

# Organizační úvod

## *Poznámka*

Podmínkou zápočtu je splnění 1 domácí práce a 1 písemného testu. Není potřeba docházka.

Bude moodle (přístup dají cvičící). Budou tam poznámky k přednášce, cvičebnice a bude se tam odevzdávat domácí práce.

Je dobré umět míru.

## 1 Úvod

### *Poznámka*

Pravděpodobnost popisuje modely popisující náhodné jevy.

Statistika se pak snaží popsat reálné věci za pomoci těchto modelů.

### *Poznámka (Historie)*

Klasická pravděpodobnost navazuje na dílo Kolmogorova, který popisoval axiomatickou pravděpodobnost.

## 2 Pravděpodobnostní prostor

### **Definice 2.1** (Pravděpodobnostní prostor, pravděpodobnost)

Pravděpodobnostní prostor je trojice  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , kde  $\Omega$  je neprázdná množina,  $\mathcal{A}$  je  $\sigma$ -algebra a  $P$  je pravděpodobnost.

Pravděpodobnost  $P$  je množinová funkce  $\mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  splňující:

- $P(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$ , (nezápornost)
- $P(\Omega) = 1$ , (normovanost)
- jsou-li  $A_i \in \mathcal{A}$  po dvou disjunktní, pak  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ . ( $\sigma$ -aditivita)

┌ *Poznámka* (Interpretace)

$\Omega$  se často nazývá stavový prostor a obsahuje všechny „realizace náhody“ neboli elementární jevy, tj. všechny možnosti, o kterých uvažují.

$\mathcal{A}$  je  $\sigma$ -algebra náhodných jevů.  $P$  pak obsahuje veškerou informaci o té dané náhodné situaci.

└ Pokud nastal  $\omega \in A \in \mathcal{A}$  ( $\omega \in \Omega$ ), pak nastal jev  $A$ .

**Definice 2.2** (Klasický pravděpodobnostní prostor, diskrétní pravděpodobnostní prostor, spojitý pravděpodobnostní prostor, indikátor)

$\Omega$  konečná,  $\mathcal{A} = 2^\Omega$ ,  $P(\{a\}) = \frac{1}{n} \forall a \in \Omega$  je klasický pravděpodobnostní prostor.

$\Omega$  spočetná (včetně konečná),  $\mathcal{A} = 2^\Omega$ ,  $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$  je taková, že  $p(\omega) \geq 0 \forall \omega \in \Omega$  a  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ . Položíme  $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \forall A \in \mathcal{A}$  nazýváme diskrétní pravděpodobnostní prostor.

$\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ ) a  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  měřitelná, že  $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1$ , pak definujeme  $P(B) = \int_B g(x) dx$ ,  $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}$  je spojitý pravděpodobnostní prostor. Speciálním případem  $g(x) = 1_{[0,1]}(x)$  je pak tzv. indikátor.

**Definice 2.3** (Jev jistý, jev nemožný, podjev, zároveň, alespoň jeden, jev opačný, neslučitelné jevy)

$\Omega$  je jev jistý,  $\emptyset$  je jev nemožný,  $A \subset B$  znamená „ $A$  je podjev  $B$ “,  $A \cap B$  znamená „nastal  $A$  a zároveň  $B$ “,  $A \cup B$  znamená „nastal  $A$  nebo  $B$ “,  $A^C$  je jev opačný,  $A \cap B = \emptyset$  jsou neslučitelné jevy.

**Věta 2.1**

*Budte  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  pravděpodobnostní prostor a  $A, B, A_i \in \mathcal{A}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) náhodné jevy. Pak platí:*

- $P(\emptyset) = 0$ ;
- $P$  je konečně aditivní;
- $P(A^C) = 1 - P(A)$ ;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ;
- $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$ ; (monotonie)
- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \implies P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_i)$ ; (spojitost)
- $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \implies P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_i)$ ; (spojitost)
- $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \wedge \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \implies \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_i) = 0$ ; (spojitost v nule)
- $B \subset A \implies P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$ .

┌ *Důkaz*

Vše z míry. Pravděpodobnost je konečná, předposlední bod vyplývá z předchozího. □

*Poznámka*

28. února bude v 17:20 náhradní přednáška za poslední přednášku.

### Věta 2.2 (Princip inkluze a exkluze)

Buď  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  pravděpodobnostní prostor. Pak pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a každá  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , platí:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right).$$

┌ *Důkaz*

Nebude, v podstatě byl v diskřetce. □

## 3 Podmíněná pravděpodobnost

### Definice 3.1 (Podmíněná pravděpodobnost)

Buďte  $A, B \in \mathcal{A}$  takové, že  $P(B) > 0$ . Definujeme  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  a nazýváme ji podmíněnou pravděpodobností jevu  $A$  za podmínky (jevu)  $B$ .

### Věta 3.1

Buď  $B \in \mathcal{A}$  takové, že  $P(B) > 0$ . Pak zobrazení  $P(\cdot|B) : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  splňuje definici pravděpodobnosti.

┌ *Důkaz*

Ověříme po bodech: zřejmě  $P(A|B) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$ ,  $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$  a  $\sigma$ -aditivita plyne ze  $\sigma$ -aditivity  $P(\cdot \cap B)$  a deMorganových pravidel ( $B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B$ ),  $P(B)^{-1}$  se prostě z obou stran vytkne. □

*Pozor*

Podmíněná pravděpodobnost nám neříká nic o příčinné souvislosti.

*Pozorování* (O podmíněné pravděpodobnosti)

Buďte  $A, B, C \in \mathcal{A}$  a pravděpodobnost „správných“ jevů nenulová. Pak:

- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$ ,

- $B \subset A \implies P(A|B) = 1$ ,
- $A \cap B = \emptyset \implies P(A|B) = 0$ ,
- $P(A|\Omega) = P(A)$ ,
- pokud  $P(\{\omega\}) > 0$ , pak  $\forall A \in \mathcal{A}$  platí  $P(A|\{\omega\}) = \delta_\omega(A)$ .

┌  
Důkaz

Triviální (buď z definice, nebo z toho, že je to pravděpodobnost). □

└

*Pozor (Neplatí!)*

$P(A|B \cup C) = P(A|B) + P(A|C)$ , ani v případě, že  $A \cap B = \emptyset$ .

### Věta 3.2 (O násobení pravděpodobností)

Budte  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  takové, že  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ . Pak

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}) \cdot \dots \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1).$$

┌  
Důkaz

Z  $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$  plyne, že  $P(A_1 \cap \dots \cap A_k) > 0$  pro  $k \in [n-1]$ , pomocí monotonie pravděpodobnosti. Tedy výraz je dobře definován.

Dokážeme indukcí: Pro  $n = 2$  platí  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$  z definice. Z  $n - 1$  na  $n$ : ( $B := A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$ )

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= P(B \cap A_n) \stackrel{\text{def}}{=} P(A|B) \cdot P(B) \stackrel{\text{IP}}{=} \\ &= P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}) \cdot \dots \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1). \end{aligned}$$

└ □

### Věta 3.3 (O celkové pravděpodobnosti)

Budte  $A, B_1, B_2, \dots$  náhodné jevy takové, že  $P(\bigcup_n B_n) = 1$  a  $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i \neq j$  a  $P(B_i) > 0 \forall i$ . Potom  $P(A) = \sum_n P(A|B_n) \cdot P(B_n)$ .

┌ *Důkaz*

Víme  $P((\bigcup_n B_n)^c) = 0$ , a tedy  $P(A) = P(A \cap \bigcup_n B_n) + P(A \cap (\bigcup_n B_n)^c) = P(A \cap \bigcup_n B_n)$ , protože  $P$  je konečně-aditivní a platí monotonie. Dle de Morganových pravidel (a toho, že průnik s další množinou zachovává disjunktnost):

$$P(A) = P\left(\bigcup_n (A \cap B_n)\right) = \sum_n P(A \cap B_n) = \sum_n P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$

└

□

### Věta 3.4 (Bayesova)

*Za předpokladů věty o celkové pravděpodobnosti a  $P(A) > 0$ , platí  $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_n P(A|B_n)P(B_n)}$ .*

┌ *Důkaz*

Snadný z definice podmíněné pravděpodobnosti a věty o celkové pravděpodobnosti. □

*Příklad (Pólyovo urnové schéma)*

Máme v urně  $n$  koulí  $k$  různých barev. Náhodně taháme z urny. Po vytažení koule do urny vytaženou kouli vrátíme a s ní i  $\Delta$  (pevný parametr) koulí stejné barvy.

Podle volby  $\Delta$  máme 2 základní schémata:  $\Delta = -1$  (tahání bez vracení) a  $\Delta = 0$  (tahání s vracením).

### Definice 3.2 (Nezávislé jevy)

Náhodné jevy  $A$  a  $B$  jsou nezávislé, pokud platí  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

*Pozor*

Zase to nemá nic do činění s kauzalitou.

### Věta 3.5

*Jsou-li dva jevy  $A$  a  $B$  nezávislé, pak jsou i jevy  $A$  a  $B^c$  nezávislé.*

*Je-li navíc  $P(B) > 0$ , pak  $P(A|B) = P(A)$ .*

┌  
Důkaz

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B).$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

└

□

### Definice 3.3 (Vzájemná nezávislost)

Buď  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  systém náhodných jevů. Pak říkáme, že tyto jevy jsou (vzájemně) nezávislé, pokud pro každou konečnou množinu  $I \subset \Lambda$  (dále  $I \in \mathcal{F}(\Lambda)$ ) platí  $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$ .

### Věta 3.6

Buď  $C = \{B_1, \dots, B_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , systém nezávislých jevů. Nahradíme-li libovolnou podmnožinu těchto jevů jejich doplňky, dostaneme opět systém nezávislých jevů

┌  
Důkaz

Indukcí podle velikosti nahrazované množiny. (Použije se předchozí věta.)

└

□

### Věta 3.7

Jsou-li jevy  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$  vzájemně nezávislé a  $P(B_1 \cap \dots \cap B_m) > 0$ , pak

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n | B_1 \cap \dots \cap B_m) = P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

┌  
Důkaz

Snadný.

└

□

## 4 Náhodné veličiny

### Definice 4.1 (Náhodný element)

Buďte  $(\Omega, \mathcal{A})$  a  $(\Omega', \mathcal{A}')$  stavové prostory. Pak každé měřitelné zobrazení  $X : \Omega \rightarrow \Omega'$  nazveme náhodný element z  $\Omega'$ .

### Definice 4.2 (Náhodná veličina)

Měřitelné zobrazení  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  nazveme (reálnou) náhodnou veličinou.

**Definice 4.3** (Značení)

Místo  $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$  píšeme  $\{X \leq a\}$ , místo  $P(\{X \leq a\})$  píšeme  $P(X \leq a)$ .

**Definice 4.4**

Buď  $X$  náhodná veličina.  $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$  značíme  $\sigma(X)$  a nazýváme  $\sigma$ -algebrou náhodných jevů generovaných náhodnou veličinou  $X$  ( $\sigma$ -algebra indukovaná  $X$ ).

**Definice 4.5** (Rozdělení náhodné veličiny)

Rozdělení náhodné veličiny  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  rozumíme indukovanou pravděpodobnostní mírou  $P_X$  na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  definovanou jako

$$P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

*Poznámka* (A důkaz, že je to pravděpodobnostní míra)

$P_X$  je obraz míry  $P$  v zobrazení  $X$ .

**Věta 4.1** (O přenosu integrace pro  $P_X$ )

Buď  $X$  náhodná veličina a buď  $h$  měřitelná funkce  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Pak platí

$$\int_{\Omega} h(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(x) dP_X(x),$$

pokud existuje alespoň jedna strana.

*Důkaz*

Speciální případ věty o obrazu míry z TMI1.

□

**Definice 4.6** (Hustota náhodné veličiny)

Buď  $X$  náhodná veličina,  $P_X$  její rozdělení a  $\mu$   $\sigma$ -konečná míra na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  taková, že  $P_X \ll \mu$ . Potom  $f(x) = \frac{dP_X}{d\mu}(x)$  se nazývá hustota náhodné veličiny  $X$  vzhledem k míře  $\mu$ .

*Poznámka*

$f(x)$  je určena jednoznačně  $\mu$ -skoro všude. Pokud pro  $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  měřitelnou platí

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dP_X(x) < \infty \quad (\forall g(x) \geq 0 \forall x),$$

pak  $\int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) d\mu(x)$ .

### Věta 4.2

Buď  $X$  náhodná veličina, pak platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} P(X \in B) &:= P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) = \int_{\Omega} 1_B(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} 1_B(x) dP_X(x) = \int_B dP_X(x) = P_X(B) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1_B(x) dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_B(x) f(x) d\mu(x) = \int_B f(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

┌ Důkaz

└ Je to jen sesypání faktů, které už známe. □

### Definice 4.7 (Distribuční funkce)

Mějme náhodnou veličinu  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Funkci  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definovanou jako  $F_X(x) = P(X \leq x)$  nazveme distribuční funkce náhodné veličiny  $X$ .

┌ Poznámka

Definice se shoduje s distribuční funkcí z TMI1. (A tedy platí věta o vlastnostech distribuční funkce, s tím, že dokonce  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ .)

### Věta 4.3

Buď  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  splňující vlastnosti distribuční funkce a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ . Pak existuje pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a náhodná veličina  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  taková, že  $F_X = F$ .

┌ Důkaz

Z TMI1 víme, že existuje Lebesgueova-Stieltjesova míra  $\mu$ , jejíž distribuční funkce je  $F$ . Tj.  $\mu((-\infty, a]) = F(a)$ . Teď chybí jen dodefinovat  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a  $X$ . Položíme  $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$  a  $X = \text{id}_{\mathbb{R}}$ . □

### Definice 4.8 (Názvosloví: diskrétní náhodná veličina, absolutně spojitá veličina)

Mějme diskrétní náhodnou veličinu  $P_X \equiv \mu_d$ , tj. existuje nejvýše spočetná  $\{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}$  a  $\{p_i\}_{i \in I} \subset (0, 1]$  takových, že  $\sum_{i \in I} p_i = 1$  a platí  $P_X = \sum_{i \in I} p_i \delta_{x_i}$ .

Potom nutně  $F_X(x) = \sum_{i \in I} p_i 1_{[x, \infty)}(x)$  a také platí, že  $P_X \ll \nu$ , kde  $\nu$  je čítací míra na  $\{x_i\}_{i \in I}$ .

(Absolutně) spojitá náhodná veličina je taková, že  $P_X = \mu_a \ll \lambda$ , takže  $P_X(B) \int_B f(x) d\mu$ .

### Definice 4.9 (Kvantilová funkce)

Buď  $F_X$  distribuční funkce náhodné veličiny  $X$ . Funkce  $F_X^{-1}(u) = \inf \{x | F_X(x) \geq u\}$ ,  $u \in (0, 1)$  se nazývá kvantilová funkce náhodné veličiny  $X$ .



┌ *Poznámka*

Bude potřeba později. Teď jen: Je neklesající a zleva spojitá. Lze z ní jednoznačně odvodit  $F_X$ .

*Pozor*

Kvantilová funkce obecně není inverzní funkcí k  $F_X$ , protože inverzní funkce nemusí existovat. Ale pro  $F_X$  rostoucí a spojitou je  $F_X^{-1}$  inverzní funkcí k  $F_X$ .

## 4.1 Střední hodnota, rozptyl a momenty náhodné veličiny

### Definice 4.10 (Střední hodnota)

Střední hodnota náhodné veličiny  $X$  je číslo  $\mathbb{E}X$  dané výrazem  $\mathbb{E}X = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$ , pokud má integrál smysl.

### Definice 4.11 (Medián)

Medián rozdělení náhodné veličiny  $X$  je číslo  $q_{\frac{1}{2}}$  splňující  $P(X \leq q_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}$  a  $P(X \geq q_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}$ .

### Věta 4.4

Bud'  $X$  náhodná veličina a  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  měřitelná funkce. Pak  $g(X)$  je také náhodná veličina a  $\mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_X(x)$ , pokud alespoň jeden z výrazů existuje.

┌ *Důkaz*

Složení 2 měřitelných funkcí je měřitelné, tj.  $g(X)$  je opravdu náhodná veličina.

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X(x).$$

┌ Druhá rovnost plyne ze vztahu mezi  $P_X$  a její distribuční funkcí. □

### Věta 4.5 (Základní vlastnosti $\mathbb{E}X$ )

Bud'  $X, Y$  náhodné veličiny na stejném pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Pak platí

$$\mathbb{E}(a + bX) = a + b\mathbb{E}X, \quad X \in L^1, a, b \in \mathbb{R},$$

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y, \quad X, Y \in L^1,$$

$$P(X \geq 0) = 1 \implies \mathbb{E}X \geq 0, \quad (\text{obecněji } P(X \in [a, b]) = 1 \implies \mathbb{E}X \in [a, b]),$$

$$X \in L^1 \implies |X| \in L^1,$$

$$X \leq Y, P\text{-skoro všude} \implies \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y (\text{pokud existují}).$$

┌ *Důkaz*

└ Snadný, aplikace míry. □

### **Definice 4.12** (Názvosloví: $P$ -skoro jistě)

$P$ -skoro jistě znamená  $P$ -skoro všude.

### **Definice 4.13** ( $n - t$ moment)

$n$ -tý moment náhodné veličiny  $X$  definujeme jako  $\mathbb{E}X^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$n$ -tý absolutní moment náhodné veličiny  $X$  definujeme jako  $\mathbb{E}|X|^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$n$ -tý centrální moment náhodné veličiny  $X$  definujeme jako  $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , pokud  $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}$ .

$n$ -tý absolutní centrální moment náhodné veličiny  $X$  definujeme jako  $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , pokud  $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}$ .

┌ *Poznámka*

└ 1-ní moment je  $\mathbb{E}X$ . První centrální moment je 0.

### **Definice 4.14** (Rozptyl)

Rozptyl náhodné veličiny  $X$  je definován jako  $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$ . Značí se  $\text{var } X$ .

┌ *Poznámka*

└ Rozptyl je střední čtvercová odchylka  $X$  od  $\mathbb{E}X$ .  $\text{var } X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \geq 0$ .  $\text{var } X = 0$  právě tehdy, když  $X = \mathbb{E}X$  skoro jistě.

### **Věta 4.6** (Základní vlastnosti rozptylu)

$$\text{var}(a + bX) = b^2 \text{var } X, \quad a, b \in \mathbb{R} \wedge X \in L^2.$$

┌ *Důkaz*

$$\text{var}(a+bX) = \mathbb{E}(a+bX - \mathbb{E}(a+bX))^2 = \mathbb{E}(a+bX - a - b\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(bX - b\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(b(X - \mathbb{E}X))^2 = b^2 \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = b^2 \text{var } X.$$

└ □

### **Věta 4.7** (Čebyševova nerovnost)

Buď  $X \in L^1$  náhodná veličina. Pak  $P(|X - \mathbb{E}X| \geq a) \leq \frac{\text{var } X}{a^2}$ ,  $\forall a > 0$ .

┌ *Důkaz*

└ Viz TMI1. □

### Definice 4.15 (Markovova nerovnost)

Buď  $X \in L^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , náhodná veličina. Pak  $P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}|X|^n}{a^n}$ ,  $\forall a > 0$ .

┌ *Důkaz*

└ Obdobně Čebyševově větě. □

### Věta 4.8 (Nerovnost mezi $L^p$ normami na pravděpodobnostních prostorech)

Buď  $X$  náhodná veličina,  $0 < \alpha < \beta \in \mathbb{R}$  a  $\mathbb{E}|X|^\beta < \infty$ . Pak platí  $\sqrt[\alpha]{\mathbb{E}|X|^\alpha} \leq \sqrt[\beta]{\mathbb{E}|X|^\beta}$ , a speciálně tedy platí  $\mathbb{E}|X| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2}$ .

┌ *Důkaz*

$$\mathbb{E}|X|^\alpha = \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \cdot 1 dP_X(x) \stackrel{\text{Hölder na } p = \frac{\beta}{\alpha}}{\leq} \left( \int_{\mathbb{R}} |x|^\beta dP_X(x) \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} 1^\beta dP_X(x) \right)^{\frac{1}{\beta}} = \dots \cdot 1.$$

(Integrál napravo je konečný z předpokladů této věty, tedy splňujeme předpoklady Höldera.) Odmocněním  $\alpha$  dostáváme přesně chtěnou nerovnost. □

### Například (Absolutně spojitá rozdělení)

Rovnoměrné rozdělení intervalu  $[a, b]$ ,  $a < b \in \mathbb{R}$  značíme  $R([a, b])$  a jeho hustota je až na konstantu Lebesgueova míra:  $f_X(x) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(x)$ .

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 1, & t \geq b. \end{cases} \quad \mathbb{E}X = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}, \text{ var } X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exponenciální rozdělení s parametrem  $\lambda > 0$  značíme  $Exp(\lambda)$ .  $P(X > t) = e^{-t\lambda}$ ,  $t > 0$ .  $F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$  pro  $t \geq 0$  a 0 pro  $t \leq 0$ .  $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$  a  $f_X(x) = 0$  jinak.  $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$ ,  $\text{var } X = \frac{1}{\lambda^2}$ .

┌ *Poznámka*

└ Exponenciální rozdělení má vlastnost ztráty paměti, tedy že  $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$ ,  $s, t > 0$ .

Normální (Gaussovo) rozdělení: Normované  $N(0, 1)$  je  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .  $F_X(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ . Tyto  $F_X$  a  $f_X$  se často značí  $\Phi$  a  $\varphi$ .  $\mathbb{E}X = 0$  ( $x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  je lichá funkce),  $\text{var } X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 = 1$ .  $\mathbb{E}X^{2k+1} = 0$ .

Obecné  $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$  má  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

### Tvrzení 4.9

Bud'  $X$  nezáporná (tj.  $P(X \geq 0) = 1$ ) absolutně spojitá náhodná veličina, která splňuje  $P(X > s+t | X > s) = P(X > t)$ ,  $\forall s, t > 0$ , pak  $X \sim \text{Exp}$ .

┌ Důkaz

└ Dělat nebudeme. □

### Věta 4.10

$X \sim N(0, 1)$  a  $Y := \sigma X + \mu$ , pro  $\sigma > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ . Pak  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

┌ Důkaz

└ TODO!!! □

Důsledek

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\sigma Z + \mu \leq t) = P\left(Z \leq \frac{t - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right).$$

Důsledek

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(\sigma Z + \mu) = \mu + \sigma \mathbb{E}Z = \mu + 0 = \mu.$$

$$\text{var } Y = \text{var}(\sigma Z + \mu) = \sigma^2 \cdot \text{var } Z = \sigma^2.$$

### Věta 4.11 (Rozdělení funkce náhodné veličiny)

Bud'  $X$  náhodná veličina s distribuční funkcí  $F_X$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  měřitelná funkce. Pak  $Y = g(X)$  je náhodná veličina s distribuční funkcí  $F_Y(y) = \int_{\{x|g(x) \leq y\}} dF_X(x)$ .

┌ Důkaz

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P_X(\{x|g(x) \leq y\}) = \int_{\{x|g(x) \leq y\}} dF_X(x).$$

└ □

## 5 Náhodné vektory

**Definice 5.1** (Náhodný vektor)

Měřitelné zobrazení  $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , nazveme náhodným vektorem.

**Definice 5.2** (Rozdělení náhodného vektoru)

Rozdělením náhodného vektoru  $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$  nazveme indukovanou pravděpodobnostní míru  $P_{\mathbf{X}}$  na  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$  definovanou jako  $P_{\mathbf{X}}(B) = P(\{\omega \in \Omega \mid \mathbf{X}(\omega) \in B\})$ ,  $B \in \mathcal{B}^n$ .

**Definice 5.3** ((Sdružená) distribuční funkce)

(Sdružená) distribuční funkce náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  je definována jako

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P\left(\bigcup_{i=1}^b (X_i \leq x_i)\right), \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

*Poznámka*

$F_{\mathbf{X}}$  jednoznačně určuje  $P_{\mathbf{X}}$ .

**Věta 5.1** (O marginální distribuční funkci)

Bud'  $\mathbf{X}$   $n$ -rozměrný náhodný vektor s distribuční funkcí  $F_{\mathbf{X}}$ . Pak pro každé  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  platí

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{(X_1, \dots, X_{n-1})^T}(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

kde  $F_{(X_1, \dots, X_{n-1})^T}$  je distribuční funkce náhodného vektoru  $(X_1, \dots, X_{n-1})^T$ .

*Důkaz*

Použijeme Heineho větu: Necht' máme posloupnost čísel  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$  takových, že  $y_k \rightarrow \infty$ . Označme  $B = \bigcup_{i=1}^{n-1} \{X_i \leq x_i\}$ .  $B_k = (\bigcup_{i=1}^{n-1} \{X_i \leq x_i\}) \cap \{X_n \leq y_k\}$ ,  $D_k = (\bigcup_{l=k}^{\infty} B_l^c)^c$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Zřejmě  $D_k \subseteq B_k \subset B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$  a  $D_k \nearrow B$ . Ze spojitosti  $P$  máme  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(D_k) = P(B)$ . Nakonec z monotonie  $P$  máme  $P(D_k) \leq P(B_k) \leq P(B)$ , tedy ze dvou strážníků  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(B_k) = P(B)$ .  $\square$

*Poznámka*

Pro každou permutaci  $\pi \in \mathcal{S}_n$  platí

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})^T}(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

Rozdělení  $P_{\mathbf{Y}}$  podvektoru  $\mathbf{Y} = (X_j)_{j \in J}$ ,  $J \subset \{1, \dots, n\} = I$  se nazývá marginální rozdělení (a distribuční funkce se nazývá marginální distribuční funkce).

Rozdělení  $(X_1, \dots, X_n)$  určuje rozdělení  $X_1, \dots, X_n$ , ale ne naopak.

**Definice 5.4** (Značení)

Mějme dva body  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  a buď  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  takový, že  $c_i \in \{a_i, b_i\}, \forall i \in [n]$ . Potom

$$\Delta_{n,k} = \{c | c_i = a_i \text{ právě pro } k \text{ indexů}\}, \quad k \in [n]_0.$$

**Věta 5.2** (O vlastnostech sdružené distribuční funkce)

*Distribuční funkce náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  splňuje:*

1.  $\lim_{x_i \rightarrow \infty \forall i} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 1;$
2.  $\forall j \forall x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n : \lim_{x_j \rightarrow -\infty} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0;$
3.  $F_{\mathbf{X}}$  je zprava spojitá v každé proměnné;
4.  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, a_i < b_i, \forall i \in [n]$  platí  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{\mathbf{c} \in \Delta_{n,k}} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{c}) \geq 0$ . („Monotonie“.)

┌

*Důkaz*

1. Uvědomme si, že  $x_i \rightarrow \infty, \forall i \in [n] \Leftrightarrow \min_{i \in [n]} x_i \rightarrow \infty$ . Z monotonie pravděpodobnosti  $P$  máme  $1 \geq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \geq F_{\mathbf{X}}(\min_i x_i \cdot (1, \dots, 1))$ . Stačí ukázat, že pro funkci  $H(x) := F_{\mathbf{X}}(x \cdot (1, \dots, 1))$  platí  $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 1$ .  $H(x)$  je neklesající funkce  $x$  (z monotonie pravděpodobnosti  $P$  a definice distribuční funkce) a  $H(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Takže musí  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} H(x) \leq 1$  a nutně bude i rovna limitě  $\lim_{k \rightarrow \infty} H(k)$ . Označme  $B_k = (-\infty, k \cdot (1, \dots, 1)]$ . Platí  $B_k \nearrow \mathbb{R}^n$ , takže ze spojitosti pravděpodobnosti  $H(k) = P_{\mathbf{X}}(B_k) \rightarrow 1$ .

2. 3. analogicky (za domácí úkol).

4. (jen pro  $n = 2$ , pro  $n > 2$  je důkaz zbytečně technický):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{\mathbf{c} \in \Delta_{n,k}} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{c}) &= F_{\mathbf{X}}(b_1, b_2) - [F_{\mathbf{X}}(b_1, a_2) + F_{\mathbf{X}}(a_1, b_2)] + F_{\mathbf{X}}(a_1, a_2) = \\ &= [F_{\mathbf{X}}(b_1, b_2) - F_{\mathbf{X}}(b_1, a_2)] - [F_{\mathbf{X}}(a_1, b_2) - F_{\mathbf{X}}(a_1, a_2)] = \\ &= P(X_1 \leq b_1 \wedge a_2 < X_2 \leq b_2) - P(X_1 \leq a_1 \wedge a_2 < X_2 \leq b_2) = \\ &= P(a_1 < X_1 \leq b_1 \wedge a_2 < X_2 \leq b_2). \end{aligned}$$

└

□

*Poznámka*

Pro každý interval  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  v  $\mathbb{R}^n$  definujeme  $\mu_F((\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = 4$ . z předchozího pro  $F$  splňující tvrzení předchozí věty. Potom lze rozšířit  $\mu_F$  na konečnou borelovskou míru na  $\mathbb{R}^n$  a té se říká Lebesgueova-Stieltjesova míra příslušná  $F$ .

Pokud  $F = F_{\mathbf{X}}$  od  $\mathbf{X}$  s rozdělením  $P_{\mathbf{X}}$ , pak nutně  $\mu_F = P_{\mathbf{X}}$ , neboť se rovnají na intervalech  $\{(\mathbf{a}, \mathbf{b}] | \mathbf{a} < \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n\}$ , což je systém uzavřený na konečné průniky generující  $\mathcal{B}^n$ .

### Věta 5.3

Nechť  $F$  splňuje vlastnosti sdružené distribuční funkce. Pak  $\exists$  pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a náhodný vektor  $\mathbf{X}$  takový, že  $F = F_{\mathbf{X}}$ .

┌

*Důkaz*

Vezměme  $\Omega := \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}^n$ ,  $P = \mu_F$  a  $\mathbf{X} = \text{id}$ . Pak je  $\mathbf{X}$  zřejmě měřitelné, tedy je to náhodný vektor. Navíc

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(\{\omega \in \Omega | \omega_i \leq x_i, \forall i \in [n]\}) = \mu_F((-\infty, \mathbf{x}]) = F(\mathbf{x}).$$

└

□

### Definice 5.5 (Diskrétní rozdělení)

Náhodný vektor  $\mathbf{X}$  má diskrétní rozdělení, pokud  $\exists$  (konečná nebo spočetná) množina  $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^n$  a hodnoty  $\{p_i\}_{i \in I}$  splňující  $\forall i \in I : p_i \in (0, 1]$ ,  $\sum_{i \in I} p_i = 1$ , tak že  $P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i) = p_i$ .

┌

*Poznámka*

Pak nutně  $P_{\mathbf{X}} = \sum_{i \in I} p_i \delta_{\mathbf{x}_i}$ .

└

Také zřejmě marginální rozdělení jsou též diskrétní.

### Definice 5.6 ((Absolutně) spojité rozdělení)

Náhodný vektor  $\mathbf{X}$  má (absolutně) spojité rozdělení, existuje-li nezáporná měřitelná funkce  $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{(-\infty, x_1]} \int_{(-\infty, x_2]} \dots \int_{(-\infty, x_n]} f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots dt_1, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

*Poznámka*

To nastává právě tehdy, když  $P_{\mathbf{X}} \ll \lambda^n$ . Potom  $f_{\mathbf{X}} = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{\mathbf{X}}$   $\lambda^n$  skoro všude.

### Věta 5.4 (O hustotě $P_{\mathbf{X}}$ vzhledem k součinové referenční míře)

Buď  $P_{\mathbf{X}}$  rozdělení  $n$ -rozměrného náhodného vektoru  $\mathbf{X}$ . Nechť  $P_{\mathbf{X}} \ll \nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n$  (součin  $\sigma$ -konečných měr na  $\mathbb{R}$ ). Pak  $P_{X_i} \ll \nu_i$ ,  $\forall i \in [n]$ , a existují nezáporné měřitelné funkce  $f_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f_{x_i} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $i \in [n]$  takové, že

$$P_{\mathbf{X}}((-\infty, \mathbf{x}]) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{(-\infty, x_1]} \dots \int_{(-\infty, x_n]} f_{\mathbf{x}}(t_1, \dots, t_n) d\nu_n(t_n) \dots d\nu_1(t_1), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$P_{\mathbf{X}}(B) = \int_B f_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) d(\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n)(\mathbf{t}), \quad \forall B \in \mathcal{B}^n.$$

Navíc pro každé  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in [n]$  platí

$$F_{X_i}(x_i) = \int_{(-\infty, x_i]} f_{x_i}(t) d\nu_i(t),$$

kde  $f_{X_i}(y_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{x}}(y_1, \dots, y_n) d(\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_{i-1} \otimes \nu_{i+1} \otimes \dots \otimes \nu_n)(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$  pro  $\nu_i$ -skoro všechna  $y_i \in \mathbb{R}$ .

┌

*Důkaz*

Snadný: existence a tvrzení o  $f_{\mathbf{x}}$  plyne z Radon-Nikodymovy věty a přepis v 1. vzorci a tvrzení o  $f_i$  plyne z Fubiniovy věty a věty o marginální distribuční funkci.  $\square$

└

## 6 Nezávislé náhodné veličiny

### Definice 6.1 ((Vzájemně) nezávislé náhodné veličiny)

Bud  $\{X_i\}_{i \in I}$  systém náhodných veličin na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , kde  $I \neq \emptyset$  je libovolná indexová množina.  $\{X_i\}_{i \in I}$  nazveme (vzájemně) nezávislé, pokud  $\forall$  konečnou neprázdnou  $J \subset I$ , platí

$$P\left(\bigcap_{i \in J} \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i \in J} P(X_i \in B_i), \quad B_i \in \mathcal{B}, i \in J.$$

*Poznámka*

Pro nezávislé náhodné veličiny jsou jevy  $(X_i \in B_i)$  nezávislé.

### Věta 6.1 (O rozdělení vektoru s nezávislými složkami)

Bud  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  náhodný vektor. Pak  $\{X_i\}_{i=1}^n$  jsou nezávislé náhodné veličiny právě tehdy, když  $P_{\mathbf{X}} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$ .

┌

*Důkaz*

„ $\Leftarrow$ “ zřejmě. „ $\Rightarrow$ “:  $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$  platí  $P_{\mathbf{X}}(B_1 \times \dots \times B_n) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(B_i)$  plyne z definice nezávislosti, takže  $P_{\mathbf{X}}$  se rovná součinové míře na měřitelných obdélnících  $\{B_1 \times \dots \times B_n | B_i \in \mathcal{B}\}$ , ale tento systém je uzavřený na konečné průniky a generuje  $\mathcal{B}^n$ , tedy z věty o jednoznačnosti míry se  $P_{\mathbf{X}}$  a  $P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$  rovnají na celém  $\mathcal{B}^n$ .  $\square$

└

### Věta 6.2 (O distribuční funkci náhodného vektoru s nezávislými složkami)

Za předpokladů předchozí věty platí, že  $\{X_i\}_{i=1}^n$  jsou vzájemně nezávislé právě tehdy, když  $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .



┌  
Důkaz

„ $\implies$ “ zřejmě neboť  $F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = P(\bigcup \dots) = \prod P(X_i \in (-\infty, x_i]) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$ .  
 „ $\impliedby$ “: Množiny  $(-\infty, \dots] \times \dots$  tvoří systém uzavřený na konečné průniky a generující  $\mathcal{B}^n$ , tedy z rovnosti  $P_{\mathbf{X}}$  a součinnové míry na tomto systému už plyne rovnost dvou měr na  $\mathcal{B}^n$  (pomocí věty o jednoznačnosti míry).  $\square$

### Věta 6.3 (O hustotě vektoru s nezávislými složkami)

Bud  $P_{\mathbf{X}}$  rozdělení  $n$ -rozměrného náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  splňující  $P_{\mathbf{X}} \ll \nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n$  (součin  $\sigma$ -konečných měr) a bud  $f_{\mathbf{X}}$  hustota náhodného vektoru  $\mathbf{X}$ . Pak náhodné veličiny  $X_1, \dots, X_n$  jsou vzájemně nezávislé  $\Leftrightarrow f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$  pro  $\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n$ -skoro všechna  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , kde  $f_{x_i} = \frac{dP_{X_i}}{d\nu_i}$ ,  $i \in [n]$ .

┌  
Důkaz

„ $\implies$ “: použijeme charakterizaci nezávislosti složek pomocí distribuční funkce:

$$\int_{(-\infty, \mathbf{x}]} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(t_i) d(\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n)(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(t_i) d\nu_n(t_n) \dots d\nu_1(t_1) = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{x_i} f_{x_i}(t_i) d\nu_i(t_i) \prod_{i=1}^n$$

Takže  $f_{\mathbf{X}} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}$   $\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n$ -skoro všude. „ $\impliedby$ “ dokážeme obdobně obráceným postupem.  $\square$

### Věta 6.4

Bud  $\{X_i\}_{i \in I}$  systém nezávislých náhodných veličin a  $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i \in I$  měřitelné funkce. Pak  $\{g_i(X_i)\}_{i \in I}$ .

┌  
Důkaz

Dokážeme z definice: Bud  $J \subset I$  konečná neprázdná

$$P\left(\bigcap_{i \in J} \{g_i(X_i) \in B_i\}\right) = P\left(\bigcap_{i \in J} \{X_i \in g_i^{-1}(B_i)\}\right) = \prod_{i \in J} P(X_i \in g_i^{-1}(B_i)) = \prod_{i \in J} P(g_i(x_i) \in B_i), \quad \forall B_i \in \mathcal{B}$$

└

$\square$

## 7 Momenty náhodného vektoru

### Definice 7.1 (Notace: střední hodnota náhodného vektoru)

$$\mathbb{E}\mathbf{X} := (\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_n)^T.$$

### Definice 7.2 (Kovariance, korelace)

Budte  $X, Y$  náhodné veličiny na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Pak kovariance  $X$  a  $Y$  je definovaná jako  $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]$ . Korelace  $X$  a  $Y$  je definována jako  $\text{cor}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var } X} \cdot \sqrt{\text{var } Y}}$ , pokud  $\text{var } X \cdot \text{var } Y > 0$ .

### Věta 7.1 (Hölderova nerovnost)

Budte  $X_1, X_2$  náhodné veličiny na stejném pravděpodobnostním prostoru a necht  $\mathbb{E}|X_1|^p < \infty$ ,  $\mathbb{E}|X_2|^q < \infty$ ,  $p, q > 1$  a  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Pak  $\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2| \leq (\mathbb{E}|X_1|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}|X_2|^q)^{\frac{1}{q}}$ , a rovnost nastává, když  $X_1 = c \cdot X_2$  skoro jistě.

Důkaz

MA3. □

Důsledek

$\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2| \leq \sqrt{\mathbb{E}X_1^2 \cdot \mathbb{E}X_2^2}$ , takže  $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{var } X \cdot \text{var } Y}$  a  $\text{cor}(X, Y) \in [-1, 1]$ . Navíc  $|\text{cor}(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow X = aY + b$  skoro jistě pro nějaké  $a \neq 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

### Věta 7.2

Budte náhodné veličiny  $X_1$  a  $X_2$  nezávislé a  $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ ,  $i = 1, 2$ . Pak  $\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2| < \infty$  a platí  $\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) = (\mathbb{E}X_1) \cdot (\mathbb{E}X_2)$ .

Důkaz

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 \cdot x_2 dP_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 \cdot x_2 d(P_{X_1} \otimes P_{X_2})(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}} x_1 dP_{x_1} \cdot \int_{\mathbb{R}} x_2 dP_{x_2} = (\mathbb{E}X_1) \cdot (\mathbb{E}X_2),$$

z Fubiniovy věty, pokud  $\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2| < \infty$ . Uvažujme  $\Phi_n(x_1, x_2) = |x_1| \cdot 1_{|x_1| \leq n} \cdot |x_2| 1_{|x_2| \leq n}$ . Pak  $\mathbb{E}\Phi_n(X_1, X_2) =$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x_1| \cdot |x_2| 1_{|x_1| \leq n} \cdot 1_{|x_2| \leq n} dP_{X_1} \otimes dP_{X_2}(x_1, x_2) = \mathbb{E}(|X_1| 1_{\{|X_1| \leq n\}}) \cdot \mathbb{E}(|X_2| 1_{\{|X_2| \leq n\}}) \leq \mathbb{E}|X_1| \cdot \mathbb{E}|X_2|.$$

Takže  $\Phi_n(X_1, X_2) \nearrow |X_1, X_2|$  z Léviho věty  $\mathbb{E}|X_1 \cdot X_2|$  existuje a z poslední nerovnosti je  $\mathbb{E}|X_1, X_2| \leq \mathbb{E}|X_1| \cdot \mathbb{E}|X_2|$ . □

### Věta 7.3 (P cov a var pro nezávislost náhodných veličin)

Budte  $X_1, \dots, X_n$  nezávislé náhodné veličiny,  $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$ ,  $\forall i \in [n]$ . Pak  $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$ ,  $i \neq j$ .  $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  platí  $\text{var}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{var } X_i$ .

┌  
Důkaz

$\text{cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j)] = \mathbb{E}X_i X_j - \mathbb{E}X_i(\mathbb{E}X_j) - (\mathbb{E}X_i)\mathbb{E}X_j + \mathbb{E}X_i + \mathbb{E}X_k = \mathbb{E}(X_i X_j) - (\mathbb{E}X_i)(\mathbb{E}X_j)$   
z nezávislosti a předchozí věty.

$$\text{var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i (X_i - \mathbb{E}X_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{var} X_i + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_i a_j \text{cov}(X_i, X_j)$$

└

□

### Definice 7.3 (Nekorelované náhodné veličiny)

Náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  s  $\text{cov}(X, Y) = 0$  nazveme nekorelované.

### Definice 7.4 (Varianční matice, korelační matice)

Varianční matice  $n$ -rozměrného náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  je matice  $n \times n$  s prvky  $a_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$ ,  $i, j \in [n]$ , tj.

$$\text{Var } \mathbf{X} = \mathbb{E}(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X})^T.$$

Korelační matice  $n$ -rozměrného náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  je matice  $n \times n$  s prvky  $a_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$ ,  $i, j \in [n]$ .

### Věta 7.4 (O vlastnostech varianční matice)

Bud  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  náhodný vektor takový, že  $\forall i \in [n] : \mathbb{E}(X_i^2) < \infty$ . Pak

1.  $\text{Var } \mathbf{X}$  je symetrická a pozitivně semidefinitní;
2. pro libovolné  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  a matici  $B$  typu  $m \times n$  je  $\text{Var}(\mathbf{a} + B\mathbf{X}) = B(\text{Var } \mathbf{X})B^T$ ;
3.  $|\text{cov}(X_i, X_j)| \leq \sqrt{\text{var}(X_i) \cdot \text{var}(X_j)}$ , a rovnost nastává právě tehdy, když existují konstanty  $a, b$ , že  $X_i = a + bX_j$  skoro jistě;
4. jsou-li  $X_1, \dots, X_n$  vzájemně nezávislé, pak  $\text{Var } \mathbf{X}$  je diagonální;
5.  $\text{Var } \mathbf{X}$  je singulární  $\Leftrightarrow$  existují  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , alespoň jedno nenulové, taková, že  $\sum_{i=1}^n a_i X_i = k$  skoro jistě, kde  $k$  je nějaká konstanta.

┌  
Důkaz

1. symetrická zřejmě, pro pozitivní semidefinitnost chceme dokázat, že  $\mathbf{a}(\text{Var } \mathbf{X})\mathbf{a}^T \geq 0$  (rozepíšeme jako v minulé větě):

$$\mathbf{a}(\text{Var } \mathbf{X})\mathbf{a}^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{cov}(X_i, X_j) = \text{var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) \geq 0.$$

Ve 2. snadně dokážeme  $\mathbb{E}(B\mathbf{X}) = B\mathbb{E}\mathbf{X}$ . Tedy

$$\text{Var}(\mathbf{a} + B\mathbf{X}) = \mathbb{E}(\mathbf{a} + B\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{a} + B\mathbf{X}))(\mathbf{a} + B\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{a} + B\mathbf{X}))^T = \mathbb{E}(B\mathbf{X} - \mathbb{E}(B\mathbf{X}))(B\mathbf{X} - \mathbb{E}(B\mathbf{X}))^T = \mathbb{E}(B(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X}))(B(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X}))^T = B\mathbb{E}(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X})^T B^T = B\text{Var } \mathbf{X} B^T.$$

3. už jsme ukázali jako důsledek Hölderovy nerovnosti. Bod 4. je zřejmý z věty o kovarianci pro nezávislé náhodné veličiny.

5.  $\text{Var } \mathbf{X}$  je singulární  $\Leftrightarrow \exists \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  tak, že  $\mathbf{a}(\text{Var } \mathbf{X})\mathbf{a}^T = 0$ , ale  $\mathbf{a}(\text{Var } \mathbf{X})\mathbf{a}^T = \mathbb{E}(\mathbf{a}\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{a}\mathbf{X})^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}\mathbf{X} = \mathbb{E}\mathbf{a}\mathbf{X}$  skoro jistě.  $\square$

### Věta 7.5 (O momentech výběrového průměru)

Budte  $X_1, \dots, X_n$  nezávislé (nebo jen nekorelované) náhodné veličiny a budte  $\mathbb{E}X_i = \mu$ ,  $\text{var } X_i = \sigma^2$ ,  $i \in [n]$ , kde  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 \geq 0$ . Pak pro  $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  platí  $\mathbb{E}\overline{X}_n = \mu$  a  $\text{var } \overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}$ .

┌  
Důkaz

Rozepsáním z linearitě střední hodnoty a z věty o vlastnostech varianční matice bod 2.  $\square$

## 8 Rozdělení transformovaného náhodného vektoru

### Věta 8.1

Budte  $X, Y$  nezávislé náhodné veličiny a  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  měřitelná. Pak náhodná veličina  $U = \psi(X, Y)$  má distribuční funkci

$$G_U(u) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{y | \psi(x, y) \leq u\}} dF_Y(y) dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{y | \psi(x, y) \leq u\}} dP_Y(y) dP_X(x) =$$

$$G_U(u) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{x | \psi(x, y) \leq u\}} dF_X(x) dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{x | \psi(x, y) \leq u\}} dP_X(x) dP_Y(y), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

┌ *Důkaz*

Víme, že  $\mathbb{E}U = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x, y) d(P_X \otimes P_Y)(x, y)$ . Použijeme Fubiniovu větu a vzorec použijeme pro náhodnou veličinu  $\tilde{U}(u) = 1_{(U \leq u)} = 1_{(\psi(X, Y) \leq u)}$ . To nám dá

$$G_U(u) = P(U \leq u) = \mathbb{E}1_{(U \leq u)} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{(\psi(x, y) \leq u)} dP_Y(y) dP_X(x).$$

└

□

## Věta 8.2 (O rozdělení součtu)

*Budte  $X, Y$  nezávislé náhodné veličiny. Pak náhodná veličina  $U = X + Y$  má distribuční funkci*

$$F_U(u) = \int_{\mathbb{R}} F_x(u - y) dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_Y(u - x) dF_X(x), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

┌ *Důkaz*

Dosazením do předchozí věty.

└

□

## Definice 8.1 (Konvoluce)

Bud  $\psi(x, y) = x + y$ . Pak  $\psi(P_X \otimes P_Y)$  se nazývá konvoluce pravděpodobnostních rozdělení  $P_X$  a  $P_Y$ . Budte  $F_X$  a  $F_Y$  distribuční funkce. Pak  $F_U$  definovaná jako  $F_U(u) = \int_{\mathbb{R}} F_X(u - y) dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_Y(u - x) dF_X(x)$  se nazývá konvoluce distribučních funkcí. Značíme  $P_X * P_Y$ , resp.  $F_X * F_Y$ .

*Důsledek (Věty o rozdělení součtu nezávislých náhodných veličin)*

Budte  $X, Y$  nezávislé náhodné veličiny a budte obě absolutně spojitě. Pak  $U = X + Y$  je také absolutně spojitá s hustotou  $f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_X(u - y) dy = \int_{\mathbb{R}} f_Y(u - x) f_X(x) dx$ ,  $u \in \mathbb{R}$ .

┌ *Důkaz*

Dosazením.

└

□

*Poznámka*

Pro ne-nezávislá  $X, Y$  lze snadno odvodit analogický vzorec (s jinou než součinnovou mírou).

## Věta 8.3

*Budte nezávislé náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  čítací (tj.  $P(X \in \mathbb{N}_0) = 1 = P(Y \in \mathbb{N}_0)$ ). Pak  $U = X + Y$  je také čítací náhodná veličina a  $P(U = u) = \sum_{n=0}^u P(X = n) \cdot P(Y = u - n)$ ,  $u \in \mathbb{N}_0$ .*

┌ *Důkaz*

Snadno z věty o úplné pravděpodobnosti.

└

□

### Věta 8.4 (O transformaci hustot)

Bud  $\mathbf{X}$   $n$ -rozměrný absolutně spojitý náhodný vektor s hustotou  $f_{\mathbf{X}}$ . Bud  $S_{\mathbf{X}}$  otevřená množina taková, že  $P(\mathbf{X} \in S_{\mathbf{X}}) = 1$ , a  $g : S_{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  difeomorfismus. Pak rozdělení náhodného vektoru  $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$  má vzhledem k  $\lambda^n$  hustotu  $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(g^{-1}(\mathbf{y})) \cdot |\text{Jac } g^{-1}(\mathbf{y})|_{g(S_{\mathbf{X}})}(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

┌

*Důkaz*

Z věty o obrazu míry víme, že  $P_{\mathbf{X}}(A) = P_{\mathbf{Y}}(g(A))$ ,  $\forall A \in \mathcal{B}^n$ , resp.  $\forall g(A) \in \mathcal{B}^n$ . Pokud existuje hustota  $f_{\mathbf{Y}}$ , pak je to také rovno  $\int_{g(A)} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ . Z předpokladů máme, že  $g^{-1}$  je difeomorfismus na  $g(S_{\mathbf{X}})$ . Použijeme větu o substituci s volbami  $h = f_{\mathbf{X}}$ ,  $\varphi = g^{-1}$ ,  $M = g(S_{\mathbf{X}})$  a  $N = A$  a dostaneme

$$P_{\mathbf{X}}(A) = \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{g(A)} f_{\mathbf{X}}(g^{-1}(\mathbf{y})) |\text{Jac } g^{-1}(\mathbf{y})| d\mathbf{y},$$

pro každou  $A \subset g^{-1}(g(S_{\mathbf{X}})) = S_{\mathbf{X}}$ , resp.  $\forall g(A) \subset g(S_{\mathbf{X}})$ . Levý integrál zřejmě existuje, tedy existuje i pravý. Z předpokladů víme  $\int_{S_{\mathbf{X}}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = P(\mathbf{X} \in S_{\mathbf{X}}^c) = 0$  a také  $\int_{(g(S_{\mathbf{X}}))^c} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0$  a oba integrály jsou nulové i pro všechny podmnožiny  $S_{\mathbf{X}}^c$ , resp.  $(g(S_{\mathbf{X}}))^c$ . Takže  $\forall B \in \mathcal{B}^n$  a funkci  $f_{\mathbf{Y}}$  ze znění dostáváme:

$$P_{\mathbf{Y}}(B) = P_{\mathbf{Y}}(B \cap g(S_{\mathbf{X}})) + P_{\mathbf{Y}}(B \setminus g(S_{\mathbf{X}})) = P_{\mathbf{X}}(g^{-1}(B \cap g(S_{\mathbf{X}}))) + 0 = \int_{B \cap g(S_{\mathbf{X}})} f_{\mathbf{Y}} d\mathbf{y} + 0 = \int_{B \cap g(S_{\mathbf{X}})} f_{\mathbf{Y}} d\mathbf{y} = \int_B f_{\mathbf{Y}} d\mathbf{y} = P_{\mathbf{Y}}(B).$$

┌ A tedy  $f_{\mathbf{Y}}$  je opravdu hustota  $\mathbf{Y}$ . □

## 9 Mnoharozměrné normální rozdělení

### Definice 9.1 (Mnoharozměrné normální rozdělení)

Bud  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_r)^T$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r$ -rozměrný váhový vektor, kde  $Z_i$  jsou vzájemně nezávislé a  $Z_i \sim N(0, 1)$ ,  $i \in [r]$ . Bud  $A_{n \times r}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  matice a  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$  pevný vektor. Náhodný vektor definovaný jako  $\mathbf{X} = A\mathbf{Z} + \mu$  má  $n$ -rozměrné normální rozdělení s parametry  $\mu$  a  $\Sigma = AA^T$ . Značíme  $N_n(\mu, \Sigma)$ .

*Důsledek*

- $\mathbf{Z} \sim N_r(\mathbf{0}, I_r)$ .
- $\mathbb{E}\mathbf{X} = \mu$ .
- Pro  $k \in \mathbb{N}$  a matici  $B_{k \times n}$  platí, že  $\mathbf{Y} = B\mathbf{X} \sim N_k(B\mu, B\Sigma B^T)$ .

- Speciálně pro vektor  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  má  $\mathbf{cX}$  jednorozměrné normální rozdělení  $N(\mathbf{c}\mu, \mathbf{c}\Sigma\mathbf{c}^T)$ .

┌ Důkaz

└ Byl na přednášce, ale jednoduchý. □

### Věta 9.1 (O hustotě $n$ -rozměrného normálního rozdělení)

Buď  $\mathbf{X}$  náhodný vektor s rozdělením  $N_n(\mu, \Sigma)$ , kde  $\Sigma$  je regulární matice. Pak  $P_{\mathbf{X}} \ll \lambda^n$  a

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

┌ Důkaz

Nejdříve buď  $\mathbf{X} \sim N_n(0, I_n)$ . Pak  $X_i = Z_i$  z definice a víme tedy, že  $X_i \sim N(0, 1)$  a  $X_i$  jsou vzájemně nezávislé, tedy

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Následně buď  $\Sigma$  pozitivně definitní,  $\mu \in \mathbb{R}^n$ . Pak  $\exists A_{n \times n}$  taková, že  $\sigma = AA^T$  a  $A$  je regulární. Položme  $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \mu$ , kde  $\mathbf{X}$  je vektor ze začátku důkazu. Tedy  $\mathbf{Y} \sim N_n(\mu, A^T A = \Sigma)$ . Použijeme větu o transformaci hustot na odvození  $f_{\mathbf{Y}}$ :

Mějme zobrazení  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mu$ .  $g$  je difeomorfismus na  $\mathbb{R}^n$ ,  $|\text{Jac } g| = |\det A| \neq 0$ , tedy můžeme volit  $S_{\mathbf{X}} = \mathbb{R}^n$ ,  $g(S_{\mathbf{X}}) = \mathbb{R}^n$ ,  $g^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}(\mathbf{y} - \mu)$ , tedy:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{|\det A|} \cdot e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}(\mathbf{y}-\mu))^T (A^{-1}(\mathbf{y}-\mu))} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mu)}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

└ □

### Důsledek (O marginálních rozděleních v $N_n$ )

Buď  $\mathbf{X}$  náhodný vektor  $\sim N_n(\mu, \Sigma)$ . Pak marginální rozdělení  $X_i$  je  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ , kde  $\sigma_i^2 = \Sigma_{i,i} = \text{var } X_i$ . A podvektor  $(X_i, X_j)^T$ ,  $i \neq j$ , má rozdělení  $N_2 \left( \begin{pmatrix} \mu_i \\ \mu_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_i^2 & \varrho_{ij}\sigma_i\sigma_j \\ \varrho_{ij}\sigma_i\sigma_j & \sigma_j^2 \end{pmatrix} \right)$ , kde  $\varrho_{ij} = \text{cor}(X_i, X_j)$ .

┌ Důkaz

Použijeme předchozí důsledek definice, čtvrtý bod pro první část a třetí bod pro druhou část. □

### Tvrzení 9.2

Nechť máme náhodný vektor  $(X, Y)^T \sim N_2$ . Pak mají  $X, Y$  jednorozměrné normální rozdělení. Pokud navíc  $\text{cov}(X, Y) = 0$ , pak jsou  $X$  a  $Y$  nezávislé.

### Definice 9.2 ( $\chi^2$ -rozdělení)

Buďte  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  nezávislé náhodné veličiny s rozdělením  $N(0, 1)$ . Pak náhodná veličina  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$  má  $\chi^2$ -rozdělení o  $n$  stupních volnosti (značíme  $\chi_n^2$ ), s hustotou

$$g_n(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{y}{2}} 1_{y>0}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

*Poznámka*

Střední hodnota je  $n$ , rozptyl  $2n$ .

### Definice 9.3 (Studentovo rozdělení)

Buďte  $X \sim N(0, 1)$  a  $Y \sim \chi_n^2$  nezávislé náhodné veličiny. Pak náhodná veličina  $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$  má studentovo  $t_n$  rozdělení (neboli  $t$ -rozdělení o  $n$  stupních volnosti) s hustotou

$$h_n(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\varphi n} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Poznámka*

Střední hodnota je 0, pokud  $n > 1$ . Obecně  $t_n$ -rozdělení má konečné momenty až do řádu  $(n-1)$  včetně.

Pro  $n = 1$  se toto rozdělení nazývá Cauchyho rozdělení (protože se chová jinak než ostatní studentova).

## 10 Limitní věty

### Definice 10.1 (Značení)

Buďte  $A_1, A_2, \dots$  náhodné jevy ze  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{A}$ . Značíme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$



**Věta 10.1** (Cantelli)

Buďte  $A_1, A_2, \dots$  náhodné jevy z  $\mathcal{A}$ . Pokud  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ , pak  $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$ .

┌

Důkaz

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

└

□

Důsledek

$$P((\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)^c) = 1 = P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c).$$

**Věta 10.2** (Borelova, Borelův 0-1 zákon)

Buďte  $A_1, \dots$  nezávislé náhodné jevy z  $\mathcal{A}$ . Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Leftrightarrow P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Leftrightarrow P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1.$$

┌

Důkaz

Neb nic jiného než  $\sum = \infty$  nebo  $\sum < \infty$  nastat nemůže, stačí ukázat dvakrát  $\Rightarrow$ . „První  $\Rightarrow$ “ je Cantelliho věta.

„Druhá  $\Rightarrow$ “: Platí  $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1 - P((\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)^c) = 1 - P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c)$ . Počítejme

$$P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N A_k^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N P(A_k^c) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N}$$

└

□

**Definice 10.2** (Konvergence v pravděpodobnosti)

Buďte  $Y_1, Y_2, \dots$  náhodné veličiny na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Posloupnost  $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje v pravděpodobnosti k náhodné veličině  $Y$ , značíme  $Y_n \xrightarrow{P} Y$ , pokud  $P(|Y_n - Y| > \varepsilon) \rightarrow 0, \forall \varepsilon > 0$ .

┌ *Poznámka*

Je to konvergence podle míry. Je ekvivalentní

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \mathbb{E}Y| \leq \varepsilon) \rightarrow 1?$$

└

### Definice 10.3 (Konvergence skoro jistě)

Buďte  $Y_1, \dots$  náhodné veličiny na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Posloupnost  $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$  konverguje skoro jistě k náhodné veličině  $Y$ , značíme  $Y_n \xrightarrow{s.j.} Y$ , pokud  $P(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$ .

┌ *Poznámka*

Je to konvergence skoro všude.

└

### Věta 10.3 (O konvergenci v pravděpodobnosti a součtu)

Buďte  $Y_1, \dots$  náhodné veličiny na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  náhodné veličiny a  $Z_1, \dots$  náhodné veličiny také na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Pak

$$(Y_n \xrightarrow{P} 0) \wedge (Z_n \xrightarrow{P} 0) \implies (Y_n + Z_n \xrightarrow{P} 0).$$

┌ *Důkaz*

$$P(|Y_n + Z_n| > \varepsilon) \leq P(|Y_n| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Z_n| > \frac{\varepsilon}{2}) \rightarrow 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

└

□

### Věta 10.4 (O konvergenci v pravděpodobnosti a násobení)

Za stejných předpokladů jako výše s přidáním  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  je reálná omezená posloupnost, je  $Y_n \xrightarrow{P} 0 \implies a_n Y_n \xrightarrow{P} 0$ .

┌ *Důkaz*

$$P(|a_n Y_n| > \varepsilon) \leq P(|Y_n| > \frac{\varepsilon}{c}) \rightarrow 0.$$

└

□

### Věta 10.5 (O spojitě transformaci a konvergence)

Buďte  $Y_1, Y_2, \dots$  n. v. na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkce spojitá na otevřené množině  $S_Y$  takové, že  $P(Y \in S_Y) = 1$ . Pak

$$Y_n \xrightarrow{P} Y \implies g(Y_n) \xrightarrow{P} g(Y),$$

$$Y_n \xrightarrow{s.j.} Y \implies g(Y_n) \xrightarrow{s.j.} g(Y).$$

┌  
Důkaz

První implikace viz literatura. Druhá: Buď  $N \subset \Omega$  taková, že  $Y_n(\omega) \rightarrow Y(\omega)$ ,  $\forall \omega \in \Omega \setminus N$ . Označíme  $M = (\Omega \setminus N) \cap Y^{-1}(S_Y)$ . Pak  $P(M) = 1$ . A  $\forall \omega \in M$  platí, že  $g$  je spojitá na otevřeném okolí  $Y(\omega)$ , a tedy z  $Y_n(\omega) \rightarrow Y(\omega)$  dostaneme  $g(Y_n(\omega)) \rightarrow g(Y(\omega))$  z věty o limitě spojitě transformované posloupnosti v  $\mathbb{R}$ .  $\square$

### Věta 10.6 (Čebyševův slabý zákon velkých čísel)

Budte  $X_1, X_2, \dots$  vzájemně nezávislé náhodné veličiny definované na tomtéž  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  splňující  $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var } X_i \right) = 0$ . Potom platí

$$|\overline{X_n} - \mathbb{E}X_n| \xrightarrow{P} 0.$$

┌  
Důkaz

Buď  $\varepsilon > 0$  pevné.

$$P(|\overline{X_n} - \mathbb{E}X_n| > \varepsilon) \leq \frac{\text{var}(\overline{X_n} - \mathbb{E}X_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\text{var } \overline{X_n}}{\varepsilon^2} = \frac{\text{var } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2} \frac{\sum_{i=1}^n \text{var } X_i}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var } X_i}{\varepsilon^2}.$$

$\square$   
└

TODO!!! (Chyběl jsem)

TODO!!! (Chyběl jsem)

### Věta 10.7 (Silný zákon velkých čísel pro iid)

Buď  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  posloupnost iid náhodných veličin. Pak

$$(\exists \mu \overline{X_n} \xrightarrow{\text{skoro jistě}} \mu) \Leftrightarrow \mathbb{E}|X_1| < \infty.$$

┌ *Důkaz*

„ $\implies$ “:  $X_n = n \cdot \overline{X_n} - (n-1) \cdot \overline{X_{n-1}}, \forall n \geq 2,$

$$\frac{X_n}{n} = \overline{X_n} - \frac{n-1}{n} \overline{X_{n-1}}.$$

Tedy  $\frac{X_n}{n} \rightarrow 0$  skoro jistě. Takže  $P(\frac{X_n}{n} \geq 1, \text{ pro nekonečně mnoho } n) = P(\limsup \frac{|X_n|}{n} \geq 1) = 0.$

Z Borelový věty máme, že jevy  $|X_n| \geq n$  jsou vzájemně nezávislé, neb  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  jsou vzájemně nezávislé.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq n) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geq n) < \infty.$$

Nyní z předchozího lemmatu máme  $\mathbb{E}|X_1| < \infty.$

└ Navíc z jednoznačnosti limity skoro jistě máme, že  $\mu = \mathbb{E}X_1.$  □

### Definice 10.4 (Konvergence v distribuci)

Buď  $Y_n$  posloupnost náhodných veličin na libovolných pravděpodobnostních prostorech. Řekneme, že náhodné veličiny  $Y_n$  konvergují v distribuci (značíme  $\xrightarrow{D}$ ), pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(x) \forall x \in \mathbb{R}$ , které jsou body spojitosti  $F_Y$ .

┌ *Poznámka*

└ Konvergence v distribuci mluví o konvergenci měr  $P_{Y_n}$ , nikoliv  $Y_n$ . □

### Věta 10.8 (Centrální limitní věta (Ljapunov 1901, Lévy, Lindenberg 1922))

Buďte  $X_1, X_2, X_3, \dots$  nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s  $\mathbb{E}X_1 = \mu \in \mathbb{R}$  a  $0 < \text{var } X_1 = \sigma^2 < \infty$ . Potom pro náhodné veličiny  $Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$  platí  $Z_n \xrightarrow{D} Z$ , kde  $Z \sim N(0, 1)$ .

### Lemma 10.9 (Ekvivalentní charakterizace $\xrightarrow{D}$ )

Posloupnost náhodných veličin  $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$  splňuje  $Y_n \xrightarrow{D} Y$  právě tehdy, když  $\mathbb{E}h(Y_n) \rightarrow \mathbb{E}h(Y)$  pro každou spojitou omezenou funkci  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

┌ *Důkaz*

└ Důkaz je technický a byl vynechán. □

*Důkaz* (Centrální limitní věty)

BÚNO  $\mathbb{E}X_i = 0$  a  $\text{var } X_i = 1$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ , (jinak bychom následující použili pro  $\tilde{X}_i = \frac{X_i - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}$ ). Z předchozího lemmatu nám stačí ukázat, že  $\mathbb{E}h(Z_n) \rightarrow \mathbb{E}h(Z) \forall h$  2krát spojitě diferencovatelné, stejnoměrně spojitě a s omezenými prvními a druhými derivacemi.

Budte  $\{Y_i\}_{i=1}^\infty$  nezávislé náhodné veličiny  $\sim N(0, 1)$  nezávislé s  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ . Pak  $T_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - 0}{\sqrt{n \cdot 1}} \sim N(0, 1)$ . Teď chceme ukázat  $|\mathbb{E}h(Z_n) - \mathbb{E}h(T_n)| \rightarrow 0$  pro každé  $h$  jako výše.

Označíme si  $X_{i,n} = \frac{X_i}{\sqrt{n}}$ ,  $Y_{i,n} = \frac{Y_i}{\sqrt{n}}$ ,  $W_{i,n} = \sum_{j=0}^i Y_{j,n} + \sum_{j=i+1}^n X_{i,n}$ . Platí

$$h(Z_n) - h(T_n) = \sum_{i=1}^n (h(W_{i,n} + X_{i,n}) - h(W_{i,n} + Y_{i,n})), \quad \text{neboť } W_{i,n} + X_{i,n} = W_{i+1,n} + Y_{i,n}, \quad 1 \leq i \leq n$$

Nyní použijeme Taylorův rozvoj na omezení jednotlivých rozdílů. Platí

$$h(W_{i,n} + X_{i,n}) = h(W_{i,n}) + h'(W_{i,n})X_{i,n} + \frac{1}{2}h''(W_{i,n})X_{i,n}^2 + R_{x,i,n},$$

$$R_{x,i,n} = \frac{1}{2X_{i,n}^2(h''(W_{i,n} + \zeta X_{i,n}) - h''(W_{i,n}))}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

A také platí  $|R_{x,i,n}| \leq X_{i,n}^2 \|h''\|_\infty$  a také platí  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |R_{x,i,n}| \leq X_{i,n}^2 \varepsilon$ , pro  $|X_{i,n}| < \delta$  ze stejnoměrné spojitosti  $h''$ . Dohromady  $|R_{x,i,n}| \leq X_{i,n}^2 (\varepsilon \cdot 1_{(|X_{i,n}| < \delta)} + \|h''\|_\infty 1_{(|X_{i,n}| \geq \delta)})$ . Obdobně vše pro  $Y_{i,n}$ .

Dosadíme Taylorův rozvoj a odhady do teleskopické sumy výše a spočítáme střední hodnotu:

$$\mathbb{E}(h(Z_n) - h(T_n)) = \sum_{i=1}^n \left[ \mathbb{E}(h(W_{i,n}) - h(W_{i,n})) + \mathbb{E}h'(W_{i,n})(X_{i,n} - Y_{i,n}) + \mathbb{E}\frac{1}{2}h''(W_{i,n})(X_{i,n}^2 - Y_{i,n}^2) + \mathbb{E}R_{x,i,n} - \mathbb{E}R_{y,i,n} \right]$$

neboť první člen je zřejmě nula, druhý člen je střední hodnota součinu nezávislých veličin, tedy součin středních hodnot a  $X, Y$  mají stejnou střední hodnotu a střední hodnota  $W_{i,n}$  existuje, tedy i druhý člen je 0. Třetí člen je úplně totéž, jen  $X, Y$  mají shodný rozptyl.

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(h(Z_n) - h(T_n))| &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|R_{x,i,n}| + |R_{y,i,n}|) \leq \sum_{i=1}^n (\varepsilon \mathbb{E}(X_{i,n}^2 + Y_{i,n}^2) + \|h''\|_\infty \mathbb{E}(X_{i,n}^2 1_{(|X_{i,n}| \geq \delta)} + Y_{i,n}^2 1_{(|Y_{i,n}| \geq \delta)})) \\ &= 2\varepsilon + \sum_{i=1}^n \|h''\|_\infty (\mathbb{E}\frac{X_i^2}{n} 1_{|X_i| > \delta \cdot \sqrt{n}} + \mathbb{E}\frac{Y_i^2}{n} 1_{|Y_i| \geq \delta \cdot \sqrt{n}}) = \\ &= 2\varepsilon + \|h''\|_\infty (\mathbb{E}X_1^2 1_{(|X_1| \geq \delta \sqrt{n})} + \mathbb{E}Y_1^2 1_{(|Y_1| \geq \delta \sqrt{n})}), \end{aligned}$$

A neboť  $\mathbb{E}X_1^2 1_{(|X_1| \geq \delta \sqrt{n})} = \mathbb{E}X_1^2 - \mathbb{E}X_1^2 1_{(|X_1| < \delta \sqrt{n})} \rightarrow \mathbb{E}X_1^2 - \mathbb{E}X_1^2 = 0$  z Lebesgueovy věty. Tak

$$|\mathbb{E}(h(Z_n) - h(T_n))| \rightarrow 2\varepsilon.$$

Tedy  $\forall \varepsilon > 0 \exists n : |\mathbb{E}h(Z_n) - \mathbb{E}h(T_n)| < 3\varepsilon$ , tedy teleskopická suma jde k nule, tudíž  $|\mathbb{E}h(Z_n) - \mathbb{E}h(T_n)| \rightarrow 0 \forall h$  splňující podmínky výše.  $\square$