

Organizační úvod

Poznámka

1 Úvod

Definice 1.1 (Diferenciální rovnice)

Diferenciální rovnice je rovnice, která obsahuje derivaci.

Poznámka (Motivace)

Fyzika (např. pružina: $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$), ekonomie (např. rovnice majetku?: $k' = \alpha \cdot k - c(t)$), biologie (např. model dravec-kořist: $d' = \alpha \cdot d \cdot k - \beta \cdot d \wedge k' = \gamma \cdot k - \delta \cdot d \cdot k$).

Poznámka (Co nás zajímá na DR)

Přesné řešení (často neumíme spočítat), existence a jednoznačnost řešení, jaké vlastnosti má řešení.

Poznámka (Předpoklady)

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $(x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times I$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x' = f(x, t)$. $I \subset \mathbb{R}$.

Definice 1.2 (Obyčejná diferenciální rovnice, řešení)

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice $x' = f(x, t)$ z předchozí poznámky.

Funkce $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je řešení DR, jestliže

- $\forall t \in I : (x(t), t) \in \Omega$,
- $\forall t \in I$ existuje vlastní derivace $x'(t)$,
- $\forall t \in I$ platí $x'(t) = f(x(t), t)$.

┌
Poznámka

└ První dvě podmínky jsou jen existenční podmínky k rovnici ve třetím bodě.

Typicky má DR nekonečně mnoho řešení, přidáváme proto počáteční podmínku $(x_0, t_0) \in \Omega$, $t_0 \in I$.

Lemma 1.1

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá a $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitou a takovou, že graf x ($\{(x(t), t) | t \in I\}$) leží v Ω . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- x je řešení DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$;
- $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds \quad \forall t \in I$.

┌

Důkaz

„ \implies “: x a f je spojitá, tedy $x' = f(x(t), t)$ je spojitá, tj. $x \in C^1(I) \implies \int_{t_0}^t x'(s) ds = x(t) - x(t_0)$.

„ \impliedby “: jelikož f i s je spojitá, tak integral je diferencovatelný a $x(t)$ je spojitá, tedy

$$x'(t) = 0 + f(x(t), t) \wedge x(t_0) = t_0 + 0.$$

└

□

Věta 1.2 (Peanova věta o lokální existenci)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá a $(x_0, t_0) \in \Omega$. Potom $\exists \delta > 0$ a funkce $x : B(t_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ taková, která je řešením DR a splňuje počáteční podmínku. (Stačí spojitá f a kompaktní Ω .)

Tvrzení 1.3 (Pomocné tvrzení)

Pokud $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ a f je omezená na Ω , pak $\forall T$ existuje řešení DR x na $[t_0 - T, t_0 + T]$ splňující počáteční podmínku.

┌

Důkaz

Když x_λ je definována na $[t_0 - \lambda, t]$, pak pravá strana má smysl $\forall t \in [t_0, t_0 + \lambda]$ tím pádem pravá strana integrálního tvaru má smysl $\forall t \in [t_0, t_0 + \lambda]$, tím pádem definujeme x_λ na $[t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$.

Nyní definujme $M := \{x_n|_{[t_0, t_0+T]}\}_{n=1}^\infty$ a ověříme, že M splňuje podmínky Arzela-Ascoliho věty:

$$|x_\lambda(t)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^t |f(x_\lambda(s - \lambda))| ds \leq |x_0| + \|f\|_\infty \cdot |t - t_0| \leq |x_0| + \|f\|_\infty \cdot T,$$

$$|x_\lambda(t) - x_\lambda(\tau)| = \left| \int_\tau^t f(x_\lambda(s - \lambda), s) ds \right| \leq \|f\|_\infty \cdot |t - \tau|.$$

Podle AA věty tedy existuje podposloupnost M , která konverguje stejnoměrně. Limitu si označme x , podposloupnost x_{n_k} .

Chceme dokázat, že x je řešení DR: TODO!!!

$$\lambda_k := \frac{1?}{n_k}$$

└

□

┌

Důkaz

Pro $\overline{K_1} \subset K_2$, $\overline{K_2} \subset \Omega$, $(x_0, t_0) \in K$, K_1 a K_2 kompaktní definujeme

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} 1, & (x, t) \in K_1, \\ 0, & (x, t) \in \Omega \setminus \overline{K_2}, \end{cases}$$

kterou spojitě dodefinujeme, a

$$\tilde{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t) \cdot \varphi(x, t), & (x, t) \in \Omega \\ 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dle prvního kroku (TODO?) $\exists \tilde{x}(t)$, $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\tilde{x}'(t) = \tilde{f}(\tilde{x}(t), t)$, $\tilde{x}(t_0) = x_0$.
 \tilde{x} je spojitá funkce $\implies \exists \delta > 0$ tak, že graf funkce $\tilde{x}|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$ leží v K_1 . Na K je $\tilde{f} = f$,
tedy $\tilde{x}'(t) = f(\tilde{x}(t), t)$, $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. □

└

1.1 Jednoznačnost řešení

Definice 1.3 (Lokální jednoznačnost, globální jednoznačnost)

Řekneme, že DR má vlastnost

- lokální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení $(x, I), (y, J)$ a $t_0 \in I \cap J, x(t_0) = y(t_0)$ pak $\exists \delta > 0 \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), x(t) = y(t)$,
- globální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení $(x, I), (y, J)$ a $t_0 \in I \cap J, x(t_0) = y(t_0)$, pak $\forall t \in I \cap J : x(t) = y(t)$.

Tvrzení 1.4

Globální jednoznačnost je ekvivalentní lokální jednoznačnosti.

┌

Důkaz

„ \implies “ je triviální. „ \impliedby “: Pro spor předpokládejme $\exists t_1 \in I \cap J, x(t_1) \neq y(t_1)$. BÚNO $t_1 > t_0$. Definujme

$$M := \{T \in I \cap J, t > t_0, x(t) \neq y(t)\} \neq \emptyset, \quad t_2 = \inf M.$$

Víme $x(t_2) = \lim_{t \rightarrow t_2^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_2^-} y(t) = y(t_2)$. Podíváme se lokální jednoznačností na bod t_2 . Tam existuje $\sigma > 0$ tak, že $\forall t \in (t_2 - \sigma, t_2 + \sigma) : x(t) = y(t)$. \nmid □

└

Definice 1.4 (Lokálně lipschitzovská)

Řekneme, že funkce $f = (x, t)$ je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x , jestliže

$$\forall (x_0, t_0) \in \Omega \exists \delta > 0 \exists L > 0 \forall t \in \mathcal{U}_\delta(t_0) \forall x, y \in \mathcal{U}_\delta(x_0) : |f(x, t) - f(y, t)| \leq L \cdot |x - y|$$

Věta 1.5

Buď f lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x , pak DR má v Ω vlastnost lokální jednoznačnosti.

┌

Důkaz

At $x(t), y(t)$ jsou řešení. $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds$. $x(t) - y(t) = \int_{t_0}^t (f(x(s), s) - f(y(s), s)) ds$. Vezmeme $\sigma > 0$. Grafy $x|_{[t-\sigma, t]}, y|_{[t-\delta, t+\delta]}$ leží v δ -okolí (x_0, t_0) .

$$\forall s \in [t - \sigma, t_0 + \sigma] : |f(x(s), s) - f(y(s), s)| \leq L \cdot |x(s) - y(s)|.$$

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(x(s), s) - f(y(s), s)| ds \leq \int_{t_0}^t L \cdot |x(s) - y(s)| ds, \quad t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \\ &\leq L \max_{s \in [t-\sigma, t+\sigma]} |x(s) - y(s)| \cdot \sigma \end{aligned}$$

└

□