Organizační úvod

Poznámka (složení předmětu)
Předmět má přednášku, cvičení a proseminář z Matematické analýzy.

Poznámka (Motivace)
TODO

Poznámka (Jak studovat)
Studujte průběžně, ptejte se…

Poznámka (Literatura)

- skripta – viz homepage
- příklady – Koláček & spol. – Příklady z matematické analýzy pro fyziky 1, 2, 3
- další příklady – viz homepage

Motivace

Poznámka (Používá se v)

- Fyzice (viz pohyb planet, např. Proč obíhají planety po elipsách?)
- Ekonomii (viz úroky, např. Lze předpovědět změny úroků v ekonomice a na burze?)
- Meteorologii (např. Jak ovlivňují teplé mořské proudy počasí v Evropě?)
- Lékařství (např. Jak dlouho bude koncentrace léku v krvi na účinné úrovni?)
- Epidemiologie (např. Proč se epidemie šíří nejprve rychle a potom pomalu?)
- Architektura (viz mosty (vibrace), např. Jak se ujistit, že most nespadne v bouři?)
- Inženýrství (viz letadla, např. Jak zkonstruovat nové křídlo pro letadlo? (Většina peněz i času při konstrukci jsou simulace.))

- Informatika (viz MP3, JPEG, např. Jak uchovat informaci o dané funkci v co nejmenším počtu čísel? (Používá se Fourierova transformace = převod funkce na siny a cosiny))

Poznámka (Proč se analýzu učíme my?)

- Abychom uměli látku (hledat extrémy funkcí, umět integrovat)
- Měli solidní matematické základy
- Přečíst návod, jak používat nějaké matematické modely (např. Uplatnění v bance – MFF nese mnoho peněz (nejvíce žádané práce jsou práce stylu statistik))
- Myslet, analyzovat, nedělat chyby (nezapomínat na další možnosti)
- Abychom se naučili způsob myšlení – matematici / matematičky dělají činnosti lépe (ze dvou lidí, co ji neumí, je matematik ten, kdo ji zvládne lépe, nikoliv ten druhý.)

1 Úvod

Dosti možná spíše opakování střední

1.1 Výroky

Definice 1.1 (Výrok)

Tvrzení, o kterém má smysl říct, že je pravdivé, či ne.

Například
„Obloha je modrá.“
„Vídeň je hlavní město ČR.“

Poznámka (Vytváření nových výroků)
Děje se pomocí spojek a, nebo, implikací, ekvivalencí, atd.

A	B	konjunkce $A \& B$	disjunkce AvB	implikace $A \implies B$	ekvivalence $A \Leftrightarrow B$	negace A $\neg A$
0	0	0	0	1!	1	1
0	1	0	1	1!	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

$A \implies B$ = A je postačující podmínka pro B = B je nutná podmínka pro A.

Například (Pravdivé výroky)
$1 = 2 \implies 2 = 3$
já jsem papež $\implies$ všechna letadla jsou modrá

Příklad

- $$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg B \implies \neg B$$
- $$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg(A \& \neg B))$$
- $$\neg(A \& B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$
- $$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \& \neg B)$$
- $$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \implies B) \& (B \implies A)$$

Definice 1.2 (Kvantifikátory)

Dále existují tzv. kvantifikátory: Obecný (= pro všechna) $\forall$ a Existenční (= existuje) $\exists$.

Úmluva
$\forall x \in \mathbb{N}, x > 10\ A(x)$ značí $\forall x \in \mathbb{N}(x > 10 \implies A(x))$

Například

- Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$ je: $\forall x \in M : A(x)$
- Existuje $x \in M$ tak, že platí $A(x)$ je $\exists x \in M : A(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m$

Například (Negace výroků)

- $\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$
- $\neg(\exists x \in M : A(x) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$
- $\neg$(Nikdo mě nemá rád.) $\Leftrightarrow$ Existuje alespoň jeden člověk, který mě má rád.
- $\neg(\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \neg(\forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$$

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \neg(\exists k \in \mathbb{N} : k > n + m)$$

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n + m)$$

Pozor
Na pořadí kvantifikátorů záleží!

Například
M…Muži
Ž…Ženy
L(m, ž)…muži m se líbí žena ž

$$\forall m \in M\ \exists \in\ : L(m,)$$

$$\exists \in\ \forall m \in M : L(m,)$$

První je, že pro každého muže existuje nějaká žena, která se mu líbí, naopak druhá říká, že existuje žena, která se líbí všem mužům.

1.2 Metody důkazů tvrzení

Definice 1.3 (Důkaz sporem)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow \neg(A \& \neg B)$$

Například ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)
($A : x = \sqrt{2}$, $B : x \notin \mathbb{Q}$)

Důkaz (Důkaz sporem:)
Nechť $x = \sqrt{2}$ a $x \in \mathbb{Q}$. $x \in \mathbb{Q} \implies x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$, nesoudělná.
$x^2 = 2$, $2 = x^2 = \frac{p^2}{q^2} \implies 2q^2 = p^2 \implies p = 2k \implies 2q^2 = 4k^2 \implies q^2 = 2k^2 \implies q = 2l$
$p = 2k$ & $q = 2l \implies p$ a q soudělná. ↯ □

Definice 1.4 (Přímý důkaz)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (A \implies C_1 \implies C_2 \implies \ldots \implies C_n \implies B)$$

Například

$$n^2 \text{liché} \implies n \text{liché}$$

Důkaz

$$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k \implies n^2 = p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_k^2$$
$$n^2 \text{liché} \implies 2 \nmid p_1 \,\&\, \ldots \,\&\, 2 \nmid p_k \implies n \text{liché}$$

□

Definice 1.5 (Nepřímý důkaz)

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg B \implies \neg A)$$

Například

$$n^2 \text{liché} \implies n \text{liché}$$

Důkaz

$$n \text{sudé} \Leftrightarrow n = 2k \implies n^2 = 4k^2 \implies n^2 \text{sudé}$$

□

Definice 1.6 (Matematická indukce)

$$(\forall n \in \mathbb{N} : V(n)) \Leftrightarrow (V(1) \;\&\; \forall n \in \mathbb{N} : V(n) \implies V(n+1))$$

Například

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} n \cdot (n+1)$$

Důkaz
1. $n = 1$: $1 = \frac{1}{2} 1 \cdot 2$
2.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \implies \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) + (n+1) = \frac{1}{2} (n+1) \cdot (n+2)$$

□

Příklad
Všechna auta mají stejnou barvu.

Důkaz
1. $n = 1$: Jedno auto má stejnou barvu jako ono samo.
2. $n \to n+1$: vezmu prvních n aut, ty mají stejnou barvu, vezmu posledních n aut, ty mají také stejnou barvu. Tedy dohromady mají stejnou barvu. □

(Spoiler: $n = 2$)

1.3 Množina reálných čísel

Poznámka (Množiny čísel)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

Definice 1.7 (Omezená množina)

Nechť $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}$. Řekněme, že $\mathbb{M}$ je omezená shora (omezená zdola), jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ = horní (dolní) závora tak, že pro všechna $x \in \mathbb{M}$ platí $x \leq a$ $(x \geq a)$.

Definice 1.8 (Supremum a infimum)

Nechť $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}$ je shora (zdola) omezená. Číslo $s \in R$ nazýváme supremem (infimem) $\mathbb{M}$, pokud:

$$\forall x \in \mathbb{M} : x \leq s (s \geq x)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < s (y > s) \exists x \in \mathbb{M}, y < x (x > y)$$

Například

- $\sup [0,1] = 1$ (dokázat obě podmínky pro 1 (x z druhé podmínky volím 1)...)
- $\sup(0,1) = 1$ (taktéž dokázat obě podmínky pro 1 (pozor na záporná y) (x z druhé podmínky zvolíme často $\frac{s+y}{2}$))

Definice 1.9 (Reálná čísla)

Na množině $\mathbb{R}$je dána relace $\leq$ $(\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, operace sčítání $+$ a operace násobení $\cdot$ a množina $\mathbb{R}$obsahuje prvky 0 a 1 tak, že platí:

Viz skripta (takové ty tělesové / grupové podmínky, podmínky uspořádání a *existence suprema*)

Věta 1.1 (o existenci infima)

Nechť $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}$ *je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje* $\inf \mathbb{M}$.

Důkaz
Označme $-\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{M}\}$. Zřejmě $\mathbb{M} \neq \emptyset$. $\mathbb{M}$ je zdola omezená $\implies$ $-\mathbb{M}$ je shora omezená. ($\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{M} x > K \implies \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in -\mathbb{M} x < -K$). Z axiomů $\mathbb{R}$tedy existuje $s = \sup -\mathbb{M}$. Položme $i = -s$. Tvrdím $i = \inf M$. (Dokážeme z definice suprema a infima, viz skripta). $\square$

Věta 1.2 (Archimedova vlastnost)

Ke každému $x \in \mathbb{R}$ *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *tak, že* $x < n$

Důkaz (Sporem)

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} x \geq n$$

Tedy $\mathbb{N}$ je omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Tedy existuje $x' \mathbb{R} x" = \sup \mathbb{N}$. Tedy $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq x'$. Pak také $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 \leq x'$. To ale tvrdí, že $x' - 1$ je také $\sup \mathbb{N}$. To je ale spor, protože můžeme zvolit $y = x' - \frac{1}{2}$, pak $y < x'$, tedy z druhé vlastnosti suprema $\exists n \in \mathbb{N} : x' - \frac{1}{2} < n$, ale zároveň už víme, že $\forall n \in \mathbb{N} : n < x' - 1$. □

Věta 1.3 (Hustota $\mathbb{Q}$a $\mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$)

*Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Pak existují $q \in \mathbb{Q}$ a $\in \mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$ tak, že $q \in (a, b)$ a $r \in (a, b)$.*

Důkaz
Podle $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{b-a} < n$, tedy $\frac{1}{n} < b - a$. Zvolme $q = \frac{\lceil an \rceil + 1}{n}$, pak jistě $a < q < b$ a $q \in \mathbb{Q}$.

Poté použijeme $q_1 \in (a, b)$ a $q_2 \in (q_1, b)$. Zvolme $r = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}}$. Pak (jelikož druhá část je kladná) $r > q_1$. A $r < q_2 \Leftrightarrow q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}} < q_2 \Leftrightarrow \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}} < q_2 - q_1$.

Tedy $r \in (a, b)$ a $r \in \mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$, jelikož $r = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}} = p \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{2} = \frac{q_2 - q_1}{p - q_1}$, ale levá strana je jistě iracionální a pravá racionální. Spor. □