Organizační úvod

Poznámka
Zkouška bude snad ústní.

Úvod

Věta 0.1 (Lebesgueova míra)

Existuje právě jedna borelovská míra λ^n v $\mathbb{R}^n$ taková, že

$$\lambda^n \left(\mathrm{X}_{i=1}^n [a_i, b_i] \right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i), -\infty < a_i \le b_i < \infty, 1 \le i \le n.$$

Poznámka
Zúplněnou σ-algebru značíme B_0^n a platí $B^n \subsetneq B_0^n$ (pro $n \geq 2$ jednoduché, pro $n = 1$ možná někdy příště).

λ^n je translačně a rotačně invariantní (posunutím a otočením se nezmění).

λ^n je σ-konečná.

λ^n je regulární (můžeme její hodnotu na množině aproximovat jejími hodnotami na otevřené nadmnožině a uzavřené podmnožině[a]).

[a]
$$\forall E \in B_0^n\ \forall \varepsilon > 0\ \exists F \subset E \subset G, F \text{ uzavřená}, G \text{ otevřená}, \lambda^n (G \setminus F) < \varepsilon.$$

Definice 0.1

$\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ je pramíra (premeasure) na algebře $\mathcal{A}$ podmnožin X, jestliže:

$$\tilde{\mu}(\emptyset) = 0,$$

$$A_i \in \mathcal{A}, \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}, A_i \text{ po dvou disjunktní} \implies \tilde{m}u \left(\bigcup_i A_i \right) = \sum_i \tilde{\mu}(A_i).$$

Věta 0.2 (Hahn-Kolmogorov)

Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře $\mathcal{A}$. Pak existuje míra μ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\mu = \tilde{\mu}$ na $\mathcal{A}$. Je-li $\tilde{\mu}$ σ-konečná, je μ určená jednoznačně.

1 Konstrukce Lebesgueovy míry z vnější míry

Definice 1.1 (Vnější míra (outer measure))

Nechť $X \neq \emptyset$. Funkce $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ je vnější míra na X, jestliže:

$$\mu^*(\emptyset) = 0,$$

$$A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B), \text{ (monotonie)}$$

$$A_i \subset X \, (i \in \mathbb{N}) \implies \mu^* \left(\bigcup_i A_i \right) \leq \sum_i \mu^*(A_i). \text{ (spočetná subadivita)}$$

Například

$$\mu^* \equiv 0,$$

$$\mu^* = \delta_x, x \in X,$$

$$\mu^*(A) = \operatorname{card} A,$$

$$\mu * (A) := 0, A = \emptyset, \mu * (A) := 1, A \neq \emptyset,$$

$$X = \mathbb{R}, \lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_i |I_i|, A \subset \bigcup_i I_i, I_i \text{ otevřené intervaly} \right\}$$

Definice 1.2 (Měřitelnost vůči vnější míře)

Řekneme, že množina $A \subset X$ je μ^*-měřitelná, jestliže

$$\forall T \subset X : \mu^*(T) = \mu * (T \cap A) + \mu^*(T \setminus A).(*)$$

Značíme $\mathcal{A}_{\mu^*} := \{A \subset X | A \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná}\}$.

Poznámka

Ať μ^* je vnější míra na X, $Y \subset X$. Pak restrikce $\mu^*|_Y : A \mapsto \mu^*(A \cap Y)$ je vnější míra a platí:

$$\mathcal{A}_{\mu^*} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}|_Y$$

Důkaz

$$A \in \mathcal{A}_{\mu^*} : \mu^*|_Y(T) = \mu^*(T \cap Y) = \mu^*(T \cap Y \cap A) + \mu^*((T \cap Y) \setminus A) =$$
$$= \mu^*|_Y \, (T \cap A) + \mu^*|_Y(T \setminus A).$$

□

Věta 1.1 (Caratheodory)

$\mathcal{A}_{\mu^*}$ je σ-algebra na X a $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ je míra. Prostor $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ je úplný.

Důkaz

$\emptyset \in \mathcal{A}_\mu^*$ je zřejmé. Uzavřenost na komplement je také snadná, z definice $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Místo sjednocení ukážeme uzavřenost na konečný průnik: Víme $T \subset X : \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$, $\mu^*(T \cap A) = \mu^*(T \cup A \cup B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B)$ a $\mu^*(T \setminus (A \cap B)) = \mu^*((T \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu^*((T \setminus (A \cap B)) \setminus A) = \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A)$.

Tedy $\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \setminus (A \cap B))$. Tudíž $\mathcal{A}_{\mu^*}$ je algebra.

Nyní chceme ukázat, že μ^* je σ-aditivní na $\mathcal{A}_{\mu^*}$: Buďte $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ po dvou disjunktní. Volbou $T = A_1 \cup A_2$ dostaneme $\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \implies \mu^*$ je konečně aditivní na $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i) = \lim_{n \to \infty} \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \leq \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

Opačná nerovnost plyne ze spočetné subaditivity. To znamená, že

$$\mu^* \left(\bigcup_i A_i \right) = \sum_i \mu^* \left(A_i \right), A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*},$$

po dvou disjunktní.

$\mathcal{A}_{\mu^*}$ je uzavřená na disjunktní spočetné sjednocení: $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, po dvou disjunktní, $T \subset X$.

$$\mu^*(T) = \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) + \mu^* \left(T \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \geq \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + (\mu^*|_T) \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = TODO$$

Limitním přechodem $n \to \infty$ dostaneme

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu^*|_T \right) (A_i) = \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \right) (\mu^*|_T) \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

Z tohoto všeho plyne, že $\mu = \mu^*|_{A_{\mu^*}}$ je míra na σ-algebře $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Zbývá už jen úplnost:

$$\mu^*(A) = 0, T \subset X \implies \mu^*(T) \geq \mu^*(T \setminus A) = \underbrace{\mu^*(T \cap A)}_{=0} + \mu^*(T \setminus A) \implies A \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

$\square$

TODO!!!

Věta 1.2 (Regularita Lebesgueovy míry)

Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$. *Je ekvivalentní:*

1. $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$,
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists F \subset E \subset G$, *F uzavřená, G otevřená,* $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$,
3. $\exists A \subset E \subset B$, $A, B \in \mathcal{B}^n$, $\lambda^n(B \setminus A) = 0$,
4. $E \in \mathcal{B}_0^n$.

Důkaz

$1 \implies 2$: Mějme $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$, $\varepsilon > 0$. Nechť nejprve $\lambda^{n*}(E) < \infty$. Pak $\exists I_i \in O_n$, $E \subset \bigcup_i I_i$, $\sum_i v(I_i) < \lambda^{n*}(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. Položme $G := \bigcup_i I_i$ (otevřená), $E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Je-li $\lambda^{n*}(E) = \infty$, pak ze σ-konečnosti je $E = \bigcup_m E_m$, $E_m := E \cap [-m, m]^n$. $\lambda^{n*}(E_m) < \infty \implies \exists G_m$ otevřená, $E_m \subset G_m$, $\lambda^n(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$. $G := \bigcup_m G_m$ otevřené, $E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus E) \leq \sum_m \lambda^n(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$E^c \in \mathcal{A}_{\lambda^{m*}} \implies \exists H$ otevřená, $E^c \subset H$, $\lambda^n(H \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. $F := H^c$ uzavřená, $F \subset E$, $\lambda^n(E \setminus F) = \lambda^n(E \setminus H^c) = \lambda^n(H \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. TODO

$2 \implies 3$: Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ splňuje 2.

$$\forall j \in \mathbb{N}\ \exists F_j \subset E \subset G_j, F_j \text{ uzavřená}, G_j \text{ uzavřená}, \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}.$$

Položme $A := \bigcup_j F_j$, $B := \bigcap_j G_j$, $A, B \in \mathcal{B}^n$, $A \subset E \subset B$. $\lambda^n(B \setminus A) \leq \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}$ pro libovolné $j \in \mathbb{N}$, tedy $\lambda^n(B \setminus A) = 0$.

$3 \implies 4$: Jsou-li $A \subset E \subset B$ jako v 3, pak $B \setminus A$ je λ^n-nulová množina, a tedy $E \in \mathcal{B}_0^n$.

$4 \implies 1$: $\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ obsahuje $\mathcal{B}^n$ a nulové množiny, tedy obsahuje $\mathcal{B}_0^n$. □

Věta 1.3 (Luzinova (běžně bývá obecnější))

Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *lebesgueovsky měřitelná. Buď* $\varepsilon > 0$. *Pak existuje* $G \subset \mathbb{R}^n$ *otevřená taková, že* $\lambda^n(G) < \varepsilon$ *a restrikce* $f|_{G^c}$ *je spojitá.*

Důkaz
Buď $U_1, U_2, \ldots$ posloupnost všech otevřených intervalů s racionálními koncovými body. f je lebesgueovsky měřitelná, tedy $\forall j, f^{-1}(U_1) \in \mathcal{B}_0^n$. Podle regularity pak $\exists F_j \subset f^{-1}(U_j) \subset G_j$, F_j uzavřená, G_j otevřená, $\lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$. Položme $G := \bigcup_j (G_j \setminus F_j)$. Zřejmě G je otevřená, $\lambda^n(G) \leq \sum_j \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \varepsilon$.

Pro restrikci $g := F|_{G^c}$ platí:

$$g^{-1}(U_j) = \{x \in G^c : f(x) \in U_j\} = f^{-1}(U_j) \cap G^c = G_j \cap G^c, j \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě $U \subset \mathbb{R}$ otevřená $\implies$ $U = \cup_{U_j \subset U} U_j$, tedy $g^{-1}(U) = \bigcup_{U_j \in U} g^{-1}(U_j)$ otevřená množina v G^c, tedy g je spojitá na G^c. $\square$

Poznámka
Obecně nelze požadovat $\lambda^n(G) = 0$. Např. charakteristická funkce diskontinua kladné míry (podobně jako Cantorovo diskontinuum, ale nenulové míry), které dostaneme tak, že z prostředků intervalů v i-tém kroku vždy odebereme intervaly délky a_i tak, aby $a_1 + 2a_2 + 4a_3 + \ldots < 1$. ($G$ z minulé věty pak bude sjednocení malých okolíček krajních bodů odebíraných intervalů.)

2 Regularita borelovských měr

Definice 2.1 (Regulární borelovská míra)

Borelovská míra μ na topologickém (metrickém) prostoru X je regulární, jestliže $\forall B \in \mathcal{B}(X) : \mu(B) = \inf\{\mu(G) | B \subset G, G \text{ otevřená}\}$.

Poznámka
1) Často se hovoří o vnější regularitě (outer regular measure). 2) Pro konečné míry: μ je regulární $\implies$ $\forall B \in \mathcal{B} : \mu(B) = \sup\{\mu(F) | F \subset B, F \text{ uzavřená}\}$.

Věta 2.1

Každá konečná borelovská míra na metrickém prostoru je regulární.

Důkaz
(X, ϱ) metrický prostor, μ borelovská míra na X, $\mu(X) < \infty$. Označme

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}(X) |\ \varepsilon > 0\ \exists F \subset B \subset G, F \text{ uzavřená}, G \text{ otevřená}, \mu(G \setminus F) < \varepsilon\} .$$

Ukážeme, že $\mathcal{D} := \mathcal{B}(X)$. Nejprve $\mathcal{D}$ obsahuje všechny množiny: $F \subset X$ uzavřená, $F_{<\varepsilon} := \{x \in X |\ \varrho(x, F) < \varepsilon\}$ (otevřená). Zřejmě $F_{<\frac{1}{j}} \searrow F$, $j \to \infty$ z uzavřenosti F. μ konečna $\implies$ (spojitost míry) $\mu F_{<\frac{1}{j}} \to \mu(F)$.

$\mathcal{D}$ je σ-algebra: $\emptyset \in \mathcal{D}$, $D \in \mathcal{D} \implies D^c \in \mathcal{D}$:

$$F \subset D \subset G, \mu(G \setminus F) < \varepsilon \implies G^c \subset D^c \subset F^c, \mu(F^c \setminus G^c) < \varepsilon.$$

$D_i \in \mathcal{D} \implies \bigcup_i D_i \in \mathcal{D}$:

$$\exists F_i \subset D_i \subset G_i, \mu(G_i \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

$$\mathit{TODO}!$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} F_i \subset \cup_{i=1}^{\infty} D_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i, N \ \in \mathbb{N}.$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \setminus \bigcup_{i=1}^{?} F_i$$

□

Poznámka
σ-konečné míry nemusí být regulární, viz prostor spočetně přímek procházejících počátkem v $\mathbb{R}^2$.

Definice 2.2 (Těsnost (= vnitřní regularita))

Borelovská míra μ na metrickém (topologickém) prostoru X je těsná (= tight), jestliže $\forall B \in \mathcal{B}(X) : \mu(B) = \sup \{\mu(K) | K \subset B \text{ kompaktní}\}$.

Poznámka
μ je Radonova míra, jestliže je těsná a konečná na kompaktech.

Pokud μ je konečná a těsná, pak už je *mu* regulární.

Jestliže μ je konečná a regulární a $\mu(X) = \sup \{\mu(K) | K \subset X \text{ kompaktní}\}$, pak μ je těsná.

Věta 2.2

Pokud μ je konečná borelovská míra na úplném separabilním metrickém prostoru, potom už je těsná.

Důkaz

Stačí ukázat $\mu(X) = \sup\{\mu(K)|K \subset X \text{ kompaktní}\}$: $S = \{x_1, x_2, \dots\} \subset X$ hustá spočetná (ze separability). $\forall n \in \mathbb{N} : \bigcup_i \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i) = X$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak $\forall n\ \exists k_n$: $\mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ (ze spojitosti míry).

Definujeme $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)$ ($\in \mathcal{B}(X)$). A je totálně omezená (tzn. $\forall \varepsilon > 0\ \exists F \subset A$ kompaktní tak, že $A \subset \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x)$). $\overline{A}$ je totálně omezená a uzavřená $\implies$ $\overline{A}$ je úplný MP (+ totálně omezený), tedy $\overline{A}$ je kompaktní.

$$\mu(X \setminus \overline{A}) \leq \mu(X \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_i)\right)\right).$$

□

3 Věta o rozšíření míry

Věta 3.1 (Hahn-Komogorov)

Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ $\implies$ existuje míra μ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\mu = \tilde{\mu}$ ne $\mathcal{A}$. Je-li $\tilde{\mu}$ σ-konečná, je μ určena jednoznačně.

Důkaz

Pro $E \subset X$ položme $\mu^*(E) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i) | A_i \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}$. Ověříme, že μ^* je vnější míra.

$\forall A \in \mathcal{A} : \mu^*(A) = \tilde{\mu}(A)$. Zřejmě $\mu^*(A) \leq \tilde{\mu}(A)$, jelikož můžeme pokrýt A množinami $A, \emptyset, \emptyset, \dots$. Pro $\geq$ mějme $A \subset \bigcup_i A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$. $B_1 := A_1 \cap A$, $B_2 := (A_2 \cap A) \setminus B_1$, ... O nich víme, že $A = \bigcup_i B_i$, B_i po dvou disjunktní, $B_i \in \mathcal{A}$. $\tilde{\mu}(A) = \sum_i \tilde{\mu}(B_i) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i)$, tedy z definice infima $\tilde{\mu}(A) \leq \inf_{A_i} \sum_i \tilde{\mu}(A_i) = \mu^*(A)$.

Zbývá ukázat, že $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$. TODO.

Jednoznačnost: $\mathcal{A}$ uzavřená na konečné průniky, $\tilde{\mu}$ je σ-konečná $\implies$ $\exists A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \nearrow X, \tilde{\mu}(A_n) < \infty$ $\implies$ μ je jednoznačně určena (věta o jednoznačnosti míry, TMI1). □

Poznámka (Zobecnění příkladu z TMI1)
$E = \mathsf{X}_{i=1}^{\infty} E_i$, E_i úplné separabilní metrické prostory (např. $E_i = \mathbb{R}$), $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$ ... $E_I = E_i$, E, E_I metrické prostory. $\pi_I : E \to E_I$ kanonická projekce. A následující věta:

Věta 3.2 (Daniell-Koleuogorov)

E_i úplné separabilní metrické prostory, $i \in \mathbb{N}$. Nechť pro každou $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$ existuje borelovská pravděpodobnostní míra μ_I na E_I. A nechť je splněna projektivní vlastnost:

$$\emptyset \neq I \subset J \subset \mathbb{N} \text{ konečná}, \forall B \in \mathcal{B}(E_I) : \mu_I(B) = \mu_J\left(\left(\pi_I^J\right)^{-1}(B)\right),$$

pak $\exists!$ borelovská míra μ na $E = \mathsf{X}_{i=1}^{\infty} E_i$ taková, že $\forall \emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$ konečná, $\forall B \in \mathcal{B}(E_I)$: $\mu(\pi_I^{-1}(B) = \mu_I(B))$.

Lemma 3.3

$$1) x_n, x \in E : x_n \to x \Leftrightarrow x_n(i) \to x(i), i \in \mathbb{N},$$
$$x_n, x \in E_I : x_n \to x \Leftrightarrow x_n(i) \to x(i), i \in I$$

2) π_I, π_I^J jsou spojitá zobrazení.

3) $\forall I \in ?_f$: E_I je úplný separabilní MP.

4) $\mathcal{B}(E_I) = \otimes_{i\in I}\mathcal{B}(E_i)$.

Důkaz
1 jsme nedokazovali, 2 a 3 jsou triviální.

$$4) \otimes_{i\in I} \mathcal{B}(E_i) = \sigma\left\{\mathsf{X}_{i\in I} B_i | B_i \in \mathcal{B}(E_i)\right\} = \sigma\left\{\mathsf{X}_{i\in I} | G_i \subset E_i \text{ otevřené}\right\},$$

tedy $\mathsf{X}_{i\in I} G_i$ je otevřená v $E_I \implies \otimes_{i\in I}\mathcal{B}(E_i) \subset \mathcal{B}(E_I)$. Naopak $U \subset E_I$ otevřená $\implies$ $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, kde $U_n = \mathsf{X}\, G_i^n$, $G_i^n \subset E_i$ otevřená $\implies \mathcal{B}(E_I) \subset \otimes_{i\in I}\mathcal{B}(E_i)$. □

Věta 3.4 (Daniell-Kolmogorov)

E_i úplné separabilní metrické prostory $i \in \mathbb{N}$. Nechť pro každou $I \in ?_f$ existuje borelovská pravděpodobnostní míra μ_I na E_I. Nechť $I \subset J, I, J \in ?_f \implies \mu_I = \mu_J(\pi_I^J)^{-1}$. Pak existuje právě jedna borelovská pravděpodobnostní míra μ na E taková, že

$$\forall I \in ?_f : \mu_I = \mu(\pi_I)^{-1}.$$

Důkaz
TODO!

TODO! □

4 Charakterizace Riemannovsky integrovatelných funkcí

Věta 4.1

Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *omezená. Pak*

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \textit{je spojitá v } \lambda^1\textit{-skoro všude na } (a, b).$$

Důkaz
$(\mathcal{D}_n)$ posloupnost zjemňujících se dělení intervalu $[a,b]$.

$$\mathcal{D}_n = \left\{a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_{k_n}^{(n)} = b\right\}, n \in \mathbb{N}, ||\mathcal{D}_n|| = \max_{1 \le i \le k_n} (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Označme $s_n(x) := \inf_{[x^{(n)}i-1, x_i^{(n)}} f$, $S_n(x) := \sup_{[x^{(n)}i-1, x_i^{(n)}} f$, $x \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$, $n \in \mathbb{N}$ a $S_n(x) := 0$, $S_n(x) := 0$ pro ostatní $x \in \mathbb{R}$. Toto jsou jednoduché měřitelné funkce.

Horní a dolní Riemannův součet splňuje

$$\underline{\int_a^b} f \overset{n\to\infty}{\leftarrow} s(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b s_n d\lambda^1, \overline{\int_a^b} f \overset{n\to\infty}{\leftarrow} S(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b S_n d\lambda^1.$$

$|f| \le M$, tedy $-M \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le f \le \ldots \le S_2 \le S_1 \le M$. Označme $f_1 := \lim_{n\to\infty} s_n$, $f_2 := \lim_{n\to\infty} S_n$ (bodové limity funkcí).

$$-M \quad \le s_n \searrow f_1 \le f \le f_2 \nwarrow S_n \le M, qquad f_1, f_2 \text{ měřitelné.}$$

Ze zobecněné Leviho věty $\int_a^b s_n d\lambda^1 \to \int_a^b f_1 d\lambda^1$, $\int_a^b S_n d\lambda^1 \to \int_a^b f_2 d\lambda^1$.

$\Longrightarrow$: Nechť $f \in R[a,b]$, tedy $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

$$\Longrightarrow \int_a^b f_1 d\lambda^1 = \int_a^b f_2 d\lambda^1 \Longrightarrow \int_a^b (f_2 - f_1) d\lambda^1 = 0 \Longrightarrow f_1 = f_2 \lambda^1\text{-s.v.}$$

$$N := \{x \in [a,b] | f_1(x) \ne f_2(x)\} \cup \left\{x_i^{(n)} | 0 \le i \le k_n, n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad \lambda^1(N) = 0.$$

Ukážeme, že f je spojitá ve všech bodech množiny $(a,b) \setminus N$: Buď $x \in (a,b) \setminus N$, $\varepsilon > 0$. Potom $f_1(x) = f_2(x) \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) - s_n(x) < \varepsilon$. I_n nechť je otevřený interval dělení $\mathcal{D}_n$, pro nějž $x \in I_n$. Pak

$$s_n(x) \le f(y) \le S_n(x), y \in I_n \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \le 2\varepsilon, y \in I_n \Longrightarrow f \text{ je spojitá v bodě } x.$$

$\Leftarrow$: Nechť $\lambda^1(\mathcal{D}) = 0$, kde $D := \{x \in (a,b) : f \text{ není spojitá v } x\}$. Ukážeme, že $S_n(x) - s_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} 0$

$$\Longrightarrow S(f, \mathcal{D}_n) - s(f, \mathcal{D}_n) \to 0 \Longrightarrow f \in R[a,b].$$

Nechť $x \in (a,b) \setminus \mathcal{D}$, $\varepsilon > 0$. Pak f je spojitá v bodě $x \Longrightarrow \exists \delta > 0$, $|y - x| < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Zvolme n_0 tak velké, aby $||\mathcal{D}_n|| < \delta$, $n \ge n_0$. Pak

$$S_n(x) - s_n(x) \le 2 \sup \{|f(y) - f(x)| : |y - x| < \delta\} < 2\varepsilon.$$

$\square$

5 Pokrývací věty

Poznámka (Úmluva)
Koulí se myslí uzavřená koule, $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n | ||y-x|| \leq r\}$, $r > 0$, $\operatorname{rad} B = r$, $t > 0 \ldots tB = B(x, t \cdot r)$.

Lemma 5.1 („5r“ covering)

Nechť $\mathcal{F}$ je systém koulí v $\mathbb{R}^n$ (uzavřené, nedegenerované), $\sup_{B\in\mathcal{F}}(\operatorname{rad} B) < \infty$. Pak existuje disjunktní podsystém $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ takový, že

$$\forall B \in \mathcal{F}\ \exists B' \in \mathcal{F}' : B \cap B' \neq \emptyset \wedge B \subset 5B.$$

Důsledek

$$\bigcup \mathcal{F} \subset \bigcup_{B'\in\mathcal{F}'} 5B'$$

Důkaz („5r“ covering)
Označme $R := \sup_{B\in\mathcal{F}} \operatorname{rad} B$. $\mathcal{F}_k := \left\{B \in \mathcal{F} | \operatorname{rad} B \in \left(\frac{R}{2^{k+1}}, \frac{R}{2^k}\right]\right\}$, $k = 0, 1, \ldots$ Dále definujeme indukcí systémy $\mathcal{B}_k$, $k = 0, 1, \ldots$: $\mathcal{B}_0$ libovolný maximální disjunktní podsystém $\mathcal{F}_0$. Máme-li $\mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_k$: $\mathcal{B}_{k+1}$ libovolný maximální disjunktní podsystém

$$\left\{B \in \mathcal{F}_{k+1} | \forall B' \in \mathcal{B}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k : B \bigcup B := \emptyset\right\},$$

$\mathcal{F}' := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k$ disjunktní podsystém $\mathcal{F}$.

Nyní už jen ověříme vztah ze znění: Nechť $B \in \mathcal{F}$, pak $B \in \mathcal{F}_k \implies \exists B' \in \mathcal{B}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$, $B \cap B' \neq \emptyset$ (z maximality). Dále víme, že $\frac{R}{2^{k+1}} < \operatorname{rad} B \leq \frac{R}{2^k}$ a $\frac{R}{2^{k+1}} < \operatorname{rad} B'$, tedy $\operatorname{rad} B < 2 \operatorname{rad} B'$. Navíc $B = B(x,r)$ a $B' = B(x', r')$, $r < 2r'$, $B \cap B' \neq \emptyset$, tedy $||x - x'|| \leq r + r'$, tj. $\forall y \in B : ||y - x'|| \leq ||y - x|| + ||x - x'|| \leq r + r + r' < 5r'$. □

Definice 5.1 (Vitaliovo pokrytí)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že systém uzavřených koulí $\mathcal{F}$ je Vitaliovým pokrytím (Vitaly Cover) množiny A, jestliže

$$\forall a \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{F} : a \in B, \operatorname{rad}\ B < \varepsilon.$$

Věta 5.2 (Vitaly Covering Theorem)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathcal{F}$ je Vitaliovo pokrytí A. Pak existuje disjuktní $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ takový, že $\lambda^n(A \setminus \bigcup \mathcal{F}') = 0$.

Důkaz
BÚNO nechť $\sup_{B\in\mathcal{F}}(\operatorname{rad} B) \leq 1$. „$5r$“ covering lemma nám pak říká, že $\exists \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ disjuktní takový, že platí

$$\forall B \in \mathcal{F}\ \exists B' \in \mathcal{F}' : B \cap B' \neq \emptyset \wedge B \subset 5B.$$

Ukážeme, že $\lambda^n(A \setminus \bigcup \mathcal{F}') = 0$. Označme $Z_r := (A \setminus \bigcup \mathcal{F}') \cap U_r(\mathbf{o})$, $\forall r > 0$. Ukážeme, že $\lambda^n(Z_r) = 0$.

Označme $\mathcal{F}'' := \{B' \in \mathcal{F}' | B' \cap U_r(\mathbf{o}) \neq \emptyset\}$ a $\mathcal{F}''_k := \left\{B' \in \mathcal{F}'' | \operatorname{rad} B' \in \left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]\right\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ $\mathcal{F}'$ je disjuktní, tudíž

$$\sum_{B'\in\mathcal{F}''} \lambda^n(B') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{B'\in\mathcal{F}''_k} \lambda^n(B') \leq \lambda^n(B(0, r+2)) < \infty$$

$\implies \mathcal{F}''_k$ je konečný $\forall k$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \sum_{k>\ k_0} \sum_{B'\in\mathcal{F}''_k} \lambda^n(B') < \varepsilon.$$

Zvolme pevně $z \in Z_r$. Zřejmě $z \notin \bigcup_{k=0}^{k_0} \bigcup_{B'\in\mathcal{F}''_k} B' =: K$ (kompakt). Z vlastnosti Vitaliova pokrytí pak:

$$\exists B \in \mathcal{F} : B \cap K = \emptyset, z \in B, B \subset U_r(0).$$

Z vlastnosti pokrytí F' zřejmě $B' \in \mathcal{F}''$, $B' \notin \bigcup_{k=0}^{k_0} \bigcup \mathcal{F}''_k$, tj. $z \in 5B' \implies Z_r \subset \bigcup_{k>k_0} \bigcup_{B'\in\mathcal{F}''_k} 5B' \implies \lambda^{n*}(Z_r) \leq \sum_{k>k_0} \sum_{B'\in\mathcal{F}''_k} \lambda^n(5B') < 5^n\varepsilon$. $\varepsilon \to 0$ nám dá $\lambda^n(Z_r) = 0$. □

Definice 5.2 (Lebesgueova hustota)

Pro $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ definujeme $\Theta^{n*}(A, a) = \limsup_{\varepsilon\to 0_+} \frac{\lambda^{n*}(A\cap B(a,\varepsilon))}{\lambda^n(B(a,\varepsilon))}$ (≤ 1) a $\Theta^n_*(A, a) = \liminf_{\varepsilon\to 0_+} \frac{\lambda^{n*}(A\cap B(a,\varepsilon))}{\lambda^n(B(a,\varepsilon))}$, tzv. horní a dolní hustota množiny A v a. Pokud $\Theta^{n*}(A, a) = \Theta^n_*(A, a)$, pak definujeme Lebesgueovu hustotu A v a vztahem $\Theta^n(A, a) = \Theta^{n*}(A, a)$.

Věta 5.3 (Lebesgueova o hustotě (Lebesgue Density Theorem))

Pokud $A \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná, potom $\Theta^n(A, \cdot) = \chi_A(\cdot)$ λ^n-skoro všude.

Důkaz
Stačí ukázast, že $\Theta^n(A, a) = 1$ pro λ^n-skoro všechna $a \in A$. BÚNO nechť A je omezená (obecně: $A \cap B(0, n)$, $n \to \infty$) TODO. □

TODO

Věta 5.4

Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ lebesgueovsky měřitelná a $f : A \to \mathbb{R}^n$ L-lipschitzovské, platí $\lambda^{n*}(f(A)) \leq L^n\lambda^n(A)$.

Důkaz
Je-li $A \subset B = B(x,r)$, pak $f(A) \subset f(b) \subset B(f(x), L \cdot r)$. $\implies \lambda^{n*}(f(A)) \leq L^n \lambda^n(B)$.

Ukážeme, že pro $N \subset \mathbb{R}^n$ nulovou (tj. $\lambda^n(N) = 0$) je $\lambda^n(f(N)) = 0$: N nulová $\implies$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists I_i$ otevřené kvádry, $N \subset \bigcup_i I_i$, $\sum_i \lambda^n(I_i) < \varepsilon$.

Můžeme zařídit, aby $\frac{r(I_i)}{R(I_i)} \geq \eta > 0$, $i \in \mathbb{N}$, kde $R(I)$ a $r(I)$ jsou poloměry opsané a vepsané koule I: Rozdělíme intervaly vůči delší straně.

Když B_i jsou koule opsané $\overline{I_i}$, pak $\lambda^n(B_i) \leq \eta^{-n}\lambda^n(I_i)$ $(B_i' \subset I_i \subset B_i \ldots \lambda^n(I_i) > \lambda^n(B_i') \geq \eta^n \lambda^n\ (B_i))$.

$$\lambda^{n*}(f(N)) \leq \lambda^{n*}(\bigcup_i f(I_i)) \leq \lambda^{n*}(\bigcup_i f(B_i)) \leq \sum_i \lambda^{n*}(fB_i) \leq L^n \sum_i \lambda^n(B_i) \leq$$
$$\leq \left(\frac{L}{\eta}\right)^n \sum_i \lambda^n(I_i) < \left(\frac{L}{\eta}\right)^n \varepsilon.$$
$$\varepsilon \to 0 \ldots \lambda^{n*}(f(N)) = 0.$$

$A \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná, $\varepsilon > 0$, BÚNO nechť $\lambda^n(A) < \infty$ (jinak je nerovnost triviálni). λ^n regulární $\implies$ $\exists G \supset A$ otevřená, že $\lambda^n(G) < \lambda^n(A) + \varepsilon$. $\mathcal{F} := \{B \text{ uzavřená koule} | B \subset G\}$ Vitaliovo pokrytí $G \implies B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$ disjunktní, $\lambda^n(G \setminus \bigcup_i B_i) = 0$.

$$\lambda^{n*}(f(A)) \leq \lambda^{n*}(f(G)) \leq \lambda^{n*}(\bigcup_i f(B_i) \cup f(N)) \leq \sum_i \lambda^{n*}(f(B_i)) + \lambda^{n*}(f(N)) \leq$$
$$\leq L^n \sum_i \lambda^n(B_i) = L^n \lambda^n(G) < L^n \lambda^n(G) < L^n \lambda^n(A) + L^n \varepsilon \to L^n \lambda^n(A).$$

□

Definice 5.3 (Funkcionální norma)

Pro $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineární zobrazení, definujeme $||L|| := \sup_{||u|| \leq 1} ||Lu||$.

Poznámka
Označme $\delta(L) := \inf_{||u||=1} ||Lu||$, L regulární $\Leftrightarrow \delta(L) > 0$. Tedy platí

$$\delta(L)||u|| \leq ||Lu|| \leq ||L|| \cdot ||u||, u \in \mathbb{R}^n.$$

Tvrzení 5.5

$L, M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dvě regulární lineární zobrazení. Nechť existuje $\gamma > 0$ takové, že $\forall u \in \mathbb{R}^n$: $||Lu|| \leq \gamma ||Mu||$. Pak $|\det L| \leq \gamma^n |\det M|$.

Důkaz
a) Nechť $M = \mathrm{id}$. Z předpokladů plyne, že pro každou kouli $B = B(O,R)$ je $L(B) \subset \gamma B$, tedy

$$|\det L|\lambda^n(B) = \lambda^n(L(B)) \leq \gamma^n \lambda^n(B) \implies |\det L| \leq \gamma^n.$$

b) Pro M obecné: $(v = Mu)$,

$$||LM^{-1}v|| \leq \gamma ||v||, v \in \mathbb{R}^n \implies |\det LM^{-1}| \leq \gamma^n \implies |\det L| \leq \gamma^n |\det M|.$$

□

Důkaz (Věty o substituci)
Ať je dáno $\varepsilon > 0$. $\forall x \in \mathcal{U}\ \exists r_x > 0\ \forall y \in B(x, r_x)$:

$$1. ||Dg(y) - Dg(x)|| < \varepsilon \cdot \delta(Dg(x)) \qquad \text{(ze spojitosti diferenciálu } (Dg(\cdot))),$$

$$2. ||g(y) - g(x) - Dg(x)(y-x)|| < \varepsilon \cdot \delta(Dg(x))||y-x|| \qquad \text{(ze spojitosti diferenciálu } (Dg(x))).$$

Z $\delta(L)||u|| \leq ||Lu|| \leq ||L|| \cdot ||u||$ je

$$1.' ||Dg(y)u - Dg(x)u|| < \varepsilon \cdot ||Dg(x)u||, \qquad u \in \mathbb{R}^n,$$

$$2.' ||g(y) - g(x) - Dg(x)(y-x)|| < \varepsilon \cdot ||Dg(x))(y-x)||.$$

$\exists \{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathcal{U}$ (spočetná) taková, že $\mathcal{U} = \bigcup_i B(x_i, r_{x_i})$. (Neboť existují K_j kompaktní, které $K_j \nearrow \mathcal{U}$.) $B_i := B(x_i, r_{x_i})$, $L_i = Dg(x_i)$, $i \in \mathbb{N}$.

$$1.' \implies 1.''(1-\varepsilon)||L_i u|| \leq ||Dg(x)u|| \leq (1+\varepsilon)||L_i u||, u \in \mathbb{R}^n, x \in B_i, i \in \mathbb{N}.$$

Existuje měřitelný rozklad $U = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} E_{i,j}$ tak, že:

$$(a) E_{i,j} \subset B_i, \qquad (b) \operatorname{diam} E_{i,j} < \frac{1}{j}, \qquad (c) \forall x \in E_{i,j} : r_x > \frac{1}{j}.$$

$$\implies \forall x, y \in E_{i,j} : ||g(y) - g(x)|| \overset{2.'}{\leq} (1+\varepsilon)||Dg(x)(y-x)|| \overset{1''}{\leq} (1+\varepsilon)^2 ||L_i(y-x)||,$$

$$||g(y) - g(x)|| \geq (1-\varepsilon)||Dg(x)(y-x) \geq (1-\varepsilon)^2 ||L_i(y-x)||.$$

$\implies$ zobrazení $g \circ L_i^{-1} : L_i(\mathcal{U}) \to g(\mathcal{U})$ je $(1+\varepsilon)^2$-lipschitzovské, stejně jako zobrazení $L_i \circ g^{-1} : g(\mathcal{U}) \to L_i(\mathcal{U})$ je $(1-\varepsilon)^{-2}$-lipschitzovské. Označme $\eta := \max\{(1+\varepsilon)^2, (1-\varepsilon)^{-2}\}$.

$$\lambda^n(g(A)) = \lambda^n(g(\bigcup_{i,j} E_{i,j})) = \lambda^n(\bigcup_{i,j} g(E_{i,j})) = \sum_{i,j} \lambda^n(g(E_{i,j})) \leq \eta^n \sum_{i,j} \lambda^n(L_i(E_{i,j})) \overset{\text{TMI1}}{=}$$

$$= \eta^n \sum_{i,j} |\det L_i| \lambda^n(E_{i,j}) = \eta^n \sum_{i,j} \int_{E_{i,j}} |\det L_i| dx \leq \eta^{2n} \sum_{i,j} \int_{E_{i,j}} |Jg(x)| dx =$$

$$= \eta^{2n} \int_A |Jg(x)| dx.$$

Podobně

$$\lambda^n(g(A)) \geq \eta^{-n} \sum_{i,j} \lambda^n(L(E_{i,j})) \geq \eta^{-n} \sum_{i,j} \int_{E_{i,j}} \eta^{-n} |Jg(x)| dx = \eta^{-2n} \int_A |Jg(x)| dx.$$

Následně pro $\varepsilon \to 0$ je $\eta \to 1$ a $\lambda^n(g(A)) = \int_A |J(g(x))| dx$. □

6 Konvergence posloupnosti funkcí

Poznámka (Přípomenutí TMI1)
$f_n, f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ jsou měřitelné.

$$f_n \overset{\text{s. v.}}{\to} f \equiv \mu \{x | f_n(x) \not\to f(x)\} = 0.$$

$$f_n \overset{L^p}{\to} f \equiv ||f_n - f||_p \to 0.$$

$$f_n \overset{\mu}{\to} f \equiv \forall \varepsilon > 0 : \mu \{x | ||f_n(x) - f(x)|| \geq \varepsilon\} \to 0.$$

Tvrzení 6.1

$$f_n, f \in L^p(\mu), f_n \overset{L^p}{\to} f \implies f_n \overset{\mu}{\to} f.$$

$$\mu(X) < \infty : f_n \overset{s.\ v.}{\to} \implies f_n \overset{\mu}{\to} f.$$

$$\mu(X) < \infty : f_n \overset{\mu}{\to} f \implies \exists f_{n_k}, f_{n_k} \overset{s.\ v.}{\to} f.$$

$$\mu(X) < \infty : 1 \leq p < q \leq \infty \implies L^p(\mu) \supset L^q(\mu), f_n \overset{L^q}{\to} f \implies f_n \overset{L^p}{\to} f.$$

Věta 6.2 (Lebesgueova věta + upgrade)
$f_n \overset{s.\ v.}{\to} f$, $\exists g \in L^1(\mu), |f_n| \leq g\ \forall n \implies \int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

Dokonce $f_n \overset{L^1}{\to} f$.

Důkaz
BÚNO $f_n(x) \to f(x)$, $x \in X$ (například v těch bodech předefinujeme všechny funkce na 0).

$$g_n := \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, h_n := \sup\{f_n, f_{n+1}\}.$$

$$-g \leq g_n \leq f_n \leq h_n \leq g, \qquad g_n \nearrow f \swarrow h_n.$$

$$|f_n - f| \leq h_n - g_n \leq 2g \in L^1(\mu), \qquad h_n - g_n \searrow \overset{\text{Levi}}{\Longrightarrow} \int (h_n - g_n) d\mu \to 0 \implies$$

$$\implies \int |f_n - f| d\mu \to 0 \Leftrightarrow f_n \overset{L^1}{\to} f.$$

□

Poznámka
$f \in L^1(\mu) \implies \lim_{c\to\infty} \int_{x:|f(x)|\leq c} |f(x)| d\mu(x) = 0.$