Příklad (3.1)
Nalezněte ireducibilní rozklad polynomu x^4 nad tělesy $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_5$.

Řešení
Ze střední školy víme, že rovnice $x^4 + 1 = 0$ má 4 řešení tvaru $e^{k\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}$ (jelikož $-1 = e^{\pi}$), tedy rozklad v $\mathbb{C}$ bude

$$x^4 + 1 = \left(x - e^{\pi/4}\right) \cdot \left(x - e^{3\pi/4}\right) \cdot \left(x - e^{5\pi/4}\right) \cdot \left(x - e^{7\pi/4}\right) =$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

jelikož polynomy stupně 1 jsou ireducibilní.

Příklad (3.2)
Nalezněte (nějaký) ireducibilní rozklad prvku $16 + i\sqrt{5}$ v oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

Řešení
Víme, že norma na $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ je dána $\nu(a+b\cdot i\sqrt{5}) = |a^2-5b^2|$, tedy $\nu(16+i\sqrt{5}) = |256-5| = 251$. To je prvočíslo, tedy jediný prvek, která dělí naše číslo je ono samo a 1 a asociované prvky, protože norma je celočíselná a pokud $a|b$, tak $\nu(a)|\nu(b)$. Takže ireducibilní rozklad $16 + i\sqrt{5}$ je třeba $16 + i\sqrt{5}$.

Příklad (3.3)
Nalezněte největšího společného dělitele čísel $4+6i$ a $3-7i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.

Řešení
Víme, že $\mathbb{Z}[i]$ je eulerovský, tedy použijeme eukleidův algoritmus.

Příklad (3.4)
Zvolme pevné $z \in \mathbb{C}$. Ukažte, že množina $\{f \in \mathbb{Q}[x] | f(z) = 0\}$ tvoří ideál okruhu $\mathbb{Q}[x]$.

Důkaz
Stačí ukázat uzavřenost na sčítání, opačný prvek a násobení libovolným prvkem $\mathbb{Q}[x]$:

$$f, g \in \mathbb{Q}[x] \wedge f(z) = g(z) = 0 \implies (f+g)(z) = 0 + 0 = 0,$$

$$f \in \mathbb{Q}[x] \wedge f(z) = 0 \implies (-f)(z) = -0 = 0,$$

$$f, g \in \mathbb{Q}[x] \wedge f(z) = 0 \implies (f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z) = 0 \cdot g(z) = 0.$$

□