D_i w_n = -\int \varphi \lim_{n\to\infty} D_i w_n.$$