1 Řady

1.1 Úvod

Definice 1.1

Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost. Číslo $s_m = a_1+a_2+\ldots+a_m$ nazveme m-tým částečným součtem řady $\sum a_n$. Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, pokud tato limita existuje. Je-li tato limita konečná, pak řekneme, že řada je konvergentní. Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je divergentní. Tuto limitu budeme značit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 1.1 (Nutná podmínka konvergence)

Jestliže je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m = s \in \mathbb{R}$. $a_n = s_n - s_{n-1}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$ □

Pozor
Tato věta je pouze a jen implikace.

Věta 1.2 (konvergence součtu řad)

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\cdot a_n$ konverguje.

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\exists$ limita z $s_m \to s \in \mathbb{R}$ a to je z AL právě tehdy, když konverguje $\alpha s_m \to \alpha\cdot s \in \mathbb{R}$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\cdot a_n$ konverguje.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma \in \mathbb{R}$ konvergují, tedy konverguje i $s_m + \sigma_m \to s+\sigma \in \mathbb{R}$. □

1.2 Řady s nezápornými členy

Pozorování
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je řada s nezápornými členy. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, nebo má součet $+\infty$.

Důkaz
$s_m = a_1 + \ldots + a_m \leq a_1 + \ldots + a_{m+1} = s_{m+1}$. $s_m \geq 0$ neklesající $\implies \exists \lim_{m\to\infty} s_m \in [0,\infty]$. □

Věta 1.3 (Srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

Důkaz
a) Označme $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ a $\sigma_n = b_1 + \ldots + b_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$s_n = a_1 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n \leq a_1 + \ldots + a_{n_0} + b_{n_0+1} + \ldots + b_n \leq a_1 + \ldots + a_{n_0} + \sigma_n \leq a_1 + \ldots + a_{n_0} + \sigma$$

A to je konečné, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tedy $\sigma \in \mathbb{R}$. s_n neklesající a omezená $\implies$ $\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$.

b) Nepřímím důkazem z a). □

Věta 1.4 (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže $A \in (0,\infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Jestliže $A = 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Jestliže $A = \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Důkaz
(i) Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in (0,\infty)$ plyne, k $\varepsilon = \frac{K}{2} \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon = \frac{K}{2}$, tedy $\frac{K}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}K$.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\overset{\text{konvergence součtu řad}}{\implies}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}K \cdot b_n$ konverguje $\wedge a_n \leq \frac{3}{2}K \cdot b_n \overset{\text{Srov. kritérium}}{\implies}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\wedge \frac{K}{2} \cdot b_n \leq a_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{2} \cdot b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

(ii) Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ plyne, k $\varepsilon = 1 \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon = 1$, tedy $a_n < b_n$, a pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle srovnávacího kritéria.

(iii) Úplně stejně jako (ii). □