1 Organizační úvod

Přesun nebyl odhlasován.

Poznámka (Literatura)

- Engelking: General Topology (spíš taková příručka, hodně obtížná)
- Čech: Bodová topologie
- Kelley: General Topology
- Willard: General Topology

Doporučené jsou poslední dvě.

Poznámka (Podmíny zakončení)
Zkouška (ústní) + úkoly ze cvičení (a účast na cvičení)

2 Úvod

Poznámka (Historie)

- Euler: mosty ve městě Královec (7 mostů, Eulerovský tah)
- Listing (1847): pojem topologie (bez rigorózních definic)
- Poincaré (1895): Analysis Situs (Poincarého hypotéza)
- Fréchet (1906): definuje metrický prostor (až dodnes)
- Hausdorff (1914): tzv. Hausdorffův TP
- Kuratowski (1922): TP, jak jej známe dnes (formálně)

Poznámka (TOPOSYM)
V Praze se každých 5 let koná významná konference topologů – TOPOSYM.

3 Základní pojmy

Topos = umístění (řečtina).

3.1 Topologický prostor, báze, subbáze, váha, charakter

Definice 3.1 (Topologický prostor (TP))

Uspořádaná dvojice $(\mathbb{X}, \tau)$ se nazývá topologický prostor, pokud $\mathbb{X}$ je množina, $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ a platí:
(T1) $\emptyset, \mathbb{X} \in \tau$
(T2) jsou-li $\mathbb{U}, \mathbb{V} \in \tau$, pak $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} \in \tau$
(T3) je-li $\mathcal{U} \in \tau$, pak $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

Definice 3.2 (Topologie)

Systém τ se nazývá topologie na $\mathbb{X}$. Prvky množiny $\mathbb{X}$ se nazývají body. Prvky τ se nazývají otevřené množiny.

Definice 3.3 (Okolí bodu)

Množina $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá okolí bodu x, pokud existuje $\mathbb{U} \in \tau$, že $x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$. Množina všech okolí bodu x značíme $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_\tau(x)$.

Definice 3.4 (Báze a subbáze)

Soubor množin $\mathcal{B} \subseteq \tau$ se nazývá báze topologie τ, pokud pro každé $\mathbb{U} \in \tau$ existuje $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{B} : \bigcup \mathcal{U} = \mathbb{U}$. Soubor $\mathcal{S} \subseteq \tau$ se nazývá subbáze topologie τ, pokud $\{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S} \text{konečná}\}$ je báze topologie τ.

Tvrzení 3.1 (Charakterizace otevřené množiny pomocí okolí)

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ *je TP a* $\mathbb{U} \in \mathbb{X}$. *Pak* $\mathbb{U} \in \tau$, *právě když* $\forall x \in \mathbb{U} \exists \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{V} \subseteq \mathbb{U}$

Důkaz
Důkaz ($\implies$) vidíme $\mathbb{U} = \mathbb{V}$.

Opačně víme $\forall x \in \mathbb{U} \exists \mathbb{V}_x \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{V}_x \subseteq \mathbb{U}$. $\exists \mathbb{W}_x \in \tau : x \in \mathbb{W}_x \subseteq \mathbb{U}_x$. $\mathbb{U} = \bigcup_{x \in \mathbb{U}} \mathbb{W}_x \in \tau$. Tedy $\mathbb{U} \in \tau$. □

Příklad
Je-li $(\mathbb{X}, \varrho)$ metrický prostor (MP), pak soubor všech ϱ-otevřených množin tvoří topologii na množině $\mathbb{X}$.

Definice 3.5 (Metrizovatelný TP)

TP $(\mathbb{X}, \tau)$ se nazývá metrizovatelný, pokud na množině $\mathbb{X}$ existuje metrika ϱ tak, že topologie odvozené z $(\mathbb{X}, \varrho)$ splývá s topologií τ.

Příklad
Je-li $(\mathbb{X}, \varrho)$ MP, pak systém všech otevřených koulí tvoří bázi topologie τ_ϱ.

Například
Všechny otevřené intervaly tvoří bázi topologie na $\mathbb{R}$.

Systém $\{(-\infty, b), (a, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ je subbáze topologie na $\mathbb{R}$.

Příklad (Diskrétní a indiskrétní TP)
Je-li $\mathbb{X}$ množina, pak $(\mathbb{X}, \mathcal{P}(\mathbb{X}))$ je TP, nazývá se diskrétní TP (a vždy je metrizovatelný). Naopak $(\mathbb{X}, \{\emptyset, \mathbb{X}\})$ se nazývá indiskrétní TP. (Pokud $|\mathbb{X}| \geq 2$, pak indiskrétní TP není metrizovatelný.)

Tvrzení 3.2 (Vlastnosti báze)

Je-li $(\mathbb{X}, \tau)$ *TP a* $\mathcal{B}$ *jeho báze, pak*
(B1) $\forall \mathbb{U}, \mathbb{V} \in \mathcal{B} \forall x \in \mathbb{U} \cap \mathbb{V} \exists \mathbb{W} \in \mathbb{B} : x \in \mathbb{W} \subseteq \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$,
(B2) $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{X}$.

Je-li $\mathbb{X}$ *libovolná množina a* $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{X})$ *splňuje podmínky (B1), (B2), pak na* $\mathbb{X}$ *existuje jediná topologie, jejíž báze je* $\mathbb{B}$.

Důkaz
První část je snadná (průnik 2 množin báze je otevřený, tj. prvkem topologie, tedy se dá zapsat jako sjednocení podmnožiny báze).

Druhá část: Mějme tedy $\mathbb{X}$ a $\mathcal{B}$ z věty splňující obě podmínky. Definujme $\tau := \{\bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}\}$. τ je topologie na $\mathbb{X}$ (ověříme, že τ splňuje podmínky topologie).

Zároveň volba τ je jediná množná, jelikož každý její prvek se musí dát vyjádřit jako sjednocení báze a opačně. $\square$

Důsledek
Je-li $\mathbb{X}$ množina, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ a $\bigcup \mathcal{S} = \mathbb{X}$, pak $\mathcal{S}$ je subbáze jednoznačně určené topologie na $\mathbb{X}$.

Důkaz
$\mathcal{B} = \{\cap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}\text{konečná}\}$ splňuje podmínky (B1) a (B2) předchozího tvrzení (B2 definice $\mathcal{S}$, B1 protože $\mathbb{U}, \mathbb{V} \in \mathcal{B}, \mathbb{U} = \bigcup \mathcal{F}_1, \mathbb{V} = \bigcap \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{S}\text{konečné}$. $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \bigcap(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \in \mathcal{B}$. (Dokonce celý průnik je prvkem $\mathcal{B}$, nejenom pro každý prvek existuje množina, která ho obsahuje, je podmnožinou průniku a je v $\mathcal{B}$). □

Tvrzení 3.3 (Vlastnosti systému všech okolí)

Je-li $(\mathbb{X}, \tau)$ *TP, pak soubory všech okolí* $\mathcal{U}_\tau(x), x \in \mathbb{X}$ *splňují*
(U1) $\forall x \in \mathbb{X} : \mathcal{U}(x) \neq \emptyset, x \in \bigcap \mathcal{U}(x)$,
(U2) $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) \forall \mathbb{V} : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{V} \subseteq \mathbb{X} \implies \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x)$,
(U3) $\forall \mathbb{U}, \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{U} \cap \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x)$,
(U4) $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) \exists \mathbb{V} \in \mathcal{U}(x) \forall y \in \mathbb{V} : \mathbb{U} \in \mathcal{U}(y)$

Je-li $\mathbb{X}$ *množina a systémy množin* $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}), x \in \mathbb{X}$ *splňující podmínky (U1-4), pak na množině* $\mathbb{X}$ *existuje jediná topologie* τ, *že* $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_\tau(x), x \in \mathbb{X}$.

Důkaz
První část snadná. (Domácí cvičení.)

Položme $\tau = \{\mathbb{U} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) : \forall x \in \mathbb{U}, \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x)\}$. τ je topologie na $\mathbb{X}$. Z (U1) a (U2) vyplyne (T1). Atd…

□

Definice 3.6 (Báze okolí)

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP. Systém množin $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ se nazývá báze okolí v bodě x, pokud $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}_\tau(x)$ a pro každé $\mathbb{V} \in \mathcal{U}_\tau(x)$ existuje $\mathbb{U} \in \mathcal{B}(x)$, že $\mathbb{U} \in V???$. Indexovaný soubor $\{\mathcal{B}(x) : x \in \mathbb{X}\}$ se nazývá báze okolí prostoru $\mathbb{X}$, pokud $\forall x \in \mathbb{X} : \mathcal{B}(x)$ je báze okolí v bodě x.

Tvrzení 3.4 (Vlastnosti báze okolí)

Je-li $(\mathbb{X}, \tau)$ *TP a* $\{\mathcal{B}(x) : x \in \mathbb{X}\}$ *báze okolí, pak*
(O1) $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset, x \in \bigcap \mathcal{B}(x), x \in \mathbb{X}$,
(O2) $\forall \mathbb{U}, \mathbb{V} \in \mathcal{B}(x) \exists \mathbb{W} \in \mathcal{B}(x) : \mathbb{W} \subseteq \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$,
(O3) $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{B}(x) \exists \mathcal{B}(x) \forall y \in \mathbb{V} \exists \mathbb{W} \in \mathcal{B}(y) : \mathbb{W} \subseteq \mathbb{U}$.

Je-li $\mathbb{X}$ *množina a* $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}), x \in \mathbb{X}$ *soubory splňující (O1), (O2), (O3), pak na množině* $\mathbb{X}$ *existuje jediná topologie, jejíž báze okolí je* $\{\mathcal{B}(x) : x \in \mathbb{X}\}$.

Důkaz
První část je snadná.

Položme $\mathcal{U}(x) = \{\mathbb{U} \in \mathcal{P}(x) : \exists \mathbb{B} \in \mathcal{B}(x) : \mathbb{B} \subseteq \mathbb{U}\}, x \in \mathbb{X}$. Ověříme, že splňuje (U1--4). (U1) z (O1). (U2) z definice $\mathcal{U}$. (U3) z (O2), (U4) z (O3). □

Definice 3.7 (Váha prostoru)

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP. Pak váha prostoru $(\mathbb{X}, \tau)$ je nejmenší mohutnost báze prostoru $(\mathbb{X}, \tau)$. Značíme ji $\mathrm{w}(\mathbb{X}) = \mathrm{w}(\mathbb{X}, \tau)$

Charakter v bodě x je nejmenší mohutnost báze okolí bodu x. Značíme ho $\chi(x, \mathbb{X})$.

Charakter prostoru $\mathbb{X}$ je $\sup\{\chi(x, \mathbb{X}) : x \in \mathbb{X}\}$.

Například
$\mathrm{w}(\mathbb{R}) = \omega$ ($\mathbb{R}$ má spočetnou bázi).

$\mathrm{w}(\mathbb{X}, \mathcal{P}(\mathbb{X})) = |\mathbb{X}|$ ($\{\{x\} : x \in \mathbb{X}\}$ je báze $(\mathbb{X}, \mathcal{P}(\mathbb{X}))$)

$\mathrm{w}(\mathbb{X}, \{\emptyset, \{\mathbb{X}\}\}) = 1$

Například
Je-li $(\mathbb{X}, \tau)$ metrizovatelný, pak $\chi(x, \mathbb{X}) \leq \omega$

Tvrzení 3.5

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP a $x \in \mathbb{X}$. Pak $\chi(x, \mathbb{X}) \leq \mathrm{w}(\mathbb{X})$

Důkaz
Ať $\mathcal{B}$ je báze $(\mathbb{X}, \tau)$, že $|\mathcal{B}| = \mathrm{w}(\mathbb{X})$. Položme $\mathcal{B}(x) := \{\mathbb{U} \in \mathcal{B} : x \in \mathbb{U}\}$. $\mathcal{B}(x)$ je báze okolí v bodě x.

$|\mathcal{B}(x)| \leq |\mathcal{B}|$, protože $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}$. $\chi(x, \mathbb{X}) \leq |\mathcal{B}(x)| \leq |\mathcal{B}| = \mathrm{w}(\mathbb{X})$. □

3.2 Vnitřek, Uzávěr, hranice

Definice 3.8 (Uzavřená množina)

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP. Množina $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{X}$ se nazývá uzavřená, pokud její doplněk je otevřená množina (neboli $\mathrm{x} \setminus \mathbb{F} \in \tau$).

Definice 3.9 (Obojetná množina (clopen set))

Množina se nazývá obojetná, pokud je uzavřená a otevřená zároveň.

Definice 3.10 (Uzávěr)

Je-li $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$, pak uzávěr $\mathbb{A}$ je $\mathrm{cl}(\mathbb{A}) = \overline{\mathbb{A}} = \bigcap \{\mathbb{F} \subseteq \mathbb{X}, \mathbb{A} \subseteq \mathbb{F}, \mathbb{F}\text{je uzavřená}\}$.

Definice 3.11 (Vnitřek množiny)

Vnitřek množiny $\mathbb{A}$ je $\mathrm{Int}\,\mathbb{A} = \mathbb{A}^0 = \bigcup \{\mathbb{U} \in \tau : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{A}\}$.

Definice 3.12 (Hranice množiny)

Hranice množiny $\mathbb{A}$ je $\delta\mathbb{A} = \overline{\mathbb{A}} \cap \overline{\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}}$

Tvrzení 3.6 (Vztah vnitřku a uzávěru)

Ať $(\mathbb{X}, \tau)$ je TP, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$, pak $\mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}} = \mathrm{Int}(\mathbb{X} \setminus \mathbb{A})$ a $\mathbb{X} \setminus \mathrm{Int}\,\mathbb{A} = \overline{\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}}$.

Důkaz

$\setminus\overline{\mathbb{A}}$ je otevřená, navíc $\mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}} \subseteq \mathbb{X} \setminus \mathbb{A}$. Tedy $\mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}} \subseteq \mathrm{Int}(\mathbb{X} \setminus \mathbb{A})$. $\mathrm{Int}(\mathbb{X} \setminus \mathbb{A})\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}$, přechodem k doplňku $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}\setminus\mathrm{Int}(\mathbb{X}\setminus\mathbb{A})$. Tedy $\overline{\mathbb{A}} \subseteq \mathbb{X}\setminus\mathrm{Int}(\mathbb{X})$???. Přechodem k doplňku: $\mathrm{Int}(\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}) \subseteq \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}}$.

Druhou část můžeme dokázat přechodem k doplňku a převedením na první část. □

Tvrzení 3.7 (Charakterizace uzávěru)

Buď $(\mathbb{X}, \tau)$ TP, $x \in \mathbb{X}, \mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ a $\mathcal{B}(x)$ báze okolí v bodě x. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní
1) $x \in \overline{\mathbb{A}}$,
2) $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{U} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$,
3) $\forall \mathbb{U} \in \mathcal{B}(x) : \mathbb{U} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$.

Důkaz

1) -> 2) sporem: Kdyby pro nějaké $\mathbb{U} \in \mathcal{U}(x) : \mathbb{U} \cap \mathbb{A} = \emptyset$, pak existuje $\mathbb{V}$ otevřené: $x \in \mathbb{V} \subseteq \mathbb{U}$. $\mathbb{V} \cap \mathbb{A} = \emptyset$. $\mathbb{X} \setminus \mathbb{V}$ je uzavřená a $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X} \setminus \mathbb{V}$. Pak $x \in \overline{\mathbb{A}} \subseteq \mathbb{X} \setminus \mathbb{V}$, neobsahuje x. .

2) -> 3) triviální

3) -> 1) sporem: $x \notin \overline{\mathbb{A}}$ pak $x \in \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}}$. Pak existuje $\mathbb{U} \in \mathcal{B}(x) : x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{A}}$. Pak ??? □