

E3 Learn 自修

— 上數學 L2

直線與圓

編著：李益安

目次

目次.....	2
作者的話.....	3
2-1 直線方程式及其圖形.....	4
直線的斜率.....	4
兩點求斜率.....	6
寫出方程式.....	7
點斜式的另種算法.....	8
截距.....	9
用移動找出斜率.....	9
快速找出斜率.....	10
垂直兩線斜率關係.....	10
不難小練習 2-1.....	13
不難解答 2-1.....	14
不難詳解.....	15
2-2 直線方程式的應用.....	16

作者的話

大家好，我是作者李益安，一位高中生。

這本書最主要的目標是成為全國最簡單易懂又完整的自修，用連學弟妹們都能理解的簡單描述，讓大家理解複雜的概念。同時連結先前學過的知識，帶領讀者思考。

書中使用圖片與對話式或互動式文字敘述來說明每個概念，也請讀者跟著回答或想像。

本書目標：

- 成為最簡單易懂的自修
- 內容完整
- 連結已知知識
- 帶領讀者思考

請注意：若你覺得你對這些概念已經很熟了，不建議繼續閱讀這本書，因為這對你沒有幫助！

閱讀前提醒：請在閱讀過程不斷問自己

「為何會這樣？」，需要想像的地方請配合進行想像！

文字顏色說明：

綠色：重點描述

紫色：專有名詞

紅色：注意事項

黃色：重點公式

準備好了嗎？我們開始囉！

升上高中之後，我們要來學一種以前國中生就在學的東西 —— 斜率。

2-1 直線方程式及其圖形

直線方程式顧名思義就是畫出來是條直線的方程式，直線可以由兩個點連線後延伸出去而成。我們在數學上可以將直線的方程式寫成 $y = Ax + B$ ，其中 A 就代表斜率。

直線的斜率

想像一個有兩個中空斜坡，一個很陡，一個很平緩，又想像你可以穿牆，跑到斜坡裡面。當今天你往前走 1 公尺之後抬頭(圖 1-1)，哪一個斜坡的斜面看起來比較高(正上方的斜面距離你最遠)?

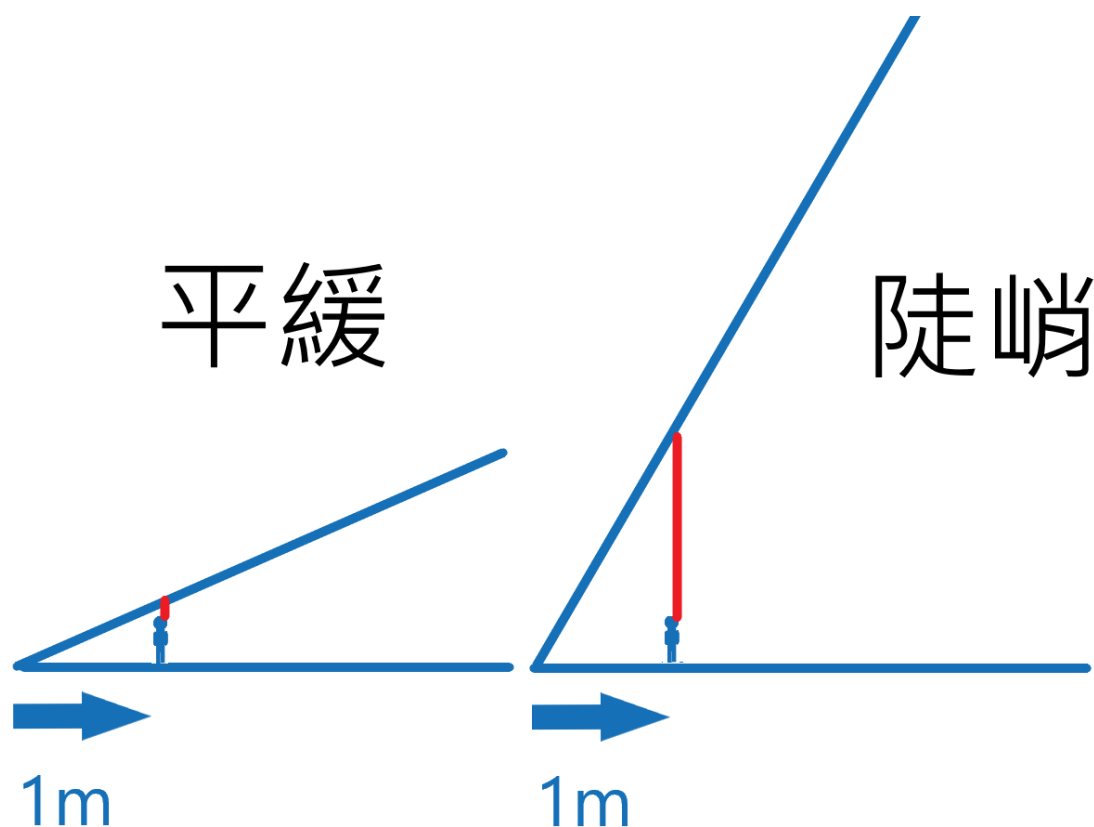


圖 1-1

應該不意外是陡峭的那個。數學家為了能夠寫出這個斜坡有多陡，而不是只說「這麼陡」，因此約定使用斜率來表示。斜率數字部分(不考慮正負)越大，坡越陡峭；反之，斜率數字部分越小，坡越平緩。

斜率值的意義是 $\frac{\text{上升距離(有正負之分, 下降(-y)為負)}}{\text{前進距離(往+x方向前進, 通常為右)}}$ 或

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Δ 是變化量或差值的簡稱)，因此每向右 1 格，上

升 3 格的直線斜率就是 $\frac{3}{1} = 3$ ；反之，每向右 1 格，

下降 2 格的直線斜率就是 $\frac{-2}{1} = -2$ 。在這種情況可以

發現 y 跟 x 上升距離差越大，斜率的數字部分(或斜率絕對值)會越大，用旋轉的角度看即如(圖 1-2)。

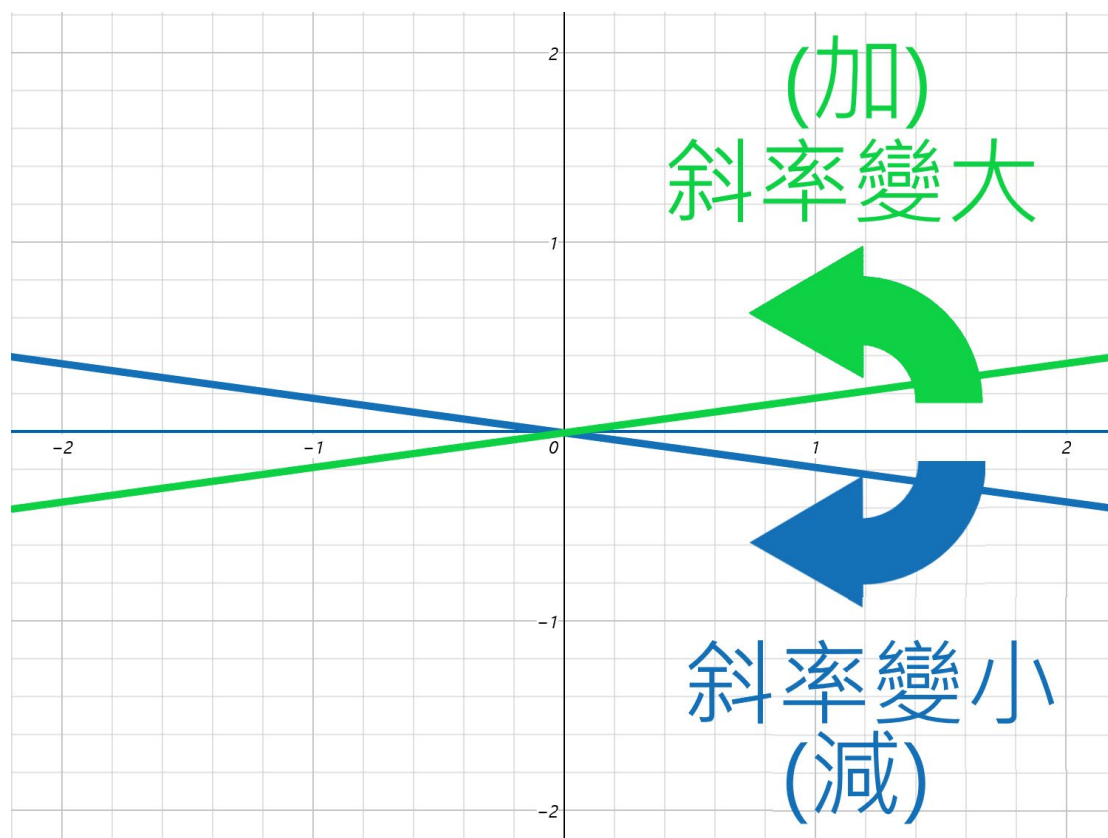


圖 1-2

兩點求斜率

帶數字解一定比較直觀，假設有兩點 (5,4)、(1,2)，這時我們可以隨便選擇相減順序，一旦順序決定了就不能變動，不然會出錯。

再來只要將 x 跟 y 的兩值相減再帶入 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就可以了。

作者以原題目的順序 (5,4) - (1,2) 進行示範：

y 相減

$$\frac{4 - 2}{5 - 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

x 相減

寫出方程式

我們現在已經算出斜率了，距離方程式就差最後一步，就是所謂的**校正回歸**。校正的基本原理就是：帶入一個點，然後把原本的直線對到點上。這是什麼意思？簡單化成(圖 1-3)以方便理解。

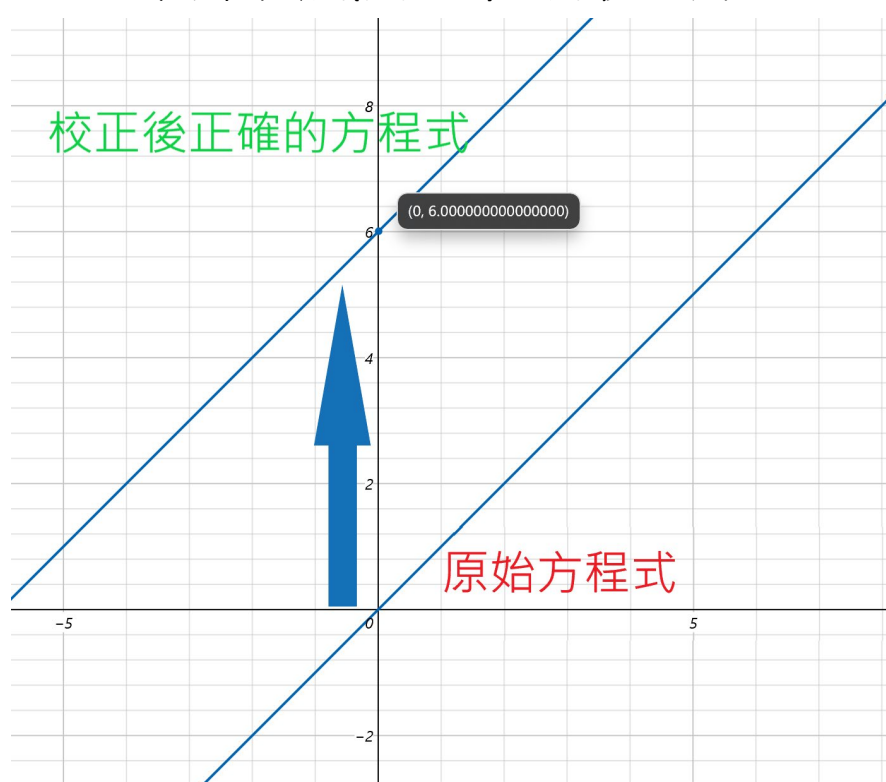


圖 1-3

所以我們到底怎麼校正呢？通常題目會給你一個點跟斜率，只需要很簡單的把那一點的 **x 值帶入**，算出來的值原本應該要是那一點的 **y**，但不一定是(因為原始方程式還沒校正)，所以我們只要在**加上他們兩個**(算出的值跟點的 **y 值**)的**差距**就可以了。

作者一樣示範一次：

題目：斜率是 4，通過(9,4)的直線

因為我們知道方程式是 $A(\text{斜率})x + B$ ，所以 x 帶進去

$$4 \times 9 + B = 4$$

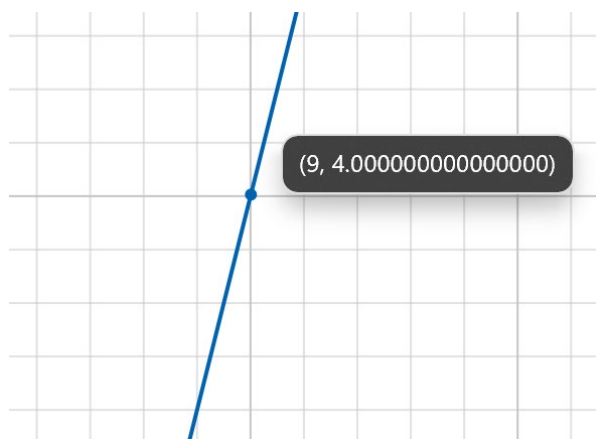
$$36 + B = 4$$

$$B = -32$$

所以最後方程式就是

$$y = 4x - 32$$

畫出來也跟題目要的一樣，因此就是解答。



(註：考試時可以不用畫出來驗算)

在數學上又稱這種方法叫點斜式。

點斜式的另種算法

假設今天題目給你斜率跟一個點 (a, b) ，此時方程式就可以寫成 $y = \text{斜率}(x - a) + b$ 。

例如上面的：斜率是 4，通過(9,4)的直線，就直接寫成

$$y = 4(x - 9) + 4$$

$$y = 4x - 36 + 4$$

$$y = 4x - 32$$

結果會跟之前的答案一樣。

截距

截距是一種在座標平面上一種很常使用的參數，分兩種 x 跟 y ，各代表的點如下：

x 截距：在 $y = 0$ 的情況下 x 是多少

y 截距：在 $x = 0$ 的情況下 y 是多少

題目如果給截距跟斜率，這時只要把這個點用上面的定義算出來(假如 x 截距是 1 則點為 $(1,0)$ ，就可以用之前提到的點斜式來求方程式。

若題目只給截距(例:某條線 x 的截距為 1， y 的截距為 2)，這時可以寫成 $\frac{x}{x_{\text{截距}}} + \frac{y}{y_{\text{截距}}} = 1$ ，例題可寫成

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1 \rightarrow x + \frac{y}{2} = 1$$

請注意:若要使用這個方法， x 的截距跟 y 的截距都

不能是 0(因為 $\frac{\text{任何數}}{0}$ 沒有意義)。

這種方法數學上稱做截距式。

用移動找出斜率

移動分兩種：橫(水平)、直(垂直)。
前面說過截距，這兩種移動都會用到。

橫的(水平)移動： $y = \text{斜率} \times (x - \text{最後 } x \text{ 的截距})$ 。

這個有點像之前學二次函數的水平移動。

直的(垂直)移動： $y = \text{斜率 } x + \text{最後 } y \text{ 的截距})$ 。

快速找出斜率

有一個方程式 $ax + by + c = 0$ ($b \neq 0$) 斜率是 $-\frac{a}{b}$ ，推導如下：

$$ax + by + c = 0$$

將 $ax + c$ 丟到等號另一邊

$$by = -ax - c$$

同除 b (這就是為什麼 $b \neq 0$)

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

因此斜率為 $-\frac{a}{b}$ 。

(註：請練習推導，這會在你忘記公式時幫助你)

垂直兩線斜率關係

兩條直線垂直，斜率應該也會有關係吧！沒錯，

的確有關係，這個關係就是

$$\text{斜率一} \times \text{斜率二} = -1$$

為什麼會這樣呢？這就可以追溯到國三學的相似形(圖 1-4)。

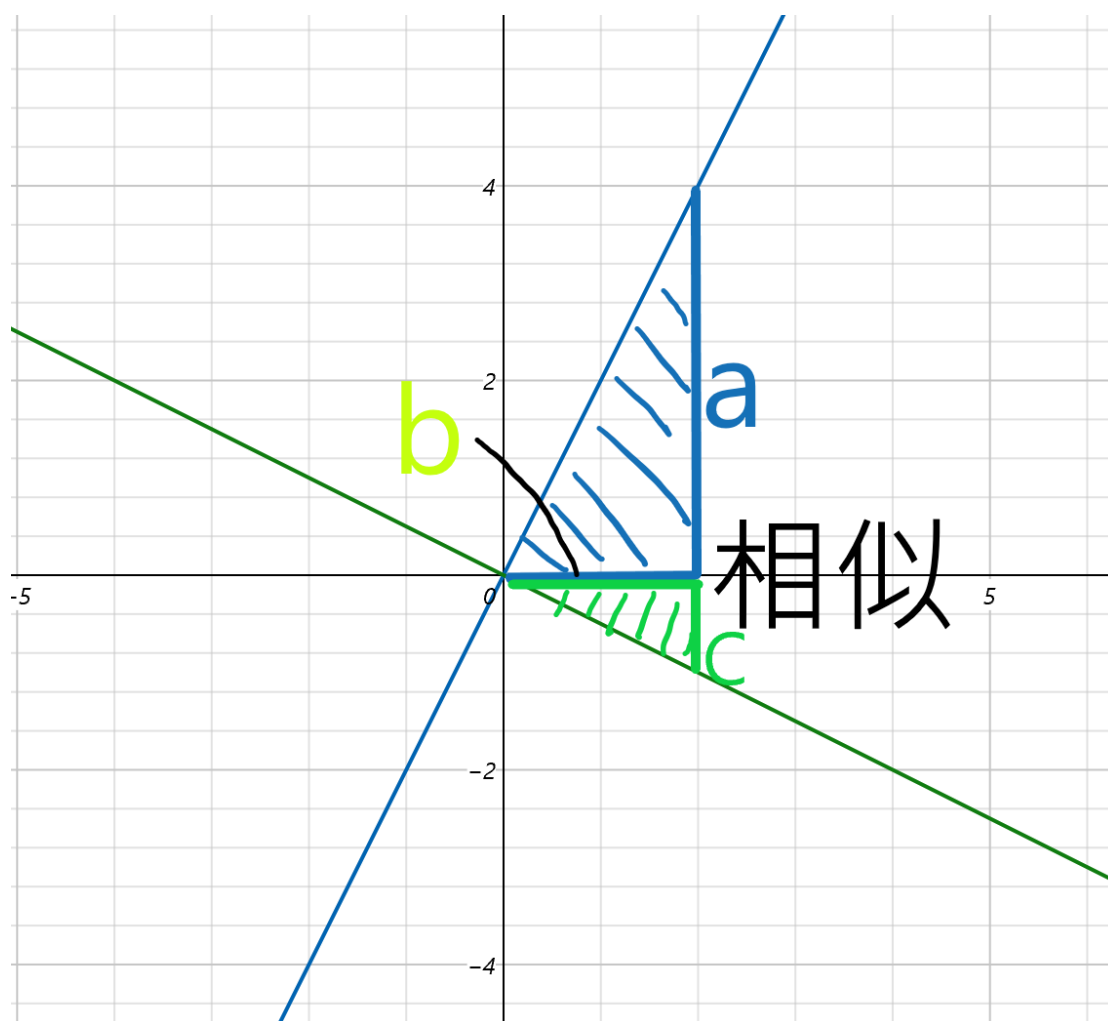


圖 1-4

因為他們兩個相似，因此

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

藍色直線斜率是 $\frac{a}{b}$ ，綠色是 $\frac{-c}{b}$ ，綠色剛好是藍色斜率

的倒數在乘以-1。而任何數乘以其倒數都是 1，所以

$$\frac{a}{b} \times \left(\frac{a}{b} \text{ 的倒數} \times -1 \right)$$

重新整理一下數字

$$= \left(\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \text{ 的倒數} \right) \times -1 = 1 \times -1 = -1$$

(註：請練習推導，這會在你忘記公式時幫助你)

不難小練習 2-1

1-8 題每題 10 分，第 9 題 20 分，共 100 分

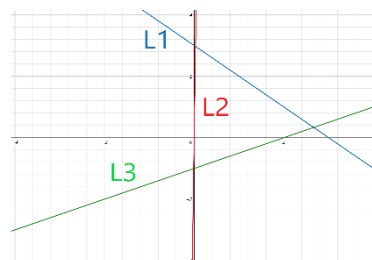
1. 請問在 $y = Ax + B$ 中，斜率是

(A)y (B)A (C)B

2. 關於右圖中 3 條線的斜率，下列選項何者正確？

(A) $L1 > L2 > L3$ (B) $L2 > L1 > L3$

(C) $L2 > L3 > L1$ (D) $L1 > L3 > L2$



3. 請問由 $(0,1)$ 、 $(1,9)$ 所連成的直線斜率為何？

(A)8 (B)-8 (C)10 (D)-10

4. 已知有直線的方程式為 $y = 2x + 1$ ，現做另一條直線與其垂直，請問剛畫上去的直線，斜率為何？

(A)2 (B)-2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

5. 請問一條斜率是 4，通過 $(9,4)$ 的直線，方程式為何？

6. 某條線的 x 截距是 3， y 截距是 2，請用截距式寫出其方程式。

7. 某方程式為 $5x + y + 34598 = 0$ ，請寫出其斜率。

8. 設直線 $L: y = 2x + 1$ ，按照題意操作後，寫出方程式。(請化成最簡)

(1) 將原始的 L 往上平移 2 單位。

(2) 將原始的 L 往上平移 5 單位，並向左 8 單位。

9. 請畫出 $y = 5x + 4$ 的圖形。

不難解答 2-1

1. B

2. C

3. A

4. D

5. $y = 4x - 32$

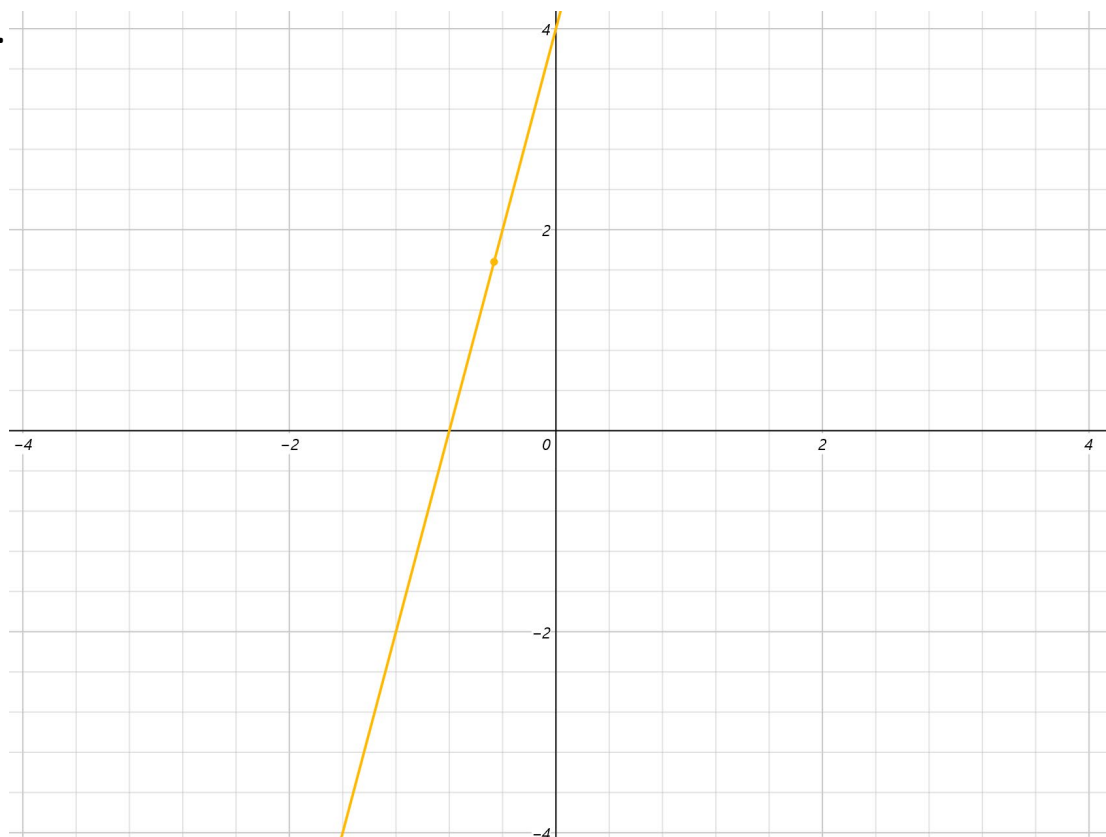
6. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

7. -5

8. (1) $y = 2x + 3$

(2) $y = 2x + 22$

9.



不難詳解

1. 觀念。
2. L2 向右上，又最陡，因此斜率最大；L3 也是向右上，因此斜率為正，但小於 L2；L1 因為向右下，斜率為負，因此最小。
3. $y = \frac{9-1}{1-0}x + b$ ， $y = 8x + b$ ，因此可知斜率為 8。
4. 因為兩直線垂直，斜率相乘 = -1 ，因此 $2n = -1$
 $n = -\frac{1}{2}$ 。
5. 設方程式為 $y = 4x + b$ ，帶入 $x = 9$ ， $y = 4$ 可得
 $b = -32$ 。
6. 觀念。
7. 斜率是 $-\frac{a}{b}$ ，在本題就是 $-\frac{5}{1}$ 也就是 -5。
8. 觀念。
9. 觀念。

2-2 直線方程式的應用