Příklad (10.6)
Je dána afinní kuželosečka $\tilde{Q}$ s rovnicí

$$11x^2 + 4xy + 14y^2 - 4x - 28y - 16 = 0.$$

- Ukažte, že $\tilde{Q}$ je regulární kuželosečka.
- Určete její afinní typ.
- Určete tečny k $\tilde{Q}$ z bodu $[-1, -1]$.
- Nalezněte její střed a asymptoty $\tilde{Q}$, jestliže existují.
- Nalezněte její osy, vrcholy a délky poloos.
- Nalezněte nějakou parametrizaci $\tilde{Q}$ a ukažte, že všechny vrcholy jsou body s nejmenší či největší znaménkovou křivostí.

Řešení
$\tilde{Q}$ lze ztotožnit s průnikem projektivní kuželosečky

$$Q = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{P}^2 \middle| \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & -14 \\ -2 & -14 & -16 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 0 \right\}$$

s projektivní rovinou „$x_3 = 1$“. Matice má determinant

$$11 \cdot 14 \cdot (-16) + 2 \cdot (-14) \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 \cdot (-14) - (-2) \cdot 14 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 \cdot (-16) - 11 \cdot (-14) \cdot (-14) = -4500,$$

tedy je regulární a určuje tudíž regulární kuželosečku.

Body mimo $x_3 = 1$ jsou právě ty, pro které $x_3 = 0$, tedy:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & -14 \\ -2 & -14 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Tato matice má hlavní minory 11 a 150, tedy je pozitivně definitní, tudíž jediné řešení je $x_1 = x_2 = 0$, ale $\mathbf{o} \notin \mathbb{P}^2$.

Tudíž kuželosečka nemá žádné nevlastní body, takže je to elipsa.

Tečné body jsou průnikem poláry s kuželosečkou a poláru spočítáme z definice jak

$$(p_1, p_2, 1) \begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & -14 \\ -2 & -14 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -15p_1 - 30p_2 = 0, \qquad p_1 = -2p_2.$$

Najdeme průsečíky tak, že dosadíme do rovnice kuželosečky:

$$44p_2^2 - 8p_2^2 + 14p_2^2 + 8p_2 - 28p_2 - 16 = 0, \qquad p_2 = \frac{1 \pm 3}{5}, \qquad p_1 = -\frac{2 \pm 6}{5},$$

tedy tečny jsou

$$t_{(1)} : \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3/5 \\ 9/5 \end{pmatrix}, \qquad t_{(2)} : \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 9/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

Řešení (Afinní zobrazení)
Je to elipsa tedy nemá žádné asymptoty. Pro další části chceme najít afinní zobrazení převádějící elipsu $x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0$ na $\tilde{Q}$. To je tvaru (aby zobrazovalo zase do afinní roviny $x_3 = 1$)

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

tak, aby $x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0$ právě tehdy, když ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, 1)^T$)

$$(A\mathbf{x} + \mathbf{b})^T \begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & -14 \\ -2 & -14 & -16 \end{pmatrix} (A\mathbf{x} + \mathbf{b}) = 0.$$

Ještě chceme, aby se osy zobrazily na osy $\tilde{Q}$, tedy vhodným kandidátem na A_{22} –„horní čtverec“ A – je matice přechodu od kanonické báze k bázi vlastních vektorů $\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$ „vydělená“ odmocninami vlastními čísly[a]

$$A_{22} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$

Nyní se můžeme podívat jak by vypadala kuželosečka, kdyby $\mathbf{b} = \mathbf{o}$:

$$(A\mathbf{x})^T \cdot (\dots) \cdot A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \cdot A^T(\dots)A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ -\sqrt{2} & -2\sqrt{3} & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2\sqrt{2}x_1 - 4\sqrt{3}x_2 - 16 = (x_1 - \sqrt{2})^2 + (x_2 - 2\sqrt{3})^2 - 30 = 0.$$

Z toho je vidět, že $r = \sqrt{30}$ a že kdybychom posunuly kuželosečku před zobrazením maticí, tak by to bylo o vektor $(\sqrt{2}, 2\sqrt{3})^T$. Z toho však snadno dostaneme posunutí výsledné kuželosečky:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A_{22} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{50}} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{75}} \cdot 2sqrt3 \\ \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{75}} \cdot 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\tilde{Q}$ můžeme vyjádřit jako obraz $x_1^2 + x_2^x - 30 = 0$ při zobrazení

$$(x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{50}} & \frac{1}{\sqrt{75}} \\ \frac{1}{\sqrt{50}} & \frac{2}{\sqrt{75}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ resp. } (x_1, x_2, 1) \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{50}} & \frac{1}{\sqrt{75}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{50}} & \frac{2}{\sqrt{75}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[a] Ty spočítáme přes charakteristický polynom a jádro matice mínus vlastní číslo krát jednotková.

Řešení (Střed, asymptoty, osy, vrcholy, délky poloos, parametrizace)
Střed vidíme ze zápisu zobrazení hned, je to bod $(0,-1)$ (tam se zobrazí počátek). Asymptoty elipsa nemá.

Osy jsou obrazy úseček $\overline{(-\sqrt{30},0)\ (\sqrt{30},0)}$ a $\overline{(0,-\sqrt{30})\ (0,\sqrt{30})}$ a (a vrcholy jsou jejich krajní body), tedy

$$\overline{\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+1 \end{pmatrix}}, \qquad \overline{\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+1 \end{pmatrix}}$$

poloviny jejich délek (tj. délky poloos) jsou

$$\sqrt{\left(2\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2}/2=\sqrt{3}, \qquad \sqrt{\left(2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(2\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2}/2=\sqrt{2}.$$

Pro parametrizaci můžeme vzít triviální parametrizaci vzorové kuželosečky $x_1^2+x_2^2-30=0$, tedy $(\sqrt{30}\sin t, \sqrt{30}\cos t)^T$ pro $t\in[0,2\pi=0]$ (zřejmě je „hladce uzavřená“, takže můžeme v 0 a 2π počítat jako by zde pokračovala). Tuto parametrizaci zobrazíme:

$$c(t)=\left(-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\sin t+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\sin t+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cos t+1\right)^T, \qquad t\in[0,2\pi].$$

Pro znaménkovou křivost potřebujeme první a druhou derivaci:

$$c'(t)=\left(-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cos t-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cos t-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\sin t\right)^T,$$

$$||c'(t)||=\sqrt{\frac{12}{5}\cos^2 t+\frac{2}{5}\sin^t t+\frac{3}{5}\cos^2 t+\frac{8}{5}\sin^2 t}=\sqrt{3\cos^2 t+2\sin^2 t},$$

$$c''(t)=\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\sin t-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cos t, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\sin t-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cos t\right)^T.$$

Znaménkovou křivost pak spočítáme přímo z definice:

$$\varkappa_z(t)=\frac{\det(c'(t)|c''(t))}{||c'(t)||^3}=\frac{5\sqrt{6}(\cos^2 t+\sin^2 t)+0\sin t\cos t}{5\sqrt{3\cos^2 t+2\sin^2 t}^3}=\sqrt{6}\frac{1}{\sqrt{3\cos^2 t+2\sin^2 t}^3},$$

což je zřejmě minimální v bodech, kde nabývá největší hodnoty cos a opačně, tedy minimum jsou $t=0,\pi$ a maximum $t=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$, což přesně odpovídá vrcholům (jsou to body na osách na původní kružnici).