Úvod

Poznámka
Mluvilo se o historii $\mathbb{C}$.

Definice 0.1 (Prostor $\mathbb{C}$)

Prostor $\mathbb{C}$ komplexních čísel je prostor $\mathbb{R}^2$, v němž navíc definujeme násobení:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

Ztotožníme $(x, 0) = x$, neboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Značíme $i := (0, 1)$ (imaginární jednotka).

Definice 0.2 (Značení (komplexně sdružené číslo, reálná a imaginární složka))

$$z = x + i \cdot y \in \mathbb{C} \implies \overline{z} := x - i \cdot y \wedge \Re z := x, \Im z := y.$$

Definice 0.3 (Modul / absolutní hodnota)

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Tvrzení 0.1 (Vlastnosti)

- $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, *potom* $z = x + i \cdot y$ *a* $(\pm i)^2 = -1$.
- *Násobení* $\cdot : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *je asociativní, komutativní a distributivní (vzhledem k* $+$*). Navíc* $\cdot$ *zahrnuje i násobení v* $\mathbb{R}$ *a násobení skalárem.*
- $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $z + \overline{z} = 2\Re z$, $z - \overline{z} = 2i\Im z$, $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0 : \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : zz^{-1} = 1$, *konkrétně* $z^-1 = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *je komutativní těleso.*

Pozor
$\mathbb{C}$ nelze „rozumně“ lineárně uspořádat.

Poznámka (Lineární zobrazení)
Lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$-lineární zobrazení) jsou reálné matice řádu 2. Lineární zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$-lineární) jsou komplexní čísla.

Lineární zobrazení $L = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ je tedy $\mathbb{C}$-lineární právě tehdy, když $a = d$ a $b = -c$.

Poznámka (Úmluva)
„Funkce“ znamená funkci z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$, není li řečeno jinak.

Definice 0.4 (Značení (okolí, prstencové okolí))

$$z_0 \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0 : \mathcal{U}(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}, \mathcal{P}(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Definice 0.5 (Limita, spojitost)

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w \in \mathbb{C} \equiv \forall \varepsilon \exists \delta > 0 \forall z \in \mathbb{C} : z \in \mathcal{P}(z_0, \delta) \implies f(z) \in \mathcal{U}(w, \varepsilon).$$

f je spojitá v z_0, jestliže $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Definice 0.6 (Derivace)
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je v bodě $z_0 \in \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-diferencovatelná, jestliže existuje $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z) - Lh}{|h|} = 0$$

Značíme $L =: df(z_0)$.

$$df(z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{bmatrix}$$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-diferencovatelná, jestliže existuje

$$f'(z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}.$$

f' nazýváme komplexní derivace funkce.

Poznámka
Pro $(f \pm g)'$, $(f \cdot g)'$, $(f/g)'$, $(f \circ g)'$ platí stejné vzorce jako pro funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Věta 0.2 (Cauchy-Riemann)
Nechť f je komplexní funkce definovaná na nějakém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- *Existuje $f'(z_0)$.*
- *Existuje $df(z_0)$ a $df(x_0)$ je $\mathbb{C}$-lineární.*

- *Existuje $df(z_0)$ a platí*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0), \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0).$$

(Tzv. Cauchy-Riemannova podmínka.)

Důkaz
Druhý a třetí bod je ekvivalentní z poznámky o lineárních zobrazeních.

$w = f'(z_0) \Leftrightarrow 0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-wh}{h}$. Vynásobíme $\frac{h}{|h|}$:

$$\Leftrightarrow 0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-wh}{|h|} \Leftrightarrow df(z_0)h = wh.$$

□

Poznámka
Existuje-li $f'(z_0)$, pak $df(z_0)h = f'(z_0)h, h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.

Cauchy-Riemannova podmínka je ekvivalentní $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

Definice 0.7 (Holomorfní funkce)

Nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{C}$. Potom f je holomorfní na G, pokud je f $\mathbb{C}$-diferencovatelná v každém bodě G.

Definice 0.8 (Exponenciála)

$$\exp(z) := e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y), z = x + y \cdot i \in \mathbb{C}.$$

Tvrzení 0.3 (Vlastnosti exponenciály)

$\exp|_{\mathbb{R}}$ *je reálná exponenciála,* $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$, $\exp'(z) = \exp(z)$ *($z \in \mathbb{C}$),* $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\exp$ *není prostá na $\mathbb{C}$ a je 2π periodická, dokonce* $\exp(z) = \exp(w) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : w = z + 2k\pi \cdot i$, *nechť $P := \{z \in \mathbb{C} | \Im z \in (-\pi, \pi]\}$, potom* $\exp|_P$ *je prostá a* $\exp(P) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Definice 0.9 (Logaritmus a hlavní hodnota logaritmu)

Nechť $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Položme

$$Log z := \{w \in \mathbb{C} | \exp w = z\},$$

$$\log z := \log|z| + i \cdot \arg z. \qquad \text{(Hlavní hodnota logaritmu.)}$$

Tvrzení 0.4 (Vladstnosti logaritmu)

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*. Potom*

- $Logz = \{\log z + 2k\pi i | k \in \mathbb{Z}\}$, $\log = (\exp|_P)^{-1}$
- $\log$ *není spojitá na žádném* $z \in (-\infty, 0]$*, ale* $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$*. Navíc* $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$
- $\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$.

Pozor
Neplatí $\log \exp z = z$ a $\log(z \cdot w) = \log z + \log w$!

Definice 0.10

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom hlavní hodnotou α-té mocniny z definujeme

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log z).$$

Položme

$$M_\alpha(z) := \{\exp(\alpha \cdot w) | w \in Logz\}.$$

Tvrzení 0.5 (Vlastnosti mocniny)

- $e^z = \exp(z \cdot \log e) = \exp(z)$.
- *Je-li* $z > 0$ *a* $\alpha \in \mathbb{R}$*, potom* z^α *je definována stejně jako v MA.*
- $M_\alpha(z) = \left\{z^\alpha \cdot e^{2k\pi \cdot i \cdot \alpha} | k \in \mathbb{Z}\right\}$, $z \neq 0$.
- $(z^\alpha) = \alpha \cdot z^{\alpha - 1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$, *kde*

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Poznámka (Zápočet)
Zápočet dostaneme za aktivní účast na cvičení

Poznámka
Je-li $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, potom

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

tedy f lze rozložit na sudou a lichou část.

Sudá část exponenciely je cosh a lichá sinh.

Definice 0.11 (Goniometrické funkce)

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z,$$

kde

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Tvrzení 0.6 (Vlastnosti)

- cos *i* sin *jsou rozšířením funkcí z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{C}$.
- $\sin' z = \cos z$, $\cos' z = \sin z$.
- sin *i* cos *jsou* 2π *periodické funkce, ale nejsou omezené, platí, že* $\sin \mathbb{C} = \mathbb{C} = \cos \mathbb{C}$.
- *Platí* $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

1 Křivkový integrál

Definice 1.1 (Značení)

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Potom φ je křivka, pokud je φ spojité, φ je regulární křivka, pokud je φ po částech spojitě diferencovatelné tzn. φ je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a existuje dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ takové, že $\varphi|_{[t_i, t_n]}$ je diferencovatelné.

Úsečka: Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, potom $\varphi(t) = a + t \cdot (b - a)$, $t \in [0, 1]$ je úsečka z a do b. Značíme $[a, b]$.

Řekneme, že křivka φ je lomená čára v $\mathbb{C}$, existují-li $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ taková, že

$$\varphi = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + \ldots + [z_{k-1}, z_k].$$

Poznámka (Úmluva)
Pokud neřekneme něco jiného, křivkou budeme rozumět regulární křivku v $\mathbb{C}$.

Definice 1.2 (Délka křivky)

$$V(\varphi) = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)| dt,$$

je-li φ regulární.

Definice 1.3

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je regulární křivka a $f :< \varphi >\to \mathbb{C}$ je spojitá. Potom definujeme

$$\int_\varphi f := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Poznámka
Křivkový integrál konverguje jako Riemannův.

$$\int_\varphi f(z) dz,$$

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0, +\infty)$ a $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom

$$\int_\varphi (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot 2 \cdot r \cdot e^{it} dt = i \cdot r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt =$$

$2\pi i$, pokud $n = -1$, 0, pokud $n \in \mathbb{Z}$ a $n \neq -1$.

Tvrzení 1.1 (Vlastnosti křivkového integrálu)

Je-li φ křivka, f a g jsou spojité funkce na $< \varphi >$ a $A \in \mathbb{C}$, ptotom

$$\int_\varphi (Af + g) = A \int_\varphi f + \int_\varphi g.$$

Je-li φ křivka a f je spojitá funkce na $< \varphi >$, potom

$$|\int_\varphi f| \leqslant \max_{<\varphi>} |f| \cdot V(\varphi).$$

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $\psi : [\gamma, \delta] \to \mathbb{C}$ a $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$. Potom

$$\int_{\varphi+\psi} f = \int_\varphi f + \int_\psi f \wedge \int_{-\varphi} f = -\int_\varphi f,$$

kde $(-\varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$ *je opačná křivka k* φ.

Křivkový integrál nezávisí na parametrizaci křivky: Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ *je křivka,* $\omega : [\gamma, \delta] \to [\alpha, \beta]$ *je spojitě diferencovatelné s* $\omega' > 0$ *a* $\psi = \varphi \circ \omega$. *Potom* $\int_\psi f = \int_\varphi f$.

Důkaz
Jednoduchý, ukázán na přednášce pro některé body. □

Definice 1.4 (Primitivní funkce)

Řekneme, že funkce f má na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ primitivní funkci F, pokud $F' = f$ na G.

Věta 1.2 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ *je otevřená a* f *má na* G *primitivní funkci* F. *Nechť* $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ *je regulární křivka a* f *je spojitá*[a] *na* $< \varphi >$. *Potom*

$$\int_\varphi f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)),$$

je-li navíc φ *uzavřená, tzn.* $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, *pak*

$$\int_\varphi f = 0.$$

Důkaz
Z Cauchy-Riemannovy věty plyne, že

$$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = \frac{\partial F}{\partial x}\varphi_1' + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi_2' = F'\varphi_1' + iF'\varphi_2' = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Tato rovnost platí až na konečně mnoho $t \in [\alpha, \beta]$, neboli $F \circ \varphi$ je zobecněná primitivní funkce k integrandu. Máme tedy

$$\int_\varphi f = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}(F(\varphi(t)))dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

□

[a] Tohle je zbytečný předpoklad, ale to ještě neumíme dokázat.

Věta 1.3

Funkce f *je konstantní na oblasti* $G \subset \mathbb{C}$, *právě když* $f' = 0$ *na* G.

Důkaz

„ $\Longrightarrow$ “: Jasné. „ $\Longleftarrow$ “: Nechť $z, w \in G$ a φ je lomená čára v G spojující z a w. Potom $f(w) - f(z) = \int_\varphi f' = 0$, protože f je primitivní funkcí k f' na G. □

Důsledek

Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, potom existuje $c \in \mathbb{C}$ tak, že $F_2 = F_1 + c$

Důkaz

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0$$

□

Věta 1.4 (O existenci primitivní funkce)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je spojitá na G, tak následující je ekvivalentní

1. *f má na G primitivní funkci;*
2. *$\int_\varphi f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G;*
3. *$\int_\varphi f$ nezávisí v G na křivce φ, tzn. pro každé dvě křivky $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$, $\psi : [\gamma, \delta] \to G$ takové, že $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$ a $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$ platí $\int_\varphi f = \int_\psi f$.*

Důkaz
„1. $\implies$ 2.“: Víme z věty o výpočtu integrálu pomocí primitivní funkce.

„2. $\implies$ 3.“: Položme $\tau := \varphi + (-\psi)$. Potom je τ uzavřená a z 2. dostaneme

$$0 = \int_\tau f = \int_\varphi f - \int_\psi f.$$

„3. $\implies$ 1.“: Volme $z_0 \in G$ pevně. Pro každé $z \in G$ najděme lomenou čáru φ_z v G, která začíná v z_0 a končí v z. Definujeme $F(z) := \int_{\varphi_z} f$, $z \in G$. Definice F je korektní z 3. Ukážeme, že F je hledaná primitivní funkce k f na G. Nechť $z_1 \in G$. Dokážeme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. Volme $r > 0$, aby $U(z_1, r) \subset G$. Je-li $|h| < r$, potom

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_{\varphi_{z_1} + u} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f,$$

kde $u = [z_1; z_1 + h]$ je úsečka. Tedy

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_u f = \int_0^1 f(z_1 + th)hdt,$$

$$\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) = \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1))dt \to 0,$$

neboť $|\int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1))dt| \leqslant \max_{z \in [z_1; z_1 + h]} |f(z) - f(z_1)| \to 0$ ze spojitosti f v z_1. $\square$

Poznámka (Značení)
Řekněme, že $M \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá, pokud existuje $z_0 \in M$ (tzv. střed hvězdovitosti), pro který $[z_0; z] \subset M$ pro každé $z \in M$.

Poznámka
Konvexní $\subsetneq$ hvězdovitá.

Řekneme, že $\triangle \subset \mathbb{C}$ je trojúhelník s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{C}$, pokud

$$\triangle := \{\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c | \alpha, \beta, \gamma \geqslant 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\},$$

a značíme $\partial\triangle := [a; b] + [b; c] + [c; a]$.

Tvrzení 1.5 (Dodatek)

Nechť f je spojitá funkce na hvězdovité oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Je-li

$$\int_{\partial\triangle} f = 0,$$

pro každý trojúhelník $\triangle \subset G$, potom f má na G primitivní funkci.

Důkaz
Nechť z_0 je střed hvězdovitosti G. Pro každé $z \in G$ položme $\varphi_z := [z_0; z]$ a $F(z) := \int_{\varphi_z} f$. $\square$

Poznámka (Cauchyho věty)
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a φ je uzavřená křivka v G. Potom Cauchyho věty nám říkají, za jakých podmínek na G a φ je $\int_\varphi f = 0$.

Věta 1.6 (Goursatovo lemma (Cauchyho věta pro $\triangle$))

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a $\triangle$ je trojúhelník v G. Potom

$$\int_{\partial\triangle} f = 0.$$

Důkaz
Označme $\varphi_0 := \partial\triangle$. Sporem: Předpokládejme, že $|\int_{\varphi_0} f| =: K > 0$. Zřejmě $\triangle$ je nedegenerovaný. V $\triangle$ veďme střední příčky a označme ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 obvody čtyř vzniklých trojúhelníků. Obvody vnitřních trojúhelníků ψ_1 (vlevo dole), ψ_2 (vpravo dole), ψ_3 (nahoře) a ψ_4 (uprostřed) probíháme proti směru hodinových ručiček. Potom

$$\int_{\varphi_0} f = \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f + \int_{\psi_3} f + \int_{\psi_4} f.$$

Ex. $j_1 = 1, \dots, 4$ tak, že $|\int_{\psi_{j_1}} f| \geqslant \frac{K}{4}$ a $V(\psi_{j_1}) = \frac{V(\varphi)}{2}$. Označme $\varphi_1 = \psi_{j_1}$. Indukcí sestrojíme posloupnost trojúhelníků tak, že

$$|\int_{\varphi_j} f| \geqslant \frac{K}{4^j} \wedge V(\varphi_j) = \frac{V(\varphi)}{2^j}.$$

Máme, že $\bigcup_{j=0}^{\infty} \triangle_j = \{z_0\} \subset G$, protože $\operatorname{diam}(\triangle_j) \to 0$. Položme

$$\varepsilon(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0), & z \in G\setminus\{z_0\}, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Potom ε je spojitá na G a máme pro $j \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_{\varphi_j} f(z)dz = \int_{\varphi_j} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))dz + \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0)dz,$$

kde první integrand vpravo má primitivní funkci na $\mathbb{C}$ a první integrál je roven 0. Pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ dostaneme

$$0 < \frac{K}{4^j} \leqslant |\int_{\varphi_j} f| = |\int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0)| \leqslant V^2(\varphi_j) \cdot \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon| = \frac{V^2(\varphi)}{4^j} \cdot \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon|,$$

kde třetí nerovnost platí díky tomu, že $|z - z_0| \leqslant V(\varphi_j)$. Z předchozího tedy máme (po vynásobení 4^j):

$$0 < K \leqslant V^2(\varphi) \cdot \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon| \to 0,$$

protože ε je spojitá v z_0 a $\varepsilon(z_0) = 0$. $\lightning$. □

Věta 1.7 (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má na G primitivní funkci. (Ekvivalentně: $\int_\varphi f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G.)

Důkaz
Z Goursatova lemmatu a dodatku. □

Poznámka
Goursatovo lemma a tedy i předchozí věta platí i pro funkci f, která je spojitá na G a holomorfní na $G \setminus \{z_0\}$ pro nějaké $z_0 \in G$.

Důkaz
Nechť $\triangle$ je nedegenerovaný trojúhelník v G. Pak rozebereme případy kde leží z_0. □

Věta 1.8 (O derivování podle komplexního parametru)

Nechť φ je křivka v $\mathbb{C}$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Nechť $F(z,s)$ a komplexní derivace $\frac{\partial F}{\partial s}(z,s)$ jsou spojité komplexní funkce na $< \varphi > \times \Omega$. Pro každé $s \in \Omega$ položme $\Phi(s) := \int_\varphi F(z,s)dz$. Potom $\Phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $\Phi'(s) = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial s}(z,s)dz$, $s \in \Omega$.

Důkaz
Pro $s = s_1 + is_2 = (s_1, s_2) \in \Omega$ máme $\Phi(s) = \int_\alpha^\beta F(\varphi(t), (s_1, s_2))\varphi'(t)dt$. Podle vět o spojitosti a derivování integrálu závislého na parametru máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_j}(s) = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial s_j}(z,s)dz,$$

pro $s \in \Omega$ a $j \in [2]$. Navíc jsou tyto parciální derivace spojité a splňují podmínky Cauchy--Riemannovy věty, tedy Φ je komplexně diferencovatelná a komplexní derivace se rovná derivaci vzhledem k té první proměnné. □

Definice 1.5 (Index bodu křivky)

Nechť φ je uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ a $s \in \mathbb{C} \setminus < \varphi >$. Potom číslo

$$\operatorname{ind}_\varphi s := \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z-s}$$

nazveme indexem bodu s vzhledem ke křivce φ.

Poznámka
Ukážeme si, že $\operatorname{ind}_\varphi$ se rovná počtu oběhů φ kolem s v kladném směru (tzn. proti směru hodinových ručiček).

Věta 1.9 (O základních vlastnostech indexu)

Nechť φ je uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ a $G := \mathbb{C} \setminus < \varphi >$. Potom G je otevřena, funkce $s \mapsto \operatorname{ind}_\varphi s$ je konstantní na každé komponentě G a na jediné její neomezené komponentě je nulová.

Důkaz
Podle předchozí věty je $\Phi(s) := \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-s}$, $s \in G$ holomorfní a pro každé $s \in G$ je $\Phi'(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{(z-s)^2} = 0$, protože $f(z) := \frac{1}{(z-s)^2}$ má primitivní funkci na $\mathbb{C}\setminus\{s\}$. Tedy Φ je konstantní na každé komponentě G.

Volíme $R > 0$, aby $< \varphi > \subset U(0,R)$. Potom $\mathbb{C}\setminus U(0,R)$ je obsaženo v jediné neomezené komponentě G_0 množiny G. Navíc pro $s \in \mathbb{C}\setminus U(0,R)$ je funkce $g(z) := \frac{1}{z-s}$, $z \in U(0,R)$ holomorfní a dle Cauchyho věty pro hvězdovitou oblast je $\Phi(s) = 0$. ▫

Věta 1.10 (Cauchyův vzorec na kruhu)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřené a $f \in \mathcal{H}(G)$. Nechť $\overline{U(z_0), r} \subset G$ a $p(t) = z_0 + r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom platí

$$\frac{1}{2\pi}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}dz = f(s), |s - z_0| < r;$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}dz = 0, |s - z_0| > r;$$

Důkaz
1. Nechť $|s - z_0| < r$. Volme $R > r$, aby $U(z, R) \subset G$. Položme

$$h(z) := \frac{f(z) - f(s)}{z - s}, z \in U(z_0, R)\setminus\{s\};$$

$$h(z) := f'(s), z = s.$$

Zřejmě $h \in \mathcal{H}(U(z_0, R)\setminus\{s\})$ he spojitá hvězdovitá oblast $U(z_0, R)$. Z Cauchyho věty je

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_\varphi h = \frac{1}{2\pi}\int_\varphi \frac{f(z)dz}{z-s} - \frac{1}{2\pi}\int_\varphi \frac{dz}{z-d} \cdot f_s.$$

2. Nechť $|s - z_0| > r$. Volme $R \in (r, |z_0 - s|)$, aby $U(z_0, R) \subset G$. Potom

$$g(t) := \frac{f(z)}{z-s} \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$$

a z Cauchyho věty je

$$\frac{1}{2\pi}\int_\varphi g = 0.$$

▫

Důsledek
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má komplexní derivace libovolného řádu všude na G.

Tedy nechť $U(z_0, r) \subset G$ a φ je jako v předchozím. Potom

$$\frac{k!}{2\pi} \int_\varphi \frac{f(z)dz}{(z-s)^{k+1}} = f^{(k)}(s), |s - z_0| < r, k \in \mathbb{N}.$$

Zde $f^{(0)} := f$ a k-tá komplexní derivace $f^{(k)}$ je definovaná jako $f^{(k)} := \left(f^{(k-1)}\right)'$, má-li pravá strana smysl.

Důkaz

Z věty o derivaci integrálu podle komplexního parametru a předchozí věty, protože

$$\frac{d^k}{ds^k}\left(\frac{1}{z-s}\right) = \frac{k!}{(z-s)^{k+1}}, \qquad z \neq s.$$

□

Věta 1.11 (Morera)

Nechť f je spojitá funkce na otevřené $G \subset \mathbb{C}$. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$, právě když

$$\int_{\partial\triangle} f = 0, \qquad \forall \triangle \subset G \text{ trojúhelník.}$$

Důkaz

„ $\Longrightarrow$ “: Goursat. „ $\Longleftarrow$ “: Nechť $U := U(z_0, R) \subset G$. Protože f je spojitá na hvězdovité oblasti U a platí pro ni rovnost výše, má f na U primitivní funkci F, tzn. $f = F'$ na U. Protože $F \in \mathcal{H}(U)$, máme $f' = F''$ na U, tudíž $f \in \mathcal{H}(U)$. Tedy i $f \in \mathcal{H}(G)$. □

Věta 1.12 (Cauchyho odhady)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0, +\infty)$ a f je holomorfní funkce na otevřené množině obsahující $\overline{U(z_0, r)}$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je

CO1 $\forall s \in U := U(z_0, r)$:

$$|f^{(k)}(s)| \leqslant \frac{(k!)r}{(d(s))^{k+1}},$$

kde $d(s) := \operatorname{dist}(s, \partial U)$;

CO2 $\forall s \in U(z_0, \frac{r}{2})$:

$$|f^{(k)}(s)| \leqslant \frac{k! 2^{k+1}}{r^2} \cdot \max_{\partial U} |f|;$$

CO3 $|f^{(k)}(z_0)| \leqslant \frac{k!}{r^k} \cdot \max_{\partial U} |f|$.

Důkaz (CO1)
Z věty výše (pro φ stejné jako tam)

$$|f^{(k)}(z)| = |\frac{k!}{2\pi}\int_\varphi \frac{f(z)ds}{(z-s)^{k+1}}| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \cdot 2\pi r \max_{<\varphi>} |f| \frac{1}{(d(s))^{k+1}},$$

protože $|z-s| \geqslant d(s)\ \forall z \in <\varphi>$. □

Důkaz (CO2 a CO3)
Plyne z CO1, neboť $d(s) \geqslant \frac{r}{2} \forall s \in U(z_0, \frac{r}{2})$ a $d(z_0) = r$. □

Věta 1.13 (Liouville)

Je-li f holomorfní a omezená funkce na $\mathbb{C}$, potom je f konstantní.

Důkaz
Ukážeme, že $f' = 0$ na $\mathbb{C}$: Označme $M := \sup_{\mathbb{C}} |f| < +\infty$. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Z CO3 pro každé $r > 0$ platí

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M}{r} \to 0,$$

tudíž $f'(z_0) = 0$. □

Důsledek (Zakladní věta algebry)
V $\mathbb{C}$ má každý polynom stupně alespoň 1 vždy alespoň jeden kořen.

Důkaz
Nechť $p(z) := a_n z^n + \ldots + a_0 z^0$, kde $a_j \in \mathbb{C}$, $n \geqslant 1$ a $a_n \neq 0$. Sporem: Předpokládejme, že $p \neq 0$ na $\mathbb{C}$. Potom $f := \frac{1}{p}$ je holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$. Z Liouvilleovy věty je konstantní, tedy i $p = \frac{1}{f}$ je konstantní a $p' = 0 = p^{(n)} = a_n \cdot n! \implies a_n = 0$. ↯. □

Lemma 1.14

Nechť φ je křivka v $\mathbb{C}$, f_i jsou spojité funkce na $<\varphi>$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f_i \rightrightarrows f$ na $<\varphi>$. Potom f je spojitá na $<\varphi>$ a

$$\int_\varphi f_n \to \int_\varphi f.$$

Důkaz
Platí

$$|\int_\varphi f_i - \int_\varphi f| = |\int_\varphi (f_n - f)| \leqslant V(\varphi) \cdot \max_{<\varphi>} |f_n - f| \to 0.$$

□

Věta 1.15 (Weierstrass)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f_n \in \mathcal{H}(F)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \overset{Loc.}{\rightrightarrows} f$ na G. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$ a $f_n^{(k)} \overset{Loc.}{\rightrightarrows} f^{(k)}$ na G pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Důkaz

1. Zřejmě f je spojitá na G. Nechť $\triangle$ je trojúhelník v G. Potom

$$0 \overset{G?}{=} \int_{\partial\triangle} f_n \to \int_{\partial\triangle} f = 0.$$

Z Morera je $f \in \mathcal{H}(G)$.

2. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $z_0 \in G$. Volme $r > 0$, aby $\overline{U(z_0, r)} \subset G$. Z CO2 máme, že $\forall s \in U(z_0, \frac{r}{2})$:

$$|f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s)| = |(f_n - f)^{(k)}(s)| \leqslant \frac{k!2^{k+1}}{r^k} \cdot \max_{\partial U(z_0,r)} |f_n - f| \to 0.$$

□

2 Mocninné řady

Definice 2.1 (Mocninná řada)

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

je mocninná řada s koeficienty $\{a_n\}$ a středem z_0.

Poznámka (Vlastnosti) Konvergence Existuje $R \in [0, +\infty]$ takové, že řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $U(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} | \ |z - z_0| < R\}$ a řada diverguje pro $|z - z_0| > R$. Číslo R se nazývá poloměr konvergence a platí, že

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde $\frac{1}{0} = +\infty$ a $\frac{1}{+\infty} = 0$.

- Označíme-li součet řady na $U(z_0, R)$ jako f, potom $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$f^{(k)}(z) - \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (z - z_0)^{n-k}, \qquad z \in U(z_0, R),$$

speciálně $a_k = f^{(k)}(z)/k!$.

Plyne z Weierstrassovy věty pro

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Zřejmě $S_N \rightrightarrows^{loc} f$ na $U(z_0, R)$, tudíž $S_N^{(k)} \rightrightarrows^{loc} f^{(k)}$ na $U(z_0, R)$, tudíž rovnost výše platí. Dosadíme-li do ní $z = z_0$, dostaneme

$$f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k!.$$

Věta 2.1 (O rozvoji holomorfní funkce do mocninné řady na kruhu)

Nechť $R \in (0, +\infty]$ a $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$. Potom existuje jediná mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, která má na $U(z_0, R)$ součet f. Navíc platí, že $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz

Jednoznačnost plyne ze vzorce. Existence: Nechť $z \in U(z_0, R)$. Volme $r > 0$, aby $|z - z_0| < r < R$. Potom z Cauchyho věty je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)dw}{w - z},$$

kde $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pro každé $w \in < \varphi >$ máme

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}},$$

což konverguje stejnoměrně pro $w \in < \varphi >$. Dosadíme:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} f(w)dw =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \cdot \frac{f^{(n)}}{n!}.$$

□

Věta 2.2 (O nulovém bodě)

Nechť f je holomorfní funkce na okolí $x_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z_0) = 0$. Potom buď $\exists r > 0 : f = 0$ na $U(z_0, r)$; nebo $\exists r > 0 : f \neq 0$ na $P(z_0, r) := U(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

V druhém případě existuje jediné $p \in \mathbb{N}$ tak, že

$$f(x_0) = 0 = f'(z_0) = \ldots = f^{(p-1)}(z_0), f^{(p)}(z_0) \neq 0.$$

Číslo p je tzv. násobnost nulového bodu z_0 funkce f.

Navíc z_0 je nulový bod f násobnosti $p \in \mathbb{N}$, právě když existuje $r > 0$ a $g \in \mathcal{H}(U(z_0, r))$

tak, že $\forall z \in U(z_0, r)$*:*

$$g(z) \neq 0 \wedge f(z) = (z - z_0)^p g(z).$$

Důkaz

Máme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $z \in U(z_0, R)$. Pokud nenastane první případ, potom existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \neq 0$. Zvolme nejmenší $p \in \mathbb{N}$, aby $0 \neq a_p = f^{(p)}(z_0)/p!$. Potom platí rovnost pro druhý případ a $\forall z \in U(z_0, R)$:

$$f(z) = a_p(z - z_0)^p = \ldots = (z - z_0)^p \underbrace{\sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-p}}_{=:g(z)}.$$

Zřejmě $g \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$. Protože $g(z_0) = a_p \neq 0$, $\exists r > 0$ tak, že $g \neq 0$ na $U(z_0, r)$. Tudíž $f(z) = (z - z_0)^p \cdot g(z) \neq 0$ na $P(z_0, r)$. Obrácené tvrzení plyne stejně snadno. □

Věta 2.3 (O jednoznačnosti pro holomorfní funkce)

Nechť $\varnothing = G \subset \mathbb{C}$ *je oblast a* $f, g \in \mathcal{H}(G)$*. Následující je ekvivalentní*

1. $f = g$ *na* G*;*
2. $M := \{z \in G | f(z) = g(z)\}$ *má v* G *hromadný bod, tzn. existuje* z_0 *tak, že* $P(z_0, r) \cap M \neq \varnothing$ $\forall r > 0$*;*
3. *Existuje* $z_0 \in G$ *tak, že*

$$f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Důkaz

BÚNO předpokládejme, že $G = 0$, jinak uvažujme $f - g$. „1 $\Longrightarrow$ 2 a 2 $\Longrightarrow$ 3“: Nechť $z_0 \in G$ je hromadný bod $M := \{z \in G | f(z) = 0\}$. Zřejmě $f(z_0) = 0$ a z předchozí věty je $f = 0$ na nějakém okolí z_0.

„3 $\Longrightarrow$ 1“: Uvažme $N := \left\{z \in G | \forall k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(z) = 0\right\}$. Potom $\varnothing \neq N$ a N je uzavřená v G, protože všechny $f^{(k)}$ jsou spojité. Navíc N je otevřená. Nechť $z_1 \in N$. Podle věty o nulovém bodě existuje $r > 0$ tak, že $f = 0$ na $U(z_1, r)$. Tedy $U(z_0, r) \subset N$. Protože G je oblast (tj. je souvislá, tedy neexistuje vlastní obojetná podmnožina), je $N = G$. □

Věta 2.4 (Princip maxima modulu)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ *je oblast a* $f \in \mathcal{H}(G)$*. Potom* f *je na* G *konstantní, pokud* $|f|$ *nabývá v* G *lokální maximum, tzn. existuje* $z_0 \in G$ *a* $r > 0$*, že* $\forall z \in U(z_0, r) \subset G : |f(z)| \leqslant |f(z_0)|$*.*

Důkaz
Nechť to platí. Potom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, z \in U(z_0, r).$$

Nechť $0 < \varrho < r$. Potom

$$|a^2| = |f(z_0)|^2 \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \varrho e^{it})|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varrho^n e^{int} \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \overline{a_m} \varrho^m e^{-int} \right) dt = |f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)}.$$

□

3 Riemannova sféra

Definice 3.1 (Riemannova sféra ($\mathbb{S}$))

Označme $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a definujeme okolí v ∞ následovně: Pro každou $\varepsilon > 0$ položme

$$P(\infty, \varepsilon) := \left\{ z \in \mathbb{C} |\ |z| > \frac{1}{\varepsilon} \right\}, \qquad U(\infty, \varepsilon) := P(\infty, \varepsilon) \cup \{\infty\}.$$

Definice 3.2 (Limita na $\mathbb{S}$)

Je-li $z_0, L \in \mathbb{S}$, potom $L = \lim_{z \to z_0} f(z)$, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$z \in P(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(L, \varepsilon).$$

Tvrzení 3.1 (Vlastnosti limity na $\mathbb{S}$)

- $\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$, *má-li alespoň jedna strana smysl.*
- *Následující je ekvivalentní:* $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$, $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$.
- *Počítání s* ∞*:* $\frac{a}{\infty} = 0\ \forall a \in \mathbb{C}$, $\frac{a}{0} = \infty\ \forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$, $a \pm \infty = \infty \forall a \in \mathbb{C}$, $a \cdot \infty = \infty\ \forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$. *Nedefinujeme* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$. *Potom platí i v* $\mathbb{S}$ *aritmetika limit.*
- $\mathbb{S}$ *je jednobodovou kompaktifikací* $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{S}$ *je homeomorfní s jednotkovou sférou* $S^2 := \{[\alpha, \beta, \gamma] \in \mathbb{R}^3 | \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\}$, *speciálně* $\mathbb{S}$ *je kompaktní.*

4 Izolované singularity

Definice 4.1

Nechť f je holomorfní funkce na $P(z_0) = P(z_0, r)$. Potom f má v z_0:

- odstranitelnou singularitu, existuje-li $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$;
- pól, je-li $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$;
- podstatnou singularitu, pokud $\lim_{z \to z_0} f(z)$ neexistuje v $\mathbb{S}$.

Věta 4.1 (O odstranitelné singularitě)

Nechť f je holomorfní funkce na $P(z_0)$. Následující je ekvivalentní:

1. *z_0 je odstranitelná singularita f.*
2. *Existuje $r > 0$ tak, že f je omezená na $P(z_0, r)$.*
3. *Existuje $F \in \mathcal{H}(U(z_0))$ tak, že $F = f$ na $P(z_0)$.*

Poznámka (Úmluva)
Každá odstranitelná singularita se považuje za odstraněnou (tj. bereme F místo f).

Důkaz
„1. $\implies$ 2., 2. $\implies$ 3.": Položme

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & z \in P(z_0), \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Potom $g \in \mathcal{H}(U(z_0))$, protože

$$g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \underbrace{(z - z_0)}_{\to 0} \cdot \underbrace{f(z)}_{\text{omezená}} = 0.$$

Dále (pro „3. $\implies$ 1.") $\forall z \in U(z_0)$:

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \cdot F(z),$$

kde $F(z) := \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2}$. Potom $F \in \mathcal{H}(U(z_0))$ a $\forall z \in P(z_0)$:

$$(z - z_0)^2 \cdot f(z) = (z - z_0)^2 \cdot F(z).$$

□

Poznámka
Píšeme $f(z) \sim g(z)$ pro $z \to z_0$, pokud $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Věta 4.2 (O póle)

Nechť f je holomorfní funkce na $P(z_0)$. Následující je ekvivalentní:

1. *z_0 je pól f.*
2. *$h := \frac{1}{f}$ (po dodefinování $h(z_0) = 0$) má v z_0 nulový bod násobnosti $p \in \mathbb{N}$.*
3. *Existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^p f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Tedy $f(z) \sim \frac{1}{(z-z_0)^p}$ pro $z \to z_0$.)*
4. *Existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall k \in \mathbb{Z}$:*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) \begin{cases} = \infty, & \text{je-li } k < p, \\ \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, & k = p, \\ 0, & k > p. \end{cases}$$

Důkaz

„1. $\implies$ 2.“: Protože $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, je $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Po odstranění singularity, tzn. po dodefinování $h(z_0) = 0$, má $h = \frac{1}{f}$ nulový bod v z_0 konečné násobnosti $p \in \mathbb{N}$.

„2. $\implies$ 3.“: Existuje $r > 0$ a $g \in \mathcal{H}(U(z_0, r))$ tak, že $g \neq 0$ na $U(z_0, r)$ a

$$h(z) = (z - z_0)^p \cdot g(z), \qquad z \in U(z_0, r).$$

Potom $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^p f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(z_0)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

„3. $\implies$ 4.“: Máme

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = \lim_{z \to z_0} \underbrace{(z - z_0)^{k-p}}_{\to 0, k>p / 1, k=p / \infty, k<p} \cdot \underbrace{(z - z_0)^p f(z)}_{\to \ldots \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}.$$

„4. $\implies$ 1.“: $\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)|_{k=0} = \infty$. □

Definice 4.2 (Násobnost pólu)

Číslo p je určeno jednoznačně a nazývá se násobnost pólu z_0 funkce f.

Věta 4.3 (Casorati-Weierstrass)

Nechť f je holomorfní na $P(z_0)$. Následující je ekvivalentní:

1. *z_0 je podstatná singularita f.*
2. *$\forall r > 0 : \overline{f(P(z_0, r))} = \mathbb{C}$.*

Poznámka (Velká Picardova věta)
Platí dokonce (i když je to těžké dokázat)

$$\forall r > 0 : \mathbb{C} \setminus f(P(z_0, r))$$

je nejvýše jednobodová.