

Organizační úvod

Poznámka

Jako vždycky, jen v implikacích u zkoušky budou i pojmy z předchozích semestrů.

1 Stejněměrná konvergence posloupností a řad funkcí

1.1 Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

Definice 1.1

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť máme funkce $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_n : J \rightarrow \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$

- konverguje bodově k f na J , pokud $\forall x \in J : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, neboli:

$$\forall x \in J \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

- konverguje stejnoměrně k f na J (značíme $f_n \rightrightarrows f$ na J), pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

- konverguje lokálně stejnoměrně, pokud pro každý omezený uzavřený $[a, b] \subset J$ platí $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ (značíme $f_n \xrightarrow{\text{Loc}} f$ na J).

Věta 1.1 (Kritérium stejnoměrné konvergence)

Nechť $f, f_n : J \rightarrow \mathbb{R}$, pak

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } J \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

┌
Důkaz

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 : \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

└

□

┌ *Poznámka* (Pro spojité funkce)

$$\Leftrightarrow \|f_n - f\|_{C(J)} \rightarrow 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{C(J)} f.$$

Věta 1.2 (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)

Nechť $f_n : J \rightarrow \mathbb{R}$, pak

$$(\exists f : f_n \rightrightarrows f \text{ na } J) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

┌ *Důkaz*

„ \Rightarrow “: Víme $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Tedy

$$\forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon.$$

„ \Leftarrow “: Víme $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Toto použijeme pro pevné $x \in J$. Pro posloupnost $a_n = f_n(x)$ máme splněnou BC podmínku pro posloupnost reálných čísel, tj. $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$.

Označíme si $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Nyní v BC podmínce provedeme limitu $n \rightarrow \infty$. Tím dostaneme přesně definici stejnoměrné konvergence. \square

Věta 1.3 (Moore-Osgood)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^$ je krajní bod intervalu J . Nechť $f_n, f : J \rightarrow \mathbb{R}$ splňují*

- $f_n \rightrightarrows f$ na J ,
- existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$.

Pak existují $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a jsou si rovny.

┌ *Důkaz*

┌ Příště. \square

Důsledek

Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na I a nechť f_n jsou spojité na I . Pak f je spojitá na I .

Poznámka

Obdobně lze definovat stejnoměrnou spojitost i pro libovolnou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ a $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ a platí, že stejnoměrná limita je spojitá (stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá).

Důkaz (Moore-Osgood)

Z BC podmínky

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Provedeme $\lim_{x \rightarrow x_0}$ a dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Tedy a_n splňuje BC podmínku, a tudíž $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

Nechť $\varepsilon \geq 0$. Z definice $f_n \rightrightarrows f$

$$\exists n_0 \forall x \in J : |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zároveň předpokládejme $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$ (zvolíme si n_0 jako maximum). Máme pevnou funkci f_{n_0} a $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{n_0}(x) = a_{n_0}$. Tedy

$$\exists \delta > 0 \forall x \in P(x_0, \delta) \cap J : |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Nyní $\forall x \in P(x_0, \delta) \cap J$ platí

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

□

Věta 1.4 (O záměně limity a derivace)

Nechť funkce f_n , $n \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na intervalu (a, b) a nechť

- $\exists x_0 \in (a, b) : \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje,
- pro derivace f'_n platí $f'_n \xrightarrow{Loc} f'$ na (a, b) .

Potom existuje funkce f tak, že $f_n \xrightarrow{Loc} f$ na (a, b) , f má vlastní derivaci a platí $f'_n \xrightarrow{Loc} f'$ na (a, b) .

┌

Důkaz

Nechť $x_0 \in [c, d] \subset (a, b)$. Víme $f'_n \rightrightarrows$ na $[c, d]$. Chceme ukázat $f_n \rightrightarrows f$ na $[c, d]$ ($\implies f_n \xrightarrow{\text{Loc}} f$ na (a, b)). Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $f'_n \rightrightarrows$

$$\exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in [c, d] : |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon$$

a zároveň $\forall m, n \geq n_0 : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$. Nyní $\forall x \in [c, d]$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \\ &\leq |h(x) - h(x_0)| + \varepsilon \leq |x - x_0| \cdot |h'(\xi)| + \varepsilon \leq (d - c) \cdot \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

kde $h = f_n - f_m$ a $\xi \in (x_0, x)$ resp. (x, x_0) z Lagrangeovy věty (cvičení: předpoklady jsou splněné).

Zbývá dokázat „ $f'_n \rightrightarrows f'$ na $[c, d]$ “: Zvolme $z \in [c, d]$ a položme $\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z}$ pro $x \in [c, d] \setminus \{z\}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $f'_n \rightrightarrows$

$$\exists n_0 \forall n, m \geq n_0 \forall x \in [c, d] : |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon.$$

Podobně jako v první části důkazu

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(z) - f_m(z))| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \cdot |x - z| < \varepsilon \cdot |x - z|.$$

Nyní $\forall m, n \geq n_0 \forall x \in [c, d] \setminus \{z\}$:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \left| \frac{f_n(x) - f_m(z) - (f_m(x) - f_m(z))}{x - z} \right| < \frac{\varepsilon \cdot |x - z|}{|x - z|} = \varepsilon.$$

Podle BC $\varphi_n \rightrightarrows$ na $[c, d] \setminus \{z\}$. Tedy φ_n splňuje předpoklady Moore-Osgoodovy věty ($\lim_{x \rightarrow z} \varphi_n(x) = \lim_{x \rightarrow z} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} = f'_n(z)$). Tedy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow z} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} &= \lim_{x \rightarrow z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z) = \lim_{x \rightarrow z} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = f'(z). \end{aligned}$$

A jelikož víme, že $f'_n \rightrightarrows$, tak $f'_n \rightarrow f' \implies f'_n \rightrightarrows f'$. □

└

1.2 Stejnomořná konvergence řady funkcí

Definice 1.2

Řekněme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na intervalu J , pokud posloupnost částečných součtů $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na J .

Věta 1.5 (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaných na intervalu J . Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow na J$, pak posloupnost funkcí $u_n(x) \Rightarrow 0$ na J .

┌
Důkaz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$$

speciálně pro $m = n + 1$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in J : \left| \sum_{i=1}^{n+1} u_i - \sum_{i=1}^n u_i \right| = |u_{n+1}(x)| < \varepsilon \implies u_n \Rightarrow 0.$$

└

□

Věta 1.6 (Weierstrassovo kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaných na intervalu J . Pokud pro

$$\sigma_n = \sup \{|u_n(x)| : x \in J\}$$

platí, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow na J$.

┌
Důkaz

Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro konečnou $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$

$$\exists n_0 \forall m, n \geq n_0, m > n : \left| \sum_{k=n+1}^m \sigma_k \right| < \varepsilon.$$

Chceme ověřit BC podmínku pro $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$:

$$\begin{aligned} \forall m, n \geq n_0, m > n \forall x \in J : |s_m(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{k=1}^m u_k(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m \sigma_k < \varepsilon. \end{aligned}$$

┌ Tedy podle BC podmínky $\sum u_k \Rightarrow$.

□

Věta 1.7 (O spojitosti a derivování řady funkcí)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu (a, b) .

- Nechť u_n jsou spojitě na (a, b) a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xRightarrow{Loc} na (a, b)$. Pak $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je spojitá na (a, b) .
- Nechť funkce u_n , $n \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na (a, b) a nechť $\exists x_0 \in (a, b) :$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \xrightarrow{Loc} na (a, b)$. Pak je funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ dobře definovaná a diferencovatelná a navíc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{Loc} F(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \xrightarrow{Loc} F'(x)$ na (a, b) .

┌
Důkaz

„První bod“: Funkce $s_n(x) = \sum_{n=1}^k u_n(x)$ jsou spojitě a $s_k \xrightarrow{Loc} na (a, b)$. Tedy podle důsledku věty z dřívějška (stejněměrná limita spojitých funkcí je spojitá) je jejich limita lokálně spojitá, tedy spojitá.

„Druhý bod“: Na s_k použijeme větu z dřívějška (pokud mají derivace stejnoměrnou limitu, pak i funkce ji mají a shoduje se až na derivaci). Ověříme podmínky, tedy že $s_k(x) = \sum_{n=1}^k u_n(x)$ konverguje a $s'_k = \sum_{n=1}^k u'_n \xrightarrow{Loc} na (a, b)$. Podle tamté věty tedy $\exists F(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ a tato funkce je diferencovatelná a

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{Loc} F(x) \quad \wedge \quad \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \xrightarrow{Loc} F'(x) \quad \text{na } (a, b).$$

└

□

Věta 1.8 (Abelovo-Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)

Nechť $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu J a nechť $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na J taková, že $b_1(x) \geq b_2(x) \geq \dots \geq 0$. Jestliže je splněna některá z následujících podmínek, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) \Rightarrow na J$.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \Rightarrow na J$ a b_1 je omezená.

(D) $b_n \Rightarrow 0$ na J a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ má omezené částečné součty, tedy

$$\exists K > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in J : |s_n(x)| = \left| \sum_{i=1}^m a_i(x) \right| < K.$$

┌ *Důkaz*

„Dirichlet“: Necht $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x)| < \varepsilon$. Necht $m, n \geq n_0$. Označme $\sigma_i(x) := \sum_{j=m}^i a_j(x)$. Pak

$$|\sigma_i(x)| \leq \left| \sum_{j=1}^i a_j(x) - \sum_{j=1}^{n_0-1} a_j(x) \right| \leq K + K.$$

$$\begin{aligned} \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : \left| \sum_{j=n}^m a_j(x) \cdot b_j(x) \right| &= \\ &= |a_n \cdot b_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n)b_{n+1} + \dots + (\sigma_m - \sigma_{m-1})b_m| \leq \\ &\leq \sup_{j=n, \dots, m} |\sigma_j(x)| (b_n - b_{n-1} + b_{n-1} - b_{n-2} + \dots + b_{m-1} - b_m + b_m) = \\ &= \sup_{j=n, \dots, m} |\sigma_j(x)| \cdot |b_n(x)| \leq 2K \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

A z BC podmínky už $\sum a_i(x)b_i(x) \Rightarrow$ na J .

„Abel“: Necht $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro \Rightarrow

$$\exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : \left| \sum_{j=n}^m a_j(x) \right| < \varepsilon.$$

Tedy pro $\sigma_1(x) = \sum_{j=n}^m a_j(x)$ platí $|\sigma_i(x)| < \varepsilon$. Analogicky odhadu výše

$$\left| \sum_{j=n}^m a_j(x) \cdot b_j(x) \right| \leq \sup_{j=n, \dots, m} |\sigma_j(x)| \cdot |b_n(x)| \leq \varepsilon \sup_{x \in J} (b_1(x)) \leq \varepsilon \cdot K.$$

└ Tedy $\sum a_i(x) \cdot b_i(x)$ splňuje BC podmínku. □

2 Mocninné řady

Definice 2.1 (Mocninná řada)

Necht $x_0 \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ nazýváme mocninnou řadou s koeficienty a_n a středem x_0 .

Definice 2.2 (Poloměr konvergence)

Poloměrem konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ nazveme

$$R = \sup \left\{ r \in [0, \infty) \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ konverguje } \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \right\}.$$

Věta 2.1 (O poloměru konvergence mocninné řady)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ je mocninná řada a $R \in [0, \infty]$ je její poloměr konvergence. Pak řada konverguje absolutně $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ a diverguje $\forall x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$. Navíc platí $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Pokud existuje $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, potom $R = Q$.

┌
Důkaz

Položme $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Pak pro $x : |x - x_0| < R$ platí

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - x_0|}{R} < 1 \implies \text{řada k. absolutně.}$$

Pro $|x - x_0| > R$ dostaneme úplně stejně > 1 , tedy řada diverguje.

Nechť existuje $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1}|}{|a_n \cdot (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x - x_0| \cdot \frac{1}{Q}.$$

Pro $|x - x_0| < \frac{1}{Q}$ řada konverguje, pro $|x - x_0| > \frac{1}{Q}$ řada diverguje, tedy $\frac{1}{Q}$ je poloměr konvergence. □

Věta 2.2 (O stejnoměrné konvergenci mocninné řady)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ je mocninná řada a $R \in (0, \infty]$ je její poloměr konvergence. Pak řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$.

┌
Důkaz

Nechť $0 < r < R$. Podle předchozí věty $\sum a_n \cdot r^n$ konverguje absolutně. Nyní

$$\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] : |a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n.$$

Víme, že $\sum |a_n| r^n$ konverguje, tedy podle Weierstrassova kritéria $\sum a_n(x - x_0)^n \Rightarrow$ na $[x_0 - r, x_0 + r]$. Tedy konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$. □

Věta 2.3 (O derivaci mocninné řady)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$ je také mocninná řada se stejným středem a s poloměrem konvergence R .

Navíc pro $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ platí $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$.

┌ *Důkaz*

Položme $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Poloměr konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1} \stackrel{x \neq x_0}{=} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-x_0)^n}{x-x_0}$ je podle věty výše

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n| \cdot n}} = R \cdot \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n}} = R.$$

Následně použijeme větu o derivaci a stejnoměrné konvergenci (v bodě $x = x_0$ řada jistě konverguje a z předchozí věty řada derivací konverguje lokálně stejnoměrně.) □

Důsledek (O integrování mocninné řady)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$

je mocninná řada se stejným poloměrem konvergence. Navíc platí

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-x_0)^{n+1} + C \text{ na } (x_0 - R, x_0 + R).$$

┌ *Důkaz* (Hint k důkazu)

Mocninou řadu vpravo zderivujeme. □

Věta 2.4 (Abelova)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Nechť navíc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n$ konverguje. Pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $[x_0, x_0 + R]$ a platí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n$.

┌
Důkaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n \cdot R^n}_{a_n(x)} \cdot \underbrace{\frac{(x - x_0)^n}{R^n}}_{b_n(x)}.$$

Víme, že $b_n \geq b_{n+1} \geq 0$, jelikož $\frac{(x-x_0)^n}{R^n} \geq \frac{(x-x_0)^{n+1}}{R^{n+1}} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{x-x_0}{R}$. Navíc $b_0 = 1$. Víme, že $\sum a_n \cdot R^n$ konverguje, tedy podle BC podmínky pro konvergenci reálné řady:

$$\exists \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n}^m a_k \cdot R^k \right| < \varepsilon.$$

Z toho ale jednoduše (jelikož $a_n(x)$ na x nezávisí)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in [x_0, x_0 + R] : \left| \sum_{k=n}^m a_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n}^m a_k \cdot R^k \right| < \varepsilon.$$

Tedy podle Abel-Dirichletova kritéria (části Abel) $\sum a_n(x - x_0)^n \Rightarrow$ na $[x_0, x_0 + R]$.

Funkce $a_n(x - x_0)^n$ jsou spojité a $\sum \Rightarrow \Rightarrow F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ je spojitá na $[x_0, x_0 + R]$. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + R} F(x) = F(x_0 + R).$$

└ □

3 Absolutně spojitě funkce a funkce s konečnou variací

Poznámka

Všechny integrály v této kapitole jsou Lebesgueovy.

3.1 Derivace monotónní funkce

Definice 3.1 (Limes superior a limes inferior pro funkce)

Nechť $x \in (a, b)$ a $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Definujeme limes superior a limes inferior jako

$$\limsup_{h \rightarrow 0} f(x+h) := \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{y \in (x-h, x) \cup (x, x+h)} f(y), \quad \liminf_{h \rightarrow 0} f(x+h) := \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{y \in (x-h, x) \cup (x, x+h)} f(y).$$

Poznámka

Analogicky jako u posloupnosti platí věta:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \limsup_{h \rightarrow 0} f(x+h) = \liminf_{h \rightarrow 0} f(x+h).$$

Definice 3.2 (Horní a dolní derivace)

Nechť I je interval, x je vnitřní bod I a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Definujeme horní a dolní derivaci funkce f v bodě x jako

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$\underline{D}f(x) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Věta 3.1 (Míra vzoru a obrazu)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Nechť $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající funkce, $M \subset I$ je měřitelná a $c > 0$.

- Je-li $\overline{D}f(x) > c$ na M , potom $\lambda^*(f(M)) \geq c \cdot \lambda(M)$.
- Je-li $\underline{D}f(x) < c$ na M , potom $\lambda^*(f(M)) \leq c \cdot \lambda(M)$.

┌ Důkaz

└ Bez důkazu. □

Věta 3.2 (Derivace monotónní funkce)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Potom ve skoro každém bodě $x \in I$ existuje $f'(x)$.

┌ Důkaz

Nechť $M_{p,q} = \{x \in I \mid \underline{D}f(x) < p < q < \overline{D}f(x)\}$. Podle předchozí věty

$$q \cdot \lambda(M_{p,q}) \leq \lambda^*(f(M_{p,q})) \leq p \cdot \lambda(M_{p,q}).$$

Tedy, protože $p < q$, tak $\lambda(M_{p,q}) = 0$.

Tvrdíme, že pro množinu M bodů nediferencovatelnosti platí $M = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}, p < q} M_{p,q}$, tedy spočetné sjednocení nulových množin, tudíž M je nulová: „ \supseteq “: $x \in M_{p,q}, p < q \implies \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x) \implies \nexists Df(x)$. „ \subseteq “: Nechť $x \in M \implies \nexists Df(x) \implies \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)$. □

Věta 3.3 (Integrál derivace monotónní funkce)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající funkce. Potom f' je lebesgueovsky

integrovatelná na $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a).$$

┌

Důkaz

f je neklesající, tedy je měřitelná. Dodefinujeme $f(x) = f(b)$ pro $x > b$. Z předchozí věty víme, že pro skoro všechna $x \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$. Definujeme funkce $g_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$. Tyto funkce jsou měřitelné a pro skoro všechna x platí $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f'(x)$. Dále f je neklesající, tedy $g_n(x) \geq 0$ a $f'(x) \geq 0$.

Podle Fatouova lemmatu

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)dx &= \int_a^b \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n(x)dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x)dx = \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b n \cdot \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(t)dt - n \cdot \int_a^b f(x)dx \right) = \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(t)dt - n \cdot \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(f(b) - n \cdot \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)dx \right) = \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Tedy f' je integrovatelná.

□

└

3.2 Funkce s konečnou variací

Definice 3.3 (Kladná, záporná a totální variace)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a D dělení $[a, b]$. Definujeme kladnou variaci, zápornou variaci a (totální) variaci jako:

$$\begin{aligned} V^+(f, a, b) &= \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ \right\}, \\ V^-(f, a, b) &= \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \right\}, \\ V(f, a, b) &= \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right\}. \end{aligned}$$

Dále zavedeme značení $V_f^+(x) = V^+(f, a, x)$, atd.

Definice 3.4 (Konečná variace)

Řekneme, že funkce f má na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ konečnou variaci, jestliže $V(f, a, b) < \infty$. Množinu všech funkcí s konečnou variací značíme $BV([a, b])$.

Poznámka

Nechť $[a, b] \in \mathbb{R}$ a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Pak

- je-li f neklesající na $[a, b]$, pak $V(f, a, b) = V^+(f, a, b) = f(b) - f(a)$;
- $V(f, a, b) \geq |f(a) - f(b)|$;
- pro $a < c < b$ platí $V(f, a, b) = V(f, a, c) + V(f, c, b)$.

Věta 3.4 (Vztah omezené variace a monotonie)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Má-li f konečnou variaci na $[a, b]$, pak $V_f(x) = V_k^+(x) + V_f^-(x)$ a $f(x) - f(a) = V_f^+(x) - V_f^-(x)$.
- $f \in BV(a, b)$ právě tehdy, když existují neklesající funkce $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $f = v - u$.

┌ *Důkaz*

„První bod“: Necht $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. Búno stačí pro $x = b$.

$$\begin{aligned} V(f, a, b) &\geq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ + \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \leq V^+(f, a, b) + V^-(f, a, b). \end{aligned}$$

Z těchto nerovností vezmeme supremum přes všechna dělení D a dostaneme $V(f, a, b) = V^+(f, a, b) + V^-(f, a, b)$ (\geq z nerovnosti mezi prvním a třetím výrazem, \leq z nerovnosti mezi druhým a čtvrtým).

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \leq \\ &\leq V^+(f, a, b) - \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-. \end{aligned}$$

Infimum přes dělení D dá $f(b) - f(a) \leq V^+(f, a, b) - \sup \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- = V^+(f, a, b) - V^-(f, a, b)$.

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - V^-(f, a, b). \end{aligned}$$

Supremum přes dělení D dá $f(b) - f(a) \geq \sup \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - V^-(f, a, b) = V^+(f, a, b) - V^-(f, a, b)$.

„Druhý bod“: „ \implies “: Z prvního bodu víme, že $f(x) = (f(a) + V^+(f, a, x)) - V^-(f, a, x) = v(x) - u(x)$.

„ \impliedby “: Mějme tedy $f(x) = v(x) - u(x)$

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^n |v(x_i) - v(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |u(x_i) - u(x_{i-1})| = v(b) - v(a) + u(b) - u(a),$$

což dá $f \in BV(a, b)$. □

└ *Důsledek*

$f \in BV \implies f$ má derivaci skoro všude.

┌ *Důkaz*

Z předchozí věty $f = v - u$ a věty před ní mají u, v derivace skoro všude. □

3.3 Absolutně spojitá funkce

Definice 3.5 (Absolutně spojitá funkce)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že f je absolutně spojitá na $[a, b]$, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: pro každý systém po dvou disjunktních intervalů $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^n$, $(a_j, b_j \subset [a, b])$ splňující $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta \implies \sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. Množinu absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ budeme značit $AC([a, b])$.

Poznámka

$f \in Lip([a, b]) \implies f \in AC([a, b]) \implies f \in BV([a, b]) \cap C([a, b])$ a žádnou implikaci nelze obrátit.

$AC([a, b])$ je lineární prostor.

$f \in AC \implies V^+ \in AC \wedge V^- \in AC$.

Věta 3.5 (Integrál derivace absolutně spojité funkce)

Nechť $f \in AC([a, b])$. Potom $f' \in L^1([a, b])$ a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$.

Důkaz

BÚNO f je rostoucí ($f \in AC \implies f \in BV \implies f(x) = (v(x) + x) - (u(x) + x)$, $v(x) + x, u(x) + x$ jsou rostoucí (u, v neklesající, ale my potřebujeme rostoucí, proto $+x$) a AC). Podle věty výše víme, že $\exists f'(x)$ skoro všude. Tedy $[a, b]$ si můžeme rozdělit na tři množiny – s kladnou $f'(D)$, s nulovou $f'(Z)$ a bez $f'(N)$.

Dokážeme, že $|f(N)| = 0$, $|f(Z)| = 0$, $\int_D f'(x) = |f(D)|$. Pak $\int_a^b f'(x) = \int_D f'(x) dx = |f(D)| = |f(D) \cup f(Z) \cup f(N)| = f(b) - f(a)$, neboť f je rostoucí, tedy prostá.

„ $|f(N)| = 0$ “: Víme $|N| = 0$. K $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$ z definice AC . K N nalezneme otevřenou množinu G tak, že $N \subset G$ a $|G| < \delta$. Také $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ (resp. $\bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i)$), kde (a_i, b_i) jsou po dvou disjunktní. Nyní $\forall m \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^m b_i - a_i \leq |G| < \delta \implies \sum_{i=1}^m f(b_i) - f(a_i) < \varepsilon$. Nakonec pro $m \rightarrow \infty$ je $\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$ a $f(N) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f((a_i, b_i))$, tudíž $\sum_{i=1}^{\infty} f(b_i) - f(a_i) \leq \varepsilon$.

„ $|f(Z)| = 0$ “: Necht $\varepsilon > 0$ a víme, že $f'(x) < \varepsilon$ na Z . Podle věty výše $|f(Z)| \leq \varepsilon \cdot |Z| \leq \varepsilon \cdot (b - a)$, tudíž $|f(Z)| = 0$.

„ $\int_D f'(x) = |f(D)|$ “: Necht $\tau > 1$. Označme $D_k = \{x | T^k \leq f'(x) < \tau^{k+1}\}$. Pak $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k$. Podle věty výše

$$\frac{1}{\tau} \int_{D_k} f'(x) dx \leq \tau^k |D_k| \leq |f(D_k)| \leq \tau^{k+1} |D_k| \leq \tau \int_{D_k} f' dx$$

Posčítáme a získáme $\frac{1}{\tau} \int_D f'(x) dx \leq |f(D)| \leq \tau \int_D f'(x) dx$. Limita přes τ nám dá požadovanou rovnost. \square

Věta 3.6 (Neurčitý Lebesgueův integrál)

Necht $\Theta \in L^1(a, b)$ a f je neurčitý Lebesgueův integrál Θ , tj. existuje konstanta C , že

$$f(x) = \int_a^x \Theta(t) dt + C, \quad \forall x \in [a, b].$$

Pak $f \in AC$ a $f' = \Theta$ skoro všude.

Tvrzení 3.7 (Pozorování z TMI)

$$\Theta \in L^1 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall M, |M| < \delta \implies \int_M |\Theta| < \varepsilon.$$

┌ *Důkaz*

„ $f \in AC$ “: K $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta > 0$ z pozorování z TMI. Necht (a_j, b_j) jsou po dvou disjunktní a $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta$. Nyní

$$\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| = \sum_{j=1}^n \left| \int_{a_j}^{b_j} \Theta(t) dt \right| \leq \int_{\bigcup (a_j, b_j)} |\Theta(t)| dt < \varepsilon \implies f \in AC.$$

„ $f' = \Theta$ skoro všude“: Víme z předchozí věty, že $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$. Také víme $f(x) - C = \int_a^x \Theta(t) dt$. Tedy $C - f(a) = \int_a^x (f'(t) - \Theta(t)) dt$. Při $x = a$ máme $C = f(a)$, tedy $\forall x \in [a, b] : \int_a^x (f'(t) - \Theta(t)) dt = 0$. Z TMI víme, že $f'(t) = \Theta(t)$ skoro všude. \square

Důsledek

$$f \in AC([a, b]) \Leftrightarrow \exists \Theta \in L^1(a, b), f(x) = \int_a^x \Theta(t) dt + C.$$

Věta 3.8 (Integrace per partes pro absolutně spojitě funkce)

Necht $f, g \in AC([a, b])$. Potom

$$\int_a^b f' g = [fg]_a^b - \int_a^b f g'.$$

┌
Důkaz

Nejprve dokážeme, že pokud jsou f a g absolutně spojité funkce, pak i fg je absolutně spojitá. Necht $\varepsilon > 0$. Jelikož $f, g \in AC([a, b])$, tak existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall (a_i, b_i) \subset [a, b]$ disjunktní platí:

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \implies \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon \wedge \sum_{i=1}^n |g(b_i) - g(a_i)| < \varepsilon.$$

Dále f a g jsou spojité na uzavřeném intervalu $[a, b]$, a tedy existuje $M > 0$ tak, že $|f| \leq M$ a $|g| \leq M$. Tedy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| &= \sum_{i=1}^n |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i) + f(b_i)g(a_i) - f(b_i)g(a_i)| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f(b_i)g(b_i) - f(b_i)g(a_i)| + \sum_{i=1}^n |f(b_i)g(a_i) - f(a_i)g(a_i)| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n M \cdot |g(b_i) - g(a_i)| + \sum_{i=1}^n M \cdot |f(b_i) - f(a_i)| \leq 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Nyní si uvědomme, že jelikož je $F = fg$ absolutně spojitá, tak podle věty o integrálu derivace absolutně spojitě funkce platí: $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$.

Jelikož f a g jsou absolutně spojité, tak existují jejich derivace skoro všude. Dále:

$$F'(x) = (f(x)g(x))' = \underbrace{f'(x)}_{\in L^1([a,b])} \cdot \underbrace{g(x)}_{\in C([a,b])} + \underbrace{f(x)}_{\in C([a,b])} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\in L^1([a,b])} \in L^1([a,b]).$$

$$F(b) - F(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx.$$

Jelikož jsou integrály konečné, lze je z linearit rozdělit a dostáváme dokazovanou rovnost.

└

□

4 Fourierovy řady

Definice 4.1

Symbolem $P_{2\pi}$ značíme množinu všech lokálně integrovatelných 2π -periodických funkcí na \mathbb{R} .

Definice 4.2 (Trigonometrická řada, trigonometrický polynom)

Nechť $a_k, k \in \mathbb{N}_0$ a $b_k, k \in \mathbb{N}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Pak řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme trigonometrickou řadou. Je-li navíc $n \in \mathbb{N}$, pak funkci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme trigonometrickým polynomem stupně n .

Věta 4.1 (Fourierovy vzorce)

Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(k \cdot x))$$

konverguje stejnoměrně k funkci f na \mathbb{R} . Potom

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(k \cdot x) dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(k \cdot x) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

┌ *Důkaz*

Řada stejnoměrně konverguje k f a $a_k \cos(k \cdot x)$ a $b_k \sin(k \cdot x)$ jsou spojitě funkce, tedy f je spojitá funkce. Spojitá funkce na uzavřeném intervalu (kompaktu) je omezená, tedy existuje M tak, že $|f(x)| \leq M \ \forall x \in [0, 2\pi]$. Dále existuje $j_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall j \geq j_0$ platí:

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^j (a_k \cos(k \cdot x) + b_k \sin(k \cdot x)) \right| \leq M + 1.$$

Dále pro $n \in \mathbb{N}_0$ máme:

$$\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^j (a_k \cos(k \cdot x) + b_k \sin(k \cdot x)) \right) \cos(n \cdot x) \rightrightarrows f(x) \cos(n \cdot x).$$

Navíc $|(M + 1) \cos(n \cdot x)| \leq M + 1$, tedy podle Lebesgueovy věty s majorantou $M + 1$ dostaneme

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^j (a_k \cos(k \cdot x) + b_k \sin(k \cdot x)) \right) \cos(n \cdot x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cos(n \cdot x) dx.$$

Pro $j > n$ máme

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^j (a_k \cos(k \cdot x) + b_k \sin(k \cdot x)) \right) \cos(n \cdot x) dx = \int_0^{2\pi} a_n \cos^2(n \cdot x) dx = a_n \pi.$$

Tedy vzorec pro a_n platí. Pro b_n je důkaz obdobný. ┐

Definice 4.3 (Fourierovy koeficienty, Fourierova řada, částečný součet Fourierovy řady)

Nechť $f \in P_{2\pi}$. Pak posloupnosti reálných čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, definované předpisy

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(k \cdot x) dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(k \cdot x) dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

nazýváme Fourierovými koeficienty funkce f . Trigonometrickou řadu

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \cdot x) + b_k \sin(k \cdot x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme Fourierovou řadou funkce f . Vztah mezi funkcí f a její Fourierovou řadou Sf značíme symbolem $f \sim Sf$. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ dále definujeme částečný součet Fourierovy řady

funkce f předpisem

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k \cdot x) + b_k \sin(k \cdot x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Důsledek (Vět z minulého semestru)

Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$ a a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty f . Pak platí

$$f(x) = S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \cdot x) + b_k \sin(k \cdot x))$$

ve smyslu rovnosti L^2 funkcí.

Navíc platí tzv. Parsevalova rovnost

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

4.1 Bodová konvergence Fourierových řad

Definice 4.4 (Dirichletovo jádro)

Nechť $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Potom funkce $D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos n \cdot x$ nazýváme Dirichletovým jádrem.

Věta 4.2 (O částečných součtech Fourierovy řady)

Nechť $f \in P_{2\pi}$ a $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_n(y) dy = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (f(x+y) + f(x-y)) D_n(y) dy.$$

┌
Důkaz

$$\begin{aligned}
S_n f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(k \cdot t) dt \cdot \cos(k \cdot x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(k \cdot t) dt \cdot \sin(k \cdot x) = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(k \cdot t) \cos(k \cdot x) + \sin(k \cdot t) \sin(k \cdot x)) \right) dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k \cdot t - k \cdot x) \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot D_n(t - x) dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(y + x) \cdot D_n(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y + x) D_n(y) dy = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^0 \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (f(x + y) + f(x - y)) \cdot D_n(y) dy.
\end{aligned}$$

└

□

Věta 4.3 (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)

Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je omezený interval a nechť $f \in L^1(a, b)$. Potom $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cdot \cos(t \cdot x) dx = 0$ a $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(t \cdot x) dx = 0$.

┌
Důkaz

Pokud se nepletu, tak elegantnější důkaz je v 0M3/Funkcionalka/Funkcionalka.pdf str. 69.

$$1. \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b \chi_{(c,d)}(x) \cdot \cos(t \cdot x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_c^d \cos(t \cdot x) dx = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin(t \cdot x)}{t} \right]_c^d = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(t \cdot d) - \sin(t \cdot c)}{t} = 0.$$

$$2. G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (c_j, d_j) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \left| \bigcup_{j=j_0}^{\infty} (c_j, d_j) \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \int_a^b \chi_G(x) \cos(t \cdot x) dx \right| \leq 0 + \int_a^b \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \chi_{(c_j, d_j)}(x) dx < \varepsilon.$$

$$3. f = \chi_E, E \in \mathcal{B} \implies \forall \varepsilon > 0 \exists G \text{ otevřená} : E \subset G \wedge |G \setminus E| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b \chi_E \cos(t \cdot x) dx \right| \leq \left| \int_a^b \chi_G(x) \cos(t \cdot x) dx \right| + \left| \int_a^b \chi_{G \setminus E}(x) \cdot \cos(t \cdot x) dx \right| \leq 0 + \varepsilon.$$

4. Pro jednoduchou funkci je to triviální, neboť je to konečný součet 3.

5. K $\varepsilon > 0 \exists s$ jednoduchá, že $\int_a^b |f(x) - s(x)| dx < \varepsilon$.

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \cos(t \cdot x) dx \right| \leq \left| \int_a^b s(x) \cos(t \cdot x) dx \right| + \left| \int_a^b (s(x) - f(x)) \cdot \cos(t \cdot x) dx \right| \rightarrow 0 + \varepsilon \rightarrow 0.$$

└

□

Věta 4.4 (Riemannova věta o lokalizaci)

Nechť $f \in P_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$ a $s \in \mathbb{R}$. Potom $Sf(x) = s \Leftrightarrow \exists \delta \in (0, \pi)$ tak, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - 2s) \cdot D_n(t) dt = 0.$$

┌ *Důkaz*

Z věty výše víme, že $S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+y) + f(x-y)) \cdot D_n(y) dy$. Dále z vlastností Dirichletova jádra

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(y) \cdot 2s dy.$$

Chceme $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f(x) - s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi (f(x+y) + f(x-y) - 2s) D_n(y) dy =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\delta (f(x+y) + f(x-y) - 2s) \cdot D_n(y) dy + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \dots dy.$$

Stačí ukázat, že druhý integrál je roven nule. Z vlastností D_n je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^\pi (f(x+y) + f(x-y) - 2s) \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \cdot y)}{2 \cdot \sin \frac{y}{2}} dy = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^\pi \frac{f(x+y) + f(x-y) - 2s}{2 \sin \frac{y}{2}} \sin((n + \frac{1}{2})y) dy \end{aligned}$$

Pokud je první činitel L_1 , pak je toto rovno 0 z Riemannova-Lebesgueova lemmatu. Ale první činitel je integrovatelný, neboť $f(x+y)$, $f(x-y)$ i $2s$ jsou integrovatelné a $\sin \frac{y}{2} > \sin \frac{\delta}{2}$. □

Definice 4.5 (Značení)

Nechť $x \in \mathbb{R}$ a f je reálná funkce na okolí x . Značíme $f(x+) = \lim_{t \rightarrow x+} f(t)$ a $f(x-) = \lim_{t \rightarrow x-} f(t)$

Věta 4.5 (Diniovo kritérium)

Nechť $f \in P_{2\pi}$ a $x \in \mathbb{R}$. Nechť existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$ a nechť existují vlastní

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x-t) - f(x-)}{t}.$$

Potom řada S_f konverguje v x a platí $S_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$. Speciálně má-li f konečné jednostranné derivace v x , pak $S_f(x) = f(x)$.

┌
Důkaz

Podle předchozí věty stačí ukázat

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 : 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - (f(x+) + f(x-))) \cdot D_n(t) dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \left(\frac{f(x+t) - f(x+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-)}{t} \right) \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \cdot \sin((n + \frac{1}{2}) \cdot t) dt \end{aligned}$$

Z definice limity jistě existuje $\delta > 0$ tak, že $\frac{f(x+t)-f(x+)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x-)}{t}$ je omezená. Dále $\frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}}$ je omezená na $[0, \pi]$. Takže součin (značme ho F) těchto dvou funkcí je v \mathcal{L}^1 . Podle

Riemann-Lebesgueova lemmatu je $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta F(t) \cdot \sin((n + \frac{1}{2}) \cdot t) dt = 0$. □

Věta 4.6 (Jordanovo-Dirichletovo kritérium)

Nechť $f \in P_{2\pi}$ a nechť $f \in BV([0, 2\pi])$. Potom

- pro každé $x \in [0, 2\pi]$ Fourierova řada konverguje a $S_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$,
- je-li f navíc spojitá na $(a, b) \subset [0, 2\pi]$, pak $S_n f \xrightarrow{Loc} f$ na $[a, b]$.

4.2 Stejnomořná konvergence – Fejérova věta

Definice 4.6 (Konvergence v Cesarově smyslu)

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že a_n konverguje k $a \in \mathbb{R}$ v Cesarově [Čezarově] smyslu, pokud $\sigma_n = \frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1} \rightarrow a$.

Definice 4.7 (Fejérovo jádro)

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Potom funkci $K_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n D_k(x)$ nazýváme Fejérovým jádrem.

┌
Poznámka

K_n je sudá, 2π -periodická a $K_n(0) = \frac{n+1}{2}$. Platí $\int_{-\pi}^\pi K_n(x) = \pi$.

$$K_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{To se ukáže indukcí.})$$

Definice 4.8 (Částečné Fejérové součty)

Nechť $f \in P_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Pak výraz

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n S_k f(x)$$

nazýváme n -tý částečný Fejérův součet f .

┌

Poznámka

To se z věty výše rovná $\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \cdot D_k(y) dy$.

└

Věta 4.7 (Fejérova)

Nechť $f \in P_{2\pi}$.

- Jestliže pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

- Je-li f spojitá na (a, b) , pak $\sigma_n f \xrightarrow{Loc} f$ na (a, b) .

┌

Důkaz (1. bod)

Podle poznámky

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) \cdot K_n(t) dt$$

a $s = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 2s \cdot K_n(t) dt$. Tedy

$$s_n f(x) - s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2s) K_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right).$$

$$\text{K } \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in (0, \delta) : |f(x+t) + f(x-t) - (f(x+) + f(x-))| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \varepsilon \cdot |K_n(t)| dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varepsilon \cdot K_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - (f(x+) + f(x-))| dt \cdot \frac{1}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \rightarrow 0.$$

└

□

┌ *Důkaz* (2. bod)

Nechť $[c, d] \subset (a, b)$. Chceme $\sigma_n f(x) \rightrightarrows f(x)$ na $[c, d]$, tedy $|\sigma_n f(x) - f(x)| \leq$ něco malého, co nezávisí na $x \in [c, d]$. Nalezneme $\gamma > 0$, aby $[c - \gamma, d + \gamma] \subset (a, b)$. Ze stejnoměrné spojitosti f na $[c - \gamma, d + \gamma]$ k $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$ tak, že

$$\forall s, t \in [c - \gamma, d + \gamma] : |s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Tedy $\forall x \in [c, d] \quad \forall t \in (0, \gamma)$

$$|f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)| \leq |f(x + t) - f(x)| + |f(x - t) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Analogicky prvnímú bodu:

$$|\sigma_n f(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) (f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)) \cdot K_n(t) dt \right|.$$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta 2\varepsilon \cdot K_n(t) dt \leq \varepsilon,$$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi |f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)| dt \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x + t)| + |f(x - t)| + 2M dt \cdot \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \left(2 \int_0^{2\pi} |f(t)| dt + 2\pi 2M \right) \cdot \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \rightarrow 0$$

└ (f je spojitá na $[c, d] \implies |f(x)| \leq M$.) □

Věta 4.8 (Weierstrassova – trigonometrická verze)

Nechť $f \in P_{2\pi}$ je spojitá na \mathbb{R} a nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje trigonometrický polynom T splňující $\|f - T\|_{C(\mathbb{R})} < \varepsilon$.

┌ *Důkaz*

└ Z Fejerovy věty (2. bod). □

Důsledek (Weierstrass)

Nechť $f \in C([a, b])$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje polynom P tak, že $\|f - P\|_{C([a, b])} < \varepsilon$.

┌ *Důkaz* (Šel by udělat přes komplexní čísla, ale zde je důkaz bez nich.)

Z Taylorovy věty víme, že $\forall [c, d] \forall \varepsilon > 0 \exists$ polynomy $P, Q : |\sin x - P(x)| < \varepsilon$ a $|\cos x - Q(x)| < \varepsilon$ na $[c, d]$. BÚNO $[a, b] = [0, 2\pi]$ a f je periodická.

Z předchozí věty nalezneme trigonometrický polynom, že $\|f - T\| < \varepsilon$. Nyní $T = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$. Nalezneme polynomy P_k a Q_k , aby $|\cos kx - P_k| < \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{|a_k|+1}$, $|\sin kx - Q_k| < \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{|b_k|+1}$. Položme $P = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot P_k + b_k \cdot Q_k$. P je polynom.

$$\begin{aligned} \|P - f\| &\leq \|f - T\| + \|T - P\| < \varepsilon + \left\| \sum_{k=1}^n a_k \cdot (\cos kx - P_k) + b_k (\sin kx - Q_k) \right\| < \\ &< \varepsilon + \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{|a_k|+1} + |b_k| \cdot \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{|b_k|+1} < 3 \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

└

□

Věta 4.9 (Fourierovy koeficienty určují funkci)

Nechť $f, g \in P_{2\pi}$ mají stejné Fourierovy koeficienty. Potom $f = g$ skoro všude.

┌ *Důkaz*

Funkce $f - g$ má nulové Fourierovy koeficienty. BÚNO $f \neq 0, g = 0$. Tedy

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nxdx = 0 \quad \wedge \quad \int_0^{2\pi} f(x) \sin nxdx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Označme $\mathcal{T} := \left\{ \varphi \in L^\infty(0, 2\pi) \mid \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \varphi(x) dx = 0 \right\}$.

1. \mathcal{T} je zřejmě lineární prostor. 2. Nechť $\varphi_n \in \mathcal{T}$, $\varphi_n \rightarrow \varphi$ skoro všude a $\|\varphi_n\|_\infty \leq K \forall n$. Pak $\varphi \in \mathcal{T}$ z Lebesgueovy věty. 3. Trigonometrické polynomy $\subset \mathcal{T}$, neboť $\cos nx \in \mathcal{T}$, $\sin nx \in \mathcal{T}$ a použijeme jedničku. 4. Nechť φ je spojitá, $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0$. Podle předchozí věty existuje trigonometrický polynom $T_n \rightrightarrows \varphi$. Tedy $\varphi \in \mathcal{T}$ z druhého bodu. 5. $[a, b] \subset (0, 2\pi)$, pak $\chi_{(a,b)} \in \mathcal{T}$, jelikož k ní konvergují „lichoběžníky“. 6. $G \subset [0, 2\pi]$ otevřená, potom $\chi_G \in \mathcal{T}$, neboť $G = \bigcup_{i=1}^\infty (a_i, b_i)$ a $\sum_{i=1}^k \chi_{(a_i, b_i)} \rightarrow \chi_G$ skoro všude a sumy jsou stejně omezené $K = 1$. 7. $E \subset (0, 2\pi)$ měřitelná, pak $\chi_E \in \mathcal{T}$, neboť pro každé n existuje G_n otevřená, že $E \subset G_n \wedge |G_n \setminus E| < \frac{1}{2^n}$ (z TMI).

8. $E_1 := \{f > 0\}$ a $E_2 := \{f < 0\}$:

$$\int_0^{2\pi} |f| = \int_{E_1} f - \int_{E_2} f = \int_0^{2\pi} \chi_{E_1} f - \int_0^{2\pi} \chi_{E_2} f = 0 \implies f = 0 \text{ skoro všude.}$$

└

□

Důsledek

Trigonometrické funkce tvoří bázi prostoru $L^2(0, 2\pi)$.

┌ *Důkaz*

Nechť pro spor BÚNO $f \neq 0$ a $\langle f, \sin nx \rangle = 0$ a $\langle f, \cos nx \rangle = 0 \forall n$. Pak je ale $f \equiv 0$ z předchozí věty. □

Poznámka (Komplexní zápis)

$$Sf(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cdot e^{ikx} + c_{-k} \cdot e^{-ikx}),$$
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5 Fourierova transformace

Definice 5.1 (Fourierova transformace, inverzní Fourierova transformace)

Nechť $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Pak Fourierova transformace je definována jako

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

A inverzní Fourierova transformace f je definována jako

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{+\infty}^{-\infty} f(x) e^{i\omega x} dx.$$

Poznámka

Pro $f \in \mathcal{L}^2$ platí $\check{\check{f}} = f$ ve smyslu rovnosti \mathcal{L}^2 funkcí.

Existuje-li vlastní derivace f , pak $\check{\check{f}} = f$.

Je-li $f \in BV$, pak $\check{\check{f}}(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$, kde \check{f} je limita pro meze jdoucí do nekonečna.

Definice 5.2 (Konvoluce, nezkouší se)

Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Pak konvoluce funkcí f a g je definována jako

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Věta 5.1 (Fourierova transformace konvoluce)

Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Pak $\widehat{(f * g)}(u) = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$.

┌ Poznámka

Analogicky lze dokázat

$$\sqrt{2\pi} \widehat{(f \cdot g)}(x) = (\check{f} * \check{g})(x).$$

└

┌ Poznámka

$f, g \in \mathcal{L}^1 \implies f * g \in \mathcal{L}^1$. (Důkaz rozepsáním a prohozením integrálů.)

└

┌ Důkaz

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \right) e^{-i\omega x} dx =$$

(Pomocí Fubiniovy věty, integrovatelnost máme z poznámky.)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \cdot e^{-i\omega(x-y)} \right) e^{-i\omega y} dy = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \cdot e^{-i\omega y} \cdot \hat{f}(\omega) dy = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega). \end{aligned}$$

└

□

Věta 5.2 (Fourierova transformace derivace)

Nechť $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, f a f' spojitě na \mathbb{R} , $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ a $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Pak

$$\widehat{f'}(\omega) = i \cdot \omega \cdot \hat{f}(\omega).$$

┌

Důkaz

$$\widehat{f'}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \cdot e^{-i\omega x} \text{ per partes } 0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega e^{-i\omega x} \cdot f(x) dx = i\omega \hat{f}(\omega).$$

└

□

6 Souvislé a obloukové souvislé množiny a metrické prostory

Definice 6.1 (Obojetná množina)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset P$ je obojetná (clopen), jestliže je zároveň otevřená a uzavřená.

Definice 6.2 (Souvislý metrický prostor)

Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je souvislý, jestliže není sjednocením dvou disjunktních

neprázdných otevřených množin.

Řekneme, že $A \subset P$ je souvislá, jestliže je $MP(A, \varrho)$ souvislý.

Věta 6.1 (Charakterizace souvislých prostorů)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak následující je ekvivalentní:

- P není souvislý.
- Existují dvě uzavřené neprázdné množiny $F_1, F_2 \subset P$, které jsou disjunktní a $P = F_1 \cup F_2$.
- Existuje obojetná množina $H \subset P$, $H \neq \emptyset$ a $H \neq P$.

Důkaz

„1. \implies 2.“: P není souvislý $\implies P = G_1 \cup G_2$, $G_1, G_2 \neq \emptyset$ otevřené, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Položme $F_1 = P \setminus G_1 = G_2$ a $F_2 = P \setminus G_2 = G_1$. Toto jsou uzavřené neprázdné disjunktní množiny a $P = F_1 \cup F_2$.

„2. \implies 3.“: Položme $H = F_1$. Pak $H \neq \emptyset$, $H \neq P$. Navíc H je uzavřená a $P \setminus H = P \setminus F_1 = F_2$ je uzavřená, tedy H je otevřená.

„3. \implies 1.“: Položme $G_1 = H$ a $G_2 = P \setminus H$. Pak $G_1 \cup G_2 = P$ a $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ zřejmě, $G_1, G_2 \neq \emptyset$, neboť $H \neq \emptyset$ a $H \neq P$. Dále G_1 je otevřená, neboť H je otevřená a G_2 je otevřená, protože $P \setminus G_2 = H$ je uzavřená. \square

Věta 6.2 (Vlastnosti souvislých prostorů)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak

- Nechť (Q, τ) je metrický prostor a $f : P \rightarrow Q$ je spojitý. Nechť $A \subset P$ je souvislá množina, pak $f(A)$ je souvislá v Q .
- Nechť $A \subset P$ je souvislá a $A \subset B \subset \overline{A}$. Pak B je souvislá, speciálně \overline{A} je souvislá.
- Nechť $I \neq \emptyset$ a $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ jsou souvislé množiny v (P, ϱ) . Nechť každé dvě množiny A_α a A_β , $\alpha, \beta \in I$ nejsou disjunktní. Pak $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je souvislá.

┌ *Důkaz*

„První bod“ sporem: necht $f(A) = G_1 \cup G_2$, G_1, G_2 otevřené v $Q \neq \emptyset$ disjunktní. Pak $A = f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)$ jsou neprázdné disjunktní otevřené, což je spor se souvislostí A .

„Druhý bod“: necht pro spor $B = G_1 \cup G_2$ jsou neprázdné disjunktní otevřené v množině (B, ϱ) . Pak $A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2)$ jsou disjunktní otevřené (průnik otevřené množiny a X je otevřený v X) množiny v (A, ϱ) .

Pokud $A \cap G_1 \neq \emptyset$ a $A \cap G_2 \neq \emptyset$, pak máme spor se souvislostí A . Tedy BÚNO $A \cap G_1 = \emptyset \implies A \subset G_2$. Víme $\exists x \in B \cap G_1 \implies x \in \bar{A} \implies \varrho(x, A) = 0$. Ale $B \cap G_1$ je otevřená v $(B, \varrho) \implies \exists r > 0 : B(x, r) \subset G_1 \implies \varrho(x, G_2) \geq r \implies \varrho(x, A) \geq r, \nabla$.

„Třetí bod“ sporem: $A = G_1 \cup G_2$ otevřené, neprázdné, disjunktní. Pak $A_\alpha = (A_\alpha \cap G_1) \cup (A_\alpha \cap G_2)$, disjunktní, otevřené v (A_α, ϱ) . A_α souvislá $\implies A_\alpha \cap G_1 = \emptyset$ nebo $A_\alpha \cap G_2 = \emptyset$. Zvolme pevné A_{α_0} a BÚNO $A_{\alpha_0} \subset G_1$. Pak $\forall \alpha : A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset \implies A_\alpha \cap G_1 \neq \emptyset$. Tedy $A \subset G_1 \implies G_2 = \emptyset, \nabla$. □

Důsledek

Necht f je spojitě zobrazení $I = [0, 1]$ do metrického prostoru. Pak $f(I)$ je souvislá množina.

Definice 6.3 (Komponenta)

Řekneme, že A je komponenta P , jestliže A je maximální souvislá podmnožina P .

Věta 6.3 (Charakterizace komponent)

Necht (P, ϱ) je neprázdný metrický prostor.

1. Komponenty P jsou neprázdné a uzavřené.
2. Každý bod P je obsažen v nějaké komponentě.
3. Komponenty jsou navzájem disjunktní.

┌ *Důkaz*

„1.“: Jednobodové množiny jsou souvislé, takže \emptyset není maximální. Uzavěr souvislé množiny je také souvislý, tedy neuzavřené množiny také nejsou maximální.

„2.“: Necht $x \in P$. Definujme $A = \bigcup \{M \mid M \text{ souvislá} \wedge x \in M\}$. A je neprázdná, protože $\{x\}$ je souvislá. Podle předchozí věty (třetí bod) je A souvislá ($x \in M_1 \cap M_2$). A je maximální, neboť A je jedna z množin přes které sjednocujeme. $x \in A$.

„3.“: Necht pro spor $A \neq B$ komponenty a $A \cap B \neq \emptyset$. Potom z minulé věty (třetí bod) $A \cap B$ je souvislá množina, tedy A, B nejsou maximální. □

Definice 6.4 (Křivková souvislost)

Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je křivkově souvislý, jestliže pro každé $x, y \in P$ existuje spojitě zobrazení $\gamma : [0, 1] \rightarrow (P, \varrho)$ takové, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$.

Řekneme, že $A \subset P$ je křivkově souvislá, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) křivkově souvislý.

Věta 6.4 (Souvislost souvislosti a křivkové souvislosti)

Každá křivkově souvislá množina v metrickém prostoru je souvislá.

┌

Důkaz

Sporem: Necht (A, ϱ) je křivkově souvislý, ale není souvislý. Tedy $A = G_1 \cup G_2$, G_1 a G_2 otevřené neprázdné disjunktní množiny. Nalezneme $x \in G_1$, $x \in G_2$ a $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Nyní $[0, 1] = \gamma^{-1}(G_1) \cup \gamma^{-1}(G_2)$. Obě tyto množiny jsou otevřené disjunktní a neprázdné, tedy $[0, 1]$ není souvislý. ∇

└

Poznámka (Souvislá křivkově nesouvislá množina)

$$\begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Věta 6.5 (Souvislost a otevřené množiny v \mathbb{R}^n)

Necht $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Pak G je souvislá právě tehdy, když je křivkově souvislá.

┌

Důkaz

„ \Leftarrow “ víme. „ \Rightarrow “: Necht G je souvislá. Zvolme $x \in G$ libovolně. Definujme $A = \{y \in G \mid \exists \text{ spojitá křivka z } x \text{ do } y\}$. Chceme $A = G$, pak vždy dvojice bodů lze spojit křivkou (například skrz x).

„ A je otevřené“: Necht $y \in A$, G je otevřené $\Rightarrow \exists r > 0 : B(y, r) \subset G$. Pak každý bod $z \in B(y, r)$ lze spojit s x , neboť lze spojit x s y a y se z . Tedy $B(y, r) \subset A \Rightarrow A$ otevřená.

„ A je uzavřená“: Necht $y \in \overline{A}$, G je otevřené $\Rightarrow \exists B(y, r) \subset G$. Tedy $y \in \overline{A} \Rightarrow \exists z \in A \cap B(y, r)$. x lze spojit se z křivkou a z lze spojit s y , tedy $y \in A \Rightarrow \overline{A} = A \Rightarrow A$ je uzavřená.

Nyní G je souvislá a A je obojetná, tedy $G \setminus A = \emptyset$ (neboť A je neprázdná, obsahuje x), tedy $A = G$. \square

└