

1 Úvod

Poznámka (Informační zdroje)

Stránky, diskuze na google docs, Moodle.

Poznámka (Proč algebra)

Diofantické rovnice (Fermatovy věty, Gaussova celá čísla), kořeny polynomů (Grupy polynomů), geometrie (nekonstruovatelnost), studium abstraktních struktur běžných objektů.

2 Obory

Definice 2.1 (Okruh)

Okruh R je pětice $(R, +, \cdot, -, 0)$, kde $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$, $- : R \rightarrow R$, $0 \in R$ tak, že $(\forall a, b, c \in R)$:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$a + b = b + a, a + 0 = a, a + (-a) = 0,$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot b.$$

Definice 2.2 (Komutativní okruh)

Komutativní okruh je okruh, pro který platí $a \cdot b = b \cdot a$.

Definice 2.3 (Okruh s jednotkou)

Okruh s jednotkou je okruh, který má prvek $1 \in R : a \cdot 1 = a$.

Definice 2.4 (Obor (integrality))

Obor (integrality) je komutativní okruh s jednotkou tak, že $0 \neq 1 \wedge (a \neq 0 \wedge b \neq 0 \implies a \cdot b \neq 0)$.

Definice 2.5 (Těleso)

Těleso je komutativní okruh s 1, že $0 \neq 1$ a $\forall 0 \neq a \in R \exists b \in R : a \cdot b = 1$.

Definice 2.6 (Podokruh)

Podokruh S okruhu R je $(S, +|_S, \cdot|_S, -|_S, 0)$, kde $0 \in S$ a $\forall a, b \in S : a + b \in S \wedge a \cdot b \in S \wedge -a \in S$. Značíme $R \leq S$.

Definice 2.7 (Podobor)

S je podobor oboru R tehdy, když $S \leq R$ a S je obor.

Definice 2.8 (Podtěleso)

S je podtěleso tělesa R tehdy, když $S \leq R$ a S je těleso.

Definice 2.9 (Gaussova čísla)

$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$ jsou tzv. Gaussova celá čísla.

$\mathbb{Q}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\}$ jsou tzv. Gaussova racionální čísla..

2.1 Základní vlastnosti

Tvrzení 2.1

Mějme množinu X s asociativní (tj. $(a * b) * c = a * (b * c)$) operací $*$: $X \times X \rightarrow X$. Pak hodnota výrazu $a_1 * a_2 * a_3 * \dots * a_n$ nezávisí na uzávorkování.

┌
Důkaz
└ Indukcí.

□

Tvrzení 2.2 (Základní vlastnosti oborů)

Buď R okruh a $a, b, c \in R$.

$$1) a + c = b + c \implies a = b,$$

$$2) a \cdot 0 = 0,$$

$$3) -(-a) = a, -(a + b) = -a + (-b),$$

$$4) -(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b), (-a) \cdot (-b) = a \cdot b,$$

$$5) \text{Je-li } R \text{ obor, pak } a \cdot c = b \cdot c \wedge c \neq 0 \implies a = b.$$

┌
Důkaz

$$1) (a + c) + (-c) = (b + c) + (-c) \implies a + 0 = b + 0 \implies a = b,$$

$$2) 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \implies 0 = a \cdot 0.$$

└

□

Tvrzení 2.3 (Každé těleso je obor)

Z existence a^{-a} vyplývá $a \neq 0, b \neq 0 \implies ab \neq 0$.

┌ *Důkaz (Sporem)*

$a \neq 0, b \neq 0, ab = 0 \implies b = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1} \cdot (ab) = a^{-1} \cdot 0$ a podle předchozího tvrzení (část 2) $b = 0 \nmid$. □

└

Tvrzení 2.4

Každý konečný obor je těleso.

┌ *Důkaz*

Viz skriptu. □

└

Definice 2.10

Nechť R je okruh s jednotkou 1. Charakteristika R je nejmenší přirozené číslo n tak, že $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-krát}}$, pokud takové n neexistuje, říkáme, že charakteristika je 0 (případně ∞).

Prvek $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-krát}}$ značíme n , obdobně $\underbrace{-1 - 1 - \dots - 1}_{n\text{-krát}}$ značíme $-n$.

Tvrzení 2.5

Každý obor má charakteristiku 0 nebo p .

┌ *Důkaz*

Pro 1 je to cvičení. V případě, že charakteristika je $n = k \cdot l$, $k, l \neq 1$, pak $0 = k \cdot l$. Jsme v oboru, tedy $k = 0$ nebo $l = 0$. Spor s minimalitou n . □

└

2.2 Izomorfismus

Definice 2.11 (Homomorfismus)

Nechť R, S jsou okruhy. Zobrazení $\varphi : R \rightarrow S$ je homomorfismus okruhů, pokud $\forall a, b \in R$:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \wedge \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Je-li homomorfismus φ bijekce, nazývá se izomorfismus.

Poznámka

Inverzní zobrazení k izomorfismu je izomorfismus.

Definice 2.12

Okruhy R, S jsou izomorfní, pokud existuje izomorfismus $\varphi : R \rightarrow S$. Značíme $R \simeq S$.

Například

Tzv. prvookruh (tj. všechny prvky tvaru $1 + 1 + \dots + 1$ nějakého okruhu s jedničkou) je izomorfní \mathbb{Z}_n resp. (v tomto případě musíme zahrnout i $-1 - 1 - \dots - 1$) \mathbb{Z} .

2.3 Podílové těleso

Definice 2.13 (Multiplikativní množina)

Nechť R je obor. Pak $M \subseteq R$ je multiplikativní množina, pokud $0 \notin M, 1 \in M$ a $a, b \in M \implies a \cdot b \in M$.

┌

Například

Nejdůležitější MM je $M = R \setminus \{0\}$.

Definice 2.14 (Podílové těleso)

Nechť R je obor a M multiplikativní množina. Definujeme relaci \sim na $R \times M$:

$$(a, b) \sim (c, d) \equiv ad = bc.$$

Blok $[(a, b)]_{\sim}$ nazýváme zlomek a značíme $\frac{a}{b}$.

Na $Q = \{\frac{a}{b} | a \in R, b \in M\}$ definujeme operace

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}, \quad 0 = \frac{0}{1}, \quad 1 = \frac{1}{1}.$$

Tedy Q je okruh s jednotkou. $(Q, +, -, \cdot, 0, 1)$ se nazývá lokalizace oboru R v MM M . Pokud $M = R \setminus \{0\}$, pak se nazývá podílové těleso.

Tvrzení 2.6

Máme R, N, Q z předchozí definice. 1) Q je obor. 2) $\{\frac{a}{1} | a \in R\}$ je podobor Q , který je izomorfní s R . 3) Je-li $M = R \setminus \{0\}$, pak Q je těleso.

┌

Důkaz

1) Ověříme axiomy. Triviální. Důležitý je hlavně součin ne0 prvků.

2) Ověříme uzavřenost a obsah jedničky. Ověříme, že zjevné zobrazení je izomorfismus.

3) Ověříme axiomy. Na tři řádky.

└

□

3 Polynomy

3.1 Obory polynomů

Poznámka (Značení)

V celé sekci Polynomů je R komutativní okruh s jednotkou.

Definice 3.1 (Polynom)

Polynom v proměnné x nad okruhem R je výraz tvaru

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n,$$

kde $n \geq 0$, $a_1, \dots, a_n \in R$ a $a_n \neq 0$ vyjma $n = 0$. a_1, \dots, a_n jsou koeficienty, x proměnná. Navíc se dodefinovává $a_m = 0 \forall m > n$.

Číslo $n = \deg f$ je stupeň polynomu f . $\deg 0 = -1$. a_n se nazývá vedoucí koeficient a a_0 absolutní člen.

f je monický, pokud $a_n = 1$. Množinu všech polynomů značíme $R[x]$.

Definice 3.2 (Operace na $R[x]$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m a_i x^i + \sum_{i=0}^n b_i x^i &= \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i; \quad - \sum_{i=0}^m a_i x^i = \sum_{i=0}^m -a_i x^i; \\ \left(\sum_{i=0}^m a_i x^i \right) \left(\sum_{i=0}^n b_i x^i \right) &= \sum_{i=0}^{m+n} \sum_{j+k=i, j \geq 0} (a_j \cdot b_k) x^i \end{aligned}$$

Tvrzení 3.1

$R[x]$ je komutativní okruh s jednotkou. Navíc je-li R obor, pak i $R[x]$ je obor $\wedge \deg(fg) = \deg f + \deg g \forall f, g \in R[x], f \neq 0 \neq g$.

┌

Důkaz

└

Jednoduché, ve skriptech. Druhá část přes vedoucí koeficienty (jsou nenulové). □

Definice 3.3 (Polynom více proměnných)

Induktivní definici: Polynom v proměnných x_1, x_2, \dots, x_m nad okruhem R je polynom v proměnné x_m nad okruhem $R[x_1, \dots, x_{m-1}]$.

Značíme $R[x_1, \dots, x_m] = (R[x_1, \dots, x_{m-1}])[x_m]$.

Každý $f \in R[x_1, \dots, x_m]$ jde jednoznačně napsat v distribuovaném tvaru (je potřeba

dokázat, ale tím pádem nezáleží na pořadí proměnných):

$$\sum_{k_1, \dots, k_m}^n a_{k_1, \dots, k_m} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}.$$

3.2 Hodnota polynomu

Definice 3.4

$R \leq S$ obory. $f = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n \in R[x]$, $u \in S$. Hodnota polynomu f po dosazení u je definována:

$$f(u) := a_0 + a_1 \cdot u + \dots + a_n \cdot u^n \in S.$$

(Operace jsou v oboru S .)

Zobrazení $S \rightarrow S$, $u \mapsto f(u)$ nazýváme polynomiální zobrazení dané polynomem f .

3.3 Dělení polynomu se zbytkem

Definice 3.5

$f, g \in R[x]$. g dělí f , zapisujeme $g|f$, $\equiv \exists h \in R[x]$ tak, že $f = gh$.

Je-li R obor a $g|f \neq 0 \implies \deg g \leq \deg f$ z tvrzení výše.

Tvrzení 3.2 (Dělení polynomů se zbytkem)

Nechť R je obor, Q podílové těleso. $f, g \in R[x]$, $g \neq 0$. Pak existuje právě jedna dvojice $q, r \in Q[x]$:

$$f = gq + r \wedge \deg r < \deg g.$$

Je-li navíc g monický, pak $q, r \in R$.

$f \operatorname{div} g := q$ a $f \operatorname{mod} g := r$.

┌

Důkaz $q_0 = 0, r_0 = f$. Induktivně ($l(f) :=$ vedoucí koeficient polynomu f):

$$q_{i+1} = q_i + \frac{l(r_i)}{l(g)} x^{\deg r_i - \deg g}, \quad r_{i+1} = r_i - \frac{l(r_i)}{l(g)} x^{\deg r_i - \deg g} \cdot g.$$

Vidíme, že stupeň r_i se snižuje, a když $\deg r_i < \deg g$, tak skončíme a $r = r_i, q = q_i$.

Jednoznačnost:

$$f = gq + r = g\tilde{q} + \tilde{r} \implies g(q - \tilde{q}) = \tilde{r} - r \implies g|\tilde{r} - r \implies \tilde{r} - r = 0.$$

└

□

3.4 Kořeny a dělitelnost

Definice 3.6

Ať $R \leq S$ jsou obory, $f \in R[x]$, $a \in S$. Pak a je kořen $f \equiv f(a) = 0$.

Tvrzení 3.3

Buď R obor, $f \in R[x]$, $a \in R$. a je kořen $f \Leftrightarrow x - a | f$.

┌

Důkaz

$$\implies : f = (x - a) \cdot g \text{ pro nějaké } g \in R[x] \implies f(a) = (a - a) \cdot g(a) = 0.$$

Buď $q, r \in R[x]$ podíl a zbytek při dělení f monickým polynomem $x - a$. $f = (x - a) \cdot q + r$, $\deg r < \deg(x - a) = 1 \implies r$ je konstantní polynom. Dosadíme a :

$$0 = f(a) = (a - a)q(a) + r(a) = r(a).$$

$$r \text{ je konstantní} \implies r = 0. f = (x - a) \cdot q + 0 \implies x - a | f.$$

└

□

Pozorování

$$f \bmod x - a = f(a)$$

Věta 3.4 (Počet kořenů)

 R obor, $0 \neq f \in R[x]$. Pak f má nejvýše $\deg f$ kořenů v R .

┌

*Důkaz*Indukcí dělením $x -$ kořen.

└

□

Definice 3.7 (Vícenásobný kořen)

Ať $f \in R[x]$, $a \in R$. Pak a je n -násobný kořen $f \equiv (x - a)^n | f$ a $(x - a)^{n-1} \nmid f$.

4 Číselné obory

4.1 Okruhová a tělesová rozšíření

Definice 4.1

Nechť $R \leq S$ jsou komutativní okruhy, $a_1, \dots, a_n \in S$. Definujeme $R[a_1, \dots, a_n]$ jako nejmenší podokruh okruhu S , který obsahuje R a a_1, \dots, a_n . Ten nazveme okruhové rozšíření R o prvky a_1, \dots, a_n .

Nechť $R \leq S$ jsou tělesa, $a_1, \dots, a_n \in S$. Definujeme $R(a_1, \dots, a_n)$ jako nejmenší podtěleso tělesa S , které obsahuje R a a_1, \dots, a_n . To nazveme tělesové rozšíření R o prvky a_1, \dots, a_n .

Tvrzení 4.1

Mějme $R \leq S$ komutativní okruhy s 1, $a \in R$. Pak $R[a] = \{f(a) | f \in R[x]\}$. Jsou-li R, S navíc tělesa, pak $R(a) = \left\{ \frac{f(a)}{g(a)} | f, g \in R[x], g(a) \neq 0 \right\}$.

┌
Důkaz

└ Dokážeme, že je to podokruh, že obsahuje R i a a že je nejmenší takový. □

Pozorování

Ať $T \leq S$ jsou tělesa, potom $T[a] \subseteq T(a)$.

Ale např. $\mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}(i)$.

Tvrzení 4.2

Nechť $T \leq S$ jsou tělesa, a není kořenem žádného nenulového polynomu z $T[x]$. Pak $T[a] \neq T(a)$.

┌
Důkaz

└ Podle předchozího tvrzení $T[a] = \{f(a) | f \in T[x]\}$. Kdyby $T[a] = T(a)$, pak $T[a]$ je těleso, tedy $a^{-1} \in T[a] \implies a^{-1} = f(a)$ pro nějaký $f \in T[x]$, tedy $a \cdot f(a) - 1 = 0$. Tedy a je kořenem $x \cdot f - 1$. \nmid □

4.2 Algebraická a transcendentní čísla

Definice 4.2

$a \in \mathbb{C}$ je algebraické, pokud je kořenem nějakého nenulového polynomu $f \in \mathbb{Z}[x]$.

Jinak a je transcendentní.

Poznámka (První důkaz transcendentního čísla)

Luvil? $\sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i!}$.

Další čísla (19. stol): π, e .

Cantor: náhodné reálné číslo je transcendentní (tj. algebraická čísla jsou spočetná / mají míru 0).

Tvrzení 4.3

Množina algebraických čísel je spočetná.

┌

Důkaz

Indexem polynomu $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x], f \neq 0$ nazvěme číslo $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| + n \in \mathbb{N}$. Indexů existuje jen konečně mnoho daného indexu (díky započítání stupně do indexu). Všechny polynomy seřadím podle rostoucího indexu. Nyní už je zřejmé $\mathbb{Z}[x]$ spočetná. Navíc každý polynom má konečně kořenů, tedy, tedy i kořenů je spočetně mnoho. □

└

Tvrzení 4.4

Množina reálných čísel je nespočetná.

5 Elementární teorie čísel

5.1 Dělitelnost a základní věta aritmetiky

Definice 5.1 (Dělitelnost v celých číslech)

Ať $a, b \in \mathbb{Z}$, b dělí a , značíme $b|a$, pokud $\exists c \in \mathbb{Z} : a = bc$.

± 1 a $\pm a$ se nazývají nevlastní dělitelé, ostatní jsou vlastní.

Tvrzení 5.1

Mějme $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Pak $\exists! q, r \in \mathbb{Z} : a = qb + r, 0 \leq r < |b|$. Značíme $a \div b = q$ a $a \bmod b = r$. Navíc $b|a \Leftrightarrow a \bmod b = 0$

Definice 5.2 (Prvočíslo a složené číslo)

Prvočíslo je $p \in \mathbb{Z}, p > 1$, které má pouze nevlastní dělitele. Ostatní přirozená čísla > 1 jsou složená.

Věta 5.2 (Základní věta aritmetiky)

$\forall a \in \mathbb{Z}, a > 1$ existují po dvou různá prvočísla p_1, \dots, p_n a $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ tak, že $a = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$. Tento rozklad je až na pořadí jednoznačný.

┌

Důkaz

Později.

└

□

5.2 NSD

Definice 5.3 (NSD, NSN)

Největší společný dělitel $a, b \in \mathbb{Z}$ je největší $c \in \mathbb{N}$ takové, že $c|a, c|b$. Značíme ho $\text{NSD}(a, b)$ (neexistuje pro $a = b = 0$).

Nejmenší společný násobek $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je nejmenší $c \in \mathbb{N}$ tak, že $a|c$ a $b|c$. Značíme ho $\text{NSN}(a, b)$.

Poznámka

Základní věta aritmetiky $\implies a \cdot b = \text{NSD}(a, b) \cdot \text{NSN}(a, b)$.

Rychlý algoritmus na hledání NSN je Euklidův algoritmus.

Tvrzení 5.3 (Bézoutova rovnost)

$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ nebo $b \neq 0, \exists u, v \in \mathbb{Z}$ (Bézoutovy koeficienty) tak, že $a \cdot u + b \cdot v = \text{NSD}(a, b)$.

┌

Důkaz

Rozšířený Euklidův algoritmus.

└

□

Lemma 5.4

Ať p je prvočíslo, $a, b \in \mathbb{Z}$. Pak $p|a \cdot b \implies p|a \vee p|b$.

┌

Poznámka

V obecném oboru neplatí. Např. v $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ $2|(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1) = 4$, ale $2 \nmid \sqrt{5} \pm 1$

└

┌ *Důkaz*

BÚNO $p \nmid a$, tedy chceme, aby $p \mid b$. p je prvočíslo, tudíž nemá vlastní dělitele \implies $\text{NSD}(p, a) =$ buď p (to by ale $p \mid a$), nebo 1. Dle tvrzení o Bézoutově rovnosti $\exists u, v \in \mathbb{Z} : pu + av = 1$. Vynásobíme b : $pbu + abv = b$. Ale $p \mid ab$, takže $p \mid pbu + abv = b$. \square

Lemma 5.5

p prvočíslo, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. $p \mid a_1 \cdot \dots \cdot a_n \implies \exists i : p \mid a_i$.

┌ *Důkaz*

Indukcí z předchozího tvrzení. \square

Důkaz (Základní věta aritmetiky)

Existence: pro spor ať a je nejmenší přirozené číslo, které nemá rozklad na součin. Buď je a prvočíslo, ale pak má rozklad $a = a^1$. Nebo je a složené, tedy $a = b \cdot c$, $1 < b, c < a$, ale a bylo nejmenší číslo, které nemá rozklad, tedy b i c mají rozklad. Ale pak součin těchto rozkladů je a .

Jednoznačnost: a nejmenší přirozené číslo, které má 2 rozklady: $a = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m} = q_1^{l_1} \cdot \dots \cdot q_n^{l_n}$. Pak $p_1 \mid q_1^{l_1} \cdot \dots \cdot q_n^{l_n}$. Podle předchozího lemmatu $\exists i : p_1 \mid q_i$. Jsou to prvočísla, tedy $p_1 = q_i$. Potom $p_1^{k_1-1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m} = q_1^{l_1-1} \cdot \dots \cdot q_i^{k_i-1} \cdot \dots \cdot q_n^{l_n}$ jsou dva rozklady čísla $< a$. ζ . \square

5.3 Kongruence

Poznámka (Historie)

Symbol \equiv zavedl v roce 1801 Gauss.

Definice 5.4

$a, b, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$. a je kongruentní s b modulo m ($a \equiv b \pmod{m}$), pokud $m \mid a - b$. (Ekvivalentně a, b dávají stejný zbytek po dělení m .)

Pozorování

Být kongruentní \pmod{m} je ekvivalence.

Tvrzení 5.6 (Vlastnosti kongruence)

$a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$. $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$.

$a+c \equiv b+d \pmod{m}, \quad a-c \equiv b-d \pmod{m}, \quad a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}, \quad a^k \equiv b^k \pmod{m}, k \in \mathbb{N}.$

$c \neq 0 \implies a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}, \quad \text{NSD}(c, m) = 1 \implies a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$

┌
Důkaz

Z definice rozepsáním.

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \exists q : a - b = mq \Leftrightarrow ac - bc = mcq \Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}.$$

$$cu + mv = 1, cu = 1 - mv \implies (ac \equiv bc \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv a(1 - mv) \equiv auc \equiv buc \equiv b(1 - mv) \equiv b \pmod{m})$$

└

□

5.4 Eulerova věta a RSA

Definice 5.5 (Eulerova funkce)

Eulerova funkce $\varphi(n)$ značí (pro $n \in \mathbb{N}$) počet $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ nesoudělných s n , čili $\text{NSD}(k, n) = 1$.

Tvrzení 5.7

$n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$ prvočíselný rozklad, $n > 1$. Pak $\varphi(n) = p_1^{k_1-1}(p_1 - 1) \cdot \dots \cdot p_m^{k_m-1}(p_m - 1)$.

┌
Důkaz

└
Příště.

□

Věta 5.8 (Eulerova)

Pokud a, m jsou nesoudělná přirozená čísla, pak $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Speciálním případem je Malá Fermatova věta: p prvočíslo, $p \nmid a \implies a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

┌
Důkaz

Φ_m nechť značí množinu $\{k \in [m] \mid \text{NSD}(k, m) = 1\}$. $\varphi(m) = |\Phi_m|$.

Lemma: a, m nesoudělná přirozená čísla, $m \neq 1$. Definujeme zobrazení $f_a : \Phi_m \rightarrow \Phi_m$, $k \mapsto ka \pmod{m}$. Pak f_a je dobře definované a je to bijekce.

Důkaz k, a nesoudělná s $m \implies k \cdot a$ nesoudělné s $m \implies k \cdot a \pmod{m}$ nesoudělné s $m \implies k \cdot a \pmod{m} \in \Phi_m$. $f_a(k) = f_a(l) \implies k \cdot a \equiv l \cdot a \pmod{m} \implies k \equiv l \pmod{m}$ (a je nesoudělné s m , tedy můžeme použít tvrzení výše) $\implies k = l$. f_a je prosté a na konečné množině, tedy je bijekce.

$$\prod_{b \in \Phi_m} b = \prod_{b \in \Phi_m} f_a(b) = \prod_{b \in \Phi_m} (ab \pmod{m}) \equiv a^{\varphi(m)} \prod_{b \in \Phi_m} b$$

$c = \prod_{b \in \Phi_m} b$, $c \equiv a^{\varphi(m)} c \pmod{m}$ a c je nesoudělné s m , tedy dle tvrzení výše je $1 \equiv a^{\varphi(m)} \pmod{m}$.

└

□

Poznámka

Lemma z posledního důkazu nám říká, že každý prvek z Φ_m má inverzi v okruhu \mathbb{Z}_m .

Ten můžeme najít buď přes Eulerovu větu, nebo přes Bézoutovu větu. (Druhý způsob je zpravidla rychlejší.)

Poznámka (RSA (Rivest Shamir Adleman))

Šifrovací algoritmus založený na Eulerově větě.

5.5 Čínská zbytková věta

Poznámka

Špatně: Uvedená v knize umění války (počítání vojáků).

Správně: vymyslel ji čínský matematik, který se jmenoval stejně jako legendární generál, autor knihy výše.

Věta 5.9 (Čínská zbytková)

Nechť $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ po dvou nesoudělná čísla. Označíme $M = m_1 \dots m_n$. Ať $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{Z}$. Pak $\exists! x \in [M-1]_0$ tak, že $x \equiv u_1 \pmod{m_1}, \dots, x \equiv u_n \pmod{m_n}$.

┌

Důkaz

Jednoznačnost: Ať $x, y \in [M-1]_0$, pro které platí všechny kongruence. Potom $\forall i : m_i | x - y$, tedy $M | x - y$. Ale $|x - y| < M$, tudíž $x - y = 0$.

Existence: $f : [M-1]_0 \rightarrow [m_1-1]_0 \times \dots \times [m_n-1]_0, x \mapsto (x \pmod{m_1}, \dots, x \pmod{m_n})$. Korektní definice zobrazení (mimoходом je to dokonce isomorfismus okruhů). f je prosté (díky jednoznačnosti). Množiny jsou stejně velké, tedy je to dokonce bijekce, a proto existuje inverze, tudíž prvek (u_1, \dots, u_n) musí mít obraz při zobrazení f^{-1} , který z definice splňuje vlastnosti hledaného prvku. \square

$\frac{a}{}$

$$[M-1]_0 = \{0, 1, \dots, M-1\}$$

└

Důkaz (Vzorec pro eulerovu formuli)

1) $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$. 2) a, b nesoudělná $\implies \varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$. Následně se vzorec dokáže aplikováním hodněkrát 2 na rozklad a jedničky nakonec.

1) Počet čísel soudělných s p^k z množiny $[p^k]$ je p^{k-1} , tedy počet nesoudělných je $p^k - p^{k-1}$.

2) Funkce z důkazu čínské zbytkové věty je bijekce. Uvažujme zúžení f na $\Phi_{a \cdot b}$. Chceme:

obraz zúžení je $\Phi_a \times \Phi_b$, tedy $\varphi(ab) = |\Phi_{ab}| = |\Phi_a \times \Phi_b| = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$. Důkaz:

a) f zobrazí Φ do $\Phi_a \times \Phi_b$, čili, že $\text{NSD}(x, a \cdot b) = 1$ implikuje $\text{NSD}(x \bmod a, a) = 1, \text{NSD}(x \bmod b, b) = 1$. b) f zobrazí $\Phi_{a,b}$ na $\Phi_a \times \Phi_b$, čili pokud $\text{NSD}(u, a) = 1, \text{NSD}(v, b) = 1$, pak to jediné x , které se zobrazí na (u, v) , leží v $\Phi_{a,b}$.

$\text{NSD}(x, ab) = 1 \Leftrightarrow \text{NSD}(x, a) = 1 \wedge \text{NSD}(x, b) = 1 \Leftrightarrow \text{NSD}(x \bmod a, a) = 1 \wedge \text{NSD}(x \bmod b, b) = 1$.

a) je zleva doprava a b) je zprava doleva. □

6 Abstraktní dělitelnost

6.1 Dělitelnost a asociovanost

Definice 6.1 (Dělitelnost, asociovanost, inverz)

R obor, $a, b \in R$. b dělí a v R , značíme $b|a$, pokud existuje $c \in R$ tak, že $a = b \cdot c$.

a, b jsou asociované v R , pokud $a|b, b|a$. Značíme $a||b$.

$a \in R$ je invertibilní, pokud existuje $b \in R$ tak, že $a \cdot b = 1$ (značíme $b = a^{-1}$).

Pozorování

a je invertibilní $\Leftrightarrow a||1$.

Relace $|$ je reflexivní \wedge tranzitivní.

Tvrzení 6.1

R obor, $a, b \in R$. Pak $a||b \Leftrightarrow \exists$ invertibilní prvek $q \in R$ tak, že $a = bq$.

┌
Důkaz

$\Leftarrow: (a = bq \Rightarrow b|a) \wedge (b = aq^{-1} \Rightarrow a|b)$.

$\Rightarrow: a = 0 \Rightarrow b = 0$. Ať $a \neq 0, (b|a \Rightarrow a = bu) \wedge (a|b \Rightarrow b = av) \Rightarrow a = bu = auv$. Můžeme vykrátit $a \neq 0$, tj. $1 = uv$, a u, v jsou tedy invertibilní. □

Definice 6.2 (Kongruence)

$a, b, m \in R: a \equiv b \bmod m$, pokud $m|a - b$.

Pozorování

Je to ekvivalence, zachovává se přičtením a odečtením, ale nemusí platit krácení.

6.2 Kvadratická rozšíření \mathbb{Z}

Definice 6.3 (Kvadratické rozšíření \mathbb{Z})

Kvadratické rozšíření \mathbb{Z} je $\mathbb{Z}[\sqrt{s}] = \{a + b\sqrt{s} | a, b \in \mathbb{Z}\}$, kde $s \in \mathbb{Z}$, s není druhá mocnina celého čísla.

┌

Důkaz (Tvar $\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$)

└

Dokáže se uzavřenost.

□

Definice 6.4

Norma na oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$ je zobrazení $\ni: \mathbb{Z}[\sqrt{s}] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a + b\sqrt{s} \mapsto |a^2 - b^2s|$.

Tvrzení 6.2

$\forall u, v \in \mathbb{Z}[\sqrt{s}]$ platí:

1. $\ni(u \cdot v) = \ni(u) \cdot \ni(v)$,
2. $\ni(u) = 1 \Leftrightarrow u$ je invertovatelné.
3. Pokud $u|v$ a $v|u$, pak $\ni(u) | \ni(v)$ (víme z 1)) a $\ni(u) \neq \ni(v)$.

┌

Důkaz

1) vezmu a ověřím. Nebo využiji, že $\ni(u) = |u \cdot u'|$, kde $u' = a - b\sqrt{s}$, $u = a + b\sqrt{s}$. Zjistíme, že $(u \cdot v)' = u' \cdot v'$. Potom $|u \cdot v \cdot (u \cdot v)'| = |u \cdot u'| \cdot |v \cdot v'|$.

2) \Leftarrow : $u \cdot u^{-1} = 1 \Rightarrow \ni(u \cdot u^{-1}) = \ni(1) = 1$. A z 1) už plyne $\ni(u) = 1 \Rightarrow \ni(u) = 1 \Rightarrow u \cdot u' = 1 \Rightarrow u'$ je hledaná inverze.

3) $u = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow v|u$. Ať tedy $v = uc$ pro $c \in \mathbb{Z}[\sqrt{s}]$. Ať $\ni(u) = \ni(v) = \ni(u \cdot c) = \ni(u) \cdot \ni(c) \Rightarrow \ni(c) = 1 \Rightarrow c$ je invert $\Rightarrow v|u$, čili $v|u$ spor. □

Pozor

Norma nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost!

Tvrzení 6.3 (Dělení Gaussových čísel se zbytkem)

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i], \beta \neq 0 \exists \gamma, \delta \in \mathbb{Z}[i] : \alpha = \beta \cdot \gamma + \delta \wedge \ni(\delta) < \ni(\beta).$$

┌ *Důkaz*

$\mathbb{Z}[i] \subseteq \mathbb{C}$, tudíž berme $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{C}$. Zvolme $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ jako nejbližší hodnotu k $\frac{\alpha}{\beta}$. Položme $\delta = \alpha - \beta \cdot \gamma$. $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - \gamma$, tj. $|\frac{\delta}{\beta}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $\exists \delta \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 |\beta|^2 < 1 \ni (\beta)$. \square

Poznámka

Takováto definice dělení se zbytkem funguje ještě pro $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, ale pro ostatní $\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$ už nefunguje.

6.3 Největší společný dělitel

Definice 6.5 (Největší společný dělitel, nesoudělnost a největší společný násobek)

Pro $a, b \in R$, R obor řekneme, že $c \in R$ je největší společný dělitel a, b , značíme $c = \text{NSD}(a, b)$, pokud 1) $c|a \wedge c|b$ a 2) $\forall d|a, d|b : d|c$.

a, b jsou nesoudělné, pokud $\text{NSD}(a, b) = 1$.

Obdobně definujeme $\text{NSN}(a, b) = c \equiv a|c \wedge b|c \wedge \forall d, a|d, b|d : c|d$.

Poznámka

NSD nemusí existovat. Zároveň není jednoznačně určený. Ale je jednoznačně určený až na asociovanost.

6.4 Ireducibilní prvky a rozklady

Definice 6.6 (Vlastní dělitel a ireducibilní prvek)

R obor. $a \in R \setminus \{0\}$. $b \in R$ je vlastní dělitel a , pokud $b|a$ a $b \nmid 1$ a $b \nmid a$.

$a \neq 0$ je ireducibilní, pokud $a \nmid 1$ a nemá žádné vlastní dělitele.

Definice 6.7 (Ireducibilní rozklad)

Ireducibilní rozklad prvku a je zápis $a|p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$, kde p_1, \dots, p_n jsou ireducibilní prvky a $p_i \nmid p_j$, pro $i \neq j$, a kde $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$.

Řekneme, že a má jednoznačný ireducibilní rozklad, pokud má právě 1 rozklad až na pořadí a asociovanost.

6.5 Prvočinitelé

Definice 6.8 (Prvočinitel)

R obor, pak $p \in R, p \nmid 1$ je prvočinitel, pokud $\forall a, b \in R : p|a \cdot b \implies p|a \vee p|b$.

Pozorování

p je prvočinitel $\implies p$ je ireducibilní.

┌

Důkaz

Ať $p = ab$. Pak $p|a \cdot b \xrightarrow{\text{prvočinitel}} p|a \vee p|b$. Zároveň zřejmě $a|p$ a $b|p$, tedy $p|a \implies b|1$ nebo $p|b \implies a|1$. Tedy a, b jsou nevlastní dělitelé. \square

└

7 Existence a jednoznačnost ireducibilního rozkladu

7.1 Gaussovské obory

Definice 7.1 (Gaussovský obor)

Obor R je gaussovský, pokud $\forall a \in R, a \neq 0, a \nmid 1$, má jednoznačný ireducibilní rozklad.

Příklad (Otevřený problém)

$\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$ je gaussovský pro ∞ mnoho s . (Čeká se, že ano.)

Poznámka (Rozšíření definice ireducibilního rozkladu)

$a \nmid 1$, pak řekneme, že ireducibilní rozklad a je $a \nmid 1 = \dots^0$.

Tvrzení 7.1 (Vlastnosti gaussovských oborů)

R je gaussovský obor a $a, b \in R, a, b \neq 0$. Ať navíc je $a \nmid p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ je ireducibilní rozklad. Pak $b|a \Leftrightarrow b \nmid p_1^{l_1} \cdot \dots \cdot p_n^{l_n}$ (nemusí být rozklad, protože l_i smí být 0), kde $\forall i : 0 \leq l_i \leq k_i$.

┌ *Důkaz*

\Rightarrow : Ať $b = rp_1^{l_1} \cdot \dots \cdot p_n^{l_n}$ a $a = q \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$, kde $r \nmid 1 \nmid q$. Chci: $b|a$, čili $\exists c : a = b \cdot c$.
 $c = q \cdot r^{-1} \cdot p_1^{k_1-l_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n-l_n}$.

$\Rightarrow : b|a \Rightarrow \exists c : a = b \cdot c$. Ať $b|q_1^{s_1} \cdot \dots \cdot q_u^{s_u}$, $c|r_1^{t_1} \cdot \dots \cdot r_v^{t_v}$ jsou ireducibilní rozklady. Zkombinujeme na rozklad $b \cdot c : B \cdot C|q_1^{s'_1} \cdot \dots \cdot q_u^{s'_u} \cdot r_{i_1}^{t_{i_1}} \cdot \dots \cdot r_{i_w}^{t_{i_w}}$ (vyfiltrujeme z rozkladu c ty r_i , který jsou asociovány s nějakým q_j). Máme 2 rozklady $b \cdot c = a$. Z jednoznačnosti rozkladů $q_i = p_{\pi(i)} \wedge s'_i = k_{\pi(i)} \geq s_i$. Tudíž $b|p_{\pi(1)}^{s_1} \cdot \dots \cdot p_{\pi(n)}^{s_n}$, kde $s_i \leq k_{\pi(i)}$ (a doplníme chybějící p_j^0). \square

Důsledek (Dělitelnost v gaussovských oborech)

R gaussovský obor. Pak $\forall a, b \in R, a \neq 0 \vee 0 \neq b \Rightarrow$ existuje NSD(a, b). Každý ireducibilní prvek je prvočinitel. Neexistuje posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots \in R : a_{i+1}|a_i \wedge a_i \nmid a_{i+1}$.

┌ *Důkaz*

Mějme rozklady $a|p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ a $b|p_1^{l_1} \cdot \dots \cdot p_n^{l_n}$ (doplněné tak, aby měli shodná prvočísla, ale $k_i \neq 0 \vee l_i \neq 0$).

Ať $a, b \neq 0$, potom existuje jednoznačný rozklad na prvočinitele. Potom každé (a jenom ty) $c|p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_n^{m_n}$, kde $0 \leq m_i \leq \min(k_i, l_i)$ dělí a i b , tedy c s největšími m_i a to už je zřejmě NSD(a, b).

Nechť $p|a \cdot b$ a zároveň je ireducibilní, tj. $p = p_i$ pro nějaké i . Toto p_i musí být v nenulové mocnině v a nebo v b , tedy p dělí jedno z nich.

Definujeme normu $\vartheta(a) = k_1 + \dots + k_n$. Jelikož máme jednoznačný ireducibilní rozklad, tak ϑ je dobře definovaná. Pokud $b|a$, pak $\vartheta(b) \leq \vartheta(a)$, pokud navíc $b \nmid a$, pak $\vartheta(b) < \vartheta(a)$. Posloupnost $\vartheta(a_i)$ je pak nekonečná klesající posloupnost v \mathbb{N} . ζ . \square

7.2 Zobecněná základní věta aritmetiky

Věta 7.2 (Zobecněná základní věta aritmetiky)

R je gaussovský \Leftrightarrow existuje NSD všech dvojic prvků (krom $0, 0$) \wedge neexistuje nekonečná posloupnost vlastních dělitelů $a_1, a_2, a_3, \dots \in R : a_{i+1}|a_i \wedge a_i \nmid a_{i+1}$.

┌ *Důkaz* (\Rightarrow)

┌ Je dokázáno. \square

┌ *Důkaz* (Existence rozkladů)

Sporem s druhou částí: Ať $a_1 = a$, $a_1 \nmid 1$ a a nemá ireducibilní rozklad. Mějme $a_i \nmid 1$ a nemá ireducibilní rozklad. Tedy není ireducibilní (jinak by bylo samo sobě rozkladem) $\implies a_i = b \cdot c$ pro nějaké $b, c \nmid 1$. Kdyby b, c měly ireducibilní rozklad, pak by i. rozklad mělo i a_i . Takže aspoň jeden z nich nemá IR. Označíme ho a_{i+1} . Tudíž $a_{i+1} | a_i \wedge a_{i+1} \nmid 1 \wedge a_{i+1}$ nemá IR. Indukcí tedy vyrobíme nekonečnou posloupnost, kterou mi podmínky zakazují. ζ . □

Lemma 7.3

R obor, $a, b \in R$, $c \in R$, $c \neq 0$. Předpokládejme, že existuje $\text{NSD}(a, b)$, $\text{NSD}(ca, cb)$. Pak $\text{NSD}(ca, cb) = c \cdot \text{NSD}(a, b)$.

┌ *Důkaz*

Ve skriptech. Triviální. □

Lemma 7.4

Buď R obor, ve kterém existuje NSD všech dvojic prvků. Pak je každý ireducibilní prvek prvočinitel.

┌ *Důkaz*

Buď p ireducibilní a ať $p | a \cdot b$. Ať $p \nmid a$. $\text{NSD}(p, a)$ existuje, tedy $\text{NSD}(p, a) = 1$, neboť p je ireducibilní. Podle předchozího lemmatu $\text{NSD}(pb, ab) = b \cdot \text{NSD}(p, a) = b$. Zároveň $p | pb$ a $p | ab$, b je $\text{NSD} \implies p | b$. □

┌ *Důkaz* (Jednoznačnost rozkladu)

Sporem: Mezi všemi prvky s nejednoznačnými rozklady vyberme ten, který má nejkratší rozklad, čili má minimální $k_1 + \dots + k_n$. Nechť tedy $a || p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n} || q_1^{l_1} \cdot \dots \cdot q_m^{l_m}$. p_1 je ireducibilní a dělí a , tedy (podle předchozího lemmatu) dělí q_i pro nějaké i . To ale znamená, že $p_1^{k_1-1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n} || \dots$. To jsou ale zase dva různé ireducibilní rozklady, ale to je spor s minimalitou. □

8 Eukleidův algoritmus a Bézoutova rovnost

8.1 Eukleidovské obory

Definice 8.1 (Eukleidovský obor)

R je obor. R je eukleidovský, pokud na něm existuje tzv. eukleidovská norma, čili zobrazení $\vartheta: R \rightarrow \mathbb{N}_0$ tak, že $\vartheta(0) = 0$, $a | b \wedge b \neq 0 \implies \vartheta(a) \leq \vartheta(b)$, $\forall a, b \in R, b \neq 0 \exists q, r \in R: a = bq + r \wedge \vartheta(r) < \vartheta(b)$.

Pozorování

$a = 0 \Leftrightarrow \ni(a) = 0$. (Z ostré nerovnosti v třetí podmínce.)

Pozorování

Tělesa jsou eukleidovská ($\ni(0) = 0$, $\ni(a \neq 0) = 1$). \mathbb{Z} je eukleidovské $\ni(a) = |a|$. $\mathbb{Z}[i]$ je eukleidovské. \mathbb{T} těleso, $R = T[x]$ je eukleidovský obor ($\ni(f) = 1 + \deg f$).

$\mathbb{Z}[x]$ není eukleidovské (ale je gaussovské). ($\text{NSD}(x+1, x-1) \neq f(x) \cdot (x+1) + g(x) \cdot (x-1)$). Tj. neplatí Bézoutova rovnost.)

Poznámka

Eukleidův algoritmus funguje normálně, jen dělení se zbytkem je určeno podle definice Eukleidovských oborů.

Věta 8.1 (Správnost eukleidova algoritmu)

V eukleidovském oboru R najde rozšířený Eukleidův algoritmus pro jakýkoliv vstup $a, b \in R$ hodnotu $\text{NSD}(a, b)$ a Bézoutovy koeficienty u, v splňující $\text{NSD}(a, b) = u \cdot a + v \cdot b$.

┌

Důkaz

EA skončí, neboť norma se zmenšuje a je nezáporná. Stačí ukázat, že $\text{NSD}(a_{i-1}, a_i) = \text{NSD}(a_{i+1}, a_i)$ a $a_i = u_i \cdot a + v_i \cdot b$. Obojí plyne z $a_{i-1} = a_i q + a_{i+1}$ □

└

Poznámka (Oprava)

$\text{NSD}(0, 0) = 0$, tento případ tedy nemusel být v tvrzení výše vynecháván...<F2>

Lemma 8.2

R eukleidovský obor, $a, b \in R \setminus \{0\}$. Pokud $a|b$ a $a \nmid b$, pak $\ni(a) < \ni(b)$.

┌

Důkaz

Ať $b = a \cdot u$ pro nějaké $u \in R$. Víme, že $\exists q, r \in R$, $a = bq + r$, $\ni(r) < \ni(b)$. $a \nmid b \implies b \nmid a \implies r \neq 0$. $r = a - bq = a(1 - uq) \implies a|r$. Z definice dělení se zbytkem je $\ni(a) \leq \ni(r) < \ni(b)$. □

└

Věta 8.3

Eukleidovské obory jsou gaussovské.

┌

Důkaz

R eukleidovský. Podle jedné z předchozích vět: gaussovský $\Leftrightarrow \exists \text{NSD}$ a \nexists řetězec vlastních dělitelů. NSD v eukleidovském existuje. Podle lemmatu výše se norma vlastních dělitelů zmenšuje, tedy opravdu takový řetězec neexistuje. □

└

Důsledek

$\mathbb{Z}[i]$ je gaussofský. $\mathbb{T}[x]$ je gaussofský.

8.2 Diofantické rovnice, rozklad v $\mathbb{Z}[i]$

Viz přednáška, nebude u zkoušky.

8.3 Obory hlavních ideálů

Definice 8.2

R je komutativní okruh. Ideál v R je neprázdná podmnožina $I \subseteq R$ tak, že $a, b \in I \implies a + b \in I$, $-a \in I$, $a \in I, r \in R \implies r \cdot a \in I$.

Například

$R = \mathbb{Z}$, $I = n\mathbb{Z}$ pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$. (Dále dokážeme, že jiný v \mathbb{Z} neexistuje.)

Tvrzení 8.4 (Definice hlavních ideálů)

R komutativní okruh, $a \in R$. Pak $a \cdot R = \{a \cdot r \mid r \in R\} = \{u \in R \mid a \mid u\}$ je ideál v R . Navíc je to nejmenší (vůči inkluzi) ideál v R , který obsahuje a . Takovému ideálu se říká hlavní.

┌

Důkaz

$ar, as \in aR \implies ar + as = a(r + s) \in aR$, $-ar = a \cdot (-r) \in aR$, $ar \in aR, t \in R \implies art \in aR$. Tedy aR je ideál.

Buď I ideál v R , $a \in I$. Z uzavřenosti plyne, že $ar \in I \forall r \in R \implies aR \subseteq I$. Tedy aR je nejmenší. □

└

Poznámka

Hlavní, protože je tam ten hlavní prvek a , který ho vytváří.

Definice 8.3

Hlavním ideálům $0R = \{0\}$ a $1R = R$ se říká nevlastní, ostatním se říká vlastní.

Pozorování

$$a|b \Leftrightarrow aR \supseteq bR.$$

┌

Důkaz

Triviální, viz přednáška. □

└

┌

Důsledek

$$a||b \Leftrightarrow aR = bR.$$

└

Věta 8.5

V eukleidovském oboru je každý ideál hlavní.

┌

Důkaz

R eukleidovský obor, I ideál. Pokud $I = \{0\} \implies I = 0R$. Ať $I \supset \{0\}$. Buď $0 \neq a \in I$ (libovolný) prvek s nejmenší možnou normou $\ni(a)$. Dokážeme, že $I = aR$. Zřejmě $aR \subseteq I$, protože $a \in I$. Pro spor ať existuje $b \in I \setminus aR$. Vydělíme se zbytkem: $b = aq + r, \ni(r) < \ni(a)$. Ale máme $r = b - aq$, přičemž $b, a, aq \in I$, tudíž $r = b - aq \in I$, ale z minimality normy a je $r = 0$, tudíž $a|b$. ζ . □

└

Definice 8.4 (Obor hlavních ideálů (OHI))

Pokud R je obor tak, že každý ideál je hlavní, pak se R nazývá obor hlavních ideálů (OHI).

Například

$\mathbb{Z}[x]$ není OHI. $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ je OHI, ale není euklidovský (těžké dokázat).

Tvrzení 8.6

R komutativní okruh s 1. R je těleso $\Leftrightarrow R$ má pouze nevlastní ideály.

┌

Důkaz

Ať $I \neq \{0\}$. Buď $0 \neq a \in I$. R těleso $\implies a^{-1} \in R$. Z uzavřenosti na násobení $1 = a \cdot a^{-1} \in I$, tudíž $R = 1 \cdot R \in I$, tj. $I = R = 1R$. □

└

Tvrzení 8.7

R komutativní okruh.

1) I, J ideály v $R \implies I \cap J$ je ideál v R .

2) I, J ideály v R . Pak $I + J = \{a + b | a \in I, b \in J\}$ je ideál. Navíc je to nejmenší ideál, který obsahuje I, J .

3) Mějme ideály I_j v R pro $j \in \mathbb{N}$ tak, že $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$. Pak $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ je ideál v R .

┌
Důkaz

1) $a, b \in I \cap J, r \in R \implies a, b \in I, a, b \in J$. I ideál $\implies a + b, -a, ra \in I$. J ideál $\implies a + b, -a, ra \in J$. Tedy $a + b, -a, ra \in I \cap J$.

2) Ať $a + b \in I + J, c + d \in I + J, r \in R$, kde $a, c \in I, b, d \in J$. Pak $(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d) \in I + J$. $\cdot \wedge -$ obdobně. $I + J$ ideál.

Zřejmě $I \subseteq I + J$, neboť je $a + 0 \in I + J$. Stejně tak pro J , tj. $I \cup J \subseteq I + J$. Druhý 'směr' plyne z uzavřenosti na součet.

3) Uzavřenost na $+$: Ať $a, b \in \bigcup I_j$. Tudíž $a \in I_j, b \in I_k$ pro nějaká j, k , BÚNO $j \leq k$. Máme $I_j \subseteq I_k$, tedy $a \in I_k$. I_k je ideál, tedy je uzavřený na součet. Uzavřenost na $\cdot \wedge -$ snadná (stačí vzít 1 ideál). \square

Věta 8.8

Buď R OHI. Pak R je gaussovský a platí v něm Bézoutova rovnost.

┌
Důkaz

R OHI. Chceme 1) existuje NSD 2) neexistují řetězce vlastních dělitelů (zobecněná věta algebry):

1) $a, b \in R$. Buď $I = aR + bR$, (protože OHI) existuje $c \in R, cR = I$. $aR, bR \subseteq cR \implies c|a, b$. Buď $d|a, b \implies aR, bR \subseteq dR \implies aR + bR = cR \subseteq dR \implies d|c$. Tedy $c = \text{NSD}(a, b)$. Navíc $c \in aR + bR = \{ar + bs\}$, tj. $c = ar + bs$ pro nějaké $r, s \in R$.

2) Pro spor uvažujme takovou posloupnost dělitelů $\dots | a_2 | a_1$, tj. $a_1R \subset a_2R \subset \dots$. $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_iR$ je ideál, tj. (protože OHI) $I = bR$, pro nějaké $b \in I$. Ale tím pádem $\exists i : b \in a_iR$. Pak $bR \subseteq a_iR \subset a_{i+1}R \subset \dots \subseteq I = bR$. ∇ . \square

9 Polynomy nad gaussovskými obory (bez důkazů)

Definice 9.1 (Primitivní polynom)

R obor, $f \in R[x]$ je primitivní, pokud jsou jeho koeficienty nesoudělné (čili $\forall c \in R$: pokud c dělí všechny koeficienty, pak $c||1$).

Věta 9.1 (Gaussovo lemma)

R gaussovský obor, f, g primitivní polynomy v $R[x] \implies f \cdot g$ primitivní v $R[x]$.

Tvrzení 9.2

R je gaussovský, Q podílové těleso R . f, g primitivní polynomy v $R[x]$. Pak $f|g$ v $R[x] \Leftrightarrow f|g$ v $Q[x]$.

Definice 9.2 (Značení)

$f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x], a_n \neq 0$ (R gaussovský). $c(f) = \text{NSD}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ je obsah (content) polynomu.

$PP(f) = \frac{1}{c(f)} \cdot f$ je primitivní část (primitive part) f .

Věta 9.3

R gaussovský, Q podílové těleso, $f, g \in R[x]$. Pak:

$\exists \text{NSD}_{R[x]}(f, g) = c \cdot h, c = \text{NSD}_R(c(f), c(g)), h \in R[x]$ je primitivní tak, že $h = \text{NSD}_{Q[x]}(f, g)$.

f je ireducibilní v $R[x] \Leftrightarrow \deg f = 0$ a f je ireducibilní v R , nebo $\deg f > 0$, f je primitivní a f je ireducibilní v $Q[x]$.

Věta 9.4 (Gaussova)

R gaussovský obor $\Rightarrow R[x]$ gaussovský obor.

Důsledek

R gaussovský $\Rightarrow R[x_1, \dots, x_n]$ gaussovský $\Rightarrow R[x_1, x_2, x_3, \dots]$ gaussovský.

9.1 Ireducibilita polynomů (i s důkazy)

Tvrzení 9.5 (Existence racionálního kořene)

Nechť R je gaussovský, Q je podílové těleso. Má-li $f = \sum_{i=1}^n a_i x^i \in R[x], a_n \neq 0$ kořen $\frac{r}{s} \in Q$ (pro $\text{NSD}(r, s) = 1$), pak $r|a_0, s|a_n$.

┌

Důkaz

$0 = f\left(\frac{r}{s}\right) = \sum a_i \left(\frac{r}{s}\right)^i$ přenásobíme s^n : $0 = a_0 s^n + a_1 r s^{n-1} + \dots + a_n r^n \Rightarrow r|a_0 s^n$. Ale $\text{NSD}(r, s) = 1$, tedy z gaussovskosti $r|a_0$. Stejně tak $s|a_n r^n \Rightarrow s|a_n$. □

└

Tvrzení 9.6 (Einsteinovo kritérium)

R obor, $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x]$ primitivní, $a_n \neq 0$. Pokud existuje prvočinitel $p \in R$ tak, že $p|a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, p^2 \nmid a_0$, pak f je ireducibilní.

┌ *Důkaz*

Pro spor $f = g \cdot h$, $g = \sum_{i=0}^k b_i x^i$, $h = \sum_{i=0}^l c_i x^i \in R[x]$, $1, k, l > 0$.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = (b_0 + b_1 x + \dots)(c_0 + c_1 x + \dots) = b_0 c_0 + (b_0 c_1 + b_1 c_0)x + \dots \implies a_0 = b_0 c_0.$$

Tudíž $p|a_0 = b_0 c_0 \implies$ BÚNO $p|b_0$, pak $p \nmid c_0$, neboť $p^2 \nmid a_0$. $p|a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \implies p|b_1$, ..., $p|b_i \forall i \leq n-1$. p dělí všechny koeficienty b_i pro $i \leq k \leq n-1$, ale jelikož h má stupeň alespoň 1, tak p dělí všechny koeficienty b_i , tj. $p|g|f$. ∇ . □

10 Čínská zbytková věta a interpolace

Věta 10.1 (ČZV pro polynomy)

\mathbb{T} těleso. Ať $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{T}[x]$ jsou po 2 nesoudělné polynomy, $d = \sum \deg m_i$. Ať $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{T}[x]$. Pak $\exists! f \in \mathbb{T}[x]$ stupně $< d$ tak, že $f \equiv u_1 \pmod{m_1}, \dots, f \equiv u_n \pmod{m_n}$.

┌ *Důkaz*

Jednoznačnost: Ať f, g jsou řešení, $\deg f, \deg g < d$, čili $f \equiv g \equiv u_i \pmod{m_i} \forall i$. Tedy $m_i | f - g \forall i$. m_i jsou po 2 nesoudělné a $\mathbb{T}[x]$ je gaussovské, tj. $m_1 \cdot \dots \cdot m_n | f - g$, tj. $\deg(f - g) > d$ (∇) nebo $f - g = 0$.

Existence: $P_k = \{f \in \mathbb{T}[x] | \deg f < k\}$ je vektorový prostor nad \mathbb{T} dimenze k (x^i je báze). $d_i = \deg m_i$. $\varphi : P_d \rightarrow P_{d_1} \times \dots \times P_{d_n}$, $f \mapsto (f \pmod{m_1}, \dots, f \pmod{m_n})$. Zřejmě P_{d_i} má dimenzi d_i a φ je dobře definované a navíc homomorfismus vektorových zobrazení. Navíc z jednoznačnosti (1. bodu důkazu) je prosté, tj. z porovnání dimenzí je φ bijekce. Tedy hledaný polynom je $\varphi^{-1}(u_1 \pmod{m_1}, \dots, u_n \pmod{m_n})$. □

Důsledek (Věta o interpolaci)

\mathbb{T} těleso. Mějme po 2 různé body $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{T}$ a libovolné hodnoty $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{T}$. $\exists! f \in \mathbb{T}[x]$, $\deg f < n$ tak, že $\forall i : f(a_i) = u_i$.

┌ *Důkaz*

$f \equiv f(a)(\pmod{x - a})$ (už jsme ukázali), tedy $f \equiv u_i(\pmod{x - a_i})$ a použijeme čínskou zbytkovou větu. □

Důsledek (Zobrazení na konečných tělesech jsou polynomiální)

\mathbb{T} je konečné těleso. Pro $\forall \varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ zobrazení $\exists! f \in \mathbb{T}[x]$, $\deg f < |\mathbb{T}|$ tak, že $\varphi(a) = f(a)$.

11 Faktorokruh modulo polynom

Definice 11.1 (Faktorokruh)

\mathbb{T} těleso. Buď $m \in \mathbb{T}[\alpha]$ polynom stupně $n \geq 1$. Faktorokruh $\mathbb{T}[\alpha]/(m)$ je množina všech polynomů z $\mathbb{T}[\alpha]$ stupně $< n$ se standardním $+$ a $-$ a s operací násobení modulo m , čili $f \odot g = f \cdot g \pmod{m}$.

Čili $\mathbb{T}[\alpha]/(m) = (\{f \in \mathbb{T}[\alpha] \mid \deg f < n\}, +, -, \odot, 0, 1)$.

Pozorování

Jde o komutativní okruh s 1. (Ověříme axiomy.)

Tvrzení 11.1 (Faktor podle ireducibilního polynomu)

\mathbb{T} těleso, $m \in \mathbb{T}[\alpha]$, $\deg m \geq 1$. Pak následující je ekvivalentní: 1) $\mathbb{T}[\alpha]/(m)$ je těleso, 2) $\mathbb{T}[\alpha]/(m)$ je obor, 3) m je ireducibilní prvek v $\mathbb{T}[\alpha]$.

┌

Důkaz

$1 \implies 2$ zřejmé (jedno z prvních tvrzení), $2 \implies 3$: Ať $m = fg$ pro $f, g \in \mathbb{T}[\alpha]$, $\deg f, \deg g \geq 1$. Pak v $\mathbb{T}[\alpha]/(m)$ platí $f \odot g = fg \pmod{m} = m \pmod{m} = 0$, čili $\mathbb{T}[\alpha]/(m)$ není obor.

$3 \implies 1$: Buď $f \neq 0$ polynom, $\deg f < \deg m$. m ireducibilní, f má menší stupeň než $m \implies m, f$ jsou nesoudělné. Bézout: $1 = \text{NSD}(f, m) = uf + vm$ pro nějaké $u, v \in \mathbb{T}[\alpha]$. Buď $\tilde{u} = u \pmod{m}$. Pak v $\mathbb{T}[\alpha]/(m)$ platí: $\tilde{u} \odot f = \tilde{u}f \pmod{m} \equiv uf \equiv 1 \pmod{m}$. Tedy $\tilde{u} \odot f = 1$ v $\mathbb{T}[\alpha]/(m)$. Tedy \tilde{u} je inverz. \square

└

Poznámka

Dál budeme \odot značit jako \cdot .

11.1 Kořenová, rozkladová nadtělesa

Tvrzení 11.2

\mathbb{T} těleso, $f \in \mathbb{T}[x]$, $\deg f \geq 1$. Pak existuje $S \geq T$, ve kterém má f kořen.

┌ *Důkaz*

Buď $m = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{T}[x]$ nějaký ireducibilní dělitel f . $S = \mathbb{T}[\alpha]/(m(\alpha))$. Z předchozího tvrzení je S těleso a $S \geq \mathbb{T}$ (neboť \mathbb{T} jsou tam konstantní polynomy). Chceme $m(x)$ má v S kořen (pak má triviálně i f kořen v S).

$$\begin{aligned} m(\alpha) &= \sum a_i \odot (\alpha \odot \dots \odot \alpha) = \sum (a_i \alpha^i \mod m) = \\ &= a_0 \mod m + a_1 \alpha \mod m + \dots + a_n \alpha^n \mod m = a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_n \alpha^{n-1} + (-a_0 - a_1 \alpha - \dots - a_{n-1} \alpha^{n-1}) \end{aligned}$$

└

□

Věta 11.3

\mathbb{T} těleso, $f \in \mathbb{T}[x]$, $\deg f \geq 1$. Pak existuje těleso $S \geq \mathbb{T}$, kde se f rozkládá na součin polynomů stupně 1.

┌ *Důkaz*

Indukcí podle f . $\deg f = 1 \implies f = ax + b$ a má kořen $-a^{-1}b \in \mathbb{T}$.

$\deg f > 1$. Podle předchozího tvrzení buď $U \geq \mathbb{T}$ tak, že $f(u) = 0$ pro nějaké $u \in U$. Pak $f = (x - u) \cdot g$ pro nějaké $g \in U[x]$, $\deg g = \deg f - 1$. Následně použijeme indukční předpoklad pro g . □

Definice 11.2

\mathbb{T} těleso, $f \in \mathbb{T}[x]$, $\deg f \geq 1$. Kořenové nadtěleso je (libovolné) těleso $\mathbb{S} \geq \mathbb{T}$, ve kterém existuje $a \in \mathbb{S}$ tak, že $\mathbb{S} = \mathbb{T}(a)$ a $f(a) = 0$.

Rozkladové nadtěleso f je (libovolné) těleso $\mathbb{S} \geq \mathbb{T}$, že existují $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{S} : \mathbb{S} = \mathbb{T}(a_1, \dots, a_n)$ a $f \mid (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$.

Důsledek (Existence kořenového a rozkladového nadtělesa)

\mathbb{T} těleso, $f \in [x]$, $\deg \geq 1$. Pak existuje kořenové i rozkladové nadtěleso f nad \mathbb{T} .

┌ *Důkaz*

$\exists \mathbb{S} \geq \mathbb{T}$ tak, že $f(a) = 0$ pro $a \in \mathbb{S}_0$. Kořenové nadtěleso pak je $\mathbb{S} = \mathbb{T}(a) \leq \mathbb{S}_0$. Obdobně rozkladové. □

12 Konečná tělesa

Pozorování (Konečná tělesa)

Nechť $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_p[\alpha]/(m)$, kde p je prvočíslo, m ireducibilní polynom v $\mathbb{Z}_p[\alpha]$, $\deg m = k$.

Potom \mathbb{T} je těleso s p^k prvky. Značíme ho \mathbb{F}_{p^k} (podle dalšího pozorování je jediné této mohutnosti).

Pozorování (Vlastnosti konečných těles)

- $\forall k \forall p$ prvočíslo \exists ireducibilní polynom stupně k v $\mathbb{Z}_p[\alpha] \implies \exists$ konečné těleso velikosti p^n .
- Každé konečné těleso lze takto zkonstruovat.
- Na volbě m (daného stupně) nezáleží.

┌ *Důkaz*

└ Bez důkazu. □

Poznámka

Díky pozorování, že nad konečným tělesem je každá funkce polynomiální a že posloupnost jedniček je vlastně \mathbb{F}_{2^k} , stačí v kryptografii zkoumat jen polynomy.

Navíc násobení na tomto tělese používá symetrická šifra AES (advanced encryption standard), která počítá s maticemi 4×4 nad \mathbb{F}_{256} .

Poznámka

Další využití je v konečné geometrii, např. eliptické křivky jsou Diofantické rovnice tvaru $y^2 = x^3 + ax + b$ nad \mathbb{F}_{p^k} (řešení tvoří grupu a dělá se s tím něco jako v RSA).

12.1 Sdílení tajemství

Definice 12.1

(k, n) -schéma sdílení tajemství je situace, kdy se n lidí dělí o tajemství a k odhalení je potřeba alespoň (libovolných) k z nich.

Definice 12.2 (Tajemství)

Za tajemství budeme uvažovat posloupnost 0 a 1, na kterou se budeme dívat v \mathbb{Z}_2^m nebo \mathbb{F}_{2^m} .

Poznámka

Pro $k = n$ se (k, n) -schéma nazývá maskování hodnot: Pro každého člověka vyberu hodnotu $a_i \in T$ a zveřejním hodnotu $c = t + \sum_{i=1}^n a_i$. (t je tajemství.)

Definice 12.3 (Shamirův protokol)

Vlastník zvolí polynom $f \in \mathbb{T}[x]$, $\deg f < k$ tak, že $f(0) = t$. Vyberu n po dvou různých prvků $0 \neq a_1, \dots, a_n \in \mathbb{T}$, které se zveřejní, a jednotlivým účastníkům se dá $f(a_1), \dots, f(a_n)$.

Když se potká k lidí, tak mají k hodnot polynomu, tedy mohou polynom interpolovat a zjistit konstantní člen, tj. $f(0) = t$.

13 Symetrické polynomy

Definice 13.1

R komutativní okruh. Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je symetrický, pokud po libovolném permutování proměnných se f nezmění. (formálně: $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$ pro každou permutaci $\pi \in S_n$.)

Tvrzení 13.1 (Viétovy vztahy)

\mathbb{T} těleso, $f = \sum a_i x^i \in \mathbb{T}[x]$, $\deg f = n \geq 1$. At $f = a_n(x - u_1) \cdot \dots \cdot (x - u_n)$ v nějakém nadtělese $\mathbb{S} \geq \mathbb{T}$. Pak

$$\frac{a_{n-i}}{a_n} = (-1)^i s_i(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} x_{j_1} \cdot \dots \cdot x_{j_i}.$$

┌

Důkaz

Berme $g = a_n^{-1} f$. Z rovnosti

$$(y - x_1) \cdot \dots \cdot (y - x_n) = y^n - s_1 y^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n$$

dostaneme

$$g = \sum \frac{a_i}{a_n} x^i = (x - u_1) \cdot \dots \cdot (x - u_n) = x^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i s_i(u_1, \dots, u_n) x^{n-i}.$$

└

Porovnáním koeficientů dostaneme chtěnou rovnost. □

Věta 13.2 (Základní věta o symetrických polynomech)

Buď R obor, $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ symetrický polynom. Pak $\exists! g \in R[z_1, \dots, z_n]$ tak, že $f = g(s_1, \dots, s_n)$.

┌
Důkaz
Později.
└

□

Definice 13.2 (Term)

Term v proměnných x_1, \dots, x_n je výraz $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, $k_i \in \mathbb{N}_0$.

Definice 13.3 (Uspořádání termů)

Relaci $<$ na termech definujeme jako $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} < x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$, pokud $\exists i \geq 0$ tak, že $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_i = l_i, k_{i+1} < l_{i+1}$.

Definujeme $t \leq s$, pokud $t = s \vee t < s$.

Lemma 13.3

Relace \leq má vlastnosti: 1) Je to lineární uspořádání. 2) Pro libovolné termy $t_1 > t_2, s_1 > s_2$ platí $t_1 s_1 > t_2 s_2$. 3) Neexistuje ∞ klesající řetězec termů $t_1 > t_2 > \dots$.

┌
Důkaz
Domácí cvičení.
└

□

Definice 13.4 (Vedoucí člen polynomu)

R obor, $f \in R[x_1, \dots, x_n]$. Vedoucí člen f je ten člen, který má největší term. Značí se $l(f)$.

Lemma 13.4

R obor, $f, g \in R[x_1, \dots, x_n]$. Pak 1) $l(fg) = l(f) \cdot l(g)$. 2) Je-li f symetrický a $l(f) = a \cdot x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, potom $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$.

┌
Důkaz

1) $l(f), l(g)$ jsou největší členy v f, g . Podle předchozího lemmatu víme, že $>$ se zachovává násobením $\implies l(f) \cdot l(g)$ je největší ze všech členů v fg . Navíc R je obor \implies koeficient v $l(f) \cdot l(g)$ není nulový.

2) Kdyby $k_i < k_j$ pro $i < j$, mohli bychom prohodit proměnné x_i, x_j . Ze symetrie f je $a \cdot x_1^{k_1} \dots x_i^{k_j} \dots x_j^{k_i} \dots x_n^{k_n}$ je také v f , ale je větší než $l(f)$, což je spor. □

Lemma 13.5

$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ nezáporná celá. Pak $\exists!$ (l_1, \dots, l_n) nezáporné celé tak, že $l(s_1^{l_1} \dots s_n^{l_n}) = x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$.

┌
Důkaz

$$l(s_1^{l_1} \cdot \dots \cdot s_n^{l_n}) = l(s_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot l(s_n)^{l_n} = x_1^{l_1} \cdot (x_1 x_2)^{l_2} \cdot \dots \cdot (x_1 x_2 \dots x_n)^{l_n} = x_1^{l_1 + l_2 + \dots + l_n} \cdot \dots \cdot x_n^{l_n}.$$

Tedy řeším systém $l_1 + \dots + l_n = k_1, l_2 + \dots + l_n = k_2, \dots, l_n = k_n$, tj. $l + n = k_n \geq 0$,
 $l_i = k_i - k_{i+1} \geq 0$. □

Definice 13.5 (Gaussův algoritmus)

R obor, vstup $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ symetrický, výstup $g \in R[z_1, \dots, z_n]$ tak, že $g(s_1, \dots, s_n) = f$.

$$f_1 = f, g_1 = 0.$$

$i = 1, 2, 3, \dots$: dělej: Najdi l_1, \dots, l_n tak, že $l(f_i) = c \cdot l(s_1^{l_1} \cdot \dots \cdot s_n^{l_n})$ pro nějaké $c \in R$ podle předchozího lemmatu. $f_{i+1} = f_i - c \cdot s_1^{l_1} \cdot \dots \cdot s_n^{l_n}$, $g_{i+1} = g_i + c \cdot z_1^{l_1} \cdot \dots \cdot z_n^{l_n}$. Pokud je f_{i+1} konstantní, zastavím se a vrátím $g_{i+1} + f_{i+1}$.

┌
Důkaz

Ověříme, že f_i je symetrický polynom – zřejmé z definice f_i . $g_i \in R[z_1, \dots, z_n]$ – jasné z definice g_i . $f_i + g_i(s_1, \dots, s_n) = f$ – vidíme, nebo ověříme indukcí. A skončí, jelikož zmenšujeme vedoucí člen a neexistuje nekonečná klesající posloupnost. □

┌
Důkaz (Základní věta o symetrických polynomech)

Existenci dokazuje Gaussův algoritmus. Jednoznačnost: Ať $f = g_1(s_1, \dots, s_n) = g_2(s_1, \dots, s_n)$, $g_1 \neq g_2$. $g = g_1 - g_2 = \sum a_i t_i$, kde t_i jsou po dvou různé jednotlivé termy (v proměnných z_i), $a_i \neq 0$. $t_i(s_1, \dots, s_n)$ mají různé vedoucí členy podle lemmatu výše. Vezměme lexikograficky největší z vedoucích členů $t_i(s_1, \dots, s_n)$. Ten je tedy striktně větší než ostatní, tedy $\sum a_i t_i(s_1, \dots, s_n) \neq 0$, tudíž $0 = g(s_1, \dots, s_n) - g_2(s_1, \dots, s_n)$. □

Důsledek (Hodnota symetrického polynomu na kořenech)

\mathbb{T} těleso, $f \in T[x]$, $\deg f \geq 1$. Buď $\mathbb{U} \geq \mathbb{T}$ nadtěleso, kde $f || (x - u_1) \cdot \dots \cdot (x - u_n)$. \forall symetrický polynom $s \in T[x_1, \dots, x_n]$ platí: $s(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{T}$.

┌
Důkaz

$f = \sum a_i x^i$. Viétovy vztahy $s_i(u_1, \dots, u_n) = (-1)^i \frac{a_{n-i}}{a_n} \in \mathbb{T}$. Z předchozí věty $\exists g \in \mathbb{T}[z_1, \dots, z_n]$ tak, že $f = g(s_1, \dots, s_n) \implies f(u_1, \dots, u_n) = g(s_1(u_1, \dots, u_n), \dots, s_n(u_1, \dots, u_n)) \in \mathbb{T}$. □

14 Základní věta algebry

Věta 14.1 (Základní věta algebry)

Každý komplexní polynom stupně ≥ 1 má kořen.

Důsledek

$$\forall f \in \mathbb{C}[x], \deg f \geq 1 : f || (x - u_1) \cdot \dots \cdot (x - u_n).$$

Důsledek

Každý polynomiální zobrazení $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je na.

Důkaz (Jeden z mnoha, nejvíce algebraický)

Lemma: předpokládejme, že každý reálný polynom stupně ≥ 1 má (komplexní) kořen. Pak má každý komplexní polynom stupně ≥ 1 nějaký kořen.

Důkaz: $f \in \mathbb{C}[x], \deg f \geq 1, f = \sum a_i x^i, \bar{f} = \sum \bar{a}_i x^i$. Uvažujme $g = f \cdot \bar{f} = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i \bar{a}_j \right) x^k$. Ten má pro $i = j$ reálný koeficient a pro $i \neq j$ má koeficienty $a_i \bar{a}_j + \bar{a}_i a_j \in \mathbb{R}$. Buď $z \in \mathbb{C}$ kořen g . Potom $f(z) = 0$ (OK) nebo $\bar{f}(z) = 0$ (tj. $f(\bar{z}) = 0$, OK).

Lemma: Komplexní polynom stupně 2 má komplexní kořen. Důkaz $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \in \mathbb{C}$. (Jediný zádrhel je odmocnina, ale existenci odmocniny z komplexního čísla ukážeme přes exponenciální tvar.)

Lemma: Reálný polynom lichého stupně má kořen. Důkaz: Vynechán (věta o střední hodnotě a spojitost polynomů).

Díky 1. lemmatu stačí, že $\forall f \in \mathbb{R}[x], \deg f \geq 1$, má kořen v \mathbb{C} . $\deg f = n = 2^k m, m$ liché. Indukcí podle k : $k = 0 \implies f$ má lichý stupeň, tedy tvrzení je splněno díky předchozímu lemmatu.

Ať $k \geq 1$. Ať $S \supseteq \mathbb{C}$ je nadtěleso, ve kterém $f || (x - u_1) \cdot \dots \cdot (x - u_n)$ (díky větě z dřívějších). Chceme $\exists i : u_i \in \mathbb{C}$. Trik. Vezmeme $a \in \mathbb{Z}$ a definujeme $h_a = \prod_{i < j} (x - (u_i + v_j + a \cdot u_i \cdot u_j)) \in S[x]$. Chceme $h_a \in \mathbb{R}[x]$. $\tilde{h}_a = \prod_{i < j} (x - (y_i + y_j + a \cdot y_i \cdot y_j)) \in (\mathbb{Z}[x])[y_1, \dots, y_n]$ je symetrický polynom v proměnných y_1, \dots, y_n (s koeficienty ze $\mathbb{Z}[x]$).

Z věty výše $\exists g_a \in (\mathbb{Z}[x])[z_1, \dots, z_n]$ tak, že $\tilde{h}_a = g_a(s_1, \dots, s_n)$. Dosadíme $y_i = u_i$: $h_a = \tilde{h}_a(u_1, \dots, u_n) = g_a(s_1(u_1, \dots, u_n), \dots)$. Z viétových vztahů $s_1(u_1, \dots, u_n), \dots, s_n(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}$. Tedy h_a je polynom v $\mathbb{R}[x]$. $\deg h_a = \binom{n}{2} = 2^{k-1} \cdot (m \cdot (2^k \cdot m - 1))$, takže má menší mocninu dvojky ve stupni, tedy aplikujeme IP. Proto má h_a kořen v \mathbb{C} , tudíž $\forall a \in \mathbb{Z} \exists i < j : u_i + u_j + a u_i u_j$, tedy nějaká dvojice i, j se vyskytne nekonečněkrát (a je nekonečně, dvojic je konečně). Stačí, že $\exists a \neq b : u_i + u_j + a u_i u_j \in \mathbb{C}$ a $u_i + u_j + b u_i u_j \in \mathbb{C}$, tudíž $(a - b) u_i \cdot u_j \in \mathbb{C}$ a $c = u_i + u_j \in \mathbb{C}$. Tedy u_i, u_j jsou kořeny $x^2 - cx + (u_i u_j) \in \mathbb{C}[x]$, tedy podle 3. lemmatu existuje kořen $x \in \mathbb{C}$, tj. $u_i \in \mathbb{C}$ nebo $u_j \in \mathbb{C}$. \square

15 Grupy

Definice 15.1 (Grupa, abelovská grupa)

Grupa je čtveřice $(G, *, ', e)$, kde G je množina (tzv. nosná), $*$ je binární operace na G , $'$ je unární operace (a' je tzv. inverzní prvek k a) a $e \in G$ (tzv. jednotka) tak, že $\forall a, b, c \in G$:

$$a * (b * c) = (a * b) * c, \quad a * e = e * a = a, \quad a * a' = a' * a = e.$$

Jestliže $\forall a, b \in G : a * b = b * a$, pak je grupa abelovská (čili komutativní).

Poznámka

Existují 2 zápisy: aditivní $(G, +, -, 0)$ (typicky abelovská) a multiplikativní $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$.

Definice 15.2 (Podgrupa)

Ať $(G, *, ', e)$ je grupa, $H \subseteq G$ podmnožina. Pokud je H uzavřené na operace, čili $e \in H, \forall a, b \in H : a * b \in H, a' \in H$, pak H je podgrupa G . Značíme $H \leq G$.

$G, \{e\}$ jsou nevlastní podgrupy, ostatní jsou vlastní.

Například (Symetrická grupa)

X neprázdná množina, $(S_X := \{\text{permutace na } X\}, \text{operace } \circ \text{ skládání, } ^{-1} \text{ inverzní, id}_X)$ je symetrická grupa. Pokud je $X = \{1, 2, \dots, n\}$, pak značíme $S_n := S_X$.

15.1 Vlastnosti permutací

Definice 15.3 (Cyklus)

Cyklus je posloupnost $a_1, \dots, a_k \in X$ navzájem různých prvků přičemž $\pi(a_1) = a_2, \pi(a_2) = a_3, \dots, \pi(a_k) = a_1$. Cyklus značíme $(a_1 a_2 \dots a_k)$.

Definice 15.4 (Rozklad na cykly)

Rozklad na cykly je zápis $(a_{11} a_{12} \dots a_{1k_1})(a_{21} \dots a_{2k_2}) \dots (a_{m1} \dots a_{mk_m})$, kde a_{ij} jsou po dvou různé prvky. Cykly délky 1 typicky nepíšeme.

Každá permutace na konečné množině jde (jednoznačně) rozložit na cykly.

Definice 15.5 (Transpozice)

Transpozice je cyklus délky 2.

Každá permutace (X konečná, stejně jako kdekoli dále) jde napsat jako složení trans-

pozic.

Definice 15.6 (Sudá a lichá permutace, znaménko)

Sudá permutace je ta permutace, kterou lze rozložit na sudý počet transpozic. Jinak je permutace lichá.

Znaménko permutace $\text{sgn } \pi = 1$ pokud je daná permutace sudá, jinak $\text{sgn } \pi = -1$.
 $\text{sgn}(\pi^{-1}) = \text{sgn } \pi$. $\text{sgn } \pi = (-1)^{n-m} = (-1)^{m_0}$, kde m je počet cyklů a m_0 je počet sudých cyklů (n počet prvků v množině).

Definice 15.7 (Konjugované)

$\pi, \sigma \in S_n$ jsou konjugované, pokud $\exists \varrho \in S_n : \sigma = \varrho \circ \pi \circ \varrho^{-1}$.

Tvrzení 15.1

π, σ jsou konjugované, právě když mají stejný počet cyklů každé délky.

┌

Důkaz

Viz skriptu.

└

□

Například (Permutační grupy)

Permutační grupy = podgrupy S_n : Alternující grupa $A_n \leq S_n$ jsou všechny sudé permutace $n \geq 2$. Digedrální grupa $D_{2n} \leq S_n$ jsou všechny symetrie pravidelného n -úhelníku.

$$|S_n| = n!, |A_n| = \frac{n!}{2}, |D_{2n}| = 2n.$$

Například (Geometrické grupy)

D_{2n}, E_n (euklidovská grupa – symetrie \mathbb{R}^n), symetrie projektivního prostoru.

Například (Maticové grupy)

$GL_n(\mathbb{T})$ je grupa regulárních matic $n \times n$ nad \mathbb{T} , $SL_n(\mathbb{T})$ je grupa podgrupa regulárních matic s $\det = 1$, $O_n(\mathbb{T})$ je grupa ortogonálních matic, čili $A \cdot A^T = I_n$.

Například (Okruhové grupy)

R okruh. $(R, +, -, 0)$ je aditivní grupa okruhu R (je ablovská), pokud je navíc R (komutativní) okruh s 1 a R^* množina všech invertibilních prvků, pak $(R^*, \cdot, ^{-1}, 1)$ je multiplikativní grupa okruhu R .

Například (Komplexní jednotky)

$(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \cdot, ^{-1}, 1)$ a její podgrupy tzv. cyklotomické grupy $\mathbb{C}_n = \{\text{kořeny } x^n - 1\} = \{\zeta_n^j \mid j \in [n]\}$, kde $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$.

Priferova p -grupa $\mathbb{C}_{p^\infty} = \bigcup_{k=1}^\infty \mathbb{C}_{p^k}$.

Definice 15.8 (Direktní součin grup)

Direktní součin grup $(G_i, *_i, ', e_i), i \in [n]$, je grupa $\prod G_i = G_1 \times \dots \times G_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in G_i\}$, kde operace $*, ', e$ jsou definovány „po složkách“:

$$(a_1, \dots, a_n) * (b_1, \dots, b_n) = (a_1 *_1 b_1, \dots, a_n *_n b_n), \quad (a_1, \dots, a_n)' = (a_1', \dots, a_n'), \quad e = (e_1, \dots, e_n).$$

Pro $G_1 = \dots = G_n = G$ jde o direktní mocniny G^n .

Tvrzení 15.2 (Základní vlastnosti grup)

$(G, *, ', e), a, b, c \in G$:

$$a * c = b * c \implies a = b,$$

$$a * c = a \implies c = e,$$

$$(a')' = a, \quad (a * b)' = b' * a'.$$

15.2 Mocniny a řád prvku

Definice 15.9 (Mocnina prvku)

G grupa, $a \in G, n \in \mathbb{Z}$.

$$a^n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \times} & n > 0 \\ \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}}_{n \times} & n < 0 \end{cases}.$$

Tvrzení 15.3

G grupa, $a, b \in G, k, l \in \mathbb{Z}$. Pak $a^{k+l} = a^k \cdot a^l, a^{k \cdot l} = (a^k)^l = (a^l)^k$. Pokud je navíc G abelovská, potom $(ab)^k = a^k b^k$.

┌ *Důkaz*

Pro $k, l > 0$ je to jasné: $a^{k+l} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{k+l} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_k \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_l = a^k \cdot a^l$. Když $k = 0$ nebo $l = 0$, pak je to ještě jasnější. $k > 0, l < 0, k + l > 0$ a podobně rozebereme každé zvlášť.

└ Zbytek analogicky. □

Definice 15.10 (Řád grupy)

Řád grupy G je počet prvků nosné množiny G (tj. $|G|$), resp. ∞ .

Řád prvku $a \in G$ je nejmenší $n \in \mathbb{N}$ tak, že $a^n = 1$ (pokud neexistuje, pak ∞). Značíme $\text{ord}(a)$.

Tvrzení 15.4 (Řád permutace)

Řád permutace $\pi \in S_n$ je nejmenší společný násobek délek cyklů π .

┌ *Důkaz*

Cyklus délky k má zřejmě řád k . Pro disjunktní cykly C_1, \dots, C_m máme $\pi = (C_1 \circ \dots \circ C_m)^k$. Protože jsou disjunktní, tak je to to samé jako $C_1^k \circ \dots \circ C_m^k$. Tedy $\pi^k = \text{id} \Leftrightarrow C_1^k = \text{id}, \dots, C_m^k = \text{id} \Leftrightarrow k$ je násobek délek všech cyklů. Tedy $\text{ord } \pi = \min k = \text{NSN}(\dots)$. □

16 Podgrupy

Lemma 16.1

Průnik podgrup je podgrupa.

┌ *Důkaz*

G grupa, $H_i \leq G$ pro $i \in I$. $H = \bigcup_{i \in I} H_i \subseteq G$. H je uzavřené na operace: jednoduché ověřit. □

Definice 16.1

Buď $X \subseteq G$ podmnožina G . Podgrupa generovaná množinou X je nejmenší (vzhledem k inkluzi) podgrupa G , která obsahuje X . Značíme $\langle X \rangle_G$.

┌ *Důkaz*

$\langle X \rangle_G = \bigcap \{H \leq G \mid X \subseteq H\}$. □

Tvrzení 16.2

G grupa $\emptyset \neq X \subseteq G$. Pak

$$\langle X \rangle_G = [a_1^{k_1} \cdot \dots \cdot a_n^{k_n} | n \in \mathbb{N}_0, a_1, \dots, a_n \in X, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}].$$

Pozor

a_i nemusí být různé.

Vyjádření typicky není jednoznačné.

┌

Důkaz

M = množina napravo. Chceme M je podgrupa, $M \supseteq X$, M je nejmenší podgrupa.

1. $(a_1^{k_1} \cdot \dots \cdot a_n^{k_n}) \cdot (b_1^{l_1} \cdot \dots \cdot b_m^{k_m}) \in M$. $(a_1^{k_1} \cdot \dots \cdot a_n^{k_n})^{-1} = a_n^{-k_n} \cdot \dots \cdot a_1^{-k_1} \in M$. $1 \in M$ (pro $n = 1$ nebo $k_i = 0$).

2. $a \in X \implies a^1 \in M$. 3. Buď $H \leq G$, $H \supseteq X$. $\forall a \in X : a \in H \implies \forall k \in \mathbb{Z} : a^k \in H$.
 $a_1, \dots, a_n \in X \implies a_1^{k_1}, \dots \in H \implies a_1^{k_1} \cdot \dots \in H \implies M \subseteq H$. \square

└

Poznámka (Značení)

$$\langle \{b_1, \dots, b_m\} \rangle_G \equiv \langle b_1, \dots, b_m \rangle_G.$$

Důsledek

G grupa $a \in G$. $\langle a \rangle_G = \{a^k | k \in \mathbb{Z}\}$.

Důsledek

G abelovská grupa, $a_1, \dots, u_n \in G$. $\langle u_1, \dots, u_n \rangle_G = \{u_1^{k_1} \cdot \dots \cdot u_n^{k_n} | k_i \in \mathbb{Z}\}$.

Tvrzení 16.3 (Generátory permutačních grup)

1. Grupa S_n je generovaná množinou všech transpozic (viz Lingebrá).

2. Grupa A_n je generována množinou všech trojcyklů.

Tvrzení 16.4 (Řád prvku a řád podgrupy)

G je grupa, $a \in G$. Pak $\text{ord } a = |\langle a \rangle_G|$.

┌ *Důkaz*

Z minulého tvrzení $\langle a \rangle_G = \{a^k | k \in \mathbb{Z}\}$. $a^i = a^j \Leftrightarrow a^{i-j} = 1 \Leftrightarrow \text{ord } a | i - j$ nebo $i - j = 0$ pro $\text{ord } a = \infty$. Pro $\text{ord } a = n < \infty$ víme, že $a^i = a^j \Leftrightarrow n | i - j \Leftrightarrow i \equiv j \pmod n$. Pak $\langle a \rangle_G = \{a^0, a^1, \dots, a^{n-1}\}$, tj. $|\langle a \rangle_G| = n = \text{ord } a$. \square

└

16.1 Lagrangeova věta

Věta 16.5

G grupa, $H \leq G$. Pak $|H|$ dělí $|G|$.

Definice 16.2 (Rozkladové třídy, transversála, index podgrupy)

$H \leq G$. Množiny $aH = \{a \cdot b | b \in H\}$ pro $a \in G$ nazýváme rozkladové třídy podgrupy H .

Podmnožina $T \subseteq G$ s vlastností $|T \cap aH| = 1$ pro $\forall a \in G$ se nazývá transversála rozkladu G podle H .

Počet různých rozkladových tříd se nazývá index podgrupy H v grupě G a značí se $[G : H] = |\{aH | a \in G\}|$.

Poznámka

Někdy se těmito definicím říká levá transversála a levá rozkladová třída. Pravé by se definovaly symetricky. Index je shodný (viz dále).

Lemma 16.6 (Disjunktnost rozkladových tříd)

$H \leq G$. $\forall a, b \in G : aH = bH$ nebo $aH \cap bH = \emptyset$.

┌ *Důkaz*

Ať $aH \cap bH \neq \emptyset$. Buď $c \in aH \cap bH$. Tedy $c = ah_1 = bh_2$ pro nějaké $h_1, h_2 \in H$. Vezmeme $ah \in aH$ a máme $ah = ch_1^{-1}h = bh_2h_1^{-1}h \in bH$. Symetricky $bh \in aH$, tedy $aH = bH$. \square

└

Důsledek

Mohutnost transversály se rovná mohutnosti množiny rozkladových tříd.

Lemma 16.7 (Velikost rozkladových tříd)

$H \leq G$. Pro $\forall a \in G : |aH| = H$.

┌ *Důkaz*

Zobrazení $f : G \rightarrow G, x \mapsto ax$ je prosté: $ax = ay \implies x = y$. $f(H) = aH$, tedy $f|_H$ je bijekce mezi H a aH . Tedy $|H| = |aH|$. \square

└

Věta 16.8 (Lagrangeova věta podruhé)

$H \leq G$. Pak $|G| = |H| \cdot [G : H]$.

┌

Důkaz

Buď T nějaká transversála. Pak $G = \bigcup_{a \in T} aH$ je disjunktní sjednocení podle lemmatu výše. Tedy

$$|G| = \sum_{a \in T} |aH| = \sum_{a \in T} |H| = |H| \cdot |T| = |H| \cdot [G : H].$$

└

□

Důsledek

G grupa, $a \in G$. Pak $\text{ord } a \mid |G|$.

Poznámka

Z Lagrangeovy věty plyne Eulerova věta.

Tvrzení 16.9 (Rovnost rozkladových tříd)

$H \leq G$. $\forall a, b \in G$ platí $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$. $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.

┌

Důkaz

\Rightarrow : $aH = bH \ni b = b \cdot 1$, čili $b \in aH$, tedy $b = ah$ pro nějaké $h \in H$. Pak $a^{-1}b = h \in H$.

\Leftarrow : $a^{-1}b = h$ pro nějaké $h \in H \Rightarrow b \cdot 1 = a \cdot h \in aH \cap bH \Rightarrow aH = bH$.

Analogicky pro pravé.

└

□

Důsledek

Levých a pravých rozkladových tříd je stejně, neboť zobrazení $aH \rightarrow Ha^{-1}$ je bijekce.

16.2 Loydova patnácka (nebude se zkoušet)

Místo prázdného políčka uvažujme 16. Každý stav hry lze popsat permutací $\pi \in S_{16}$. Tah je přechod z π do $\pi \circ (ij)$, kde $\pi(i) = 16$.

Pozorování

Každý tah změní znaménko permutace.

Definice 16.3 (Invariant pro L. 15)

$I(\pi) = \text{sgn}(\pi) \cdot (-1)^{d(\pi)}$, kde $d(\pi)$ je Newyorská vzdálenost prázdného pole od pravého dolního rohu.

┌

Důkaz (Invariant)

Tah změni $\text{sgn } \pi$ i $d(\pi)$. □

└

Věta 16.10

Loydova 15 je řešitelná $\Leftrightarrow I(\pi) = 1$.

┌

Důkaz

\Rightarrow : Zřejmé (z toho, že je $I(\pi)$ invariant a na konci má být $I = 1$). \Rightarrow : BÚNO $\pi(16) = 16$. Dívejme se tedy na $\pi \in A_{15}$. Potom pomocí $\pi \circ (5, 6, 7, 8, 11, 10, 9)$ (dolní obdélníček 2×4), $\pi \circ (1, 2, 3, 4, 7, 6, 5)$ (prostřední obdélníček), $\pi \circ (9, 10, 11, 12, 15, 14, 13)$ (dolní obdélníček). Toto už generuje A_{15} (cvičení). □

└

17 Grupové homomorfismy

17.1 Základní vlastnosti

Definice 17.1

$G = (G, \cdot, {}^{-1}, 1)$, $H = (H, *, ', e)$ jsou grupy. Zobrazení $\varphi : G \rightarrow H$ je homomorfismus grup, pokud $\forall a, b \in G : \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$, $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)'$, $\varphi(1) = e$.

Lemma 17.1

G, H jsou grupy jako výše, $\varphi : G \rightarrow H$ zobrazení. Pak φ je homomorfismus $\Leftrightarrow \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$.

┌

Důkaz

\Leftarrow : $\varphi(1) \stackrel{?}{=} e$: $e * \varphi(1) = \varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1) * \varphi(1)$. Zkrátíme $\varphi(1)$ na obou stranách $\Rightarrow e = \varphi(1)$.

$\varphi(a) * \varphi(a)' = e = \varphi(1)' = \varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a) * \varphi(a^{-1})$. Zkrátíme $\varphi(a)$ a dostáváme $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)'$.

\Rightarrow : triviální □

└

Definice 17.2 (Obraz a jádro homomorfismu)

$\varphi : G \rightarrow H$ homomorfismus. Obraz φ je jeho obor hodnot, čili množina:

$$\text{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) | a \in G\} \subseteq H.$$

Jádro φ je množina

$$\text{Ker}(\varphi) = \{a \in G \mid \varphi(a) = e\} \subseteq G.$$

Tvrzení 17.2 (Jádro a obraz jsou podgrupy)

$\varphi : G \rightarrow H$ homomorfismus grup. Pak $\text{Im}(\varphi) \leq H$ a $\text{Ker}(\varphi) \leq G$.

┌

Důkaz

$e = \varphi(1) \implies e \in \text{Im}(\varphi)$. Pokud $\varphi(a), \varphi(b) \in \text{Im}(\varphi)$, pak $\varphi(a)' = \varphi(a^{-1})' \in \text{Im}(\varphi)$ a $\varphi(a) * \varphi(b) = \varphi(a \cdot b) \in \text{Im}(\varphi)$.

$\varphi(1) = e \implies 1 \in \text{Ker}(\varphi)$. Pokud $a, b \in \text{Ker} \varphi$, pak $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)' = e' = e \implies a^{-1} \in \text{Ker}(\varphi)$. $a \cdot b$ podobně. □

Tvrzení 17.3

$\varphi : G \rightarrow H$ homomorfismus grup. Pak φ je prosté $\Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi) = \{1\}$.

┌

Důkaz

\implies : Pro $a \neq 0$, prostota $\implies \varphi(a) \neq \varphi(1) = e \implies a \notin \text{Ker}(\varphi)$.

\Leftarrow : $\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow \varphi(a \cdot b^{-1}) = e \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in \text{Ker}(\varphi)$. Ale $\text{Ker}(\varphi) = \{1\}$, tedy $a \cdot b^{-1} = 1 \implies a = b$. Tedy φ je prosté. □

Pozorování (Bez důkazu)

Homomorfismus je určený svými hodnotami na generátorech. Na rozdíl od LA však nelze volit libovolně:

Tvrzení 17.4 (Řád prvku a jeho obrazu)

$\varphi : G \rightarrow H$ homomorfismus. Pro $a \in G$ platí: $\text{ord}_H(\varphi(a)) \mid \text{ord}_G(a)$. ($x \mid \infty$). Je-li φ prosté, pak $\text{ord}(\varphi(a)) = \text{ord}(a)$.

┌

Důkaz

$\text{ord}(a) = \infty$ zřejmé. Ať $\text{ord}(a) = n \in \mathbb{N}$. Pak $\varphi(a)^n = \varphi(a^n) = \varphi(1) = e$. Tedy $\text{ord}(\varphi(a)) \mid n$ (neboť vydělím n číslem $\text{ord}(\varphi(a))$ se zbytkem a dostanu, že zbytek = 0).

┌ Prostota: cvičení. □

Tvrzení 17.5

Mějme grupy G, H, K a homomorfismy $\varphi : G \rightarrow H, \psi : H \rightarrow K$. Pak $\psi \circ \varphi$ je homomorfismus $G \rightarrow K$. Je-li φ bijekce, pak $\varphi^{-1} : H \rightarrow G$ je homomorfismus.

┌ *Důkaz*

└ Viz skripta. □

17.2 Izomorfismus

Definice 17.3 (Izomorfismus)

Bijektivní homomorfismus $\varphi : G \rightarrow H$ je izomorfismus.

Důsledek

Inverze k izomorfismu je izomorfismus.

┌ *Důkaz*

└ Grupy G, H jsou izomorfní, pokud existuje izomorfismus $\varphi : G \rightarrow H$. Značíme $G \simeq H$. □

Pozorování

Relace „být izomorfní“ je ekvivalence na třídě všech grup.

┌ *Důkaz*

└ Reflexivní (identita je izomorfismus), tranzitivní (tvrzení výše o homomorfismu a skládání bijekcí), reflexivní (důsledek výše). □

Tvrzení 17.6 (Algebraická verze ČZV)

Mějme m_1, \dots, m_n po dvou nesoudělná přirozená čísla, $M = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$. Zobrazení $\varphi : \mathbb{Z}_M \rightarrow \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}$, $a \mapsto (a \bmod m_1, \dots, a \bmod m_n)$ je izomorfismus okruhů. Restrikce $\varphi|_{\mathbb{Z}_M^*}$ je izomorfismus multiplikativních grup $\mathbb{Z}_M^* \rightarrow \mathbb{Z}_{m_1}^* \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}^*$.

┌ *Důkaz*

└ $\varphi : \mathbb{Z}_M \rightarrow \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}$ je bijekce, viz ČZV. Snadno se ověří, že je to homomorfismus pro operace $+$ i \cdot . □

17.3 Neizomorfismus

Tvrzení 17.7

Buď $\varphi : G \rightarrow H$ surjektivní homomorfismus. Pokud $G = \langle X \rangle$, pak $H = \langle \varphi(X) \rangle$, kde $\varphi(X) = \{\varphi(a) | a \in X\}$.

┌ *Důkaz*

└ Cvičení / skripta. □

Pozor

Na rozdíl od VP generující množiny mohou být různě velké, např. $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle 2 \rangle$.

18 Cyklické grupy

18.1 Základy

Definice 18.1

Grupa G je cyklická, pokud je generovaná 1 prvkem, čili $G = \langle a \rangle_G$ pro nějaké $a \in G$.

Důsledek (Různých předchozích tvrzení)

$\langle a \rangle = \{a^k | k \in \mathbb{Z}\} \implies \langle a \rangle$ je abelovská (násobení je akorát sčítání mocnin).

$$\text{ord } a = |\langle a \rangle|.$$

Věta 18.1 (Klasifikace cyklických grup)

G cyklická grupa. 1) Je-li G nekonečná, pak je izomorfní $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$. 2) Je-li G konečná řádu n , pak je izomorfní $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$.

┌ *Důkaz*

1) $|G| = \infty$. Pak $G = \{\dots, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \dots\}$ (po dvou různé mocniny). Definujeme izomorfismus $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}$, $a^k \mapsto k$. Už víme, že je bijekce. Homomorfismus je to, protože $k + l = \varphi(a^k) + \varphi(a^l) = \varphi(a^k \cdot a^l) = \varphi(a^{k+l}) = k + l$.

2) $|G| = n$. $\varphi : G = \{1, a, \dots, a^{n-1}\} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $a^k \mapsto k$. To že je φ bijekce už víme, homomorfismus: $k + l \bmod n = \varphi(a^k) + \varphi(a^l) \bmod n = \varphi(a^k \cdot a^l) = \varphi(a^{k+l \bmod n}) = k + l \bmod n$. □

Tvrzení 18.2

Každá podgrupa cyklické grupy je cyklická.

┌ *Důkaz*

$H \leq G = \langle a \rangle$. 1) $H = \{1\}$, pak je generována 1. 2) H obsahuje prvek a^l pro $l \neq 0$. Tedy $a^{l'} \in H$ pro $l' > 0$. Buď $k > 0$ nejmenší tak, že $a^k \in H$. Pak $H = \langle a^k \rangle$. Buď $a^n \in H$, vydělíme se zbytkem: $n = ki + j$, $0 \leq j < k$. Pak ale $a^k > a^j = a^{ki+j} \cdot a^{k(-i)} \in H$. Tudíž $a^k | a^n$ (když $a^j = 1$) nebo \nmid . Tedy $H \subseteq \langle a^k \rangle$. A triviálně $\langle a^k \rangle \subseteq H$. \square

Tvrzení 18.3 (Generátory podgrup)

$G = \langle a \rangle$. 1) $\langle a^k, a^l \rangle = \langle a^{\text{NSD}(k,l)} \rangle$. 2) Je-li $|G| = n \in \mathbb{N}$, pak $\langle a^k \rangle = \langle a^{\text{NSD}(k,n)} \rangle$.

┌ *Důkaz*

1) \subseteq : jasný, neboť $\text{NSD}(k,l) | k, l$. \supseteq : použijeme Bézoutovu rovnost, $\text{NSD}(k,l) = kx + ly$. Tedy $a^{\text{NSD}(k,l)} = (a^k)^x \cdot (a^l)^y \in \langle a^k, a^l \rangle$.

2) Volíme v 1) $l = n$. Víme, že $a^n = 1$, tedy

$$\langle a^{\text{NSD}(k,n)} \rangle = \langle a^k, a^n \rangle = \langle a^k, 1 \rangle = \langle a^k \rangle.$$

└ \square

Tvrzení 18.4 (Generátory cyklických grup)

$G = \langle a \rangle$. 1) $|G| = \infty$, pak generátory jsou právě a^1, a^{-1} . 2) $|G| = n$, pak generátory jsou právě a^k , kde $k \in \{1, \dots, n\}$ a $\text{NSD}(k, n) = 1$.

┌ *Důkaz*

1) jasné (viz skripta). 2) Z tvrzení výše $\langle a^k \rangle = \langle a^{\text{NSD}(k,n)} \rangle = H$, $H = G \Leftrightarrow \text{NSD}(k, n) = 1$. \Rightarrow : Kdyby $d = \text{NSD}(k, n) > 1$, pak $H = \langle a^d \rangle = \{1, a^d, \dots, a^{d(\frac{n}{d}-1)}\} \neq G$. \Leftarrow : triviální. \square

Tvrzení 18.5 (Řády prvků)

Cyklická grupa konečného řádu n obsahuje právě $\varphi(d)$ prvků řádu $d | n$. (A řádu $d \nmid n$.)

┌ *Důkaz*

G cyklická, $|G| = n$. Každý prvek řádu $d | n$ je generátor cyklické podgrupy řádu d . Víme, že taková podgrupa existuje v G právě 1, neboť podle tvrzení výše jsou všechny podgrupy tvaru $\langle a^k \rangle$ pro $k | n$ a taková podgrupa má řád n/k . Tedy b je generátor $\langle a^{n/d} \rangle$. Ta má podle předchozího tvrzení právě $\varphi(d)$ generátorů. \square

Tvrzení 18.6

Pro $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

┌ *Důkaz*

Spočteme $|\mathbb{Z}_n|$ dvěma způsoby: 1) $|\mathbb{Z}_n| = n$. 2) $\mathbb{Z}_n = \bigcup_{d|n} \{b \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ord } b = d\}$. Tj. $|\mathbb{Z}_n| = \sum_{d|n} \varphi(d)$. □

18.2 Multiplikativní grupy konečných těles

Lemma 18.7

G konečná grupa taková, že $\forall k$ grupa G obsahuje nejvýše k prvků a : $a^k = 1$. Pak G je cyklická.

┌ *Důkaz*

$n = |G|$. U_k = počet prvků řádu k v G . Lagrange $\implies U_k = 0$ pro $k \nmid n$. Spočtu prvky G podle řádů (jako v předchozím tvrzení): $n = \sum_{k|n} U_k$. Buď a prvek řádu k . $\langle a \rangle$ je cyklická řádu k a všechny prvky $b \in \langle a \rangle$ splňují $b^k = 1$. $\langle a \rangle$ obsahuje k takových prvků.

Předpoklad: G obsahuje nejvýše k prvků c tak, že $c^k = 1$. Tedy $c \in \langle a \rangle$. Speciálně každý prvek řádu k leží v $\langle a \rangle$ a je generátor $\langle a \rangle$. Z tvrzení výše $\langle a \rangle$ má $\varphi(k)$ generátorů $\implies U_k = \varphi(k)$. Tedy pro $k|n$ máme $U_k = 0$ nebo $\varphi(k)$.

$\sum_{k|n} \varphi(k) = n \leq \sum_{k|n} U_k \leq \sum_{k|n} \varphi(k)$. Tedy platí rovnost, tedy $U_k = \varphi(k) \forall k|n$. Speciálně $U_n = \varphi(n) > 1$ a existuje prvek řádu n a ten generuje G . □

Věta 18.8

Buď \mathbb{T} těleso a G konečná podgrupa multiplikativní grupy \mathbb{T}^ . Pak G je cyklická.*

┌ *Důkaz*

Pro předchozí lemma chci G obsahuje nejvýše k prvků tak, že $a^k = 1$. Ale každé takové a je kořen polynomu $x^k - 1$. Nad tělesem \mathbb{T} má $x^k - 1$ nejvýše $\deg(x^k - 1) = k$ kořenů. □

Důsledek

Speciálně $|\mathbb{T}| < \infty$, pak \mathbb{T}^* je cyklické. Její generátory se nazývají primitivní prvky.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}_p \implies \mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$ je cyklická, čili existuje g tak, že $\mathbb{Z}_p^* = \{g^0, g^1, \dots, g^{p-2}\}$.

18.3 Diskrétní logaritmus a kryptografie

Definice 18.2 (Diskrétní logaritmus a exponenciála)

$|G| = n$, zobrazení $G = \langle a \rangle = \{a_0, a_1, \dots, a^{n-1}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_n, a^k \mapsto k$ je tzv. diskrétní logaritmus. Diskrétní exponenciála je pak $\mathbb{Z}_n \xrightarrow{\sim} G, k \mapsto a^k$.

Poznámka

Počítání diskretní exponenciály je rychlé (rozdělení na mocniny 2), ale diskretního logaritmu pomalé.

19 Působení grupy na množině

19.1 Abstraktní grupa jako grupa permutací

Definice 19.1 (Působení grupy na množině)

Působení grupy G na množině X je libovolný homomorfismus $\pi : G \rightarrow S_X$. Hodnotu permutace $\pi(g)$ na prvku $x \in X$ často značíme $g(x)$.

┌

Důsledek

└ $\pi(1) = \text{id}, \pi(g^{-1}) = \pi(g)^{-1}, (g \cdot h)(x) = g(h(x)).$

Věta 19.1 (Cayleyova representace)

Každou grupu jde vnořit do nějaké symetrické grupy. (Čili existuje homomorfismus $\varphi : G \rightarrow S_x$).

┌

Důkaz

Dokonce vezmeme $X = G$. (Tedy pokud je G konečná, pak vnořujeme do $S_{|G|}$). Pro $a \in G$ uvažujeme levou translaci $L_a : G \rightarrow G, x \mapsto a \cdot x$. L_a je zřejmě permutace na G , neboť můžeme zinvertovat a . Zobrazení $G \rightarrow S_G, a \mapsto L_a$ je homomorfismus (čili také G působí na $X = G$), což snadno ověříme. □

Definice 19.2

Relace tranzitivity \sim na X : $x \sim y$ pokud $\exists g \in G : g(x) = y$.

Lemma 19.2

\sim je ekvivalence na X .

┌

Důkaz

└ Cvičení / skripta. □

Definice 19.3 (Orbita)

Třídy ekvivalence \sim se nazývají orbity.

Orbitu obsahující $x \in X$ značíme $[x] = \{y \in X | y \sim x\} = \{g(x) | g \in G\}$.

Definice 19.4 (Pevný bod, stabilizátor)

Bod $x \in X$ je pevný bod prvku $g \in G$, pokud $g(x) = x$.

Množinu všech pevných bodů $g \in G$ značíme $X_g = \{x \in X | g(x) = x\}$.

Stabilizátor prvku $x \in X$ je množina $G_x = \{g \in G | g(x) = x\}$.

Lemma 19.3

Stabilizátor G_x je podgrupa G .

Důkaz

$1 \in G_x$, neboť $1(x) = x$. $g, h \in G_x$, čili $g(x) = x, h(x) = x$, pak $(g \cdot h)x = g(h(x)) = g(x) = x \implies g \cdot h \in G_x$, $g^{-1}x = x \implies g^{-1} \in G_x$. \square

Tvrzení 19.4 (Velikost orbity vs. index stabilizátoru)

$$\forall x \in X : |[x]| = [G : G_x].$$

Důkaz

Najdeme bijekci mezi $[x]$ a množinou $\{gG_x | g \in G\}$. Uvažujme $\varphi : \{gG_x | g \in G\} \rightarrow [x]$, $gG_x \mapsto g(x)$. $g(x) \in [x]$. Je φ vůbec dobře definovaná? $gG_x = hG_x \implies g(x) = h(x)$, neboť podle dřívějšího tvrzení $gG_x = hG_x \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Leftrightarrow h^{-1}g(x) = x \Leftrightarrow g(x) = h(x)$. Zároveň je φ prosté (díky zpětným implikacím v předchozím) a je na, neboť pro $g(x) \in [x]$ mám $g(x) = \varphi(gG_x)$. \square

Důsledek (Spolu s lagrangeovou větou)

$$|G| = |G_x| \cdot [G : G_x] = |G_x| \cdot |[x]|.$$

19.2 Burnside

Věta 19.5 (Burnsideova)

Ať konečná grupa G působí na konečné množině X . Pak:

$$|X / \sim| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|.$$

┌
Důkaz

Nechť $M = \{(g, x) \in G \times X | g(x) = x\}$. Spočtu velikost M dvěma způsoby:

$$|M| = \sum_{g \in G} |X_g| = \sum_{x \in X} |G_x|.$$

$$\frac{1}{|G|} \cdot \sum_g |X_g| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_x |G_x| = \sum_{x \in X} \frac{1}{|[x]|} = \sum_{o \in X/\sim} \sum_{x \in o} \frac{1}{|o|} = \sum_{o \in X/\sim} 1 = |X/\sim|.$$

└

□

Definice 19.5 (Tranzitivní)

Buď G permutační grupa, čili $G \leq S_X$. G je tranzitivní, pokud má jenom 1 orbitu ve svém působení na X .

Věta 19.6 (Jordanova)

Každé konečná tranzitivní grupa G , $|G| \geq 2$, obsahuje aspoň 1 permutaci bez pevného bodu.

┌
Důkaz

Burnside: počet orbit (= 1 z tranzitivity) = průměrný počet pevných bodů. $\text{id} \in G$ má $n \geq 2$ pevných bodů, tedy nadprůměrný počet. To znamená, že $\exists g \in G$, které má podprůměrný počet pevných bodů, tedy 0. □

Věta 19.7 (Cauchyova)

Buď G konečná grupa a p prvočíslo tak, že $p \mid |G|$. Pak v G existuje prvek řádu p .

┌
Důkaz

$X = \{(a_1, a_2, \dots, a_p) \in G^p | a_1 a_2 \dots a_p = 1\}$. Mohutnost X spočítáme tak, že víme, že a_1, \dots, a_{p-1} můžeme zvolit libovolně a následně dopočítáme $a_p = a_{p-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$, tedy $|X| = |G|^{p-1}$. Z_p působí na X rotací složek (0 je identita, 1 rotace o 1, ...). $|[x]| |Z_p| = p$, tudíž každá orbita má velikost 1 nebo p . Existuje orbita velikosti 1 a sice $(1, 1, \dots, 1)$. Zároveň X je disjunktní sjednocení orbit, p dělí $|X| = |G|^p$. Tedy počet 1-prvkových orbit je kp pro nějaké $k \geq 1$, tudíž existuje alespoň $p - 1$ 1-prvkových orbit různých od $1, 1, \dots, 1$.

Buď (a_1, \dots, a_p) tato jiná orbita. Pak $a_1 = a_2, a_2 = a_3, \dots$, tedy je tvaru $(a, a, \dots, a) \in X$. Ale z definice X je $a^p = 1$, zároveň není $a = 1$, tedy $\text{ord } a = p$. □

20 Faktorgrupy

20.1 Normální podgrupy

Tvrzení 20.1

G je grupa, $H \leq G$. NTJE: 1) $aH = Ha \ \forall a \in G$, 2) $aha^{-1} \in H$ pro každé $h \in H$, $a \in G$.

Definice 20.1 (Normální podgrupa)

Podgrupa H je normální v grupě G , pokud splňuje tyto podmínky. Značíme $H \trianglelefteq G$.

┌
Důkaz

\implies : Buď $h \in H$, $a \in G$. Víme: $ah \in aH = Ha \implies$ existuje $h' \in H$ tak, že $ah = h'a \implies aha^{-1} = h' \in H$.

\Leftarrow : Dokážeme $aH \subseteq Ha$ (a analogicky $Ha \subseteq aH$). Buď $ah \in aH$. Pak $h' = aha^{-1} \in H$, a tedy $ah = h'a \in Ha$. □

Například

$\{1\} \trianglelefteq G$ a $G \trianglelefteq G$. V abelovských grupách jsou všechny podgrupy normální. $SL_n(T) \trianglelefteq GL_n(T)$. Naopak $\{\text{id}, (1\ 2)\} \not\trianglelefteq S_3$. Ale $A_n \trianglelefteq S_n$.

Tvrzení 20.2

Jádro homomorfismu je normální podgrupa.

┌
Důkaz

Hom. $\varphi : G \rightarrow H$. $\text{Ker } \varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = 1_H\} \leq G$. Buď $a \in G$, $k \in \text{Ker } \varphi$. $aka^{-1} \in \text{Ker } \varphi$, protože

$$\varphi(aka^{-1}) = \varphi(a)\varphi(k)\varphi(a)^{-1} = \varphi(a)\varphi(a)^{-1} = 1.$$

└

□

20.2 Konstrukce faktorgrupy

Definice 20.2

G grupa, $N \trianglelefteq G$. Definujeme relaci na G : $a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in N$. $ab^{-1} \in N \Leftrightarrow Na = Nb \Leftrightarrow aN = bN$ (z normality). Třídy ekvivalence $[a] = aN = Na$.

Faktorgrupa G podle podgrupy N = množina těchto bloků = $\{aN \mid a \in G\}$ (neboli $G/\sim = \{[a] \mid a \in G\}$), kde operace jsou $[a] \cdot [b] = [ab]$, $[a]^{-1} = [a^{-1}]$ a neutrální prvek je $[1]$.

┌ *Důkaz* (Operace jsou dobře definované a G/\sim je fakt grupa)
 At $[a] = [c]$, $[b] = [d]$. Potom $[ab] = [cd]$, protože $a \sim c$ a $b \sim d$, tedy $ac^{-1} \in N$ a $bd^{-1} \in N$,
 tudíž $ab(cd)^{-1} = abd^{-1}c^{-1} = (ac^{-1}) \cdot (c(bd^{-1})c^{-1}) \in N$. Obdobně pro $^{-1}$.

└ Ověříme axiomy grupy... □

Věta 20.3

$\varphi : G \rightarrow H$ homomorfismus grup.

1) (věta o homomorfismu) Je-li $N \subseteq \text{Ker } \varphi$ a $N \trianglelefteq G$, pak zobrazení $\psi : G/N \rightarrow H$, $[a] \mapsto \varphi(a)$ je dobře definované a je to grupový homomorfismus.

┌ *Důkaz*

Dobře definované: $[a] = [b] \implies ab^{-1} \in N \implies ab^{-1} \in \text{Ker } \varphi \implies \varphi(ab^{-1}) = 1$. Tedy $\varphi(a) = \varphi(b)$.

└ Homomorfismus: $\psi([a]) \cdot \psi([b]) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab) = \psi([ab]) = \psi([a] \cdot [b])$. □

2) (1. věta o isomorfismu) $G/\text{Ker } \varphi \simeq \Im \varphi$.

┌ *Důkaz*

Použiji 1) pro $N = \text{Ker } \varphi$. $\psi : G/\text{Ker } \varphi \rightarrow H$. ψ je prosté: $[a] = [b] \Leftrightarrow ab^{-1} \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \varphi(ab^{-1}) = 1 \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow \psi([a]) = \psi([b])$. Když se na ψ dívám jenom jako na zobrazení $G/\text{Ker } \varphi \rightarrow \Im \varphi \leq H$, tak je na. □

Tvrzení 20.4 (2. věta o isomorfismu)

$N \trianglelefteq G$. 1) $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$, pak H/N je normální podgrupa G/N .

2) Je-li $K \trianglelefteq G/N$, pak existuje $H \trianglelefteq G$ tak, že $K = H/N$.

3) $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$, pak $(G/N)/(H/N) \simeq G/H$.

(1) i 3) platí i pro podgrupy, které nejsou normální.)

┌
Důkaz

1) se ověří.

2) $K \trianglelefteq G/N \implies K = H/N$ pro nějaké H , a sice $H = \{a \in G \mid [a] = aN \in K\}$. Ověří se, že $K = H/N$.

3) 1. věta o isomorfismu: Uvažujme homomorfismus $\varphi : G/N \rightarrow G/H$, $aN \mapsto aH$. Ověříme, že je dobře definován: $aN = bN \Leftrightarrow ab^{-1} \in N \implies ab^{-1} \in H \Leftrightarrow aH = bH$ a že je to homomorfismus: $\varphi(aN \cdot bN) = \varphi(abN) = (ab)H \stackrel{?}{=} \varphi(aN) \cdot \varphi(bN) = aH \cdot bH = (ab)H$. $\Im \varphi = G/H$ zřejmě, $\text{Ker } \varphi = \{aN \mid \varphi(aN) = aH = 1 \cdot H\}$, ale $aH = 1 \cdot H \Leftrightarrow a \cdot 1^{-1} = a \in H$. Tedy $\text{Ker } \varphi = H/N$. □

Tvrzení 20.5 (3. věta o isomorfismu)

$N \trianglelefteq G$, $H \leq G$. Pak HN je podgrupa G . $H \cap N \trianglelefteq H \wedge HN/N \simeq H/(H \cap N)$.

┌
Důkaz

Bez důkazu (jednoduchý). □

20.3 Řešitelné grupy

Definice 20.3 (Řešitelná grupa, stupeň řešitelnosti)

Grupa G je řešitelná, pokud $\exists k \in \mathbb{N}$ a normální podgrupy $N_0, N_1, \dots, N_k \trianglelefteq G$ tak, že $\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_k = G$ a každá faktorgrupa N_i/N_{i-1} , pro $i \in [k]$, je abelovská.

Nejmenší k , pro které tento řetězec v G existuje, se nazývá stupeň řešitelnosti G .

Definice 20.4 (Metaabelovská grupa)

Grupa stupně řešitelnosti 2 se nazývá metaabelovská.

Věta 20.6 (Feit-Thompson)

Každá grupa lichého řádu je řešitelná.

Jednodušší varianta: Každá grupa řádu p^k (p prvočíslo) je řešitelná.

┌
Důkaz

Extrémně těžký. □

Definice 20.5 (Derivovaná podgrupa)

G grupa. Její derivovaná podgrupa je $G' = \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \rangle$.

Lemma 20.7

$N \trianglelefteq G$. 1) $N' \trianglelefteq G$. 2) G/N je abelovská $\Leftrightarrow G' \leq N$.

┌ Důkaz

1) ověří se (viz skriptu). 2) G/N abelovská $\Leftrightarrow [a][b] = [b][a] \Leftrightarrow [aba^{-1}b^{-1}] = [1] \Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1} \in N \Leftrightarrow G' \subseteq N$. □

Tvrzení 20.8 (Řešitelnost podgrup a faktogrup)

G grupa. 1) G řešitelná a $H \leq G \Rightarrow H$ řešitelná.

2) G řešitelná, $K \trianglelefteq G \Rightarrow G/K$ řešitelná.

3) Pokud $\exists N \trianglelefteq G$ tak, že N je řešitelná a G/N je řešitelná, pak je G řešitelná.

┌ Důkaz

1) $N_i \trianglelefteq G$, $\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_k = G$, N_i/N_{i-1} abelovská. Uvažujme $\{1\} = N_0 \cap H \leq N_1 \cap H \leq \dots \leq N_k \cap H = H$, dokážeme, že tato posloupnost prokazuje řešitelnost H . Triviálně $N_i \cap H \trianglelefteq H$. $(N_i \cap H)/(N_{i-1} \cap H) = (N_i \cap H)/((N_i \cap H) \cap N_{i-1})$. Podle 3. věty o isomorfismu je to isomorfní s $N_{i-1}(N_i \cap H)/N_{i-1} \leq N_i/N_{i-1}$, která je abelovská, tedy i její podgrupa je abelovská, tedy $(N_i \cap H)/(N_{i-1} \cap H)$ je abelovská.

2) analogicky (2. a 3. věta o isomorfismu). 3. podobně (nezkouší se, viz skriptu). □

Důsledek

G grupa s normálními podgrupami N_0, \dots, N_k tak, že $\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_k = G$ a N_i/N_{i-1} jsou řešitelné. Pak G je řešitelná.

┌ Důkaz

Indukcí podle k a použitím třetího bodu předchozího tvrzení. □

21 Číselná tělesa a kořeny polynomů

21.1 Okruhové homeomorfismy a faktorokruhy

Tvrzení 21.1 (Obraz a jádro)

R, S okruhy, $\varphi : R \rightarrow S$ homomorfismus okruhů. 1) $\Im \varphi$ je podokruh S . 2) $\text{Ker } \varphi$ je ideál v R .

┌
Důkaz

1) $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a + b) \in \mathfrak{S}\varphi$. $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(a \cdot b) \in \mathfrak{S}\varphi$.

2) $\text{Ker } \varphi$ je uzavřené na $+$ (ověří se). Také je uzavřené na násobení R : $a \in \text{Ker } \varphi, r \in R \implies \varphi(ra) = \varphi(r) \cdot \varphi(a) = \varphi(r) = 0$. \square

└

Tvrzení 21.2

$\varphi : R \rightarrow S$ je prostý homomorfismus okruhů $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi = \{0\}$.

Tvrzení 21.3

$\varphi : R \rightarrow S, \psi : S \rightarrow T$ homomorfismy okruhů. Pak 1) $\psi \circ \varphi : R \rightarrow T$ je homomorfismus okruhů.

2) Je-li φ bijekce (čili φ je isomorfismus), pak $\varphi^{-1} : S \rightarrow R$ je homomorfismus okruhů (a tedy isomorfismus).

21.2 Faktorokruh podle ideálu

Definice 21.1

R okruh, I ideál v R . Definujeme ekvivalenci na R $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$.

Uvažujme jenom grupu $(R, +, -, 0)$. Potom \sim je ta stejná ekvivalence podle podgrupy I .

$a \sim b \Leftrightarrow a + I = b + I$... třídy ekvivalence jsou rozkladové třídy podle podgrupy. $[a] = a + I$.

Na blocích definujeme $[a] + [b] = [a + b]$, $-[a] = [-a]$, $[0]$ je neutrální prvek, $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$.

Množina bloků $[a]$ s těmito operacemi je faktorokruh podle ideálu I : $R/I = (\{[a] | a \in R\}, +, -, [0], \cdot)$.

┌
Důkaz (Dobrá definovanost)

1) Operace na blocích jsou dobře definované: $+$, $-$ víme z grup. Buď nyní $[a] = [c]$, $[b] = [d]$, chceme $[ab] = [cd]$. Z definice bloků víme, že $a - c \in I$ a $b - d \in I$, tudíž $ab - cd = a(b - d) + (a - c)d \in I$.

2) R/I je okruh: Ověří se axiomy okruhu pro R/I z axiomů pro R . (Pozor, axiomy oboru se nezachovávají.) \square

└

Věta 21.4

$\varphi : R \rightarrow S$ homomorfismus okruhů.

1) (věta o homomorfismu) $I \subseteq \text{Ker } \varphi$ ideál v R . Pak $\varphi : R/I \rightarrow S$, $[a] \mapsto \varphi(a)$ je dobře

definovaný okruhový homomorfismus.

2) (1. věta o isomorfismu) $R/\text{Ker } \varphi \simeq \Im \varphi, [a] \mapsto \varphi(a)$.

┌ *Důkaz*

Použije se věta pro grupy a člověk si rozmyslí, že tato zobrazení jsou homomorfismy i vůči násobení. □

Poznámka

Platí i 2. a 3. věta o isomorfismu. (Viz skripta.)

21.3 Kdy je faktorokruh obor / těleso?

Definice 21.2 (prvoideál, maximální ideál)

Ideál I v okruhu R je prvoideál, pokud $\forall a, b \in R : ab \in I \implies a \in I$ nebo $b \in I$. A je maximální, pokud je I maximální vlastní ideál v R , čili neexistuje ideál j tak, že $I \subset J \subset R$.

Věta 21.5

R komutativní okruh s 1, I ideál. 1) Pak R/I je obor $\Leftrightarrow I$ prvoideál. 2) Potom R/I je těleso $\Leftrightarrow I$ je maximální.

┌ *Důkaz*

1) R/I obor $\Leftrightarrow ([a] \cdot [b] = 0 \implies [a] = 0 \vee [b] = 0) \Leftrightarrow (a \cdot b \in I \implies a \in I \vee b \in I) \Leftrightarrow I$ je prvoideál.

2) Z tvrzení 7.6: R/I těleso \Leftrightarrow nemá žádné vlastní ideály. Z druhé věty o isomorfismu: Ideály v R/I jsou právě J/I pro $J \supseteq I$. Tedy R/I je těleso $\Leftrightarrow I$ je maximální ideál. □

22 Tělesové rozšíření jako vektorový prostor

Definice 22.1 (Rozšíření těles)

Rozšíření těles jsou tělesa \mathbb{T}, \mathbb{S} tak, že $\mathbb{T} \leq \mathbb{S}$. (Čili \mathbb{T} je podtěleso \mathbb{S} a \mathbb{S} je rozšíření \mathbb{T}).

Definice 22.2 (Stupeň rozšíření)

Dimenze vektorového prostoru $\mathbb{S}_{\mathbb{T}}$ (vektorový prostor nad \mathbb{T} odpovídající \mathbb{S}) je stupeň rozšíření $\mathbb{S} \geq \mathbb{T}$. Neboli $[\mathbb{S} : \mathbb{T}] = \dim \mathbb{S}_{\mathbb{T}}$.