

Poznámka (Úmluva)

Všechny topologické prostory v tomto semestru budou Hausdorffovy (T_2). Tedy regulární jsou automaticky T_3 , úplně regulární jsou automaticky T_π a normální jsou T_4 .

Speciálně např. kompaktní prostory jsou T_4 .

1 Parakompaktní prostory

Poznámka (Připomenutí)

Pokrytí, otevřené pokrytí, podpokrytí.

Definice 1.1 (Zjemnění)

Ať X je množina a \mathcal{S} je pokrytí X . Řekneme, že systém $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(X)$ je zjemnění \mathcal{S} , pokud \mathcal{T} je pokrytí a $\forall T \in \mathcal{T} \exists S \in \mathcal{S} : T \subseteq S$.

Definice 1.2 (Lokálně konečný systém)

Ať \mathbb{X} je TP, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$. \mathcal{S} se nazývá lokálně konečný, pokud

$$\forall x \in \mathbb{X} \exists U \in \mathcal{U}(x) : \{S \in \mathcal{S} | S \cap U \neq \emptyset\} \text{ je konečná.}$$

Systém \mathcal{S} se nazve diskrétní, pokud

$$\forall x \in \mathbb{X} \exists U \in \mathcal{U}(x) : |\{S \in \mathcal{S} | S \cap U \neq \emptyset\}| \leq 1.$$

Systém \mathcal{S} se nazve σ -lokálně konečný (resp. σ -diskrétní), pokud $\exists \mathcal{S}_n$, že $\mathcal{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$, že \mathcal{S}_n jsou lokálně konečné (resp. diskrétní), $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka

Diskrétní systém je lokálně konečný. σ -diskrétní systém je σ -lokálně konečný.

Lemma 1.1 (Uzávěr lokálně konečného prostoru)

Ať \mathbb{X} je TP, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ lokálně konečný systém. Pak $\{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\}$ je opět lokálně konečný a platí $\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \{\overline{A} | A \in \mathcal{A}\}$.

┌ *Důkaz*

Ať $x \in \mathbb{X}$ je libovolné. Existuje $U \in \mathcal{U}(x) : \{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$ je konečná. Ať $V = \bigcap U, V \in \mathcal{U}(x)$. $\{A \in \mathcal{A} : A \cap V \neq \emptyset\}$ je zřejmě konečná. $V \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow V \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Tedy $\{A \in \mathcal{A} : \bar{A} \cap V \neq \emptyset\} = \{A \in \mathcal{A} : A \cap V \neq \emptyset\}$. Tedy $\{\bar{A} | A \in \mathcal{A}\}$ je konečná.

$$\supseteq: \bigcup \mathcal{A} \supseteq A, A \in \mathcal{A}, \text{ tedy } \overline{\bigcup \mathcal{A}} \supseteq \bar{A} \Rightarrow \overline{\bigcup \mathcal{A}} \supseteq \bigcup \{\bar{A} | A \in \mathcal{A}\}.$$

\subseteq : Ať $x \in \overline{\bigcup \mathcal{A}}$. $\exists U \in \mathcal{U}(x)$ otevřená, že $\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\} = \{A_1, \dots, A_n\}$. $x \in \overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} \stackrel{\text{konečné}}{=} \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}$. $\exists i \leq n : x \in \bar{A}_i$. \square

Definice 1.3 (Parakompaktní)

TP \mathbb{X} se nazývá parakompaktní, pokud každé jeho otevřené pokrytí má lokálně konečné otevřené zjemnění.

Poznámka

Kompaktní \Rightarrow parakompaktní (protože podpokrytí je zjemnění a konečné je lokálně konečné).

Diskrétní TP \Rightarrow parakompaktní.

Tvrzení 1.2

Uzavřený podprostor parakompaktního TP je parakompaktní.

┌ *Důkaz*

\mathbb{X} je parakompaktní TP a $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená. Ať \mathcal{U} je otevřené pokrytí F (otevřenými množinami v F). Z definice podprostoru $\forall U \in \mathcal{U} \exists V_U$ otevřená v $\mathbb{X} : U = F \cap V_U$. Uvažujme $\mathcal{V} = \{V_U | U \in \mathcal{U}\} \cup \{F \setminus F\}$. \mathcal{V} je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Existuje otevřené lokálně konečné zjemnění \mathcal{W} tohoto \mathcal{V} . $\{F \cap W | W \in \mathcal{W}\}$ je otevřené pokrytí F a zároveň lokálně konečné. Navíc je to i zjemnění \mathcal{U} . \square

Věta 1.3 (Charakterizace parakompaktnosti)

Pro regulární TP \mathbb{X} jsou následující podmínky ekvivalentní:

- a) \mathbb{X} je parakompaktní.
- b) Každé otevřené pokrytí \mathbb{X} má otevřené σ -lokálně konečné zjemnění.
- c) Každé otevřené pokrytí \mathbb{X} má lokálně konečné zjemnění (libovolnými množinami).
- d) Každé otevřené pokrytí \mathbb{X} má uzavřené lokálně konečné zjemnění.

Důkaz

$a) \implies b)$: každé lokálně konečné zjemnění je σ -lokálně konečné.

$b) \implies c)$: Ať \mathcal{U} je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Podle b) existuje otevřené zjemnění $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, \mathcal{V}_n lokálně konečný systém. $W_n := \bigcup \mathcal{V}_n$ je otevřené $\{W_n | n \in \mathbb{N}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Ať $A_n := W_n \setminus \bigcup_{i < n} W_i$. $\{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ je lokálně konečné pokrytí \mathbb{X} (každé $x \in \mathbb{X}$ je v nějakém W_n , takže už není ve větších A_n). $\{A_n \cap V | n \in \mathbb{N}, V \in \mathcal{V}_n\}$ je lokálně konečné zjemnění \mathcal{U} .

$c) \implies d)$: Ať \mathcal{U} je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Pro každé $x \in \mathbb{X}$ existuje $U_x \in \mathcal{U} : x \in U_x$. Nyní máme bod v otevřené množině, tedy z regularity existují otevřené množiny $V_x \subseteq \mathbb{X} : x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$. $\mathcal{V} := \{V_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} . \mathcal{V} má lokálně konečné zjemnění \mathcal{W} podle c). $\{\overline{W} | W \in \mathcal{W}\}$ je lokálně konečný systém podle lemmatu „Uzávěr lokálně konečného systému“. Navíc je i pokrytí a zjemňuje \mathcal{U} .

$d) \implies a)$ Ať \mathcal{U} je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Z d) existuje lokálně konečné uzavřené zjemnění \mathcal{V} . Pro $x \in \mathbb{X}$ existuje W_x otevřené okolí x protínající jen konečně mnoho prvků z \mathcal{V} . $\mathcal{W} := \{W_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Z d) existuje lokálně konečné uzavřené zjemnění \mathcal{A} toho \mathcal{W} . Pro $V \in \mathcal{V}$ označíme $V^* := \mathbb{X} \setminus \bigcup \{A \in \mathcal{A} | A \cap V = \emptyset\}$. Zřejmě $V^* \supseteq V$. Tedy $\{V^* | V \in \mathcal{V}\}$ je otevřené (odčítáme uzavřenou množinu, neboť A jsou uzavřené a množina je lokálně konečná, tedy podle lemmatu ... je uzavřené i sjednocení) pokrytí.

Ať $x \in \mathbb{X}$. $\exists U$ okolí x , které protíná jen konečně prvků $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Zřejmě $U \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$. Každé A_i je podmnožinou nějakého W_y , tj. (podle volby W_y) A_i protíná jen konečně mnoho prvků z \mathcal{V} . Navíc je-li $V \in \mathcal{V}$ a $A \in \mathcal{A}$, že $A \cap V = \emptyset$, pak $A \cap V^* = \emptyset$. Tedy každé A_i protíná pouze konečně mnoho prvků $V^*, V \in @V$. Pro každé $V \in @V$ fixujeme $U_v \in \mathcal{U} : V \subseteq U_v$. Zřejmě $V \subseteq U_v \cap V^*$. Pak $\{U_v \cap V^* | V \in \mathcal{V}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} , které je lokálně konečné a které je zjemnění \mathcal{U} . \square

Důsledek

Každý Lindelöfův regulární prostor je parakompaktní.

Důkaz

Ať \mathcal{U} je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Z lindelöfovosti existuje spočetné pokrytí $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. \mathcal{V} je σ -lokálně konečné otevřené zjemnění \mathcal{U} . Tedy platí b) z minulé věty. \square

Definice 1.4 (Skrčení)

Ať X je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (pokrytí X). Indexovaný systém $\{T_S : S \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se nazývá skrčení systému \mathcal{S} , pokud (je to pokrytí) a $T_S \subseteq S, S \in \mathcal{S}$.

Poznámka (Nadmutí)

Skrčení je speciální případ zjemnění.

Podobně jako skrčení lze definovat pojem nadmutí.

Lemma 1.4 (O skrčení)

Ať \mathbb{X} je normální TP. Pak každé lokálně konečné (stačí bodově konečné) otevřené pokrytí \mathbb{X} má uzavřené skrčení, jehož vnitřky tvoří pokrytí.

┌

Důkaz

Ať $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$, κ kardinál, \mathcal{U} je lokálně kompaktní, otevřené pokrytí \mathbb{X} . Nyní $F_0 := \mathbb{X} \setminus \bigcup \{U_\alpha : 0 < \alpha < \kappa\}$ uzavřená, $F_0 \subseteq U_0$ (z toho, že \mathcal{U} je pokrytí). Z normality existuje otevřená $V_0 \subseteq \mathbb{X} : F_0 \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq U_0$.

Nyní indukci: Nechť máme zkonstruované $V_\beta : \forall \beta < \alpha < \kappa$. Označíme $F_\alpha := \mathbb{X} \setminus (\bigcup \{V_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup \{U_\gamma : \alpha < \gamma < \kappa\})$. Z normality zas $V_\alpha \subseteq \mathbb{X} : F_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$.

$\mathcal{V} = \{\overline{V_\alpha} : \alpha < \kappa\}$ je skrčení \mathcal{U} , $\text{int } \overline{V_\alpha} \supseteq V_\alpha$ a $\bigcup_{\alpha < \kappa} V_\alpha = \mathbb{X}$, tedy $\bigcup_{\alpha < \kappa} \text{int } \overline{V_\alpha} = \mathbb{X}$. \square

└

Definice 1.5 (Kolektivně normální)

TP \mathbb{X} se nazývá kolektivně normální, pokud pro každý diskretní systém \mathcal{F} z uzavřených množin existuje disjunkttní systém otevřených množin $\{U(F) : F \in \mathcal{F}\}$, že $F \subseteq U(F)$, $F \in \mathcal{F}$ (tj. otevřené nadmutí).

Poznámka

Každý kolektivně normální prostor je normální.

Tvrzení 1.5

Každý parakompaktní prostor už je kolektivně normální, tedy i normální.

┌

Důkaz

Ukážeme nejprve, že \mathbb{X} je regulární. Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Pro $y \in F$ existuje otevřené okolí U_y bodu y , že $x \notin \overline{U_y}$. $\mathcal{U} := \{U_y : y \in F\} \cup \{\mathbb{X} \setminus F\}$ otevřené pokrytí \mathbb{X} . Ať \mathcal{V} je lokálně konečné otevřené zjemnění \mathcal{U} . $G := \bigcup \{V \in \mathcal{V} : V \cap F \neq \emptyset\}$. Z lemmatu $\overline{G} = \bigcup \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}, V \cup F \neq \emptyset\} \not\ni x$. $G \supset F$, G otevřená. Tedy \mathbb{X} je regulární.

Ať \mathcal{F} je diskretní soubor z uzavřených množin. Pro $F \in \mathcal{F}$ uvažíme $\bigcup \{H \in \mathcal{F} : H \neq F\}$... uzavřená z lemmatu o uzávěru sjednocení lokálně kompaktního systému. Pro $x \in F$ existuje (z první části důkazu) U_x otevřená, že $x \in U_x$, $\overline{U_x} \cap H = \emptyset$ pro $H \neq F, H \in \mathcal{F}$. $\{U_x : x \in F \in \mathcal{F}\} \cup \{\mathbb{X} \setminus \bigcup F\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Ať \mathcal{V} je otevřené lokálně konečné zjemnění. Pro $F \in \mathcal{F} : V(F) := \{V \in \mathcal{V} : V \cup F \neq \emptyset\} \setminus \bigcup \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}, V \cap H \neq \emptyset \text{ pro nějaké } H \in \mathcal{F}, H \neq F\}$. Platí $F \subseteq V(F)$. Pro $F, F' \in \mathcal{F}, F \neq F' \implies V(F) \cap V(F') = \emptyset$. $\{V(F) : F \in \mathcal{F}\}$ je disjunkttní otevřené nadmutí \mathcal{F} . \square

└

Definice 1.6 (Hvězda)

Ať \mathbb{X} je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$, $x \in \mathbb{X}$, $A \subseteq \mathbb{X}$.

Hvězda bodu x vzhledem k \mathcal{S} je $\text{st}(x, \mathcal{S}) = \bigcup \{S \in \mathcal{S} : x \in S\}$.

Hvězda množiny A vzhledem k \mathcal{S} je $\text{st}(A, \mathcal{S}) = \bigcup_{x \in A} \text{st}(x, \mathcal{S})$.

Definice 1.7 (Barycentrické a hvězdovité zjemnění)

Ať \mathcal{U}, \mathcal{V} jsou pokrytí \mathbb{X} . Řekneme, že \mathcal{U} barycentricky zjemňuje \mathcal{V} , pokud $\{\text{st}(x, \mathcal{U}) : x \in \mathbb{X}\}$ zjemňuje \mathcal{V} .

Řekneme, že \mathcal{U} hvězdovitě zjemňuje \mathcal{V} , pokud $\{\text{st}(U, \mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$ zjemňuje \mathcal{V} .

Například

Ať (\mathbb{X}, ρ) je MP. Ať $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ jsou pokrytí \mathbb{X} tvořená po řadě všemi $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon$ koulemi ($\varepsilon > 0$ pevné). Pak \mathcal{U} zjemňuje barycentricky \mathcal{V} a hvězdovitě \mathcal{W} .

Lemma 1.6 (Dvojitě barycentrické zjemnění je hvězdovité)

Ať X je množina, \mathcal{U} pokrytí X , \mathcal{V} barycentrické zjemnění \mathcal{U} a \mathcal{W} barycentrické zjemnění \mathcal{V} . Potom \mathcal{W} je hvězdovité zjemnění \mathcal{U} .

┌

Důkaz

Mějme $W \in \mathcal{W}$ libovolně. Chceme najít $U \in \mathcal{U} : \text{st}(W, \mathcal{W}) \subseteq U$. $W = \emptyset$ triviální. $W \neq \emptyset$:
Fixujeme $x_0 \in W$. Pro každé $x \in \mathbb{X}$ existuje $V_x \in \mathcal{V} : \text{st}(x, \mathcal{W}) \subseteq V_x$. Nyní

$$\text{st}(W, \mathcal{W}) = \bigcup \{T \in \mathcal{W} : T \cap W \neq \emptyset\} = \bigcup \{\{T \in \mathcal{W} | x \in T\} | x \in W\} = \bigcup \{\text{st}(x, \mathcal{W}) | x \in W\} \subseteq \bigcup \{V_x | x \in W\}$$

protože $W \subseteq V_x$ pro každé $x \in W$. \mathcal{V} barycentricky zjemňuje \mathcal{U} , tedy existuje $u \in \mathcal{U} : \text{st}(x_0, \mathcal{V}) \subseteq U$. □

└

Věta 1.7 (Charakterizace parakompaktnosti pomocí hvězdovitých zjemnění)

Pro TP \mathbb{X} je ekvivalentní:

- \mathbb{X} je parakompaktní.
- Každé otevřené pokrytí \mathbb{X} má barycentrické zjemnění.
- Každé otevřené pokrytí \mathbb{X} má hvězdovité zjemnění.
- Každé otevřené pokrytí \mathbb{X} má otevřené σ -diskrétní zjemnění a \mathbb{X} je regulární.

┌ *Důkaz*

a) \implies b) Ať \mathcal{U} je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Z a) vyplývá, že existuje jeho lokálně konečné otevřené zjemnění \mathcal{V} . Víme, že \mathbb{X} je parakompaktní, tedy normální. Z lemmatu o skrčení existuje uzavřené pokrytí $\mathcal{W} = \{W_V | V \in \mathcal{V}\}$, $W_V \subseteq V$. \mathcal{V} je lokálně konečné, tedy i \mathcal{W} je lokálně konečné. Pro $x \in \mathbb{X}$ definujeme $A_x = \bigcap \{V | x \in W_V\}$. Jde o konečný průnik (vzhledem k lokální kompaktnosti), tedy A_x je otevřená. Položme $B_x = \bigcup \{W \in \mathcal{W} | x \notin W\}$. Podle lemmatu o sjednocení lokálně konečného systému je B_x uzavřená. Zřejmě $x \in A_x \setminus B_x =: C_x$ je otevřená. Tedy $\mathcal{C} = \{C_x | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} .

Ukážeme, že \mathcal{C} barycentricky zjemňuje \mathcal{U} : Ať $y \in \mathbb{X}$. Chceme najít $V \in \mathcal{U}$: $\text{st}(y, \mathcal{C}) \subseteq V$. Víme, že existuje $V \in \mathcal{V}$: $y \in W_V$. Ať $x \in \text{st}(y, \mathcal{C})$. Pak $y \in C_x = A_x \setminus B_x$, tedy $y \notin B_x$, tudíž $x \in W_V \subseteq V$ (kdyby ne, pak $W_V \subseteq B_x$, tedy $y \notin C_x$).

b) \implies c) k otevřenému pokrytí můžeme najít barycentrické zjemnění, ke kterému můžeme najít barycentrické zjemnění. Pak c) vyplývá z předchozího lemmatu.

c) \implies d) \mathbb{X} je regulární: Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Uvažujme otevřené pokrytí $\{\mathbb{X} \setminus F, \mathbb{X} \setminus x\}$. Podle c) existuje otevřené hvězdovité zjemnění \mathcal{U} . $\exists U \in \mathcal{U} : x \in U$. Nutně $U \cap F = \emptyset$. Pak $\bar{U} \subseteq \text{st}(U, \mathcal{U}) \subseteq \mathbb{X} \subseteq \mathbb{X} \setminus F$. Tedy \mathbb{X} je regulární.

Ať \mathcal{U}_0 je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Chceme najít σ -diskrétní zjemnění toho \mathcal{U}_0 . Použijeme podmínku c) spočetně nekonečněkrát, abychom induktivně našli otevřená pokrytí $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$, že \mathcal{U}_{n+1} hvězdovitě zjemňuje \mathcal{U}_n , $n \geq 0$. Oindexujme prvky $\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 = \{U_i | i \in I\}$. Pro $i \in I$ a pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme $U_{i,n} := \{x \in \mathbb{X} | x \text{ má okolí } V : \text{st}(V, \mathcal{U}_n) \subseteq U_i\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N} : \{U_{i,n} | i \in I\}$ je otevřené zjemnění \mathcal{U} , ale ne nutně pokrytí.

Pomocné tvrzení: Pokud $x \in U_{i,n}$, $u \notin U_{i,n+1}$, pak neexistuje $U \in \mathcal{U}_{n+1}$, že $x, y \in U$. Důkaz: Pro $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ existuje $W \in \mathcal{U}_n : \text{st}(U, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq W$. Tedy pokud $x \in U \cap U_{i,n}$, pak $W \subseteq \text{st}(x, \mathcal{U}_n) \subseteq U_i$. Pak $\text{st}(U, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq U_i$ a $u \subseteq U_{i,n+1}$. Tedy $y \notin U$, protože $y \notin U_{i,n+1}$.

Uvažme dobré uspořádání $<$ na I . Ať $V_{i_0,n} = U_{i_0,n} \setminus \bigcup \{U_{i,n+1} | i < i_0\}$, $i_0 \in I, n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $** = \{V_{i_0,n} | i_0 \in I, n \in \mathbb{N}\}$ je hledané σ -diskrétní zjemnění \mathcal{U}_0 . Pro $i_1 \neq i_2, i_1, i_2 \in I$, pak $i_1 < i_2$ nebo naopak. Podle toho buď $V_{i_2,n} \subseteq \mathbb{X} \setminus U_{i_1,n+1}$ nebo $V_{i_1,n} \subseteq \mathbb{X} \setminus U_{i_2,n+1}$. Podle pomocného tvrzení platí, že pokud $x \in V_{i_1,n}$ a $y \in V_{i_2,n}$, pak neexistuje $U \in \mathcal{U}_{n+1}$, že $x, y \in U$. To nám říká, že $\forall n \in \mathbb{N} : \{V_{i,n} | i \in I\}$ je diskrétní. Zbývá už jen ukázat, že $**$ je pokrytí: Ať $y \in \mathbb{X}$. Existuje $<$ -nejmenší $i(y) \in I : y \in U_{i(y),n}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Nyní $y \notin U_{i,n+2}$ pro $i < i(y)$. Podle pomocného tvrzení použitého na $n+1$ platí $\text{st}(y, \mathcal{U}_{n+2}) \cap \bigcup \{U_{i,n+1} | i < i(y)\} = \emptyset$. Tedy $y \in V_{i(y),n}$.

d) \implies a) Víme, že \mathbb{X} je regulární, tedy můžeme aplikovat charakterizaci parakompaktности z minulého týdne, jelikož σ -diskrétní $\implies \sigma$ -lokálně konečný. \square

Věta 1.8 (Stone)

Každý metrizovatelný prostor je parakompaktní.

┌ *Důkaz*

Ukážeme, že každé otevřené pokrytí \mathcal{U} má barycentrické zjemnění. Fixujeme na nějakém tom prostoru \mathbb{X} kompatibilní metriku $\varrho \leq 1$. Navíc bůno $\mathbb{X} \notin \mathcal{U}$. Pro každé $x \in \mathbb{X}$ a $U \in \mathcal{U}$, že $x \in U$, existuje největší možné $\varepsilon_{x,U} > 0$, že $B(x, 5\varepsilon_{x,U})$. Položíme $\mathcal{V} = \{B(x, \varepsilon_{x,U}) | x \in U \in \mathcal{U}\}$. Ověříme, že \mathcal{V} barycentricky zjemňuje \mathcal{U} : Ať $x \in \mathbb{X}$. Chceme najít $U \in \mathcal{U} : \text{st}(x, \mathcal{V}) \subseteq U$. Ať $\varepsilon_x = \sup \{\varepsilon_{x,U} | x \in U \in \mathcal{U}\}$. $0 < \varepsilon_x \leq 1$. Existuje $U \in \mathcal{U} : \varepsilon_{x,U} \geq \frac{\varepsilon_x}{2}$.

Ukážeme, že $\text{st}(x, \mathcal{V}) \subseteq U$. Ať tedy $x \in B(y, \varepsilon_{y,v})$ pro nějaké $y \in V \in \mathcal{U}$. Chceme $B(y, \varepsilon_{y,v}) \subseteq U$. Máme $B(y, 5\varepsilon_{y,v}) \subseteq V$ a zároveň $\varrho(x, y) < \varepsilon_{U,V}$. Z Δ -nerovnosti: $B(x, 4\varepsilon_{y,V}) \subseteq V$. Z maximality $\varepsilon_{x,V} \geq \frac{1}{5}4\varepsilon_{y,V}$. Také $2\varepsilon_{x,U} > \varepsilon_x \geq \varepsilon_{x,V}$. Dohromady $2\varepsilon_{x,U} > \frac{4}{5}\varepsilon_{y,V}$, tj. $5\varepsilon_{x,U} > 2\varepsilon_{y,V}$. Pro $z \in B(y, \varepsilon_{y,V}) : \varrho(x, z) < 2\varepsilon_{y,V}$, a tedy $\varrho(x, z) < 5\varepsilon_{x,U}$. Proto $z \in U$. Tudíž $B(y, \varepsilon_{y,v}) \subseteq U$. □

Definice 1.8

Pro funkci $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ značíme $\text{supp } f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$.

Věta 1.9 (Rozklad jednotky)

Ať \mathbb{X} je parakompaktní prostor, \mathcal{U} otevřené pokrytí \mathbb{X} . Pak existuje rozklad jednotky podřízený tomuto pokrytí, tj. systém spojitých funkcí $f_i : X \rightarrow [0, 1]$, $i \in I$, že $\{\text{supp } f_i : i \in I\}$ je lokálně konečné zjemnění \mathcal{U} a $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1, \forall x \in \mathbb{X}$.

┌ *Důkaz*

\mathbb{X} parakompaktní, tedy normální. Tedy existuje otevřené pokrytí \mathcal{W} takové, že $\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ zjemňuje \mathcal{U} . Ať \mathcal{V} je lokálně konečné otevřené zjemnění \mathcal{W} . Víme, že existuje uzavřené skrčeni $\{F_V : V \in \mathcal{V}\}$, $F_V \subseteq V$. Z normality existují spojitě funkce $g_V : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$, $g_V|_{F_V} = 1$, $g_V|_{\mathbb{X} \setminus V} = 0$. Položme $g(x) := \sum_{V \in \mathcal{V}} g_V(x)$. Funkce g je spojitá, protože spojitost je lokální pojem a g je lokálně součet konečně mnoha nenulových spojitých funkcí. Navíc zřejmě $g \geq 1$, protože $\{F_V : V \in \mathcal{V}\}$ je pokrytí \mathbb{X} . Tedy položíme $f_V := \frac{g_V}{g}$. □

Věta 1.10 (Michaelova selekční)

Zdola polospojité (vícehodnotová) funkce z parakompaktního prostoru do neprázdných uzavřených konvexních podmnožin Banachova prostoru má spojitou selekci.

Věta 1.11 (Dugunjiho)

Ať \mathbb{X} je metrizaovatelný a $A \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená. Pak existuje lineární zobrazení $L : C(A, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{X}, \mathbb{R})$, že $L(f)$ rozšiřuje f pro $f \in C(A, \mathbb{R})$.

2 Metrizační věty

Poznámka (Opakování)

Uryshonova metrizační věta: Regulární prostor se spočetnou bází je metrizovatelný.

Věta 2.1 (Bing, Nagata, Smirnov)

Pro regulární prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní:

- a) X je metrizovatelný.*
- b) X má σ -diskrétní bázi.*
- c) X má σ -lokálně konečnou bázi.*

┌ *Důkaz*

a) \implies b): Ať \mathcal{B}_n je otevřené pokrytí \mathbb{X} koulemi o poloměru $\frac{1}{n}$. \mathbb{X} je parakompaktní podle Stoneovy věty. Z charakterizace parakompaktnosti máme, že \mathcal{B}_n má σ -diskrétní otevřené zjemnění \mathcal{V}_n . $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ je opět σ -diskrétní, navíc je to báze.

b) \implies c): triviální.

c) \implies a) Ať $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ je báze \mathbb{X} , \mathcal{B}_n lokálně konečný soubor. Uvědomíme si, že \mathbb{X} je parakompaktní: Je-li totiž \mathcal{U} otevřené pokrytí \mathbb{X} , pak $\{B \in \mathcal{B} : \exists U \in \mathcal{U} : B \subseteq U\}$ je zjemnění \mathcal{U} a vzhledem k tomu, že B je báze, tak je to i pokrytí. Navíc je σ -lokálně konečné. Tedy z charakterizace parakompaktnosti to máme.

Z parakompaktnosti dostáváme normalitu \mathbb{X} . Pro $n, k \in \mathbb{N}$ a $B \in \mathcal{B}_n$ položme $V_{k,n,B} := \bigcup \{C \in \mathcal{B}_k : \overline{C} \subseteq B\}$. \mathcal{B}_k je lokálně konečný, tedy (z lemmatu o uzávěru lokálně konečného systému) $\overline{V_{k,n,B}} \subseteq B$. Tedy existují (z normality) spojitě funkce $f_{k,n,B} : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$, $f_{k,n,B}(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{X} \setminus B$ a 1 pro $x \in \overline{V_{k,n,B}}$.

Definujeme $M_{k,n} \subseteq [0, 1]^{\mathcal{B}_n}$ následovně $M_{k,n} = \{\varphi : \mathcal{B}_n \rightarrow [0, 1] : \{B \in \mathcal{B}_n : \varphi(B) \neq 0\} \text{ je konečná}\}$. Na $M_{k,n}$ uvažme metriku $\varrho_{k,n}\varphi, \psi := \sum_{B \in \mathcal{B}_n} |\varphi(B) - \psi(B)|$. Ať $g_{k,n} : \mathbb{X} \rightarrow M_{k,n}$, $g_{k,n} = \Delta_{B \in \mathcal{B}_n} f_{k,n,B}$, $g_{k,n}(x) = (f_{k,n,B}(x))_{B \in \mathcal{B}_n}$.

Ověříme, že $g_{k,n} : \mathbb{X} \rightarrow (M_{k,n}, \varrho_{k,n})$ je spojitě: Ať $x \in \mathbb{X}$, $\varepsilon > 0$, existuje U okolí x protínající jen konečně prvků $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}_n$. $f_{k,n,B_1}, \dots, f_{k,n,B_m}$ jsou spojitá, tedy existuje $V \subseteq U$ okolí x , že $|f_{k,n,B}(x) - f_{k,n,B_i}(y)| < \frac{\varepsilon}{m}$ pro $i \leq m, y \in V$. Nyní

$$\varrho_{k,n}(g_{k,n}(x), g_{k,n}(y)) = \sum_{i=1}^m |g_{k,n}(x)(B_i) - g_{k,n}(y)(B_i)| = \sum_{i=1}^m |f_{k,n,B}(x) - f_{k,n,B_i}(y)| < m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Pokud systém $\{g_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}\}$ odděluje body a uzavřené množiny, pak $\delta := \Delta_{k,n \in \mathbb{N}} g_{k,n} : \mathbb{X} \rightarrow \prod_{k,n \in \mathbb{N}} M_{k,n}$ je vnoření (podle lemmatu o Tichonovově vnoření). Tím jsme vnořili \mathbb{X} do spočetného součinu metrizablečních prostorů, tedy do metrizablečního prostoru, tedy \mathbb{X} je metrizableční.

$\{g_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}\}$ odděluje body a uzavřené množiny: Ať $F \subseteq \mathbb{X}$ je uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Existuje $n \in \mathbb{N}$ a $B \in \mathcal{B}_n : x \in B \subseteq \mathbb{X} \setminus F$. Z regularity existuje $C \in \mathcal{B}_k, k \in \mathbb{N}$, $g_{k,n}(x)(B) = f_{k,n,B}(x) = 1$ a $g_{k,n}(y)(B) = f_{k,n,B}(y) = 0$ pro $y \in \mathbb{X} \setminus B \supseteq F$. \square

Definice 2.1

Ať \mathbb{X} je TP. Posloupnost otevřených pokrytí \mathcal{V}_n prostoru \mathbb{X} se nazývá development, pokud pro každé $x \in \mathbb{X} : \{\text{st}(x, \mathcal{V}_n) | n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí v bodě x .

Poznámka

Je-li (X, ϱ) MP, pak $\mathcal{V}_n := \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}, n \in \mathbb{N}$ je development X .

Věta 2.2 (Bing)

$TP \mathbb{X}$ je metrizovatelný \Leftrightarrow je kolektivně normální a má development.

┌

Důkaz

\Rightarrow : metrizovatelný \Rightarrow má development (podle předchozí poznámky) a metrizovatelný

\Rightarrow parakompaktní \Rightarrow kolektivně normální.

\Leftarrow : Dokážeme ve 4 částech:

1. Pro diskretní soubor $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uzavřených množin v \mathbb{X} existuje diskretní soubor otevřených množin $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$, že $F_\alpha \subseteq W_\alpha$: Dle kolektivní normality existují otevřené disjunktní $U_\alpha : \alpha \in A, F_\alpha \subseteq U_\alpha$. Položme $F = \bigcup \mathcal{F}$, $Z = \mathbb{X} \setminus \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. F uzavřená (sjednocení lokálního systému uzavřených množin), Z uzavřená. \mathbb{X} je kolektivně normální, tedy speciálně normální, tedy existují otevřené disjunktní V, W , že $Z \subseteq V$ a $F \subseteq W$. Položme $W_\alpha := U_\alpha \cap W$. Systém $\{W_\alpha\}$ už je diskretní (je-li $x \in Z$, pak $x \in V$ a $V \cap W_\alpha = \emptyset$, je-li naopak x v U_α , pak $U_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$ pro $\beta \neq \alpha$) a $F_\alpha \subseteq W_\alpha$.

2. Ať \mathcal{V}_n je development prostoru \mathbb{X} . Buď $\varkappa \geq \omega$ a očíslejme $\mathcal{V}_n = \{V_{\alpha,n} | \alpha < \varkappa\}$ (s případným opakováním prvků). Položme $D_{\alpha,n,k} = \{x \in V_{\alpha,n} | \text{st}(x, V_k) \subseteq V_{\alpha,n}\}$ a $C_{\alpha,n,k} = D_{\alpha,n,k} \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} V_{\beta,n}$. $D_{\alpha,n,k}$ (a tudíž i $C_{\alpha,n,k}$) je uzavřená:

Volme $x \in \overline{D_{\alpha,n,k}}$. Pak pro libovolné $V \in \mathcal{V}_k$, že $x \in V$ platí, že existuje $y \in V \cap D_{\alpha,n,k}$. Pak $V \subseteq \text{st}(y, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$. Tedy $\text{st}(x, \mathcal{V}_k) = \bigcup \{V \in \mathcal{V}_k | x \in V\} \subseteq V_{\alpha,n}$. Tedy $x \in D_{\alpha,n,k}$, tudíž $D_{\alpha,n,k}$ je uzavřená.

3. Pro pevná $n, k \in \mathbb{N}$ je $\{C_{\alpha,n,k} | \alpha < \varkappa\}$ diskretní: Buď $y \in \mathbb{X}$ libovolné. Pak existuje nejmenší $\beta < \varkappa : y \in V_{\beta,n}$. Najdeme $V \in \mathcal{V}_k : y \in V$. Pro $\alpha > \beta : V_{\beta,n}$ je disjunktní s $C_{\alpha,n,k}$ a pro $\alpha < \beta : V$ je disjunktní s $C_{\alpha,n,k}$ (kdyby existovalo $z \in V \cap C_{\alpha,n,k}$ pak $\text{st}(z, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$, speciálně $y \in V_{\alpha,n}$, což je spor s minimalitou β). Tedy $V \cap V_{\beta,n}$ je okolí bodu y , které protíná nejvýše jeden prvek systému $\{C_{\alpha,n,k} | \alpha \in A\}$ (a sice prvek $C_{\beta,n,k}$).

4. $\{C_{\alpha,n,k}\}$ je diskretní soubor uzavřených množin (podle 2, 3). Podle 1 existuje diskretní soubor otevřených nadmnožin $\{V_{\alpha,n,k} | \alpha < \varkappa\}$. Tedy $\mathcal{V}_{n,k} := \{V_{\alpha,n,k} \cap V_{\alpha,n} | \alpha < \varkappa\}$ je diskretní (zmenšili jsme jeho množiny). Ukážeme, že $\mathcal{V} := \bigcup_{n,k \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_{n,k}$ je báze \mathbb{X} :

Ať $U \subseteq \mathbb{X}$ je otevřená, $x \in U$. $\exists n \in \mathbb{N} : \text{st}(x, \mathcal{V}_n) \subseteq U$. Najdeme α nejmenší možné, že $x \in V_{\alpha,n}$. Zřejmě $V_{\alpha,n} \subseteq U$. Opět z vlastností developmentu existuje $k \in \mathbb{N} : \text{st}(x, \mathcal{V}_k) \subseteq V_{\alpha,n}$. Nyní $x \in C_{\alpha,n,k}$, tedy $x \in V_{\alpha,n,k} \cap V_{\alpha,n} \subseteq U$. Tudíž \mathcal{V} je báze \mathbb{X} .

\mathcal{V} je σ -diskretní báze \mathbb{X} , tedy podle metrizační věty Bing-Nagata-Smirnov je \mathbb{X} metrizovatelný. □

└

3 Uniformní prostory

Poznámka

Zavedeno např. díky tomu, že stejnoměrnou spojitost nelze charakterizovat pomocí topologie.

Matematici Weil(1936), Tukey(1940) ... prvotní zkoumání UP.

Definice 3.1 (Značení)

Pro množinu \mathbb{X} značíme $\Delta(X) = \{(x, x) | x \in X\}$.

Pro $E \subseteq X \times X$ značíme $E^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in E\}$.

Pro $C, D \in X \times X$ značíme $C \circ D = \{(x, z) \in X \times X | \exists y \in X : (x, y) \in C \wedge (y, z) \in D\}$.

$E[x] = \{y \in X | (x, y) \in E\}$.

Definice 3.2 (Uniformní prostor (UP))

Dvojice $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá uniformní prostor (UP), pokud \mathbb{X} je množina a $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$ splňující

1. $\forall D \in \mathcal{D} : \Delta(\mathbb{X}) \subseteq D$,
2. $\forall C, D \in \mathcal{D} : C \cap D \in \mathcal{D}$,
3. $\forall D \in \mathcal{D} \exists C \in \mathcal{D} : C \circ C \subseteq D$,
4. $\forall D \in \mathcal{D} : D^{-1} \in \mathcal{D}$,
5. $\forall D \in \mathcal{D} \forall E \subseteq X \times X : D \subseteq E \implies E \in \mathcal{D}$,
6. $\forall x, y \in X : x \neq y \implies \exists D \in \mathcal{D} : (x, y) \notin D$. ($\Leftrightarrow \bigcap \mathcal{D} = \Delta(\mathbb{X})$.)

Prvky systému \mathcal{D} nazýváme okolí diagonály.

Definice 3.3 (Báze uniformity)

Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X^2)$ se nazývá báze uniformity (resp. báze uniformity \mathcal{D}), pokud uzavřením \mathcal{B} na nadmnožiny dostaneme \mathcal{D} .

Definice 3.4 (Subbáze uniformity)

Systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X^2)$ tvoří subbázi uniformity (resp. uniformity \mathcal{D}), pokud uzavřením na konečné průniky dostaneme bázi uniformity (resp. bázi uniformity \mathcal{D}).

Definice 3.5 (Uniformní zobrazení)

Jsou-li $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ a $(\mathbb{Y}, \mathcal{E})$ UP, $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ se nazývá uniformní (stejněměrně spojitě), pokud $\forall E \in \mathcal{E} : (f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{D}$. ($\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E} \exists D \in \mathcal{D} : (f \times f)(D) \subseteq E$.) ($\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E} \exists D \in \mathcal{D} \forall x, y \in \mathbb{X} : (x, y) \in D \implies (f(x), f(y)) \in E$.)

Definice 3.6 (Uniformní izomorfismus)

Zobrazení f se nazývá uniformní izomorfismus, pokud f je bijekce a f i f^{-1} jsou uniformní.

Lemma 3.1

Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}^2)$ tvoří bázi nějaké uniformity na \mathbb{X} , pokud

$$a) \bigcap \mathcal{B} = \Delta(\mathbb{X}),$$

$$b) \forall C, D \in \mathcal{B} \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq C \cap D,$$

$$c) \forall D \in \mathcal{B} \exists C \in \mathcal{B} : C \circ C \subseteq D,$$

$$d) \forall D \in \mathcal{B} \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq D^{-1}.$$

┌ Důkaz

└ $\mathcal{D} := \{C \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X} \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq C\}$. Následně ověříme podmínky. □

Tvrzení 3.2 (Vytvoření UP z MP a TP z UP)

Je-li (\mathbb{X}, ϱ) metrický prostor a $D_\varepsilon = \{(x, y) \mid \varrho(x, y) < \varepsilon\}$, potom $\{D_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ je báze nějaké uniformity na \mathbb{X} – značíme ji \mathcal{D}_ϱ . Tato uniformita se nazývá generovaná metrikou ϱ .

Je-li $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ UP, pak systém $\tau_{\mathcal{D}} = \{A \subseteq \mathbb{X} \mid \forall x \in A \exists D \in \mathcal{D} : D[x] \subseteq A\}$ je topologie na \mathbb{X} a pro každé $x \in \mathbb{X}$ tvoří systém $\mathcal{B}(x) := \{D[x] \mid D \in \mathcal{D}\}$ bázi okolí v bodě x . Topologie $\tau_{\mathcal{D}}$ se nazývá generovaná uniformitou \mathcal{D} .

Pokud místo systému \mathcal{D} použijeme v definici topologie $\tau_{\mathcal{D}}$ nějakou bázi \mathcal{D} , pak dostaneme stejnou topologii. Zároveň také $\tau_{\mathcal{D}_\varrho}$ je systém všech otevřených množin v (\mathbb{X}, ϱ) .

┌ Důkaz

└ Ověříme definice. □

Definice 3.7

UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá metrizable, pokud existuje metrika ϱ na \mathbb{X} , že $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\varrho$. TP (\mathbb{X}, τ) se nazývá metrizable, pokud existuje uniformita \mathcal{D} na \mathbb{X} , že $\tau = \tau_{\mathcal{D}}$

Definice 3.8

Ať $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$, $A \subseteq \mathbb{X}$, pak značíme $\text{st}(A, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap A \neq \emptyset\}$. $\mathcal{U}^* = \{\text{st}(U, \mathcal{U}) \mid U \in \mathcal{U}\}$.

Pro \mathcal{U}, \mathcal{V} pokrytí \mathbb{X} , definujeme jejich společné zjemnění $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$.

Poznámka

Pro \mathcal{U}, \mathcal{V} pokrytí množiny \mathbb{X} : \mathcal{U} hvězdovitě zjemňuje \mathcal{V} , pokud \mathcal{U}^* zjemňuje \mathcal{V} .

Definice 3.9

Ať \mathbb{X} je množina, $\mathbf{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$ se nazývá pokrývací uniformita na \mathbb{X} , pokud:

- $\forall \mathcal{U} \in \mathbf{U} : \mathcal{U}$ je pokrytí \mathbb{X} ,
- Je-li $\mathcal{U} \in \mathbf{U}$, \mathcal{V} pokrytí \mathbb{X} a \mathcal{U} zjemňuje \mathcal{V} , pak $\mathcal{V} \in \mathbf{U}$,
- $\forall \mathcal{U} \in \mathbf{U} \exists \mathcal{V} \in \mathbf{U} : \mathcal{V}$ hvězdovitě zjemňuje \mathcal{U} ,
- $\forall \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathbf{U} : \mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \in \mathbf{U}$,
- $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists \mathcal{U} \in \mathbf{U} \forall U \in \mathcal{U} : |\{x, y\} \cap U| \leq 1$.

Prvky systému \mathbf{U} se nazývají uniformní pokrytí.

Je-li \mathbf{U} pokrývací uniformita na \mathbb{X} , pak položíme

$$\mathcal{D}_{\mathbf{U}} := \{D \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbf{U} \forall U \in \mathcal{U} : U \times U \subseteq D\}.$$

Je-li \mathcal{D} (diagonální) uniformita na \mathbb{X} , pak položíme

$$\mathcal{U}_{\mathcal{D}} := \{\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{X})) \mid \exists D \in \mathcal{D} : \{D[x] \mid x \in \mathbb{X}\} \text{ zjemňuje } \mathcal{U}\}.$$

Přiřazení $\mathbf{U} \mapsto \mathcal{D}_{\mathbf{U}}$ a $\mathcal{D} \mapsto \mathbf{U}_{\mathcal{D}}$ jsou navzájem inverzní bijekce systému všech pokrývacích uniformit na \mathbb{X} a systém všech uniformit.

Lemma 3.3 (O pseudometrice)

Ať $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je UP a $D_i \in \mathcal{D}$, $D_i = D_i^{-1}$, $i \in \mathbb{N}_0$, $D_0 = \mathbb{X} \times \mathbb{X}$, $D_{i+1} \circ D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$. Pak existuje pseudometrika d na \mathbb{X} , že pro každé $i \geq 1$: $\{(x, y) : d(x, y) < \frac{1}{2^i}\} \subseteq D_i \subseteq \{(x, y) \mid d(x, y) \leq \frac{1}{2^i}\}$.

Důkaz

Položme $d(x, y) := \inf \left\{ \frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \dots + \frac{1}{2^{i_k}} \mid x_0, \dots, x_k \in \mathbb{X} \wedge (x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j} \wedge x = x_0, y = x_k \right\}$.
 $d(x, y)$ je pseudometrika na \mathbb{X} . $D_i \subseteq \left\{ (x, y) \mid d(x, y) \leq \frac{1}{2^i} \right\}$ vidíme z toho, že pro $(x, y) \in D_i$ zvolíme $k = 1$. Zbývá dokázat $\left\{ (x, y) \mid d(x, y) < \frac{1}{2^i} \right\} \subseteq D_i$. Tedy chceme, že $d(x, y) < \frac{1}{2^i}$, pak $(x, y) \in D_i$, tj. že pro každou posloupnost x_0, \dots, x_k , kde $(x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j}$: pokud $\frac{1}{2^{i_1}} + \dots + \frac{1}{2^{i_k}} < \frac{1}{2^i}$, pak $(x_0, x_k) \in D_i$. To dokážeme indukcí podle k :

Pro $k = 1 : \frac{1}{2^{i_1}} < \frac{1}{2^i}$, tj. $i < i_1$, tedy $(x_0, x_k) \in D_{i_1} \subseteq D_i$. Nyní předpokládejme, že $m > 1$ a pro všechna $k < m$ uvedené tvrzení platí. Uvažme posloupnost x_0, \dots, x_m , že $(x_{j-1}, x_j) \in D_{i_j}, j = 1, \dots, m$, a $\frac{1}{2^{i_1}} + \dots + \frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^i}$. Zřejmě buď $\frac{1}{2^{i_1}} < \frac{1}{2^{i+1}}$, nebo $\frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Ze symetrie obou případů můžeme BÚNO předpokládat platnost první nerovnosti.

Ať $n \leq m - 1$ je největší takové, že $\frac{1}{2^{i_1}} + \dots + \frac{1}{2^{i_n}} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Pokud $n < m - 1$, pak $\frac{1}{2^{i+1}} + \dots + \frac{1}{2^{i_{n+1}}} \geq \frac{1}{2^{i+1}}$, tedy $\frac{1}{2^{i_{n+1}}} + \dots + \frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Podle indukčního předpokladu $x_0, n \in D_{i+1}$, $(x_{n+1}, x_m) \in D_{i+1}$. Navíc $\frac{1}{2^{i_{n+1}}} < \frac{1}{2^i}$, tedy $i < i_{n+1}$, $i + 1 \leq i_{n+1}$, $D_{i_{n+1}} \subseteq D_{i+1}$. $(x_0, x_m) = (x_0, x_n) \circ (x_n, x_{n+1}) \circ (x_{n+1}, x_m) \in D_{i+1} \circ D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$.

Pokud $n = m - 1$, pak podle IP $x_0, x_{m-1} \in D_{i+1}$, a jelikož $\frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^i}$, tak $(x_{m-1}, x_m) \in D_{i_m} \subseteq D_{i+1}$. Tedy $(x_0, x_m) \in D_{i+1} \circ D_{i+1} \subseteq D_i$. \square

Věta 3.4 (Metrizovatelnost UP)

$UP(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je metrizovatelný, právě když má spočetnou bázi uniformity.

Důkaz

(\implies): Ať d je metrika na \mathbb{X} generující \mathcal{D} . Pak $\left\{ \left\{ (x, y) : d(x, y) < \frac{1}{n} \right\} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ je báze \mathcal{D} .

(\Leftarrow): Ať $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je báze \mathcal{D} . Indukcí najdeme posloupnost $D_n \in \mathcal{D}$, že jsou splněny předpoklady předchozího lemmatu. A že $D_i \subseteq C_i$: Předpokládejme, že D_0, \dots, D_n máme ($D_0 = \mathbb{X} \times \mathbb{X}$), pak víme, že $\exists E : E \circ E \subseteq D_n$, $\exists F : F \circ F \subseteq E$. Tedy $F \circ F \circ F \subseteq D_n$. Ať $D_{n+1} := (F \cap C_{i+1}) \cap (F \cap C_{i+1})^{-1}$. Tedy $D_{n+1} \circ D_{n+1} \circ D_{n+1} \subseteq D_n$, $D_{n+1} \subseteq C_{i+1}$. Tedy podle lemmatu o pseudometrice existuje pseudometrika d na \mathbb{X} , že

$$\left\{ (x, y) \mid d(x, y) < \frac{1}{2^i} \right\} \subseteq D_i \subseteq \left\{ (x, y) \mid d(x, y) \leq \frac{1}{2^i} \right\}.$$

Pro $x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists C \in \mathcal{D} : (x, y) \notin C$. $\exists i \in \mathbb{N} : C_i \subseteq C$. $D_i \subseteq C_i$. $(x, y) \notin D_i$. Tedy $d(x, y) \geq \frac{1}{2^i} > 0$. Tedy d je metrika. d generuje uniformitu \mathcal{D} : Tj. pro $\varepsilon > 0$ $\{(x, y) \mid d(x, y) < \varepsilon\} \in \mathcal{D}$. To platí díky vlastnosti z předchozího lemmatu. A pro $D \in \mathcal{D} \exists \varepsilon > 0 : \{(x, y) \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subseteq D$. $D \in \mathcal{D}$ dané $\exists i \in \mathbb{N} : C_i \subseteq D$, $D_i \subseteq C_i \subseteq D$. $\varepsilon := \frac{1}{2^i}$. To máme také díky vlastnosti z předchozího lemmatu. \square

Věta 3.5 (Jemná uniformita)

Ať (\mathbb{X}, τ) je TP. Všechny otevřené podmnožiny $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ obsahující $\delta(\mathbb{X})$ tvoří bázi nějaké uniformity na \mathbb{X} právě tehdy, když \mathbb{X} je parakompaktní.

Poznámka (Reformulace)

Ať (\mathbb{X}, τ) je TP. Všechna otevřená pokrytí \mathbb{X} tvoří bázi nějaké pokrývací uniformity na \mathbb{X} , právě když \mathbb{X} je parakompaktní.

Důkaz

Pokud všechna otevřená pokrytí \mathbb{X} tvoří bázi pokrývací uniformity, pak speciálně každé otevřené pokrytí má hvězdovité otevřené zjemnění. Tedy podle charakterizační věty je \mathbb{X} parakompaktní.

Je-li \mathbb{X} parakompaktní, tak podle charakterizační věty má každé otevřené pokrytí \mathbb{X} otevřené hvězdovité zjemnění a snadno se ověří, že $\{\mathcal{U}|\mathcal{U} \text{ je pokrytí } \mathbb{X}, \text{ které je zjemňované nějakým otevřeným zjemněním}\}$ je pokrývací uniformita na \mathbb{X} . \square

Věta 3.6 (Uniformizovatelnost TP)

TP je uniformizovatelný (tj. generován nějakou uniformitou), právě když je Tichonovův.

Důkaz

Ať (\mathbb{X}, τ) je generovaný uniformitou \mathcal{D} . Buď $F \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, $x \in \mathbb{X} \setminus F$. Pak existuje $D \in \mathcal{D} : D[x] \subseteq \mathbb{X} \setminus F$. Ať d je pseudometrika z předchozího lemmatu, kde volíme $D_1 = D$. Pak $B_d(x, \frac{1}{2}) \subseteq D[x]$. Definujeme $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = d(x, y)$, $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 0$ a f je spojitá. Pro $y \in F : f(y) \geq \frac{1}{2}$. Tedy \mathbb{X} je T_π .

Ať (\mathbb{X}, τ) je Tichonovův. Pak uvažme $\beta\mathbb{X}$. $\beta\mathbb{X}$ je (para)kompaktní. Tedy na $\beta\mathbb{X}$ máme jemnou uniformitu, která generuje topologii na $\beta\mathbb{X}$. Tuto jemnou uniformitu na $\beta\mathbb{X}$ můžeme zúžit na \mathbb{X} a ta již generuje topologii τ . \square

3.1 Operace s uniformními prostory

Definice 3.10

Ať $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je UP, $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$. Pak uniformní podprostor $(\mathbb{Y}, \mathcal{D}_\mathbb{Y})$ je definován následovně $\mathcal{D}_\mathbb{Y} := \{D \cap (\mathbb{Y} \times \mathbb{Y}) | D \in \mathcal{D}\}$.

Jsou-li $(\mathbb{X}_i, \mathcal{D}_i)$ UP, pak suma těchto UP je definována jako $(\bigcup \mathbb{X}_i, \{\bigcup D_i | D_i \in \mathcal{D}_i\})$. Součin pak jako $(\prod \mathbb{X}_i | \{\prod D_i | D_i \in \mathcal{D}_i, \text{Fin}(D_i \neq \mathbb{X}_i \times \mathbb{X}_i)\})$. (Tedy jsou různé od identity jen v konečně mnoha případech.)

3.2 Úplnost a totální omezenost

Definice 3.11 (Net)

Net $(x_i)_{i \in I}$ UP $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá cauchyovský, pokud $\forall D \in \mathcal{D} \exists i_0 \in I \forall i, j \geq i_0 : (x_i, x_j \in D)$.

Definice 3.12 (Úplný a totálněomezený prostor)

$UP(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá úplný, pokud každý cauchyovský net v $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je konvergentní v $(\mathbb{X}, \tau_{\mathcal{D}})$.

$UP(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ se nazývá totálně omezený, pokud $\forall E \in \mathcal{D} \exists K \subseteq \mathbb{X}$ konečná: $E[K] = \mathbb{X}$.

Poznámka

MP je totálně omezený (úplný) \Leftrightarrow UP jím generovaný je totálně omezený (úplný).

Poznámka

$UP(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je totálně omezený $\Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{D} \exists$ konečné pokrytí U_1, \dots, U_n prostoru \mathbb{X} , že $(U_1 \times U_1) \cup \dots \cup (U_n \times U_n) \subseteq D$.

Věta 3.7

Bud' $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ UP. Pak $(\mathbb{X}, \tau_{\mathcal{D}})$ je kompaktní $\Leftrightarrow (\mathbb{X}, \mathcal{D})$ je úplný a totálně omezený.

┌

Důkaz

\Rightarrow Je-li $D \in \mathcal{D}$, pak $\{\text{int } D[x] | x \in \mathbb{X}\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Tedy z kompaktnosti existuje konečné podpokrytí $\{\text{int } D[x_1], \dots, \text{int } D[x_n]\}$. Tedy pro $K := \{x_1, \dots, x_n\}$ je $D[K] = \bigcup D[x_i] \supseteq \bigcup \text{int } D[x_i] = \mathbb{X}$.

Ať $(x_i)_{i \in I}$ je cauchyovský net v $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$. Z charakterizace kompaktnosti víme, že $(x_i)_{i \in I}$ má hromadný bod – řekněme x . Ukážeme, že x je limitou netu x_i (tj. x_i konverguje k x). Ať U je okolí x . Pak existuje symetrické $D \in \mathcal{D} : (D \circ D)[x] \subseteq U$. Z cauchyovskosti existuje i_0 , že pro $i, j \geq i_0 : (x_i, x_j) \in D$

└

□

TODO

4 Topologické grupy

Definice 4.1 (Topologická grupa)

$(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$ se nazývá topologická grupa (TG), pokud (\mathbb{G}, \cdot) je grupa, (\mathbb{G}, τ) je TP a $\cdot : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ je spojitý, $^{-1} : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ je spojitý.

Pozorování

Ať \mathbb{G} je TG. Pak:

- $^{-1}$ je homeomorfismus.
- $\forall g \in \mathbb{G} : L_g : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}, L_g(h) := g \cdot h$ (tzv. levá translace) je homeomorfismus.

$$(L_g^{-1} = L_{g^{-1}}.)$$

- $\forall x, y \in \mathbb{G} \exists h : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ homeomorfismus: $h(x) = y$. ($L_{yx^{-1}}(x) = y$.)
- $\forall U$ okolí $e \exists V$ okolí e : $V \cdot V^{-1} := \{u \cdot v^{-1} | u \in V, v \in V\} \subseteq U$.
- Pro U otevřenou v \mathbb{G} a $M \subseteq \mathbb{G}$ libovolnou $M \cdot U$ je otevřené.
- Uzávěr podgrupy $H \leq \mathbb{G}$ je opět grupa.
- Uzávěr normální (algebraicky) podgrupy je normální (algebraicky) podgrupa.
- Je-li H podgrupa \mathbb{G} s neprázdným vnitřkem, pak je obojetná.
- Součin TG se součinovou topologií a operací po složkách je TG.

Tvrzení 4.1 (Uniformita na TG)

Ať \mathbb{G} je TG. Pak systém $\{D_U | U \text{ je okolí } e\}$, kde $D_U = \{(x, y) | x \cdot y^{-1} \in U\}$, je bázi nějaké uniformity na \mathbb{G} . (Tzv. pravá uniformita na \mathbb{G}). Tato uniformita je kompatibilní s topologií \mathbb{G} .

┌

Důkaz

$\delta(G) \subseteq D_u$. Ať U je okolí e . Chceme najít V okolí e : $D_V \circ D_V \subseteq D_U$. Uvažme spojitě zobrazení $(x, y) \mapsto x \cdot y$, $x, y \in \mathbb{G}$. $(e, e) \rightarrow e$.

Tedy existuje V okolí e : $V \cdot V \subseteq U$. Nyní $D_V \circ D_V \subseteq D_u$: Ať $(a, b) \in D_V \circ D_V$. Pak existuje $c \in G$: $(a, c) \in D_V$, $(c, b) \in D_V$. $a \cdot c^{-1} \in V$ a $cb^{-1} \in V$, tedy $a \cdot c^{-1} \cdot c \cdot b^{-1} \in V \cdot V \subseteq U$. $a \cdot b^{-1} \in U$. $(a, b) \in D_U$. Pro V, W okolí e : $D_V \cap D_W \supseteq D_{V \cap W}$. Tedy $\{D_U | U \text{ okolí } e\}$ tvoří bázi uniformity.

Tato uniformita je kompatibilní s původní topologií na \mathbb{G} : Ať V okolí e , $x \in \mathbb{G}$. $D_V[x] = \{y \in \mathbb{G} | xy^{-1} \in V\} = \{y \in \mathbb{G} | y \in V^{-1} \cdot x\}$ i = $V^{-1} \cdot x$ je okolí x . □

└

Věta 4.2

Každá TG je Tichonovova.

┌

Důkaz

Ať $(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$ je TG. Ať \mathcal{D} je pravá uniformita na $(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$. Víme, že $(\mathbb{G}, \tau_{\mathcal{D}})$ je Tichonovův. Předchozí tvrzení dává, že $\tau_{\mathcal{D}} = \tau$. □

└

Věta 4.3 (Metrizovatelnost TG)

TG je metrizovatelná, právě když má spočetný charakter.

┌ *Důkaz*

\implies : Triviální (každý met. prostor má spočetný charakter). \Leftarrow : Ať $(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$ má spočetný charakter. Ať $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí v e . $D_n := \{(x, y) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G} \mid xy^{-1} \in U_n\}$, $\{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je báze pravé uniformity \mathcal{D} . Tedy \mathcal{D} má spočetnou bázi. Tedy $(\mathbb{G}, \mathcal{D})$ je metrizovatelný, tedy (\mathbb{G}, τ) je metrizovatelný. \square

Poznámka (Informativně)

Věta (Birkhoff Kahutani): Každá metrizovatelná grupa má zleva (zprava) invariantní metriku, tj. metrika ϱ , že $\varrho(x, y) = \varrho(c \cdot x, c \cdot y)$, $\forall c, x, y \in \mathbb{G}$.

Tvrzení 4.4 (Spojitost homomorfismu)

Ať \mathbb{G}, \mathbb{H} jsou TG. $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$ je homomorfismus grup. f je spojitý $\Leftrightarrow f$ je spojitý v $e \in \mathbb{G}$.

┌ *Důkaz*

\implies : zřejmě. \Leftarrow : Ať $x \in \mathbb{G}$, $(x_i)_{i \in I}$ je net v \mathbb{G} , který konverguje k x . Chceme, že $(f(x_i))_{i \in I}$ konverguje k $f(x)$ v \mathbb{H} . $(x_i \cdot x^{-1})_{i \in I}$ je net v \mathbb{G} , konverguje k $x \cdot x^{-1} = e \in \mathbb{G}$. f spojitý v e , tedy $f(x_i \cdot x^{-1})$ konverguje k $f(e) = e \in \mathbb{H}$. Tudíž $f(x_i) \cdot (f(x))^{-1} \rightarrow e \in \mathbb{H}$. Tudíž (po vynásobení $f(x)$) $f(x_i) \rightarrow f(x)$. Tedy f spojitý v x . $x \in \mathbb{G}$ libovolné. Tedy f je spojitý. \square

Věta 4.5 (Faktor TG)

Bud N uzavřená normální podgrupa TG \mathbb{G} . Pak faktogrupa \mathbb{G}/N s kvocientovou topologií je TG a přirozená projekce (= kvocientové zobrazení) $\pi : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}/N$, $\pi(g) := g \cdot N$, je spojitý a otevřený homeomorfismus.

┌ *Důkaz*

Víme: π je spojitý homeomorfismus. π je otevřený: je-li $U \subseteq \mathbb{G}$ otevřený, pak $\pi(U) = \{xN : x \in U\} \subseteq G/N$, $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cdot N$ je otevřením. Tedy z definice kvocientové topologie je $\pi(U)$ otevřená množina.

\mathbb{G}/N je TG: Násobení je spojitý: $f : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}/N$, $f(g, h) := g \cdot h \cdot N$ je spojitý, jelikož je to složení součinu a kvocientového zobrazení. Poznamenejme, že můžeme přirozeně identifikovat $\mathbb{G} \times \mathbb{G}/N \times N$ a $(\mathbb{G}/N) \times (\mathbb{G}/N)$. Operace součinu na G/N je kvocientem spojitého zobrazení f . Tedy je také spojitý podle charakterizace spojitosti a projektivně vytvořeného prostoru.

Spojitosť $^{-1}$ se ukáže obdobně.

Zbývá ověřit, že \mathbb{G}/N je Hausdorffův. Stačí ověřit, že je T_1 . N je uzavřená, tedy $G \setminus N$ je otevřená. $\pi^{-1}(G/N \setminus \{N\}) = G \setminus N$ je otevřená. Tedy z definice kvocientové topologie $G/N \setminus \{N\}$ je otevřená v G/N , ... \square

Tvrzení 4.6 (O homomorfismu)

Ať \mathbb{G}, \mathbb{H} jsou TG a $f : G \rightarrow H$ spojitý homomorfismus. Pak $N := f^{-1}(e)$ je normální (uzavřená) podgrupa G a existuje spojitý homomorfismus $\bar{f} : G/N \rightarrow H$, že $\bar{f}\pi = f$ (kde $\pi : G \rightarrow G/N$ je přirozená projekce).

┌ Poznámka
└ \bar{f} nemusí být vnoření topologických prostorů.

┌ Důkaz
└ Bez důkazu. □

Tvrzení 4.7 (O izomorfismu)

Ať \mathbb{G} je TG, $K \subseteq H$ její uzavřené normální podgrupy. Pak H/K je uzavřenou normální podgrupou G/K a $(G/K)/(H/K)$ je izomorfně homeomorfní s G/H .

┌ Důkaz
└ Bez důkazu. □

5 Souvislé prostory

Definice 5.1

TP se nazývá souvislý, pokud je neprázdný a nelze ho vyjádřit jako sjednocení dvou disjunktních otevřených neprázdných množin. (Tj. obsahuje právě dvě obojetné množiny, sám sebe a prázdný prostor.)

Tvrzení 5.1

Pro neprázdný TP \mathbb{X} je ekvivalentní: a) \mathbb{X} je souvislý, b) $Je-li \mathbb{X} = A \cup B$ a $\bar{A} \cap B = \emptyset = \bar{B} \cap A$, pak $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$. c) \mathbb{X} neobsahuje vlastní obojetnou podmnožinu. d) Každé spojitě zobrazení $f : \mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$ je konstantní.

┌ Důkaz
└ Přímočaré. □

Tvrzení 5.2

Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý.

┌
Důkaz

Ať $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ je spojitě zobrazení, \mathbb{X} souvislé, f na. Sporem. \mathbb{Y} není souvislý. Potom z minulého tvrzení $\exists g : \mathbb{Y} \rightarrow \{0, 1\}$ spojitý nekonstantní. Potom ale $g \circ f : \mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$ je spojitě a nekonstantní $\implies \mathbb{X}$ není souvislý. ∇ □

└

Tvrzení 5.3 (Sjednocení souvislých množin)

Ať $C_i \subseteq \mathbb{X}$, C_i souvislé, $i \in I$, $0 \in I$, $C_i \cap C_0 \neq \emptyset$ pro $i \in I$. Pak $\bigcup C_i$ je souvislé.

┌
Důkaz

Ať O je neprázdná obojetná množina v $\bigcup C_i$. Existuje $j \in I$, $C_j \cap O \neq \emptyset$. $C_j \cap O$ je obojetná v C_j , C_j je souvislá, tedy $C_j \subseteq O$. Tedy $C_0 \cap O \neq \emptyset$, tj. $C_0 \subseteq O$. Je-li $i \in I$ libovolná, pak $C_i \cap O \neq \emptyset$ a opět $C_i \subseteq O$. Tudíž $O = \bigcup C_i$, tj. $\bigcup C_i$ je souvislá. □

└

Důsledek

Jsou-li C_i souvislé v TP \mathbb{X} , $i \in I$ a $\bigcap C_i \neq \emptyset$, pak $\bigcup_{i \in I} C_i$ je souvislá.

┌
Důkaz

Předchozí s $C_0 := \{x_0\} \subseteq \bigcap C_i$. □

└

Důsledek

Je-li $A \subseteq \mathbb{X}$ souvislá a $A \subseteq M \subseteq \overline{A}$, pak M je souvislá.

┌
Důkaz

$C_a := A \cup \{a\}$ pro $a \in M \setminus A$. Vzhledem k předchozímu stačí ověřit, že C_a je souvislá ($M = \bigcup_{a \in M \setminus A} C_a$). □

└

Věta 5.4

Buď \mathbb{X} Tichonovův prostor. Pak \mathbb{X} je souvislý $\Leftrightarrow \beta\mathbb{X}$ je souvislý.

┌
Důkaz

\implies : $\overline{\mathbb{X}} = \beta\mathbb{X}$, \mathbb{X} je souvislá $\implies \overline{\mathbb{X}}$ je souvislá $\implies \beta\mathbb{X}$ je souvislá.

\Leftarrow : Ať $\beta\mathbb{X}$ je souvislý. Ať $f : \mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$ je spojitě zobrazení. Z vlastností $\beta\mathbb{X}$ existuje spojitě rozšíření $\bar{f} : \beta\mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$. $\beta\mathbb{X}$ je souvislý $\implies \bar{f}$ je konstantní $\implies f$ je konstantní $\implies \mathbb{X}$ je souvislý. □

└

Věta 5.5 (Součin souvislých prostorů)

Ať $\mathbb{X}_i : i \in I$ jsou TP. Pak $\prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$ je souvislý $\Leftrightarrow \forall i \in I : \mathbb{X}_i$ je souvislý.

┌ *Důkaz*

Pokud některý $\mathbb{X}_i = \emptyset$, tvrzení platí. Dále ať $\mathbb{X}_i \neq \emptyset$, $i \in I$. \implies : Je-li $\prod \mathbb{X}_i$ souvislý, $\pi_j : \prod \mathbb{X}_i \rightarrow \mathbb{X}_j$ je spojitý a na, tedy i \mathbb{X}_j je souvislý.

\Leftarrow : Nejprve pro dva prostory \mathbb{X}, \mathbb{Y} : $\mathbb{X} \times \mathbb{Y} = (\{x_0\} \times \mathbb{Y}) \cup \bigcup_{y \in \mathbb{Y}} \mathbb{X} \times \{y\}$. Tedy podle tvrzení výše je $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ souvislý. Indukcí dokážeme pro konečně mnoho. Obecně: $\forall i \in I$ fixujeme bod $x_i \in \mathbb{X}_i$.

$M := \left\{ (y_i)_{i \in I} \in \prod \mathbb{X}_i : y_i = x_i \text{ pro všechna } i \in I \text{ až na konečně mnoho výjimek} \right\}$.

$$M = \bigcup_{K \subseteq I \text{ konečná}} \left(\prod_{i \in K} \mathbb{X}_i \times \prod_{i \in I \setminus K} \{x_i\} \right).$$

To znamená, že M je souvislé, protože je sjednocením souvislých množin s průnikem obsahujícím $(x_i)_{i \in I}$. Ale M je hustá v $\prod \mathbb{X}_i$. \overline{M} je souvislá, tedy $\prod \mathbb{X}_i$ je souvislá. \square

Definice 5.2 (Komponenta souvislosti)

Ať \mathbb{X} je TP, $x \in \mathbb{X}$, pak komponenta souvislosti bodu x je největší souvislá množina, která x obsahuje. Značíme ji C_x .

┌ *Důkaz (Existence)*

Plyne z jednoho z důsledků: $\bigcup \{C \mid x \in C \wedge C \text{ je souvislá}\}$ je souvislá a maximální. Navíc je to vždy uzavřená množina. \square

┌ *Poznámka*

Komponenty souvislosti tvoří rozklad, tj. $C_x = C_y$ nebo $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Tvrzení 5.6

Jsou-li \mathbb{X}_i TP a $x_i \in \mathbb{X}_i$, C_i komponenta bodu x_i v \mathbb{X}_i . Pak $\prod C_i$ je komponenta $(x_i)_{i \in I}$ v $\prod \mathbb{X}_i$.

┌ *Důkaz*

┌ Cvičení. \square

Definice 5.3 (Kvazikomponenty)

Ať \mathbb{X} je TP. Množina $Q \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá kvazikomponenta bodu $x \in \mathbb{X}$ v prostoru \mathbb{X} , pokud $Q = \bigcap \{Z \mid x \in Z \wedge Z \text{ obojetná}\}$. Značíme ji Q_x .

┌ *Poznámka*

$\forall x \in \mathbb{X} : C_x \subseteq Q_x$. Navíc Q_x je uzavřená. A opět tvoří rozklad prostoru \mathbb{X} .

Například (TP \mathbb{X} , že $C_x \neq Q_x$)

$\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^2$ skládající se ze 2 bodů x, y a úseček k nim konvergujícím ($:|| \quad | \quad |$). $C_x = \{x\}$, $Q_x = \{x, y\}$.

Lemma 5.7 (O průniku v kompaktu)

Bud' \mathbb{X} kompaktní TP, \mathcal{A} soubor uzavřených množin v \mathbb{X} . $U \subseteq \mathbb{X}$ otevřená a $\bigcap \mathcal{A} \subseteq U$. Pak existuje konečný systém $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} : \bigcap \mathcal{F} \subseteq U$.

┌

Důkaz

Kdyby ne, pak $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ konečné: $\bigcap \mathcal{F} \not\subseteq U$. Tedy $\mathcal{A} \cup \{\mathbb{X} \setminus U\}$ má konečnou průnikovou vlastnost. \mathbb{X} kompaktní: $\bigcap \mathcal{A} \cap (\mathbb{X} \setminus U) \neq \emptyset$. Tedy $\bigcap \mathcal{A} \not\subseteq U$. ∇ . □

└

Věta 5.8

V kompaktním TP komponenty a kvazikomponenty splývají.

┌

Důkaz

Ať $x \in \mathbb{X}$. $C_x \subseteq Q_x$. Pro $Q_x \subseteq C_x$ stačí dokázat, že Q_x je souvislá. Předpokládejme $E \cup F$, E, F uzavřené (v Q_x , a tedy i v \mathbb{X}) disjunktní množiny. BÚNO $x \in E$. \mathbb{X} je normální, tedy existují otevřené disjunktní množiny U, V : $E \subseteq U$, $F \subseteq V$. $Q_x = E \cup F \subseteq U \cup V$. Podle předchozího lemmatu existují obojetné množiny $Q_1, \dots, Q_n : Q_1 \cap \dots \cap Q_n \subseteq U \cup V$. Otevřené $O \cap U = O \setminus V$ uzavřené, tedy $x \in O \cap U$, tedy $Q_x \subseteq O \cap U$. Tedy $F = \emptyset$. Proto Q_x je souvislá. □

└

Definice 5.4 (Křivková a oblouková souvislost)

TP \mathbb{X} se nazývá obloukově (resp. křivkově) souvislý, pokud $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists f : [0, 1] \rightarrow f([0, 1])$ homeomorfní (resp. f spojitě), že $f(0) = x$, $f(1) = y$.

┌

Poznámka

Obecně je mezi nimi rozdíl, v Hausdorffových prostorech je to totéž.

└

6 Kontinua

Definice 6.1 (Kontinuum)

Kontinuum je kompaktní souvislý prostor.

Jednoprvkové kontinuum se nazývá degenerované, ostatní nedegenerovaná.

Tvrzení 6.1

Ať K_n je klesající (vzhledem k inkluzi) posloupnost kontinuí, pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ je opět kontinuum.

┌ *Důkaz*

$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ je zřejmě kompaktní. Předpokládejme, že $K = E \cup F$, kde E, F jsou uzavřené disjunktní. Chceme $E = \emptyset$ nebo $F = \emptyset$. K_1 je normální, tedy existují otevřené disjunktní U, V , že $E \subseteq U$ a $F \subseteq V$. Podle lemmatu o průniku v kompaktu existuje $n \in \mathbb{N}$, že $K_n \subseteq U \cup V$, tedy $K_1 = (K_n \cap U) \cup (K_n \cap V)$. K_n je sovislá, tedy $K_n \cap U = \emptyset$ nebo $K_n \cap V = \emptyset$. Tedy $E = \emptyset$ nebo $F = \emptyset$. □

└

Tvrzení 6.2 (Bum do hranice (Boundary bumping theorem))

Ať \mathbb{X} je kontinuum, A vlastní uzavřená podmnožina \mathbb{X} . Pak každá komponenta množiny A protíná hranici A .

┌ *Důkaz*

$A = \emptyset$ nemá žádnou komponentu. Tedy $A \neq \emptyset, x \in A, C_x \dots$ komponenta bodu x v A . Pro spor předpokládejme, že $C_x \cap \partial A = \emptyset$. $A \subset \mathbb{X}$, \mathbb{X} je kontinuum, tedy $\partial A \neq \emptyset$. Víme, že C_x je kvazikomponenta \mathbb{X} , $C_x \subseteq A \setminus \partial A$. Tedy podle lemmatu o průniku v kompaktu existuje obojetná množina Z v A , že $C_x \subseteq Z \subseteq A \setminus \partial A$. Z je uzavřená v \mathbb{X} , neprázdná, vlastní. Navíc Z je otevřená v A a neprotíná hranici, tedy Z je otevřená v \mathbb{X} (Z je otevřená v otevřené $A \setminus \partial A$). Z je tedy obojetná vlastní podmnožina v \mathbb{X} , ∇ . □

└

Věta 6.3 (Sierpinski)

Ať \mathbb{X} je kontinuum, $X_n, n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní uzavřené množiny v \mathbb{X} , že $X = \bigcup X_n$. Pak všechna $X_n = \emptyset$ až na jednu výjimku.

┌ *Důkaz*

Je-li kontinuum \mathbb{D} spočetným sjednocením uzavřených neprázdných disjunktních množin $Y_i, i \in \mathbb{N}$, pak pro každé $i \in \mathbb{N}$ existuje kontinuum $C \subseteq \mathbb{D}$, které je disjunktní s Y_i , ale není obsaženo v žádném $Y_j, j \in \mathbb{N}$ (protíná alespoň 2). Důkaz:

Fixujeme $j \neq i$: existují disjunktní otevřené $U, V: Y_j \subseteq U, Y_i \subseteq V$. Buď C komponenta libovolného bodu $z Y_j$ v množině \bar{U} . Podle b.m. do hranice víme, že $C \cap \partial \bar{U} \neq \emptyset$. Tj. $\partial \bar{U} \cap Y_j = \emptyset$, tedy $C \not\subseteq Y_j$. $C \subseteq \bar{U} \subseteq \mathbb{D} \setminus V$, tedy $C \cap Y_i = \emptyset$.

Důkaz věty: Sporem: Existují alespoň dva indexy $n \neq m : X_n \neq \emptyset \neq X_m$. Kdyby $\{k \in \mathbb{N} : X_k \neq \emptyset\}$ byla konečná, pak \mathbb{X} je sjednocením konečně mnoha disjunktních uzavřených neprázdných množin, tyto množiny by již byly obojetné, spor se souvislostí \mathbb{X} .

BÚNO (vyházíme prázdné a přeindexujeme) $X_n \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$. Indukcí najdeme posloupnost kontinuí C_n , že $C_{n+1} \subseteq C_n \wedge C_n \cap X_n = \emptyset \wedge C_n$ není obsaženo v žádném $X_i, i \in \mathbb{N}$. Podle prvního odstavce $\mathbb{X} = \mathbb{D}, X_j = Y_j, i = 1$ existuje $C = C_j$. Dále uvažme C_1 . To protíná nekonečně mnoho z množin X_i . V druhém kroku indukce použijeme první odstavec na $\mathbb{D} = C_1, \{Y_i | i \in \mathbb{N}\} = \{C_1 \cap X_i | C_1 \cap X_i \neq \emptyset\}, \dots$

└ $\bigcap C_n \neq \emptyset$, ať tedy $c \in \bigcap C_n$. $c \notin \bigcup X_n = \mathbb{X}$. \nexists .

□

Definice 6.2 (Rozložitelné a nerozložitelné kontinuum)

Kontinuum \mathbb{X} se nazývá rozložitelné, pokud existují dvě vlastní podkontinua \mathbb{A}, \mathbb{B} (ne nutně disjunktní), že $\mathbb{X} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$. Jinak je nerozložitelné.

Věta 6.4 (Charakterizace nerozložitelnosti)

Kontinuum \mathbb{X} je nerozložitelné, právě když každé jeho vlastní podkontinuum je v něm řídké (tj. uzávěr má prázdný vnitřek).

┌ *Důkaz*

\Leftarrow Kdyby $X = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, \mathbb{A}, \mathbb{B} vlastní podkontinua, pak \mathbb{A}, \mathbb{B} řídké. $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ je řídká v \mathbb{X} , \nexists .

\Rightarrow : Ať $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ je vlastní podkontinuum \mathbb{X} , $\text{int } \mathbb{Y} \neq \emptyset$. Ať $M = \overline{\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}}$. Pak M je souvislá: $\mathbb{X} = M \cup \mathbb{Y}$ a M je kontinuum, tedy \mathbb{X} je rozložitelné. Nebo M je nesouvislá: $M = E \cup F$, kde E, F jsou uzavřené disjunktní neprázdné podmnožiny v M . Potom $(\mathbb{Y} \cup E) \cup (\mathbb{Y} \cup F)$. Ale tyto dvě množiny jsou vlastní uzavřené podmnožiny \mathbb{X} , které jsou souvislé (neboť každá komponenta E nebo F protíná jejich hranici a ta je podmnožinou \mathbb{Y} a sjednocení souvislých protínajících se ve stejném bodě je souvislé). □

7 Nesouvislost (absence souvislosti)

Definice 7.1

TP \mathbb{X} se nazývá

- dědičně nesouvislý, pokud jeho jediné souvislé podprostory jsou jednobodové (tj. komponenty bodů jsou jednoprvkové).
- totálně nesouvislý, jestliže $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y, \exists$ obojetná $Z \subseteq \mathbb{X} : x \in Z \wedge y \notin Z$.
- nulldimenzionální, pokud \mathbb{X} má bázi tvořenou obojetnými množinami (tj. pro $x \in \mathbb{X}$, U okolí x existuje obojetná $Z \subseteq \mathbb{X} : x \in Z \subseteq U$).
- silně nulldimenzionální, pokud \mathbb{X} je normální a pro uzavřené disjunktní $E, F \subseteq \mathbb{X}$ existuje obojetná $Z \subseteq \mathbb{X} : E \subseteq Z \subseteq \mathbb{X} \setminus F$.

Poznámka

Definici silné nulldimenzionality lze zobecnit na Tichonovovy prostory: Tichonovův prostor \mathbb{X} se nazve silně nulldimenzionální, pokud $\forall E, F \subseteq \mathbb{X}, E, F$ funkcionálně oddělené množiny (tj. $\exists f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá, že $E \subseteq f^{-1}(0), F \subseteq f^{-1}(1)$) existuje obojetná $Z \subseteq \mathbb{X} : E \subseteq Z \subseteq \mathbb{X} \setminus F$.

Tvrzení 7.1

Silně nulldimenzionální \implies nulldimenzionální \implies totálně nesouvislý \implies dědičně nesouvislý.

┌

Důkaz

└ Snadné cvičení.

□

Poznámka

Obecně nelze žádnou z výše uvedených implikací obrátit.

Věta 7.2

Ať \mathbb{X} je kompaktní TP. Pak je ekvivalentní:

1. \mathbb{X} je dědičně nesouvislý.
2. \mathbb{X} je totálně nesouvislý.
3. \mathbb{X} je nulldimenzionální.
4. \mathbb{X} je silně nulldimenzionální.

Důkaz

Implikace směrem nahoru už máme, tedy stačí $1) \implies 4)$. Ale ukážeme nejprve $1) \implies 3)$ a pak $3) \implies 4)$. Ať $x \in \mathbb{X}$, U okolí x . Víme, že $C_x = \{x\}$. V kompaktním prostoru splývají komponenty a kvazikomponenty: $C_x = Q_x = \bigcap \{Z : x \in Z, Z \text{ je obojetná v } \mathbb{X}\}$. Podle lemmatu o průniku v kompaktu existují obojetné Z_1, \dots, Z_n , že $x \in \bigcap Z_i$, $x \in \bigcap Z_i \subseteq U$. Tedy $1) \implies 3)$.

Zbývá $3) \implies 4)$: Kompaktní prostor je normální. Ať E, F jsou uzavřené disjunktní. Pro každé $x \in E$ existuje obojetná $Z_x \subseteq \mathbb{X}$, že $x \in Z_x \subseteq X \setminus F$, díky nuldimenzionalitě. $\{Z_x | x \in E\}$ je otevřené pokrytí E . E uzavřená v \mathbb{X} , tedy E kompaktní. $\exists x_1, \dots, x_n \in E : E \subseteq Z_{x_1} \cup \dots \cup Z_{x_n}$, což je obojetná $\subseteq \mathbb{X} \setminus F$. Tedy \mathbb{X} je silně nuldimenzionální. \square

Věta 7.3 (Nuldimenzionalita v $\beta\mathbb{X}$)

Bud' \mathbb{X} je Tichonoviův prostor. Pak $\beta\mathbb{X}$ je nuldimenzionální, právě když \mathbb{X} je silně nuldimenzionální.

Důkaz

\implies : $\beta\mathbb{X}$ je kompaktní, tedy $\beta\mathbb{X}$ je silně nuldimenzionální. Ať $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Chceme, že f^{-1} a $f^{-1}(1)$ oddělíme obojetnou: Existuje spojitě rozšíření $\bar{f} : \beta\mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ funkce f . $\bar{f}^{-1}(0)$, $\bar{f}^{-1}(1)$ funkcionálně oddělené v $\beta\mathbb{X}$. Tedy existuje obojetná $Z \subseteq \beta\mathbb{X}$, že $\bar{f}^{-1}(0) \subseteq Z \subseteq \beta\mathbb{X} \setminus \bar{f}^{-1}(1)$. Nyní $Z \cap \mathbb{X}$ obojetná v \mathbb{X} . $f^{-1}(0) = \bar{f}^{-1}(0) \cap \mathbb{X} \subseteq Z \cap \mathbb{X} \subseteq \mathbb{X} \setminus f^{-1}(1)$. $Z \cap \mathbb{X}$ je obojetná a odděluje $f^{-1}(0)$ a $f^{-1}(1)$.

\Leftarrow : $\beta\mathbb{X}$ je kompaktní, tedy stačí ukázat (díky předchozí větě), že \mathbb{X} je totálně nesouvislý. Ať $a, b \in \mathbb{X}$, $a \neq b$. Existuje spojitá funkce $f : \beta\mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$, $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. $A := f^{-1}([0, \frac{1}{3}))$, $B := f^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$. Jistě $a \in A$ a $b \in B$. A, B jsou funkcionálně oddělené v $\beta\mathbb{X}$, otevřené. Tj. $A \cap \mathbb{X}$, resp. $B \cap \mathbb{X}$, je hustá v A , resp. B . Navíc jsou oddělené v \mathbb{X} . Ze silné nuldimenzionality \mathbb{X} existuje obojetná $Z \subseteq \mathbb{X} : A \cap \mathbb{X} \subseteq Z \subseteq \mathbb{X} \setminus B$. Uvažujme spojitou funkci $g : \mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$, $g|_Z = 0$, $g|_{\mathbb{X} \setminus Z} = 1$. g lze spojitě rozšířit na $\bar{g} : \beta\mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$. Ať $W := \bar{g}^{-1}(0)$. $W \supseteq Z$, W obojetná, $W \cap B = \emptyset$. $W \supseteq A$. $a \in W$, $b \notin W$. \square

Poznámka

Podprostor nuldimenzionálního prostoru je nuldimenzionální. Součin nuldimenzionálních je nuldimenzionální. Tedy $\{0, 1\}^{\mathbb{X}}$ je vždy nuldimenzionální.

Tvrzení 7.4

Každý nuldimenzionální prostor \mathbb{X} lze vnořit do $\{0, 1\}^A$, kde za A lze volit váhu (nebo bázi) \mathbb{X} .

┌ *Důkaz*

Ať \mathcal{B} je báze X , která je tvořena obojetnými množinami, pro kterou je $|\mathcal{B}| = w(\mathbb{X})$. Pro $B \in \mathcal{B}$ uvažme $f_B(x) = 0, x \in B$ a 1 jinak. $\{f_B | B \in \mathcal{B}\}$ odděluje body a uzavřené množiny, tedy podle lematu o Tichonovově vnoření je $\Delta_{B \in \mathcal{B}} : x \in \mathbb{X} \mapsto (f_B(x))_{B \in \mathcal{B}}$ je vnoření $\mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathcal{B}}$. □

Důsledek

Každý kompaktní metrický (má spočetnou váhu) nuldimenzionální prostor lze vnořit do Cantorova diskontinua.

Věta 7.5 (Topologická charakterizace Cantorova diskontinua)

Každý neprázdný nuldimenzionální kompaktní metrizovatelný prostor je homeomorfní Cantorovu diskontinuu.

┌ *Důkaz*

└ Bez důkazu. □

Poznámka (Stonova dualita)

Kompaktní nuldimenzionální TP se spojitými zobrazeními se dají přiřadit Booleovým algebrám s homomorfismy

8 Topologická dimenze

Definice 8.1 (Malá induktivní dimenze, Menger-Urysohn)

Pro \mathbb{X} regulární definujeme

- $\text{ind } \emptyset = -1$.
- $\text{ind } \mathbb{X} \leq n \geq 0$, pokud $\forall x \in \mathbb{X} \forall U$ okolí $x \exists$ otevřená $V : x \in V \subseteq U : \text{ind}(\partial V) \leq n-1$.
- $\text{ind } \mathbb{X} = n$, pokud $\text{ind } \mathbb{X} \leq n$ a neplatí $\text{ind } \mathbb{X} \leq n-1$.
- $\text{ind } \mathbb{X} = \infty$, pokud $\forall n \in \mathbb{N} : \text{ind } \mathbb{X} \not\leq n$.

Poznámka

$\text{ind } \mathbb{X} = -1 \Leftrightarrow X = \emptyset$. $\text{ind } \mathbb{X} \leq 0 \Leftrightarrow \mathbb{X}$ je nuldimenzionální ($\partial V = \emptyset \Leftrightarrow V$ je obojetná). $\text{ind}([0, 1]) = 1$ (není nuldimenzionální). $\text{ind}[0, 1]^n \leq n$ indukci. (Naopak už pro $n = 2$ se těžko dokazuje, že platí rovnost. Viz dále.)

Definice 8.2 (Velká induktivní dimenze, Brouwer-čech)

Pro \mathbb{X} normální definujeme

- $\text{Ind } \emptyset = -1$.
- $\text{Ind } \mathbb{X} \leq n \geq 0$, pokud $\forall E \subseteq \mathbb{X}$ uzavřenou a $\forall U$ otevřenou: $E \subseteq U \exists V$ otevřená: $E \subseteq V \subseteq U$ a $\text{Ind}(\partial V) \leq n - 1$.
- $\text{Ind } \mathbb{X} = n$, pokud $\text{Ind } \mathbb{X} \leq n$ a neplatí $\text{Ind } \mathbb{X} \leq n - 1$.
- $\text{Ind } \mathbb{X} = \infty$, pokud $\forall n \in \mathbb{N} : \text{ind } \mathbb{X} \not\leq n$.

Poznámka

$\text{Ind } \mathbb{X} \leq 0 \Leftrightarrow \mathbb{X}$ je silně nulldimensionální.

Definice 8.3 (Pokrývací dimenze, Čech-Lebesgue)

Říkáme, že systém \mathcal{A} podmnožin množiny X je řádu n , pokud n je největší přirozené číslo pro které existují po dvou různé $A_1, \dots, A_{n+1} \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.

Pro normální prostor \mathbb{X} definujeme

- $\dim \emptyset = -1$.
- $\dim \mathbb{X} \leq n \geq 0$, pokud každé konečné otevřené pokrytí \mathbb{X} má konečné otevřené zjemnění řádu nejvýše n .
- $\dim \mathbb{X} = n$, pokud $\dim \mathbb{X} \leq n$ a neplatí $\dim \mathbb{X} \leq n - 1$.
- $\dim \mathbb{X} = \infty$, pokud $\forall n \in \mathbb{N} : \dim \mathbb{X} \not\leq n$.

Věta 8.1

Ať \mathbb{X} je normální TP. Pak $\dim \mathbb{X} \leq 0 \Leftrightarrow \mathbb{X}$ je silně nulldimensionální.

Důkaz

\Rightarrow : Ať E, F jsou uzavřené disjunktní. Ať $\mathcal{U} = \{\mathbb{X} \setminus E, \mathbb{X} \setminus F\}$ otevřené pokrytí \mathbb{X} . \exists konečné otevřené zjemnění \mathcal{V} toho \mathcal{U} , které má řád ≤ 0 , tedy prvky \mathcal{V} jsou navzájem disjunktní. Tedy každé $V \in \mathcal{V}$ je obojetná, $\bigcup \{V \in \mathcal{V} \mid V \subseteq \mathbb{X} \setminus F\}$ obojetná, obsahující E (protože pokud $V \cap E \neq \emptyset$ pro $V \in \mathcal{V}$, pak $V \subseteq \mathbb{X} \setminus F$) a disjunktní s F .

\Leftarrow : Ať \mathcal{U} je otevřené konečné pokrytí \mathbb{X} . Podle lemmatu o skrčení existuje uzavřené $F_U : U \in \mathcal{U}, F_U \subseteq U, \bigcup \{F_U \mid U \in \mathcal{U}\}$. \mathbb{X} silně nuldimenzionální, tedy \exists obojetné $C_U : F_U \subseteq C_U \subseteq U, U \in \mathcal{U}$. $\{C_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ je konečné obojetné pokrytí \mathbb{X} zjemňující \mathcal{U} . Toto pokrytí můžeme „rozdisjunktnit“ a dostaneme disjunktní otevřené (obojetné) konečné pokrytí řádu 0 (zjemnění \mathcal{U}). \square

Poznámka

$\dim[0, 1] = 1$. $\dim[0, 1]^n = n$ (zase dosti těžké dokázat).

Tvrzení 8.2 (Dimenze (uzavřeného) podprostoru)

Je-li \mathbb{X} regulární a $A \subseteq \mathbb{X}$, pak $\text{ind } A \leq \text{ind } \mathbb{X}$.

Je-li \mathbb{X} normální a $A \subseteq \mathbb{X}$ uzavřená, pak $\text{Ind } A \leq \text{Ind } \mathbb{X}$ a $\dim A \leq \dim \mathbb{X}$.

Důkaz

Indukcí podle $\text{ind } \mathbb{X}$ ($\text{Ind } \mathbb{X}, \dim \mathbb{X}$): Pokud $\text{ind } \mathbb{X} = -1$, pak $\mathbb{X} = \emptyset = A$, $\text{ind } A = -1$. Předpokládejme, že pro všechny regulární prostory \mathbb{Y} , kde $\text{ind } \mathbb{Y} \leq n - 1$, a $B \subseteq \mathbb{Y}$ je $\text{ind}(B) \leq \text{ind}(\mathbb{Y})$. $\text{ind } \mathbb{X} = n$, $A \subseteq \mathbb{X}$: chceme $\text{ind } A \leq n$. Ať $x \in A$, U okolí x v A . Existuje W okolí x v \mathbb{X} takové, že $W \cap A = U$. $\exists V$ otevřené okolí x v \mathbb{X} : $\text{ind}(\partial V) \leq n - 1$, $x \in V \subseteq W$. $x \in V \cap A \subseteq U$, $V \cap A$ otevřená v A a $\partial_A(V \cap A) \subseteq \partial_{\mathbb{X}} V$, tedy podle indukčního předpokladu $\text{ind } \partial_A(V \cap A) \leq \text{ind } \partial_{\mathbb{X}} V \leq n - 1$, tj. $\text{ind } A \leq n$. Ostatní 2 dimenze analogicky. \square

Věta 8.3 (Charakterizace pokrývací dimenze)

Pro normální prostor \mathbb{X} je ekvivalentní:

1. $\dim \mathbb{X} \leq n$.
2. Každé konečné otevřené pokrytí \mathbb{X} má otevřené skrčení řádu $\leq n$.
3. Každé konečné otevřené pokrytí \mathbb{X} má uzavřené skrčení řádu $\leq n$.
4. Každé konečné otevřené pokrytí \mathbb{X} má konečné uzavřené zjemnění řádu $\leq n$.

┌ *Důkaz*

1) \implies 2): Ať $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ otevřené pokrytí \mathbb{X} . Dle 1) existuje \mathcal{V} konečné otevřené zjemnění toho \mathcal{U} řádu nejvýše n . $V'_i := \bigcup \{V \in \mathcal{V} \mid V \subseteq U_i \wedge V \not\subseteq \bigcup V'_j : j < i\}$. $\mathcal{V}' = \{V'_i \mid i \in [n]\}$ je skrčení \mathcal{U} řádu $\leq n$.

2) \implies 3) je z lemmatu o skrčení. 3) \implies 4) je triviální.

4) \implies 1): Ať \mathcal{U} je konečné otevřené pokrytí \mathbb{X} a \mathcal{F} je jeho uzavřené konečné zjemnění řádu $\leq n$. $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$. Pro $i \leq m$ fixujeme $U_i \in \mathcal{U} : F_i \subseteq U_i$. Indukcí najdeme $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$, že $F_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$, že řád $\mathcal{V} \leq n$. Ať $A_1 = \bigcup \{H_1 \cap \dots \cap H_{n+1} \mid H_i \in \mathcal{F} \setminus \{F_1\}, H_i \text{ jsou po dvou různé}\}$. A_1 uzavřená. Navíc $A_1 \cap F_1 = \emptyset$, protože řád $\mathcal{F} \leq n$. Ať V_1 je otevřená, že $F_1 \subseteq V_1$ a $\overline{V_1} \cap A_1 = \emptyset$. Nyní $\{\overline{V_1}, F_2, F_3, \dots, F_m\}$ má řád nejvýše n .

Předpokládejme, že máme otevřené V_1, \dots, V_{j-1} , že $F_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$, $i \leq j-1$ a systém $\{\overline{V_1}, \overline{V_2}, \dots, \overline{V_{j-1}}, F_j, F_{j+1}, \dots, F_m\}$ má řád $\leq n$. Hledáme V_j . Ať A_j je sjednocením průniků $n+1$ různých množin vybraných ze systému $\{\overline{V_1}, \overline{V_2}, \dots, \overline{V_{j-1}}, F_{j+1}, F_{j+2}, \dots, F_m\}$. A_j je uzavřená a disjunktní s F_j . Opět z normality existuje otevřená $V_j : F_j \subseteq V_j \subseteq \overline{V_j} \subseteq U_j \setminus A_j$. Řád $\{\overline{V_1}, \dots, \overline{V_j}, F_{j+1}, \dots, F_m\} \leq n$.

└ $\mathcal{V} := \{V_1, \dots, V_m\}$ je otevřené zjemnění \mathcal{U} řádu $\leq n$. □

Věta 8.4 (Součtová pro dim)

Je-li \mathbb{X} normální TP a $F_i \subseteq \mathbb{X}$ uzavřené, $i \in \mathbb{N}$, $\dim F_i \leq n$ a $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$, pak $\dim \mathbb{X} \leq n$.

Tvrzení 8.5

Pro normální TP \mathbb{X} : $\text{ind } \mathbb{X} \leq \text{Ind } \mathbb{X}$.

┌ *Důkaz*

└ Přímočarý, indukcí podle $\text{Ind } \mathbb{X}$. □

Věta 8.6 (Součtinová věta pro dim)

Je-li \mathbb{X} normální TP a $F_i \subseteq \mathbb{X}$ uzavřené, $i \in \mathbb{N}$, $\dim F_i \leq n$ a $\mathbb{X} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$, pak $\dim \mathbb{X} \leq n$.

Důkaz

Ať $\mathcal{U} = \{U_i | i \in [k]\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} . $F_0 := \emptyset$. Induktivně definujeme otevřené pokrytí $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots$, že $\mathcal{U}_j = \{U_{j,i} | i \in [k]\}$, $U_{j,i} \subseteq U_{j-1,i}$ pro $j \geq 1$ a $U_{0,i} \subseteq U_i$, $\text{ord} \{\overline{U_{j,i}} \cap F_j | i \in [k]\} \leq n$.

$j = 0 : U_{j,0} := U_j$. Předpokládejme, že máme \mathcal{U}_j , $j < m \geq 1$, splňující podmínky výše. $\{F_m \cap U_{m-1,i} | i \in [k]\}$ je otevřené pokrytí F_m . Podle charakterizace dimenze \dim má otevřené skrčení $\{V_1, \dots, V_k\}$ řádu nejvýše n . Ať $W_i := (U_{m-1,i}, F_m) \cup V_i \subseteq U_{m-1,i}$. $\{W_i | i \in [k]\}$ je otevřené pokrytí \mathbb{X} . Řád $\{F_m \cap W_i | i \in [k]\} \leq n$. Podle lemmatu o skrčení existuje skrčení tohoto $\{W_i | i \in [k]\}$ na $\{U_{m,i} | i \in [k]\}$, že $\overline{U_{m,i}} \subseteq W_i$. $\mathcal{U}_m := \{U_{m,i} | i \in [k]\}$ splňuje požadované podmínky. Nyní $\forall x \in \mathbb{X} \forall j \in \mathbb{N} : \exists i(x) \in [k] : x \in U_{j,i(x)}$. $\exists i(x) \in [k] : \{j | i(x) = i(j, x)\}$ je nekonečné. $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{U_{j,i(x)}} | i \in [k]$. Tedy $\{\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{U_{j,i}} | i \in [k]\}$ je uzavřené pokrytí \mathbb{X} a navíc skrčení \mathcal{U} . K tomu je řádu $\leq n$. Tedy podle charakterizace \dim je $\leq n$. \square

Věta 8.7

Ať \mathbb{X} je normální, pak $\text{Ind } \beta\mathbb{X} = \text{Ind } \mathbb{X}$, $\dim \beta\mathbb{X} = \dim \mathbb{X}$.

Důkaz

Bez důkazu. Pro důkaz viz Engelking: Theory of dimensions Finite and Infinite. \square

8.1 Dimenze separabilních metrizablečních prostorů

Věta 8.8

Je-li \mathbb{X} separabilní metrizableční, pak $\dim \mathbb{X} = \text{ind } \mathbb{X} = \text{Ind } \mathbb{X}$.

Jsou-li \mathbb{X}, \mathbb{Y} neprázdné separabilní metrizableční, pak $\dim \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \leq \dim \mathbb{X} + \dim \mathbb{Y}$.

Věta 8.9

Je-li \mathbb{X} separabilní metrizableční prostor, pak existuje metrizableční kompaktifikace $\tilde{\mathbb{X}}$, že $\dim \mathbb{X} = \dim \tilde{\mathbb{X}}$.

Lemma 8.10 (O oddělování)

Pokud pro separabilní metrizableční prostor \mathbb{X} je $\dim \mathbb{X} \leq n$, pak pro každou posloupnost disjunktních dvojic $(A_1, B_1), \dots, (A_{n+1}, B_{n+1})$ uzavřených množin existují otevřené množiny $U_1, \dots, U_{n+1} : A_i \subseteq U_i \subseteq \overline{U_i} \subseteq \mathbb{X} \setminus B_i$, že $\bigcap_{i=1}^{n+1} \partial U_i = \emptyset$.

8.2 Dimenze eukleidovských prostorů

Věta 8.11 (Bronworova o pevném bodě)

Každé spojitě zobrazení $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ má pevný bod, tj. $x \in [0, 1]^n : f(x) = x$.

Věta 8.12

$$\dim[0, 1]^n = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

Důkaz (Myšlenka)

$\dim[0, 1]^n \leq n$: Indukcí podle n : $n = 1$ je cvičení. Předpokládejme, že $\dim[0, 1]^n \leq n$, chceme $\dim[0, 1]^{n+1} \leq n + 1$: Otevřené koule (při maximové metrice) v $[0, 1]^{n+1}$ jsou „krychličky“, jejichž hranice jsou sjednocením konečně mnoha množin homeomorfních s $[0, 1]^n$. Ze součtové věty je tedy dimenze hranice každé krychle v $[0, 1]^{n+1}$ nejvýše n -dimenzionální. \mathbb{R}^n je spočetným sjednocením prostorů homeomorfních $[0, 1]^n$ tedy ze součtové věty $\dim \mathbb{R}^n \leq n$.

$\dim[0, 1]^n \geq n$: Ať pro spor $\dim[0, 1]^n \leq n - 1$. $A_i := \{x \in [0, 1]^n | x_i = 0\}$ a $B_i := \{x \in [0, 1]^n | x_i = 1\}$. Zřejmě $\bigcup A_i \cup \bigcup B_i$ tvoří hranici $[0, 1]^n$ v \mathbb{R}^n . Podle lemmatu o oddělování existují otevřené množiny $U_1, \dots, U_n : A_i \subseteq U_i \subseteq \overline{U_i} \subseteq [0, 1]^n \setminus B_i, i \in [n]$ a $\partial U_1 \cap \dots \cap \partial U_n = \emptyset$. Definujme $f_i : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1] : f_i(x) = \frac{1}{2} \frac{\varrho(x, \partial U_i)}{\varrho(x, \partial U_i) + \varrho(x, A_i)} + \frac{1}{2}$, pro $x \in U_i$, a $-\frac{1}{2} \frac{\varrho(x, \partial U_i)}{\varrho(x, \partial U_i) + \varrho(x, B_i)} + \frac{1}{2}$ jinak. f_i je spojitě, $f_i(x) = 1$ pro $x \in A_i$, $f_i(x) = 0$ pro $x \in B_i$. $f_i^{-1}(1/2) = \partial U_i$. $f := f_1 \triangle \dots \triangle f_n, f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ spojitě. Bod $a = (1/2, \dots, 1/2)$ neleží v obrazu f , protože $\bigcap_{i=1}^n \partial U_i = \emptyset$.

Ať $g : [0, 1]^n \setminus \{a\} \rightarrow [0, 1]^n$ je projekce z bodu a na $[0, 1]^n$. $g \circ f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ spojitě, ale nemá pevný bod. \square

Věta 8.13 (Vnoření do euklidovských prostorů)

Separabilní metrizable TPP dimenze $\leq n$ lze vnořit do \mathbb{R}^{2n+1} . (Menší dimenze \mathbb{R} by už nefungovala.)

Dokonce lze takový prostor vnořit do $\{x \in \mathbb{R}^{2n+1} | x \text{ má nejvýše } n \text{ racionálních souřadnic}\}$ (který má dimenzi n , takže se mu říká univerzální?).