Příklad
Uvažujme Minkowského prostoročas $M = \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}[t, x_1, x_2, x_3]$ se skalárním součinem signatury $(3, 1)$ odpovídající kvadratické formě $-t^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$ a vektorový prostor diferenciálů $T^* = T^*(M)$ s bází $\{d_0, d_1, d_2, d_3\}$, kde $d_0 = dt$, $d_i = dx_i$, $i = 1, 2, 3$.

Homogenní části vnější algebry $\Lambda^*(T^*) = \sum_{k=0}^{4} \Lambda^k(T^*)$ mají tvar:

$$\Lambda^0 = \mathbb{R}; \qquad \Lambda^1 = \langle d_0, d_1, d_2, d_3 \rangle ; \qquad \Lambda^2 = \langle d_{01}, d_{02}, d_{03}, d_{12}, d_{13}, d_{23} \rangle ;$$

$$\Lambda^3 = \langle d_{012}, d_{013}, d_{023}, d_{123} \rangle ; \qquad \Lambda^4 = \langle d_{1234} \rangle .$$

(A) Napište explicitně tvar Hodgeova operátoru $* : \Lambda^k(T^*) \to \Lambda^{n-k}(T^*)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Objemová forma σ je definována předpisem $\sigma = dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

(B) Diferenciální forma stupně 2 na Minkowského prostoru je definována vztahem

$$F = -E_1 dt \wedge dx_1 - E_2 dt \wedge dx_2 - E_3 dt \wedge dx_3 + B_1 dx_2 \wedge dx_3 - B_2 dx_1 \wedge dx_3 + B_3 dx_1 \wedge dx_2$$

a diferenciální forma stupně 1

$$J = -\varrho dt + J_1 dx_1 + J_2 dx_2 + J_3 dx_3.$$

Vypočítejte explicitně tvar rovnic

$$dF = 0; \qquad *d*F = J$$

a porovnejte je se sadou Maxwellových rovnic.

Řešení (A)
Nejprve zjistíme, kolik vychází skalární součin $\langle d_I, d_J \rangle$ ($I = (i_1, \ldots, i_k)$, $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$). Jelikož je prostor symetrický vůči permutaci 3 prostorových souřadnic, mohou nastat jen 3 případy:

1. I a J odpovídají různé množině indexů, tj. existuje $i \in I, i \notin J$, tedy $\langle d_I, d_J \rangle = \ldots \cdot \langle d_i, \ldots \rangle \cdot \ldots = \ldots \cdot 0 \cdot \ldots = 0$, jelikož v definici skalárního součinu není žádný člen $x_i \cdot x_j$ pro $i \neq j$.
2. $0 \notin I$ (tj. $0 \notin J$). Potom všechny skalární součiny $\langle d_i, d_i \rangle$ (tj. jediné které jsou nenulové) jsou rovny jedné, protože metrika má u prostorových souřadnic koeficient $+1$, tj.
$$\langle d_I, d_J \rangle = \left\langle d_I, \operatorname{sgn}\binom{I}{J} d_I \right\rangle = \operatorname{sgn}\binom{I}{J} \cdot \langle d_{i_1}, d_{i_1} \rangle \cdot \ldots \cdot \langle d_{i_k}, d_{i_k} \rangle = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1.$$
3. $0 \in I$ (tj. $0 \in J$). Potom jeden ze skalárních součinů bázových vektorů bude tvaru $\langle dt, dt \rangle = -1$, protože u času je v Minkowského metrice koeficient -1, zbylé (skalární součiny stejných bázových vektorů) budou zase $+1$. BÚNO $i_1 = 0$. Tedy
$$\langle d_I, d_J \rangle = \left\langle d_I, \operatorname{sgn}\binom{I}{J} d_I \right\rangle = 1 \cdot \langle dt, dt \rangle \cdot \langle d_{i_2}, d_{i_2} \rangle \cdot \ldots \cdot \langle d_{i_k}, d_{i_k} \rangle = (-1) \cdot 1 = -1.$$

Navíc budeme používat bilinearitu skalárního součinu, tedy $\langle a \cdot d_I, b \cdot d_J \rangle = a \cdot b \cdot \langle d_I, d_J \rangle$. Teď už nám stačí zapsat si rovnost definující Hodgeův operátor v obecné formě a spočítat:

- $k = 0$: Máme $a \in \mathbb{R}$, $b \cdot d_{0123} \in \Lambda^4$ a hledáme $c \cdot d_{0123} \in \Lambda^4$:
$$a \wedge b \cdot d_{0123} = a \cdot b \cdot d_{0123} = \langle c \cdot d_{0123}, b \cdot d_{0123} \rangle \cdot d_{0123} = c \cdot b \cdot (-1) \cdot d_{0123} \implies c = -a.$$
Tudíž $* : a \mapsto -a \cdot d_{0123}$.
- $k = 1$: Máme $a_0 d_0 + a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 \in \Lambda^1$, $b_0 d_{123} + b_1 d_{023} + b_2 d_{013} + b_3 d_{012} \in \Lambda^3$ a hledáme $c_0 d_{123} + c_1 d_{023} + c_2 d_{013} + c_3 d_{012} \in \Lambda^3$:
$$(a_0 d_0 + a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3) \wedge (b_0 d_{123} + b_1 d_{023} + b_2 d_{013} + b_3 d_{012}) =$$
$$= (a_0 b_0 - a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3)\, d_{0123} =$$
$$= \langle c_0 d_{123} + c_1 d_{023} + c_2 d_{013} + c_3 d_{012}, b_0 d_{123} + b_1 d_{023} + b_2 d_{013} + b_3 d_{012} \rangle \cdot d_{0123} =$$
$$= (c_0 b_0 - c_1 b_1 - c_2 b_2 - c_3 b_3) \cdot d_{0123} \implies c_0 = a_0, c_1 = a_1, c_2 = -a_2, c_3 = a_3.$$
Tedy $* : a_0 d_0 + a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 \mapsto a_0 d_{123} + a_1 d_{023} - a_2 d_{013} + a_3 d_{012}$. (Mínusy v prvním výrazu vyšly z přeházení bázových vektorů, v druhém výrazu pak ze skalárního součinu, kde byl čas.)

Řešení (Pokračování A)

- $k=2$: Máme $a_{01}d_{01}+a_{02}d_{02}+a_{03}d_{03}+a_{12}d_{12}+a_{13}d_{13}+a_{23}d_{23}\in\Lambda^2$, $a_{01}d_{01}+a_{02}d_{02}+b_{03}d_{03}+b_{12}d_{12}+b_{13}d_{13}+b_{23}d_{23}\in\Lambda^2$ a hledáme $c_{01}d_{01}+c_{02}d_{02}+c_{03}d_{03}+c_{12}d_{12}+c_{13}d_{13}+c_{23}d_{23}\in\Lambda^2$:

$$(a_{01}d_{01}+a_{02}d_{02}+a_{03}d_{03}+a_{12}d_{12}+a_{13}d_{13}+a_{23}d_{23})\wedge$$
$$\wedge(b_{01}d_{01}+b_{02}d_{02}+b_{03}d_{03}+b_{12}d_{12}+b_{13}d_{13}+b_{23}d_{23})=$$
$$=(a_{01}\cdot b_{23}-a_{02}\cdot b_{13}+a_{03}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{03}-a_{13}\cdot b_{02}+a_{23}\cdot b_{01})\cdot d_{0123}=$$
$$\langle c_{01}d_{01}+c_{02}d_{02}+c_{03}d_{03}+c_{12}d_{12}+c_{13}d_{13}+c_{23}d_{23}\ ,$$
$$b_{01}d_{01}+b_{02}d_{02}+b_{03}d_{03}+b_{12}d_{12}+b_{13}d_{13}+b_{23}d_{23}\rangle\cdot d_{0123}=$$
$$=(-c_{01}b_{01}-c_{02}b_{02}-c_{03}b_{03}+c_{12}b_{12}+c_{13}b_{13}+c_{23}b_{23})\cdot d_{0123}$$

  Proto $*: a_{01}d_{01}+a_{02}d_{02}+a_{03}d_{03}+a_{12}d_{12}+a_{13}d_{13}+a_{23}d_{23}\mapsto -a_{23}d_{01}+a_{13}d_{02}-a_{12}d_{03}+a_{03}d_{12}-a_{02}d_{13}+a_{01}d_{23}$.

- $k=3$: Máme $a_0d_{123}+a_1d_{023}+a_2d_{013}+a_3d_{012}\in\Lambda^3$, $b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\in\Lambda^1$ a hledáme $c_0d_0+c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3\in\Lambda^1$:

$$(a_0d_{123}+a_1d_{023}+a_2d_{013}+a_3d_{012})\wedge(b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_2)=$$
$$=(-a_0b_0+a_1b_1-a_2b_2+a_3b_3)\,d_{0123}=$$
$$=\langle c_0d_0+c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3,b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\rangle\cdot d_{0123}=$$
$$(-c_0b_0+c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3)\cdot d_{0123}\implies c_0=a_0,c_1=a_1,c_2=-a_2,c_3=a_3.$$

  Tudíž $a_0d_{123}+a_1d_{023}+a_2d_{013}+a_3d_{012}\mapsto a_0d_0+a_1d_1-a_2d_2+a_3d_3$.

- $k=4$: Máme $a\cdot d_{0123}\in\Lambda^4$, $b\in\mathbb{R}$ a hledáme $c\in\mathbb{R}$:

$$a\cdot d_{0123}\wedge b=a\cdot b\cdot d_{0123}=\langle c,b\rangle\cdot d_{0123}=c\cdot b\cdot d_{0123}\implies c=a.$$

  Tudíž $*: a\cdot d_{0123}\mapsto a$.

Řešení (B)
Z definice diferenciálu spočítáme:

$$dF = \left(-\frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1} + \frac{\partial B_3}{\partial t}\right) d_{012} + \left(-\frac{\partial E_1}{\partial x_3} + \frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \frac{\partial B_2}{\partial t}\right) d_{013} +$$

$$+ \left(-\frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{\partial E_3}{\partial x_2} + \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) d_{023} + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}\right) d_{123} = 0.$$

Porovnáním členů dostaneme:

$$-\frac{\partial B_3}{\partial t} = \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}; \qquad -\frac{\partial B_2}{\partial t} = \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1};$$

$$-\frac{\partial B_1}{\partial t} = \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}; \qquad \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} = 0.$$

Což je z definice rotace a divergence to samé jako (druhá a čtvrtá Maxwellova rovnice):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Z předchozích výsledků zobrazíme $*$, následně z definice spočítáme diferenciál a nakonec znovu zobrazíme $*$:

$$*d*F = *d\left(-B_1 d_{01} - B_2 d_{02} - B_3 d_{03} - E_3 d_{12} + E_2 d_{13} - E_1 d_{23}\right) =$$

$$= *\left(\left(-\frac{\partial B_1}{\partial x_2} + \frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_3}{\partial t}\right) d_{012} + \left(-\frac{\partial B_1}{\partial x_3} + \frac{\partial B_3}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial t}\right) d_{013} +\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{\partial B_2}{\partial x_3} + \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_1}{\partial t}\right) d_{023} + \left(-\frac{\partial E_1}{\partial x_1} - \frac{\partial E_2}{\partial x_2} - \frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right) d_{123}\right) =$$

$$= \left(-\frac{\partial B_1}{\partial x_2} + \frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_3}{\partial t}\right) d_3 - \left(-\frac{\partial B_1}{\partial x_3} + \frac{\partial B_3}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial t}\right) d_2 +$$

$$+ \left(-\frac{\partial B_2}{\partial x_3} + \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_1}{\partial t}\right) d_1 + \left(-\frac{\partial E_1}{\partial x_1} - \frac{\partial E_2}{\partial x_2} - \frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right) dt =$$

$$= -\varrho\, dt + J_1 dx_1 + J_2 dx_2 + J_3 dx_3.$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$J_3 + \frac{\partial E_3}{\partial t} = \frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2}; \qquad J_2 + \frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1};$$

$$J_1 + \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3}; \qquad -\frac{\partial E_1}{\partial x_1} - \frac{\partial E_2}{\partial x_2} - \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = -\varrho.$$

A taktéž z definice rotace a divergence dostaneme (první a třetí Maxwellova rovnice):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varrho.$$