Příklad (4.)
Consider the evolutionary parabolic problem

$$
\begin{aligned}
\partial_t u - \Delta u - \alpha\Delta_p u &= 0 && \text{in } (0,T)\times\Omega,\\
(\nabla u + \alpha|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot\nu + \beta|u|^{q-2}u &= 0 && \text{on } (0,T)\times\partial\Omega,\\
u(0) &= u_0 && \text{in } \Omega
\end{aligned}
$$

with $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ Lipschitz, $\alpha, b \geqslant 0$ and $p, q \in (1,2)$.

For any $u_0 \in L^2(\Omega)$ show that there exists unique weak solution.

Řešení (Definice slabého řešení)
Jako rovnice slabého řešení nám vychází

$$\langle \partial_t u, \varphi\rangle_{V^*} + \int_\Omega (\nabla u + \alpha\cdot|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\varphi + \int_{\partial\Omega}\beta|u|^{q-2}u\varphi = 0, \qquad \forall\varphi\in V,$$

neboť když budou funkce dostatečně hladké a použijeme per partes na prostřední člen a fundamentální větu na celou rovnici, na hranici získáme druhou rovnici problému a na vnitřku dostaneme první rovnici. Stačí správně zvolit V a prostor řešení.

Aby byl dobře definován druhý integrál, potřebujeme, aby $u(t), \varphi \in W^{1,2}(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)$. Zároveň pro třetí integrál potřebujeme $u(t), \varphi \in L^q(\partial\Omega)$. Můžeme si všimnout, že vzhledem k Trace theorem, Hölderově nerovnosti a Lipschitzovskosti Ω nám pro toto stačí $u(t), \varphi \in W^{1,2}(\Omega) =: V$. Tudíž máme svou oblíbenou Gelfandovu trojici $V = W^{1,2}(\Omega)$ a $H = L^2(\Omega)$ ($V \hookrightarrow\hookrightarrow H = H^* \hookrightarrow\hookrightarrow V^*$).

Tedy slabým řešením problému nazveme takové $u \in L^2(0,T;V)\cap W^{1,2}(0,T;V^*)$ (L^2, neboť z $\nabla u\nabla\varphi$ nám padá druhá mocnina; druhá podmínka je kvůli prvnímu členu rovnice), že $u(0,\cdot) = u_0$ ($C([0,T];V^*)$ z podmínky na u, tedy toto dává smysl) a u splňuje pro skoro všechna $t\in(0,T)$ rovnici výše.

Důkaz (Jednoznačnost)
Jsou-li u_1, u_2 dvě slabá řešení, pak $v := u_1 - u_2 \in L^2(0,T;V)$ musí splňovat (dosadíme $\varphi = v(t)\in V$ do rovnice výše):

$$\langle\partial_t v, v\rangle_{V^*} + \int_\Omega \nabla v\nabla v + \int_\Omega \alpha(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\nabla v + \int_{\partial\Omega}\beta(|u_1|^{q-2}u_1 - |u_2|^{q-2}u_2) = 0,$$

ale my víme, že $|x|^{r-2}x$ je (striktně) monotónní (a $\alpha,\beta\geqslant 0$), tedy

$$\langle\partial_t v, v\rangle_{V^*} \leqslant \langle\partial_t v, v\rangle_{V^*} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0.$$

Zintegrováním podle t (od 0 do τ) a použitím per partes pro Gelfandovu trojici máme

$$\frac{1}{2}\|v(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|v(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0.$$

Ale $v(0) = u_1(0) - u_2(0) = u_0 - u_0 = 0$, tedy $\|v(\tau)\|_2^2 \leqslant 0$ pro skoro všechna τ, tudíž $v = 0$ a $u_1 = u_2$. □

Důkaz (Existence)
Označíme-li $A(u,\xi) = \xi + \alpha \cdot |\xi|^{p-2}\xi$, $B(u,\xi) = 0$ a $f = 0$, pak máme rovnici přesně ve tvaru $\partial_t u - \operatorname{div}(A(u,\nabla u)) + B(u,\nabla u) = f$. Navíc A, B jsou Caratheodorovy a splňují

$$|A(u,\xi)| + |B(u,\xi)| = |\xi| + \alpha \cdot |\xi|^{p-1} \leqslant |\xi| + \alpha \cdot (1 + |\xi|) \leqslant (\alpha + 1) \cdot (1 + |\xi|),$$

$$A(u,\xi) \cdot \xi + B(u,\xi) \cdot u = |\xi|^2 + \alpha \cdot |\xi|^p \geqslant |\xi|^2.$$

Taktéž je očividné, že ξ je strictly monotone a $\alpha \cdot |\xi|^{p-2}$ je monotónní, tudíž A je strictly monotone. Zároveň $\beta \cdot |u|^{q-2} \cdot u \leqslant \beta \cdot (1 + |u|)$ je taktéž monotónní operátor.

Dále postupujeme jako na přednášce, jen místo $\int_\Omega B(u,\nabla u)\varphi$ máme $\int_{\partial\Omega} \beta \cdot |u|^{q-2} u\varphi$. □

In case that $\alpha, \beta > 0$, show that there exists $t_0 \in (0,\infty)$ such that the weak solution satisfies $u(t) = 0$ for (almost) all $t \geqslant t_0$. (In other words, prove the extinction in finite time).

Důkaz
Podobně jako v jednoznačnosti můžeme do rovnice dosadit přímo $u(t) \in V$ a použít integraci per partes pro Gelfandovu trojici:

$$\|u(t_2)\|_2^2 - \|u(t_1)\|_2^2 + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 + \alpha \cdot |\nabla u(t)|^p + \int_{\partial\Omega} \beta \cdot |u(t)|^q dt = 0.$$

Je-li p $\leqslant$ q, potom můžeme prostřední člen odhadnout $\min(1,\alpha) \cdot |\nabla u|^q$, neboť pokud $|\nabla u| \geqslant 1$, pak $|\nabla u|^q \leqslant |\nabla u|^2$, a pokud $|\nabla u| \leqslant 1$, pak $|\nabla u|^q \leqslant |\nabla u|^p$. Následně z Poincarého nerovnosti $\int_\Omega \min(1,\alpha) \cdot |\nabla u|^q + \int_{\partial\Omega} \beta \cdot |u|^q \geqslant c_1 \cdot \|u\|^q_{W^{1,q}(\Omega)}$. My ale víme, že $W^{1,q}(\Omega)$ se hustě vnořuje do $L^2(\Omega)$, je-li $d \geqslant 2$, nebo do $C^{0,\cdot}(\overline{\Omega})$, kteréžto funkce jsou na omezené množině omezené nějakým násobkem své normy, tudíž je normou omezena i jejich L^2 norma. Tedy $c_1 \cdot \|u\|^q_{W^{1,q}(\Omega)} \geqslant c_2 \cdot \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ a

$$\|u(t_2)\|_2^2 - \|u(t_1)\|_2^2 + \int_{t_1}^{t_2} c_2 \cdot \|u(t)\|_2^q \, dt \leqslant 0.$$

Když si $\|u(t)\|_2^2$ označíme jako $g(t)$, nerovnost vydělíme t a zlimitíme $t_2 \to t_1$ dostáváme (za předpokladu $g(t) \neq 0$, protože jinak jsme hotovi, neboť pro $u_0 = 0$ je z jednoznačnosti $u = 0$)

$$g'(t) + c_2 \cdot g^{q/2}(t) \leqslant 0, \qquad \frac{g'(t)}{g^{q/2}(t)} \leqslant -c_2, \qquad \left(1 - \frac{q}{2}\right) g^{1-q/2}(t) \leqslant -c_2 \cdot t + C,$$

což znamená, že $g(t) < 0$ pro nějaké t, ale to je v rozporu s $g(t) \geqslant 0$.

Je-li p > q, pak se v rovnici výše zaměříme na $\int_\Omega \alpha \cdot |\nabla u|^p = \alpha \cdot \|\nabla u\|_p^p \geqslant c \cdot \|\nabla u\|_q^p$ a $\int_{\partial\Omega} \beta \cdot |u|^q = \beta \cdot \|u\|^q_{\partial q}$. Je-li $\|\nabla u\| \geqslant 1$, pak můžeme rovnou odhadnout $\|\nabla u\|_q^p \geqslant \|\nabla u\|_q^q$. Je-li $\|\nabla u\| < 1$, ale $\|u\|_{\partial q} > 1$, pak $\beta/2 \cdot \|\nabla u\|_q^q + \beta/2 \cdot \|u\|^q_{\partial q} \leqslant \beta \cdot \|u\|^q_{\partial q}$. Je-li obojí menší než 1, pak $\|u\|^q_{\partial q} \geqslant \|u\|^p_{\partial q}$ a můžeme použít Jensenovu nerovnost:

$$c\cdot\|\nabla u\|_q^p + \beta \cdot \|u\|^p_{\partial q} \geqslant 2\cdot\min(c,\beta)\cdot\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|_q^p + \frac{1}{2}\|u\|^p_{\partial q}\right) \geqslant 2\cdot\min(c,\beta)\cdot\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|_q^q + \frac{1}{2}\|u\|^q_{\partial q}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Obdobným postupem jako pro $p \leqslant q$ dostaneme v prvních dvou případech

$$\|u(t_2)\|_2^2 - \|u(t_1)\|_2^2 + \int_{t_1}^{t_2} c_2 \cdot \|u(t)\|_2^q \, dt \leqslant 0,$$

a ve třetím

$$\|u(t_2)\|_2^2 - \|u(t_1)\|_2^2 + \int_{t_1}^{t_2} c_2' \cdot \|u(t)\|_2^p \, dt \leqslant 0.$$

Nyní můžeme postupovat jako u $p \leqslant q$, jen se musíme vypořádat, že občas je tam na q a občas na p. To vyřešíme tak, že pokud je $\|u(t)\|_2 \geqslant 1$, pak můžeme zmenšit p-tou mocninu na q-tou, pokud naopak $\|u(t)\|_2 < 1$, pak zmenšíme q-tou mocninu na p-tou. Nejprve tedy předpokládejme $g(t) = \|u(t)\|_2^2 \geqslant 1$, proveďme totéž co v $p \leqslant q$ a vyvraťme tuto možnost.

Pak máme, že pro nějaké (esenciální) t_0 je $g(t_0) \leqslant 1$. Ale z rovnice ze začátku důkazu je g klesající, neboť $g(t_2) - g(t_1) \leqslant 0$. Tedy od t_0 dál bude $g(t) \leqslant 1$ a my znovu provedeme totéž, co v $p \leqslant q$. □