Organizační úvod

Poznámka

1 Úvod

Definice 1.1 (Diferenciální rovnice)

Diferenciální rovnice je rovnice, která obsahuje derivaci.

Poznámka (Motivace)
Fyzika (např. pružina: $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$), ekonomie (např. rovnice majetku?: $k' = \alpha \cdot k - c(t)$), biologie (např. model dravec-kořist: $d' = \alpha \cdot d \cdot \cdot k - \beta \cdot d \wedge k' = \gamma \cdot k - \delta \cdot d \cdot k$).

Poznámka (Co nás zajímá na DR)
Přesné řešení (často neumíme spočítat), existence a jednoznačnost řešení, jaké vlastnosti má řešení.

Poznámka (Předpoklady)
$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $(x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times I$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $x' = f(x, t)$. $I \subset \mathbb{R}$.

Definice 1.2 (Obyčená diferenciální rovnice, řešení)

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice $x' = f(x, t)$ z předchozí poznámky.

Funkce $x : I \to \mathbb{R}^n$ je řešení DR, jestliže

- $\forall t \in I : (x(t), t) \in \Omega$,
- $\forall t \in I$ existuje vlastní derivace $x'(t)$,
- $\forall t \in I$ platí $x'(t) = f(x(t), t)$.

Poznámka
První dvě podmínky jsou jen existenční podmínky k rovnici ve třetím bodě.

Typicky má DR nekonečně mnoho řešení, přidáváme proto počáteční podmínku $(x_0, t_0) \in \Omega$, $t_0 \in I$.

Lemma 1.1

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $x : I \to \mathbb{R}^n$ spojitou a takovou, že graf x ($\{(x(t), t) | t \in I\}$) leží v Ω. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- *x je řešení DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$;*
- *$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds \ \forall t \in I$.*

Důkaz

„$\implies$“: x a f je spojitá, tedy $x' = f(x(t), t)$ je spojitá, tj. $x \in C^1(I) \implies \int_{t_0}^{t} x'(s) ds = x(t) - x(t_0)$.

„$\impliedby$“: jelikož f i s je spojitá, tak integral je diferencovatelný a $x(t)$ je spojitá, tedy

$$x'(t) = 0 + f(x(t), t) \wedge x(t_0) = t_0 + 0.$$

□

Věta 1.2 (Peanova věta o lokální existenci)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $(x_0, t_0) \in \Omega$. Potom $\exists\ \delta > 0$ a funkce $x : B(t_0, \delta) \to \mathbb{R}^n$ taková, která je řešení DR a splňuje počáteční podmínku. (Stačí spojitá f a kompaktní Ω.)

Tvrzení 1.3 (Pomocné tvrzení)

Pokud $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ *a* f *je omezená na* Ω*, pak* $\forall T$ *existuje řešení DR* x *na* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *splňující počáteční podmínku.*

Důkaz

Když x_λ je definována na $[t_0 - \lambda, t]$, pak pravá strana má smysl $\forall t \in [t_0, t_0 + \lambda]$ tím pádem pravá strana integrálního tvaru má smysl $\forall t \in [t_0, t+\lambda]$, tím pádem definujeme x_λ na $[t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$.

Nyní definujme $M := \left\{ x_n|_{[t_0, t_0+T]} \right\}_{n=1}^{\infty}$ a ověříme, že M splňuje podmínky Arzela--Ascoliho věty:

$$|x_\lambda(t)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(x_\lambda(s-\lambda))| ds \leq |x_0| + ||f||_\infty \cdot |t - t_0| \leq |x_0| + ||f||_a \cdot T,$$

$$|x_\lambda(t) - x_\lambda(\tau)| = \left| \int_{\tau}^{t} f(x_\lambda(s-\lambda), s) ds \right| \leq ||f||_\infty \cdot |t - \tau|.$$

Podle AA věty tedy existuje podposloupnost M, která konverguje stejnoměrně. Limitu si označme x, podposloupnost x_{n_k}.

Chceme dokázat, že x je řešení DR: TODO!!!

$$\lambda_k := \frac{1?}{n_k}$$

$\square$

Důkaz

Pro $\overline{K_1} \subset K_2$, $\overline{K_2} \subset \Omega$, $(x_0, t_0) \in K$, K_1 a K_2 kompaktní definujeme

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} 1, & (x,t) \in K_1, \\ 0, & (x,t) \in \Omega \setminus \overline{K_2}, \end{cases}$$

kterou spojitě dodefinujeme, a

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) \cdot \varphi(x,t), & (x,t) \in \Omega \\ 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dle prvního kroku (TODO?) $\exists \tilde{x}(t)$, $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\tilde{x}'(t) = \tilde{f}(\tilde{x}(t), t)$, $\tilde{x}(t_0) = x_0$. $\tilde{x}$ je spojitá funkce $\implies$ $\exists \delta > 0$ tak, že graf funkce $\tilde{x}|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]}$ leží v K_1. Na K je $\tilde{f} = f$, tedy $\tilde{x}'(t) = f(\tilde{x}(t), t)$, $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. $\square$

1.1 Jednoznačnost řešení

Definice 1.3 (Lokální jednoznačnost, globální jednoznačnost)

Řekneme, že DR má vlastnost

- lokální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení $(x,I),(y,J)$ a $t_0 \in I \cap J$, $x(t_0) = y(t_0)$ pak $\exists \delta > 0\ \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $x(t) = y(t)$,
- globální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení $(x,I),(y,J)$ a $t_0 \in I \cap J$, $x(t_0) = y(t_0)$, pak $\forall t \in I \cap J : x(t) = y(t)$.

Tvrzení 1.4

Globální jednoznačnost je ekvivalentní lokální jednoznačnosti.

Důkaz

„ $\Longrightarrow$ “ je triviální. „ $\Longleftarrow$ “: Pro spor předpokládejme $\exists t_1 \in I \cap J,\ x(t_1) \neq y(t_1)$. BÚNO $t_1 > t_0$. Definujme

$$M := \{T \in I \cap J, t > t_0, x(t) \neq y(t)\} \neq \emptyset, \qquad t_2 = \inf M.$$

Víme $x(t_2) = \lim_{t \to t_2^-} x(t) = \lim_{t \to t_2^-} y(t) = y(t_2)$. Podíváme se lokální jednoznačností na bod t_2. Tam existuje $\sigma > 0$ tak, že $\forall t \in (t_2 - \sigma, t_2 + \sigma) : x(t) = y(t)$. ↯. □

Definice 1.4 (Lokálně lipschitzovská)

Řekneme, že funkce $f = (x,t)$ je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x, jestliže

$$\forall (x_0, t_0) \in \Omega\ \exists \delta > 0\ \exists L > 0\ \forall t \in \mathcal{U}_\delta(t_0)\ \forall x, y \in \mathcal{U}_\delta(x_0) : |f(x,t) - f(y,t)| \leq L \cdot |x - y|$$

Věta 1.5 (Peanova věta o jednoznačnosti)

Buď f lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x, pak DR má v Ω vlastnost lokální jednoznačnost.

Důkaz

Ať $x(t)$, $y(t)$ jsou řešení. $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s),s)ds$, $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(y(s),s)ds$. $x(t) - y(t) = \int_{t_0}^t (f(x(s),s) - f(y(s),s))\, ds$. Vezmeme $\sigma > 0$. Grafy $x|_{[t-\sigma]}, y|_{[t-\delta,t+\delta]}$ leží v δ-okolí (x_0, t_0).

$$\forall s \in [t - \sigma, t_0 + \sigma] : |f(x(s),s) - f(y(s),s)| \leq L \cdot |x(s) - y(x)|.$$

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(x(s),s) - f(y(s),s)| ds \leq \int_{t_0}^t L \cdot |x(s) - y(s)| ds, \qquad t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$$

$$\leq L \max_{s \in [t-\sigma, t+\sigma]} |x(s) - y(s)| \cdot \sigma$$

□

Důsledek
Jestliže f je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x a $(x_0, t_0) \in \Omega$, pak

$$\exists \delta > 0 \ \exists! x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n \text{ řešení DR s počáteční podmínkou } x(t_0) = x_0.$$

Důkaz
Peanova věta o jednoznačnosti. □

Tvrzení 1.6
Pokud $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ jsou spojité v Ω, $j \in [n]$, pak f je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x.

Důkaz

$$h(s) := f(x + \ s(y - x), t), s \in [0, 1], h(0) = f(x, t), h(1) = f(y, t).$$

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(s) ds = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + ? - ?) \cdot (y_j - x_j) ds$$

$$\forall (x_0, t_0) \in \Omega \ \exists \mathcal{U}(x_0) \ \exists \mathcal{U}(t_0) M = \overline{\mathcal{U}(x_0)} \times \overline{\mathcal{U}(t_0)} \subset \Omega,$$

M je kompaktní, tedy $\exists K > 0 \ \forall (x, t) \in M : \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq K$. Tedy

$$|h(1) - h(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |(x + s(y - x))| \cdot |y_i - x_i| ds \leq nK \cdot \max |y_i - x_i| \leq nK|x - y|.$$

□

2 Maximální řešení

Definice 2.1 (Prodloužení řešení, maximální řešení)
Řešení $(\tilde{x}, \tilde{I})$ je prodloužením řešení (x, I), jestliže $\tilde{I} \supset I$ a $\forall t \in I : x(t) - \tilde{x}()$.

Řešení je maximální, pokud neexistuje netriviální prodloužení.

Věta 2.1 (O maximálním prodloužení)
Každé řešení (x, I) má alespoň jedno maximální prodloužení.

Důkaz
Ať M je množina všech prodloužení (x, I). Řekněme, že $(\tilde{x}, \tilde{I}) \leq (\hat{x}, \hat{I})$ právě tehdy, když $(\hat{x}, \hat{I})$ je prodloužení $(\tilde{x}, \tilde{I})$.

Ať $N \subset M$ je řetězec (množina, na které je $\leq$ lineární). Označme $I_0 = \bigcup_{(\tilde{x}, \tilde{I}) \in N} \tilde{I}$ a definujme $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ z toho, že $t \in I_0 \implies \exists (\tilde{x}, \tilde{I}) \in N$, $t \in \tilde{I}$, jako $x(t) = \tilde{x}(t)$.

Z Zornova lemmatu pak vyplývá, že existuje maximální řešení. □

Lemma 2.2

(x, I) řeší DR, $I = (a, b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \infty$. Pak řešení x lze prodloužit za bod b, když zároveň

- *$b < \infty$;*
- *$\exists \lim_{t \to b} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$;*
- *$(x_0, b \in \Omega)$.*

Důkaz
„ $\implies$ “ zřejmě, „ $\impliedby$ “: Uvažujme DR s počáteční podmínkou $x(b) = x_0$. Dle Peanovy věty $\exists \tilde{x} : (b - \delta, b + \delta) \to \mathbb{R}^n$. $x_1(t) = x(t)$, pokud $t \in (a, b)$, $\tilde{x}(t)$ jinak. x_1 tedy splňuje DR na (a, b) a $(b, b + \delta)$. Zbývá ověřit, že $x_1'(b) = f(x_1(b), b)$:

- x_1 je spojitá v b, neboť $\lim_{t \to b^-} x_1(t) = x_0 = \lim_{t \to b^+} x_1(t) = \tilde{x}(t)$.
- $\exists \lim_{t \to b^-} x_1'(t) = \lim_{t \to b^-} f(x(t), t) = f(x(b), b) = f(x_0, b)$.
- $\exists \lim_{t \to b^+} x_1'(t) = \lim_{t \to b^+} f(\tilde{x}(t), t) = f(\tilde{x}(b), b) = f(x_0, b_0)$.

□

Věta 2.3 (O opuštění kompaktu)

Buď (x, I) maximální řešení DR. Nechť $K \subset \Omega$ kompaktní a $\exists t_0 : (x(t_0), t_0) \in K$. Pak $\exists t_1 > t_0$, $t_1 \in I$, že $(x(t_1), t_1) \in \Omega \setminus K$. $\exists t_2 \in I_2$, $t_2 < t_0$, že $(x(t_2), t_2) \in \Omega \setminus K$.

Důkaz
Pro spor předpokládejme, že $\forall t_1 > t_0, t_1 \in I : (x(t_1), t_1) \in K$. Podle předchozí věty stačí dokázat $b < \infty$ (kdyby ne, tak K není kompakt), $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \nearrow b$, $\{(x(t_k), t_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ vybereme konvergentní podposloupnost $(x(t_{k_n}), t_{k_n}) \to (x_0, t_0)$. Následně ověříme BC podmínku: víme $x(s) - x(t) = x'(\xi)(s-t), \xi \in (s,t)$, tedy

$$|x(s) - x(t)| \leq |x'(\xi)| \cdot |s-t| = |f(x(\xi), \xi)| \cdot |s-t| \leq C \cdot |s-t|.$$

Zřejmě $(x_0, b) \in K \subset \Omega$, protože z kompaktu se nedá vykonvergovat. □

3 Závislost řešení na počáteční podmínce

Definice 3.1

Buď f v Ω lokálně Lipschitzovská vzhledem k x_0. Řešící funkcí (DR) nazveme funkci $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n : (t, t_0, x_0) \mapsto x(t)$, kde x je maximální řešení odpovídající DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$.

Věta 3.1 (Granwallovo Lemma)

Nechť $g, w : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g(t), w(t) \geq 0$, $\forall t \in I_0$. *Nechť* $t_0 \in I, K \geq 0$ *a* $\forall t \in I : w(t) \leq K + \left|\int_{t_0}^{t} w(s)g(s)ds\right|$. *Potom*

$$w(t) \leq K \cdot \exp\left(\left|\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right|\right).$$

Důkaz
BÚNO $t > t_0$. Vezmeme $\varepsilon > 0$. Definujeme $\Phi(t) = K + \varepsilon + \int_{t_0}^{t} w(s)g(s)ds$. $\Phi'(t) = w(t) \cdot g(t)$.

$$\Phi'(t) \leq g(t)\left(K + \int_{t_0}^{t} w(s)g(s)ds\right) \leq g(t)\Phi(t), \qquad \forall t \in (t_0, \sup I).$$

$$\forall t \in (t_0, \sup I) : \Phi(t) \geq 0. \qquad \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq g(t), \qquad \int_{t_0}^{t} \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} ds \leq \int_{t_0}^{t} g(s)ds.$$

$$\Phi(t_0) = K + \varepsilon, \qquad \frac{\Phi(t)}{K+\varepsilon} \leq \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right),$$

$$\Phi(t) \leq (K+\varepsilon)\exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right) \qquad \forall \varepsilon > 0 \implies \Phi(t) \leq K \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right).$$

□

Důsledek
Nechť f je globálně L-lipschitzovská v první souřadnici. Nechť x a y jsou řešení DR na intervalu I s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Potom

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot e^{L \cdot |t - t_0|}.$$

Důkaz

$$x'(t) = f(x(t), t), \qquad y'(t) = f(y(t), t).$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds, \qquad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s) ds,$$

$$x(t) - y(t) = x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} (f(x(t), t) - f(y(s), s)) ds,$$

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \left| \int_{t_0}^{t} L \cdot (x(s) - y(s)) ds \right|,$$

Z Granwallova lemmatu potom $|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot \exp(L \cdot |t - t_0|)$. □

Věta 3.2

Buď G množina z definice řešící funkce, f lokálně lipschitzovská na G. Pak $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ otevřená a φ je spojitá v G.

Důkaz
Vezmeme $(t, t_0, x_0) \in G$. Buď x maximální řešení DR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. $\mathcal{D}_x \supset [t_0, t]$. BÚNO $t > t_0$.

$$K_\delta := \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} | s \in [t_0 - \delta, t + \delta], |y - x(s)| \leq \delta \right\}.$$

Vezmeme $\varepsilon > 0$. Vezmeme $y_0 \in \mathbb{R}^n, s_0 \in \mathbb{R}$, $|y_0 - x_0| < \varepsilon$, $|t_0 - s_0| < \varepsilon$. Definujeme y maximální řešení splňující $y(s_0) = y_0$. Co znamená, že $(\tilde{t}, s_0, y_0) \in G$? $\mathcal{D}_y \supset [s_0, \tilde{t}]$. Potřebujeme dokázat, že y je definováno na K_δ. Odhadneme

$$|y(s_0) - x(s_0)| \leq |y(s_0) - x(t_0)| + |x(t_0) - x(s_0)| = |y_0 - x_0| + |x(t_0) - x(s_0)| \leq \varepsilon + x_0 |t_0 - s_0| \leq \varepsilon \cdot (1 + c_0)$$

$$s \geq t_0 : |x(s) - y(s)| \leq |x(s_0) - y(s_0)| e^{L |s - s_0|} \leq \varepsilon (1 + c_0) e^{L \cdot |s - s_0|}.$$

Máme, že $\forall s > t_0 : |x(s) - y(s)| \leq \frac{\delta}{2}$, tedy y neopustí K_δ přes hranici $\implies$ y existuje až do času $t + \delta_0$, tj. G je otevřená.

Nyní „Φ je spojitá“: $(t, t_0, x_0), (s, s_0, y_0) \in G$:

$$|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(s, s_0, y_0)| = |x(t) - y(s)| \leq |x(t) - x(s)| + |x(s) - y(s)| \leq c_0 |t - s| + |x(s_0) - y(s_0)| e^{L \cdot |s - s_0|} \leq T$$

□

Věta 3.3 (Věta o derivování řešení v počáteční podmínce?)

Buď f je třídy C^1 vzhledem k x, φ je řešící funkce diferenciální rovnice. Potom $\forall(t, t_0, x_0) \in G$ a $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, |w| = 1$, existuje derivace φ podle x_0 ve směru w v bodě (t, t_0, x_0), tj.

$$D_w\varphi(t, t_0, x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0)}{h}.$$

Označíme-li pro pevné (t_0, x_0): $x(t) := \varphi(t, t_0, x_0)$, $u(t) := D_w\varphi(t, t_0, x_0)$, pak platí

$$u'(t) = [\nabla_x f(x(t), t)]u(t), \qquad \textit{(tzv. rovnice ve variacích)}$$

$$u(t_0) = w.$$

Důkaz
Vezmeme $(x_0, t_0) \in \Omega$. Definujeme $x(t) := \varphi(t, t_0, x_0)$, $y_h(t) := \varphi(t, t_0, x_0 + hw)$. To znamená, že

$$\eta_h(x) = \frac{\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0)}{h} - u(t) = \frac{y_h(t) - x(t)}{h} - u(t).$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds, \qquad y_h(t) = x_0 + h \cdot w + \int_{t_0}^{t} f(y_h(s), s)ds.$$

$$y_h(t) - x(t) = h \cdot w + \int_{t_0}^{t} f(y_h(s), s) - f(x(s), s)ds.$$

Pro nějaké s, h $g(\vartheta) = f(x(s) + \vartheta(y_h(s) - x(s)), s)$, tedy $g(1) = f(y_h(s), s)$, $g(0) = f(x(s), s)$,

$$y_h(t) - x(t) = h \cdot w + \int_{t_0}^{t} g(1) - g(0)ds = h \cdot w + \int_{t_0}^{t} \int_0^1 g'(\vartheta)d\vartheta ds =$$

$$= h \cdot w + \int_{t_0}^{t} \int_0^1 \nabla_x f(x(u) + \vartheta(y_h(s) - x(s)), s) \cdot (y_h(s) - x(s))d\vartheta ds.$$

Buď $u(t)$ maximální řešení $u'(t) = [\nabla_x f(x(t), t)]u(t), u(t_0) = w$. Tj.

$$u(t) = w + \int_{t_0}^{t} \nabla_x f(x(s), s)u(s)ds = w + \int_{t_0}^{t} \int_0^1 \nabla_x f(x(s), s)u(s)d\vartheta ds.$$

Odečteme od předcházejícího a dostaneme

$$\eta_h(x) = \int_{t_0}^{t} [\nabla_x f(x(s), s)]\eta_h(s)ds + \int_{t_0}^{t} \int_0^1 \left[\nabla_x f(x(s) + \vartheta(y_h(s) - x(s))) - \nabla_x f(x(s), s)\right](y_h(s) - x(s))d\vartheta$$

$$|\eta_h(t)| \leq \int_{t_0}^{t} C \cdot |\eta_h(s)|ds + \max_{\substack{s \in [t_0, t], \\ \vartheta \in [0,1]}} |\nabla_x f(x(s) + \vartheta(y_n(s) - x(s)), s) - \nabla_x f(x(s), s)| \cdot \int_{t_0}^{t} e^{L \cdot s - t_0} ds.$$

Z důsledku předpředchozí věty

$$|y_h(s) - x(s)| \leq |y_h(t_0) - x(t_0)|e^{L \cdot |s - t_0|} = |hw|e^{L \cdot |s - t_0|} = |h|e^{L \cdot |s - t_0|}.$$

$$|\eta_h(t)| \leq K_h \cdot C_2 + \int_{t_0}^{t} C \cdot (\eta_h(s))ds,$$

kde $K_h \to 0$. Z G. lemmatu pak plyne $|\eta_h(t) \leq K_n \cdot C_2 \cdot \exp[C \cdot |t - t_0|]| \implies \lim_{h \to 0} \eta_h(t) = 0$. $\square$

4 Lineární ODR

Definice 4.1 (Lineární ODR)

$x' = A(t)x + b(t)$, $A : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ spojité funkce.

Věta 4.1

Nechť $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pak existuje právě jedno maximální řešení x (LODR) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. Funkce x je definovaná na (α, β).

Důkaz

Stačí dokázat, že x je definováno na celém (α, β). Předpokládejme, že x je definované na (a, b), BÚNO $b < \beta$, $t_0 \in [a, b]$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + f(s)]\, ds,$$

$$|x(t)| \leq |x_0| + \max_{s \in [t_0, f]} |A(s)| \int_{t_0}^{t} |x(s)| ds + \max_{s \in [t_0, b]} |f(s)| \cdot |t - t_0|.$$

Z G. lemmatu plyne $|x(t)| \leq (|x_0| + \max_{s \in [t_0, b]} |f_s| \cdot |f - t_0|) e^{\max_{s \in [t_0, b]} |A(s)| \cdot |f - t_0|}$. Pak na intervalu (t_0, b) x neopustí nějaký kompakt. □

Definice 4.2 (Homogenní rovnice)

LODR nazveme homogenní, pokud $b \equiv 0$, tedy $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$.

Věta 4.2

Množina řešení H je vektorový prostor dimenze n.

Důkaz

Součet řešení je řešení zřejmě. Stejně tak násobek. Dimenze n se dokazuje tak, že vezmeme bod a řešení, která mají každé v tomto bodě jednu funkci 1 a ostatní 0. To jsou zřejmě LN řešení a dá se z nich složit libovolné jiné, protože máme jednoznačnost řešení s konkrétní počáteční podmínkou. Takže další řešení poskládáme z těchto. □

Definice 4.3 (Fundamentální řešení)

Fundamentálním řešením homogenní LODR nazveme každou bázi prostoru řešení. Budeme jej značit

$$\Phi(t) = (\varphi(t), \ldots, \varphi(t)).$$

Poznámka

Zřejmě $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.

Definice 4.4 (Wronského determinant (Wronskián))

$$W(t) = \det \Phi(t).$$

Věta 4.3 (Liouvilleova věta)

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s) ds\right).$$

Důkaz

Chceme dokázat, že $W'(t) = W(t) \cdot (\operatorname{tr} A(t))$. Rozepsáním. □

Věta 4.4 (Variace konstant)

Nechť $x' = A(t)x + b(t)$, $A : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ spojité, je LODR, $\Phi(t)$ fundamentální matice homogenní rovnice $x' = A(t)x$. Potom řešení LODR s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$) je dáno předpisem

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s) ds.$$

Poznámka

Když budeme hledat řešení LODR ve tvaru $\varphi(t) \cdot C(t)$, dostaneme se k tomuto vzorci.

Důkaz

Zderivujeme a s použitím $\Phi'(t) = A(t) \cdot \Phi(t)$:

$$x'(t) = \Phi(t) \cdot \Phi'(t_0) \cdot x_0 + \Phi'(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) \cdot f(s) ds + \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t) \cdot b(t) =$$

$$= A(t) \left(\Phi(t)\Phi^{-1}(t)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) \cdot f(s) ds\right) + b(t) = A(t)x + b(t).$$

Navíc zjevně $x(t_0) = x_0$. □

5 Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Definice 5.1 (Lineární rovnice s konstantními koeficienty (LODRKK))

$$x' = Ax + b(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n \text{ spojitá.}$$

Poznámka
Ukážeme, že pro $n \in \mathbb{N}$ je řešení homogenní soustavy LODRKK se dá napsat ve tvaru $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$.

Definice 5.2 (Norma matice)

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}. ||A|| := \sup \{|Ax| \mid x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}.$$

Věta 5.1

Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak

1. $||A|| \geq 0$, $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
2. $||\lambda A|| = |\lambda| \cdot ||A||$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$;
4. $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$;
5. $|Av| \leq ||A|| \cdot |v|$, $v \in \mathbb{R}^n$;
6. $|Av| \geq \frac{|v|}{||A^{-1}||}$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, *je-li A regulární.*

Důkaz
1.–3. za domácí úkol. V 5. se pouze vezme norma, 2. a definice. Pro 4. dvakrát použijeme 5. Nakonec u 6. použijeme $y = Av$, tedy $v = A^{-1}y$, tím dostaneme samé tvrzení jako v 5.. □

Věta 5.2

Funkce $U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k, t \in \mathbb{R}$ je fundamentální matice homogenního řešení LODRKK, $U(\mathbf{o}) = I_0$.

Důkaz
Za prvé řada konverguje, neboť

$$||\frac{1}{k!}t^k A^k|| \leq \frac{|t|^k}{k!}||A||^k \wedge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!}||A^k||K.$$

Za druhé $[U(t)]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k [A^k]_{ij}$ a poloměr konvergence je ∞, můžeme tedy derivovat člen po členu:

$$\frac{d}{dt}[U(t)]_{ij} = \ldots = A \cdot U(t).$$

□

Věta 5.3

Pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. Potom platí:

- $e^{\lambda I} = e^{\lambda} \cdot I$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- *pokud* $AB = BA$, *pak* $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$;
- $e^{C^{-1}AC} = C^{-1} e^A C$, *pokud je* C *regulární;*
- $e^{-A} = \left(e^A\right)^{-1}$.

Důkaz
Rozepsáním? TODO □