

### *Příklad*

Nechť  $\mathbf{V}$  je vektorový prostor nad komutativním tělesem  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbf{V}$  má spočetnou (nekonečnou) bázi  $B = \{B_i | i \in \mathbb{N}\}$ . Popište ideály (oboustranné) okruhu  $R = \text{End}_{\mathbb{T}}(\mathbf{V})$ .

┌

### *Řešení*

Předpokládejme, že  $I$  je ideál, který obsahuje endomorfismus  $f$  zobrazující na podprostor s bází  $C = (C_i)_{i=1}^N$ , kde  $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ . Je-li  $N = \infty$ , pak vezmeme  $D = (D_i)_{i=1}^{\infty} = (f^{-1}(C_i))_{i=1}^{\infty}$  posloupnost nějakých vzorů  $C$ . Nyní vezmeme endomorfismy  $g, h$ , že  $\forall i \in \mathbb{N} : g(B_i) = D_i \wedge h(C_i) = B_i$ . Složení všech našich endomorfismů:  $h \circ f \circ g$ , musí být též v  $I$  a zároveň se na bázi  $B$  chová jako identita, tj. je identita na celém  $\mathbf{V}$ . A cokoliv složeno s identitou je ono samo, tedy  $I = R$ , ať bylo  $f$  jakékoliv s nekonečněrozměrným obrazem.

Nyní tedy  $N \in \mathbb{N}$  (pro všechny prvky  $I$ ). Potom můžeme pro každý vektor  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  a pro každý endomorfismus  $f_2 : \mathbf{V} \rightarrow \text{LO } \mathbf{v}$  najít endomorfismus  $g_{\mathbf{v}}$  zobrazující  $\mathbf{v}$  na  $D_1$  a zbytek (kromě lineárního obalu  $\mathbf{v}$ ) na  $\mathbf{o}$  a endomorfismus  $h_{\mathbf{v}}$  zobrazující  $C_i$  na  $\mathbf{v}$ . Potom  $f_2 \circ g_{\mathbf{v}} \circ f \circ h_{\mathbf{v}} = f_2$ . Tedy  $f_2 \in I$ . Tudíž  $I$  obsahuje všechny endomorfismy zobrazující na libovolný 1D podprostor. A (konečným) součtem (na něž musí být  $I$  také uzavřený) takových endomorfismů dostaneme libovolný endomorfismus, který má konečněrozměrný obraz.

Nakonec  $N = 0$  (pro všechny prvky  $I$ ) je ten nezajímavý případ na závěr, kdy  $I = \{\mathbf{o}\}$ , jelikož endomorfismus vracející počátek tvoří sám o sobě grupu vůči sčítání a zároveň je invariantní vůči složení (pravému i levému) s jiným endomorfismem.

Tedy ideály jsou 3:  $\text{End}_{\mathbb{T}}(\mathbf{V})$ , {konečné obrazy},  $\{\mathbf{o}\}$ .

└