# Organizační úvod

*Poznámka*
Jako vždycky, jen v implikacích u zkoušky budou i pojmy z předchozích semestrů.

# 1 Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

## 1.1 Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

**Definice 1.1**

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť máme funkce $f : J \to \mathbb{R}$ a $f_n : J \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$

- konverguje bodově k $f$ na $J$, pokud $\forall x \in J : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, neboli:
$$\forall x \in J\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$
- konverguje stejnoměrně k $f$ na $J$ (značíme $f_n \rightrightarrows f$ na $J$), pokud
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$
- konverguje lokálně stejnoměrně, pokud pro každý omezený uzavřený $[a, b] \subset J$ platí $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ (značíme $f_n \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} f$ na $J$).

**Věta 1.1** (Kritérium stejnoměrné konvergence)

*Nechť $f, f_n : J \to \mathbb{R}$, pak*
$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } J \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

*Důkaz*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$
$\square$

*Poznámka* (Pro spojité funkce)

$$\Leftrightarrow ||f_n - f||_{\mathcal{C}(J)} \to 0 \Leftrightarrow f_n \overset{\mathcal{C}(J)}{\to} f.$$

**Věta 1.2** (Bolzano-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)

*Nechť $f_n : J \to \mathbb{R}$, pak*

$$(\exists f : f_n \rightrightarrows f \text{ na } J) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

*Důkaz*

„ $\implies$ “: Víme $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Tedy

$$\forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon.$$

„ $\impliedby$ “: Víme $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Toto použijeme pro pevné $x \in J$. Pro posloupnost $a_n = f_n(x)$ máme splněnou BC podmínku pro posloupnost reálných čísel, tj. $a_n \to a \in \mathbb{R}$.

Označíme si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Nyní v BC podmínce provedeme limitu $n \to \infty$. Tím dostaneme přesně definici stejnoměrné konvergence. □

**Věta 1.3** (Moore-Osgood)

*Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je krajní bod intervalu $J$. Nechť $f_n, f : J \to \mathbb{R}$ splňují*

- $f_n \rightrightarrows f$ *na* $J$,
- *existuje* $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

*Pak existují* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *a jsou si rovny.*

*Důkaz*

Příště. □

*Důsledek*

Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $I$ a nechť $f_n$ jsou spojité na $I$. Pak $f$ je spojitá na $I$.

*Poznámka*

Obdobně lze definovat stejnoměrnou spojitost i pro libovolnou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ a $f_n : A \to \mathbb{R}$ a platí, že stejnoměrná limita je spojitá (stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá).

*Důkaz* (Moore-Osgood)
Z BC podmínky

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 \ \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Provedeme $\lim_{x \to x_0}$ a dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Tedy $a_n$ splňuje BC podmínku, a tudíž $\exists \lim_{n \to \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

Nechť $\varepsilon \geq 0$. Z definice $f_n \rightrightarrows f$

$$\exists n_0 \ \forall x \in J : |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zároveň předpokládejme $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$ (zvolíme si $n_0$ jako maximum). Máme pevnou funkci $f_{n_0}$ a $\lim_{x \to x_0} f_{n_0}(x) = a_{n_0}$. Tedy

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in P(x_0, \delta) \cap J : |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Nyní $\forall x \in P(x_0, \delta) \cap J$ platí

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| \leq \varepsilon + \varepsilon + \ \varepsilon = 3\varepsilon.$$

$\square$

**Věta 1.4** (O záměně limity a derivace)

*Nechť funkce $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na intervalu $(a, b)$ a nechť*

- $\exists x_0 \in (a, b) : \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje,*
- *pro derivace $f_n'$ platí $f_n' \overset{Loc}{\rightrightarrows}$ na $(a, b)$.*

*Potom existuje funkce $f$ tak, že $f_n \overset{Loc}{\rightrightarrows} f$ na $(a, b)$, $f$ má vlastní derivaci a platí $f_n' \overset{Loc}{\rightrightarrows} f'$ na $(a, b)$.*

*Důkaz*
Nechť $x_0 \in [c,d] \subset (a,b)$. Víme $f_n' \rightrightarrows$ na $[c,d]$. Chceme ukázat $f_n \rightrightarrows f$ na $[c,d]$ ( $\implies$ $f_n \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} f$ na $(a,b)$). Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $f_n' \rightrightarrows$

$$\exists n_0\ \forall m,n \geq n_0\ \forall x \in [c,d] : |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$$

a zároveň $\forall m,n \geq n_0 : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$. Nyní $\forall x \in [c,d]$ :

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq$$

$$\leq |h(x) - h(x_0)| + \varepsilon \leq |x - x_0| \cdot |h'(\xi)| + \varepsilon \leq (d-c) \cdot \varepsilon + \varepsilon,$$

kde $h = f_n - f_m$ a $\xi \in (x_0, x)$ resp. $(x, x_0)$ z Lagrangeovy věty (cvičení: předpoklady jsou splněné).

Zbývá dokázat „$f_n' \rightrightarrows f'$ na $[c,d]$“: Zvolme $z \in [c,d]$ a položme $\varphi_n(x) = \frac{f_n(x)-f_n(z)}{x-z}$ pro $x \in [c,d] \setminus \{z\}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $f_n' \rightrightarrows$

$$\exists n_0\ \forall n,m \geq n_0\ \forall x \in [c,d] : |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon.$$

Podobně jako v první části důkazu

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(z) - f_m(z))| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - z| < \varepsilon \cdot |x - z|.$$

Nyní $\forall m,n \geq n_0\ \forall x \in [c,d] \setminus \{z\}$:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \left| \frac{f_n(x) - f_m(z) - (f_m(x) - f_m(z)}{x - z} \right| < \frac{\varepsilon \cdot |x - z|}{|x - z|} = \varepsilon.$$

Podle BC $\varphi_n \rightrightarrows$ na $[c,d] \setminus \{z\}$. Tedy $\varphi_n$ splňuje předpoklady Moore-Osgoodovy věty ($\lim_{x\to z} \varphi_n(x) = \lim_{x \to z} \frac{f_n(x)-f_n(z)}{x-z} = f'(z)$). Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to z} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} = \lim_{x\to z} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n'(z) = \lim_{x\to z} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = f'(z).$$

A jelikož víme, že $f_n' \rightrightarrows$, tak $f_n' \to f' \implies f_n' \rightrightarrows f'$. □

## 1.2 Stejnoměrná konvergence řady funkcí

**Definice 1.2**

Řekněme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na intervalu $J$, pokud posloupnost částečných součtů $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na $J$.

**Věta 1.5** (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaných na intervalu $J$. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ na $J$, pak posloupnost funkcí $u_n(x) \rightrightarrows 0$ na $J$.*

*Důkaz*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J : |s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$$

speciálně pro $m = n + 1$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J : |\sum_{i=1}^{n+1} u_i - \sum_{i=1}^{n} u_i| = |u_{n+1}(x)| < \varepsilon \implies u_n \rightrightarrows 0.$$

□

**Věta 1.6** (Weierstrassovo kritérium)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaných na intervalu $J$. Pokud pro*

$$\sigma_n = \sup \{|u_n(x)| : x \in J\}$$

*platí, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ na $J$.*

*Důkaz*

Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro konečnou $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$

$$\exists n_0\ \forall m, n \geq n_0, m > n : |\sum_{k=n+1}^{m} \sigma_k| < \varepsilon.$$

Chceme ověřit BC podmínku pro $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$:

$$\forall m, n \geq n_0, m > n\ \forall x \in J : |s_m(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{m} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sigma_k < \varepsilon.$$

Tedy podle BC podmínky $\sum u_k \rightrightarrows$. □

**Věta 1.7** (O spojitosti a derivování řady funkcí)

*Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu $(a, b)$.*

- *Nechť $u_n$ jsou spojité na $(a, b)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{Loc}{\rightrightarrows}$ na $(a, b)$. Pak $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je spojitá na $(a, b)$.*
- *Nechť funkce $u_n$, $n \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na $(a, b)$ a nechť $\exists x_0 \in (a, b)$ :*

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ *konverguje a* $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \overset{Loc}{\rightrightarrows}$ *na* $(a,b)$*. Pak je funkce* $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *dobře definovaná a diferencovatelná a navíc* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{Loc}{\rightrightarrows} F(x)$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \overset{Loc}{\rightrightarrows} F'(x)$ *na* $(a,b)$*.*

*Důkaz*

„První bod“: Funkce $s_n(x) = \sum_{n=1}^{k} u_n(x)$ jsou spojité a $s_k \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows}$ na $(a,b)$. Tedy podle důsledku věty z dřívějška (stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá) je jejich limita lokálně spojitá, tedy spojitá.

„Druhý bod“: Na $s_k$ použijeme větu z dřívějška (pokud mají derivace stejnoměrnou limitu, pak i funkce ji mají a shoduje se až na derivaci). Ověříme podmínky, tedy že $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} u_n(x)$ konverguje a $s'_k = \sum_{n=1}^{k} u'_k \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows}$ na $(a,b)$. Podle tamté věty tedy $\exists F(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ a tato funkce je diferencovatelná a

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} F(x) \quad \wedge \quad \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \overset{\text{Loc}}{\rightrightarrows} F'(x) \qquad \text{na } (a,b).$$

□

**Věta 1.8** (Abel-Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)

*Nechť* $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost funkcí definovaných na intervalu* $J$ *a nechť* $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost funkcí na* $J$ *taková, že* $b_1(x) \geq b_2(x) \geq \ldots \geq 0$*. Jestliže je splněna některá z následujících podmínek, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) \rightrightarrows$ *na* $J$*.*

*(A)* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \rightrightarrows$ *na* $J$ *a* $b_1$ *je omezená.*

*(D)* $b_n \rightrightarrows 0$ *na* $J$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *má omezené částečné součty, tedy*

$$\exists K > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \forall x \in J : |s_n(x)| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_i(x)\right| < K.$$

*Důkaz*
„Dirichlet“: Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0$ $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in J : |f_n(x)| < \varepsilon$. Nechť $m, n \geq n_0$. Označme $\sigma_i(x) := \sum_{j=m}^{i} a_j(x)$. Pak

$$|\sigma_i(x)| \leq \left| \sum_{j=1}^{i} a_j(x) - \sum_{j=1}^{n_0-1} a_j(x) \right| \leq K + K.$$

$$\forall m, n \geq n_0 \ \forall x \in J : \left| \sum_{j=n}^{m} a_j(x) \cdot b_j(x) \right| =$$

$$= |a_n \cdot b_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) b_{n+1} + \ldots + (\sigma_m - \sigma_{m-1}) b_m| \leq$$

$$\leq \sup_{j=n,\ldots,m} |\sigma_j(k)| \left( b_n - b_{n-1} + b_{n-1} - b_{n-2} + \ldots + b_{m-1} - b_m + \ b_m \right) =$$

$$= \sup_{j=n,\ldots,m} |\sigma_j(x)| \cdot |b_n(x)| \leq 2K \cdot \varepsilon.$$

A z BC podmínky už $\sum a_i(x) b_i(x) \rightrightarrows$ na $J$.

„Abel“: Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro $\rightrightarrows$

$$\exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 : \left| \sum_{j=n}^{m} a_j(x) \right| < \varepsilon.$$

Tedy pro $\sigma_1(x) = \sum_{j=n}^{m} a_j(x)$ platí $|\sigma_i(x)| < \varepsilon$. Analogicky odhadu výše

$$\left| \sum_{j=n}^{m} a_j(x) \cdot b_j(x) \right| \leq \sup_{j=n,\ldots,m} |\sigma_j(x)| \cdot |b_n(x)| \leq \varepsilon \sup_{x \in J} (b_1(x)) \leq \varepsilon \cdot K.$$

Tedy $\sum a_i(x) \cdot b_i(x)$ splňuje BX podmínku. $\square$

# 2 Mocninné řady

**Definice 2.1** (Mocninná řada)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ nazýváme mocninnou řadou s koeficienty $a_n$ a středem $x_0$.

**Definice 2.2** (Poloměr konvergence)

Poloměrem konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ nazveme

$$R = \sup \left\{ r \in [0, \infty) | \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ konverguje } \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \right\}.$$

**Věta 2.1** (O poloměru konvergence mocninné řady)

*Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *je mocninná řada a* $R \in [0, \infty]$ *je její poloměr konvergence. Pak řada konverguje absolutně* $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *a diverguje* $\forall x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + r, +\infty)$. *Navíc platí* $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. *Pokud existuje* $Q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, *potom* $R = Q$.

*Důkaz*

Položme $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Pak pro $x : |x - x_0| < R$ platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - x_0|}{R} < 1 \implies \text{řada k. absolutně.}$$

Pro $|x - x_0| > R$ dostaneme úplně stejně $> 1$, tedy řada diverguje.

Nechť existuje $Q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1}|}{|a_n \cdot (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = |x - x_0| \cdot \frac{1}{Q}.$$

Pro $|x - x_0| < \frac{1}{Q}$ řada konverguje, pro $|x - x_0| > \frac{1}{Q}$ řada diverguje, tedy $\frac{1}{Q}$ je poloměr konvergence. □

**Věta 2.2** (O stejnoměrné konvergenci mocninné řady)

*Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *je mocninná řada a* $R \in (0, \infty]$ *je její poloměr konvergence. Pak řada konverguje lokálně stejnoměrně na* $(x_0 - R, x_0 + R)$.

*Důkaz*

Nechť $0 < r < R$. Podle předchozí věty $\sum a_n \cdot r^n$ konverguje absolutně. Nyní

$$\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] : |a_n (x - x_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n.$$

Víme, že $\sum |a_n| r^n$ konverguje, tedy podle Weierstrassova kritéria $\sum a_n (x - x_0)^n \rightrightarrows$ na $[x_0 - r, x_0 + r]$. Tedy konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$. □

**Věta 2.3** (O derivaci mocninné řady)

*Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$ *je také mocninná řada se stejným středem a s poloměrem konvergence* $R$.

*Navíc pro* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *platí* $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$.

*Důkaz*
Položme $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Nyní poloměr konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_i \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1} \overset{x \neq x_0}{=} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_i \cdot n \cdot (x-x_0)^n}{x-x_0}$ je podle věty výše

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n| \cdot n}} = R \cdot \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n}} = R.$$

Následně použijeme větu o derivaci a stejnoměrné konvergenci (v bodě $x = x_0$ řada jistě konverguje a z předchozí věty řada derivací konverguje lokálně stejnoměrně) □

*Důsledek* (O integrování mocninné řady)
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$

je mocninná řada se stejným poloměrem konvergence. Navíc platí

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-x_0)^{n+1} + C \text{ na } (x_0 - R, x_0 + R).$$

*Důkaz* (Hint k důkazu)
Mocninou řadu vpravo zderivujeme. □

**Věta 2.4** (Abelova)

*Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Nechť navíc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n$ konverguje. Pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $[x_0, x_0+R]$ a platí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n = \lim_{r \to R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n$.*

*Důkaz*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n \cdot R^n}_{a_n(x)} \cdot \underbrace{\frac{(x - x_0)^n}{R^n}}_{b_n(x)}.$$

Víme, že $b_n \geq b_{n+1} \geq 0$, jelikož $\frac{(x-x_0)^n}{R^n} \geq \frac{(x-x_0)^{n+1}}{R^{n+1}} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{x-x_0}{R}$. Navíc $b_0 = 1$. Víme, že $\sum a_n \cdot R^n$ konverguje, tedy podle BC podmínky pro konvergenci reálné řady:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m, n \geq n_0 : |\sum_{k=n}^{m} a_k \cdot R^k| < \varepsilon.$$

Z toho ale jednoduše (jelikož $a_n(x)$ na $x$ nezávisí)

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m, n \geq n_0 \; \forall x \in [x_0, x_0 + R] : |\sum_{k=n}^{m} a_k(x)| = |\sum_{k=n}^{m} a_k \cdot R^k| < \varepsilon.$$

Tedy podle Abel-Dirichletova kritéria (části Abel) $\sum a_n(x - x_0)^n \rightrightarrows$ na $[x_0, x_0 + R]$.

Funkce $a_n(x - x_0)^n$ jsou spojité a $\sum \rightrightarrows \implies F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ je spojitá na $[x_0, x_0 + R]$. Tedy

$$\lim_{x \to x_0 + R} F(x) = F(x_0 + R).$$

$\square$

# 3 Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací

*Poznámka*
Všechny integrály v této kapitole jsou Lebesgueovy.

## 3.1 Derivace monotónní funkce

**Definice 3.1** (Limes superior a limes inferior pro funkce)

Nechť $x \in (a, b)$ a $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Definujeme limes superior a limes inferior jako

$$\limsup_{h \to 0} f(x+h) := \lim_{h \to 0} \sup_{y \in (x-h,x) \cup (x,x+h)} f(y), \qquad \liminf_{h \to 0} f(x+h) := \lim_{h \to 0} \sup_{y \in (x-h,x) \cup (x,x+h)} f(y).$$

*Poznámka*

Analogicky jako u posloupnosti platí věta:

$$\exists \lim_{h\to 0} f(x+h) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \limsup_{h\to 0} f(x+h) = \liminf_{h\to 0} f(x+h).$$

**Definice 3.2**

Nechť $I$ je interval, $x$ je vnitřní bod $I$ a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce. Definujeme horní a dolní derivaci funkce $f$ v bodě $x$ jako

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$\underline{D}f(x) = \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

**Věta 3.1** (Míra vzoru a obrazu)

*Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce, $M \subset I$ je měřitelná a $c > 0$.*

- *Je-li $\overline{D}f(x) > c$ na $M$, potom $\mathcal{L}^*(f(M)) \supseteq c \cdot \mathcal{L}(M)$.*
- *Je-li $\underline{D}f(x) < c$ na $M$, potom $\mathcal{L}^*(f(M)) \subseteq c \cdot \mathcal{L}(M)$.*

*Důkaz*

Bez důkazu. □

**Věta 3.2** (Derivace monotónní funkce)

*Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Potom ve skoro každém bodě $x \in I$ existuje $f'(x)$.*

*Důkaz*

Nechť $M_{p,q} = \left\{x \in I | \underline{D}f(x) < p < q < \overline{D}f(x)\right\}$. Podle předchozí věty

$$q \cdot \mathcal{L}(M_{p,q}) \subseteq \mathcal{L}^*(f(M_{p,q})) \subseteq p \cdot \mathcal{L}(M_{p,q}).$$

Tedy, protože $p < q$, tak $\mathcal{L}(M_{p,q}) = 0$.

Tvrdíme, že pro množinu $M$ bodů nediferencovatelnosti platí $M = \bigcup_{p,q\in Q, p<q} M_{p,q}$ $\Longrightarrow$ , tedy spočetné sjednocení nulových množin, tudíž $M$ je nulová: „$\supseteq$“: $x \in M_{p,q}, p < q \implies \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x) \implies \nexists Df(x)$. „$\subseteq$“: Nechť $x \in M \implies \nexists Df(x) \implies \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)$. □

**Věta 3.3** (Integrál derivace monotónní funkce)

*Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce. Potom $f'$ je lebesgueovsky* *integrovatelná na $[a, b]$ a platí*

$$\int_a^b f'(x)dx \le f(b) - f(a).$$

*Důkaz*
$f$ je neklesající, tedy je měřitelná. Dodefinujeme $f(x) = f(b)$ pro $x > b$. Z předchozí věty víme, že pro skoro všechna $x$ $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$. Definujeme funkce $g_n(x) = \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}$. Tyto funkce jsou měřitelné a pro skoro všechna $x$ platí $\exists \lim_{n\to 0} g_n(x) = f'(x)$. Dále $f$ je neklesající, tedy $g_n(x) \ge 0$ a $f'(x) \ge 0$.

Podle Fatouova lemmatu

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b \liminf_{n\to\infty} g_n(x)dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx =$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_a^b n \cdot (f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x))dx = \liminf_{n\to\infty} \left(n \cdot \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(t)dt - n \cdot \int_a^b f(x)dx\right) =$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \left(n \cdot \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(t)dt - n \cdot \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx\right) \le \liminf_{n\to\infty} \left(f(b) - n \cdot \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)dx\right) =$$

$$= f(b) - f(a).$$

Tedy $f'$ je integrovatelná. □

## 3.2 Funkce s konečnou variací

**Definice 3.3** (Kladná, záporná a totální variace)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a $D$ dělení $[a, b]$. Definujeme kladnou variaci, zápornou variaci a (totální) variaci jako:

$$V^+(f, a, b) = \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ \right\},$$

$$V^-(f, a, b) = \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \right\},$$

$$V(f, a, b) = \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right\}.$$

Dále zavedeme značení $V_f^+(x) = V^+(f, a, x)$, atd.

**Definice 3.4** (Konečná variace)

Řekneme, že funkce $f$ ma na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ konečnou variaci, jestliže $V(f, a, b) < \infty$. Množinu všech funkcí s konečnou variací značíme $BV([a, b])$.

*Poznámka*

Nechť $[a, b] \in \mathbb{R}$ a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pak

- je-li $f$ neklesající na $[a, b]$, pak $V(f, a, b) = V^+(f, a, b) = f(b) - f(a)$;
- $|V(f, a, b)| \geq |f(a) - f(b)|$.

**Věta 3.4** (Vztah omezené variace a monotonie)

*Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

- *Má-li $f$ konečnou variaci na $[a, b]$, pak $V_f(x) = V_k^+ + V_f^-(x)$ a $f(x) - f(a) = V_f^+(x) - V_f^-(x)$.*
- *$f \subset BV(a, b)$ právě tehdy, když existují neklesající funkce $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ tak, že $f = v - u$.*

*Důkaz*
„První bod“: Nechť $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. Búno stačí pro $x = b$.

$$V(f,a,b) \geq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ + \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \leq V^+(f,a,b) + V^-(f,a,b).$$

Z těchto nerovností vezmeme supremum přes všechna dělení $D$ a dostaneme $V(f,a,b) = V^+(f,a,b) + V^-(f,a,b)$ ($\geq$ z nerovnosti mezi prvním a třetím výrazem, $\leq$ z nerovnosti mezi druhým a čtvrtým).

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \leq$$

$$\leq V^+(f,a,b) - \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-.$$

Infimum přes dělení $D$ dá $f(b) - f(a) \leq V^+(f,a,b) - \sup \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- = V^+(f,a,b) - V^-(f,a,b)$.

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - V^-(f,a,b).$$

Supremum přes dělení $D$ dá $f(b) - f(a) \geq \sup \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - V^-(f,a,b) = V^+(f,a,b) - V^-(f,a,b)$.

„Druhý bod“: „ $\implies$ “: Z prvního bodu víme, že $f(x) = (f(a) + V^+(f,a,x)) - V^-(f,a,x) = v(x) - u(x)$.

„ $\impliedby$ “: Mějme tedy $f(x) = v(x) - u(x)$

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^{n} |v(x_i) - v(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| = v(b) - v(a) + u(b) - u(a),$$

což dá $f \in BV(a,b)$. □

*Důsledek*
$f \in BV \implies f$ má derivaci skoro všude.

*Důkaz*
Z předchozí věty $f = v - u$ a věty před ní mají $u, v$ derivace skoro všude. $\square$

## 3.3 Absolutně spojitá funkce

**Definice 3.5** (Absolutně spojitá funkce)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $f$ je absolutně spojitá na $[a, b]$, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ : pro každý systém po dvou disjunktních intervalů $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^{n}$, $(a_j, b_j \subset [a, b])$ splňující $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta \implies \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. Množinu absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ budeme značit $AC([a, b])$.

*Poznámka*
$f \in Lip([a, b]) \implies f \in AC([a, b]) \implies f \in BC([a, b]) \cap C([a, b])$ a žádnou implikaci nelze obrátit.

$AC([a, b])$ je lineární prostor.

$f \in AC \implies V^+ \in AC \wedge V^- \in AC$.

**Věta 3.5** (Integrál derivace absolutně spojité funkce)

*Nechť* $f \in AC([a, b])$. *Potom* $f' \in L^1([a, b])$ *a* $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$.

*Důkaz*

BÚNO $f$ je rostoucí ($f \in AC \implies f \in BV \implies f(x) = (v(x)+x) - (u(x)+x)$, $v(x)+x, u(x)+x$ jsou rostoucí ($u, v$ neklesající, ale my potřebujeme rostoucí, proto $+x$) a $AC$). Podle věty výše víme, že $\exists f'(x)$ skoro všude. Tedy $[a,b]$ si můžeme rozdělit na tři množiny – s kladnou $f'$ ($D$), s nulovou $f'$ ($Z$) a bez $f'$ ($N$).

Dokážeme, že $|f(N)| = 0$, $|f(Z)| = 0$, $\int_D f'(x) = |f(D)|$. Pak $\int_a^b f'(x) = \int_D f'(x)dx = |f(D)| = |f(D) \cup f(Z) \cup f(N)| = f(b) - f(a)$, neboť $f$ je rostoucí, tedy prostá.

„$|f(N)| = 0$“: Víme $|N| = 0$. K $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$ z definice $AC$. K $N$ nalezneme otevřenou množinu $G$ tak, že $N \subset G$ a $|G| < \delta$. Také $G = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ (resp. $\bigcup_{i=1}^{N}(a_i, b_i)$), kde $(a_i, b_i)$ jsou po dvou disjunktní. Nyní $\forall m \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{m} b_i - a_i \leq |G| < \delta \implies \sum_{i=1}^{m} f(b_i) - f(a_i) < \varepsilon$. Nakonec pro $m \to \infty$ je $\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$ a $f(N) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f((a_i, b_i))$, tudíž $\sum_{i=1}^{\infty} f(b_i) - f(a_i) \leq \varepsilon$.

„$|f(Z)| = 0$“: Nechť $\varepsilon > 0$ a víme, že $f'(x) < \varepsilon$ na $Z$. Podle věty výše $|f(Z)| \leq \varepsilon \cdot |Z| \leq \varepsilon \cdot (b-a)$, tudíž $|f(Z)| = 0$.

„$\int_D f'(x) = |f(D)|$“: Nechť $\tau > 1$. Označme $D_k = \left\{x | T^k \leq f'(x) < \tau^{k+1}\right\}$. Pak $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k$. Podle věty výše

$$\frac{1}{\tau} \int_{D_k} f'(x)dx \leq \tau^k |D_k| \leq |f(D_k)| \leq \tau^{k+1}|D_k| \leq \tau \int_{D_k} f' dx$$

Posčítáme a získáme $\frac{1}{\tau} \int_D f'(x)dx \leq |f(D)| \leq \tau \int_D f'(x)dx$. Limita přes $\tau$ nám dá požadovanou rovnost. □

**Věta 3.6** (Neurčitý Lebesgueův integrál)

*Nechť $\Theta \in L^1(a,b)$ a $f$ je neurčitý Lebesgueův integrál $\Theta$, tj. existuje konstanta $C$, že*

$$f(x) = \int_a^x \Theta(t)dt + C, \qquad \forall x \in [a,b].$$

*Pak $f \in AC$ a $f' = \Theta$ skoro všude.*

**Tvrzení 3.7** (Pozorování z TMI)

$$\Theta \in L^1 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ \forall M, |M| < \delta \implies \int_M |\Theta| < \varepsilon.$$

*Důkaz*
„$f \in AC$“: K $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta > 0$ z pozorování z TMI. Nechť $(a_j, b_j)$ jsou po dvou disjunktní a $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta$. Nyní

$$\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| = \sum_{j=1}^{n} |\int_{a_j}^{b_j} \Theta(t)dt| \leq \int_{\bigcup(a_j,b_j)} |\Theta(t)|dt < \varepsilon \implies f \in AC.$$

„$f' = \Theta$ skoro všude“: Víme z předchozí věty, že $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$. Také víme $f(x) - C = \int_a^x \Theta(t)dt$. Tedy $C - f(a) = \int_a^x (f'(t) - \Theta(t))dt$. Při $x = a$ máme $C = f(a)$, tedy $\forall x \in [a, b] : \int_a^x (f'(t) - \Theta(t))dt$. Z TMI víme, že $f'(t) = \Theta(t)$ skoro všude. $\square$

*Důsledek*

$$f \in AC([a, b]) \Leftrightarrow \exists \Theta \in L^1(a, b), f(x) = \int_a^x \Theta(t)dt + C.$$