

# Organizační úvod

Přednášky budou nahrávány, referáty ne.

Kontaktovat přes e-mail [slavikova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:slavikova@karlin.mff.cuni.cz)

Teoretické příklady odevzdávat přes Moodle.

## 1 Prvočísla

### Definice 1.1 (Dělitel)

Číslo  $d \in \mathbb{Z}$  nazýváme dělitelem čísla  $n \in \mathbb{Z}$ , značeno  $d \div n$ , pokud existuje  $k \in \mathbb{Z}$  splňující  $n = kd$ .

### Definice 1.2 (Prvočísla)

Řekněme, že  $n \in \mathbb{N}$  je prvočíslo, pokud  $n > 1$  a jeho jediní kladní dělitelé jsou  $1 \geq n$ .

┌  
Například (Několik prvních prvočísel)  
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...  
└

### Věta 1.1 (Základní věta aritmetiky)

Každé přirozené číslo  $n \geq 2$  lze zapsat právě jedním způsobem jako součin prvočísel ve tvaru:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$k \in \mathbb{N}, p_1 < p_2 < \cdots < p_k$  jsou prvočísla,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$

┌  
Například  
└

$$2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 (k = 3, p_1 = 2, p_2 = 5, p_3 = 101, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1)$$

┌  
Důkaz

1. krok = existence rozkladu (indukcí):

Pro  $n = 2$  zjevně platí  $2 = 2^1$  ( $k = 1, p_1 = 2, \alpha_1 = 1$ ).

Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna  $2 \leq x \leq n$ . Pokud je  $n + 1$  prvočíslo, pak  $n + 1 = (n + 1)^1$  ( $k = 1, p_1 = n + 1, \alpha_1 = 1$ ). Pokud není, pak  $n + 1 = a \cdot b$ , kde  $1 < a \leq b < n + 1$ . Podle indukčního předpokladu lze  $a$  i  $b$  rozložit na prvočísla. Zápis rozkladu  $n + 1$  pak bude sjednocením všech prvočísel a součtem příslušných  $\alpha$ , pokud se prvočísla vyskytují v  $a$  i  $b$ . (V přednášce byl zaveden zápis bez mocnin, kde prvočísla nemusí být různá, a pak proveden součin.)

2. krok = jednoznačnost rozkladu:

┌  
**Lemma 1.2** (Euklidovo lemma (bez důkazu))

*Nechť  $a, b \in \mathbb{Z}$  a nechť  $p$  je prvočíslo takové, že  $p \mid ab$ . Pak  $p \mid a$  nebo  $p \mid b$ .*

┌  
Použijeme důkaz sporem. Předpokládejme, že tvrzení neplatí. Vybereme nejmenší z přirozených čísel, pro které rozklad není jednoznačný. Označme ho  $n$ .

$$n = q_1 \cdots q_l = r_1 \cdot r_m \quad (q_1, \dots, q_l, r_1, \dots, r_m \text{ prvočísla})$$

A není pravda, že  $(r_1, \dots, r_m)$  je permutací  $(q_1, \dots, q_l)$ .

Protože  $q_1 \mid n$ , pak  $q_1 \mid r_1 \cdots r_m$  a podle Euklidova lemmatu  $q_1$  dělí alespoň jedno z čísel  $r_1, \dots, r_m$ . BÚNO  $q_1 \mid r_1$ , tedy  $q_1 = r_1$ . Vydělením  $n$  číslem  $q_1$  dostaneme menší přirozené číslo, které nemá jednoznačný rozklad. ( $\frac{n}{q_1} = q_2 \cdots q_l = r_2 \cdots r_m$ ). □

## Věta 1.3

*Prvočísel je nekonečně mnoho.*

┌  
Důkaz

Důkaz sporem. Předpokládejme, že prvočísel je konečně mnoho, a označme  $p$  největší prvočíslo. Definujeme:

$$n_p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1$$

Pak  $n_p > p$  a  $n_p$  dává zbytek 1 po dělení všemi prvočísly, tedy není ani jedním dělitelné. Tedy  $n_p$  nemá prvočíselný rozklad. se základní větou aritmetiky. □

┌  
Poznámka

Důkaz nedává konstrukci vyššího prvočísla, pouze dokazuje jeho existenci.

┌ *Například*

Mezi 1 a 100 je 25 prvočísel.

└

Mezi  $10^7$  a  $10^7 + 100$  jsou pouze 2 prvočísla.

*Označme  $\Pi(N)$  počet prvočísel  $\leq N$ .*

*Existují konstanty  $c_1, c_2 > 0$  takové, že*

$$\frac{c_1}{\log N} \leq \frac{\Pi(N)}{N} \leq \frac{c_2}{\log N}$$

┌

*Poznámka*

Prvočísel je nekonečně mnoho, ale „řídnu“. Musí tedy existovat dlouhé úseky bez prvočísel.

┌

*Například*

Interval  $[n! + 2, \dots, n! + n]$  neobsahuje žádné prvočíslu. (Jelikož  $k$ -té číslo je dělitelné  $k + 1$ .)

└

## 2 Čísla racionální a iracionální

### Definice 2.1 (Racionální a iracionální číslo)

Číslo  $x \in \mathbb{R}$  je racionální, pokud ho lze zapsat ve tvaru  $x = \frac{p}{q}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ .

Číslo  $y \in \mathbb{R}$  je iracionální, pokud není racionální.

*Například* ( $\mathbb{Z}$  přednášky)

$\sqrt{2}$  je iracionální.

### Věta 2.1

*Nechť  $n \in \mathbb{N}$  je taková, že  $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$  (tedy  $n$  není druhou mocninou přirozeného čísla). Pak  $\sqrt{n}$  je iracionální.*

### Lemma 2.2

*Jsou-li  $p, q$  nesoudělná, pak  $p^2, q^2$  jsou také nesoudělná.*

┌

*Důkaz*

Dle základní věty aritmetiky každé přirozené číslo lze rozložit na součin prvočísel.

Rozložíme a dokážeme. □

└

┌ *Důkaz* (Sporem)

Předpokládejme, že  $\sqrt{n}$  je racionální, ale není to celé číslo. Pak  $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ , kde  $p, q$  jsou nesoudělná přirozená čísla ( $q \geq 2$ ). Umocníme:  $n = \frac{p^2}{q^2}$ .  $q|p$  lightning.  $\square$

### Věta 2.3 (Referát 1)

*Existují iracionální čísla  $a, b$  taková, že  $a^b$  je racionální. (Text: skripta z MA, str. 14-15.)*

┌ *Důkaz*

Buď  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  nebo  $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$   $\square$

*Příklad* (Teoretický příklad 1)

Nechť  $n \in \mathbb{N}$  a nechtě  $a_1, \dots, a_n$  jsou kladná reálná čísla, taková, že  $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 1$ .

Dokažte, že

$$(1 + a_1) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n.$$

*Příklad* (Teoretický příklad 2)

Nalezněte supremum a infimum množiny

$$\{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor : n \in \mathbb{N}\}$$

## 3 Mohutnost množin

### Definice 3.1

Množiny  $X, Y$  mají stejnou mohutnost, pokud existuje bijekce  $X$  na  $Y$ . Značíme  $X \approx Y$ .

Množina  $X$  má mohutnost menší nebo rovnu mohutnosti  $Y$ , pokud existuje prosté zobrazení  $X$  do  $Y$ . Značíme  $X \preceq Y$ .

Množina  $X$  má menší mohutnost než  $Y$ , pokud  $X \preceq Y$ , ale neplatí  $Y \preceq X$ . Značíme  $X \prec Y$ .

### Věta 3.1

(Cantor-Bernstein) Nechtě  $X$  a  $Y$  jsou množiny splňující  $X \preceq Y$  a  $Y \preceq X$ , pak  $X \approx Y$ .

### Lemma 3.2

Nechť  $\mathbb{X}$  je množina a  $H : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{X})$  je zobrazení splňující podmínku  $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) : \mathbb{A} \subset \mathbb{B} \implies H(\mathbb{A}) \subset H(\mathbb{B})$ . Pak existuje  $\mathbb{C} \subset \mathbb{X}$  takové, že  $H(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ .

┌

*Důkaz*

Položme  $\mathcal{C} = \{\mathbb{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) : \mathbb{A} \subset H(\mathbb{A})\}$ . Ukážeme, že  $\mathbb{C} = \bigcap \mathcal{C}$  je hledanou množinou.  $\mathbb{C} \subset \mathbb{X}$  je zřejmé,  $\mathbb{C} \subset H(\mathbb{C})$ : Pokud  $\mathbb{A} \in \mathcal{C}$ , pak  $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ , pak z vlastnosti zobrazení plyne  $H(\mathbb{A}) \subset H(\mathbb{C})$ . Tedy  $\mathbb{A} \subset H(\mathbb{A}) \subset H(\mathbb{C})$ . Z definice  $\mathbb{C}$  dostáváme  $\mathbb{C} \subset H(\mathbb{C})$ . Nakonec musíme ještě dokázat  $H(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ . Z  $\mathbb{C} \subset H(\mathbb{C})$  a z vlastnosti zobrazení  $H(\mathbb{C}) \subset H(H(\mathbb{C}))$  TODO!  $H(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ . □

└

*Důkaz*

Předpokládáme  $\mathbb{X} \preceq \mathbb{Y} \implies$  existuje prosté zobrazení  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  a  $\mathbb{Y} \preceq \mathbb{X} \implies$  existuje prosté zobrazení  $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ .

Definujeme  $H : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{X})$  předpisem  $H(\mathbb{A}) = \mathbb{X} \setminus g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{A}))$ . (Pozorování, jestliže  $f = g^{-1}$  je prosté a na, tak  $H$  je identita.) Nyní ověříme předpoklady Lemmatu.

Nechť  $\mathbb{U} \subset \mathbb{V} \subset \mathbb{X}$ . Pak  $f(\mathbb{U}) \subset f(\mathbb{V}) \implies \mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{V}) \subset \mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{U}) \implies g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{V})) \subset g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{U})) \implies \mathbb{X} \setminus g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{U})) \subset \mathbb{X} \setminus g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{V})) \implies H(\mathbb{U}) \subset H(\mathbb{V})$ .

Dle lemmatu existuje  $\mathbb{C} \subset \mathbb{X}$  takové, že  $H(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ . Pak  $\mathbb{C} = H(\mathbb{C}) = \mathbb{X} \setminus g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C}))$ ,  $g(\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C})) = \mathbb{X} \setminus \mathbb{C}$ . Tedy  $g|_{\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C})}$  je prosté zobrazení  $\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C})$  na  $\mathbb{X} \setminus \mathbb{C}$ , a tedy  $g^{-1}|_{\mathbb{X} \setminus \mathbb{C}}$  je prosté zobrazení  $\mathbb{X} \setminus \mathbb{C}$  na  $\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{C})$ . Navíc jistě  $f|_{\mathbb{C}}$  je prosté zobrazení  $\mathbb{C}$  na  $f(\mathbb{C})$ .

Definujeme  $h(a) = f(a), a \in \mathbb{C} | h(a) = g^{-1}(a), a \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{C}$ . Potom  $h$  je prosté zobrazení  $\mathbb{X}$  na  $\mathbb{Y}$ . □

## 4 Aritmetický, geometrický a harmonický průměr

### Definice 4.1

Nechť  $x_1, \dots, x_n > 0$ . Definujeme jejich

- aritmetický průměr jako  $A_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ .
- geometrický průměr jako  $G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$
- harmonický průměr jako  $H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$

### Věta 4.1 (AGH nerovnost)

$$A_n \geq G_n \geq H_n$$

┌ *Poznámka* (Pozorování)

Nerovnost  $G_n \geq H_n$  snadno plyne z  $A_n \geq G_n$ , stačí dosadit  $x_i = \frac{1}{y_i}$ . Stačí ukázat nerovnost  $A_n \geq G_n$ .

┌ *Důkaz* (1. Zpětnou indukcí)

Dokážeme pro mocniny 2. Následně dosadíme za jedno  $x$  geometrický průměr těch ostatních a budeme „indukovat“ zpět. □

┌ *Důkaz* (2. Indukcí)

Dokážeme pro 1.

Chceme odhadnout aritmetický průměr  $n + 1$  čísel. Použijeme indukční předpoklad pro  $n$  čísel, jejichž aritmetický průměr je stejný. Za tato čísla zvolíme  $x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n$ , kde  $x'_n$  je doplnění, aby byly shodné aritmetické průměry.  $x'_n$  vyjádříme. Upravíme, řekneme, že  $x_n$  a  $x_{n+1}$  jsme zvolili, že budou nejmenší a největší číslo. □

*Poznámka* (2. referát)

Existuje i aritmeticko-geometrický průměr a aritmeticko-harmonický průměr (je roven geometrickému).

*Příklad* (3. teoretický)

Najděte všechna celá čísla  $m$  splňující

$$(1 + m)^n \geq 1 + mn, \forall n \in \mathbb{N}$$

TODO? (Posloupnost  $(1 + \frac{1}{n})^n$  je rostoucí a shora omezená číslem 3, posloupnost  $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  je naopak klesající).

### **Definice 4.2** (Aritmeticko-geometrický průměr)

Nechť  $0 < b_1 < a_1$ .  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  a  $b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$ . Limita těchto posloupností se nazývá aritmeticko-geometrický průměr.

┌ *Důkaz* (Shodnost a existence limit)

$a_n \geq b_n$  z AG nerovnosti. Dokáže se monotónnost, z toho plyne existence limit. Pak z AL  $A = \frac{A+B}{2}$ , tedy  $A = B$ . □

### Definice 4.3 (Aritmeticko-harmonický průměr)

Definujeme a dokazujeme obdobně jako výše.

### Věta 4.2

*Aritmeticko-harmonický průměr je roven geometrickému.*

┌

*Důkaz*

Součin členů se stejným indexem je roven součinu prvních členů, z toho limita součinu je součin prvních členů, z toho vyplývá, že limita činitelů (jelikož je shodná) je odmocninou ze součinu prvních členů (geometrický průměr).  $\square$

└

### Věta 4.3 (Referáty)

*Z množiny hromadných bodů nelze „vykonvergovat“.*

*O množině hromadných bodů posloupnosti  $\{a_n\}$  splňující  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$ .*

*Příklad (Teoretický příklad 5)*

Nechť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je omezená posloupnost splňující

$$a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}.$$

Dokažte, že posloupnost  $\{a_n\}$  je konvergentní.

## 5 Odhady faktoriálu

### Tvrzení 5.1

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

┌

*Důkaz (První nerovnost)*

Označme  $\beta_n = \left(\frac{n}{3}\right)^n, n \in \mathbb{N}$ . Pak  $\left(\frac{n}{3}\right)^n = \beta_n = \beta_1 \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \dots \cdot \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}$ . Odhadneme  $\frac{\beta_k}{\beta_{k-1}} < k$ . Tedy  $\beta_n < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$ .  $\square$

└

┌

*Důkaz (Druhá nerovnost)*

AG.  $\square$

└

Horní odhad lze zlepšit:

### Tvrzení 5.2

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n, \quad n \geq 6.$$

┌

*Důkaz* (Indukcí)

$$n = 6 : 6! = 720 = 9 \cdot 80 < 9 \cdot 81 = 3^6.$$

$$(n+1)! = (n+1)n! < (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n \stackrel{?}{<} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}. \text{ Stačí ukázat } \frac{n^n}{2^n} < \frac{(n+1)^n}{2^{n+1}}, \text{ tedy}$$
$$2 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad \square$$

### Definice 5.1 (e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

### Tvrzení 5.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

┌

*Důkaz*

$$\text{Z AL: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e. \quad \square$$

### Tvrzení 5.4

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^{n+1}, \quad n \geq 2.$$

┌

*Důkaz*

1. nerovnost stejně jako výše s 3 místo e. Druhá nerovnost indukci. □

*Poznámka* (Stirlingova formule (odhad faktoriálu))

$$n! \approx \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

(Ve smyslu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = 1$ .)



**Definice 5.2** (Toeplitzova transformace)

$\{c_{n,k}\}_{n=1,k=1}^{\infty, n}$  reálná čísla splňující: a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,k} = 0$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ , b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_{n,k} = 1$ , c) existuje  $C > 0$  takové, že pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ :  $\sum_{k=1}^n |c_{n,k}| \leq C$ .

Nechť  $\{a_n\}$  je konvergentní posloupnost. Zdefinujeme novou posloupnost  $\{b_n\}$  vztahem

$$b_n = \sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k, n \in \mathbb{N}.$$

Pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

*Například* (Matice (pouze dolní trojúhelník) splňující podmínky TT)  
Jednotková matice.

Matice mající na  $i$ -tém řádku  $\frac{1}{i}$ , tedy  $c_{n,k} = \frac{1}{n}$ . Taková matice zřejmě splňuje podmínky TT a způsobí, že TT převede posloupnost na průměry prvních  $n$  členů. (Tj. pokud posloupnost konverguje, tak i průměry prvních  $n$  členů konvergují ke stejné limitě).

*Důkaz* (Toeplitzovy věty)

1. krok (konstantní posloupnost): Nechť  $a_n = a, n \in \mathbb{N}$ . Pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a \sum_{k=1}^n c_{n,k} \stackrel{\text{z b)}}{=} a$ .

2. krok: Nechť  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ . Lze psát  $a_n = (a_n - a) + a$ . Víme, že pro posloupnost  $a$  tvrzení platí, stačí tedy dokázat tvrzení pro posloupnost  $a_n - a$ , která má limitu 0.

3. krok (nulová limita): Nechť  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Pak  $\forall m > 1, n \geq m$  platí  $|b_n| = |b_n - 0| = |\sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k| \leq \sum_{k=1}^{m-1} |c_{n,k}| \cdot |a_k| + \sum_{k=m}^n |c_{n,k}| \cdot |a_k|$ .

Nechť  $\varepsilon > 0$ . Protože  $a_n \rightarrow 0$ , pak  $\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1, |a_n| < \frac{\varepsilon}{2C}$ , kde  $C$  je konstanta z c).  $\{a_n\}$  je konvergentní  $\implies \{a_n\}$  je omezená  $\implies |a_n| \leq D \forall n \in \mathbb{N}$ . Z podmínky a) plyne, že  $\exists n_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_2 \sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{2D}$ .

Nyní použijeme nerovnost výše s  $m = n_1$ , pro  $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ :

$$|b_n| \leq \sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| \cdot |a_k| + \sum_{k=n_1}^n |c_{n,k}| \cdot |a_k| \leq D \sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2C} \sum_{k=n_1}^n |c_{n,k}| < D \cdot \frac{\varepsilon}{2D} + \frac{\varepsilon}{2C} \cdot C = \varepsilon.$$

Tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . □

*Příklad*

Nechť  $\{a_n\}$  je posloupnost kladných čísel a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} = a$ .

Řešení

AGH nerovnost a věta o dvou strážnících (Výše jsme dokázali, že  $A$  konverguje k  $a$  a obdobně se dokáže, že převrácená hodnota  $H$  konverguje k  $\frac{1}{a}$ , tedy  $H$  konverguje také k  $a$ , tedy  $G$  konverguje k  $a$ ).

Důsledek

Nechť  $\{a_n\}$  je posloupnost kladných čísel, pro kterou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ . Dokažte, že potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ .

Řešení

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1},$$

což je geometrický průměr posloupnosti  $\frac{a_n}{a_{n-1}} \rightarrow a$  rozšířené o 1 člen  $a_1$ , tedy má dle předchozího případu limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ .

Příklad (Teoretický příklad 6)

Platí implikace v předchozím případě i opačně?

Příklad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Řešení

$$a_n = \frac{n^n}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Tedy  $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow e$  podle předchozího důsledku.

### Věta 5.5 (Stolzova)

Nechť  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  jsou posloupnosti splňující: a)  $y_n$  je rostoucí a  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ ; b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$ .

Pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$ .

┌  
Důkaz

1. Dokážeme pomocné tvrzení: Necht  $\{a_n\}, \{b_n\}$  jsou posloupnosti splňující: a)  $b_n > 0, n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + \dots + b_n) = \infty$ ; b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

$$\text{Pak } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{b_1 + \dots + b_n} = a.$$

Důkaz: Položme  $c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1 + \dots + b_n}$ . Ověříme předpoklady Toeplitzovy věty (předpoklad 1 díky podmínce 1, předpoklad 2 vychází automaticky z definice  $c_{n,k}$ , stejně tak 3, jelikož  $c_{n,k} \geq 0$ ). Pak limita výše je přesně výsledek TV.

2. krok: Předpokládejme, že  $y_1 > 0$ . Definujme  $a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, b_n = y_n - y_{n-1}, n \geq 2, a_1 = \frac{x_1}{y_1}, b_1 = y_1$ . Následuje ověření předpokladů 1. kroku.  $\square$

└  
Příklad

Necht  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a \in \mathbb{R}$ . Spočtete  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ .

┌  
Řešení

Stolzova věta pro  $x_n = a_n, y_n = n$ . Výsledek  $a$ .  
└

Příklad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}, k \in \mathbb{N}$$

┌  
Řešení

$$x_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k, y_n = n^{k+1}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

└  
Příklad (Teoretický příklad 7:)

Pro dané  $k \in \mathbb{N}$  spočtete limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1} \right).$$

Příklad

Necht  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Spočtete

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right).$$

┌  
Řešení

Stolzova věta s  $x_n = a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ ,  $y_n = \sqrt{n}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})} = a \cdot 2 = 2a.$$

└

┌  
Poznámka (Speciálně  $a = 1$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2$$

└

Příklad

Nechť  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Spočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \left( \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n} \right).$$

┌  
Řešení

Stolzova věta s  $x_n = \frac{a_1}{1} + \dots + \frac{a_n}{n}$ ,  $y_n = \log n$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n}}{\log n - \log(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\log \frac{n}{n-1})} = a \cdot 1 = a$$

└

┌  
Poznámka (Speciálně)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = 1$$

└

Příklad

Nechť  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Uvažujme posloupnost  $a_n = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Potom  $H(\{a_n\}) = [0, 1]$ .

### Lemma 5.6

Nechť  $m \in \mathbb{N}$ . Pak existují  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ , pro která platí  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{mq}$ .

┌

*Důkaz*

Uvažujme  $\{a_n\}_{n=0}^m$ . Pak  $a_n \in [0, 1)$  a posloupnost má  $m + 1$  prvků. Lze psát

$$[0, 1) = \left[0, \frac{1}{m}\right) \cup \left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{m-1}{m}, 1\right)$$

Tedy jeden z těchto intervalů obsahuje z dirichletova principu alespoň 2 členy posloupnosti  $\{a_n\}_{n=0}^m$ . Nechť to jsou  $a_i, a_j, i < j$ . Pak  $|a_i - a_j| < \frac{1}{m}$ . Položme  $p = \lfloor \alpha j \rfloor - \lfloor \alpha i \rfloor$ ,  $q = j - i$ .  $|\alpha q - p| = |\alpha j - \alpha i - \lfloor \alpha j \rfloor + \lfloor \alpha i \rfloor| = |a_i - a_j| < \frac{1}{m}$ , tedy  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{mq}$ .  $\square$

└

┌  
*Důkaz*

Nechť  $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$ ,  $x \in (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ . Najdeme  $m \in \mathbb{N}$  takové, že  $m > \frac{1}{\varepsilon}$ , a k němu  $p, q$  z lemmatu. Jelikož  $\alpha \notin Q$ , platí  $p\alpha - q \neq 0$ . Najdeme  $n_0 \in \mathbb{Z}$  splňující  $n_0(q\alpha - p) \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ . Pak  $n_0 \neq 0$ . Dále  $\lfloor n_0(\alpha q - p) \rfloor = 0$ , a tedy  $\lfloor n_0\alpha q - n_0p \rfloor = \lfloor n_0\alpha q \rfloor - n_0p = 0$ .

Je-li  $n_0 > 0$  zvolme  $n = n_0q$ . Pak  $n \in \mathbb{N}$  a  $a_n = \alpha n_0q - \lfloor \alpha n_0q \rfloor > \alpha n_0q - n_0p \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ . Indukcí lze zkonstruovat podposloupnost  $a_{n_k}$  takovou, že  $a_{n_k} \rightarrow x$ , tedy  $x \in H(\{a_n\})$ . Odtud  $(0, 1) \subseteq H(\{a_n\})$ .

Z množiny hromadných bodů nelze vykonvergovat (referát), tedy  $[0, 1] = H$  (body  $< 0$  nebo  $> 1$  hromadnými body nemohou být, protože  $a_n \in [0, 1], \forall n$ ).  $\square$

└

*Příklad* (Teoretický příklad 8)

Nechť  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost reálných čísel s vlastností, že pro každé  $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$  platí, že  $\{a_{nk}\}_{n=1}^\infty$  je konvergentní. Plyne odtud, že  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  musí být konvergentní?

*Poznámka* (Připomeňme)

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ , značíme někdy  $\overline{\lim} a_n$ , je největší hromadná hodnota.

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ , značíme někdy  $\underline{\lim} a_n$ , je nejmenší hromadná hodnota.

### Tvrzení 5.7 (Trojúhelníková nerovnost)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

┌  
*Důkaz*

└ Přímo z definice dokážeme vlastnosti suprem a infim.

□