Příklad (5)
Find all distributions U on $\mathbb{R}$ satisfying $\sin \cdot U = 0$.

Řešení
Nejprve dokážeme, že „$\operatorname{supp} U \subseteq \{k \cdot \pi | k \in \mathbb{Z}\} =: \pi\mathbb{Z}$“: Máme-li $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ takovou, že $\operatorname{supp} \varphi \subset (a, b)$ pro nějaký interval $[a, b] \cap \pi\mathbb{Z} = \varnothing$. Potom definujme

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a, b) \\ \frac{\varphi(x)}{\sin(x)}, & x \in (a, b) \end{cases} .$$

Potom ψ je zřejmě dobře definované, neboť $\sin(x) \neq 0$ pro žádné $x \in (a, b)$. Navíc podíl dvou C^∞ funkcí, kde jmenovatel nenabývá nuly, je C^∞ funkce, a zřejmě každá derivace bude mít support uvnitř (a, b). Tedy $\psi \in C^\infty$. Tudíž dostáváme, co jsme chtěli dokázat:

$$0 = (\sin \cdot U)(\psi) = U(\sin \cdot \psi) = U(\varphi).$$

Nyní mějme $\varepsilon < 1/4$ hladké jádro h_ε a definujme $\xi_k = \chi_{B(k \cdot \pi, \varepsilon)} * h_\varepsilon$ a pro libovolné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ definujme $\varphi_k = \xi_k \cdot \varphi$. Potom $\operatorname{supp} \varphi_k \subset B(k \cdot \pi, 1/2)$ a $\operatorname{supp} \left(\varphi - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k\right) \cap \pi\mathbb{Z} = \varnothing$ (v sumě je pouze konečně mnoho nenulových prvků, protože $\operatorname{supp} \varphi$ je kompaktní). Tedy (s použitím linearity U):

$$U(\varphi) = U\left(\left(\varphi - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k\right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k\right) = U\left(\varphi - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k\right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(\varphi_k).$$

První člen napravo je nulový z Větičky 12 bod c), druhý „člen“ pak má pro každé k tvar $U(\varphi_k) = \sum_{\alpha, |\alpha| \leqslant N_k} c_{k,\alpha} D^\alpha \Lambda_{\delta_{k \cdot \pi}}$ pro $c_{k,\alpha} \in \mathbb{R}$ a nějaké $N_k \in \mathbb{N}_0$, neboť buď je $k \cdot \pi \in \operatorname{supp} U$ a pak je $\operatorname{supp} U|_{B(k \cdot \pi, 1/2)} = \{k \cdot \pi\}$, tedy použijeme Větičku 12 bod e), nebo je $k \cdot \pi \notin \operatorname{supp} U$ a pak je $U|_{B(k \cdot \pi, 1/2)} = 0$ (to nám přidává všechna $c_{k,\alpha} = 0$).

Tedy všechna taková U jsou přesně

$$U = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha, |\alpha| \leqslant N_k} c_{k,\alpha} D^\alpha \Lambda_{\delta_{k \cdot \pi}},$$

kde pro všechna k je $N_k \in \mathbb{N}_0$ a pro všechna $|\alpha| \leqslant N_k$ pak $c_{k,\alpha} \in \mathbb{R}$. $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ máme z toho, že $U|_{\mathcal{D}_K(\mathbb{R})}$ je spojitá (Tvrzení 6 bod (3) a uzavřenost $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ na sčítání).

Find all distributions V on $\mathbb{R}$ satisfying $\sin \cdot V = \Lambda_1$.

Řešení
Jsou-li V_1 a V_2 takové distribuce, pak $\sin\cdot(V_1 - V_2) = \sin\cdot V_1 - \sin\cdot V_2 = \Lambda_1 - \Lambda_1 = 0$. Tedy všechna taková V se liší právě o řešení předchozí části.

Tedy hledáme jedno řešení. Ukážeme, že jedno takové řešení je

$$\Lambda(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus\left(\pi\mathbb{Z}+B\left(\mathbf{o},\frac{1}{n}\right)\right)} \frac{\varphi(x)}{\sin(x)}dx, \qquad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Z TODO(název věty) nám stačí ukázat, že Λ_n jsou distribuce a že $\exists \lim_{n\to\infty}\Lambda_n(\varphi)\neq\pm\infty$ pro každé φ. To, že je $\Lambda_n = \Lambda_{\frac{1}{\sin}}$ je distribuce je jasné, neboť $\frac{1}{\sin}$ je lokálně integrovatelná, neboť je dokonce omezená, na $\mathbb{R}\setminus\left(\pi\mathbb{Z}+B\left(\mathbf{o},\frac{1}{n}\right)\right)$.

BÚNO $\operatorname{supp}\varphi\subset\left(-\frac{3}{4}\pi,\frac{3}{4}\pi\right)$, protože jinak použijeme na všechny nenulové funkce $\varphi_k = \varphi(\chi_{\{k\cdot\pi\}+\left(\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi\right)} * h_{\frac{1}{4}\pi})$ a na $\varphi - \sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_k$. Potom z definice derivace $\varphi'(0)$, která existuje z hladkosti φ, $\exists\,\varepsilon>0$ a $C_1 = 2\varphi'(0)$, že $\varphi(x)$ je mezi 0 a $\varphi(0)+C_2\cdot x$ na intervalu $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Navíc můžeme z definice derivace $\sin'(0)=1$ (-1 v případě lichých k) zvolit ε takové, aby i $|\sin(x)|>\frac{|x|}{2}$ na intervalu $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Nechť $m>n>\frac{1}{\varepsilon}$, potom

$$|\Lambda_n(\varphi)-\Lambda_m(\varphi)| = \left|\int_{\mathbb{R}\setminus\left(\pi\mathbb{Z}+B\left(\mathbf{o},\frac{1}{n}\right)\right)}\frac{\varphi(x)}{\sin(x)}dx - \int_{\mathbb{R}\setminus\left(\pi\mathbb{Z}+B\left(\mathbf{o},\frac{1}{m}\right)\right)}\frac{\varphi(x)}{\sin(x)}dx\right| =$$

$$= \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}}\frac{\varphi(x)}{\sin(x)}dx + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}\frac{\varphi(x)}{\sin(x)}dx\right| =$$

$$= \left|\underbrace{\int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}}\frac{\varphi(0)}{\sin(x)}dx + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}\frac{\varphi(0)}{\sin(x)}dx}_{=0} + \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\sin(x)}dx + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\sin(x)}dx\right|$$