Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского
Направление: 01.03.01 – Математика

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ №2
(научно-исследовательская работа)

Вариант № 5

Обучающийся: Греков Лев Евгеньевич 05-104

Преподаватель:
доцент, к.н. Насибуллин Рамиль Гайсаевич

Дата сдачи контрольной: ______________

Казань – 2023

1 Теоритическая Часть

1.1 Линейные Сплайны

Для построения сплайна 1 порядка, я просто для каждой пары узлов строил полином Лагранжа в форме Ньютона(Програмно реализовал в прошлой контрольной).

Для нахождения Максимальной погрешности использовался иттеративный метод. Пробегал от начала до конца промежутка с шагом 10e-6

```
fun findMaxError(lowLim: Double, upLim: Double,f: (Double)
    -> Double?, g: (Double) -> Double?,epsilon: Double = 10e
    -6): Double {
    val a = min(lowLim,upLim)
    val b = max(lowLim,upLim)
    var x = a
    var maxError = Double.MIN_VALUE
    while (x <= b) {
        val fValue = f(x)
        val gValue = g(x)
        if(fValue!= null && gValue != null){
            val error = abs(fValue - gValue)
            if (error > maxError) {
                maxError = error
            }
        }

        x += epsilon
    }
    return maxError
}
```

1.2 Кубические Сплайны

1.2.1 По определению

Для того, чтобы определить $4n$ коэффициенты всех многочленов должны быть сформулированы несколькими уравнениями. Прежде всего, известно, что каждый многочлен проходит ровно через две точки. Следовательно, имеем $2n$ уравнения

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1) = y_1 &\Leftrightarrow a_1x_1^3 + b_1x_1^2 + c_1x_1 + d_1 = y_1 \\
f_1(x_2) = y_2 &\Leftrightarrow a_1x_2^3 + b_1x_2^2 + c_1x_2 + d_1 = y_2 \\
f_2(x_2) = y_2 &\Leftrightarrow a_2x_2^3 + b_2x_2^2 + c_2x_2 + d_2 = y_2 \\
f_2(x_3) = y_3 &\Leftrightarrow a_2x_3^3 + b_2x_3^2 + c_2x_3 + d_2 = y_3 \\
&\dots \\
f_n(x_n) = y_n &\Leftrightarrow a_nx_n^3 + b_nx_n^2 + c_nx_n + d_n = y_n \\
f_n(x_{n+1}) = y_{n+1} &\Leftrightarrow a_nx_{n+1}^3 + b_nx_{n+1}^2 + c_nx_{n+1} + d_n = y_{n+1},
\end{aligned}
$$

Кроме того, первая и вторая производные всех многочленов идентичны в точках, где они касаются соседнего многочлена.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f_1(x) = \frac{d}{dx}f_2(x) &\Leftrightarrow 3a_1x_2^2 + 2b_1x_2 + c_1 = 3a_2x_2^2 + 2b_2x_2 + c_2 \\
\frac{d}{dx}f_2(x) = \frac{d}{dx}f_3(x) &\Leftrightarrow 3a_2x_3^2 + 2b_2x_3 + c_2 = 3a_3x_3^2 + 2b_3x_3 + c_3 \\
&\dots \\
\frac{d}{dx}f_{n-1}(x) = \frac{d}{dx}f_n(x) &\Leftrightarrow 3a_{n-1}x_n^2 + 2b_{n-1}x_n + c_{n-1} = 3a_nx_n^2 + 2b_nx_n + c_n.
\end{aligned}
$$

Аналогично, для второй производной

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}f_1(x) = \frac{d^2}{dx^2}f_2(x) &\Leftrightarrow 6a_1x_2 + 2b_1 = 6a_2x_2 + 2b_2 \\
\frac{d^2}{dx^2}f_2(x) = \frac{d^2}{dx^2}f_3(x) &\Leftrightarrow 6a_2x_3 + 2b_2 = 6a_3x_3 + 2b_3 \\
&\dots \\
\frac{d^2}{dx^2}f_{n-1}(x) = \frac{d^2}{dx^2}f_n(x) &\Leftrightarrow 6a_{n-1}x_n + 2b_{n-1} = 6a_nx_n + 2b_n.
\end{aligned}
$$

Это добавляет еще один $2(n-1)$ уравнения. Остается 2 уравнения: Для построения естественного кубического сплайна, мы приравниваем 2ую производную на начале и конце промежутка к 0.

$$6a_1x_1 + 2b_1 = 0$$
$$6a_nx_{n+1} + 2b_n = 0.$$

Осталось решить систему, тогда мы найдем коэфиценты для полиномов участков сплайна. Матрица 16 на 16 плохо смотрится на странице, поэтому я её покажу на компьютере при необходимости:

1.2.2 Метод Моментов

Для Краткости изложения, я приведу только некоторые формулы. Полностью не буду описывать как их получить. Полный порядок действий я смотрел на сайте: **ссылка**. Так же можно скачать документ с более наглядными действиями (На сайте картинки с формулами плющит) **Скачать Документ**. Дублирую ссылку в текстовом виде: https://textarchive.ru/c-2026214.html Задача сводится к нахождению уравнений Уравнений:

$$\mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = d_k k = 1..n.$$

$$\lambda_k = \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} \quad \mu_k = \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} \quad d_k = \frac{6}{h_k + h_{k+1}} \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right)$$

Так же нужно учесть условия естественного сплайна: $M_0 = 0, M_n = 0$. Учтём эти уравнения, причем первое из этих условий запишем перед уравнениями, а второе условие – после. Тогда получаем систему n+1 линейных уравнений с n+1 неизвестными M_k, $k = 0..n$ Полученная система имеет трёхдиагональную матрицу. Чтобы найти полином на сигменте k, Подставляем полученые значения в уравнение.

$$x^3 \left(\frac{M_k - M_{k-1}}{6h_k} \right) + x^2 \left(\frac{M_{k-1} \cdot x_k - M_k \cdot x_{k-1}}{2h_k} \right) +$$
$$x \left(\frac{h_k \cdot M_{k-1} - h_k \cdot M_k + (3M_k \cdot x_{k-1}^2 - 3M_{k-1} \cdot x_k^2 + 6y_k - 6y_{k-1})}{6h_k} \right) +$$
$$\left(\frac{M_k \cdot h_k \cdot x_{k-1} - h_k \cdot M_{k-1} \cdot x_k + (-M_k \cdot x_{k-1}^3 + M_{k-1} \cdot x_k^3 - 6x_{k-1} \cdot y_k + 6x_k \cdot y_{k-1})}{6h_k} \right)$$

(Особые благодарности Булату Абдрахманову в помощи с выводом формулы)

1.2.3 Сравнение Методов

Проверим скорость расчета кубического сплайна. Создадим сплайн на 300 узлах и сравним время вычисления по определению и через моменты.

$$\frac{\text{(по определению)}}{\text{(метод моментов)}} = \frac{1983774800}{5615200} \approx 353.29$$

Таким образом, метод моментов оказывается быстрее, чем вычисление по определению в 353.29 раза для наших радомносгенерированных 300 узлов.Это объясняется тем, что при вычислении по определению мы используем метод Гаусса с алгоритмической сложностью $\mathbf{O(n^3)}$, в то время как для метода моментов используется метод Томаса (Для решения 3х Диагональной матрицы), который имеет линейную сложность $\mathbf{O(n)}$.

1.3 Дополнительная часть

Для интереса я построил полиномы Лагранжа для этих же узлов, чтобы узнать, какой интерполянт лучше приближает функцию для данных узлов

Минимальная максимальная погрешность $= 2.739643739912978 \times 10^{-5}$ у интерполянта $L_2(x)$. , Т.е Полином Лагранжа, построенный по узлам Чебышева для данной функции и узлов, интерполирует лучше, чем сплайн.

Так же, для интересна, разность между погрешностями полиномов Лагранжа и Кубическими сплайнами для первого и второго набора узлов.

Максимальная погрешность между $S_1^3(x)$ и $L_1(x) = 0.009572481933644017$. Максимальная погрешность между $S_2^3(x)$ и $L_2(x) = 0.005305133519867944$.

К проекту прилогается программа, код которой доступен на **github**. так же в приложении придусмотрен графический интерфейс для отрисовки рассмотренных выше интерполянтов.

github: https://github.com/LevGrekov/SplineInterpolationNumericsMethods

2 Практическая Часть (Результаты)

Первый Линейный Сплайн:

$$S_3(x) = \begin{cases} 0.407366x + 2.013897, & \text{если } -1.0 \le x < -0.5, \\ 0.634824x + 2.127626, & \text{если } -0.5 \le x < 0.0, \\ 0.902165x + 2.127626, & \text{если } 0.0 \le x < 0.5, \\ 1.226186x + 1.965615, & \text{если } 0.5 \le x \le 1.0. \end{cases}$$

$$r_0 = f(x_0) - S(x_0) = 1.749245 - 1.759293 = -0.010048,$$
$$r_1 = f(x_1) - S(x_1) = 2.819636 - 2.841463 = -0.021827,$$
$$r_2 = f(x_2) - S(x_2) = 2.367413 - 2.385388 = -0.017975.$$
$$r_m = 0.022402324883997515$$

Второй Линейный Сплайн:

$$S_3(x) = \begin{cases} 0.398644x + 2.000989, & \text{если } -0.9511 \le x < -0.5878, \\ 0.614092x + 2.127626, & \text{если } -0.5878 \le x < 0, \\ 0.928995x + 2.127626, & \text{если } 0 \le x < 0.5878, \\ 1.238658x + 1.945611, & \text{если } 0.5878 \le x \le 0.9511. \end{cases}$$

$$r_0 = f(x_0) - S(x_0) = 1.749245 - 1.751837 = -0.002591,$$
$$r_1 = f(x_1) - S(x_1) = 2.819636 - 2.830366 = -0.010731,$$
$$r_2 = f(x_2) - S(x_2) = 2.367413 - 2.393053 = -0.025641.$$
$$r_m = 0.025697081711057113.$$

Первый Кубический Сплайн:

$$S_3(x) = \begin{cases} 0.190466x^3 + 0.571397x^2 + 0.931147x + 2.156746, & \text{если } -1.0 \leq x < -0.5, \\ -0.042498x^3 + 0.221951x^2 + 0.756424x + 2.127626, & \text{если } -0.5 \leq x < 0.0, \\ 0.139061x^3 + 0.221951x^2 + 0.756424x + 2.127626, & \text{если } 0.0 \leq x < 0.5, \\ -0.287029x^3 + 0.861087x^2 + 0.436857x + 2.180887, & \text{если } 0.5 \leq x \leq 1.0. \end{cases}$$

$$r_0 = f(x_0) - S(x_0) = 1.749245 - 1.751481 = -0.002236,$$
$$r_1 = f(x_1) - S(x_1) = 2.819636 - 2.827655 = -0.008020,$$
$$r_2 = f(x_2) - S(x_2) = 2.367413 - 2.365109 = 0.002303,$$
$$r_m = 0.0.009622095298745137$$

Второй Кубический Сплайн:

$$S_3(x) = \begin{cases} 0.246483x^3 + 0.703258x^2 + 1.034954x + 2.182088, & \text{если } -0.9511 \leq x < -0.5878, \\ -0.021703x^3 + 0.230351x^2 + 0.756987x + 2.127626, & \text{если } -0.5878 \leq x < 0, \\ 0.105971x^3 + 0.230351x^2 + 0.756987x + 2.127626, & \text{если } 0 \leq x < 0.5878, \\ -0.382832x^3 + 1.092284x^2 + 0.250355x + 2.226890, & \text{если } 0.5878 \leq x \leq 0.9511. \end{cases}$$

$$r_0 = f(x_0) - S(x_0) = 1.749245 - 1.749775 = -0.000530,$$
$$r_1 = f(x_1) - S(x_1) = 2.819636 - 2.823486 = -0.003850,$$
$$r_2 = f(x_2) - S(x_2) = 2.367413 - 2.365184 = 0.002229,$$
$$r_m = 0.005332528901208722$$

Первый Полином Лагранжа

$$L_1(x) = 0.005599x^4 + 0.032188x^3 + 0.265942x^2 + 0.760448x + 2.127626$$

$$r_0 = f(x_0) - L_1(x_0) = 1.749245 - 1.749225 = 0.000020$$
$$r_1 = f(x_1) - L_1(x_1) = 2.819636 - 2.819675 = -0.000039$$
$$r_2 = f(x_2) - L_1(x_2) = 2.367413 - 2.367394 = 0.000018$$
$$r_m = 4.982320857882527 \times 10^{-5}$$

Второй Полином Лагранжа

$$L_2(x) = 0.005599x^4 + 0.032188x^3 + 0.265939x^2 + 0.760423x + 2.127626$$

$$r_0 = f(x_0) - L_2(x_0) = 1.749245 - 1.749240 = 0.000005$$
$$r_1 = f(x_1) - L_2(x_1) = 2.819636 - 2.819656 = -0.000020$$
$$r_2 = f(x_2) - L_2(x_2) = 2.367413 - 2.367387 = 0.000026$$
$$r_m = 2.739643739912978 \times 10^{-5}.$$