Poznámka
Tyto poznámky jsou udělané z checklistu ke zkoušce, poznámek Lou van de Driese a „zelených slidů“. A samozřejmě z předchozích poznámek. A s vlastními poznámkami, např. ze zkoušky, ze které jsem vyletěl.

1 Definice

1.1 Výroková logika

Definice 1.1 (Logické spojky)

Základem výrokové logiky je 5 symbolů (2 hodnoty + 3 logické spojky): $\top\bot\neg\wedge\vee$ = pravda, lež, negace, a, nebo.

Zatím jim nepřiřazujeme žádný „význam“. Ten získávají až následnými definicemi, zvláště axiomy.

Definice 1.2 (Prvorvýroky (atomy))

Dále jsou důležité výrokové atomy z nějaké abecedy, tj. z libovolné množiny.

Definice 1.3 (Výroky)

Libovolný výrok je pak konečným aplikováním logických spojek, jak je chápeme běžně (TODO), na atomy a $\top, \bot$.

Definice 1.4 (Polská (= prefixová) notace)

„Nejprve píšeme funkce (tj. zatím jen spojky), za nimi příslušný počet argumentů (včetně dalších funkcí s dalšími argumenty).“

Definice 1.5 (Pravdivostní ohodnocení)

Pravděpodobnostní ohodnocení je zobrazení t z prvovýroků do $\{0, 1\}$. Toto zobrazení lze jednoznačně rozšířit na t' na všechny výroky:

$$t'(\top) = 1, \quad t'(\bot) = 0, \quad t'(\neg a) = 1 - t'(a),$$

$$t'(a \vee b) = \max\{t'(a), t'(b)\}, \quad t'(a \wedge b) = \min\{t'(a), t'(b)\}.$$

Definice 1.6 (Splnitelný výrok)

Výrok p je splnitelný $\equiv$ existuje $t : A \to \{0, 1\}$ takové, že $t(p) = 1$.

Definice 1.7 (Tautologie (výroková))

Výrok p je tautologie (notace $\models p$) $\equiv t(p) = 1$ pro všechna $t : A \to \{0, 1\}$.

Definice 1.8 (Model)

Model (koho, čeho) Σ (výrokové teorie) je každé pravděpodobnostní ohodnocení t, které přiřazuje 1 všem výrokům ze Σ.

Definice 1.9 (Vyplývání)

Říkáme, že p je tautologický důsledek Σ (píšeme $\Sigma \models p$, říkáme p vyplývá ze Σ) $\equiv t(p) = 1$ pro všechny modely t (koho čeho) Σ.

Definice 1.10 (Disjunktivní normální tvar)

Výrok (nad konečnou množinou prvovýroků $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$) je v disjunktivním normálním tvaru, pokud je tvaru $p_1 \vee \ldots \vee p_k$, kde každý tzv. disjunkt p_i je tvaru $[\neg]a_1 \wedge \ldots \wedge [\neg]a_n$, kde $[\neg]$ je buď $\neg$ nebo nic.

Definice 1.11 (Výrokový axiom)

Zákony inempotence, komutativity, asociativity, distributivity, absorbce a DeMorganovy zákony. TODO

Není nutné znát nazpaměť.

Definice 1.12 (Odvozovací pravidlo (MP))

Z p a $p \implies q$, odvodíme q.

Definice 1.13 (Důkaz (formální))

Formální důkaz (či důkaz) p z Σ je sekvence $p_1, \ldots, p_n$, kde $n \geq 1$ a $p_n = p$ tak, že $\forall k \in [n]$:

- buď $p_k \in \Sigma$,
- nebo p_k je výrokový axiom (viz skripta)
- nebo $\exists i, j \in [k-1]$ tak, že p_k lze odvodit pravidlem MP z p_i a p_j.

1.2 Predikátová logika

Definice 1.14 (Jazyk (= signatura), arita)

Jazyk (L) je množina symbolů, jíž je přiřazena tzv. arita, tedy zobrazení z L do $\mathbb{N}_0$.

Dělí na relace (relační symboly) (L^r) a funkce (funkční symboly) (L^f). Ale význam je jim přiřazen teprve ve strukturách.

Definice 1.15 (Struktura)

Struktura $\mathcal{A}$ pro L je trojice $(A, (R^{\mathcal{A}})_{R \in L^r}, (F^{\mathcal{A}})_{F \in L^f})$ sestávající z množiny A (tzv. nosič) a vyjádření symbolů: pro každou m-ární relaci $R \in L^r$ máme její Interpretace (relaci, tak jak tvrdí TeMno) $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$ (m-ární relace na A) a pro každou n-ární funkci $F \in L^f$ máme její interpretace (funkci tak, jak tvrdí TeMno) $F^{\mathcal{A}} : A^n \to A$.

Definice 1.16 (Interpretace rel. a fun. symbolů ve struktuře)

Viz minulé 2 definice. Až tím, že se symbol interpretuje v nějaké struktuře, získává význam.

Definice 1.17 (Podstruktura a rozšíření struktury)

$\mathcal{X}$ je podstruktura struktury $\mathcal{Y}$, značíme $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, pokud $X \subseteq Y$ a nosná množina X je uzavřená na zobrazení funkcemi a funkce i relace z $\mathcal{X}$ jsou zúžením všech funkcí a relací $\mathcal{Y}$. Taktéž říkáme, že $\mathcal{Y}$ je rozšíření $\mathcal{A}$.

Definice 1.18 (Homomorfismus / vnoření / izomorfismus)

Ať $\mathcal{A}$ a a $\mathcal{B}$ jsou struktury (pro tentýž jazyk). Homomorfismus $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je zobrazení $h : A \to B$ tak, že $\forall m$-nární $R \in L^r$ a každé $(a_1, \ldots, a_m) \in A^m$ máme $(a_1, \ldots, a_m) \in R^{\mathcal{A}} \implies (ha_1, \ldots, ha_m) \in R^{\mathcal{B}}$. $\forall n$-nární $F \in L^f$ a každé $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ je $h(F^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = F^{\mathcal{B}}(ha_1, \ldots, ha_n)$.

Pokud nahradíme implikaci v předchozí definici ekvivalencí, dostaneme tzv. silný homomorfismus. Speciálními případy jsou vnoření, tedy prostý silný homomorfismus, a isomorfismus, tedy bijektivní silný homomorfismus.

Definice 1.19 (Kongruence a faktorstruktura)

Kongruence je ekvivalence taková, že pokud jsou v relaci nějaké prvky, tak jsou v relaci i kongruentní prvky. Stejně tak obraz kongruentních prvků je kongruentní prvek k obrazu původních.

Faktostruktura je struktura, která má za prvky ekvivalenční týdny.

Definice 1.20 (Součin struktur)

Triviální. TODO!

Definice 1.21 (Proměnná a term)

Proměnné: $Var = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ je spočetná (nekonečná) množina.

Poznámka

Většinou by nevadila ani nespočetná. Naopak spočetná by nám rozbíjela skládání výroků.

L-term je slovo na abecedě $L^f \cup Var$ získané jako: každá proměnná je L-term a kdykoliv je $F \in L^f$ n-nární relace a $t_1, \ldots, t_n$ L-termy, pak je $Ft_1 \ldots t_n$ L-term.

Definice 1.22 (Termová operace)

Buď $\mathcal{A}$ L-struktura a $t = t(\mathbf{x})$ je L-term, kde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$. Potom spojujeme pár $(t, \mathbf{x})$ s funkcí $t^{\mathcal{A}} : A^m \to A$ následovně:

- Pokud t je proměnná x_i, potom $t^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) = a_i$ pro $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in A^m$.
- Pokud $t = Ft_1 \ldots t_n$, kde $F \in L^f$ je n-ární a $t_1, \ldots, t_n$ jsou L-termy, potom $t^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) = F^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}), \ldots, t_n^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}))$ pro $\mathbf{a} \in A^m$.

Definice 1.23 (Podstruktura generovaná množinou)

Mějme strukturu a množinu (oindexovanou) prvků z ní. Pokud tuto množinu uzavřeme na funkce a funkce i relace zúžíme, pak dostaneme podstrukturu, která se nazývá generovaná danou množinou prvků (a ty se nazývají generátory).

Definice 1.24 (Atomická formule)

Atomická L-formule je slovo z abecedy $L \cup Var \cup \{\top, \bot, =\}$, které je tvaru buď $\top, \bot$, nebo termy jsou v relaci ($Rt_1 \ldots t_m$, kde $R \in L^r$ je m-nární relace a $t_1, \ldots, t_m$ jsou L-termy), nebo $= t_1 t_2$ (kde t_1 a t_2 jsou L-termy).

Definice 1.25 (Formule, sentence)

L-formule je slovo na abecedě $L \cup Var \cup \{\top, \bot, \neg, \vee, \wedge, =, \exists, \forall\}$, které je buď atomická formule, nebo $\neg\varphi, \vee\varphi\psi, \wedge\varphi\psi$, kde φ a ψ jsou L-formule, nebo $\exists x\varphi, \forall x\varphi$, kde φ je formule a x je proměnná.

Sentence je formule, kde všechny výskyty proměnné jsou vázané.

Definice 1.26 (Vázaný a volný výskyt proměnné)

Pokud se proměnná vyskytuje v podformuli tvaru $\exists x\varphi$ nebo $\forall x\varphi$, pak se tento výskyt nazývá vázaný, pokud se vyskytuje jinde, pak je tento výskyt volný.

Definice 1.27 (Substituce termů do formulí)

Píšeme $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, abychom zvýraznili, že právě proměnné $x_1, \ldots, x_n$ jsou volné v φ.

Do formule dosazujeme $(\varphi(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n))$ naráz a nahrazujeme všechny volné výskyty dané proměnné.

Místo $\varphi(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n)$ budeme psát $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$.

Definice 1.28 (Expanze struktury o jména)

Jazyk L rozšiřujeme o jména, tj. konstantní symboly reprezentující prvky, o kterých se chceme bavit (množina C), na L_C. Místo L-struktury $\mathcal{A}$ s nosnou množinou $A \supseteq C$ potom můžeme počítat s expandovanou L_C-strukturou $\mathcal{A}_C$, která má stejnou nosnou množinu, stejnou interpretaci L symbolů a symboly z $L_C \setminus L$ interpretuje jako dané prvky (funkce s aritou nula, které zobrazují na tyto prvky) množiny A.

Definice 1.29 (Tarského definice splňování)

L_A-sentence σ je pravdivá v L-struktuře $\mathcal{A}$ (píšeme $\mathcal{A} \models \sigma$ a čteme σ je pravdivá / splněna v $\mathcal{A}$) takto:

- $\mathcal{A} \models \top$ a $\mathcal{A} \not\models \bot$,
- $\mathcal{A} \models Rt_1 \dots t_m$ právě tehdy, pokud $(t_1^{\mathcal{A}}, \dots, t_m^{\mathcal{A}}) \in R^{\mathcal{A}}$ pro m-nární relaci $R \in L^r$ a $L_{\mathcal{A}}$ termy bez volných proměnných $t_1, \dots, t_m$,
- $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$ právě tehdy, když $t_1^{\mathcal{A}} = t_2^{\mathcal{A}}$ pro L_A-termy bez volných proměnných t_1, t_2,
- $\sigma = \neg\sigma_1$, potom $\mathcal{A} \models \sigma$ právě tehdy, pokud $\mathcal{A} \not\models \sigma_1$,
- $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2$, potom $\mathcal{A} \models \sigma$ právě tehdy, pokud $\mathcal{A} \models \sigma_1$ nebo $\mathcal{A} \models \sigma_2$,
- $\sigma = \sigma_1 \wedge \sigma_2$, potom $\mathcal{A} \models \sigma$ právě tehdy, pokud $\mathcal{A} \models \sigma_1$ a $\mathcal{A} \models \sigma_2$,
- $\sigma = \exists x \varphi(x)$, potom $\mathcal{A} \models \sigma$ tehdy a jen tehdy, když $\mathcal{A} \models \varphi(\underline{a})$ pro nějaké $a \in \mathcal{A}$,
- $\sigma = \forall x \varphi(x)$, potom $\mathcal{A} \models \sigma$ tehdy a jen tehdy, když $\mathcal{A} \models \varphi(\underline{a})$ pro všechna $a \in A$.

Definice 1.30 ((0-)definovatelné množiny)

$\varphi(x_1, \dots, x_n)$ definuje množinu $\varphi^{\mathcal{A}} = \{(a_1, \dots, a_n) : \mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\}$.

Pokud existuje L-formule definující $S \subseteq A^n$, potom říkáme, že formule je 0-definovatelná v $\mathcal{A}$. Množina je pak definovatelná tehdy, pokud existuje L_A-formule definující tuto množinu.

Definice 1.31 (Otevřená formule)

Otevřená formule je taková formule, která neobsahuje žádný kvantifikátor.

Definice 1.32 (Teorie a její model)

Říkáme, že struktura $\mathcal{A}$ je model teorie (= množiny L-sentencí) Σ, když $\mathcal{A} \models \sigma$ pro všechny $\sigma \in \Sigma$.

Definice 1.33 (Logický důsledek (vyplývání))

Říkáme, že σ vyplývá z Σ (píšeme $\Sigma \models \sigma$), pokud σ je pravdivá v každém modelu (koho, čeho) Σ. (Van de Dries dokonce uvádí i pro formule, kde je potom, že vyplývá, pokud její generální uzávěr vyplývá.)

Definice 1.34 (Generální uzávěr formule)

Generální uzávěr formule $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ je formule $\forall x_1, \ldots, x_n \varphi$.

Také definujeme $\mathcal{A} \models \varphi \equiv \mathcal{A} \models x_1 \ldots x_n \varphi$.

Definice 1.35 (Výrokový axiom)

TODO.

Není nutné znát nazpaměť.

Definice 1.36 (Axiomy rovnosti)

TODO.

Definice 1.37 (Axiom specifikace (pro kvantifikátory))

Kvantifikátorové axiomy v L jsou formule (pro všechny L-formule φ) $\varphi(t/y) \implies \exists y \varphi$ a $\forall y \varphi \implies \varphi(t/y)$.

Definice 1.38 (Substituovatelnost termu)

Term t je substituovatelný za proměnnou a ve formuli φ, jestliže žádná proměnná (žádný její výskyt) v t se nestane vázanou.

Definice 1.39 (Odvozovací pravidla (MP a G))

Modus Ponens (MP): z φ a $\varphi \implies \psi$ odvodíme ψ.

Generalizační pravidla (G): pokud se proměnná x nevyskytuje volně v φ, potom z $\varphi \implies \psi$ odvodíme $\varphi \implies \forall x \psi$ a z $\psi \implies \varphi$ odvodíme $\exists x \psi \implies \varphi$.

Definice 1.40 (Důkaz (formální) a dokazatelnost)

Formální důkaz, nebo prostě důkaz φ z Σ je posloupnost $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ formulí, kde $n \geq 1$ a $\varphi_n = \varphi$, takových, že $\forall k \in [n]$:

- je buď $\varphi_k \in \Sigma$,
- nebo φ_k je logický axiom,
- nebo φ_k může být odvozen z φ_i a φ_j (φ_j) pomocí MP (G), pro nějaké i, j.

Pokud existuje důkaz φ z teorie Σ, potom píšeme $\Sigma \vdash \varphi$ a říkáme, že φ je dokazatelné ze Σ.

Definice 1.41 (Kanonická struktura)

Kanonická struktura teorie Σ je $\mathcal{A}_\Sigma := T_L/\sim_\Sigma$. R^{A_Σ} nebo F^{A_Σ} je potom relace nebo funkce, přijímající bloky ekvivalence.

Kde T_L je množina L-termů a $\sim_\Sigma$ je definováno jako

$$t_1 \sim_\Sigma t_2 \Leftrightarrow \Sigma \vdash t_1 = t_2.$$

Definice 1.42 (Kompletní teorie)

Teorie Σ je kompletní, pokud pro každou formuli φ je buď $\Sigma \vdash \varphi$ nebo (výlučné, tj. je konzistentní) $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

Definice 1.43 (Henkinovský svědek)

(V teorii Σ:) (Henkinovský) svědek sentence $\exists x \varphi(x)$ je konstantní term $t \in T_L$ tak, že $\Sigma \vdash \varphi(t)$. Říkáme, že Σ je henkinovská teorie (má svědky), jestliže existuje svědek pro každou sentenci $\exists x \varphi(x)$.

Definice 1.44 (Redukt struktury, expanze struktury)

Buď $\mathcal{A}$ L-struktura a $\mathcal{A}^*$ L^*-struktura, kde $L^* \supseteq L$. Pokud mají $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}^*$ stejnou nosnou množinu a interpretaci symbolů v L, pak $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}^*$ a $\mathcal{A}^*$ je expanze $\mathcal{A}$.

Definice 1.45 (Varianta formule a prenexní tvar)

Varianta formule je formule získaná nějakým postupným nahrazováním $Qx\varphi$ za $Qy\varphi(y/x)$, kde $Q \in \{\forall, \exists\}$, kde y je substituovatelné za x v φ a y nemá volný výskyt v φ.

Formule je v prenexním tvaru, pokud je tvaru $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \varphi$, kde $x_1, \dots, x_n$ jsou různé proměnné, $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ a φ je formule bez kvantifikátorů (otevřená formule).

1.3 Teorie modelů

Definice 1.46 (Elementární ekvivalence / vnoření)

Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dvě L-struktury, $C \subseteq A$ a $h : C \to B$ zobrazení. Řekneme, že h je $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-podobnost, pokud pro každou L_C-sentenci σ platí $A \models \sigma \Leftrightarrow B \models \sigma_h$.

Existuje-li nějaká $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-podobnost (kde $C = \emptyset$), říkáme, že $\mathcal{A}$ je elementárně ekvivalentní s $\mathcal{B}$, píšeme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Je-li naopak dokonce $C = A$, říkáme, že h je elementární vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$.

Definice 1.47 (Skolemizace a rozšíření o definice)

TODO???

Definice 1.48 (Konzervativní rozšíření teorie)

Σ' se nazývá konzervativní nad Σ, pokud pro každou L-sentenci σ je

$$\Sigma' \vdash_{L'} \sigma \Leftrightarrow \Sigma \vdash_L \sigma.$$

Definice 1.49 (Definice (interpretace) struktury ve struktuře)

TODO!

Definice 1.50 (Aritmetiky)

Definice 1.51 (Presburgerova aritmetika)

Uvažujme jazyk $K = \{0, S, +\}$, kde 0 je konstantní symbol, S je unární funkční a + binární funkční symbol. Presburgerova aritmetika je K-teorie obsahující právě následující axiomy:

1. $Sx \neq 0$;
2. $Sx = Sy \implies x = y$;
3. $x \neq 0 \implies \exists y : x = Sy$;
4. $x + 0 = x$;
5. $x + Sy = S(x + y)$;

a navíc schéma axiomů indukce (pro každou K-formuli φ):

$$(\varphi(0/x) \wedge \forall x(\varphi(x) \implies \varphi(Sx/x))) \implies \forall x \varphi.$$

Definice 1.52 (Robinsonova a Peanova aritmetika (tj. včetně $\cdot$))

Rozšíříme K na $L = K \cup \{\cdot\}$, kde $\cdot$ je binární funkční symbol, a přidejme k předchozím axiomům navíc $x \cdot 0 = 0$ a $x \cdot Sy = x \cdot y + x$. Navíc schéma indukce nyní uvažujme pro všechny L-formule. Výsledné L-teorii se říká Peanova aritmetika (P nebo PA). Její (konečnou) podteorii, která vznikne vypuštěním všech axiomů indukce, nazýváme Robinsonova aritmetika (Q či RA).

2 Lemma, tvrzení, věty

2.1 Výroková logika

Lemma 2.1 (O jednoznačném čtení výroku)

Lemma 2.2

Buďte $t_1, \dots, t_m$ *a* $u_1, \dots, u_n$ *jsou přijatelná slova a* w *libovolné slovo tak, že* $t_1 \dots t_m w = u_1 – u_n$. *Potom* $m \leq n$, $t_i = u_i$ *pro* $i \in [m]$ *a* $w = u_{m+1} \dots u_n$.

Důkaz

Bez důkazu. □

Každé přijatelné slovo je tvaru $ft_1 \dots t_n$ *pro právě jednu* $(n+1)$*-tici* $(f, t_1, \dots, t_m)$*, kde* $f \in F$ *(*F *jsou symboly s přiřazenou aritou) je arity* m *a* $t_1, \dots, t_n$ *jsou přijatelná slova.*

Důkaz

Předpokládejme, že $ft_1 \dots t_n = gu_1 \dots u_m$. Potom z předchozího lemmatu máme $f = g$, tj. $n = m$ a $t_i = u_i$ pro všechna $i \in [n]$. □

Lemma 2.3 (Nevím, zda je potřeba)

Pro přijatelné slovo w *a* $1 \leq i \leq lenght(w)$ *existuje právě jedno přijatelné slovo začínající ve slově* w *na pozici* i.

Důkaz

Indukcí vzhledem k $length(w)$. □

Tvrzení 2.4 (Disjunktivní normální tvar)

Každý výrok (nad konečnou množinou prvovýroků) je ekvivalentní nějakému výroku v disjunktivním normálním tvaru.

Důkaz

Pro výrok, který není splnitelný, použijeme disjunkci 0 výroků. Jinak pro každé pravdivostní ohodnocení (těch je konečně mnoho), které přiřadí v jedničku, přidáme do disjunkce člen, který bude mít negaci podle toho, zda byl nebo nebyl daný atom ohodnocen 1 nebo nulou. □

Lemma 2.5 (O dedukci)

Předpokládejme $\Sigma \cup \{p\} \vdash q$. *Potom* $\Sigma \vdash p \implies q$.

Důkaz (Indukcí)
Pokud je q výrokový axiom, pak $\Sigma \vdash q$ a jelikož $q \implies (p \implies q)$ je výrokový axiom, MP říká $\Sigma \vdash p \implies q$.

Pokud $q \in \Sigma \cup \{p\}$, pak buď $q \in \Sigma$ a potom ze stejného důvodu $\Sigma \vdash p \implies q$. Nebo $p = q$ a potom $\Sigma \vdash p \implies q$, jelikož $\vdash p \implies p$.

Jinak je q odvozeno pomocí MP z r a $r \implies q$, kde $\Sigma \cup \{p\} \vdash r, r \implies q$. Můžeme pak z IP předpokládat $\Sigma \vdash p \implies r, p \implies (r \implies q)$. Potom $\Sigma \vdash p \implies q$ dvojnásobným aplikováním MP z

$$(p \implies (r \implies q)) \implies ((p \implies r) \implies (p \implies q)) .$$

□

Věta 2.6 (O úplnosti)

Lemma 2.7 (Lindenbaum)

Předpokládejme, že Σ je konzistentní. Potom existuje úplná $\Sigma' \supseteq \Sigma$. ($\Sigma' \subseteq Prop(A)$.)

Důkaz
Standardní aplikace Zornova lemmatu. (A důkaz může být pouze z konečné množiny výroků.) □

Lemma 2.8

Předpokládejme Σ je úplné. Potom pro každý výrok p je

$$\Sigma \vdash p \Leftrightarrow t_\Sigma(p) = 1.$$

Tedy t_Σ je model Σ. Kde t_Σ je definováno jako

$$t_\Sigma(a) = 1 \Leftrightarrow \Sigma \vdash a.$$

Důkaz
Indukcí. TODO □

$$\Sigma \vdash p \Leftrightarrow \Sigma \models p.$$

Neboli Σ je konzistentní právě tehdy, pokud Σ má model.

Důkaz
Pomocí Lindenbaumova lemmatu najdeme úplnou nadmnožinu Σ. Podle předchozího lemmatu má model. Tedy i Σ má model.

Opačná implikace je triviální (ponechána čtenáři, pokud se dá dokázat $\perp$, pak je $t(\perp) = 1$, ale my z definice víme, že je $t(\perp) = 0$. ↯) □

Věta 2.9 (O kompaktnosti)

Pokud $\Sigma \models p$, potom existuje konečná $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tak, že $\Sigma_0 \models p$.

Důkaz
Triviální důsledek úplnosti. □

2.2 Predikátová logika

Tvrzení 2.10 (Týkající se bezprostředně h/v/i)

TODO!

Lemma 2.11 (O dedukci)

Nechť $\Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \varphi$, potom $\Sigma \vdash \sigma \implies \varphi$.

Důkaz
Indukcí pro délku důkazu. TODO □

Lemma 2.12 (Lindenbaum)

Předpokládejme, že Σ je konzistentní. Potom existuje úplná $\Sigma' \supseteq \Sigma$. ($\Sigma' \subseteq Prop(A)$.)

Důkaz
Standardní aplikace Zornova lemmatu. (A důkaz může být pouze z konečné množiny formulí.) □

Věta 2.13 (O úplnosti)

(Krom technických lemmat jako např. 3.1.2, 3.2.3, 3.2.8-10).

$$\Sigma \vdash p \Leftrightarrow \Sigma \models p.$$

Neboli Σ je konzistentní právě tehdy, pokud Σ má model.

Důkaz
$\Longleftarrow$ jasné. $\Longrightarrow$: TODO!!! □

Věta 2.14 (O kompaktnosti)

Pokud $\Sigma \models p$, potom existuje konečná $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tak, že $\Sigma_0 \models p$.

Neboli pokud každá konečná podmnožina Σ má model, potom Σ má model.

Důkaz
TODO? (Nenašel jsem důkaz.) □

2.3 Teorie modelů

Tvrzení 2.15 (Týkající se bezprostředně elem. e/v)

TODO!

Věta 2.16 (Löwenheim-Skolem)

Spočetná verze: Předpokládejme, že L je spočetné a Σ má model. Potom Σ má spočetný model.

Důkaz
Jelikož Var je spočetné, ze spočetnosti L dostáváme spočetnost množiny všech L-sentencí. Můžeme tedy jazyk L doplnit o svědky bez ztráty spočetnosti. Tedy můžeme postupovat stejně jako ve větě o úplnosti, a protože sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné, tak i L_∞ z důkazu je spočetné. Tedy $\mathcal{A}_{\Sigma_\infty}$ je spočetný a jeho redukt $A_{\Sigma_\infty}|_L$ je spočetný model Σ. □

Obecná verze: Předpokládejme, že L je kardinality nejvýše $\varkappa$ a Σ má nekonečný model. Potom Σ má model kardinality $\varkappa$.

Důkaz
TODO! □

Tvrzení 2.17 (Vaughtův test)

Nechť L je spočetné, Σ má model a všechny spočetné modely Σ jsou izomorfní. Potom Σ je úplné.

Důkaz
Kdyby Σ nebylo úplné, potom existuje σ tak, že $\Sigma \nvdash \sigma$ a $\Sigma \nvdash \neg\sigma$. Z Löwenheim-Skolemovy věty existují spočetné modely $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ tak, že $\mathcal{A} \not\models \sigma$ a $\mathcal{B} \not\models \neg\sigma$. Tedy $\mathcal{A} \models \neg\sigma$ a $\mathcal{B} \models \sigma$, ale pak nemohou být izomorfní. $\square$

Věta 2.18 (Cantor)

(O spočetných modelech teorie hustého lineárního uspořádání bez koncových bodů.)

Libovolné 2 spočetné hustě lineárně uspořádané množiny bez koncových bodů jsou izomorfní.

Důkaz
Použijeme Vaughtův test, tedy nám stačí ukázat, že každé 2 spočetné hustě lineárně uspořádané množiny bez koncových bodů jsou izomorfní. TODO? (Jednoduché?) $\square$

Tvrzení 2.19 (Kompletnost teorie ∞ VP)

Teorie nekonečných vektorových prostorů nad tělesem $\mathbb{F}$ je úplná.

Důkaz
Zvolme $\varkappa > |\mathbb{F}|$. Tedy $L_{\mathbb{F}}$ je velikosti nejvýše $\varkappa$. Buď $\mathbf{V}$ VP nad $\mathbb{F}$ kardinality $\varkappa$. Potom báze $\mathbf{V}$ musí mít mohutnost $\varkappa$. Tedy každé 2 vektorové prostory nad $\mathbb{F}$ kardinality $\varkappa$ mají báze mohutnosti $\varkappa$ a jsou tedy izomorfní. Tedy podle zobecněného Vaughtova testu je teorie ∞ VP nad $\mathbb{F}$ úplná. $\square$

Věta 2.20 (Gödelovy věty o neúplnosti)

TODO!