

# Fisica Generale I

Davide Gargiulo  
Riccardo Elena  
Valentina Laura Lombardo

6 March 2023 - 16 June 2023

# Indice

0.1	Introduction . . . . .	5
<b>I</b>	<b>Fondamentali</b>	<b>6</b>
1	Assiomi fondamentali della Fisica	7
1.1	Definizione della Fisica . . . . .	7
1.2	Metodo scientifico e Osservabili . . . . .	7
1.3	Grandezze Fondamentali: Lunghezza, Massa, Tempo . . . . .	8
1.3.1	Unità di misura . . . . .	9
1.3.2	Conversione delle Unità . . . . .	9
1.4	Notazione . . . . .	9
1.4.1	Notazione Scientifica . . . . .	9
1.5	Cifre Significative . . . . .	10
1.6	Analisi Dimensionale . . . . .	10
1.7	Sistema di riferimento . . . . .	11
1.7.1	Fenomeni fisici . . . . .	12
<b>II</b>	<b>Vettori</b>	<b>13</b>
2	Vettori	14
2.1	Introduzione . . . . .	14
2.2	Rappresentazione grafica e proprietà . . . . .	15
2.3	Componenti ortogonali . . . . .	16
2.3.1	Scrittura tramite versori . . . . .	16
2.4	Definizione dei prodotti . . . . .	17
<b>III</b>	<b>Cinematica del Punto Materiale</b>	<b>19</b>
3	Leggi Orarie del Moto	20
3.1	Velocità vettoriale media . . . . .	20
3.1.1	Velocità istantanea . . . . .	21
3.2	Moto rettilineo uniforme . . . . .	21
3.3	Velocità relativa . . . . .	22
3.4	Accelerazione . . . . .	22
3.4.1	Accelerazione costante . . . . .	22
3.4.2	Accelerazione vettoriale e scalare . . . . .	23
3.5	Moto uniformemente accelerato . . . . .	24
3.6	Moto circolare uniforme . . . . .	24
3.6.1	Moto circolare uniforme con archi uguali in tempi uguali . . . . .	25
3.6.2	Velocità Angolare . . . . .	25

<b>4</b>	<b>Applicazione delle Leggi orarie</b>	<b>27</b>
4.1	Corpo in caduta libera . . . . .	27
4.2	Moto in due dimensioni . . . . .	27
4.3	Moto di un proiettile . . . . .	29
4.3.1	Gittata e altezza massima . . . . .	30
<b>IV</b>	<b>Dinamica</b>	<b>31</b>
<b>5</b>	<b>Forze e leggi di Newton</b>	<b>32</b>
5.1	Introduzione . . . . .	32
5.2	Sistema di riferimento inerziale . . . . .	32
5.3	Prima legge di Newton . . . . .	33
5.3.1	Inerzia, Massa e Peso . . . . .	33
5.4	Seconda legge di Newton . . . . .	33
5.4.1	Concetto di forza . . . . .	34
5.5	Forza gravitazionale . . . . .	35
5.6	Terza legge di Newton . . . . .	35
5.7	Oscillatore armonico in una dimensione . . . . .	35
5.8	Posizione di equilibrio . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Vincoli lisci e scabri</b>	<b>37</b>
6.1	Vincoli lisci: Forze di Reazione Vincolare . . . . .	37
6.2	Vincoli Scabri: Forze di attrito . . . . .	41
6.2.1	Misura sperimentale di $\mu_s$ e $\mu_d$ . . . . .	43
6.3	Forze di attrito dipendenti dalla velocità . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Campi di forza centrali, Momenti e Leggi di Keplero</b>	<b>45</b>
7.1	Quantità di moto . . . . .	45
7.2	Forze Centrali . . . . .	45
7.3	Momento di una Forza . . . . .	46
7.4	Momento angolare . . . . .	46
7.5	Orbite piane e Leggi di Keplero . . . . .	47
<b>V</b>	<b>Energia e Lavoro</b>	<b>49</b>
<b>8</b>	<b>Definizioni e Teoremi delle forze vive</b>	<b>50</b>
8.1	Teoremi . . . . .	50
8.1.1	Teorema delle forze vive o Teorema dell'energia cinetica . . . . .	50
8.1.2	Seconda versione del teorema . . . . .	50
8.1.3	Terza versione del teorema, forze posizionali . . . . .	51
<b>9</b>	<b>Applicazioni del teorema delle forze vive</b>	<b>53</b>
9.1	Esempio con un corpo in caduta libera . . . . .	53
9.2	Esempio con il piano inclinato . . . . .	54
9.3	Esempio con oscillatore armonico in una dimensione . . . . .	56
9.4	Esempio con un campo gravitazionale (forze centrali) . . . . .	57
<b>10</b>	<b>Energia potenziale</b>	<b>59</b>
10.1	Energia potenziale e campi di forza conservativi . . . . .	59
10.2	Conservazione dell'energia . . . . .	59
10.3	Esempio: Velocità di fuga dalla terra di un grave . . . . .	60
10.4	Teorema delle forze vive generalizzato . . . . .	61

<b>VI</b>	<b>Sistemi di Punti e Corpo Rigido</b>	<b>62</b>
<b>11</b>	<b>Dinamica di Sistemi di Punti</b>	<b>63</b>
11.1	Forza Totale . . . . .	63
11.2	Grandezze di Traslazione . . . . .	64
11.3	Grandezze di Rotazione . . . . .	66
11.3.1	Teorema del Momento Angolare . . . . .	67
11.4	Riconsiderazione Centro di Massa e Energia . . . . .	68
<b>12</b>	<b>Copro Rigido</b>	<b>70</b>
12.1	Insieme Continuo e Densità . . . . .	70
12.2	Moto del Corpo rigido . . . . .	72
12.2.1	Cinematica . . . . .	72
12.2.2	Rotazione . . . . .	73
12.2.3	Dinamica . . . . .	75
12.2.4	Energia . . . . .	76
<b>13</b>	<b>Moto di Puro Rotolamento</b>	<b>78</b>
13.1	Cinematica . . . . .	78
13.2	Dinamica . . . . .	80
13.3	Esempio applicativo su piano inclinato . . . . .	82
<b>VII</b>	<b>Elementi di Fluidodinamica</b>	<b>85</b>
<b>14</b>	<b>Introduzione e Teoremi</b>	<b>86</b>
14.1	Introduzione . . . . .	86
14.2	Legge di Stevino . . . . .	87
14.2.1	Principio di Pascal . . . . .	87
14.2.2	Principio di Archimede . . . . .	88
14.3	Moto di un fluido . . . . .	89
14.4	Legge di Leonardo . . . . .	89
14.5	Teorema di Bernouilli . . . . .	90
<b>15</b>	<b>Applicazioni del teorema di Bernouilli</b>	<b>92</b>
15.1	Tubo di Venturi . . . . .	92
15.2	Tubo di Pitot . . . . .	93
15.3	Teorema di Torricelli . . . . .	93
<b>VIII</b>	<b>Elementi di Termodinamica</b>	<b>95</b>
<b>16</b>	<b>Introduzione</b>	<b>96</b>
16.1	Introduzione . . . . .	96
16.1.1	Variabili Termodinamiche . . . . .	96
16.2	Energia media . . . . .	97
<b>17</b>	<b>Trasformazioni Termodinamiche</b>	<b>100</b>
17.1	Trasformazioni Isocore, Isobare e Isoterme . . . . .	100
17.2	Calore . . . . .	101
17.2.1	Cambiamenti di Fase . . . . .	102

<b>18 Lavoro in trasformazioni termodinamiche</b>	<b>104</b>
18.1 Introduzione ed esempi . . . . .	104
18.2 Esempio con gas perfetto . . . . .	106
18.3 Energia interna . . . . .	107
18.4 Trasformazioni adiabatiche . . . . .	110
<b>19 Macchine Termiche e Entropia</b>	<b>112</b>
19.1 Secondo principio della termodinamica . . . . .	112
19.2 Ciclo di Carnot . . . . .	113
19.3 Teorema di Carnot . . . . .	114
19.3.1 Esempio con il ciclo di Otto (motore a scoppio) . . . . .	115
19.4 Diseguaglianza di Clausius . . . . .	115
19.5 Entropia . . . . .	116
 <b>IX Conclusione e Ringraziamenti</b>	 <b>120</b>

## 0.1 Introduction

Questo documento PDF contiene (speriamo in maniera corretta ed esaustiva) tutti gli argomenti trattati al corso di Fisica Generale I tenuto dal professor Goffredo Chirco durante l'anno accademico 2022-2023 al gruppo 2 di Informatica.

**Part I**

**Fondamentali**

# Capitolo 1

## Assiomi fondamentali della Fisica

### 1.1 Definizione della Fisica

La fisica è la scienza che studia i fenomeni che avvengono nell'universo (naturali oppure artificiali) e che ha come scopo la loro comprensione in termini di teoria, cioè un numero limitato di principi fondamentali.

### 1.2 Metodo scientifico e Osservabili

Il metodo scientifico si compone in quattro fasi:

1. Osservazione  $\Rightarrow$  Farsi una domanda;
2. Formulare un'ipotesi;
3. Test dell'ipotesi usando una raccolta dei dati (Misure);
4. Analisi dei Dati  $\Rightarrow$  Dare una conclusione.

Come per esempio può essere uno studio concreto delle piccole oscillazioni di un pendolo:

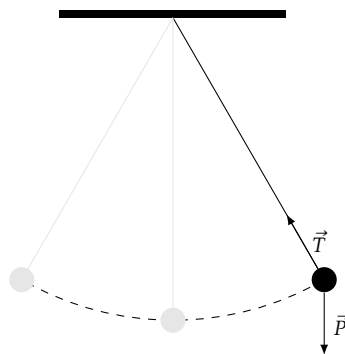


Grafico 1.1: Dinamica del Pendolo.

1. **Osservazione:** si vanno a definire le variabili;
2. **Misuro le osservabili e le correlazioni tra queste:** sequenze di coppie (configurazioni);
3. **Definisco un'ipotesi:** Relazione matematica che caratterizza la sequenza di relazioni;
4. **Analisi dei dati:** creo il grafico;



5. **Conclusion:** ad ogni esperimento ottengo un moto diverso, ma lo stesso comportamento qualitativo:

$$f(\alpha, t, A, \phi) = \alpha - A \sin(\omega t + \phi) = 0 \quad (1.1)$$

Infine mi ritrovo con un'equazione di evoluzione e quindi riesco a predire il moto.

Quindi possiamo dire che una teoria:

1. Nasce da esperimenti ed osservazioni e nell'avere carattere predittivo;
2. Contiamo rapporti tra teoria ed esperienze;
3. Se non viene mai dimostrata all più verificata provoca errori sperimentali;
4. Messa in crisi da misure nuove e più precise;
5. Nuova teoria di validità più grande che contiene la precedente come approssimazione in particolari conclusioni.

Il metodo scientifico è caratterizzato da alcune caratteristiche fondamentali:

- Da una chiave che ci aiuta a risolvere il problema della schematizzazione;
- Dalla complessità che si basa sulla sintesi degli aspetti che vogliamo descrivere.

Sia nella fisica sperimentale che nell'analisi teorica dei fenomeni, è importante minimizzare o trascurare quegli effetti che consideriamo secondari rispetto al problema che ci interessa. Ad ogni livello di complessità di un fenomeno è associata una teoria che funziona bene entro il livello definito.

## 1.3 Grandezze Fondamentali: Lunghezza, Massa, Tempo

In meccanica, ovvero lo studio del movimento dei corpi, le grandezze fondamentali osservabili sono:

1. **Lunghezza** [L];
2. **Massa** [M];
3. **Tempo** [T].

Tutte le altre grandezze utilizzate nella meccanica sono definite grandezze derivate, in quanto possono essere espresse come combinazione matematica delle grandezze fondamentali. Come per esempio:

1. **Area** =  $L^2$ ;
2. **Volume** =  $L^3$ ;
3. **Velocità** =  $L/T$ ;
4. **Densità** =  $M/L^3$ .

### 1.3.1 Unità di misura

Come misuriamo queste grandezze?

Utilizziamo le **unità di misura** di riferimento per ciascuna grandezza specifica.

Quindi ci troviamo che:

L ← Metro (m): decimilionesima parte della distanza dall'Equatore al Polo Nord terrestre;

M ← Chilogrammo (kg): massa di un cilindro di lega Platino-Iridio presso l'Ufficio internazionale di pesi e misure di Sèvres, Francia;

T ← Secondo (s):  $\left(\frac{1}{60}\right)\left(\frac{1}{60}\right)\left(\frac{1}{24}\right) = \frac{1}{86400}$  del giorno solare. Più recentemente come 9 192 631 779 volte il periodo di oscillazione della radiazione dell'atomo di Cesio.

Ci sono molti sistemi di misura, ma quello che utilizziamo comunemente è il **Sistema Internazionale** (SI) che si basa sulle tre unità fondamentali di lunghezza (metro), massa (kilogrammo) e tempo (secondo) <sup>i</sup>.

### 1.3.2 Conversione delle Unità

La fisica non si limita a descrivere fenomeni, ma si basa sulla **quantificazione** attraverso la misurazione delle grandezze fisiche.

La misurazione di una grandezza fisica rappresenta la sintesi di numerosi esperimenti e permette di ottenere informazioni quantitative precise sul fenomeno studiato.

## 1.4 Notazione

Ogni grandezza fisica  $\gamma$  è espressa in termini di un numero in riferimento ad una unità di misura scelta:

$$\gamma = \alpha \mu \quad (1.2)$$

Un sistema di notazione fondamentale che risulta utile e spesso necessario è la **Notazione Scientifica**.

### 1.4.1 Notazione Scientifica

La notazione scientifica risulta utile per caratterizzare le *scale* <sup>ii</sup> dei fenomeni. Questa notazione sfrutta un'importante proprietà dei reali, ovvero:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} (\exists a \in ]0, 10[ , b \in \mathbb{Z} : \alpha = a \times 10^b) \quad (1.3)$$

Inoltre, come visto nella formula 1.2 ogni grandezza fisica (osservabile)  $\gamma$  è esprimibile in termini di un numero in riferimento alla unità di misura  $\mu$  scelta, ottenendo dunque:

$$\gamma = (a \times 10^b) \mu \quad (1.4)$$

Come dicevamo, questa notazione è particolarmente utile per evidenziare la *scala* di un fenomeno, anche detto **ordine di grandezza**. In una generica grandezza  $\alpha = a \times 10^b$  espressa in **notazione scientifica**, quest'ultimo è dato dalla potenza di 10, il cui esponente  $b$  va incrementato di 1 nel caso di  $a > \sqrt{10} \approx 3.162$  <sup>iii</sup>.

<sup>i</sup>Il SI è detto coerente, poichè ogni grandezza derivata è rappresentabile come prodotto o rapporto di grandezze fondamentali. Inoltre nel SI multipli e sottomultipli fanno riferimento alle potenze di 10 o di 60 (per le grandezze in relazioni agli angoli) rendendo elementare il passaggio a unità più consone alla grandezza misurata e più naturale l'utilizzo di notazione scientifica. Questo dovrebbe bastare a sottolineare l'inutilità e l'inadeguatezza del Sistema Imperiale, da ora in poi giustamente ignorato nel file.

<sup>ii</sup>La scala di un fenomeno determina anche quali modelli lo descrivono.

<sup>iii</sup>Ex.:  $6 \times 10^{24}$  è d'ordine di grandezza  $\sim 10^{25}$ .

## 1.5 Cifre Significative

Una **cifra significativa** in una misura è una cifra nota in modo affidabile, ovvero entro i limiti sperimentali.

Le cifre significative sono quelle certe, misurabili con un buon livello di attendibilità e livello sperimentale (dipendenza dello strumento).

Esistono due convenzioni principali per quanto riguarda le cifre significative:

1. Gli zeri che fissano la posizione del punto decimale non sono cifre significative <sup>iv</sup>
2. In caso di zeri dopo altre cifre, l'indicazione del numero di cifre significative è dato dalla scrittura in notazione scientifica <sup>v</sup>

Cosa può succedere alle cifre significative quando combiniamo le misure?

Ci troviamo davanti a vari casi:

1. **Somma:** il numero di cifre decimali del risultato è fissato dal termine con il numero più piccolo di cifre decimali:

$$\begin{aligned} 12 + 21.4 &= 33 \\ 12.3 + 1.52 &= 13.8 \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. **Moltiplicazione:** Il numero di cifre significative del risultato deve eguagliare il più piccolo numero di cifre significative dei fattori:

$$12.2 \times 4.4 = 54^{vi} \quad (1.6)$$

3. **Sottrazione:** Il numero di cifre significative del risultato della somma può differire da quello degli addendi:

$$1.002 - 0.998 = 0.004 \text{ (4CS(cifre significative), 3CS} \Rightarrow \text{1CS)} \quad (1.7)$$

4. **Regola di Arrotondamento:** Fissato il numero di cifre significative, l'ultima cifra utile è aumentata di uno se l'ultima cifra trascurata è maggiore di 5:

$$56.6 \Rightarrow \simeq 57 \quad (1.8)$$

## 1.6 Analisi Dimensionale

Per poter combinare o eguagliare grandezze fisiche in modo coerente, è fondamentale che abbiano la stessa **dimensione fisica**.

Le **dimensioni fisiche** di una grandezza  $\gamma$  (indicata con  $[\gamma]$ ) sono l'espressione della grandezza in funzione di grandezze fondamentali:

$$[x] = L^\alpha M^\beta T^\gamma \quad (1.9)$$

Ad esempio:

1. **Posizione x:**  $[x] = L$
2. **Velocità v:**  $[v] = L/T$
3. **Accelerazione a:**  $[a] = L/T^2$

<sup>iv</sup>Ex.: 0.02 ha 1 cifra significativa, mentre 0.23 ne ha 2.

<sup>v</sup>Ex.: 2000 ha 1 cifra significativa se riportato come  $2 \times 10^3$ , mentre ne ha 2 se riportato come  $2.0 \times 10^3$ .

<sup>vi</sup>e non 53.68, quindi due cifre significative

Solo per grandezze aventi la stessa dimensione valgono somma (sottrazione), moltiplicazione (divisione):

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}at^2 \implies L = [x] = [a][t]^2 = L/T^2 \times T^2 = L \\v_f &= v_i + at \implies L/T = [v_f] = [v_i]; [at] = L/T^2 \times T = L/T\end{aligned}\tag{1.10}$$

Questo metodo è fondamentale per controllare la consistenza delle nostre equazioni (centrale nella risoluzione dei problemi).

## 1.7 Sistema di riferimento

Per poter comparare diverse misure, è necessario utilizzare un **sistema di riferimento** condiviso, ovvero un insieme di convenzioni che definiscono come effettuare le misurazioni. In questo caso, il sistema di riferimento è definito da:

1. Punto di origine O;
2. Assi con direzione e scala di misura.

L'utilizzo di un sistema di coordinate ci consente di descrivere le relazioni tra differenti punti, ossia di descrivere le diverse configurazioni fisiche.

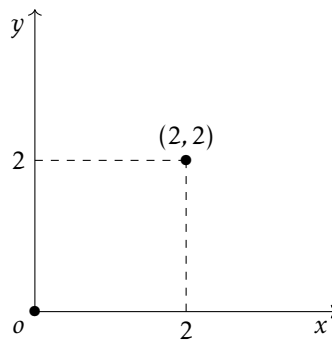


Grafico 1.2: Sistema di Coordinate Cartesiano

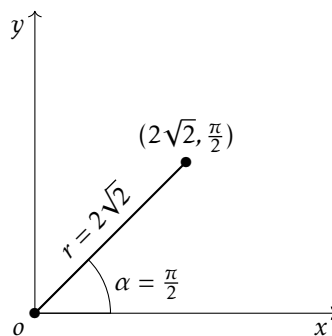


Grafico 1.3: Sistema di Coordinate Polari

**Importante:** Notare che la scelta del tipo di sistema di riferimento (ad esempio, cartesiano o polare) dipende dal tipo di descrizione o di misura che si intende effettuare. Importante sottolineare che la scelta del sistema di coordinate non influenza il fenomeno fisico in sé, ed è dunque arbitraria.

### **1.7.1 Fenomeni fisici**

Possono svolgersi in modo differente in diversi sistemi di riferimento come al sistema fisico che è definito da un'insieme di corpi e distanze invariabili ai quali si possono riferire distanze orientate ecc.

Al nostro sistema di riferimento è possibile associare un sistema di coordinate il quale non è altro che una ausilio matematico per le descrizione dei fenomeni. Descrivere in modo vettoriale di grandezze fisiche consente la formulazione delle leggi della fisica in modo indipendente dal sistema delle coordinate.

## Part II

# Vettori

## Capitolo 2

# Vettori

### 2.1 Introduzione

Fino ad ora ci siamo occupati di grandezze fisiche espresse in termini di date unità. Grandezze completamente caratterizzate da un numero positivo oppure negativo si dicono **scalari**. In meccanica, siamo interessati al variare di una certa quantità (ad esempio nello spazio oppure nel tempo) o a relazioni tra quantità diverse. In questo senso abbiamo generalmente a che fare con coppie di punti (di misure).

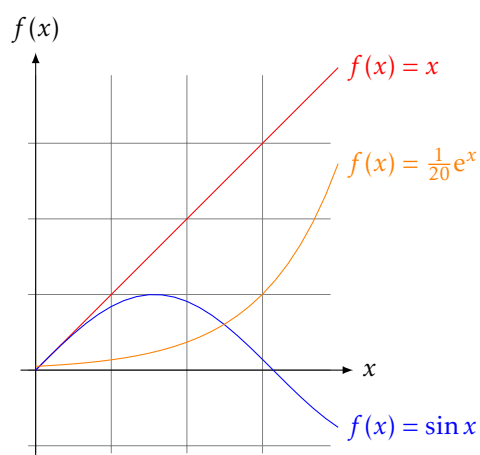


Grafico 2.1: Rappresentazione Funzioni nel Piano.

Tali relazioni sono rappresentate in un dato sistema di riferimento da **vettori**. I vettori sono segmenti orientati che costituiscono la descrizione matematica delle grandezza vettoriali definite da intensità, direzione e verso.

In un vettore esiste lo spostamento del piano che è la variazione della posizione di un corpo il cui spostamento è indipendente dal percorso (sintesi/approssimazione).

Le grandezze vettoriali sono caratterizzate da:

- Una **intensità**: (Numero reale  $\gamma$ ) con annesse dimensioni e unità di misura;
- Una **direzione**: la retta su cui giace il vettore;
- Un **verso**: l'orientamento del vettore, espresso dal suo "segno", concorde o discorde all'orientamento degli assi;

Due vettori sono **uguali** se hanno la stessa intensità, stessa direzione, e puntano nello stesso verso<sup>i</sup>.

## 2.2 Rappresentazione grafica e proprietà

Alcune proprietà dei vettori sono evincibili intuitivamente dalla loro rappresentazione grafica:

- **Somma**:  $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ ;
  - **Proprietà commutativa della somma**:  $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

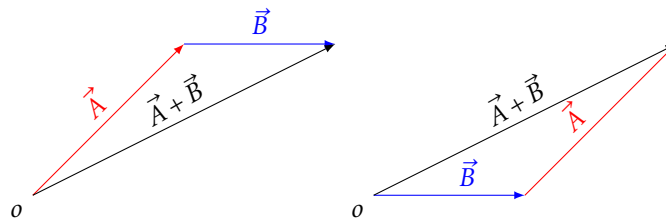


Grafico 2.2: Proprietà Commutativa della Somma

- **Proprietà associativa della somma**:  $\vec{R} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

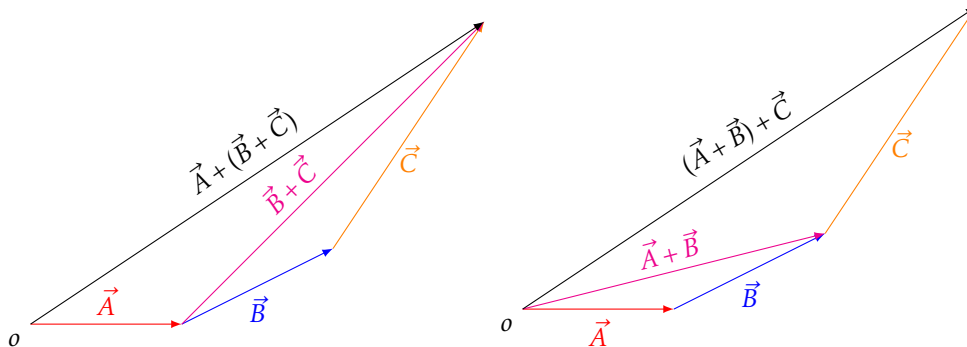


Grafico 2.3: Proprietà Associativa della Somma

- **Somma e differenza**: (come cammini discreti)
  - \* Indipendenza del cammino;
  - \* Utile scrivere:  $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-1)\vec{B}$

<sup>i</sup>Lo spostamento:  $|\Delta_{AB}|$  è  $\neq$  distanza di  $l_{AB}$ . La distanza percorsa è una grandezza scalare.



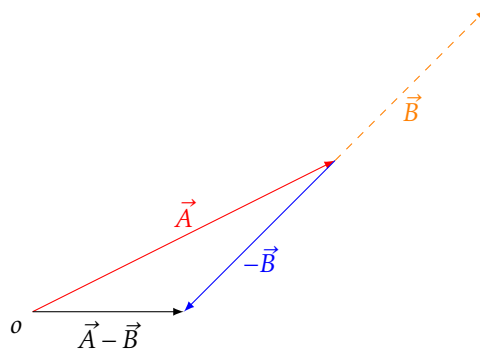


Grafico 2.4: Differenza Come Somma dell'Opposto

## 2.3 Componenti ortogonali

Prima di iniziare con i componenti ortogonali è buono dare una ripassata alla trigonometria di base con i due teoremi base.

- **Primo Teorema:**

In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente oppure per il seno dell'angolo opposto.

$$a = c \cos \theta; b = c \sin \theta \quad (2.1)$$

- **Secondo Teorema:**

In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale a quella dell'altro cateto moltiplicato per la tangente dell'angolo opposto al primo, o per la cotangente dell'angolo adiacente.

$$a = b \cot \theta; b = a \tan \theta \quad (2.2)$$

Due vettori che formano tra loro un angolo  $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ <sup>ii</sup>, con  $k \in \mathbb{Z}$  si dicono ortogonali. Ogni vettore può essere completamente descritto mediante le sue **componenti ortogonali** ovvero **proiezioni** lungo gli assi ortogonali di un sistema di coordinate. Essi sono composti da:

- **Proiezioni:**

$$A_x = A \cos(\theta) \quad A_y = A \sin(\theta) = A \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (2.3)$$

- **Decomposizione:**

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \quad (2.4)$$

- **Modulo:**

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (2.5)$$

### 2.3.1 Scrittura tramite versori

Un **versore** è un vettore (per esempio  $\hat{i}$ ) di lunghezza unitaria ( $|\hat{i}| = 1$ ) che specifica una data direzione orientata. Viene chiamato versore perché indica un senso di percorrenza e tramite esso è possibile ottenere tutti gli altri vettori nella direzione moltiplicando il versore per uno scalare  $\lambda$ .

È possibile identificare dei versori paralleli agli assi orientati di un sistema di riferimento. Questi particolari versori (solitamente indicati con  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ ) permettono di scomporre un vettore nelle sue componenti in maniera più leggibile

<sup>ii</sup>In termini di gradi, unità di misura più diffusa ma non appartenente al SI, si tratta dei multipli di 90°.

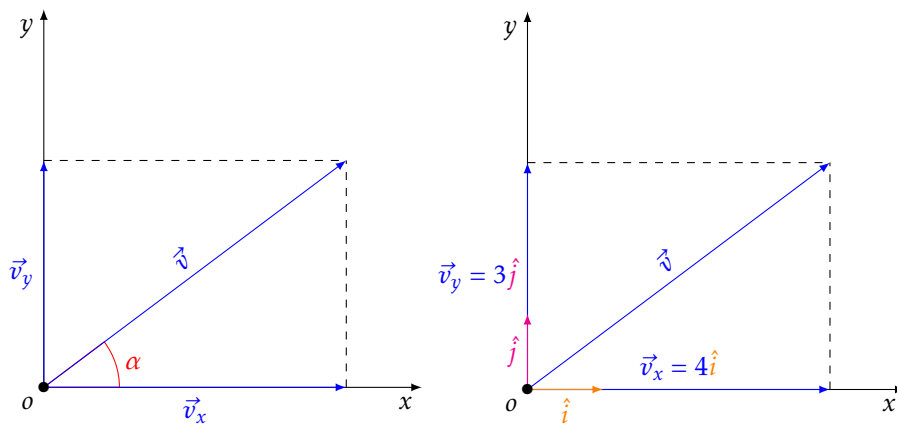


Grafico 2.5: Componenti di un Vettore con Versori Canonici

Come si può evincere dal grafico 2.5, la scomposizione in componenti di un qualsiasi vettore (è dunque più in generale il vettore stesso) può essere espressa come combinazione lineare dei versori canonici.

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = 4\hat{i} + 3\hat{j} \quad (2.6)$$

## 2.4 Definizione dei prodotti

In fisica abbiamo vari tipi di prodotti:

- **Moltiplicazione di un vettore per uno scalare <sup>iii</sup>:**

$$\text{dato } c \in \mathbb{R}, \left| c \vec{A} \right| = c \left| \vec{A} \right| = cA \quad (2.7)$$

- **Prodotto Scalare di vettori:**

L'operazione tra due vettori che fornisce come risultato uno scalare pari al prodotto dei moduli dei vettori per il coseno dell'angolo compreso:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left| \vec{A} \right| \left| \vec{B} \right| \cos \theta_{AB} = AB \cos \theta_{AB} \quad (2.8)$$

Esso ha tre proprietà:

- **Metodo delle componenti:**

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y \quad (2.9)$$

- **Proprietà commutativa:**

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (2.10)$$

- **Proprietà distributiva:**

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad (2.11)$$

- **Prodotto vettoriale di vettori:**

L'operazione tra due vettori che fornisce come risultato un vettore:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \left| \vec{A} \right| \left| \vec{B} \right| \sin(\theta_{AB}) \hat{n} \quad (2.12)$$

Esso deve avere:

---

<sup>iii</sup>Il verso di  $c \vec{A}$  rimane uguale a quello di  $\vec{A}$  per  $c > 0$ , è opposto per  $c < 0$ .

- Modulo pari al prodotto dei moduli dei vettori per il seno dell'angolo compreso:

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = A B \sin(\theta_{AB}) \quad (|\hat{n}| = 1) \quad (2.13)$$

- Direzione ortogonale al piano su cui giacciono i due vettori;
- Verso  $\hat{n}$ : **Regola della Mano destra**, per  $\theta_{AB} \in ]0; \pi[$  il versore  $\hat{n}$  è *uscente* (con simbolo  $\odot$ ) dal piano dei vettori mentre per  $\theta_{AB} \in ]\pi; 2\pi[$  è *entrante*<sup>iv</sup> (con simbolo  $\otimes$ ).

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}; \quad -\vec{C} = \vec{B} \times \vec{A} \quad (2.14)$$

- **Metodo delle componenti:**

$$\vec{A} \wedge \vec{B} \equiv A_x B_y - A_y B_x \text{ (due dimensioni)} \quad (2.15)$$

- **Proprietà anti-commutativa:**

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A} \quad (2.16)$$

- **Proprietà distributiva:**

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C} \quad (2.17)$$

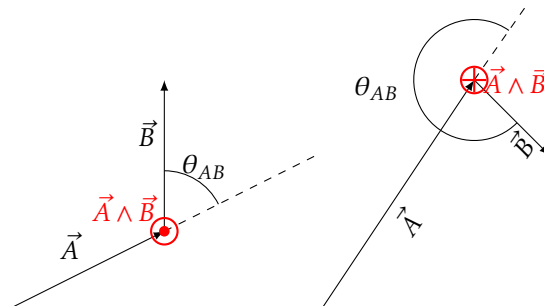


Grafico 2.6: Rappresentazione Grafica Prodotto Vettoriale

<sup>iv</sup>Si noti che questa regola vale solo per l'angolo "antiorario", per angoli in senso "orario" vale l'opposto.

## **Part III**

# **Cinematica del Punto Materiale**

## Capitolo 3

# Leggi Orarie del Moto

### 3.1 Velocità vettoriale media

Consideriamo una particella in moto (nel piano) che parte dalla posizione  $q_i = (x_i, y_i)$  al tempo  $t_i$  ed arriva in  $q_f = (x_f, y_f)$  al tempo  $t$

- Il suo **spostamento** sarà:

$$\Delta \vec{q} = \vec{q}_f - \vec{q}_i = \vec{q}_f + (-\vec{q}_i) \quad (3.1)$$

- Il suo **intervallo di tempo** sarà:

$$\Delta t = t_f - t_i \quad (3.2)$$

- Definiamo il **vettore velocità media** come il rapporto tra vettore spostamento e intervallo di tempo (indipendente dal percorso):

$$\vec{v}_{med} \equiv \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = \frac{\vec{q}_f - \vec{q}_i}{t_f - t_i} \quad (3.3)$$

- Conoscendo la traiettoria dello spostamento è possibile introdurre una nuova coordinata  $s(t)$  sulla curva, detta **coordinata curvilinea**. Questa coordinata misura il valore della distanza scalare  $d = s(t)$  percorsa dall'origine. Definiamo dunque la **velocità scalare** come:

$$v_s \equiv \frac{\Delta(s)}{\Delta t} \quad (3.4)$$

La velocità media in una dimensione ( $x$ ) è espressa come la **pendenza** del tratto di retta che congiunge i punti iniziale e finale di un tratto di curva nel sistema posizione-tempo.

In un grafico velocità-tempo, dividiamo l'intervallo totale del tempo in  $n$  sotto intervalli  $\Delta t_n$

- In ciascun intervallo abbiamo una velocità media

$$\vec{v}_{med}^n = \frac{\Delta \vec{x}_n}{\Delta t_n} \Rightarrow \Delta \vec{x}_n = \vec{v}_n \Delta t_n \quad (3.5)$$

- Lo spostamento totale <sup>i</sup> della particella sarà allora approssimato da:

$$\Delta \vec{x} \approx \sum_n \Delta \vec{x}_n = \sum_n \vec{v}_n \Delta t_n \quad (3.6)$$

- L'approssimazione migliora al diminuire dell'intervallo di tempo:

$$\Delta \vec{x} = \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \sum_n \Delta \vec{x}_n = \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \sum_n \vec{v}_n \Delta t_n \quad (3.7)$$

---

<sup>i</sup>  $\Delta x$  corrisponde all'area della superficie sottesa dal grafico.

### 3.1.1 Velocità istantanea

Se riprendiamo la formula 3.5, notiamo che per ciascun intervallo n-simo vale:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}_n}{\Delta t_n} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (3.8)$$

Il valore limite del rapporto  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  quando  $\Delta t$  tende a zero definisce la **velocità istantanea** <sup>ii</sup>. Riprendendo invece la formula 3.4, è possibile definirne la sua versione istantanea:

$$v_s \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \equiv \frac{ds}{dt} \quad (3.9)$$

Inoltre, essendo che sulla traiettoria del moto si ha che  $\vec{x}(t) = \vec{x}(s(t))$ , è possibile evincere un'importante relazione tra velocità vettoriale istantanea e velocità scalare istantanea:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{med}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} \quad (3.10)$$

Posto ora  $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$  si ha <sup>iii</sup>:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(s + \Delta s) - \vec{x}(s)}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(s + \Delta s) - \vec{x}(s)}{\Delta s} \cdot \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \quad (3.11)$$

Che come visto nell'equazioni 3.8 e 3.9, si ha:

$$\vec{v}(t) = v_s(t) \hat{t} \quad (3.12)$$

Dove con  $\hat{t} \equiv \frac{\vec{x}(s + \Delta s) - \vec{x}(s)}{\Delta s}$  si indica il vettore tangente alla traiettoria nel punto di ascissa curvilinea  $s$ . Essendo che  $\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta s} \rightarrow 1$  per  $\Delta s \rightarrow 0$ , possiamo definire  $\hat{t}$  il **versore** tangente alla traiettoria.

## 3.2 Moto rettilineo uniforme

Consideriamo una particella in moto rettilineo (unidirezionale, per esempio: lungo l'asse  $x$ ) con **velocità costante**:

- **Velocità costante:**

$$v_x = v_{x,med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.13)$$

Velocità media ed istantanea coincidono per l'intervallo di tempo del moto.

- Dato  $\Delta x = x_f - x_i$  abbiamo  $v_x = \frac{(x_f - x_i)}{\Delta t}$ , da cui

$$x(t) = x_i + v_x t \quad (t_i = 0) \quad (3.14)$$

<sup>ii</sup>  $v$  corrisponde alla pendenza della retta tangente alla curva nel grafico posizione-tempo nel punto di ascissa  $t$ , ovvero la sua derivata espressa come  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ .

<sup>iii</sup> Per chi avesse seguito il corso di Analisi I, si sta riconsiderando la funzione  $\vec{x}(t)$  come funzione composta  $\vec{x}(s(t))$  e applicando la regola di derivazione per funzioni composte.

### 3.3 Velocità relativa

Consideriamo due osservatrici A e B. A ciascuna associamo un sistema di riferimento, rispettivamente  $S_A$  e  $S_B$ .

Possiamo dire che

- Il sistema di riferimento  $S_B$  si muove (con B) con velocità costante rispetto ad A in  $S_A$ , che andiamo ad indicare con  $\vec{v}_{BA}$ ;
- **Notazione:**  $\vec{v}_{BA}$  indica una misura di  $\vec{v}$  associata a B e fatta da A;
- Ad un generico istante  $t$ , le origini dei due sistemi di riferimento sono separate da uno spostamento:  $\vec{r}_{BA} = \Delta \vec{x}_{BA} = \vec{v}_{BA} t$ .

Definiamo quindi la velocità (istantanea) del punto P rispetto ad A:

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{PB} = \vec{v}_{BA} t + \vec{r}_{PB} \quad (3.15)$$

Per definizione, ed essendo  $v_{BA}$  costante:

$$\vec{v}_{PA} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{PA} = \frac{d}{dt} (\vec{v}_{BA} t + \vec{r}_{PB}) = \vec{v}_{BA} + \frac{d}{dt} \vec{r}_{PB} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB} \quad (3.16)$$

Quindi la velocità relativa del punto P rispetto a B è:

$$\vec{v}_{PB} = \vec{v}_{PA} - \vec{v}_{BA} \quad (3.17)$$

Definiamo quindi la velocità relativa come la velocità di un corpo misurata da un osservatore in moto.

### 3.4 Accelerazione

Introduciamo il concetto di accelerazione in termini di variazione della velocità nel tempo. In analogia con la velocità abbiamo:

- Accelerazione **media** (vettore):

$$a_{med} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad (3.18)$$

.

- Accelerazione **istantanea**:

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx(t)}{dt} \right) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad (3.19)$$

Ovvero la pendenza del grafico velocità-tempo.

#### 3.4.1 Accelerazione costante

Consideriamo una particella in moto unidimensionale con **accelerazione costante**, in un intervallo di tempo  $(t_f, t_i) = (t, 0)$ . Quindi:

$$a_x = \frac{(v_f - v_i)}{t_f - t_i} \Rightarrow v_f = v_i + a_x t \quad (3.20)$$

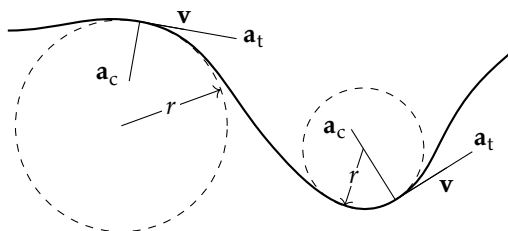
### 3.4.2 Accelerazione vettoriale e scalare

Come la velocità misura la rapidità di variazione nel tempo del vettore posizione, l'accelerazione misura la rapidità di variazione nel tempo del vettore velocità.

La variazione di un vettore si divide in:

- Variazione di modulo;
- Variazione di direzione (es. Moto uniforme su traiettorie non rettilinee).

La sua rappresentazione grafica è:



Definiamo:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} \quad (3.21)$$

Dall'equazione 3.12 e dalla regola di derivazione del prodotto <sup>iv</sup>, si ha <sup>v</sup>:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(v_s(t)\hat{\tau}(t))}{dt} = \frac{dv_s(t)}{dt}\hat{\tau}(t) + v_s(t)\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt} = a_s(t)\hat{\tau} + v_s(t)\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt} \quad (3.22)$$

Guardiamo  $v_s(t)\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt}$  in cui  $\hat{\tau}$  è una funzione composta di  $t$ , tramite  $s(t)$ . Quindi applicando la regola di derivazione delle funzioni composte <sup>vi</sup>:

$$\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt} = \frac{d\hat{\tau}(s(t))}{dt} = \frac{d\hat{\tau}(s(t))}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\hat{\tau}(s)}{ds} v_s(t) \quad (3.23)$$

$\frac{d\hat{\tau}(s)}{ds}$  è una grandezza geometrica (non cinematica) legata alla curva  $\gamma$ . Dalle proprietà del prodotto scalare si ha che  $\hat{\tau} \times \hat{\tau} = 1$ . Derivando questo prodotto si ha dunque:

$$0 = \frac{d1}{ds} = \frac{d(\hat{\tau} \times \hat{\tau})}{ds} = \frac{d\hat{\tau}}{ds} \times \hat{\tau} + \hat{\tau} \times \frac{d\hat{\tau}}{ds} = 2 \frac{d\hat{\tau}}{ds} \times \hat{\tau} \quad (3.24)$$

Dalla definizione di prodotto scalare, e supponendo i vettori  $\hat{\tau}$  e  $\frac{d\hat{\tau}}{ds}$  non nulli, abbiamo dunque che:

$$0 = \frac{d\hat{\tau}}{ds} \times \hat{\tau} = \frac{d\hat{\tau}}{ds} \cdot \hat{\tau} \cdot \cos(\theta) \implies \cos(\theta) = 0 \implies \frac{d\hat{\tau}}{ds} \perp \hat{\tau} \quad (3.25)$$

Dunque i vettori  $\hat{\tau}$  e  $\frac{d\hat{\tau}}{ds}$  sono sempre per definizione **ortogonali**. In oltre il vettore  $\frac{d\hat{\tau}}{ds}$  è sempre diretto nel verso della **concavità** della traiettoria (indicata spesso con  $\hat{\eta}$ ) e ha come modulo  $\frac{1}{\rho}$ , dove  $\rho$  è il raggio di curvatura, ovvero quello della circonferenza che meglio approssima la curva della traiettoria, detto cerchio **osculatore**. Combinando dunque le equazioni 3.21, 3.22 e 3.23 otteniamo:

$$\vec{a}(t) = a_s(t) \cdot \hat{\tau} + \frac{v_s^2(t)}{\rho} \cdot \hat{\eta} \quad (3.26)$$

<sup>iv</sup>Derivata del prodotto:  $\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}$ .

<sup>v</sup> $a_s$  è l'accelerazione scalare dipende dal segno della derivata rispetto al verso fissato da  $\hat{\tau}$  lungo la traiettoria.

<sup>vi</sup>Derivata della funzione composta:  $\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$



Abbiamo quindi che l'accelerazione vettoriale  $\vec{a}(t)$  è composta da una componente tangente alla traiettoria  $a_s(t) \cdot \hat{\tau}$  (detta *accelerazione tangenziale*) e da una ortogonale ad essa  $\frac{v_s^2(t)}{\rho} \cdot \hat{\eta}$  (detta *accelerazione centripeta*). Questa generalizzazione sarà molto utile in seguito nello spiegare il motivo dell'utilizzo delle coordinate polari <sup>vii</sup> per moti curvilinei accelerati.

### 3.5 Moto uniformemente accelerato

Con tutte le nozioni precedentemente acquisite, calcoliamo quindi la legge oraria del moto  $x(t)$  a partire da  $\Delta x$  <sup>viii</sup>:

$$x(t) = x_i + \frac{1}{2}(v_i + a_x t + v_i)t = x_i + v_i t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (3.27)$$

Questa viene definita legge oraria del moto uniformemente accelerato. Essendo la velocità non costante, è degna di nota anche la legge oraria derivata dalla 3.27, relativa dunque alla variazione della velocità nel tempo, ovvero:

$$v(t) = v_i + at \quad (3.28)$$

Dal grafico velocità-tempo possiamo ricavare  $\Delta t = \frac{(v_f - v_i)}{a_x}$ , da cui:

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v_f + v_i) \frac{(v_f - v_i)}{a_x} \Rightarrow x_f = x_i + \frac{(v_f^2 - v_i^2)}{2a_x} \quad (3.29)$$

E otteniamo quindi:  $v_f^2 = v_i^2 + 2a_x(x_f - x_i)$ . Vediamo che per  $a_x = 0 \Rightarrow v_f = v_i$  e ritroviamo  $x_f = x_i + v_x t$

### 3.6 Moto circolare uniforme

Il moto circolare uniforme ha varie proprietà:

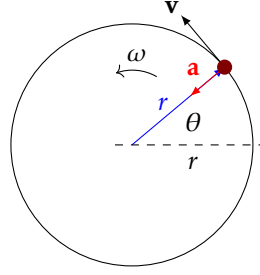
- Un oggetto che si muove lungo un percorso circolare ha una velocità costante;
- Il moto ha un'accelerazione legata dalla variazione del vettore velocità (variazione della direzione della velocità);
- Il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria e perpendicolare al raggio del percorso circolare;
- Il vettore accelerazione è sempre perpendicolare alla traiettoria e punta verso il centro della circonferenza, ovvero la sua componente centripeta vista nella discussione dell'equazione 3.26:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (3.30)$$

<sup>vii</sup>Vedi grafico 1.3 e spiegazione annessa.

<sup>viii</sup>Si noti come essendo velocità e accelerazione definite come derivate successive dello spostamento, la *funzione*  $x(t)$  è composta da integrali successivi dello spazio, che derivati riportano a funzoini di velocità e accelerazione

Questo è un esempio di come esso viene rappresentato:



Torna particolarmente utile l'utilizzo delle coordinate polari visto nel grafico 1.3 qualche capitolo fa.

### 3.6.1 Moto circolare uniforme con archi uguali in tempi uguali

Formula generale:

$$\vec{r}(t) = R(\cos(\theta(t)) \cdot \hat{i} + \sin(\theta(t)) \cdot \hat{j}) \quad (3.31)$$

Vengono definite le componenti di  $\vec{r}(t)$  per un sistema di coordinate cartesiane  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  con  $\hat{k} = \hat{i} \wedge \hat{j}$ .

La convezione del moto sarà:

- $\theta(t)$  è l'angolo tra  $\overline{OP}$  e l'asse x crescente in senso antiorario rispetto a  $\hat{k}$ .
- L'angolo  $\theta(t)$  viene misurato in radianti:  $\theta_{rad} = \frac{l}{R}$ .

### 3.6.2 Velocità Angolare

In un moto circolare uniforme, con angoli uguali in tempi uguali, si può definire la grandezza *velocità angolare*  $\omega$  come:

$$\omega \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (3.32)$$

Essendo questa variazione costante è possibile stabilire una legge oraria della variazione dell'angolo di questo tipo:

$$\theta(t) = \theta_i + \omega t \quad (3.33)$$

È possibile ricalcolare la velocità tangenziale  $\vec{v}$  in funzione della velocità angolare  $\omega$ . Essendo  $\vec{v}$  definita come  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ , usando l'equazione 3.31 possiamo espandere  $\vec{r}(t)$  ottenendo:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{R(\cos(\theta(t + \Delta t)) \cdot \hat{i} + \sin(\theta(t + \Delta t)) \cdot \hat{j})}{\Delta t} - \frac{R(\cos(\theta(t)) \cdot \hat{i} + \sin(\theta(t)) \cdot \hat{j})}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

In un moto uniforme si ha che  $\theta(t) = \theta_i + \omega t$ . Fissando  $\theta_i = 0$  è possibile espandere l'espressione dell'angolo come  $\theta(t + \Delta t) = \omega t + \omega \Delta t$ . Inoltre usando le formule per il seno<sup>ix</sup> e il coseno<sup>x</sup> di una somma possiamo separare il limite in più limiti più piccoli e ottenere:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos(\omega(t + \Delta t))}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \cos(\omega t) \frac{\cos(\omega \Delta t)}{\Delta t} - \sin(\omega t) \frac{\sin(\omega \Delta t)}{\Delta t} \right) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega(t + \Delta t))}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \sin(\omega t) \frac{\cos(\omega \Delta t)}{\Delta t} + \cos(\omega t) \frac{\sin(\omega \Delta t)}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

<sup>ix</sup>  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ .

<sup>x</sup>  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ .

Usando i limiti notevoli <sup>xi</sup> otteniamo:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos[\omega(t + \Delta t)]}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(\omega t)}{\Delta t} - \omega \sin(\omega t) \right) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin[\omega(t + \Delta t)]}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(\omega t)}{\Delta t} + \omega \cos(\omega t) \right)\end{aligned}\quad (3.36)$$

Tornando dunque al limite 3.34 otteniamo

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{R(\cos(\theta(t + \Delta t)) \cdot \hat{i} + \sin(\theta(t + \Delta t)) \cdot \hat{j})}{\Delta t} - \frac{R(\cos(\theta(t)) \cdot \hat{i} + \sin(\theta(t)) \cdot \hat{j})}{\Delta t} \right) \\ &= R(\omega \cos(\omega t) \hat{j} - \omega \sin(\omega t) \hat{i})\end{aligned}\quad (3.37)$$

Si ha dunque che:

$$v_s = |\vec{v}| = \omega R \quad (3.38)$$

Questa importante relazione tra le due velocità del moto circolare uniforme ci permette di esprimere l'accelerazione centripeta in funzione della velocità angolare come

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad (3.39)$$

---

<sup>xi</sup>  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ , si noti in oltre che un coseno è stato eliminato poiché il coseno di 0 è 1.

## Capitolo 4

# Applicazione delle Leggi orarie

### 4.1 Corpo in caduta libera

Galileo Galilei scoprì che:

Lo spostamento di un oggetto che parte dalla quiete è proporzionale al quadrato del tempo durante il quale l'oggetto è in movimento

In caso di condizione di vuoto (assenza di resistenza dell'aria) due corpi in caduta libera hanno la stessa accelerazione, indipendentemente da forma e peso.

Inoltre un corpo in caduta libera si muove liberamente solo sotto l'azione della gravità, dove si ipotizza:

- Resistenza dell'aria trascurabile;
- Accelerazione di gravità costante (indipendente dall'altitudine).

Il moto in caduta libera è verticale, con accelerazione  $a_y = g$  (verso il basso). Con queste ipotesi è dunque possibile descrivere il moto di un corpo in caduta libera con le leggi del Moto Uniformemente Accelerato.

### 4.2 Moto in due dimensioni

La posizione di una particella è descritta con un vettore in posizione  $\vec{r}$ , lo spostamento è la differenza tra posizione iniziale e finale.

La velocità media viene definita come:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (4.1)$$

dove ci ritroviamo con:

- Una direzione e verso  $\Delta \vec{r}$ ;
- Esso è indipendente dal percorso;
- **La velocità istantanea:**

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.2)$$

- **Accelerazione media <sup>i</sup>:**

$$\vec{a}_{med} = \frac{(\vec{v}_f - \vec{v}_i)}{(t_f - t_i)} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (4.3)$$

è un vettore diretto lungo  $\Delta \vec{r}$ ;

---

<sup>i</sup>Per avere accelerazione non nulla può variare solo il modulo del vettore velocità, o solo la direzione, o variare entrambi.

- L'accelerazione istantanea:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.4)$$

Consideriamo il caso di moto con accelerazione costante (in modulo e direzione)

- Vettore posizione:  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

- Vettore velocità:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \quad (4.5)$$

- In due dimensioni abbiamo:

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(t) = v_{xi} + a_x t \\ v_y &= v_y(t) = v_{yi} + a_y t \end{aligned} \quad (4.6)$$

da cui otteniamo:

$$\vec{v}_f = (v_{xi} + a_x t)\hat{i} + (v_{yi} + a_y t)\hat{j} = (v_{xi}\hat{i} + v_{yi}\hat{j}) + (a_x t\hat{i} + a_y t\hat{j}) = \vec{v}_i + \vec{a}t \quad (4.7)$$

- Analogamente la legge oraria si decompone nelle sue componenti x e y:

$$\begin{aligned} x_f &= x_i + v_{x,i}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y_f &= y_i + v_{y,i}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

da cui otteniamo:

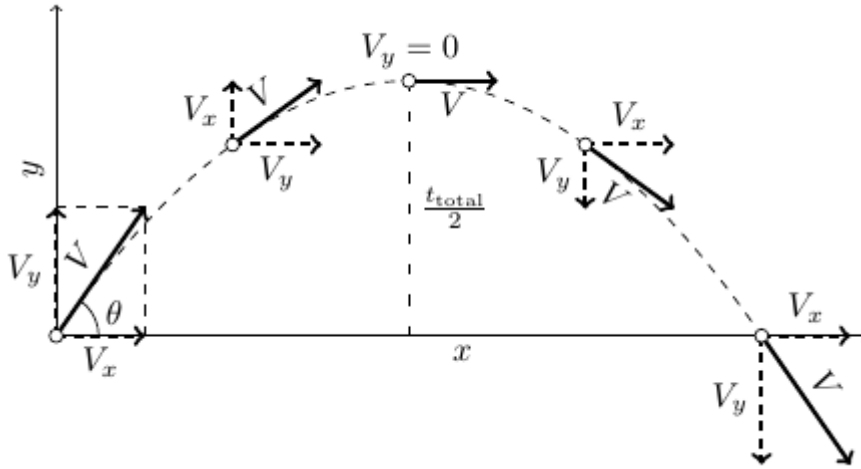
$$\begin{aligned} \vec{r}_f &= (x_i + v_{x,i}t + \frac{1}{2}a_x t^2)\hat{i} + (y_i + v_{y,i}t + \frac{1}{2}a_y t^2)\hat{j} \\ &= (x_i\hat{i} + y_i\hat{j}) + (v_{x,i}\hat{i} + v_{y,i}\hat{j})t + \frac{1}{2}(a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t^2 \\ &= \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

- Il moto in due dimensioni con accelerazione costante è equivalente a due moti uniformemente accelerati indipendenti nelle direzioni x e y, quindi:

$$\begin{aligned} \vec{v}_f &= \vec{v}_i + \vec{a}t \\ \vec{r}_f &= \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

### 4.3 Moto di un proiettile

Consideriamo un esempio di moto uniformemente accelerato in due dimensioni.



Da esso possiamo ricavarci due ipotesi semplificatrici:

- **Accelerazione di gravità costante:**  $a_y = -g$  (y positive verso l'alto);
- **Resistenza dell'aria trascurabile:**  $a_x = 0$ .

Immaginiamo che il proiettile parta con una velocità iniziale  $\vec{v}_i$ , con componenti:

$$\begin{aligned} v_{xi} &= v_i \cos \theta \\ v_{yi} &= v_i \cos \frac{\pi}{2} - \theta = v_i \sin \theta \end{aligned} \quad (4.11)$$

La velocità finale verrà scritta come:

$$\begin{aligned} v_{xf} &= v_{xi} + a_x t = v_{xi} = v_i \cos \theta_i \\ v_{yf} &= v_{yi} + a_y t_f = v_{yi} - g t_f = v_i \sin \theta_i - g t_f \end{aligned} \quad (4.12)$$

Adesso identifichiamo i due moti lungo gli assi x e y <sup>ii</sup>:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_i + v_{xi} t = (v_i \cos \theta_i) t \\ y(t) &= y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = (v_i \sin \theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

In quanto tempo il proiettile completa la sua traiettoria parabolica?

Possiamo rispondere a questa domanda risolvendo la legge oraria sulle x per t:

$$t_f = \frac{x_f}{v_x} = \frac{x_f}{(v_i \cos \theta_i)} \quad (4.14)$$

O eventualmente la legge oraria della velocità su y:

$$t_f = \frac{v_{yi} - v_{yf}}{g} \quad (4.15)$$

<sup>ii</sup>Per praticità si sta considerando il caso della partenza del moto dall'origine degli assi, dunque con  $x_i = 0$  e  $y_i = 0$

Si può notare inoltre che, nelle ipotesi di semplificazione prese in considerazione, il tempo che il proiettile impiega a raggiungere il suolo è due volte quello per raggiungere l'altezza massima, punto in cui  $\vec{v}$  ha solo componente  $x$ . Si può avere dunque:

$$\begin{aligned} t_h &= \frac{v_{yi}}{g} \implies t_h = \frac{v_i \sin(\theta)}{g} = \frac{v_i \sin(\theta)}{g} \\ t_f &= \frac{2v_i \sin(\theta)}{g} \end{aligned} \quad (4.16)$$

### 4.3.1 Gittata e altezza massima

Andiamo ora ad evincere le formule per ricavare la gittata  $R$  e l'altezza massima  $h$ .

Calcoliamo l'istante in cui il proiettile raggiunge l'altezza massima, ovvero nel punto di inversione:

$$v_{yh} = 0 \implies t_h = \frac{v_i \sin(\theta)}{g} \quad (4.17)$$

Calcoliamo l'altezza massima:

$$\begin{aligned} h &= y(t_h) = (v_i \sin \theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2 \\ &= \frac{(v_i \sin \theta_i)^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{(v_i \sin \theta_i)^2}{g^2} \\ &= \frac{(v_i \sin \theta_i)^2}{2g} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Infine calcoliamo la gittata <sup>iii</sup>

$$\begin{aligned} R &= (v_i \cos \theta_i) 2t_h \\ &= \frac{2v_i \sin(\theta) \cdot v_i \cos(\theta)}{g} \\ &= \frac{v_i^2 \sin(2\theta)}{g} \end{aligned} \quad (4.19)$$

---

<sup>iii</sup> È stata usata la formula di duplicazione del seno:  $\sin(2\theta) = 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$

## **Part IV**

# **Dinamica**



## Capitolo 5

# Forze e leggi di Newton

### 5.1 Introduzione

Prima di iniziare è importante evidenziare le differenze tra cinematica e dinamica:

- La **cinematica** è la branca della fisica che si occupa dello studio del movimento dei punti materiali, analizzando la posizione, la velocità e l'accelerazione di un oggetto in movimento, indipendentemente dalla causa che lo genera. In altre parole, la cinematica si focalizza sulla descrizione e l'analisi delle grandezze fisiche che caratterizzano il movimento, senza considerare le forze che lo causano.
- La **dinamica**, invece, si concentra sullo studio delle cause che generano il movimento dei punti materiali. In particolare, la dinamica analizza il cambiamento del movimento dei corpi in funzione dei concetti di forza e massa. Lo studio della dinamica è cruciale per comprendere come le forze agiscono sui corpi, come le masse influenzino l'interazione tra le forze e il movimento, e come queste interazioni determinino il comportamento dei sistemi fisici.

Per comprendere le interazioni tra le forze e i corpi, è possibile distinguere tra due tipologie di forze:

- Le forze di contatto che sono quelle che agiscono tra due corpi in contatto fisico diretto, come la forza di attrito tra due superfici o la forza esercitata da una molla su un oggetto;
- I campi di forze che sono quelli che agiscono su un oggetto senza la necessità di un contatto fisico diretto, come il campo gravitazionale della Terra o il campo magnetico generato da una corrente elettrica.

### 5.2 Sistema di riferimento inerziale

Se un corpo non interagisce con altri corpi, è possibile identificare un sistema di riferimento nel quale il corpo ha accelerazione nulla. Tale sistema viene chiamato **sistema di riferimento inerziale** (SRI).

Qualsiasi sistema di riferimento che si muove con velocità relativa costante rispetto ad un sistema di riferimento inerziale è esso stesso un sistema di riferimento inerziale.

Se per esempio un treno accelerasse non si definirebbe più sistema di riferimento inerziale, ma sistema di riferimento non inerziale.

## 5.3 Prima legge di Newton

La prima legge di Newton, detta anche principio di inerzia, dice che:

$$\vec{F} = 0 \iff \vec{a} = 0 \iff \vec{v} = \text{costante} \quad (5.1)$$

In assenza di forze esterne, visto da un sistema inerziale, un corpo in quiete resta in quiete; uno che si muove con velocità costante preserva lo stato di moto uniforme.

Alcune proprietà della prima legge di Newton sono:

- Quando su un corpo non agisce alcuna forza la sua accelerazione è nulla (moto uniforme) e abbiamo quindi:

$$\vec{F} \propto \vec{a} \quad (5.2)$$

- La forza è l'agente che fa variare il moto di un corpo;
- La forza si comporta come un vettore.

### 5.3.1 Inerzia, Massa e Peso

È importante parlare di alcune importanti proprietà dei corpi: Inerzia, massa e peso.

- **Inerzia:** L'inerzia di un corpo è la tendenza del corpo a resistere ai cambiamenti della sua velocità;
- **Massa:** Essa è la proprietà intrinseca di un corpo che specifica la sua resistenza a cambiare la sua velocità:

$$\vec{F} = m_1 \vec{a}_1 = m_2 \vec{a}_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} \quad (5.3)$$

Maggiore è la massa, minore è l'accelerazione a parità di forza applicata ed essa è una proprietà intrinseca di un corpo, non dipende dal metodo di misura.

- **Peso:** Esso è una forza equivalente in modulo alla forza gravitazionale esercitata dal pianeta su cui si trova <sup>i</sup>.

$$F_{12} = \frac{GM_1 M_2}{(d_{12})^2} \quad (5.4)$$

$$mg_T = m \frac{GM_T}{(R_T)^2} = P_{Terra} \neq P_{Luna} = mg_L = m \frac{GM_L}{(R_L)^2} \quad (5.5)$$

Il nostro peso varia se siamo su pianeti diversi: non è una proprietà intrinseca.

## 5.4 Seconda legge di Newton

La seconda legge di Newton dice che:

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a} \quad (5.6)$$

In un sistema di riferimento inerziale, l'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale alla forza risultante agente su di esso, e inversamente proporzionale alla sua massa:

$$\vec{a} = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{m} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{m} \quad (5.7)$$

---

<sup>i</sup>Le varie "g" presenti nelle formule sono costanti calcolate empiricamente dai calcoli e valgono rispettivamente:  $G \equiv G_{Newton} = 6.67 \times 10^{-11} N m^2 / K g^2$ ,  $g_T \approx 9.81 m/s^2$  e  $g_L \approx \frac{g_T}{6}$

La forza risultante  $\sum_i \vec{F}_i$  è la somma vettoriale di tutte le forze esterne agenti sul corpo di massa  $m$ .

Le forze interne non sono incluse nella somma poiché non influiscono sul moto del sistema.

### 5.4.1 Concetto di forza

Le forze derivano dalle interazioni tra corpi, come:

- **Gravitazionale:** ovvero l'interazione tra masse;
- **Elettromagnetica:** ovvero l'interazione tra cariche elettriche e campi magnetici;
- **Nucleare:** ovvero l'interazione tra nucleoni (protoni e neutroni).

Da un punto di vista macroscopico risultano rilevanti solo i primi due tipi di interazioni citati, permettendo di suddividere le forze in:

- Forze gravitazionali: come per esempio le cadute gravi, i moti dei corpi celesti;
- Forze elettromagnetiche: che si suddividono a loro volta tra:
  - A distanza;
  - A contatto, come per esempio attrito, forze elastiche etc.;

Quest'ultime derivano tutte dall'interazione (di natura elettromagnetica) fra atomi e molecole che costituiscono i corpi.

Le forze a livello macroscopico hanno diverse proprietà:

1. **Natura vettoriale:** La somma delle forze che agiscono in un corpo non esteso (punto materiale) equivalgono ad un'unica forza uguale alla somma vettoriale delle singole;
2. **Interazione:** La forza dipende dalla distanza tra corpi e dalla natura di questi, ma non dal sistema di riferimento;
3. La forza tra due corpi tende a 0 al crescere della loro distanza;

È da notare come, grazie alla proprietà 2, nell'espressione  $\vec{F}_i = m\vec{a}$ , l'unica parte dipendente dal sistema di riferimento è  $\vec{a}$ , per cui è necessaria la prima legge di Newton.

La forza nel sistema internazionale viene misurata in Newton, quindi:

$$1N = 1kg \times \frac{m}{s^2} \quad (5.8)$$

L'equazione della seconda legge di Newton permette in oltre di derivare una legge oraria partendo dalla dinamica di un corpo, ovvero dalle forze che lo mettono in moto. In caso di moto rettilineo forza risultante costante si ha infatti un analogo della legge oraria del moto uniformemente accelerato di questo tipo:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t^2 \quad (5.9)$$

Nel caso di forze non dipendenti dalla velocità, come quello della forza elastica verranno trattati più avanti insieme al *moto armonico*

## 5.5 Forza gravitazionale

Definiamo  $\vec{F}_g$  come **forza gravitazionale**, o forza peso (a volte usiamo  $\vec{P}$ ), la forza esercitata dalla terra su un oggetto:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_g = \frac{GmM_T}{R_T^2} \hat{r} = m\vec{a} = m\vec{g} \quad (5.10)$$

Questa è sempre diretta verso il centro della terra ortogonalmente al suolo (**radiale**) e ha per modulo  $|\vec{F}_g| = mg$ .

Abbiamo visto che il peso varia se variamo il pianeta. In realtà anche sulla terra il peso varia al variare della distanza dal centro della terra  $d$ .

Vediamo come: in modulo

$$|\vec{F}_g| = ma = mg \Rightarrow g = \frac{F_g}{m} = \frac{\frac{GM_T m}{d^2}}{m} = \frac{GM_T}{d^2} \quad (5.11)$$

Andiamo a scrivere  $d$  come una correlazione rispetto al raggio terrestre  $d = R_T + h$ :

$$g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}, g_h = \frac{gM_T}{(R_T + h)^2} \Rightarrow \frac{g_h}{g_0} = \left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)^2 \approx 1 - \frac{2h}{R_T} \quad (5.12)$$

Essendo però  $h \ll R_T$  per fenomeni che avvengono sulla superficie terrestre è possibile trattare  $g$  come una costante il cui valore è  $g = 9.18 \text{ m/s}^2$

## 5.6 Terza legge di Newton

La terza legge di Newton dice che:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (5.13)$$

Quando due corpi interagiscono, la forza  $\vec{F}_{12}$  esercitata dal corpo uno sul corpo due è uguale in modulo ma di verso opposto alla forza  $\vec{F}_{21}$  esercitata dal corpo due sul corpo uno.

Le due forze sono:

- $\vec{F}_{12}$  = Forza di azione;
- $\vec{F}_{21}$  = Forza di reazione.

Importante dire che non esiste una forza isolata, le forze si presentano sempre in coppia (interazione tra due oggetti).

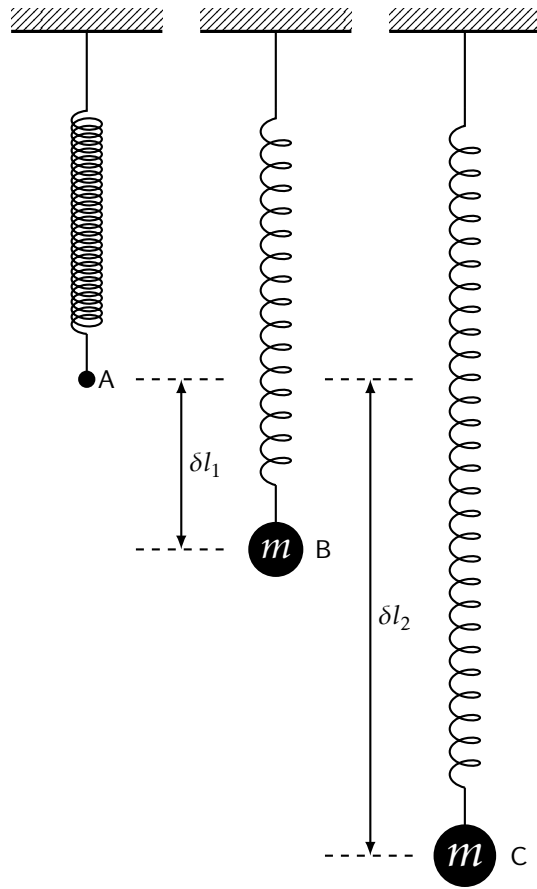
Un esempio importante di questa legge che ci tornerà utile nella prossima sezione è quello di **Forza Normale** esercitata da un piano. Questa è la reazione che un piano esercita su un corpo soggetto alla forza di gravità e fa sì che esso non si muova verticalmente. Questa forza è solitamente indicata come  $\vec{N}$ .

## 5.7 Oscillatore armonico in una dimensione

Abbiamo utilizzato come esempio di forza dipendente dalla posizione l'espressione:

$$\vec{F}_{(1)} = -k(r)\hat{r} \quad (5.14)$$

La formula sopra indicata viene chiamata forza elastica (di richiamo) esercitata da una molla al variare della sua estensione.



La legge oraria del moto della massa  $m$  è data da <sup>ii</sup>:

$$r(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (5.15)$$

Dove  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , ovvero il rapporto fra la costante elastica propria della molla e la massa, e  $c_1$  e  $c_2$  sono le condizioni iniziali di posizione e velocità <sup>iii</sup>.

## 5.8 Posizione di equilibrio

Ragionando sul moto di una molla come esempio di oscillatore armonico, notiamo che, se  $v_0 = 0$ , esiste un  $r(t)$  tale che la molla non si muova. Questa  $s = r(t)$  è detta posizione di equilibrio della molla, ovvero la specifica posizione in cui la molla non è né estesa né contratta, di conseguenza non genera forza di richiamo. Per una generica legge di forza che dipende dalla posizione, una posizione di equilibrio è un punto  $P$  tale che un corpo posto in  $P$  con  $v = 0$  resta in  $P$  indefinitamente. Vale:

$$\vec{F}(\vec{r}_P, \vec{v} = 0) = 0 \quad (5.16)$$

Dove abbiamo

- Equilibrio stabile in cui sui piccoli spostamenti da  $P$  il corpo resta vicino a  $P$ ;
- Instabile viceversa.

<sup>ii</sup>Si noti che questa legge oraria non dipende dall'orientamento di  $\hat{r}$ .

<sup>iii</sup>Il significato fisico e analitico di queste condizioni iniziali è approfondito con esempi pratici nella sezione 6.1 poco successiva, poiché molto più facilmente assimilabili attraverso i suddetti esempi.

## Capitolo 6

# Viconli lisci e scabri

### 6.1 Vincoli lisci: Forze di Reazione Vincolare

Definiamo un **vincolo** un sistema che impedisca ad un corpo di muoversi liberamente nello spazio. Questo avviene esercitando sul corpo delle forze che prendono genericamente il nome di **Forze di Reazione Vincolare**  $\vec{F}_R$ . In un problema che le coinvolge, le forze di reazione fanno parte delle incognite, ma ci danno delle ipotesi in più sul moto.

**Piano Inclinato liscio.** Prendiamo ad esempio un *piano inclinato liscio*

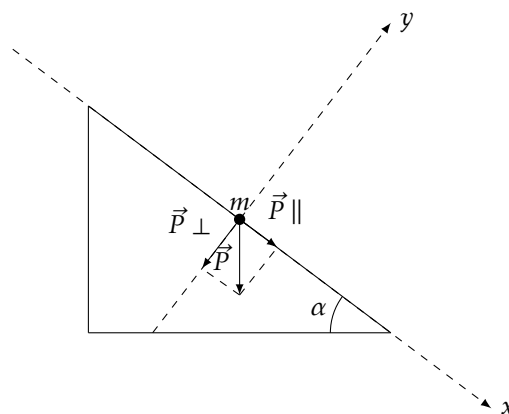


Grafico 6.1: Diagramma delle Forze Piano Inclinato Liscio

Sappiamo dal secondo principio della dinamica che la risultante delle forze agenti su un corpo dev'essere uguale alla massa per l'accelerazione del corpo stesso. Possiamo separare dunque il problema nelle sue componenti, ottenendo:

$$\begin{cases} m\vec{a}_x = \vec{P}_{\parallel}; & \text{su } x \\ m\vec{a}_y = \vec{P}_{\perp}; & \text{su } y \end{cases} \quad (6.1)$$

Conoscendo però il caso fisico che stiamo schematizzando, sappiamo che, salvo il piano non si sfondi, permettendo alla pallina di cadere vericalmente, che non avviene nessun moto lungo l'asse  $y$  e che dunque  $\vec{a}_y = 0$ .

Essendo la forza peso mai nulla sulla terra, è necessario che esista un'altra forza di stessa

intensità ma di verso opposto che la bilanci. Questa forza, spesso detta *Normale al piano*  $\vec{N}$ , rappresenta il vincolo sul moto che il piano impone alla massa.

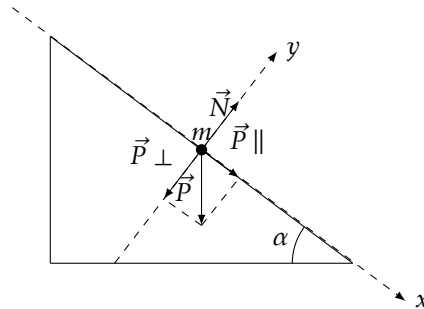


Grafico 6.2: Diagramma delle Forze Piano Inclinato Liscio con Normale

Possiamo dunque completare il sistema 6.1, che descrive il moto lungo gli assi solidali al piano, ottenendo:

$$\begin{cases} ma_x = P_{||}; & \text{su } x \\ ma_y = -P_{\perp} + N; & \text{su } y \end{cases} \quad (6.2)$$

e dal ragionamento sul vincolo, si ha che:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= -\vec{P}_{\perp} = mg \cos(\alpha) \cdot (-\hat{j}) \\ N &= mg \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (6.3)$$

**Sistema Massa-Molla.** Consideriamo ora il caso di una massa  $m$  posta su un supporto di massa  $M$  attaccato a una molla.

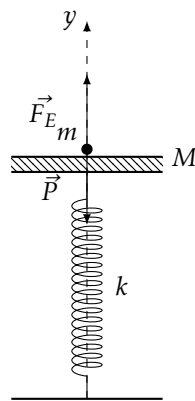


Grafico 6.3: Massa a Contatto con un Supporto fissato ad una Molla

Essendo presenti due masse dobbiamo considerare la dinamica di ognuna di esse separatamente. Avremo:

$$\begin{cases} ma = -mg \\ Ma = F_E - Mg \end{cases} \quad (6.4)$$

Infatti sulla massa  $m$  agisce *direttamente* solo la forza peso, mentre sul supporto agiscono forza peso e forza elastica. Come suggerisce l'esperienza empirica, e la terza legge di Newton, la massa  $m$  risente della presenza della molla. Questo è dovuto alle forze di reazione che supporto e molla esercitano l'uno sull'altro. Le equazioni della dinamica complete

sono infatti:

$$\begin{cases} ma = F_{rM} - mg \\ Ma = F_E - Mg - F_{rm} \end{cases} \quad (6.5)$$

Dalla terza legge di Newton sappiamo che  $F_{rM} = F_{rm}$ , possiamo dunque sostituirla. Inoltre sappiamo che il moto verso il basso sarà solidale tra le due masse, cioè avranno la stessa accelerazione. Possiamo dunque ricavare  $F_{rM}$  in questo modo:

$$\begin{cases} ma = F_{rM} - mg \\ Ma = F_E - Mg - F_{rM} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{F_{rM}}{m} - g \\ a = -\frac{k}{M}y - Mg - \frac{F_{rM}}{M} \end{cases} \Rightarrow \frac{F_{rM}}{m} - g = -\frac{k}{M}y - Mg - \frac{F_{rM}}{M} \quad (6.6)$$

Possiamo dunque ottenere il valore di  $F_{rM}$ :

$$F_{rM} = -\frac{m}{m+M} \frac{k}{M} y \quad (6.7)$$

Essendo però  $F_{rM}$  una forza di reazione vincolare esiste solo se orientata verso l'alto, poiché il piano non reagisce se la pallina si muove verso l'alto. Dunque la forza esiste solo per  $z \leq 0$ . Infatti per  $z = 0$  (punto di equilibrio molla) si ha  $F_{rM} = 0$  e la pallina si distacca dal supporto.

**Sistema a Puleggia in una dimensione.** Un altro caso rilevante è quello di due masse collegate da un filo inestensibile passante per una carrucola

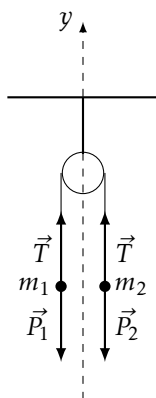


Grafico 6.4: Sistema Massa-Massa collegati da un filo

Scriviamo il sistema delle forze delle due masse

$$\begin{cases} m_1 a_1 = -m_1 g + T \\ m_2 a_2 = -m_2 g + T \end{cases} \quad (6.8)$$

Il vincolo della carrucola eguaglia variazioni nello spostamento. In questo caso abbiamo che  $\Delta y_1 = \Delta y_2$ , se avessimo una carrucola sulla cima di un piano con un filo che lega un moto sull'asse  $x$  e uno sull'asse  $y$  avremo  $\Delta x_1 = \Delta y_2$ . Si ha dunque che:

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 \Rightarrow a_1 = -a_2 \quad (6.9)$$

Sottraiamo le equazioni del sistema 6.8 si ottiene:

$$a(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1) \Rightarrow a = g \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \quad (6.10)$$



Conoscendo il valore di  $a$  è possibile ottenere il valore della tensione dalla prima equazione del sistema 6.8:

$$m_1 a_1 = -m_1 g + T \implies T = m_1 (a_1 + g) = m_1 \left( g \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} + g \right) = m_1 g \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} + 1 \right) \quad (6.11)$$

Si ha dunque che:

$$T = g \frac{2m_1 m_2}{m_2 + m_1} \quad (6.12)$$

**Pendolo Semplice.** Infine, come ultimo caso rilevante, analizziamo il caso di una massa attaccata ad un pendolo semplice, ovvero ad un filo inestendibile libero di oscillare.

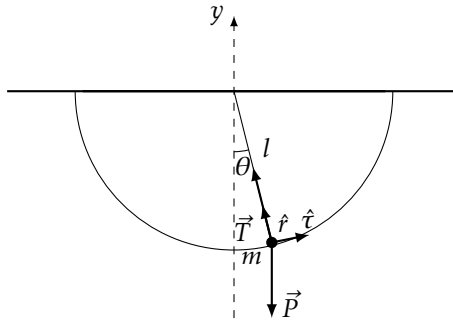


Grafico 6.5: Pendolo Semplice.

Supponiamo una velocità iniziale della massa parallela al versore tangente alla circonferenza  $\hat{t}$ . In queste condizioni avremo un moto nel piano di  $l$  e di traiettoria circolare. L'equazione del moto sarà in questo caso:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \quad (6.13)$$

Che scomposta in componenti, usando coordinate polari e le proprietà dei triangoli simili <sup>i</sup>, diventa:

$$\begin{cases} ma_r = T - P_r; & \text{su } \hat{r} \\ ma_\tau = -P_\tau; & \text{su } \hat{t} \end{cases} = \begin{cases} ma_r = T - mg \cos(\theta); & \text{su } \hat{r} \\ ma_\tau = -mg \sin(\theta); & \text{su } \hat{t} \end{cases} \quad (6.14)$$

Come sistema di riferimento sono stati presi come versi positivi la direzione crescente dell'angolo e il filo direzionato verso l'alto.

Dall'equazione 3.39 del moto circolare uniforme per il moto lungo  $\hat{r}$ , e la definizione di accelerazione 3.19 per il moto lungo  $\hat{t}$ , e inoltre osservando che lo spostamento del corpo lungo  $\hat{t}$  è esattamente l'arco di circonferenza  $l\theta$  otteniamo <sup>ii</sup>:

$$\begin{cases} m \frac{v^2}{l} = T - mg \cos(\theta); & \text{su } \hat{r} \\ ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin(\theta); & \text{su } \hat{t} \end{cases} \quad (6.15)$$

Dall'equazione del moto lungo il filo abbiamo:

$$T = m \frac{v^2}{l} + mg \cos(\theta) \quad (6.16)$$

<sup>i</sup>Si noti che il triangolo formato da  $l, y$  e la circonferenza è proporzionale a quello formato da  $\vec{P}$  e  $\hat{r}$ , risultando dunque in angoli compresi uguali.

<sup>ii</sup>Dall'osservazione fatta e dall'equazione 3.19 abbiamo  $a = \frac{d^2 l \theta}{dt^2}$ . Essendo però il filo inestendibile per ipotesi, si avrà  $l$  costante e dunque  $a = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Inoltre il vincolo del filo a rimanere teso si traduce come:

$$T \geq 0 \implies m \frac{v^2}{l} \geq -mg \cos(\theta) \implies \frac{v^2}{l} \geq -g \cos(\theta) \implies v^2 \geq -lg \cos(\theta) \quad (6.17)$$

In particolare questa condizione deve essere rispettata nei punti di altezza massima, ovvero i punti di inversione, in cui  $v = 0$ . Chiamiamo questi punti  $\theta_0$ . Otteniamo:

$$0 \geq -lg \cos(\theta_0) \implies lg \cos(\theta_0) \leq 0 \implies -\frac{\pi}{2} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2} \quad (6.18)$$

Il risultato ottenuto è concorde con quello che l'esperienza suggerirebbe, ovvero il filo rimane teso nel semicerchio inferiore della traiettoria e i punti di inversione sono in  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Se volessimo considerare una circonferenza completa, avremo nel punto  $\theta = \pi$  che:

$$T \geq 0 \implies v^2 \geq -lg \cos(\theta) \implies v^2 \geq lg \implies v \geq \sqrt{lg} \quad (6.19)$$

Otteniamo così anche la velocità minima che la massa avrà nel moto, ovvero proprio  $v_{min} \equiv \sqrt{lg}$  che assume nel punto di massima altezza.

Per quanto riguarda il moto lungo la circonferenza assumiamo l'ipotesi di **piccoli oscillazioni**, ovvero di variazioni di  $\theta$  piccole rispetto alla sua posizione d'equilibrio <sup>iii</sup>. In queste ipotesi abbiamo:

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta \implies -\frac{g}{l}\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (6.20)$$

Indicando come  $\theta_0$  *ampiezza angolare delle oscillazione*<sup>iv</sup> e  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  la "pulsazione"<sup>v</sup> abbiamo come possibile finzione che soddisfa queste condizioni<sup>vi</sup>:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t) \quad (6.21)$$

Questa legge oraria è analoga all'equazione del moto armonico 5.15, dove il termine costante della pulsazione  $\frac{K}{m}$  è sostituita da  $\frac{g}{l}$ . Si può notare come le due espressioni siano uguali dimensionalmente, si ha infatti:

$$\begin{aligned} \frac{K}{m} &= \frac{g}{l} \\ \left[ \frac{M \cdot T^{-2}}{M} \right] &= \left[ \frac{L \cdot T^{-2}}{M} \right] \\ \left[ \frac{1}{T^2} \right] &= \left[ \frac{1}{T^2} \right] \end{aligned} \quad (6.22)$$

## 6.2 Vincoli Scabri: Forze di attrito

Per capire a pieno questa tipologia di forze è necessario far ricorso in primo luogo ad un esempio pratico. Si consideri un tavolo su cui è poggiato un monitor. Cosa succede se incliniamo leggermente questo piano?

Siamo partiti da una condizione d'*equilibrio*, dove la forza peso è completamente bilanciata dal vincolo del tavolo. Andando però a inclinare il piano d'appoggio, essendo come detto in precedenza la forza peso sempre rivolta verso il centro della terra in maniera perpendicolare, una sua componente non interagirebbe più col vincolo del piano, bensì dovrebbe portare ad un'accelerazione parallela ad esso.

<sup>iii</sup>Questa approssimazione è necessaria per poter utilizzare lo sviluppo in serie di Taylor del seno al primo ordine, per cui  $\sin(\theta) \approx \theta$ .

<sup>iv</sup>Essendo il seno definito con codominio  $[-1; 1]$ , il valore  $\theta_0$  serve a scalare l'ampiezza dell'oscillazione del seno.

<sup>v</sup>La pulsazione in fisica indica la velocità con cui viene effettuata un'oscillazione, serve a scalare la distanza tra un minimo e massimi nel seno

<sup>vi</sup>Provare a derivare per credere! ;)

L'esperienza ci insegna però che questo non necessariamente accade. Diciamo infatti che se la superficie del piano "fa abbastanza attrito", o in termini più rigorosi è sufficientemente **scabra**, il monitor non si muoverà. Considerando a questo punto il *principio di Inerzia*, sappiamo che deve esistere un'altra forza concorrente alla componente parallela al piano della forza peso che la bilancia.

Questa forza dipendente dal contatto di due corpi (**radente**) o di un corpo e il mezzo in cui viaggia (**viscoso**) è quella che è definita **Forza d'attrito**.

Per quanto riguarda l'*attrito radente* ne esistono due tipi:

- Forza di attrito statico, ovvero quando l'oggetto è in un moto imminente:

$$\vec{f}_s \leq \mu_s |\vec{N}| (\pm \hat{i}) \quad (6.23)$$

- Forza di attrito dinamico, ovvero quando un oggetto è in movimento:

$$\vec{f}_d = \mu_d |\vec{N}| (\pm \hat{i}) \quad (6.24)$$

La direzione della forza di attrito è sempre opposto al moto (imminente o reale) dell'oggetto e i coefficienti di attrito  $\mu$  dipendono dalla natura della superficie e vale sempre:  $\mu_d < \mu_s$ . Infine, in prima approssimazione  $\mu_d$  è indipendente dalla velocità. Osserviamo sperimentalmente su generico corpo che:

- $f_s \leq \mu_s N$ ;
- Per moto imminente si ha:  $|\vec{f}_{s,max}| \propto N$ ;
- Per  $|\vec{F}| \leq |\vec{f}_{s,max}|$  non si ha moto;
- $|\vec{f}_s| = |\vec{F}|$  è la condizione di equilibrio;
- Per  $|\vec{F}| > |\vec{f}_s|$  il corpo si muove e accelera lungo il verso di  $\vec{F}$ ;
- Se la forza esterna viene rimossa, la forza di attrito agente sul corpo produce una accelerazione di verso opposto al moto, fino a riportare il corpo in quiete.

Questo comportamento è dovuto all'alternarsi delle due forze d'attrito sopra citate. Il corpo è infatti inizialmente in un *regime statico*, ovvero è fermo, e in contrasto al suo moto agisce la forza d'attrito statico.

Una volta rotta la condizione di equilibrio si entra in un *regime dinamico*, ovvero di movimento, in cui la forza d'attrito dinamico si oppone al movimento ma in quantità minore essendo il suo coefficiente  $\mu_d < \mu_s$ , facendo accelerare il corpo meno di quanto farebbe in condizioni di piano liscio, banalmente diminuendo l'intensità della risultante.

Se sul corpo smette di agire la forza che aveva rotto il *regime statico*, l'unica a rimanere è quella di attrito dinamico che, agendo in verso opposto al moto, applicherà al corpo un'accelerazione negativa, portandolo a rallentare, fino a raggiungere la quiete, tornando in un *regime statico*.

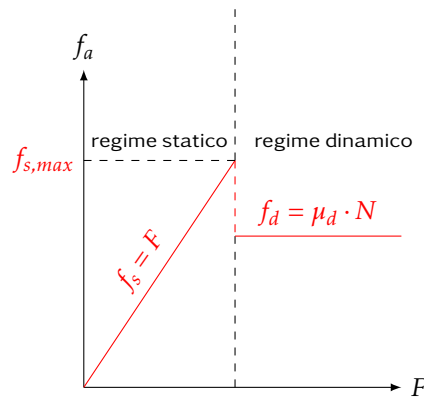
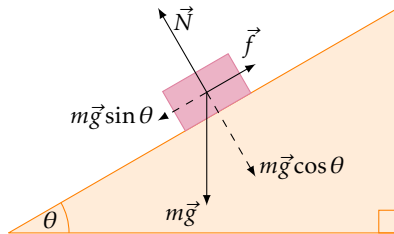


Grafico 6.6: Grafico passaggio da Attrito Statico a Dinamico

### 6.2.1 Misura sperimentale di $\mu_s$ e $\mu_d$

Prendiamo come esempio un blocco su un piano inclinato.



Quale è il coefficiente di attrito statico associato all'angolo critico  $\theta_c$  per il quale il blocco inizia a muoversi?

- Contiamo le forze che agiscono sul blocco:
  1. Forza di gravità:  $\vec{F}_g = m\vec{g}$ ;
  2. Forza normale:  $\vec{F}_n = \vec{N}$ ;
  3. Forza di attrito statico:  $\vec{f}_s$ .
- Le forze si bilanciano se e solo se il blocco è in equilibrio, il che corrisponde alla condizione di blocco fermo;
- Consideriamo un set di assi cartesiani parallelo al piano inclinato;
- Dalla seconda legge di Newton abbiamo che,  $\forall \theta$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 F_x^{(i)} &= mg \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - f_s = mg \sin \theta - f_s = ma_x \\ \sum_{i=1}^3 F_y^{(i)} &= N - mg \cos \theta = ma_y \end{aligned} \quad (6.25)$$

- All'equilibrio  $\sum_i \vec{F}^{(i)} = 0$ ;
- $\theta_c$  indica il valore di  $\theta$  per il quale il blocco è sul punto di scivolare, per cui:  $f_s = \mu_s N$ ;
- Possiamo usare la seconda legge di Newton e scrivere:

$$mg \sin \theta_c = \mu_s N; \text{ dove } N = mg \cos \theta_c \Rightarrow \mu_s = \tan \theta_c \quad (6.26)$$

Come misuriamo il coefficiente di attrito dinamico?

- Per  $\theta = \theta_c$ , poiché  $\mu_s < \mu_d$  il corpo accelera verso il basso;
- Se diminuiamo l'angolo, possiamo tornare all'equilibrio  $\sum_i \vec{F}^{(i)} = 0$ , con il blocco che scivola a velocità costante;
- Chiamiamo  $\hat{\theta}$  l'angolo che soddisfa questa condizione;
- Sostituiamo  $f_d$  a  $f_s$ :

$$mg \sin \hat{\theta} = \mu_d n; \text{ dove } n = mg \cos \hat{\theta} \Rightarrow \mu_d = \tan \hat{\theta} \quad (6.27)$$

In conclusione, i coefficienti d'attrito statico e dinamico saranno rispettivamente la tangente del massimo angolo che mantiene l'equilibrio e del minimo angolo per cui questo è perso.

### 6.3 Forze di attrito dipendenti dalla velocità

Fino ad ora abbiamo considerato la forza di attrito  $\vec{f}$  indotta da scivolamento tra superfici scabre, indipendente dalla velocità, ma esiste una forza di attrito  $\vec{R}$  indotta dalla viscosità del mezzo in cui ci muoviamo (aria, acqua):

$|\vec{R}| \propto \text{velocità relativa oggetto-mezzo}$ .

Per i corpi piccoli come la polvere, in regime di basse velocità vale:

$$|\vec{R}| = -b |\vec{v}| \quad (6.28)$$

Invece per corpi grandi come una palla o un aereo, in regime di elevata velocità vale:

$$|\vec{R}| = \frac{1}{2} D \rho A |\vec{v}|^2 \quad (6.29)$$

dove  $D$  è il coefficiente di resistenza,  $\rho$  è la densità del mezzo ed  $A$  è l'area della sezione del corpo <sup>vii</sup>.

---

<sup>vii</sup>Questo argomento è trattato in maniera particolarmente sbrigativa essendo parte marginale del corso ma al contempo particolarmente complesso da affrontare in maniera esaustiva. Per chi volesse approfondire si rimanda al file "Note Lezione 12" del professor Goffredo Chirco da pagina 6 a pagina 10

## Capitolo 7

# Campi di forza centrali, Momenti e Leggi di Keplero

### 7.1 Quantità di moto

Abbiamo visto come la forza sia associata alla variazione del moto di un corpo e che, in riferimento alla seconda legge di Newton:

$$\vec{F}^{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} = m\vec{a} \quad (7.1)$$

Il concetto di del "moto di un corpo" è espresso da una quantità precisa che chiamiamo **quantità di moto**, definita come:

$$\vec{q} \equiv m\vec{v} \quad (7.2)$$

Dunque il secondo principio della dinamica si traduce in:

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{q}}{dt} = m\vec{a} \quad (7.3)$$

In particolare, se un sistema è isolato, ovvero se siamo nelle ipotesi della prima legge di Newton ( $\vec{F}^{ext} = 0$ ), la quantità di moto è costante, una **costante del moto**.

### 7.2 Forze Centrali

Un campo di forza è detto centrale quando le forze sono diretti sempre verso lo stesso punto, detto **centro di forza**, e avente modulo dipendente solo dalla distanza dal centro di forza <sup>i</sup>.

Il campo di forza centrale è definito come:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r} \quad (7.4)$$

Ne sono esempi l'oscillatore armonico e la forza di attrazione gravitazionale fra due masse.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (7.5)$$

In questi campi si ha sempre  $\vec{F}(\vec{r}) \parallel \vec{r}$  e dunque per definizione  $\vec{r} \wedge \vec{F} = 0$

---

<sup>i</sup>Per "Campi" di forza si fa riferimento a campi vettoriali in  $\mathbb{R}^3$ , ovvero costruzioni nello spazio euclideo in cui ad ogni punto  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  è associata una forza, ovvero  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ .

## 7.3 Momento di una Forza

Definiamo dunque come **Momento di una Forza**  $\vec{F}$  rispetto ad un punto  $r$  (detto polo) come:

$$\vec{M}_r \equiv \overrightarrow{rp} \wedge \vec{F} = (\vec{r}_p - \vec{r}_r) \wedge \vec{F} \quad (7.6)$$

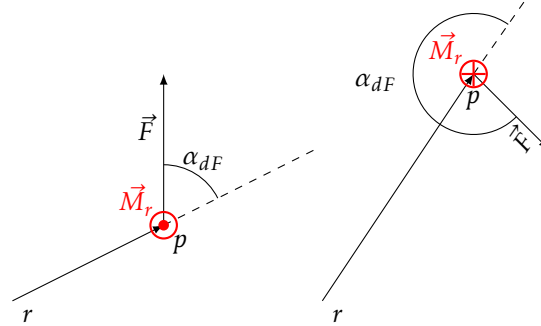


Grafico 7.1: Momento della Forza in coordinate Cartesiane

Dove  $\vec{M}_r$  è ortogonale sia a  $\vec{F}$  che a  $\overrightarrow{rp}$  dalle proprietà del prodotto vettoriale <sup>ii</sup>. Le forze centrali dunque hanno momento nullo rispetto al centro di forza <sup>iii</sup>.

## 7.4 Momento angolare

Definiamo momento angolare (momento della quantità di moto) la quantità:

$$\vec{L}_r = \overrightarrow{rp} \wedge \vec{q} \Rightarrow \vec{M}_r = \frac{d\vec{L}_r}{dt} \quad (\text{in caso di polo fisso}) \quad (7.7)$$

$\vec{L}_r$  è ortogonale al piano parallelo a  $\overrightarrow{rp}$  e  $\vec{v}$  (e ha il verso di  $\vec{M}_r$ ). Infine il modulo è dato da <sup>iv</sup>:

$$d_{rp} \cdot mv \sin \alpha_{dq} \quad (7.8)$$

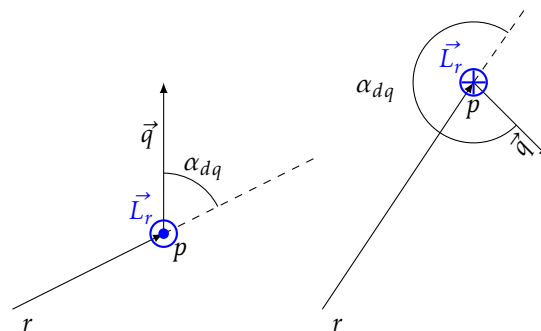


Grafico 7.2: Momento Angolare coordinate Cartesiane

<sup>ii</sup> Si rimanda alla definizione di prodotto vettoriale nell'equazione 2.12 e alle sue proprietà successivamente esposte

<sup>iii</sup> Questa quantità, come quella del momento angolare che stiamo per trattare, sono solo vagamente accennate e non caratterizzate nei dettagli da un punto di vista fisico poiché saranno approfondite nella parte VI, essendo più inerenti a quegli argomenti.

<sup>iv</sup> Per  $d_{rp}$  si intende la distanza tra i punti  $r$  e  $p$ , ovvero la lunghezza del segmento  $\overrightarrow{rp}$

In campi di forza centrale, essendo  $\vec{M}_r = 0$  e polo fisso (centro di forza), si ha dall'equazione 7.7 che:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \implies \vec{L} = \text{costante} \quad (7.9)$$

Dunque il momento angolare è una costante del moto in campi di forza centrali.

Se la direzione di  $\vec{L}_r$  resta fissa significa che  $\vec{r}\vec{p}$  resta sempre sullo stesso piano. Prendendo le coordinate polari  $(R, \phi, Z)$  con l'origine in  $r$  e  $z = 0$  nel piano di  $\vec{r}\vec{p}$ :

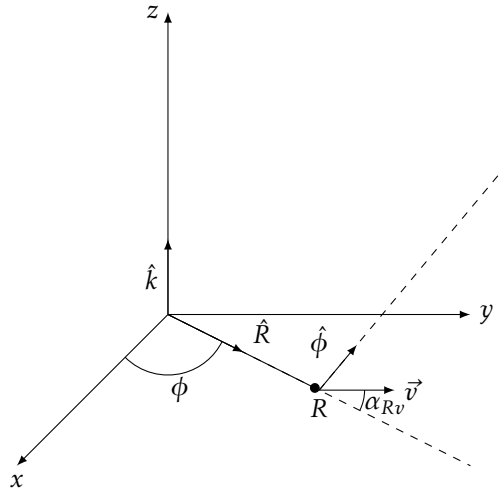


Grafico 7.3: Moto Coordinate Polari  $(R, \phi, Z)$

Dal grafico 7.4 possiamo notare che, considerando un moto nel piano  $(x, y)$  e un raggio di dimensione costante abbiamo che la componente lungo  $\phi$  di  $\vec{v}$ , ovvero quella che abbiamo chiamato **velocità tangenziale** nel moto circolare uniforme, è proprio:

$$v_{\perp} = v \cdot \sin(\alpha_{Rv}) \quad (7.10)$$

Utilizzando dunque la relazione 3.38 possiamo riscrivere il momento angolare in funzione della variazione dell'angolo come:

$$\vec{L} = mR^2 \omega \cdot \hat{k} \quad (7.11)$$

## 7.5 Orbite piane e Leggi di Keplero

Per descrivere il moto dei pianeti nella loro orbita attorno al sole è importante evidenziare 3 punti fondamentali

1. I pianeti viaggiano su orbite piane
2. Essendo la forza gravitazionale centrale si ha

$$0 = \frac{d\vec{L}}{dt} = mR^2 \frac{d\omega}{dt} \cdot \hat{k} \implies \frac{d\omega}{dt} = 0 \implies \omega = \text{costante} \quad (7.12)$$

Inoltre è possibile definire una nuova grandezza, anch'essa costante in campi di forze centrali, ovvero la **velocità areolare**, ovvero la variazione di una superficie nel tempo. Essa equivale a:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} R^2 \omega \quad (7.13)$$

Si vede infatti che

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} ; L = \text{costante} \implies \frac{dA}{dt} = \text{costante} \quad (7.14)$$



3. Supponendo un'orbita circolare e Momento angolare costante si ha un Moto Circolare Uniforme da cui, si ha che l'accelerazione di un corpo in orbita è solo centripeta, ovvero:

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \cdot \hat{R} \quad (7.15)$$

Usando la seconda legge di Newton si ha:

$$-m \frac{v^2}{R} \cdot \hat{R} = m \vec{a} = \vec{F} = -G \frac{Mm}{R^2} \quad (7.16)$$

da cui si ha:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (7.17)$$

Ricordando la formula del periodo del moto circolare uniforme, si ha infine:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R^{\frac{3}{2}} \quad (7.18)$$

Le leggi di Keplero di fatti sono la generalizzazione di questi tre punti appena elencati. Queste infatti sono:

1. I pianeti si muovono su orbite ellittiche (piane) di cui il Sole è uno dei fuochi (centro di Forza).
2. Le orbite spazzano angoli uguali in tempi uguali ( $\omega = \text{const}$ ).
3. Il quadrato dei tempi è direttamente proporzionale alle distanze al cubo (Equazione 7.18)

**Part V**

**Energia e Lavoro**

## Capitolo 8

# Definizioni e Teoremi delle forze vive

Riprendiamo il concetto di integrale, che sarà fondamentale per comprendere l'energia.

1)

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{f}(t) dt = f(t_2) - f(t_1) \quad (8.1)$$

2)

$$\int_{t_1}^{t_2} f[x(t)] \dot{x}(t) dt = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad \text{con} \quad \begin{cases} x_1 \equiv x(t_1) \\ x_2 \equiv x(t_2) \end{cases} \quad (8.2)$$

### 8.1 Teoremi

#### 8.1.1 Teorema delle forze vive o Teorema dell'energia cinetica

##### Definizione Teorema

La derivata dell'energia cinetica di un corpo è uguale alla potenza della forza agente su di esso, definita come  $W = \vec{F} \cdot \vec{v}$ .

##### Dimostrazione

Consideriamo un corpo (punto materiale), e sia  $\vec{F}$  la risultante di tutte le forze (attive e vincolari) agenti su di esso.

Partiamo da:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (8.3)$$

Possiamo definire l'energia cinetica del corpo come:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (8.4)$$

Quindi otteniamo:

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = \frac{1}{2}m \frac{d(v(t) \cdot v(t))}{dt} = \frac{1}{2}m2v(t) \frac{d(v(t))}{dt} = mv(t) \frac{d(v(t))}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (8.5)$$

#### 8.1.2 Seconda versione del teorema

La seconda versione del teorema afferma:

$$\Delta E_{cin} = \mathcal{L} \quad (8.6)$$

**Definizione**

La variazione dell'energia cinetica di un punto materiale tra  $t_1$  e  $t_2$  è uguale al lavoro  $\mathcal{L}$  della forza risultante, definito come  $\mathcal{L} = \int F dv$ .

**Dimostrazione**

Per dimostrarlo, utilizzeremo la prima definizione di integrale (vedi Definizione 8.1).

Considerando un intervallo di tempo compreso tra  $t_1$  e  $t_2$ , possiamo scrivere l'equazione seguente:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{dE_{cin}}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (8.7)$$

Dove  $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t))$ ,  $\vec{r}(t)$  e  $\vec{v}(t)$  rappresentano le funzioni del tempo che descrivono, rispettivamente, la forza, la posizione e la velocità del corpo.

Risolvendo l'equazione, otteniamo:

$$E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (8.8)$$

Dove  $E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1)$  rappresenta la variazione dell'energia cinetica tra l'istante  $t_1$  e l'istante  $t_2$  ( $\Delta E_{cin}$ ).

**Forze posizionali**

Consideriamo una forza che dipende solo dalla posizione e non dalla velocità:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}(t)) \quad (8.9)$$

In questo caso, possiamo esprimere il prodotto scalare tra la forza e la velocità come:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot (v_s \hat{t}) = F_t v_s = F_t \dot{s} \quad (8.10)$$

Dove  $s$  è la coordinata definita lungo la traiettoria  $\gamma$  (orientata) percorsa tra gli istanti  $t_1$  e  $t_2$ , e  $F_t$  rappresenta la proiezione di  $\vec{F}$  sulla tangente alla traiettoria.

**8.1.3 Terza versione del teorema, forze posizionali**

La terza versione del teorema afferma:

$$\Delta E_{cin} = \mathcal{L}_\gamma \quad (8.11)$$

**Definizione**

Se un punto materiale è soggetto a una forza indipendente dalla velocità, la variazione della sua energia cinetica tra i punti  $P_1$  e  $P_2$  lungo la traiettoria  $\gamma$  è uguale al lavoro  $\mathcal{L}$  svolto dalla forza su di esso.

**Dimostrazione**

Utilizzando la relazione 8.10 abbiamo che:

$$\Delta E_{cin} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} F_t \dot{s} dt \quad (8.12)$$

Possiamo utilizzare la definizione 8.2 dell'integrale per ottenere:

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t(s) ds \quad \left( \text{poiché } \dot{s} = \frac{ds}{dt} \right) \quad (8.13)$$

Questa espressione rappresenta il lavoro  $\mathcal{L}_\gamma$  lungo la traiettoria  $\gamma$  tra i punti  $s_1$  e  $s_2$ .  
 Dunque, in caso di forze posizionali il lavoro può essere calcolato a partire dalla sola conoscenza della traiettoria  $\gamma$  e della forza  $F$ .

### Note

L'energia cinetica e lavoro hanno le stesse dimensioni:

$$[E_{cin}] = M \frac{L^2}{T^2} = [\mathcal{L}](\text{forza per lunghezza}) \quad (8.14)$$

Nel SI si misurano in Joule( $J$ ):

$$1J = 1N \cdot m \quad (8.15)$$

Invece la potenza:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (8.16)$$

ha dimensioni:

$$[W] = M \frac{L^2}{T^3} (\text{lavoro/tempo}) \quad (8.17)$$

Nel SI si misura come

$$1W = 1J \cdot s^{-1} \quad (8.18)$$

## Capitolo 9

# Applicazioni del teorema delle forze vive

Consideriamo alcuni esempi in cui il teorema delle forze vive è utile, nel caso di forze posizionali.

### 9.1 Esempio con un corpo in caduta libera

Determinare l'altezza di un corpo lanciato verso l'alto con velocità  $v_0$

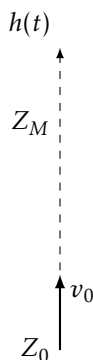


Grafico 9.1: Moto di un Corpo in Caduta con Energia cinetica.

In questo caso, la forza peso  $F_g$  è posizionale e vale:

$$\Delta E_{\text{cin}} = \mathcal{L}_\gamma \quad (9.1)$$

$Z_m$  è il punto di inversione della velocità nella massima altezza che vale:

$$v_{Z_m} = 0 \quad (9.2)$$

Quindi, risolvendo:

$$\Delta E_{\text{cin}} = E_{\text{cin}}(t_m) - E_{\text{cin}}(t_0) = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (9.3)$$

Calcoliamo quindi il lavoro:

$$\mathcal{L}_\gamma = \int_{Z_0}^{Z_m} (-mg) dZ = -mg(Z_m - Z_0) \quad (9.4)$$

Utilizziamo quindi il teorema 8.11:

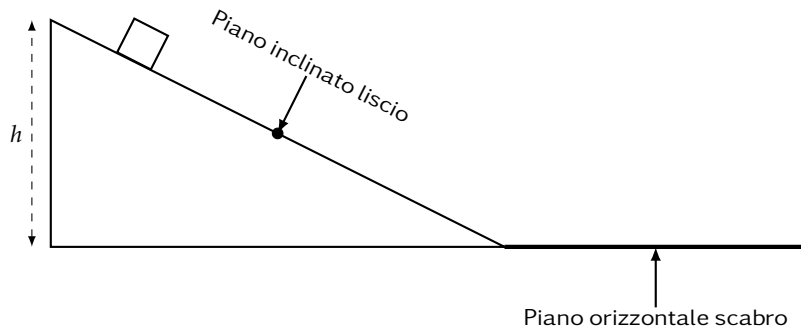
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg(Z_m - Z_0) \quad (9.5)$$

Da cui otteniamo l'altezza (poniamo  $Z_0 = 0$ ).<sup>i</sup>

$$Z_m = \frac{v_0^2}{2g} \quad (9.6)$$

## 9.2 Esempio con il piano inclinato

Un corpo scende su un piano inclinato liscio di lunghezza  $L$  e prosegue su un piano orizzontale scabro. Quale distanza  $D$  percorre il corpo prima di fermarsi?



Iniziamo analizzando il lavoro compiuto dalla forza di gravità lungo il piano inclinato:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma &= \int_{t_0}^{t_f} m\vec{g} \cdot \vec{v} dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} m\vec{g} \frac{dS}{dt} \hat{t} dt = \\ &= \int_{s_0}^{s_f} mg \sin(\alpha) dS = \\ &= mg \sin(\alpha) \int_{s_0}^{s_f} dS = \\ &= mg \sin(\alpha) S|_{s_0}^{s_f} = \\ &= mg \sin(\alpha) (s_{fin} - s_0) = \\ &= mg \sin(\alpha) l \quad (\text{perché } l = s_{fin} - s_0) \end{aligned} \quad (9.7)$$

Successivamente, consideriamo la forza di attrito che agisce sul piano orizzontale:

$$|\vec{F}_{att}| = -\mu_d N \quad (\text{modulo della forza di attrito con, } N = mg) \quad (9.8)$$

Dunque troviamo che:

$$\mathcal{L}_2 = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F}_{att_2} \cdot \vec{v} dt = \int_{s_0}^{s_f} (-\mu_d N) dS = -\mu_d N S|_{s_0}^{s_f} = -\mu_d N (s_f - s_0) = -\mu_d mg D \quad (9.9)$$

<sup>i</sup>Nota: Se viceversa il corpo venisse lasciato cadere da  $Z_m$  con velocità iniziale nulla, potremmo calcolare la velocità finale come:  $v_f = \sqrt{2gZ_m}$

Sfrutto quindi il teorema delle forze vive 8.6 e l'additività del lavoro, con:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \quad (9.10)$$

Ottengo:

$$mg \sin(\alpha)L - \mu_d mgD \quad (9.11)$$

Da qui, risolviamo per  $D$ :

$$D = \frac{\mathcal{L}}{\mu_d} \sin(\alpha) \quad (9.12)$$

Importante dire che in entrambi i casi ( $L_1$  e  $L_2$ ) il lavoro calcolato per una forza costante risulta dipendere solo dalla posizione iniziale e finale e non dalla traiettoria<sup>ii</sup>!

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \\ &= \vec{F} \int_{t_0}^{t_f} \vec{v} dt = \\ &= \vec{F} \cdot \int_{t_0}^{t_f} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \\ &= \vec{F} \cdot (\vec{r}_f - \vec{r}_0) = \\ &= \vec{F} \cdot \vec{r}_f - \vec{F} \cdot \vec{r}_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{L}(P_1 \rightarrow P_2) &= U(\vec{r}_0) - U(\vec{r}_f) \quad \text{con } U(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \vec{r} + U_0 \end{aligned} \quad (9.13)$$

Questo risultato non vale solo per le forze costanti ma ha anche una validità più generale.

---

<sup>ii</sup>Questa considerazione non vale in generale per la forza d'attrito che, di norma, dipende dalla traiettoria. Ci troviamo in un caso particolare.



### 9.3 Esempio con oscillatore armonico in una dimensione

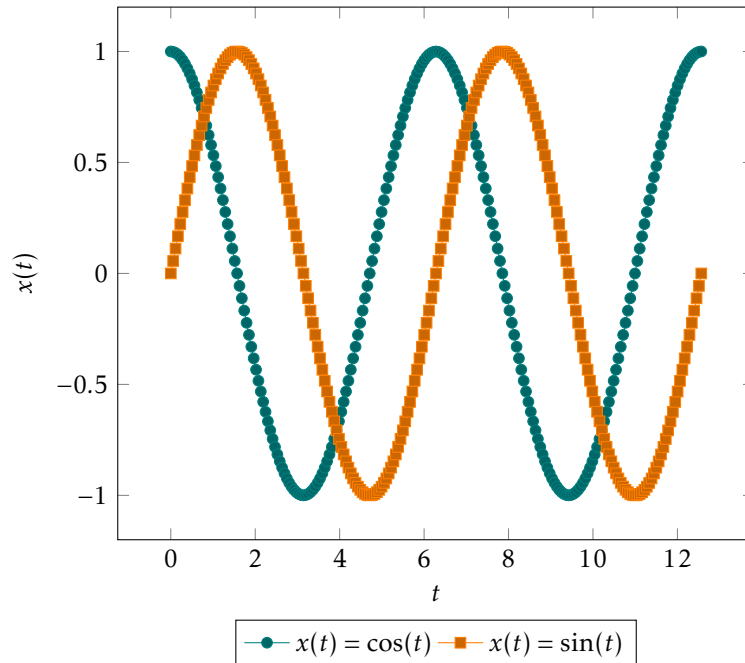


Grafico 9.2: Evoluzione dell'oscillatore armonico nel tempo

Iniziamo dalla formula di Hooke:

$$\vec{F} = -kx\hat{x} \quad (9.14)$$

Da qui abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} (-kx\hat{x}) \cdot (\dot{x}\hat{x}) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} -kx\dot{x} dt = \\ &= \int_{x_0}^{x_f} -kx dx = \\ &= -k \int_{x_0}^{x_f} x dx = \\ &= -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_f} = \\ &= -\frac{k}{2}x_f^2 + \frac{k}{2}x_0^2 \end{aligned} \quad (9.15)$$

Dunque, come possiamo notare, anche qui  $\mathcal{L}$  dipende solo dal valore che una stessa funzione  $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$  assume nel punto iniziale e finale. Questa funzione è più genericamente descritta aggiungendo una costante di integrazione  $U_0$ :

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + U_0 \quad (9.16)$$

## 9.4 Esempio con un campo gravitazionale (forze centrali)

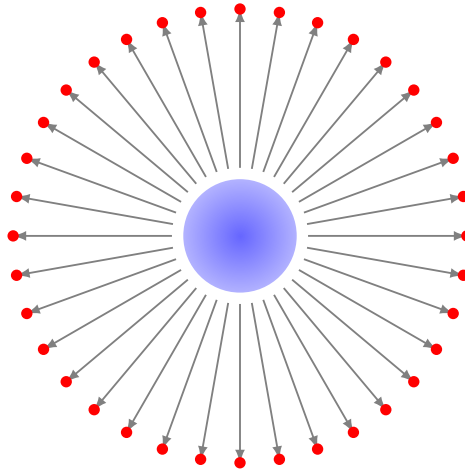


Grafico 9.3: Esempio di un campo gravitazionale con forze centrali

Iniziamo con la formula standard:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \quad (9.17)$$

Guardiamo che:

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (9.18)$$

Prima per il caso generale di una forza centrale:

$$\vec{F} = F(r) \hat{r} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{v} = F(r) \hat{r} \cdot \vec{v} \quad (9.19)$$

Andiamo quindi a moltiplicare a dividere per il modulo del raggio:

$$\frac{F(r)}{r} r \hat{r} \cdot \vec{v} \quad (9.20)$$

Sostituiamo  $r \hat{r} = \vec{r}$ :

$$\frac{F(r)}{r} \vec{r} \cdot \vec{v} \quad (9.21)$$

Riscriviamo  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ :

$$\frac{F(r)}{r} \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (9.22)$$

Possiamo notare che  $\frac{d\vec{r} \cdot \vec{r}}{dt} = 2r \cdot \frac{dr}{dt}$  e che  $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$ , ottenendo <sup>iii</sup>:

$$\frac{F(r)}{r} \frac{1}{2} \frac{d(\vec{r} \cdot \vec{r})}{dt} = \frac{F(r)}{r} \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} = \frac{F(r)}{r} \frac{1}{2} 2r \frac{dr}{dt} = F(r) \frac{dr}{dt} \quad (9.23)$$

<sup>iii</sup>Tutto questo procedimento potrebbe sembrare insensato e inutile visto che si è partiti da una forza moltiplicata per una velocità e si è arrivati ad una forza moltiplicata per la derivata di una posizione, ovvero una velocità. La finezza in questo caso sta nelle notazioni. Questi passaggi preliminari all'integrale sono necessari a trasformare un'equazione vettoriale in una scalare, in modo che la forza e la derivata per cui è moltiplicata non dipendano più da un vettore nel tempo ma da delle posizioni!

Da qui sostituiamo  $\vec{F} \cdot \vec{v}$  nell'integrale:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} \cdot \vec{v} = \\
 &= \int_{t_0}^{t_f} F(r) \frac{dr}{dt} \cdot dt = \\
 &= \int_{r_0}^{r_f} F(r) dr = \\
 &= \Phi(r_f) - \Phi(r_i)
 \end{aligned} \tag{9.24}$$

Dove  $\Phi(r)$  è definita tale che:

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = F(r) \quad (\text{primitiva di } F(r)) \tag{9.25}$$

In particolare, per la forza gravitazionale  $F(r)$ , abbiamo:

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2}, \quad \Phi(r) = \frac{GMm}{r} \tag{9.26}$$

Quindi, anche in questo caso, il lavoro è determinato dalla differenza nei valori della funzione potenziale alle posizioni iniziale e finale rispetto al centro di forza:

$$U(r) = -\Phi(r) + U_0 = \mathcal{L} \tag{9.27}$$

Definiamo, infine, il potenziale gravitazionale:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} + U_0 \tag{9.28}$$

Le forze per cui il lavoro compiuto dipende solo dai punti di partenza e di arrivo, e non dalla traiettoria seguita, sono dette **forze conservative**. Per ognuna di queste il lavoro equivale alla primitiva di  $F(r)$  rispetto a  $r$ , ovvero l'opposto del loro potenziale.

# Capitolo 10

## Energia potenziale

### 10.1 Energia potenziale e campi di forza conservativi

La funzione  $U(\vec{r})$  è una proprietà caratteristica delle forze conservative ed è detta **energia potenziale**.

I campi di forza conservativi sono caratterizzati dalle seguenti affermazioni:

- Il lavoro lungo qualsiasi percorso chiuso è nullo;
- Per ogni coppia di punti  $P_1$  e  $P_2$  il lavoro da  $P_1$  a  $P_2$  non dipende dal percorso fra i due punti;
- Esiste una classe di funzioni  $U(P)$ , differenti l'una dall'altra per una costante, tali che per ciascuna di esse:

$$\mathcal{L}(P_1 \rightarrow P_2) = U(P_1) - U(P_2) = -\Delta U \quad (10.1)$$

### 10.2 Conservazione dell'energia

Supponiamo che il punto materiale sia soggetto solo a forze conservative (più eventuali forze a lavoro nullo). Dal teorema delle forze vive 8.6 e considerando che  $\mathcal{L} = U(P_1) - U(P_2)$ , si ha:

$$\frac{1}{2}mv(t_2)^2 - \frac{1}{2}mv(t_1)^2 = U(\vec{r}(t_1)) - U(\vec{r}(t_2)) \quad (10.2)$$

Ovvero:

$$\frac{1}{2}mv(t_2)^2 + U(\vec{r}(t_2)) = \frac{1}{2}mv(t_1)^2 + U(\vec{r}(t_1)) \quad (10.3)$$

Dato che  $t_1$  e  $t_2$  sono arbitrari, questa relazione ci dice che:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) \quad (10.4)$$

è quindi una costante del moto e quindi  $\frac{dE}{dt} = 0$  durante il moto del punto materiale.

Questa costante viene chiamata **energia meccanica** oppure **energia totale**.<sup>i</sup>

---

<sup>i</sup>Nota: ciò che si conserva è la somma dei due termini nel tempo: durante il moto né l'energia cinetica né quella potenziale restano costanti e si ha una continua trasformazione di una forma di energia nell'altra.

### 10.3 Esempio: Velocità di fuga dalla terra di un grave

Lanciamo un corpo di massa  $m$  dalla superficie della terra, verticalmente e con velocità iniziale  $v_0$ .

Il potenziale del campo gravitazionale vale:

$$U(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r} \quad (10.5)$$

Se supponiamo che l'altezza massima raggiunta dal corpo sia  $h$ , abbiamo:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GM_T m}{R_T + h} \quad (10.6)$$

Dato che  $v_f = 0$  abbiamo:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = -\frac{GM_T m}{R_T + h} \quad (10.7)$$

Da cui troviamo che: <sup>ii</sup>

$$h = \frac{\frac{v_0^2}{2g}}{1 - \frac{v_0^2}{2gR_t}} \equiv \frac{\frac{v_0^2}{2g}}{1 - \frac{v_0^2}{v_{fuga}^2}} \quad (10.8)$$

Vediamo quindi che, se abbiamo:

$$v_0 \geq v_{fuga} = \sqrt{2gR_t} \quad (10.9)$$

Non esiste un punto in cui  $v = 0$  è soddisfatta ed il corpo si allontana in-definitivamente. Per questo diciamo che  $v_{fuga}$  è effettivamente una velocità di fuga.

Invece, nel caso in cui avessimo:

$$v_0 < v_f \quad (10.10)$$

Si ha:

$$h \approx \frac{v_0^2}{2g} \quad (10.11)$$

Lo stesso risultato che si ottiene in un campo di gravità costante. <sup>iii</sup>

---

<sup>ii</sup>Avendo:  $v_{fuga} = \sqrt{2gR_t}$  e  $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$  (accelerazione gravitazionale sulla superficie della terra)

<sup>iii</sup>Nota:  $h \approx \frac{v_0^2}{2g} \left( 1 + \frac{v_0^2}{v_{fuga}^2} \right)$

## 10.4 Teorema delle forze vive generalizzato

Come abbiamo già visto in precedenza, in caso di forze posizionali, ovvero indipendenti dalla velocità del punto materiale, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\Delta E_{cin} = \mathcal{L} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \\ &= \int_{s_1}^{s_2} F_t(s) ds = \mathcal{L}_\gamma\end{aligned}\quad (10.12)$$

Quindi il lavoro può essere calcolato a partire solo dalla traiettoria  $\gamma$ .  
In particolare, in caso di forze conservative, abbiamo visto che:

$$\mathcal{L}(P_1 \rightarrow P_2) = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \quad (10.13)$$

Supponiamo ora che il punto materiale sia soggetto a forze sia conservative che non, indicando rispettivamente  $\vec{F}$  la risultante delle prime e  $\vec{F}'$  la risultante delle forze non conservative (per esempio l'attrito dell'aria).

L'equazione del moto del punto è:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}' \quad (10.14)$$

L'energia totale è definita come:<sup>iv</sup>

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) \quad (10.15)$$

Quindi abbiamo che:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_{cin}}{dt} + \frac{dU}{dt} = (\vec{F} + \vec{F}') \cdot \vec{v} + \frac{dU}{dt} \quad (10.16)$$

Poiché le  $\vec{F}$  sono conservative, vale:<sup>v</sup>

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{dU}{dt} \quad (10.17)$$

Segue che:

$$\frac{dE}{dt} = (\vec{F} + \vec{F}') \cdot \vec{v} + \frac{dU}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{F}' \cdot \vec{v} + \frac{dU}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \vec{F}' \cdot \vec{v} + \frac{dU}{dt} = \vec{F}' \cdot \vec{v} \neq 0 \quad (10.18)$$

Notiamo quindi che la derivata dell'energia totale di un punto materiale è uguale alla potenza delle forze non conservative agenti su di esso.

La variazione dell'energia totale è uguale al lavoro delle forze non conservative e quindi la definizione del teorema delle forze vive generalizzato sarà:

$$\Delta E = \mathcal{L}' \quad (10.19)$$

<sup>iv</sup>In presenza di forze non conservative,  $E$  non è una costante del moto

<sup>v</sup>Nota:

1) da  $\int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \mathcal{L} \rightarrow \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(t, t+\Delta t) - \mathcal{L}(t)}{\Delta t}$

2) da  $\mathcal{L}(P_1 \rightarrow P_2) = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \rightarrow \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(t) - U(t+\Delta t)}{\Delta t} = -\frac{dU}{dt}$

## **Part VI**

# **Sistemi di Punti e Corpo Rigido**

# Capitolo 11

## Dinamica di Sistemi di Punti

Dopo lo studio della dinamica del punto materiale è possibile analizzare la stessa su **sistemi di punti**.

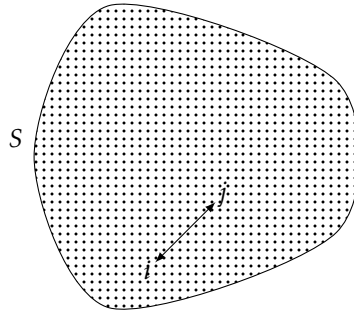


Grafico 11.1: Sistema di Punti.

### 11.1 Forza Totale

Su ognuno di essi varranno i risultati della parte [IV](#), si avrà infatti che, dato  $S$  un sistema di punti:

$$\forall i \in S : \vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \in S} \vec{F}_{ij}^{int} \quad (11.1)$$

Si avrà però che la *forza totale* agente sul sistema sarà data dalla somma di tutti i contributi.

$$\vec{F}_{tot} = \sum_{i \in S} \vec{F}_i = \sum_{i \in S} \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \vec{F}_{ij}^{int} \quad (11.2)$$

Analizzando il secondo addendo però, si può notare che, presa una coppia di punti, per la terza legge di Newton, le forze di interazione tra i punti sarà nulla.

Si avrà dunque che nel complesso le forze interne dei singoli punti saranno non nulle, ma le forze interne al sistema saranno all'equilibrio. Possiamo dunque riscrivere la forza totale come:

$$\vec{F}_{tot} = \sum_{i \in S} \vec{F}_i^{ext} \quad (11.3)$$



## 11.2 Grandezze di Traslazione

Analizziamo come le grandezze relative alla cinematica e alla dinamica del punto materiale si traducono nel caso di un sistema di punti, in funzione del punto singolo.

**Posizione.** Per la posizione del sistema, ovvero la posizione collettiva dei punti, possiamo definire un punto "medio", facendo una media delle posizioni, pesata dalle masse <sup>i</sup> dei singoli punti:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i (m_i \vec{r}_i)}{\sum_i m_i} \quad (11.4)$$

Questo vettore è detto **vettore posizione del centro di massa**, dove per **centro di massa** intendiamo il punto medio delle masse del nostro sistema <sup>ii</sup>.

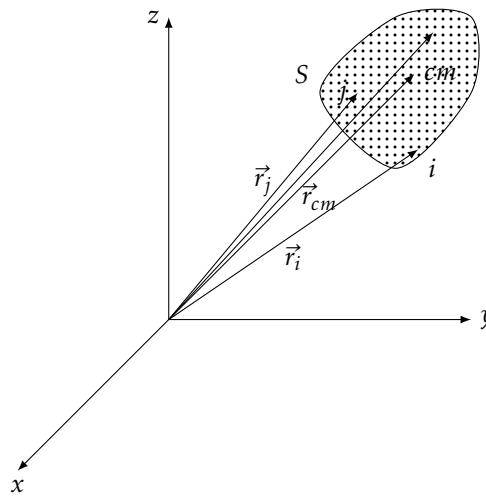


Grafico 11.2: Sistema di Punti in un piano Cartesiano.

**Velocità e Accelerazione.** Analogamente per la velocità collettiva definiamo la **velocità del centro di massa** come:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i \left( m_i \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} \right)}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i (m_i \vec{v}_i)}{\sum_i m_i} \quad (11.5)$$

e la sua **accelerazione**:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2} = \frac{\sum_i \left( m_i \frac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2} \right)}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i (m_i \vec{a}_i)}{\sum_i m_i} \quad (11.6)$$

<sup>i</sup>A differenza della media aritmetica, in cui ogni valore ha lo stesso "peso", in una media pesata si moltiplica ogni valore per il suo "peso", ovvero la sua importanza nella media e si divide per la somma totale dei pesi. La media pesata da un risultato più attendibile nel caso si stia facendo media di valori con importanze relative diverse.

<sup>ii</sup>**NOTA:** Per un sistema di punti discreto il centro di massa potrebbe non coincidere con nessun punto del nostro sistema. Il centro di massa è un punto ideale nello spazio che fa da *centro* per tutti. Si pensi come esempio ad un sistema a *forma di anello*, si noterà che il centro di massa si trova nel suo buco, dove necessariamente non possono esserci punti del sistema.

**Forze esterne su centro di massa.** Dalla seconda legge di Newton si ha che:

$$\forall i \in S : \vec{F}_i^{ext} = m_i \vec{a}_i \quad (11.7)$$

Sommando dunque su  $i$  e riprendendo l'equazione 11.3, si ha che:

$$\vec{F}_{tot} = \sum_{i \in S} \vec{F}_i^{ext} = \sum_{i \in S} (m_i \vec{a}_i) = \sum_{i \in S} m_i \frac{\sum_{i \in S} (m_i \vec{a}_i)}{\sum_{i \in S} m_i} \quad (11.8)$$

Considerando dunque come massa totale la somma delle singole masse, si avrà:

$$\vec{F}_{tot} = m_{tot} \vec{a}_{cm} \quad (11.9)$$

**Teorema del centro di massa:** Il centro di massa di un sistema di punti si muove come un **singolo** punto materiale in cui è concentrata tutta la massa ed applicata la risultante delle forze esterne.

Questo enunciato ci aiuta a chiarire l'entità del **centro di massa**. Questo infatti è un punto nello spazio con dinamica solidale al nostro sistema, e grazie al quale possiamo semplificare la trattazione dello stesso al caso di un punto materiale.

**Quantità di moto** Riprendendo le equazioni 11.9 e 11.6, notiamo che:

$$\vec{F}^{ext} = m_{tot} \vec{a}_{cm} = m_{tot} \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d(m_{tot} \vec{v}_{cm})}{dt} \quad (11.10)$$

Definendo dunque la quantità di moto totale come:

$$\vec{P}_{tot} = \sum_{i \in S} \vec{P}_i = \sum_{i \in S} m_i \vec{v}_i \quad (11.11)$$

Otteniamo la **Prima Equazione Cardinale** della dinamica dei sistemi:

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} \quad (11.12)$$

Si può inoltre notare che, come nel caso del punto materiale, per un sistema di punti si ha che:

$$\vec{F}_{ext} = 0 \implies \vec{P}_{tot} = \text{costante} \quad (11.13)$$

Ovvero la quantità di moto **totale** è invariata. È importante notare sia che questo è vero *componente per componente*, che questo non è necessariamente vero per i singoli punti <sup>iii</sup>.

---

<sup>iii</sup> Si prenda ad esempio un corpo che si frammenta. I singoli pezzi avranno una propria quantità di moto in base alla loro massa e alla velocità con cui si separano, ma la somma di queste quantità di moto sarà la stessa di quella del corpo prima della frantumazione.

## 11.3 Grandezze di Rotazione

**Momento Angolare** Consideriamo adesso il momento angolare **collettivo** rispetto ad un polo  $O$ :

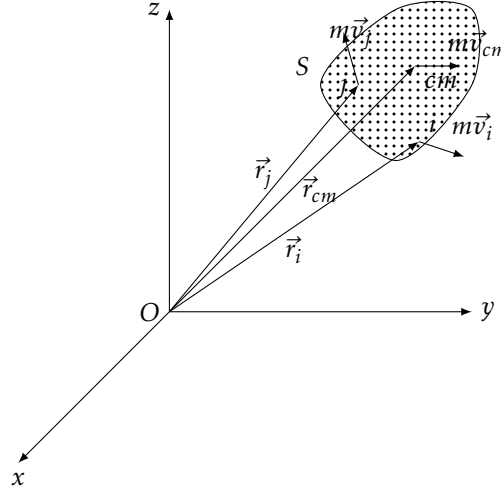


Grafico 11.3: Momenti angolari singoli in un Sistema di Punti.

Si avrà che:

$$\vec{L}_{tot} = \sum_{i \in S} \vec{L}_i = \sum_{i \in S} (\vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i) \quad (11.14)$$

Inoltre la variazione di questo momento angolare sarà <sup>iv</sup>:

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum \left[ \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i \right) + \left( \vec{r}_i \wedge m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) \right] \quad (11.15)$$

È importante notare che:

1. Nel tempo può variare anche la posizione del polo  $O$ , con una velocità  $\vec{v}_O$ . In tal caso si avrà che la variazione della posizione di un singolo punto sarà <sup>v</sup>:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_O \quad (11.16)$$

2. Per ogni punto si ha:

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}}{m_i} \quad (11.17)$$

Possiamo dunque riscrivere l'equazione 11.15 usando 11.16 e 11.17 ottenendo:

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_i [(\vec{v}_i - \vec{v}_O) \wedge m_i \vec{v}_i] + \sum_i [\vec{r}_i \wedge (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int})] \quad (11.18)$$

<sup>iv</sup>Si ricorda la derivata di un prodotto:  $\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx}g(x) + \frac{dg(x)}{dx}f(x)$ .

<sup>v</sup>La velocità di un punto relativa al polo è la differenza delle velocità poiché con il polo in movimento parte dello spostamento assoluto del punto è compiuto solidalmente anche dal polo, non influenzando la velocità relativa.

Analizziamo separatamente i due addendi.

1. Possiamo distribuire il prodotto ottenendo:

$$\sum_i [(\vec{v}_i - \vec{v}_O) \wedge m_i \vec{v}_i] = \sum_i [\vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i - \vec{v}_O \wedge m_i \vec{v}_i] \quad (11.19)$$

Il minuendo <sup>vi</sup> è nullo dalle proprietà del prodotto vettoriale, e dal sottraendo possiamo portare fuori dalla sommatoria  $\vec{v}_O$  ottenendo:

$$\sum_i [\vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i - \vec{v}_O \wedge m_i \vec{v}_i] = -\vec{v}_O \wedge \sum_i m_i \vec{v}_i = -\vec{v}_O \wedge \vec{P}_{tot} \quad (11.20)$$

2. Distribuendo il prodotto troviamo:

$$\sum_i [\vec{r}_i \wedge (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int})] = \sum_i [\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ext}] + \sum_i [\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{int}] \quad (11.21)$$

Analizziamo una coppia qualsiasi di forze interne. Dal terzo principio della dinamica possiamo esprimere la sommatoria come:

$$\sum_{i=1}^2 \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{int} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_{1,2} - \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_{1,2} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{F}_{1,2} \quad (11.22)$$

La differenza tra i vettori posizione però giace sulla retta che passa per i due punti, su cui giacciono anche le forze. Dunque dalle proprietà del prodotto vettoriale, i prodotti si annullano a due a due.

Il secondo addendo è dunque:

$$\sum_i [\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ext}] + \sum_i [\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{int}] = \sum_i [\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ext}] \quad (11.23)$$

In definitiva abbiamo dunque:

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_i [\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ext}] - v_O \wedge \vec{P}_{tot} = \sum_i \vec{M}_i^{ext} - v_O \wedge \vec{P}_{tot} = \vec{M}_{tot}^{ext} - v_O \wedge \vec{P}_{tot} \quad (11.24)$$

Abbiamo così ottenuto la **seconda equazione cardinale** che descrive la rotazione del sistema di punti.

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{M}_{tot}^{ext} - v_O \wedge \vec{P}_{tot} \quad (11.25)$$

### 11.3.1 Teorema del Momento Angolare

Per moti con polo fisso, velocità al centro di massa nulla o velocità del polo parallela alla velocità del centro di massa si ha che il **momento angolare** è esattamente il **momento delle forze esterne**  $\vec{M}$ .

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{M}_{tot}^{ext} \quad (11.26)$$

In queste condizioni si avrà chiaramente che, in assenza di forze esterne, il momento angolare è una costante del moto.

$$\vec{F}^{ext} = 0 \implies \vec{M}_{tot}^{ext} = 0 \implies \vec{L}_{tot} = \text{const} \quad (11.27)$$

---

<sup>vi</sup>Il minuendo è il nome del primo operando di una sottrazione, per dubbi vedere *qui*.

## 11.4 Riconsiderazione Centro di Massa e Energia

**Momento Angolare** È possibile riconsiderare i vettori posizione dei singoli punti in funzione del centro di massa.

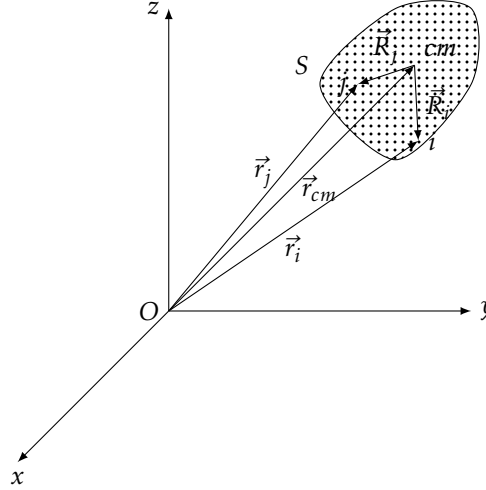


Grafico 11.4: Vettori posizione in funzione del Centro di Massa

È possibile notare come:

$$\forall i \in S : \vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{R}_i \quad (11.28)$$

Ovvero è possibile esprimere ogni vettore posizione come somma del vettore posizione del centro di massa  $\vec{r}_{cm}$  e un vettore posizione dal centro di massa al singolo punto  $\vec{R}_i$ .

Possiamo dunque ricalcolare il **Momento Angolare totale** come:

$$\vec{L}_{tot} = \sum_{i \in S} \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_{i \in S} (\vec{r}_{cm} + \vec{R}_i) \wedge m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{V}_i) \quad (11.29)$$

Distribuendo la somma otteniamo:

$$\begin{aligned} \vec{L}_{tot} &= \sum_{i \in S} \vec{R}_i \wedge m_i \vec{V}_i + \sum_{i \in S} \vec{R}_i \wedge m_i \vec{v}_{cm} + \sum_{i \in S} \vec{r}_{cm} \wedge m_i \vec{V}_i + \sum_{i \in S} \vec{r}_{cm} \wedge m_i \vec{v}_{cm} = \\ &= \sum_{i \in S} \vec{R}_i \wedge m_i \vec{V}_i + \sum_{i \in S} m_i \vec{R}_i \wedge \vec{v}_{cm} + \sum_{i \in S} \vec{r}_{cm} \wedge m_i \vec{V}_i + \sum_{i \in S} \vec{r}_{cm} \wedge m_i \vec{v}_{cm} \end{aligned} \quad (11.30)$$

Utilizzando le definizioni 11.4 e 11.5 avremo: <sup>vii</sup>

$$\vec{L}_{tot} = \sum_{i \in S} (\vec{R}_i \wedge m_i \vec{V}_i) + m \vec{R}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm} + \vec{r}_{cm} \wedge m \vec{V}_{cm} + \vec{r}_{cm} \wedge m \vec{v}_{cm} \quad (11.31)$$

Possiamo in ultimo notare come  $\vec{R}_{cm}$  e  $\vec{V}_{cm}$  siano vettori nulli, poiché rappresentano posizione e velocità del centro di massa rispetto a se stesso. Otteniamo così il **Teorema di Köning per il momento Angolare**, ovvero:

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_{T'} + \vec{L}_{cm} \quad (11.32)$$

Dove  $\vec{L}_{T'} = \sum_{i \in S} (\vec{R}_i \wedge m_i \vec{V}_i)$  rappresenta il **Momento Angolare totale** rispetto al centro di massa.

<sup>vii</sup> Si noti che  $\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i (m_i \vec{r}_i)}{\sum_i m_i} \Rightarrow m \vec{r}_{cm} = \sum_i m_i \vec{r}_i$ , e lo stesso vale per la velocità.

**Energia** In modo analogo al **Momento Angolare** <sup>viii</sup>, l'energia cinetica totale è:

$$E_{cin}^{tot} = E_{cin}' + E_{cin}^{cm} \quad (11.33)$$

Avremo dunque dal teorema delle forze vive 8.2 che:

$$d\mathcal{L}_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}) \cdot d\vec{r}_i = d\mathcal{L}_i^{ext} + d\mathcal{L}_i^{int} \quad (11.34)$$

Di conseguenza il lavoro totale sarà:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{ext} + \mathcal{L}^{int} \quad (11.35)$$

Si può notare come fatto in precedenza che, grazie alla terza legge di Newton, il lavoro delle forze interne sarà:

$$d\mathcal{L}^{int} = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_{12} \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (11.36)$$

Ovvero il Lavoro delle forze interne dipende dalla **variazione della distanza fra i punti** e non è necessariamente nullo.

Valgono allo stesso modo del punto materiale la conservazione dell'energia meccanica in presenza di sole forze conservative e il teorema delle forze vive generalizzato 10.19 in presenza di forze **non conservative interne**.

In particolare, essendo il lavoro delle forze non conservative la somma delle forze interne e quelle esterne si avrà:

$$\mathcal{L}'_{int} + \mathcal{L}'_{ext} = \mathcal{L}' = \Delta E_{tot}^{mecc} \quad (11.37)$$

Si avrà dunque che la variazione di energia complessiva sarà data da una componente meccanica e ad un'altra relativa al lavoro delle forze interne ( $\Delta E_{int} = -\mathcal{L}'_{int}$ ) che definiamo come energia termica, che verrà approfondita in parti successive:

$$\Delta E = \Delta E_{tot}^{mecc} + \Delta E_{int} \quad (11.38)$$

---

<sup>viii</sup>Per la dimostrazione è sufficiente ripetere i passaggi di quella del momento angolare.

## Capitolo 12

### Copro Rigido

Definiamo come corpo rigido un Sistema di Punti materiali **continuo** in cui le distanze tra i punti siano costanti<sup>i</sup>. In particolare il sistema sarà descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \vec{F}^{ext} = m \vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt}; & \text{Prima equazione cardinale} \\ \vec{M}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}; & \text{Seconda equazione cardinale} \\ \mathcal{L}(A \rightarrow B) = E_{cin}^B - E_{cin}^A; & \text{Lavoro senza componenti Interne} \end{cases} \quad (12.1)$$

Come si evince facilmente confrontando le equazioni ricavate nel precedente capitolo con quelle appena esposte, il vantaggio del considerare un corpo rigido è quello di rendere ininfluenti **forze e momenti interni**.

#### 12.1 Insieme Continuo e Densità

Il corpo rigido si distingue da un insieme di punti generico anche per la sua continuità. Ciò implica che tutte le grandezze relative ad un sistema di punti in cui erano presenti sommatorie (*discrete*) andranno riconsiderate nella loro versione *continua*, ovvero per mezzo di integrali rispetto alla massa, usata già come peso della media nelle equazioni precedentemente ricavate.

A tal proposito prendiamo ad esempio il centro di massa. Si avrà che la definizione del suo vettore posizione  $\vec{r}_{cm}$  diventerà:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i \in S} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i \in S} m_i} \rightarrow \frac{\int_V \vec{r} dm}{\int_V dm} \quad (12.2)$$

Per semplificare il calcolo di questi integrali, andiamo a definire una nuova grandezza, la **densità di massa per unità di volume**  $\rho$ . Avremo:

$$\rho \equiv \frac{dm}{dV} \Rightarrow \int_V dm = m = \int_V \rho dV \quad (12.3)$$

Potremmo dunque riscrivere il vettore posizione del centro di massa come:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV} = \frac{\rho \int_V \vec{r} dV}{m} = \frac{m}{V} \frac{\int_V \vec{r} dV}{m} = \frac{\int_V \vec{r} dV}{V} \quad (12.4)$$

<sup>i</sup>Dall'equazione 11.36 abbiamo che in un corpo rigido  $\mathcal{L}^{int} = 0$ .

Volendo generalizzare, è possibile considerare il raggio come una funzione delle tre coordinate della posizione e il volume come un loro prodotto ottenendo:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r}(x, y, z) dx dy dz \quad (12.5)$$

Lo stesso ragionamento è applicabile a corpi rigidi a una o due dimensioni. Prendiamo ad esempio una bacchetta rettilinea di densità omogenea  $\rho_l = \frac{m}{l}$ , massa  $m$  e lunghezza  $l$ . Avremo che:

$$r_{cm} \equiv x_{cm} = \frac{\int_l x dm}{\int_l dm} = \frac{\int_l x \rho_l dx}{m} = \frac{\rho_l \int_l x dx}{m} \quad (12.6)$$

È possibile svolgere l'integrale facilmente ottenendo:

$$x_{cm} = \frac{\rho_l}{m} \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = \frac{\rho_l}{m} \frac{l^2}{2} \quad (12.7)$$

Infine, ricordando che  $\rho_l = \frac{m}{l} \implies \rho_l l = m$ , otteniamo che:

$$x_{cm} = \frac{\rho_l}{m} \frac{l^2}{2} = \frac{l}{2} \quad (12.8)$$

In generale, si avrà che corpi rigidi dotati di assi, piani o punti di simmetria, avranno il centro di massa su tale asse o piano o coinciderà con tale punto, come ad esempio il centro di massa di una sfera coinciderà con il suo centro geometrico <sup>ii</sup>.

---

<sup>ii</sup>Provare per credere! Sarà sufficiente reiterare i passaggi per il caso unidimensionale e svolgere dei *semplici* integrali. Si riporta questo *thread* in cui si parla di semisfera per chi abbia l'ardire di tentare l'impresa.



## 12.2 Moto del Corpo rigido

### 12.2.1 Cinematica

Per descrivere il moto di un corpo rigido torna utile definire una terna di assi cartesiani ulteriori centrati nel centro di massa del corpo.

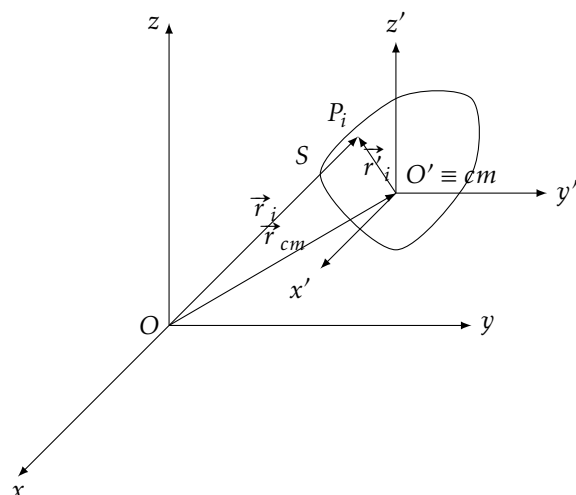


Grafico 12.1: Definizione assi solidali al Centro di Massa.

Utilizzando questo nuovo sistema di punti, è possibile descrivere il moto di ogni punto attraverso una legge oraria. Si avrà che  $\forall P \in S$ :

1. 
$$\overrightarrow{OP(t)} = \overrightarrow{OO'(t)} + \overrightarrow{O'(t)P(t)} \quad (12.9)$$

2. 
$$\vec{v}_p(t) = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'(t)P(t)} \quad (12.10)$$

Analizziamo le due leggi orarie.

**Posizione.** Per quanto riguarda la prima, si tratta di un'equazione sufficientemente autoesplicativa. Si ha infatti che la posizione di un punto del corpo in un dato tempo rispetto al polo  $O$  sarà uguale alla somma della posizione del centro di massa rispetto al polo ( $\overrightarrow{OO'(t)}$ ) e della posizione del punto rispetto al centro di massa ( $\overrightarrow{O'(t)P(t)}$ ), entrambe considerate allo stesso istante di tempo.

È importante notare come il secondo addendo di questa somma sia costante in modulo, per via delle proprietà del corpo rigido, e vari nel tempo dunque solo in direzione e verso. Il vettore  $\overrightarrow{O'(t)P(t)}$  da infatti la componente di **rotazione attorno al centro di massa** della posizione.

**Velocità.** La legge oraria della velocità è la derivata della legge oraria per la posizione, essendo la velocità così definita.

Per quanto a primo impatto possa non essere chiara l'analogia, ci basta richiamare i ragionamenti fatti al riguardo dell'accelerazione nella sezione 3.4.2 e riportarli al caso della posizione.

Il primo addendo, che rappresenta la velocità di **Traslazione** del corpo è il risultante della prima derivazione.

Per quanto riguarda il secondo invece si avrà un termine che influisce sulla rotazione del corpo, che rappresenta infatti la velocità di **Rotazione**. Questo dev'essere necessariamente

ortogonale al vettore posizione derivato, (Come ogni derivata di un versore). Inoltre è possibile definire la velocità angolare già precedentemente incontrata nella sezione 3.6.2 come vettore  $\vec{\omega}$ . Questo vettore è sempre ortogonale al piano di rotazione ed ha come modulo la velocità angolare scalare precedentemente definita<sup>iii</sup>.

Dalle relazioni tra **velocità angolare** e **velocità tangenziale** precedentemente viste<sup>iv</sup> riportate in forma vettoriale, notiamo che è possibile esprimere questa velocità rotazionale come prodotto vettoriale tra la posizione del punto preso in esame e la sua velocità angolare.

Nel caso generale, il moto di un corpo rigido sarà combinazione di una traslazione e di una rotazione, definita come **Roto-Traslazione**

## 12.2.2 Rotazione

Definiamo come **rotazione di un corpo rigido** un moto che lascia invariata la posizione di tutti i punti appartenenti ad una retta fissata detta **asse di rotazione**  $uu'$ .

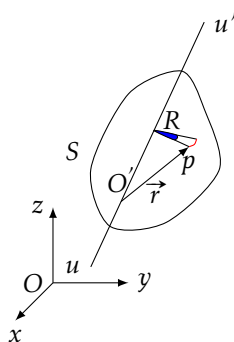


Grafico 12.2: Rotazione Corpo rigido.

Prendiamo in considerazione il grafico 12.2, in cui è rappresentata la rotazione del corpo  $S$  attorno al polo  $O'$ . Nella rotazione, andrà a variare l'**angolo**  $d\theta$  spazzato dalla proiezione dei punti sull'asse di rotazione. Questa variazione della posizione rispetto al polo andrà a descrivere dunque una **velocità**  $\vec{v}_P$ .

In particolare si avrà:

$$\forall P \in S : d\vec{r} = d\vec{\theta} \wedge \vec{r} \quad (12.11)$$

Che utilizzando la definizione di velocità diventa:

$$\forall P \in S : \vec{v}_P \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (12.12)$$

In generale nel tempo anche l'asse può ruotare. Consideriamo per ora il caso di rotazioni **rigide** attorno ad **asse fisso**.

Essendo il corpo rigido per definizione continuo, ogni punto del corpo avrà una porzione di massa  $dm$ , e di conseguenza in rotazione un suo momento angolare. Si avrà<sup>v</sup>:

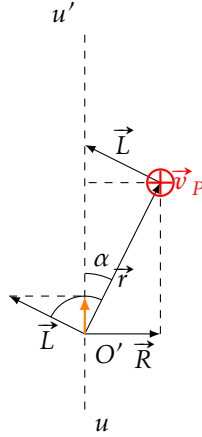
$$\forall P \in S : d\vec{L}_P = \vec{r} \wedge dm\vec{v}_P = \vec{r} \wedge dm(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (12.13)$$

<sup>iii</sup>La trattazione della definizione di  $\vec{\omega}$  è lasciata volutamente in termini qualitativi, poiché la sua definizione rigorosa è altamente tecnica e laboriosa, e soprattutto non rientra negli scopi del corso. Questa non è stata neanche trattata nel dettaglio nelle lezioni frontali fino a richieste di approfondimenti, che hanno ottenuto lo scopo di chiarire il motivo per cui ci si era limitati ad una descrizione qualitativa. Per eventuali approfondimenti al riguardo si rimanda alla pagina wikipedia riguardante la *velocità angolare*, e in particolare alla sezione riguardante la sua definizione come **Tensore**.

<sup>iv</sup>Equazione 3.38.

<sup>v</sup>È importante notare come  $\vec{\omega}$  non sia riferita al singolo punto ma sia uguale per tutti i punti.

Definiamo **momento assiale** la proiezione lungo l'asse di rotazione di  $d\vec{L}$ .



Essendo il momento angolare ortogonale sia al raggio che alla velocità rotazionale, l'angolo tra il momento  $d\vec{L}$  e l'asse di rotazione sarà complementare all'angolo  $\alpha$  tra  $\vec{r}$  e l'asse<sup>vi</sup>. Avremo quindi:

$$\forall P \in S : d\vec{L}_P \cdot u\hat{u}' = dL_P^{(uu')} = dL_P^{(uu')} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = dL_P^{(uu')} \sin(\alpha) = dm \cdot r \sin(\alpha) R\omega \quad (12.14)$$

Si noti che considerando la proiezione del momento su un unico asse è stato possibile passare da vettori a scalari e considerare il seno degli angoli compresi tra essi. Essendo  $R = \sin(\alpha)r$  la proiezione del raggio sul piano di rotazione, si avrà:

$$\forall P \in S : dL_P^{(uu')} = dm R^2 \omega \quad (12.15)$$

Abbiamo dunque che il **momento angolare assiale totale** è:

$$L^{(uu')} = \int dL^{(uu')} = \int R^2 \omega dm \quad (12.16)$$

Possiamo dunque definire una nuova grandezza chiamata **momento di inerzia**

$$I^{(uu')} = \int R^2 dm \quad (12.17)$$

Questa grandezza rappresenta la proporzionalità tra momento angolare e velocità angolare e dipende solo dalla distribuzione della massa rispetto all'asse.

Possiamo dunque concludere che:

$$L^{(uu')} = I^{(uu')} \omega \quad (12.18)$$

Nel caso la rotazione avvenga lungo un *asse principale di inerzia* la relazione è generalizzata come:

$$L = I\omega \quad (12.19)$$

Per calcolare il momento d'inerzia di un corpo basterà, come per il centro di massa, passare per la densità in modo da semplificare gli integrali. Avremo dunque:

$$I = \int_V R^2 dm = \int_V R^2 \rho dV \quad (12.20)$$

<sup>vi</sup>Si faccia riferimento al grafico sovrastante per visualizzare gli angoli a cui si sta facendo riferimento

Inoltre, considerando la circonferenza di rotazione centrata nell'origine, è possibile usare l'equazione della circonferenza;

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (12.21)$$

Otterremo dunque:

$$I = \int_V R^2 \rho dV \int_V (x^2 + y^2) \rho dV \quad (12.22)$$

Prendiamo ad esempio un anello sottile<sup>vii</sup> di raggio  $R$ , massa  $m$  e densità lineare  $\rho_l = \frac{m}{2\pi R}$ . Il momento d'inerzia sarà:

$$I = \int_0^{2\pi R} R^2 dm = \int_0^{2\pi R} R^2 \rho_l dl = \rho_l R^2 \int_0^{2\pi R} dl \quad (12.23)$$

Si avrà infine quindi:

$$I = \rho_l R^2 \int_0^{2\pi R} dl = \rho_l R^2 \cdot l \Big|_0^{2\pi R} = 2\pi R \rho_l R^2 = 2\pi R \frac{m}{2\pi R} R^2 = mR^2 \quad (12.24)$$

### 12.2.3 Dinamica

Passiamo ora alla trattazione della dinamica del corpo rigido.

Come già anticipato, le leggi che regolano la dinamica di questo particolare insieme continuo di punti sono:

$$\begin{cases} \vec{F}^{ext} = m \vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt}; & \text{Prima equazione cardinale} \\ \vec{M}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}; & \text{Seconda equazione cardinale} \\ \mathcal{L}(A \rightarrow B) = E_{cin}^B - E_{cin}^A; & \text{Lavoro senza componenti Interne} \end{cases} \quad (12.25)$$

Possiamo inoltre aggiungere la descrizione del caso di moto stazionario generico, caratterizzato da:

$$\begin{cases} \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = 0 \implies \vec{P} = m \vec{v}_{cm} = \text{const} \\ \vec{M}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = 0 \implies \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{P} = \text{const} \end{cases} \quad (12.26)$$

In particolare, si avrà equilibrio statico se sia  $\vec{P}$  che  $\vec{L}$  risultano costantemente nulli.

È possibile però riconsiderare la seconda equazione cardinale in funzione di quanto visto nella sezione 12.2. Considerando un corpo in rotazione attorno ad un suo asse di simmetria, avremo:

$$\vec{M}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \frac{dI\vec{\omega}}{dt} \quad (12.27)$$

In particolare, nell'ipotesi di asse fisso, avremo che  $I$  è costante, e che dunque:

$$\vec{M}_O^{ext} = \frac{dI\vec{\omega}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha} \quad (12.28)$$

Dove  $\vec{\alpha}$  è l'**accelerazione angolare**, ovvero la variazione di velocità angolare nel tempo. Abbiamo dunque che, in queste ipotesi, le due leggi cardinali presentano una forte analogia:

$$\begin{cases} \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = m \vec{a}_{cm}; & \text{Prima equazione cardinale} \\ \vec{M}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = I \vec{\alpha}; & \text{Seconda equazione cardinale} \end{cases} \quad (12.29)$$

Si ha infatti che la seconda equazione non è altro che la prima in cui ad ogni grandezza è stata sostituita la sua corrispettiva rotazionale, ovvero si passa dalla traslazione alla rotazione.

L'unica differenza sostanziale tra le due oltre al campo di applicazione è che, a differenza

<sup>vii</sup>Per sottile si intende approssimabile ad una circonferenza.

della massa,  $I$  non è una proprietà intrinseca del corpo, ma dipende dalla posizione dell'asse rispetto alla distribuzione di massa.

Più in generale, se il corpo non ruota attorno ad un suo asse principale **non** si avrà più che  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ , tuttavia, considerando un asse di rotazione  $z$ , rimane valido che  $\vec{L}_z = I_z\vec{\omega}$ , da cui, per  $I_z$  costante, si ha:

$$\vec{M} \cdot \hat{z} = \frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} \quad (12.30)$$

E dunque:

$$M_z^{ext} = I_z \alpha \quad (12.31)$$

È da notare come  $\alpha$  sia l'accelerazione angolare completa non la sua componente  $z$ , poiché nel derivare il momento angolare, la componente tangente all'asse non contribuisce al moto rotazionale.

#### 12.2.4 Energia

Analizziamo l'energia di un singolo pezzo di massa a distanza  $R$  in rotazione. Usando la definizione avremo:

$$dE_{cin} = \frac{1}{2} dm \cdot v_p^2 = \frac{1}{2} dm (\omega R)^2 \quad (12.32)$$

Di conseguenza, l'energia totale del corpo sarà:

$$E_{cin} = \int_m \frac{1}{2} (\omega R)^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int_m R^2 dm \quad (12.33)$$

Usando dunque la definizione di  $I_z$  abbiamo:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (12.34)$$

In particolare si avrà:

$$\begin{aligned} \vec{L} = I_z \omega &\implies E_{cin} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I_z} \\ \vec{L}_z = I_z \omega &\implies E_{cin} = \frac{1}{2} \frac{L_z^2}{I_z} \end{aligned} \quad (12.35)$$

Inoltre dal teorema delle forze vive 8.2 abbiamo<sup>viii</sup>:

$$d\mathcal{L} = dE_{cin} = d\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right) = I_z \omega d\omega \quad (12.36)$$

Utilizzando dunque  $\omega = \alpha dt$ ,  $d\omega = \frac{d\theta}{dt}$  e la seconda equazione cardinale otteniamo:

$$d\mathcal{L} = I_z \omega d\omega = I_z \alpha dt \frac{d\theta}{dt} = I_z \alpha d\theta = M_z^{ext} d\theta \quad (12.37)$$

Avremo in fine dunque che la variazione di Energia cinetica sarà:

$$\Delta E_{cin} = \mathcal{L} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M_z^{ext} d\theta = M\theta \Big|_{\theta_i}^{\theta_f} = M\Delta\theta \quad (12.38)$$

Ovvero il Lavoro del momento delle forze per la variazione dell'angolo. Ancora una volta possiamo trarre un'analogia tra la traslazione e la rotazione.

<sup>viii</sup> Si è usata la regola di derivazione della derivata composta  $\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx}$

Se le forze esterne sono conservative vale inoltre che:

$$\mathcal{L} = -\Delta U \quad (12.39)$$

E dunque che l'energia meccanica è costante nel tempo e vale è:

$$E_{mecc} = \frac{1}{2}I_z\omega^2 + U \quad (12.40)$$

Si avrà in generale in una roto-traslazione che l'energia cinetica sarà data da una componente di rotazione e da una di traslazione, e sarà dunque:

$$E_{cin}^{tot} = \frac{1}{2}I_z\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{cm}^2 \quad (12.41)$$

## Capitolo 13

# Moto di Puro Rotolamento

### 13.1 Cinematica

Consideriamo un corpo cilindrico su di un piano:

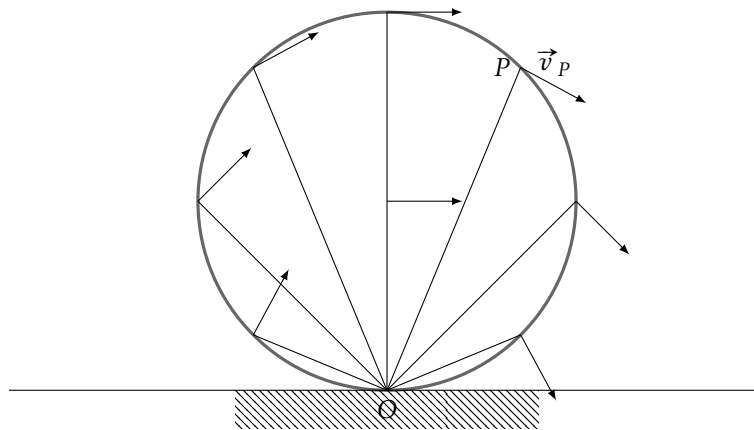


Grafico 13.1: Cilindro in Moto di Puro rotolamento

Definiamo il suo moto di **puro rotolamento** se i punti di contatto tra cilindro e piano hanno velocità nulla.

In queste ipotesi torna utile scegliere come polo proprio il punto di contatto. Si avrà così che ogni punto avrà velocità ortogonale rispetto al braccio tra il punto e il polo stesso, ovvero:

$$\forall P : \vec{v}_P \cdot \overline{OP} = 0 \quad (13.1)$$

Dalla scelta del polo, avremo che la rotazione di questo corpo sarà una rotazione con asse di rotazione parallelo all'asse del corpo e posto sulla linea di contatto tra corpo e piano. In altre parole l'asse di rotazione varia ad ogni istante e il centro di rotazione coincide col punto di contatto istantaneo.

Questo campo di velocità si può scomporre in quello di un moto di traslazione in cui ogni punto ha velocità uguale a quella del centro di massa:

$$\forall P: \vec{v}_P^T = \vec{v}_{cm} \quad (13.2)$$

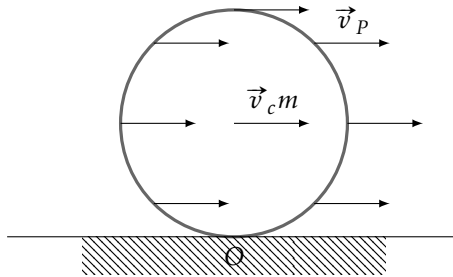


Grafico 13.2: Traslazione Cilindro

Ed uno di rotazione attorno all'asse centrale del corpo e in cui ogni punto ha velocità pari a:

$$\forall P: \vec{v}_P^\perp = \omega \wedge \overline{O'P} \quad (13.3)$$

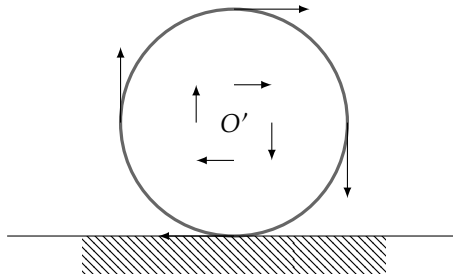


Grafico 13.3: Rotazione Cilindro

Per mantenere la condizione di puro rotolamento, ovvero che il punto di contatto abbia velocità nulla, è necessaria la presenza di una **forza di reazione** tra piano e ruota.

Si avrà in oltre che la velocità di un generico punto sarà:

$$\forall P: \vec{v}_P = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \wedge \overline{O'P} \quad (13.4)$$

In oltre, considerando la distanza massima dal centro  $O'$  come  $R$ , dall'ipotesi di puro rotolamento abbiamo:

$$\vec{v}_O = 0 \implies \vec{v}_{cm} = -\vec{\omega} \wedge \overline{OO'} = -\omega R \cdot \hat{v}_{cm} \implies v_{cm} = \omega R \quad (13.5)$$

Derivando, otteniamo che l'accelerazione del centro di massa è:

$$a_{cm} = \alpha R \quad (13.6)$$

Dove  $a_{cm}$  è generata da forze esterne non nulle, ovvero dalla prima equazione cardinale, mentre  $\alpha$  da momenti di forze esterne non nulli, ovvero dalla seconda equazione cardinale.



## 13.2 Dinamica

Come detto già nello scorso paragrafo, per questo moto è necessaria una forza di reazione, tendenzialmente d'attrito. Analizziamo dunque le forze del corpo:

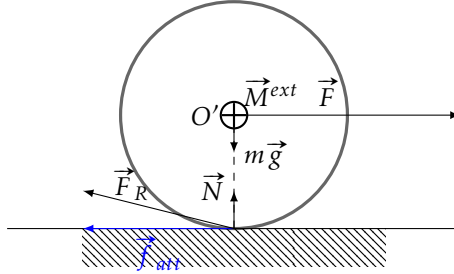


Grafico 13.4: Dinamica Puro Rotolamento

In questo esempio abbiamo una forza orizzontale applicata al centro di massa  $\vec{F}$ , la forza peso del corpo  $m\vec{g}$  e una forza di reazione del piano  $\vec{F}_R = \vec{f}_{att} + \vec{N}$ . Analizziamo il moto separatamente. Per la traslazione usiamo la seconda legge della dinamica e dividiamo il moto sui due assi:

$$m\vec{a}_{cm} = \vec{F} + \vec{F}_R + m\vec{g} = \begin{cases} ma_{cm} = F - f_{att}; & \hat{x} \\ 0 = N - mg; & \hat{y} \end{cases} \quad (13.7)$$

Per la rotazione consideriamo il centro  $O'$  come polo ottenendo un momento entrante:

$$\vec{M}^{ext} = \vec{R} \wedge \vec{F}_R = I\vec{\alpha} \quad (13.8)$$

Essendo l'attrito ortogonale al raggio e la normale parallela si ha

$$\vec{R} \wedge \vec{F}_R = Rf_{att} = I\vec{\alpha} \quad (13.9)$$

Considerando infine la relazione 13.6 tra accelerazione angolare e traslazionale abbiamo:

$$I \frac{a_{cm}}{R} = Rf_{att} \implies f_{att} = I \frac{a_{cm}}{R^2} \quad (13.10)$$

Sostituendo nella prima delle equazioni del moto 13.7 otteniamo:

$$ma_{cm} = F - I \frac{a_{cm}}{R^2} \implies ma_{cm} + I \frac{a_{cm}}{R^2} = F \implies a_{cm} \left( m + \frac{I}{R^2} \right) = F \implies a_{cm} = \frac{F}{\left( m + \frac{I}{R^2} \right)} \quad (13.11)$$

Possiamo infine dunque ottenere la forza d'attrito sostituendo a retroso:

$$f_{att} = \frac{I}{R^2} a_{cm} = \frac{I}{R^2} \frac{F}{\left( m + \frac{I}{R^2} \right)} = F \frac{I}{(R^2 m + I)} = F \frac{I}{I \left( \frac{R^2 m}{I} + 1 \right)} = \frac{F}{\left( 1 + \frac{R^2 m}{I} \right)} \quad (13.12)$$

Per la condizione di puro rotolamento, il punto di contatto dev'essere in un regime statico, ovvero la forza d'attrito non deve superare la forza  $\mu_s N = \mu_s mg$ . Di conseguenza avremo che la condizione di puro rotolamento è:

$$\frac{F}{\left( 1 + \frac{R^2 m}{I} \right)} = f_{att} \leq \mu_s mg \implies F \leq \mu_s mg \left( 1 + \frac{mR^2}{I} \right) \equiv F_{max} \quad (13.13)$$

Definiamo questa grandezza come  $F_{max}$  poiché se si ha  $F > F_{max}$  la condizione di puro rotolamento è rotta e il corpo *striscia*

Analizziamo ora il caso in cui sul corpo venga indotto un momento esterno  $M$  invece che una forza.

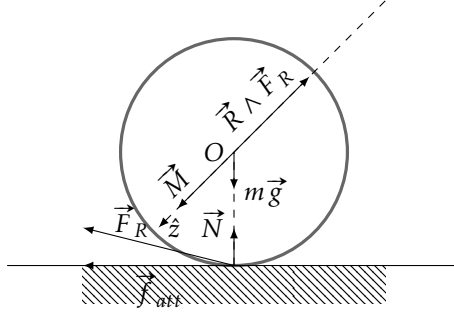


Grafico 13.5: Dinamica Puro Rotolamento

Analizziamo in primo luogo il moto del centro di massa. Avremo:

$$m \vec{a}_{cm} = \vec{F}_R + m \vec{g} = \begin{cases} ma_{cm} = f_{att}; & \hat{x} \\ 0 = N - mg; & \hat{y} \end{cases} \quad (13.14)$$

Consideriamo poi la seconda equazione cardinale, ovvero:

$$\vec{M} + \vec{R} \wedge \vec{F}_R = \vec{M}^{ext} = I \vec{\alpha} \quad (13.15)$$

Unendo il moto lungo l'asse  $\hat{x}$  e la rotazione del corpo abbiamo:

$$I \alpha = M - R f_{att} = M - R m a_{cm} \quad (13.16)$$

Utilizzando ancora la relazione 13.6 possiamo isolare l'accelerazione del centro di massa, e così ottenere:

$$I \frac{a_c m}{R} = M - R m a_{cm} \Rightarrow I \frac{a_c m}{R} + R m a_{cm} = M \Rightarrow a_c m = \frac{M}{mR \left( \frac{I}{mR^2} + 1 \right)} \quad (13.17)$$

Da cui possiamo ricostruire la forza d'attrito:

$$f_{att} = m a_{cm} = m \frac{M}{mR \left( \frac{I}{mR^2} + 1 \right)} = \frac{M}{R \left( \frac{I}{mR^2} + 1 \right)} \quad (13.18)$$

Infine, considerando la condizione di puro rotolamento abbiamo:

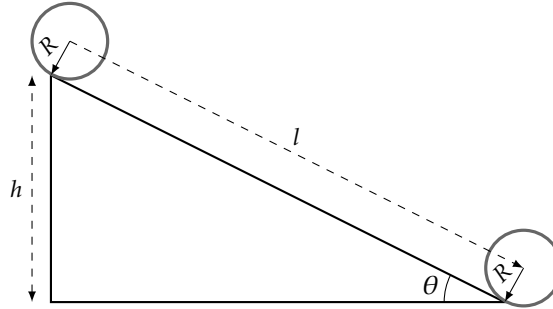
$$f_{att} \leq \mu_s mg \Rightarrow \frac{M}{R \left( \frac{I}{mR^2} + 1 \right)} \leq \mu_s mg \Rightarrow M \leq \mu_s mg R \left( \frac{I}{mR^2} + 1 \right) \equiv M_{max} \quad (13.19)$$

Ottenendo così il momento massimo applicabile per rientrare nel regime di puro rotolamento. Si noti che in questo caso l'accelerazione del centro di massa è causata puramente dall'attrito, poiché è stato indotto un momento e non una forza.

### 13.3 Esempio applicativo su piano inclinato

Per concludere l'argomento del puro rotolamento trattiamo ora un esempio di applicazione dei concetti appena appresi.

Considerare un cilindro pieno di raggio  $R$  e massa  $m$  distribuito uniformemente che *rotola senza strisciare*<sup>i</sup> dalla cima di un piano inclinato di altezza  $h$ .



Innanzitutto è possibile calcolare la velocità del centro di massa  $\vec{v}_{cm}$  utilizzando la conservazione dell'energia meccanica. Essendo che il corpo parte da fermo ed è sottoposto alla forza peso avremo che:

$$E_{cin}^i + U^i = E_{cin}^f + U^f \Rightarrow mgh = E_{cin}^f = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (13.20)$$

Dove  $I$  è il momento di inerzia del corpo rispetto ad un suo asse principale. Inoltre, dal puro rotolamento avremo che  $v_{cm} = R\omega$ . Otteniamo dunque che:

$$mgh = \frac{1}{2}I\frac{v_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv_{cm}^2 \Rightarrow mgh = \frac{v_{cm}^2}{2}\left(\frac{I}{R^2} + m\right) \Rightarrow v_{cm}^2 = \frac{2mgh}{m\left(\frac{I}{mR^2} + 1\right)} = \frac{2gh}{\left(\frac{I}{mR^2} + 1\right)} \quad (13.21)$$

Si ottiene dunque che:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{I}{mR^2} + 1\right)}} \quad (13.22)$$

Ricordando che nel caso di sola traslazione in esempi analoghi avremmo ottenuto come velocità  $v_{cm}^T = \sqrt{2gh}$  che è sicuramente maggiore del nostro risultato possiamo verificare che parte dell'energia cinetica è trasformata in energia di *rotazione*. Inoltre essendo il nostro corpo un cilindro pieno con distribuzione uniforme di massa, il momento d'inerzia varrà  $I = \frac{1}{2}mR^2$ <sup>ii</sup>, da cui è possibile ottenere:

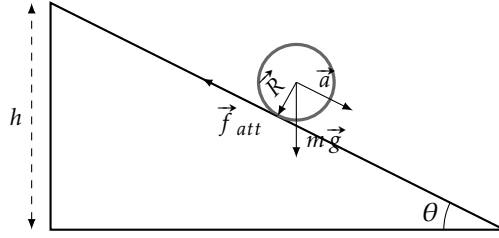
$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{mR^2}{2mR^2} + 1\right)}} = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{1}{2} + 1\right)}} = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{3}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} \quad (13.23)$$

Si noti che in caso di informazioni meno precise su forma, distribuzione di massa e asse di rotazione, quest'assunzione sul momento d'inerzia non sarebbe necessariamente valida, e saremmo dunque costretti a portarci nei calcoli  $I$ .

<sup>i</sup>Con "rotola senza strisciare" si intende solitamente un corpo in un moto di puro rotolamento.

<sup>ii</sup>Questo momento d'inerzia è calcolabile coi soliti integrali visti nei capitoli precedenti, ma per ragioni di praticità si consiglia di consultare la tabella presente *qui* nella sezione "Tabella dei momenti di inerzia dei principali corpi rigidi" per i momenti d'inerzia delle forme più comuni.

Consideriamo ora la dinamica del moto.



Analizziamo le due equazioni cardinali, lungo l'asse x per la prima e lungo l'asse passante per il centro di massa per la seconda:

$$\begin{cases} ma_{cm} = mg \sin(\theta) - f_{att}; \\ Rf_{att} = I\alpha = I \frac{a_{cm}}{R}; \end{cases} = \begin{cases} ma_{cm} = mg \sin(\theta) - f_{att}; \\ \frac{R^2 f_{att}}{I} = a_{cm}; \end{cases} = \begin{cases} m \frac{R^2 f_{att}}{I} = mg \sin(\theta) - f_{att}; \\ a_{cm} = \frac{R^2 f_{att}}{I}; \end{cases} \quad (13.24)$$

Da cui possiamo ricavare la forza d'attrito:

$$m \frac{R^2 f_{att}}{I} = mg \sin(\theta) - f_{att} \implies m \frac{R^2 f_{att}}{I} + f_{att} = mg \sin(\theta) \implies f_{att} \left( 1 + \frac{mR^2}{I} \right) = mg \sin(\theta) \quad (13.25)$$

Da cui la forza d'attrito sarà:

$$f_{att} = \frac{mg \sin(\theta)}{\left( 1 + \frac{mR^2}{I} \right)} \quad (13.26)$$

Da cui possiamo calcolare l'accelerazione del centro di massa come:

$$a_{cm} = \frac{R^2 f_{att}}{I} = \frac{mg \sin(\theta)}{\left( 1 + \frac{mR^2}{I} \right)} \frac{R^2}{I} = \frac{mg \sin(\theta)}{\left( \frac{I + mR^2}{I} \right)} \frac{R^2}{I} = \frac{mg \sin(\theta)}{(I + mR^2)} R^2 = \frac{g \sin(\theta)}{\left( \frac{I}{mR^2} + 1 \right)} \quad (13.27)$$

Possiamo dunque utilizzare la legge oraria per ricavare il tempo che il corpo impiega ad arrivare alla fine del piano:

$$x(\bar{t}) = l = \frac{h}{\sin \theta} = \frac{1}{2} a_{cm} \bar{t}^2 \implies \bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{a_{cm} \sin \theta}} \quad (13.28)$$

Di conseguenza la velocità che il corpo impiega ad arrivare alla fine del piano sarà:

$$v_{cm} = a_{cm} \bar{t} = a_{cm} \sqrt{\frac{2h}{a_{cm} \sin \theta}} = \sqrt{\frac{2ha_{cm}^2}{a_{cm} \sin \theta}} = \sqrt{\frac{2ha_{cm}}{\sin \theta}} = \sqrt{\frac{2h}{\sin \theta} \frac{g \sin(\theta)}{\left( \frac{I}{mR^2} + 1 \right)}} \quad (13.29)$$

Avremo dunque che la velocità del centro di massa sarà:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2hg}{\left( \frac{I}{mR^2} + 1 \right)}} \quad (13.30)$$

Overo lo stesso risultato ottenuto usando la conservazione dell'energia.

Analizziamo infine per quali angoli  $\theta$  è verificata la condizione di puro rotolamento.

Come abbiamo visto, per avere un puro rotolamento il punto di contatto deve trovarsi in un regime di attrito statico, ovvero:

$$f_{att} \leq \mu_s N \quad (13.31)$$

Dall'equazione del moto lungo l'asse y sappiamo che:

$$N = mg \cos \theta \quad (13.32)$$

da cui abbiamo:

$$\frac{mg \sin(\theta)}{\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)} = f_{att} \leq \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta \quad (13.33)$$

Semplificando la disequazione si avrà:

$$\frac{mg \sin(\theta)}{\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)} \leq \mu_s mg \cos \theta \implies \frac{\sin(\theta)}{\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)} \leq \mu_s \cos \theta \implies \tan \theta \leq \mu_s \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right) \quad (13.34)$$

Avremo in fine dunque che l'angolo massimo per garantire la condizione di puro rotolamento sarà:

$$\theta_{max} = \arctan \left[ \mu_s \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right) \right] \quad (13.35)$$

## **Part VII**

# **Elementi di Fluidodinamica**

# Capitolo 14

## Introduzione e Teoremi

### 14.1 Introduzione

Il fluido è una sostanza liquida o gassosa priva di forma propria ma che assume la forma del recipiente che la contiene. I fluidi possono essere distinti in:

- **Liquidi:** i quali sono caratterizzati da un volume definito ed una superficie limite;
- **Gas:** i quali sono privi di volume proprio tendono ad occupare tutto il volume a disposizione.

I fluidi da un punto di vista macroscopico sono sistemi continui, cioè composti da un numero, infinito di elementi, ciascuno di massa  $dm$ :

$$dm = \rho dV \quad \text{con } \rho = \frac{\text{densità}}{\text{del fluido}} \quad (14.1)$$

La caratteristica principale di un fluido, rispetto ad un corpo, è la possibilità di scorrimento di una qualsiasi parte di fluido rispetto ad un'altra. A questo scorrimento sono associate proprietà viscose del fluido legate all'attrito tra diverse parti del fluido.

Restringiamo lo studio ai fluidi **ideali**: I fluidi **ideali**, sono fluidi privi di attrito e incompressibili, ovvero con densità  $\rho_l = \text{costante}$ .

In particolare, in un fluido ideale le forze tra gli elementi del fluido sono **sempre ortogonali** alla superficie di contatto.

Possiamo dunque caratterizzare l'azione delle forze in un punto del fluido attraverso il rapporto tra:

$$P = \frac{dF_n}{dS} \quad (14.2)$$

In cui:

- 1)  $dF_n$  è la forza normale su una superficie che circonda il punto;
- 2)  $dS$  è l'area della superficie;
- 3)  $P$  è la pressione in un punto del fluido.<sup>i</sup>

L'unità di misura della pressione è il Pascal (Pa), dove:

$$1Pa = 1N/m^2 \quad (14.3)$$

Esempio significativo è la pressione atmosferica  $P_0 = 1,01325 \times 10^5 Pa$ .

---

<sup>i</sup>Nota: Se la forza è costante abbiamo  $P = \frac{F_n}{S}$

## 14.2 Legge di Stevino

Una prima considerazione importante che è possibile fare su i fluidi è che una superficie immersa in un fluido subirà più pressione al crescere della profondità. Infatti una superficie  $dS_A$  posta sulla superficie del fluido subirà solo la pressione esterna atmosferica:

$$P_A = \frac{dF}{dS_A} = \frac{dF_{ext}}{dS_A} \quad (14.4)$$

Se considerassimo invece un'uguale superficie  $dS_B$  immersa ad una profondità  $h$ , su di essa imprimerebbe pressione anche la forza peso della colonna di fluido che la sovrasta. Si avrebbe infatti che:

$$P_B = \frac{dF}{dS_B} = \frac{dF_{ext}}{dS_B} + \frac{dF_g}{dS_B} \quad (14.5)$$

Sfruttando la nozione di densità appresa negli scorsi capitoli per esprimere la massa di fluido otterremmo dunque che:

$$P_B = \frac{dF_{ext}}{dS_B} + g\rho_l \frac{dV}{dS_B} = \frac{dF_{ext}}{dS_B} + g\rho_l h \quad (14.6)$$

Questa osservazione è formalizzata dalla legge di Stevino, che ci dice che, in un liquido,  $P$  cresce linearmente con la profondità. Questa legge è formalizzata matematicamente come:

$$P(h) = P_0 + \rho_l gh \quad (14.7)$$

Dalla legge di Stevino seguono due principi importanti.

### 14.2.1 Principio di Pascal

Il principio di Pascal dice che, in un fluido incompressibile, la variazione di pressione in un punto si trasmette inalterata in ogni altro punto del fluido. Entrambe le superfici, ovvero  $S_1$  e  $S_2$  si troveranno dunque alla stessa altezza in assenza di forze.

Se venisse applicata una forza esterna  $F$  a  $S_1$  si avrebbe che:

$$P_1 = \frac{F_1}{S_1} \quad (14.8)$$

La pressione dunque si propagherebbe ad  $S_2$ , e con  $P_1 = P_2$  si ha:

$$\frac{F_1}{S_1} = P_1 = P_2 = \frac{F_2}{S_2} \implies F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} \quad (14.9)$$

Se  $S_2 > S_1$ , ovvero il rapporto tra le superfici è maggiore di 1, si avrà la forza indotta dalla pressione è maggiore di quella applicata in  $S_1$ . Questo sistema di aumento della forza è chiamata pressa idraulica.

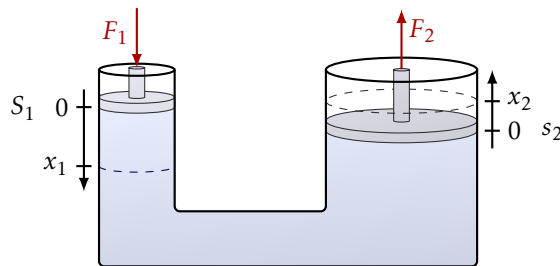


Grafico 14.1: Differenza di altezza in un contenitore



### 14.2.2 Principio di Archimede

Immaginiamo di immergere in un liquido di densità  $\rho_l$  a una profondità  $h$ , un corpo di spessore  $d$ .

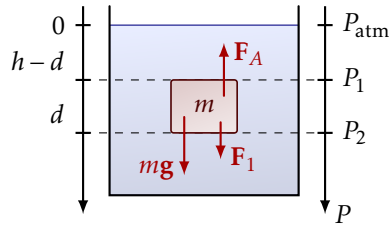


Grafico 14.2: Spinte di Archimede

Secondo la legge di Stevino sappiamo che la pressione su  $dS_2$  sarà maggiore di quella su  $dS_1$ .

$$P_2 = \rho_l g h; \quad P_1 = \rho_l g (h - d) \quad (14.10)$$

La differenza di pressione sulle due superfici del corpo si traduce in una risultante di pressione  $P_{diff}$  del fluido dal **basso verso l'alto** che genera una **forza costante**. Si ha che la pressione sarà:

$$P_{diff} = P_2 - P_1 = \rho_l g h - \rho_l g (h - d) = \rho_l g (h - h + d) = \rho_l g d \quad (14.11)$$

E di conseguenza la forza sarà:

$$F_{tot} = \Delta P_{diff} \cdot S = \rho_l g d \cdot S \quad (14.12)$$

Ma essendo:

$$d \cdot S = V_{corpo} \quad (\text{Ovvero il volume del corpo immerso}) \quad (14.13)$$

Si avrà:

$$\vec{F}_A = \rho_l g V_{corpo} (-\hat{g}) \quad (14.14)$$

È importante notare come la forza (detta spinta di Archimede) è proporzionale alla densità **del liquido** per il volume **del corpo** immerso in esso, che corrisponde al peso del liquido spostato.

## 14.3 Moto di un fluido

Consideriamo un fluido in moto, ad esempio all'interno di un condotto.

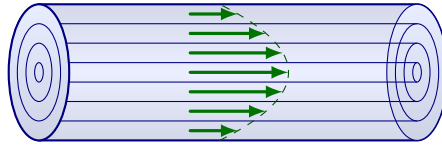


Grafico 14.3: Moto di un fluido all'interno di un condotto

Dato un punto  $P$ , guardiamo il moto del fluido attraverso un volumetto centrato in  $P$  (punto di vista Euleriano).

Restringiamo lo studio al caso in cui il campo della velocità è indipendente dal tempo <sup>ii</sup>:

$$\vec{v} \equiv \vec{v}(x, y, z) \quad (14.15)$$

In tal caso si parla di **regime stazionario**.

Definiamo portata del tubo di flusso  $Q$ , il volume di fluido che passa attraverso la sezione  $dS$  nell'unità di tempo. Abbiamo che:

$$dQ = \frac{dV}{dt} = \frac{dS \cdot dx}{dt} = dS \cdot v \quad (14.16)$$

Da qui risolviamo per  $Q$ :

$$Q = \int_S dQ = \int_S v dS = v_m S \quad (14.17)$$

Con  $v_m$  la velocità media nei punti della sezione.

## 14.4 Legge di Leonardo

In regime stazionario, la portata di fluido è uguale attraverso qualsiasi sezione  $S$ .

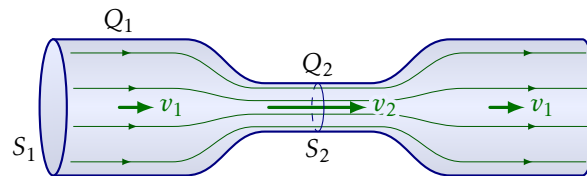


Grafico 14.4: Legge di Leonardo in un Tubo di Venturi

Dove:

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (14.18)$$

Si avrà dunque che se il fluido passa da una sezione più grande  $S_1$  ad una più piccola  $S_2$  si avrà un aumento di velocità:

$$S_1 v_1 = Q_1 = Q_2 = S_2 v_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} > v_1 \quad (14.19)$$

<sup>ii</sup>Ricorda: Tutti gli elementi di fluido che passano per  $P$  hanno sempre la stessa velocità. Questo vale per tutti i punti  $P$  e viene definito, campo di velocità costante.

## 14.5 Teorema di Bernouilli

Consideriamo un fluido ideale che scorre dentro un tubo di sezione variabile in condizioni di regime stazionario.

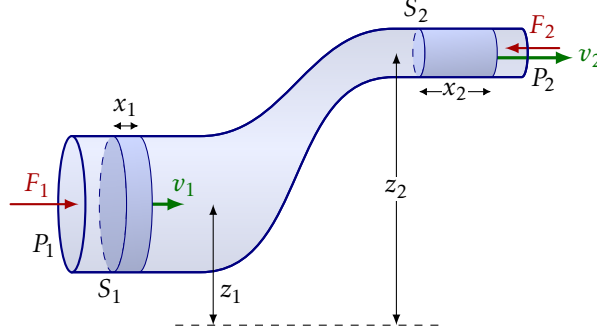


Grafico 14.5: Esempio di tubo nelle condizioni di Bernouilli

Per ricavare la relazione tra velocità e pressione del fluido nelle diverse sezioni del tubo usiamo il teorema dell'energia cinetica.

$$\mathcal{L}_{ext} = \Delta E_{cin} \quad (14.20)$$

Prendiamo in considerazione le forze esterne agenti sul volume del fluido  $dV_i$ :

- 1) Forza peso;
- 2) Forza di pressione;
- 3) Nessuna forza di attrito (fluido ideale).

Con il lavoro della forza peso che vale:

$$d\mathcal{L}_{peso} = -\Delta U = -dmg(z_2 - z_1) = -\rho_l dV g(z_2 - z_1) \quad (14.21)$$

E quello della pressione che vale:

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_{press} &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{x}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{x}_2 \\ &= P_1 S_1 dx_1 - P_2 S_2 dx_2 \\ &= P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2 = (P_1 - P_2) dV \end{aligned} \quad (14.22)$$

La variazione dell'energia cinetica è data da:

$$\begin{aligned} \Delta(dE_{cin}) &= \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2) = \\ &= \frac{1}{2} \rho_l dV (v_2^2 - v_1^2) \end{aligned} \quad (14.23)$$

Dunque usando  $d\mathcal{L}_{ext} = \Delta(\delta E_{cin})$  si ha:

$$-\rho_l dV g(z_2 - z_1) + (P_1 - P_2) \cdot dV = d\mathcal{L}_{ext} = \Delta(\delta E_{cin}) = \frac{1}{2} \rho_l dV (v_2^2 - v_1^2) \quad (14.24)$$

Dunque:

$$-\rho_l dV g(z_2 - z_1) + (P_1 - P_2) \cdot dV = \frac{1}{2} \rho_l dV (v_2^2 - v_1^2) \quad (14.25)$$

Divido per  $dV$ :

$$-\rho_l g(z_2 - z_1) + (P_1 - P_2) = \frac{1}{2} \rho_l (v_2^2 - v_1^2) \quad (14.26)$$

Infine separo in 1 e 2 ottenendo:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho_l v_1^2 + \rho_l g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho_l v_2^2 + \rho_l g z_2 \quad (14.27)$$

Abbiamo dunque ottenuto che questa quantità non cambia in diverse sezioni di flusso, ovvero:

$$P + \frac{1}{2} \rho_l v^2 + \rho_l g z = \text{costante} \quad (\text{lungo un generico tubo di flusso}) \quad (14.28)$$

## Capitolo 15

# Applicazioni del teorema di Bernoulli

### 15.1 Tubo di Venturi

Il tubo di Venturi è un condotto a sezione variabile (fluido ideale)

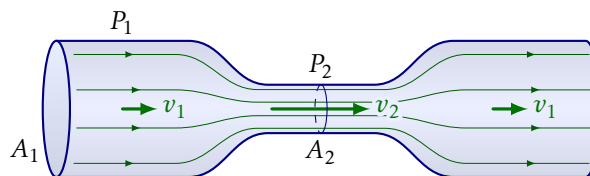


Grafico 15.1: Tubo di Venturi

Esso viene usato con:

- 1) Bernoulli (con  $\Delta z = 0$ ):

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho_l v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho_l v_2^2 \quad (15.1)$$

- 2) Conservazione della portata:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (15.2)$$

Misurando le pressioni nelle due sezioni trovo la velocità <sup>i</sup>:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho_l} \frac{S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} \\ v_2 &= \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho_l} \frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2}} \end{aligned} \quad (15.3)$$

---

<sup>i</sup>Per ottenere queste formule è sufficiente isolare una delle due velocità nell'equazione della conservazione della portata, sostituire il risultato nell'equazione di Bernoulli in modo da ridurci ad un'unica incognita e infine isolarla.

## 15.2 Tubo di Pitot

Un'altra applicazione della legge di Bernoulli è il tubo di Pitot, che consiste in un tubo di fluido in presenza di un ostacolo al suo interno.

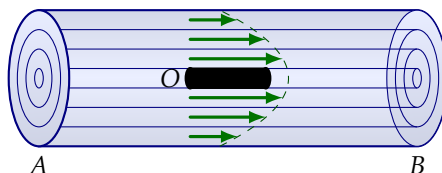


Grafico 15.2: Tubo di Pitot

Il punto  $O$ , ovvero la sezione di tubo in cui il fluido incontra l'ostacolo è detta **punto di stagnazione**, poiché lì il fluido è in quiete ( $\vec{v}_O = 0$ ). Da Bernoulli (ancora con  $\Delta z = 0$ ) sappiamo che:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho_l v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho_l v_B^2 = P_O \quad (15.4)$$

Da questa relazione possiamo ricavare la velocità relativa tra fluido e ostacolo, ovvero ad esempio la velocità dell'oggetto rispetto al fluido:

$$v_B = \sqrt{\frac{2(P_O - P_B)}{\rho_l}} \quad (15.5)$$

## 15.3 Teorema di Torricelli

Determinare la velocità del fluido in uscita dal foro.

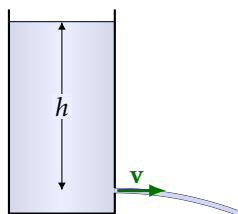


Grafico 15.3: Recipiente con foro

In superficie la velocità del fluido è pressoché nulla, perché l'acqua defluisce molto lentamente. E quindi abbiamo che:

$$v_{SUP} \approx 0 \quad (15.6)$$

Consideriamo un fluido di flusso ideale che connette il foro alla superficie. Usando Bernoulli trovo che:

$$(P + \frac{1}{2}\rho_l v^2 + \rho_l g z)_{sup} = (P + \frac{1}{2}\rho_l v^2 + \rho_l g z)_{foro} \quad (15.7)$$

Dove in superficie abbiamo:

$$P = P_0; \quad v = 0; \quad z = h \quad (15.8)$$

In questo caso  $P_0$  può essere, per esempio, la pressione atmosferica. Mentre al foro:

$$P = P_0; \quad z = 0; \quad v = ? \quad (15.9)$$

Troviamo quindi:

$$P_0 + \rho_l g h = P_0 + \frac{1}{2} \rho_l v^2 \quad (15.10)$$

Si ha dunque:

$$v = \sqrt{2gh} \quad (15.11)$$

È importante notare come la velocità del flusso non dipende da  $\rho_l$ , né da  $P_0$ , ma solo dall'altezza del tubo.

## **Part VIII**

# **Elementi di Termodinamica**



# Capitolo 16

## Introduzione

### 16.1 Introduzione

Per sistemi complessi, ovvero nell'ordine di  $N \approx 10^{24}$  *molecole*, ha maggior senso passare ad una descrizione **macroscopica dei fenomeni** e **non meccanica** del sistema. È possibile utilizzare due approcci:

- **meccanica statistica**: si basa sui principi della meccanica classica e quantistica e deduce le proprietà *macroscopiche* a partire dalle *microscopiche* utilizzando un approccio **statistico**;
- **termodinamica** determina le relazioni fra le proprietà di interesse macroscopiche (non meccaniche) come ad esempio le "grandezze termodinamiche" ovvero:
  - Pressione
  - Volume
  - Temperatura

Chiaramente, per questo corso si preferirà l'approccio termodinamico dei fenomeni. I *principi* su cui è basata la termodinamica sono **autonomi** rispetto a quelli della **meccanica**, sono basati sull'esperienza e dunque hanno un carattere **generale**, indipendenti dallo specifico sistema e dalla sua costituzione. Questi principi infatti sono comuni allo studio dei gas e della teoria dell'informazione.

#### 16.1.1 Variabili Termodinamiche

Le grandezze termodinamiche sono grandezze *macroscopiche* riferite ad un sistema in condizione **stazionarie**, ovvero di equilibrio termodinamico. Ne sono esempio:

- Pressione
- Volume
- Temperatura

In generale, le variabili termodinamiche che caratterizzano un sistema **non sono indipendenti**, ma sono legate tra loro da una relazione funzionale detta **equazione di stato**.

Nello specifico, uno **stato termodinamico** è definito quando le variabili termodinamiche sono definite in ogni punto del sistema e **non dipendono dal tempo**.

Noi ci occuperemo della trattazione di uno specifico sistema termodinamico, ovvero dei **gas ideali**, più comunemente detti **gas perfetti**, ovvero dei gas le cui molecole **non interagiscono tra loro**.

L'equazione di stato dei gas perfetti è:

$$PV = nRT \quad (16.1)$$

Dove:

- $T$  indica la **temperatura assoluta** e si misura in gradi kelvin ( $K$ )<sup>i</sup>;
- $n$  è il **numero di moli** <sup>ii</sup> di gas;
- $R$  è la **costante dei gas**  $R = 8,31 J K^{-1} mol^{-1}$ ;
- $P$  è la pressione del gas;
- $V$  è il volume del gas;

Quest'equazione di stato ci dice che:

1. Con  $T = \text{cost}$  si ha  $V \propto P^{-1}$ , questa è detta *Legge di Boyle*;
2. Con  $P = \text{cost}$  si ha  $V \propto T$ , questa è detta *legge di Gat-Lussac*;
3. Volumi uguali di gas, nelle stesse condizioni di pressione e temperatura contengono lo stesso numero di molecole  $N = N_A n$
4. In oltre è possibile misurare la pressione con un argomento di meccanica statistica per ricavare l'energia cinetica media del sistema.

## 16.2 Energia media

Riguardo quest'ultimo punto, è possibile procedere considerando un cubo di gas come segue<sup>iii</sup>:

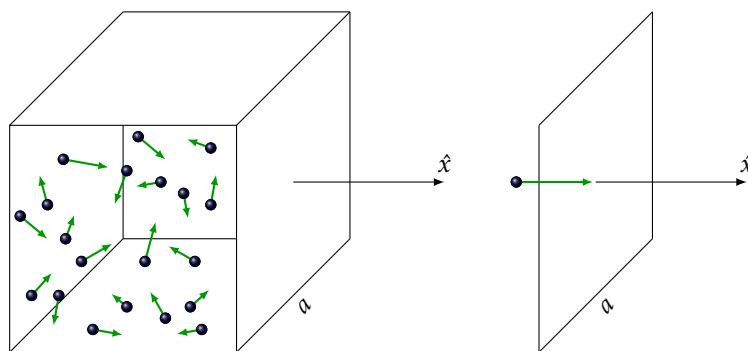


Grafico 16.1: Cubo di gas

Consideriamo un singolo atomo che urta la parete del cubo. La quantità di moto del singolo atomo sarà  $\vec{p}_i = m \vec{v}_i$ .

<sup>i</sup>I gradi Celsius non sono riconosciuti dal sistema internazionale di misura come ufficiali, ma sono contemplati come alternativa, essendo la conversione da Celsius a Kelvin lineare. Si ha infatti che  $0C = 273,15K$

<sup>ii</sup>Nel Sistema Internazionale la mole è un'unità fondamentale di quantità di materia. In particolare con  $1mol$  si indica la quantità di materia che contiene un **numero di Avogadro** di molecole, ovvero  $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ .

<sup>iii</sup>In questo file si è data precedenza alla trattazione fatta effettivamente dal professore sull'argomento, nonostante sia un po' confusionaria e complessa. Per una trattazione alternativa, un po' più semplice ma con meno dettagli, si consiglia questo *file* pagine 3 e 4

Si avrà che nell'urto con la parete (perfettamente elastico lungo  $\hat{x}$ )<sup>iv</sup>, la variazione di quantità di moto sarà:

$$\Delta p_i^{(x)} = -2mv_i^{(x)} \quad (16.2)$$

Che corrisponde ad un impulso sulla parete di:

$$\mathbb{P}_i^{(x)} = 2mv_i^{(x)} \quad (16.3)$$

Il tempo che intercorre tra due urti consecutivi sulla stessa parete sarà dunque:

$$T = \frac{2a}{v_i^{(x)}} \quad (16.4)$$

Essendo poi la frequenza d'urto l'inverso del periodo  $T$ , ma anche il numero di urti in unità di tempo:

$$\frac{v_i^{(x)}}{2a} = \frac{1}{T} = f = \frac{\#_{\Delta t}}{\Delta t} \quad (16.5)$$

Si avrà che, statisticamente parlando, la particella urterà la parete un numero di volte pari a:

$$\#_{\Delta t} = \frac{v_i^{(x)} \Delta t}{2a} \quad (16.6)$$

Segue dunque che, in un intervallo di tempo  $\Delta t$ , un singolo atomo trasferisce una quantità di impulso alla parete pari a.

$$\mathbb{P}_{i\Delta t}^{(x)} = \#_{\Delta t} \mathbb{P}_i^{(x)} = \frac{2mv_{xi}^2 \Delta t}{2a} = \frac{mv_{xi}^2 \Delta t}{a} \quad (16.7)$$

L'insieme degli atomi dunque trasferirà un impulso pari a:

$$\mathbb{P}_{\Delta t}^{(x)} = \sum_i \mathbb{P}_{i\Delta t}^{(x)} = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{xi}^2 \Delta t}{a} \quad (16.8)$$

Inoltre, usando il secondo principio della dinamica<sup>v</sup>, possiamo notare che:

$$F_i^{(x)} = \frac{\Delta p_i^{(x)}}{T} = \frac{2mv_{xi}}{T} = \frac{mv_{xi}^2}{a} \quad (16.9)$$

Possiamo dunque sostituire nell'equazione precedente e ottenere:

$$\mathbb{P}_{\Delta t}^{(x)} = F^{(x)} \Delta t \quad (16.10)$$

In fine dunque la pressione esercitata dal gas su una faccia del cubo  $a^2$  sarà:

$$P^{(x)} = \frac{F^{(x)}}{a^2} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^N \frac{mv_{xi}^2}{a} = \frac{1}{a^3} \sum_{i=1}^N mv_{xi}^2 = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N mv_{xi}^2 \quad (16.11)$$

Inoltre per  $N$  molto grande, è possibile supporre che il gas sia **isotropo**, ovvero tale che  $v_i^{(x)} = v_i^{(y)} = v_i^{(z)}$ , e che di conseguenza:

$$v_i^{(x)} = \frac{1}{3} v_i \implies P^{(x)} = P = \frac{1}{3} \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N mv_{xi}^2 \quad (16.12)$$

<sup>iv</sup>Gli urti non sono stati trattati all'interno del corso né con materiale didattico né con lezioni frontali. Essenzialmente in un urto perfettamente elastico la quantità di moto rimane invariata in modulo ma ha verso opposto, dunque si ha  $\Delta p = p_2 - p_1 = mv - (-mv) = 2mv$ , ma non ci si preoccupi troppo al riguardo, sarà la prima e ultima volta che verranno menzionati gli urti in questo file.

<sup>v</sup>È stata usata la formulazione della seconda legge di Newton come derivata della quantità di moto, ma senza l'ausilio delle variazioni infinitesime.

Usando infine la definizione di energia cinetica possiamo ottenere che:

$$P = \frac{1}{3} \frac{1}{V} 2E_{cin} \implies PV = \frac{2}{3} E_{cin} \quad (16.13)$$

Possiamo in conclusione ottenere un'equazione riguardo l'energia cinetica media moltiplicando per il numero di atomi presenti nel volume:

$$PV = \frac{2}{3} N \bar{E}_{cin} \implies PV = n \frac{2}{3} N_A \bar{E}_{cin} \quad (16.14)$$

Utilizziamo questa relazione nell'equazione dei gas perfetti ottenendo:

$$n \frac{2}{3} N_A \bar{E}_{cin} = PV = nRT \implies \bar{E}_{cin} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT \quad (16.15)$$

Dove  $k = \frac{R}{N_A} \approx 1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$  è detta costante di Boltzmann.

Possiamo quindi concludere che la Temperatura è direttamente proporzionale all'**energia cinetica media** (di traslazione) delle molecole.

## Capitolo 17

# Trasformazioni Termodinamiche

### 17.1 Trasformazioni Isocore, Isobare e Isoterme

Quando un sistema passa da uno **stato di equilibrio A** ad un **altro stato d'equilibrio B**, si dice che è avvenuta una **trasformazione da A a B**.

Le varie grandezze termodinamiche hanno dei valori ben definiti negli stati di equilibrio, ovvero in A o in B, ma in generale non sempre sono ben definite durante la trasformazione come ad esempio durante l'espansione spontanea di un gas.

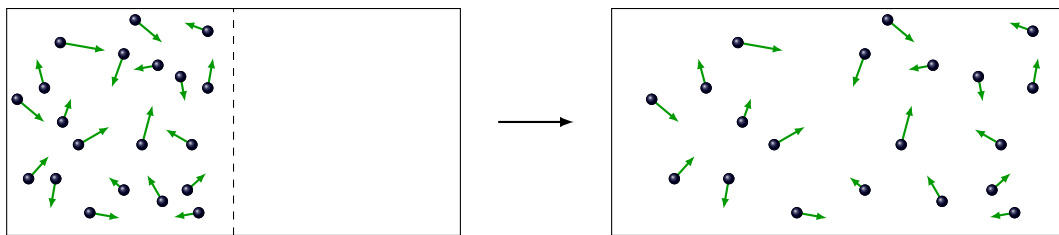


Grafico 17.1: Espansione spontanea di un Gas

È possibile tuttavia regolare la trasformazione di un sistema dall'esterno, in modo da farla avvenire in maniera sufficientemente lenta in modo da farle attraversare vari stati di equilibrio, ad esempio compiendo *lavoro* sul sistema applicando una forza, o ponendo il sistema in un *bagno termico*.

Una trasformazione che avviene per stati di equilibrio, ed è tale che in ognuno di questi stati è possibile invertirla alterando le condizioni esterne, è detta **trasformazione reversibile**. Alternativamente, la trasformazione è detta **irreversibile**.

Esistono alcuni tipi di trasformazioni particolari, per le quali alcune grandezze termodinamiche sono costanti. Nel caso dei gas perfetti, di questo tipo sono le trasformazioni:

- **Isocore**, ovvero con  $V = \text{costante}$ , come ad esempio un contenitore con pareti fisse;
- **isobare**, ovvero con  $P = \text{costante}$ , come ad esempio una trasformazione all'aria aperta;
- **Isoterme**, ovvero con  $T = \text{costante}$ , come ad esempio sistemi a contatto con un termostato;

Per quanto riguarda la *rappresentazione* delle trasformazioni, per quanto riguarda i gas perfetti sono sufficienti due sole variabili termodinamiche, poiché essendo le grandezze legate tra loro, rappresentando la trasformazione come sequenza di stati di equilibrio in un piano

è possibile dare informazioni su tutte e tre le grandezze. Questa rappresentazione è detta **Piano di Clapeyron**.

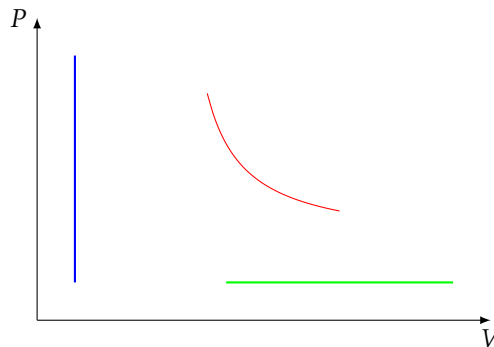


Grafico 17.2: Piano di Clapeyron generico

In una Piano di Clapeyron, essendo che gli assi rappresentano  $P$  e  $V$ , si avrà che le trasformazioni **isocore** saranno rappresentate da rette verticali, quelle **isobare** con rette orizzontali, mentre quelle **isoterme** da rami di iperbole.

Se il sistema durante una trasformazione è *isolato* dall'ambiente esterno, ovvero è indipendente dalla temperatura esterna, la trasformazione è detta **adiabatica**, ovvero si dice che *non c'è scambio di calore*.

## 17.2 Calore

Il **calore**, espresso solitamente come  $Q$ , misura la *variazione di temperatura* di un corpo per via del *contatto* con un altro corpo a temperatura diversa<sup>i</sup>.

La quantità di calore che è necessario trasferire ad una massa  $m$  per variare la temperatura di un  $\Delta T$  è:

$$Q = mc\Delta T \quad (17.1)$$

Dove  $c$  è detto **calore specifico**<sup>ii</sup>, ed è una proprietà intrinseca del corpo, caratteristica della sostanza di cui è fatto.

Definiamo in oltre:

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = mc \quad (17.2)$$

La capacità termica di un corpo.

Consideriamo ora due corpi in **contatto termico** in un recipiente **adiabatico**. I due corpi scambieranno rispettivamente le quantità di calore  $Q_1$  e  $Q_2$ . Essendo il recipiente adiabatico non vi è calore scambiato con l'esterno. Si ha dunque:

$$Q_1 + Q_2 = Q_{tot} = 0 \implies Q_1 = -Q_2 \quad (17.3)$$

Ovvero il corpo più caldo "cede" una quantità di calore pari in modulo a quella assorbita dal corpo più freddo.

Usando:

$$Q_i = m_i c_i (T_i^f - T_i^i) \quad (17.4)$$

<sup>i</sup>È importante notare che *tecnicamente* il calore **non** si scambia, poiché  $Q$  è legato al **lavoro disordinato** associato alle trasformazioni indotte dal contatto tra due corpi.

<sup>ii</sup>Il calore specifico in generale è una funzione della temperatura  $c(T)$ , ma lo assumiamo costante per praticità

E supponendo che i due corpi raggiungano una temperatura finale di equilibrio dopo sufficiente tempo <sup>iii</sup> abbiamo:

$$m_1 c_1 (T_{eq} - T_1^i) = Q_1 = -Q_2 = -m_2 c_2 (T_{eq} - T_2^i) \quad (17.5)$$

Possiamo dunque ricavare che la temperatura di equilibrio:

$$T_{eq} = \frac{m_1 c_1 T_1^i + m_2 c_2 T_2^i}{m_1 c_1 + m_2 c_2} \quad (17.6)$$

Ovvero:

$$T_{eq} = \frac{C_1 T_1^i + C_2 T_2^i}{C_1 + C_2} \quad (17.7)$$

Ovvero la *media pesata* delle temperature dei due corpi, pesata sulle capacità termiche.

### 17.2.1 Cambiamenti di Fase

La formula per il calore fino ad ora usata associa a scambi di calore una variazione di temperatura. Questo però non è necessariamente vero, ed esistono *processi* in cui non vi è variazione di temperatura. Un esempio sono i **cambiamenti di fase**.

Definiamo **cambiamento di fase** il passaggio di una sostanza da uno stato di aggregazione ad un altro.

In un cambiamento di fase lo scambio di calore è caratterizzato da una quantità detta **calore latente**  $\lambda$  tale che:

$$Q = m\lambda \quad (17.8)$$

Consideriamo un esempio per chiarire il ruolo del calore nei cambiamenti di fase.

Consideriamo un pezzo di ghiaccio di massa  $m_1$  a temperatura  $T_1$ , che viene immerso in  $m_2$  d'acqua a temperatura  $T_2$ . Considerando un contenitore adiabatico, e conoscendo calore specifico e calore latente del ghiaccio, calcolare la temperatura d'equilibrio finale  $T_{eq}$ .

Innanzitutto è possibile considerare il sistema come **isolato**, per via dell'ipotesi del recipiente adiabatico. Inoltre è utile dividere lo scambio di calore in tre fasi:

1. Il ghiaccio assorbirà calore fino ad arrivare al punto di fusione (scambio di calore legato ad un  $\Delta T$ ;
2. Il ghiaccio si scioglierà assorbendo calore per cambiare fase (scambio di calore senza variazione di temperatura);
3. Se il ghiaccio si scioglie completamente, l'acqua risultante dal passaggio di stato scambierà calore col resto dell'acqua fino ad un equilibrio termico (scambio di calore senza variazione di temperatura);

Procediamo con ordine in queste fasi per riconoscere come si può comportare il sistema e che temperatura raggiunga.

**1)** Per arrivare al punto di fusione dell'acqua  $T_0$ , il ghiaccio dovrà assorbire una quantità di calore pari a:

$$Q_1^{ass} = m_1 c_{gh} (T_0 - T_1); \quad (17.9)$$

<sup>iii</sup>Questo è garantito dal "principio 0 della termodinamica", che non enunceremo nel dettaglio, ma che essenzialmente ci dice che i corpi tendono all'equilibrio termico.

2) Per cambiare fase il ghiaccio assorbirà un ulteriore quantità di calore, in una trasformazione a temperatura costante, pari a:

$$Q_2^{ass} = m_1 \lambda_{gh}; \quad (17.10)$$

L'assorbimento di calore complessivo sarà pari a <sup>iv</sup>  $Q_1^{ass} + Q_2^{ass} > 0$  e avverrà a scapito dell'acqua, che dovrà cedere una quantità di calore pari a:

$$Q^{ced} = m_2 c_{acq} (T_0 - T_2) \quad (17.11)$$

Si avrà che:

- Se  $Q_2 > Q_1^{ass} + Q_2^{ass}$ , il ghiaccio si scioglierà completamente, e la temperatura di equilibrio sarà maggiore di  $T_0$ .
- Non tutto il ghiaccio si fonde e la temperatura di equilibrio sarà proprio  $T_0$ .
- Tutta l'acqua ghiaccia.

Per verificare dunque in quale caso ci troviamo sarà sufficiente calcolare e confrontare il calore assorbito totale e il calore ceduto. Supponiamo di essere nel primo di questi tre casi.

3) Dopo che il ghiaccio si è sciolto, l'acqua risultante si troverà a  $T_0$ . Dunque scambierà calore col resto dell'acqua fino a raggiungere una temperatura di equilibrio  $T_{eq}$ . Complessivamente, per questo sistema isolato, gli scambi di calore saranno:

$$0 = Q_{tot} = Q_1^{ass} + Q_2^{ass} + Q^{ced} + m_1 c_{acq} (T_{eq} - T_0) + m_2 c_{acq} (T_{eq} - T_0) \quad (17.12)$$

Ricordandoci poi che  $Q^{ced} = m_2 c_{acq} (T_0 - T_2)$ , otteniamo che:

$$Q_1^{ass} + Q_2^{ass} + m_1 c_{acq} (T_{eq} - T_0) + m_2 c_{acq} (T_{eq} - T_2) = 0 \quad (17.13)$$

A questo punto è possibile calcolare la temperatura di equilibrio  $T_{eq}$  isolandola nell'equazione.

---

<sup>iv</sup>La somma dei calori assorbiti sarà necessariamente positiva poiché il calore assorbito è definito per convenzione positivo.



## Capitolo 18

# Lavoro in trasformazioni termodinamiche

### 18.1 Introduzione ed esempi

In un sistema termodinamico, all'equilibrio è associato ad un certo volume e dunque è separato dall'ambiente circostante e da una superficie di contatto. Tramite la superficie il sistema interagisce con l'ambiente.

Prendiamo come esempio, un gas in un contenitore.

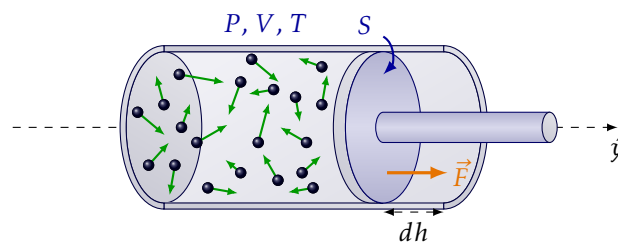


Grafico 18.1: Gas in un contenitore con un pistone

Dove  $\vec{F}$  è la forza di pressione del gas sul pistone.

Supponiamo che il gas sollevi il pistone di un'altezza  $dh$ . In questo caso il sistema termodinamico compierà lavoro sull'ambiente esterno:

$$d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{h} = (PS)dh = P dV \quad (18.1)$$

Se consideriamo una trasformazione finita, tra A e B, descritta da una sequenza e stati di equilibrio<sup>i</sup>, possiamo scrivere il lavoro associato a tale trasformazione come un integrale:

$$\mathcal{L}(A \rightarrow B) = \int_A^B P(v) dV \quad (18.2)$$

È importante notare due cose:

1. Il lavoro corrisponde ad un trasferimento di energia meccanica tra sistema e ambiente;
2. Per il terzo principio della meccanica, (azione e reazione) il lavoro che il sistema compie corrisponde un lavoro di **segno opposto dell'ambiente sul sistema**:

$$\mathcal{L}_{ambiente} = -\mathcal{L} \quad (18.3)$$

<sup>i</sup>Dove  $P, V, T$  sono quindi sempre note

Consideriamo ora che il pistone abbia una massa  $m$  soggetta alla forza peso e che sulla superficie  $S$  del pistone la pressione atmosferica  $P_0$  eserciti una forza di modulo  $F_0 = P_0 S$ .

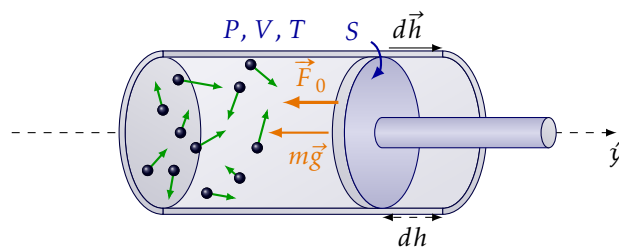


Grafico 18.2: Gas in un contenitore con un pistone con forza peso e pressione atmosferica

Allora se il gas alza il pistone di  $dh$ , l'ambiente compierà un lavoro negativo<sup>ii</sup>:

$$d\mathcal{L}_{ambiente} = -(P_0 S + mg)dh \quad (18.4)$$

Da cui ricaviamo il lavoro del gas complessivo:

$$\mathcal{L} = (P_0 S + mg)\Delta h > 0 \quad (18.5)$$

In generale abbiamo che:

- $d\mathcal{L} = PdV > 0$  il sistema compie lavoro;
- $d\mathcal{L} = PdV < 0$  l'ambiente compie lavoro sul sistema

Per una trasformazione quasi-statica che avviene per stati di equilibrio possiamo rappresentare il lavoro sul piano di Clapeyron:

$$\mathcal{L}(A \rightarrow B) = \int_A^B P(V) dV \quad (18.6)$$

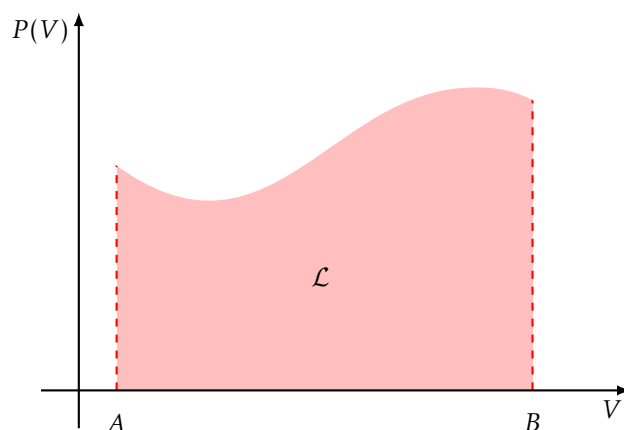


Grafico 18.3: Lavoro sul piano di Clapeyron

<sup>ii</sup>L'ambiente compie un lavoro negativo poiché le forze che l'ambiente applica al gas e lo spostamento che la superficie compie hanno verso discorde, dunque un angolo di  $\pi$ , che nel prodotto scalare  $\mathcal{L} = \int Fdh$  fa sì che il coseno valga  $-1$ .

Il lavoro corrisponde all'area sottesa dalla curva della trasformazione quasi-statica. In una trasformazione ciclica ( $A \rightarrow B \rightarrow A$ ), il lavoro corrisponde all'area racchiusa dalla curva<sup>iii</sup>.

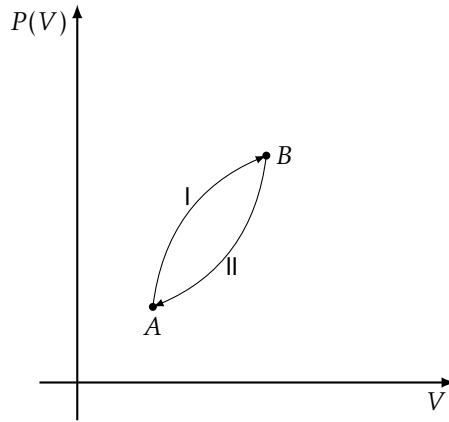


Grafico 18.4: Trasformazione ciclica

Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A \rightarrow B \rightarrow A) &= \left( \int_A^B P dV \right)_I + \left( \int_B^A P dV \right)_{II} = \\ &= \left( \int_A^B P dV \right)_I - \left( \int_A^B P dV \right)_{II}\end{aligned}\tag{18.7}$$

Per convenzione, prendiamo:

1.  $\mathcal{L}(A \rightarrow B \rightarrow A) > 0$  se il ciclo è percorso in senso orario;
2.  $\mathcal{L}(A \rightarrow B \rightarrow A) < 0$  se in antiorario.

## 18.2 Esempio con gas perfetto

3 moli di gas perfetto alla temperatura  $T = 300K$  occupano un volume  $V_i = 3l$ . Mantenendo costante la temperatura si fornisce calore al gas in maniera quasi-statica fino a farlo espandere a  $V_f = 7l$ .

Quanto vale il lavoro fatto dal gas sull'ambiente?

Sappiamo che si tratta di un gas perfetto e quindi utilizziamo l'equazione di stato:

$$PV = nRT\tag{18.8}$$

Quindi abbiamo stato iniziale e finale definiti da:

$$\begin{cases} A \left( T_A = T_i, V_i, P_i = \frac{nRT_i}{V_i} \right) \\ B \left( T_B = T_f, V_f, P_f = \frac{nRT_f}{V_f} \right) \end{cases}\tag{18.9}$$

<sup>iii</sup>È importante definire il verso della trasformazione, ad esempio: senso orario.

Poiché sappiamo che la temperatura è costante, questa trasformazione viene detta **isoterma** e sul piano di Clapeyron è rappresentata da un ramo di un'iperbole.

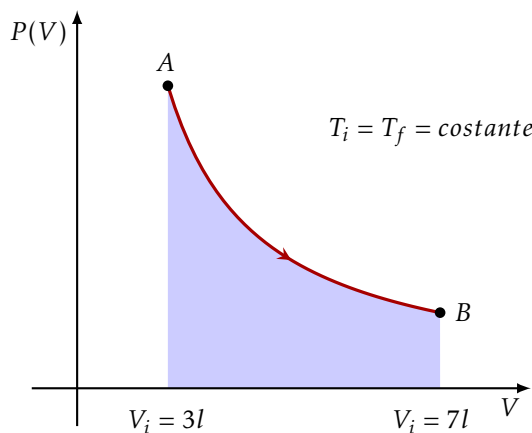


Grafico 18.5: Trasformazione isoterma

Il lavoro sarà quindi:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(A \rightarrow B) &= \int_A^B P dV = \\
 &= \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT_i}{V} dV = \\
 &= nRT_i \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} dV = \\
 &= nRT_i \ln V \Big|_{V_i}^{V_f} = \\
 &= nRT_i \ln \frac{V_f}{V_i}
 \end{aligned} \tag{18.10}$$

Sostituiamo quindi i valori dati per  $T_i$ ,  $V_i$ ,  $V_f$ , e  $n = 3$  moli:

$$\mathcal{L} = 3 \text{ mol} \cdot 8,31 (\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}) \cdot 300 \text{ K} \cdot \ln \frac{7}{3} \approx 6340 \text{ J} \tag{18.11}$$

## 18.3 Energia interna

Nell'esempio sopra, abbiamo considerato una particolare trasformazione (isoterma) reversibile tra gli stati  $A$  e  $B$ , in cui notiamo:

1. Il sistema compie lavoro sull'ambiente  $\mathcal{L} > 0$  perché  $\frac{V_f}{V_i} > 1$ ;
2. Perché questa trasformazione avvenisse a temperatura costante abbiamo avuto bisogno di un termostato (bagno termico) che desse calore al sistema,  $Q > 0$

Sia il lavoro svolto che la quantità di calore scambiata con il termostato dipendono dal tipo di trasformazione.

Tuttavia, si osserva sperimentalmente che per qualsiasi trasformazione tra  $A$  e  $B$ , la quantità  $Q - \mathcal{L}$  è costante e dipende solo dallo stato iniziale di  $A$  e dallo stato finale di  $B$ .

$$Q - \mathcal{L} = f(A, B) \tag{18.12}$$

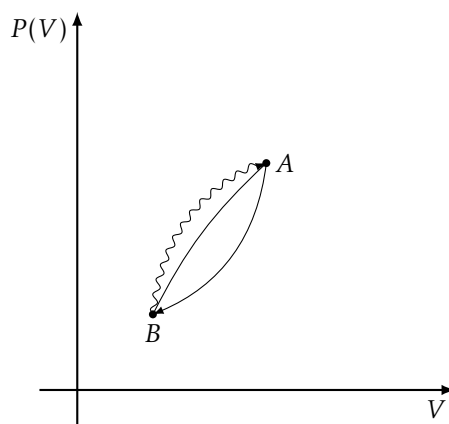


Grafico 18.6: Trasformazione ciclica

Come nel caso del lavoro svolto da forze conservative, anche in questo caso, questo risultato implica l'esistenza di una funzione di stato:  $U(P, V, T)$ , tale che:

$$Q - \mathcal{L} = U(B) - U(A) = \Delta U \quad (18.13)$$

La funzione di stato  $U$  è detta **energia interna** del sistema (definita a meno di una costante arbitraria).

Vale dunque il primo principio della termodinamica:

La differenza tra il calore assorbito e il lavoro compiuto da un sistema è uguale alla variazione dell'energia interna del sistema e non dipende dal tipo di trasformazione.

È importante notare alcune cose:

1. Il calore è una forma di energia. Per esempio, se  $\mathcal{L} = 0$  e  $Q \neq 0$ , allora avremo che, il calore ceduto si traduce in energia interna:

$$\Delta U = Q \quad (18.14)$$

2. Il principio della conservazione dell'energia si estende a sistemi soggetti a forze non-conservative nel passaggio dal concetto di energia meccanica e quello di energia interna.

3. Per definizione di funzione di stato, in un ciclo ( $A \rightarrow B \rightarrow A$ ):

$$\Delta U = Q - \mathcal{L} = 0 \Rightarrow Q = \mathcal{L} \quad (18.15)$$

Dunque in un ciclo abbiamo che:

(a) se

$$Q > 0 \Rightarrow \mathcal{L} > 0 \quad (18.16)$$

Il sistema assorbe calore e fa lavoro sull'ambiente (per esempio una macchina termica).

(b) se

$$Q < 0 \Rightarrow \mathcal{L} < 0 \quad (18.17)$$

Il sistema subisce lavoro e cede calore (per esempio una macchina frigorifera).

Se ci restringiamo al caso dei gas perfetti, sperimentalmente troviamo che l'energia interna  $U$  dipende solo dalla temperatura:

$$U = U(T) \quad (18.18)$$

Consideriamo una trasformazione del tipo  $A \rightarrow A' \rightarrow B$  con  $A \rightarrow A'$  isocora, e  $A' \rightarrow B$  isoterma: Abbiamo che:

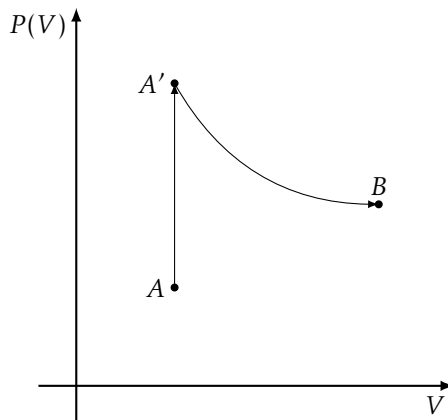


Grafico 18.7: Trasformazione  $A \rightarrow A' \rightarrow B$

$$\Delta U = U(B) - U(A) = (U(B) - U(A')) + (U(A') - U(A)) \quad (18.19)$$

Ma dato che  $U(B) = U(A')$  perché  $T$  è la stessa in  $B$  e  $A'$ , abbiamo che:

$$\Delta U = U(A') - U(A) \quad (18.20)$$

Ovvero, la variazione di energia interna è catturata da una trasformazione a volume costante (isocora).

In particolare, in una trasformazione isocora abbiamo che  $\delta \mathcal{L} = 0$ , dunque:

$$\Delta U = Q \Rightarrow dU = \delta Q \quad (\text{caso infinitesimo}) \quad (18.21)$$

Scriviamo quindi la variazione di calore a volume costante:

$$\delta Q = \left( \frac{dU}{dT} \right)_v dT \quad (18.22)$$

E definiamo:

$$\left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_v \equiv nc_v \quad (18.23)$$

Con  $c_v$  il calore specifico a volume costante.

Di conseguenza, sappiamo come scrivere esplicitamente la variazione (infinitesima) dell'energia interna per una generica trasformazione quasi-statica di gas perfetto:

$$dU = nc_v dT \quad (18.24)$$

Per tali trasformazioni, il primo principio si scrive come segue:

$$nc_v dT = \delta Q - PdV \quad (18.25)$$

È importante aggiungere una nota a questa parte. Per un gas perfetto esiste anche un calore specifico a pressione costante,  $c_p$ , definito come:

$$\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = nc_p \quad (18.26)$$

Quindi  $c_p$  e  $c_v$  sono legati, vediamo come. Prendiamo l'equazione di stato:

$$PV = nRT \quad (18.27)$$

e consideriamo una variazione infinitesima:

$$d(PV) = d(nRT) \quad (18.28)$$

che diventa:

$$dP \cdot V + P \cdot dV = nRdT \quad (18.29)$$

Prendiamo il primo principio:

$$\delta Q = nc_v dT + PdV \quad (18.30)$$

e utilizziamo 18.29:

$$\delta Q = nc_v dT + nRdT - dP \cdot V \quad (18.31)$$

In particolare, a pressione costante  $dP = 0$ , quindi:

$$\delta Q = nc_v dT + nRdT = n(c_v + R)dT \quad (18.32)$$

Segue che:

$$c_p = \frac{1}{n} \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = c_v + R \quad (\text{relazione di Mayer}) \quad (18.33)$$

Ovvero  $c_p > c_v$ .

Il rapporto tra i due calori specifici è detto **indice adiabatico**:<sup>iv</sup>

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1 \quad (18.34)$$

## 18.4 Trasformazioni adiabatiche

Grazie al primo principio siamo ora in grado di caratterizzare una trasformazione adiabatica (senza scambio di calore) come quelle considerate in calorimetria.

Utilizziamo quindi il primo principio con  $\delta Q = 0$ :

$$dU = \delta Q - \delta \mathcal{L} = -\delta \mathcal{L} \quad (18.35)$$

Sappiamo dunque che:

$$dU = -PdV \quad (18.36)$$

---

<sup>iv</sup>Nota:

1.  $c_v = \frac{3}{2}R$  ( $c_p = \frac{5}{2}R$ ) per gas monoatomici
2.  $c_v = \frac{5}{2}R$  ( $c_p = \frac{7}{2}R$ ) per gas biatomici

Utilizzo quindi l'equazione di stato  $P = \frac{nRT}{V}$ :

$$nc_v dT = -\frac{nRT}{V} dV \quad (18.37)$$

Separiamo le variabili termodinamiche  $T$  e  $V$ :

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_v} \frac{dV}{V} \quad (18.38)$$

Usiamo ora che  $c_p = c_v + R \Rightarrow R = c_p - c_v$ :

$$\frac{dT}{T} = -\left(\frac{c_p - c_v}{c_v}\right) \frac{dV}{V} = \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) \frac{dV}{V} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V} \quad (18.39)$$

Integriamo:

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} \Rightarrow \ln T|_{T_0}^T = \ln \frac{T}{T_0} = -(\gamma - 1) \ln \frac{V}{V_0} = \ln \left[ \left( \frac{V}{V_0} \right)^{-(\gamma-1)} \right] \quad (18.40)$$

Segue che:

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{V}{V_0} \right)^{-(\gamma-1)} = \left( \frac{V_0}{V} \right)^{(\gamma-1)} \quad (18.41)$$

Quindi abbiamo:

$$TV^{(\gamma-1)} = T_0 V_0^{(\gamma-1)} \quad (18.42)$$

Ovvero:

$$TV^{(\gamma-1)} = \text{costante} \quad (18.43)$$

Inoltre, poiché  $PV = nRT$  possiamo usare  $T = \frac{PV}{nR}$ , e ci troviamo che:

$$\frac{PV}{nR} \cdot V^{(\gamma-1)} = \frac{P_0 V_0}{nR} \cdot V_0^{(\gamma-1)} \Rightarrow PV^\gamma = \text{cost} \quad (18.44)$$

Possiamo quindi rappresentare una trasformazione adiabatca sul piano di Clapeyron:

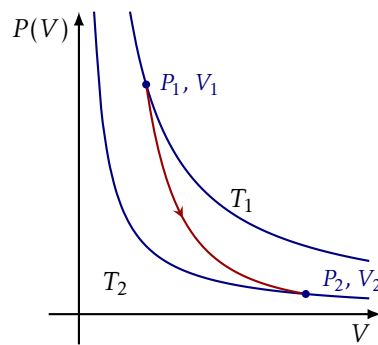


Grafico 18.8: Trasformazione adiabatca



## Capitolo 19

# Macchine Termiche e Entropia

### 19.1 Secondo principio della termodinamica

Abbiamo visto come il primo principio della termodinamica estende la conservazione dell'energia includendo il calore nel bilancio energetico di un processo.

Tuttavia, molti processi in natura, pur compatibili con il primo principio, non sono osservati come per esempio la conversione di calore in energia meccanica in presenza di attrito.

Esiste in natura una asimmetria effettiva nei processi che regolano lo scambio di lavoro e di calore. Questa asimmetria è l'essenza del secondo principio della termodinamica, storicamente descritto dall'enunciato di **Kelvin-Planck** che dice che:

Non è possibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia quello di assorbire calore da una sola sorgente e di trasformarlo integralmente in lavoro.

Prendiamo come esempio una trasformazione isoterma reversibile:

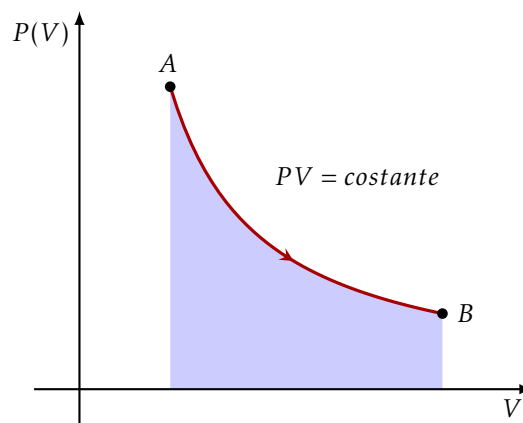


Grafico 19.1: Trasformazione isoterma reversibile

Dove abbiamo:

$$\begin{aligned}\Delta U &= Q - \mathcal{L} = 0 \\ \mathcal{L} &= Q > 0\end{aligned}\tag{19.1}$$

Se volessi mantenere invariato lo stato  $A \rightarrow A$  dovrei compiere un ciclo ( $A \rightarrow B \rightarrow A$ ) e dunque compiere lavoro sul sistema (oppure cedere calore).

In generale, chiamiamo **macchina termica** un dispositivo che opera ciclicamente e trasforma il calore in lavoro.

L'esempio più semplice di macchina termica (MT) opera tra due sorgenti a temperature  $T_1, T_2$  con ( $T_1 > T_2$ )

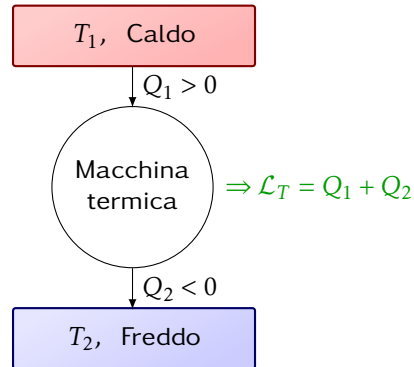


Grafico 19.2: Macchina termica tra due sorgenti

Dove  $Q_1 > 0$  è il calore assorbito dalla macchina, mentre  $Q_2 < 0$  è il calore ceduto dalla macchina alla sorgente fredda. Si definisce rendimento della macchina termica il rapporto:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}_T}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} \quad (19.2)$$

Dal principio di **Kelvin-Planck** ( $Q_2 \neq 0$ ), e dalla supposizione che la macchina termica presa in considerazione faccia lavoro sull'ambiente e non lo subisca ( $Q_1 > Q_2$ ), si ha:

$$0 < \eta < 1 \quad (19.3)$$

## 19.2 Ciclo di Carnot

La macchina di Carnot opera un ciclo reversibile su un gas perfetto tra due temperature con una combinazione di trasformazioni isoterme (contatto con termostato) e adiabatiche (isolamento sul sistema). Sul piano di Clapeyron sarà:

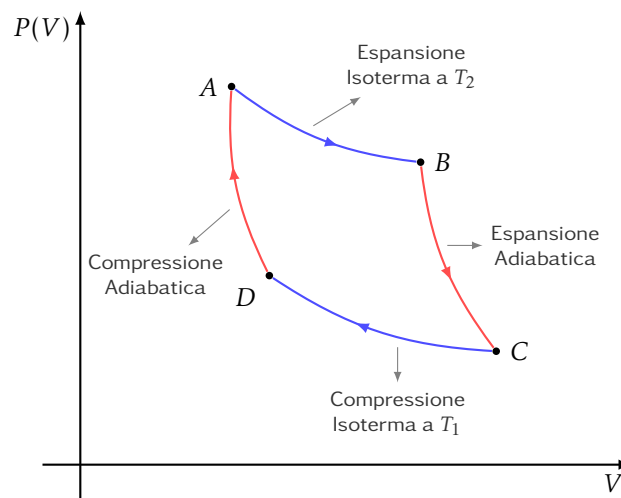


Grafico 19.3: Ciclo di Carnot

Avremo il ciclo che sarà quindi:

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q_T = \mathcal{L} > 0 \quad (19.4)$$

I calori scambiati sono:

$$\begin{cases} Q_{AB} > 0 & \text{assorbito da sorgente calda} \\ Q_{CD} < 0 & \text{ceduto a sorgente fredda} \end{cases} \quad (19.5)$$

Dove:

$$Q_{AB} = \mathcal{L}_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} P dV = \int_{V_A}^{V_B} nRT_1 \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (19.6)$$

Mentre:

$$Q_{CD} = \mathcal{L}_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} = -nRT_2 \ln \frac{V_C}{V_D} \quad (19.7)$$

Il rendimento varrà quindi:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{|Q_{AB}|} = 1 - \frac{|Q_{CD}|}{|Q_{AB}|} = 1 - \frac{T_2 \ln \frac{V_C}{V_D}}{T_1 \ln \frac{V_B}{V_A}} \quad (19.8)$$

Applichiamo la proprietà delle adiabatichie reversibili 18.43 in funzione solo delle temperature e abbiamo che per  $B \rightarrow C$ :

$$B \rightarrow C \Rightarrow T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1} \Rightarrow V_C = V_B \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (19.9)$$

Mentre per  $D \rightarrow A$ :

$$D \rightarrow A \Rightarrow V_D = V_A \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (19.10)$$

Si ha dunque che:

$$\frac{V_C}{V_D} = V_B \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{1}{V_A \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} = \frac{V_B}{V_A} \quad (19.11)$$

Da cui segue che il rendimento della macchina di Carnot vale:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (19.12)$$

### 19.3 Teorema di Carnot

Una generica macchina termica ha rendimento minore o uguale a quello di una macchina di Carnot che opera tra sorgenti alla stesse temperature:  $\eta_{\mu c} \leq \eta_c$ :

$$1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (19.13)$$

Da cui segue che:

$$\frac{Q_2}{Q_1} \leq -\frac{T_2}{T_1} \quad (19.14)$$

Da cui ci troviamo che: <sup>i</sup>

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \leq 0 \quad (19.15)$$

---

<sup>i</sup>Quanto può essere bassa la temperatura  $T_2$ ? Abbiamo che:  $T_2 = T_1 \frac{|Q_{CD}|}{|Q_{AB}|} = T_1 \frac{Q_{ceduto}}{Q_{assorbito}}$   
Se  $T_2$  fosse nulla, sarebbe nullo anche il calore ceduto e si violerebbe il secondo principio

### 19.3.1 Esempio con il ciclo di Otto (motore a scoppio)

Il ciclo di Otto è composto da due trasformazioni adiabatiche e due isocore (tutte reversibili).

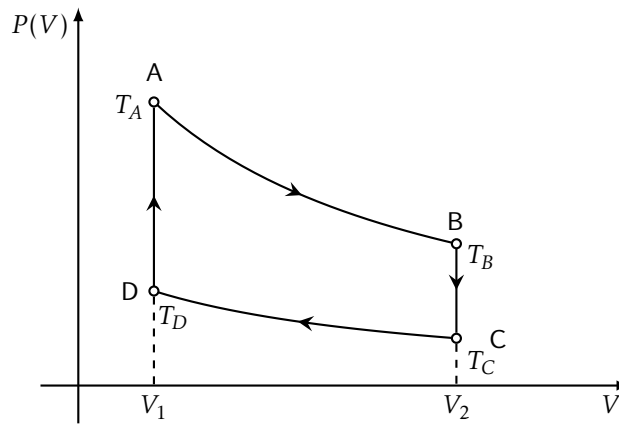


Grafico 19.4: Ciclo di Otto sul piano di Clapeyron

Dove avremo che:

$$\Delta U = 0 \Rightarrow \mathcal{L} = Q = Q_{DA} + Q_{BC} = nc_v(T_A - T_D) + nc_v(T_C - T_B) \quad (19.16)$$

Il rendimento sarà quindi:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_{DA}} = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{DA}} = 1 - \frac{(T_B - T_C)}{(T_A - T_D)} \quad (19.17)$$

Applico le adiabatiche:

$$\begin{aligned} T_A V_1^{\gamma-1} &= T_B V_2^{\gamma-1}; \\ T_D V_1^{\gamma-1} &= T_C V_2^{\gamma-1} \end{aligned} \quad (19.18)$$

Da cui:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_B}{T_A} = \frac{T_C}{T_D} \quad (19.19)$$

Infine ci troviamo che:<sup>ii</sup>

$$\eta = 1 - \frac{T_B}{T_A} \quad (19.20)$$

## 19.4 Diseguaglianza di Clausius

A partire dal teorema di Carnot abbiamo ricavato una disequaglianza generale per un ciclo non reversibile operato dalla macchina termica tra due temperature  $T_1, T_2$  ( con  $T_1 > T_2$  )

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \leq 0 \quad (19.21)$$

Tale disequaglianza può essere generalizzata al caso di cicli di macchine a contatto con più

<sup>ii</sup>Nota che il rendimento è inferiore a quello di Carnot tra  $T_{max} = T_A$  e  $T_{min} = T_C$ , qui abbiamo invece il rapporto tra  $T_{max} = T_A$  e una temperatura intermedia  $T_B$ .

sorgenti.

In generale, si avrà per  $n$  sorgenti:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad (19.22)$$

Viene chiamata disuguaglianza di Clausius dove  $Q_i$  è la quantità di calore scambiata con la sorgente a temperatura  $T_i$

Prendiamo come esempio un ciclo reversibile di isoterme e adiabatiche con tre sorgenti:

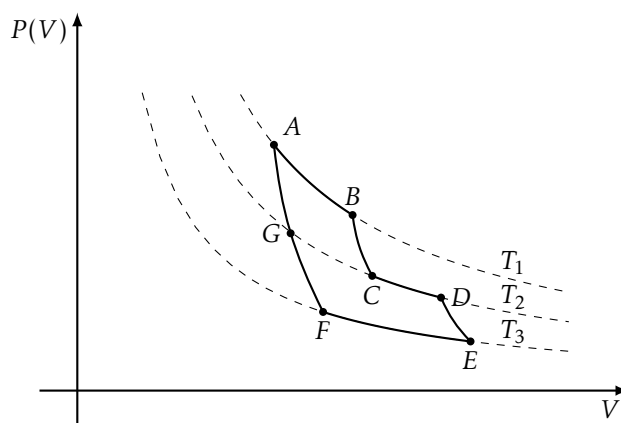


Grafico 19.5: Ciclo reversibile di isoterme e adiabatiche con tre sorgenti

Il sotto ciclo uno ( $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow A$ ) vale:

$$\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{CG}}{T_2} \leq 0 \quad (19.23)$$

Il sotto ciclo due ( $G \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$ ) vale:

$$\frac{Q_{GC} + Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} \leq 0 \quad (19.24)$$

Poiché  $Q_{CG} = -Q_{GC}$ , sommando abbiamo:

$$\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} \leq 0 \quad (19.25)$$

Generalizzando ulteriormente ad una sequenza di sorgenti con una variazione molto piccola di temperatura, possiamo scrivere la disuguaglianza di Clausius per un generico ciclo infinitesimo come:<sup>iii</sup>:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (19.26)$$

Dunque:

$$\begin{cases} \text{Se il ciclo è reversibile abbiamo: } \oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \\ \text{Se il ciclo è irreversibile abbiamo: } \oint \frac{\delta Q}{T} < 0 \end{cases}$$

## 19.5 Entropia

Consideriamo due stati di un sistema termodinamico  $A$  e  $B$ , uniti in un ciclo di trasformazioni reversibili.

<sup>iii</sup>Il simbolo  $\oint$  è analogo al simbolo  $\int$ , viene solo evidenziato che si sta trattando di una curva chiusa dal piccolo cerchio presente nel simbolo.

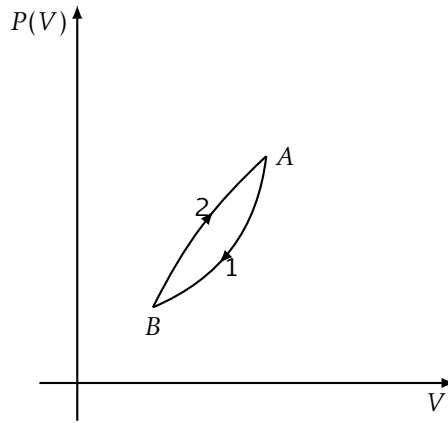


Grafico 19.6: Trasformazioni cicliche reversibili

Dal teorema di Classius avremo che:

$$0 = \oint \frac{1}{T} \delta Q = \int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_1 + \int_B^A \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_2 = \int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_1 - \int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_2 \quad (19.27)$$

Si ha dunque che:

$$\int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_1 = \int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_2 \quad (19.28)$$

Ovvero il valore dell'integrale  $\int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{rev}$  esteso ad una qualunque trasformazione termodinamica reversibile tra due stati di un sistema termodinamico è sempre lo stesso, ovvero non dipende dalla trasformazione, ma solo dagli stati termodinamici iniziale e finale.

Possiamo dunque definire una nuova funzione di stato in questo modo:

$$S_B - S_A = \Delta S \equiv \int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} \quad (19.29)$$

Chiamiamo la funzione di stato  $\Delta S$  **entropia**. In forma infinitesima, questa è:

$$dS = \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} \quad (19.30)$$

Dove le unità di misura di  $S$  sono:

$$[S] = JK^{-1} \quad (19.31)$$

Un principio fondamentale legato all'**entropia** è quello relativo al suo aumento. In generale è facile notare come **entropia** cambi all'evolvere di un sistema. Infatti sebbene  $\Delta S = 0$  in trasformazioni cicliche, essendo un'equazione di stato, se prendiamo le singole trasformazioni questo non è necessariamente vero. Prendiamo come esempio il ciclo di Carnot:

$$\begin{cases} \Delta S = 0; & \text{Trasformazioni adiabatiche reversibili} \\ \Delta S = \frac{Q}{T}; & \text{Trasformazioni isoterme reversibili} \end{cases} \quad (19.32)$$

Riconsideriamo ora i due stati  $A$  e  $B$ , ma in questo caso consideriamo una trasformazione reversibile ed una irreversibile.

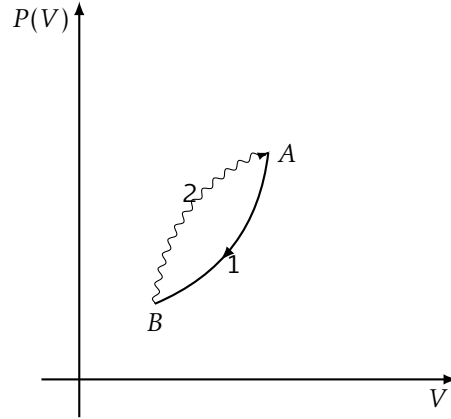


Grafico 19.7: Trasformazioni cicliche una reversibile e una irreversibile

Si avrà ora che:

$$0 > \oint \frac{1}{T} \delta Q = \int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_1 + \int_B^A \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_2 = \int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} - \int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{irr} \quad (19.33)$$

Inoltre, dalla definizione di  $\Delta S$  abbiamo:

$$\int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{irr} < \int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} = \Delta S \quad (19.34)$$

A livello infinitesimo si ha:

$$dS > \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{irr} \quad (19.35)$$

per sistemi termicamente isolati ( $\delta Q = 0$ ) si ha:

$$\Delta S \geq 0 \quad (19.36)$$

Possiamo dunque enunciare propriamente il *principio di aumento dell'entropia* precedentemente citato:

*L'entropia di un sistema termicamente isolato non può diminuire: aumenta in presenza di trasformazioni irreversibili, resta al più costante in presenza di trasformazioni reversibili*

L'esempio più lampante di sistema isolato è sicuramente il nostro universo. Si ha infatti che

$$\Delta S_u = \Delta S_{sis} + \Delta S_{amb} \quad (19.37)$$

Da quanto appena visto, sappiamo che l'entropia dell'universo sarà:

- In caso l'universo compia trasformazioni reversibili,  $\Delta S_u = 0 \implies \Delta S_{sis} = -\Delta S_{amb}$
- In caso l'universo compia trasformazioni irreversibili,  $\Delta S_u = 0 \implies \Delta S_{sis} \neq -\Delta S_{amb}$

In particolare, se prendiamo in considerazione un sistema ciclico, ovvero con  $\Delta S_{sis} = 0$ , avremo:

$$\begin{cases} \Delta S_u = \Delta S_{amb} = 0; & \text{caso reversibile} \\ \Delta S_u = \Delta S_{amb} > 0; & \text{caso irreversibile} \end{cases} \quad (19.38)$$

L'irreversibilità dunque, è sempre accompagnata da un aumento dell'entropia dell'universo. In particolare, essendo che l'irreversibilità caratterizza i processi naturali, abbiamo un modo per descrivere il verso del **tempo**.

Si ha infatti che:

*Ogni processo naturale si svolge nel verso che determina un aumento dell'entropia complessiva del sistema e del suo ambiente.*

Possiamo dunque in fine concludere che, nel sistema universo, lo stato di **equilibrio** sia quello alla **massima entropia**.



## **Part IX**

# **Conclusione e Ringraziamenti**

È dunque conclusa la trattazione del programma di Fisica Generale I, svolto dal professor G.Chirco nel corso di laurea in informatica 2022/23 della Federico II di Napoli.

Si ricorda che questo file non ha lo scopo di sostituire libri di testo, note del professore (utilizzate come fonte primaria per la stesura di questo file) o lezioni frontali, ma quello di integrare al materiale più complesso una rilettura degli argomenti da un punto di vista meno tecnico e quindi più lento nel soffermarsi nei passaggi critici.

Si ringraziano tutti i revisori che hanno contribuito al file con feedback e proposte di modifica, invitando a continuare a mandare feedback riguardo cose che potrebbero esserci sfuggite o cose ancora da migliorare<sup>iv</sup>. In particolare si ringrazia Vincenzo Mennillo<sup>v</sup> che, pur non collaborando direttamente al file, si è fatto carico della revisione e peer-review integrale del file.

Si ringraziano in fine i lettori nella speranza che questo lavoro sia stato utile.  
In fede gli autori.

Davide Gargiulo,  
Riccardo Elena,  
Valentina Laura Lombardo.

---

<sup>iv</sup>molti errori di battitura e type-o sono stati ignorati nella revisione per questione di tempo. Perdonateci. In ogni caso ogni caso non dovrebbe essere niente di rilevante per i contenuti.

<sup>v</sup>E anche il mitico Gioele perché no.