Organizační úvod

Poznámka
Podmínkou zápočtu je splnění 1 domácí práce a 1 písemného testu. Není potřeba docházka.

Bude moodle (přístup dají cvičící). Budou tam poznámky k přednášce, cvičebnice a bude se tam odevzdávat domácí práce.

Je dobré umět míru.

1 Úvod

Poznámka
Pravděpodobnost popisuje modely popisující náhodné jevy.

Statistika se pak snaží popsat reálné věci za pomocí těchto modelů.

Poznámka (Historie)
Klasická pravděpodobnost navazuje na dílo Kolmogorova, který popisoval axiomatickou pravděpodobnost.

2 Pravděpodobnostní prostor

Definice 2.1 (Pravděpodobnostní prostor, pravděpodobnost)

Pravděpodobnostní prostor je trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde Ω je neprázdná množina, $\mathcal{A}$ je σ-algebra a P je pravděpodobnost.

Pravděpodobnost P je množinová funkce $\mathcal{A} \to [0,1]$ splňující:

- $P(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$, (nezápornost)
- $P(\Omega) = 1$, (normovanost)
- jsou-li $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, pak $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. ($\sigma$-aditivita)

Poznámka (Interpretace)
Ω se často nazývá stavový prostor a obsahuje všechny „realizace náhody“ neboli elementární jevy, tj. všechny možnosti, o kterých uvažuji.

$\mathcal{A}$ je σ-algebra náhodných jevů. P pak obsahuje veškerou informaci o té dané náhodné situaci.

Pokud nastal $\omega \in A \in \mathcal{A}$ ($\omega \in \Omega$), pak nastal jev A.

Definice 2.2 (Klasický pravděpodobnostní prostor, diskrétní pravděpodobnostní prostor, spojitý pravděpodobnostní prostor, indikátor)

Ω konečná, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $P(\{a\}) = \frac{1}{n}$ $\forall a \in \Omega$ je klasický pravděpodobnostní prostor.

Ω spočetná (včetně konečná), $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $p : \Omega \to [0, 1]$ je taková, že $p(\omega) \geq 0$ $\forall \omega \in \Omega$ a $\sum_{\omega \in \Omega} = 1$. Položíme $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ nazýváme diskrétní pravděpodobnostní prostor.

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$) a $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ měřitelná, že $\int_\mathbb{R} g(x)dx = 1$, pak definujeme $P(B) = \int_B g(x)dx$, $b \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}$ je spojitý pravděpodobnostní prostor. Speciálním případem $g(x) = 1_{[0,1]}(x)$ je pak tzv. indikátor.

Definice 2.3 (Jev jistý, jev nemožný, podjev, zároveň, alespoň jeden, jev opačný, neslučitelné jevy)

Ω je jev jistý, $\emptyset$ je jev nemožný, $A \subset B$ znamená „A je podjev B“, $A \cap B$ znamená „nastal A a zároveň B“, $A \cup B$ znamená „nastal A nebo B“, A^C je jev opačný, $A \cap B = \emptyset$ jsou neslučitelné jevy.

Věta 2.1

Buďte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravděpodobnostní prostor a $A, B, A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in \mathbb{N}$) náhodné jevy. Pak platí:

- $P(\emptyset) = 0$;
- *P je konečně aditivní;*
- $P(A^C) = 1 - P(A)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$; *(monotonie)*
- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \implies P\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_i)$; *(spojitost)*
- $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \implies P\left(\bigcap_{i=1}^\infty A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_i)$; *(spojitost)*
- $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \wedge \bigcap_{i=1}^\infty A_i = \emptyset \implies \lim_{n\to\infty} P(A_i) = 0$; *(spojitost v nule)*
- $B \subset A \implies P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

Důkaz
Vše z míry. Pravdědobnost je konečná, předposlední bod vyplývá z předchozího. □

Poznámka
28. února bude v 17:20 náhradní přednáška za poslední přednášku.

Věta 2.2 (Princip inkluze a exkluze)

Buď $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravděpodobnostní prostor. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každá $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, platí:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

Důkaz
Nebude, v podstatě byl v diskrétce. □

3 Podmíněná pravděpodobnost

Definice 3.1 (Podmíněná pravděpodobnost)

Buďte $A, B \in \mathcal{A}$ takové, že $P(B) > 0$. Definujeme $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ a nazýváme ji podmíněnou pravděpodobností jevu A za podmínky (jevu) B.

Věta 3.1

Buď $B \in \mathcal{A}$ takové, že $P(B) > 0$. Pak zobrazení $P(.|B) : \mathcal{A} \to [0, 1]$ splňuje definici pravděpodobnosti.

Důkaz
Ověříme po bodech: zřejmě $P(A|B) \geq 0 \; \forall A \in \mathcal{A}$, $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$ a σ-aditivita plyne ze σ-aditivity $P(. \cap B)$ a deMorganových pravidel ($B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B$), $P(B)^{-1}$ se prostě z obou stran vytkne. □

Pozor
Podmíněná pravděpodobnost nám neříká nic o příčinné souvislosti.

Pozorování (O podmíněné pravděpodobnosti)
Buďte $A, B, C \in \mathcal{A}$ a pravděpodobnost „správných“ jevů nenulová. Pak:

- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$,

- $B \subset A \implies P(A|B) = 1$,
- $A \cap B = \emptyset \implies P(A|B) = 0$,
- $P(A|\ \Omega) = P(A)$,
- pokud $P(\{\omega\}) > 0$, pak $\forall A \in \mathcal{A}$ platí $P(A|\ \{\omega\}) = \delta_\omega(A)$.

Důkaz
Triviální (buď z definice, nebo z toho, že je to pravděpodobnost). □

Pozor (Neplatí!)
$P(A|B \cup C) = P(A|B) + P(A|C)$, ani v případě, že $A \cap B = \emptyset$.

Věta 3.2 (O násobení pravděpodobností)

Buďte $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Pak

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \cdot \ldots \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1).$$

Důkaz
Z $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ plyne, že $P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) > 0$ pro $k \in [n-1]$, pomocí monotonie pravděpodobnosti. Tedy výraz je dobře definován.

Dokážeme indukcí: Pro $n = 2$ platí $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$ z definice. Z $n-1$ na n: $(B := A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(B \cap A_n) \overset{\text{def}}{=} P(A|B) \cdot P(B) \overset{\text{IP}}{=}$$

$$= P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \cdot \ldots \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1).$$

□

Věta 3.3 (O celkové pravděpodobnosti)

Buďte $A, B_1, B_2, \ldots$ náhodné jevy takové, že $P(\bigcup_n B_n) = 1$ a $B_i \cap B_j = \emptyset\ \forall i \neq j$ a $P(B_i) > 0\ \forall i$. Potom $P(A) = \sum_n P(A|B_n) \cdot P(B_n)$.

Důkaz
Víme $P\left(\left(\bigcup_n B_n\right)^c\right) = 0$, a tedy $P(A) = P\left(A \cap \bigcup_n B_n\right) + P\left(A \cap \left(\bigcup_n B_n\right)\right) = P\left(A \cap \bigcup_n B_n\right)$, protože P je konečně-aditivní a platí monotonie. Dle de Morganových pravidel (a toho, že průnik s další množinou zachovává disjunktnost):

$$P(A) = P\left(\bigcup_n (A \cap B_n)\right) = \sum_n P(A \cap B_n) = \sum_n P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$

□

Věta 3.4 (Bayesova)

Za předpokladů věty o celkové pravděpodobnosti a $P(A) > 0$, platí $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_n P(A|B_n)P(B_n)}$.

Důkaz
Snadný z definice podmíněné pravděpodobnosti a věty o celkové pravděpodobnosti. □

Příklad (Pólyovo urnové schéma)
Máme v urně n koulí k různých barev. Náhodně taháme z urny. Po vytažení koule do urny vytaženou kouli vrátíme a s ní i Δ (pevný parametr) koulí stejné barvy.

Podle volby Δ máme 2 základní schémata: $\Delta = -1$ (tahání bez vracení) a $\Delta = 0$ (tahání s vracením).

Definice 3.2 (Nezávislé jevy)

Náhodné jevy A a B jsou nezávislé, pokud platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Pozor
Zase to nemá nic do činění s kauzalitou.

Věta 3.5

Jsou-li dva jevy A a B nezávislé, pak jsou i jevy A a B^c nezávislé.

Je-li navíc $P(B) > 0$, pak $P(A|B) = P(A)$.

Důkaz

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B).$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

□

Definice 3.3 (Vzájemná nezávislost)

Buď $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ systém náhodných jevů. Pak říkáme, že tyto jevy jsou (vzájemně) nezávislé, pokud pro každou konečnou množinu $I \subset \Lambda$ (dále $I \in \mathcal{F}(\Lambda)$) platí $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Věta 3.6

Buď $C = \{B_1, \ldots, B_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, systém nezávislých jevů. Nahradíme-li libovolnou podmnožinu těchto jevů jejich doplňky, dostaneme opět systém nezávislých jevů

Důkaz

Indukcí podle velikosti nahrazované množiny. (Použije se předchozí věta.) □

Věta 3.7

Jsou-li jevy $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ vzájemně nezávislé a $P(B_1 \cap \ldots \cap B_m) > 0$, pak

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n | B_1 \cap \ldots \cap B_m) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Důkaz

Snadný. □

4 Náhodné veličiny

Definice 4.1 (Náhodný element)

Buďte $(\Omega, \mathcal{A})$ a $(\Omega', \mathcal{A}')$ stavové prostory. Pak každé měřitelné zobrazení $X : \Omega \to \Omega'$ nazveme náhodný element z Ω'.

Definice 4.2 (Náhodná veličina)

Měřitelné zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nazveme (reálnou) náhodnou veličinou.

Definice 4.3 (Značení)

Místo $\{\omega \in \Omega |\ X(\omega) \leq a\}$ píšeme $\{X \leq a\}$, místo $P(\{X \leq a\})$ píšeme $P(X \leq a)$.

Definice 4.4

Buď X náhodná veličina. $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ značíme $\sigma(X)$ a nazýváme σ-algebrou náhodných jevů generovaných náhodnou veličinou X (σ-algebra indukovaná X).

Definice 4.5 (Rozdělení náhodné veličiny)

Rozdělením náhodné veličiny $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ rozumíme indukovanou pravděpodobnostní míru P_X na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ definovanou jako

$$P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B)), \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Poznámka (A důkaz, že je to pravděpodobnostní míra)

P_X je obraz míry P v zobrazení X.

Věta 4.1 (O přenosu integrace pro P_X)

Buď X náhodná veličina a buď h měřitelná funkce $(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Pak platí

$$\int_\Omega h(X(\omega))dP(\omega) = \int_\mathbb{R} h(x)dP_X(x),$$

pokud existuje alespoň jedna strana.

Důkaz

Speciální případ věty o obrazu míry z TMI1. $\square$

Definice 4.6 (Hustota náhodné veličiny)

Buď X náhodná veličina, P_X její rozdělení a μ σ-konečná míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ taková, že $P_X \ll \mu$. Potom $f(x) = \frac{dP_X}{d\mu}(x)$ se nazývá hustota náhodné veličiny X vzhledem k míře μ.

Poznámka

$f(x)$ je určena jednoznačně μ-skoro všude. Pokud pro $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ měřitelnou platí

$$\int_\mathbb{R} |g(x)|dP_X(x) < \infty \qquad (\vee g(x) \geq 0 \forall x),$$

pak $\int_\mathbb{R} g(x)dP_X(x) = \int_\mathbb{R} g(x)f(x)d\mu(x)$.

Věta 4.2

Buď X náhodná veličina, pak platí následující rovnosti:

$$P(X \in B) := P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) = \int_\Omega 1_B(X(\omega))dP(\omega) = \int_\mathbb{R} 1_B(x)dP_X(x) = \int_B dP_X(x) = P_X(B) =$$

$$= \int_\mathbb{R} 1_B(x)dP_X(x) = \int_\mathbb{R} 1_B(x)f(x)d\mu(x) = \int_B f(x)d\mu(x).$$

Důkaz

Je to jen sesypání faktů, které už známe. □

Definice 4.7 (Distribuční funkce)

Mějme náhodnou veličinu $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Funkci $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definovanou jako $F_X(x) = P(X \leq x)$ nazveme distribuční funkce náhodné veličiny X.

Poznámka

Definice se shoduje s distribuční funkcí z TMI1. (A tedy platí věta o vlastnostech distribuční funkce, s tím, že dokonce $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.)

Věta 4.3

Buď $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující vlastnosti distribuční funkce a $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$. Pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a náhodná veličina $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ taková, že $F_X = F$.

Důkaz

Z TMI1 víme, že existuje Lebesgueova-Stieltjesova míra μ, jejíž distribuční funkce je F. Tj. $\mu((-\infty, a]) = F(a)$. Teď chybí jen dodefinovat $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a X. Položíme $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ a $X = \mathrm{id}_\mathbb{R}$. □

Definice 4.8 (Názvosloví: diskrétní náhodná veličina, absolutně spojitá veličina)

Mějme diskrétní náhodnou veličinu $P_X \equiv \mu_d$, tj. existuje nejvýše spočetná $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}$ a $\{p_i\}_{i\in I} \subset (0, 1]$ takových, že $\sum_{i\in I} p_i = 1$ a platí $P_X = \sum_{i\in I} p_i\delta_{x_i}$.

Potom nutně $F_X(x) = \sum_{i\in I} p_i 1_{[x,\infty)}(x)$ a také platí, že $P_X \ll \nu$, kde ν je čítací míra na $\{x_i\}_{i\in I}$.

(Absolutně) spojitá náhodná veličina je taková, že $P_X = \mu_a \ll \lambda$, takže $P_X(B) \int_B f(x)d\mu$.

Definice 4.9 (Kvantilová funkce)

Buď F_X distribuční funkce náhodné veličiny X. Funkce $F_X^{-1}(u) = \int \{x | F_X(x) \geq u\}$, $u \in (0, 1)$ se nazývá kvantilová funkce náhodné veličiny X.

Poznámka
Bude potřeba později. Teď jen: Je neklesající a zleva spojitá. Lze z ní jednoznačně odvodit F_X.

Pozor
Kvantilová funkce obecně není inverzní funkcí k F_X, protože inverzní funkce nemusí existovat. Ale pro F_X rostoucí a spojitou je F_X^{-1} inverzní funkcí k F_X.

4.1 Střední hodnota, rozptyl a momenty náhodné veličiny

Definice 4.10 (Střední hodnota)

Střední hodnota náhodné veličiny X je číslo $\mathbb{E}X$ dané výrazem $\mathbb{E}\, X = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega)$, pokud má integrál smysl.

Definice 4.11 (Medián)

Medián rozdělení náhodné veličiny X je číslo $q_{\frac{1}{2}}$ splňující $P(X \le q_{\frac{1}{2}}) \ge \frac{1}{2}$ a $P(X \ge q_{\frac{1}{2}}) \ge \frac{1}{2}$.

Věta 4.4

Buď X náhodná veličina a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Pak $g(X)$ je také náhodná veličina a $\mathbb{E}g(X) = \int_\mathbb{R} g(x) dP_X(x) = \int_\mathbb{R} g(x) dF_X(x)$, pokud alespoň jeden z výrazů existuje.

Důkaz
Složení 2 měřitelných funkcí je měřitelné, tj. $g(X)$ je opravdu náhodná veličina.

$$\mathbb{E}g(X) = \int_\Omega g(X(\omega)) = dP(\omega) = \int_\mathbb{R} g(x) dP_X(x).$$

Druhá rovnost plyne ze vztahu mezi P_X a její distribuční funkcí. $\square$

Věta 4.5 (Základní vlastnosti $\mathbb{E}X$)

Buďte X, Y náhodné veličiny na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak platí

$$\mathbb{E}(a + bX) = a + b\mathbb{E}\, X, \qquad X \in L^1, a, b \in \mathbb{R},$$

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y, \qquad X, Y \in L^1,$$

$$P(X \ge 0) = 1 \implies \mathbb{E}X \ge 0, \qquad (\textit{obecněji } P(X \in [a, b]) = 1 \implies \mathbb{E}X \in [a, b]),$$

$$X \in L^1 \implies |X| \in L^1,$$

$$X \le Y, P\textit{-skoro všude} \implies \mathbb{E}X \le \mathbb{E}Y (\textit{pokud existují}).$$

Důkaz

Snadný, aplikace míry. $\square$

Definice 4.12 (Názvosloví: P-skoro jistě)

P-skoro jistě znamená P-skoro všude.

Definice 4.13 ($n-t$ moment)

n-tý moment náhodné veličiny X definujeme jako $\mathbb{E}X^n$, $n \in \mathbb{N}$.

n-tý absolutní moment náhodné veličiny X definujeme jako $\mathbb{E}|X|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

n-tý centrální moment náhodné veličiny X definujeme jako $\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^n$, $n \in \mathbb{N}$, pokud $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}$.

n-tý absolutní centrální moment náhodné veličiny X definujeme jako $\mathbb{E}|X-\mathbb{E}X|^n$, $n \in \mathbb{N}$, pokud $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}$.

Poznámka

1-ní moment je $\mathbb{E}X$. První centrální moment je 0.

Definice 4.14 (Rozptyl)

Rozptyl náhodné veličiny X je definován jako $\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2$. Značí se $\operatorname{var} X$.

Poznámka

Rozptyl je střední čtvercová odchylka X od $\mathbb{E}X$. $\operatorname{var} X = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 \geq 0$. $\operatorname{var} X = 0$ právě tehdy, když $X = \mathbb{E}X$ skoro jistě.

Věta 4.6 (Základní vlastnosti rozptylu)

$$\operatorname{var}(a+bX) = b^2 \operatorname{var} X, \qquad a, b \in \mathbb{R} \wedge X \in L^2.$$

Důkaz

$$\operatorname{var}(a+bX) = \mathbb{E}(a+bX-\mathbb{E}(a+bX))^2 = \mathbb{E}(a+bX-a-b\mathbb{E}^X) = \mathbb{E}(bX-b\mathbb{E}X) = \mathbb{E}(b(X-\mathbb{E}X))^2 = b^2\mathbb{E}(X-$$

$\square$

Věta 4.7 (Čebyševova nerovnost)

Buď $X \in L^1$ náhodná veličina. Pak $P(|X-\mathbb{E}X| \geq a) \leq \frac{\operatorname{var} X}{a^2}$, $\forall a > 0$.

Důkaz
Viz TMI1. □

Definice 4.15 (Markovova nerovnost)

Buď $X \in L^n$, $n \in \mathbb{N}$, náhodná veličina. Pak $P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}|X|^n}{a^n}$, $\forall a > 0$.

Důkaz
Obdobně Čebyševově větě. □

Věta 4.8 (Nerovnost mezi L^p normami na pravděpodobnostních prostorech)

Buď X náhodná veličina, $0 < \alpha < \beta \in \mathbb{R}$ a $\mathbb{E}|X|^\beta < \infty$. Pak platí $\sqrt[\alpha]{\mathbb{E}|X|^\alpha} \leq \sqrt[\beta]{\mathbb{E}|X|^\beta}$, a speciálně tedy platí $\mathbb{E}|X| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2}$.

Důkaz

$$\mathbb{E}|X|^\alpha = \int_\mathbb{R} |x|^\alpha dP_X(x) = \int_\mathbb{R} |x|^\alpha \cdot 1 dP_X(x) \overset{\text{Hölder na } p = \frac{\beta}{\alpha}}{\leq} \left(\int_\mathbb{R} |x|^\beta dP_X(x)\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \left(\int_\mathbb{R} 1^q dP_X(x)\right)^{\frac{1}{q}} = \ldots \cdot 1.$$

(Integrál napravo je konečný z předpokladů této věty, tedy splňujeme předpoklady Höldera.) Odmocněním α dostáváme přesně chtěnou nerovnost. □

Například (Absolutně spojitá rozdělení)
Rovnoměrné rozdělení intervalu $[a, b]$, $a < b \in \mathbb{R}$ značíme $R([a, b])$ a jeho hustota je až na konstantu Lebesgueova míra: $f_X(x) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(x)$.

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 1, & t \geq b. \end{cases} \qquad \mathbb{E}X = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}, \operatorname{var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ značíme $Exp(\lambda)$. $P(X > t) = e^{-t\lambda}$, $t > 0$. $F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pro $t \geq 0$ a 0 pro $t \leq 0$. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ a $f_X(x) = 0$ jinak. $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$, $\operatorname{var} X = \frac{1}{\lambda^2}$.

Poznámka
Exponenciální rozdělení má vlastnost ztráty paměti, tedy že $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$, $s, t > 0$.

Normální (Gaussovo) rozdělení: Normované $N(0, 1)$ je $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. $F_X(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Tyto F_X a f_X se často značí Φ a φ. $\mathbb{E}X = 0$ ($x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ je lichá funkce), $\operatorname{var} X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 = 1$. $\mathbb{E}X^{2k+1} = 0$.

Obecné $N(\mu,\sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ má $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Tvrzení 4.9

Buď X nezáporná (tj. $P(X \geq 0) = 1$) absolutně spojitá náhodná veličina, která splňuje $P(X > s+t | X > s) = P(X > t)$, $\forall s,t > 0$, pak $X \sim Exp$.

Důkaz

Dělat nebudeme. □

Věta 4.10

$X \sim N(0,1)$ a $Y := \sigma X + \mu$, pro $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Pak $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Důkaz

TODO!!! □

Důsledek

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\sigma Z + x \leq t) = P\left(Z \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right).$$

Důsledek

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(\sigma Z + \mu) = \mu + \sigma\mathbb{E}Z = \mu + 0 = \mu.$$
$$\operatorname{var} Y = \operatorname{var}(\sigma Z + \mu) = \sigma^2 \cdot \operatorname{var} Z = \sigma^2.$$

Věta 4.11 (Rozdělení funkce náhodné veličiny)

Buď X náhodná veličina s distribuční funkcí F_X, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Pak $Y = g(X)$ je náhodná veličina s distribuční funkcí $F_Y(y) = \int_{\{x|g(x) \leq Y\}} dF_X(x)$.

Důkaz

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq Y) = P_X(\{x|g(x) \leq y\}) = \int_{\{x|g(x)\leq y\}} dF_X(x).$$

□

5 Náhodné vektory

Definice 5.1 (Náhodný vektor)

Měřitelné zobrazení $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, nazveme náhodným vektorem.

Definice 5.2 (Rozdělení náhodného vektoru)

Rozdělením náhodného vektoru $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ nazveme indukovanou pravděpodobnostní míru $P_{\mathbf{X}}$ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ definovanou jako $P_{\mathcal{X}}(B) = P(\{\omega \in \Omega | \mathcal{X}(\omega) \in B\})$, $B \in \mathcal{B}^n$.

Definice 5.3 ((Sdružená) distribuční funkce)

(Sdružená) distribuční funkce náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je definována jako

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(\bigcup_{i=1}^{b}(X_i \leq x_i)), \qquad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Poznámka
$F_{\mathbf{X}}$ jednoznačně určuje $P_{\mathbf{X}}$.

Věta 5.1 (O marginální distribuční funkci)

Buď $\mathbf{X}$ n-rozměrný náhodný vektor s distribuční funkcí $F_{\mathbf{X}}$. Pak pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{x_n \to \infty} F_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_n) = F_{(X_1, \dots, X_{n-1})^T}(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

kde $F_{(X_1, \dots, X_{n-1})^T}$ je distribuční funkce náhodného vektoru $(X_1, \dots, X_{n-1})^T$.

Důkaz
Použijeme Heineho větu: Nechť máme posloupnost čísel $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ takových, že $y_k \to \infty$. Označme $B = \bigcup_{i=1}^{n-1} \{X_i \leq x_i\}$. $B_k = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \{X_i \leq x_i\}\right) \cap \{X_n \leq y_k\}$, $D_k = (\bigcup_{l=k}^{\infty} B_l^c)^c$, $k \in \mathbb{N}$. Zřejmě $D_k \subseteq B_k \subset B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ a $D_k \nearrow B$. Ze spojitosti P máme $\lim_{k\to\infty} P(D_k) = P(B)$. Nakonec z monotonie P máme $P(D_k) \leq P(B_k) \leq P(B)$, tedy ze dvou strážníků $\lim_{k\to\infty} P(B_k) = P(B)$. $\square$

Poznámka
Pro každou permutaci $\pi \in \mathcal{S}_n$ platí

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})^T}(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

Rozdělení $P_{\mathbf{Y}}$ podvektoru $\mathbf{Y} = (X_j)_{j \in J}$, $J \subset \{1, \dots, n\} = I$ se nazývá marginální rozdělení (a distribuční funkce se nazývá marginální distribuční funkce).

Rozdělení $(X_1, \dots, X_n)$ určuje rozdělení $X_1, \dots, X_n$, ale ne naopak.

Definice 5.4 (Značení)

Mějme dva body $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a buď $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $c_i \in \{a_i, b_i\}, \forall i \in [n]$. Potom

$$\Delta_{n,k} = \{c | c_i = a_i \text{ právě pro } k \text{ indexů}\}, \qquad k \in [n]_0.$$

Věta 5.2 (O vlastnostech sdružené distribuční funkce)

Distribuční funkce náhodného vektoru $\mathbf{X}$ *splňuje:*

1. $\lim_{x_i \to \infty \forall i} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 1$;
2. $\forall j \forall x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n : \lim_{x_j \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0$;
3. $F_{\mathbf{X}}$ *je zprava spojitá v každé proměnné;*
4. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $a_i < b_i$, $\forall i \in [n]$ *platí* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\mathbf{c} \in \Delta_{n,k}} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{c}) \geq 0$. *(„Monotonie“.)*

Důkaz

1. Uvědomme si, že $x_i \to \infty, \forall i \in [n] \Leftrightarrow \min_{i \in [n]} x_i \to \infty$. Z monotonie pravděpodobnosti P máme $1 \geq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \geq F_{\mathbf{X}}(\min_i x_i \cdot (1, \dots, 1))$. Stačí ukázat, že pro funkci $H(x) := F_{\mathbf{X}}(x \cdot (1, \dots, 1))$ platí $\lim_{x \to +\infty} H(x) = 1$. $H(x)$ je neklesající funkce x (z monotonie pravděpodobnosti P a definice distribuční funkce) a $H(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Takže musí $\exists \lim_{x \to \infty} \leq 1$ a nutně bude i rovna limitě $\lim_{\mathbb{N} \ni k \to \infty}(k)$. Označme $B_k = (-\infty, k \cdot (1, \dots, 1)]$. Platí $B_k \nearrow \mathbb{R}^n$, takže ze spojitosti pravděpodobnosti $H(k) = P_{\mathbf{X}}(B_k) \to 1$.

2. 3. analogicky (za domácí úkol). $\square$