Příklad (1.7)
Uvažujme parabolu $[t, t^2]$, bod $F = [0, a]$ a přímku $p : y = -a$, $a \in \mathbb{R}$.

Určete a tak, aby měl každý bod paraboly stejnou vzdálenost od bodu F (ohniska) a přímky p (řídící přímky) a ukažte, že tečna k parabole půlí úhel příslušných průvodičů. Parametrizujte množinu bodů, které jsou obrazem ohniska v osové souměrnosti podle všech normálových přímek paraboly.

Řešení (Nalezení a)
Jelikož máme jen jeden parametr, stačí nám k jeho určení jen jedna „skoro lineární“ rovnice. Víme, že bod paraboly, kde $t = 1$, je $[1, 1]$. Jeho vzdálenost od přímky je zřejmě $1 + a$. Vzdálenost od ohniska je $\sqrt{1^2 + (a-1)^2}$. Tedy

$$1 + a = \sqrt{2 - 2a + a^2},$$

$$1 + 2a + a^2 = 2 - 2a + a^2,$$

$$a = \frac{1}{4},$$

což vyhovuje podmínkám, za kterých můžeme první rovnici umocnit na druhou ($a \geq -1$). Obecně

$$t^2 + \frac{1}{4} = \sqrt{t^2 + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^2}.$$

Důkaz (Tečna půlí úhel průvodičů)
Tečnu v bodě x_0 k funkci jedné proměnné (kteroužto tato parabola zřejmě je, kdyby však nebyla, tak stačí jen najít správnou rotaci) získáme derivací:

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = 2x_0x - x_0^2.$$

Jeden z jejích normálových vektor (normalizaci nepotřebujeme) je tedy $(-2x_0, 1)$. Tudíž pokud najdeme s a x tak, aby $\left[0, \frac{1}{4}\right] - s\,(-2x_0, 1) = [x, 2x_0x - x_0^2]$, tak jsme našli vektor projekce F na tečnu, tedy druhým odečtením $s\,(-2x_0, 1)$ dostaneme obraz F v osové souměrnosti podle t:

$$2x_0s = x, \qquad \frac{1}{4} - s = 2x_0x - x_0^2 = 2x_0 \cdot 2x_0s - x_0^2,$$

$$s = \frac{\frac{1}{4} + x_0^2}{1 + 4x_0^2} = \frac{1}{4}.$$

Obraz ohniska je tedy $\left[0, \frac{1}{4}\right] - 2s\,(-2x_0, 1) = \left[0, \frac{1}{4}\right] - \left(-x_0, \frac{1}{2}\right) = \left[x_0, \frac{1}{4}\right]$, což je zřejmě bod na p, který je svisle (= kolmě na p) pod $[x_0, x_0^2]$ (řešeným bodem na parabole), tedy spojnice $[x_0, x_0^2]$ a ohniska (průvodič) se zobrazí na „nejkratší spojnici“ $[x_0, x_0^2]$ a p (druhý průvodič). Tudíž osa (tečna paraboly) je osou úhlu mezi průvodiči. $\square$

Řešení (Parametrizace obrazů ohniska podle normály)
Normálová přímka je dána bodem křivky a příslušným normálovým vektorem:

$$n : [x_0, x_0^2] + (-2x_0, 1)\,.$$

Vektor kolmý na normálu (tj. na normálový vektor) je $(1, 2x_0)$, tedy pro zobrazení v osové souměrnosti hledáme s_1 a s_2 tak, aby $[x_0, x_0^2] + s_2\,(-2x_0, 1) = \left[0, \frac{1}{4}\right] + s_1(1, 2x_0)$. To jest:

$$x_0 - 2s_2x_0 = s_1, \qquad x_0^2 + s_2 = \frac{1}{4} + 2s_1x_0,$$

$$s_1 = x_0 - 2\left(\frac{1}{4} + 2s_1x_0 - x_0^2\right)x_0,$$

$$s_1 = \frac{-\frac{x_0}{2} + x_0 + 2x_0^3}{1 + 4x_0^2} = \frac{x_0}{2}.$$

Tedy hledaná množina bude parametrizována jako

$$\left[0, \frac{1}{4}\right] + 2s_1\,(1, 2x_0) = \left[0, \frac{1}{4}\right] + \frac{2x_0}{2}\,(1, 2x_0) = \left[x_0, \frac{1}{4} + 2x_0^2\right].$$