La Multiplicación: Construyendo oportunidades para su aprendizaje

Chapter · January 2011

DOI: 10.13140/2.1.1737.3448

3 authors:

Fátima Mendes
Instituto Politécnico de Setúbal

Joana Brocardo
Instituto Politécnico de Setúbal

Hélia Margarida Oliveira
University of Lisbon

La Multiplicación: Construyendo oportunidades para su aprendizaje

Fátima Mendes

Escuela de Educación del Instituto Politécnico de Setúbal, Portugal

Joana Brocardo

Escuela de Educación del Instituto Politécnico de Setúbal, Portugal

Hélia Oliveira

Instituto de Educación de la Universidad de Lisboa, Portugal

Traducido por Raimundo Olfos del portugués al español

Hoy sabemos que enseñar explicando, dando ejemplos y pidiendo a los alumnos que repitan una serie de procedimientos con el fin de que sean capaces de reproducirlos, no se traduce en una comprensión real de ideas y procedimientos matemáticos. Alternativamente, se han desarrollado otras perspectivas que ponen a los estudiantes en el centro de la "acción" educativa, enfrentándolos como constructores activos de conocimiento. Este cambio de perspectiva implica una profunda variación en el papel del profesor. ¿Cómo lograr que los estudiantes desarrollen sus conocimientos? ¿Cómo seleccionar y organizar las tareas? ¿Cómo gestionar las interacciones y discusiones colectivas? ¿Cómo asegurar que los estudiantes construyan las ideas matemáticas fundamentales y desarrollen sus competencias matemáticas?

En este capítulo se presenta una perspectiva en la que se intenta abordar las cuestiones anteriores, centrada en la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación. Hacemos uso de episodios y ejemplos que precisan las ideas presentadas en el contexto de una experiencia de trabajo colaborativo entre una profesora de una clase de 3.º básico, Isabel, y una investigadora, la primera autora de este texto. Con el respaldo de ejemplos concretos, se discuten ideas matemáticas y opciones didácticas que deben guiar la acción de la docente en relación con el trabajo en torno a la multiplicación. Terminamos con una discusión centrada en la comparación entre la perspectiva presentada y el Estudio de Clases.

1. Trayectorias de aprendizaje

La planificación de la enseñanza de la multiplicación implica más que la estructuración de las ideas matemáticas involucradas en esta operación. También es importante pensar en cómo pueden aprender los estudiantes, cómo pueden progresar en su aprendizaje y ser conscientes de que no todos aprenden al mismo ritmo y por igual.

Simon (1995) utiliza la metáfora del marinero, velerista, para explicar su concepto de trayectoria de aprendizaje, aspecto que nos parece fundamental para pensar la enseñanza de la multiplicación. El marinero tiene un plan global que incluye hitos específicos y una definición clara de hacia dónde quiere llegar al final del viaje. No obstante, sabe que debe ajustarlo sucesivamente de acuerdo a diversos acontecimientos – condiciones climáticas, desempeño del navío o los imprevistos que surjan. Esos ajustes también pueden incluir etapas no previstas. Al igual que el marinero, el maestro debe tener un plan global que le permita orientar las propuestas de trabajo que organiza. Tiene que ir cambiando su plan general, teniendo en cuenta el aprendizaje de cada alumno, las ideas o preguntas que surgen y las contingencias que le sobrevengan. Al igual que el marinero, planea cada etapa de su viaje teniendo en cuenta una trayectoria hipotética y las condiciones derivadas de la aplicación de las etapas anteriores.

Establecer el plan general de "viaje", que constituye el aprendizaje de la multiplicación, implica comenzar por aclarar cuáles son los principales hitos que demarcan las etapas de una ruta no lineal. En un nivel macro – plan global del viaje – la trayectoria hipotética de aprendizaje incluye una definición de la progresión de las ideas matemáticas y las estrategias y los modelos asociados con la multiplicación. Incluye, asimismo, una visión secuencial flexible, ya que la trayectoria efectuada determina los ajustes y los caminos a seguir en la próxima etapa. Incluye, finalmente, la progresión y la interconexión de los aspectos que siempre están detrás del diseño y selección de las propuestas de trabajo para los estudiantes.

Veamos cómo estos elementos se pueden concretizar en una trayectoria hipotética global para el aprendizaje de la multiplicación.

2. Una trayectoria hipotética para 3.º básico

En el plan de estudios portugués es en 3.º grado (alumnos con 8 / 9 años) que los estudiantes completan el estudio de las tablas de multiplicar, trabajan con números no enteros y construyen el algoritmo de la multiplicación. En años anteriores inician una aproximación que incluye el paso de la adición sucesiva al concepto de multiplicación, la exploración del sentido combinatorio de la multiplicación y la comprensión y memorización de hechos, especialmente los que se derivan del estudio de las tablas de multiplicar de 2, 5 y 10.

En el 3.º grado, se contemplan los siguientes hitos esenciales para aprender la multiplicación:

- Fortalecimiento de la comprensión de un grupo como una unidad;
- La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma;
- La propiedad conmutativa;
- Los patrones de valor de posición asociada a la multiplicación por 10;
- La propiedad asociativa de la multiplicación;
- La comprensión de la relación inversa entre la multiplicación y la división;
- La comprensión del sentido proporcional de la multiplicación.

Este último, aunque comienza en el tercero básico, se profundiza en los niveles siguientes.

Los modelos relacionados con la multiplicación que los estudiantes pueden construir a partir de la exploración de cada tarea son también importantes puntos de referencia para delinear la trayectoria hipotética de aprendizaje y están en estrecha relación con los modelos y procedimientos utilizados para adicionar:

- Una descomposición de los términos utilizados en la adición sucesiva de la misma cantidad, permite pasar de un modelo lineal a un modelo de dos dimensiones – el modelo rectangular.

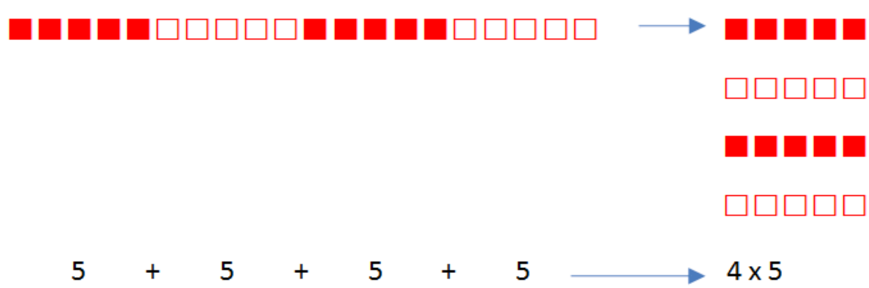


Figura 1 – Del modelo lineal al modelo rectangular

Traducción de 02-09-10

– El modelo lineal que admite la adición sucesiva por "saltos" se convierte en un modelo de la proporción como la doble línea o las tablas de la proporción.

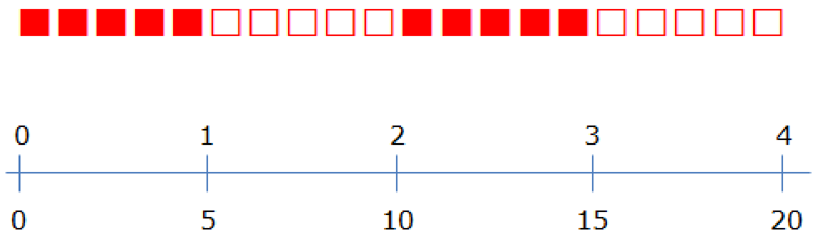


Figura 2 – Del modelo lineal a la doble línea

Dado que nos concentramos en 3er año básico y que el trabajo en torno a las proporciones se desarrolla en años posteriores, la trayectoria que presentamos privilegia el uso del modelo rectangular. Téngase en cuenta que este modelo está ayudando a construir y consolidar el uso de las propiedades asociativa y distributiva, como se muestra en las figuras 3 y 4.

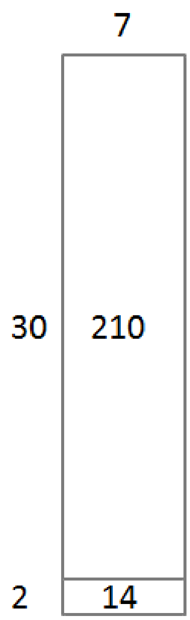


Figura 3 – 32 × 7 = 30 × 7 + 2 × 7

Traducción de 02-09-10

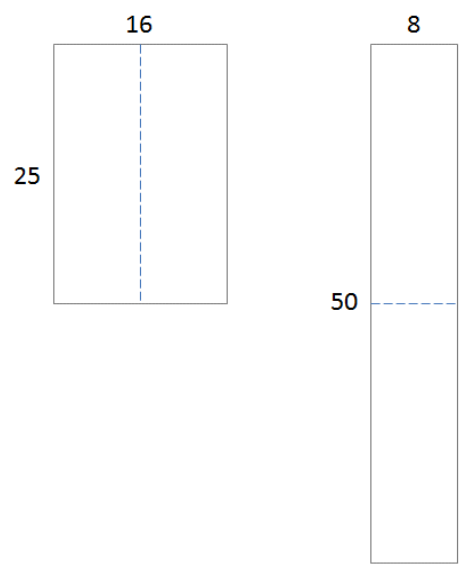


Figura 4 – 25 × 16 = 25 × (2 × 8) = (25 × 2) × 8 = 50 × 8

Es el modelo rectangular el que nos permite entender la propiedad conmutativa, aspecto que no se consigue comprender a partir del modelo lineal de adición sucesiva: cuatro filas de cinco elementos tienen el mismo número de elementos que cinco filas de cuatro.

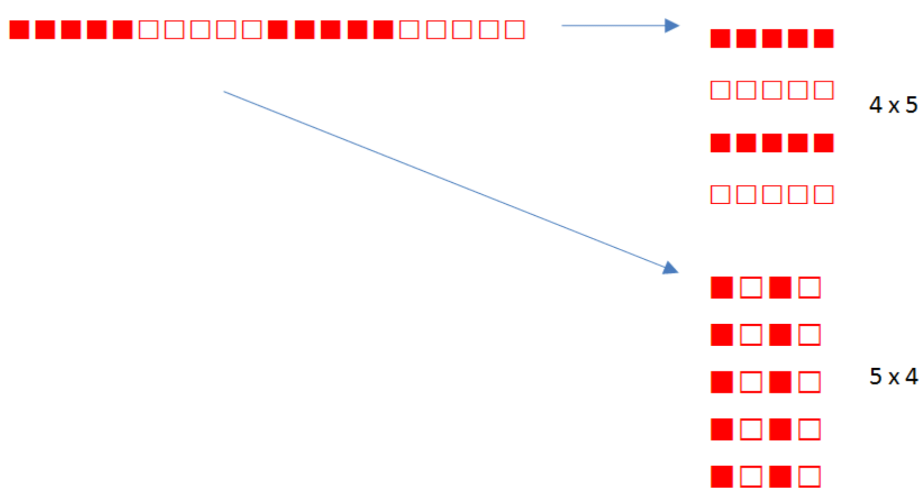


Figura 5 – 4 x 5 = 5 x 4

La combinación de los hitos del aprendizaje, el modelo rectangular, el ámbito numérico usado y el orden de magnitud de los valores numéricos, permiten construir diferentes trayectorias de aprendizaje, de acuerdo a opciones de carácter curricular específicas, de acuerdo a las características específicas de los estudiantes con los que trabaja el profesor y, también, de acuerdo a las condiciones que varían de una escuela en otra.

La trayectoria hipotética que se presenta a continuación es por tanto una de las tantas que son posibles. Ella es un ejemplo de una trayectoria efectivamente implementada en una clase de 3.º año básico, que incluye los ajustes que surgieron del estudio de algunas tareas y las condiciones del aula y la escuela. Se hace referencia también a los contextos utilizados en la secuencia de las tareas, un aspecto que, como veremos más adelante, está estrechamente relacionado con el aprendizaje de la multiplicación.

Cuadro 1 – Trayectoria de aprendizaje de la multiplicación, 3er año básico

Las secuencias de tareas	**Hitos de aprendizaje**	**Contextos y números**
Secuencias 1 y 2: tareas de multiplicación donde se evidencia el cálculo por grupos. (6 tareas)	Consolidación de la comprensión de un grupo como una unidad. Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma. Propiedad conmutativa de la multiplicación.	Artículos que se muestran en una tienda de abarrotes que se entremezclan con la utilización de múltiplos de 5, 3 y 6. Carteras con 4, 6 y 12 pegatinas.
Secuencias 3 y 4: tarea cuyo contexto se relaciona con la disposición rectangular. (6 tareas)	Consolidación de la comprensión de un grupo como unidad. Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma. Propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación.	Patrones en cortinas y embaldosados de pisos que estén relacionados con el uso de múltiplos de 5 y 10. Pilas de cajas que se relacionan con el uso de múltiplos de 5 y 10.
Secuencias 5 y 6: tareas con números en representación decimal. (6 tareas)	Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma. Propiedad conmutativa de la multiplicación.	Llenado y vaciado de botellas, vinculándolas con sus capacidades, con el objetivo de usar números decimales de referencia y relacionarlos entre sí (0,5; 1,5; 2,5; 0,25). Usar y relacionar números decimales de referencia asociándolos al valor de diferentes monedas (0,1; 0,2; 0,5; 0,99).
Secuencias 7 a 9: tareas de división en que se privilegia el cálculo multiplicativo, mostrando la relación entre las dos operaciones. (8 tareas)	Comprensión de la relación inversa entre la multiplicación y la división.	Colección de las tarjetas y uso de las máquinas expendedoras de bebidas para dividir utilizando la multiplicación con múltiplos de 6 y 8.
Secuencia 10: tareas de multiplicación en que se privilegia el uso de tablas de razón. (3 tareas)	Comprensión del sentido proporcional de la multiplicación.	Completar y usar precios en tablas referidas al costo de artículos de una tienda de abarrotes y de una ida al teatro, que implican múltiplos de 1,25, de 1,10, de 1,60 y de 0,99.

Observando el cuadro anterior, constatamos que los hitos de aprendizaje son el soporte de la trayectoria y emergen a partir de los contextos de las tareas. Al introducir un conjunto numérico nuevo, se vuelven a "visitar" los hitos del aprendizaje: para introducir la multiplicación con decimales se vuelve a trabajar los hitos de aprendizaje anteriormente considerados a propósito de los números naturales.

Este proceso de "revisitar" también está presente en los números incluidos en cada tarea. Se comienza con situaciones que implican múltiplos de 2, 3, 5 y 6. Después de "vuelve a" la utilización de estos múltiplos, al trabajar con múltiplos de 4, 10 y 12. Este "revisitar" numérico constituye un encadenamiento secuencial que se vuelve a repetir con la introducción de nuevos hitos de aprendizaje: a la hora de introducir la idea de relación inversa entre la multiplicación y la división, restringiéndose al ámbito de los números naturales y remitiéndose a grupos de 6, 8 y 10. Al introducir el sentido proporcional de la multiplicación, se usan 1,25 y múltiplos de 10, números antes mencionados como referencia. Es desde aquí que se van encadenando relaciones con nuevos valores numéricos.

3. Precisando la trayectoria hipotética: Una secuencia de tareas

La definición de una trayectoria de aprendizaje, como la descrita en el punto anterior, implica una gran atención a las características específicas de cada una de las secuencias de tareas que la constituyen. Analicemos en detalle la secuencia 4, que consiste en las cuatro tareas que se muestran en la Figura 6.

PILHAS DE CAIXAS

1. Na mercearia da Piedade chegaram caixas de 24 maçãs cada, embaladas como mostra a imagem.
As 25 caixas que chegaram foram arrumadas em pilhas como é indicado na figura.
No total das caixas, quantas maçãs há?

Pilas de Cajas

1. ¿Al almacén de Piedade llegaron cajas con 24 manzanas en cada una, embaladas como lo muestra la imagen. Las 25 cajas que llegaron se dispusieron en pilas, como se indica en la figura. ¿Cuantas manzanas hay en el total de cajas?

PILHAS DE CAIXAS

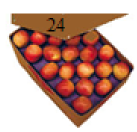
2. No supermercado do Bairro também há uma pilha de 25 caixas de maçãs.
Estas caixas são maiores, cada uma tem 48 maçãs.
Neste supermercado, quantas maçãs estão guardadas nas caixas?

Pilas de Cajas

2. ¿En el supermercado del Barrio también hay una pila de 25 cajas de manzanas. Estas cajas son más grandes, cada una tiene 48 manzanas. ¿Cuantas manzanas hay guardadas en estas cajas del supermercado?

PILHAS DE CAIXAS

3. No supermercado Girassol há, no total, o mesmo número de maçãs que no supermercado do Bairro, mas em cada caixa estão embaladas apenas 24 maçãs.
No total, quantas caixas de 24 maçãs há no supermercado Girassol?



Pilas de Cajas

3. ¿En el supermercado Girasol hay en total el mismo número de manzanas que en el supermercado del Barrio, pero en cada caja hay embaladas solo 24 manzanas. ¿Cuantas cajas de 24 manzanas hay en el supermercado Girasol?

PILHAS DE CAIXAS

4.

50 × 10 =	10 × 60 =	12 × 50 =
25 × 20 =	20 × 30 =	24 × 50 =
25 × 4 =	40 × 15 =	50 × 24 =
25 × 24 =	40 × 30 =	25 × 48 =
50 × 12 =	20 × 60 =	50 × 48 =

Figura 6 – Tareas de la secuencia 4

En cuanto a las ideas matemáticas sobre la multiplicación, con esta secuencia se desea que los estudiantes poco a poco abandonen la idea de adición sucesiva y evolucionen a un raciocinio multiplicativo. El objetivo es también utilizar las propiedades de la multiplicación para calcular productos. Por eso, el contexto de las tareas 1 y 2 facilita una progresión a la utilización del modelo rectangular, junto con el uso de las propiedades de la multiplicación. Las pilas de cajas pueden ser vistas de formas diferentes, a partir de distintos agrupamientos en filas o en columnas. Por ejemplo, la pila de 25 cajas de la tarea 1 puede ser considerada como un conjunto de cinco columnas, cada una con cinco cajas. También puede considerarse como formada por dos filas de cinco cajas (un total de 10 cajas), más otras dos filas de cinco cajas, más una fila de cinco cajas. En el primer caso, "se ve" el montón de cajas dispuestas en 5 columnas y es el cálculo del número de manzanas que hay en cada columna el que determina el número total de manzanas. En el segundo caso, observamos que en dos columnas hay 10 cajas y mirando a la pila formando el mayor número de grupos de dos columnas como sea posible. El número total de manzanas se obtiene a partir del número de manzanas existente en cada uno de los grupos considerados (de dos columnas y de una columna).

El uso de estas dos estrategias evidencia que los estudiantes forman grupos para calcular el valor solicitado, incluso sin pensar en las propiedades de la multiplicación ni en el modelo rectangular. Sin embargo, el análisis de estas estrategias y la resolución de otras situaciones que se basan en el mismo tipo de contexto, puede proveer una manera para hacer entender las propiedades, concluyendo, entre otras cosas, que $5 \times 24 + 5 \times 24 = 10 \times 24$ y que $25 \times 24 = 10 \times 24 + 10 \times 24 + 5\times 24$. Además de la exploración de los diferentes agrupamientos de cajas y el correspondiente uso de la propiedad distributiva de la multiplicación, los estudiantes también pueden asociar el número total de filas y columnas al número total de cajas, comenzando a utilizar el modelo rectangular en situaciones similares en las que cada "celda" del rectángulo corresponde a un conjunto de objetos – en este caso un conjunto de manzanas – y no un objeto, como en la primera fase de aprendizaje de la multiplicación.

Dos ideas importantes en términos de trayectoria de aprendizaje, la progresión y la interconexión, se concretizan tanto en términos de valores numéricos involucrados, como en la posibilidad de usar los resultados y las relaciones utilizadas en las tareas anteriores:

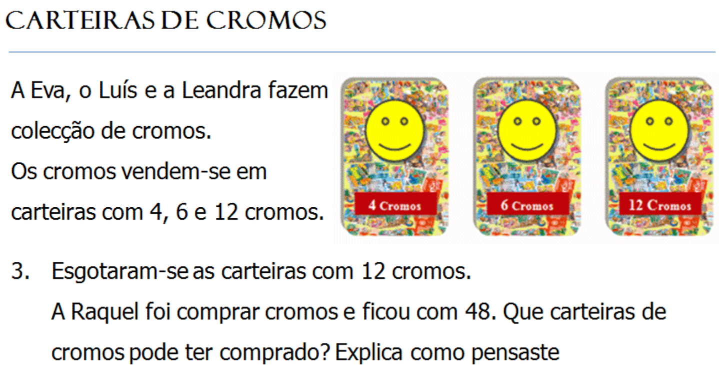
- En la tarea 2, cada caja tiene el doble del número de manzanas de la tarea 1.
- En las tareas 2 y 3, el número total de manzanas es igual y la cantidad que cabe en las cajas de la tarea 2 es el doble de la que cabe en las cajas de la tarea 3.
- En la segunda tarea, de mover dos cajas (las que constituyen la última columna) se obtiene una disposición de cajas igual a la de la primera tarea.
- La tarea 4 es compatible con la consolidación de las relaciones y propiedades que se utilizan en las tareas anteriores – el doble, la propiedad asociativa, conmutativa y distributiva – y el uso de estos valores numéricos a lo largo de la cadena, como grupos de 24 y 48 y los productos de factores que pueden llevar a obtener 600 y 1200.

Junto a esta preocupación por el nivel de progresión y la interconexión entre las tareas que constituyen una secuencia, dirigida principalmente a partir de las ideas fundamentales acerca del aprendizaje de la multiplicación y del diseño general de trayectoria hipotética global, es importante tener también en cuenta otras cuestiones como la diversidad y las características de los contextos de cada tarea, que analizamos en la siguiente sección.

4. Tareas

En una trayectoria hipotética de aprendizaje deben incluirse tareas de distinta naturaleza: no sólo problemas e investigaciones, ni sólo ejercicios. Cada tipo de tarea tiene su potencial y lo que es esencial es que el maestro sea capaz de seleccionar las más adecuadas, en conformidad con los objetivos de su enseñanza.

En la secuencia representada en la figura 6 se incluyen problemas (tareas 1, 2 y 3) y ejercicios de cálculo (tarea 4). La tarea "Sobres de pegatinas" (Figura 7) es un ejemplo de otro tipo de tarea – de investigación – que también debe incluirse en la construcción de una trayectoria de aprendizaje.



SOBRES DE PEGATINAS

Eva, Luis y Leandra coleccionan pegatinas (figuritas). Estas se venden en sobres de 4, 6 y 12 unidades.

3. Se agotaron los sobres con 12 pegatinas. Raquel fue a comprar pegatinas y llegó con 48. ¿Qué sobres de pegatinas pudo haber comprado? Explica como pensaste.

Figura 7 – Tarea "Sobres de pegatinas"

La selección de los contextos de los problemas y de las investigaciones, a los que Fosnot y Dolk (2001) se refieren como a las características de las situaciones que pueden ser matematizadas por los estudiantes, debe ser orientada de tal manera que (i) permita la construcción de modelos, (ii) permita una real comprensión y acción de los estudiantes sobre el contexto, y (iii) inspire a los estudiantes a hacer preguntas y buscar soluciones.

En las tareas 1, 2 y 3 se explora el contexto de las cajas de fruta y las diferentes maneras de ser apiladas. Hay otros contextos que también permiten el paso gradual de la construcción y refinamiento de los modelos en que se basa la multiplicación (característica i) basados en la organización de grupos de objetos en embalajes (huevos, pelotas, latas de bebidas), en patrones rectangulares visibles en cortinas o en la colección y organización de datos necesarios para hacer un inventario de los objetos dispuestos en un lugar determinado. Las cajas y la forma en que se apilan (Figura 1) pueden servir de soporte a determinados modos de pensar asociados a la disposición rectangular, es decir, permiten comenzar a modelar situaciones usando esta disposición. Anteriormente, los estudiantes deben haber tenido la oportunidad de explorar contextos que les permitan modelar una situación como la suma repetida en una recta numérica. En una fase posterior del aprendizaje de la multiplicación deben, por ejemplo, explorar situaciones cuyo contexto les permita modelar la multiplicación como área o como una proporción usando la correspondencia en una recta numérica doble.

Analizando las tareas incluidas en la Figura 6 y 7 podemos comprobar fácilmente que estas sugieren que los estudiantes, según su nivel de desarrollo matemático, procuraran vías de resolución, utilizando distintos conocimientos y relaciones (característica ii). Por ejemplo, en la tarea 1 (Figura 6), para calcular 25 × 24, pueden ver la imagen y empezar por calcular el número total de manzanas en cada columna, determinando 5×24. Otros pueden empezar por la formación de grupos de 10 cajas, el cálculo de 10 × 24. Otros, menos familiarizados con los procedimientos de la multiplicación, puede añadir sucesivamente 24.

El contexto de las tareas también debe desafiar a los estudiantes para analizar las posibilidades, descubrir patrones, hacer preguntas o comparar raciocinios (característica iii). Por lo tanto, las tareas deben "hablar" de los aspectos que los estudiantes conocen o pueden imaginar. También deben permitir un análisis desde diferentes perspectivas y cuestiones, como, por ejemplo, acontece en la tarea de *Sobres de pegatinas* (Figura 7), donde se pueden discutir las diversas opciones para la compra de Raquel y cual podría corresponder a la compra más barata.

En el diseño y ejecución de una trayectoria de aprendizaje también deben ser incluidas las tareas que se centran en la propiedad de determinados hechos y relaciones numéricas y que tenemos la costumbre de llamarlos ejercicios de aplicación. Hacemos hincapié en lo que llamamos cadenas numéricas[1] y que se dirigen al desarrollo del cálculo mental basado en el uso de las propiedades y relaciones importantes de la multiplicación. Teniendo en cuenta las características específicas de las cadenas numéricas en su explotación el maestro debe mantener un ritmo rápido, no gastar más de 15 minutos y privilegiar la oralidad (y no el registro escrito).

En la secuencia presentada en la Figura 6, se incluyen tres cadenas (Tarea 4), que tienen como objetivo realzar estrategias potentes de cálculo mental basadas en la aplicación de la propiedad asociativa de la multiplicación en el caso particular de las relaciones con dobles y mitades, y la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma usando números de referencia. Cada una de las cadenas debe ser explorada en diferentes días, ya que el objetivo es concentrar la atención en una relación particular, y no en varias a la vez.

La forma en que el maestro debe guiar la exploración de una cadena numérica asume características particulares que ilustramos a través del caso de la maestra Isabel mientras trabaja la segunda cadena de la tarea 4 (Figura 6).

[1] La siguiente es una opción para construir y operar cadenas numéricas, inspirada en las ideas de Fosnot y Dolk (2001).

Isabel escribe en la pizarra una expresión cada vez y da a los estudiantes un tiempo para pensar. Comienza con el registro de la expresión 10×60. Sólo después de que varios estudiantes levantan su mano, indicando que saben cuál es el valor de 10×60, es que solicita a uno de ellos su respuesta. Una vez que se analiza la respuesta, Isabel pasa al siguiente, dejando en la pizarra el registro 20×30.

En lo episodio siguiente puede verse como ha sido explorada por Isabel una parte de esta cadena.

> Leandra – Es 10×60 o 60 × 10, es 600.
> Isabel – ¿Y ahora qué?
> Duarte – 20 × 30 es 600. Porque es 20 veces 10 veces 3. Y 20 veces 10 es 200 y tres veces son 600.
> Bernardo – Y también puede ser 10 veces 30 más 10 veces 30 que es 300 más 300.
> Raquel – Es 600, porque es igual al anterior! 40 es el doble de 20 y 15 es la mitad de 30.
> Gustavo – Puede hacerse también 40 × 10 más 40 × 5. Da 400 + 200 que son 600.
> Isabel – ¿Y ahora qué? (Escribe 20 × 60 y muchos brazos se levantan).
> William – Es 1200 porque 60 × 10 es 600 y mas 60 × 10 es 600, por lo que da 1200.
> David – Pensé en 20 × 30 en dos ocasiones.
> José – Da 1200 porque es lo mismo que 40 × 30.
> Duarte – También se puede hacer 60 × 2 y luego 10 veces.

De acuerdo con los objetivos de la cadena y cómo reaccionan los estudiantes, el profesor debe ir decidiendo la abertura para pasar al análisis de las justificaciones de los distintos procedimientos y a los procesos que desea realzar. En el episodio anterior Isabel decide no buscar una justificación para el resultado de 10×60, ya que es un valor que la mayoría de los alumnos ya sabe de memoria. En relación a los otros cálculos da espacio a formas de pensamiento que reflejan la aplicación de diferentes propiedades de la multiplicación.

5. Poner en práctica las tareas: Prever y explorar

Después de seleccionar cada tarea, el profesor todavía tiene que preparar dos momentos muy importantes: hay que prever cómo podría organizar la lección y poner en marcha esta predicción mediante la exploración de la tarea en el aula (Stein, Engle, Smith, y Hughes, 2008). Estos dos momentos deben estar guiados por la trayectoria de aprendizaje, asumiéndola como un rumbo global y flexible que se sigue de acuerdo con las intenciones de aprendizaje y las reacciones de los estudiantes.

En estos dos momentos, el enfoque del profesor debe ser el estudiante. Teniendo siempre en cuenta la trayectoria de aprendizaje, el profesor debe ser capaz de prever y administrar a partir de lo que los estudiantes puedan comprender, hacer y preguntar.

5.1. Prever la implementación de las tareas

Esta es una fase del trabajo del profesor que puede implicar diferentes aspectos. Consideramos particularmente relevantes los relacionados con los estudiantes, es decir, los destinados a la preparación de la ejecución de las tareas para la clase, pensando en qué harán los alumnos y en las dudas que puedan tener. Por esto, damos mucha importancia a la anticipación de sus estrategias y dificultades.

El proceso de anticipar las estrategias asociadas con una tarea implica un profundo conocimiento de sus potencialidades y, sobre todo, un gran conocimiento acerca de cómo piensan los estudiantes. El profesor tiene que colocarse en la posición de los estudiantes del aula en que trabaja y prever los modos de resolución, con diferentes grados de sofisticación, de acuerdo con diferentes niveles de aprendizaje y diferentes maneras de pensar. Esta anticipación le ayudará en el aula para reconocer y entender las estrategias usadas y ver cuáles se relacionan con sus objetivos de enseñanza, es decir, con las ideas matemáticas que desea que los estudiantes aprendan.

Al anticipar las estrategias de los estudiantes en clase antes de que lleven adelante sus resoluciones, podrá identificar sus dificultades y su razón de ser, lo que le permitirá encontrar más fácilmente una manera de ayudarles a superarlas. Al mismo tiempo que prevé las estrategias, el profesor debe también anticipar las posibles dificultades asociadas con la interpretación de la propia tarea.

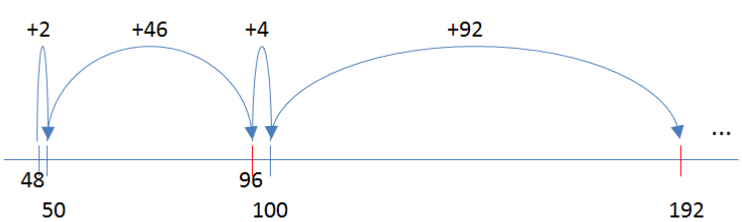
A continuación, centrándonos en la tarea 2 de la secuencia presentada en la Figura 6, ilustramos las estrategias que los estudiantes pueden utilizar en su resolución. Junto a esta previsión, identificamos también algunas dificultades que puedan manifestar a propósito de cada una.

Posibles resoluciones agrupadas en tres categorías: (i) las que se basan en un razonamiento aditivo, (ii) aquellas que se basan en razonamiento de la multiplicación y tienen en cuenta el contexto de la tarea y (iii) aquellas que recurren a razonamientos multiplicativos y no toman en cuenta el contexto de la tarea. En cada una de estas categorías inventariamos las estrategias en secuencia, de la menos a la más sofisticada.

(i) Las estrategias que se basan en raciocinios aditivos

La segunda tarea está incluida en la secuencia 4, y se espera que la mayoría de los estudiantes utilicen estrategias que tienen subyacentes propiedades de la multiplicación. Sin embargo, algunos todavía pueden utilizar estrategias aditivas similares a las incluidas en el cuadro siguiente.

Cuadro 2 – Estrategias aditivas y posibles dificultades

Estrategias previstas	**Posibles dificultades**
Pensar en 25 cajas, cada una con 48 manzanas y utilizar procedimientos aditivos. Representar horizontalmente la adición 48 + 48 + ... + 48 (25 veces): • Agregando 48 en repetidas ocasiones, haciendo 48+48= 96, 96 + 48 = 144, ... • Sumando las cajas 2 a 2, haciendo 48+48 = 96, 96+96 = 192, 192+192 = 384, ...	Llevar a cabo un gran número de cálculos correctamente, teniendo en cuenta el número de cajas (25) y el número necesario para adicionar (48).
Pensar en 25 cajas, cada una con 48 manzanas, y utilizar la recta numérica para adicionar.  	Llevar a cabo un gran número de cálculos correctamente, ya que es fácil perder el control del número de veces que se suma 48.
Añadir el número de cajas a la cantidad de manzanas de cada caja haciendo 25 + 48 (estrategia equivocada).	Interpretar y comprender la tarea.

(ii) Las estrategias que utilizan razonamiento multiplicativo y tienen en cuenta el contexto de la tarea

El contexto de las pilas de cajas favorece el uso de estrategias que aprovechan las propiedades y relaciones multiplicativas, tales como las enumeradas en la tabla siguiente.

Cuadro 3 – Estrategias multiplicativas y que tienen en cuenta el contexto de la tarea y posibles dificultades

Estrategias previstas	**Posibles dificultades**
Observan cómo las cajas se apilan y, posteriormente, calculan por líneas, multiplicando, pensando: • 2 líneas, cada una con 6 cajas, son 12 cajas • 2 líneas, cada una con 5 cajas, son 10 cajas • una línea con tres cajas, $12\times48 + 10\times48 + 3\times48$. O pensando línea a línea, $6\times48 + 6\times48 + 5\times48 + 5\times48 + 3\times48$.	Calcular el producto 12×48. Olvidarse de añadir un producto parcial.
Observan cómo las cajas están apiladas y, a partir de ello, calculan por columnas usando la multiplicación, pensando: • 2 columnas, cada una con 4 cajas, 8 cajas • 3 columnas, cada una con 5 cajas, 15 cajas • una columna con dos cajas $8\times48 +15\times48 + 2\times48$. O pensando columna por columna $4\times48 + 4\times48 + 5\times48 + 5\times48 + 5\times48 +2\times48$.	Calcular el producto 15×48. Olvidarse de añadir un producto parcial.
Observan cómo están apiladas las cajas y mentalmente, perciben que esta disposición es equivalente a tener una disposición rectangular con cinco columnas y cinco filas de cajas. A partir de ahí, calcular por columnas o filas, usando la multiplicación, pensando $5\times5\times48$ o 25×48. • Calcular 5×48 primero y luego multiplicar por 5, lo que equivale a realizar $5\times (5\times48)$ o $(5\times5) \times48$ • Calcular 25×48 efectuando 20×48 más 5×48.	Realizar los cálculos asociados a factores que son múltiplos de 10.

(iii) Las estrategias que utilizan razonamientos multiplicativos y no toman en cuenta el contexto de la tarea

Las estrategias utilizadas por los estudiantes pueden ser de tipo multiplicativo, más no ser influenciadas por la organización de las cajas. Sin embargo, algunas de las estrategias previsibles podrían tener en cuenta la tarea anterior (véase la Tarea 1, Figura 6) a través del establecimiento de las relaciones numéricas entre ellas.

Cuadro 4 – Estrategias multiplicativas y que tienen en cuenta el contexto de la tarea y posibles dificultades

Estrategias previstas	**Posibles dificultades**
Identificar la situación como del tipo multiplicativa y los valores numéricos a usar. Calcular utilizando la descomposición decimal del 48: 25×48=25×40+25×8.	Realizar los cálculos asociados a factores que son múltiplos de 10.
Identificar la situación como del tipo multiplicativa y los valores numéricos a usar. Calcular utilizando la descomposición de decimal del 25: 25×48=20×48+5×48.	Realizar los cálculos asociados a factores que son múltiplos de 10.
Relacionar con la tarea anterior. Pensar que el número de cajas es el mismo, pero ahora cada caja tiene 48 manzanas; Es decir, tiene el doble de manzanas que había en las cajas de la tarea anterior. Si el total de manzanas antes era 600, ahora es el doble: 2×600=1200.	
Relacionar con la tarea anterior. Pensar que el número de cajas es el mismo, pero ahora cada caja tiene 48 manzanas. En lugar de pensar sólo en duplicar la cantidad total de manzanas, duplicar el número de manzanas en cada caja haciendo: 25×48=25× (2×24) 25× (2×24)=2× (25×24) o sea 2×600=1200.	
Identificar la situación como del tipo multiplicativa y los valores numéricos a utilizar. Usar las relaciones con dobles y mitades, haciendo 25×48=50×24 porque el 50 es el doble de 25 y 24 es la mitad de 48, 50×24=100×12 ya que el 100 es el doble de 50 y 12 es la mitad de los 24, 100×12 = 1200 porque sé multiplicar por 100.	Hacer los cálculos relacionados con dobles y mitades.
Identificar la situación como del tipo multiplicativa y los valores numéricos a usar. Usar los números de referencia, en este caso, el número 50, cercano a 48, y compensar 25×48=25×50–25×2.	Olvidar que la compensación implica restar 25×2, no sólo dos.

La predicción de las estrategias que los estudiantes utilizarán en la solución de una tarea en particular es una actividad muy exigente y difícil para el profesor. Sin embargo, en la medida que prosigue con esta práctica, la previsión de diferentes resoluciones es cada vez más fácil, ya que su nivel de conocimiento sobre el modo de pensar de los estudiantes en relación con el raciocinio multiplicativo es cada vez más profundo.

Además de mejorar con la práctica en la predicción de los conocimientos acerca de las resoluciones esperadas, es crucial que pueda registrar y discutir las posibles soluciones con otros profesores, a partir de una tarea concreta. Eventualmente, si la tarea ya ha sido explorada en años anteriores será interesante tener acceso a las resoluciones de otros estudiantes con el fin de interpretarlas y comprenderlas, aumentando sus conocimientos sobre el modo de razonamiento de los estudiantes y las distintas representaciones que utilizan para lo explicar.

Aunque el profesor intente inventariar las resoluciones previstas de los alumnos lo más completo posible, es natural que en el aula se plantean estrategias que no se esperaban. Sin embargo, el hecho de tener pensado anteriormente las diferentes maneras de resolver una tarea también ayudará más adelante en el aula, a reconocer y a comprender aquellas que no fueron pensadas antes.

5.2. Explorar y discutir las tareas

En la clase, todo el trabajo por hacer tiene en cuenta dos aspectos fundamentales. El primero se refiere a lo que el maestro tiene pretende con la exploración de determinada tarea, teniendo en cuenta las ideas matemáticas que espera que los estudiantes desarrollen, sin perder de vista los objetivos de la tarea, la trayectoria de aprendizaje que delinea y que va siendo concretizada. El segundo aspecto, directamente relacionado con la predicción de las estrategias a ser utilizadas por los estudiantes, es la manera de gestionar las interacciones entre ellos, asegurando el establecimiento de "puentes" entre las estrategias con diferentes grados de complejidad. De este modo, permite a los estudiantes que han utilizado algunas de las estrategias poco potentes puedan entender las resoluciones más eficaces de otros compañeros y que avancen en términos de nivel de aprendizaje.

Los dos aspectos identificados evidencian que la acción del docente en el aula es fuertemente apoyada por el trabajo que hace con antelación, sobre la selección de tareas y la predicción de las estrategias que los estudiantes pueden usar.

En el aula, después de una breve presentación de la tarea seleccionada, los estudiantes comienzan su resolución, de forma individual o en parejas. A esta altura, el papel reservado a lo maestro es monitorear el trabajo de los estudiantes, que es considerablemente facilitado por la preparación que tuvo lugar en torno a la anticipación de las estrategias. Asimismo, necesita, al principio, tener la idea de si los estudiantes entienden la tarea e interpretan correctamente su declaración. A partir de entonces cada uno trabaja de acuerdo a su nivel de conocimiento.

Teniendo en cuenta las diferentes resoluciones, a medida que los estudiantes trabajan, el profesor debe ser capaz de relacionar ese trabajo con lo que ha anticipado. El modo de como los estudiantes representan y explicitar el razonamiento que van realizando, no siempre es claramente visible, incluso cuando el profesor haya anticipado un modo de resolución basado en un razonamiento similar. Para facilitar sus actuaciones en esta fase de exploración, debe poner a sí mismo preguntas como:

- ¿La mayoría de los estudiantes está entendiendo el problema? Hay dificultades?
- ¿Las estrategias que utilizan son compatibles con las previstas?
- ¿Hay estrategias que no esperaba?

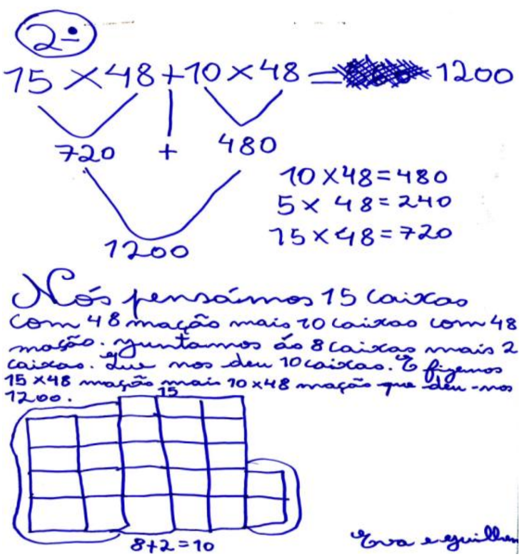
En este caso, para monitorear el trabajo de los alumnos, la maestra Isabel se dio cuenta de que no usan las estrategias aditivas. De hecho, aunque estas estrategias hayan sido previstas, dada la experiencia anterior de los alumnos con otras tareas incluidas en la trayectoria de la multiplicación, sólo utilizaron procedimientos cuyo raciocinio subyacente era el multiplicativo. Sobre la base de las estrategias previstas, Isabel también identificó una forma de resolución de un par de alumnos distinta, en la que, aparentemente, no había pensado de antemano.

Mientras monitorea el trabajo de los estudiantes, el profesor comienza a prepararse para la discusión colectiva. Se interroga sobre los objetivos que delineo e identifica las potencialidades de las estrategias utilizadas, a fin de seleccionar aquellas que deben ser presentadas y discutidas con toda la clase. Pone a sí mismo, preguntas tales como:

- ¿Teniendo en cuenta la finalidad de la tarea que he seleccionado y la predicción que hice de las estrategias, cuales resoluciones debieran ser presentadas y discutidas con todos?
- ¿Cuál es el orden en que se deben presentar y discutir?

La maestra Isabel tenía como objetivo que los estudiantes usaran el modelo rectangular asociado al contexto y que lo relacionaran con las propiedades de la multiplicación. Así, eligió las estrategias de dos estudiantes, de acuerdo con las ideas que quería realzar. La selección que hizo fue facilitada por el trabajo previo que se hizo en torno a las estrategias, ya que le permitió tomar una decisión rápida, durante la sesión, y de acuerdo con su intención. Es interesante notar que una de las estrategias elegidas constituyo, inicialmente, una sorpresa para Isabel, ya que no la había previsto. Pese a ello, cuando pidió aclaraciones a los estudiantes acerca de su manera de pensar, decidió que era mejor que esta resolución fuera compartida con todos los alumnos.

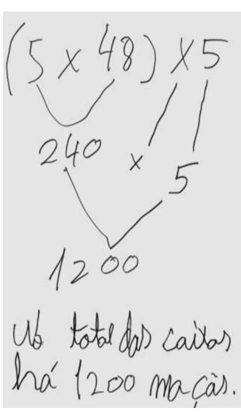
Ambas resoluciones seleccionadas por Isabel fueron de la pareja Eva-Guilherme y de la pareja Duarte-Tiago.



Texto de la figura 8:

Nosotros pensamos 15 cajas con 48 manzanas más 10 cajas con 48 manzanas. Juntamos las 8 cajas más 2 cajas. Lo que nos da 10 cajas. Tenemos 15×48 manzanas más 10×48 manzanas que dan 1200.

Figura 8 – Resolución de Eva y Guilherme



Texto de la figura 9:

En el total de cajas hay 1200 manzanas.

Figura 9 – Resolución de Duarte y Tiago

Eva y Guilherme presentaron un esquema que apoya su forma de pensar, mientras que Duarte y Tiago no presentaron, explícitamente, algo que avalara los raciocinios que hicieron.

Para decidir el orden de sus presentaciones y respectiva discusión, Isabel utilizo como criterio la presentación progresiva de las resoluciones, de menos a más abstracta. Así, Eva y Guilherme fueron los primeros en hacer su presentación, seguida por Duarte y Tiago. La pareja tuvo el soporte una hoja A3 en la que resolvieron la tarea, la que se fijó en la pizarra.

Después de la elección de las resoluciones de los estudiantes que servirán como base para el debate con toda la clase, sigue un momento esencial de la clase donde el profesor tiene un papel crucial. De hecho, el momento de la clase en que el profesor guía la discusión con toda la clase, facilitando las interacciones entre los estudiantes, es crucial en todo el proceso. Aquí es donde se ponen de relieve las ideas asociadas a la trayectoria de aprendizaje construida y que se deben establecer "puentes" en varios niveles: entre resoluciones distintas con niveles de razonamiento más o menos sofisticados, y entre las resoluciones e ideas y conceptos matemáticos y entre las resoluciones y los objetivos de la lección. La acción del profesor debe ser guiada por las siguientes preguntas:

- ¿Cómo orientar la presentación y el intercambio de resoluciones para facilitar las interacciones entre los estudiantes?
- ¿Cómo gestionar la discusión colectiva con el fin de establecer "puentes" entre diferentes resoluciones, algunas más informales y otras más potentes?
- ¿Cómo guiar la discusión para que los estudiantes en niveles más bajos de aprendizaje evolucionen?
- ¿Cómo orquestar una discusión colectiva para que todos puedan aprender, teniendo en cuenta los objetivos de la lección?

Isabel decide combinar la presentación de las parejas seleccionadas con las discusiones con toda la clase. Comienza proponiendo al par Eva y Guilherme que expliquen su resolución.

Eva hizo una presentación oral muy cercana a los registros escritos que la pareja había hecho.

> Eva – Pensamos en 15 cajas con 48 manzanas, más 10 cajas con 48 manzanas. Juntamos las 8 cajas más dos cajas (y señaló el esquema que habían hecho), lo que nos dio 10 cajas. E hicimos 15×48 + 10×48.

Estos estudiantes sacaron partido de la disposición rectangular, convirtiendo la “pila de cajas” en dos rectángulos, con 10 y 15 cajas y calcularon a partir de ello los productos parciales correspondientes, 15×48 y 10×48, ya que cada caja tiene 48 manzanas.

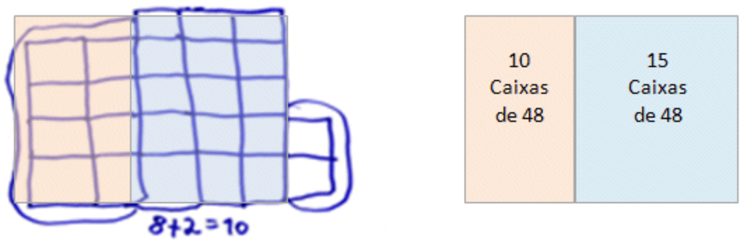


Figura 10 – Representación de la pila en 10 cajas más 15 cajas

Eva y Guilherme tienen un esquema que apoya su manera de pensar. La manera de utilizar una disposición rectangular y calcular el número total de manzanas, ayuda a Isabel a destacar, frente a todos los estudiantes en la clase, que calcular la suma de los dos productos 15×48 y 10×48 es lo mismo que calcular 25×48.

Esta relación nos permite comparar la estrategia utilizada por Eva y Guilherme con la de otros estudiantes que determinaron el número total de manzanas a partir del cálculo del producto 25×48. Con la ayuda de un esquema los estudiantes son capaces de entender que calcular el número de manzanas en 10 cajas más el número de manzanas en 15 cajas es lo mismo que calcular, de una vez, el número de manzanas en 25 cajas.

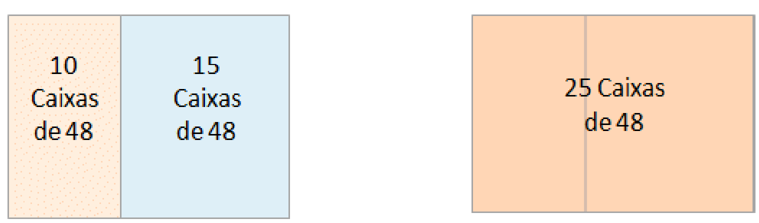


Figura 11 - Representación de 10×48+15×48=25×48

La confrontación entre las estrategias permite poner de relieve ideas matemáticas fundamentales para el aprendizaje de la multiplicación. De hecho, la igualdad entre las expresiones 10×48 + 15×48 y 25×48 permite evidenciar, en particular, la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma.

Animar a los estudiantes a explicitar verbalmente su pensamiento, acompañado de los registros escritos que realizaron, puede ayudar a otros estudiantes con diferentes niveles de comprensión sobre la multiplicación a progresar en términos de ideas y relaciones que se pueden establecer. Por ejemplo, parte de la resolución de Eva y Guilherme, incluida en la siguiente figura, también podría servir como soporte para una discusión colectiva en que se destaquen las relaciones numéricas en que se basan los cálculos.

$$10 \times 48 = 480$$
$$5 \times 48 = 240$$
$$15 \times 48 = 720$$

Figura 12 - Parte de la resolución de Eva y Guilherme

Usando el conocimiento de la multiplicación con múltiplos de 10 se calcula primero 10×48 mentalmente. Teniendo en cuenta que 5 es la mitad de 10, el producto correspondiente también es la mitad del anterior. Por último, teniendo subyacente la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma, se determina 15×48 sumando los productos parciales anteriores.

Veamos ahora como Isabel guía la discusión colectiva a partir de la presentación del otro par de alumnos seleccionados, Duarte y Tiago. El grado de abstracción de la estrategia seguida, visible en términos de los registros efectuados, y el modo cómo la explicaron inicialmente llevo a su compañeros a pedir una aclaración. El episodio que transcribimos refleja la dificultad de la comprensión de esta resolución por parte de los compañeros y cómo Isabel guía a la pareja de estudiantes con el fin de que expliquen con otras palabras, teniendo en cuenta que el primer intento no había sido comprendido.

> Gustavo – No lo entiendo! ¿Puedes explicar mejor?
> Isabel – ¿Uno de los dos, puede intentar explicar de otra manera a sus compañeros para que puedan entender?
> Duarte – Tenemos estas dos cajas (y señalando, en la figura, correspondiente a las dos últimas cajas de la derecha) y las pasamos para acá (señalando en la parte superior izquierda). Y desaparecerán de aquí (señala las dos últimas cajas de la derecha). Después

> hicimos 5×48 porque eran las cajas de una columna. Como eran cinco columnas, hicimos después “veces cinco” (y lo escribió en la pizarra (5×48) ×5).

A diferencia de la pareja que había presentado con anterioridad, estos alumnos no dibujaron un diagrama que ayudara a visualizar la transformación de la pila de cajas en un rectángulo, haciéndolo solamente a nivel mental. Después de calcular el número de manzanas por columna, haciendo 5×48. Como identifican cinco columnas, a continuación calculan cinco veces el número de manzanas de cada columna. Sin embargo, como se fueron representando los cálculos a medida que razonaban, los alumnos escriben a la derecha el factor 5, correspondiente a cinco columnas, ya que escriben de forma secuencial de izquierda a derecha.

Para el caso de los estudiantes que persisten en no entender esta forma de pensar y de representar, es importante aclararles lo significado de la expresión (5 × 48) × 5. El cálculo intermedio de 5 × 48 permite una traducción en el contexto de la tarea. Pensando en un “rectángulo” con 5 columnas (y 5 filas), el profesor puede pedir a los alumnos en la clase el significado de 240, es decir, el número de manzanas en cada columna de cajas. A partir de ahí, el significado de 5×240 es rápidamente asociado con el número total de manzanas, ya que hay cinco columnas, cada una con 240 manzanas. La relación entre 5× 240 y 240 × 5 (expresión usada por Duarte y Tiago), que no se justifica desde el contexto en sí mismo, puede ser justificada teniendo en cuenta las experiencias previas de los estudiantes. En términos matemáticos, la igualdad entre 5×240 y 240×5 se justifica por la propiedad conmutativa de la multiplicación, con la cual los estudiantes ya han tenido contacto, sobre todo en los cálculos relacionados con las tablas de multiplicar. Siguiendo con el tema de la presente resolución, Isabel alienta a otros estudiantes a solicitar aclaraciones a los autores. Enzo les pregunta:

> Enzo – Me gustaría saber cómo Duarte y Tiago hicieron rápidamente 240×5.
> Duarte – (responde el pensamiento 5×240) Sabemos que 5×4 es 20, entonces 5×40 es 200. Y como sabemos que 5×2 es 10, sabemos que 5×200 es 1000. Y por eso pusimos 1200.

La explicación de Duarte, además de tener implícita la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma, se relaciona con otra idea fundamental del aprendizaje de la multiplicación, el uso de factores múltiplos de 10. Al fomentar el cuestionamiento de las estrategias de cálculo de gran alcance y la explicación correspondiente, Isabel promueve el desarrollo de los estudiantes en términos de niveles de aprendizaje de la multiplicación. La acción de Isabel concretiza posibles respuestas a las preguntas que deberían guiar las discusiones colectivas, a las que se ha hecho referencia previamente.

Para la presentación y el intercambio de resoluciones seleccionadas, la profesora organiza dos momentos asociados a cada una de las presentaciones. Tras la presentación del primer par de alumnos, generaliza un debate con toda la clase, dando a los estudiantes la oportunidad de intervenir. La profesora hace hincapié en los aspectos que considera pertinentes a la resolución en cuestión. Después de la presentación de la segunda pareja organizó una segunda discusión colectiva, que constituye un momento importante de interacción y donde Isabel tiene igualmente un papel fundamental.

En cuanto al establecimiento de "puentes", Isabel parte de la resolución de Eva y Guilherme y la relaciona con la de otros estudiantes, haciendo hincapié en la igualdad entre las dos expresiones con las que cada grupo inicia el cálculo. En el caso de la resolución de Duarte y Tiago, los alienta a que aclaren su resolución y a que expliquen que la forma en que pensaron se asocia con la disposición rectangular. Intenta entender si el resto de los estudiantes comprende y, cuando persisten las dudas, orienta la discusión con el fin de usar el contexto para facilitar la explicación. Recurre también a la experiencia previa de los alumnos con la propiedad conmutativa.

Con el fin de posibilitar a los estudiantes en niveles más bajos que su aprendizaje evolucione, Isabel solicita a Eva y Guilherme que expliciten verbalmente como efectuaron algunos cálculos, cuando relaciones numéricas potentes se hacen evidentes, ligadas a las propiedades de la multiplicación. También alentó a Duarte y Guilherme a aclarar, cuando lo solicito un compañero, como hicieron "rápidamente" cierto cálculo, poniendo de relieve las relaciones importantes asociadas a los múltiplos de 10.

Los objetivos de la tarea – usar el modelo rectangular asociado con el contexto y relacionarlo con las propiedades de la multiplicación – estaban subyacentes en todo el debate. Por eso selecciona determinadas resoluciones, y a partir de las voces de los estudiantes, relaciona las estrategias con el modelo rectangular. A partir de ahí surgen ideas importantes de la multiplicación, en relación a sus propiedades. Estas son explicadas por los estudiantes o destacadas por la maestra.

6. Concretización de trayectorias de aprendizaje y Estudio de Clases: ¿Diferentes perspectivas sobre el papel del profesor?

A través de la concretización de una trayectoria de aprendizaje, en torno al tema de la multiplicación, procuramos ejemplificar los elementos fundamentales de la acción del profesor. A continuación, ilustramos algunos elementos de convergencia entre el enfoque que hemos presentado y el Estudio de Clases, en lo que respecta al papel del docente y su desarrollo profesional.

6.1. El papel del docente

Un aspecto central de ambas perspectivas es el énfasis en una cuidadosa planificación de las lecciones. En el libro *El enfoque de Resolución de los problemas en la Enseñanza de la matemática a partir del Estudio de Clases*, de Isoda y Olfos (2009), se enuncian seis desafiantes tareas asociadas a la preparación del plan de clases en las que podemos encontrar puntos de contacto con una trayectoria de aprendizaje que hemos desarrollado en torno a la multiplicación: i) Descripción de las situaciones matemáticas en contexto a tratar en la clase; ii) caracterización de las tareas asignadas a los alumnos y al docente en los distintos momentos que constituirán la clase; iii) delimitación temporal y organizacional de los momentos de la clase; iv) anticipación de los comportamientos y las producciones de los alumnos; v) preparación de las eventuales intervenciones del docente para conducir la clase hacia la meta propuesta, y vi) selección de los materiales y medios para la clase (pp. 18-19).

En el caso de la trayectoria de aprendizaje desarrollada, tanto las secuencias de tareas matemáticas como cada tarea en sí misma están cuidadosamente pensadas. Para cada tarea hay una descripción clara de sus objetivos, con una identificación de los marcos de aprendizaje y los modelos implicados en la resolución de un problema en contexto. Su desarrollo sigue el criterio de la interconexión entre las tareas, teniendo en cuenta, por ejemplo, los números implicados de una tarea para otra, así como los contextos que promueven el uso de determinados modelos o estrategias. Los contextos de las tareas son igualmente importantes, ya que debe representar un desafío para el estudiante, que lo lleven a querer involucrarse en su exploración.

Así, el profesor aporta tareas al aula que fueron bien planeadas y anticipadamente exploradas, cuestiones que análogamente, hemos visto retratadas en la acción del profesor en la planificación de la lección en el caso del Estudio de Clases, tal como se mencionó en los puntos i) y vi). Como se ilustra, en el caso de la trayectoria de aprendizaje, ese planeamiento implica, inclusivamente, la predicción de las estrategias de resolución de los estudiantes, aspecto también contemplado en las características evocadas en iv), así como las posibles dificultades que se enfrentan, teniendo en cuenta las diferentes niveles de desarrollo en que se encuentran en el curso de la trayectoria en cuestión.

Otro punto de contacto entre las dos perspectivas es la naturaleza de las tareas propuestas para el aula y su implicación en la organización del aula. En ambos casos, la elección de buenos problemas y la forma en que son explorados en clases merecen una atención muy especial del maestro. En el mismo libro, Isoda y Olfos afirman que "un buen problema permite al alumno alcanzar un conocimiento nuevo al poner en juego los ya adquiridos en clases anteriores" (2009, p. 100). Esta es también una característica de la trayectoria – la progresión – cuyo objetivo es integrar en cada nueva tarea, los conocimientos y estrategias desarrolladas en las tareas anteriores. Así, en ambas perspectivas, la solución de problemas no se considera simplemente como la aplicación de conocimientos, sino como una oportunidad para generar nuevos conocimientos. Sin embargo, para que esto ocurra debemos tomar en cuenta cómo el problema es explorado en la clase y cómo se organizan las actividades del profesor y de los estudiantes (iii) y v)). En la tradición de la resolución de problemas en las clases de Japón, los autores afirman que:

> El profesor expone al alumno un problema que es un pequeño paso en la procedimentalización o en la extensión de un concepto, por lo que el proceso de búsqueda individual del alumno y la instancia plenaria de presentación y discusión de soluciones al problema conlleven una mayor comprensión del alumno acerca del concepto y de los procedimientos asociados. (pp. 100-101)

La dimensión social del aprendizaje también está presente en ambas perspectivas, ya que se reserva tiempo para la presentación y discusión de las ideas de cada tarea, teniendo en cuenta que estos son momentos para un adecuado desarrollo de los estudiantes en otros niveles y que promueven su comprensión. Así, en ambas perspectivas se requiere una clara delimitación temporal y organizacional de los momentos de la clase (iii)) y una caracterización de las tareas asignadas a los alumnos y al docente a los diferentes momentos que constituirán la clase (ii)), en particular durante la discusión de la tarea realizada por los alumnos.

Este momento crucial en el aula tiene que estar preparado antes de que suceda, sino también durante el mismo. Teniendo en cuenta los objetivos de la tarea y las ideas matemáticas que los alumnos desarrollarán en su realización, el maestro seleccionará las resoluciones que éstos presentarán y sus secuencias. Así que el profesor tiene que "estudiar con anticipación las posibles respuestas de los alumnos, de modo garantice el ritmo de progreso y evite el estancamiento" (p. 166). Como vimos en la sección anterior, estas opciones también están diseñadas para promover la comunicación entre los alumnos que presentan estrategias con diferentes grados de sofisticación, favoreciendo no sólo la progresión de los que se encuentran aún en niveles de menor desarrollo, sino también promover la comprensión de los demás. Una vez que toman una mayor conciencia de los diversos procesos de resolución posible, explicitando la reflexión sobre ellos, alcanzan una comprensión más profunda de los conocimientos matemáticos implicados.

En este sentido, una vez más, se pone de relieve la importancia del papel del docente en la medida que precisa llevar a los alumnos a relacionar las diversas resoluciones que surgieron en clase y destacar las representaciones más potentes y las ideas matemáticas subyacentes a las estrategias planteadas. En los ejemplos presentados verificamos justamente cómo el profesor puede relacionar una resolución menos sofisticada con una resolución de ideas más poderosas asociadas con el tema: la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma. Este es un aspecto que también Isoda y Olfos resaltan del papel del profesor en esta etapa de la discusión en el aula: "la tarea principal del profesor es escuchar al alumno, comprender su visión, vincularla al objetivo de la clase y conducir los siguientes momentos" (p. 165). Por lo tanto, este es un papel que implica escuchar y comprender el pensamiento de los estudiantes al establecer "puentes" con las etapas descritas en la trayectoria de aprendizaje en curso.

6.2. Oportunidades de desarrollo profesional

La concretización de la trayectoria de aprendizaje aquí presentada surgió en un contexto de colaboración entre un profesor del 1er ciclo y una investigadora. Uno podría imaginar un escenario similar en el contexto de un proyecto de desarrollo curricular propuesto o de investigación o un curso de formación de profesores en el que, si bien hay distintos roles, se desarrolla un trabajo de naturaleza colaborativa. También encontramos en este dominio algunos puntos de intersección con el Estudio de Clases, que suele incluir según Isoda, Arcavi y Mena (2007), un ciclo con los siguientes pasos: la preparación, la clase a investigar y sesiones de revisión. Estos pueden después repetirse en uno o más ciclos de implementación con otros profesores. Como señalan estos autores, todos estos procesos se realizan en colaboración con otros maestros, y eventualmente también profesores universitarios y supervisores de la Junta de educación correspondiente.

En el caso que presentamos, la profesora y la investigadora realizan un trabajo muy significativo y prolongado en el tiempo de adaptación, cambio y mejora constante de la trayectoria de aprendizaje. Se reunían semanalmente para reflexionar sobre la clase anterior y planear las clases siguientes. La investigadora asistía a las clases y seguía las resoluciones de los estudiantes, contribuyendo a la toma de todas las decisiones en el aula, incluyendo la organización de los momentos de discusión. La profesora es una profesional que siempre muestra disposición para aprender y reflexionar sobre los temas encaminados a mejorar su desempeño y la calidad de los aprendizajes de sus alumnos, y consideró esta experiencia como una gran oportunidad de desarrollo profesional.

Sin embargo, existe la opinión de que la carga de trabajo en la preparación y ejecución de una trayectoria de aprendizaje como la ilustrada es enorme, representando un proyecto ambicioso y que por ello se lleva a cabo con el apoyo de uno o más expertos. Si bien reconoce que este trabajo no puede ser desarrollado aisladamente por la profesora, esta idea puede ser adaptada y llevada a la práctica por los profesores en determinadas condiciones:

- con trayectorias de aprendizaje que sean más limitadas en el tiempo y envuelvan la preparación de un menor número de tareas;
- con la adaptación de tareas que ya existan y que hayan sido probadas por los propios maestros del grupo o otras personas y que permitan percibir las estrategias y dificultades reveladas por los estudiantes.

Al igual que en el Estudio de Clases, hay otras ventajas en el desarrollo de un proceso compartido con otros agentes distintos a los profesores. Adicionalmente, los conocimientos y las perspectivas complementarias que tales personas pueden aportar al proceso, pueden contribuir a un mayor compromiso de todos los participantes, existiendo una mayor formalización de los momentos de trabajo, así como para mejorar algunas de las tensiones que se podrían generar al analizar las prácticas (en sesiones de revisión), ayudando a mantener el foco en la trayectoria y el papel del profesor y no en la persona del profesor.

El conjunto de ideas en torno a la enseñanza de la multiplicación, que desarrollamos en este capítulo se puede adaptar de acuerdo a cada contexto y lineamientos curriculares específicos para cada país y el nivel educativo. Consideramos además que el uso de materiales como estos que hemos presentado es de gran interés para la formación docente, tanto inicial como continua. A los futuros profesores les permite interactuar con una variedad de estrategias y razonamientos de los alumnos, ayudándoles a comprender todo su potencial. A los profesores en ejercicio, puede llevarles a cuestionar y problematizar el aprendizaje de sus estudiantes en el dominio de la multiplicación y por lo tanto puede ser un punto de partida para reflexionar sobre su práctica

Referencias

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division*. Portsmouth, The Netterlands: Heinemann.

Isoda, M., & Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del Estudio de Clases.* Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Isoda, M., Arcavi, A., & Mena, A. (2007). *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 114-145.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*, 313-340.