Organizační úvod

Poznámka

1 Úvod

Definice 1.1 (Diferenciální rovnice)

Diferenciální rovnice je rovnice, která obsahuje derivaci.

Poznámka (Motivace)
Fyzika (např. pružina: $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$), ekonomie (např. rovnice majetku?: $k' = \alpha \cdot k - c(t)$), biologie (např. model dravec-kořist: $d' = \alpha \cdot d \cdot \cdot k - \beta \cdot d \wedge k' = \gamma \cdot k - \delta \cdot d \cdot k$).

Poznámka (Co nás zajímá na DR)
Přesné řešení (často neumíme spočítat), existence a jednoznačnost řešení, jaké vlastnosti má řešení.

Poznámka (Předpoklady)
$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times I$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $x' = f(x,t)$. $I \subset \mathbb{R}$.

Definice 1.2 (Obyčená diferenciální rovnice, řešení)

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice $x' = f(x,t)$ z předchozí poznámky.

Funkce $x : I \to \mathbb{R}^n$ je řešení DR, jestliže

- $\forall t \in I : (x(t),t) \in \Omega$,
- $\forall t \in I$ existuje vlastní derivace $x'(t)$,
- $\forall t \in I$ platí $x'(t) = f(x(t),t)$.

Poznámka
První dvě podmínky jsou jen existenční podmínky k rovnici ve třetím bodě.

Typicky má DR nekonečně mnoho řešení, přidáváme proto počáteční podmínku $(x_0, t_0) \in \Omega$, $t_0 \in I$.

Lemma 1.1

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $x : I \to \mathbb{R}^n$ spojitou a takovou, že graf x ($\{(x(t), t) | t \in I\}$) leží v Ω. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- *x je řešení DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$;*
- *$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds \ \forall t \in I$.*

Důkaz

„ $\Longrightarrow$ “: x a f je spojitá, tedy $x' = f(x(t), t)$ je spojitá, tj. $x \in C^1(I) \implies \int_{t_0}^{t} x'(s) ds = x(t) - x(t_0)$.

„ $\Longleftarrow$ “: jelikož f i s je spojitá, tak integral je diferencovatelný a $x(t)$ je spojitá, tedy

$$x'(t) = 0 + f(x(t), t) \wedge x(t_0) = t_0 + 0.$$

$\square$

Věta 1.2 (Peanova věta o lokální existenci)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $(x_0, t_0) \in \Omega$. Potom $\exists\ \delta > 0$ a funkce $x : B(t_0, \delta) \to \mathbb{R}^n$ taková, která je řešení DR a splňuje počáteční podmínku. (Stačí spojitá f a kompaktní Ω.)

Tvrzení 1.3 (Pomocné tvrzení)

Pokud $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ *a* f *je omezená na* Ω*, pak* $\forall T$ *existuje řešení DR* x *na* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *splňující počáteční podmínku.*

Důkaz

Když x_λ je definována na $[t_0 - \lambda, t]$, pak pravá strana má smysl $\forall t \in [t_0, t_0 + \lambda]$ tím pádem pravá strana integrálního tvaru má smysl $\forall t \in [t_0, t+\lambda]$, tím pádem definujeme x_λ na $[t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$.

Nyní definujme $M := \left\{ x_n|_{[t_0, t_0+T]} \right\}_{n=1}^{\infty}$ a ověříme, že M splňuje podmínky Arzela--Ascoliho věty:

$$|x_\lambda(t)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(x_\lambda(s-\lambda))| ds \leq |x_0| + ||f||_\infty \cdot |t - t_0| \leq |x_0| + ||f||_a \cdot T,$$

$$|x_\lambda(t) - x_\lambda(\tau)| = \left| \int_{\tau}^{t} f(x_\lambda(s-\lambda), s) ds \right| \leq ||f||_\infty \cdot |t - \tau|.$$

Podle AA věty tedy existuje podposloupnost M, která konverguje stejnoměrně. Limitu si označme x, podposloupnost x_{n_k}.

Chceme dokázat, že x je řešení DR: TODO!!!

$$\lambda_k := \frac{1?}{n_k}$$

$\square$

Důkaz

Pro $\overline{K_1} \subset K_2$, $\overline{K_2} \subset \Omega$, $(x_0, t_0) \in K$, K_1 a K_2 kompaktní definujeme

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} 1, & (x,t) \in K_1, \\ 0, & (x,t) \in \Omega \setminus \overline{K_2}, \end{cases}$$

kterou spojitě dodefinujeme, a

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) \cdot \varphi(x,t), & (x,t) \in \Omega \\ 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dle prvního kroku (TODO?) $\exists \tilde{x}(t)$, $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\tilde{x}'(t) = \tilde{f}(\tilde{x}(t), t)$, $\tilde{x}(t_0) = x_0$. $\tilde{x}$ je spojitá funkce $\implies$ $\exists \delta > 0$ tak, že graf funkce $\tilde{x}|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$ leží v K_1. Na K je $\tilde{f} = f$, tedy $\tilde{x}'(t) = f(\tilde{x}(t), t)$, $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. $\square$

1.1 Jednoznačnost řešení

Definice 1.3 (Lokální jednoznačnost, globální jednoznačnost)

Řekneme, že DR má vlastnost

- lokální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení $(x, I), (y, J)$ a $t_0 \in I \cap J$, $x(t_0) = y(t_0)$ pak $\exists \delta > 0 \ \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $x(t) = y(t)$,
- globální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení $(x, I), (y, J)$ a $t_0 \in I \cap J$, $x(t_0) = y(t_0)$, pak $\forall t \in I \cap J : x(t) = y(t)$.

Tvrzení 1.4

Globální jednoznačnost je ekvivalentní lokální jednoznačnosti.

Důkaz

„ $\implies$ “ je triviální. „ $\impliedby$ “: Pro spor předpokládejme $\exists t_1 \in I \cap J, \ x(t_1) \neq y(t_1)$. BÚNO $t_1 > t_0$. Definujme

$$M := \{T \in I \cap J, t > t_0, x(t) \neq y(t)\} \neq \emptyset, \qquad t_2 = \inf M.$$

Víme $x(t_2) = \lim_{t \to t_2^-} x(t) = \lim_{t \to t_2^-} y(t) = y(t_2)$. Podíváme se lokální jednoznačností na bod t_2. Tam existuje $\sigma > 0$ tak, že $\forall t \in (t_2 - \sigma, t_2 + \sigma) : x(t) = y(t)$. ↯. □

Definice 1.4 (Lokálně lipschitzovská)

Řekneme, že funkce $f = (x, t)$ je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x, jestliže

$$\forall (x_0, t_0) \in \Omega \ \exists \delta > 0 \ \exists L > 0 \ \forall t \in \mathcal{U}_\delta(t_0) \ \forall x, y \in \mathcal{U}_\delta(x_0) : |f(x, t) - f(y, t)| \leq L \cdot |x - y|$$

Věta 1.5 (Peanova věta o jednoznačnosti)

Buď f lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x, pak DR má v Ω vlastnost lokální jednoznačnost.

Důkaz

Ať $x(t)$, $y(t)$ jsou řešení. $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$, $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds$. $x(t) - y(t) = \int_{t_0}^t (f(x(s), s) - f(y(s), s)) \, ds$. Vezmeme $\sigma > 0$. Grafy $x|_{[t-\sigma]}, y|_{[t-\delta, t+\delta]}$ leží v δ-okolí (x_0, t_0).

$$\forall s \in [t - \sigma, t_0 + \sigma] : |f(x(s), s) - f(y(s), s)| \leq L \cdot |x(s) - y(x)|.$$

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(x(s), s) - f(y(s), s)| ds \leq \int_{t_0}^t L \cdot |x(s) - y(s)| ds, \qquad t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$$

$$\leq L \max_{s \in [t - \sigma, t + \sigma]} |x(s) - y(s)| \cdot \sigma$$

□

Důsledek
Jestliže f je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x a $(x_0, t_0) \in \Omega$, pak

$$\exists \delta > 0\ \exists ! x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n \text{ řešení DR s počáteční podmínkou } x(t_0) = x_0.$$

Důkaz
Peanova věta o jednoznačnosti. □

Tvrzení 1.6
Pokud $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ jsou spojité v Ω, $j \in [n]$, pak f je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x.

Důkaz

$$h(s) := f(x + \ s(y - x), t), s \in [0, 1], h(0) = f(x, t), h(1) = f(y, t).$$

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(s) ds = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x{+}?{-}?) \cdot (y_j - x_j) ds$$

$$\forall (x_0, t_0) \in \Omega\ \exists \mathcal{U}(x_0)\ \exists \mathcal{U}(t_0) M = \overline{\mathcal{U}(x_0)} \times \overline{\mathcal{U}(t_0)} \subset \Omega,$$

M je kompaktní, tedy $\exists K > 0\ \forall (x, t) \in M : \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq K$. Tedy

$$|h(1) - h(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |(x + s(y - x))| \cdot |y_i - x_i| ds \leq nK \cdot \max |y_i - x_i| \leq nK |x - y|.$$

□

2 Maximální řešení

Definice 2.1 (Prodloužení řešení, maximální řešení)
Řešení $(\tilde{x}, \tilde{I})$ je prodloužením řešení (x, I), jestliže $\tilde{I} \supset I$ a $\forall t \in I : x(t) - \tilde{x}()$.

Řešení je maximální, pokud neexistuje netriviální prodloužení.

Věta 2.1 (O maximálním prodloužení)
Každé řešení (x, I) má alespoň jedno maximální prodloužení.

Důkaz
Ať M je množina všech prodloužení (x, I). Řekněme, že $(\tilde{x}, \tilde{I}) \leq (\hat{x}, \hat{I})$ právě tehdy, když $(\hat{x}, \hat{I})$ je prodloužení $(\tilde{x}, \tilde{I})$.

Ať $N \subset M$ je řetězec (množina, na které je $\leq$ lineární). Označme $I_0 = \bigcup_{(\tilde{x}, \tilde{I}) \in N} \tilde{I}$ a definujme $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ z toho, že $t \in I_0 \implies \exists (\tilde{x}, \tilde{I}) \in N$, $t \in \tilde{I}$, jako $x(t) = \tilde{x}(t)$.

Z Zornova lemmatu pak vyplývá, že existuje maximální řešení. $\square$

Lemma 2.2

(x, I) řeší DR, $I = (a, b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \infty$. Pak řešení x lze prodloužit za bod b, když zároveň

- $b < \infty$;
- $\exists \lim_{t \to b} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$;
- $(x_0, b \in \Omega)$.

Důkaz
„ $\implies$ “ zřejmě, „ $\impliedby$ “: Uvažujme DR s počáteční podmínkou $x(b) = x_0$. Dle Peanovy věty $\exists \tilde{x} : (b - \delta, b + \delta) \to \mathbb{R}^n$. $x_1(t) = x(t)$, pokud $t \in (a, b)$, $\tilde{x}(t)$ jinak. x_1 tedy splňuje DR na (a, b) a $(b, b + \delta)$. Zbývá ověřit, že $x_1'(b) = f(x_1(b), b)$:

- x_1 je spojitá v b, neboť $\lim_{t \to b^-} x_1(t) = x_0 = \lim_{t \to b^+} x_1(t) = \tilde{x}(t)$.
- $\exists \lim_{t \to b^-} x_1'(t) = \lim_{t \to b^-} f(x(t), t) = f(x(b), b) = f(x_0, b)$.
- $\exists \lim_{t \to b^+} x_1'(t) = \lim_{t \to b^+} f(\tilde{x}(t), t) = f(\tilde{x}(b), b) = f(x_0, b_0)$.

$\square$

Věta 2.3 (O opuštění kompaktu)

Buď (x, I) maximální řešení DR. Nechť $K \subset \Omega$ kompaktní a $\exists t_0 : (x(t_0), t_0) \in K$. Pak $\exists t_1 > t_0$, $t_1 \in I$, že $(x(t_1), t_1) \in \Omega \setminus K$. $\exists t_2 \in I_2$, $t_2 < t_0$, že $(x(t_2), t_2) \in \Omega \setminus K$.

Důkaz
Pro spor předpokládejme, že $\forall t_1 > t_0, t_1 \in I : (x(t_1), t_1) \in K$. Podle předchozí věty stačí dokázat $b < \infty$ (kdyby ne, tak K není kompakt), $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \nearrow b$, $\{(x(t_k), t_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ vybereme konvergentní podposloupnost $(x(t_{k_n}), t_{k_n}) \to (x_0, t_0)$. Následně ověříme BC podmínku: víme $x(s) - x(t) = x'(\xi)(s - t), \xi \in (s, t)$, tedy

$$|x(s) - x(t)| \leq |x'(\xi)| \cdot |s - t| = |f(x(\xi), \xi)| \cdot |s - t| \leq C \cdot |s - t|.$$

Zřejmě $(x_0, b) \in K \subset \Omega$, protože z kompaktu se nedá vykonvergovat. □

3 Závislost řešení na počáteční podmínce

Definice 3.1

Buď f v Ω lokálně Lipschitzovská vzhledem k x_0. Řešící funkcí (DR) nazveme funkci $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n : (t, t_0, x_0) \mapsto x(t)$, kde x je maximální řešení odpovídající DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$.

Věta 3.1 (Granwallovo Lemma)

Nechť $g, w : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g(t), w(t) \geq 0$, $\forall t \in I_0$. Nechť $t_0 \in I, K \geq 0$ a $\forall t \in I : w(t) \leq K + \left|\int_{t_0}^{t} w(s)g(s)ds\right|$. Potom

$$w(t) \leq K \cdot \exp\left(\left|\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right|\right).$$

Důkaz
BÚNO $t > t_0$. Vezmeme $\varepsilon > 0$. Definujeme $\Phi(t) = K + \varepsilon + \int_{t_0}^{t} w(s)g(s)ds$. $\Phi'(t) = w(t) \cdot g(t)$.

$$\Phi'(t) \leq g(t)\left(K + \int_{t_0}^{t} w(s)g(s)ds\right) \leq g(t)\Phi(t), \qquad \forall t \in (t_0, \sup I).$$

$$\forall t \in (t_0, \sup I) : \Phi(t) \geq 0. \qquad \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq g(t), \qquad \int_{t_0}^{t} \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} ds \leq \int_{t_0}^{t} g(s)ds.$$

$$\Phi(t_0) = K + \varepsilon, \qquad \frac{\Phi(t)}{K + \varepsilon} \leq \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right),$$

$$\Phi(t) \leq (K + \varepsilon)\exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right) \qquad \forall \varepsilon > 0 \implies \Phi(t) \leq K \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right).$$

□

Důsledek
Nechť f je globálně L-lipschitzovská v první souřadnici. Nechť x a y jsou řešení DR na intervalu I s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Potom

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot e^{L \cdot |t - t_0|}.$$

Důkaz

$$x'(t) = f(x(t), t), \qquad y'(t) = f(y(t), t).$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds, \qquad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s) ds,$$

$$x(t) - y(t) = x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} (f(x(t), t) - f(y(s), s)) ds,$$

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \left| \int_{t_0}^{t} L \cdot (x(s) - y(s)) ds \right|,$$

Z Granwallova lemmatu potom $|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot \exp(L \cdot |t - t_0|)$. $\square$

Věta 3.2

Buď G množina z definice řešící funkce, f lokálně lipschitzovská na G. Pak $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ otevřená a φ je spojitá v G.

Důkaz
Vezmeme $(t, t_0, x_0) \in G$. Buď x maximální řešení DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. $\mathcal{D}_x \supset [t_0, t]$. BÚNO $t > t_0$.

$$K_\delta := \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} | s \in [t_0 - \delta, t + \delta], |y - x(s)| \leq \delta \right\}.$$

Vezmeme $\varepsilon > 0$. Vezmeme $y_0 \in \mathbb{R}^n, s_0 \in \mathbb{R}$, $|y_0 - x_0| < \varepsilon$, $|t_0 - s_0| < \varepsilon$. Definujeme y maximální řešení splňující $y(s_0) = y_0$. Co znamená, že $(\tilde{t}, s_0, y_0) \in G$? $\mathcal{D}_y \supset [s_0, \tilde{t}]$. Potřebujeme dokázat, že y je definováno na K_δ. Odhadneme

$$|y(s_0) - x(s_0)| \leq |y(s_0) - x(t_0)| + |x(t_0) - x(s_0)| = |y_0 - x_0| + |x(t_0) - x(s_0)| \leq \varepsilon + x_0 |t_0 - s_0| \leq \varepsilon \cdot (1 + c_0)$$

$$s \geq t_0 : |x(s) - y(s)| \leq |x(s_0) - y(s_0)| e^{L|s - s_0|} \leq \varepsilon (1 + c_0) e^{L \cdot |s - s_0|}.$$

Máme, že $\forall s > t_0 : |x(s) - y(s)| \leq \frac{\delta}{2}$, tedy y neopustí K_δ přes hranici $\implies$ y existuje až do času $t + \delta_0$, tj. G je otevřená.

Nyní „Φ je spojitá“: $(t, t_0, x_0), (s, s_0, y_0) \in G$:

$$|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(s, s_0, y_0)| = |x(t) - y(s)| \leq |x(t) - x(s)| + |x(s) - y(s)| \leq c_0 |t - s| + |x(s_0) - y(s_0)| e^{L \cdot |s - s_0|} \leq T$$

$\square$

Věta 3.3 (Věta o derivování řešení v počáteční podmínce?)

Buď f je třídy C^1 vzhledem k x, φ je řešící funkce diferenciální rovnice. Potom $\forall(t, t_0, x_0) \in G$ a $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, |w| = 1$, existuje derivace φ podle x_0 ve směru w v bodě (t, t_0, x_0), tj.

$$D_w\varphi(t, t_0, x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0)}{h}.$$

Označíme-li pro pevné (t_0, x_0): $x(t) := \varphi(t, t_0, x_0)$, $u(t) := D_w\varphi(t, t_0, x_0)$, pak platí

$$u'(t) = [\nabla_x f(x(t), t)]u(t), \qquad \textit{(tzv. rovnice ve variacích)}$$

$$u(t_0) = w.$$

Důkaz

Vezmeme $(x_0, t_0) \in \Omega$. Definujeme $x(t) := \varphi(t, t_0, x_0)$, $y_h(t) := \varphi(t, t_0, x_0 + hw)$. To znamená, že

$$\eta_h(x) = \frac{\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0)}{h} - u(t) = \frac{y_h(t) - x(t)}{h} - u(t).$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds, \qquad y_h(t) = x_0 + h \cdot w + \int_{t_0}^{t} f(y_h(s), s)ds.$$

$$y_h(t) - x(t) = h \cdot w + \int_{t_0}^{t} f(y_h(s), s) - f(x(s), s)ds.$$

Pro nějaké s, h $g(\vartheta) = f(x(s) + \vartheta(y_h(s) - x(s)), s)$, tedy $g(1) = f(y_h(s), s)$, $g(0) = f(x(s), s)$,

$$y_h(t) - x(t) = h \cdot w + \int_{t_0}^{t} g(1) - g(0)ds = h \cdot w + \int_{t_0}^{t} \int_{0}^{1} g'(\vartheta)d\vartheta ds =$$

$$= h \cdot w + \int_{t_0}^{t} \int_{0}^{1} \nabla_x f(x(u) + \vartheta(y_h(s) - x(s)), s) \cdot (y_h(s) - x(s))d\vartheta ds.$$

Buď $u(t)$ maximální řešení $u'(t) = [\nabla_x f(x(t), t)]u(t), u(t_0) = w$. Tj.

$$u(t) = w + \int_{t_0}^{t} \nabla_x f(x(s), s)u(s)ds = w + \int_{t_0}^{t} \int_{0}^{1} \nabla_x f(x(s), s)u(s)d\vartheta ds.$$

Odečteme od předcházejícího a dostaneme

$$\eta_h(x) = \int_{t_0}^{t} [\nabla_x f(x(s), s)]\eta_h(s)ds + \int_{t_0}^{t} \int_{0}^{1} \left[\nabla_x f(x(s) + \vartheta(y_h(s) - x(s))) - \nabla_x f(x(s), s)\right] (y_h(s) - x(s))d\vartheta$$

$$|\eta_h(t)| \leq \int_{t_0}^{t} C \cdot |\eta_h(s)|ds + \max_{\substack{s \in [t_0, t], \\ \vartheta \in [0,1]}} |\nabla_x f(x(s) + \vartheta(y_n(s) - x(s)), s) - \nabla_x f(x(s), s)| \cdot \int_{t_0}^{t} e^{L \cdot s - t_0} ds.$$

Z důsledku předpředchozí věty

$$|y_h(s) - x(s)| \leq |y_h(t_0) - x(t_0)|e^{L \cdot |s - t_0|} = |hw|e^{L \cdot |s - t_0|} = |h|e^{L \cdot |s - t_0|}.$$

$$|\eta_h(t)| \leq K_h \cdot C_2 + \int_{t_0}^{t} C \cdot (\eta_h(s))ds,$$

kde $K_h \to 0$. Z G. lemmatu pak plyne $|\eta_h(t) \leq K_n \cdot C_2 \cdot \exp[C \cdot |t - t_0|]| \implies \lim_{h \to 0} \eta_h(t) = 0$. □

4 Lineární ODR

Definice 4.1 (Lineární ODR)

$x' = A(t)x + b(t)$, $A : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ spojité funkce.

Věta 4.1

Nechť $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pak existuje právě jedno maximální řešení x (LODR) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. Funkce x je definovaná na (α, β).

Důkaz

Stačí dokázat, že x je definováno na celém (α, β). Předpokládejme, že x je definované na (a, b), BÚNO $b < \beta$, $t_0 \in [a, b]$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + f(s)]\, ds,$$

$$|x(t)| \leq |x_0| + \max_{s \in [t_0, f]} |A(s)| \int_{t_0}^{t} |x(s)| ds + \max_{s \in [t_0, b]} |f(s)| \cdot |t - t_0|.$$

Z G. lemmatu plyne $|x(t)| \leq (|x_0| + \max_{s \in [t_0, b]} |f_s| \cdot |f - t_0|) e^{\max_{s \in [t_0, b]} |A(s)| \cdot |f - t_0|}$. Pak na intervalu (t_0, b) x neopustí nějaký kompakt. □

Definice 4.2 (Homogenní rovnice)

LODR nazveme homogenní, pokud $b \equiv 0$, tedy $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$.

Věta 4.2

Množina řešení H je vektorový prostor dimenze n.

Důkaz

Součet řešení je řešení zřejmě. Stejně tak násobek. Dimenze n se dokazuje tak, že vezmeme bod a řešení, která mají každé v tomto bodě jednu funkci 1 a ostatní 0. To jsou zřejmě LN řešení a dá se z nich složit libovolné jiné, protože máme jednoznačnost řešení s konkrétní počáteční podmínkou. Takže další řešení poskládáme z těchto. □

Definice 4.3 (Fundamentální řešení)

Fundamentálním řešením homogenní LODR nazveme každou bázi prostoru řešení. Budeme jej značit

$$\Phi(t) = (\varphi(t), \dots, \varphi(t)).$$

Poznámka

Zřejmě $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.

Definice 4.4 (Wronského determinant (Wronskián))

$$W(t) = \det \Phi(t).$$

Věta 4.3 (Liouvilleova věta)

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s) ds\right).$$

Důkaz
Chceme dokázat, že $W'(t) = W(t) \cdot (\operatorname{tr} A(t))$. Rozepsáním. □

Věta 4.4 (Variace konstant)

Nechť $x' = A(t)x + b(t)$, $A : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ spojité, je LODR, $\Phi(t)$ fundamentální matice homogenní rovnice $x' = A(t)x$. Potom řešení LODR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$) je dáno předpisem

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

Poznámka
Když budeme hledat řešení LODR ve tvaru $\varphi(t) \cdot C(t)$, dostaneme se k tomuto vzorci.

Důkaz
Zderivujeme a s použitím $\Phi'(t) = A(t) \cdot \Phi(t)$:

$$x'(t) = \Phi(t) \cdot \Phi'(t_0) \cdot x_0 + \Phi'(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) \cdot f(s)ds + \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t) \cdot b(t) =$$

$$= A(t)\left(\Phi(t)\Phi^{-1}(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) \cdot f(s)ds\right) + b(t) = A(t)x + b(t).$$

Navíc zjevně $x(t_0) = x_0$. □

5 Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Definice 5.1 (Lineární rovnice s konstantními koeficienty (LODRKK))

$$x' = Ax + b(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n \text{ spojitá.}$$

Poznámka
Ukážeme, že pro $n \in \mathbb{N}$ je řešení homogenní soustavy LODRKK se dá napsat ve tvaru $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$.

Definice 5.2 (Norma matice)

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}. ||A|| := \sup \{|Ax| \mid x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}.$$

Věta 5.1

Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak

1. $||A|| \geq 0$, $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
2. $||\lambda A|| = |\lambda| \cdot ||A||$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$;
4. $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$;
5. $|Av| \leq ||A|| \cdot |v|$, $v \in \mathbb{R}^n$;
6. $|Av| \geq \frac{|v|}{||A^{-1}||}$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, *je-li A regulární.*

Důkaz
1.–3. za domácí úkol. V 5. se pouze vezme norma, 2. a definice. Pro 4. dvakrát použijeme 5. Nakonec u 6. použijeme $y = Av$, tedy $v = A^{-1}y$, tím dostaneme samé tvrzení jako v 5.. □

Věta 5.2

Funkce $U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k, t \in \mathbb{R}$ je fundamentální matice homogenního řešení LODRKK, $U(\mathbf{o}) = I_0$.

Důkaz
Za prvé řada konverguje, neboť

$$||\frac{1}{k!}t^k A^k|| \leq \frac{|t|^k}{k!}||A||^k \wedge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!}||A^k||K.$$

Za druhé $[U(t)]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k [A^k]_{ij}$ a poloměr konvergence je ∞, můžeme tedy derivovat člen po členu:

$$\frac{d}{dt}[U(t)]_{ij} = \ldots = A \cdot U(t).$$

□

Věta 5.3

Pro $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definujeme $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. Potom platí:

- $e^{\lambda I} = e^{\lambda} \cdot I,\ \lambda \in \mathbb{R}$;
- *pokud* $AB = BA$, *pak* $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$;
- $e^{C^{-1}AC} = C^{-1} e^A C$, *pokud je* C *regulární;*
- $e^{-A} = \left(e^A\right)^{-1}$.

Důkaz
Rozepsáním? TODO □

Věta 5.4

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, Λ je její Jordanův kanonický tvar, $A = C \Lambda C^{-1}$, a $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ je diagonála Λ. Potom $e^{tA} = Ce^{t\Lambda}C^{-1}$, kde:

$$e^{t\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{t\Lambda_1} & 0 & \ldots & \\ 0 & e^{t\Lambda_2} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & e^{t\Lambda_3} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n}) \cdot P(t), P_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \\ 0 & 1 & t & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Důkaz
Jednoduchý, byl na cvičení. □

Důsledek
Buď $\overline{a} = \max\{\Re\lambda | \lambda \in eig(A)\}$, m je velikost Jordanovy buňky příslušná $\lambda : \Re\lambda = \overline{a}$. Pak

$\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\exists C > 0 : ||e^{tA}|| \le C \cdot t^{n-1} \cdot e^{\overline{a}t}, \qquad \forall t \ge 0.$$

Obdobně když $\underline{a} = \min$, pak

$$\exists C > 0 : ||e^{tA}|| \le C \cdot |t|^{n-1} \cdot e^{\underline{a}t}, \qquad \forall t \le 0.$$

Důkaz

Operátorová norma $||.||$ je ekvivalentní normě $||A||_\infty$. Z toho a předchozí věty už to odhadneme... □

Důsledek

Je-li $\Re\lambda < 0$, $\forall \lambda \in eig(A)$, pak $e^{At}x_0 \to 0$, $t \to +\infty$.

Definice 5.3 (Stabilní, nestabilní a centrální podprostor)

$$\sigma_-(A) = \{\lambda \in eig(A) | \Re\lambda < 0\}, V_- = Lin\left\{v \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda I)^k v = 0, \lambda \in \sigma_-\right\}$$
$$\sigma_+(A) = \{\lambda \in eig(A) | \Re\lambda > 0\}, V_+ = Lin\left\{v \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda I)^k v = 0, \lambda \in \sigma_+\right\}$$
$$\sigma_0(A) = \{\lambda \in eig(A) | \Re\lambda = 0\}, V_0 = Lin\left\{v \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda I)^k v = 0, \lambda \in \sigma_0\right\}.$$

Věta 5.5

$$\exists C > 0, \alpha > 0\ \forall x_0 \in V_- : |e^{tA}x_0| \le Ce^{-\alpha t}|x_0|, \qquad \forall t \ge 0.$$
$$\exists C > 0, \beta > 0\ \forall x_0 \in V_+ : |e^{tA}x_0| \ge Ce^{\beta t}|x_0|, \qquad \forall t \ge 0.$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \forall x_0 \in V_0 : |e^{tA}x_0| \le Ce^{\varepsilon t}|x_0|, \qquad \forall t \ge 0.$$

Důkaz

$$x_0 \in V_- : |e^{tA}x_0| = |Ce^{t\Lambda} \cdot C^{-1}x_0| \le ||Ce^{t\Lambda}|_{V_0}|| \le ||C|| \cdot ||e^{t\Lambda}|_{V^{-1}}|| \cdot ||C^{-1}|| \cdot |x_0| \le de^{-\alpha t}|x_0|.$$

TODO!!! (Příště?) □

6 Stabilita řešení

Definice 6.1 (Stabilní řešení, lokální atraktor, asymptotická stabilita)

DR $x' = f(x,t)$. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\{\mathbf{o}\} \times [\tau, +\infty) \subset \Omega$. Buď $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a lokálně lipschitzovská vzhledem k x a $f(0,t) = 0$, $\forall t > \tau$. Značme $I = [\tau, +\infty)$. Nulové řešení DR se nazývá:

- stabilní, jestliže $\forall t_0 \in I\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0 : |x_0| < \delta \implies |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0$;
- lokální atraktor, pokud $\forall t_0 \in I\ \exists \eta > 0\ \forall x_0 : |x_0| < \eta \implies \lim_{t \to +\infty} \varphi(t, t_0, x_0) = 0$;
- asymptoticky stabilní, pokud je stabilní a zároveň je lokálním atraktorem;
- uniformě stabilní, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t_0 \in I : |x_0| < \delta \implies |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0;$$

- uniformě asymptoticky stabilní, je-li uniformě stabilní a

$$\exists \eta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \tau > 0\ \forall t_0 \in I\ \forall x_0 : |x_0| < \eta \implies |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0 + \tau.$$

Důkaz (Předchozí věty)
První bod:

$$e^{tA} x_0 = V e^{tJ} V^{-1} x_0$$

$$x_0 \in X_-(A) \implies V^{-1} x_0 \in V^-(J)$$

TODO (další část jsem nechápal, pravděpodobně to byl důkaz implikace na předchozím řádku)

Z první rovnice:

$$|e^{tA} x_0| \leq ||V|| \cdot |e^{tJ}(V^{-1} x_0)| = ||V|| \cdot \left| e^{tJ}|_{X^-(J)} \cdot (V^{-1} x_0) \right| \leq ||V|| \cdot ||e^{tJ}|_{X^-(J)}|| \cdot |V^{-1} x_0| \leq ||V|| \cdot K \cdot e^{-\alpha t} \cdot ||V^{-1}$$

Druhý bod: $x_0 \in X_+(A), e^{-At} y_0 = x_0$. $||x_0|| = ||e^{-At} y_0|| \leq e^{\beta t} C |y_0|$ podobně jako v prvním bodě. $y_0 = e^{At} x \in X_+(A)$, $t \geq 0$.

Třetí bod: $||e^{tJ}|_{X_C(J)}|| \leq K \cdot t^m$, m je maximální velikost Jordanovy buňky odpovídající vlastním číslům z $\sigma_0(A)_0$. $\square$

Věta 6.1

Nulové řešení homogenní LODRKK $x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je

- *asymptoticky stabilní* $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(A) : \Re \lambda < 0$;
- *stabilní* $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(A) : \Re \lambda \leq 0$ *a Jordanovy buňky příslušné vlastním číslům s* $\Re \lambda = 0$ *mají velikost 0.*

Definice 6.2

x_0 je stabilní řešení $x' = f(x, t) \equiv 0$ je stabilní řešení $y' = g(y(t), t) = f(x_0(t) + y(t), t) - f(x_0(t), t)$. Obdobně pro další typy stability.

Lemma 6.2

Dána rovnice $x' = Ax + g(x,t)$*. Nechť* $||e^{tA}|| \leq Ke^{-\alpha t}$*,* $\forall t \geq 0$*, g spojitá v* $\mathbb{R}^{n+1}$*,* $|g(x,t)| \leq \gamma \cdot |x|$*, kde* $\gamma < \frac{\alpha}{K}$*. Pak nulové řešení je uniformě asymptoticky stabilní.*

Důkaz

Buď x řešení, $x'(t) = A \cdot x(t) + g(x(t),t)$, což napíšeme jako $x'(t) = Ax(t) + f(t)$. Použijeme variaci konstant:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s) ds.$$

Odhadneme: $t > t_0 : |x(t)| \leq |e^{A(t-t_0)}x_0| + \int_{t_0}^t |e^{A(t-s)} f(s)| ds$,

$$|x(t)| \leq K \cdot e^{-\alpha(t-t_0)} \cdot |x_0| + K \cdot \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \cdot \gamma |x(s)| ds,$$

$$|e^{\alpha t} x(t)| \leq K \cdot e^{\alpha t_0} \cdot |x_0| + K \cdot \int_{t_0}^{t} e^{\alpha s} \cdot \gamma |x(s)| ds.$$

Z G. lemmatu:

$$|e^{\alpha t} x(t)| \leq K \cdot e^{\alpha t_0} \cdot |x_0| \cdot e^{K\gamma(t-t_0)},$$

$$|x(t)| \leq K \cdot |x_0| \cdot e^{(K \cdot y - \alpha)(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

Tudíž je uniformě asymptoticky stabilní. □

Věta 6.3 (O linearizované stabilitě)

Dána rovnice (AR) $x' = f(x)$*, kde* f *je třídy* C^1 *v okolí bodu* x_0*. Nechť* $f(x_0) = 0$ *a* $A = \nabla f(x)$ *splňuje* $\Re\lambda < 0$ $\forall \lambda \in \sigma(A)$*. Pak* $x(t) \equiv x_0$ *je uniformě asymptoticky stabilní.*

Pokud A *splňuje* $\exists \lambda \in \sigma(A)$*,* $\Re\lambda > 0$*, pak* $x(t) \equiv x_0$ *není stabilní.*

Důkaz
Vize:

$$x' = f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) = 0 + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0).$$

Búno $x_0 = 0$. $x' = A \cdot x + g(x)$, kde $g(x) = f(x) - Ax_0$.

$$\exists \alpha > 0 \; \forall \lambda \in \sigma(A) : \Re\lambda < -\alpha_0.$$

Pak $|e^{At}| \leq K \cdot e^{-\alpha t}$, $\forall t \geq 0$. Pro g platí, že $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{|x|} = 0$, tedy $\exists \Delta > 0 : \forall x : |x| < \Delta \implies \frac{|g(x)|}{|x|} < \gamma$, kde $\gamma < \frac{\alpha}{K}$. Máme, že $|g(x)| < \gamma \cdot |x|$, $|x| < \Delta$.

Definujeme (tzv. seřazovací funkci)

$$\eta(s) = \begin{cases} 1, & s < \frac{\Delta}{2}, \\ \eta(s) \text{ spojitá, že} 0 < \eta(s) < 1, & s \in [\frac{\Delta}{2}, \Delta], \\ 0, s > \Delta. \end{cases}$$

Definujeme $h(x) := g(x) \cdot \eta(x)$. Platí, že $|h(x)| \leq \gamma \cdot |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Podívejme se na $y' = Ay + h(y)$. To splňuje předpoklady předchozího lemmatu, tudíž nulové řešení je uniformě stabilní, tedy stabilní. Tj. existuje $\delta > 0 : |y(t_0)| < \delta \implies |y(t)| \leq \frac{\Delta}{2} \; \forall t \geq t_0$, tedy y splňuje $x' = Ax + g(x)$. A podle předchozí věty je x uniformě asymptoticky stabilní. $\square$