TODO!!!

Definice 0.1 (Lineární PDR)

Parciální diferenciální rovnice (PDR) je lineární, jde-li ji zapsat ve tvaru

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m, \alpha \in (\mathbb{N}_0)^n} a_\alpha D^\alpha u = f$$

pro neznámou funkci u, $f(x)$ a $a_\alpha(x)$ je dáno ($x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$).

Je-li $f \equiv 0$, pak říkáme, že PDR je homogenní (bez pravé strany). Pokud a_α jsou konstanty, pak říkáme, že PDR je s konstantními koeficienty.

Definice 0.2 (Semilineární PDR)

Semilineární rovnice má tvar

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u + b = 0,$$

kde $a(x)$ a $b(x, u, \nabla u, \ldots, \nabla^{n-1} u)$ je dáno.

Definice 0.3 (Kvazilineární PDR)

Kvazilineární rovnice je

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u + f = 0,$$

kde $a_\alpha(x, u, \nabla u, \ldots, \nabla^{m-1} u)$ a $f(x, u, \nabla u, \ldots, \nabla^{m-1} u)$ je dáno.

Definice 0.4 (Řád rovnice)

m v předchozích definicích nazýváme řád rovnice.

Definice 0.5 (Korektně zadaný problém)

Problém je korektně zadaný podle Hadamarda, pokud má řešení, řešení je jednoznačné a řešení závisí spojitě na datech.

Definice 0.6 (Klasické řešení)

Rovnice platí bodově, derivace jsou spojité.

Definice 0.7 (Okrajové podmínky)

Dirichlet: zadaná hodnota na hranici.

Neumann: zadány normálové tečny na hranici.

1 Cauchyova úloha pro kvazilineární rovnici 1. řádu

Definice 1.1

Buď $a_1, \dots, a_n,\ f \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Rovnici

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(u(x), x)\partial_j u(x) = f(u(x), x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

nazveme kvazilineární rovnici prvního řádu.

Počáteční podmínku předepisujeme ve tvaru $u(0, \overline{x}) = u_0(\overline{x})$, kde $\overline{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme klasickým řešením Cauchyovy úlohy pro kvazilineární rovnici 1. řádu, pokud $u \in \mathbb{C}^1(\Omega)$ a podmínky platí bodově v Ω.

2 Klasifikace lineárních rovnic 2. řádu

Poznámka (Lineární rovnice druhého řádu)

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x) = f(x),$$

kde a_{ij}, b_i, c, f jsou dané funkce, $i, j \in [n]$, u neznámá funkce.

Zafixujeme $x_0 \in \mathbb{R}^n$, aby rovnice byla definována na nějakém $U(x_0)$. Chceme také rovnici transformovat tak, aby $A = (a_{ij})$ byla diagonální. Budeme pp. A je symetrická (neboť pro $u \in C^2(\dots)$: $\partial_i\partial_j u = \partial_j\partial_i u$)

Definice 2.1 (Transformace diferenciální rovnice)

Vezmeme nějaké y_0 a $U(y_0)$ a hladké? zobrazení $\varphi(y_0) = x_0$ a $\varphi(U(y_0)) \subset U(x_0)$.

Definujeme funkci v: $u(x) = v(P \cdot x)$, kde $P \in M^{n\times n}$ je regulární matice. $u(\overbrace{P^{-1}y}^{\varphi(y)}) = v(y)$.

Dosadíme do rovnice výše:

$$\partial_i u(x) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k v(Px) P_{ki}, \qquad \partial_j\partial_i u(x) = \sum_{k=1}^{m} P_{ki} \sum_{l=1}^{n} P_{lj} \partial_k \partial v(Px),$$

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n} \partial_k\partial_l v(Px) P_{ki} a_{ij}(x)(P^T)_{jl} = \sum_{k,l=1}^{n} \partial_k\partial_l v(Px)(PA(x)P^T)_{kl}$$

LA: $A(x_0)$ je symetrická, tedy ze Sylvestrova zákona setrvačnosti existuje P regulární taková, že $PA(x_0)P^T = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ pro $d_i \in \{-1, 0, 1\}$. Pozor, P není určena jednoznačně, ale $d_1, \ldots, d_n$ ano až na permutaci.

Taktéž lze najít P tak, aby $P^T = P^{-1}$ a $PA(x_0)P^{-1} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ pro $d \in \mathbb{R}$.

Například
Vlnová rovnice v 1D: $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$.

Laplaceova rovnice v 2D: $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$.

Rovnice vedení tepla: $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$.

Definice 2.2 (Typy diferenciální rovnice 2. řádu)

Řekneme, že lineární diferenciální rovnice je

eliptická v x_0, pokud $\operatorname{sgn} A(x_0) = (n, 0, 0)$ nebo $(0, 0, n)$; (Laplace)

hyperbolická v x_0, pokud $\operatorname{sgn} A(x_0) = (n-1, 0, 1)$ nebo $(1, 0, n-1)$; (vlnová)

parabolická v x_0, pokud $\operatorname{sgn} A(x_0) = (n-1, 1, 0)$ nebo $(0, 1, n-1)$ a v případě $\operatorname{sgn} A(x_0) = (n-1, 1, 0)$ navíc požadujeme, aby koeficient b_n (odpovídající $d_n = 0$) po transformaci byl v bodě x_0 záporný, a v opačném případě kladný; (vedení tepla)

Věta 2.1

Buď S hyperbolická na okolí $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $a_{11}, a_{12}, a_{22} \in C^1(U(x_0))$, $a_{11} \neq 0$ na $U(x_0)$. Pak lze

$$a_{11}\partial_1^2 u + 2a_{12}\partial_1\partial_2 u + a_{22}\partial_2^2 u = 0$$

transformovat do tvaru $\partial_1\partial_2 v = f(\partial_1 v, \partial_2 v, v)$ na $V(x_0)$ pro vhodnou funkci f a okolí V.

Důkaz
Dokázáno na cvičení. □

3 Vlnová rovnice

Tvrzení 3.1 (Obecné řešení vlnové rovnice v 1D)

Řešení $\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0$, kterou lze transformovat na $\partial_1\partial_2 v = 0$, dostaneme skrze $\partial_2 v(\varrho\sigma) = \tilde{V_1}(\sigma)$, tedy $\int_0^\infty \tilde{V_1}(\tau)d\tau + V_2(\varrho) = V_1(\sigma) + V_2(\varrho) = v(\varrho, \sigma)$.

Obecným řešením je tedy

$$u(t, x) = V_1(x - ct) + V_2(x + ct),$$

pro dost hladké funkce V_1, V_2.

Poznámka (Úloha pro vlnovou rovnici (Cauchyova úloha))
Pro dané $f : (0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hledáme řešení $u : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f \text{ v } (0,T) \times \mathbb{R}.$$

A $u(0,x) = u_0(x)$, $\partial_t u(0,x) = u_1(x)$ ($\partial_t u$ musí jít spojitě rozšířit do $(0,x)$ a $\partial_t u(0,x)$ je hodnota tohoto rozšíření).