1 Úvod

Definice 1.1 (Metrika, metrický prostor)

M množina, $d : M \times M \to [0, \infty)$ je metrika, pokud $\forall x, y, z \in M$ platí:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$d(y, x) = d(x, y),$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Dvojice (M, d) se pak nazývá metrický prostor.

Definice 1.2 (Norma a normovaný lineární prostor (NLP))

Ať $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, pak $||\cdot|| : \mathbf{V} \to [0, \infty)$ je norma, pokud $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$

$$||\mathbf{x}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o},$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{F} : ||\lambda \mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||,$$

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||.$$

Dvojice $(\mathbf{V}, ||\cdot||)$ se pak nazývá normovaný lineární prostor.

Definice 1.3 (Otevřená a uzavřená koule)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP, $x \in \mathbb{M}$, $r > 0$. Pak otevřená koule o středu x a poloměru r je množina $\mathrm{B}(x, r) := \{y \in \mathbb{M}; d(x, y) < r\}$. Uzavřená koule o středu x a poloměru r je množina $\overline{\mathrm{B}}(x, r) := \{y \in \mathbb{M}; d(x, y) \leq r\}$.

Věta 1.1

$(\mathbb{R}^d, ||\cdot||_p)$ je NLP pro $d \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$.

Důkaz
1. krok: $B = \left\{x \in \mathbb{R}^d; ||x||_p \leq 1\right\}$ je konvexní množina (tj. $\forall \lambda \in (0,1)\ \forall x, y \in B : \lambda x + (1-\lambda)y \in B$). Pro $p = \infty$:

$$\forall i \in [d] : |\lambda x_i + (1-\lambda)y_i| \leq \lambda|x_i| + (1-\lambda)|y_i| \leq \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1$$

Pro $p < \infty$:

$$\forall i \in [d] : |\lambda x_i + (1-\lambda)y_i|^p \leq \lambda|x_i|^p + (1-\lambda)|y_i|^p,$$

protože $t \mapsto t^p$ je konvexní funkce. Dopočítáním obou nerovností získáme, že je to opravdu konvexní množina.

2. krok: Pokud $||\cdot||$ splňuje $(i) + (ii)$ a B je konvexní, pak $||\cdot||$ je norma. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, BÚNO $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, položme $\tilde{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$, $\tilde{\mathbf{y}} := \frac{\mathbf{y}}{||\mathbf{y}||}$, tedy:

$$\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||} = \frac{||\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||}\tilde{\mathbf{x}} + \frac{||\mathbf{y}||}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||}\tilde{\mathbf{y}} \in B \text{ (zlomky jsou } \lambda, 1-\lambda).$$

$$||\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||}|| \leq 1 \implies \frac{||\mathbf{x}+\mathbf{y}||}{||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||} \leq 1.$$

3. $||\cdot||_p$ zřejmě splní $(i) + (ii)$ a B je konvexní podle 1. kroku. Tedy $||\cdot||_p$ je norma. $\square$

Poznámka (Značení)

$$l_p^d := \left(\mathbb{R}^d, ||\cdot||_p\right).$$

Definice 1.4 (Konvergence)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost v $\mathbb{M}$, $x \in \mathbb{M}$. Pak (x_n) konverguje k x pokud $d(x_m, x)$ konverguje k 0. Píšeme $x_n \to x$ nebo také $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

2 Otevřené a uzavřené množiny

Definice 2.1 (Vnitřek, vnějšek, hranice)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP. $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak $x_0 \in \mathbb{M}$ je vnitřní bod $A \equiv \exists r > 0 : \mathrm{B}(x_0, r) \subseteq A$. Dále vnitřek (interior) množiny A je množina

$$\mathrm{int}(a) = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je vnitřní bod } A\}.$$

Dále $x_0 \in \mathbb{M}$ je vnější bod $A \equiv \exists r > 0 : \mathrm{B}(x_0, r) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$. Vnějšek (exterior) množiny A je množina

$$\mathrm{ext}(a) = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je vnější bod } A\}.$$

Nakonec $x_0 \in \mathbb{M}$ je hraniční bod $A \equiv x \in \mathbb{M} \setminus (\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{ext}(A))$. Hranice množiny A je množina

$$\partial A = \{x_0 \in \mathbb{M} | x_0 \text{ je hraniční bod } A\}.$$

Pozorování
Zřejmě $\mathrm{int}(A) \subseteq A$.

Zřejmě $\mathrm{ext}(A) = \mathrm{int}(\mathbb{M} \setminus A) \subseteq \mathbb{M} \setminus A$.

Definice 2.2 (Otevřená a uzavřená množina)

Buď $(\mathbb{M}, d)$ MP a $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak A je otevřená $\equiv A \cap \partial A = \emptyset$.

Dále uzávěr množiny A je množina $\overline{A} = A \cup \partial A$. Množina A je poté uzavřená $\equiv \partial A \subseteq A$.

Pozorování
Zřejmě A je otevřená $\Leftrightarrow A = \mathrm{int}(A)$.

Otevřená koule je otevřená množina.

Lemma 2.1

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subseteq N \times A : x_n \to x$. Zároveň následující podmínky jsou ekvivalentní:

$$a) A \text{ je uzavřená}, \qquad b) A = \overline{A}, \qquad \forall (x_n \in A) : x_n \to x \in \mathbb{M} \implies x \in A.$$

Důkaz
$\implies$: Ať $x \in \overline{A}$. Pokud $x \in A$, polož $x_n = x$. Pokud $x \notin A$, pak $x \in \partial A$, tedy $\forall n \; \exists x_n \in \mathrm{B}(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Pak $x_n \to x$ $(0 \leq d(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0)$.

$\Leftarrow$ Ať (x_n) je posloupnost v A, $x_n \to x$. Pokud $x \in A$, jsme hotovi. Pokud $x \notin A$, pak $\forall \varepsilon > 0 \; \exists r_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in \mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap A$. Tedy $x \in \overline{A}$.

$a) \Leftrightarrow b)$ A je uzavřená $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \partial A \subseteq A \Leftrightarrow A = A \cup \partial A = \overline{A}$.

$b) \implies c) \implies a)$ $A = \overline{A} \implies \forall (x_n) : x_n \to x \implies x \in A \; \overline{\text{První část}} \implies \partial A \subseteq A$. □

Věta 2.2 (Základní vlastnosti otevřených množin)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP. Pak

(i) $\mathbb{M}$ a $\emptyset$ jsou otevřené.

(ii) Sjednocení libovolně mnoha otevřených je otevřený.

(iii) Průnik konečně mnoha otevřených je otevřený.

Důkaz

(i) Triviální. (ii) $x \in \bigcup_i M_i$, pak $\exists j : x \in M_j$. Potom M_j je otevřená, tedy existuje $r > 0$: $\mathrm{B}(x, r) \subseteq M_j \subseteq \bigcup_i M_i$. Tedy $\bigcup_i M_i$ je otevřená. (iii) $x \in \bigcap_i M_i$, pak $\forall i\ \exists r_i : \mathrm{B}(x, r_i) \subseteq M_i$. Polož $r = \min_i r_i > 0$ (protože i je z konečné množiny, tedy existuje minimum a to je jistě jeden z těch poloměrů, tedy > 0), pak $\mathrm{B}(x, r) \subseteq \bigcap_i M_i$. Tedy $\bigcap_i M_i$ je otevřená. $\square$

Věta 2.3 (Vztah otevřená a uzavřené množiny)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP, $A \subseteq M$. Pak A je otevřená $\Leftrightarrow$ $\mathbb{M} \setminus A$ je uzavřená.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Zvol (x_n) posloupnost v $\mathbb{M} \setminus A$, $x_n \to x$. Sporem. Nechť $x \in A$. Potom $\exists \varepsilon > 0$: $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \subseteq A$, ale pak $\exists n : x_n \in A$. $\lightning$.

$\Rightarrow$: Zvol $x \in A$. Protože $\mathbb{M} \setminus A$ je uzavřená, tedy $\partial(\mathbb{M} \setminus A) \subseteq \mathbb{M} \setminus A)$, $x \notin \partial(\mathbb{M} \setminus A)$, tedy $\exists \varepsilon > 0$: $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ (to nelze) nebo $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{M} \setminus A) = \emptyset$. Tedy $\exists \varepsilon > 0$: $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{M} \setminus A) = \emptyset$, tj. $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \subseteq A$, tedy A je otevřená. $\square$

Věta 2.4 (Základní vlastnosti uzavřených množin)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak

(i) $\mathbb{M}$ a $\emptyset$ jsou uzavřené.

(ii) Průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřený.

(iii) Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřené.

Důkaz

Plyne z věty výše a de-Morganových pravidel. $\square$

Věta 2.5

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak $\operatorname{int}(A) = \bigcup \{G \subseteq A | G \textit{ otevřené}\}$. $\overline{A} = \bigcap \{F \supseteq A | F \textit{ uzavřené}\}$.

Důkaz
$\subseteq$: $x \in \operatorname{int}(A) \implies \exists \varepsilon > 0 : \mathrm{B}(x, \varepsilon) \subseteq A$, stačí položit $G = \mathrm{B}(x, \varepsilon)$.

$\supseteq$: Ať $G \subseteq A$ otevřená, pak $G = \operatorname{int}(G) \subseteq \operatorname{int}(A)$.

$\subseteq$: $x \in \overline{A}$, pak $\exists (x_n)$ v A: $x_n \to x$. Zvol $F \supseteq A$ uzavřená, pak $x_n \to x \in F$ (z uzavřené se nedá vykonvergovat).

$\supseteq$: Položme $F = \overline{A} \supseteq A$. □

3 Spojitost v metrických prostorech

Definice 3.1 (Spojitost v bodě, spojitost, k-Lipschitzovskost, Lipschitzovskost)

Ať $(\mathbb{M}, d), (\mathbb{N}, e)$ jsou MP, $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{M}$. Potom f je spojitá v $a \equiv \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{M} : d(x, a) < \delta \implies e(f(x), f(a) < \varepsilon)$.

f je spojitá na $\mathbb{M} \equiv \forall a \in \mathbb{M} : f$ je spojitá v a.

f je k-Lipschitzovská $(k > 0) \equiv \forall x, y \in \mathbb{M} : e(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$.

f je Lipschitzovská $\equiv \exists k > 0 : f$ je k-Lipschitzovská.

Pozorování
f je k-Lipschitzovská $\implies$ f je spojitá.

Definice 3.2 (Značení)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$, $x \in \mathbb{M}$. Pak $\operatorname{dist}(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$.

Lemma 3.1

Ať $(\mathbb{M}, d)$ je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Pak

$$(i) \forall x \in \mathbb{M} : d(x, A) = d(x, \overline{A}),$$

$$(ii) \forall x \in \mathbb{M} : d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A},$$

$$(iii)\ \operatorname{dist}(\cdot, A) : \mathbb{M} \to \mathbb{R} \text{ je 1-Lipschitzovská.}$$

Důkaz

(*i*) $\geq$: Jasné (infimum přes menší množinu). $\leq$: Pro $n \in \mathbb{N}$ zvolme $y_n \in \overline{A}$: $d(x, y_n) < \operatorname{dist}(x, \overline{A}) + \frac{1}{n}$. Zvolme dále $x_n \in \mathrm{B}\left(y_n, \frac{1}{n}\right) \cap A$, pak $\operatorname{dist}(x, A) \leq d(x, x_n) \leq d(x, y_n) + d(y_n, x_n) < \operatorname{dist}(x, \overline{A}) + \frac{1}{n}$, celkem $\forall n \in \mathbb{N} : \operatorname{dist}(x, A) < \operatorname{dist}(x, \overline{A}) + \frac{2}{n} \implies \operatorname{dist}(x, A) \leq \operatorname{dist}(x, \overline{A})$.

(*ii*): BÚNO A je uzavřená (jinak podle (*i*)). $\Rightarrow$: Jasné (do inf dosadíme x). $\Rightarrow \forall n \; \exists x_n \in \mathrm{B}(x, \frac{1}{n}) \cap A$ protože $d(x, A) = 0$. Pak ale $x_n \to x$, tedy $x \in A$ z uzavřenosti.

(*iii*): Zvolme $x, y \in \mathbb{M}$. BÚNO $d(x, A) \geq d(y, A)$. Fixujeme $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $y_n \in A : d(y, y_n) < \operatorname{dist}(y, A) + \frac{1}{n}$. Pak

$$|d(x, A) - d(y, A)| = d(x, A) - d(y, A) < d(x, y_n) - \left(d(y, y_n) - \frac{1}{n} \right) \stackrel{\triangle}{\leq} \frac{1}{n} + d(x, y).$$

$\implies$ (n bylo libovolné, přejdeme k limitě) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq 1 \cdot d(x, y)$. $\square$

Lemma 3.2

Ať $(\mathbb{M}, d)$ *je MP. Pak*

$$(i) \forall x \neq y \in \mathbb{M} \; \exists f : \mathbb{M} \to \mathbb{R} \text{ 1-Lipschitzovská, že } f(x) \neq f(y),$$

(*ii*) *Projekce* $\pi_i : (\mathbb{R}^d, || \cdot ||_p) \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_d) \mapsto x_i$ *jsou Lipschitzovské,* $d \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$.

Důkaz

(*i*) Zvol $f := d(\cdot, \{x\})$.

(*ii*) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d : |\pi_i(x_1, \ldots, x_d) - \pi_i(y_1, \ldots, y_d)| = |x_i - y_i|$

$$\leq \begin{cases} p = \infty : & ||\vec{x} - \vec{y}||_\infty \\ p \neq \infty : & \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{d} |x_j - y_j|^p} \end{cases}.$$

$\square$

Tvrzení 3.3

Ať $(\mathbb{M}, d)$, $(\mathbb{N}, e)$ *jsou MP,* $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(*i*) f *je spojitá,*

(*ii*) $f^{-1}(U)$ *je otevřená, kdykoliv* $U \subseteq \mathbb{N}$ *je otevřená,*

(*iii*) $f^{-1}(F)$ *je uzavřená, kdykoliv* $F \subseteq \mathbb{N}$ *je uzavřená.*

Důkaz
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Z věty o doplňcích a toho, že $f^{-1}(\mathbb{N} \setminus U) = \mathbb{M} \setminus f^{-1}(U)$.

(i) $\implies$ (ii): Nechť $U \subseteq \mathbb{N}$ otevřená, $x \in f^{-1}(U)$. Pak $f(x) \in U \implies \exists \varepsilon > 0 : \mathrm{B}(f(x), \varepsilon) \subseteq U$. $\implies$ (f spojitá) $\exists \delta > 0 : y \in \mathrm{B}(x, \delta) \implies f(y) \in \mathrm{B}(f(x), \varepsilon) \subseteq U$, pak $\mathrm{B}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.

(ii) $\implies$ (i): Nechť $x \in \mathbb{M}, \varepsilon > 0$. Pak $f^{-1}(\mathrm{B}(f(x), \varepsilon))$ je otevřená dle (ii). $\implies \exists \delta > 0 : \mathrm{B}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(\mathrm{B}(f(x), \varepsilon))$. Tedy $d(x, y) < \delta \implies f(y) \in \mathrm{B}(f(x), \varepsilon)$. $\square$

Definice 3.3 (Stejnoměrná spojitost)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ a $(\mathbb{N}, e)$ jsou MP, $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$. Pak f je stejnoměrně spojitá, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in \mathbb{M} : d(x, y) < \delta \implies e(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Důsledek
f je stejnoměrně spojitá $\implies$ f je spojitá. (Ale naopak to neplatí.)

f je Lipschitzovská $\implies$ f je stejnoměrně spojitá. (Stejně tak tohle naopak neplatí.)

Definice 3.4 (Izometrie)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ a $(\mathbb{N}, e)$ jsou MP, $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$. Pak f je izometrie, pokud $\forall x, y \in \mathbb{M} : d(x, y) = e(f(x), f(y))$.

Důsledek
Izometrie je 1-Lipschitzovská. (Ale ne naopak.)

Definice 3.5 (Homeomorfismus)

Ať $(\mathbb{M}, d)$ a $(\mathbb{N}, e)$ jsou MP, $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$. Pak f je homeomorfismus, pokud f je spojitá bijekce a f^{-1} je spojitá.

Důsledek
Izometrie na je homeomorfismus. (Ale opačně to neplatí.)

Lemma 3.4

I interval, $f : I \to \mathbb{R}$, že $|f'(x)| \leq C, \forall x \in \operatorname{int}(I) \implies f$ je C-Lipschitzovská.

Důkaz
Ať $a < b \in I \implies$ (Lagrange) $\exists \zeta \in (a, b) : |\frac{f(b)-f(a)}{b-a}| = |f'(\zeta)| \leq C$, tj. $|f(b) - f(a)| \leq C|b - a|$. $\square$

Definice 3.6 (Topologicky ekvivalentní)

Řekneme, že σ a σ_1 jsou topologicky ekvivalentní, pokud

$$\{A \subseteq \mathbb{Y} : A \text{ je otevřená v } (\mathbb{Y}, \sigma)\} = \{A \subseteq \mathbb{Y} : A \text{ je otevřená v } (\mathbb{Y}, \sigma_1)\}\,.$$

Tvrzení 3.5

Buďte $(\mathbb{X}, \varrho)$, $(\mathbb{Y}, \sigma)$ MP, $f : (\mathbb{X}, \varrho) \to (\mathbb{Y}, \sigma)$ homeomorfismus. Definujeme pro všechna $y, y' \in \mathbb{Y}$ zobrazení $\sigma_1 \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \to [0, \infty)$ předpisem

$$\sigma_1(y, y') = \varrho(f^{-1}(y), f^{-1}(y')).$$

Pak σ_1 je metrika na $\mathbb{Y}$, $f : (\mathbb{X}, \varrho) \to (\mathbb{Y}, \sigma_1)$ je izometrie a metriky σ a σ_1 jsou topologicky ekvivalentní.

Důkaz

Metrika: Banální, cvičení pro nás. Izometrie: Nechť $x, x' \in \mathbb{X}$ jsou libovolné body.

$$\sigma_1(f(x), f(x')) = \varrho\left(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(x'))\right) = \varrho(x, x'),$$

a tedy f je izometrie.

Topologická ekvivalence: Nechť $U \subseteq \mathbb{Y}$ je otevřená vzhledem k σ. Pak $f^{-1}(U)$ je otevřená (f je homeomorfismus), ale f je izometrie, tedy f^{-1} je izometrie, tudíž f^{-1} je spojitá. Tj.

$$U = f\left(f^{-1}(U)\right) = \left(f^{-1}\right)^{-1}\left(f^{-1}(U)\right) \text{ je otevřená.}$$

Podobně pokud U je σ_1-otevřená, je σ-otevřená. □

Věta 3.6

Buďte ϱ_1, ϱ_2 metriky na $\mathbb{X}$. Pak ϱ_1 a ϱ_2 jsou topologicky ekvivalentní $\Leftrightarrow$

$$(\forall x \in \mathbb{X}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in \mathbb{X} : \varrho_1(x, y) < \delta \implies \varrho_2(x, y) < \varepsilon) \wedge (\forall x \in \mathbb{X}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in \mathbb{X} : \varrho_2(x, y)$$

Důkaz

Snadné cvičení. □

Definice 3.7 (Diametr, omezená množína)

Buď $(\mathbb{X}, \varrho)$ MP, $A \subseteq \mathbb{X}$. Definujeme $\operatorname{diam}_\varrho(A) = \sup\{\varrho(x, y) : x, y \in A\}$.

Řekneme, že A je omezená, pokud $\operatorname{diam}_\varrho(A) < \infty$.

Definice 3.8 (Omezená metrika)

ϱ je na $\mathbb{X}$ omezená pokud $\mathbb{X}$ je omezená.

4 Operace s metrickými prostory

Definice 4.1 (Operace)

Je-li $(\mathbb{X}, \varrho)$ MP, $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$, pak metrický prostor $(\mathbb{Y}, \varrho|_{\mathbb{Y}\times\mathbb{Y}})$ nazýváme podprostorem prostoru $(\mathbb{X}, \varrho)$, značíme $(\mathbb{Y}, \varrho)$.

Důkaz

Že $(\mathbb{Y}, \varrho)$ je MP je zřejmé. $\square$

Tvrzení 4.1

Buď $(\mathbb{X}, \varrho)$ MP, $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$. Pak:

1) Pokud $G \subseteq \mathbb{X}$ je otevřená v $(\mathbb{X}, \varrho)$, pak $G' = G \cap \mathbb{Y}$ je otevřená v $(\mathbb{Y}, \varrho)$.

2) Pokud $G' \subseteq \mathbb{Y}$ je otevřená v $(\mathbb{Y}, \varrho)$, pak $\exists G \subseteq \mathbb{X}$ otevřená v $(\mathbb{X}, \varrho) : G' = G \cap \mathbb{Y}$.

Důkaz

1) Nechť $y \in G'$. Protože G je otevřená v $\mathbb{X}$, tak $\exists r > 0 : \mathrm{B}_{\mathbb{X},\varrho}(y, r) \subseteq G$. Tedy $\mathrm{B}_{\mathbb{Y},\varrho}(y, r) = \mathrm{B}_{\mathbb{X},\varrho}(y, r) \cap \mathbb{Y} \subseteq G \cap \mathbb{Y} = G'$.

2) Nechť je dána G' otevřená v $(\mathbb{Y}, \varrho)$. Pak $\forall x \in G' \; \exists \varepsilon(x) > 0 : \mathrm{B}_{\mathbb{Y},\varrho}(x, \varepsilon(x)) \subseteq G'$. Zřejmě $G' = \bigcup_{x \in G'} \mathrm{B}_{\mathbb{Y},\varrho}(x, \varepsilon(x))$.

Položme $G = \bigcup_{x \in G'} \mathrm{B}_{\mathbb{X},\varrho}(x, \varepsilon(x))$. Potom je $G \cap \mathbb{Y} = G'$. G je otevřená, jelikož je sjednocením otevřených množin. $\square$

Definice 4.2 (Součet MP)

Mějme MP $\{\mathbb{X}_\alpha, \varrho_\alpha\}_{\alpha \in I}$, které splňují $\forall \alpha \in I \; \forall x, y \in \mathbb{X}_\alpha : \varrho_\alpha(x, y) \leq 1$. Sumou prostorů $(\mathbb{X}_\alpha, \varrho_\alpha)$ nazýváme prostor

$$\sum_{\alpha \in I} (\mathbb{X}_\alpha, \varrho) = (\mathbb{X}, \varrho),$$

kde

$$\mathbb{X} = \coprod_{\alpha \in I} \mathbb{X}_\alpha = \{(x, \alpha) | x \in \mathbb{X}_\alpha, \alpha \in I\},$$

$$\varrho((x, \alpha), (y, \beta)) = 1, \text{ pokud } \alpha \neq \beta, \varrho_\alpha(x, y), \text{ pokud } \alpha = \beta.$$

Definice 4.3 (Součin (spočetně mnoha) MP)

Buďte $\{\mathbb{X}_i, \varrho_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ MP, že $\forall i \in \mathbb{N} : \operatorname{diam}(\mathbb{X}_i) \leq 1$. Součinem prostorů $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ nazýváme metrický prostor (je nutno, ale jednoduché dokázat)

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} := (\mathbb{X}, \varrho), \qquad \mathbb{X} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{X}_i \wedge \forall f, g \in \mathbb{X} : \varrho(f, g) = \sum_{i=1}^{*} \frac{\varrho_i(f(i), g(i))}{2^i}.$$

Tvrzení 4.2

Buďte $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$, $i \in \mathbb{N}$, *MP, kde* $\operatorname{diam}\mathbb{X}_i \leq 1$. *Nechť* $(\mathbb{X}, \varrho) = \prod_{i\in\mathbb{N}}(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ *a budiž* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{X}$ *posloupnost bodů v* $\mathbb{X}$, $f \in \mathbb{X}$. *Pak* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *v* $(\mathbb{X}, \varrho) \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} f_n(i) = f(i)$ *v* $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Nechť $f_n \to f$. Budiž dáno libovolné $i_0 \in \mathbb{N}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\forall n \geq n_0 : \varrho(f_n, f) < \varepsilon \cdot 2^{-i_0}$. Tedy pro

$$n \geq n_0 : \varepsilon \cdot 2^{-i_0} > \varrho(f_n, f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} \geq \frac{\varrho_{i_0}(f_n(i_0), f(i_0))}{2^{i_0}},$$

tj. $\varrho_{i_0}(f_n(i_0), f(i_0)) < \varepsilon$. tedy $\lim_{n\to\infty} f_n(i_0) = f(i_0)$.

$\Leftarrow$: Nechť $\forall i \in \mathbb{N} : f_n(i) \to f(i)$. Nechť $\varepsilon > 0$. Najděme $i_0 \in \mathbb{N}$, že $\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, i_0\}$ najdeme n_i, že $\forall n \geq n_i : \varrho_i(f_n(i), f(i)) < \frac{\varepsilon}{i_0}$. Položme $\tilde{n} := \max\{n_1, n_2, \ldots, n_{i_0}\}$. Pak $n \geq \tilde{n}$: jest

$$\varrho(f_n, f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} = \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{\varrho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\varepsilon/i_0}{2} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =$$

□

5 Totálně omezené a separabilní MP

Definice 5.1 (ε-síť, ε-separovanost, totální omezenost)

Buď $(\mathbb{M}, d)$ MP, $A \subseteq \mathbb{M}$, $\varepsilon > 0$. Řekneme, že A je ε-síť pro $\mathbb{M}$, jestliže $\forall x \in \mathbb{M}\ \exists a \in A\ \forall x \in \mathrm{B}(a, \varepsilon) : d(x, a) < \varepsilon$.

A je ε-separovaná, pokud $\forall x, y \in A : d(x, y) \geq \varepsilon$.

$\mathbb{M}$ je totálně omezený, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \subseteq \mathbb{M} : A$ je konečná ε-síť pro $\mathbb{M}$.

$\mathbb{M}$ je separabilní, pokud $\exists A \subseteq \mathbb{M}$ spočetná: $\overline{A} = \mathbb{M}$. (Tj. A je hustá v $\mathbb{M}$.)

Věta 5.1

MP $(\mathbb{M}, d)$ *je totálně omezený, právě když* $\forall \varepsilon > 0$ *je každá* ε*-separovaná množina konečná.*

Důkaz

$\Longrightarrow$: Nechť $\varepsilon > 0$, $B \subseteq \mathbb{M}$ je ε-separovaná. Chceme B je konečná. Protože $\mathbb{M}$ je TO, existuje konečná $\frac{\varepsilon}{4}$-síť $A \subseteq \mathbb{M}$. Pro každé $x \in B$ zvolíme nějaký bod $a_x \in A : d(x, a_x) < \frac{\varepsilon}{4}$. Pak pro $x \neq y$, $x, y \in B$ platí $a_x \neq a_y$: $d(a_x, a_y) \geq d(x, y) - d(x, a_x) - d(y, a_y) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Tj. zobrazení $B \to A : x \mapsto a_x$ je prosté. Ale A je konečná tedy B je konečná.

$\Leftarrow$ Nechť $\varepsilon > 0$; chceme najít konečnou ε-síť. Vezmeme si $B \subseteq M$ ε-separovaná, která je maximální (co do inkluze). Tvrdíme, že B je automaticky ε síť: Zvolme $x \in \mathbb{M}$. Pak existuje $b \in B : d(x, b) < \varepsilon$. Kdyby ne: $\forall b \in B : d(x, b) \geq \varepsilon$. To by znamenalo, že $B \cup \{x\} \supset B$ je ε-separovaná, což je spor s maximalitoui B. Tj. B je opravdu ε-síť pro $\mathbb{M}$.

Druhá část důkazu však potřebuje tzv. Zornovo lemma, abychom mohli brát B maximální. $\square$

Věta 5.2

Buď $(\mathbb{M}, d)$ *MP,* $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$*. Pokud* $(\mathbb{M}, d)$ *je TO, pak i* $(\mathbb{N}, d)$ *je TO. (Tedy TO se zachovává na podprostory.)*

Důkaz

Nechť $A \subseteq \mathbb{N}$ je ε-separovaná. Chceme: A je konečná. (Pak $(\mathbb{N}, d)$ je TO podle V18). Ale $A \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$, tedy $A \subseteq \mathbb{M}$ je ε-separovaná v $\mathbb{M}$. Ale $\mathbb{M}$ je TO, takže A musí být konečná. $\square$

Věta 5.3

$(\mathbb{M}, d)$ *je MP,* $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$*. Je-li* $(\mathbb{N}, d)$ *TO, pak* $(\overline{\mathbb{N}}, d)$ *je TO. (TO se zachovává na uzávěr.)*

Důkaz

$\varepsilon > 0$ dáno, chceme konečnou ε-síť v prostoru $(\overline{\mathbb{N}}, d)$. Nechť $A \subseteq \mathbb{N}$ je konečná $\varepsilon/2$-síť pro $\mathbb{N}$ (ta existuje, neboť $(\mathbb{N}, d)$ je TO). Chceme je ε-sít pro $(\overline{\mathbb{N}}, d)$. Zvolme libovolný bod $x \in \overline{\mathbb{N}}$. Chceme $\exists y \in A : d(x, y) < \varepsilon$.

Protože $x \in \overline{\mathbb{N}}$, existuje $z \in \mathbb{N} : d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože A je $\varepsilon/2$-síť pro $\mathbb{N}$, existuje $y \in A : d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Tudíž A je ε-síť pro $\overline{\mathbb{N}}$. $\square$

Věta 5.4

Nechť $(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$*,* $\alpha \in I$ *jsou MP,* $\operatorname{diam} M_\alpha \leq 1$, $\forall \alpha \in I$*. Pak* $\sum_{\alpha \in I} (\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ *je TO* $\Leftrightarrow$ *I je konečná a* $\forall \alpha \in I : (\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ *je TO.*

Důkaz

$\implies$: Nechť $\sum$ je TO. Nechť $\varepsilon > 0$. Pokud $\varepsilon \geq 1$, pak libovolná jednobodová množina je ε-síť. $\varepsilon < 1$. Nechť $A \subseteq \sum(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ je konečná ε-síť. Položme $A_\alpha := \{x \in \mathbb{M}_\alpha | (x, \alpha) \in A\}$. Potom A_α je zřejmě ε-síť $(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$.

$\Leftarrow$: Podle předpokladů, pro dané $\varepsilon > 0$, $\forall \alpha \in I\ \exists A_\alpha \subseteq \mathbb{M}_\alpha : A_\alpha$ je konečná ε-síť (protože $(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$ jsou TO). $A \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \times \{\alpha\}$ je ε-síť pro $\sum_{\alpha \in I}(\mathbb{M}_\alpha, d_\alpha)$. □

Věta 5.5

Nechť $(\mathbb{M}_i, d_i)$ *jsou MP,* $i \in \mathbb{N}$*, a nechť* $\forall i : \operatorname{diam} \mathbb{M}_i \leq 1$*. Pak* $(\mathbb{M}, d) = \prod_{i \in \mathbb{N}}(\mathbb{M}_i, d_i)$ *je TO* $\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : (\mathbb{M}_i, d_i)$ *je TO.*

Důkaz

$\implies$: (Lze provést i důkaz přímo z definic) Zvolme $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \mathbb{M}$. Definujeme zobrazení $\varphi : (\mathbb{M}_i, d_i) \to (\mathbb{M}, d)$ tak, že $\varphi(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots) \in \mathbb{M}$. Pak φ je izometrie. Tedy $(\mathbb{M}_i, \frac{d_i}{2^i})$ lze chápat jako podprostor (neboli izometrickou kopii podprostoru) $(\mathbb{M}, d)$. Ale $\mathbb{M}$ je TO, tedy i jeho podprostor je TO.

$\Leftarrow$: Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolíme $i_0 \in \mathbb{N} : \sum_{i=i_0}^\infty \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro $i \in \{1, \ldots, i_0 - 1\}$ najdeme konečné $\varepsilon/2$-sítě A_i pro $\mathbb{M}_i$. $S = \{(x_i) \in \mathbb{M} | x_i \in A_i, i \in \{1, \ldots, i_0 - 1\} \vee x_i = a_i, i \geq i_0\}$. S je konečná, neboť $|S| \prod_{i=1}^{i_0-1} |A_i|$. S je ε-síť pro $\mathbb{M}$. □

Věta 5.6

Buď $(\mathbb{M}, d)$ *MP. Pak následující je ekvivalentní: 1)* $\mathbb{M}$ *je separabilní, 2) existuje spočetná množina otevřených podmnožin* $B_n \subseteq \mathbb{M}$ *tak, že* $\forall G \subseteq \mathbb{M}$ *otevřená:* $\exists I \subseteq \mathbb{N} : G = \bigcup_{n \in I} B_n$*, 3) každý podprostor* $\mathbb{M}$ *je separabilní, 4) každá* ε*-separovaná množina je spočetná.*

Důkaz
1) $\implies$ 2): Uvažujme nějakou spočetnou hustou podmnožinu $D \subseteq \mathbb{M}$. $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. $B_{(i,j)} := \mathrm{B}(x_i, 1/j)$. $\mathbb{N}^2$ je spočetná, tedy těchto koulí je spočetně mnoho. Nechť je dána libovolná otevřená $G \subseteq \mathbb{M}$. Chceme $G = \bigcup_{(i,j)\in I} B_{(i,j)}$, kde $I := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 | B_{i,j} \subseteq G\}$. Zvolme $x \in G$. Chceme $\exists (i,j) \in I : x \in B_{(i,j)}$. Protože G je otevřená, $\exists \varepsilon > 0 : \mathrm{B}(x, \varepsilon) \subseteq G$. Podle definice hustoty najdeme $\frac{1}{j} < \frac{\varepsilon}{2}$. $\exists i \in \mathbb{N} : x_i \in (x, \frac{1}{j})$. Pak $B_{(i,j)} \subseteq \mathrm{B}(x,\varepsilon) \subseteq G$. Tedy $x \in \bigcup_{(i,j)\in I} B_{(i,j)}$.

2) $\implies$ 1): Nechť B_n mají vlastnost z 2). Chceme ukázat, že M je separabilní. Vybereme $x_n \in B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je hustá. Skutečně, budiž $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{M}$ otevřená, pak $G = \bigcup_{n\in I} B_n$ pro nějaké $I \subseteq \mathbb{M}$. Tím pádem $\forall n \in I : x_n \in B_n \subseteq G$, tj. $(I \neq \emptyset)$ některé prvky D jsou v G.

2) $\implies$ 3): Buď $\mathbb{O} \subseteq \mathbb{M}$ libovolný podprostor. Chceme: $\mathbb{O}$ je separabilní. Stačí, že $\mathbb{O}$ splňuje 2), tj. má spočetnou bázi otevřených množin. $\mathbb{M}$ má spočetnou bázi otevřených množin $\{B_n | n \in \mathbb{N}\}$. Tvrdíme, že $\{B_n \cap \mathbb{O} | n \in \mathbb{N}\}$ má vlastnost z 2) (tj. je to báze) pro $\mathbb{O}$. Tedy všechny podprostory $\mathbb{M}$ jsou separabilní.

3) $\implies$ 4): Nechť $\mathbb{M}$ splňuje 3). Budiž dáno $\varepsilon > 0$ a libovolná ε-separovaná podmnožina $A \subseteq \mathbb{M}$. Chceme $|A| \leq |\mathbb{N}|$. A, jakožto podprostor $\mathbb{M}$, je separabilní. Pro libovolné $x \in A$ jest $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap A = \{x\}$. Je-li nyní D spočetná hustá v (A, d), pak $\forall x : A \cap \mathrm{B}(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, tj. $\forall x \in A : x \in D$, tedy $D = A$ a A je spočetná.

4) $\implies$ 1): Zornovo lemma: Pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ uvažujme maximální $\frac{1}{n}$-separovanou podmnožinu $S_n \subseteq \mathbb{M}$. Dokážeme, že $S := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ je hustá v $\mathbb{M}$: Nechť $x \in \mathbb{M}$, $\varepsilon > 0$ jsou dány. Najděme $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$. Tvrdíme, že existuje $y \in S_n : d(x,y) < \frac{1}{n}$. Kdyby ne, pak $S_n \cup \{x\}$ by byla $\frac{1}{n}$-separovaná, což by byl spor s maximalitou S_n. Tedy $y \in S$ a $d(x,y) < \frac{1}{n} < \varepsilon$. $\square$

Tvrzení 5.7

Pro prostory $(\mathbb{M}_n, d_n)$, $n \in \mathbb{N}$ *splňující* $\operatorname{diam} \mathbb{M}_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, *platí* $\prod_{i=1}^{\infty} (\mathbb{M}_i, d_i)$ *je separovaný* $\Leftrightarrow \forall i : (\mathbb{M}_i, d_i)$ *je separabilní.*

Důkaz
Cvičení. $\square$

Důsledek
$\mathbb{M}$ je separovaný $\implies$ $\mathbb{M}$ je TO.

6 Úplné prostory

Definice 6.1 (Cauchyovská posloupnost, úplný prostor)

Buď $(\mathbb{M}, \varrho)$ MP, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků $\mathbb{M}$. Řekneme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Řekneme, že prostor $(\mathbb{M}, \varrho)$ je úplný, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost konverguje (tj. $\exists x \in \mathbb{M} : \lim_{n\to\infty} x_n = x$).

Věta 6.1 (Cantorův princip)

Buď $(\mathbb{M}, \varrho)$ MP. $\mathbb{M}$ je úplný $\Leftrightarrow$ pro každou posloupnost uzavřených množin $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, $F_n \subseteq \mathbb{M}$, kde $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ a $\operatorname{diam} F_n \to 0$, platí $\bigcap F_n \neq \emptyset$.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Vybereme prvky $x_n \in F_n, n \in \mathbb{N}$ libovolně. Máme tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Tato posloupnost je Cauchyovská, jelikož pro $\varepsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\forall n \geq n_0 : \operatorname{diam} F_n < \varepsilon$. Pak $\forall n, m \geq n_0 : x_n \in F_n, x_m \in F_m \subseteq F_{n_0}$, tj. $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Tedy existuje $x \in \mathbb{M} : \lim_{n\to\infty} x_n = x$. Tvrdíme, že $x \in \bigcap F_n$. Nechť je dána $m \in \mathbb{N}$. Pak $\forall n \geq m : x_n \in F_m$. Ale F_m je uzavřená, a tedy $\lim_{n\to\infty} x_n \in F_m$.

$\Leftarrow$: Nechť platí podmínka věty. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{M}$ cauchyovská. Chceme dokázat, že je konvergentní. Položme $F_n = \overline{\{x_i | i \geq n\}}$. Zřejmě $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$. $\operatorname{diam} F_n \to 0$, protože $\{x_n\}$ je cauchyovská. Tedy podle předpokladů existuje $x \in \bigcap F_n$.

Ukážeme, že $x = \lim x_n$: Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N} : \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Pro libovolné $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x) \leq \operatorname{diam} F_n \leq \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Tedy $x_n \to x$. $\square$

Věta 6.2 (Úplnost a podprostory)

Buď $(\mathbb{M}, \varrho)$ MP, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$ jeho podprostor. Potom $(\mathbb{N}, \varrho)$ je úplný $\Leftrightarrow$ $\mathbb{N}$ je uzavřený v $\mathbb{M}$.

Důkaz

$\Longrightarrow$: Kdyby $\mathbb{N}$ nebyla uzavřená množina, existovala by posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$, že $\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{N}$. Ale protože $\{x_n\}$ je konvergentní v $\mathbb{M}$, je cauchyovská v $\mathbb{M}$, a tedy i v $\mathbb{N}$. Nemá ale v $\mathbb{N}$ limitu a tak $\mathbb{N}$ není úplný.

$\Leftrightarrow$: Nechť $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$ je uzavřená v $\mathbb{M}$. Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská v $\mathbb{N}$, pak je cauchyovská i v $\mathbb{M}$, a protože $\mathbb{M}$ je úplný, tak $\exists x \in \mathbb{M} : x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Ale $\mathbb{N}$ je uzavřený, takže $x \in \mathbb{N}$. $\square$

Věta 6.3 (Úplnost a součin)

Nechť $(\mathbb{M}_i, \varrho_i)$, $i \in \mathbb{N}$ jsou MP, že $\forall i \in \mathbb{N} : \operatorname{diam} \mathbb{M}_i \leq 1$. Pak $\prod_{i=1}^{\infty} (\mathbb{M}_i, \varrho_i)$ je úplný $\Leftrightarrow$ $\forall i : (\mathbb{M}_i, \varrho_i)$ je úplný.

Důkaz
$\Longrightarrow$: $(\mathbb{M}_i, \varrho_i)$ lze chápat jako podprostor součinu $\prod(\mathbb{M}_i, \varrho_i)$. Lze si snadno rozmyslet, že je uzavřený (cvičení). Tedy podle předchozí věty je úplný.

$\Leftarrow$: Nechť $\{x_n\} \subseteq \prod(\mathbb{M}_i, \varrho_i) =: \mathbb{M}$ je cauchyovská posloupnost v $\mathbb{M}$, $x_n(i) \in \mathbb{M}_i$. Tvrdíme, že $\forall i \in \mathbb{N} : \{x_n(i)\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská v $\mathbb{M}_i$. Buď $\varepsilon > 0$. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\forall m, n \geq n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2^i}$.

$$\varrho(x_n, x_m) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varrho_j(x_n(j), x_m(j))}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Tedy $\varrho_i(x_n(i), x_m(i)) < \varepsilon$. Tudíž existuje limita $x(i) := \lim_{n\to\infty} x_n(i)$, tj. $x \in \prod_{j=1}^\infty(\mathbb{M}_j, \varrho_j)$. Jednoduše (standardní zanedbatelnost „vocasu řady“) dokážeme, že $\varrho(x_n, x) \to 0$. $\square$

Věta 6.4 (Bairova)

Nechť $(\mathbb{M}, \varrho)$ je úplný MP. Nechť U_n jsou otevřené, husté podmnožiny $\mathbb{M}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$ je hustá.

Důkaz
Stačí, že $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$ protne libovolnou kouli. Mějme tedy dáno x, ε. Buď $B := \mathrm{B}(x, \varepsilon)$. Protože U_1 je hustá, existuje $x_1 \in U_1 \cap B$. Ale U_1 i B jsou otevřené, takže i $U_1 \cap B$ je otevřená, takže existuje $\varepsilon_1 > 0$, že $\mathrm{B}(x_1, 2\varepsilon_1) \subseteq U_1 \cap B$. Tedy $\overset{\mathrm{B}(x_1,\varepsilon_1)}{\subseteq} U_1 \cap B$. Analogicky pokračujeme (navíc chceme, aby $\varepsilon_i > \varepsilon_{i+1}$).

Tím jsme dostali klesající (co do inkluze) posloupnost uzavřených množin, jejichž diametr jde k 0. Tedy průnik těchto množin je neprázdný podle Cantorova principu. $\square$

Důsledek
Existuje spojitá funkce, která nemá v žádném bodě derivaci.

Definice 6.2 (Zajímavost)

I množina, $l_\infty := \{f : I \to \mathbb{R} \text{ je omezená}\}$. $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)|$.

Tvrzení 6.5 (Zajímavost)

(l_∞, d_∞) je úplný.

Věta 6.6 (Zajímavost)

Nechť $(\mathbb{M}, \varrho)$ je MP, $\overline{D} = \mathbb{M}$. Pak existuje izometrie $\varphi : (\mathbb{M}, \varrho) \to l_\infty(D)$.

7 Kompaktnost

Definice 7.1 (Pokrytí, otevřené pokrytí, konečná průniková vlastnost)

Ať $\mathcal{S}$ je systém podmnožin množiny X. Řekneme, že $\mathcal{S}$ je pokrytí X, pokud $\bigcup \mathcal{S} = X$.

Je-li $(\mathbb{X}, \varrho)$ MP, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$, říkáme, že $\mathcal{S}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$, pokud $\mathcal{S}$ je pokrytí $\mathbb{X}$ a každá $S \in \mathcal{S}$ je otevřená množina v $(\mathbb{X}, \varrho)$.

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ má konečnou průnikovou vlastnost, pokud $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S} : \bigcap S_i \neq \emptyset$

Definice 7.2 (Kompaktní prostor)

MP $(\mathbb{X}, \varrho)$ se nazývá kompaktní, pokud z každého otevřeného pokrytí $\mathcal{S}$ lze vybrat konečnou $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} : \bigcup \mathcal{S}' = \mathbb{X}$.

Definice 7.3

Ať $(\mathbb{M}, \varrho)$ je MP, $A \subseteq \mathbb{M}$. Řekneme, že $x \in \mathbb{M}$ je hromadným bodem množiny A, pokud $\forall \varepsilon > 0 (\mathrm{B}(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Věta 7.1 (Charakterizace kompaktnosti)

Pro $(\mathbb{M}, \varrho)$ *je ekvivalentní:*

1. $\mathbb{M}$ *je kompaktní.*
2. *Je-li* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{M})$ *soubor uzavřených množin s konečnou průnikovou vlastností, pak* $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.
3. *Je-li* $A \subseteq \mathbb{M}$ *nekonečná, pak* A *má hromadný bod v* $\mathbb{M}$.
4. *Z každé posloupnosti v* $\mathbb{M}$ *lze vybrat konvergentní podposloupnost.*
5. *Každá spojitá funkce* $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ *je omezená.*
6. *Každá spojitá funkce* $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ *nabývá svého minima a maxima.*
7. *Z každého spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné pokrytí.*

Důkaz
1 $\implies$ 2: Ať $\mathcal{F}$ je soubor uzavřených množin v $(\mathbb{M}, \varrho)$ s konečnou průnikovou vlastností. Pro spor ať $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Ať $\mathcal{S} := \{\mathbb{M} \setminus F | F \in \mathcal{F}\}$. $\mathbb{M} \setminus F$ je otevřená pro $F \in \mathcal{F}$. $\bigcup \mathcal{S} = \mathbb{M} \setminus \bigcap \mathcal{F} = \mathbb{M} \setminus \emptyset = \mathbb{M}$. Tedy $\mathcal{S}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{M}$. $\mathbb{M}$ je kompaktní, tedy $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S} : S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n = \mathbb{M}$. $\forall i \leq n \; \exists F_i \in \mathcal{F} : S_i = \mathbb{M} \setminus F_i$. $F_1 \cap \ldots \cap F_n = \mathbb{M} \setminus (S_1 \cup \ldots \cup S_n) = \mathbb{M} \setminus \mathbb{M} = \emptyset$. Tedy $\mathcal{F}$ nemá konečnou průnikovou vlastnost. $\lightning$.

2 $\implies$ 3: Ať $A \subseteq \mathbb{M}$ je nekonečná. Ať pro spor A nemá hromadný bod. Uvažujme $a \in A$, $A \setminus \{a\}$ je uzavřená množina (protože jinak by bod z $\overline{A} \setminus A$ byl hromadným bodem). $\mathcal{F} := \{A \setminus \{a\} \, | a \in A\}$ je soubor uzavřených množina a navíc má konečnou průnikovou vlastnost (můžeme odečíst pouze konečně mnoho $a_i \in A$, ale těch je nekonečně). Dle 2) je $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Ale $\bigcap \{A \setminus \{a\} \, | a \in A\} = A \setminus A = \emptyset$. $\lightning$.

3 $\implies$ 4: Ať $x_n \in \mathbb{M}$. Pokud $A := \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ je konečná, najdeme konstantní (tedy konvergentní) podposloupnost. Jinak A má hromadný bod $x \in \mathbb{M}$. Najdeme podposloupnost konvergující k x, indukcí $n_1 := 1$, $n_i < n_{i+1}$: $\varrho(x_{n_k}) < \frac{1}{k}$, $k > 1$:

$\mathrm{B}(x_{n_k}, \frac{1}{k+1}) \cap A$ je nekonečná, tedy existuje $n_{k+1} > n_k$, že je splněna chtěná podmínka. Jednoduše následně ukážeme i to, že tato posloupnost konverguje k x.

4 $\implies$ 5: Zase sporem: Ať $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ je spojitá neomezená funkce. Tj. $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in \mathbb{M} : |f(x_n)| \geq n$. Dle 4) ale víme, že posloupnost x_n má konvergentní podposloupnost x_{n_k}. $x_{n_k} \to x \in \mathbb{M}$. Ale f je spojitá, tedy $f(x_{n_k}) \to f(x)$. $\lightning$.

5 $\implies$ 6: $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ spojitá, f nenabývá maxima (búno). Dle 5 je f omezená, tedy $\sup_{x \in \mathbb{M}} f(x) = \alpha < \infty$. $g := \frac{1}{\alpha - f}$, $\forall x \in \mathbb{M} : f(x) \neq \alpha$, tedy g je spojitá (a dobře definovaná). $\exists x_n \in \mathbb{M} : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$. $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = \infty$. Tedy g není omezená, spor s 5.

6 $\implies$ 7: Ať $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots\}$ je spočetné otevřené pokrytí $\mathbb{M}$. Položme $V_n := S_1 \cup \ldots \cup S_n$. Ať pro spor $\mathcal{S}$ nemá konečné podpokrytí. Tedy $V_n \subset \mathbb{M}$, $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$, $\bigcup V_n = \mathbb{M}$. Můžeme předpokládat, že $V_i \subset V_{i+1}$ libovolně. Vybereme $x_i \in V_{i+1} \setminus V_i$ libovolně. Pro $i \in \mathbb{N}$ ať $\varepsilon_i = \min_{j \leq i} \varrho(x_i, x_j)$ a splňuje $\mathrm{B}(x_i, \varepsilon_i) \subseteq V_{i+1}$.

$$f(x) = \frac{4k}{\varepsilon_k} \left(\frac{\varepsilon_k}{4} - \varrho(x, x_n) \right), \text{ pro } x \in \mathrm{B}(x_{n_k}, \frac{\varepsilon_k}{4}), \text{ a } f(x) = 0 \text{ jinak.}$$

$f(x_k) = k$, $k \in \mathbb{N}$, tedy f není omezená. Ale je spojitá. Spor s 6.

7 $\implies$ 1: Nejprve ukážeme, že $\mathbb{M}$ je separabilní, sporem: $\mathbb{M}$ není separabilní, tedy podle charakterizace separability existuje $\varepsilon > 0$ a existuje $A \subseteq \mathbb{M}$, A nespočetná, A je ε-separovaná. Ať $A' \subseteq A$ je spočetná, nekonečná. Zřejmě A' je ε-separovaná. A' je uzavřená v $\mathbb{M}$. $\{M \setminus A'\} \cup \left\{\mathrm{B}(a, \frac{\varepsilon}{2}) | a \in A'\right\}$ spočetné otevřené pokrytí $\mathbb{M}$. Tento systém ale nemá konečné podpokrytí, což je spor s 7, tedy $\mathbb{M}$ je separabilní.

Ať $\mathcal{S}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{M}$. $\mathbb{M}$ je separabilní, tedy existuje systém $\{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ otevřených množin, že $\forall G \subseteq \mathbb{M}$ otevřenou $\exists J \subseteq \mathbb{N}$:

$$G = \bigcup \{B_n | n \in J\}.$$

Tedy $\forall S \in \mathcal{S} \; \exists J_S \subseteq \mathbb{N} : S = \bigcup \{B_n | n \in J_S\}$. $J := \bigcup_{S \in \mathcal{S}} J_S \subseteq \mathbb{N}$. $\forall n \in J \; \exists S_n \in \mathcal{S} : B_n \subseteq S_n$. Tj. $\bigcup B_n = \bigcup \mathcal{S} = \mathbb{M}$. Tedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = M$. Tedy $\{S_1, S_2, \ldots\}$ je spočetné podpokrytí $\mathbb{M}$. Dle 7 existuje $k \in \mathbb{N} : S_1 \cup \ldots \cup S_k = \mathbb{M}$. $\square$

Věta 7.2

Ať $(\mathbb{M}, \varrho)$ *je MP. Pak* $\mathbb{M}$ *je kompaktní, právě když* $\mathbb{M}$ *je úplný a totálně omezený.*

Důkaz

$\implies$: Úplnost: Ať $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ jsou uzavřené neprázdné a $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_1 = 0$. Chceme, že $\bigcap F_n \neq \emptyset$. $\mathcal{F} := \{F_1, F_2, \ldots\}$ je systém uzavřených množin s konečnou průnikovou vlastností. Podle předchozí věty je $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Tj. $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Totální omezenost: Ať $\varepsilon > 0$. $\{\mathrm{B}(x, \varepsilon) | x \in \mathbb{M}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{M}$. Z kompaktnosti existuje konečné podpokrytí, tj. $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{M} : \mathrm{B}(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup \mathrm{B}(x_n, \varepsilon) = \mathbb{M}$. Tedy $\{x_1, \ldots, x_n\}$ je ε-síť pro $\mathbb{M}$. Tedy $(\mathbb{M}, \varrho)$ je totálně omezený.

$\Leftarrow$: Ukážeme, že každá nekonečná $A \subseteq \mathbb{M}$ má hromadný bod. Indukcí najdeme klesající posloupnost $B_n, n \in \mathbb{N}$, uzavřených množin, že $\operatorname{diam} B_n \leq \frac{1}{n}$, $B_n \cap A$ je nekonečná:

Z totální omezenosti $\mathbb{M}$ existuje konečné pokrytí $\mathbb{M}$ uzavřenými koulemi $U_1, \ldots, U_n$ s diametrem ≤ 1. $\exists i \leq n : U_i \cap A$ je nekonečná. Položme $B_1 := U_i$.

Máme-li $B_1, \ldots, B_n$, víme, že B_n je totálně omezená, $B_n \cap A$ je nekonečná. Z totální omezenosti B_n existují uzavřené $V_1, \ldots, v_l$, že $B_n = V_1 \cup \ldots \cup V_l$, že $B_n = V_1 \cup \ldots \cup V_l$, $\operatorname{diam} V_l \leq \frac{1}{n+1}$. Existuje $j \leq l : V_j \cap A$ je nekonečná. $B_{n+1} := V_j$. $B_{n+1} \subseteq B_n$.

Nyní z úplnosti $\mathbb{M}$ je $\bigcap B_n \neq \emptyset$. Ať $a \in \bigcap B_1$. a je hromadným bodem A: Ať $\varepsilon > 0$, pak $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. $B_n \subseteq \mathrm{B}(a, \varepsilon)$, $\mathrm{B}(a, \varepsilon) \cap A$ je nekonečná, tedy a je hromadný bod A. □

Tvrzení 7.3 (Zachovávání kompaktnosti operacemi)

1. Je-li $(\mathbb{X}, \varrho)$ *kompaktní MP a* $Y \subseteq \mathbb{X}$ *uzavřená, pak* $(\mathbb{Y}, \varrho|_{\mathbb{Y}})$ *je kompaktní.*

2. Je-li $(\mathbb{X}, \varrho)$ *kompaktní MP a* $(\mathbb{Y}, \varrho)$ *MP,* $f : (\mathbb{X}, \varrho) \to (\mathbb{Y}, \sigma)$ *spojité, pak* $(f(\mathbb{X}), \sigma_{f(\mathbb{X})})$ *je kompaktní.*

3. Je-li $(\mathbb{X} < \varrho)$ *MP a* $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$*, že* $(\mathbb{Y}, \varrho|_{\mathbb{Y}})$ *je kompaktní, pak* $\mathbb{Y}$ *je uzavřená v* $(\mathbb{X}, \varrho)$*.*

4. Jsou-li $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ *kompaktní MP,* $i \in \mathbb{N}$*,* $\varrho_i \leq 1$*, pak* $\prod_{i\in\mathbb{N}}(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ *je kompaktní.*

5. Jsou-li $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ *MP a* $(\mathbb{X}, \varrho)$ *je suma prostorů* $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$*,* $i \in I$*. Pak* $(\mathbb{X}, \varrho)$ *je kompaktní* $\Leftrightarrow \forall i \in I$*:* $(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ *je kompaktní a* $\{i \in I | \mathbb{X}_i \neq \emptyset\}$ *je konečná.*

Důkaz
1. Kompaktnost $\Leftrightarrow$ úplnost + totální omezenost. Uzavřený podprostor úplného je úplný, tedy $\mathbb{Y}$ je úplný (jelikož $\mathbb{X}$ je úplný). Podprostor totálně omezeného je totálně omezený, tedy $\mathbb{Y}$ je totálně omezený. Tedy $\mathbb{Y}$ je kompaktní.

2. Ať $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $f(\mathbb{X})$. f je spojité, tedy $f^{-1}(U)$ jsou otevřené pro $U \in \mathcal{U}$. Navíc $\{f^{-1}(U) | U \in \mathcal{U}\}$ je pokrytí $\mathbb{X}$. $\mathbb{X}$ je kompaktní, tedy existuje konečné podpokrytí $\{f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n)\}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$. $\mathbb{X} = f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n) = f^{-1}(U_1 \cup \ldots \cup U_n)$, tedy $f(\mathbb{X}) \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$, tedy $\{U_1, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{U}$ je konečné podpokrytí $f(\mathbb{X})$. Tedy $f(\mathbb{X})$ je kompaktní.

3. $\mathbb{Y}$ je kompaktní, tedy úplný. Ale tím pádem je uzavřený (úplný podprostor je nutně uzavřený).

4. Převedením na úplnost a totální omezenost (součin spočetně mnoha úplných MP je úplný, stejně tak součin spočetně mnoha totálně omezených MP je totálně omezený).

5. $\implies$ $J := \{i \in I | \mathbb{X}_i \neq \emptyset\}$ je konečná sporem: Ať J je nekonečná. Pro $j \in J$ vybereme $x_j \in \mathbb{X}_j$. $A := \{x_k | j \in J\}$. A je nekonečná, $\mathbb{X}$ kompaktní, tedy podle charakterizace kompaktnosti má A hromadný bod $a \in \sum(\mathbb{X}_i, \varrho)$. $\mathrm{B}(a, \frac{1}{2}) \cap A$ nekonečná, $\exists i \neq j, i, j \in J : x_i, x_j \in \mathrm{B}(a, \frac{1}{2})$. $\varrho(x_i, x_j) < 1$, spor, neboť $\varrho(x_i, x_j) = 1$.

$\forall i \in I : \mathbb{X}_i$ je kompaktní: $\mathbb{X}_i$ je uzavřená podmnožina $\sum(\ldots \mathbb{X}_i, \varrho_i)$. Podle 1. je $\mathbb{X}_i$ kompaktní.

$\Leftarrow$: $\{i \in I | \mathbb{X}_i \neq \emptyset\}$ je konečná, $\forall i \in I : \mathbb{X}_i$ kompaktní. Chceme, že $\sum(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ je kompaktní. Ať $A \subseteq \sum(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$ je nekonečná. Nutně existuje $i \in I : \mathbb{X}_i \cap A$ má hromadný bod v $\mathbb{X}_i$. Ten je zřejmě hromadným bodem celé množiny A. Tedy podle charakterizace kompaktnosti pomocí hromadných bodů nekonečných množin je $\sum(\mathbb{X}_i, \varrho_i)$. $\square$

Lemma 7.4 (Lebesgueovo číslo)

Ať $(\mathbb{X}, \varrho)$ je kompaktní MP a $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí $\mathbb{X}$. Pak existuje $\delta > 0$, ze pro každé $x \in \mathbb{X}$ existuje $U \in \mathcal{U} : \mathrm{B}(x, \delta) \subseteq U$.

Důkaz
$\mathbb{X}$ kompaktní, tedy existuje konečné podpokrytí $\mathcal{U}$: $\{U_1, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{U}$. Pokud $\exists i \in \{1, \ldots, n\} : U_i = \mathbb{X}$, jsme hotovi, $\delta = 1$. Předpokládejme tedy, že $\forall i \leq n : U_i \subsetneq \mathbb{X}$. Ať $C_i := \mathbb{X} \setminus U_i$, C_i uzavřené, $C_i \neq \emptyset$. Ať $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{dist}_\varrho(x, C_i)$. f je spojité. $f : \mathbb{X} \to [0, \infty)$, $\forall x \in \mathbb{X} : \exists i \in \{1, \ldots, n\} : x \in U_i$, $x \notin C_i, \mathrm{dist}_\varrho(x, C_i) > 0$. tedy $f : \mathbb{X} \to (0, \infty)$. $\mathbb{X}$ kompakt, tedy f nabývá svého minima $\delta := \min f(\mathbb{X}) > 0$.

Nyní pro $x \in \mathbb{X} : f(x) \geq \delta$. $f(x) =$ aritmetický průměr n čísel, tedy $\exists i \in \{1, \ldots, n\} : \mathrm{dist}_\varrho(x, C_i) \geq \delta$. Tj. $\mathrm{B}_\varrho(x, \delta) \cap C_i = O$, tj. $\mathrm{B}_\varrho(x, \delta) \subseteq U_i$. $\square$

Důsledek
Ať $(\mathbb{X},\varrho)$, $(\mathbb{Y},\sigma)$ jsou MP, $(\mathbb{X},\varrho)$ kompaktní, $f:(\mathbb{X},\varrho)\to(\mathbb{Y},\sigma)$ spojitá. Pak f je stejnoměrně spojitá.

Důkaz
Ať $\varepsilon>0$ dáno. $\left\{f^{-1}\left(\mathrm{B}_\sigma\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)|y\in\mathbb{Y}\right\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{X}$ (f spojitá, tedy vzor otevřené je otevřená). $\mathbb{X}$ kompaktní. Tedy ať δ je Lebesgueovo číslo z předchozího lemmatu příslušné uvedenému otevřenému pokrytí, tj. $\forall x\in\mathbb{X}\ \exists y\in\mathbb{Y}:\mathrm{B}_\varrho(x,\delta)\subseteq f^{-1}\left(\mathrm{B}_\sigma\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$. $f(\mathrm{B}_\varrho(x,\delta))\subseteq\mathrm{B}_\sigma\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Tedy pokud $x,x'\in\mathbb{X},\varrho(x,x')<\delta$, pak $x'\in\mathrm{B}_\varrho(x,\delta)$ a pak $f(x),f(x')\in\mathrm{B}_\sigma\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ pro nějaké $y\in\mathbb{Y}$. Tedy $\sigma(f(x),f(x'))<\varepsilon$. $\square$

Lemma 7.5

Ať $(\mathbb{X},\varrho)$ a $(\mathbb{Y},\sigma)$ jsou MP, $(\mathbb{X},\varrho)$ kompaktní, $f:(\mathbb{X},\varrho)\to(\mathbb{Y},\sigma)$ spojitá bijekce. Pak f je homeomorfismus.

Důkaz
Potřebujeme pouze ověřit, že $f^{-1}(\mathbb{Y},\sigma)\to(\mathbb{X},\varrho)$ je spojité. Ať $G\subseteq\mathbb{X}$ je otevřená. $(f^{-1})^{-1}(G)$ je otevřená v $(\mathbb{Y},\sigma)$, jelikož $f(G)=\mathbb{Y}\setminus f(\mathbb{X}\setminus\mathbb{G})$ je otevřený (vzor je uzavřená, tedy kompakt, tedy obraz je kompakt, tedy uzavřený, tedy doplněk je otevřený). Tedy f^{-1} je spojitá. $\square$

Věta 7.6 (Vlastnosti Cantorova diskontinua a Hilbertovy kostky)

Pro každý neprázdný kompaktní MP $(\mathbb{X},\varrho)$ existuje spojitá surjekce $f:C\to\mathbb{X}$. Pro každý separabilní MP $(\mathbb{Y},\sigma)$ existuje spojitá $g:\mathbb{Y}\to Q$, že $g:\mathbb{Y}\to g(\mathbb{Y})$ je homeomorfismus.

8 Souvislost

Definice 8.1 (Souvislý prostor)

MP $(\mathbb{X},\varrho)$ se nazývá souvislý, pokud $\mathbb{X}\neq\emptyset$ a pokud $\mathbb{X}=U\cup V$ pro U,V otevřené, neprázdné, pak $U\cap V\neq\emptyset$.

Poznámka
$(\mathbb{X},\varrho)$ není souvislý, právě když $\mathbb{X}=\emptyset$ nebo $\mathbb{X}=U\cup V$, že $U\cap V=\emptyset$, U,V otevřené neprázdné. (Tj. existuje obojetná množina $\neq\emptyset,\mathbb{X}$.)

Souvislost je topologický pojem.

Věta 8.1 (Charakterizace souvislosti)

Pro neprázdný MP $(\mathbb{X},\varrho)$ je ekvivalentní: 1) $\mathbb{X}$ je souvislý, 2) $\mathbb{X}$ má právě 2 obojetné podmnožiny, 3) je-li $f:\mathbb{X}\to[0,1]$ spojitá a $f(\mathbb{X})\supseteq\{0,1\}$, pak je f na.

Důkaz
1) $\implies$ 2) : $\emptyset, \mathbb{X}$ jsou vždy obojetné, $\mathbb{X} \neq \emptyset$. Kdyby existovala obojetná $A \subsetneq \mathbb{X}$, pak $A \neq \emptyset, \mathbb{X}$, $\mathbb{X} \setminus A \neq \emptyset, \mathbb{X}$, pak $\mathbb{X} = A \cup (\mathbb{X} \setminus A)$ je sjednocení dvou otevřených neprázdných disjunktních množin, tedy spor se souvislostí.

2) $\implies$ 3) : Ať $f : \mathbb{X} \to [0,1]$ je spojitá, $f(\mathbb{X}) \supseteq \{0,1\}$. Ať $\exists r \in (0,1) : f^{-1}(r) = \emptyset$. Intervaly $[0,r)$ a $(r,1]$ jsou otevřené množiny v $[0,1]$, tedy i jejich vzory (neprázdné disjunktní množiny) jsou otevřené. Tj. $\mathbb{X} = f^{-1}([0,1]) = f^{-1}([0,r)) \cup f^{-1}(r) \cup f^{-1}((r,1]) = f^{-1}([0,r)) \cup f^{-1}((r,1])$. A tedy $\emptyset, \mathbb{X}, f^{-1}((r,1]), f^{-1}([0,r))$ jsou obojetné množiny. $\lightning$.

3) $\implies$ 1) : Ať $\mathbb{X} = U \cup V$, kde U, V jsou otevřené neprázdné. Chceme $U \cap V \neq \emptyset$. Sporem: $U \cap V = \emptyset$. Definujeme $f : \mathbb{X} \to [0,1]$, $f(x) = 0$, $x \in U$ a $f(x) = 1$, $x \in V$. f je spojitá, jelikož $f^{-1}(G) \in \{\emptyset, \mathbb{X}, U, V\}$, pro $G \subseteq [0,1]$, což jsou otevřené množiny. f tedy nenabývá např. hodnoty $1/2$. $\lightning$. $\square$

Důsledek
$[0,1]$ je souvislá.

Důkaz
Každá spojitá funkce $f : [0,1] \to [0,1]$ má Darbouxovu vlastnost, tedy z předchozí charakterizace je $[0,1]$ souvislá. $\square$

Věta 8.2

Ať $(\mathbb{X}, \varrho)$ je MP a ať pro každou dvojici $a, b \in \mathbb{X}$ existuje souvislá množina $S(a,b)$, že $S(a,b) \supseteq \{a,b\}$. Pak $\mathbb{X}$ je souvislý.

Důkaz
Sporem: $\mathbb{X} = U \cup V$, $U \neq \emptyset \neq V$, U, V otevřené, $U \cap V = \emptyset$. Ať $a \in U, b \in V$ libovolné. $S(a,b)$ je souvislá, ale $S(a,b) = (S(a,b) \cap U) \cup (S(a,b) \cap V)$, což jsou otevřené neprázdné (obsahují a a b), tedy máme spor se souvislostí $S(a,b)$. $\square$

Věta 8.3

Ať $(\mathbb{X}, \varrho)$ je MP a $\mathcal{S}$ je soubor nějakých souvislých podmnožin $\mathbb{X}$, pro který je $\bigcap \mathcal{S} \neq \emptyset$, pak $\bigcup \mathcal{S}$ je souvislý podprostor $\mathbb{X}$.

Důkaz
Ať U, V jsou otevřené v $\bigcup \mathcal{S}$ a $U \cap V = \emptyset$. Chceme dokázat $U = \emptyset$ nebo $V = \emptyset$. Fixujeme $x_0 \in \bigcap \mathcal{S}$. BÚNO $x_0 \in U$. Pro libovolné $y \in \bigcup \mathcal{S}$ existuje $S \in \mathcal{S} : y \in S$. $S = (S \cap U) \cup (S \cap V)$, což jsou otevřené množiny a $S \cap U$ neprázdná, tedy $S \cap V = \emptyset$, jelikož S je souvislá. Tudíž $S \subseteq U$. Celkově $\bigcup \mathcal{S} \subseteq U$. Tedy $V = \emptyset$. $\square$

Důsledek
Je-li A souvislá podmnožina MP $(\mathbb{X}, \varrho)$, pak každá množina M, splňující $A \subseteq M \subseteq \overline{A}$, je souvislá.

Důkaz
Ať $x \in \overline{A} \setminus A$. Ukážeme, že $A \cup \{x\}$ je souvislá: Ať $A \cup \{x\} = U \cup V$, kde U, V jsou disjunktní otevřené v $A \cup \{x\}$. BÚNO $x \in U$. U otevřená, $x \in \overline{A}$, tedy $A \cap U \neq \emptyset$.

$A = (A \cap V) \cup (A \cap U)$, kde $A \cap U \neq \emptyset$ a $A \cap V = V$ jsou otevřené množiny, tedy $V = \emptyset$. Tedy $A \cup \{x\}$ je souvislá.

Ať M splňuje předpoklady, $\mathcal{S} := \{A \cup \{x\} \,|x \in M\}$. $\bigcup \mathcal{S} = M$, $\bigcap \mathcal{S} = A \neq \emptyset$, tedy M je souvislá. $\square$

Věta 8.4

Obraz souvislého MP při spojitém zobrazení je souvislý prostor.

Důkaz
Ať $f : (\mathbb{X}, \varrho) \to (\mathbb{Y}, \sigma)$ na a $(\mathbb{X}, \varrho)$ souvislý. Chceme, že $\mathbb{Y}$ je souvislý. Ať $g : \mathbb{Y} \to [0,1]$ je spojitá a $g(\mathbb{Y}) \supseteq \{0,1\}$. Chceme g je na. Ale $h := g \circ f$ je spojité a zjevně na $[0,1]$ podle charakterizace souvislosti, tedy podle char. souv. g je na. $\square$

Definice 8.2

Ať $(\mathbb{X}, \varrho)$ je MP. Množina $M \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá oblouk, pokud M je homeomorfní s $[0,1]$.

Body $h(0), h(1)$ se nazývají krajní body oblouku M.

Prostor $(\mathbb{X}, \varrho)$ se nazývá obloukově souvislý, pokud $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y$ existuje $M \subseteq \mathbb{X}$ oblouk s krajními body x a y.

Důsledek
Každý obloukově souvislý prostor $\mathbb{X}$ je souvislý.

Důkaz
$\forall a, b \in X,\ S(a,b) = \{a\}$, pokud $a = b$, nebo $S(a,b) =$ oblouk s krajními body a, b. Z předchozích vět je tak $\mathbb{X}$ souvislý. $\square$

Definice 8.3

Ať $(\mathbb{X}, \varrho)$ je MP. Množina C_x se nazývá komponenta (souvislosti) bodu x v prostoru $\mathbb{X}$, pokud C_x je největší souvislá podmnožina $\mathbb{X}$ obsahující x.

Důkaz (Korektnost „největší“)
Z předchozích vět víme, že pokud vezmeme souvislé množiny obsahující bod x, tak jejich sjednocení je souvislé. $\square$

Poznámka
$\{C_x | x \in \mathbb{X}\}$ tvoří rozklad MP $(\mathbb{X}, \varrho)$.

Definice 8.4

Souvislý kompaktní MP se nazývá kontinuum.

Poznámka
Kontinuum je topologický pojem.

Spojitý obraz kontinua je kontinuum.

Věta 8.5

Ať K_n je kontinuum pro každé $n \in \mathbb{N}$.

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$$

Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ je kontinuum.

Důkaz
Každé K_n je kompaktní, tedy uzavřené v K_1. $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ je uzavřená v K_1, K_1 kompaktní, tedy $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ je kompaktní.

Souvislost $K := \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$: Ať pro spor K není souvislé: $K = A \cup B$, A, B jsou otevřené v K, $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cap B = \emptyset$. $\exists U, v$ otevřené disjunktní v K_1, že $U \cap K = A$, $V \cap K = B$. $K \subseteq U \cup V$ otevřené v K_1. Tvrdíme, že existuje $n \in \mathbb{N} : K_n \subseteq U \cup V$. To dokážeme sporem: kdyby ne, $K_n \setminus (U \cup V) \neq \emptyset, n \in \mathbb{N}$. $F_n := K_n \setminus (U \cup V)$ kompaktní neprázdný, $F_{n+1} \subseteq F_1$. Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$, protože $\{F_n | n \in \mathbb{N}\}$ má konečnou průnikovou vlastnost. $x \in \bigcap F_n \subseteq \bigcap K_n$, $x \in K_n \setminus (U \cup V)$, Spor s $K \subseteq U \cup V$.

Tedy $K_n = (K_n \cap U) \cup (K_n \cap V)$, což jsou neprázdné otevřené (v K_n) disjunktní množiny. ↯. $\square$

9 Hausdorffova metrika

Poznámka (Značení)
Ať $\mathbb{X}$ je MP. Označíme

$$\varkappa(X) = \{K \subseteq \mathbb{X} | K \neq \emptyset, K \text{ kompaktní}\}.$$

Definice 9.1

Pro MP $(\mathbb{X}, \varrho)$ definujeme $\varrho_H : \varkappa(\mathbb{X}) \times \varkappa(\mathbb{X}) \to \mathbb{R}$,

$$\varrho_H(A, B) = \max\left\{\sup_{x\in A} \operatorname{dist}_\varrho(x, B), \sup_{x\in B} \operatorname{dist}_\varrho(x, A)\right\}.$$

ϱ_H se nazývá Hausdorffova metrika, $(\varkappa(\mathbb{X}), \varrho_H)$ se nazývá hyperprostor.

Věta 9.1

ϱ_H je metrika na $\varkappa(\mathbb{X})$.

Důkaz
Ať $A \in \varkappa(\mathbb{X}) : \varrho_H(A, A) = 0$.

Ať $A, B \in \varkappa(\mathbb{X})$, $A \neq B$, $\varrho_H(A, B) \overset{?}{>} 0$. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq \emptyset$. Ať $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. $\varrho(x, A) > 0$ nebo $\varrho(x, B) > 0$. Tedy $\varrho_H(A, B) > 0$.

Symetrie je triviální.

Pomocné tvrzení: Ať $C \in \varkappa(\mathbb{X})$, $x, y \in \mathbb{X}$. Pak $\varrho(x, C) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, C)$. Důkaz: Je-li $c \in C : \varrho(x, c) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, c)$. Přejdeme k infimu: $\varrho(x, C) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, C)$.

Ať $A, B, C \in \varkappa(\mathbb{X})$. Pro $a \in A$, $b \in B$: $\varrho(a, C) \leq \varrho(a, b) + \varrho(b, C) \leq \varrho(a, b) + \varrho_H(B, C)$. Přejdeme k infimu:

$$\varrho(a, C) \leq \varrho(a, B) + \varrho_H(B, C) \leq \varrho_H(A, B) + \varrho_H(B, C).$$

To platí pro všechna $a \in A$, tedy přejdeme k supremu:

$$\sup_{a\in A} \varrho(a, C) \leq \varrho_H(A, B) + \varrho_H(B, C).$$

Analogicky $\sup_{c\in C} \varrho(c, A) \leq \ldots$. Tedy $\varrho_H(A, C) \leq \varrho_H(A, B) + \varrho_H(B, C)$. □

Tvrzení 9.2

Ať $(\mathbb{X}, \varrho)$ je MP, pak zobrazení $f : (\mathbb{X}, \varrho) \to (\varkappa(\mathbb{X}), \varrho_H)$, $f(x) = \{x\}$ je izometrické vnoření na uzavřenou podmnožinu $\varkappa(\mathbb{X})$.

Důkaz
$\varrho_H(f(x), f(y)) = \varrho(x, y)$ triviálně.

$M := \{\{x\} \,|x \in \mathbb{X}\}$ je uzavřená v $\varkappa(\mathbb{X})$: Doplněk je otevřená: Ať $A \in \varkappa(\mathbb{X})$, $|A| \geq 2$ (tj. A je v doplňku M). Fixujeme $x, y \in A, x \neq y : \varrho(x, y) =: \varepsilon > 0$. $\mathrm{B}_{\varrho_H}(A, \frac{\varepsilon}{3}) \cap M = \emptyset$ sporem: Kdyby existovalo $z \in \mathbb{X} : \{z\} \in B_{\varrho_H}(A, \frac{\varepsilon}{3})$, pak $\varrho_H(\{z\}, A) < \frac{\varepsilon}{3}$, $\varrho(x, z) < \frac{\varepsilon}{3}$, $\varrho(y, z) < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\varepsilon = \varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(y, z) < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

$\lightning$. □

Věta 9.3

Pro MP $(\mathbb{X}, \varrho)$ *platí:*

1. $(\mathbb{X}, \varrho)$ *je úplný* $\Leftrightarrow$ $(\varkappa(\mathbb{X}), \varrho_h)$ *je úplný.*
2. $(\mathbb{X}, \varrho)$ *je totálně omezený* $\Leftrightarrow$ $(\varkappa(\mathbb{X}), \varrho_H)$ *je totálně omezený.*
3. $(\mathbb{X}, \varrho)$ *je kompaktní* $\Leftrightarrow$ $(\varkappa(\mathbb{X}), \varrho_H)$ *je kompaktní.*
4. $(\mathbb{X}, \varrho)$ *je kontinuum* $\Leftrightarrow$ $(\varkappa(\mathbb{X}), \varrho_H)$ *je kontinuum.*

Důkaz (Pouze náznak)
1), 2) $\leftarrow$: Z předchozího je $\mathbb{X}$ uzavřený podprostor úplného (tot. omezeného) prostoru, tedy úplný (tot. omezený) prostor.

1) $\implies$: Předpokládejme, že (A_n) je cauchyovská v $(\varkappa(\mathbb{X}), \varrho_H)$. $B_n := \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}$. $B := \bigcap B_n$. Lze ukázat, že $B \in \varkappa(\mathbb{X})$, $A_n \to B$.

2) $\implies$: Ať $\varepsilon > 0$. Ať A_0 je konečná ε-síť v $(\mathbb{X}, \varrho)$. $\mathcal{P}(A_0) \setminus \{\emptyset\}$ (je konečná a) je ε-síť v $(\varkappa(\mathbb{X}), \varrho_H)$.

3) plyne z 1) a 2). 4) bez náznaku. □

9.1 Iterované funkční systémy

Definice 9.2

Ať $(\mathbb{X}, \varrho)$, $(\mathbb{Y}, \sigma)$ jsou MP, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ se nazývá kontrakce, pokud existuje $K < 1$, že $\forall x, y \in \mathbb{X} : \sigma(f(x), f(y)) \leq K \cdot \varrho(x, y)$.

Věta 9.4 (Banachova věta)

Ať $(\mathbb{X}, \varrho)$ *je neprázdný úplný MP,* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *kontrakce. Pak* f *má právě jeden pevný bod,* *tj. bod $x \in \mathbb{X} : f(x) = x$.*

Důkaz

Ať $x_0 \in \mathbb{X}$ libovolně. $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots$. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská:

$$\varrho(x_{n+1}, x_n) \leq K \cdot \varrho(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq K^n \cdot \varrho(x_1, x_0).$$

$\sum_{n=1}^{\infty} K^n \cdot \varrho(x_1, x_0)$ konverguje. Tedy pro $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \sum_{n=n_0}^{\infty} K^n \cdot \varrho(x_1, x_0) < \varepsilon$. Tedy $m \geq n > n_0$:

$$\varrho(x_m, x_n) \leq \varrho(x_m, x_{m-1}) + \varrho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + \varrho(x_{n+1}, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m} K^i \varrho(x_0, x_1) \leq \varepsilon.$$

$(\mathbb{X}, \varrho)$ je úplný, (x_n) cauchyovská, tedy $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{X}$. Tvrdíme, že $f(x) = x$:

$$f(x) = f(* \lim_{n\to\infty} x_n) \overset{f \text{ spojitá}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Jednoznačnost: Kdyby $f(x) = x$, $f(y) = y$, pak

$$\varrho(x, y) \leq K \cdot \varrho(f(x), f(y)) = K \varrho(x, y) \implies \varrho(x, y) = 0 \implies x = y.$$

□

Definice 9.3

Ať $(\mathbb{X}, \varrho)$ je MP, $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ kontrakce, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\{f_1, \ldots, f_n\}$ se nazývá iterovaný funkční systém. Množina $K \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá invariantní (vůči tomuto IFS), pokud $K = f_1(K) \cup \ldots \cup f_n(K)$.

Věta 9.5

Ať $(\mathbb{X}, \varrho)$ je úplný neprázdný MP a $\{f_1, \ldots, f_n\}$ IFS na $\mathbb{X}$. Pak existuje jediná kompaktní neprázdná invariantní množina pro tento IFS.

Důkaz

Víme $(\varkappa(\mathbb{X}), \varrho_H)$ je úplný. Definujeme $F : \varkappa(\mathbb{X}) \to \varkappa(\mathbb{X})$, $F(L) := f_1(L) \cup \ldots \cup f_n(L) \in \varkappa(\mathbb{X})$. F je kontrakce. Podle Banachovy věty existuje právě jedno $K \in \varkappa(\mathbb{X}) : F(K) = K$. Tím je důkaz hotov. □