史上最亲民的复分析讲义ver1.0（2023.7.12更新）

作者：小号菌子ana.　　哈尔滨工业大学（威海）　　xiongzehua6301@163.com

0.序言

§1 编写目的

复分析，或者在很多其它学校里也叫作复变函数，作为数学系一门专业课，它受到的重视程度常常不如实分析、泛函分析之类的专业课，在上手难度上，因为相当一部分知识延续自数学分析，所以也相对简单。然而，相对于数学分析，作为复分析主要的研究对象——全纯函数，有很多令人惊喜的奇妙性质，这使得复分析这门学科具有一种别样的美感。

但非常遗憾的是，就本人所见的教材，如果试图将复分析丰富的内容全都收入其中，难免显得有些零散和杂乱，让初学者难以把握住复分析的知识框架与脉络。同时，既要讲清复分析中丰富的知识，又要提纲挈领、把握复分析主线，对教师来说也无疑是一件困难的事。

本人先后几次尝试学习复分析这门学科，也看过些许国内外经典教材，虽然这些教材也独具特色、自成体系，但总觉得有所欠缺，而这种欠缺因为受到 “教科书” 这一载体形式的限制，是难以补足的。幸而本人在学习过程中也产生了一些拙见，故编写此讲义，作为自己对这门学科的整理与总结，也可以将自己宝贵的学习经验分享给后来的学习者。希望本讲义能成为学生自主学习与老师备课的有力补充，使初学者或是哪怕已经学过复分析很长时间的学习者能够拨开云雾，对复分析这门学科有个更加清晰的认识。

§2 主要内容

本讲义从复平面的积分出发、以求取留数为主线，介绍了四部分内容：积分、微分、留数与级数。

其中，第一章节为引入章节，主要介绍了复平面上的积分的定义和一些性质、并类比二维平面上的曲线积分，引出了留数和全纯函数的概念，并指出了要想计算留数，必须从全纯函数的性质出发。

第二章节延续自第一章节对全纯函数可能的充要条件猜测，着重研究了可微性与全纯性的关系，并由此展开并讨论了复可微函数的原函数存在性与调和性。

第三章节可以认为是第二章节的进一步深入，从复可微函数的调和性出发，证明了柯西积分公式和高阶导数公式，又利用高阶导数公式给出了一些特殊的留数的计算方法。此外，作为支线，我们介绍了重要的刘维尔定理，并利用这一定理证明了代数学基本定理。

第四章节是我们对全纯函数的可能具有的更强性质的探索，并且从级数的角度给出了一般全纯函数在孤立奇点的留数求法。

事实上，国内一般学校的教材，碍于学时限制，基本也只讲到这里。

§3 特色

本讲义最大的特色是，使用了截然不同与常见教材的方式排列知识内容，使得内容能够环环相扣，突出明晰的主线利于初学者把握。

本讲义省略了开头对复数的介绍（其实也确实没什么好讲的），直接在以探索、推广的方式引入复积分，再在此过程中自然而然地引出全纯函数，而不是像常见的那样先突然地给出全纯（或者一些教材上称为解析）函数的定义、再突然地给出复积分的定义，这属实难以让人理解这二者之间有何逻辑关联。

并且本讲义有别于一部分国内教材以 “在该点的某一邻域上可微” 来定义 “在某点处全纯”，或者 “在某一区域上可微” 来定义 “在某一区域上全纯”，而是利用后来的莫雷拉定理，将 “沿闭曲线积分为 0 ” 定义为全纯。在前一种定义下，事实上 “在某点处全纯” 这一概念极少使用，反倒是 “在某点处不全纯” 用得多，即 “奇点”，用得比较多，但这其实可以直接定义为 “在 D 上不全纯而在 $D\backslash\{z_0\}$ 上全纯”，所以这些教材甚至花大量篇幅去要求学生辨析一些奇形怪状的函数究竟是全纯还是可微，其实毫无意义。与此同时，在前一种定义中的 “在某一区域上全纯” 会让每一个学习者都很奇怪为什么非得把大家熟悉的 “可微” 二字给换成不熟悉的 “全纯” 二字而没发生任何其他变化。

本讲义与部分国内教材的另一大不同点是，本讲义是从全纯函数的调和性和平均值公式引出的柯西积分公式。国内许多教材虽然简单提及了调和函数和全纯函数的关系，但并没有揭示调和函数应有的那些性质可以搬到全纯函数上面来，而是宕开一笔重新介绍柯西积分公式，再反过来拿柯西积分公式去证明平均值定理，这丢失了许多复分析的美感。

§4 不足之处

在排版方面，由于本人精力有限，并且重心在于讲义的内容而非形式，方便起见并没有使用 $\LaTeX$，或者使用Word精细编排，而是直接使用了Typora（一个搭载了Markdown语法的文字编辑器），所以本讲义在外观上格式上有欠缺是很正常的，也没有交叉引用。另外，本讲义中的插图是直接用手画的，因为如果用软件画，除了横平竖直以外，估计没有手画来得好看还老费事了......

细节方面，由于本人缺乏经验，再加上懒得去一遍遍地去查，所以标点、错别字、语病以及那些我压根都不知道还有这回事的问题定是层出不穷，如果是不涉及知识结构上的大错误，我相信阅读者的纠错能力。如果阅读者愿意为我指出，我将深表感谢。另外，受到现实的种种约束（期末考试），本讲义的前后两部分编写时相隔一个多月，因此会出现语言和符号上的不统一，敬请谅解。

内容方面，本讲义只选取了和主线相关的自认为最重要的内容，这并不是因为其他内容不够重要，而是因为本人没有能力在兼顾讲义结构的基础上将它们插入进来，阅读过本讲义之后，我相信读者将具有自行阅读相关书籍的相关内容的能力。本讲义中没有涉及的内容包括但不限于复数的基础概念与几何应用、多值函数、共形映射、流体力学方面的应用、解析延拓等等，但个人建议在多值函数方面，参考本讲义的教师可以在 “原函数存在定理” 一小节的末尾，通过进一步探讨 $\frac{1}{z}$ 的原函数引出多值函数 $\mathrm{Ln}\, z$ 。

在介绍复积分和柯西积分定理有关内容的时，倘若引入 “曲线同伦” 这一概念，可以将很多没讲清楚的问题讲得更清楚，但受限于篇幅以及本人的学艺不精，在讲义中并没有这么做。此外，在介绍洛朗级数和留数相关内容时，并没有介绍无穷远点的性质，因为这可能会引入不少额外的概念将简单问题复杂化，事实上只需要将 $\varphi(z)$ 适时地改写成为 $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ 即可。

另外，为了方便初学者接受，在一些定理的叙述上本人宁可使用更强的条件，比如讲义中常常要求曲线 C 含于全纯区域 D，但事实上 C 可以是 D 的边界而只需要 $f(z)$ 能连续延拓到边界即可。

§5 关于配套视频课

因为讲义不同于教材，为了通俗性和可读性，本人牺牲了一部分严谨性，并在讲义的证明中多处采用了口语化的表达，这有可能反倒会给学习者带来阅读障碍甚至引发误会。因此，为了尽可能地消除误会，帮助初学者更好地学习，本人将在bilibili视频平台上发布一系列基于本讲义的复分析教程（up主：小号菌子ana.），毕竟，讲义都写完了，录个课那不是不录白不录，万一火了呢?

二〇二三 年 七 月 于 江西

1.积分理论

§1 复平面上的积分

现在，我们想将实数域里的积分

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

推广到复数域上去，让我们来考虑一下它会有什么形式呢？

让我们照葫芦画瓢一下，首先，被积函数应该改成一个复变量的函数$f(z)$，$z\in\mathbb{C}$，它在复数域上取值。当然，$f(z)$应当满足一些性质，比如在$\mathbb{R}$上我们要求函数是可积的，但在这里，我们对此不做过多的讨论，接下来讨论的$f(z)$我们都不妨直接假设它是连续，或者至少是分段连续的。

然后，与之对应地，我们应该将$\mathrm{d}x$改换成$\mathrm{d}z$。

接下来，我们还应该把上下限做一个修改，将a和b也改成两个复常数z_1和z_2。这样一来，我们就得到了这个式子

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\ \mathrm{d}z$$

这便是我们定义的在复数域上的积分……吗？

除了$f(z)$我们可以预先给定，比如$f(z)=z^2$，或者$f(z)=\bar{z}$，再或者更古怪一点$f(z)=x^2e^y+iy^2\sin x$，$z=x+iy$什么的，剩下的呢？$\mathrm{d}z$是什么玩意？从z_1积到z_2又是什么玩意？

让我们先来解决积分上下限的问题。

我们知道，一元积分学和多元积分学是相去甚远的，其中最主要的一个不同就是在一元微积分里，并不存在积分路径的问题，但把它放在更高维度上，我们还需要指明积分的路径，也就是写成曲线积分的形式（定积分应当写成第二类曲线积分）。

$$\int_\gamma P(x,y)\ \mathrm{d}x+Q(x,y)\ \mathrm{d}y$$

其中，γ应当是一条分段光滑的曲线。

同样地，复平面是一个二维平面，或许我们应该把它写成

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$$

的形式会更为合适一些。

还没有结束，如果我们希望二者的形式更加贴近一点，我们其实可以把$f(z)$写成$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$z=x+iy$的形式，正如我们假设的那样，$f(z)$是连续的，于是这里出现的$u(x,y)$和$v(x,y)$也应当是二元连续的实变量函数。

最后，理所应当地，我们令$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y$，将$f(z)$和$\mathrm{d}z$相乘再积分就得到了**（形式1）**

$$\left(\int_\gamma u(x,y)\mathrm{d}x-v(x,y)\mathrm{d}y\right)+i\left(\int_\gamma v(x,y)\mathrm{d}x+u(x,y)\mathrm{d}y\right)$$

这样一来，我们可以将一个复积分的实部和虚部分别作为我们熟悉的实曲线积分来计算，这个定义看上去很合理，让我们先接受它吧！

例题1.1 计算积分

$$\int_\gamma \bar{z}\ \mathrm{d}z$$

其中，γ 取正向单位圆周。

解答 先将它写成两个第二型曲线积分的形式

$$\int_\gamma (x-iy)(\ \mathrm{d}x+i\ \mathrm{d}y)=(\int_\gamma x\ \mathrm{d}x+y\ \mathrm{d}y)+i(\int_\gamma -y\ \mathrm{d}x+x\ \mathrm{d}y)$$

将 γ 参数化，可以写成

$$\gamma:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}\qquad (t:0\to 2\pi)$$

分别代入两个积分得到

$$\begin{aligned}\int_\gamma x\ \mathrm{d}x+y\ \mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}-\cos t\sin t+\sin t\cos t\ \mathrm{d}t\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\gamma -y\ \mathrm{d}x+x\ \mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}\sin^2 t+\cos^2 t\ \mathrm{d}t\\&=2\pi\end{aligned}$$

于是我们就得出了

$$\int_\gamma \bar{z}\ \mathrm{d}z=2\pi i$$

好的，我们尝试了一下，发现这个公式它确实可以投入计算，这很好，但是假如亲自动手算一遍就会发现，这个做法不是一般的麻烦。尽管在上例中我们使用的是较为简单的被积函数$\bar{z}$，本人依然在编这一段内容的时候花了大量力气去化简，那对于更复杂的$f(z)$呢？哪怕你愿意不厌其烦地把它用这种方式化成两个曲线积分，那这两个积分能算出来吗？这是一个很大的问题。

如果积分直接以

$$\int_\gamma u(x,y)\ \mathrm{d}x+iv(x,y)\ \mathrm{d}y$$

的形式给出，那使用上面那个定义，将z 的实虚部分离开来计算自然是很容易的，事实上，我们只需要把虚数单位i 当作一个常数，再进行实数上的第二型曲线积分就可以了。但是，如果被积函数$f(z)$是直接以复自变量z 的函数的形式给出，就会出现上面所说的计算困难甚至无法计算的问题。

因此，我们需要给一个更加合理的定义，来抛开$z=x+iy$ 的形式，直接关于z 进行积分。

回忆起在我们前面计算积分的过程中，我们其实做了这样几个步骤：

首先，将$\mathrm{d}z$写成$\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y$ 的形式，然后再在$\mathbb{R}^2$上把曲线γ参数化，写成$x=x(t)$，$y=y(t)$的形式，最后再分别取微分。

实际上，我们得到的是$\mathrm{d}z = x'(t) + iy'(t)\ \mathrm{d}t$。

又考虑到我们已经有$z = x + iy$，那我们为什么不直接在$\mathbb{C}$把γ参数化呢？写成$z = z(t) = x(t) + iy(t)$，从而$\mathrm{d}z$就可以写成$z'(t)\ \mathrm{d}t = x'(t) + iy'(t)\ \mathrm{d}t$。

经过一通非常简单的变换，我们回归初心，得到了这个形式**（形式2）**

$$\int_a^b f(z(t))z'(t)\ \mathrm{d}t$$

其中，a和b是两个实数，对应着曲线γ的起点和终点。这个形式就与x和y无关了，只和z有关，非常简单。

我们直接使用这个形式来计算上面的**例题1.1**会非常简单。

将γ参数化，由复数的指数形式（我们假定读者已经熟悉Euler公式），得到

$$\gamma : z = e^{it} \qquad (t : 0 \to 2\pi)$$

而被积函数就写成$\bar{z} = e^{-it}$，代入积分表达式就很容易算出

$$\begin{aligned}\int_\gamma \bar{z}\ \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot ie^{it}\ \mathrm{d}t \\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

这也反过来说明了，这种形式的合理性，以及这个形式是那么的简洁与方便。

§2 复积分的性质

既然在这种形式下，复积分和实曲线积分可以简单地互化，那么实曲线积分上的一些性质都可以推广过来。

性质 1（线性性） 设$f(z)$，$g(z)$是区域D上的连续函数（实际上只要Riemann可积就行，但我们出于方便只定义了连续函数的复积分，而事实上我们也无需讨论那么一般的情形），γ是D上的分段光滑曲线，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$是常数，则成立

$$\int_\gamma \alpha f(z) + \beta g(z)\ \mathrm{d}z = \alpha \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z + \beta \int_\gamma g(z)\ \mathrm{d}z$$

性质 2（路径可加性） 设$f(z)$是区域D上的连续函数，γ_1，γ_2是两条D上的分段光滑曲线，且γ_1的终点与γ_2的起点重合，则成立

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z$$

特别地，若γ_2就是γ_1取负方向，即$\gamma_2 = \gamma_1^-$，则有

$$\int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z = -\int_{\gamma_1^-} f(z)\ \mathrm{d}z$$

性质 3（绝对可积性） 设$f(z)$是区域D上的连续函数，γ是D上的分段光滑曲线，则成立

$$\left|\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z\right| \le \int_\gamma |f(z)|\ \mathrm{d}s$$

其中，$\mathrm{d}s$表示对弧长的微分，即$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}z| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$。

特别地，若$f(z)$在区域D上有界，即存在$M \geq 0$使得$|f(z)| \leq M$，记L为曲线γ的长度，则有积分估值

$$\left|\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z\right| \leq ML$$

以上性质的证明在将它化为形式1后可直接利用实变量曲线积分中的对应性质得到。

§3 复积分的积分与路径无关

我们知道，第二型曲线积分还成立一个重要的公式——Green公式，并可以由它导出积分与路径无关的条件，它给我们的研究带来了极大的方便。那我们不禁会问，是否复积分成立类似的定理呢？我们接下来尝试将Green公式推广到复平面上。

（黎曼） 现在假设γ是区域D上的一条分段光滑的简单闭曲线（取正向），其围成区域D_γ全含于D，并假设$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，$z = x + iy$，且$u(x,y)$，$v(x,y)$在D上有连续偏导数，则我们可以对形式1使用Green公式

$$\oint_\gamma u(x,y)\ \mathrm{d}x - v(x,y)\ \mathrm{d}y = -\iint_{D_\gamma}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint_\gamma v(x,y)\ \mathrm{d}x + u(x,y)\ \mathrm{d}y = \iint_{D_\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此，要想在D上处处成立积分与路径无关，也即成立

$$\oint_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

则还要求$u(x,y)$，$v(x,y)$在D上满足这两个方程

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

称为**柯西-黎曼方程**，或者（C.-R.）方程。

并且我们给出下述定义：

定义1.1 （莫雷拉） 如果$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，$z = x + iy$在区域 D 上连续，且对 D 上任意一条分段光滑的简单闭曲线γ，只要γ所围区域D_γ全含于D的，就有$f(z)$沿γ的积分为 0，则称$f(z)$在这个区域D上**在柯西意义下全纯**，或者**全纯。**

若D是单连通的，则条件“ D_γ全含于D ”自然成立，此时可以说积分与路径无关，并可以写成形式

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\ \mathrm{d}z$$

其中z_1，$z_2 \in D$ 是曲线γ 的起点与终点。

并且由上面讨论可以立即得到

定理1.1（柯西积分定理） 假设$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，$z = x + iy$，且$u(x,y)$，$v(x,y)$在 D 上可微且满足柯西-黎曼方程，则$f(z)$ 是在D上全纯。

注： 在上述由黎曼给出的证明中，我们附加了假设$u(x,y)$，$v(x,y)$在 D 上有连续偏导数，这明显要强于可微，但附加了这个假设之后的证明方法非常简单，而且能很好地体现数学分析与复分析的统一性，因此我们使用这个证明。1900年**古萨（Goursat）**发表了新的证明方法，免去了附加假设，但证明过程较为繁琐，我们就不在正文中介绍了。事实上，到后面我们会证明，$f(z)$若在区域 D 上全纯，自然就有$u(x,y)$，$v(x,y)$具有连续偏导数，这在数学分析中是匪夷所思的，这也是复分析与数学分析的最大区别之一。

好的，此刻世界线收束！现在我们解决了我们最早随手给出的一个形式的真正含义，这意味着我们在复积分理论的建立过程中迈出了关键一步！

§4 复合闭路定理与留数

在开始本小节的讨论之前，先让我们回忆一个数学分析中的问题

$$\oint_C \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

其中曲线C是任意一条不经过原点的简单闭曲线（取正向）。

很容易验证，这个被积函数在除了原点之外的地方处处有连续偏导数，而且满足积分与路径无关的条件。

于是由Green公式可知，当曲线C不包围原点时，该积分的值为0。

倘若曲线C包围原点，那么由于在原点处的可微性条件被破坏，我们不能直接使用Green公式，因此我们另外作一个包围原点的圆周$C_\varepsilon: x^2+y^2=\varepsilon^2$（取逆时针方向），其中$\varepsilon>0$ 应取得充分小使得C_ε被完全包含在曲线C的内部。这样一来，曲线C与C_ε^-（即C_ε取反向）成为了一个有孔区域 D 的正向定向边界**（图1）**。

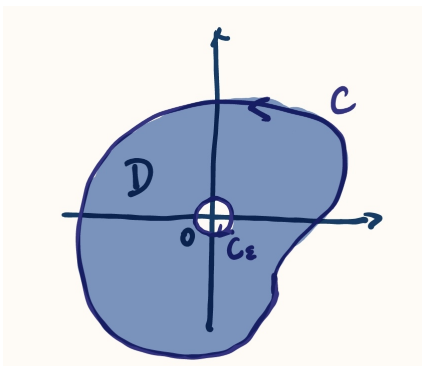

图 1.

又因为在这个有孔区域D上满足Green公式的使用条件，于是积分与路径无关，得到

$$\oint_{C+C_\varepsilon^-} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0$$

即

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} &= \oint_{C_\varepsilon} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_\varepsilon} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

当$\varepsilon \to 0^+$时，曲线C_ε会收缩到一个点，而这个点就是被积函数在D上的**奇点**（这里指破坏了格林公式成立条件的点，或者更简单些，不可微点），而围绕C_ε的积分值却保持不变（在上例中为2π），这个值被称为被积函数在该点的**循环常数**。

类似的办法可以很容易推广到被积函数具有多个奇点的情形，只需作多个小圆周分别包裹住它们，再令半径趋于 0 即可。注意，在我们令曲线C_ε会收缩成一个点 p 时，至少在 p 的某一邻域内不能有其它的奇点，否则曲线C_ε是不能够连续收缩成一个点的。

于是，我们就可以将沿一简单闭曲线的积分写成这条简单闭曲线内部的所有奇点的循环常数之和

$$\int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \sum_{p\in D_\gamma} \mathrm{cir}(p)$$

其中，被积函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在区域D上（除了一些彼此孤立的奇点之外）满足积分与路径无关的条件，γ 是D上一条不通过任一奇点的分段光滑的简单闭曲线（取正向），D_γ是 γ 所围区域，p 取遍 D_γ 上的所有奇点，$\mathrm{cir}(p)$ 是被积函数在点 p 处的循环常数。

好，关于数学分析我们就复习到这里，接下来想必大家也能猜到了：我们要将这一结论推广到复积分上，并且这将成为复变函数中最重要的理论（或许没有之一）。

不过在此之前，我们需要关于解析函数的积分更多的性质。正如我们在上例中看到的那样，$C + C_\varepsilon^-$是一个复周线，它所围成的区域D_γ是一个有孔区域。但根据解析函数的定义，我们只能直接得出沿简单闭曲线积分的结果，因此我们还需要下面的定理来建立解析函数沿复周线积分的结果，用来保证上例中沿复周线$C + C_\varepsilon^-$的正当性。

定理1.2（复合闭路定理） 设$f(z)$ 在区域D上全纯，$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1^- + \cdots + \gamma_n^-$ 为D上多条分段光滑的简单闭曲线组成的复周线，它们围成复连通区域D_γ全含于D，则有

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

或者利用积分的路径可加性，可写成

$$\oint_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z$$

注：为了避免引入不必要的定义，在此结合下图**（图2）**作几点注解

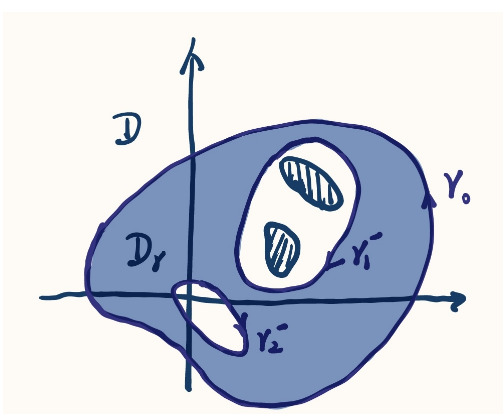

图2.

1. γ_0 将复平面分为了内外两部分，而$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 位于γ_0的内部，且所有这些简单闭曲线彼此之间应当是彼此不交，彼此不含的（否则D_γ将不是一个区域）。

2. γ_0 与 $\gamma_1^-,\cdots,\gamma_n^-$ 的绕行方向相反，这样它们一同组成了的复周线恰好是复连通区域D_γ的正向边界γ。

3. 定理条件中的“简单闭曲线”中的“简单”实质上是多余的，因为一条闭曲线可看成由多条闭曲线衔接而成。

4. 倘若γ是一条简单闭曲线，D_γ退化为一个单连通区域，此定理便退化为全纯性的定义。

证明　不妨只证明 $\gamma=\gamma_0+\gamma_1^-$ 的情形，对于多条曲线组成的复周线类似可证。

作一条曲线 δ 连接γ_0与 γ_1（**图3**），区域D_γ 被曲线 δ 割破，成为一个单连通区域，这是曲线 $\delta,\gamma_1^-,\delta^-,\gamma_0$ 按顺序连接成一条简单闭曲线就是单连通区域D_γ的正向边界。

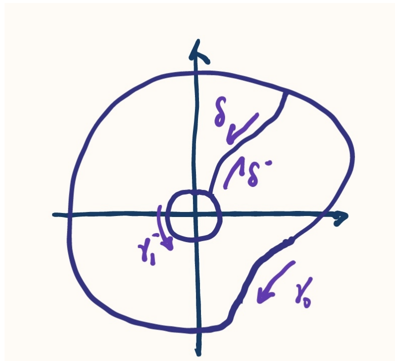

图 3.

此时利用全纯的定义，有

$$\oint_{\delta+\gamma_1^-+\delta^-+\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

又由于

$$\int_\delta f(z)\,\mathrm{d}z=-\int_{\delta^-} f(z)\,\mathrm{d}z$$

结合积分的路径可加性得

$$\oint_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z=\oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

此即为所求。

注：在证明过程中我们构造的曲线 $\delta,\gamma_1^-,\delta^-,\gamma_0$ 按顺序连接成的单连通区域D_γ的正向边界并非传统意义上的简单闭曲线，因为δ与δ^-事实上是重合的。倘若读者不能接受这一点，那么为了让证明更严谨一些，我们可以将用于割破区域D_γ 的曲线 δ 改成一条具有宽度 d 的走廊 δ_d，δ_d^-（**图4**）。

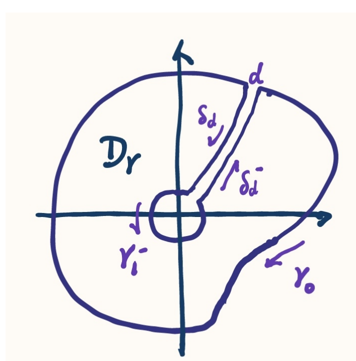

图 4.

再利用$f(z)$在$\overline{D_\gamma}$上一致连续可知

$$\lim_{d\to 0^+}\oint_{\delta_d+\delta_d^-} f(z)\ \mathrm{d}z=0$$

即演变成上述证明的情形。

有了复合闭路定理，再按照上面的讨论，倘若$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$可以连续收缩至$f(z)$ 的**奇点**（这里指$f(z)$的全纯性被破坏的点），且连续收缩的过程中不经过其它奇点（因而奇点是孤立的），则积分

$$\oint_{\gamma_k} f(z)\ \mathrm{d}z$$

在γ_i 连续收缩过程中保持不变，且仅仅依赖于该奇点的性质，因此我们记

$$\mathrm{res}(z_k)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_k} f(z)\ \mathrm{d}z$$

为该被积函数$f(z)$ 在奇点 z_i 处的**留数**，并规定$f(z)$ 在全纯点处的留数为0（这是很自然的）。

于是是我们有与实曲线积分相对应的定理

定理1.3（留数定理） 设函数$f(z)$在区域D上除了一些孤立的奇点外的地方全纯，γ 是区域D上的一条不经过任何奇点的分段光滑的简单闭曲线（取正向），其围成区域D_γ全含于D，则$f(z)$沿γ的积分可以写成

$$\oint_{\gamma} f(z)\ \mathrm{d}z=2\pi i\sum_{z\in D_\gamma}\mathrm{res}(z)$$

其中，等式右边对 γ 所围区域 D_γ 内的所有奇点求和。

至于为什么留数相比于实数情形下的循环常数相差一个$2\pi i$，暂时我们可以理解为是习惯问题，等到后面洛朗级数的部分我们还会再提起此事。

例题1.2 讨论被积函数$f(z)=\frac{1}{z}$的全纯性并计算积分

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

其中曲线C是任意一条不经过原点的简单闭曲线（取正向）。

解答 因为$f(z)=\frac{1}{z}$可以写成

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{z}\\&=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}\\&=u(x,y)+iv(x,y)\end{aligned}$$

在除原点之外的地方显然是连续的，且$u(x,y)$，$v(x,y)$在除了原点之外的地方有一阶连续偏导数，故我们只需验证柯西-黎曼方程。

记$r=\sqrt{x^2+y^2}$，经计算得出

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-2x}{r^3}\frac{x}{r} + \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{y^2 - x^2}{r^4} \\
&= \frac{\partial v}{\partial y}
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{-2y}{r^3}\frac{x}{r} \\
&= \frac{2xy}{r^4} \\
&= -\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}
$$

于是$f(z)$在除了原点之外的地方全纯。

从而，若曲线 C 不包围原点时，该积分的值为0。

如果曲线 C 包围原点，另外作包围原点的圆周$C_\varepsilon : |z| = \varepsilon$（取逆时针方向）当$\varepsilon$充分小时完全位于$C$所围区域内。由复合闭路定理得

$$
\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = \oint_{C_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}z}{z}
$$

再将 C_ε 参数化

$$
C_\varepsilon : z = \varepsilon e^{it} \qquad (t : 0 \to 2\pi)
$$

代入积分表达式得

$$
\begin{aligned}
\oint_{C_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}z}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-it}}{\varepsilon} \cdot i\varepsilon e^{it}\, \mathrm{d}t \\
&= 2\pi i
\end{aligned}
$$

进一步地，我们还可以计算出$f(z)$在$z = 0$的留数$\mathrm{res}(0) = 1$。

等等，不对啊，我们引入留数不就是为了计算积分的吗？如果我们还要用积分来求留数的话，那我们何必那么麻烦引进这样一个概念呢，所以为了计算积分，我们需要一个计算留数的办法。

到目前为止，我们得到的结果都是由实曲线积分推广而来，所以如果仅仅依靠数学分析中关于曲线积分的结论，恐怕我们的研究就要到此为止了。因此，为了寻得计算留数的办法，我们必须将目光转向全纯函数所具有的那些真正精细的结构，那些异于实变量函数的性质，或者说，我们目前已经有了全纯的充分条件了，我们现在不得不研究一下全纯有哪些必要条件。

要研究全纯的必要条件，我们可以从哪些方面入手呢？我们通过柯西积分定理知道$u(x,y)$，$v(x,y)$可微和柯西-黎曼方程可以推出$f(z)$全纯，一个自然的想法是：$f(z)$全纯是否有$u(x,y)$，$v(x,y)$可微和**柯西-黎曼方程**？除此之外，我们还可以去问$f(z)$全纯是否有**牛顿-莱布尼茨公式**？是否有**拉普拉斯方程**（是否**调和**）？是否能**泰勒展开**？

这些问题都将在本讲义剩下的内容中逐一进行讨论，但我们发现，上面这些都指向同一个无法回避的问题：$f(z)$全纯是否有$f(z)$**可微**？请看下一章：微分理论

2.微分理论

§1 导数与微分

和一元实数情形完全相同地，我们定义复变函数$f(z)$在区域D上的导数

定义2.1 设函数$f(z)$定义在区域D上，且对于每一点$z\in D$都有极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在，则称$f(z)$在区域D上**可导**，且这一极限值定义了一个在区域D上的函数，称为$f(z)$在区域D上的**导数**，记作$f'(z)$。

就从这个定义，我们就会发现复变函数的最大特点：在积分时，它展现出了多元函数的特点，但在求导时，它展现出的却是一元函数的特点。之所以产生这种现象，在本质上是因为复数可以做分母，而向量不行。于是我们可以直接定义复变函数的导数，而只能定义多元实变量函数的偏导数。这也提醒着我们，要想解决留数的计算问题，我们不能从积分下手，而必须从微分下手。

我们再定义复变函数$f(z)$在区域D上的微分

定义2.2 设函数$f(z)$定义在区域D上，且对于每一点$z\in D$，函数值的增量$\Delta f(z)$都能写成

$$\Delta f(z)=A\Delta z+o(|\Delta z|)$$

的形式，其中$A=\alpha+i\beta$为一个复常数，$o(|\Delta z|)$是$|\Delta z|$在$\Delta z\to 0$时的高阶无穷小量。此时称$f(z)$在区域D上**可微**，并在$\Delta z\to 0$时改记号Δ为d，即

$$\mathrm{d}f(z)=A\,\mathrm{d}z$$

称为$f(z)$在区域D上的**微分**。

并且与一元实数情形一样，我们有**可导等价于可微**，并且此时$A=f'(z)$，证明过程只需要将一元实数情形中的所有x改写成z即可，在此之后我们将不再区分可导与可微这两个词，且记$f'=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$。

实数情形下的那些求导公式也可以全部直接搬运到复数情形上来，这里就不一一列举了。

§2 可微的充要条件

既然我们要研究全纯和可微的关系，那不妨先从柯西积分定理的条件下手，看看可微函数是否满足柯西积分定理的条件。依照$f(z)$可微的定义，我们将在z处的增量写成

$$\Delta f(z)=(\alpha+i\beta)\Delta z+o(|\Delta z|)$$

的形式，并写出$\Delta f=\Delta u+i\Delta v$，$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$。

代入并分离实虚部得到

$$\Delta u=\alpha\Delta x-\beta\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,\right)$$
$$\Delta v=\beta\Delta x+\alpha\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,\right)$$

事实上，关于上面两式的最后一项，由于$o(|\Delta z|)$是$|\Delta z|$在$\Delta z\to 0$时的高阶无穷小量，它的实部和虚部自然也分别是。

根据二元函数的微分定义，$u(x,y)$，$v(x,y)$在 D 上可微且$\alpha=u'_x=v'_y$，$\beta=-u'_y=v'_x$，这正是柯西黎曼方程。于是根据柯西积分定理，在区域D上的可微函数必是全纯的。

定理2.1 设$f(z)$ 在区域D上可微，则$f(z)$在区域D上全纯。

在之后我们会证明，这个条件实际上是充要的。

接下来我们看柯西积分定理的条件，即$u(x,y)$，$v(x,y)$在 D 上可微与满足柯西-黎曼方程能否推出$f(z)$在D上可微。

根据条件，我们不妨设$\alpha=u'_x=v'_y$，$\beta=-u'_y=v'_x$，于是就有

$$\begin{aligned}\Delta f&=\Delta u+i\Delta v\\&=(\alpha+i\beta)(\Delta x+i\Delta y)+o\Big(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,\Big)\\&=A\Delta z+o(|\Delta z|)\end{aligned}$$

其中，第二个等号成立是因为$o(|\Delta z|)$的线性组合仍是$o(|\Delta z|)$，此即$f(z)$ 在区域D上可微的定义。于是我们得到了

定理2.2（可微的充要条件） 函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$z=x+iy$在区域D上可微当且仅当$f(z)$满足柯西积分定理的条件，即

1. $u(x,y)$，$v(x,y)$在 D 上可微
2. 满足柯西-黎曼方程

我们费了很大力气去研究$f(z)$的可微性，但我们的最终目的是求积分（留数），这对于我们求积分有什么用？因为单连通区域D上的全纯函数$f(z)$的积分与路径无关，我们已经把它的积分写成了形式

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\ \mathrm{d}z$$

这与一元函数的定积分的形式十分相似。那么我们在计算定积分时使用的牛顿-莱布尼茨公式是否适用呢？尽管我们暂时还不清楚，但是我们可以想象一下，假如复积分成立牛顿-莱布尼茨公式的话，应该写成这样

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\ \mathrm{d}z=F(z_2)-F(z_1)$$

其中$F(z)$是$f(z)$在区域D上的一个原函数。

于是我们的目标转向了原函数这一概念。如何理解原函数？原函数又是否存在？如果原函数存在，牛顿-莱布尼茨公式成立吗？这些问题我们会放到下一小节继续讨论。

§3 原函数存在定理

首先，根据我们在上一章末尾的讨论，我们可以明确我们本节中讨论的区域D应当主要是单连通区域的。

我们假设$f(z)$在D上全纯，然后正如我们在实数情形的一元积分学那样，写出

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \qquad ,\ z\in D$$

根据路径可加性有

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi$$

进而作出估计

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} |f(\xi)-f(z)|\ \mathrm{d}\xi$$

由于$f(z)$的连续性，对任意的$\varepsilon>0$当Δz充分小时，有$|f(\xi)-f(z)|<\varepsilon$，此即极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)\qquad ,\ z\in D$$

于是我们证明了

定理2.3（原函数存在定理） 设函数$f(z)$ 在单连通区域D上全纯，则$f(z)$在D上存在原函数，可由公式

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi$$

给出，其中$z_0\in D$是D上的任意固定点。并且，$f(z)$在D上的所有原函数在相差一个常数C的意义下相同。

关于定理的后面一半，与数学分析中完全相同，在此略去不证。

根据这一定理，我们可以立即推出牛顿-莱布尼茨公式

推论2.1（牛顿-莱布尼茨公式） 设函数$f(z)$ 在单连通区域D上全纯，z_1，$z_2\in D$，成立公式

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\ \mathrm{d}z=F(z_2)-F(z_1)$$

其中$F(z)$是$f(z)$在区域D上的一个原函数。

现在考虑$f(z)=\frac{1}{z}$在有孔区域D上全纯，不妨设$z_0=1$，z 是右半平面上一个点。根据复合闭路定理，我们知道

$$\oint_{\gamma_0} f(z)\ \mathrm{d}z-\oint_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z=2\pi i$$

其中，γ_0 与 γ_1 分别从上面和下面绕过原点**（图5）**。

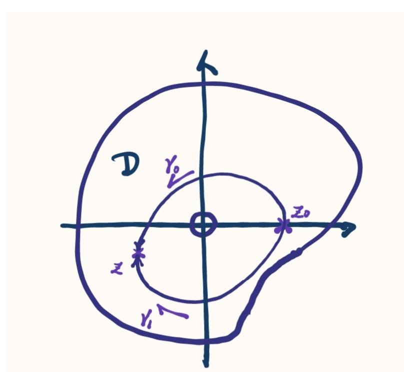

图5.

二者积分并不相等，因此我们不能写出

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\ \mathrm{d}z$$

的形式。但是假如我们割开区域D，就像我们在复合闭路定理中做的那样，得到单连通区域D'，则这时根据原函数存在定理，在区域D'上$f(z)$存在原函数$F(z)$。

这个原函数在割开后的单连通区域D'上全纯，但并不在整个有孔区域D上全纯，因为在割痕处$F(z)$并不连续：当 z 从割痕下方靠近割痕时，事实上是沿γ_1进行积分，而从上方靠近割痕时，事实上是沿γ_0进行积分，二者之间相差 $2\pi i$。

根据割开方式的不同，我们得到不同的原函数。如在上例中，沿虚轴正向和负向分别割开复平面。对于前者而言，沿一条从上方绕过原点的曲线γ_0积分是一件不可能的事情；而对于后者而言，积分路径从上方绕过原点却是必然。因此在这两种情况下，所有表达式

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\ \mathrm{d}z$$

对于给定的z_0无法给出同一函数，它们彼此之间相差$2\pi i$。

因此，在指定一个积分路径的绕行方式之前，牛顿-莱布尼茨公式是不成立的，只有通过割开复平面，对给定z_0分离出唯一的 $F(z)$，才能成立牛顿-莱布尼茨公式。

§4 调和函数

上一小节我们讨论了原函数存在以及牛顿-莱布尼茨公式成立的条件，发现它们对于单连通区域上的曲线积分是非常方便的，然是对于围绕奇点的闭合曲线积分却没什么用。

为什么我们会想到研究调和函数呢？调和函数最大的特点就是，在一个圆周上函数的平均值恰好等于圆心处的函数值，即如果$f(\vec{x})$在区域D上调和，则成立

$$\frac{1}{2\pi}\oint_C f(\vec{x})\ \mathrm{d}s = f(x_0)$$

其中 C 是以$\vec{x}_0$ 为圆心的全含于D 内的圆周。这与我们研究的留数公式

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = \mathrm{res}(z)$$

有不少的神似之处。

总之先不管这个类比是否合理，来都来了，试试看先。

我们依然假设函数$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$，$z = x + iy$在区域$D$上可微（因此是全纯的），并且$u(x, y)$，$v(x, y)$在$D$上有二阶连续偏导数（我们后面会知道这是可由全纯性推出的），计算

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

根据柯西-黎曼方程，有$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$，分别对$x$，$y$求偏导数，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

由于二阶偏导数连续，两个混合偏导数相等，于是$u(x, y)$在区域D上调和，同理之于$v(x, y)$。

那么，如果把$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$z=x+iy$ 视为一个关于 x，y 的二元函数，并且将虚单位 i 当做常数，则$f(z)$也是调和的，自然也能得到平均值公式。但事实上调和函数的平均值公式的证明本身并不简单，如果从复变函数的角度来研究$f(z)$，我们就能比较容易地得到平均值公式，还能得到关于复变函数的更多性质。

$f(z)$ 在以 z_0 为中心、r 为半径的全含于 D 的圆周 C 上的平均值可以写成

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+r^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

进行一个变量替换$\zeta=z_0+e^{i\theta}$，则$\mathrm{d}\zeta=ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$，于是上面积分化为了

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,\mathrm{d}\zeta$$

眼前一亮！

因为$f(z)$在区域D上可微，则被积函数$\frac{f(z)}{z-z_0}$ 在除了 z_0 处的地方都可微，那么，上面那个积分就是它的在z_0处的留数！平均值定理和留数定理联系在了一起，世界线再次收束！那么平均值定理究竟该如何证明呢，且听下章分解！

3.留数理论

§1 柯西积分公式

在上一章的末尾，我们决定从平均值定理入手，并通过形式变换，发现我们要证明平均值定理，实际上只需要证明下面的公式成立。

定理3.1（柯西积分公式） 设$f(z)$在区域 D 上可微，分段光滑的闭曲线 C（由复合闭路定理， C 可以不必是简单的）在区域D上且所围区域全含于D，则对C所围区域内任意一点 z 成立公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

证明： 对任意的$\varepsilon>0$，作$C_\delta:|\zeta-z|=\delta$，可取充分小的$\delta$可使得$C_\delta$及其内部全含于$D$，且由于$f$ 在z处连续，可以做到在C_δ上还有$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$。于是由复合闭路定理，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

通过$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}=1$（前文已然计算过$z_0=0$的情形，读者自行验证这一点）我们可以写出

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\delta} \frac{f(z)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

因此进行估值

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta-f(z)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\delta} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\right| \\ &< \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\delta} \frac{\varepsilon\, d\zeta}{\zeta-z}\right| \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

由于ε的任意性，完成证明。

由此可见，一个全纯函数每一个点处的值都由这样一个积分所决定，有着非常精密的结构。

§2 高阶导数公式

我们在前面**定理1.1**的注释里有提及$f(z)$若在区域 D 上全纯，自然就有$u(x,y)$，$v(x,y)$具有连续偏导数的（我们还没有证明这一点）。结合**定理2.1**，我们还可知$f(z)$若是可微，就能推出$f'(z)$是连续的。

事实上，我们还可以更进一步得出$f(z)$是任意次可微的，这样自然有$f'(z)$可微，进而$f'(z)$是连续，以及$u(x,y)$，$v(x,y)$具有连续偏导数。

想要证明这一点，观察我们刚才证明的柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

要证明 $f'(z)$ 是可微的，首先对上式两边对z求导数，并形式地交换积分与求导的次序（对z求导时$f(\zeta)$被视为常数），即可得到

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta$$

如果这个式子成立的话，那么这个过程可以一直进行下去，因为求导的过程中被积函数里的$f(\zeta)$并不发生变化，而$\frac{1}{\zeta-z}$是任意次可微的，我们就能得到 $f(z)$也是任意次可微的，还可以得到$f^{(n)}(z)$ 的表达式。

定理3.2（高阶导数公式） 设$f(z)$在区域 D 上可微，分段光滑的闭曲线 C在区域D上且所围区域全含于D，则对C所围区域内任意一点 z 成立公式

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\quad,n=1,2,\cdots$$

证明： 我们先考虑 $n=1$ 的情形，即先下式

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta$$

成立。

写出差商$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$，利用柯西积分公式，可化为

$$\begin{aligned}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}&=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\Delta z}\oint_C\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}\,\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

于是

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)\Delta z}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right|$$

倘若记$d=d(z,C)=\inf_{\zeta\in C}|\zeta-z|$为点$z$到曲线$C$的距离。由于$z$不在$C$上，一定有$d>0$。又由于$f(z)$在$C$上有界，对于任给的$\varepsilon>0$，可取充分小的$\Delta z$，使得分母不小于$\frac{d^3}{2}$，而整个积分值不超过$\varepsilon$。

对于$n\geq 2$ 的情形，我们可以采用数学归纳法，用完全相似的估计方式得到，留给感兴趣的读者自己证明。

至此，我们证明了一个可微函数，一定是任意次可微的。根据我们数学分析的经验，通常而言，一个函数的导数的性质并不如那个函数本身好，比如连续函数不一定可导，而导函数也可能不连续，但在复变函数中，我们利用柯西积分公式，将求导运算转化成积分运算，从而函数的那些好的性质能够被保持。

另外，这一公式还可以作为$f(z)$的导数的定义，由此进一步地，若使用 $\Gamma(\alpha+1)$ 来代替 $n!$ ，我们可以定义$f(z)$ 的分数阶导数

$$f^{(\alpha)}(z)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}\zeta\quad,\alpha>0$$

§3 莫雷拉定理

在上一章介绍**定理2.1**的时候，即可微性可以推全纯性，我们提示了，这个条件实际上是充要的，所以，接下来我们会证明全纯性可以推可微性。

定理3.3（莫雷拉） 若函数$f(z)$在单连通区域D上全纯，则它在D上可微。

证明： 依照全纯的定义，即**定义1.1**，$f(z)$在区域 D 上全纯意味着它在D上连续，且对 D 上任意一条分段光滑的简单闭曲线γ，只要γ所围区域全含于D，就有$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0$。

首先我们假设D是单连通的，根据原函数存在定理，即**定理3.3**，$f(z)$在D上存在原函数$F(z)$。显然$F(z)$是可微的，还有$F'(z)=f(z)$。又由**定理3.2**及之后所做的讨论可知，可微函数是任意次可微的，因此$f(z)$是可微的，进而是全纯的。

接下来设区域D 任意，我们任取一个点$z\in D$，它的某一邻域是单连通的，因而$f(z)$在其上是可微的。令 z 取遍 D 可知，$f(z)$在 D 上是处处可微的，也即$f(z)$在 D 上全纯。

至此，我们证明了全纯性可以推可微性，再结合**定理2.1**，我们证明了了可微和全纯的相互等价性，世界线再次收束！

在常见的复变函数课本中，通常从可微性出发，以$f(z)$在区域D上可微作为以$f(z)$在区域D上全纯的定义，再证明莫雷拉定理，这也是合理的，我们称这种全纯为**在黎曼意义下全纯**。在此后我们不再区分这两种全纯，也即不再区分全纯与可微。在下一章节中，我们还要介绍一种全纯的定义，并且这三种全纯都是等价的。

§4 利用柯西积分公式计算留数

不要忘记，我们引出柯西积分公式，到底还是为了求留数。

在上一章研究调和函数的时候有提及，复变函数的平均值定理可以转化为这样的一个积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,\mathrm{d}\zeta$$

其中C及其内部全含于区域D内，$f(z)$在D上全纯。

而这一个积分的值，又恰恰是被积函数$\frac{f(z)}{z-z_0}$ 在z_0处的留数。因此，如果我们要得到某一函数$f(z)$在某一个奇点z_0处的留数，我们就可以将它写成这种形式

$$f(z)=\frac{(z-z_0)f(z)}{z-z_0}=\frac{g(z)}{z-z_0}$$

如果有$g(z)=(z-z_0)f(z)$是全纯的（或者在适当修改在z_0处的值后是全纯的，我们之后会解释这意味着z_0是$f(z)$的一个单极点），那么根据柯西积分定理，有

$$\mathrm{res}(z_0,f)=g(z_0)$$

其中，$g(z_0)$应当理解为$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$，由于 $g(z)$ 全纯，这一极限值存在。

进一步地，如果对于某个n，有$g(z)=(z-z_0)^n f(z)$全纯，而对所有小于n的自然数k，$(z-z_0)^k f(z)$不全纯，我们可以利用高阶导数公式

$$g^{(n-1)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\,\mathrm{d}\zeta \quad ,n=1,2,\cdots$$

可知

$$\mathrm{res}(z_0,f)=g^{(n-1)}(z_0)$$

这里关于全纯性的理解与$g^{(n)}(z_0)$的含义与上面相同。

最后结合柯西积分定理，我们可以得到下面计算留数的办法。

定理3.4 设函数$f(z)$在 z_0 的某一去心邻域上全纯，我们可以通过如下方式计算$\mathrm{res}(z_0)$

1. 若$f(z)$在 z_0 处全纯（或是适当修改在 z_0 处的值后全纯），则

$$\mathrm{res}(z_0)=0$$

2. 若$f(z)$在 z_0 处不全纯，但$g(z)=(z-z_0)f(z)$ 在 z_0 处全纯（或是适当在修改 z_0 处的值后全纯），则

$$\mathrm{res}(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

3. 若存在某个n，对所有小于n的自然数k，$(z-z_0)^k f(z)$不全纯，但 $g(z)=(z-z_0)^n f(z)$ 在 z_0 处全纯（或是适当在修改 z_0 处的值后全纯），则

$$\mathrm{res}(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)$$

利用这个定理，我们将复杂的积分计算化为了简单的极限和求导计算，这是我们探索留数过程中取得的最大进步。待到下一章，我们讨论了奇点的类型之后，我们会以更加简洁和本质的方式对这个定理进行重新表述。

§5 刘维尔定理

在进入下一章之前，我们先从关于留数理论的主线任务中脱离出来一下，进入一条支线。我们将在本节证明一个非常重要的定理——刘维尔定理。虽然是支线，但因为这个定理过于重要，所以我们必须在这个地方进行介绍，并且我们还会用它来证明代数学基本定理。

引理3.5（柯西不等式） 设$f(z)$在区域 D 上全纯，以$z_0\in D$为圆心，任作一半径为 R 的圆周 $C:|z-z_0|=R$ 满足 C 及其内部全含于D，则成立以下不等式

$$|f^{(n)}(z)|\le\frac{n!M}{R^n}\quad ,n=1,2,\cdots$$

其中，$M=\max_{z\in C}|f(z)|$。

证明： 这一不等式的证明是简单的，只需要对高阶导数公式利用绝对可积性进行估值即可获得，细节交由感兴趣的读者补全。

但是这一不等式是重要的，因为它给出了全纯函数的在一点各阶导数模的估计式，同时也表明这一估计与全纯区域的大小密切相关。沿袭着这个思路，我们可以考虑当$f(z)$在整个复平面$\mathbb{C}$上全纯的情形。我们称在$\mathbb{C}$上全纯的函数为**整函数**，利用柯西不等式我们可以得到关于整函数的一个重要性质。

定理3.6（刘维尔）有界整函数必为常值函数。

证明：设$|f(z)|$的上界为M，由柯西不等式，当 n 取 1 时有不等式

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$$

对一切 $R>0$ 成立。接下来只需令$R\to+\infty$ 即知 $f'\equiv 0$。由于$\mathbb{C}$单连通，结合原函数存在定理（与数学分析完全相似地）可以得到$f\equiv C$，C是某一复常数。

作为刘维尔定理的应用，我们来到本节的重头戏：代数学基本定理！这一大家早已熟知的定理要想利用纯粹的代数学方法证明并不容易，但是很不可思议地，我们利用复分析的知识竟然可以轻而易举地解决它！这也体现了数学各个分支之间的奇妙联系。

定理3.7（代数学基本定理）n 次复系数多项式 $p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 在复数域内必有一零点。

证明：反证法，假设 $p(z)$ 在复平面上无零点，那么由于$p(z)$在复平面上解析，所以作$\frac{1}{p(z)}$也在复平面上解析，即整函数。

下面我们证明$\frac{1}{p(z)}$有界。利用数学分析的知识这几乎是显然的，因为当$z\to\infty$时有$|p(z)|\to+\infty$，于是存在$R>0$，在圆盘$D:|z|\leq R$之外，$\frac{1}{p(z)}$有界；而又由于D是紧集，因此在D上$\frac{1}{p(z)}$也有界，于是$\frac{1}{p(z)}$是有界整函数。

根据刘维尔定理，$\frac{1}{p(z)}$ 从而 $p(z)$ 是常值函数，这产生了矛盾，于是完成了证明。

至此，本章内容就结束了。我们从上一章末尾的调和性出发，在证明平均值定理的过程中我们证明了柯西积分公式，并将它推广为高阶导数公式。利用这一公式，我们得到了两个全纯函数的重要性质：无穷可微性和刘维尔定理。除此之外还给出了一些留数的计算方法和代数学基本定理。

现在，我们在第一章末尾提到的那些研究全纯的充要条件的一些可能的想法里，只剩下**泰勒展开**没有讨论了。我们知道，在数学分析中，一个函数任意次可微并不意味着它能够展开为幂级数（e^{-z^2}就是一个例子），可见“展开为幂级数”这一条件是要强于无穷可微的。那么，一个区域D上的全纯函数究竟能否展开为幂级数呢？如果不能的话，那又可以展开成什么样子呢？以及我们该如何利用全纯函数的级数展开式来求留数呢？这些问题都将在下一章一一解答。

4.级数理论

§1 预备知识

在研究一个全纯函数能否展开成幂级数之前，我们需要一些与复变函数项级数有关的准备知识。这里面的相当一部分与数学分析中的相关知识完全重合，包括（内闭）一致收敛、柯西收敛准则、优级数判别法、阿贝尔定理、柯西-阿达玛公式等等，我们在此略去对相关内容的介绍与定理证明。若读者对上述内容不够熟悉，建议学过数学分析的对应章节后再阅读后续本讲义内容。

特别要指出一点，在数学分析中我们使用的“收敛区间”的概念，在复分析中应当对应地改成“收敛圆盘”。

与数学分析完全相同地，对于在区域 D 上内闭一致收敛的的函数项级数$\{f_n\}$，如果其中每一项都连续，则它们的和函数

$$f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

在 D 上连续且逐项可积。

至于逐项可微性，在复变函数中会发生一点变化，也就是我们即将给出的定理。

定理4.1（魏尔斯特拉斯） 设$\{f_n\}$是D上的全纯函数列，若级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$在D上内闭一致收敛于和函数f，则 f 在D 上全纯，且任意次逐项可微。

证明： 先证明 f 的全纯性，由于内闭一致收敛，任取一个闭圆盘 K 全含于 D，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$在K上一致收敛于f。在 K 上任取一分段光滑的闭曲线γ，因为一致收敛，所以 f 连续，且逐项可积。于是沿 γ 逐项积分，有

$$\oint_\gamma f \, \mathrm{d}z=\sum_{n=1}^{\infty} \oint_\gamma f_n \, \mathrm{d}z$$

又由于每一个 f_n 都在D，因而K 上全纯，于是右边每一项都是 0 ，从而 f 沿γ的积分值为 0。

由莫雷拉定理可得，f 在 K 上全纯，也即可微。又因为 K 是任意的，可得 f 在 D 上全纯。

接下来我们证明逐项可微性。为此，对于固定的 $k=1,2,\cdots$ ，使用高阶导数公式。在上式两边同时除以$(z-z_0)^{k+1}$并沿着γ积分，其中z_0是 γ 内部一点，显然存在$\rho>0$ 使得$|z-z_0|>\rho$，因此除以$(z-z_0)^{k+1}$后不影响级数的一致收敛性。于是可以写出

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}z=\sum_{n=1}^{\infty} \oint_\gamma \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}z$$

此即

$$f^{(n+1)}(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(n+1)}(z_0)$$

又因为圆盘K和路径 γ 都是任取的，这可以得到上式对任意的$z_0 \in D$ 都成立，于是将 z_0 改写为 z，即

$$f^{(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(n+1)}$$

定理得证。

这与数学分析中的逐项求导定理不同，在数学分析中要求导函数的一致收敛性。另外，作 $f_n=g_{n+1}-g_n$ 即可得到函数列一致收敛版本的魏尔斯特拉斯定理。这个定理会成为我们接下来研究级数的有力工具之一。

§2 泰勒级数

在数学分析中，我们先形式地写出了幂级数，然后再探究函数可以写成幂级数的条件。与此平行地，我们也可以先假设一个全纯函数可以写成幂级数，先研究它的性质，再探究它与全纯函数的关系。

定义4.1 如果函数$f(z)$可以在区域D上写成幂级数展开的形式，则称函数$f(z)$在D上**解析**。

显然，解析函数一定是全纯的。

现在不妨假设解析函数在以a为圆心的圆盘K上能展开成幂级数，即

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

显然 K 包含于它的收敛圆盘，由阿贝尔第二定理知幂级数在K上是内闭一致收敛的。只需要对两边求若干次导，并不断地代入$z=a$，即可以和数学分析中一样得到

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

因此原式可以写成

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

称为**泰勒级数。**

事实上，对于随意某个全纯 $f(z)$，我们都可以对它求导，然后形式写出上面等式右端的级数。只不过它展开的级数它是否收敛，又是否收敛到$f(x)$呢？这是需要证明的，我们给出下面的定理。

定理4.2（泰勒） 设$f(z)$在D上全纯，$a\in D$，则$f(z)$在任一以a为圆心的全含于 D 的开圆盘上可唯一地展开为泰勒级数。

证明： 对于某个全纯函数$f(z)$，我们写出右端的级数。根据柯西不等式（**引理3.5**）

$$|c_n|=|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}|\leq\frac{M}{R^n}$$

于是收敛半径可由柯西-阿达玛公式算得至少不小于R，式中 R 和 M 的意义与**引理3.5**相同。

我们沿用之前的记号，不妨此幂级数在圆盘 K 上收敛，并利用高阶导数公式，将$f^{(n)}(a)$写成积分的形式，于是原先的级数又可以写成

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_C f(\zeta)\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

其中，$C:|\zeta-a|=r$ 含于K，$r>0$ 不超过收敛半径。

若 z 选取在 C 的内部，即满足 $|\frac{z-a}{\zeta-a}|<1$ 。形式上地进行积分与求和的次序交换，即

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_C f(\zeta)\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\sum_{n=0}^{\infty}f(\zeta)\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

在此条件下，根据优级数判别法，右侧被积函数对 ζ 在 C 上一致收敛，因此这个换序是合理的。

接着利用公式（这可由等比数列求和直接导出，而无需使用级数知识）

$$\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n\quad,|u|<1$$

知上式可进一步化为

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-a}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

这不就是柯西积分公式嘛！好了，问题解决了！

于是在 C 内部这一幂级数收敛到$f(z)$，换言之，在 C 内部 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

接下来令圆周 C 的半径 r 逐渐增大，使得 C 得以趋于圆盘 K 的边界，可知晓上式对所有$z\in K$ 成立。

展开式的唯一性是显然的，因为根据之前的讨论，$f(z)$若能展开为泰勒级数，则系数由公式

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

直接确定，不会有其他可能。

这个定理说明了，全纯函数是解析的，从而解析和全纯等价。在许多复变函数课本中，以 “解析“ 二字来代替本讲义中使用的 ”全纯“，这也是合理的，我们称这种全纯为**在魏尔斯特拉斯意义下全纯**。至此我们总共介绍了三种全纯的概念，它们彼此等价，在本讲义中也不会对 ”解析“ 和 ”全纯“ 进行区分。

现在我们知道了一个全纯函数一定可以展开成幂级数，这是一个比此前得到的无穷可微性更强的结果，那这会给引出哪些关于全纯函数的新性质呢？我们将在下一节中揭晓。

§3 唯一性定理

本节介绍的唯一性定理是全纯函数最重要的性质之一。到目前为止，我们对全纯函数的研究主要聚焦在抽象的全纯函数 $f(z)$ 上而少有研究具体的全纯函数。举个例子，是否能在复平面上定义 e^z 和 $\sin z$ 之类我们常用的函数呢？这当然是可以的，不论是用级数，还是利用其它什么方法，都可以在将原先定义在实数上的指数和正弦函数拓展到整个复平面。

但是，我们还希望拓展定义域之后的函数，能保留一些原有的性质，比如我们希望恒等式

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1$$

以及一大堆背都背不完的三角公式在整个复平面上成立。如果单单验证这一个公式倒是简单，但是我们曾经在初等数学和数学分析中得到过不计其数的各种各样的等式，我们总不能挨个验证吧？那么哪些在复平面上仍然成立，而哪些不成立了呢？这些都可以从唯一性定理中得到答案。

定理4.3（零点的孤立性） 设 $f(z)$ 区域 D 上全纯，且不恒等于 0 ，则若 $a\in D$ 是 $f(z)$ 的一个零点，则 $f(z)$ 在 a 的某一邻域上不存在其他零点。

证明： 将 $f(z)$ 在以 a 圆心的某一开圆盘 K 上展开为泰勒级数，由于 $f(a)=0$，展开式的前某些项的系数（至少c_0）为 0 。不妨假设 $c_0=c_1=\cdots=c_{k-1}=0$，而 $c_k\neq 0$，k 是某个正整数。那么提取公因式后，可以得到

$$f(z)=(z-a)^k\sum_{n=k}^{\infty}c_n(z-a)^{n-k}$$

即将$f(z)$分解成了$(z-a)^k$和另一个级数的乘积。如果记

$$\varphi(z)=\sum_{n=k}^{\infty}c_n(z-a)^{n-k}$$

显然右端级数与原先的级数有相同的收敛半径，因而在K上收敛。且因为$c_k\neq 0$，因此 $\varphi(a)=c_k\neq 0$。由 $\varphi(z)$ 的连续性， $\varphi(z)$ 在 a 的某一充分小的邻域上不取值 0 。

又因为 $(z-a)^k$ 没有除了 a 之外的零点，所以 $f(z)=(z-a)^k\varphi(z)$ 在这一邻域上没有除了 a 之外的零点，定理得证。

对这个定理作一个简单的逆否命题，就可以得到唯一性定理了。

定理4.4（唯一性） 设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 都在区域 D 上全纯，且两个函数在某点集 $\{z_n\}\subseteq D$ 上等值，且 $\{z_n\}$ 在 D 上有一收敛点 a 。则两个函数在 D 上恒等。

证明： 作 $f(z)=f_1(z)-f_2(z)$，则在 $\{z_n\}$ 上 $f(z)$ 取值为 0 。由 $f(z)$ 连续性及海涅定理，$f(a)=0$ ，可见 a 是 $f(z)$ 的一个非孤立零点。为此，只能有 $f(z)\equiv 0$，即 $f_1(z)\equiv f_2(z)$。

这个定理的一个直接推论就是，若两个函数在某一邻域、甚至某一段弧上相等，则它们在整个区域上恒等。仍举之前的例子，假如以幂级数来定义 $\sin z$ 和 $\cos z$，则作 $g(z)=\sin^2 z+\cos^2 z-1$ 在整个实轴上恒等于 0 ，由唯一性定理知它在整个复平面上恒等于 0 。

现在，我们曾经得到的各种实数情形的公式，全都可以以这种方式搬到复数情形上了！

§4 零点和极点

这一节为之后的洛朗级数作一些语言上的准备工作。

在证明零点的孤立性定理（**定理4.3**）的时候，我们对全纯函数做了这样一个分解 $f(z)=(z-a)^k\varphi(z)$。因为类似的操作我们还会多次使用，所以方便起见，我们作出对它定义。

定义4.2 设 $f(z)$ 在区域 D 上全纯，$a\in D$ 是 $f(z)$ 的一个零点。若能 $f(z)$ 作出分解 $f(z)=(z-a)^k\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 D 上全纯且在 a 的某一邻域无零点，则称满足这样分解式的 k 为零点 a 的**阶**。

零点的阶刻画了 $f(z)$ 在零点附近的性态。容易证明它可以有下面这些等价定义。

命题1 a 是 $f(z)$ 的 k 阶零点当且仅当 $f(z)$ 在 a 处的泰勒展式中的前 k 项系数 $c_0=c_1=\cdots=c_{k-1}=0$，而 $c_k\neq 0$。

命题2 a 是 $f(z)$ 的 k 阶零点当且仅当 $f(z)$ 极限

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{(z-a)^k}$$

存在且极限值不等于 0 。

并且与零点相对应地，如果 a 是 $f(z)$ 的一个奇点——一种特殊的，像点 a 之于 $\frac{1}{z-a}$ 的奇点，我们也给出定义。

定义4.3 说点 a 是 $f(z)$ 的一个**极点**，如果 a 是函数 $\frac{1}{f(z)}$ 的一个零点。且 a 作为 $\frac{1}{f(z)}$ 的零点的阶数称为极点的阶数。

在这样定义的极点处 $f(z)$ 将取得 ∞ ，而极点的阶也刻画了在极点附近的性态，它也有下面这些等价定义。

命题3 a 是 $f(z)$ 的 k 阶极点当且仅当 $f(z)$ 在 a 的某一邻域可以写成分解式$f(z)=(z-a)^{-k}\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在这一邻域上全纯且无零点。

命题4 a 是 $f(z)$ 的 k 阶极点当且仅当 $f(z)$ 极限

$$\lim_{z\to a}\ (z-a)^k f(z)$$

存在且极限值不等于 0 。

另外还要补充一下，极点只是一种特殊的奇点，我们根据 $f(z)$ 在奇点附近的性态，可以将对它进行分类。首先，如果一个奇点的某一邻域内没有其它奇点，或者说函数在它的某一去心邻域内全纯，则称这样的奇点为**孤立奇点**。就和零点的孤立性一样，我们希望奇点也是具有孤立性的，只有这样我们才能使用极限工具，因此我们主要研究孤立奇点。如果一个奇点是是某一列奇点的极限，则称为**非孤立奇点**。

下面全都考虑孤立奇点，我们已然介绍了极点，若极限$\lim_{z\to a} f(z)=\infty$，则 a 是 $f(z)$ 的极点，例如 a 就是函数 $\frac{1}{z-a}$ 的 1 阶极点（单极点）。

若极限$\lim_{z\to a} f(z)=A$，A 是某个有限数，则 a 是 $f(z)$ 的**可去奇点**，此时只要补充定义 $f(a)=A$ ，即可让 $f(z)$ 成为在 a 的邻域上的全纯函数，例如 0 就是函数 $\frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点。

如果 a 是可去奇点，那么根据柯西积分定理知 $\operatorname{res}(a)=0$，从而在很多时候可以在不特殊说明的情况下，将 a 视作全纯点。

若极限$\lim_{z\to a} f(z)$ 震荡不存在，则 a 是 $f(z)$ 的**本性奇点**，例如 0 就是函数 $e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点。事实上，这种震荡会经历复平面上的每一个点，例如取$z_n=\frac{1}{A+2k\pi i}$，当 $n\to\infty$ 时有 $z_n\to 0$ 而 $e^{\frac{1}{z}}\to e^A$ ，当 A 取遍复平面时可以使得 e^A 取遍复平面。

另外还有一种特殊的奇点，有别于用于描述单值函数性质的孤立和非孤立奇点，称之为**支点**，本讲义中不对此进行深入探讨。当自变量围绕这种奇点旋转一周，函数值会从一个分支进入另一个分支，只有割破复平面，才能分离出一段我们熟悉的全纯函数。例如 a 是 函数 $\sqrt{z-a}$ 的一个支点，两个分支之间相差一个负号，还有像在牛顿-莱布尼兹公式（**推论2.1**）及其后面解释中提到的那样，0 是 函数 $\int_1^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$ 的一个支点（积分路径取逆时针绕行原点），不同分支之间相差 $2\pi i$ 的整数倍。

好的我知道这一节又乱又无聊，纯纯零散的概念和定义，我自己写这一段的时候也能没把它们连在一起，但不介绍完这些新词，往下就不太好说话了，所以才说这是语言上的准备工作嘛。实在不行，先不管它们，需要的时候再倒回来看一眼吧。现在，我们终于继续我们旅程了！

§5 洛朗级数

现在，我们复分析的学习将进入最高潮。

通过此前的学习，我们知道全纯函数 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数，但是为了研究留数，我们不得不研究去研究函数在奇点附近的性质。那么，有没有一种可能，$f(z)$ 可以在奇点的附近展开成某种级数呢?

首先如果点 a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点，那没有什么好讨论的，我们直接将它展开成泰勒级数就行了。

然后，如果 a 是函数 $f(z)$ 的 k 阶极点，可以先写出 $f(z)=(z-a)^{-k}\varphi(z)$ ， $\varphi(z)$ 在 a 的某一邻域全纯因而可以展开为泰勒级数

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

那么就能将 $f(z)$ 写成一个带有限项负幂项的级数

$$f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty} c_{n+k}(z-a)^n$$

如果是本性奇点呢？如果说在可去奇点可以展开成不带负幂项的级数、在极点处可以展开成带有限项负幂项的级数，那么一个很自然的猜测就产生了：在本性奇点处是否可以展开成一个带有无限项负幂项的幂级数?

答案是肯定的，我们给出下面的定理。

定理4.5（洛朗）若函数 $f(z)$ 在某一圆环 $H: r < |z-a| < R$ 上全纯（$0 \le r < R \le +\infty$），则 $f(z)$ 可展开为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

称为**洛朗级数**。其中，系数 c_n 可由下式唯一确定。

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta$$

C 是某一夹在圆环当中的分段光滑闭曲线。

注：这样的一个双边幂级数收敛当且仅当两个级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \, , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}$$

分别收敛。

证明：利用柯西积分公式（结合复合闭路定理），作两个同心圆环 $\Gamma_1 : |z-a| = \rho_1$ 和 $\Gamma_2 : |z-a| = \rho_2$ （$r < \rho_1 < \rho_2 < R$），对于介于二者之间的 z 有

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2 + \Gamma_1^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} \, \mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

对于第一项，完全按照**定理4.2**的推导过程，可以几乎一字不改地得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} f(\zeta) \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - a} \\ &= \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \end{aligned}$$

至于第二项，除了颠倒某处分子分母的顺序之外，大同小异地可以有下列递等关系（注意这里变化为 $|\frac{\zeta - a}{z-a}| < 1$）

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\ \mathrm{d}\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2} f(\zeta)\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{z-a} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{\Gamma_2} f(\zeta)\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\oint_{\Gamma_2} f(\zeta)\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}
$$

其中

$$
c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\mathrm{d}\zeta
$$

倘若将指标 $-n$ 改写成 n ，则得到

$$
c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\ \mathrm{d}\zeta
$$

于是负幂项的系数也可由此公式表述。

令 Γ_1、Γ_2 分别趋向 H 的内、外边界知展开式对所有 $z\in H$ 成立，由全纯性知积分路径可改为任意分段光滑的闭曲线 C 。

另外，关于展开式的唯一性，和求泰勒展开式系数的做法完全类似，只需要把求导步骤改为等式两边同时除以 $2\pi i\cdot(z-a)^{n+1}$ 后沿着 C 逐项积分即可。

注：在证明的最后一步，我们运用到了这样一个事实（ C 是围绕 a 的分段光滑闭曲线取正向）：

$$
\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & n=0 \\ 0 & n\geq 1 \end{cases}
$$

读者不妨自行验证这一点。

§6 利用洛朗级数计算留数

本节，我们终于可以回收前面的种种伏笔，给这本讲义收一个尾了。

所以，有没有人想过为什么留数被称作 “留数”？

在上一节的末尾，我们利用那样一个关于积分 $\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^{n+1}}$ 的事实，证明了洛朗级数的唯一性。那么特别地，要计算 $f(z)$ 在孤立奇点 a 处的留数，实际上只需要取上面的 $n=-1$，即直接除以 $2\pi i$ 后逐项积分即得

$$
\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\oint_C (z-a)^n\ \mathrm{d}z
$$

上式右侧中所有 $n\geq 0$ 的项，由于 $(z-a)^n$ 全纯，积分值为 0 ，而 $n\leq -2$ 的项，$(z-a)^n$ 的积分值也为 0 ，因此等式右侧只剩下唯一一项。于是有

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}(a) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{c_{-1}}{2\pi i}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)} \\
&= c_{-1}
\end{aligned}
$$

可见，在对两边逐项积分后，只有唯一一项 c_{-1} 留了下来，因此称之为 “留数”。很多其它教材也是直接将 c_{-1} 定义为留数的。

至于如何计算 c_{-1} ，我们的办法是比较多的。

首先，如果 a 是 $f(z)$ 的可去奇点，$f(z)$ 的洛朗级数中没有负幂项，因此 $c_{-1}=0$ 。

其次，如果 a 是 $f(z)$ 的 k 阶极点，$f(z)$ 被展开为

$$
f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^n
$$

要想计算 c_{-1} ，我们能想到的好办法是通过将它从负幂项移动到 c_0 的位置上，然后再代入 $z=a$ 就行了，但既然要代入 $z=a$ ，我们不得不消除掉所有的负幂项，因此在等式两边同时乘以 $(z-a)^k$，得到

$$
\begin{aligned}
(z-a)^k f(z) &= \sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^{n+k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-k}(z-a)^n
\end{aligned}
$$

现在我们想求的 c_{-1} 变成了右端这个泰勒级数的 $k-1$ 次项，因此想要把它移动到 c_0 的位置，只需要在两端逐项求导 $k-1$ 次，再代入 $z=a$ 即得到

$$
c_{-1}=\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}(z-a)^k f(z)
$$

注：事实上 a 有可能是 $(z-a)^k f(z)$ 的可去奇点，因此代入 $z=a$ 时是取极限。

这样，我们就用奇点和留数的语言重述了**定理3.4。**

定理3.4’ 设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，我们可以通过如下方式计算 $\operatorname{res}(z_0)$

1. 若 z_0 是可去奇点，则

$$
\operatorname{res}(z_0)=0
$$

2. 若 z_0 是 n 阶极点，则

$$
\operatorname{res}(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)
$$

至于本性奇点，我们或许只能直接或间接地对 $f(z)$ 洛朗展开来计算 c_{-1} 了，我们也举一个例子。

例题4.1 计算 $e^{\frac{1}{z}}$ 在 0 处的留数 $\operatorname{res}(0)$ 。

解：将 $e^{\frac{1}{z}}$ 在 0 附近展开洛朗级数，利用展开式

$$
e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots
$$

将其中的 z 替换为 $\frac{1}{z}$（这和在数学分析中常见的间接展开并无不同）得到

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots$$

它是一个没有正幂项的洛朗级数，$z = 0$ 是它的本性奇点，$c_{-1} = 1$，因此 $\mathrm{res}(0) = 1$。我们还可以计算 $e^{\frac{1}{z}}$ 沿着围绕原点的任一分段光滑闭曲线 C 的积分

$$\oint_C e^{\frac{1}{z}}\ \mathrm{d}z = 2\pi i$$

而这个积分是靠硬算或者前面的**定理3.4**难以完成的，可见洛朗级数大大拓宽了我们计算留数和积分的途径，也使我们对全纯函数与奇点的认识达到了一个新的高度。

The end。