Příklad (6.1)
Lineární operátor f na prostoru $\mathbf{V} = \mathrm{LO}\left\{(1,3,-1,1)^T, (0,1,-1,4)^T\right\}$ (jde o podprostor prostoru $\mathbb{R}^4$) splňuje

$$f((1,3,-1,1)^T) = (1,2,0,-3)^T, \qquad f((0,1,-1,4)^T) = (0,-1,1,-4)^T$$

Spočítejte $f^n((7,17,-3,-9)^T)$.

Řešení
Označme si $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = ((1,3,-1,1)^T, (0,1,-1,4)^T)$. Vyjádříme si f v této bázi: $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $f(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_2$, tudíž (jelikož je f lineární):

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizace: Charakteristický polynom této matice je $(1-\lambda)\cdot(-1-\lambda)$, tedy vlastní čísla jsou 1, a vlastní vektor např. $(1,0)^T$, a -1, a vlastní vektor např. $(1,2)^T$. Tedy máme bázi $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \left((1,0)^T, (1,2)^T\right)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$, který reprezentuje vektory $\mathbf{V}$ vyjádřené v bázi B.

$$[\mathrm{id}]_B^C = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad [\mathrm{id}]_C^B = \left([\mathrm{id}]_B^C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$[f]_C^C = [\mathrm{id}]_C^B \cdot [f]_B^B \cdot [\mathrm{id}]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ze skládání lineárních zobrazení víme, že

$$f^n(\mathbf{x}) = [\mathrm{id}]_K^B[\mathrm{id}]_B^C[f]_C^C[\mathrm{id}]_C^B[\mathrm{id}]_B^K[\mathrm{id}]_K^B[\mathrm{id}]_B^C[f]_C^C[\mathrm{id}]_C^B[\mathrm{id}]_B^K \cdot \ldots \cdot [\mathrm{id}]_K^B[\mathrm{id}]_B^C[f]_C^C[\mathrm{id}]_C^B[\mathrm{id}]_B^K\mathbf{x} =$$
$$= [\mathrm{id}]_K^B[\mathrm{id}]_B^C] \left([f]_C^C\right)^n [\mathrm{id}]_C^B[\mathrm{id}]_B^K\mathbf{x}.$$

Jediné, co nám tedy chybí je matice přechodů[a] od báze B ke kanonické bázi a opačně. To však můžeme (a musíme, protože B není báze celého $\mathbb{R}$, ale K ano) „ošidit“ tím, že na základě první a druhé souřadnice tipneme (a ověříme), že $(7,17,-3,-9)^T = 7\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2 =: \mathbf{x}$, druhý přechod uděláme, jako jsme zvyklí (vektory B budou sloupce dané matice), tedy

$$f^n(\mathbf{x}) = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 + 2(-1)^{n+1} \\ 4(-1)^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 + 2(-1)^{n+1} \\ 27 + 10(-1)^{n+1} \\ -9 + 6(-1)^n \\ 9 + 18(-1)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

[a] Vlastně to není matice přechodu mezi bázemi, protože kanonická báze je báze $\mathbb{R}^4$ a B je báze $\mathbf{V}$, tedy budou 2×4 a 4×2 a budou to identity jen na $\mathbf{V}$.

Příklad (6.2)
Vyřešte pro každé celé n reálný spojitý dynamický systém

$$\mathbf{u}'(x) := \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ u_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix} =: A \cdot \mathbf{u}(x)$$

s počátečními podmínkami $u_i(0) = i$ pro $i = 1, 2, 3$. (Značení: $A^n = \left(A^{-1}\right)^{|n|}$ pro záporná n).

Řešení
Chceme rovnice převést do tvaru $\mathbf{y}'(x) = D^n \mathbf{y}(x)$, kde D je diagonální matice a $\mathbf{y}(x) = M\mathbf{u}(x)$ (M je regulární matice). Nejprve tedy provedeme diagonalizaci: Charakteristický polynom je $(0-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) - 1 - 1 + (2-\lambda) - (0-\lambda) + (2-\lambda)$. Kořeny jsou 2 a dvojnásobný kořen 1. Vlastní vektory dostaneme tak, že do $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$ dosadíme příslušná vlastní čísla a vyřešíme (jelikož potom $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2-2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Tudíž báze, kterou hledáme, je například $B = \left((1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,1)^T\right)$. To nám dává matice přechodu:

$$[\mathrm{id}]^B_K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad [\mathrm{id}]^K_B = \left([\mathrm{id}]^B_K\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Máme tedy (využíváme, že matice přechodů jsou k sobě inverzní):

$$\mathbf{u}'(x) = [\mathrm{id}]^B_K [\mathrm{id}]^K_B A^n [\mathrm{id}]^B_K [\mathrm{id}]^K_B \mathbf{u}(x), \qquad \left([\mathrm{id}]^K_B \mathbf{u}\right)'(x) = [\mathrm{id}]^K_B \mathbf{u}'(x) = \left([\mathrm{id}]^K_B A [\mathrm{id}]^B_K\right)^n \cdot [\mathrm{id}]^K_B \mathbf{u}(x).$$

To už je náš tvar: $\mathbf{y}'(x) = D^n \mathbf{y}(x)$, kde $\mathbf{y}(x) = [\mathrm{id}]^K_B \mathbf{u}(x)$ a

$$D^n = \left([\mathrm{id}]^K_B A [\mathrm{id}]^B_K\right)^n = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

To nám dává rovnici

$$\mathbf{y}'(x) = D^n \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \mathbf{y}(x).$$

Analýza nám dává řešení $\mathbf{y}(x) = \left(y_1(0) \cdot e^{2^n x}, y_2(0) \cdot e^x, y_3(0) \cdot e^x\right)^T$. To dosadíme zpátky:

$$\mathbf{u}(x) = [\mathrm{id}]^K_B \mathbf{y}(x) = [\mathrm{id}]^K_B \cdot \begin{pmatrix} e^{2^n x} & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix} \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2^n x} & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}(0) =$$

$$= \begin{pmatrix} -3e^x + 4e^{2^n \cdot x} \\ -2e^x + 4e^{2^n \cdot x} \\ -1e^x + 4e^{2^n \cdot x} \end{pmatrix}.$$