Příklad (1.)
We already know that

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km},$$

and let us further assume that we also know that

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det \begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{bmatrix}.$$

Show that

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn},$$
$$\varepsilon_{ijk}\delta_{lm} = \varepsilon_{jkm}\delta_{il} + \varepsilon_{kim}\delta_{jl} + \varepsilon_{ijm}\delta_{kl}.$$

Důkaz
První rovnici vysčítáme přes $j = m$, čímž dostaneme (v menšenci víme, že $\delta_{ac}\delta_{cb} = \delta_{ab}$, neboť ze součtu může být výraz nenulový jen pro $c = a$, a pak je jedna právě tehdy, když $b = c := a$):

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = \delta_{jj}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kj} = 3 \cdot 1 \cdot \delta kn - \delta_{kn} = 2\delta_{kn}.$$

Využijeme první dokazovanou rovnost, poté druhou rovnost ze zadání (a nakonec $\varepsilon_{xyz} = -\varepsilon_{yxz}$):

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{lm} = \frac{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abl}\varepsilon_{abm}}{2} = \frac{\det(\ldots)\varepsilon_{abm}}{2} =$$
$$= \frac{\varepsilon_{abm}(\delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kl} + \delta_{ib}\delta_{jl}\delta_{ka} + \delta_{il}\delta_{ja}\delta_{kb} - \delta_{ia}\delta_{jl}\delta_{kb} - \delta_{ib}\delta_{ja}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jb}\delta_{ka})}{2} =$$
$$= \frac{\varepsilon_{ijm}\delta_{kl} + \varepsilon_{kim}\delta_{jl} + \varepsilon_{jkm}\delta_{il} - \varepsilon_{ikm}\delta_{jl} - \varepsilon_{jim}\delta_{kl} - \varepsilon_{kjm}\delta_{il}}{2} = \varepsilon_{ijm}\delta_{kl} + \varepsilon_{kim}\delta_{jl} + \varepsilon_{jkm}\delta_{il}.$$

□

Příklad (2.)
Let $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ be non-singular matrices such that $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ is non-singular matrix as well. Show that

$$\text{a)} \qquad \det(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \det \mathbb{A} + \operatorname{tr}(\mathbb{A}^T \operatorname{cof} \mathbb{B}) + \operatorname{tr}(\mathbb{B}^T \operatorname{cof} \mathbb{A}) + \det \mathbb{B}$$

$$\text{b)} \qquad (\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A} + \mathbb{B})} \cdot$$
$$\cdot \left(\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2 + \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}\mathbb{A} - (\mathbb{A} + \mathbb{B}) \operatorname{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \frac{1}{2} \left((\operatorname{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}))^2 - \operatorname{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B})^2 \right) \mathbb{I} \right)$$

The Cayley-Hamilton theorem might be useful.

Důkaz (a)
Použijeme C–H ve tvaru $(\det\mathbb{A})\mathbb{I} = \mathbb{A}^3 - (\operatorname{tr}\mathbb{A})\mathbb{A}^2 + (\operatorname{tr}\operatorname{cof}\mathbb{A})\mathbb{A}$, linearitu tr a $\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$:

$$3(\det(\mathbb{A}+\mathbb{B}) - \det\mathbb{A} - \det\mathbb{B}) =$$
$$= \underbrace{\operatorname{tr}\left((\mathbb{A}+\mathbb{B})^3 - \mathbb{A}^3 - \mathbb{B}^3\right)}_{=3\operatorname{tr}(\mathbb{A}^2\mathbb{B})+3\operatorname{tr}(\mathbb{B}^2\mathbb{A})} + \underbrace{\operatorname{tr}\left(-(\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B}))(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 + (\operatorname{tr}\mathbb{A})\mathbb{A}^2 + (\operatorname{tr}\mathbb{B})\mathbb{B}^2\right)}_{=-(\operatorname{tr}\mathbb{B})(\operatorname{tr}\mathbb{A}^2)-(\operatorname{tr}\mathbb{A})(\operatorname{tr}\mathbb{B}^2)-2(\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B}))(\operatorname{tr}\mathbb{A}\mathbb{B})} +$$
$$+ \underbrace{\operatorname{tr}\left((\operatorname{tr}\operatorname{cof}(\mathbb{A}+\mathbb{B}))(\mathbb{A}+\mathbb{B}) - (\operatorname{tr}\operatorname{cof}\mathbb{A})\mathbb{A} - (\operatorname{tr}\operatorname{cof}\mathbb{B})\mathbb{B}\right)}_{=?}$$

Část ? upravíme pomocí * příkladu a linearity tr na:

$$? = \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B}))^2 - \left(\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2\right)\right)(\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B})) -$$
$$-\frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}\mathbb{A})^2 - \operatorname{tr}\mathbb{A}^2\right)(\operatorname{tr}\mathbb{A}) - \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}\mathbb{B})^2 - \operatorname{tr}\mathbb{B}^2\right)(\operatorname{tr}\mathbb{B}) =$$
$$= (\operatorname{tr}\operatorname{cof}\mathbb{A})(\operatorname{tr}\mathbb{B}) + (\operatorname{tr}\operatorname{cof}\mathbb{B})(\operatorname{tr}\mathbb{A}) + (\operatorname{tr}\mathbb{A})^2(\operatorname{tr}\mathbb{B}) + (\operatorname{tr}\mathbb{A})(\operatorname{tr}\mathbb{B})^2 - (\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}))\,(\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B})).$$

Z příkladu * je $-(\operatorname{tr}\mathbb{B})\,(\operatorname{tr}\mathbb{A}^2) + (\operatorname{tr}\mathbb{B})\,(\operatorname{tr}\mathbb{A})^2 = (\operatorname{tr}\mathbb{B})(\operatorname{tr}\operatorname{cof}\mathbb{A})$ (a s prohozeným $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$). Tedy dohromady ($\operatorname{tr}\mathbb{A} = \operatorname{tr}\mathbb{A}^T$)

$$3(\det(\mathbb{A}+\mathbb{B}) - \det\mathbb{A} - \det\mathbb{B}) = 3\left(\operatorname{tr}\left(\mathbb{A}^2\mathbb{B}\right) - (\operatorname{tr}\mathbb{A})(\operatorname{tr}\mathbb{A}\mathbb{B}) + (\operatorname{tr}\operatorname{cof}\mathbb{A})(\operatorname{tr}\mathbb{B})\right) + \overset{A\leftrightarrow B}{\cdots} \overset{\dagger}{=}$$
$$\overset{\dagger}{=} \operatorname{tr}\left((\operatorname{cof}\mathbb{A})^T\mathbb{B}\right) + \operatorname{tr}\left((\operatorname{cof}\mathbb{B})^T\mathbb{A}\right) = \operatorname{tr}\left(\mathbb{B}^T\operatorname{cof}\mathbb{A}\right) + \operatorname{tr}\left(\mathbb{A}^T\operatorname{cof}\mathbb{B}\right).$$

† z C–H: $(\operatorname{cof}\mathbb{A})^T = (\det\mathbb{A})\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^2 - (\operatorname{tr}\mathbb{A})\mathbb{A} + (\operatorname{tr}\operatorname{cof}\mathbb{A})\mathbb{I}$. □

Důkaz (b)
Z C-H, kam dosadíme koeficienty odvozené na přednášce, velmi triviální úpravou rovnic (matice není singulární, tedy jí i jejím determinantem můžeme dělit) dostaneme

$$\mathbb{C}^{-1} = \frac{1}{c_3}\mathbb{C}^2 - \frac{c_1}{c_3}\mathbb{C} + \frac{c_2}{c_3}\mathbb{I} = \frac{1}{\det\mathbb{C}}\mathbb{C}^2 - \frac{\operatorname{tr}\mathbb{C}}{\det\mathbb{C}}\mathbb{C} + \frac{\operatorname{tr}\operatorname{cof}\mathbb{A}}{\det\mathbb{A}}\mathbb{I}.$$

Tam můžeme dosadit $\mathbb{C} = \mathbb{A}+\mathbb{B}$:

$$\text{b)}\qquad (\mathbb{A}+\mathbb{B})^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A}+\mathbb{B})}\cdot\left((\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 - (\mathbb{A}+\mathbb{B})\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B}) + \operatorname{tr}\operatorname{cof}(\mathbb{A}+\mathbb{B})\right).$$

To můžeme roznásobit a dosadit z * příkladu:

$$(\mathbb{A}+\mathbb{B})^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A}+\mathbb{B})}\cdot$$
$$\cdot\left(\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2 + \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}\mathbb{A} - (\mathbb{A}+\mathbb{B})\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B}) + \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B}))^2 - \operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2\right)\right)$$

□

Příklad (*)
Let $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ be a non-singular matrix. Show that $\frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}\mathbb{A})^2 - \operatorname{tr}\mathbb{A}^2\right) = \operatorname{tr}(\operatorname{cof}(\mathbb{A}))$.

Důkaz
Vezměme C–H ve tvaru ($\mathbb{A}$ není singulární, takže s ní můžeme vydělit)

$$-\mathbb{A}^2 + (\operatorname{tr}\mathbb{A})\mathbb{A} - (\operatorname{tr}\operatorname{cof}\mathbb{A})\mathbb{I} = (\det\mathbb{A})\mathbb{A}^{-1}$$

a vypusťme na to tr (ta je invariantní vůči transpozici a „tr $- = -$ tr“):

$$-\operatorname{tr}\mathbb{A}^2 + (\operatorname{tr}\mathbb{A})^2 - 3(\operatorname{tr}\operatorname{cof}\mathbb{A})\mathbb{I} = \operatorname{tr}\big((\det\mathbb{A})A^{-1}\big) = \operatorname{tr}\big((\det\mathbb{A})A^{-T}\big) =: \operatorname{tr}\operatorname{cof}\mathbb{A}.$$

□