Uvažujme skalární lineární diferenciální rovnici $y' = \lambda y$. Mějme midpoint metodu zadanou pomocí Butcherovy tabulky:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Příklad (6.1)
Vyjádřete přírůstkovou funkci $\Phi(t, y, h)$ midpoint metody. Poté napište předpis y_{k+1} pro zadanou rovnici a midpoint metodu (v závislosti na t_k, y_k, h, λ).

Řešení
Máme $f(t, y) = \lambda y(t)$. Tedy koeficienty jsou

$$K_1 = f(t + 0 \cdot h, y) = \lambda \cdot y(t),$$

$$K_2 = f\left(t + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}K_1 h\right) = \lambda \cdot \left(y(t) + \frac{1}{2}K_1 h\right) = \lambda \cdot \left(y(t) + \frac{1}{2}\lambda \cdot y(t)h\right).$$

Přírůstková funkce je pak $\Phi(t, y, h) = 0 + \lambda \cdot \big(y(t) + \frac{1}{2}\lambda \cdot y(t)h\big)$. Předpis je pak

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h) = y_n + h \cdot \lambda \cdot \left(y_n + \frac{1}{2}\lambda \cdot y_n h\right) = y_n \cdot \left(1 + h \cdot \lambda + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \lambda^2\right).$$

Příklad (6.2)
Vyšetřete midpoint metodu z hlediska A-stability vzhledem k rovnici. Určete, pro jaké délky časového kroku je metoda A-stabilní, když $\lambda = -25$. Poté ověřte konzistenci a řád 2 midpoint metody.

Řešení
Metoda je A-stabilní, pokud amplifikační faktor je (v absolutní hodnotě) menší než 1. Tj. $1 + h \cdot (-25) + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot (-25)^2$, tedy chceme aby $\frac{625}{2}h^2 - 25h = 25h\left(\frac{25}{2}h - 1\right) < 0$, takže je stabilní, pokud $h < \frac{2}{25}$.

Metoda je konzistentní pokud $\lim_{h\to 0} \Phi(t, y, h) = f(x, y)$. To zřejmě je, neboť

$$\lim_{h\to 0} \Phi(t, y, h) = \lim_{h\to 0} \lambda \cdot \left(y(t) + \frac{1}{2}\lambda \cdot y(t)h\right) = \lambda y + \lim_{h\to 0} h \cdot (\ldots) = \lambda y.$$

K řádu použijeme, že podle Taylora je $y(x + h) = y(x) + \frac{y'(x)}{1}h + \frac{y''(x)}{2}h^2 + o(h^3)$: $|\tau(x, y)| =$

$$\left|\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - y'(x) - \frac{h}{2}y''(x)\right| = \left|y'(x) + \frac{y''(x)}{2}h + o(h^2) - y'(x) - \frac{h}{2}y''(x)\right| = o(h^2).$$

Příklad (5.3)
Použijte předpis z první úlohy pro výpočet numerického řešení rovnice v čase $t = 1$ s $\lambda = -25$ a počáteční podmínkou $y(0) = 1$ pro časové kroky $h_1 = 0.1$ a $h_2 = 0.05$. Spočtěte globální chybu v čase $t = 1$. Odpovídá chování globální chyby výsledkům o A-stabilitě z druhé úlohy?

Řešení
Pro $h_1 = 0.1$ dává metoda řešení přibližně 128.39, což je úplně mimo. Pro druhou hodnotu $h_2 = 0.05 < \frac{2}{25} = 0.08$ dává metoda řešení přibližně $3.2 \cdot 10^{-6}$, což je pořád daleko od $\exp(-25) \approx 1.3888 \cdot 10^{-11}$, ale alespoň správným směrem a řádově „na půl cesty“. (Globální chyba je v prvním případě přibližně 128.39 a v druhém $3.2 \cdot 10^{-6}$.)