1 Úvod

Poznámka (Domluva)
$\mathbb{N}$ jsou přirozená čísla s 0. n značí přirozené číslo.

Dále se probírali základy značení a teorie množin.

Definice 1.1 (Základy)

Základem výrokové logiky je 5 symbolů (2 hodnoty + 3 logické spojky): $\top\bot\neg\wedge\vee$ = pravda, lež, negace, a, nebo.

Dále jsou to výrokové atomy z nějaké abecedy. Libovolný výrok je pak konečným aplikováním logických spojek.

Definice 1.2 (Pravdivostní ohodnocení)

Pravděpodobnostní ohodnocení je zobrazení t z prvovýroků do $\{0,1\}$. Toto zobrazení lze jednoznačně rozšířit na t' na všechny výroky:

$$t'(\top) = 1, t'(\bot) = 0, t'(\neg a) = 1 - t'(a), t'(a \vee b) = \max\{t'(a), t'(b)\}, t'(a \wedge b) = \min\{t'(a), t'(b)\}$$

Definice 1.3

Pomocí pravdivostního ohodnocení můžeme zavést implikaci (spojka mezi premisou (antecedent) a závěrem (konsekvent)).

Definice 1.4 (Tautologie)

p je tautologie (notace $\models p$) $\equiv$ $t(p) = 1$ pro všechna $t : A \to \{0,1\}$. p je splnitelné $\equiv$ existuje $t : A \to \{0,1\}$ takové, že $t(p) = 1$.

Lemma 1.1 (Zákony inempotence, komutativity, asociativity, distributivity, absorbce, DeMorganovy)

Viz skripta.

Definice 1.5 (Model)

Model (koho, čeho) Σ (výrokové teorie) je každé pravděpodobnostní ohodnocení t, které přiřazuje 1 všem výrokům ze Σ. Říkáme, že p je tautologický důsledek Σ (píšeme $\Sigma \models p$, říkáme p vyplývá ze Σ) $\equiv$ $t(p) = 1$ pro všechny modely t (koho čeho) Σ.

Poznámka
$\models p$ je totéž, co $\emptyset \models p$.

Lemma 1.2

Vlastnosti $\models$. Viz skripta.

Definice 1.6 (Arita)

Mějme množinu symbolů F a zobrazení $a : F \to \mathbb{N}$. Říkáme, že symbol $f \in F$ má aritu n $\equiv a(f) = n$.

Řekněme, že slovo je přijatelné $\equiv$ TODO.

Definice 1.7 (Arita logických symbolů)

Aritu symbolů ar definujeme pro $F = A \cup \{\top, \bot, \neq, \vee, \wedge\}$ jako $ar(x) = 0, x \in A \cup \{\top, \bot\}$, $ar(\neq) = 1$, $ar(\vee, \wedge) = 2$.

Lemma 1.3

Buďte $t_1, \ldots, t_m$ a $u_1, \ldots, u_n$ jsou přijatelná slova a w libovolné slovo tak, že $t_1 \ldots t_m w = u_1 – u_n$. Potom $m \leq n$, $t_i = u_i$ pro $i \in [m]$ a $w = u_{m+1} \ldots u_n$.

Důkaz
Indukcí podle velikosti $u_1 \ldots u_n$. □

Definice 1.8 (Modus Ponens (= MP = odvozovací pravidla))

Z p a $p \implies q$, odvodíme q.

Definice 1.9 (Důkaz)

Formální důkaz (či důkaz) p z Σ je sekvence $p_1, \ldots, p_n$, kde $n \geq 1$ a $p_n = p$ tak, že $\forall k \in [n]$: buď $p_k \in Sigma$, nebo p_k je výrokový axiom (viz skripta), nebo $\exists i, j \in [k-1]$ tak, že p_k lze odvodit pravidlem MP z p_i a p_j.

Říkáme, že p je dokazatelné ze Σ, a značíme $\Sigma \vdash p$

Tvrzení 1.4

Pokud $\Sigma \vdash p$, pak $\Sigma \models p$.

Důkaz
Jednoduchý. □

Věta 1.5 (O úplnosti (1. znění))

$$\Sigma \vdash p \Leftrightarrow \Sigma \models p.$$

Věta 1.6 (Kompaktnost logiky)

Pokud $\Sigma \models p$, pak existuje konečná podmnožina $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tak, že $\Sigma_0 \models p$.

Důkaz
Vyplývá z předchozí věty ☐

Definice 1.10 (Konzistentnost)

Říkáme, že Σ je nekonzistentní, pokud $\Sigma \vdash \perp$, jinak (pokud $\Sigma \nvdash \perp$) je konzistentní.

Věta 1.7 (O úplnosti (2. znění))

Σ je konzistentní právě tehdy, když má model.

Důsledek
Σ má model $\Leftrightarrow$ každá konečná podmnožina Σ má model.

Lemma 1.8 (Dedukce)

Předpokládejme $\Sigma \cup \{p\} \vdash q$. Potom $\Sigma \vdash p \implies q$.

Důkaz (Indukcí)
Pokud je q výrokový axiom, pak $\Sigma \vdash q$ a jelikož $q \implies (p \implies q)$ je výrokový axiom, MP říká $\Sigma \vdash p \implies q$. Pokud $q \in \Sigma \cup \{p\}$, pak buď TODO ☐

Důsledek
$\Sigma \vdash p$ tehdy a pouze tehdy, když $\Sigma \cup \{\neg\}$ je nekonzistentní.

Důkaz
$\implies$: Předpokládejme, že $\Sigma \vdash p$. Jelikož $p \implies (\neg p \implies \perp)$ je výrokový axiom, můžeme 2krát použít MP a získat $\Sigma \cup \{p\}$ TODO ☐

Důsledek
Z druhého znění věty o úplnosti vyplývá první znění.

Definice 1.11

Říkáme, že Σ je kompletní (úplná, ale s větou o úplnosti nemá nic společného), pokud Σ je konzistentní a pro všechna p je buď $\Sigma \vdash p$ nebo $\Sigma \vdash \neg p$.

Lemma 1.9 (Lindenbaum)

Nechť Σ je konzistentní. Pak existuje kompletní Σ' tak, že $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

Důkaz
Zornovo lemma. TODO. Pokud je axiomů konečně, tak můžeme udělat důkaz bez Zornova lemmatu. □

Definice 1.12 (Pravdivostní ohodnocení v závislosti na Σ)

$t_\Sigma : A \to \{0, 1\}$, $t_\Sigma(a) = 1$, pokud $\Sigma \vdash a$, jinak $t_\Sigma(a) = 0$.

Lemma 1.10

Předpokládejme, že Σ je kompletní, potom pro každé p máme

$$\Sigma \vdash p \Leftrightarrow t_\Sigma(p) = 1.$$

Nevoli t_Σ je model Σ.

Důkaz
Indukcí podle počtu spojek. TODO. □

2 Predikátorová logika

Definice 2.1 (Jazyk)

Jazyk (L) je disjoin sjednocení množiny relací (L^r) (každé relaci $R \in L^r$ přiřadíme aritu $a(R) \in \mathbb{N}$) a množiny funkčních symbolů (L^f) ($F \in L^f$ má aritu $a(F) \in \mathbb{N}$).

Definice 2.2 (Struktura)

Struktura $\mathcal{A}$ pro L je trojice $(A, (R^{\mathcal{A}})_{R \in L^r}, (F^{\mathcal{A}}_{F \in L^f}))$ sestávající z množiny A (tzv. nosič), pro každou m-ární relaci $R \in L^r$ máme její vyjádření $R_A \in A^m$.

Definice 2.3 (Podstruktura, zúžení)

$\mathcal{X}$ je podstruktura struktury $\mathcal{Y}$, značíme $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, pokud $X \subseteq Y$ a všechny operace jsou uzavřené na relace i funkce. Taktéž říkáme, že $\mathcal{Y}$ je rozšíření $\mathcal{A}$.

Zúžení funkce F na podstrukturu $\mathcal{X}$, značené $F|_{\mathcal{X}}$ je, jak bychom čekali.

Definice 2.4 (Homomorfismus)

Ať $\mathcal{A}$ a a $\mathcal{B}$ jsou struktury (pro tentýž jazyk). Homomorfismus $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je zobrazení $h : A \to B$ tak, že $\forall m$-nární $R \in L^r$ a každé $(a_1, \ldots, a_m) \in A^m$ máme $(a_1, \ldots, a_m) \in R^{\mathcal{A}} \implies (ha_1, \ldots, ha_m) \in R^{\mathcal{B}}$. $\forall n$-nární $F \in L^f$ a každé $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ je $h(F^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = F^{\mathcal{B}}(ha_1, \ldots, ha_n)$.

Definice 2.5 (Silný homomorfismus)

Pokud nahradíme implikaci v předchozí definici ekvivalencí, dostaneme tzv. silný homomorfismus. Speciálním případem je tzv. vnoření, TODO.

Definice 2.6 (Kongruence)

Kongruence je ekvivalence taková, že pokud jsou v relaci nějaké prvky, tak jsou v relaci i kongruentní prvky. Stejně tak obraz kongruentních prvků je kongruentní prvek k obrazu původních.

Definice 2.7 (Kvocient / faktorstruktura)

Nechť $\mathcal{A}$ je struktura a $\sim$ kongruence. Potom $\mathcal{A}/\sim$, tzv. faktostruktura, je struktura, kde nosná množina je $A/\sim$ a relace a funkce jsou přepsané tak, aby nové prvky byly v relaci právě tehdy, pokud byly jim odpovídající původní prvky.

2.1 Proměnné a formule

Definice 2.8 (Proměnné)

Proměnné: $Var = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ je spočetná (nekonečná) množina.

Poznámka

Většinou by nevadila ani nespočetná. Naopak se spočetná by nám rozbíjela skládání výroků.

Definice 2.9 (Termy)

L-term je slovo na abecedě $L^f \cup Var$ získané jako: každá proměnná je L-term a kdykoliv je $F \in L^f$ n-nární relace a $t_1, \ldots, t_n$ L-termy, pak je $Ft_1 \ldots t_n$ L-term.

Definice 2.10 (Uzavřený term)

Uzavřený term se nazývá ten term, který neobsahuje proměnné.

Definice 2.11 (Generátory)

Mějme strukturu a množinu (oindexovanou) prvků z ní. Pokud tuto množinu uzavřeme na relace a funkce, pak dostaneme podstrukturu, která se nazývá generovaná danou množinou prvků (a ty se nazývají generátory).