Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и физики

Отчет по лабораборoной работу №2
по дисциплине "Интервальный анализ"

Выполнил:

Студент: Зинякова Екатерина
Группа: 5030102/00201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Имеем ИСЛАУ:

$$\begin{cases} [2,4]*x_1+[4,6]*x_2=[5,9] \\ 3*x_1+[-6,-4]*x_2=[-1,1] \\ [0.5,1.5]*x_1=[1,3] \\ [0.5,1.5]*x_2=[0,2] \end{cases}$$

Необходимо найти решения ЛЗД. Для этого нужно

- исследовать разрешимость ЛЗД (найти максимум распознающего функционала)
- коррекция ЛЗД
  - достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части (равномерное/неравномерное)
  - достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы

2 Теория

2.1 Распознающий функционал

Разпознающим функционалом называется функция

$$\mathrm{Tol}(x)=\mathrm{Tol}(x,\mathbf{A},\mathbf{b})=\min_{1\le i\le m}\left\{\mathrm{rad}(\mathbf{b}_i)-\left|\mathrm{mid}(\mathbf{b}_i)-\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}_{ij}x_j\right|\right\} \tag{1}$$

Пусть

$$T=\max_{x\in\mathbb{R}^n}\ \mathrm{Tol}(x,\mathbf{A},\mathbf{b}) \tag{2}$$

и это значение достигается распознающим функционалом в некоторой точке $\tau\in\mathbb{R}^n$. Тогда

- если $T\ge 0$, то $\tau\in\Xi_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A},\mathbf{b})\ne\emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ совместна и точка τ лежит в допусковом множестве решений.
- если $T>0$ то $\tau\in int\ \Xi_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A},\mathbf{b})\ne\emptyset$, и принадлежность τ допусковому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных - матрицы и правой части.
- если $T<0$ то $\Xi_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ несовместна.

2.2 Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения правой части

Равномерное уширение правой части ИСЛАУ
Расширение вектора $\mathbf{b}$ происходит путем его замены на вектор:

$$\mathbf{b}+K\mathbf{e},\quad K\ge 0,\quad \mathbf{e}=([-1,1],...,[-1,1])^T \tag{3}$$

Тогда

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = T + K \tag{4}$$

Но $\text{Arg}\max \text{Tol}$ - не изменится(положение точки T)

Неравномерное уширение правой части ИСЛАУ

Если линейная задача о допусках с матрицей $\mathbf{A}$ и вектором правой части $\mathbf{b}$ первоначально не имела решений, то новая задача с той же матрицей $\mathbf{A}$ и уширенным вектором

$$(\mathbf{b}_i + K \cdot v_i \cdot [-1, 1])_{i=1}^m \tag{5}$$

в правой части становится разрешимой при $K \geq |T_v|$, где

$$T_v = \min_{1\leq i\leq m} \left\{ v_i^{-1} \left(\text{rad}(\mathbf{b}_i) - \left| \text{mid}(\mathbf{b}_i) - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\} \tag{6}$$

Значение $\text{Arg}\max \text{Tol}$ - изменится

2.3 Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения матрицы

Общая схема равномерного метода заключается в том, что необходимо модифицировать матрицу $\mathbf{A}$ засчет ее замены на $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ состоит из $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$

Причем значения точечных величин $\mathbf{e}_{ij}$ удовлетворяют двум условиям:

$$0 \leq \mathbf{e}_{ij} \leq rad\ \mathbf{a}_{ij} \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^n e_{ij}\tau = K, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad K > 0 \tag{8}$$

Если $K \geq |T|$, то тогда линейная задача о допусках с матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E} = ([\underline{\mathbf{a}}_{ij} - \underline{\mathbf{e}}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij} + \overline{\mathbf{e}}_{ij}])$ и правой частью $\mathbf{b}$ становится разрешимой.

2.4 Оценки вариабельности решения

Абсолютной вариабельностью оценки называется величина

$$\text{ive}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{A\in\mathbf{A}} \text{cond}\, A \cdot ||\ \text{Tol}(x)|| \frac{\max_{x\in\mathbb{R}^n} \text{Tol}(x)}{||\mathbf{b}||} \tag{9}$$

Относительной вариабельностью оценки называется величина

$$\text{rve}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{A\in\mathbf{A}} \text{cond}\, A \cdot \max_{x\in\mathbb{R}^n} \text{Tol}(x) \tag{10}$$

3 Результаты

3.1 Максимум распознающего функционала

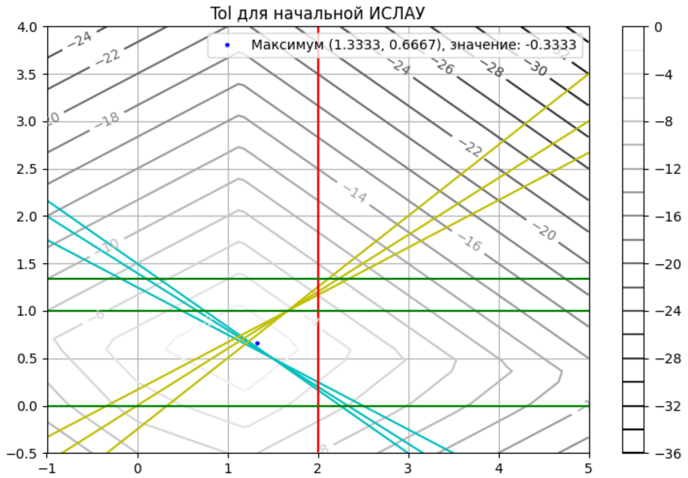

Рис. 1: Расположение максимума распознающего функционала

Максимум со значением $T = -0.333$ расположен в точке $\tau = (1.333, 0.6667)$.

3.2 Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части

3.2.1 Равномерное уширение

Положим $K = 1$. Получается максимум со значением $T = 0.6667$ расположен в точке $\tau = (1.333, 0.6667)$. При этом видим, что точка максимума осталась прежней.

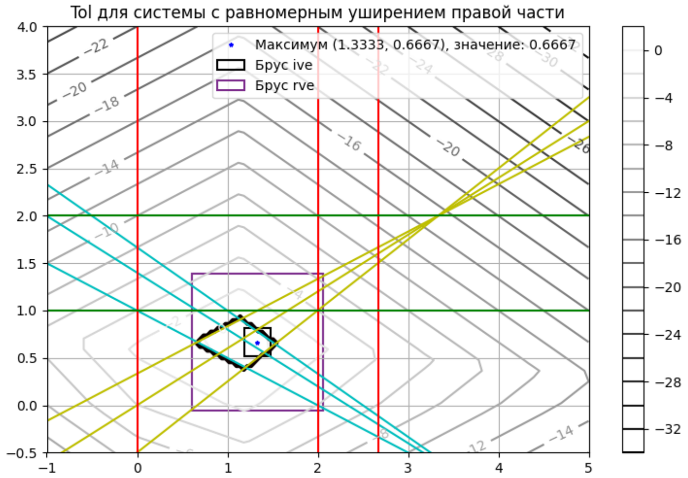

Рис. 2: Допусковое множество решений с равномерным уширением правой части

На данном рисунке черный квадрат имеет сторону $2 \cdot \mathrm{ive}$, а фиолетовый - $2 \cdot \mathrm{rve}$. Область обведенная черной линией - допусковое множество
$\mathrm{ive} : 0.1473502 \quad \mathrm{rve} : 0.726363348$

3.2.2 Неравномерное уширение

Выберем произвольный вектор $v = [0.5, 0.1, 1, 0.5]$ и постоянную $K = 3$.
Получается максимум со значением $T = 0.724$ расположен в точке $\tau = (0.96, 0.576)$. При этом видим, что точка максимума сдвинулась.

Рис. 3: Допусковое множество решений с неравномерным уширением правой части

На данном рисунке черный квадрат имеет сторону $2 \cdot \mathrm{ive}$, а фиолетовый - $2 \cdot \mathrm{rve}$. Область обведенная черной линией - допусковое множество
$\mathrm{ive} : 0.106272696 \quad \mathrm{rve} : 0.69755409$

3.3 Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части

Для построения интервальной матрицы $\mathbf{E}$ с уравновешанными интервальными элементами $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$ выбираем такие $\mathbf{e}_{ij}$, что:

$$\begin{cases} 0 \le \mathbf{e} \le 1 = \mathrm{rad}(\mathbf{a}_{11}), \mathrm{rad}(\mathbf{a}_{12}), \mathrm{rad}(\mathbf{a}_{22}) \\ 0 \le \mathbf{e} \le 0.5 = \mathrm{rad}(\mathbf{a}_{31}), \mathrm{rad}(\mathbf{a}_{42}) \\ 1.333 * \mathbf{e} + 0.666 * \mathbf{e} = K \ge |T| = 0.333 \end{cases} \Rightarrow 0.1666 \le \mathbf{e} \le 0.5$$

сформируем матрицу

$$E = \begin{pmatrix} [-0.5, 0.5] & [-0.4, 0.4] \\ [-0.3, 0.3] & [-0.5, 0.5] \\ [-0.5, 0.5] & 0 \\ 0 & [-0.3, 0.3] \end{pmatrix} \tag{11}$$

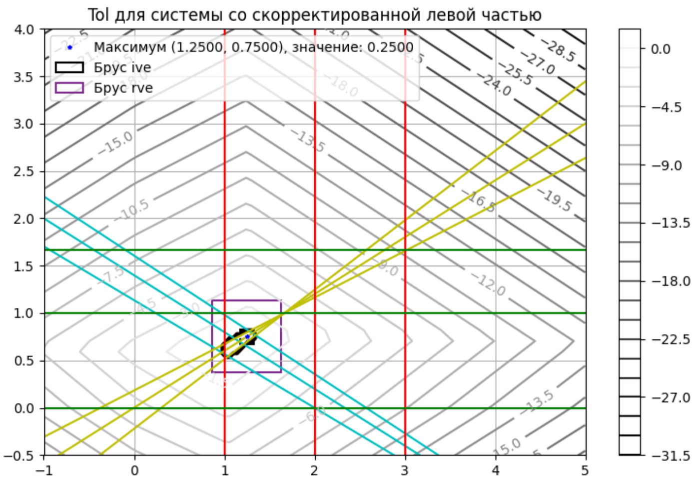

Рис. 4: Допусковое множество решений со скоректированной матрицей

На данном рисунке черный квадрат имеет сторону $2 \cdot \text{ive}$, а фиолетовый - $2 \cdot \text{rve}$. Область обведенная черной линией - допусковое множество
ive : 0.068321425   rve : 0.3444088

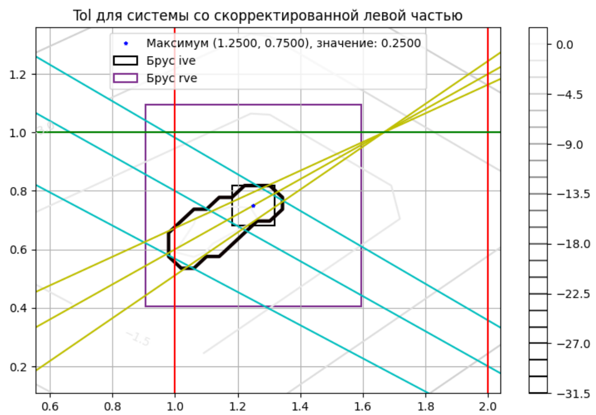

Рис. 5: Допусковое множество решений со скоректированной матрицей

4 Вывод

1. После корекции правой части равномерным уширением вектора **b** безусловный максимум распознающего функционала $Tol = 0.667$ в точке (1.333, 0.667), а форма поверхности распознающего функционала Tol не изменилась.
   Для нерасномерного уширения видно, что формы поверхности и положения безусловных максимумов распознающего функционала Tol до и после неравномерного уширения вектора **b** не совпадают.

2. Сравнивая данные коррекции можно сказать, что неравномерное уширение дает меньшие значения вариабельности по сравнению с равномерным.

3. Квадрат *rve* на нашем примере не очень хорошо приближает допусковое множество решений, а вот квадрат *ive* почти полностью принадлежит Ξ_{tol}. И это очевидно, ведь мы имеем хорошую обусловленность матрицы ($\mathrm{cond}(\mathrm{mid}\,\mathbf{A}) = 1.638$).