

# 1 Organizační úvod

Přesun nebyl odhlasován.

*Poznámka* (Literatura)

- Engelking: General Topology (spíš taková příručka, hodně obtížná)
- Čech: Bodová topologie
- Kelley: General Topology
- Willard: General Topology

Doporučené jsou poslední dvě.

*Poznámka* (Podmínky zakončení)

Zkouška (ústní) + úkoly ze cvičení (a účast na cvičení)

## 2 Úvod

*Poznámka* (Historie)

- Euler: mosty ve městě Královec (7 mostů, Eulerovský tah)
- Listing (1847): pojem topologie (bez rigorózních definic)
- Poincaré (1895): Analysis Situs (Poincarého hypotéza )
- Fréchet (1906): definuje metrický prostor (až dodnes)
- Hausdorff (1914): tzv. Hausdorffův TP
- Kuratowski (1922): TP, jak jej známe dnes (formálně)

*Poznámka* (TOPOSYM)

V Praze se každých 5 let koná významná konference topologů – TOPOSYM.

## 3 Základní pojmy

Topos = umístění (řečtina).

### 3.1 Topologický prostor, báze, subbáze, váha, charakter

#### Definice 3.1 (Topologický prostor (TP))

Uspořádaná dvojice  $(\mathbb{X}, \tau)$  se nazývá topologický prostor, pokud  $\mathbb{X}$  je množina,  $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$  a platí:

(T1)  $\emptyset, \mathbb{X} \in \tau$

(T2) jsou-li  $U, V \in \tau$ , pak  $U \cap V \in \tau$

(T3) je-li  $\mathcal{U} \in \tau$ , pak  $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$ .

#### Definice 3.2 (Topologie)

Systém  $\tau$  se nazývá topologie na  $\mathbb{X}$ . Prvky množiny  $\mathbb{X}$  se nazývají body. Prvky  $\tau$  se nazývají otevřené množiny.

#### Definice 3.3 (Okolí bodu)

Množina  $V \subseteq \mathbb{X}$  se nazývá okolí bodu  $x$ , pokud existuje  $U \in \tau$ , že  $x \in U \subseteq V$ . Množina všech okolí bodu  $x$  značíme  $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_\tau(x)$ .

#### Definice 3.4 (Báze a subbáze)

Soubor množin  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  se nazývá báze topologie  $\tau$ , pokud pro každé  $U \in \tau$  existuje  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$  :  $\bigcup \mathcal{U} = U$ . Soubor  $\mathcal{S} \subseteq \tau$  se nazývá subbáze topologie  $\tau$ , pokud  $\{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S} \text{ konečná}\}$  je báze topologie  $\tau$ .

#### Tvrzení 3.1 (Charakterizace otevřené množiny pomocí okolí)

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  je TP a  $U \in \mathbb{X}$ . Pak  $U \in \tau$ , právě když  $\forall x \in U \exists V \in \mathcal{U}(x) : V \subseteq U$

┌  
Důkaz

Důkaz ( $\implies$ ) volíme  $V = U$ .

Opačně víme  $\forall x \in U \exists V_x \in \mathcal{U}(x) : V_x \subseteq U$ .  $\exists W_x \in \tau : x \in W_x \subseteq U_x$ .  $U = \bigcup_{x \in U} W_x \in \tau$ . Tedy  $U \in \tau$ . □

└

#### Příklad

Je-li  $(\mathbb{X}, \varrho)$  metrický prostor (MP), pak soubor všech  $\varrho$ -otevřených množin tvoří topologii na množině  $\mathbb{X}$ .

#### Definice 3.5 (Metrizovatelný TP)

TP  $(\mathbb{X}, \tau)$  se nazývá metrizovatelný, pokud na množině  $\mathbb{X}$  existuje metrika  $\varrho$  tak, že topologie odvozená z  $(\mathbb{X}, \varrho)$  splývá s topologií  $\tau$ .

*Například*

Je-li  $(\mathbb{X}, \varrho)$  MP, pak systém všech otevřených koulí tvoří bázi topologie  $\tau_\varrho$ .

┌

*Například*

Všechny otevřené intervaly tvoří bázi topologie na  $\mathbb{R}$ .

└ Systém  $\{(-\infty, b), (a, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$  je subbáze topologie na  $\mathbb{R}$ .

*Například* (Diskrétní a indiskrétní TP)

Je-li  $\mathbb{X}$  množina, pak  $(\mathbb{X}, \mathcal{P}(\mathbb{X}))$  je TP, nazývá se diskrétní TP (a vždy je metrizable). Naopak  $(\mathbb{X}, \{\emptyset, \mathbb{X}\})$  se nazývá indiskrétní TP. (Pokud  $|\mathbb{X}| \geq 2$ , pak indiskrétní TP není metrizable.)

### **Tvrzení 3.2** (Vlastnosti báze)

Je-li  $(\mathbb{X}, \tau)$  TP a  $\mathcal{B}$  jeho báze, pak

(B1)  $\forall U, V \in \mathcal{B} \forall x \in U \cap V \exists W \in \mathcal{B} : x \in W \subseteq U \cap V$ ,

(B2)  $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{X}$ .

Je-li  $\mathbb{X}$  libovolná množina a  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$  splňuje podmínky (B1), (B2), pak na  $\mathbb{X}$  existuje jediná topologie, jejíž báze je  $\mathcal{B}$ .

┌

*Důkaz*

První část je snadná (průniky 2 množin báze i  $\mathbb{X}$  jsou otevřené, tj. prvky topologie, tedy se dají zapsat jako sjednocení podmnožiny báze).

Druhá část: Mějme tedy  $\mathbb{X}$  a  $\mathcal{B}$  z věty splňující obě podmínky. Definujme  $\tau := \{\bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}\}$ .  $\tau$  je topologie na  $\mathbb{X}$  (ověříme, že  $\tau$  splňuje podmínky topologie).

Zároveň volba  $\tau$  je jediná množná, jelikož každý její prvek se musí dát vyjádřit jako sjednocení báze a opačně. □

┌

*Důsledek*

Je-li  $\mathbb{X}$  množina,  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$  a  $\bigcup \mathcal{S} = \mathbb{X}$ , pak  $\mathcal{S}$  je subbáze jednoznačně určené topologie na  $\mathbb{X}$ .

┌

*Důkaz*

$\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S} \text{ konečná}\}$  splňuje podmínky (B1) a (B2) předchozího tvrzení (B2 z definice  $\mathcal{S}$ , B1 protože  $U, V \in \mathcal{B}, U = \bigcup \mathcal{F}_1, V = \bigcap \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{S}$  konečné.  $U \cap V = \bigcap (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \in \mathcal{B}$ . (Dokonce celý průnik je prvkem  $\mathcal{B}$ , nejenom pro každý prvek existuje množina, která ho obsahuje, je podmnožinou průniku a je v  $\mathcal{B}$ ). □

### **Tvrzení 3.3** (Vlastnosti systému všech okolí)

Je-li  $(\mathbb{X}, \tau)$  TP, pak soubory všech okolí  $\mathcal{U}_\tau(x), x \in \mathbb{X}$  splňují

(U1)  $\forall x \in \mathbb{X} : \mathcal{U}(x) \neq \emptyset, x \in \bigcap \mathcal{U}(x)$ ,

- (U2)  $\forall U \in \mathcal{U}(x) \forall V : U \subseteq V \subseteq \mathbb{X} \implies V \in \mathcal{U}(x)$ ,  
 (U3)  $\forall U, V \in \mathcal{U}(x) : U \cap V \in \mathcal{U}(x)$ ,  
 (U4)  $\forall U \in \mathcal{U}(x) \exists V \in \mathcal{U}(x) \forall y \in V : U \in \mathcal{U}(y)$ .

Je-li  $\mathbb{X}$  množina a systémy množin  $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}), x \in \mathbb{X}$  splňující podmínky (U1-4), pak na množině  $\mathbb{X}$  existuje jediná topologie  $\tau$ , že  $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_\tau(x), x \in \mathbb{X}$ .

┌

*Důkaz*

První část snadná. (Domácí cvičení.)

Položme  $\tau = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) | \forall x \in U : U \in \mathcal{U}(x)\}$ .  $\tau$  je topologie na  $\mathbb{X}$ : Z (U1) a (U2) vyplyne (T1), (T2) je vlastně (U3) a (T3) získáme hlavně z (U2). Ať  $U \in \mathcal{U}(x)$ . Položme  $G = \{z \in U | U \in \mathcal{U}(z)\}$ . Zřejmě  $x \in G \subseteq U$ . Tvrdíme, že  $G \in \tau$ : Je-li  $z \in G$ , pak  $U \in \mathcal{U}(z)$ , tedy dle (U4) existuje  $V \in \mathcal{U}(z)$ , že pro každé  $y \in V$  platí  $U \in \mathcal{U}(y)$ . Tedy  $V \subseteq G$ . Proto  $G \in \tau$ . Tedy  $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_\tau(x)$ .

└ Jednoznačnost vyplývá z charakterizace otevřené množiny za pomoci okolí. □

### Definice 3.6 (Báze okolí)

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  je TP. Systém množin  $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$  se nazývá báze okolí v bodě  $x$ , pokud  $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}_\tau(x)$  a pro každé  $V \in \mathcal{U}_\tau(x)$  existuje  $U \in \mathcal{B}(x)$ , že  $U \subseteq V$ .

Indexovaný soubor  $\{\mathcal{B}(x) : x \in \mathbb{X}\}$  se nazývá báze okolí prostoru  $\mathbb{X}$ , pokud  $\forall x \in \mathbb{X} : \mathcal{B}(x)$  je báze okolí v bodě  $x$ .

### Tvrzení 3.4 (Vlastnosti báze okolí)

Je-li  $(\mathbb{X}, \tau)$  TP a  $\{\mathcal{B}(x) | x \in \mathbb{X}\}$  báze okolí, pak

- (O1)  $\forall x \in \mathbb{X} : \mathcal{B}(x) \neq \emptyset, x \in \bigcap \mathcal{B}(x)$ ,  
 (O2)  $\forall x \in \mathbb{X} \forall U, V \in \mathcal{B}(x) \exists W \in \mathcal{B}(x) : W \subseteq U \cap V$ ,  
 (O3)  $\forall x \in \mathbb{X} \forall U \in \mathcal{B}(x) \exists V \in \mathcal{B}(x) \forall y \in V \exists W \in \mathcal{B}(y) : W \subseteq U$ .

Je-li  $\mathbb{X}$  množina a  $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}), x \in \mathbb{X}$  soubory splňující (O1), (O2), (O3), pak na množině  $\mathbb{X}$  existuje jediná topologie, jejíž báze okolí je  $\{\mathcal{B}(x) | x \in \mathbb{X}\}$ .

┌

*Důkaz*

První část je snadná.

Položme  $\mathcal{U}(x) = \{U \in \mathcal{P}(x) : \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subseteq U\}, x \in \mathbb{X}$ . Ověříme, že splňuje (U1-4). (U1) z (O1). (U2) z definice  $\mathcal{U}(x)$ . (U3) z (O2), (U4) z (O3). Z definice báze okolí plyne jednoznačnost volby okolí. Následně použijeme tvrzení o vlastnostech systému všech okolí. □

└

### Definice 3.7 (Váha prostoru)

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  je TP. Pak váha prostoru  $(\mathbb{X}, \tau)$  je nejmenší mohutnost báze prostoru  $(\mathbb{X}, \tau)$ . Značíme ji  $w(\mathbb{X}) = w(\mathbb{X}, \tau)$ .

Charakter v bodě  $x$  je nejmenší mohutnost báze okolí bodu  $x$ . Značíme ho  $\chi(x, \mathbb{X})$ .

Charakter prostoru  $\mathbb{X}$  je  $\sup \{\chi(x, \mathbb{X}) : x \in \mathbb{X}\}$ .

┌ *Například*

$w(\mathbb{R}) = \omega$  ( $\mathbb{R}$  má spočetnou bázi).

$$w(\mathbb{X}, \mathcal{P}(\mathbb{X})) = |\mathbb{X}| \text{ (}\{\{x\} : x \in \mathbb{X}\} \text{ je báze } (\mathbb{X}, \mathcal{P}(\mathbb{X})))$$

$$w(\mathbb{X}, \{\emptyset, \{\mathbb{X}\}\}) = 1$$

┌ *Například*

Je-li  $(\mathbb{X}, \tau)$  metrizovatelný, pak  $\chi(x, \mathbb{X}) \leq \omega$

### **Tvrzení 3.5**

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  je TP a  $x \in \mathbb{X}$ . Pak  $\chi(x, \mathbb{X}) \leq w(\mathbb{X})$

┌ *Důkaz*

Ať  $\mathcal{B}$  je báze  $(\mathbb{X}, \tau)$ , že  $|\mathcal{B}| = w(\mathbb{X})$ . Položme  $\mathcal{B}(x) := \{U \in \mathcal{B} | x \in U\}$ .  $\mathcal{B}(x)$  je báze okolí v bodě  $x$ .

$$|\mathcal{B}(x)| \leq |\mathcal{B}|, \text{ protože } \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}. \chi(x, \mathbb{X}) \leq |\mathcal{B}(x)| \leq |\mathcal{B}| = w(\mathbb{X}).$$

□

## **3.2 Vnitřek, Uzávěr, hranice**

### **Definice 3.8** (Uzavřená množina)

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  je TP. Množina  $F \subseteq \mathbb{X}$  se nazývá uzavřená, pokud její doplněk je otevřená množina (neboli  $\mathbb{X} \setminus F \in \tau$ ).

### **Definice 3.9** (Obojetná množina (clopen set))

Množina se nazývá obojetná, pokud je uzavřená a otevřená zároveň.

### **Definice 3.10** (Uzávěr)

Je-li  $A \subseteq \mathbb{X}$ , pak uzavěr  $A$  je  $\text{cl}(A) = \overline{A} = \bigcap \{F \subseteq \mathbb{X}, A \subseteq F, F \text{ je uzavřená}\}$ .

### **Definice 3.11** (Vnitřek množiny)

Vnitřek množiny  $A$  je  $\text{int } A = A^\circ = \bigcup \{U \in \tau : U \subseteq A\}$ .

**Definice 3.12** (Hranice množiny)

Hranice množiny  $A$  je  $\delta A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{X} \setminus A}$ .

**Tvrzení 3.6** (Vztah vnitřku a uzávěru)

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  je TP,  $A \subseteq \mathbb{X}$ , pak  $\mathbb{X} \setminus \overline{A} = \text{int}(\mathbb{X} \setminus A)$  a  $\mathbb{X} \setminus \text{int} A = \overline{\mathbb{X} \setminus A}$ .

┌

*Důkaz*

$\mathbb{X} \setminus \overline{A}$  je otevřená, navíc  $\mathbb{X} \setminus \overline{A} \subseteq \mathbb{X} \setminus A$ . Tedy z otevřenosti  $\mathbb{X} \setminus \overline{A} \subseteq \text{int}(\mathbb{X} \setminus A)$ .  $\text{int}(\mathbb{X} \setminus A) \subseteq \mathbb{X} \setminus A$ , přechodem k doplňku (obráť se inkluze)  $A \subseteq \mathbb{X} \setminus \text{int}(\mathbb{X} \setminus A)$ , která je uzavřená. Tedy  $\overline{A} \subseteq \mathbb{X} \setminus \text{int}(\mathbb{X} \setminus A)$ . Přechodem k doplňku:  $\text{int}(\mathbb{X} \setminus A) \subseteq \mathbb{X} \setminus \overline{A}$ . Tím jsou obě inkluze dokázány a platí tedy rovnost.

└

Druhou část můžeme dokázat přechodem k doplňku a převedením na první část.  $\square$

**Tvrzení 3.7** (Charakterizace uzávěru)

Bud  $(\mathbb{X}, \tau)$  TP,  $x \in \mathbb{X}$ ,  $A \subseteq \mathbb{X}$  a  $\mathcal{B}(x)$  báze okolí v bodě  $x$ . Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

- 1)  $x \in \overline{A}$ ,
- 2)  $\forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset$ ,
- 3)  $\forall U \in \mathcal{B}(x) : U \cap A \neq \emptyset$ .

┌

*Důkaz*

1)  $\rightarrow$  2) sporem: Kdyby pro nějaké  $U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A = \emptyset$ , pak existuje  $V$  otevřený:  $x \in V \subseteq U$ .  $V \cap A = \emptyset$ .  $\mathbb{X} \setminus V$  je uzavřená a  $A \subseteq \mathbb{X} \setminus V$ . Pak  $x \in \overline{A} \subseteq \mathbb{X} \setminus V$  neobsahuje  $x$ .  $\nabla$ .

2)  $\rightarrow$  3) triviální

3)  $\rightarrow$  1) sporem:  $x \notin \overline{A}$  pak  $x \in \mathbb{X} \setminus \overline{A}$ , která je otevřená. Pak existuje  $U \in \mathcal{B}(x) : x \in U \subseteq \mathbb{X} \setminus \overline{A}$ . Pak  $U \cap A = \emptyset$ .  $\square$

└

*Důsledek*

Jako speciální důsledky dostáváme následující. Je-li  $U$  otevřená, pak  $U \cap A = \emptyset$  právě když  $U \cap \overline{A} = \emptyset$ . Jsou-li  $U, V$  otevřené disjunktní množiny, pak  $U \cap \overline{V} = \emptyset = \overline{U} \cap V$ .

**Tvrzení 3.8** (Vlastnosti uzávěru)

Pro množiny  $A, B$  v TP  $(\mathbb{X}, \tau)$  platí

- (C1)  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ,
- (C2)  $A \subseteq \overline{A}$ ,
- (C3)  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ,
- (C4)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ,
- (C5)  $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ .

┌ *Důkaz*

První dvě jsou jednoduché, 3. plyne z uzavřenosti uzávěru. 4. a 5. dokážeme inkluzemi. □

*Příklad*

Zobrazení z  $\mathcal{P}(\mathbb{X})$  do  $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ , které splňuje podmínky (C1-C4) jednoznačně určuje topologii na  $\mathbb{X}$ .

### **Tvrzení 3.9** (Vlastnosti vnitřku)

*Obdobně jako vlastnosti uzávěru.*

### **Tvrzení 3.10** (Charakterizace hranice)

Ať  $A \subseteq \mathbb{X}$  a  $x \in \mathbb{X}$ . Pak  $x \in \delta A$ , právě když každé okolí bodu  $x$  protíná jak  $A$ , tak  $\mathbb{X} \setminus A$ .

┌ *Důkaz*

Plyne okamžitě z definice hranice  $\delta A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{X} \setminus A}$  a charakterizace uzávěru. □

### **Tvrzení 3.11** (Vlastnosti hranice)

*12. bodů viz skripta. Stejně tak důkaz.*

## **3.3 Husté a řídké množiny, hromadné a izolované body**

### **Definice 3.13** (Hustá a řídká množina, hustota, separabilní prostor)

Ať  $\mathbb{X}$  je TP. Množina  $A \subseteq \mathbb{X}$  se nazývá hustá (v  $\mathbb{X}$ ), pokud  $\overline{A} = \mathbb{X}$ .  $A$  se nazývá řídká, pokud  $\mathbb{X} \setminus \overline{A}$  je hustá.

Hustota prostoru  $\mathbb{X}$  je nejmenší mohutnost husté podmnožiny, značí se  $d(\mathbb{X})$ . Prostor se spočetnou hustotou se nazývá separabilní.

### **Tvrzení 3.12** (Charakterizace hustých a řídkých množin)

Ať  $\mathbb{X}$  je TP. Množina  $A \subseteq \mathbb{X}$  je hustá v  $\mathbb{X}$ , právě když každá  $U$  otevřená neprázdná v  $\mathbb{X}$  protíná  $A$ . Množina  $A$  je řídká (v  $\mathbb{X}$ ), právě když  $\forall V$  otevřená neprázdná  $\exists U$  otevřená neprázdná, že  $U \subseteq V \setminus A$ , což je právě když  $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$ .

┌ *Důkaz*

Označme  $\tau^* = \tau \setminus \emptyset$ . Z charakterizace uzávěru:  $\overline{A} = \mathbb{X} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{X} \forall V \in \mathcal{U}(x) : V \cap A \neq \emptyset$ .

$A$  je řídká  $\Leftrightarrow \mathbb{X} \setminus \overline{A}$  je hustá  $\Leftrightarrow \forall U \in \tau^* : U \cap (\mathbb{X} \setminus \overline{A}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall U \in \tau^* : U \setminus \overline{A} \neq \emptyset$ .

První část dostaneme ekvivalencí z předchozího:  $\forall U \in \tau^* \exists V \in \tau^* : V \subseteq U \setminus \overline{A}$  (můžeme volit  $V = U \setminus \overline{A}$  jedním směrem a implikace druhým směrem je:  $\exists V \in \tau^* : V \subseteq U \setminus \overline{A}$  tím spíše  $U \setminus \overline{A} \neq \emptyset$ ).

Druhá část ( $\text{int } \overline{A} = \emptyset$ ) se dokáže sporem oběma směry. □

### **Tvrzení 3.13** (Vztah váhy a hustoty)

*Ať  $\mathbb{X}$  je TP. Pak  $d(\mathbb{X}) \leq w(\mathbb{X})$ . Speciálně každý prostor se spočetnou bází je separabilní.*

┌ *Důkaz*

Ať  $\mathcal{B}$  je báze TP  $\mathbb{X}$ . (BÚNO  $\emptyset \notin \mathcal{B}$ ).  $\forall B \in \mathcal{B}$  fixujeme  $x_B \in B$ ,  $D := \{x_B : B \in \mathcal{B}\}$ . Zřejmě  $|D| \leq |\mathcal{B}|$ ,  $D$  je hustá v  $\mathbb{X}$  (každá otevřená množina ji protíná). Když tedy volíme  $\mathcal{B}$ , aby její mohutnost byla nejmenší, získáme  $d(\mathbb{X}) \leq w(\mathbb{X})$ . □

*Poznámka*

Pro metrizovatelný TP  $\mathbb{X}$  platí  $d(\mathbb{X}) = w(\mathbb{X})$ .

### **Definice 3.14** (Izolovaný a hromadný bod)

Ať  $\mathbb{X}$  je TP. Bod  $x \in A \subseteq \mathbb{X}$  se nazývá izolovaným bodem množiny  $A$ , pokud existuje otevřená množina  $U \subseteq \mathbb{X}$ , že  $U \cap A = \{x\}$ . Bod  $x$  se nazývá hromadným bodem množiny  $A$ , pokud každé okolí bodu  $x$  protíná množinu  $A \setminus \{x\}$ .

┌ *Například*

V diskrétním prostoru jsou všechny body izolované. Naopak je-li  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$  a  $A = \mathbb{Q}$ , pak každý bod  $\mathbb{X}$  je hromadným bodem množiny  $A$  a žádný bod z  $A$  není izolovaným bodem  $A$ . □

### **Definice 3.15** (Derivace množiny)

Množina hromadných bodů množiny  $A$  se značí  $A'$ . Někdy se nazývá derivace  $A$ .

### **Tvrzení 3.14** (Vlastnosti derivace)

$\overline{A} = A \cup A'$ ,  $(A \cup B)' = A' \cup B'$

┌ *Důkaz*

Domácí cvičení (je jednoduchý). □



### 3.4 Spojitá zobrazení

#### **Definice 3.16** (Spojité zobrazení, homeomorfismus a spojitost v bodě)

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  a  $(\mathbb{Y}, \sigma)$  jsou TP. Ať  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ . Zobrazení  $f$  se nazývá spojité, pokud  $\forall U \in \sigma : f^{-1}(U) \in \tau$ .

$f$  se nazývá homeomorfismus, pokud  $f$  je bijekce a  $f$  i  $f^{-1}$  jsou spojitá.

$f$  je spojité v bodě  $x$ , pokud  $\forall V \in \mathcal{U}_\sigma(f(x)) \exists U \in \mathcal{U}_\tau(x) : f(U) \subseteq V$ .

#### *Například*

$\mathbb{R}, (0, 1)$  jsou homeomorfní (ale nejsou izometrické).

#### *Poznámka*

Vlastnosti, TP, které se zachovávají homeomorfizmem se nazývají topologické vlastnosti.

(Úplnost není topologický pojem.)

#### *Například*

Zobrazení z diskrétního prostoru je vždy spojité.

Zobrazení do indiskrétního prostoru je také vždy spojité.

#### **Tvrzení 3.15** (Charakterizace spojitých zobrazení)

Ať  $(\mathbb{X}, \tau), (\mathbb{Y}, \sigma)$  jsou TP,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  zobrazení. Pak následující je ekvivalentní:

- 1)  $f$  je spojité,
- 2) vzory množin z nějaké subbáze jsou otevřené,
- 3) vzory množin z nějaké báze jsou otevřené,
- 4)  $f$  je spojité v každém bodě,
- 5) vzory uzavřených množin jsou uzavřené,
- 6)  $\forall A \subseteq \mathbb{X} : f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ ,
- 7)  $\forall B \subseteq \mathbb{Y} : f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ ,
- 8)  $\forall B \subseteq \mathbb{Y} : f^{-1}(\text{int } B) \subseteq \text{int } (f^{-1}(B))$ .

┌  
Důkaz

1->2 Triviální (z definice).

2->3 Ať  $\mathcal{B}$  je nějaká báze. Dle 2 pro nějakou subbázi  $\mathcal{S}$  toho  $(\mathbb{Y}, \sigma)$  platí, že  $f^{-1}(S)$  je otevřená pro  $S \in \mathcal{S}$ . Ať  $B \in \mathcal{B}$ .  $B$  lze vyjádřit jako sjednocení konečných průniků prvků  $\mathcal{S}$ . (Vzor průniku je průnik vzorů, vzor sjednocení je sjednocení vzorů.)  $f^{-1}(B)$  je sjednocením konečných průniků prvků tvaru  $f^{-1}(S)$ ,  $S \in \mathcal{S}$  (otevřených množin). Tedy  $f^{-1}(B)$  je otevřená.

3->4 Ať  $x \in \mathbb{X}$ ,  $V$  okolí bodu  $f(x)$ .  $\mathcal{B}$  báze z 3. podmínky.  $\exists B \in \mathcal{B}$ , že  $f(x) \in B \subseteq V$ .  $U = f^{-1}(B)$  otevřená,  $x \in U$ ,  $f(U) = B \subseteq V$ .

4->5 Ať  $F \subseteq \mathbb{Y}$  je uzavřená. Ať  $x \in \overline{f^{-1}(F)}$ . Chceme, že  $x \in f^{-1}(F)$  (tj. že  $f(x) \in F$ ). Z 4 pro každé okolí  $V$  bodu  $f(x)$  existuje  $U$  okolí  $x$ , že  $f(U) \subseteq V$ . Z definice uzávěru platí, že každé takové  $U$  protíná  $f^{-1}(F)$ , tedy  $f(U) \cap F \neq \emptyset$ , tedy  $V \cap F \neq \emptyset$ . Tedy podle charakterizace uzávěru  $f(x) \in \overline{F} = F$ .

5->6  $f^{-1}(\overline{f(A)})$  je uzavřená dle 5 a obsahuje  $A$ , tedy obsahuje i  $\overline{A}$ . Pak  $f(\overline{A}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subseteq \overline{f(A)}$ .

6->7 Ať  $B \subseteq Y$ ,  $A := f^{-1}(B)$ . Dle 6  $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}$ .  $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$  (aplikováním vzoru na předchozí).

7->8 Vztah vnitřku a uzávěru:  $f^{-1}(\text{int } B) = f^{-1}(\mathbb{Y} \setminus \overline{\mathbb{Y} \setminus B}) = \mathbb{X} \setminus f^{-1}(\overline{\mathbb{Y} \setminus B}) \stackrel{\text{dle 7}}{\subseteq} \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{Y} \setminus B} = \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{X} \setminus f^{-1}(B)} = \mathbb{X} \setminus (\mathbb{X} \setminus \text{int } f^{-1}(B)) = \text{int } f^{-1}(B)$ .

8->1 Je-li  $V \subseteq \mathbb{Y}$  otevřená, pak ze 8:  $f^{-1}(V) \subseteq \text{int}(f^{-1}(V))$ . Triviálně  $\text{int } f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$ . Tedy  $f^{-1}(V) = \text{int } f^{-1}(V)$ , tedy  $f^{-1}(V)$  je otevřená.  $\square$

### Tvrzení 3.16 (Skládání spojitých zobrazení)

Ať  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$  jsou TP,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}, g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$  zobrazení. Jsou-li  $f, g$  spojitá, pak  $g \circ f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$  je spojitá.

Pokud  $f$  je spojitá v bodě  $x$  a  $g$  spojitá v  $f(x)$ , pak  $g \circ f$  je spojitá v  $x$ .

┌  
Důkaz

$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ .

Je-li  $V$  okolí  $gf(x)$ , pak  $g^{-1}(V)$  je okolí  $f(x)$  a  $f^{-1}(g^{-1}(V))$  je okolí  $x$ .  $\square$

## 3.5 Oddělovací axiomy

### Definice 3.17

TP  $\mathbb{X}$  se nazývá:

- $T_0$ , pokud  $\forall x, y \in \mathbb{X} \exists U$  otevřená :  $|U \cap \{x, y\}| = 1$ .
- $T_1$ , pokud  $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists U$  otevřená :  $x \in U, y \notin U$ .
- $T_2$  (Hausdorffův), pokud  $\forall x, y \in \mathbb{X} \exists U, V$  otevřené disjunktní :  $x \in U, y \in V$ .
- regulární, pokud  $\forall F \subseteq \mathbb{X}$  uzavřenou  $\forall x \in \mathbb{X} \setminus F \exists U, V$  otevřené disjunktní:  $x \in U, F \subseteq V$ .
- normální, pokud  $\forall E, F$  uzavřené disjunktní  $\exists U, V$  otevřené disjunktní:  $E \subseteq U, F \subseteq V$ .
- úplně regulární, pokud  $\forall F \subseteq \mathbb{X}$  uzavřenou  $\forall x \in \mathbb{X} \setminus F \exists f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$  spojitá, že  $f(x) = 0, f(F) \subseteq \{1\}$ .
- $T_3$ , pokud je regulární a  $T_1$ .
- $T_{3\frac{1}{2}}$  nebo  $T_\pi$  (Tichonovův), pokud je úplně regulární a  $T_1$ .
- $T_4$ , pokud je normální a  $T_1$ .

*Poznámka*

normální  $\implies$  úplně regulární  $\xRightarrow{\text{rozpůlení intervalu } [0, 1]}$  regulární

$$T_4 \implies T_\pi \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$$

(Platí pouze tímto směrem, ne opačně!)

$$T_0 \not\Rightarrow T_1 : (\{0, 1\}, \{\emptyset, \{0, 1\}\}, \{0\}) \dots \text{(Sierpinského TP)}$$

$$T_1 \not\Rightarrow T_2 : (\mathbb{N}, \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{N} \setminus K : K \text{ je konečná}\})$$

(Topologie kokonečných (doplňků konečných) množin.)

### Tvrzení 3.17 (Metrizovatelné prostory jsou $T_4$ )

Je-li  $\mathbb{X}$  metrizovatelný prostor a  $E, F \subseteq \mathbb{X}$  uzavřené disjunktní množiny, pak existuje spojitá funkce  $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ , že  $f(E) \subseteq \{0\}, f(F) \subseteq \{1\}$ .

┌

*Důkaz*

$\mathbb{X}$  je metrizovatelný, tedy existuje metrika  $\varrho$  kompatibilní s topologií na  $\mathbb{X}$ . Položme  $f(x) = \frac{\varrho(x, E)}{\varrho(x, E) + \varrho(x, F)}, x \in \mathbb{X}$ .  $f$  je dobře definovaná a jistě spojitá.  $f(x) = 0, x \in E, f(x) = 1, x \in F$ . □

└

### Lemma 3.18

*Ať  $\mathbb{X}$  je TP. Pak*

- a)  $\mathbb{X}$  je  $T_1 \Leftrightarrow$  každá jednoprvková množina je uzavřená  $\Leftrightarrow$  každá konečná množina je uzavřená.*
- b)  $\mathbb{X}$  je  $T_2 \Leftrightarrow \forall x, y \in X, x \neq y \exists U \in \mathcal{U}(x) : y \notin \bar{U}$ .*
- c)  $\mathbb{X}$  je regulární  $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{X} \forall U \in \mathcal{U}(x) \exists V \in \mathcal{U}(x) : \bar{V} \subseteq U$ .*
- d)  $\mathbb{X}$  je normální  $\Leftrightarrow \forall V \subseteq \mathbb{X}$  otevřenou  $\forall E \subseteq V$  uzavřenou  $\exists U \subseteq \mathbb{X}$  otevřená :  $E \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq V$ .*

┌

*Důkaz*

└

Jednoduché.

□

### Věta 3.19 (Urysohnovo lemma)

*TP  $\mathbb{X}$  je normální  $\Leftrightarrow$  pro každé dvě disjunktní uzavřené  $E, F$  existuje spojitá funkce  $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ , že  $f(E) \subseteq \{0\}, f(F) \subseteq \{1\}$ .*

┌ *Důkaz*

Implikace zprava doleva je snadná – uvažujeme  $\{x \in \mathbb{X} : f(x) < \frac{1}{2}\}$  a  $\{x \in \mathbb{X} : f(x) > \frac{1}{2}\}$ .

$\implies$  Označme  $D := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ,  $D = \{r_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ ,  $r_0 = 0, r_1 = 1$  ( $r_n$ ) prostá posloupnost. Indukcí najdeme otevřené množiny  $V_q : q \in D$ , že pro  $p, q \in D, p < q \implies V_p \subseteq V_q$  a navíc  $E \subseteq V_0, V_1 \subseteq \mathbb{X} \setminus F$ .

Z normality najdeme otevřenou množinu  $U$ , že  $E \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq \mathbb{X} \setminus \bar{F}$ . Položíme  $V_0 = U$ ,  $V_1 = \mathbb{X} \setminus F$ .

Nyní předpokládejme, že  $V_{r_0}, V_{r_1}, \dots, V_{r_n}, n \geq 1$  už známe a platí, že pro  $p, q \in \{r_0, \dots, r_n\} : p < q \implies \bar{V}_p \subseteq V_q$ . Chceme najít  $V_{r_{n+1}}$ . Ať  $i, j \leq n$  jsou taková, že  $r_i = \max\{r_k : r_k < r_{n+1}\}$  a  $r_j = \min\{r_k : r_k > r_{n+1}\}$ .  $r_i < r_j$ . Z IP:  $\bar{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}$ . Z normality existuje otevřená  $V_{r_{n+1}}$ , že  $\bar{V}_{r_i} \subseteq V_{r_{n+1}} \subseteq \bar{V}_{r_{n+1}} \subseteq V_{r_j}$ .

Položme

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{X} \setminus V_1 \\ \inf\{r \in D : x \in V_r\} & , x \in V_1 \end{cases}.$$

$f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ . Nyní stačí ověřit spojitost: vzory subbázových (nějaké subbáze) podmnožin jsou otevřené. Zvolím si subbázi  $\{[0, b), (a, 1], a, b \in (0, 1)\}$ .

$$f^{-1}([0, b)) = \{x \in \mathbb{X} : f(x) < b\} = \{x \in \mathbb{X} : \exists r < b : x \in V_r\} = \bigcup_{r < b} V_r \dots \text{otevřené.}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}((a, 1]) &= \{x \in \mathbb{X} : f(x) > a\} = \{x \in \mathbb{X} : \exists r > a : x \notin V_r\} = \\ &= \{x \in \mathbb{X} : \exists s > a : x \notin \bar{V}_s\} = \bigcup_{s > a} \mathbb{X} \setminus \bar{V}_s \dots \text{otevřené.} \end{aligned}$$

└

□

*Důsledek*

$$T_4 \implies T_\pi.$$

### 3.6 Konvergence v topologických prostorech

#### Definice 3.18 (Usměrněné množiny)

Dvojice  $(I, \leq)$  se nazývá (nahoru) usměrněná množina, pokud  $I$  je množina a  $\leq$  je binární relace na  $I$ , která je reflexivní, tranzitivní a pro  $i, j \in I$ , pak existuje  $k \in I$ , že  $i \leq k, j \leq k$ .

┌

*Například*

$$(\mathbb{N}, \leq)$$

└

**Definice 3.19 (Net)**

Net v TP  $\mathbb{X}$  je libovolné zobrazení z usměrněné množiny do  $\mathbb{X}$ .

**Definice 3.20 (Konvergence netu)**

Řekneme, že net  $(x_i)_{i \in I}$  konverguje k bodu  $x$ , pokud  $\forall U \in \mathcal{U}(x) \exists i_0 \in I \forall i \in I, i \geq i_0 : x_i \in U$ . Značíme  $x = \lim_{i \in I} x_i$  a říkáme, že  $x$  je limita tohoto netu.

Bod  $x$  se nazývá hromadným bodem netu  $(x_i)_{i \in I}$ , pokud  $\forall U \in \mathcal{U}(x) \forall i \in I \exists j \geq i : x_j \in U$ .

**Tvrzení 3.20 (Jednoznačnost limity netu)**

*Prostor  $\mathbb{X}$  je Hausdorffův  $\Leftrightarrow$  každý net má nejvýše jednu limitu.*

*Důkaz*

( $\Rightarrow$ ): Ať  $(x_i)_{i \in I}$  je net mající dvě různé limity  $x, y \in \mathbb{X}$ .  $\mathbb{X}$  je Hausdorffův, tedy existuje disjunktní okolí  $U, V$  bodů  $x, y$ . Pak existuje  $i \in I$ , že  $\forall j \in I, j \geq i : x_j \in U$  a existuje  $k \in I$ , že  $\forall j \in I, j \geq k : x_j \in V$ .  $(I, \leq)$  je usměrněná množina, tedy existuje  $l \in I$ , že  $l \geq i, l \geq k$ .  $x_l \in U \cap V$ .  $\nabla$ .

Opačně: Ať  $\mathbb{X}$  není Hausdorffův. Ať  $x, y \in \mathbb{X}$  je dvojice různých bodů, které nejdou oddělit otevřenými disjunktními množinami. Uvažme otevřenou množinu  $(\mathcal{U}(x) \times \mathcal{V}(y), \leq)$ , kde  $(A, B) \leq (U, V) \equiv (U \subseteq A \wedge V \subseteq B)$ . Pro každé  $(U, V) \in \mathcal{U}(x) \times \mathcal{V}(y)$  vezměme nějaký bod  $x_{(U,V)} \in U \cap V$ .  $(x_{(U,V)})_{(U,V) \in \mathcal{U}(x) \times \mathcal{U}(y)}$  je net v  $\mathbb{X}$ , který konverguje k  $x$  a zároveň konverguje k  $y$ .  $\square$

**Tvrzení 3.21 (Charakterizace uzávěru pomocí konvergence netů)**

*Ať  $\mathbb{X}$  je TP a  $A \subseteq \mathbb{X}$ . Pak  $x \in \overline{A}$ , právě když existuje net  $(x_i)_{i \in I}$  tvořený body z  $A$ , který konverguje k  $x$ .*

*Důkaz*

( $\Rightarrow$ ): Ať  $x \in \overline{A}$ .  $\forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset$ . Fixujme  $x_U \in U \cap A$ , pro  $U \in \mathcal{U}(x)$ .  $(\mathcal{U}(x), \supseteq)$  je usměrněná množina.  $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$  je net tvořený prvky z  $A$ , který konverguje k  $x$ .

( $\Leftarrow$ ): Ať  $x \in \mathbb{X}$ ,  $(x_i)_{i \in I}$  je net z prvků  $A$ , který konverguje k  $x$ . Chceme,  $x \in \overline{A}$ . Ať  $U$  je okolí  $x$ . Chceme, že  $U \cap A \neq \emptyset$ .  $(x_i)$  konverguje k  $x$ , tedy existuje  $j \in I : x_j \in U$ . Navíc  $x_j \in A$ .  $x_j \in A \cap U$ .  $\square$

**Tvrzení 3.22 (Charakterizace spojitosti pomocí netů)**

*Ať  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$  jsou TP.  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  je zobrazení,  $x \in \mathbb{X}$ . Pak  $f$  je spojitý v bodě  $x$  právě tehdy, když pro každý net  $(x_i)_{i \in I}$  konvergující k bodu  $x \in \mathbb{X}$  konverguje net  $(f(x_i))_{i \in I}$  k bodu  $f(x)$ .*

┌  
Důkaz

( $\implies$ ): Ať  $V \in \mathcal{U}(f(x))$ . Pak ze spojitosti  $\exists U \in \mathcal{U}(x) : f(U) \subseteq V$ . Net  $(x_i)$  konverguje k  $x$ , tedy existuje  $i_0 \in I$ , že pro  $i \geq i_0 : x_i \in U$ . Pak zřejmě pro  $i \geq i_0 : f(x_i) \in V$ .

( $\impliedby$ ): Ať  $f$  není spojitá v bodě  $x$ . Tedy existuje  $V \in \mathcal{U}(f(x))$ , že  $\forall U \in \mathcal{U}(x) : f(U) \setminus V \neq \emptyset$ . Zvolme  $x_U \in U$ , že  $f(x_U) \notin V$ .  $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$  je net v  $\mathbb{X}$ , zřejmě  $(x_U)$  konverguje k  $x$ .  $(f(x_U))_{U \in \mathcal{U}(x)}$  zřejmě tedy nekonverguje k bodu  $f(x)$ .  $\nabla$ . □

Poznámka

Obdobně lze dokázat  $x \in A' \Leftrightarrow \exists \text{net } (x_i)_{i \in I} \text{ konvergující k } x, \text{ že } x_i \neq x \text{ pro } i \in I$ .

## 4 Operace s TP a zobrazeními

### 4.1 Obecné konstrukce

#### Definice 4.1 (Větší a menší topologie)

Ať  $\mathbb{X}$  je množina,  $\tau, \sigma$  dvě topologie na  $\mathbb{X}$ . Řekněme, že  $\tau$  je větší (jemnější, silnější) než  $\sigma$ , pokud  $\tau \supseteq \sigma$ . Topologie  $\sigma$  se pak nazývá menší (hrubší, slabší).

Poznámka

Topologie  $\tau$  je větší než  $\sigma \Leftrightarrow id_{\mathbb{X}} : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (\mathbb{X}, \sigma)$  je otevřená.

Jsou-li  $\tau_i : i \in I$  topologie na  $\mathbb{X}$ , pak  $\bigcap_{i \in I} \tau_i$  je opět topologie na  $\mathbb{X}$ . Navíc je největší topologií, která je menší než všechny  $\tau_i$ .  $\bigcup_{i \in I} \tau_i$  je subbáze nějaké topologie, která je nejmenší topologie, která je větší než všechny  $\tau_i$ .

#### Definice 4.2 (Projektivní a induktivní vytváření)

Ať  $\mathbb{X}$  je množina a  $(\mathbb{X}_i, \tau_i), i \in I$ , jsou TP a  $f_i : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_i$  resp.  $f_i : \mathbb{X}_i \rightarrow \mathbb{X}$  zobrazení.

Topologie  $\tau$  na množině  $\mathbb{X}$  se nazývá projektivně vytvořená, pokud  $\tau$  je nejmenší topologie, při níž jsou všechna zobrazení  $f_i : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (\mathbb{X}_i, \tau_i)$  spojitá.

Jsou-li  $f_i : \mathbb{X}_i \rightarrow \mathbb{X}$  zobrazení, topologie  $\tau$  na  $\mathbb{X}$  se nazývá induktivně vytvořená, pokud  $\tau$  je největší topologie na  $\mathbb{X}$ , při které jsou všechna  $f_i : (\mathbb{X}_i, \tau_i) \rightarrow (\mathbb{X}, \tau)$  spojitá.

#### Věta 4.1 (Char. spojitosti zobrazení do projektivně definovaného TP)

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  je projektivně vytvořen souborem zobrazení  $f_i : \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X}_i, \tau_i), i \in I$ . Zobrazení  $g : (\mathbb{Y}, \sigma) \rightarrow (\mathbb{X}, \tau)$  je spojitá  $\Leftrightarrow \forall i \in I : f_i \circ g : (\mathbb{Y}, \sigma) \rightarrow (\mathbb{X}_i, \tau_i)$  je spojitá.

*Důkaz*

Doprava je jednoduché, složení spojitých zobrazení je spojité.

Opačně: Ať  $\tau'$  je největší topologie na množině  $\mathbb{X}$ , při které je zobrazení  $g$  spojité:  $\tau' = \{U \subseteq \mathbb{X} : g^{-1}(U) \in \sigma\}$ . Stačí, že  $\tau \subseteq \tau'$ .  $\tau$  je nejmenší topologie, která obsahuje množiny  $f_i^{-1}(V)$ ,  $V \in \tau_i, i \in I$ . Tedy stačí ukázat, že  $f_i^{-1}(V) \in \tau'$  pro  $V \in \tau_i, i \in I$ .  $g^{-1}(f_i^{-1}(V)) = (f_i \circ g)^{-1}(V) \in \sigma$ . Tedy opravdu  $f_i^{-1} \in \tau'$  z definice  $\tau'$ .  $\square$

*Poznámka*

Obdobné tvrzení platí i pro induktivně vytvořené topologie.

## 4.2 Podprostor, suma, součin, kvocient

### Definice 4.3

Je-li  $(\mathbb{X}, \tau)$  TP a  $A \subseteq \mathbb{X}$ , pak  $(A, \sigma)$  se nazývá podprostor  $(\mathbb{X}, \tau)$ , pokud topologie  $\sigma$  je projektivně vytvořená zobrazením identitou na  $A$ .

Jsou-li  $(\mathbb{X}_i, \tau_i), i \in I$  TP, pak je jejich součin TP  $(\mathbb{X}, \tau)$ , kde  $\mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$  a  $\tau$  je projektivně vytvořená zobrazeními  $\pi_i : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_i, \pi_i((x_j)_{j \in I}) = x_i$ .

Zobrazení  $f : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$  se nazývá vnoření, pokud  $f$  je prosté a topologie  $\tau$  na  $\mathbb{X}$  je projektivně vytvořená zobrazením  $f$ .

*Poznámka*

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  je TP.  $A \subseteq X$ .  $\tau_A := \{U \cap A : U \in \tau\}$  je topologie podprostoru na  $A$ .

Ať  $(\mathbb{X}_i, \tau_i)$  jsou TP,  $i \in I$ . Ať  $\mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$ , součinná topologie na  $\mathbb{X}$  má subbázi:  $\mathcal{S} := \{\pi^{-1}(U) : i \in I, U \in \tau_i\}$ .

Konvergence netů v součinné topologii: Net  $(x_j)_{j \in J}$  konverguje k  $x \in X \Leftrightarrow \forall i \in I : (\pi_i(x_j))_{j \in J}$  konverguje k  $\pi_i(c)$ .

Jsou-li  $A_i \subseteq X_i$ , pak  $\overline{\prod A_i} = \prod \overline{A_i}$ .

*Příklad*

$C([0, 1], \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{[0, 1]} := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ zobrazení}\}$ .

Topologie podprostoru  $C([0, 1], \mathbb{R}) = \text{„topologie bodové konvergence“}$ .



#### Definice 4.4

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  je TP,  $E \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X}$  ekvivalence. Uvažme  $\mathbb{X} \setminus E = \{[x]_E : x \in \mathbb{X}\}$ ,  $\pi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X} \setminus E, x \rightarrow [x]_E$ . Kvocientová topologie na  $\mathbb{X} \setminus E$  je induktivně vytvořená zobrazením  $\pi$ .

Jsou-li  $(\mathbb{X}_i, \tau_i)$  TP,  $i \in I$ ,  $(\mathbb{X}_i)$  jsou po dvou disjunktní pak topologie sumy na  $\bigcup_{i \in I} \mathbb{X}_i$  je topologie, která je induktivně vytvořena zobrazeními  $j_i : \mathbb{X}_i \rightarrow \bigcup_{k \in I} \mathbb{X}_k, j_i(x) = x$ . Sumu TP značíme  $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{X}_i$ .

Zobrazení  $f : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$  se nazývá kvocientové, pokud je na a topologie  $\sigma$  je induktivně vytvořená zobrazením  $f$ .

#### Příklad

$\mathbb{X} = \mathbb{R}, E : xEy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ .  $\mathbb{R} \setminus E$  homeomorfní s kružnicí.

#### Poznámka

Množina  $U$  v kvocientovém prostoru  $\mathbb{X} \setminus E$  je otevřená  $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$  je otevřená v  $\mathbb{X}$ .

$\mathbb{X} = \bigoplus \mathbb{X}_i, U \subseteq \mathbb{X}$ .  $U$  je otevřená  $\Leftrightarrow U \cap \mathbb{X}_i$  je otevřená v  $\mathbb{X}_i$ .

#### Příklad

Je-li  $\mathbb{X}$  TP a  $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ ,  $M \subseteq \mathbb{Y}$ , pak  $\overline{M}^{\mathbb{Y}} = \overline{M}^{\mathbb{X}} \cap \mathbb{Y}$ .

#### Tvrzení 4.2 (Charakterizace vnoření a kvocientových zobrazení)

Ať  $(\mathbb{X}, \tau)$  a  $(\mathbb{Y}, \sigma)$  jsou TP a  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  zobrazení. Zobrazení  $f : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$  je vnoření  $\Leftrightarrow f : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (f(\mathbb{X}), \sigma|_{f(\mathbb{X})})$  je homeomorfismus. Zobrazení  $f : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$  je kvocientové zobrazení  $\Leftrightarrow f$  je na a  $\forall V \subseteq \mathbb{Y} : V \in \sigma \Leftrightarrow f^{-1}(V) \in \tau$ .

┌

#### Důkaz

$f$  je vnoření  $\Leftrightarrow f$  je prosté a  $\tau$  je projektivně vytvořená zobrazením  $f : \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma) \Leftrightarrow f : \mathbb{X} \rightarrow f(\mathbb{X})$  je bijekce a obě zobrazení  $f : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (f(\mathbb{X}), \sigma|_{f(\mathbb{X})})$  a  $f^{-1} : (f(\mathbb{X}), \sigma|_{f(\mathbb{X})}) \rightarrow (\mathbb{X}, \tau)$  jsou spojitá  $\Leftrightarrow f : (\mathbb{X}, \tau) \rightarrow (f(\mathbb{X}), \sigma|_{f(\mathbb{X})})$  je homeomorfismus.

$f$  je kvocientové zobrazení  $\Leftrightarrow f$  je na a  $\sigma = \{V \subseteq \mathbb{Y} : f^{-1}(V) \in \tau\}$  = induktivně vytvořená topologie na  $\mathbb{Y}$  ( $f$  je na a  $\forall V \subseteq \mathbb{Y} : V \in \sigma \Leftrightarrow f^{-1}(V) \in \tau$ ). □

└

#### Tvrzení 4.3 (Postačující podmínka pro kvocientové zobrazení)

Je-li  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  spojitá a otevřená (tj. obraz otevřené je otevřená) (nebo uzavřená, tj. obraz uzavřené je uzavřená) a na, pak  $f$  je kvocientové zobrazení.

┌ *Důkaz*

Použijeme přechodí charakterizaci kvocientového zobrazení. Ať  $V \subseteq \mathbb{Y}$ . Pak 1)  $V$  je otevřená v  $\mathbb{Y}$ , pak  $f^{-1}$  je otevřená v  $\mathbb{X}$  ze spojitosti. 2)  $f^{-1}(V)$  otevřená v  $\mathbb{X}$ . Pak z otevřenosti zobrazení  $f$  máme, že  $f(f^{-1}(V)) (= V, \text{ protože } f \text{ je na})$  je otevřená v  $\mathbb{Y}$ .

└ Pro uzavřená zobrazení přes doplňky. □

*Poznámka*

Jsou-li  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$  Banachovy prostory a  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  lineární spojitý a na, pak  $f$  je otevřený.

#### **Tvrzení 4.4** (Charakterizace Hausdorffových prostorů)

$TP \mathbb{X}$  je Hausdorffův  $\Leftrightarrow \{(x, x) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}, x \in \mathbb{X}\}$  je uzavřená v  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ .

*Poznámka*

Operace s TP jsou tranzitivní (součet, součin, kvocient, podprostor, ...).

### 4.3 Zachovávání konstrukcemi

#### **Definice 4.5**

Jsou-li  $\mathbb{X}_i$  a  $\mathbb{Y}_i$  TP,  $i \in I$  a  $f_i : \mathbb{X}_i \rightarrow \mathbb{Y}_i$  zobrazení, pak definujeme

$$\bigoplus_{i \in I} f_i : \bigoplus_{i \in I} \mathbb{X}_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Y}_i, x \mapsto f_i(x), \text{ pokud } x \in \mathbb{X}_i.$$

$$\prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i \rightarrow \prod_{i \in I} \mathbb{Y}_i, (x_i)_{i \in I} \mapsto (f_i(x_i))_{i \in I}.$$

Jsou-li  $\mathbb{X}_i = \mathbb{X}$ ,  $i \in I$ , pak definujeme tzv. diagonální zobrazení

$$\Delta_{i \in I} f_i : \mathbb{X} \rightarrow \prod_{i \in I} \mathbb{Y}_i, x \mapsto (f_i(x))_{i \in I}.$$

#### **Tvrzení 4.5**

*Součinnové, součtové a diagonální zobrazení odvozené od spojitých je spojitý.*

┌ *Důkaz*

└ Plyne z charakterizace spojitého zobrazení do projektivně vytvořeného prostoru. □

*Důsledek*

Ať  $\mathbb{X}$  je TP a  $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  spojité, pak  $f + g, f - g, f \cdot g, \max \{f, g\}, \min \{f, g\}, |f|, \frac{f}{g} (g \neq 0)$  jsou spojitá.

┌

*Důkaz*

$f \triangle g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^2, (f \triangle g)(x) = (f(x), g(x))$  je spojitý. Následně toto zobrazení spojíme s  $+, -, \dots$ , která jsou spojitá, tedy i výsledek je spojitý.  $\square$

└

	$T_0$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_\pi$	$T_4$	Separabilní	Spočetná báze	Spočetný charakter	Metrizovatelnost
podprostor	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ne	Ne	Ano	Ano	Ano
(spoč.) suma	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	(Ano) Ne	(Ano) Ne	Ano	Ano
kvocient	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano	Ne	Ne	Ne
(spoč.) součin	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ne	(Ano) Ne	(Ano) Ne	(Ano) Ne	(Ano) Ne

## **Tvrzení 4.6** ((Úplná) regularita se zachovává součinem)

*Jsou-li TP  $\mathbb{X}_i, i \in I$  (úplně) regulární, pak  $\prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$  je (úplně) regulární.*

┌

*Důkaz*

$\mathbb{X} := \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$ . Ať  $F \subseteq \mathbb{X}$  je uzavřená a  $x \in \mathbb{X} \setminus F$ . Z definice součinné topologie existuje  $K \subseteq I$  konečná a otevřené  $U_i \subseteq \mathbb{X}_i, i \in K$ , že  $x \in \bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}(U_i) \subseteq \mathbb{X} \setminus F$ .

Tedy  $x_i \in U_i, i \in K$ .  $\mathbb{X}_i$  regulární, tedy existuje  $G_i \subseteq \mathbb{X}_i$  otevřená, že  $x_i \in G_i \subseteq \overline{G_i} \subseteq U_i$ .

$$x \in \underbrace{\bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}(G_i)}_{\text{otevřená}} \subseteq \underbrace{\overline{\bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}(G_i)}}_{\text{uzavřená}} \subseteq \bigcap_{i \in K} \overline{\pi_i^{-1}(G_i)} \subseteq \bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}(\overline{G_i}) \subseteq \bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}(U_i) \subseteq \mathbb{X} \setminus F.$$

Úplná regularita: první odstavec stejný, pro  $i \in K$  existuje spojitá funkce  $f_i : \mathbb{X}_i \rightarrow [0, 1], f_i(x_i) = 0$  a  $f_i(\mathbb{X}_i \setminus U_i) \subseteq \{1\}$ . Položme  $f : \prod \mathbb{X}_i \rightarrow [0, 1], f(y) = \max_{i \in K} f_i(y_i)$ .  $f(x) = 0, f(\mathbb{X} \setminus F) \subseteq \{1\}$ .  $f$  je spojitá. Tedy  $\mathbb{X}$  je úplně regulární.  $\square$

└

## 4.4 Rozšiřování spojitých funkcí

### **Tvrzení 4.7**

*Ať  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$  jsou TP,  $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  spojitá.  $\mathbb{Y}$  je Hausdorffův  $\implies M := \{x \in \mathbb{X} : f(x) = g(x)\}$  je uzavřená v  $\mathbb{X}$ .*

┌

*Důkaz*

Ať  $x \in \mathbb{X} \setminus M$ . Pak  $f(x) \neq g(x) \in \mathbb{Y}$ .  $\mathbb{Y}$  je Hausdorffův, tedy existují otevřené disjunktní  $U, V$ , že  $f(x) \in U, g(x) \in V$ . Ať  $W := f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$  je otevřená množina a  $x \in W$ .  $W \cap M = \emptyset$ , protože  $U$  a  $V$  jsou disjunktní, tedy  $\mathbb{X} \setminus M$  je otevřená,  $M$  je uzavřená.  $\square$

└

*Poznámka*

Je-li  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  spoj.,  $\mathbb{Y}$  Hausdorffův a  $S \subseteq \mathbb{X}$  hustá, pak  $f|_S$  má jediné spojitě rozšíření.

### **Tvrzení 4.8**

Je-li  $\mathbb{X}$  TP,  $f_n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  spoj. zobrazení a  $(f_n)$  konverguje stejnoměrně k  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , pak  $f$  je spojitě.

┌

*Důkaz*

Ať  $x \in \mathbb{X}$ ,  $\varepsilon > 0$ .  $\exists n \in \mathbb{N} : \|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$  a ze spojitosti  $f_n$  existuje okolí  $U \in \mathcal{U}(x) : |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$  pro  $y \in U$ . Nyní pro  $y \in U$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tedy  $f$  je spojitá.

└

□

### **Věta 4.9 (Tietze-Urysohnova)**

Je-li  $\mathbb{X}$  normální TP a  $F \subseteq \mathbb{X}$  uzavřená, pak lze každou spojitou funkci  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  spojitě rozšířit na celé  $\mathbb{X}$ , tedy existuje spojitá funkce  $\tilde{f} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , že  $\tilde{f}|_F = f$ .

Důkaz

Pozorování: Ke každé spojitě funkci  $g : F \rightarrow [-c, c]$  existuje spojitá funkce  $\bar{g} : X \rightarrow [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$ , že  $|g(x) - \bar{g}(x)| \leq \frac{2}{3}c$  pro každé  $x \in F$ .

Důkaz pozorování: Ať  $E := \{x \in F : g(x) \leq -\frac{c}{3}\}$  a  $H := \{x \in F : g(x) \geq \frac{c}{3}\}$ .  $E, H$  uzavřené v  $F$  a disjunktní. Tedy  $E, H$  uzavřené v  $\mathbb{X}$ . Tedy z Urysohova lemmatu existuje spojitá  $h : \mathbb{X} \rightarrow [-1, 1]$ , že  $h(E) \subseteq \{-1\}$ ,  $h(H) \subseteq \{1\}$ . Položme  $\bar{g} := \frac{c}{3} \cdot h$ . Jednoduše nahlédneme, že vzdálenosti z pozorování teď fungují.

Nejprve dokažme pro  $f : F \rightarrow [-1, 1]$  (a rozšíříme jí na spoj.  $\bar{f} : \mathbb{X} \rightarrow [-1, 1]$ ). Indukcí najdeme posloupnost spojitých funkcí  $g_n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , že  $\|g_n\| \leq \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$  a pro každé  $x \in F$  a  $n \in \mathbb{N} : |f(x) - \sum_{i=1}^n g_i(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$ .

Položme  $g_1 = \bar{f}$  z pozorování, tedy  $g_1 : \mathbb{X} \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ . Máme-li  $g_1, \dots, g_n$  zkonstruované a splňující předpoklady indukce, pak uvažujme funkci  $f' := f - \sum_{i=1}^n g_i : F \rightarrow [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$  a aplikujeme na ni pozorování, tedy existuje spojitá funkce  $g_{n+1} : \mathbb{X} \rightarrow [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$ , že  $|f'(x) - g_{n+1}(x)| \leq \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n = (\frac{2}{3})^{n+1}$ ,  $x \in F$ . Položme  $\tilde{f}_n := \sum_{i=1}^n g_i(x)$  a  $\tilde{f} := \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(x)$ . Stejněměrná konvergence zachovává spojitost. A jelikož  $\tilde{f}_n$  z Weierstrassova kritéria konverguje stejnoměrně, tak  $\tilde{f}$  je spojitá. Zároveň  $|f(x) - \tilde{f}(x)| = 0$ , tedy  $\tilde{f}$  je rozšířením  $f$ .

Ať nyní  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ . Ať  $h : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  je homeomorfismus.  $h \circ f : F \rightarrow (-1, 1) \subseteq [-1, 1]$  podle předchozí části existuje spojitě  $v : \mathbb{X} \rightarrow [-1, 1]$ , že pro  $x \in F$  je  $v(x) = h \circ f(x)$ . Ať  $E := v^{-1}(\{-1, 1\})$  uzavřená v  $\mathbb{X}$ .  $E$  je disjunktní s  $F$ . Z Urysohova lemmatu existuje spojitě  $m : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ ,  $m(E) \subseteq \{0\}$ ,  $m(F) \subseteq \{1\}$ .  $m \cdot v : \mathbb{X} \rightarrow (-1, 1)$ . Tudíž  $h^{-1} \circ (m \cdot v) : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitě a navíc  $(h^{-1} \circ (m \cdot v))(x) = f(x)$  pro  $x \in F$ .  $\square$

## 5 Kompaktnost

### Definice 5.1

Systém množin  $\mathcal{S}$  se nazývá pokrytí  $\mathbb{X}$ , pokud  $\bigcup \mathcal{S} = \mathbb{X}$ . Každý podsystém  $\mathcal{S}$ , který je také pokrytí, se nazývá podpokrytí.

Pokrytí se nazývá otevřené, pokud všechny jeho prvky jsou otevřené množiny.

TP  $\mathbb{X}$  se nazývá kompaktní, pokud každé jeho otevřené pokrytí má konečné podpokrytí.

TP  $\mathbb{X}$  se nazývá spočetně kompaktní, pokud každé spočetné pokrytí má konečné podpokrytí.

TP  $\mathbb{X}$  se nazývá Lindelöfův, pokud každé otevřené pokrytí má spočetné pokrytí.

Řekneme, že systém  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$  je centrovaný, pokud pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a  $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$  je  $F_1 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset$ .

*Důsledek*

Prostor je kompaktní právě tehdy, když je spočetně kompaktní a Lindelöfův.

### Věta 5.1 (Charakterizace kompaktnosti)

Pro TP  $\mathbb{X}$  je ekvivalentní: a)  $\mathbb{X}$  je kompaktní. b) Každý centrovaný systém sestávající z uzavřené množiny má neprázdný průnik. c) Každý net má hromadný bod.

┌

*Důkaz*

(a  $\implies$  b) Ať  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$  sestává z uzavřených množin a je centrovaný. Položme  $\mathcal{U} := \{\mathbb{X} \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$  (systém otevřených množin). Ať pro spor  $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ . Pak  $\mathcal{U}$  je pokrytí  $\mathbb{X}$ .  $\mathbb{X}$  je kompaktní, tedy existuje  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ , že  $U_1 \cup \dots \cup U_n = \mathbb{X}$ .  $U_i = \mathbb{X} \setminus F_i$  pro něj  $F_i \in \mathcal{F}$ . Pak  $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$ . Tedy  $\mathcal{F}$  není centrovaný,  $\nexists$ .

(b  $\implies$  c) Ať  $(x_i)_{i \in I}$  je net v  $\mathbb{X}$ ,  $(I, \leq)$  usměrněná množina. Položme  $F_i = \overline{\{x_j : j \geq i\}}$  je uzavřená,  $i \in I$ .  $\mathcal{F} = \{F_i | i \in I\}$  je centrovaný. Tedy dle b)  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ . Ať  $x_0 \in \bigcap \mathcal{F}$ . Pak  $x_0$  je hromadným bodem netu  $(x_i)_{i \in I}$ .

(c  $\implies$  a). Ať  $\mathcal{U}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Předpokládejme pro spor, že neexistuje konečné podpokrytí. Tedy pro  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$  konečnou existuje bod  $x_{\mathcal{F}} \in \mathbb{X} \setminus \bigcup \mathcal{F}$ .  $(x_{\mathcal{F}})_{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}}$  je net v  $\mathbb{X}$ . Podle c) existuje hromadný bod  $x$  tohoto netu. Existuje  $U \in \mathcal{U} : x \in U$ . Z definice hromadného bodu existuje  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$  konečné, že  $\mathcal{F} \supseteq \{U\}$  a  $x_{\mathcal{F}} \in U$ . Ale  $x_{\mathcal{F}} \notin \bigcup \mathcal{F}$ . To je spor.  $\square$

### Tvrzení 5.2 (Zachovávání vlastností)

Kompaktnost, spočetná kompaktnost i lindelöfovost se dědí na uzavřené podprostory a spojitě obrazy.

┌

*Důkaz*

Ukážeme pouze pro kompaktnost: Ať  $\mathbb{X}$  je kompaktní a  $F \subseteq \mathbb{X}$  uzavřená. Ať tedy  $\mathcal{U}$  je otevřené pokrytí  $F$ . Pro každé  $U \in \mathcal{U}$  existuje  $\tilde{U}$  otevřená v  $\mathbb{X}$ , že  $\tilde{U} \cap F = U$ . Označme  $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{U} : U \in \mathcal{U}\} \cup \{\mathbb{X} \setminus F\}$ .  $\tilde{\mathcal{U}}$  otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ , tedy z kompaktnosti  $\mathbb{X}$  existuje konečné podpokrytí  $\{\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n, \mathbb{X} \setminus F\}$ . Pak  $\{U_1, \dots, U_n\}$  je pokrytí  $F$  vybrané z  $\mathcal{U}$ . Tedy  $F$  je kompaktní.

Ať  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  na, spojitě a  $\mathbb{X}$  kompaktní. Ať  $\mathcal{U}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{Y}$ .  $\{f^{-1}(U) | U \in \mathcal{U}\}$  otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ .  $\mathbb{X}$  je kompaktní, tedy existuje  $U_1, \dots, U_n$  tak, že  $f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_n) = \mathbb{X}$ . Pak  $\{U_1, \dots, U_n\}$  pokrývá  $\mathbb{Y}$ .  $\square$

*Důsledek* (Nabývání extrému)

Spojitá reálná funkce na (spočetně) kompaktním neprázdném prostoru nabývá maxima a minima.

┌ Důkaz

$f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , spojitá,  $\mathbb{X}$  spočetně kompaktní.  $f(\mathbb{X})$  je spočetně kompaktní  $\Leftrightarrow$  kompaktní (v metrických prostorech). Tedy  $f(\mathbb{X})$  uzavřená omezená v  $\mathbb{R}$ , tedy má minimum a maximum. ┐

### Věta 5.3 (Postačující podmínky pro normalitu)

*Regulární Lindelöfův TP je normální.*

*Hausdorffův kompaktní TP je normální (tedy  $T_4$ ).*

┌ Důkaz

a) Ať  $E, F$  jsou uzavřené disjunktní. Z regularity  $\forall x \in E \exists$  otevřené  $U_x \in \mathcal{U}(x)$ , že  $\overline{U_x} \cap F = \emptyset$ .  $\{U_x : x \in E\}$  je otevřené pokrytí  $E$ . Z lindelöfovosti  $E$  (uzavřený podprostor  $\mathbb{X}$ ) existuje  $C \subseteq E$  spočetné, že  $\{U_c : c \in C\}$  pokrývá  $E$ . Přeindexujeme systém  $\{U_c : c \in C\}$  na  $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ . Analogicky najdeme  $\{V_j : j \in \mathbb{N}\}$  systém otevřených množin pokrývajících  $F$ ,  $\overline{V_j} \cap E = \emptyset$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

Definujeme  $U_i^* := U_i \setminus \bigcup_{j \leq i} V_j$  a  $V_j^* := V_j \setminus \bigcup_{i \leq j} U_i$  otevřené a  $U := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i^*$  a  $V := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j^*$  otevřené a  $U \cap V = \emptyset$ . Kdyby  $x \in U \cap V$ , pak existují  $i, j \in \dots \mathbb{N} : x \in U_i^* \cap V_j^*$ . Búno:  $i \geq j : x \in U_i \setminus \bigcup_{k \leq i} \overline{V_k}$ ,  $x \notin \overline{V_j}$ ,  $x \notin V_j^*$ . Tedy  $\mathbb{X}$  je normální.

b) Ať  $\mathbb{X}$  je Hausdorffův kompaktní. Stačí ukázat, že  $\mathbb{X}$  je regulární a použít a). Ať  $F \subseteq \mathbb{X}$  je uzavřená,  $x \in \mathbb{X} \setminus F$ . Pro  $y \in F$  existují otevřené disjunktní  $U_y, V_y$ , že  $x \in U_y, y \in V_y$ .  $F$  je kompaktní,  $\{V_y : y \in F\}$  je otevřené pokrytí  $F$ . Tedy existují konečné podpokrytí  $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_n}\}$  a  $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$ .  $U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ ,  $V := \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$  otevřené, tedy  $\mathbb{X}$  regulární. ┐

### Tvrzení 5.4

*Kompaktní podprostory ( $\mathbb{K}$ ) jsou uzavřené v Hausdorffových prostorech ( $\mathbb{X}$ ).*

┌ Důkaz

Pro  $x \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{K}$  fixované a  $y \in \mathbb{K}$  existují disjunktní  $U_y$  a  $V_y$  v  $\mathbb{X}$ , že  $x \in U_y$  a  $y \in V_y$ .  $\{V_y : y \in \mathbb{K}\}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{K}$ .  $\mathbb{K}$  je kompaktní, tedy  $\exists y_1, \dots, y_n \subseteq \mathbb{K}$ , že  $V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n} \supseteq \mathbb{K}$ .  $x \in \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$  otevřené je disjunktní s  $\bigcup V_{y_i}$ , tedy i disjunktní s  $\mathbb{K}$ . Tedy  $\mathbb{X} \setminus \mathbb{K}$  je otevřená, tj.  $\mathbb{K}$  je uzavřená. ┐

### Tvrzení 5.5 (Automatický homeomorfismus)

*Ať  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$  jsou kompaktní Hausdorffovy TP a  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  spojitá. a) Pokud je  $f$  na, pak  $f$  je kvocientové. b) Pokud je  $f$  bijekce, pak  $f$  je homeomorfismus.*

┌ *Důkaz*

a) Stačí ukázat, že  $f$  je uzavřené zobrazení. Ať  $F \subseteq \mathbb{X}$  je uzavřená. Pak  $F$  je kompaktní,  $f$  spojitá, tedy  $f(F)$  je kompaktní. Podle předchozího tvrzení je  $f(F)$  uzavřená v  $\mathbb{Y}$ .

└ b) Okamžitý důsledek a). □

*Poznámka*

Ať  $\tau$  je kompaktní Hausdorffova topologie na  $\mathbb{X}$ . Pak  $\tau$  je maximální kompaktní topologie a minimální Hausdorffova.

### Lemma 5.6 (Alexandrovo)

Ať  $\mathbb{X}$  je TP a  $\mathcal{S}$  jeho subbáze. Předpokládejme, že z každého pokrytí  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$  lze vybrat konečné podpokrytí. Pak  $\mathbb{X}$  je kompaktní.

┌ *Důkaz (Sporem)*

Předpokládejme pro spor, že existuje otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ , které nemá konečné podpokrytí. Označme  $\mathcal{P}$  množinu všech takových pokrytí.  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ . Ať  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$  je řetězec vzhledem k  $\subseteq$ . Pak  $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{P}$ : Zřejmě  $\bigcup \mathcal{L}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Kdyby existovalo  $\mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathcal{L}$  konečné podpokrytí, pak existuje  $\mathcal{U} \in \mathcal{L}$ , že  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ . Tedy  $\mathcal{U}$  má konečné podpokrytí.

Tedy podle Zormova lemmatu existuje maximální prvek  $\mathcal{U} \in \mathcal{P}$ . Ukážeme, že  $\mathcal{U} \cap \mathcal{S}$  je pokrytí  $\mathbb{X}$ : Ať  $x \in \mathbb{X}$ . Pak existuje  $U \in \mathcal{U} : x \in U$ . Zároveň existuje  $S_1, \dots, S_n, n \in \mathbb{N}$ , že  $x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subseteq U$ . Tvrdíme, že pro nějaké  $i \leq n : S_i \in \mathcal{U}$ : Kdyby ne, pak  $\forall i \leq n : S_i \notin \mathcal{U}$ . Tedy  $\mathcal{U} \cup \{S_i\} \notin \mathcal{P}$  ( $\mathcal{U}$  byl maximální prvek  $\mathcal{P}$ ). Tedy existuje  $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{U}$  konečná, že  $\mathcal{F}_i \cup \{S_i\}$  je pokrytí  $\mathbb{X}$ . Pak  $\bigcup_{i \leq n} \mathcal{F}_i \cup \{U\}$  je pokrytí  $\mathbb{X}$ , je konečné, je to podpokrytí  $\mathcal{U}$ . Spor.

Tedy  $x \in S_i \in \mathcal{S} \cap \mathcal{U}$ . Tedy  $\mathcal{U} \cap \mathcal{S}$  je pokrytí  $\mathbb{X}$ . Podle předpokladu má  $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}$  konečné podpokrytí, tedy  $\mathcal{U}$  má konečné podpokrytí. Spor s volbou  $\mathcal{U}$ . □

### Věta 5.7 (Tichonova)

*Součin kompaktních prostorů je kompaktní.*

┌ *Důkaz*

Ať  $(\mathbb{X}_i, \tau_i), i \in I$ , jsou kompaktní TP. Ať  $\mathbb{X} = \prod \mathbb{X}_i$ .  $\tau$  součinná topologie na  $\mathbb{X}$ . Ať  $\mathcal{S} := \{\pi_i^{-1}(U) : U \in \tau_i, i \in I\}$ .  $\mathcal{S}$  je subbáze  $\tau$ . Ověříme, že  $\mathcal{S}$  splňuje předpoklady Alexandrova lemmatu. Ať  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$  je pokrytí  $\mathbb{X}$ . Pro  $i \in I$  označme  $\mathcal{U}_i = \{U \in \tau_i : \pi_i^{-1}(U) \in \mathcal{U}\}$ . Tvrdíme, že existuje  $i \in I$ , že  $\mathcal{U}_i$  je pokrytí  $\mathbb{X}_i$ : Kdyby ne, pak  $\forall i \in I : \mathcal{U}_i$  nepokrývá  $\mathbb{X}_i$ , tedy existuje  $x_i \in \mathbb{X}_i \setminus \bigcup \{V : V \in \mathcal{U}_i\}$ . Nyní  $x := (x_i)_{i \in I} \in \mathbb{X}$ , ale  $x \notin \bigcup \mathcal{U}$ . Tedy  $\mathcal{U}$  nepokrývá  $\mathbb{X}$ , spor.

$\mathbb{X}_i$  je kompaktní, tj. existuje  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}_i$  konečná, že  $\bigcup \mathcal{K} = \mathbb{X}_i$ . Zřejmě  $\{\pi_i^{-1}(U) : U \in \mathcal{K}\}$  je konečné podpokrytí  $\mathbb{X}$  prvky z  $\mathcal{U}$ . Podle Alexandrova lemmatu je  $\mathbb{X}$  kompaktní. □



**Tvrzení 5.8** (Spojitý obraz kompaktu nezvyší váhu)

Ať  $\mathbb{X}$  je kompaktní a  $\mathbb{Y}$  Hausdorffův. Ať  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  je spojitý a na. Potom  $w(\mathbb{Y}) \leq w(\mathbb{X})$ .

┌  
Důkaz

Ať  $\mathcal{B}$  je báze  $\mathbb{X}$ . Můžeme předpokládat, že  $\mathcal{B}$  je uzavřená na konečné sjednocení (tím nezvyšíme mohutnost nekonečné báze). Definujeme  $\mathcal{C} := \{\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{X} \setminus B) : B \in \mathcal{B}\}$ .  $\mathcal{C}$  sestává z otevřené množiny. Ukážeme, že  $\mathcal{C}$  je báze  $\mathbb{Y}$ : Ať  $y \in \mathbb{Y}$  a  $V \in \mathcal{U}(y)$  otevřená, pak  $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(V)$ .  $\mathcal{B}$  je báze, tedy  $\forall x \in f^{-1}(y) \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subseteq f^{-1}(V)$ .  $f^{-1}(y)$  je kompaktní (jelikož je uzavřená z hausdorffovosti  $\mathbb{Y}$ ) a  $\{B_x : x \in f^{-1}(y)\}$  je otevřené pokrytí  $f^{-1}(y)$ . Tedy existuje  $x_1, \dots, x_n \in f^{-1}(y) : B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_n} \supseteq f^{-1}(y)$ .

Navíc  $B \subseteq f^{-1}(V)$ .  $y \in \mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{X} \setminus B) \subseteq V$ , tj.  $\mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{X} \setminus B) \in \mathcal{C}$ . Tedy  $\mathcal{C}$  je báze, navíc  $|\mathcal{C}| \leq |\mathcal{B}|$ , tedy při volbě báze mohutnosti váhy je  $w(\mathbb{Y}) \leq w(\mathbb{X})$ . □

## 6 Prostory spojitých funkcí na kompaktech

**Definice 6.1**

Pro TP  $\mathbb{X}$ ,  $\mathbb{Y}$  značíme symbolem  $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$  množinu všech spojitých funkcí  $\mathbb{X}$  do  $\mathbb{Y}$ . Pokud  $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$ , pak píšeme pouze  $C(\mathbb{X})$ .

Topologie bodové konvergence:  $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subseteq \mathbb{Y}^{\mathbb{X}}$  se součinnovou topologií.

Pro  $\mathbb{X}$  kompaktní je  $C(\mathbb{X})$  se supremovou normou Banachův prostor.

**Tvrzení 6.1** (Diniho kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)

Ať  $\mathbb{X}$  je kompaktní TP a  $f_n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  spojitý, že  $f_{n+1} \geq f_n, n \in \mathbb{N}$  a  $f_n$  bodově konverguje ke spojitě funkci  $f$ . Pak  $f_n$  konverguje stejnoměrně k  $f$ .

┌  
Důkaz

Ať  $\varepsilon > 0$  ať  $D_n = \{x \in \mathbb{X} : f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$ . Pak  $D_n$  je otevřená pro  $n \in \mathbb{N}$ . Navíc z monotonie  $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots, \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{X}$ .  $\mathbb{X}$  kompaktní, tedy existuje  $n_0$ , že  $D_{n_0} = \mathbb{X}$ . Tedy  $|f(x) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon$  pro libovolné  $x \in \mathbb{X}$ . Pak pro  $n \geq n_0 : f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_{n_0}(x) < \varepsilon$ . □

**Lemma 6.2** (O odmocnině)

Existuje posloupnost polynomů, která na intervalu  $[0, 1]$  konverguje stejnoměrně k  $\sqrt{t}$ .

┌ *Důkaz*

Položme  $p_0(t) = 0$ ,  $p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{t-p_n^2(t)}{2}$ ,  $n \geq 0$ . Každé  $p_n$  je polynom v proměnné  $t$ .  $\forall n \in \mathbb{N} : p_n(t) \leq \sqrt{t}$  a  $p_1(t) \leq p_{n+1}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  (dokazatelné indukcí). Tedy pro každé  $t \in [0, 1]$  je posloupnost  $(p_n(t))_{n=1}^{\infty}$  neklesající a shora omezená pro libovolné  $t \in [0, 1]$ , tedy má vlastní limitu  $L = L + \frac{t-L^2}{2} \implies L = \sqrt{t}$ . Z Diniho kriteria  $p_n$  konverguje stejnoměrně k  $\sqrt{\phantom{x}}$  na  $[0, 1]$ . □

## Definice 6.2

Ať  $\mathcal{F}$  je systém funkcí  $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ . Řekneme, že  $\mathcal{F}$  odděluje body, pokud pro  $x, y \in \mathbb{X}$ ,  $x \neq y$  existuje  $f \in \mathcal{F} : f(x) \neq f(y)$ . Řekneme, že  $\mathcal{F}$  odděluje body a uzavřené množiny, pokud  $\forall F \subseteq \mathbb{X}$  uzavřená  $\forall x \in \mathbb{X} \setminus F \exists f \in \mathcal{F} : f(x) \notin f(F)$ .

*Poznámka* (Připomínáme svaz a okruh.)

$\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq C(\mathbb{K})$  ( $\mathbb{K}$  typicky kompakt),  $\mathcal{A}$  je okruh  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  je uzavřená na násobení, sčítání a odčítání funkcí.

$\mathcal{A}$  je svaz  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  je uzavřená na minimum a maximum dvou (tj. konečně mnoha) funkcí.

## Věta 6.3 (Stone-Weierstrass)

Ať  $\mathbb{K}$  je kompaktní TP a  $\mathcal{B} \subseteq C(\mathbb{K})$  je vektorový podprostor  $C(\mathbb{K})$  obsahující konstanty a oddělující body. Je-li  $\mathcal{B}$  okruh nebo svaz, pak  $\mathcal{B}$  je hustá v  $C(\mathbb{K})$  (s topologií stejnoměrné konvergence).

┌ *Důkaz* (Svaz)

Pozorování: pro  $x, y \in \mathbb{K}$ ,  $x \neq y$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  existuje  $h \in \mathcal{B} : h(x) = a \wedge h(y) = b$ . ( $\mathcal{B}$  odděluje body, tedy  $\exists u \in \mathcal{B} : u(x) \neq u(y)$ .  $h(z) := \frac{b-a}{u(y)-u(x)} \cdot (u(z) - u(x)) + a \in \mathcal{B}$ .)

Chceme, že  $\mathcal{B}$  je hustý. Ať  $f \in C(\mathbb{K})$  a  $\varepsilon > 0$ . Pro každou dvojici  $x, y \in \mathbb{K}$  fixujeme  $f_{x,y} \in \mathcal{B}$ , že  $f_{x,y}(x) = f(x)$  a  $f_{x,y}(y) = f(y)$  (to můžeme díky pozorování pro  $x \neq y$ , pro  $x = y$  položíme  $f_{x,y} = f(x)$ .) Ať  $x \in \mathbb{K}$  je pevné.  $\forall y \in \mathbb{K} \exists$  otevřené  $U_y \in \mathcal{U}(y) : |f_{x,y}(z) - f_{x,y}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$  (ze spojitosti  $f_{x,y}$ ) a zároveň  $|f(z) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$  pro  $z \in U_y$  (ze spojitosti  $f$ ). Systém  $\{U_y : y \in \mathbb{K}\}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{K}$ , tedy existuje  $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{K} : U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_k} = \mathbb{K}$ . Definujeme  $f_x := \min \{f_{x,y_1}, \dots, f_{x,y_k}\} \in \mathcal{B}$  ( $\mathcal{B}$  je svaz). Navíc  $f_x \leq f + \varepsilon$  na celém  $\mathbb{K}$  a také  $f_x(x) = f(x)$ . Nyní  $\forall x \in \mathbb{K} \exists$  otevřené  $V_x \in \mathcal{U}(x) : |f_x(z) - f_x(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  a  $|f(z) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  pro  $z \in V_x$ .  $\{V_x : x \in \mathbb{K}\}$  otevřené pokrytí  $\mathbb{K}$ . Tedy existují  $x_1, \dots, x_l : V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_l} = \mathbb{K}$ .  $g := \max \{f_{x_1}, \dots, f_{x_l}\}$ ,  $g \in \mathcal{B}$  a  $f - \varepsilon \leq g \leq f + \varepsilon$ , tj.  $\|f - g\| \leq \varepsilon$ . □

*Důkaz (Okruh)*

Ukážeme, že je-li  $\mathcal{A} \subseteq C(\mathbb{K})$  VP a okruh obsahující konstanty a oddělující body, pak  $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{A}}$  je svaz. Zřejmě  $\mathcal{B}$  je VP obsahující konstanty a odděluje body (je nadmnožinou, proto vše obsahuje). Ukážeme, že pro  $f \in \mathcal{B}$  je  $|f| \in \mathcal{B}$ :  $f$  je omezená, tedy existuje  $c > 0$ , že  $c \cdot f^2 : \mathbb{K} \rightarrow [0, 1]$ . Z lemmatu o odmocnině existují polynomy  $p_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , že  $p_n$  stejnoměrně konverguje k odmocnině. Tedy  $p_n \circ (c \cdot f^2) \in \overline{\mathcal{A}}$  (aplikování polynomu z venku je jen násobení a sčítání) stejnoměrně konverguje k  $\sqrt{c} \cdot |f| \in \overline{\mathcal{A}}$  (z uzávěru se nedá vykonvergovat). Tedy  $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$ , tedy i  $\max\{f, g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ , tedy  $\overline{\mathcal{A}}$  je uzavřená na maxima (minima podobně). Z první části  $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = C(\mathbb{K})$ , tedy  $\overline{\mathcal{A}} = C(\mathbb{K})$ .  $\square$

### Definice 6.3 (Kompaktifikace)

Ať  $\mathbb{X}$  je TP. Dvojice  $(j, \mathbb{Y})$  se nazývá kompaktifikací  $\mathbb{X}$ , pokud  $\mathbb{Y}$  je kompaktní Hausdorffův prostor a  $j : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  je vnoření a  $j(\mathbb{X})$  je hustá v  $\mathbb{Y}$ .

Prostor  $\mathbb{X}$  a  $j(\mathbb{X})$  se často ztotožňují, tedy pak zapomínáme na  $j$  a mluvíme pouze o  $\mathbb{Y}$ , jakožto kompaktifikaci.

Řekneme, že kompaktifikace  $(j_1, \mathbb{Y}_1)$  prostoru  $\mathbb{X}$  je větší než kompaktifikace  $(j_2, \mathbb{Y}_2)$  prostoru  $\mathbb{X}$ , pokud existuje spojitě zobrazení  $f : \mathbb{Y}_1 \rightarrow \mathbb{Y}_2$ , že  $f \circ j_1 = j_2$ .

Řekneme, že 2 kompaktifikace  $(j_1, \mathbb{Y}_1)$  a  $(j_2, \mathbb{Y}_2)$  jsou ekvivalentní, pokud existuje homeomorfismus  $h : \mathbb{Y}_1 \rightarrow \mathbb{Y}_2$ ,  $h \circ j_1 = j_2$ .

*Poznámka*

Jsou-li  $(j_1, \mathbb{Y}_1)$ ,  $(j_2, \mathbb{Y}_2)$  kompaktifikace prostoru  $\mathbb{X}$  a  $(j_1, \mathbb{Y}_1)$  je větší než  $(j_2, \mathbb{Y}_2)$  a naopak, pak jsou již ekvivalentní.

*Důkaz*

$(f_2 \circ f_1) \circ j_1 = f_2 \circ (f_1 \circ j_1) = f_2 \circ j_2 = j_1$ . Obdobně  $f_1 \circ f_2 \circ j_2 = j_1$ . Tedy  $f_2 \circ f_1 = id$  na  $j_1(\mathbb{X})$  a  $f_1 \circ f_2 = id$  na  $j_2(\mathbb{X})$ . Jenže  $j_1(\mathbb{X})$  je hustá v  $\mathbb{Y}_1$ , tedy nutně  $f_2 \circ f_1 = id$  na celém  $\mathbb{Y}_1$ . Úplně analogicky  $f_1 \circ f_2 = id$  na  $\mathbb{Y}_2$ , tedy  $f_1$  a  $f_2$  jsou vzájemně inverzní a navíc spojitě, tedy jsou homeomorfismy, tj. kompaktifikace jsou ekvivalentní.  $\square$

*Například*

$\mathbb{Y}_1 = [0, 1]$  je jedna z kompaktifikací prostoru  $\mathbb{X} = (0, 1)$  ( $j_1 : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ ,  $j_1(x) = x$ ). Nyní  $\mathbb{Y}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  ( $j_2 : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}_2$ ,  $j_2(x) = e^{2\pi i x}$ ).  $(j_2, \mathbb{Y}_2)$  je kompaktifikací  $(0, 1)$ . Zřejmě  $(j_1, \mathbb{Y}_1)$  je větší než  $(j_2, \mathbb{Y}_2)$ . Naopak zřejmě nejsou ekvivalentní.

### Definice 6.4 (Lokální kompaktnost)

TP  $\mathbb{X}$  se nazývá lokálně kompaktní, pokud každý jeho bod má kompaktní okolí.

### **Tvrzení 6.4** (Alexandrovova kompaktifikace)

*Každý Hausdorffův lokálně kompaktní prostor  $\mathbb{X}$  má kompaktifikaci  $(e, \mathbb{Y})$ , při které je  $\mathbb{Y} \setminus e(\mathbb{X})$  nejvýše jednoprvková. Ta je určena jednoznačně.*

*Důkaz*

Je-li  $\mathbb{X}$  kompaktní, pak má až na ekvivalenci jedinou kompaktifikaci: necht  $(e, \mathbb{Y})$  je kompaktifikace  $\mathbb{X}$ . Potom  $e(\mathbb{X})$  je kompaktní (spojitý obraz kompaktu),  $e(x)$  je uzavřená a hustá v  $\mathbb{Y}$ , tedy  $e(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$ . Tedy  $e$  je homeomorfismus a tato kompaktifikace je tedy ekvivalentní s libovolnou další.

Předpokládejme, že  $\mathbb{X}$  není kompaktní. BÚNO  $\infty \notin \mathbb{X}$ . Ať  $\tau$  je topologie na  $\mathbb{X}$ .  $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \cup \{\infty\}$ . Na  $\mathbb{Y}$  definujeme topologii  $\sigma$ :

$$\sigma := \tau \cup \{\{\infty\} \cup (\mathbb{X} \setminus K) : K \subseteq \mathbb{X} \text{ je kompaktní}\}.$$

Snadno ověříme, že  $\sigma$  je topologie na  $\mathbb{Y}$ .  $(\mathbb{Y}, \sigma)$  je kompaktní: Ať  $\mathcal{U}$  je otevřené pokrytí  $\mathbb{Y}$ .  $\exists U_0 \in \mathcal{U} : \infty \in U_0$ .  $\exists K \subseteq \mathbb{X}$  kompaktní:  $U_0 = \{\infty\} \cup (\mathbb{X} \setminus K)$ .  $K$  je pokryto otevřeným pokrytím  $\{K \cap U : U \in \mathcal{U}\}$ , tedy z kompaktnosti existují  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U} : K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$ .  $\{U_0, U_1, \dots, U_n\}$  je tedy konečné podpokrytí  $\mathbb{Y}$ .

$(\mathbb{Y}, \sigma)$  je Hausdorffův: Pro  $x, y \in \mathbb{X} \exists U, V \dots$  Zajímavější je to pro  $\infty$  a  $x \in \mathbb{X}$ .  $\mathbb{X}$  je lokálně kompaktní, tedy existuje  $K \subset \mathbb{X}$  kompaktní,  $K \in \mathcal{U}(x)$ ,  $x \in \text{int}(K)$ ,  $\infty \in \{\infty\} \cup (\mathbb{X} \setminus K)$  (dvě disjunktní množiny).

Jednoznačnost: v Hausdorffově prostoru jsou uzavřené množiny právě ty kompaktní, tedy nebyla jiná volba  $\sigma$ . □

*Poznámka*

Jednobodová (tzn. Alexandrovova) kompaktifikace (pokud existuje) je nejmenší kompaktifikace mezi všemi kompaktifikacemi daného prostoru  $\mathbb{X}$ .

Lokálně kompaktní Hausdorffovy prostory jsou právě otevřené podmnožiny Hausdorffových kompaktů.

### **Lemma 6.5** (Tichonovovo vnoření)

*Ať  $\mathbb{X}$  je TP,  $\mathbb{Y}_i, i \in I$ , jsou TP. Ať  $\mathcal{F} = \{f_i : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}_i : i \in I\}$  je soubor spojitých zobrazení. Pokud  $\mathcal{F}$  odděluje body, pak  $f := \Delta \mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow \prod_{i \in I} \mathbb{Y}_i$  ( $f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$ ) je prosté. Pokud navíc  $\mathcal{F}$  odděluje body a uzavřené množiny, pak  $f$  je vnoření.*

*Důkaz*

Ať  $x, y \in \mathbb{X}, x \neq y$ .  $\mathcal{F}$  odděluje body, tedy existuje  $i \in I : f_i(x) \neq f_i(y)$ .  $f(x) \neq f(y)$ . Tedy  $f$  je prosté. Chceme ukázat, že  $f : \mathbb{X} \rightarrow f(\mathbb{X})$  je homeomorfismus. Tedy stačí, že je uzavřené. Ať  $F \subseteq \mathbb{X}$  je uzavřená a  $x \in \mathbb{X} \setminus F$ .  $\exists i \in I : f_i(x) \notin f_i(F) = \pi_i(f(F)) \supseteq \pi_i(\overline{f(F)})$ . Tedy  $\pi_i(f(x)) = f_i(x) \notin \pi_i(\overline{f(F)})$ . Proto  $f(x) \notin \overline{f(F)}$ . Tedy  $f$  je uzavřené. □

### **Tvrzení 6.6** (Tichonovova krychle)

*Každý Tichonovův prostor lze vnořit do nějaké Tichonovovy krychle, tj.  $[0, 1]^I$ , pro vhodnou množinu  $I$ .*

┌

*Poznámka*

└ Za  $I$  lze volit bázi.

┌

*Důkaz*

Označme jako  $I := C(\mathbb{X}, [0, 1])$  a uvažme diagonální zobrazení  $e := \Delta \{f : f \in I\} : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]^I$ .  $I$  odděluje body a odděluje body a uzavřené množiny, protože  $\mathbb{X}$  je Tichonovův.

Tedy  $e$  je vnoření podle předchozího lemmatu. □

└

*Důsledek*

Každý Tichonovův prostor má nějakou kompaktifikaci.

┌

*Důkaz*

Podle předchozího tvrzení existuje vnoření  $e$  do Tichonovovy krychle.  $(e, \overline{e(\mathbb{X})})$  je kompaktifikace  $\mathbb{X}$ . □

└

### **Definice 6.5**

Kompaktifikace z důkazu předchozího důsledku (nebo kterákoliv s ní ekvivalentní) se nazývá Čechova-Stoneova (nebo beta-obal) a značí se  $\beta\mathbb{X}$ .

### **Věta 6.7** (Charakterizace beta obalu)

*Ať  $\mathbb{X}$  je Tichonovův TP a  $\mathbb{Y}$  kompaktifikace  $\mathbb{X}$ . Pak je ekvivalentní*

*a)  $\mathbb{Y}$  je Čechova-Stoneova kompaktifikace  $\mathbb{X}$ .*

*b) Každou spojitou funkci  $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$  lze spojitě rozšířit na  $\mathbb{Y}$ .*

*c) Každou spojitou funkci  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$  do libovolného kompaktního Hausdorffova prostoru  $\mathbb{Z}$  lze spojitě rozšířit na  $\mathbb{Y}$ .*

*d)  $\mathbb{Y}$  je největší kompaktifikace  $\mathbb{X}$ .*

┌ *Důkaz*

$a) \implies b) : \mathbb{Y} = \overline{e(X)}, e = \Delta \{f | f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1] \text{ spojitá} \} = \Delta I. e : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]^I$ . Ať  $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$  je spojitě  $f \in I, \pi_f : [0, 1]^I \rightarrow [0, 1], \pi_f \circ e = f$ , tedy  $\pi_f$  rozšiřuje  $f$ ,  $\pi_f|_{\mathbb{Y}}$  je hledané spojitě rozšíření.

$b) \implies c)$  Podle lemmatu o Tichonovově vnoření<sup>a</sup> můžeme předpokládat, že  $\mathbb{Z} \subseteq [0, 1]^J$  pro nějakou množinu  $J$ .  $\pi_j \circ f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$  lze spojitě rozšířit na  $g_j : \mathbb{Y} \rightarrow [0, 1], j \in J$ .  $\Delta \{g_j : j \in J\} : \mathbb{Y} \rightarrow [0, 1]^J$  je hledané spojitě rozšíření toho zobrazení  $f = \Delta_{j \in J}(\pi_j \circ f)$ .

$c) \implies d)$  Triviální z definice uspořádání na kompaktifikaci (Je-li  $\mathbb{Z}$  nějaká kompaktifikace  $\mathbb{X}$ , pak  $id_{\mathbb{X}} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$  lze podle c) spojitě rozšířit na  $\mathbb{Y}$ . Tedy  $\mathbb{Y}$  je větší kompaktifikace než  $\mathbb{Z}$ .)

$d) \implies a)$   $\mathbb{Y}$  je největší, tedy je větší než Čechova-Stoneova. Zbývá ukázat, že Čechova-Stoneova kompaktifikace je větší než  $\mathbb{Y}$ . To již víme z důkazů implikace  $a \implies d$ . Podle poznámky o ekvivalenci kompaktifikací jsou tyto ekvivalentní.  $\square$

<sup>a</sup> $\mathbb{Z}$  kompaktní Hausdorffův  $\implies T_4 \implies T_\pi$

*Poznámka*

Je-li  $\mathbb{X}$  Tichonovův prostor a  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá omezená, pak  $f$  lze spojitě rozšířit na  $\bar{f} : \beta\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ . Banachovy prostory  $e_\infty$  a  $C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{R})$  lze stotožnit.

## 7 Metrizovatelnost

*Poznámka*

Je-li  $(\mathbb{X}, \varrho)$  metrický prostor, tak  $\sigma := \min\{\varrho, 1\}$  je opět metrika na  $\mathbb{X}$ , která generuje stejnou topologii jako  $\varrho$ .

### Tvrzení 7.1

*Jsou-li  $\mathbb{X}_n$  metrizovatelné TP, pak  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{X}_n$  je metrizovatelný.*

┌ *Důkaz*

Ať  $\varrho_n$  je metrika na  $\mathbb{X}_n$  kompatibilní s topologií  $\tau_n$ . BÚNO  $\varrho_n \leq 1$ .  $\mathbb{X} = \prod \mathbb{X}_n$ .  $\tau$  součinná topologie na  $\mathbb{X}$ . Definujeme  $\varrho$  metriku na  $\mathbb{X} : \varrho(x, y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \varrho_n(x_n, y_n)$ . Ověříme, že topologie generovaná metrikou  $\varrho$  splývá s  $\tau : \pi_n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_n$  je  $2^n$ -lipschitzovské, tedy spojitě. Tedy topologie generovaná  $\varrho$  je větší než  $\tau$ . Ať  $\varepsilon > 0$  a  $x \in \mathbb{X}$ , najdeme  $n \in \mathbb{N} : 2 \cdot 2^{-n} < \varepsilon$  a ať  $\delta = 2^{-n}$ .  $B_{\varrho_1}(x_1, \delta) \times \dots \times B_{\varrho_n}(x_n, \delta) \times \prod_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{X}_i$  je prvek  $\tau$ , navíc je podmnožinou  $B_{\varrho}(x, \varepsilon)$ . Tedy topologie generovaná, metrikou  $\varrho$  je menší než  $\tau$ .  $\square$

┌ *Poznámka*

Alternativně lze za  $\varrho$  brát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho_n(x_n, y_n)}{2^n(1 + \varrho_n(x_n, y_n))}.$$

## Věta 7.2 (Urysohnova metrizační)

*Každý  $T_3$  prostor se spočetnou bází je metrizable.*

┌ *Důkaz*

Prostor se spočetnou bází je Lindelöfův. Každý regulární Lindelöfův prostor je normální. Tedy prostor  $\mathbb{X}$  je  $T_4$ , tzn. i Tichonovův. Ať  $\mathcal{B}$  je spočetná báze prostoru  $\mathbb{X}$ . Označme  $\mathcal{A} = \{(U, V) : \overline{U} \subseteq V, U, V \in \mathcal{B}\}$ . Pro  $(U, V) \in \mathcal{A}$  existuje spojitá funkce  $f_{U,V} : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ , že  $f_{U,V}|_{\overline{U}} = 0, f_{U,V}|_{(\mathbb{X} \setminus V)} = 1$  (lze z normality).  $\mathcal{F} := \{f_{U,V} : (U, V) \in \mathcal{A}\}$  odděluje body a odděluje body a uzavřené množiny. Podle lemmatu o Tichonovově vnoření je  $e := \Delta \mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}}$  vnoření.  $[0, 1]^{\mathcal{F}}$  je metrizable, protože  $\mathcal{F}$  je spočetná.  $e : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}}$  je vnoření, tedy  $e : \mathbb{X} \rightarrow e(\mathbb{X})$  je homeomorfismus.  $e(\mathbb{X})$  je metrizable, tedy  $\mathbb{X}$  je metrizable. □

*Důsledek*

Každý kompaktní Hausdorffův prostor se spočetnou bází je metrizable.

┌ *Důkaz*

Kompaktní Hausdorffův prostor je  $T_4$ , tedy je i  $T_3$ . Tedy podle Urysohnovy metrizační věty metrizable. □

*Důsledek*

Ať  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  je spojitá a na,  $\mathbb{X}$  kompaktní metrizable a  $\mathbb{Y}$  Hausdorffův. Pak  $\mathbb{Y}$  je metrizable.

┌ *Důkaz*

Víme, že spojitý obraz kompaktu nezvýší jeho váhu.  $\mathbb{X}$  kompaktní, netriviální  $\implies$  má spočetnou bází. Tedy  $\mathbb{Y}$  má spočetnou bází. Navíc  $\mathbb{Y}$  je kompakt. Podle předchozího důsledku je  $\mathbb{Y}$  metrizable. □

*Poznámka*

Z důkazu Urysohnovy metrizační věty lze odvodit, že každý separabilní metrizable prostor má metrizable kompakifikaci a lze ho vnořit do Hilbertovy kostky  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ .

## 8 Úplnost

### Věta 8.1 (Cantor)

Metrický prostor  $(X, \varrho)$  je úplný  $\Leftrightarrow$  pro každý centrovaný systém  $\mathcal{F}$  sestávající z uzavřených množin a obsahující množiny libovolně malého (kladného) diametru je  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ .

### Tvrzení 8.2 (O zúplnění)

Každý metrický prostor má zúplnění, tj. pro každý metrický prostor  $(X, \varrho)$  existuje metrický prostor  $(Y, \sigma)$  a izometrie  $j : X \rightarrow j(X) \subseteq Y$ , že  $(Y, \sigma)$  je úplný a  $j(X)$  je hustá v  $Y$ .

Zúplnění je určeno jednoznačně až na ekvivalenci.

### Definice 8.1 (Úplná metrizovatelnost a $G_\delta$ -množina)

TP  $\mathbb{X}$  se nazývá úplně metrizovatelný, pokud na  $\mathbb{X}$  existuje kompatibilní úplná metrika.

Množina  $A$  v TP  $\mathbb{X}$  se nazývá  $G_\delta$ -množina (množina typu  $G_\delta$ ), pokud  $A$  je průnikem spočetně mnoha otevřených množin.

#### Poznámka

Úplná metrizovatelnost je topologický pojem.  $(0, 1)$  je úplně metrizovatelný (ale v běžné metrice není úplný).

### Věta 8.3 (Kuratowski)

Ať  $\mathbb{X}$  je MP,  $\mathbb{Y}$  úplně metrizovatelný. Ať  $A \subseteq \mathbb{X}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{Y}$  spojitý. Potom existuje  $G_\delta$ -množina  $G \subseteq \mathbb{X}$ , že  $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$ , a spojitý  $g : G \rightarrow \mathbb{Y}$ , které rozšiřuje  $f$ .

┌

#### Důkaz

Pro  $x \in \overline{A}$  definujeme oscilaci  $\text{osc}_f(x) = \inf \{\text{diam } f(U \cap A) : U \text{ otevřené okolí } x\}$ . Pro  $x \in A : \text{osc}_f(x) = 0 \Leftrightarrow f$  je spojitý v bodě  $x$ .  $G := \{x \in \overline{A} : \text{osc}_f(x) = 0\}$ .  $G$  je<sup>a</sup>  $G_\delta$  v  $\overline{A}$ ,  $\overline{A}$  je  $G_\delta$  v  $\mathbb{X}$ . Tedy  $G$  je  $G_\delta$  v  $\mathbb{X}$ .

Pro  $x \in G$  existuje  $x_n \in A$ , že  $x_n \rightarrow x$ . Definujeme  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ . Definice  $g$  nezávisí na volbě  $x_n$ .  $g$  rozšiřuje  $f$ . Spojitost  $g$ : Pro  $U \subseteq \mathbb{X}$  otevřená, že  $U \cap G \neq \emptyset : g(U) \subseteq \overline{f(U)}$ , tedy  $\text{diam } g(U) \leq \text{diam } \overline{f(U)} = \text{diam } f(U) \Rightarrow \text{osc}_g(x) \leq \text{osc}_f(x)$ , tedy speciálně  $\text{osc}_g(x) = 0, x \in G$ , tedy  $g$  je spojitý.  $\square$

<sup>a</sup>

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \overline{A} \mid \text{osc}_f(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

└

### Věta 8.4 (Alexandrov)

Je-li  $\mathbb{X}$  metrizovatelný a  $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$  je úplně metrizovatelný, pak  $\mathbb{Y}$  je  $G_\delta$  v  $\mathbb{X}$ .

Je-li  $\mathbb{X}$  úplně metrizovatelný a  $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$  je  $G_\delta$ , pak  $\mathbb{Y}$  je úplně metrizovatelný.



*Důkaz*

$(\mathbb{X}, \varrho), (\mathbb{Y}, \sigma)$ .  $\text{id}_{\mathbb{Y}} : (\mathbb{Y}, \varrho) \rightarrow (\mathbb{Y}, \sigma)$  je spojité zobrazení (dokonce homeomorfismus). Tedy podle Kuratowského věty existuje spojité rozšíření  $g : G \rightarrow \mathbb{Y}$ , kde  $\mathbb{Y} \subseteq G \subseteq \overline{\mathbb{Y}}$ .  $\text{id}_G : G \rightarrow G$  je spojité.  $g|_{\mathbb{Y}} = \text{id}_{\mathbb{Y}} = \text{id}_G|_{\mathbb{Y}}$  a  $\mathbb{Y}$  je hustá v  $G$ . Z jednoznačnosti zobrazení do Hausdorffova prostoru musí být  $g = \text{id}_G$ . Tedy  $G = \mathbb{Y}$ .  $G$  je  $G_\delta$ , tedy i  $\mathbb{Y}$  je  $G_\delta$ .

Druhá část:  $(\mathbb{X}, \varrho)$  úplný metrický,  $\mathbb{Y} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ , kde  $U_n$  je otevřená,  $F_n := \mathbb{X} \setminus U_n$  jsou uzavřené. Definujeme novou metriku na  $\mathbb{Y}$ :

$$\sigma(x, y) = \varrho(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \min \left\{ 2^{-n}, \left| \frac{1}{\varrho(x, F_n)} - \frac{1}{\varrho(y, F_n)} \right| \right\}.$$

$\sigma$  je kompatibilní s metrikou  $\varrho$  (cvičení). Ověříme, že  $\sigma$  je úplná: Ať  $(y_i)$  je cauchyovská posloupnost v  $(\mathbb{Y}, \varrho)$ . Chceme ukázat, že má limitu.  $\varrho \leq \sigma$ . Tedy  $(y_i)$  je cauchyovská v  $(\mathbb{X}, \varrho)$ . Tedy  $(y_i)$  je konvergentní v  $(\mathbb{X}, \varrho)$ .  $y_i \rightarrow y \in \mathbb{X}$ . Chceme, že  $y \in \mathbb{Y}$  a  $y_i \rightarrow y$  v  $(\mathbb{Y}, \sigma)$ .

$$n \in \mathbb{N} : \lim_{i,j \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\varrho(y_i, F_n)} - \frac{1}{\varrho(y_j, F_n)} \right| = 0 \text{ (protože } (y_i) \text{ je } \sigma \text{ cauchyovská.)}$$

Tedy  $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\varrho(y_i, F_n)}$  konvergentní a odražená od nuly (její limita není nula). Tedy  $\forall n \in \mathbb{N} : y \notin F_n$ . Tedy  $y \in \mathbb{Y}$ . Navíc  $y_i \rightarrow y$  v  $(\mathbb{Y}, \sigma)$ , protože  $\varrho(x, y)$  jde k 0 pro  $x$  jde k  $y$  a zbytek  $\sigma$  je část posloupnosti a zbytek konvergentní  $\frac{1}{2^{-n}}$ .  $\square$

### Lemma 8.5 (O přírůstku kompaktifikací)

Ať  $\mathbb{Y}$  a  $\mathbb{Z}$  jsou kompaktifikace TP  $\mathbb{X}$ .  $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$  spojité rozšíření  $\text{id}_{\mathbb{X}}$ . Pak  $f(\mathbb{Y} \setminus \mathbb{X}) = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{X}$ .

*Důkaz*

Spojitý obraz kompaktů je kompakt, tedy  $f(\mathbb{Y})$  je kompaktní, tedy uzavřená v  $\mathbb{Z}$ .  $f(\mathbb{Y}) \supseteq f(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$ ,  $\mathbb{X}$  hustá v  $\mathbb{Z}$ , tedy  $f(\mathbb{Y})$  je hustá v  $\mathbb{Z}$ . Nutně  $f(\mathbb{Y}) = \mathbb{Z}$ . Tedy  $f(\mathbb{Y} \setminus \mathbb{X}) \supseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{X}$ .

Obrácená inkluze sporem:  $\exists y \in \mathbb{Y} \setminus \mathbb{X} : f(y) = x \in \mathbb{X}$ . Existuje otevřené okolí  $U$  bodu  $x$ , že  $y \notin \overline{U}$  ( $y \neq x$ ). Ze spojitosti  $f : \overline{\mathbb{X} \setminus U} = \overline{f^{-1}(\mathbb{X} \setminus U)} \subseteq f^{-1}(\overline{\mathbb{X} \setminus U}) \not\ni y$  ( $y \notin \mathbb{X}$ ), tedy  $y \notin \overline{\mathbb{X} \setminus U}$ . Celkem  $y \notin \overline{U} \cup \overline{\mathbb{X} \setminus U} = \overline{\mathbb{X}} = \mathbb{Y}$ .  $\square$

### Tvrzení 8.6 (Charakterizace čechovsky úplných prostorů)

Pro Tichonovův prostor je ekvivalentní

- a)  $\mathbb{X}$  je  $G_\delta$  v  $\beta\mathbb{X}$ ,
- b)  $\mathbb{X}$  je  $G_\delta$  v každé své kompaktifikaci,
- c)  $\mathbb{X}$  je  $G_\delta$  v nějaké své kompaktifikaci.

*Důkaz*

$a \implies b$ : Ať  $\mathbb{Y}$  je libovolná kompaktifikace  $\mathbb{X}$ .  $\beta\mathbb{X}$  je největší kompaktifikace  $\mathbb{X}$ , tedy existuje spojitá  $f : \beta\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ , rozšiřující  $\text{id}_{\mathbb{X}}$ . Víme, že  $\mathbb{X} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ ,  $G_n$  otevřená v  $\beta\mathbb{X}$ .  $\mathbb{Y} \setminus f(\beta\mathbb{X} \setminus G_n)$ , ot. v  $\mathbb{Y}$ .  $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(\beta\mathbb{X} \setminus G_n) = f(\beta\mathbb{X} \setminus \mathbb{X}) = \mathbb{Y} \setminus \mathbb{X}$ .  $\mathbb{X} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{Y} \setminus f(\beta\mathbb{X} \setminus G_n))$ , tedy  $\mathbb{X}$  je  $G_{\delta}$  v  $\mathbb{Y}$ .

$b \implies c$ : každý Tichonovův prostor má kompaktifikaci.

$c \implies a$ : Ať  $\mathbb{Y}$  je nějaká kompaktifikace  $\mathbb{X}$ , že  $\mathbb{X}$  je  $G_{\delta}$  v  $\mathbb{Y}$ .  $\mathbb{X} = \bigcap G_n$ ,  $G_n$  otevřené v  $\mathbb{Y}$ . Existuje  $f : \beta\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  spojitě rozšíření  $\text{id}_{\mathbb{X}}$ .  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(G_n) = \mathbb{X}$  (z lemmatu o přírůstku). Tedy  $\mathbb{X}$  je  $G_{\delta}$  v  $\beta\mathbb{X}$ .  $\square$

## Definice 8.2 (Čechovsky úplný)

Tichonovův prostor  $\mathbb{X}$  se nazývá čechovsky úplný, pokud  $\mathbb{X}$  je  $G_{\delta}$  v  $\beta\mathbb{X}$ .

*Pozor*

V předchozí charakterizaci nelze psát v libovolném kompaktu.

*Například*

Každý kompaktní Hausdorffův prostor je čechovsky úplný.

Každý lokálně kompaktní Hausdorffův prostor je čechovsky úplný (má 1-bodovou kompaktifikaci).

## Věta 8.7 (Frolíhova vnitřní charakterizace čechovské úplnosti)

Tichonovův TP  $\mathbb{X}$  je čechovsky úplný  $\Leftrightarrow$  existuje posloupnost otevřených pokrytí  $\mathcal{U}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , že pro každý centrovaný systém uzavřených množin  $\mathcal{F}$ , takový, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists F \in \mathcal{F} : \exists U \in \mathcal{U}_n : F \subseteq U(*),$$

je  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ .

┌ *Důkaz*

$\Rightarrow$  : TP  $\mathbb{X}$  je čechovsky úplný, tedy  $\mathbb{X}$  je  $G_\delta$  v  $\beta\mathbb{X}$ .  $\mathbb{X} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ ,  $G_n$  otevřená v  $\beta\mathbb{X}$ . Pro  $x \in \mathbb{X}$  a  $n \in \mathbb{N}$  existuje otevřená  $U_{x,n} \subseteq \beta\mathbb{X}$ , že  $x \in U_{x,n} \subseteq \overline{U_{x,n}} \subseteq G_n$ . Položme  $V_{x,n} = U_{x,n} \cap \mathbb{X}$  ... otevřené v  $\mathbb{X}$ .  $\mathcal{U}_n := \{V_{x,n} : x \in \mathbb{X}\}$  ... otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ . Ať  $\mathcal{F}$  je centrovaný systém uzavřených množin splňující (\*). Chceme, že  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ . Ať  $\mathcal{F}' := \{\overline{F}^{\beta\mathbb{X}} : F \in \mathcal{F}\}$ .  $\mathcal{F}'$  je centrovaný systém uzavřených množin v  $\beta\mathbb{X}$ . Z charakterizace kompaktnosti je  $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$ . Ať  $x \in \bigcap \mathcal{F}'$ . Ukážeme, že  $x \in \mathbb{X}$ . Víme  $x \in G_n, n \in \mathbb{N}$ . Tedy  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = \mathbb{X}$ .  $\overline{F} \cap \mathbb{X} = F$  (protože  $F$  je uzavřená v  $\mathbb{X}$ ). Proto  $x \in \bigcap \mathcal{F}$ . Tedy  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ .

$\Leftarrow$  :  $\mathbb{X}$  splňuje druhou část věty. Pro  $U \in \mathcal{U}_n$  existuje otevřená množina  $V_U \subseteq \beta\mathbb{X}$ , že  $\mathbb{X} \cap V_U = U$ .  $G_n := \bigcup \{V_U : U \in \mathcal{U}_n\} \subseteq \beta\mathbb{X}$ ,  $\mathbb{X} \subseteq G_n$ .  $\mathbb{X} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ . Zbývá  $\mathbb{X} \supseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ . Ať  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ .  $\mathcal{F} := \{\mathbb{X} \cap \overline{V} \mid V \in \mathcal{U}(x)\}$ .  $\mathcal{F}$  je centrovaný systém uzavřených množin v  $\mathbb{X}$ . Navíc splňuje i (\*), tj.  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ . Ať  $y \in \bigcap \mathcal{F}$ . Ukážeme, že  $y = x$ . Kdyby  $y \neq x$ , pak (jelikož jsme v Hausdorffově prostoru) existuje  $V \in \mathcal{U}(x) : y \notin \overline{V} \Rightarrow y \notin \bigcap \mathcal{F}$ .  $\nabla$ .  $x = y \in \mathbb{X}$ . Celkově  $\mathbb{X} = \bigcap G_n$ , tedy  $\mathbb{X}$  je  $G_\delta$  v  $\beta\mathbb{X}$ .  $\square$

*Důsledek (Čech)*

Metrizovatelný prostor  $\mathbb{X}$  je úplně metrizovatelný, právě když je čechovsky úplný.

┌ *Důkaz*

$\Rightarrow$  : Ať  $\mathbb{X}$  je úplně metrizovatelný a  $\varrho$  je úplná kompatibilní metrika. Ať  $\mathcal{V}_n$  je soubor otevřených koulí o poloměru  $2^{-n}$  (otevřené pokrytí  $\mathbb{X}$ ).  $(\mathbb{X}, \varrho)$  je úplný, tedy podle Cantorovy věty pro každý centrovaný systém  $\mathcal{F}$  sestávající z uzavřených množin a splňující  $\forall n \in \mathbb{N} \exists F \in \mathcal{F} \exists V \in \mathcal{V}_n : F \subseteq V$ , je  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ . Tudíž podle Frolíkovy charakterizace je  $\mathbb{X}$  čechovsky úplný.

$\Leftarrow$  : důkaz úplně totožný, jelikož všechno je ekvivalence.

$\Leftarrow$  druhý způsob. Ať  $\varrho$  je nějaká kompaktní metrika na  $\mathbb{X}$ . Ať  $Y$  je zúplnění  $(\mathbb{X}, \varrho)$ .  $\beta\mathbb{Y}$  je kompaktifikace  $\mathbb{Y}$ , ale je to také kompaktifikace  $\mathbb{X}$  ( $\mathbb{X}$  je v  $\mathbb{Y}$  hustá a  $\mathbb{Y}$  je hustá v  $\beta\mathbb{Y}$ ).  $\mathbb{X}$  je čechovsky úplný, tedy  $\mathbb{X}$  je  $G_\delta$  v  $\beta\mathbb{Y}$ . Tedy  $\mathbb{X}$  je  $G_\delta$  v  $\mathbb{Y}$ . Podle věty Alexandrova je  $\mathbb{X}$  úplně metrizovatelný.  $\square$

## Věta 8.8 (Baire)

*Průnik spočetně mnoha otevřených hustých podmnožin čechovsky úplného prostoru je v něm hustý.*

┌ *Důkaz*

At  $G_n, n \in \mathbb{N}$  je otevřené husté v  $\mathbb{X}$ . At  $\mathcal{U}_n$  jsou otevřené pokrytí z Frolíkovy charakterizace. At  $G \neq \emptyset$  otevřená. Chceme  $\bigcap G_n \cap G \neq \emptyset$ . Indukcí nalezneme pro každé  $n \in \mathbb{N}$  uzavřenou množinu  $F_n \subseteq \mathbb{X}$  s neprázdným vnitřkem, že  $F_{n+1} \subseteq F_n, F_n \subseteq G_n \cap G$  a že  $\exists U_n \in \mathcal{U}_n : F_n \subseteq U_n$ .  $\{F_n | n \in \mathbb{N}\}$  je centrováný systém uzavřených množin a podle Frolíkovy charakterizace  $\bigcap F_n \neq \emptyset, \bigcap F_n \subseteq G \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ . □

## **Tvrzení 8.9** (Zachování čechovské úplnosti operacemi)

*Čechovská úplnost se zachovává spočetnou sumou, spočetným součinem a uzavřeným podprostorem.*

┌ *Důkaz*

At  $\mathbb{X}_i, i \in \mathbb{N}$  jsou čechovsky úplné.  $\mathbb{X}_i = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_{i,n}, G_{i,n}$  otevřené v  $\beta\mathbb{X}_i$ .

$\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{X}_i \subseteq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \beta\mathbb{X}_i$  ... lokálně kompaktní. Tedy můžeme uvažovat jednobodovou kompaktifikaci  $\alpha(\bigoplus \beta\mathbb{X}_i) \supseteq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \beta\mathbb{X}_i$ .  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \beta\mathbb{X}_i$  je otevřená v  $\alpha(\bigoplus \beta\mathbb{X}_i)$ .

$$\bigoplus \mathbb{X}_i = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_{i,n}}_{\text{otevřená v } \bigoplus \beta\mathbb{X}_i, \text{ otevřená v } \alpha(\dots)}$$

je  $G_\delta$  v  $\alpha(\dots)$ . Tedy  $\bigoplus \mathbb{X}_i$  je čechovsky úplný.

Pro součin obdobně (dokonce můžeme vynechat  $\alpha$ ).

At  $F \subseteq \mathbb{X}$  uzavřená,  $\mathbb{X} = \bigcap G_n, G_n \subseteq \beta\mathbb{X}$  otevřené.  $F \subseteq \overline{F}$  je kompaktifikace  $F$ .  $F = F \cap \mathbb{X} = F \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = \overline{F} \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = \bigcap \overline{F} \cap G_n$  jsou otevřené v  $\overline{F}$ . Tedy  $F$  je čechovsky úplný. □

## 9 Uniformní prostory

Weil 1936 a Tukey 1940

*Poznámka*

Pro množinu  $X$  značíme  $\Delta(X) = \{(x, x) : x \in X\}$ .

Pro  $E \subseteq X \times X$  označíme  $E^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in E\}$ .

Pro  $C, D \subseteq X \times X, C \circ D = \{(x, z) | \exists y \in X : (x, y) \in C \wedge (y, z) \in D\}$ .

Pro  $E \subseteq X \times X, x \in X, E[x] = \{y \in X : (x, y) \in E\}$ .

### Definice 9.1 (Uniformní prostor)

Dvojice  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  se nazývá uniformní prostor, pokud  $\mathbb{X}$  je množina a  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X} \times \mathbb{X})$  (tj.  $\mathcal{D}$  je soubor binárních relací na  $\mathbb{X}$ ),  $\mathcal{D} \neq \emptyset$  a splňuje:

- $\forall D \in \mathcal{D} : \Delta(\mathbb{X}) \subseteq D$ ,
- $\forall C, D \in \mathcal{D} : C \cap D \in \mathcal{D}$ ,
- $\forall D \in \mathcal{D} \exists C \in \mathcal{D} : C \circ C \subseteq D$  („ $\frac{\varepsilon}{2}$ “),
- $\forall D \in \mathcal{D} : D^{-1} \in \mathcal{D}$ ,
- $\forall D \in \mathcal{D} \forall C \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X}, C \supseteq D : C \in \mathcal{D}$ ,
- $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \exists D \in \mathcal{D} : (x, y) \notin D$ . (Občas se neuvádí, pak se definují tzv. separované uniformní prostory, které ji mají navíc.)

System  $\mathcal{D}$  se nazývá uniformita na  $\mathbb{X}$ . Prvky  $\mathcal{D}$  se nazývají okolí diagonály.

*Poznámka*

Poslední podmínka je ekvivalentní podmínce  $\bigcap \mathcal{D} = \Delta(\mathbb{X})$ .

### Definice 9.2 (Báze a subbáze)

System  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X} \times \mathbb{X})$  se nazývá báze uniformity (resp. báze uniformity  $\mathcal{D}$ ), pokud uzavřením  $\mathcal{B}$  na nadmnožiny dostaneme nějakou uniformitu (resp. uniformitu  $\mathcal{D}$ ).

System  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X} \times \mathbb{X})$  se nazývá subbáze uniformity (resp. subbáze uniformity  $\mathcal{D}$ ), pokud konečné průniky prvků z  $\mathcal{S}$  tvoří bázi uniformity (resp. bázi uniformity  $\mathcal{D}$ ).

### Definice 9.3 (Uniformní / stejnoměrně spojitě zobrazení)

Zobrazení  $f : (\mathbb{X}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{E})$  se nazývá uniformní (nebo stejnoměrně spojitě), pokud  $(f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{D}$ , pro každé  $E \in \mathcal{E}$ . ( $\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E} \exists D \in \mathcal{D} : (x, y) \in D \implies (f(x), f(y)) \in E$ .)

### Definice 9.4 (Uniformní izomorfismus)

Zobrazení  $f : (\mathbb{X}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{E})$  se nazývá uniformní izomorfismus, jestliže  $f$  je bijekce a  $f$  i  $f^{-1}$  jsou uniformní zobrazení.

### Lemma 9.1

Ať  $X$  je množina. System  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$  tvoří bázi nějaké uniformity na  $X$ , pokud

- $\bigcap \mathcal{B} = \Delta(X)$ ,
- $\forall C, D \in \mathcal{B} \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq C \cap D$ ,

- $\forall D \in \mathcal{B} \exists C \in \mathcal{B} : C \circ C \subseteq D,$
- $\forall D \in \mathcal{B} \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq D^{-1}.$

┌ *Důkaz*

└ Bez důkazu. (Důkaz přímočarý.)

□

*Například*

Diskrétní uniformita na množině  $X$  –  $\mathcal{D} = \{D \in \mathcal{P}(X \times X) \mid \Delta(X) \subseteq D\}$ . (Samozřejmě lze definovat i indiskrétní uniformitu  $\mathcal{D} = \{X \times X\}$ , ale tu nebudeme používat).

### **Tvrzení 9.2** (Vytvoření UP z MP a TP z UP)

*Je-li  $(\mathbb{X}, \varrho)$  MP a  $D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} : \varrho(x, y) < \varepsilon\}$ , pak  $\{D_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$  je báze nějaké uniformity  $\mathcal{D}_\varrho$  na  $\mathbb{X}$ . (Tato uniformita se nazývá generovaná metrikou  $\varrho$ .)*

*Je-li  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  UP, pak systém  $\tau_{\mathcal{D}} = \{A \subseteq \mathbb{X} \mid \forall x \in A \exists D \in \mathcal{D} : D[x] \subseteq A\}$  je topologie na  $\mathbb{X}$  a pro každé  $x \in \mathbb{X}$  tvoří systém  $\{D[x] : D \in \mathcal{D}\}$  bázi okolí v bodě  $x$  (při topologii  $\tau_{\mathcal{D}}$ ). (Topologie  $\tau_{\mathcal{D}}$  se nazývá generovaná uniformitou  $\mathcal{D}$ .) (Topologii lze definovat i za pomoci okolí)*

*Je-li  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  (separovaný) UP, pak  $\mathbb{X}, \tau_{\mathcal{D}}$  je Hausdorffův TP.*

*$(\mathbb{X}, \varrho) \rightarrow (\mathbb{X}, \mathcal{D}_\varrho) \rightarrow (X, \tau_{\mathcal{D}_\varrho})$  je totéž jako  $(\mathbb{X}, \varrho) \rightarrow (\mathbb{X}, \tau_\varrho)$ .*

┌ *Důkaz*

└ Vynechán.

□

### **Definice 9.5**

UP  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  je metrizable, pokud na  $\mathbb{X}$  existuje metrika  $\varrho$ , že  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\varrho$ .

TP  $(\mathbb{X}, \tau)$  je uniformizovatelný, pokud na  $\mathbb{X}$  existuje uniformita  $\mathcal{D}$  tak, že  $\tau = \tau_{\mathcal{D}}$ .

*Například*

Diskrétní TP je uniformizovatelný, ale může být generován nediskrétní uniformitou.

### **Věta 9.3** (Metrizovatelnost UP)

*UP  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  je metrizable  $\Leftrightarrow$  UP  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  má spočetnou bázi.*

┌ *Důkaz*

└ Na topologii 2.

□

*Poznámka* (Operace s UP a zobrazeními)

Podobně jako u TP můžeme definovat podprostor, sumu, součin a kvocient UP.

### Definice 9.6 (Net)

Net  $(x_i)_{i \in I}$  v UP  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  se nazývá cauchyovský, pokud  $\forall D \in \mathcal{D} \exists i_0 \in I \forall i, j \geq i_0 : (x_i, x_j) \in D$ .

UP  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  je úplný, pokud každý cauchyovský net v  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  je konvergentní v  $(\mathbb{X}, \tau_{\mathcal{D}})$ .

*Poznámka*

Metrický prostor  $(\mathbb{X}, \varrho)$  je úplný  $\Leftrightarrow (\mathbb{X}, \mathcal{D}_{\varrho})$  je úplný.

### Definice 9.7 (Totální omezenost)

UP  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  se nazývá totálně omezený, pokud  $\forall E \in \mathcal{D} \exists K \subseteq \mathbb{X}$  konečná:

$$E[K] = \bigcup_{x \in K} E[x] = \mathbb{X}.$$

*Poznámka*

Metrický prostor  $(\mathbb{X}, \varrho)$  je totálně omezený  $\Leftrightarrow (\mathbb{X}, \mathcal{D}_{\varrho})$  je totálně omezený.

### Věta 9.4

Buď  $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$  UP. Pak  $(\mathbb{X}, \tau_{\mathcal{D}})$  je kompaktní  $\Leftrightarrow (\mathbb{X}, \mathcal{D})$  je úplný a totálně omezený.

┌

*Důkaz*

└ Není přímočarý. Vynechán.

□

### Věta 9.5 (Uniformita na kompaktu)

Na každém kompaktním Hausdorffově TP existuje právě jedna uniformita, která generuje tuto topologii.

## 10 Topologické grupy

### Definice 10.1 (Topologická grupa (TG))

Trojice  $(\mathbb{G}, \cdot, \tau)$  se nazývá topologická grupa, pokud  $(\mathbb{G}, \cdot)$  je grupa,  $(\mathbb{G}, \tau)$  je (Hausdorffův) TP,  $\cdot : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$  je spojitá a  $^{-1} : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$  je spojitý.

### *Například*

$(\mathbb{R}, +, \tau_e)$  ( $\tau_e$  je euklidovská topologie),  $(C(\mathbb{K}), +, \tau_{\text{stejněměrná}})$  ( $\mathbb{K}$  je kompakt), každý Banachův prostor,  $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot, \tau_{\mathbb{R}^{n \times n}})$  (grupa  $n \times n$  matic nad  $\mathbb{R}$  s nemulovým determinanem), grupa homeomorfismů  $[0, 1]$  s topologií stejnoměrné konvergence a operací skládání homeomorfismů.

*Poznámka* (Normální podgrupa, faktogrupa, neutrální prvek)

$N \leq G$  je normální, pokud  $\forall g \in G : gNg^{-1} = N$ .

Pokud je  $N$  normální podgrupa  $G$ , pak faktogrupou nazveme  $G/N = \{gN | g \in G\}$

Neutrální prvek grupy značíme  $e$ .

## **Tvrzení 10.1** (Základní vlastnosti TG)

- $^{-1}$  je homeomorfismus.
- Pro  $g \in \mathbb{G}$  definujeme tzv. levou translaci  $L_g : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ ,  $L_g(h) = g \cdot h$ , která je též homeomorfismus.
- Každá TG je homogenní TP ( $\forall x, y \exists h : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$  homeomorfismus,  $h(x) = y$ ).
- $\forall U \in \mathcal{U}(e) \exists V \in \mathcal{U}(e) : V \cdot V^{-1} \subseteq U$ .
- Zobrazení  $(x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$  je spojitě.
- Pro  $U \subseteq \mathbb{G}$  otevřenou a  $M \subseteq \mathbb{G}$ , platí  $M \cdot U$  je otevřená.
- Uzávěr podgrupy TG je grupa.
- Uzávěr normální podgrupy je normální podgrupa.
- Je-li  $H \leq \mathbb{G}$ ,  $\text{int } H \neq \emptyset$ , pak  $H$  je obojetná v  $\mathbb{G}$ .
- Součin TG se součinovou topologií je TG.

## **Tvrzení 10.2** (Uniformita na TG)

Ať  $\mathbb{G}$  je TG. Pak systém  $\{D_U | U \in \mathcal{U}(e)\}$ , kde

$$D_U = \{(x, y) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G} | xy^{-1} \in U\},$$

je bázi nějaké uniformity  $\mathcal{D}_{\mathbb{G}}$  (tzv. pravá uniformita na  $\mathbb{G}$  (vs. levá)), která je kompatibilní s topologií na  $\mathbb{G}$ .

## **Věta 10.3**

Každá TG je Tichonovův TP.



Důkaz

Každý UP je Tichonovův.

□

### Věta 10.4 (Metrizovatelnost TG)

$TG$  je metrizovatelná  $\Leftrightarrow$  má spočetný charakter.

Důkaz (Náznak)

TG má uniformitu (metrizovatelná právě tehdy, když má spočetnou bázi), která generuje topologii, jelikož jsme ji definovali s bází danou okolími  $e$ . □

### Tvrzení 10.5 (Spojitost homomorfismu)

Ať  $\mathbb{G}, \mathbb{H}$  jsou TG,  $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$  homomorfismus grup. Potom  $f$  je spojitý  $\Leftrightarrow f$  je spojitý v  $e$ .

### Věta 10.6 (Faktor TG)

Ať  $\mathbb{G}$  je TG,  $N$  je uzavřená normální podgrupa. Potom  $\mathbb{G}/N$  s kvocientovou topologií je TG a přirozená projekce  $\pi : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}/N$  je kvocientové zobrazení a otevřený homomorfismus grup.

Například

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1.$$

### Tvrzení 10.7 (O homomorfismu)

Ať  $\mathbb{G}, \mathbb{H}$  jsou TG,  $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$  spojitý homomorfismus. Pak  $N := f^{-1}(e)$  je uzavřená normální podgrupa  $\mathbb{G}$  a existuje spojitý homomorfismus  $\bar{f} : \mathbb{G}/N \rightarrow \mathbb{H}$ , že  $\bar{f} \circ \pi = f$ . ( $\bar{f}$  nemusí být homeomorfismus, ani pokud  $f$  je na).

### Tvrzení 10.8 (O izomorfismu)

Ať  $\mathbb{G}$  je TF,  $K \subseteq H$  uzavřené normální podgrupy  $\mathbb{G}$ . Potom  $H/K$  je uzavřená normální podgrupa  $\mathbb{G}/K$  a  $(\mathbb{G}/K)/(H/K)$  je izomorfnehomeomorfní s  $G/H$ . (Existuje bijekce, která je zároveň izomorfismus grup a homeomorfismus topologií.)

Poznámka

Na každé grupě  $(G, \cdot)$  existuje topologie  $\tau$ , že  $(G, \cdot, \tau)$  je TG. ( $\tau$  diskrétní funguje vždy.)

Naopak kdy lze rozšířit TP na TG je těžká otázka (možná otevřená). (Na TP  $[0, 1]$  nelze definovat  $\cdot$ , aby šlo o TG, jelikož  $[0, 1]$  není homogenní (nelze  $0 \mapsto \frac{1}{2}$ ).)

**Věta 10.9** (Birkhoff-Kakutani)

*Každá metrizable TG  $\mathbb{G}$  má zleva (zprava) invariantní metriku (tj. metriku  $\varrho$ , že  $\varrho(x, y) = \varrho(x \cdot z, y \cdot z)$ , kde  $x, y, z \in \mathbb{G}$  libovolné).*