Příklad (rekur2)
Zjednodušte popis funkce t (stačí $\Theta(t)$) dané následující rekurencí: $t(n) = 2t\left(\lceil\sqrt{n}\rceil\right) + c$, pro $n \geq 3$ a kde $t(n) = n$ pro $1 \leq n \leq 2$.

Řešení (Variace na řešení rekur)
Nejprve indukcí dokážeme, že je funkce neklesající. 1. krok: Pro $n = 1, 2$ tvrzení rozhodně platí.

2. krok: Nechť tvrzení platí pro všechna $n \leq k$. Chceme dokázat, že $t(k+1) \geq t(k)$, tedy že

$$2t\left(\left\lceil\sqrt{k+1}\right\rceil\right) + c \geq 2t\left(\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil\right) + c,$$

$$t\left(\left\lceil\sqrt{k+1}\right\rceil\right) \geq t\left(\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil\right),$$

z ind. předpokladu (a toho, že $\left\lceil\sqrt{k+1}\right\rceil \leq k, \forall k > 1$) je to totéž jako $\left\lceil\sqrt{k+1}\right\rceil \geq \left\lceil\sqrt{k}\right\rceil$, horní celá část je také neklesající a odmocnina též tj. toto platí, když $k+1 \geq k$, což rozhodně je, tudíž t je neklesající.

Nyní si můžeme všimnout[a], že když dosadíme $n = (\ldots((2\overbrace{^2)^2)\ldots)^2}^{k\text{-krát}} = 2^{2^k}$, pak $t\left(2^{2^k}\right) = 2 \cdot 2^k + (c \cdot 2^{k-1} + c \cdot 2^{k-2} + \ldots + c \cdot 2^1 + c)$, jelikož v $t(n)$ je každé c přenásobeno dvěma tolikrát, jak hluboko je v pomyslné rekurzi výpočtu $t(n)$. Tudíž ze součtu geometrické řady máme

$$t\left(2^{2^k}\right) = 2^{k+1} + c \cdot \frac{2^k - 1}{2 - 1} = (2+c) \cdot 2^k - c.$$

Tedy pro tato konkrétní n je $t(n)$ rovno[b] $(2+c) \cdot 2^{\log(\log n)} - c = (2+c) \cdot \log(n) - c$. Ale protože je funkce neklesající, tak pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je

$$(2+c)\lfloor\log n\rfloor - c \leq t(n) \leq (2+c) \cdot \lceil\log n\rceil - c,$$

$$(2+c) \cdot (\log(\log n) - 1) - c \leq t(n) \leq (2+c) \cdot (\log(\log n) + 1) - c.$$

Z čehož je jasně vidět $t(n) = \Theta(\log n)$.

---

[a] Nebo dokázat indukcí, že $t\left(2^{2^k}\right) = (2+c)2^k - c$: 1. krok:

$$k = 0 \implies t\left(2^{2^k}\right) = t\left(2^1\right) = t(2) = 2 = 2 + c - c = (2+c)2^k - c.$$

2. krok: Ať $t\left(2^{2^{k-1}}\right) = (2+c)2^{k-1} - c$. Potom

$$t\left(2^{2^k}\right) = 2t\left(\left\lceil\sqrt{2^{2^k}}\right\rceil\right) + c = 2t\left(\left\lceil 2^{2^k/2}\right\rceil\right) + c = 2t\left(\left\lceil 2^{2^{k-1}}\right\rceil\right) + c =$$

$$= 2t\left(2^{2^{k-1}}\right) + c = 2\left((2+c) \cdot 2^{k-1} - c\right) + c = (2+c) \cdot 2^k - 2c + c = (2+c) \cdot 2^k - c.$$

[b] $\log = \log_2$