PHS4700 - Physique pour les applications multimédia

Devoir 1

Date de remise : le **lundi 4 octobre 2021 avant 18 h au B258.13**

Moment d'inertie et accélération angulaire

On désire simuler le vol d'un missile comme celui schématisé sur la figure 1. On peut représenter ce missile comme étant constitué d'un cylindre allongé plein surmonté d'un cône plein représentant la pointe et de quatre parallélépipèdes pleins représentant les ailerons (voir Figure 2). Toutes les pièces sont considérées comme homogènes (masses volumiques constantes).

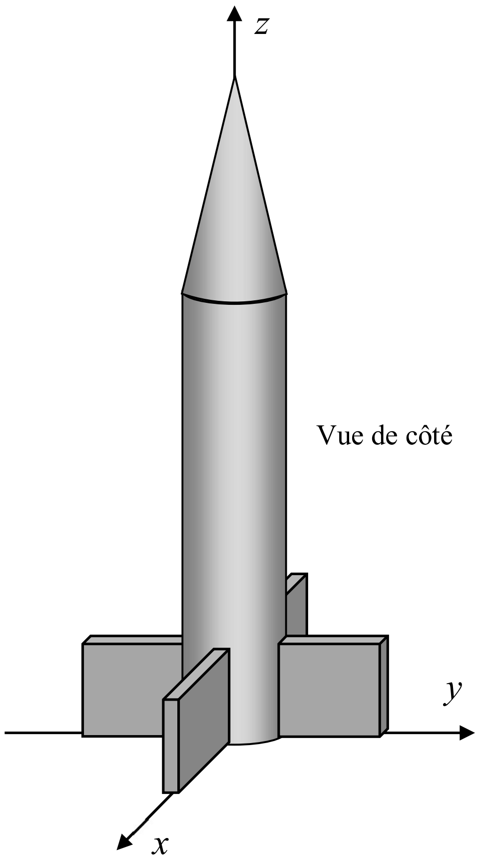
Figure 1 : Image représentant un missile en vol

Le cylindre a une masse volumique $\rho_c = 4000$ kg/m^3, une longueur $L_c = 10$ m et un rayon $R_c = 1.5$ m. Le cône est de même masse volumique ρ_c, de hauteur $h = 3$ m et de rayon R_c. Chaque aileron est une plaque métallique d'épaisseur $e_p = 15$ cm, de hauteur $h_p = 1{,}5$ m (dimension parallèle à l'axe du cylindre), de largeur $l_p = 2{,}5$ m et de mase $m_p = 2000$ kg.

Le système d'axes lié au missile $(oxyz)$ a comme origine le centre de la base inférieure du cylindre. Les orientations des axes ox, oy et oz sont indiquées sur la figure 2. On considérera que la base inférieure du cylindre et les faces inférieures des ailerons sont dans le plan oxy.

Un propulseur intégré dans la partie inférieure du cylindre (masse comprise dans celle du cylindre) produit une force de poussée $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ appliquée au centre de la base du cylindre. La trajectoire du missile est contrôlable à travers le contrôle de l'orientation de la force $\vec{F}$. Cette orientation est donnée par son angle polaire θ (angle entre $\vec{F}$ et l'axe oz) et son angle azimutal φ (angle entre la projection de $\vec{F}$ dans le plan oxy et l'axe ox).

À l'instant initial, le missile repose sur le sol tel que représenté sur la figure 2 (vue de côté). À cette position, le système d'axes du laboratoire (OXYZ) est confondu avec le système d'axes lié au missile ($oxyz$).



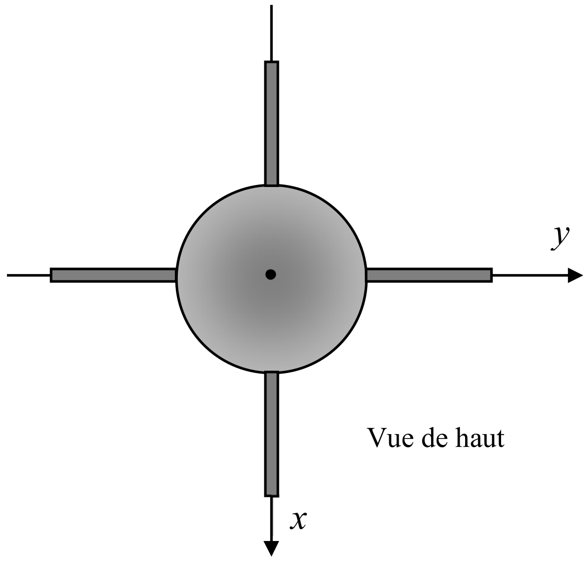


Figure 2 : Modèle du missile vu de haut et de côté.

But du devoir

Le but de ce devoir est de programmer une fonction Matlab ou Octave qui permet de calculer la position du centre de masse, le moment d'inertie et l'accélération angulaire du missile pour différentes positions et orientations. La fonction demandée doit pouvoir être appelée comme suit :

```
[pcm MI aa]=Devoir1(pos,ar,va,Force)
```

Les données d'entrée pour cette fonction sont :

- `pos=[pos_x;pos_y;pos_z]` est le vecteur $\vec{r}_o$ indiquant, dans le référentiel du laboratoire, la position de l'origine du référentiel lié au missile (en mètre).

- `ar` représente l'angle de rotation (en rad) du missile autour de l'axe *OX* (on se limitera à ce seul axe de rotation).
- `va=[va_x;va_y;va_z]` est le vecteur $\vec{\omega}$ (dans le référentiel du laboratoire) décrivant la vitesse angulaire (en rad/s) du missile. Même si $\vec{\omega}$ peut avoir des composantes non nulles selon les axes OY et OZ, on considérera qu'aux instants considérés dans chacun des cas étudiés, les orientations du missile sur ces deux axes sont à leurs valeurs initiales $\Delta\Omega_y = \Delta\Omega_z = 0$.
- `Force=[moduleF, theta, phi]` est un tableau de trois valeurs indiquant, respectivement, le module de la force de propulsion et ses angle plaire et azimutal.

Les résultats produits par cette fonction Matlab (ou Octave) sont :
- `pcm=[pcm_x;pcm_y;pcm_z]`, le vecteur $\vec{r}_{CM}$ indiquant la position du centre de masse du missile en m dans le référentiel du laboratoire;
- `MI`, la matrice de moment d'inertie ***I*** du missile par rapport à son centre de masse dans le référentiel du laboratoire (kg×m^2) ;
- `aa=[aa_x;aa_y;aa_z]`, le vecteur $\vec{\alpha}$ indiquant l'accélération angulaire du missile (en rad/s^2) dans le référentiel du laboratoire.

Simulations requises

Vous devez ensuite utiliser cette fonction pour analyser deux différentes situations :

- Cas 1.

  Le missile est au sol (position indiquée sur la figure 2) et sa vitesse angulaire est nulle. La force appliquée par le propulseur est de 5×10^6 N dans la direction verticale (vers le haut).

- Cas 2.

  Le missile est dans les airs, la position du point o est $\vec{r}_o = (0.0, -20.0, 300.0)$(en m). La force de propulsion est de 5×10^6 N d'orientation $\theta = 0.10$ rad et $\varphi =$ 1,40 rad. Le missile a subi une rotation de 0.50 rad autour de l'axe *OX* et sa vitesse angulaire est $\vec{\omega} = (0.05, 0.0,\ 0.01)$ rad/s.

Remarques :

- Ces deux cas sont préprogrammés dans le fichier RouleDevoir1.m disponible sur le site du cours.

- Votre programme doit non seulement être capable de traiter les deux cas mentionnés ci-haut mais aussi toute autre situation raisonnable. La correctrice peut vérifier la réponse de votre programme pour des situations autres que ces deux cas.

PHS4700 - Physique pour les applications multimédia

Centre de masse et moment d'inertie d'un cône plein de masse volumique uniforme

Le centre de masse d'un cône plein de masse m, de rayon r et de hauteur h est situé sur son axe de symétrie *oz* à une distance de $\frac{h}{4}$ de sa base. Son volume est donné par :

$$V = \frac{\pi \, h \, r^2}{3}$$

Son moment d'inertie par rapport à son centre de masse est donné par :

$$\boldsymbol{I} = m \begin{pmatrix} \frac{12r^2 + 3h^2}{80} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12r^2 + 3h^2}{80} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3r^2}{10} \end{pmatrix}$$