

Úvod

Poznámka

Mluvílo se o historii \mathbb{C} .

Definice 0.1 (Prostor \mathbb{C})

Prostor \mathbb{C} komplexních čísel je prostor \mathbb{R}^2 , v němž navíc definujeme násobení:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

Ztotožníme $(x, 0) = x$, neboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Značíme $i := (0, 1)$ (imaginární jednotka).

Definice 0.2 (Značení (komplexně sdružené číslo, reálná a imaginární složka))

$$z = x + i \cdot y \in \mathbb{C} \implies \bar{z} := x - i \cdot y \wedge \Re z := x, \Im z := y.$$

Definice 0.3 (Modul / absolutní hodnota)

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Tvrzení 0.1 (Vlastnosti)

- $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, potom $z = x + i \cdot y$ a $(\pm i)^2 = -1$.
- Násobení $\cdot : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ je asociativní, komutativní a distributivní (vzhledem k $+$). Navíc \cdot zahrnuje i násobení v \mathbb{R} a násobení skalárem.
- $|z|^2 = z\bar{z}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $z + \bar{z} = 2\Re z$, $z - \bar{z} = 2i\Im z$, $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0 : \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : zz^{-1} = 1$, konkrétně $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je komutativní těleso.

Pozor

\mathbb{C} nelze „rozumně“ lineárně uspořádat.

Poznámka (Lineární zobrazení)

Lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (\mathbb{R} -lineární zobrazení) jsou reálné matice řádu 2. Lineární zobrazení $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (\mathbb{C} -lineární) jsou komplexní čísla.

Lineární zobrazení $L = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ je tedy \mathbb{C} -lineární právě tehdy, když $a = d$ a $b = -c$.

Poznámka (Úmluva)

„Funkce“ znamená funkci z \mathbb{C} do \mathbb{C} , není-li řečeno jinak.

Definice 0.4 (Značení (okolí, prstencové okolí))

$$z_0 \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0 : \mathcal{U}(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}, \mathcal{P}(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Definice 0.5 (Limita, spojitost)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w \in \mathbb{C} \equiv \forall \varepsilon \exists \delta > 0 \forall z \in \mathbb{C} : z \in \mathcal{P}(z_0, \delta) \implies f(z) \in \mathcal{U}(w, \varepsilon).$$

f je spojitá v z_0 , jestliže $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Definice 0.6 (Derivace)

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je v bodě $z_0 \in \mathbb{R}^2$ \mathbb{R} -diferencovatelná, jestliže existuje \mathbb{R} -lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - Lh}{|h|} = 0$$

Značíme $L =: df(z_0)$.

$$df(z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{bmatrix}$$

$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ \mathbb{C} -diferencovatelná, jestliže existuje

$$f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}.$$

f' nazýváme komplexní derivace funkce.

Poznámka

Pro $(f \pm g)', (f \cdot g)', (f/g)', (f \circ g)'$ platí stejné vzorce jako pro funkce $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Věta 0.2 (Cauchy-Riemann)

Nechť f je komplexní funkce definovaná na nějakém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- Existuje $f'(z_0)$.
- Existuje $df(z_0)$ a $df(z_0)$ je \mathbb{C} -lineární.

- Existuje $df(z_0)$ a platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0), \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0).$$

(Tzv. Cauchy-Riemannova podmínka.)

┌
Důkaz

Druhý a třetí bod je ekvivalentní z poznámky o lineárních zobrazeních.

$w = f'(z_0) \Leftrightarrow 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - wh}{h}$. Vynásobíme $\frac{h}{|h|}$:

$$\Leftrightarrow 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - wh}{|h|} \Leftrightarrow df(z_0)h = wh.$$

└

□

Poznámka

Existuje-li $f'(z_0)$, pak $df(z_0)h = f'(z_0)h$, $h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.

Cauchy-Riemannova podmínka je ekvivalentní $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

Definice 0.7 (Holomorfní funkce)

Nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená a $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Potom f je holomorfní na G , pokud je f \mathbb{C} -diferencovatelná v každém bodě G .

Definice 0.8 (Exponenciála)

$$\exp(z) := e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y), z = x + y \cdot i \in \mathbb{C}.$$

Tvrzení 0.3 (Vlastnosti exponenciály)

$\exp|_{\mathbb{R}}$ je reálná exponenciála, $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$, $\exp'(z) = \exp(z)$ ($z \in \mathbb{C}$), $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, \exp není prostá na \mathbb{C} a je 2π periodická, dokonce $\exp(z) = \exp(w) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : w = z + 2k\pi \cdot i$, nechť $P := \{z \in \mathbb{C} | \Im z \in (-\pi, \pi]\}$, potom $\exp|_P$ je prostá a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definice 0.9 (Logaritmus a hlavní hodnota logaritmu)

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Položme

$$\text{Log} z := \{w \in \mathbb{C} | \exp w = z\},$$

$$\log z := \log |z| + i \cdot \arg z. \quad (\text{Hlavní hodnota logaritmu.})$$

Tvrzení 0.4 (Vlastnosti logaritmu)

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom

- $\text{Log} z = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\log = (\exp|_D)^{-1}$
- \log není spojitá na žádném $z \in (-\infty, 0]$, ale $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$. Navíc $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$
- $\log(1 - z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$.

Pozor

Neplatí $\log \exp z = z$ a $\log(z \cdot w) = \log z + \log w$!

Definice 0.10

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom hlavní hodnotou α -té mocniny z definujeme

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log z).$$

Položme

$$M_\alpha(z) := \{\exp(\alpha \cdot w) \mid w \in \text{Log} z\}.$$

Tvrzení 0.5 (Vlastnosti mocniny)

- $e^z = \exp(z \cdot \log e) = \exp(z)$.
- Je-li $z > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom z^α je definována stejně jako v MA.
- $M_\alpha(z) = \{z^\alpha \cdot e^{2k\pi i \cdot \alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z \neq 0$.
- $(z^\alpha)' = \alpha \cdot z^{\alpha-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$, kde

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Poznámka (Zápočet)

Zápočet dostaneme za aktivní účast na cvičení

Poznámka

Je-li $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, potom

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

tedy f lze rozložit na sudou a lichou část.

Sudá část exponenciely je \cosh a lichá \sinh .

Definice 0.11 (Goniometrické funkce)

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z,$$

kde

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tvrzení 0.6 (Vlastnosti)

- \cos i \sin jsou rozšířením funkcí $z \in \mathbb{R}$ do \mathbb{C} .
- $\sin' z = \cos z$, $\cos' z = -\sin z$.
- \sin i \cos jsou 2π periodické funkce, ale nejsou omezené, platí, že $\sin \mathbb{C} = \mathbb{C} = \cos \mathbb{C}$.
- Platí $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.

1 Křivkový integrál

Definice 1.1 (Značení)

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$. Potom φ je křivka, pokud je φ spojitý, φ je regulární křivka, pokud je φ po částech spojitě diferencovatelný tzn. φ je spojitý na $[\alpha, \beta]$ a existuje dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ takové, že $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ je diferencovatelný.

Úsečka: Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, potom $\varphi(t) = a + t \cdot (b - a)$, $t \in [0, 1]$ je úsečka z a do b . Značíme $[a, b]$.

Řekneme, že křivka φ je lomená čára v \mathbb{C} , existují-li $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ taková, že

$$\varphi = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + \dots + [z_{k-1}, z_k].$$

Poznámka (Úmluva)

Pokud neřekneme něco jiného, křivkou budeme rozumět regulární křivku v \mathbb{C} .

Definice 1.2 (Délka křivky)

$$V(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt,$$

je-li φ regulární.

Definice 1.3

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je regulární křivka a $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá. Potom definujeme

$$\int_{\varphi} f := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Poznámka

Křivkový integrál konverguje jako Riemannův.

$$\int_{\varphi} f(z) dz,$$

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0, +\infty)$ a $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom

$$\int_{\varphi} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot 2 \cdot r \cdot e^{it} dt = i \cdot r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt =$$

$2\pi i$, pokud $n = -1$, 0 , pokud $n \in \mathbb{Z}$ a $n \neq -1$.

Tvrzení 1.1 (Vlastnosti křivkového integrálu)

Je-li φ křivka, f a g jsou spojitě funkce na $\langle \varphi \rangle$ a $A \in \mathbb{C}$, potom

$$\int_{\varphi} (Af + g) = A \int_{\varphi} f + \int_{\varphi} g.$$

Je-li φ křivka a f je spojitá funkce na $\langle \varphi \rangle$, potom

$$\left| \int_{\varphi} f \right| \leq \max_{\langle \varphi \rangle} |f| \cdot V(\varphi).$$

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$ a $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$. Potom

$$\int_{\varphi+\psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f \wedge \int_{-\varphi} f = - \int_{\varphi} f,$$

kde $(-\varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$ je opačná křivka k φ .

Křivkový integrál nezávisí na parametrizaci křivky: Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je křivka, $\omega : [\gamma, \delta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ je spojitě diferencovatelné s $\omega' > 0$ a $\psi = \varphi \circ \omega$. Potom $\int_{\psi} f = \int_{\varphi} f$.

┌
Důkaz

Jednoduchý, ukázán na přednášce pro některé body.

□
└

Definice 1.4 (Primitivní funkce)

Řekneme, že funkce f má na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ primitivní funkci F , pokud $F' = f$ na G .

Věta 1.2 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce)

Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f má na G primitivní funkci F . Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ je regulární křivka a f je spojitá^a na $\langle \varphi \rangle$. Potom

$$\int_{\varphi} f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)),$$

je-li navíc φ uzavřená, tzn. $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, pak

$$\int_{\varphi} f = 0.$$

┌
Důkaz

Z Cauchy-Riemannovy věty plyne, že

$$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = \frac{\partial F}{\partial x} \varphi'_1 + \frac{\partial F}{\partial y} \varphi'_2 = F' \varphi'_1 + i F' \varphi'_2 = F'(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Tato rovnost platí až na konečně mnoho $t \in [\alpha, \beta]$, neboli $F \circ \varphi$ je zobecněná primitivní funkce k integrandu. Máme tedy

$$\int_{\varphi} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

□

^aTohle je zbytečný předpoklad, ale to ještě neumíme dokázat.

Věta 1.3

Funkce f je konstantní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, právě když $f' = 0$ na G .

┌ *Důkaz*

„ \implies “: Jasně. „ \impliedby “: Necht $z, w \in G$ a φ je lomená čára v G spojující z a w . Potom $f(w) - f(z) = \int_{\varphi} f' = 0$, protože f je primitivní funkcí k f' na G . \square

Důsledek

Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, potom existuje $c \in \mathbb{C}$ tak, že $F_2 = F_1 + c$

┌ *Důkaz*

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0$$

└ \square

Věta 1.4 (O existenci primitivní funkce)

Necht $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je spojitá na G , tak následující je ekvivalentní

1. f má na G primitivní funkci;
2. $\int_{\varphi} f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G ;
3. $\int_{\varphi} f$ nezávisí v G na křivce φ , tzn. pro každé dvě křivky $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow G$, $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow G$ takové, že $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$ a $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$ platí $\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$.

┌ *Důkaz*

„1. \implies 2.“: Víme z věty o výpočtu integrálu pomocí primitivní funkce.

„2. \implies 3.“: Položme $\tau := \varphi + (-\psi)$. Potom je τ uzavřená a z 2. dostaneme

$$0 = \int_{\tau} f = \int_{\varphi} f - \int_{\psi} f.$$

„3. \implies 1.“: Volme $z_0 \in G$ pevně. Pro každé $z \in G$ najdeme lomenou čáru φ_z v G , která začíná v z_0 a končí v z . Definujeme $F(z) := \int_{\varphi_z} f$, $z \in G$. Definice F je korektní z 3. Ukážeme, že F je hledaná primitivní funkce k f na G . Necht $z_1 \in G$. Dokážeme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. Volme $r > 0$, aby $U(z_1, r) \subset G$. Je-li $|h| < r$, potom

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_{\varphi_{z_1+h}} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f,$$

kde $u = [z_1; z_1 + h]$ je úsečka. Tedy

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_u f = \int_0^1 f(z_1 + th) h dt,$$

$$\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) = \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) dt \rightarrow 0,$$

neboť $|\int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) dt| \leq \max_{z \in [z_1; z_1+h]} |f(z) - f(z_1)| \rightarrow 0$ ze spojitosti f v z_1 . \square

Poznámka (Značení)

Řekněme, že $M \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá, pokud existuje $z_0 \in M$ (tzv. střed hvězdovitosti), pro který $[z_0; z] \subset M$ pro každé $z \in M$.

┌ *Poznámka*

└ Konvexní \subsetneq hvězdovitá.

Řekneme, že $\Delta \subset \mathbb{C}$ je trojúhelník s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{C}$, pokud

$$\Delta := \{\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\},$$

a značíme $\partial\Delta := [a; b] + [b; c] + [c; a]$.

Tvrzení 1.5 (Dodatek)

Necht f je spojitá funkce na hvězdovité oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Je-li

$$\int_{\partial\Delta} f = 0,$$

pro každý trojúhelník $\Delta \subset G$, potom f má na G primitivní funkci.

┌ *Důkaz*

Nechť z_0 je střed hvězdovitosti G . Pro každé $z \in G$ položme $\varphi_z := [z_0; z]$ a $F(z) := \int_{\varphi_z} f$. □

└

Poznámka (Cauchyho věty)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a φ je uzavřená křivka v G . Potom Cauchyho věty nám říkají, za jakých podmínek na G a φ je $\int_{\varphi} f = 0$.

Věta 1.6 (Goursatovo lemma (Cauchyho věta pro Δ))

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a Δ je trojúhelník v G . Potom

$$\int_{\partial\Delta} f = 0.$$

┌ *Důkaz*

Označme $\varphi_0 := \partial\Delta$. Sporem: Předpokládejme, že $|\int_{\varphi_0} f| =: K > 0$. Zřejmě Δ je nede-
generovaný. V Δ vedme střední příčky a označme $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ obvody čtyř vzniklých
trojúhelníků. Obvody vnitřních trojúhelníků ψ_1 (vlevo dole), ψ_2 (vpravo dole), ψ_3 (nahore)
a ψ_4 (uprostřed) probíháme proti směru hodinových ručiček. Potom

$$\int_{\varphi_0} f = \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f + \int_{\psi_3} f + \int_{\psi_4} f.$$

Ex. $j_1 = 1, \dots, 4$ tak, že $|\int_{\psi_{j_1}} f| \geq \frac{K}{4}$ a $V(\psi_{j_1}) = \frac{V(\varphi)}{2}$. Označme $\varphi_1 = \psi_{j_1}$. Indukcí
sestrojíme posloupnost trojúhelníků tak, že

$$|\int_{\varphi_j} f| \geq \frac{K}{4^j} \wedge V(\varphi_j) = \frac{V(\varphi)}{2^j}.$$

Máme, že $\bigcup_{j=0}^{\infty} \Delta_j = \{z_0\} \subset G$, protože $\text{diam}(\Delta_j) \rightarrow 0$. Položme

$$\varepsilon(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0), & z \in G \setminus \{z_0\}, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Potom ε je spojitá na G a máme pro $j \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_{\varphi_j} f(z)dz = \int_{\varphi_j} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))dz + \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0)dz,$$

kde první integrand vpravo má primitivní funkci na \mathbb{C} a první integrál je roven 0. Pro
každé $j \in \mathbb{N}_0$ dostaneme

$$0 < \frac{K}{4^j} \leq |\int_{\varphi_j} f| = |\int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0)| \leq V^2(\varphi_j) \cdot \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon| = \frac{V^2(\varphi)}{4^j} \cdot \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon|,$$

kde třetí nerovnost platí díky tomu, že $|z - z_0| \leq V(\varphi_j)$. Z předchozího tedy máme (po
vynásobení 4^j):

$$0 < K \leq V^2(\varphi) \cdot \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon| \rightarrow 0,$$

└ protože ε je spojitá v z_0 a $\varepsilon(z_0) = 0$. ζ . □

Věta 1.7 (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti)

*Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má na G primitivní funkci.
(Ekvivalentně: $\int_{\varphi} f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G .)*

┌ *Důkaz*

└ Z Goursatova lemmatu a dodatku. □

Poznámka

Goursatovo lemma a tedy i předchozí věta platí i pro funkci f , která je spojitá na G a holomorfní na $G \setminus \{z_0\}$ pro nějaké $z_0 \in G$.

┌

Důkaz

Nechť \triangle je nedegenerovaný trojúhelník v G . Pak rozebereme případy kde leží z_0 . □

Věta 1.8 (O derivování podle komplexního parametru)

Nechť φ je křivka v \mathbb{C} a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Nechť $F(z, s)$ a komplexní derivace $\frac{\partial F}{\partial s}(z, s)$ jsou spojitě komplexní funkce na $\langle \varphi \rangle \times \Omega$. Pro každé $s \in \Omega$ položíme $\Phi(s) := \int_{\varphi} F(z, s) dz$. Potom $\Phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $\Phi'(s) = \int_{\varphi} \frac{\partial F}{\partial s}(z, s) dz$, $s \in \Omega$.

┌

Důkaz

Pro $s = s_1 + is_2 = (s_1, s_2) \in \Omega$ máme $\Phi(s) = \int_{\alpha}^{\beta} F(\varphi(t), (s_1, s_2)) \varphi'(t) dt$. Podle vět o spojitosti a derivování integrálu závislého na parametru máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_j}(s) = \int_{\varphi} \frac{\partial F}{\partial s_j}(z, s) dz,$$

pro $s \in \Omega$ a $j \in [2]$. Navíc jsou tyto parciální derivace spojitě a splňují podmínky Cauchy-Riemannovy věty, tedy Φ je komplexně diferencovatelná a komplexní derivace se rovná derivaci vzhledem k té první proměnné. □

Definice 1.5 (Index bodu křivky)

Nechť φ je uzavřená křivka v \mathbb{C} a $s \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Potom číslo

$$\text{ind}_{\varphi} s := \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z - s}$$

nazveme indexem bodu s vzhledem ke křivce φ .

Poznámka

Ukážeme si, že ind_{φ} se rovná počtu oběhů φ kolem s v kladném směru (tzn. proti směru hodinových ručiček).

Věta 1.9 (O základních vlastnostech indexu)

Nechť φ je uzavřená křivka v \mathbb{C} a $G := \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Potom G je otevřena, funkce $s \mapsto \text{ind}_{\varphi} s$ je konstantní na každé komponentě G a na jediné její neomezené komponentě je nulová.

┌ *Důkaz*

Podle předchozí věty je $\Phi(s) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z-s}$, $s \in G$ holomorfní a pro každé $s \in G$ je $\Phi'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{(z-s)^2} = 0$, protože $f(z) := \frac{1}{(z-s)^2}$ má primitivní funkci na $\mathbb{C} \setminus \{s\}$. Tedy Φ je konstantní na každé komponentě G .

Volíme $R > 0$, aby $\langle \varphi \rangle \subset U(0, R)$. Potom $\mathbb{C} \setminus U(0, R)$ je obsaženo v jediné neomezené komponentě G_0 množiny G . Navíc pro $s \in \mathbb{C} \setminus U(0, R)$ je funkce $g(z) := \frac{1}{z-s}$, $z \in U(0, R)$ holomorfní a dle Cauchyho věty pro hvězdovitou oblast je $\Phi(s) = 0$. □

Věta 1.10 (Cauchyův vzorec na kruhu)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$. Nechť $\overline{U(z_0, r)} \subset G$ a $p(t) = z_0 + r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom platí

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-s} dz = f(s), |s - z_0| < r;$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-s} dz = 0, |s - z_0| > r;$$

┌ *Důkaz*

1. Nechť $|s - z_0| < r$. Volme $R > r$, aby $U(z, R) \subset G$. Položme

$$h(z) := \frac{f(z) - f(s)}{z - s}, z \in U(z_0, R) \setminus \{s\};$$

$$h(z) := f'(s), z = s.$$

Zřejmě $h \in \mathcal{H}(U(z_0, R) \setminus \{s\})$ je spojitá hvězdovitá oblast $U(z_0, R)$. Z Cauchyho věty je

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi} h = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi} \frac{f(z) dz}{z - s} - \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi} \frac{dz}{z - s} \cdot f_s.$$

2. Nechť $|s - z_0| > r$. Volme $R \in (r, |z_0 - s|)$, aby $U(z_0, R) \subset G$. Potom

$$g(t) := \frac{f(z)}{z - s} \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$$

a z Cauchyho věty je

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi} g = 0.$$

□

┌ *Důsledek*

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má komplexní derivace libovolného řádu všude na G .

Tedy necht $U(z_0, r) \subset G$ a φ je jako v předchozím. Potom

$$\frac{k!}{2\pi} \int_{\varphi} \frac{f(z)dz}{(z-s)^{k+1}} = f^{(k)}(s), |s-z_0| < r, k \in \mathbb{N}.$$

Zde $f^{(0)} := f$ a k -tá komplexní derivace $f^{(k)}$ je definovaná jako $f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$, má-li pravá strana smysl.

┌

Důkaz

Z věty o derivaci integrálu podle komplexního parametru a předchozí věty, protože

$$\frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{1}{z-s} \right) = \frac{k!}{(z-s)^{k+1}}, \quad z \neq s.$$

└

□

Věta 1.11 (Morera)

Necht f je spojitá funkce na otevřené $G \subset \mathbb{C}$. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$, právě když

$$\int_{\partial\Delta} f = 0, \quad \forall \Delta \subset G \text{ trojúhelník.}$$

┌

Důkaz

„ \implies “: Goursat. „ \impliedby “: Necht $U := U(z_0, R) \subset G$. Protože f je spojitá na hvězdovité oblasti U a platí pro ni rovnost výše, má f na U primitivní funkci F , tzn. $f = F'$ na U . Protože $F \in \mathcal{H}(U)$, máme $f' = F''$ na U , tudíž $f \in \mathcal{H}(U)$. Tedy i $f \in \mathcal{H}(G)$. □

└

Věta 1.12 (Cauchyho odhady)

Necht $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0, +\infty)$ a f je holomorfní funkce na otevřené množině obsahující $\overline{U(z_0, r)}$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je

CO1 $\forall s \in U := U(z_0, r)$:

$$|f^{(k)}(s)| \leq \frac{(k!)r}{(d(s))^{k+1}},$$

kde $d(s) := \text{dist}(s, \partial U)$;

CO2 $\forall s \in U(z_0, \frac{r}{2})$:

$$|f^{(k)}(s)| \leq \frac{k!2^{k+1}}{r^2} \cdot \max_{\partial U} |f|;$$

CO3 $|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \cdot \max_{\partial U} |f|.$

┌ *Důkaz* (CO1)

Z věty výše (pro φ stejné jako tam)

$$|f^{(k)}(z)| = \left| \frac{k!}{2\pi} \int_{\varphi} \frac{f(s)ds}{(z-s)^{k+1}} \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot 2\pi r \max_{<\varphi>} |f| \frac{1}{(d(s))^{k+1}},$$

└ protože $|z-s| \geq d(s) \forall z \in <\varphi>$. □

┌ *Důkaz* (CO2 a CO3)

Plyne z CO1, neboť $d(s) \geq \frac{r}{2} \forall s \in U(z_0, \frac{r}{2})$ a $d(z_0) = r$. □

Věta 1.13 (Liouville)

Je-li f holomorfní a omezená funkce na \mathbb{C} , potom je f konstantní.

┌ *Důkaz*

Ukážeme, že $f' = 0$ na \mathbb{C} : Označme $M := \sup_{\mathbb{C}} |f| < +\infty$. Necht $z_0 \in \mathbb{C}$. Z CO3 pro každé $r > 0$ platí

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r} \rightarrow 0,$$

└ tudíž $f'(z_0) = 0$. □

Důsledek (Základní věta algebry)

V \mathbb{C} má každý polynom stupně alespoň 1 vždy alespoň jeden kořen.

┌ *Důkaz*

Necht $p(z) := a_n z^n + \dots + a_0 z^0$, kde $a_j \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ a $a_n \neq 0$. Sporem: Předpokládejme, že $p \neq 0$ na \mathbb{C} . Potom $f := \frac{1}{p}$ je holomorfní a omezená na \mathbb{C} . Z Liouvilleovy věty je konstantní, tedy i $p = \frac{1}{f}$ je konstantní a $p' = 0 = p^{(n)} = a_n \cdot n! \implies a_n = 0$. ✗. □

Lemma 1.14

Necht φ je křivka v \mathbb{C} , f_i jsou spojité funkce na $<\varphi>$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f_i \rightrightarrows f$ na $<\varphi>$. Potom f je spojitá na $<\varphi>$ a

$$\int_{\varphi} f_n \rightarrow \int_{\varphi} f.$$

┌ *Důkaz*

Platí

$$\left| \int_{\varphi} f_i - \int_{\varphi} f \right| = \left| \int_{\varphi} (f_n - f) \right| \leq V(\varphi) \cdot \max_{<\varphi>} |f_n - f| \rightarrow 0.$$

└ □

Věta 1.15 (Weierstrass)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f_n \in \mathcal{H}(G)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \xrightarrow{Loc.} f$ na G . Potom $f \in \mathcal{H}(G)$ a $f_n^{(k)} \xrightarrow{Loc.} f^{(k)}$ na G pro každé $k \in \mathbb{N}$.

┌

Důkaz

1. Zřejmě f je spojitá na G . Nechť Δ je trojúhelník v G . Potom

$$0 \stackrel{G?}{=} \int_{\partial\Delta} f_n \rightarrow \int_{\partial\Delta} f = 0.$$

Z Morera je $f \in \mathcal{H}(G)$.

2. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $z_0 \in G$. Volme $r > 0$, aby $\overline{U(z_0, r)} \subset G$. Z CO2 máme, že $\forall s \in U(z_0, \frac{r}{2})$:

$$|f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s)| = |(f_n - f)^{(k)}(s)| \leq \frac{k! 2^{k+1}}{r^k} \cdot \max_{\partial U(z_0, r)} |f_n - f| \rightarrow 0.$$

└

□

2 Mocninné řady

Definice 2.1 (Mocninná řada)

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

je mocninná řada s koeficienty $\{a_n\}$ a středem z_0 .

Poznámka (Vlastnosti konvergence) Existuje $R \in [0, +\infty]$ takové, že řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $U(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ a řada diverguje pro $|z - z_0| > R$. Číslo R se nazývá poloměr konvergence a platí, že

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde $\frac{1}{0} = +\infty$ a $\frac{1}{+\infty} = 0$.

- Označíme-li součet řady na $U(z_0, R)$ jako f , potom $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (z - z_0)^{n-k}, \quad z \in U(z_0, R),$$

speciálně $a_k = f^{(k)}(z)/k!$.

Plyne z Weierstrassovy věty pro

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Zřejmě $S_N \Rightarrow^{loc} f$ na $U(z_0, R)$, tudíž $S_N^{(k)} \Rightarrow^{loc} f^{(k)}$ na $U(z_0, R)$, tudíž rovnost výše platí. Dosadíme-li do ní $z = z_0$, dostaneme

$$f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k!.$$

Věta 2.1 (O rozvoji holomorfní funkce do mocninné řady na kruhu)

Nechť $R \in (0, +\infty]$ a $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$. Potom existuje jediná mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, která má na $U(z_0, R)$ součet f . Navíc platí, že $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

┌

Důkaz

Jednoznačnost plyne ze vzorce. Existence: Nechť $z \in U(z_0, R)$. Volme $r > 0$, aby $|z - z_0| < r < R$. Potom z Cauchyho věty je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)dw}{w - z},$$

kde $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pro každé $w \in \langle \varphi \rangle$ máme

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}},$$

což konverguje stejnoměrně pro $w \in \langle \varphi \rangle$. Dosadíme:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} f(w)dw = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \cdot \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \end{aligned}$$

└

□

Věta 2.2 (O nulovém bodě)

Nechť f je holomorfní funkce na okolí $x_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z_0) = 0$. Potom buď $\exists r > 0 : f = 0$ na $U(z_0, r)$; nebo $\exists r > 0 : f \neq 0$ na $P(z_0, r) := U(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

V druhém případě existuje jediné $p \in \mathbb{N}$ tak, že

$$f(x_0) = 0 = f'(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0), f^{(p)}(z_0) \neq 0.$$

Číslo p je tzv. násobnost nulového bodu z_0 funkce f .

Navíc z_0 je nulový bod f násobnosti $p \in \mathbb{N}$, právě když existuje $r > 0$ a $g \in \mathcal{H}(U(z_0, r))$

tak, že $\forall z \in U(z_0, r)$:

$$g(z) \neq 0 \wedge f(z) = (z - z_0)^p g(z).$$

Důkaz

Máme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z \in U(z_0, R)$. Pokud nenastane první případ, potom existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \neq 0$. Zvolme nejmenší $p \in \mathbb{N}$, aby $0 \neq a_p = f^{(p)}(z_0)/p!$. Potom platí rovnost pro druhý případ a $\forall z \in U(z_0, R)$:

$$f(z) = a_p(z - z_0)^p = \dots = (z - z_0)^p \underbrace{\sum_{n=p}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-p}}_{=:g(z)}.$$

Zřejmě $g \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$. Protože $g(z_0) = a_p \neq 0$, $\exists r > 0$ tak, že $g \neq 0$ na $U(z_0, r)$. Tudíž $f(z) = (z - z_0)^p \cdot g(z) \neq 0$ na $P(z_0, r)$. Obrácené tvrzení plyne stejně snadno. \square

Věta 2.3 (O jednoznačnosti pro holomorfní funkce)

Nechť $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f, g \in \mathcal{H}(G)$. Následující je ekvivalentní

1. $f = g$ na G ;
2. $M := \{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$ má v G hromadný bod, tzn. existuje z_0 tak, že $P(z_0, r) \cap M \neq \emptyset \forall r > 0$;
3. Existuje $z_0 \in G$ tak, že

$$f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Důkaz

BÚNO předpokládejme, že $G = \emptyset$, jinak uvažujme $f - g$. „1 \implies 2 a 2 \implies 3“: Nechť $z_0 \in G$ je hromadný bod $M := \{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$. Zřejmě $f(z_0) = 0$ a z předchozí věty je $f = 0$ na nějakém okolí z_0 .

„3 \implies 1“: Uvažme $N := \{z \in G \mid \forall k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(z) = 0\}$. Potom $\emptyset \neq N$ a N je uzavřená v G , protože všechny $f^{(k)}$ jsou spojité. Navíc N je otevřená. Nechť $z_1 \in N$. Podle věty o nulovém bodě existuje $r > 0$ tak, že $f = 0$ na $U(z_1, r)$. Tedy $U(z_1, r) \subset N$. Protože G je oblast (tj. je souvislá, tedy neexistuje vlastní obojetná podmnožina), je $N = G$. \square