

1 Ohniska kuželoseček

1.1 Konstrukce s imaginárními elementy

Poznámka

Všimněme si, že projektivita dvou souměrných soustav určuje jednoznačně pár samodružných elementů, ale opačně ne. Pokud však vezmeme involuci, tak ta už má jednoznačnou korespondenci involuce s párem samodružných elementů.

Příklad (Konstrukce)

Je-li dána projektivita souměrných bodových soustav na přímce, určete involuci, která má tytéž samodružné body. (Totéž duálně.)

┌

Řešení (Duální)

Zvolíme pomocnou kružnici procházející daným bodem. Převedeme soustavy na bodové soustavy na kružnici. Vezmeme směrovou přímku za poláru a najdeme k ní (přes tečny) pól. Nyní uvažujeme involuci se středem v tomto bodě. Obraz v hledané involuci najdeme tak, že vzor převedeme na kružnici, zobrazíme v této involuci, a vrátíme zpět.

┌

┌

Poznámka

Pokud směrová přímka vyjde mimo kružnici, budou samodružné body komplexní a pól najdeme tak, že leží na polárách k bodům (pólům) ležícím na dané poláře.

┌

Věta 1.1

Pro eliptickou involuci (bodových soustav na přímce) existují právě dva body v rovině, z nichž se tato involuce promítá absolutní involucí (to znamená involucí kolmic).

┌

Důkaz

Pro eliptickou involuci se její páry rozdělují. Tedy nad úsečkami vzor – obraz si uděláme Thaletovy kružnice a hledané body budou jejich průsečíky. □

┌

Definice 1.1

Body z předchozí věty se nazývají pomocné body eliptické involuce.

Poznámka (Platí)

Absolutní involuce je eliptická involuce, jejíž samodružné přímky jsou imaginární. Nazývají se izotropické přímky a jejich směry jsou $[0 : 1 : i]$ a $[0 : 1 : -i]$.

Poznámka

Izotropické body leží na každé kružnici v rovině. Každá izotropická přímka je kolmá sama na sebe (v reálném skalárním součinu, z definice absolutní involuce)

1.2 Ohnisko středových kuželoseček

Důsledek

Pokud kuželosečka není kružnice, pak izotropické body na ní neleží, tedy z každého izotropického bodu k takové kuželosečce existují 2 tečny (? 4 imaginární přímky). Lze ukázat, že ze 6 průsečíků těchto 4 přímek jsou vždy dva reálné.

Definice 1.2 (Ohnisko)

Těmto dvěma bodům budeme říkat ohniska dané kuželosečky.

Věta 1.2

Bod je ohniskem kuželosečky \Leftrightarrow involuce sdružených polár indukovaná v tomto bodě kuželosečkou je involuce absolutní.

┌

Důkaz

Samodružné přímky involuce sdružených polár jsou právě tečny z tohoto bodu. □

└

Věta 1.3

1. Kuželosečka má 2 ohniska (E, F) (pro kružnici splývající), jsou umístěna symetricky podle středu na jedné z os kuželosečky. Ohniska jsou samodružné body involuce bodů na této ose, jejíž páry jsou vytáty sdruženými kolmými polárami. A tedy i páry tečna+jejich normála (kolmice v bodě dotyku = pól tečny).

2. Každé z ohnisek je pomocným bodem eliptické involuce, kterou na druhé ose vytínají sdružené kolmé poláry (a tedy i dvojice tečna+normála).

3. Každá kružnice opsaná trojúhelníku danému druhou osou a sdruženými kolmými polárami protíná původní osu v ohniscích. (Vyplyvá z předchozí části.)

┌

Důkaz

Bez důkazu. □

└

Definice 1.3 (Hlavní osa, vedlejší osa)

Ose z předchozí věty se říká hlavní osa, druhé pak vedlejší.

Příklad (Konstrukce)

Dány osy elipsy s vrcholy, najděte ohniska.

┌

Řešení (Podobné hledání hyperoskulační kružnice.)

K spojnici hlavního a vedlejšího vrcholu umíme najít pól (průsečík tečen = kolmic na osy). Z tohoto pólu vedeme kolmici, čímž jsme získali dvojici kolmých sdružených polár, tedy použijeme předchozí větu, bod 3.

└

Totéž pro hyperbolu: na hlavní ose máme zadané vrcholy, na vedlejší náhradní body.

┌

Řešení

Polára bude tentokrát průsečík „těch druhých dvou kolmic v hlavním a vedlejším vrcholu“, neboť pomocné body jsou takové, že přesně tento bod leží na asymptotě (tečně v nevlastním bodě).

└

1.3 Ohnisko paraboly

Definice 1.4 (Ohnisko)

(Stejná.) Ohnisko paraboly je reálný průsečík izotropických tečen.

┌

Poznámka

Tuto definici splňují 2 body: vlastní ohnisko F a nevlastní ohnisko = střed = směr průměrů = směr osy.

└

┌

Poznámka

Polára vlastního ohniska = řídící přímka.

└

Věta 1.4

1. Bod je ohniskem paraboly \Leftrightarrow involuce sdružených polár v tomto bodě je involuce absolutní. (Tj. sdružené poláry v F jsou vzájemně kolmé.)

2. Spojnice vlastního a nevlastního ohniska = osa paraboly, vlastní ohnisko pólí každou úsečku vyřatou na ose sdruženými kolmými polárami (speciálně tečnou a její normálou).

Příklad (Konstrukce)

Zkonstruuje ohnisko paraboly zadané 4 tečnami.

┌

Řešení

Najdeme osu a bod dotyku na libovolné nevrcholové tečně. Z něj vedeme kolmici a použijeme předchozí větu bod 2.

└

Věta 1.5

Ohnisko jsou pro kuželosečku 2 podmínky.

Důkaz

Ohnisko zadává 2 izotropické tečny, tedy 2 podmínky. \square

Poznámka

2 ohniska + 1 bod (mimo osu = jejich spojnice) nezadávají jednoznačně kuželosečku, zadávají však jednoznačně elipsu a hyperbolu. A tyto dvě kuželosečky se v daném bodu protínají kolmo (úhel mezi tečnami).

2 Analytická geometrie

Definice 2.1 (Projektivní prostor, geometrický bod, aritmetický zástupce)

(Reálný) projektivní prostor dimenze n je množina

$$\mathbb{R}P^n = \{\langle v \rangle, v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{o}\}\} = \text{množina všech přímk (procházejících počátkem) v } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Prvek $\langle v \rangle \in \mathbb{R}P^n$ se nazývá geometrický bod a v jeho aritmetický zástupce

Poznámka (Platí)

$\langle v \rangle = \langle w \rangle$ (tj. stejné geometrické body) $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : w = \alpha \cdot v$ (tj. aritmetičtí zástupci se liší pouze násobkem $\neq 0$).

Definice 2.2 (Homogenní souřadnice)

Je-li $v = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{o}\}$, pak homogenní souřadnice geometrického bodu $\langle v \rangle$ jsou $[x_0 : \dots : x_n]$.

Poznámka

Jsou určeny až na násobek $\neq 0$.

Definice 2.3 (Projektivní přímka, projektivní rovina, projektivní prostor)

$\mathbb{R}P^1$ říkáme projektivní přímka. $\mathbb{R}P^2$ říkáme projektivní rovina. $\mathbb{R}P^3$ říkáme projektivní prostor.

Poznámka (Značení)

Místo $\langle a \rangle$ budeme psát A .

Poznámka

$\mathbb{R}P^1$: Dva body A, B jsou totožné \Leftrightarrow vektory a, b jsou lineárně závislé.

$\mathbb{R}P^2$: Tři body A, B, C leží na jedné přímce (po dvou různé) $\Leftrightarrow a, b, c$ jsou lineárně závislé (po dvou lineárně nezávislé), tj. leží v jedné rovině.

$\mathbb{R}P^3$: Čtyři body A, B, C, D leží v rovině $\Leftrightarrow a, b, c, d$ jsou lineárně závislé, tj. leží v jednom prostoru.

Obecně $\mathbb{R}P^n$: $n+1$ bodů A_0, \dots, A_n leží v $n-1$ -dimenzionálním projektivním prostoru \Leftrightarrow vektory a_0, \dots, a_n leží v nadrovině v \mathbb{R}^{n+1} (jsou lineárně závislé).

Poznámka

Procesu „zakážeme \mathbf{o} a ztotožníme násobky“ říkáme projektivizace.

Definice 2.4 (Projektivní rozšíření afinního prostoru, vlastní bod, nevlastní bod)

Projektivní rozšíření afinního prostoru \mathbb{R}^n na projektivní prostor $\mathbb{R}P^n$ (= kanonické vnoření \mathbb{R}^n do $\mathbb{R}P^n$) je zobrazení, které bodu $[x_1, \dots, x_n]$ přiřadí $[1 : x_1 : \dots : x_n]$ a vektoru (x_1, \dots, x_n) přiřadí $[0 : x_1 : \dots : x_n]$.

Prvním říkáme body vlastní, druhým nevlastní.

TODO?

Definice 2.5 (Homogenní souřadnice přímky)

V $\mathbb{R}P^2$ zavádíme homogenní souřadnice přímky $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ jako homogenní trojici $(a_0 : a_1 : a_2)$.

┌

Poznámka

└ Opět určeny až na násobek $\neq 0$.

Například

$(0 : 1 : 0)$ je osa y , $(0 : 0 : 1)$ je osa x , $(1 : 0 : 0)$ je nevlastní přímka.

Příklad (Hledání průsečíku dvou přímek)

TODO?

Příklad (Incidence bodů)

$X = [x_0 : x_1 : x_2]$, $a = (a_0 : a_1 : a_2)$. $X \in a \Leftrightarrow a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$.

┌ *Důsledek*

Lze zaměnit bod za přímku \implies dualita.

└ Tj. například spojnice bodů se počítá stejně jako průsečík přímek.

Poznámka (Trik na nalezení spojnice (/průsečíku))

Dány body $Y = [y_0 : y_1 : y_2]$, $Z = [z_0 : z_1 : z_2]$. Chceme rovnici jejich spojnice: $X \in a = YZ \Leftrightarrow a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ pro hledané souřadnice $(a_0 : a_1 : a_2) \Leftrightarrow$ vektory X , Y a Z jsou závislé $\Leftrightarrow \det((X|Y|Z)^T) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1) \cdot x_0 + (-y_0 \cdot z_2 + y_2 \cdot z_0) \cdot x_1 + (y_0 \cdot z_1 - y_1 \cdot z_0) \cdot x_2 = 0.$$

2.1 Dvojpoměr

Definice 2.6 (Dvojpoměr)

Dvojpoměr 4 vektorů v rovině a, b, c, d , po dvou lineárně nezávislých, ale po třech lineárně závislých (tj. BÚNO $c = \alpha_1 a + \beta_1 b$, $d = \alpha_2 \cdot a + \beta_2 b$) definujeme jako $(abcd) := \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\alpha_1 \cdot \beta_2} \in \mathbb{R}$.

┌ *Poznámka*

Zřejmě tato hodnota nezávisí na volbě (nenulového) násobku každého vektoru.

Dvojpoměr 4 bodů $A, B, C, D \in \mathbb{R}P^n$ ležících na jedné přímce definujeme jako

$$(ABCD) := (abcd).$$

Tvrzení 2.1 (Už jsme si dokázali)

A, B, C, D jsou čtyři různé $\implies (ABCD) \neq 0, 1, \infty$. (Např. $C = A \vee B = D \Leftrightarrow (ABCD) = 0$.)

$$A, B, C, D \text{ vlastní} \implies (ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

$$A, B, C \text{ vlastní, } D \text{ nevlastní} \implies (ABCD) = (ABC).$$

Věta o 4 determinantech (pro $A, B, C, D \in \mathbb{R}P^1$):

$$(ABCD) = \frac{(a_0 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_0) \cdot (b_0 \cdot d_1 - b_1 \cdot d_0)}{(a_0 \cdot d_1 - a_1 \cdot d_0) \cdot (b_0 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_0)}.$$

Definice 2.7 (Harmonická čtveřice)

$$(ABCD) = -1$$

Příklad (Pak jsme počítali. V jednu chvíli nám vyšlo:)

Parametrizace přímky procházející A, B je $t_1 \cdot A + t_2 \cdot B$, kde například $t_1 + t_2 = 1$; lépe $t \cdot A + (1 - t) \cdot B$.

Definice 2.8 (Projektivní souřadný systém (PSS))

Projektivní souřadný systém v $\mathbb{R}P^n$ je $(n + 1)$ -tice různých bodů $A_0, \dots, A_n \in \mathbb{R}P^n$. Pak $\forall X \in \mathbb{R}P^n$ definujeme souřadnice bodu X vůči PSS (A_0, \dots, A_n) jako homogenní $(n + 1)$ -tici $[x_0 : \dots : x_n]$ takovou, že $x = \sum_{i=0}^n x_i \cdot a_i$.

TODO!!! (Projektivita na $\mathbb{R}P^n$: je dána regulární maticí $(n + 1) \times (n + 1)$ určenou až na násobek $\neq 0$ (píšeme $A \sim k \cdot A$, pro $k \neq 0$).)

TODO!!! (Ukázání si, že taková matice zachovává dvojpoměr.)

TODO!!! (Projektivita je dána svými hodnotami na $n + 2$ bodech.)

TODO!!! (A mnoho dalšího.)

2.2 Samodružné body projektivit

Definice 2.9 (Samodružný bod projektivity)

$\langle \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}P^n$ je samodružný bod projektivity dané maticí $A \equiv \langle A \cdot \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle$.

┌

Poznámka

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} : A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} \quad (\Leftrightarrow (A - \lambda E) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0)$$

$\Leftrightarrow \lambda \neq 0$ je vlastním číslem matice A $\mathbf{0} \neq \mathbf{v}$ je vlastním vektorem matice A příslušným vlastnímu číslu λ .

└

Poznámka

Matice projektivity je regulární, tedy nemá vlastní číslo nula.

TODO? (Hromada lineární algebry.)

2.3 Klasifikace projektivit na projektivní přímce

Poznámka

Klasifikace projektivit na projektivní přímce podle možných Jordanových tvarů:

- $J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pro $\lambda = 1$ je to identická projektivita. Pro $\lambda \neq 1$ má dva reálné samodružné body.
- $J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tehdy má jediný samodružný bod (a ten je reálný).
Navíc je podobná matici $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, což je násobek $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- $J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Tehdy má dva komplexní samodružné body.

Důsledek

To dokazuje větu ze zimního semestru (\exists 2/1/0 samodružné body projektivity soustav).

2.4 Charakteristika projektivity

Poznámka (Opakování zimního semestru)

Jsou-li S, T samodružné body projektivity na \mathbb{RP}^1 , pak její charakteristika je číslo $w = (XX'ST)$ pro libovolný pár $X \mapsto X'$.

Věta: Hodnota w nezávisí na volbě bodu X .

Věta 2.2

Hodnota w nezávisí na volbě bodu X , a je-li projektivita dána maticí A , platí

$$w = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{D}}{\operatorname{tr} A - \sqrt{D}}, \quad D := (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A.$$

┌
Důkaz

Pro dvojpoměr platí (věta o čtyřech determinantech)

$$(XX'ST) = \frac{[XS] \cdot [X'T]}{[XT] \cdot [X'S]}, \quad [AB] = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Pro danou A spočítejme její vlastní čísla: $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A) \cdot \lambda + \det A$, tj. $\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{D}}{2}$.

Pak pro samodružné body platí: $S' = S, T' = T$, tedy $\mathbf{s}' = A \cdot \mathbf{s} = \lambda_1 \cdot \mathbf{s}, \mathbf{t}' = A \cdot \mathbf{t} = \lambda_2 \cdot \mathbf{t}$.
Pak

$$[\mathbf{x}'\mathbf{s}] = [\mathbf{x}' \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{s}'] = \frac{1}{\lambda_1} [\mathbf{x}'\mathbf{s}'] = \frac{1}{\lambda_1} \cdot |A| \cdot [\mathbf{x}\mathbf{s}], \quad [\mathbf{x}'\mathbf{t}] = \dots = \frac{1}{\lambda_2} \cdot |A| \cdot [\mathbf{x}\mathbf{t}].$$

Dosadíme: $w = \frac{[\mathbf{x}\mathbf{s}] \cdot \frac{1}{\lambda_2} \cdot |A| \cdot [\mathbf{x}\mathbf{t}]}{[\mathbf{x}\mathbf{t}] \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot |A| \cdot [\mathbf{x}\mathbf{s}]} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{D}}{\operatorname{tr} A - \sqrt{D}}.$

□

2.5 Involuce

Poznámka (Opakování zimního semestru)

Involuce je projektivita soumístných soustav splňující $w = -1 \Leftrightarrow \forall X : X'' = X \Leftrightarrow \exists X : X'' = X$.

Definice 2.10 (Involuce)

Involuce je projektivita (na $\mathbb{R}P^n$) daná maticí A , která splňuje $A^2 \sim E$.

Věta 2.3

Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ zadává neidentickou projektivitu na $\mathbb{R}P^1$ ($A \not\sim E$). Pak NáPoJE:

1. $A^2 \sim E$ (je to involuce);
2. $\text{tr } A = 0$;
3. $w = -1$.

┌

Důkaz

Pišme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Pak $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d) \cdot b \\ (a+d) \cdot c & bc + d^2 \end{pmatrix}$.

„1. \implies 2.“: $A^2 \sim E$ máme, chceme $\text{tr } A = a + d = 0$. Předpoklad nám dává $(a+d) \cdot b = 0 = (a+d) \cdot c$. Pro spor $(a+d) \neq 0$. Pak $b = c = 0$ a $A = \text{diag}(a, d)$, tedy $\text{diag}(a^2, d^2) \sim \text{diag}(1, 1)$, tedy $a^2 = d^2$, tj. $a = \pm d$. Takže buď $a + d = 0$ nebo $A \sim E$. ζ .

„2. \implies 1.“: předpokládáme $a + d = 0$. Pak ale $A^2 = \text{diag}(a^2 + bc, bc + d^2) \stackrel{a=-d}{=} \text{diag}(a^2 + bc, a^2 + bc) \sim E$.

„2. \Leftrightarrow 3.“: $w = \frac{\text{tr } A + \sqrt{D}}{\text{tr } A - \sqrt{D}}$, tedy pro $\text{tr } A = 0$ je $w = -1$, a pokud $w = -1$, pak $\text{tr } A + \sqrt{D} = -\text{tr } A + \sqrt{D}$, tedy $\text{tr } A = 0$. (Přitom $D = (\text{tr } A)^2 - 4 \det A = -4 \det A \neq 0$.) \square

└

Důsledek

Stará definice involuce sedí s tou novou.

2.6 Parabolická involuce

Poznámka

Parabolická involuce odpovídá singulární matici A , která splňuje $\text{tr } A = 0$.

Poznámka

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \implies c = \frac{-a^2}{b}.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a^2 & ba \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a^2 & ba \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot (ax_0 + bx_1) \\ -a \cdot (ax_0 + bx_1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

Důsledek

Tedy parabolická involuce zobrazuje všechny body do jednoho bodu.

Poznámka

Klasifikace involucí na $\mathbb{R}P^1$ podle Jordanova tvaru:

- $J_A \sim \text{diag}(1, -1) \implies p_A(\lambda) = \lambda^2 + \det A = \lambda^2 - a^2$, tedy 2 reálné samodružné body, tj. hyperbolická involuce;
- $J_A = \text{diag}(\lambda, \bar{\lambda}) \implies p_A(\lambda) = \lambda^2 + \det A = \lambda^2 + a^2$, tedy 2 imaginární body, tj. eliptická involuce.
- $J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tj. parabolická involuce.

3 Projektivity na $\mathbb{R}P^2$

Například (Znamé projektivity)

Všechny eukleidovské shodnosti. Všechny afinity (násobení bodu v \mathbb{R}^2 regulární maticí). Tj. i stejnolehlosti.

Poznámka (Působení projektivity na přímku)

Nechť je dána projektivita dána maticí A (3×3 regulární). Na bodech $x \mapsto Ax$. Na přímkách tedy $p^T \mapsto p^T A^{-1}$, protože projektivita zachovává incidenci.

Důsledek

Projektivita na $\mathbb{R}P^2$ má samodružné body a samodružné přímky. (A jsou to vlastní vektory matice A a A^{-T} .)

Věta 3.1

Nechť A má n různých vlastních čísel. Označme v_1, \dots, v_n vlastní vektory A (odpovídající $\lambda_1, \dots, \lambda_n$) a u_1, \dots, u_n vlastní vektory A^T (odpovídající stejným $\lambda_1, \dots, \lambda_n$). Pak pro $i \neq j : \langle u_j, v_i \rangle = 0$.

┌
Důkaz

$$\begin{aligned}\lambda_j \cdot \langle u_j, v_i \rangle &= \lambda_j \mathbf{u}_j^T \cdot \mathbf{v}_i = (\lambda_j \mathbf{u}_j)^T \cdot \mathbf{v}_i = (A^T \cdot \mathbf{u}_j)^T \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_j^T \cdot A \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_j^T \cdot (\lambda_i \mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{u}_j^T \cdot \mathbf{v}_i = \\ &= \lambda_i \cdot \langle u_j, v_i \rangle \xrightarrow{i \neq j} \langle u_j, v_i \rangle = 0.\end{aligned}$$

└

□

Důsledek

Jsou-li $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ samodružné přímky a $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ samodružné body projektivity, pak $i \neq j \implies \mathbf{V}_i \in \mathbf{u}_j$.

Definice 3.1 (Silně a slabě samodružná)

Samodružná přímka je silně samodružná, pokud se každý její bod zobrazí sám na sebe, a slabě samodružná v opačném případě.

Samodružný bod je silně samodružný, pokud se každá jím procházející přímka zobrazí sama na sebe, a slabě samodružný v opačném případě.

Poznámka

Přímka/bod je silně samodružná/-ý právě tehdy, pokud příslušný vlastní podprostor má dimenzi ≥ 2 (tj. existují 2 lineárně nezávislé vlastní vektory).

3.1 Klasifikace projektivit na $\mathbb{R}P^2$

Poznámka (Hrubá klasifikace)

Jordanovy buňky mohou být buď 3, 2 nebo 1.

Poznámka (Podpřípady)

3 buňky:

- $J_{1a} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (3 různá reálná vlastní čísla). \implies 3 slabě samodružné body a 3 slabě samodružné přímky.
- $J_{1b} = \text{diag}(\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_2)$, kde λ_1 je komplexní číslo, které není reálné, a λ_2 je reálné číslo. Je podobná s maticí $\text{diag}(R_\varphi, \lambda_2)$, rotace + stejnolehlost (= spirální podobnost). 1 slabě samodružný bod a 1 slabě samodružná přímka.
- $J_{1c} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) \sim \text{diag}(\lambda'_1, 1, 1)$. Jeden silně a jeden slabě samodružný bod, jedna silně a jedna slabě samodružná přímka. Toto zobrazení je perspektivní (nebo také středová) kolineace.
- $J_{1d} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) \sim E$ je identita.

2 buňky:

- $J_{2a} = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \right)$, kde $\lambda \neq 1$. 2 slabě samodružné přímky a 2 slabě samodružné body. Je to stejnoolehlost složená s elací (tj. s osovou afinitou, kde směr je rovnoběžný s osou).
- $J_{2b} = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \right)$. 1 silně samodružná přímka a jeden silně samodružný bod.

1 buňka:

- $J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (to je jediná až na podobnost matice se 3 Jordanovy buňky). Jeden slabě samodružný bod a jedna slabě samodružná přímka.

TODO? (definice bilineární formy; antisymetrické a symetrické BL formy; (jednoznačný) rozklad na symetrickou a antisymetrickou část; kvadratická forma (g_2) určená BL formou g neboli její symetrickou částí g_s ; zpětná rekonstrukce g_s z g_2 ; polární báze (to je ta, ve které je matice kvadratické formy diagonální); Sylvestrův zákon setrvačnosti; signatura; Sylvestrovo kritérium; regulární matice má počet nul v signatuře nulový a opačně)

Definice 3.2 (Vrchol symetrické bilineární formy)

Vrchol symetrické bilineární formy g na \mathbb{R}^n je množina

$$V(g) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}.$$

┌
Poznámka

Ekvivalentně $g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$. Maticově $\forall \mathbf{v} : \mathbf{u}^T G \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}^t \cdot G = \mathbf{o}$ nebo $G \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}$.

└ Čili $V(g) = \text{Ker } G$.

4 Kvadriky

Definice 4.1 (Kvadrika)

Kvadrika v $\mathbb{R}P^n$ určená kvadratickou formou g_2 (na \mathbb{R}^{n+1}) je množina

$$Q_g := \{\langle \mathbf{u} \rangle \in \mathbb{R}P^n \mid g_2(\mathbf{u}) = 0\}.$$

Například
TODO?

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je formálně reálná kuželosečka (nemá reálné body).

TODO?

Důsledek

Kvadrík na $\mathbb{R}P^n$ je dána symetrickou maticí $(n+1) \times (n+1)$ určenou až na násobek $\neq 0$.

Důsledek

Kvadrík v $\mathbb{R}P^2$ je určen symetrickou maticí 3×3 , tedy 6 čísla, až na násobek, tedy o jedno číslo méně, tj. 5 čísla.

┌

Důsledek

$X = \langle \mathbf{x} \rangle \in Q_g \Leftrightarrow x^T \cdot G \cdot x = 0$, tedy zadání 5 bodů je stejné jako zadání 5 lineárních rovnic (o 6 neznámých).

└

Definice 4.2 (Regulární kvadrík, singulární kvadrík)

Kvadrík je regulární/singulární, pokud její matice vůči libovolné bázi je regulární/singulární.

┌

Poznámka

To je ekvivalentní s nulou/nenulou v počtu nul v signatuře matice.

└

Definice 4.3 (Vrchol kvadriky)

Vrchol kvadriky je množina $V(Q) := \{X | \mathbf{x} \in V(g) = \text{Ker } G\}$.

4.1 Polární vlastnosti kvadrik

Definice 4.4 (Polárně sdružené body)

Body $X, Y \in \mathbb{R}P^n$ jsou polárně sdružené vzhledem ke kvadrice $Q_F \equiv F(x, y) = 0$.

┌ *Poznámka*

Ekvivalentně $x^T \cdot A \cdot y = 0$.

└ Ze symetričnosti F je symetrická i polární sdruženost.

Definice 4.5 (Singulární a regulární bod kuželosečky)

Bod $Y \in \mathbb{R}P^n$ je singulární bod kvadriky $Q_F \equiv Y$ je polárně sdružený se všemi body v $\mathbb{R}P^n$ (vůči Q_F). Ostatní body se nazývají regulární.

┌ *Poznámka*

Singulární bod musí být sdružený sám se sebou, tedy leží na příslušné kvadrice.

Množina všech singulárních bodů kvadriky Q_F tvoří podprostor v $\mathbb{R}P^n$. (Lze jednoduše ověřit na aritmetických zástupcích.)

Singulární body existují \Leftrightarrow kvadrika je singulární.

Množina singulárních bodů je vrchol kvadriky.

┌ *Důsledek*

Pro regulární kvadriky (a právě pro ně) je $V(Q_F) = \emptyset$.

Pozor

Zde zadaný vrchol nemá nic společného s vrcholem paraboly (či elipsy).

┌ *Poznámka*

Označení pochází z vrcholu kuželu / -ové plochy.

Poznámka (Definice)

Dimenze prázdné množiny je -1 .

Tvrzení 4.1

Projektivní dimenze $V(Q_F)$ je rovna $(n+1) - h(A) - 1 = n - h(A)$.

Tvrzení 4.2

Je-li $X \in V(Q_F)$ a Y libovolný bod kvadriky Q_F . Pak celá přímka $XY \subset Q_F$.

┌
Důkaz

$$X \in V(Q_F) \Leftrightarrow \forall Z \in \mathbb{R}^n : F(X, Z) = 0,$$

$$Y \in Q_F \Leftrightarrow F(Y, Y) = 0.$$

Vezmeme libovolný bod na přímce XY : označme $aX + bY = \langle ax + by \rangle$.

$$F(aX + bY, aX + bY) = a^2 F(X, X) + 2ab F(X, Y) + b^2 F(Y, Y) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

└

□

Tvrzení 4.3

Q_F libovolná kvadrika v $\mathbb{R}P^n$, S libovolný podprostor v $\mathbb{R}P^n \implies Q_F \cap S$ je také kvadrika (v S).

┌
Důkaz

$F|_S$ je stále kvadratická forma.

└

□

Důsledek

$V(Q_F)$ je také kvadrika.

Definice 4.6 (Doplňěk)

Je-li S podprostor $\mathbb{R}P^n$, doplňkem prostoru S v $\mathbb{R}P^n$ nazveme podprostor $T \subset \mathbb{R}P^n$ splňující $S \cap T = \emptyset$ a S má maximální možnou dimenzi.

┌
Poznámka

Zase je to symetrická vlastnost dvou podprostorů.

Pro projektivní dimenzi platí $\dim_p S + \dim_p T = n - 1$.

└

Definice 4.7 (Podstava kvadriky)

Podstava kvadriky Q_F je její průnik s libovolným podprostorem T , který je doplňkem $V(Q_F)$.

Důsledek

Podstava je regulární kvadrika.

┌
Důkaz

Je to průnik s podprostorem a neobsahuje singulární body.

└

□

Důsledek (Strukturální věta pro kvadriky)

Každá kvadrika sestává z podprostorů, které spojují body podstavy s vrcholem.

┌ *Poznámka*

└ Speciálním případem je regulární kvadrika, která je celá svou podstavou.

Definice 4.8 (Polární nadrovina, pól)

Buď $P \in \mathbb{R}P^n$ bod, který není singulárním bodem Q_F (tj. buď P je regulárním bodem Q_F nebo $P \notin Q_F$). Pak polární nadrovina ϱ_P bodu P je $\varrho_P = \{X \in \mathbb{R}P^n \mid F(P, X) = 0\}$. P se pak nazývá pólem této nadroviny.

┌ *Poznámka*

└ ϱ_P je nadrovina, protože $X \in \varrho_P \Leftrightarrow p^T \cdot A \cdot x = 0$ a $p^T \cdot A$ je nenulový.

Poznámka

Platí:

- Q_F regulární $\implies \varrho_P$ je definována pro každý bod $P \in \mathbb{R}P^n$;
- Q_F je singulární $\implies \varrho_P$ není definována pro $P \in V(Q_F)$, ale pro všechny ostatní body platí $V(Q_F) \subset \varrho_P$.

Definice 4.9 (Tečná nadrovina)

Tečná nadrovina je polární nadrovina pro případ, že $P \in Q_F$ (tj. že P je regulárním bodem Q_F).

Definice 4.10 (Tečna)

Tečna ke kvadrice Q_F je přímka, která buď leží celá na kvadrice (ale ne celá v $V(Q_F)$), anebo má s kvadrikou společný právě jeden (regulární) bod.

Poznámka (Platí, ale těžké dokázat)

Všechny tečny v daném bodě leží v tečné nadrovině.

Poznámka (Platí)

$P \in \varrho_Q \Leftrightarrow Q \in \varrho_P$. (Ze symetrie polární sdruženosti.)

Příklad

Určete tečný ke Q_F z bodu P .

┌

Řešení

└

Určíme ϱ_P a průsečíky $\varrho_P \cap Q_F$ leží na hledaných tečnách.

Kuželosečka dána rovnicí $x^2 - y^2 + 4xy + 4x + 2y + 3 = 0$. Určete tečny z bodů $[-1, -1]$, $[-3, 0]$, $[0, -2]$.

Definice 4.11 (Vnitřní bod, vnější bod)

Bod neležící na kuželosečce je vnitřní/vnější, pokud z něj nevedou/vedou tečny.

5 Klasifikace kvadrik

5.1 Maximální podprostory na kvadrice

Věta 5.1 (Bez důkazu)

Mějme kvadriku v \mathbb{RP}^n se signaturou (p, q, r) . BÚNO $p \geq q$. Potom

- maximální (projektivní) dimenze podprostoru neprotínajícího Q_F je $p - 1$;
- maximální (projektivní) dimenze podprostoru ležícího na Q_F je $q + r - 1 = n - p$.

Definice 5.1 (Projektivní typ kvadriky)

Číslo $n - p$ nazýváme projektivní typ kvadriky.

Například

Pro:

-1 $p = n + 1$: projektivní typ je $n - (n + 1) = -1 \implies Q_F$ obsahuje jen \emptyset , ale ne body, tedy $Q_F = \emptyset$ (formálně reálná kvadrika);

0 $p = n$: na Q_F leží body, ale ne přímky;

1 $p = n - 1$: na Q_F leží přímky, ale ne roviny;

...

5.2 Projektivní klasifikace kvadrik

Poznámka

První určujeme regulární/singulární. Pak (pokud je singulární) najdeme vrchol a podstavu (ta je regulární). Tedy nás zajímá hlavně klasifikace regulárních kvadrik.

Definice 5.2 (Oválná, přímková, (+ klasifikace))

Pro regulární kvadriky máme tyto možnosti:

pro	(p, q, r)	projektivní typ	název
	$(n+1, 0, 0)$	-1	formálně reálná
	$(n, 1, 0)$	0	oválná (body, ale ne přímky)
$n \geq 3$	$(n-1, 2, 0)$	1	přímková (občas také typ hyperboloid)
$n \geq 5$	$(n-2, 3, 0)$	2	
...	

Poznámka

Oválná v $\mathbb{R}P^2 = \{\text{elipsa, parabola, hyperbola}\}$.

5.3 Afinní klasifikace kvadrik

Definice 5.3 (Středová kvadrika, nestředová kvadrika, střed kvadriky, směr osy)

Regulární kvadrika je

- středová, je-li pól nevlastní nadroviny vlastní bod; (Tomuto bodu říkáme střed kvadriky.) (To je právě tehdy, není-li nevlastní rovina tečná.)
- nestředová (osová, paraboloid), je-li pól nevlastní nadroviny nevlastní bod. (Tomuto bodu říkáme směr osy.) (To je právě tehdy, je-li nevlastní rovina tečná.)

Definice 5.4 (Značení)

$$A = [F]_K = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \dots a_{0n} \\ a_{01} \dots a_{0n} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & B \end{pmatrix}.$$

Věta 5.2

Q_F je středová $\Leftrightarrow B$ je regulární, pak $S = [1 : s_1 : \dots : s_n]$ je střed \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow (a_{01} \dots a_{0n} | B) \cdot (1, s_1, \dots, s_n)^T = \mathbf{0}.$$

$(Q_F$ je nestředová $\Leftrightarrow B$ je singulární), pak $S = [0 : s_1 : \dots : s_n]$ je směr osy \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow B \cdot (s_1, \dots, s_n)^T = \mathbf{0}.$$

┌
Důkaz

„Pro nestředové“: $S = [0 : s_1 : \dots : s_n]$ je pólem nevlastní nadroviny $\Leftrightarrow \forall [0 : x_1 : \dots : x_n]$ platí

$$(0, x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot (0 : s_1 : \dots : s_n)^T = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \cdot B \cdot (s_1, \dots, s_n)^T = 0 (\forall (x_1, \dots, x_n)) \Leftrightarrow B \cdot (s_1, \dots, s_n)^T = \mathbf{o},$$

přičemž $(s_1, \dots, s_n) \neq \mathbf{o}$, tedy B je singulární. Opačně, pokud B je singulární, pak existuje takové $(s_1, \dots, s_n) \neq \mathbf{o}$, které to splňuje.

„Pro středové“: první část je jen negací již dokázaného. Pak $S = [1 : s_1 : \dots : s_n]$ je pólem nevlastní nadroviny \Leftrightarrow

$$\forall (x_1, \dots, x_n) : (0, x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot (1, s_1, \dots, s_n)^T \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \cdot (a_{01} \dots a_{0n} | B) (1, s_1, \dots, s_n)^T = 0 (\forall (x_1, \dots, x_n)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a_{01} \dots a_{0n} | B) \cdot (1, s_1, \dots, s_n)^T = \mathbf{o}.$$

└

□

Poznámka

$$(a_{01} \dots a_{0n} | B) \cdot (1, s_1, \dots, s_n)^T = \mathbf{o} \Leftrightarrow S = -B^{-1} \cdot (a_{01}, \dots, a_{0n})^T.$$

Poznámka

B je taktéž matice kvadriky (o dimenzi menší), která vznikne průnikem původní kvadriky s nevlastní nadrovinou (n_∞). A proto Q_F je středová/nestředová $\Leftrightarrow Q_F \cap n_\infty$ je regulární/singulární.

Pro singulární kvadriky nelze definovat středová/nestředová, ale platí V_Q je jeden bod („střed“) $\Leftrightarrow B$ je regulární. (A naopak V_Q je alespoň přímka $\Leftrightarrow B$ je singulární.)

Poznámka (Jemnější dělení)

Jak rozlišit hyperbolu ($|Q_F \cap n_\infty| = 2$) od elipsy ($Q_F \cap n_\infty = \emptyset$)?

Začneme v $\mathbb{R}P^1$ přehledem možných případů:

1. Regulární kvadriky:

- Signatura $(2, 0, 0)$: $x_0^2 + x_1^2 = 0$ nemá řešení, tedy je to formálně reálná kvadrika a je středová.
- Signatura $(1, 1, 1)$: $x_0^2 = x_1^2$ má právě dvě řešení = naše kvadrika jsou dva body. V této podobě je středová, ale když máme $x_0^2 - 2x_0x_1 = 0$, pak je jedno z řešení nevlastní bod a kvadrika je nestředová.

2. Singulární kvadriky:

- Signatura $(1, 0, 1)$: buď $x_0^2 = 0$ nebo $x_1^2 = 0$, tedy buď 1 nevlastní nebo 1 vlastní bod.
- Signatura $(0, 0, 2)$: celá přímka.

Tvrzení 5.3

Přehled kvadrik v $\mathbb{R}P^2$:

1. Regulární:

- Signatura $(3, 0, 0)$: formálně reálná kvadrika.
- Signatura $(2, 1, 0)$: oválná. Středové můžou být dvě sign $B = (2, 0, 0)$, tj. $Q_F \cap n = \emptyset$, je elipsa, sign $B = (1, 1, 0)$ je pak hyperbola. Nestředová je pak parabola.

2. Singulární:

- Signatura $(2, 0, 1)$: Pokud je B regulární, pak je to jeden vlastní bod. V opačném případě je to jeden vlastní bod.
- Signatura $(1, 1, 1)$: Pokud je B regulární, pak jsou to dvě různoběžky. V opačném případě jsou to dvě rovnoběžky.
- Signatura $(1, 0, 2)$: Obsahuje-li B něco, pak je to 1 vlastní přímka. V opačném případě je to nevlastní přímka
- Signatura $(0, 0, 3)$: celý prostor.

Poznámka (Klasifikace kvadrik v $\mathbb{R}P^3$)

Regulární středové:

$(4, 0, 0)$: formálně reálná kvadrika.

$(3, 1, 0)$: (tj. oválná) podle toho, zda je -1 v B nebo ne (tj. jestli nemá nebo má průsečík s nevlastní nadrovinou) je to buď elipsoid, nebo dvojdielný hyperboloid.

$(2, 2, 0)$: (tj. přímková) jednodílný hyperboloid.

Regulární nestředové tj. paraboloidy:

$(3, 1, 0)$: eliptický paraboloid (oválná).

$(2, 2, 0)$: hyperbolický paraboloid (přímková).

Singulární:

- $r = 1 \Leftrightarrow \dim_p V_Q = 0 \Leftrightarrow V_Q$ je bod \implies doplňkem V_Q je rovina:

$(3, 0, 1)$: bod, podle toho, zda je nula v B nebo vně, je buď nevlastní, nebo vlastní.

(2, 1, 1): plocha, v případě singulární B je válcová, jinak kuželová.

- $r = 2 \Leftrightarrow \dim_p V_Q = 1 \Leftrightarrow V_Q$ je přímka \Rightarrow doplňkem V_Q je přímka:

(2, 0, 2): přímka, pokud je singularita i mimo B , pak je vlastní, jinak nevlastní.

(1, 1, 2): 2 roviny, pokud je singularita i mimo B , pak různoběžné, jinak rovnoběžné.

- $r = 3 \Leftrightarrow \dim_p V_Q = 2 \Leftrightarrow V_Q$ je rovina \Rightarrow doplňkem V_Q je bod: $Q = V_Q$ je rovina a to buď vlastní, pokud B není nulová, nebo nevlastní.
- $r = 4 \Leftrightarrow \dim V_Q = 3 \Leftrightarrow Q = V_Q = \mathbb{R}P^3$: nulová kvadratická forma.

5.4 Metrická klasifikace pro regulární kvadriky

Poznámka

Směry os jsou vlastní vektory matice B .

Navíc B je symetrická, tj. B má reálná vlastní čísla a reálné vlastní vektory a navíc B je diagonalizovatelná \Rightarrow existuje n vlastních vektorů (tj. lze vždy najít bázi z vlastních vektorů); lze najít dokonce ortonormální bázi z vlastních vektorů.

Definice 5.5 (Délky poloos)

$$a_i = \sqrt{\frac{-c'}{\lambda_i}},$$

kde $c' = c - \mathbf{b}^T \cdot B^{-1} \cdot \mathbf{b}$, c je levý horní prvek A a \mathbf{b} je zbytek prvního sloupce (řádku) A .

Poznámka

U hyperboly jedna z délek os vyjde ryze komplexní.

Poznámka

Když nalezneme vlastní čísla, tak jsme hned dostali signaturu (znaménka vlastních čísel).

Definice 5.6 (Kanonická rovnice kvadriky středové)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{x}_i'^2}{a_i^2} = 1,$$

kde a_i jsou délky poloos a \mathbf{x}_i' jsou nové souřadnice.

Důsledek

Odpovídá matici v diagonálním tvaru.

Tvrzení 5.4 (Ohnisková vzdálenost)

$$e^2 = a_1^2 - a_2^2.$$

*Důsledek*Umíme spočítat ohniska (jako $\mathbf{S} + \frac{c}{2} \cdot \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}$)*Poznámka* (Nestředové)

Je-li Q nestředová, pak A je regulární, ale B není. Tedy jedním z vlastních čísel B je nula a jeho vlastní vektor je směr osy.

Definice 5.7 (Kanonická rovnice kvadriky nestředové)

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot x_i'^2 + 2b_n'' \cdot x_n' = 0,$$

kde b_n'' je poslední složka vektoru $\mathbf{b}'' = U^T \cdot \mathbf{b}$, přičemž \mathbf{b} je vektor z matice A bez B a rohového členu (stejně jako v délkách poloos) a $U = (\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_n)$, kde \mathbf{v}_i jsou normované vlastní vektory a \mathbf{v}_n přísluší 0.