

Второе теоретическое задание.

Дедлайн. 10.11 23:59:59

Задача 1 (2 балла). Вдвое больший справа

Дан массив вещественных чисел $A[1 : n]$. Предложите алгоритм, находящий для каждого элемента A индекс ближайшего справа элемента, большего его хотя бы в два раза. Если такого элемента нет, то должно возвращаться значение `None`. Ограничение по времени $O(N \log N)$, по памяти: $O(N)$.

Задача 2 (3 балла). Прямая сумма и ее статистика

Дано два отсортированных массива: a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_m . Определим $A \oplus B$ как множество всевозможных попарных сумм вида $a_i + b_j$ с повторениями. Например, если $A = \{1, 2, 3\}$, а $B = \{2, 3, 4\}$, то $A \oplus B = \{3, 4, 5, 4, 5, 6, 5, 6, 7\}$. По данному числу k вам надо найти k -ю порядковую статистику в $A \oplus B$ (заметьте, что $A \oplus B$ вам не дан). Требуемая асимптотика: $O(k \log k)$. Разрешается использовать $O(k)$ дополнительных ячеек памяти.

Задача 3 (3 балла). Параллельный поиск

Пусть заданы n ключей a_1, \dots, a_n и m запросов на поиск k -й порядковой статистики k_1, \dots, k_m (все k_i различны), где $2 \leq m \leq n$. Предложить алгоритм, который ответит на все запросы за $O(n \log m + m)$.

Задача 4 (2* балла). Splay-explained

Допустим, что в Splay-дереве существует только операция `zig`, а операция `Splay` представляет из себя набор последовательных операций `zig`. При использовании стандартного потенциала: $S(x)$ — число элементов в поддереве x , $r(x) = \log_2 S(x)$, $\Phi(Tree) = r(root)$ посчитайте время выполнения работы модифицированной операции `Splay`.

Задача 5 (2 балла). Непересекающиеся

Есть два множества отрезков на прямой, в них поступают запросы добавления. После каждого запроса нужно сказать, сколько существует пар (отрезок из первого множества и отрезок из второго) таких, что они пересекаются? Асимптотика ответа на запрос $O(\log |S_1| + \log |S_2|)$, где S_1, S_2 — множества.