Příklad (indukce)
Dokažte matematickou indukcí případy rekurence $t(n) \leq cn^\alpha + \sum_{i=1}^k t(a_i n)$ ($t(n) \leq C$, pro $n \leq n_0$, $\forall i : a_i < 1$) dle srovnání $S_\alpha = \sum a_i^\beta$ s 1, užitečné je dokazovat vztah $t(n) \leq c_1 n^\alpha + c_2 n^\beta$, kde $\sum a_i^\beta = 1$, případně $t(n) \leq c_1 n^\alpha + c_2 n^\alpha \log n$, vhodná c_i zjistěte v průběhu důkazu. Hodí se za indukční předpoklad brát, že tvrzení platí pro všechna menší n.

Důkaz ($S_\alpha < 1$)
Nejprve se domluvme, že přirozená čísla (konkrétně n) jsou od 1, protože jinak je to jen o přečíslování. Nyní začneme s $S_\alpha \leq 1$: Nechť $c_1 = \max\{c, C\}$. Tím jsme vlastně dokázali první krok indukce, jelikož zřejmě ($c_2 \geq 0$):

$$\forall n \leq n_0 : t(n) \leq C \leq c_1 \cdot n^\alpha + c_2 \cdot n^\alpha,$$

$$\forall n \leq n_0 : t(n) \leq C \leq c_1 \cdot n^\alpha + c_2 \cdot n^\alpha \cdot \log n.$$

Nechť nejprv $S_\alpha < 1$. Potom předpokládejme jako indukční krok, že

$$\forall n_1 < n : t(n_1) \leq c_1 \cdot n_1^\alpha + c_2 \cdot n_1^\alpha.$$

Potom je

$$t(n) \leq (cn^\alpha) + \left(\sum_{i=1}^k t(a_i n)\right) \leq (c_1 n^\alpha) + \left(\sum_{i=1}^k c_1 a_i^\alpha n^\alpha + c_2 a_i^\alpha n^\alpha\right) = c_1 n^\alpha + S_\alpha (c_1 + c_2) n^\alpha.$$

Tedy když zvolím[a] $c_2 \geq S_\alpha(c_1 + c_2)$, což můžu díky $S_\alpha < 1$, tak opravdu dostanu $t(n) \leq c_1 n^\alpha + c_2 n^\alpha (= (c_1 + c_2) \cdot n^\alpha)$. To je zřejmě $O(n^\alpha)$, protože se to od n^α liší jen konstantakrát.

□

[a] c_2 sice jak tady, tak i dále, volím uvnitř indukčního kroku, ale volím ho nezávisle na n, tedy všude stejné, konstantní.

Důkaz ($S_\alpha = 1$)
Obdobně pro $S_\alpha = 1$ indukčně předpokládejme, že

$$\forall n_1 < n : t(n_1) \leq c_1 \cdot n_1^\alpha + c_2 \cdot n_1^\alpha \log n_1.$$

Potom je:

$$t(n) \leq (cn^\alpha) + \left(\sum_{i=1}^{k} t(a_i n)\right) \leq (c_1 n^\alpha) + \left(\sum_{i=1}^{k} c_1 a_i^\alpha n^\alpha + c_2 a_i^\alpha n^\alpha \log(a_i n)\right) =$$

$$= c_1 n^\alpha + c_1 n^\alpha + \sum_{i=1}^{k} c_2 a_i^\alpha n^\alpha \log(n) + c_2 a_i^\alpha n^\alpha \log(a_i) =$$

$$= c_1 n^\alpha + c_1 n^\alpha + c_2 n^\alpha \log(n) + \sum_{i=1}^{k} c_2 a_i^\alpha n^\alpha \log(a_i).$$

Jelikož $\forall i : 0 < a_i < 1$, tj. $\log a_i < 0$, tak

$$0 > K := \sum_{i=1}^{k} c_2 \cdot a_i^\alpha \cdot n^\alpha \log(a_i).$$

To znamená, že můžeme volit

$$c_2 \geq c_2 + \frac{Kc_2 + c_1}{\log(n)}. \qquad \left(\text{Např. } c_2 = \frac{c_1}{-K}.\right)$$

A splníme tak

$$t(n) \leq c_1 \cdot n^\alpha + c_2 \cdot n^\alpha \log n,$$

což je $O(n^\alpha \log n)$, protože

$$c_1 \cdot n^\alpha + c_2 \cdot n^\alpha \log n \leq (c_1 + c_2) \cdot n^\alpha \log n$$

a konstanty se nepočítají. $\square$

Důkaz ($S_\alpha > 1$)
Tentokrát chceme pouze $c_2 > 0$ $(c_2 + c_1) = \max\{c, C\}$, aby byl splněn první krok indukce $(\sum_{i=1}^k a_i^\beta = 1)^a$:

$$\forall n \leq n_0 : t(n) \leq C \leq (c_1 + c_2) \cdot n^\alpha < c_1 \cdot n^\alpha + c_2 \cdot n^\beta.$$

Nyní předpokládejme indukční předpoklad:

$$\forall n_1 < n : t(n_1) \leq c_1 \cdot n_1^\alpha + c_2 \cdot n_1^\beta.$$

To znamená, že

$$t(n) \leq (cn^\alpha) + \left(\sum_{i=1}^k t(a_i n)\right) \leq (cn^\alpha) + \left(\sum_{i=1}^k c_1 a_i^\alpha n^\alpha + c_2 a_i^\beta n^\beta\right) = cn^\alpha + c_2 n^\beta + S_\alpha c_1 n^\alpha.$$

Nyní zvolíme $c_1 \geq c_1 \cdot S_\alpha + c$ (tj. např $c_1 = \frac{-c}{S_\alpha - 1}$) a k tomu c_2, aby byla splněna podmínka s 1. kroku indukce (např. $c_2 = -c_1 + c + C$) a dostáváme opravdu:

$$t(n) \leq c_1 \cdot n^\alpha + c_2 \cdot n^\beta \qquad (\leq c_2 \cdot n^b),$$

tudíž opravdu $t(n)$ je $O(n^\beta)$, protože konstantu můžeme zanedbat. □

[a] Že takové $\alpha < \beta < \infty$ existuje, zjistíme z toho, že exp je spojitá, součet spojitých je spojitá, násobek spojité je spojitá a složení spojitých je spojitá, tedy

$$f(x) := \sum_{i=1}^k \exp^{x \cdot \log_e(a_i)} = \sum_{i=1}^k a_i^x$$

je spojitá a víme, že $S_\alpha > 1$ a $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, jelikož $\lim_{x\to\infty} a^x = 0, a < 1$, tedy ze spojitosti (potažmo Darbouxovy vlastnosti) víme, že $\exists \beta, \infty > \beta > \alpha : 0 < f(\beta) = 1 < S_\alpha$.