1 Úvod

Poznámka (Domluva)
$\mathbb{N}$ jsou přirozená čísla s 0. n značí přirozené číslo.

Dále se probírali základy značení a teorie množin.

Definice 1.1 (Základy)

Základem výrokové logiky je 5 symbolů (2 hodnoty + 3 logické spojky): $\top\bot\neg\wedge\vee$ = pravda, lež, negace, a, nebo.

Dále jsou to výrokové atomy z nějaké abecedy. Libovolný výrok je pak konečným aplikováním logických spojek.

Definice 1.2 (Pravdivostní ohodnocení)

Pravděpodobnostní ohodnocení je zobrazení t z prvovýroků do $\{0, 1\}$. Toto zobrazení lze jednoznačně rozšířit na t' na všechny výroky:

$$t'(\top) = 1, t'(\bot) = 0, t'(\neg a) = 1 - t'(a), t'(a \vee b) = \max\{t'(a), t'(b)\}, t'(a \wedge b) = \min\{t'(a), t'(b)\}$$

Definice 1.3

Pomocí pravdivostního ohodnocení můžeme zavést implikaci (spojka mezi premisou (antecedent) a závěrem (konsekvent)).

Definice 1.4 (Tautologie)

p je tautologie (notace $\models p$) $\equiv t(p) = 1$ pro všechna $t : A \to \{0, 1\}$. p je splnitelné $\equiv$ existuje $t : A \to \{0, 1\}$ takové, že $t(p) = 1$.

Lemma 1.1 (Zákony inempotence, komutativity, asociativity, distributivity, absorbce, DeMorganovy)

Viz skripta.

Definice 1.5 (Model)

Model (koho, čeho) Σ (výrokové teorie) je každé pravděpodobnostní ohodnocení t, které přiřazuje 1 všem výrokům ze Σ. Říkáme, že p je tautologický důsledek Σ (píšeme $\Sigma \models p$, říkáme p vyplývá ze Σ) $\equiv t(p) = 1$ pro všechny modely t (koho čeho) Σ.

Poznámka
$\models p$ je totéž, co $\emptyset \models p$.

Lemma 1.2

Vlastnosti $\models$. Viz skripta.

Definice 1.6 (Arita)

Mějme množinu symbolů F a zobrazení $a : F \to \mathbb{N}$. Říkáme, že symbol $f \in F$ má aritu n $\equiv a(f) = n$.

Řekněme, že slovo je přijatelné $\equiv$ TODO.

Definice 1.7 (Arita logických symbolů)

Aritu symbolů ar definujeme pro $F = A \cup \{\top, \bot, \neq, \vee, \wedge\}$ jako $ar(x) = 0, x \in A \cup \{\top, \bot\}$, $ar(\neq) = 1$, $ar(\vee, \wedge) = 2$.

Lemma 1.3

Buďte $t_1, \ldots, t_m$ a $u_1, \ldots, u_n$ jsou přijatelná slova a w libovolné slovo tak, že $t_1 \ldots t_m w = u_1 – u_n$. Potom $m \leq n$, $t_i = u_i$ pro $i \in [m]$ a $w = u_{m+1} \ldots u_n$.

Důkaz
Indukcí podle velikosti $u_1 \ldots u_n$. □

Definice 1.8 (Modus Ponens (= MP = odvozovací pravidla))

Z p a $p \implies q$, odvodíme q.

Definice 1.9 (Důkaz)

Formální důkaz (či důkaz) p z Σ je sekvence $p_1, \ldots, p_n$, kde $n \geq 1$ a $p_n = p$ tak, že $\forall k \in [n]$: buď $p_k \in Sigma$, nebo p_k je výrokový axiom (viz skripta), nebo $\exists i, j \in [k-1]$ tak, že p_k lze odvodit pravidlem MP z p_i a p_j.

Říkáme, že p je dokazatelné ze Σ, a značíme $\Sigma \vdash p$

Tvrzení 1.4

Pokud $\Sigma \vdash p$, pak $\Sigma \models p$.

Důkaz
Jednoduchý. □

Věta 1.5 (O úplnosti (1. znění))

$$\Sigma \vdash p \Leftrightarrow \Sigma \models p.$$

Věta 1.6 (Kompaktnost logiky)

Pokud $\Sigma \models p$, pak existuje konečná podmnožina $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tak, že $\Sigma_0 \models p$.

Důkaz
Vyplývá z předchozí věty □

Definice 1.10 (Konzistentnost)

Říkáme, že Σ je nekonzistentní, pokud $\Sigma \vdash \bot$, jinak (pokud $\Sigma \nvdash \bot$) je konzistentní.

Věta 1.7 (O úplnosti (2. znění))

Σ je konzistentní právě tehdy, když má model.

Důsledek
Σ má model $\Leftrightarrow$ každá konečná podmnožina Σ má model.

Lemma 1.8 (Dedukce)

Předpokládejme $\Sigma \cup \{p\} \vdash q$. Potom $\Sigma \vdash p \implies q$.

Důkaz (Indukcí)
Pokud je q výrokový axiom, pak $\Sigma \vdash q$ a jelikož $q \implies (p \implies q)$ je výrokový axiom, MP říká $\Sigma \vdash p \implies q$. Pokud $q \in \Sigma \cup \{p\}$, pak buď TODO □

Důsledek
$\Sigma \vdash p$ tehdy a pouze tehdy, když $\Sigma \cup \{\neg\}$ je nekonzistentní.

Důkaz
$\implies$: Předpokládejme, že $\Sigma \vdash p$. Jelikož $p \implies (\neg p \implies \bot)$ je výrokový axiom, můžeme 2krát použít MP a získat $\Sigma \cup \{p\}$ TODO □

Důsledek
Z druhého znění věty o úplnosti vyplývá první znění.

Definice 1.11

Říkáme, že Σ je kompletní (úplná, ale s větou o úplnosti nemá nic společného), pokud Σ je konzistentní a pro všechna p je buď $\Sigma \vdash p$ nebo $\Sigma \vdash \neg p$.

Lemma 1.9 (Lindenbaum)

Nechť Σ je konzistentní. Pak existuje kompletní Σ' tak, že $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

Důkaz
Zornovo lemma. TODO. Pokud je axiomů konečně, tak můžeme udělat důkaz bez Zornova lemmatu. □

Definice 1.12 (Pravdivostní ohodnocení v závislosti na Σ)

$t_\Sigma : A \to \{0, 1\}$, $t_\Sigma(a) = 1$, pokud $\Sigma \vdash a$, jinak $t_\Sigma(a) = 0$.

Lemma 1.10

Předpokládejme, že Σ je kompletní, potom pro každé p máme

$$\Sigma \vdash p \Leftrightarrow t_\Sigma(p) = 1.$$

Nevoli t_Σ je model Σ.

Důkaz
Indukcí podle počtu spojek. TODO. □

2 Predikátorová logika

Definice 2.1 (Jazyk)

Jazyk (L) je disjoin sjednocení množiny relací (L^r) (každé relaci $R \in L^r$ přiřadíme aritu $a(R) \in \mathbb{N}$) a množiny funkčních symbolů (L^f) ($F \in L^f$ má aritu $a(F) \in \mathbb{N}$).

Definice 2.2 (Struktura)

Struktura $\mathcal{A}$ pro L je trojice $(A, (R^{\mathcal{A}})_{R \in L^r}, (F^{\mathcal{A}}_{F \in L^f}))$ sestávající z množiny A (tzv. nosič), pro každou m-ární relaci $R \in L^r$ máme její vyjádření $R_A \in A^m$.

Definice 2.3 (Podstruktura, zúžení)

$\mathcal{X}$ je podstruktura struktury $\mathcal{Y}$, značíme $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, pokud $X \subseteq Y$ a všechny operace jsou uzavřené na relace i funkce. Taktéž říkáme, že $\mathcal{Y}$ je rozšíření $\mathcal{A}$.

Zúžení funkce F na podstrukturu $\mathcal{X}$, značené $F|_{\mathcal{X}}$ je, jak bychom čekali.

Definice 2.4 (Homomorfismus)

Ať $\mathcal{A}$ a a $\mathcal{B}$ jsou struktury (pro tentýž jazyk). Homomorfismus $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je zobrazení $h : A \to B$ tak, že $\forall m$-nární $R \in L^r$ a každé $(a_1, \ldots, a_m) \in A^m$ máme $(a_1, \ldots, a_m) \in R^{\mathcal{A}} \implies (ha_1, \ldots, ha_m) \in R^{\mathcal{B}}$. $\forall n$-nární $F \in L^f$ a každé $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ je $h(F^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = F^{\mathcal{B}}(ha_1, \ldots, ha_n)$.

Definice 2.5 (Silný homomorfismus)

Pokud nahradíme implikaci v předchozí definici ekvivalencí, dostaneme tzv. silný homomorfismus. Speciálním případem je tzv. vnoření, TODO.

Definice 2.6 (Kongruence)

Kongruence je ekvivalence taková, že pokud jsou v relaci nějaké prvky, tak jsou v relaci i kongruentní prvky. Stejně tak obraz kongruentních prvků je kongruentní prvek k obrazu původních.

Definice 2.7 (Kvocient / faktorstruktura)

Nechť $\mathcal{A}$ je struktura a $\sim$ kongruence. Potom $\mathcal{A}/\sim$, tzv. faktostruktura, je struktura, kde nosná množina je $A/\sim$ a relace a funkce jsou přepsané tak, aby nové prvky byly v relaci právě tehdy, pokud byly jim odpovídající původní prvky.

2.1 Proměnné a formule

Definice 2.8 (Proměnné)

Proměnné: $Var = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ je spočetná (nekonečná) množina.

Poznámka
Většinou by nevadila ani nespočetná. Naopak se spočetná by nám rozbíjela skládání výroků.

Definice 2.9 (Termy)

L-term je slovo na abecedě $L^f \cup Var$ získané jako: každá proměnná je L-term a kdykoliv je $F \in L^f$ n-nární relace a $t_1, \ldots, t_n$ L-termy, pak je $Ft_1 \ldots t_n$ L-term.

Definice 2.10 (Uzavřený term)

Uzavřený term se nazývá ten term, který neobsahuje proměnné.

Definice 2.11 (Generátory)

Mějme strukturu a množinu (oindexovanou) prvků z ní. Pokud tuto množinu uzavřeme na relace a funkce, pak dostaneme podstrukturu, která se nazývá generovaná danou množinou prvků (a ty se nazývají generátory).

Definice 2.12 (Symboly)

V predikátorové logice máme: $\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, =, \forall, \exists$.

Definice 2.13 (Atomická formule)

Atomická L-formule je slovo z abecedy $L \cup Var \cup \{\top, \bot, =\}$, které je tvaru buď $\top, \bot$, nebo termy jsou v relaci ($Rt_1 \dots t_m$, kde $R \in L^r$ je m-nární relace a $t_1, \dots, t_m$ jsou L-termy), nebo $= t_1 t_2$ (kde t_1 a t_2 jsou L-termy).

Definice 2.14 (Formule)

L-formule je slovo na abecedě $L \cup Var \cup \{\top, \bot, \neg, \vee, \wedge, =, \exists, \forall\}$, které je buď atomická formule, nebo $\neg\varphi, \vee\varphi\psi, \wedge\varphi\psi$, kde φ a ψ jsou L-formule, nebo $\exists x\varphi, \forall x\varphi$, kde φ je formule a x je proměnná.

Definice 2.15 (Podformule)

Podformule je podslovo formule, které je také formule.

Definice 2.16 (Vázaný a volný výskyt)

Pokud se proměnná vyskytuje v podformuli tvaru $\exists x\varphi$ nebo $\forall x\varphi$, pak se nazývá vázaná (má na tomto místě vázaný výskyt), pokud se vyskytuje jinde, pak je volná (volný výskyt).

Definice 2.17 (Sentence (= uzavřená formule))

Sentence je formule, kde všechny výskyty proměnné jsou vázané.

Poznámka

Píšeme $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, abychom zvýraznili, že právě proměnné $x_1, \dots, x_n$ jsou volné v φ.

Do formule dosazujeme ($\varphi(t_1/x_1, \dots, t_n/x_n)$) naráz a nahrazujeme všechny volné výskyty dané proměnné.

Místo $\varphi(t_1/x_1, \dots, t_n/x_n)$ budeme psát $\varphi(t_1, \dots, t_n)$.

Lemma 2.1

Nechť φ je L-formule, $x_1, \ldots, x_n$ různé proměnné a $t_1, \ldots, t_n$ jsou L-termy. Potom $\varphi(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n)$ je L-formule. Pokud $t_1, \ldots, t_n$ nemají volné proměnné a $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, potom $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ je L-sentence.

Definice 2.18

Jazyk rozšiřujeme o tzv. jména, tj. konstantní symboly reprezentující prvky, o kterých se chceme bavit. Tzv. expanze struktury.

Definice 2.19 (Pravdivost (Tarského definice splňování))

L_A-sentence σ je pravdivá v L-struktuře A (píšeme $A \models \sigma$ a čteme σ je pravdivá / splněna v A) takto:

- $A \models \top$ a $A \not\models \bot$,
- $A \models Rt_1 \ldots t_m$ právě tehdy, pokud $(t_1^A, \ldots, t_m^A) \in R^A$ pro m-nární relaci $R \in L^r$ a L_A termy bez volných proměnných $t_1, \ldots, t_m$,
- $A \models t_1 = t_2$ právě tehdy, když $t_1^A = t_2^A$ pro L_A-termy bez volných proměnných t_1, t_2,
- $\sigma = \neg\sigma_1$, potom $A \models \sigma$ právě tehdy, pokud $A \not\models \sigma_1$,
- $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2$, potom $A \models \sigma$ právě tehdy, pokud $A \models \sigma_1$ nebo $A \models \sigma_2$,
- $\sigma = \sigma_1 \wedge \sigma_2$, potom $A \models \sigma$ právě tehdy, pokud $A \models \sigma_1$ a $A \models \sigma_2$,
- $\sigma = \exists x \varphi(x)$, potom $A \models \sigma$ tehdy a jen tehdy, když $A \models \varphi(\underline{a})$ pro nějaké $a \in A$,
- $\sigma = \forall x \varphi(x)$, potom $A \models \sigma$ tehdy a jen tehdy, když $A \models \varphi(\underline{a})$ pro všechna $a \in A$,

Definice 2.20

$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ definuje množinu $\varphi^A = \{(a_1, \ldots, a_n) : A \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)\}$.

Pokud existuje formule definující $S \subseteq A^n$, potom říkáme, že formule je 0-definovatelná v A.

Definice 2.21

Formule se nazývá pozitivní, pokud neobsahuje negaci ($\neg$).

TODO

TODO, velké TODO