Fisica Generale I

appunti scritti da: Vincenzo De Rosa
prof: A.Di Crescenzo

Secondo semestre a.a. 2022/2023

Contents

1 Elementi di metrologia

1.1 Le grandezze fisiche

Nel SI (Sistema Internazionale) distinguiamo due tipi di grandezze:

- grandezze fondamentali (Esempi: lunghezza l (m),tempo t (s), massa m (kg))
- grandezze derivate (Esempi: velocità $v = \frac{l}{t}$ $(\frac{m}{s})$, accelerazione $a = \frac{v}{t}(\frac{m}{s^2})$

1.2 Multipli e Sottomultipli

Prendiamo ad esempio il metro, i suoi sottomultipli e multipli sono:
mm (0.001 m), cm (0,01 m), dm(0,1), m, dam(10 m), hm(100 m), km(1000 m). Per evitare di scrivere tanti zeri, utilizziamo le potenze di 10, quindi: $mm = 10^{-3}m$. Ulteriori sottomultipli e multipli del metro del metro sono:

- micrometri μm (10^{-6})
- nanometri nm (10^{-9})
- picometri pm (10^{-12})
- Megametri Mm (10^{6})
- Gigametri Gm (10^{9})
- Terametri Tm (10^{12})

Attraverso le potenze di 10 viene definita la notazione scientifica, ovvero utilizzare un solo numero prima della virgola e moltiplicarlo per 10^n.Ecco alcuni esempi:

A) $86400 = 8.64 \times 10^4$

B) $981672.5 = 9.8167625 \times 10^6$

C) $0.0000000398 = 3.98 \times 10^{-8}$

1.3 Cenni di Trigonometria

Poniamo su un sistema di assi cartesiani una circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine e P un punto qualsiasi della circonferenza.

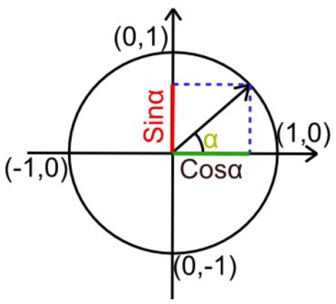


Figure 1: Il seno e il coseno corrispondono ai cateti del triangolo rettangolo con ipotenusa r

Il seno corrisponde alla proiezione del cateto sull'asse y mentre il coseno corrisponde alla proiezione del cateto sull'asse x
Avendo quindi un triangolo rettangolo con r generico e x ed y come cateti:

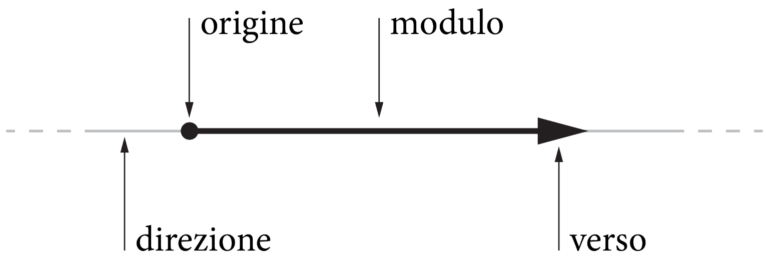
- $\cos\alpha = \frac{x}{r}$
- $\sin\alpha = \frac{y}{r}$
- $\tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{y}{x}$

α	$sen\alpha$	$cos\alpha$
0° (0 rad)	0	1
90° ($\frac{\pi}{2}$)	1	0
180° (π)	0	-1
270° ($\frac{3\pi}{2}$)	-1	0
360° (2π)	0	1

Table 1: Valori Seno e Coseno

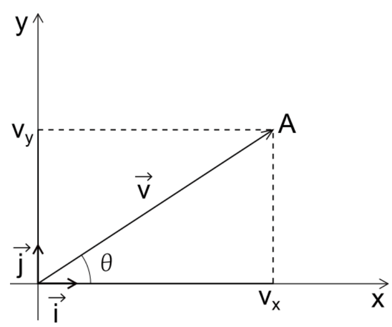
2 Grandezze Fisiche Vettoriali

Per le grandezze scalari (massa, lunghezza, volume ecc) basta l'unità di misura. Per le grandezze vettoriali c'è bisogno invece di altre indicazioni.



Gli attributi di un vettore sono:

- Direzione: è data dall'angolo del vettore con la retta x
- Verso: indicata da una freccia
- punto di applicazione: punto di origine di un vettore
- modulo: lunghezza del vettore



$\overline{v} = (v_x, v_y)$
$|\overline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, (il modulo del vettore è quindi l'ipotenusa del triangolo rettangolo)
$v_x = |\overline{v}|cos\theta$
$v_y = |\overline{v}|sin\theta$ $\frac{v_y}{v_x} = \frac{|\overline{v}|sin\theta}{|\overline{v}|cos\theta} = tan\theta$
$\theta = \arctan(\frac{v_y}{v_x})$

Un **versore** è un vettore di modulo unitario diretto lungo gli assi cartesiani, viene indicato con î Un vettore può essere espresso in:

- termini di componenti $\overline{A} = (A_x, A_y)$
- espresso in termini di componenti e versori $\overline{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$

Uguaglianza Due vettori sono **uguali** se:

- hanno lo stesso modulo
- hanno lo stesso verso
- appartengono a rette parallele tra loro

2.1 Operazioni tra vettori

2.1.1 Somma

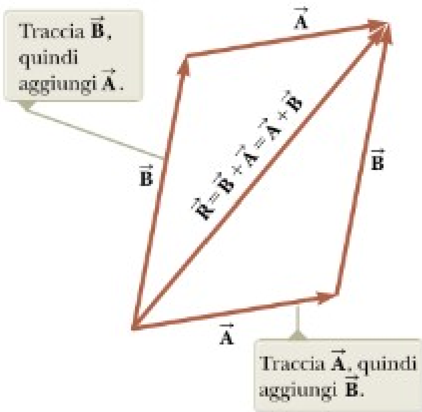
Due vettori possono essere sommati/sottratti se hanno le stesse unità di misura.

$\bar{R} = \bar{A} + \bar{B} \Rightarrow \begin{cases} R_x = A_x + B_x \\ R_y = A_y + B_y \end{cases}$

$|\bar{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$

Graficamente utilizzo il metodo del parallelogramma

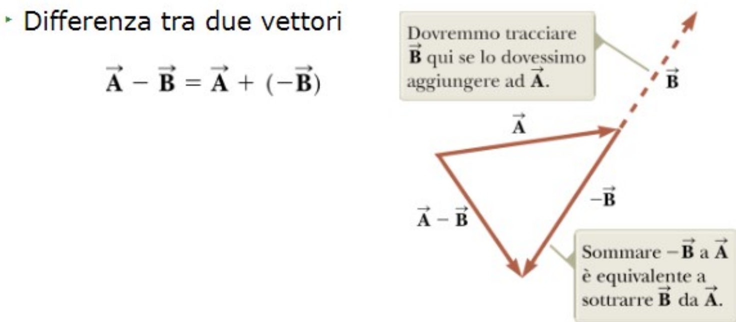


Proprietà della somma:

- commutativa: $\bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A}$
- associativa: $\bar{A} + (\bar{B} + \bar{C}) = (\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C}$

2.1.2 Opposto e differenza tra vettori

L'opposto di $\bar{A}$ è un vettore che sommato ad $\bar{A}$ dà un vettore somma pari a 0. I vettori $\bar{A}$ e $-\bar{A}$ hanno stesso modulo e verso opposto. $\bar{A} + (-\bar{A}) = 0$



2.1.3 Prodotto scalare

Il prodotto scalare è un'operazione tra due vettori che fornisce come risultato uno scalare pari al prodotto dei due moduli per il coseno dell'angolo compreso
$\bar{A} \cdot \bar{B} = |\bar{A}||\bar{B}| \cos\theta$
Metodo delle componenti:$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_x B_x + A_y B_y$
Proprietà del prodotto scalare:

- **commutativa**: $\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{B} \cdot \bar{A}$
- **distributiva**: $\bar{A} \cdot (\bar{B} + \bar{C}) = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{C}$

Angolo tra due vettori $cos\theta = \frac{\bar{A} \cdot \bar{B}}{AB}$

2.1.4 Prodotto vettoriale

Operazione tra due vettori che fornisce come risultato un vettore:

- Modulo pari al prodotto dei moduli dei vettori per il seno dell'angolo compreso
- direzione ortogonale al piano su cui giacciono i due vettori
- verso: regola della mano destra

$\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B}$
$C = |\bar{C}| \equiv ABsen\theta$
Metodo delle componenti: $\bar{A} \times \bar{B} = A_x B_x - A_y B_y$
Proprietà del prodotto vettoriale:

- **anticommutativa**: $\bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times \bar{A}$
- **distributiva**: $\bar{A} \times (\bar{B} + \bar{C}) = \bar{A} \times \bar{B} + \bar{A} \times \bar{C}$

2.1.5 Prodotto scalare e vettoriale

c

3 Cinematica

La meccanica studia il moto dei corpi e le forze che ne generano il moto. Si divide in tre parti:

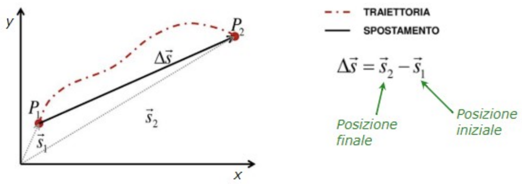
1. **Cinematica:** studio del moto a prescindere dalle cause che lo generano.
2. **Statica:** studio della condizione di equilibrio dei corpi.
3. **Dinamica:** studio delle forze che generano il moto.

3.1 Moto di un punto materiale

L'oggetto di studio sarà la cinematica del punto materiale. Per **punto materiale** intendiamo un corpo le cui dimensioni sono piccole rispetto all'ambiente circostante. Le grandezze cinematiche che verranno trattate sono: **Posizione, Spostamento, Velocità, Accelerazione.**
Il **Moto** rappresenta il cambiamento continuo della posizione di un oggetto.

- **Traiettoria:** insieme dei punti dello spazio occupati da un punto materiale al variare del tempo.
- **Spostamento:** vettore che congiunge le posizioni del punto materiale in due istanti diversi.

- ESEMPIO: vettori **paralleli** $\theta=0°$
  - Prodotto scalare $\vec{A}\bullet\vec{B} = AB\cos\theta = AB$
  - Prodotto vettoriale $\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta = 0$
- ESEMPIO: vettori **ortogonali** $\theta=90°$
  - Prodotto scalare $\vec{A}\bullet\vec{B} = AB\cos\theta = 0$
  - Prodotto vettoriale $\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta = AB$
- ESEMPIO: vettori **anti-paralleli** $\theta=180°$
  - Prodotto scalare $\vec{A}\bullet\vec{B} = AB\cos\theta = -AB$
  - Prodotto vettoriale $\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta = 0$



3.2 Moto rettilineo uniforme

3.2.1 Velocità media

La **Velocità media** della particella è definita come il rapporto tra il suo spostamento Δx e l'intervallo di tempo Δt.

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \qquad \frac{[L]}{[T]} \rightarrow \frac{m}{s}$$

La velocità media è indipendente dal percorso seguito dall'istante iniziale all'istante finale poichè lo spostamento Δx dipende solo dalle coordinate iniziali e finali della particella.

- $v_{med} > 0$ se la coordinata x cresce durante l'intervallo di tempo Δt $(x_f > x_i)$
- $v_{med} < 0$ se la coordinata x decresce durante l'intervallo di tempo Δt $(x_f < x_i)$

Interpepetrazione geometrica La velocità media è la **pendenza** del tratto di retta che congiunge il punto iniziale e il punto finale del grafico posizione-tempo.

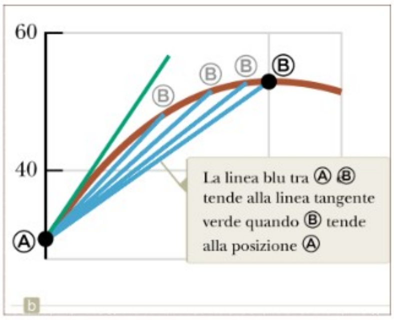
$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan\theta$$

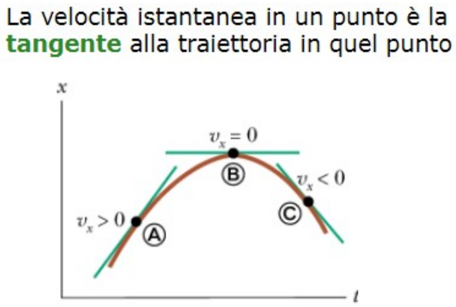
3.2.2 Velocità istantanea

La velocità istantanea è definita come il limite del rapporto $\Delta x/\Delta t$ quando Δt tende a zero

$$v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Interpretazione geometrica: Quando il punto B tende ad A, la secante della curva che congiunge i punti A e B diventa **tangente** alla curva in A.





3.2.3 Moto rettilineo uniforme

Per **Moto rettilineo uniforme** si intende un moto con velocità costante con traiettoria rettilinea. La velocità istantanea è uguale in ogni istante alla velocità media.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t}$$
$$x_f - x_i = v\Delta t$$
$$x_f = x_i + v\Delta t$$

All'istante t=0 il punto si trova nella posizione x_0. x(t=0)=x_0

Legge oraria:

$$\begin{cases} v(t) = cost. \\ x(t) = x_0 + vt \end{cases}$$

3.3 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Prima di descrivere il moto rettilineo uniformemente accelerato bisogna comprendere cosa intendiamo per accelerazione.

3.3.1 Accelerazione media

L'accelerazione media misura quanto rapidamente cambia la velocità.
L'**accelerazione media** è definita come il rapporto fra la variazione di velocità Δv e l'intervallo di tempo Δt

$$a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \qquad \frac{[L]}{[T^2]} \rightarrow \frac{m}{s^2}$$

- $a_{med} > 0$ se la velocità cresce durante l'intervallo di tempo Δt ($v_f > v_i$)
- $a_{med} < 0$ se la velocità decresce durante l'intervallo di tempo Δt ($v_f < v_i$)

3.3.2 Accelerazione istantanea

L'**accelerazione istantanea** è definita come il limite del rapporto $\Delta v/\Delta t$ quando Δt tende a 0.

$$a = \lim \Delta t \rightarrow 0 \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Interpretazione geometrica L'accelerazione istantanea in un punto è la **tangente** alla curva della velocità in quel punto.

3.3.3 Moto uniformemente accelerato

Il **moto uniformemente accelerato** è un moto con accelerazione costante con traiettoria rettilinea. L'accelerazione istantanea è uguale in ogni istante all'accelerazione media.

$a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$ **condizioni iniziali**
x(t=0)=x_0
v(t=0)=v_0

Leggi del moto: $\begin{cases} a(t) = cost. \\ v(t) = v_0 + at \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$

Dimostrazione delle leggi del moto $v(t) = v_0 + at$

- Integrando a destra e a sinistra

$$\int_{t_0}^{t_f} v\,(t)dt = \int_{t_0}^{t_f} (v_0 + a\,t\,dt)$$

$$\int_{t_0}^{t_f} (v_0 + a\quad t\ dt) = \int_{t_0}^{t_f} v_0 dt + \int_{t_0}^{t_f} a\quad t\,dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{dx}{dt}\,dt = \qquad\qquad = [v_0 t]_{t0}^{\ tf} + \frac{1}{2}a\ [t^2]_{t0}^{\ tf} =$$

$$= [x]_{t0}^{\ tf} = \qquad\qquad = v_0 t_f - \cancel{v_0 t_i} + \frac{1}{2}a\ tf^2 - \cancel{\frac{1}{2}a}\ ti^2 =$$

$$= x_f - xi \qquad\qquad = v_0 t_f + \frac{1}{2}a\ tf^2$$

$$x_f - xi = v_0 t_f + \frac{1}{2}a\ tf^2 \longrightarrow \boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

3.3.4 Corpo in caduta libera

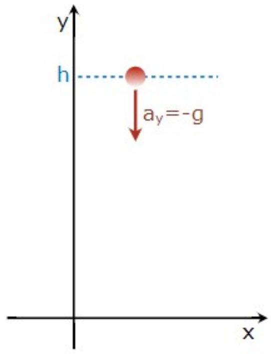
Il modulo dell'accelerazione di caduta libera si indica con il simbolo **g**=9.81m/s^2.
Corpo in caduta libera: oggetto che si muove liberamente soltanto sotto l'azione della gravità. La caduta libera di un corpo è un moto uniformemente accelerato.
Leggi del moto:

$$\begin{cases} a(t) = -g \\ v(t) = v_0 + at = v_0 - gt \\ y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Esempio: Una pietra è lasciata cadere da una quota h con velocità iniziale nulla. Determinare:

a) l'istante in cui arriva al suolo

b) la velocità con cui arriva al suolo



Condizioni iniziali:
$a(t) = -g$
$v(0) = 0$
$y(0) = h$
Leggi del moto:

$$\begin{cases} a(t) = -g \\ v(t) = \cancel{v_0} - gt \\ y(t) = h + \cancel{v_0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

a) t1: istante in cui arriva a terra

$$\begin{cases} t_1 : y(t_1) = 0 \\ y(t_1) = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \rightarrow 0 = h - \frac{1}{2}gt_1^2$$

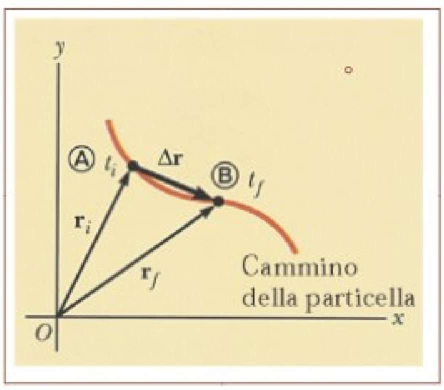
$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

b)$v(t_1)$: velocità nell'istante in cui arriva a terra
$v(t_1) = -gt_1 = -g\sqrt{\frac{2h}{g}}$
$v(t_1) = -\sqrt{2gh}$

3.4 Moti bidimensionali

Le variabili cinematiche definite nel caso del moto in una dimensione vengono adesso definite nel piano xy.

Spostamento



$$\begin{cases} \vec{r}_i & \text{Posizione iniziale} \\ \vec{r}_f & \text{Posizione finale} \\ \vec{r}(t) & \text{Posizione all'istante } t \\ \vec{\Delta r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i & \text{Spostamento} \end{cases}$$

Le variabili vettoriali vengono quindi scomposte nelle componenti x e y

Velocità media:

$$\vec{v_m} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \begin{cases} v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{cases}$$

Velocità istantanea:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \begin{cases} v_x(t) = \frac{dx}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

Accelerazione media:

$$\vec{a_m} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \begin{cases} a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ a_y(t) = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \end{cases}$$

Accelerazione istantanea:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

Moto rettilineo uniforme:

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}t \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ y(t) = x_0 + v_{0y}t \end{cases}$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_xt^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2 \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{a}t \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + a_xt \\ v_y(t) = v_{0y} + a_yt \end{cases}$$

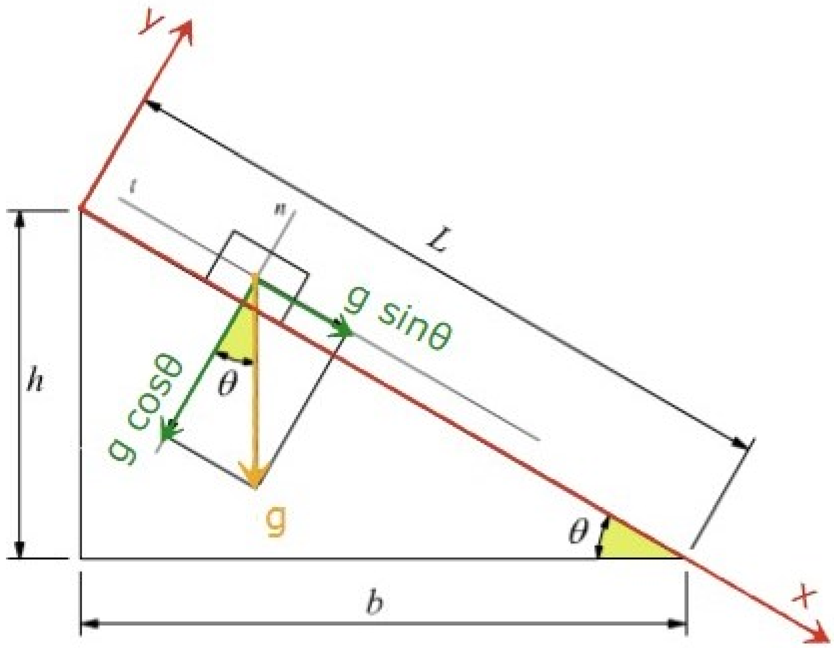
3.4.1 Moto su piano inclinato

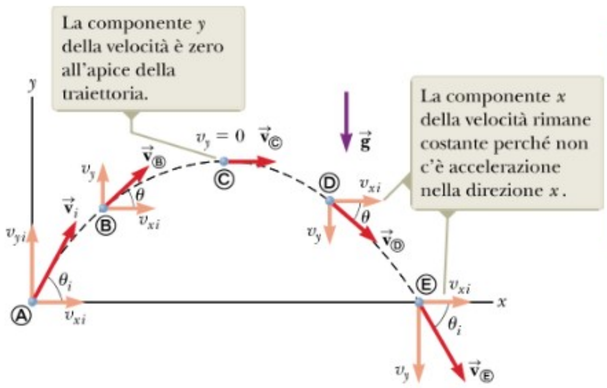
Un corpo che si muove lungo un piano inclinato risente dell'accelerazione gravitazionale. Esso si muove con accelerazione costante, rivolta lungo il piano e verso il basso; l'accelerazione risulta essere solo una componente dell'accelerazione di gravita.
Per semplicità quindi scegliamo un sistema di riferimento con asse x parallelo al piano. Il moto risulta quindi essere un moto uniformemente accelerato unidimensionale dove l'accelerazione considerata è la componente dell'accelerazione gravitazionale parallela al piano considerato ($g_{||} = g \cdot sin\theta$)

3.4.2 Moto del proiettile

Il moto di un oggetto lanciato con una certa inclinazione rispetto all'asse x segue una traiettoria curva. Tale moto viene analizzato facendo le seguenti ipotesi:

- l'accelerazione gravitazionale si mantiene costante per tutto il moto ed è diretta verso il basso.
- l'effetto della resistenza dell'aria è trascurabile.





- Il moto del proiettile è descritto dalla combinazione di due moti

ASSE x: *moto rettilineo uniforme*

ASSE y: *moto uniformemente accelerato*

Il moto viene scomposto lungo i due assi. **Le condizioni iniziali saranno:**

posizione: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ **velocità** $\begin{cases} v_{0x} = v_0 cos\theta \\ v_{0y} = v_0 sin\theta \end{cases}$ **accelerazione** $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$

Velocità:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x(t) = v_0 cos\theta & \textbf{(moto rettilineo uniforme)} \\ v_y(t) = v_0 sin\theta - gt & \textbf{(moto uniformemente accelerato)} \end{cases}$$

Legge oraria:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 cos\theta t & \textbf{(moto rettilineo uniforme)} \\ y(t) = v_0 sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 & \textbf{(moto unif. accelerato)} \end{cases}$$

Punti caratteristici :

A) h_{max} **Quota massima:** cioè il punto in cui la componente y della velocità si annulla (inversione del moto):

Tempo impiegato per raggiungere la quota massima

$$t_A : v_y(t_A) = v_0 sin\theta - gt_A \rightarrow t_A = \frac{v_0 sin\theta}{g}$$

Sostituisco t_A nella legge oraria lungo y e ottengo:

$$y(t_A) = v_0 sin\theta(\frac{v_0 sin\theta}{g}) - \frac{1}{2}g(\frac{v_0 sin\theta}{g})^2$$

$$h_{max} = y(t_A) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 sin^2\theta}{g}$$

B)R gittata: punto in cui il proiettile tocca il suolo:

$$t_B : y(t_B) = v_0 sin\theta t_B - \frac{1}{2}gt_b^2 \rightarrow t_B = \frac{2v_0 sin\theta}{g}$$

Sostituisco t_B nella legge oraria lungo x e ottengo:

$$x(t_B) = v_0 cos\theta(\frac{2v_0 sin\theta}{g})$$

$$R = x(t_B) = \frac{2v_0^2 sin\theta cos\theta}{g}$$

B)Velocità con cui il corpo arriva al suolo: sostituisco t_B nella legge della velocità

$$\begin{cases} v_x(t_B) = v_0 cos\theta \\ v_y(t_B) = v_0 sin\theta - gt_B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x(t_B) = v_0 cos\theta \\ v_y(t_B) = v_0 sin\theta - g\frac{2v_0 sin\theta}{g} = -v_0 sin\theta \end{cases}$$

Modulo : $|v(t_B)| = \sqrt{v_x(t_B)^2 + v_y(t_B)^2}$

Direzione: $tan\theta_B = \frac{v_y(t_B)}{v_x(t_B)}$

4 Dinamica

Mentre la cinematica studia il moto dei corpi, la Dinamica studia le forze ovvero le cause che determinano il moto dei corpi. La Dinamica è governata da tre leggi, basate su osservazioni sperimentali:

1. Prima legge di Newton (o **legge di inerzia**)
2. Seconda legge di Newton
3. Terza legge di Newton (o legge di azione e reazione)

4.1 Forza

Si definisce **Forza** una qualunque causa esterna che produce una variazione dello stato del moto o di quiete di un corpo. Per misurare il modulo di una forza si usa il dinamometro che utilizza il principio della legge di Hooke, per il quale la deformazione di un materiale elastico è direttamente proporzionale alla forza applicata al materiale stesso.
La forza è un vettore, quindi definita da modulo, direzione e verso.
L'analisi dimensionale della forza ci dà: $[F] = \frac{[M][L]}{[T]^2} = [M][L][T]^{-2}$
Nel SI l'unità di misura della forza è chiamata Newton: $1\text{N}=\frac{1kg1m}{s^2}$ (1N è la forza necessaria a imprimere un'accelerazione di 1 m/s^2 a una massa di 1kg.)

4.2 Leggi di Newton

4.2.1 Prima legge di Newton

Formulazione rigorosa:
se un punto materiale è isolato, esiste almeno un sistema di riferimento nel quale il corpo si muovo di moto rettilineo uniforme.
Conseguenze:

- Se su un corpo non agiscono forze, la sua velocità non cambia nel tempo (l'accelerazione è nulla).
- Se la forza risultante su un corpo è nulla, la velocità non cambia nel tempo (l'accelerazione è nulla).
- Se su un corpo è fermo o si muove di moto rettilineo uniforme finché non interviene una forza esterna a modificare tale stato.

4.2.2 Seconda legge di Newton

La risultante delle forze che agiscono su un corpo è uguale alla massa del corpo per l'accelerazione da esso assunta.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases}$$

4.2.3 Terza legge di Newton

Se due corpi interagiscono, la forza esercitata dal primo sul secondo è uguale e opposta alla forza esercitata dal secondo sul primo

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

4.3 Forza Peso

4.3.1 Forza di gravità

Gli oggetti lasciati cadere sulla Terra cadono tutti con la stessa accelerazione $\vec{g}$. La forza che dà luogo a questa accelerazione è chiamata **forza di gravità**(o forza gravitazionale).
Il modulo della forza di gravita (mg) è chiamato **peso** dell'oggetto. Ad esempio:

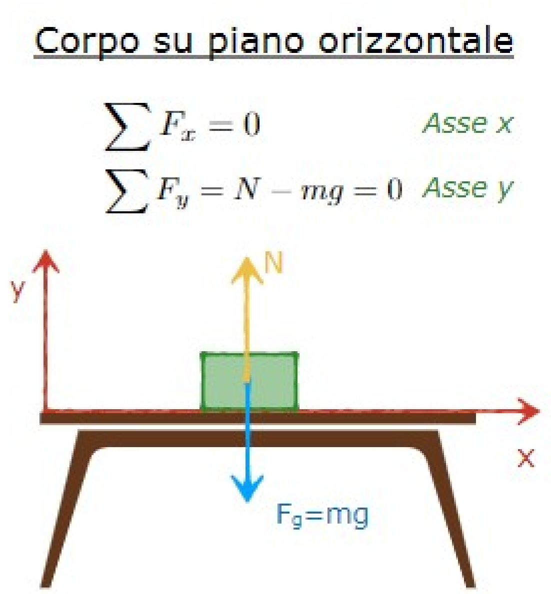
- Il peso di una massa di 1.00kg sulla Terra è di $1.00kg \cdot 9.81m/s^2 = 9.81N$
- Il peso di una massa di 1.00kg sulla Terra è di $1.00kg \cdot 1.62m/s^2 = 1.62N$

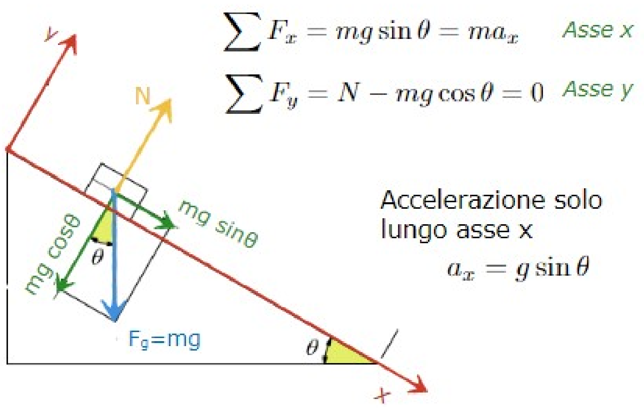
La forza peso la forza con cui tutti i corpi sono attratti verso il centro della Terra (sempre diretta verticalmente verso il basso)

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

4.3.2 Forza Normale

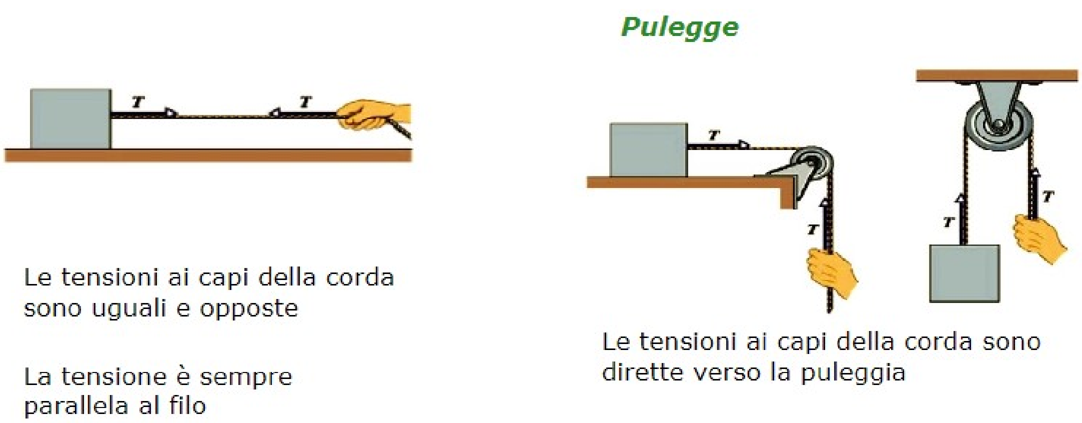
La forza di gravità agisce sempre, non solo quando un oggetto cade. Quando un oggetto è fermo sulla Terra dev'esserci una forza uguale e opposta che bilancia la forza gravitazionale. Questa forza è la **forza normale** (o reazione vincolare): forza perpendicolare al vincolo che si oppone alla forza peso.
Corpo su piano orizzontale c
Corpo su piano inclinato





4.4 Tensione

Le funi sono dispositivi che permettono di trasmettere l'azione di una forza applicata in un dato punto a un punto diverso. La fune viene considerata inestensibile e di massa trascurabile. Considerando trascurabile il peso della fune, si ha che la tensione è uguale lungo tutta la lunghezza della fune. Questo principio è alla base dell'utilizzo di carrucole per modificare la direzione di una forza.



4.5 Forze di attrito

Le forze di attrito si sviluppano tra superfici ruvide ed hanno le seguenti caratteristiche:

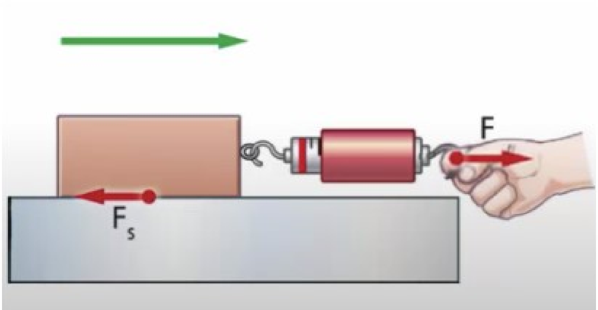
- dipendono dallo stato di rugosità delle superfici a contatto (coefficiente di attrito μ).
- hanno la conseguenza di impedire (**attrito statico**) o decelerare (**attrito dinamico**) il movimento relativo di tali superfici.

La forza di attrito è:

- parallela alla superficie.
- opposta alla sollecitazione che tende a far muovere il corpo.
- perpendicolare alla normale N.

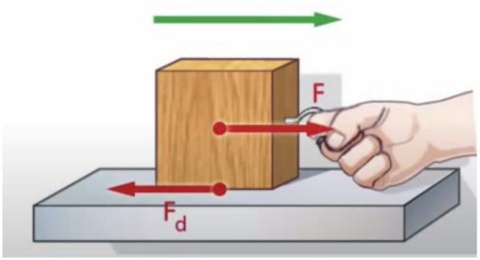
4.5.1 Forza di attrito statico

Forza di attrito statico (corpo fermo) $f_s \leq \mu_s N$ (dove μ_s è coefficiente di attrito statico)



4.5.2 Forza di attrito dinamico

Forza di attrito dinamico (corpo in moto) $f_d = \mu_d N$ (dove μ_d è coefficiente di attrito dinamico)



4.6 Forza elastica

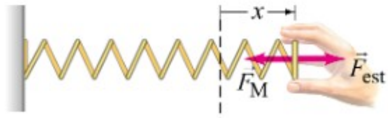
La forza elastica è proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio. Essa è regolata dall Legge di Hooke :

$$\vec{F}_m = -k\vec{x}$$

(dove k è la costante elastica della molla (N/m))
Consideriamo una molla attaccata ad un estremo a una parete e all'altro estremo collegata ad una massa m.

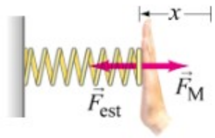
- La forza elastica è data da: $\vec{F}_m = -k\vec{x}$
- Il verso di $\vec{F}_m$ è sempre opposto a quello della $\vec{F}_{ext}$

a) Sotto l'azione di una F_{ext} la molla viene allungata di x>0
La molla reagisce con una forza di richiamo F_m che tende a riportare la molla in posizione di equilibrio



b) Nessuna forza agisce sulla molla, essa è in posizione di equilibrio: $x = 0$; $F_m = 0$

c) Sotto l'azione di una F_{ext} la molla viene accorciata di x<0
La molla reagisce con una forza di richiamo F_m che tende a riportare la molla in posizione di equilibrio



- Il segno meno è dovuto al fatto che l'allungamento della molla ($\vec{x}$) è sempre opposto a $\vec{F}_m$ e concorde a $\vec{F}_{ext}$
- La forza di opposizione fornita dalla molla cresce all'aumentare della deformazione subita.
- La costante elastica ha una unità di misura: [k]=$\frac{[F]}{[M]} = \frac{N}{m}$
- maggiore è il valore di k, maggiore è la resistenza alla deformazione della molla.

4.7 Moto della molla

Dopo aver analizzato la forza elastica, ora vogliamo determinare il moto della molla. Applico il 2° principio della dinamica:

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow -kx = m\frac{d^2x}{d^2t} \rightarrow \frac{d^2x}{d^t} + \frac{k}{m} = 0$$

Pongo: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad$ $[\omega] = [T]^{-1}$
L'equazione del moto risulta: $\frac{d^2x}{d^2t} + \omega^2 x = 0$
La soluzione di questa equazione differenziale è:

$$x(t) = Asen(\omega t + \phi) \qquad \text{Elongazione della molla}$$

Il moto di elongazione della molla è un moto oscillatorio caratterizzato dalle costanti del moto A e ϕ
Definiamo le grandezze:

- A: Massima ampiezza di oscillazione
- ϕ: valore di x (elongazione) a t=0
- T: Periodo, tempo che occorre per compiere un'oscillazione completa

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- f:Frequenza, numero di oscillazioni nell'unità di tempo

$$f = \frac{1}{T} \qquad [f] = [T]^{-1} \text{ (Hertz}=s^{-1})$$

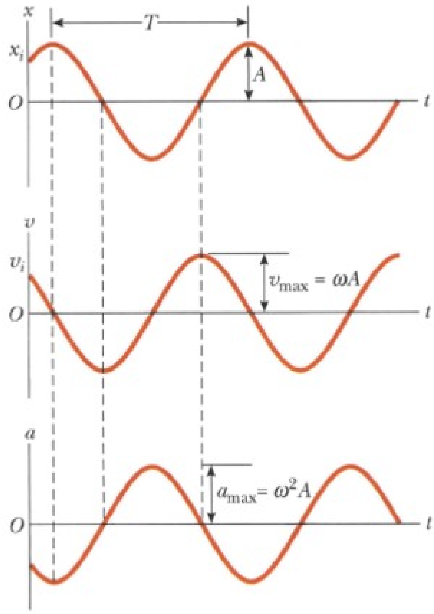
Derivando si ottiene l'equazione della velocità e dell'accelerazione:

$$x(t) = A\,sen(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = A\omega\,cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) = -A\omega^2\,sen(\omega t + \varphi) =$$

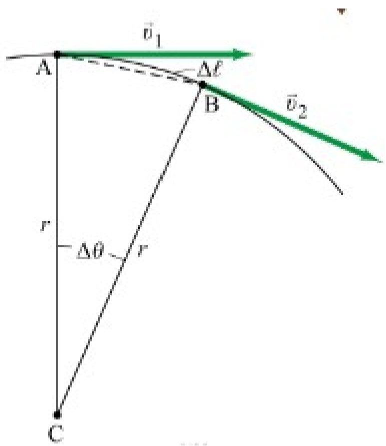
$$= -\omega^2\,x(t)$$

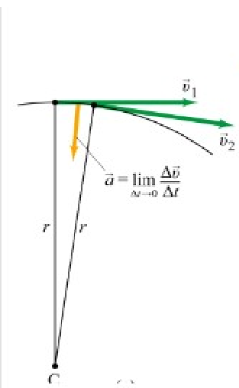


4.8 Moto circolare uniforme

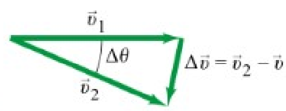
Il moto circolare uniforme avviene lungo traiettoria circolare con velocità costante in **modulo** ma non nella direzione. Un cambiamento nella direzione della velocità implica un'accelerazione, quindi anche se la velocità è costante, si tratta di un **moto accelerato**.

L'accelerazione media è definita come: $\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$
Durante l'intervallo tempo Δt il corpo si sposta dal punto A al punto B coprendo una distanza Δl lungo l'arco che sottende l'angolo $\Delta\theta$





- Se $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta l$ e $\Delta\theta$ diventano molti piccoli e $\vec{v}_2$ diventa quasi parallelo a $\vec{v}_1$ e, di conseguenza, $\Delta\vec{v}$ è praticamente perpendicolare a essi, diretto verso il centro della circonferenza. Avendo lo stesso segno, anche $\vec{a}$ sarà diretta verso il centro della circonferenza e perciò viene chiamata accelerazione centripeta (= "che tende verso il centro") o radiale (= diretta lungo il raggio). La indicheremo con $\vec{a}_R$



Poiché il raggio CA è perpendicolare a $\vec{v}_1$ e CB è perpendicolare a $\vec{v}_2$, segue che l'angolo $\Delta\theta$, tra CA e CB, è anche l'angolo tra $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. I vettori $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$,$\Delta\vec{v}$ formano un triangolo che è geometricamente simile al triangolo ABC.
Considerando Δt e quindi $\Delta\theta$ piccolo, possiamo porre $v = v_1 = v_2$ e quindi $\frac{\Delta v}{v} \sim \frac{\Delta l}{r}$
Se $\Delta t \to 0$ l'uguaglianza è esatta $\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta l}{r}$ perché $\Delta l = AB$, e quindi: $\Delta v = \frac{v}{r}\Delta l$
L'accelerazione istantanea sarà $a_R = \lim_t \to 0\frac{\Delta v}{\Delta t} =$

Definiamo ora le grandezze e le formule:

- **Accelerazione centripeta**(o radiale): $\frac{v^2}{r}$
- **Periodo**: tempo impiegato a compiere un giro completo $T = \frac{2\pi r}{v}$
- **Frequenza**: numero di giri al secondo: $f = \frac{1}{T}$
- **Velocità angolare**: angolo descritto dal raggio nell'unità di tempo: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$

Alcune osservazioni:

- Un oggetto che si muove lungo la circonferenza di raggio r ha un'accelerazione diretta verso il centro della circonferenza, di modulo $a_R = \frac{v^2}{r}$
- Più grande è la velocità scalare v, più rapidamente la velocità cambia direzione
- Più grande è il raggio, meno rapidamente la velocità cambia direzione
- Il vettore velocità punta sempre nella direzione del moto (tangente alla circonferenza)
- Il vettore accelerazione è diretto verso il centro della circonferenza se v è costante.

5 Lavoro ed Energia

In questo capitolo vengono affrontati i problemi legati al moto dei corpi usando nuove grandezze fisiche: il **Lavoro** e l'**Energia**.

5.1 Sistemi

Considereremo l'energia e gli scambi di energia all'interno di un **Sistema**, cioè una piccola regione dell'Universo separata dall'ambiente circostante.
Un sistema può essere:

- Una singola particella
- Un insieme di oggetti o particelle
- Una regione dello spazio

5.2 Lavoro di una forza costante

La forza che agisce su un corpo, determinandone uno spostamento, compie un **Lavoro**. Nel caso di una forza costante, il lavoro è definito come:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\Delta r cos\theta$$

Una forza compie lavoro solo se produce uno spostamento. Vediamo alcuni casi particolari:

- Forza e spostamento paralleli: $\theta = 0$ $\quad cos\theta = 1$ $\quad W = F\Delta r$ (**Lavoro Positivo**)
- Forza e spostamento anti-paralleli: $\theta = 180°$ $\quad cos\theta = -1$ $\quad W = -F\Delta r$ (**Lavoro Negativo**)
- Forza e spostamento perpendicolari: $\theta = 90°$ $\quad cos\theta = 0$ $\quad W = 0$ (**Lavoro Nullo**)

L'unità di misura del Lavoro nel S.I. del lavoro è il **Joule**

$$1J = 1N \cdot m = 1kg\frac{m^2}{s^2}$$

- Se il lavoro è positivo: $W > 0$ l'energia viene trasferita dall'ambiente al sistema
- Se il lavoro è negativo: $W < 0$ l'energia viene trasferita dal sistema all'ambiente

Il **Lavoro Totale** è dato dalla somma dei lavori compiuti dalle forze che agiscono sul corpo.

$$W_{tot} = \sum W_i$$

Esempio: nel caso di un corpo che si muove su un piano orizzontale, trainato da una forza F.

$$W_{tot} = \underline{W_N} + \underline{W_{F_p}} + W_F = W_F$$

5.3 Lavoro di una forza variabile

Consideriamo un corpo che si muove lungo l'asse x, soggetto ad una forza variabile.

$$F=F(x)$$

Supponiamo la forza costante in un tratto Δx. In tale tratto il lavoro risulta:

$$W \approx F_x \Delta x$$

Per ottenere il lavoro totale si sommano i contributi calcolati sui singoli tratti

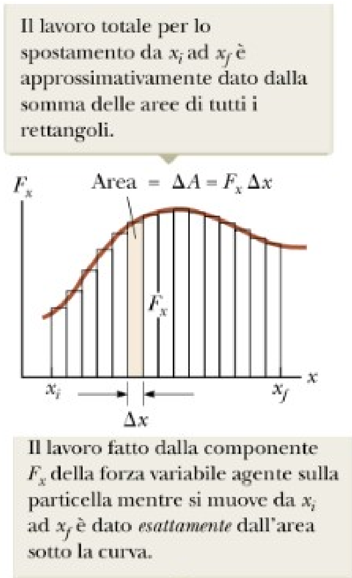
$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

Nel limite in cui tratto Δx diventa infinitesimo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \rightarrow W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Il lavoro di una forza variabile:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

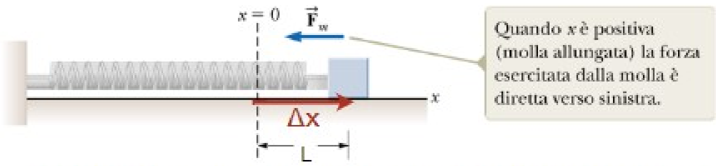


5.3.1 Lavoro della forza elastica

dal pdf della prof:

$$W_m = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = -k\frac{x^2}{2}\bigg|_{x_i}^{x_f} = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2)$$

- **CASO 1:** La molla viene estesa dalla posizione di riposo fino ad una distanza L

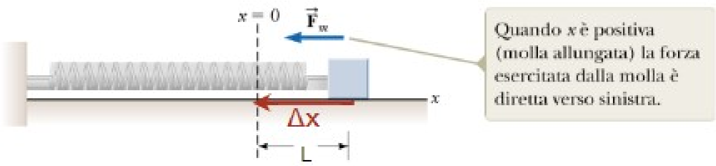


$x_i = 0$
$x_f = L$
$W_m = -\frac{1}{2}kx^2$

Il lavoro della forza elastica è negativo

Forza e spostamento sono DISCORDI

- **CASO 2:** La molla torna alla posizione di riposo partendo da una estensione pari a L

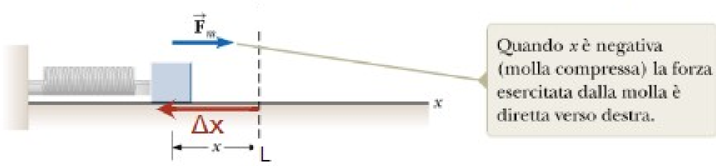


$x_i = L$
$x_f = 0$
$W_m = \frac{1}{2}kL^2$

Il lavoro della forza elastica è positivo

Forza e spostamento sono CONCORDI

- **CASO 3:** La molla viene contratta dalla posizione di riposo fino a una distanza -L



$x_i = 0$
$x_f = -L$
$W_m = -\frac{1}{2}kL^2$

Il lavoro della forza elastica è negativo

Forza e spostamento sono DISCORDI

5.4 Energia Cinetica

Il lavoro è un meccanismo che consente di trasferire energia ad un sistema. Esso può essere anche considerato come un'influenza che l'ambiente esercita sul sistema. Una possibile conseguenza del lavoro compiuto sul sistema è che questo cambi velocità.

Consideriamo un corpo di massa m che si muove lungo l'asse x sotto l'effetto di una forza F. Per il II Principio della Dinamica $F = ma$.

Se il corpo compie uno spostamento Δx il lavoro totale risulta:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}dx = \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv$$

$$W = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

5.4.1 Teorema dell'energia cinetica

Abbiamo ricavato che il lavoro totale è dato da:

$$W = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

Si definisce energia cinetica la quantità $K = \frac{1}{2}mv^2$ [J]

Il lavoro totale risulta dunque $W = K_f - K_i$ (teorema delle forze vive)

Il teorema delle forze vive è un risultato che ha validità generale: mette in relazione il lavoro compiuto da tutte le forze che agiscono su un corpo con la variazione di energia cinetica.

- Se la velocità aumenta, il lavoro è positivo.
- Se la velocità diminuisce, il lavoro è negativo.

Applicazione alla forza peso Un corpo di massa m viene lasciato cadere verso il basso con velocità iniziale nulla da un'altezza h. Calcolare la velocità con cui raggiunge il suolo.

$W_{tot} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$ (la velocità iniziale è nulla)

$W_{tot} = W_{F_p} = mgh$

$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 \rightarrow v_f = \sqrt{2gh}$

Applicazione alla forza d'attrito Un corpo di massa m si muove un piano orizzontale su cui è presente attrito con coefficiente μ_d. Se parte con velocità v_0, quanto spazio percorre prima di fermarsi?

$W_{tot} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$ (la velocità finale è nulla)

$W_{tot} = W_{F_p} + W_N + W_{f_d} = W_{f_d} = -\mu_d mgL$

$-\mu_d mgL = -\frac{1}{2}mv_i^2 \rightarrow L = \frac{1}{2}\frac{v_i^2}{\mu_d g}$

Applicazione alla forza elastica Una molla a cui è agganciato un corpo di massa m è inizialmente compressa di un tratto L e ha una costante elastica k. Trovare la velocità con cui arriva nella posizione di riposo

$W_{tot} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$ (la velocità iniziale è nulla)

$W_{tot} = W_{F_p} + W_N + W_m = W_m = \frac{1}{2}kL^2$

$\frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 \rightarrow v_f = \sqrt{\frac{kL^2}{m}}$

5.5 Energia Potenziale

Consideriamo un corpo di massa m in quiete su un piano orizzontale (y=0, v=0). La forza peso è equilibrata dalla reazione vincolare.
Applico una forza F diretta verso l'alto che solleva il corpo fino ad un'altezza h. Il lavoro fatto sul sistema deve causare un aumento dell'energia del sistema. Eppure essendo $v_f = v_i$ non c'è variazione di energia cinetica. La variazione di energia deve essere immagazzinata sotto forma di energia diversa dall'energia cinetica.
Se si lascia cadere il libro dalla quota h facendolo tornare nella posizione iniziale, il corpo acquista energia cinetica. Quindi, nel punto più alto il libro possiede **Potenzialmente** energia cinetica.
L'**ENERGIA POTENZIALE** è un meccanismo di accumulo dell'energia.

Energia potenziale della forza peso:
L'energia potenziale posseduta da un corpo posto ad un'altezza h dal suolo risulta

$$U_g = mgh$$

Energia potenziale della forza elastica
L'energia potenziale associata ad un corpo attaccato ad una molla e posto ad una distanza x dalla sua posizione di riposo risulta

$$U_m = \frac{1}{2}kx^2$$

5.6 Forze conservative

Le forze si dicono **conservative** se il lavoro svolto per spostare un corpo da un punto A ad un punto B è indipendente dal percorso specifico eseguito. Nel caso di forze conservative, il lavoro svolto su una particella che si muove su un percorso chiuso è nullo.

5.6.1 Conservazione dell'energia meccanica

Si definisce **energia meccanica** di un sistema la somma di energia cinetica ed energia potenziale

$$\text{E=K+U}$$

Teorema di conservazione dell'energia meccanica In un sistema in cui agiscono soltanto forze conservative l'energia meccanica si conserva

$$E_i = E_f$$
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

5.7 Potenza

La **Potenza Media** generata in un certo intervallo di tempo è data dal rapporto tra il lavoro compiuto e l'intervallo di tempo considerato

$$P_{media} = \frac{W}{\Delta t}$$

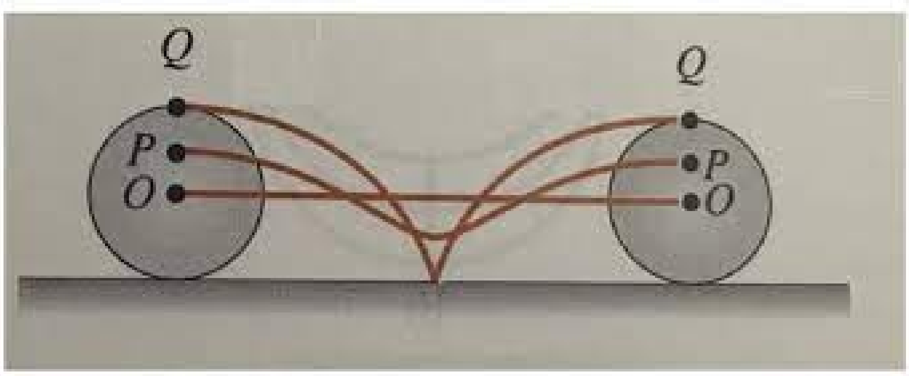
La **Potenza istantanea** è la derivata del lavoro rispetto al tempo

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

L'unità di misura della potenza nel S.I. è il Watt definito come: $1W = \frac{1J}{s} = 1kg\frac{m^2}{s^3}$

6 Moto rotazionale

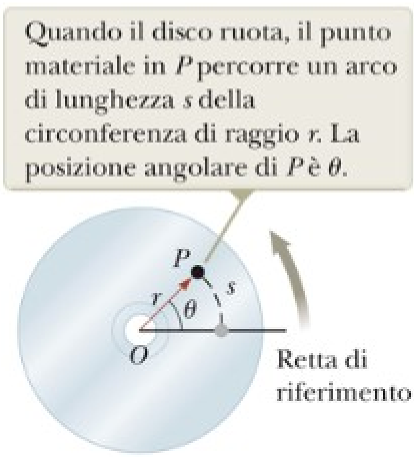
Il moto di un corpo esteso che gira intorno al suo asse non può essere studiato utilizzando il modello di punto materiale: le varie parti dello stesso corpo presentano velocità e accelerazioni differenti. Perciò consideriamo il **CORPO RIGIDO**: corpo indeformabile in cui le distanze tra tutte le coppie di punti materiali che lo costituiscono rimangono costanti



Consideriamo un disco rotante intorno ad un asse fisso perpendicolare al piano e passante per il centro O del disco. Un punto P posto a distanza r dal centro O percorre una traiettoria circolare di raggio r.
Il punto P si rappresenta in termini di coordinate polari (r,θ). L'angolo varia nel tempo mentre r rimane costante. L'arco percorso risulta:

$$s = r\theta$$

θ si misura in radianti (θ(rad)=$\frac{\pi}{180}\theta$(gradi))



6.1 Posizione angolare

La **posizione angolare** del corpo rigido è l'angolo θ fra la linea radiale sul corpo e la linea di riferimento fissa nello spazio (asse x). Quando una particella di un corpo rigido si muove dalla posizione A alla posizione B in un intervallo di tempo Δt la linea di riferimento solidale al corpo spazza un angolo $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$. Questa quantita è definita come lo spostamento angolare del corpo rigido

6.2 Velocità angolare media e velocità angolare istantanea

La **velocità angolare media** ω_{med} è definita come il rapporto dello spostamento angolare di un corpo rigido e l'intervallo di tempo Δt durante il quale lo spostamento avviene:

$$\omega_{med} \equiv \frac{\theta_f-\theta_i}{t_f-t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad [\text{rad/s}]$$

La **velocità angolare istantanea** risulta:

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad [\text{rad/s}]$$

6.3 accelerazione angolare media e accelerazione angolare istantanea

L'**accelerazione angolare media** a_{med} di un corpo rigido in rotazione è definita dal rapporto fra la variazione di velocità angolare e l'intervallo di tempo Δt nel quale questa variazione avviene.

$$\alpha_{med} \equiv \frac{\omega_f-\omega_i}{t_f-t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad [rad/s^2]$$

l'**accelerazione angolare istantanea** è definita come il limite dell'accelerazione angolare media per Δt tendente a zero

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad [rad/s^2]$$

6.4 Leggi del moto

$$\begin{cases} \alpha = costante \\ \omega_f = \omega_i + at \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

6.5 Relazioni tra grandezze rotazionali e traslazionali

La **velocità tangenziale** è il vettore velocità tangente alla traiettoia.

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$
$$v = r\omega \qquad s = r\theta \qquad \theta = \frac{s}{r}$$

Sebbene ciascun punto sul corpo rigido abbia la stessa velocità angolare, non tutti i punti hanno la stessa velocità scalare tangenziale perché r non è lo stesso per tutti i punti sul corpo
$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$
$a_t = r\alpha$ accelerazione tangenziale
$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$ accelerazione centripeta
$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$ accelerazione totale

6.6 Energia cinetica rotazionale

Consideriamo un corpo come un sistema di particelle e assumiamo che ruoti intorno a un asse fisso z con velocità angolare ω. Sia m_i la massa dell'i-esima particella e v_i la sua velocità tangenziale; la sua energia cinetica è

$$K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

L'energia cinetica totale del corpo rigido in rotazione è la somma delle energie cinetiche dei singoli punti che lo compongono

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$
$$K_R = \frac{1}{2} (\sum_i m_i r_i^2) \omega^2$$

Definiamo momento di inerzia di un corpo rigido $I \equiv \sum_i m_i r_i^2$ [kg m^2]

L'equazione diventa

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \text{ENERGIA CINETICA ROTAZIONALE}$$

6.6.1 Momento di Inerzia

Immaginiamo il corpo suddiviso in tanti piccoli elementi, ciascuno di massa Δm_i. Usiamo la definizione $I \equiv \sum_i m_i r_i^2$ e calcoliamone il limite per $\Delta m_i \to 0$. In questo limite, la somma diventa un integrale sul volume del corpo.

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

Se scriviamo dm=ρdV

$$I = \int \rho r^2 dV$$

I momenti di inerzia che considereremo maggiormente sono:

- Momento di inerzia del **cilindro pieno:** $I_{CM} = \frac{1}{2} M R^2$
- Momento di inerzia della **sfera piena:** $I_{CM} = \frac{2}{5} M R^2$

6.7 Momento di una forza

Consideriamo un corpo rigido imperniato su un asse. Quando su questo corpo si esercita una forza risultante e la retta d'azione della forza non passa per il perno, il corpo tende a ruotare attorno a quell'asse.

La tendenza di una forza a far ruotare un corpo attorno a un certo asse si misura con una grandezza vettoriale chiamata **momento della forza**.

La forza applicata F generalmente agisce formando un angolo Φ rispetto al vettore posizione r che individua il punto di applicazione della forza.

Il momento della forza è definito come

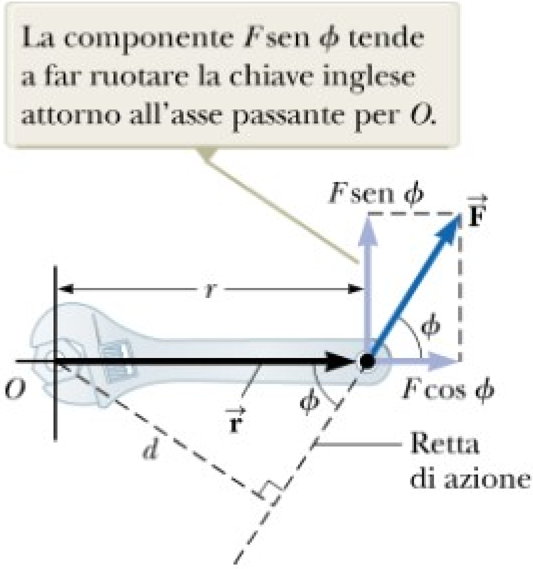
$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \equiv rFsen\Phi$$

$$\tau = F(rsen\Phi) = Fd$$

Se vi sono due o più forze che agiscono su un corpo rigido, ciascuna tende a produrre una rotazione intorno all'asse passante per O
Il momento risultante è:

$$\tau_{risultante} = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

La tendenza a porre in rotazione un corpo cresce al crescere sia di F che di d. Il momento dipende dalla forza e da dove la forza è applicata.



6.7.1 Corpo rigido in equilibrio

Consideriamo due forze di uguale modulo e verso opposto applicate a un corpo. Se hanno la stessa retta di azione, i loro momenti sono uguali e opposti quindi il momento risultate è zero.
Nel caso invece in cui le forze siano una il doppio dell'altra, ma i bracci uno la metà dell'altro, il momento risultante è di nuovo zero.

L'equilibrio di un corpo rigido richiede due condizioni:

1. La risultante delle forze esterne deve essere uguale a zero

$$\sum \vec{F_{est}} = 0 \text{ Equilibrio traslazionale}$$

2. La risultante delle forze esterne deve essere uguale a zero rispetto a qualsiasi asse

$$\sum \vec{\tau_{est}} = 0 \text{ Equilibrio rotazionale}$$

6.7.2 Analogo rotazionale della seconda legge di Newton

Consideriamo un corpo rigido sottoposto alla risultante delle forze. Per ogni data particella del corpo rigido, descritta dall'indice i, possiamo usare la seconda legge di Newton per descrivere l'accelerazione tangenziale della particella.

$$F_{ti} = m_i a_{ti}$$

Moltiplichiamo entrambi i termini per r_i

$$r_i F_{ti} = r_i m_i a_{ti} \Rightarrow \tau_i = m_i r_i^2 \alpha_i$$

Sommiamo i momenti di tutte le particelle del corpo rigido

$$\sum_i \tau_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha_i$$

Momento risultante delle forze esterne

$$\sum \tau_{est} = (\sum_i m_i r_i^2)\alpha \Longrightarrow \sum \tau_{est} = I\alpha$$

6.7.3 Teorema dell'energia cinetica per le rotazioni

Consideriamo un corpo rigido incerniato nel punto O. Una forza esterna è applicata nel punto P e ds è lo spostamento. La quantità infinitesima di lavoro risulta:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}||d\vec{s}|cos\theta_1 = * = F \cdot ds \cdot sin\Phi = (F sin\Phi) r d\theta = \tau d\theta$$

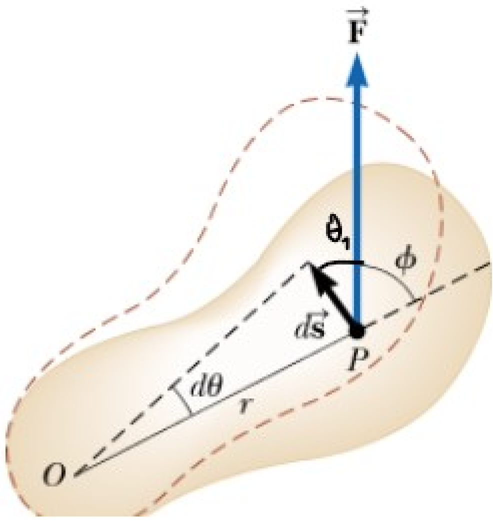
* come si può notare dalla figura, θ_1 e Φ sono complementari quindi: $cos\theta_1 = sin\Phi$.

Dalla forma rotazionale della seconda legge di Newton:

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\omega$$
$$\tau d\theta = dW = I\omega d\omega$$

Integrando questa espressione troviamo il teorema dell'energia cinetica per le rotazioni.

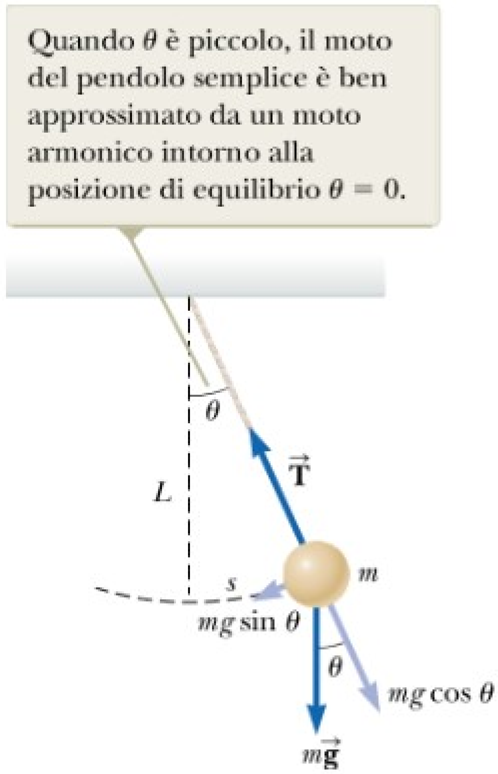
$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega$$
$$W = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = \Delta K_R$$



6.8 Pendolo Semplice

Il **pendolo semplice** è un sistema meccanico che segue un moto periodico e oscillatorio. Esso è costituito da una massa puntiforme sospesa a un filo (di massa trascurabile) di lunghezza L, con un'estremità fissata al soffitto. Il moto del sistema si svolge su un piano verticale.

Sulla massa agiscono la tensione e forza peso. Solo la forza peso ha una componente tangenziale ($mgsin\theta$) che tende a portare la massa nella posizione di equilibrio ($\theta = 0$) Applichiamo la seconda



legge di Newton lungo la direzione tangenziale:

$$F_t = ma_t \rightarrow -mgsin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

- il segno negativo indica che si tratta di una forza di richiamo
- s è lo spostamento lungo l'arco. $s = L\theta$, L è costante.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}sin\theta$$

Approssimando $sin\theta \approx \theta$ (approssimazione di angoli piccoli con l'angolo misurato in radianti).

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

La soluzione è $\theta = \theta_{max}cos(\omega t + \Phi)$
Ricaviamo:

- **pulsazione:** $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$
- **periodo:** $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

7 Meccanica Celeste

7.1 Legge di Gravitazione Universale

Nel 1687 Newton stabilì che la forza che agisce tra corpi celesti è attrattiva.
Ogni particella nell'Universo attrae ogni altra particella con una forza direttamente proporzionale al prodotto tra le masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad G = 6.674 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$$

dove G è detta **Costante di gravitazione universale**

Forma vettoriale: $\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12}$

Le due forze formano una coppia azione-reazione:

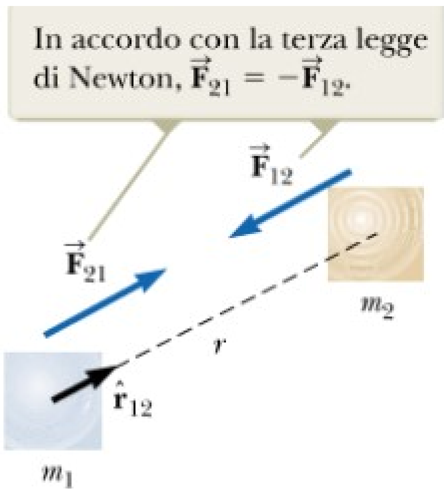
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Forza su una particella di massa m sulla terra:

$$F_g = G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

Energia potenziale gravitazionale

$$U_g = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$



7.2 Leggi di Keplero

Keplero nel 1600 fu il primo ad ipotizzare che le orbite dei pianeti non fossero circolari ma potessero essere **ellittiche**. Elaborò le cosiddette **Leggi di Keplero**.
Newton dimostrò che queste leggi erano la conseguenza della forza gravitazionale che si esercita tra due masse qualsiasi.

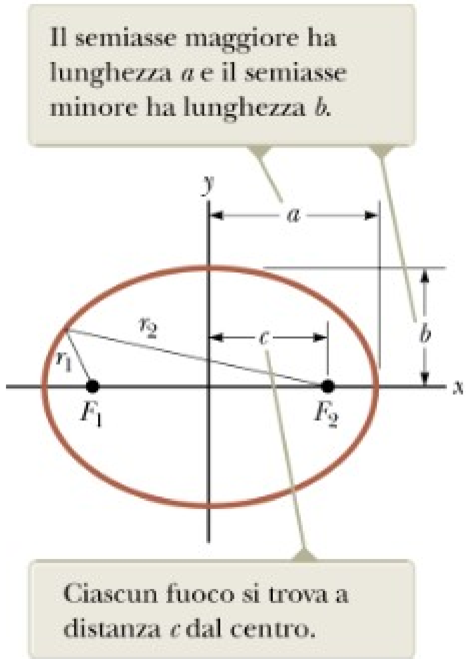
7.2.1 Prima legge di Keplero

Ciascun pianeta descrive orbite ellittiche con il Sole in uno dei fuochi.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

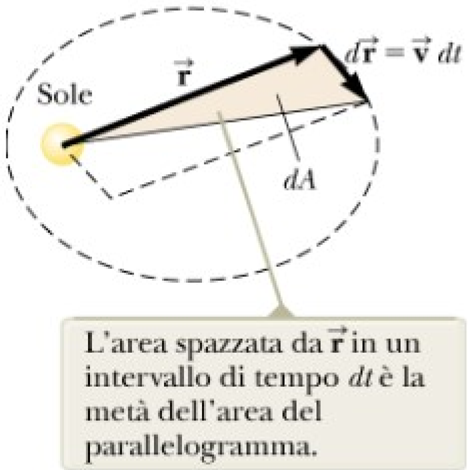
Entrambi i fuochi sono a distanza c dal centro.

L'**eccentricità** di un'ellisse è definita come $e \equiv \frac{c}{a}$ e descrive la forma generale dell'ellisse. Per una circonferenza, c=0, e l'eccentricità è quindi 0. L'intervallo di valori dell'eccentricità per un'ellisse è $0 < e < 1$. (L'eccentricità dell'orbita terrestre è 0.017)



7.2.2 Seconda legge di Keplero

Il raggio vettore tracciato dal Sole verso un qualunque pianeta spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali.
In un intervallo di tempo dt, il raggio vettore **r** spazza l'area dA, uguale alla metà dell'area $|r \times d|$ del parallelogramma formato dai vettori r e d.



7.2.3 Terza legge di Keplero

Il quadrato dei periodi orbitali di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita ellittica.

Consideriamo un pianeta di massa M_p e supponiamo che si muova di moto circolare attorno al Sole (massa M_s)
La forza gravitazionale agente sul pianeta fornisce l'accelerazione centripeta al pianeta in orbita circolare.
Schematizziamo il pianeta come una particella in moto circolare e utilizziamo la legge di Newton della gravitazione universale:

$$F_p = M_p \alpha \rightarrow \frac{GM_S M_p}{r^2} = \frac{M_p v^2}{r}$$

La velocità orbitale del pianeta è $2\pi r/T$ dove T è il periodo.

$$\frac{GM_s}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r}$$

$T^2 = (\frac{4\pi^2}{GM_s})r^3 = K_s r^3$ con $K_s = \frac{4\pi^2}{GM_s} = 2.97 \times 10^{-19} s^2/m^3$

Nel caso di orbite ellittiche sostituiamo r con la lunghezza a del semiasse maggiore:

$$T^2 = (\frac{4\pi^2}{GM_s})a^3 = K_S a^3$$

Corpo	Massa (kg)	Raggio medio (m)	Periodo di rivoluzione (s)	Distanza media dal Sole (m)	$\frac{T^2}{r^3}$ (s^2/m^3)
Mercurio	3.30×10^{23}	2.44×10^6	7.60×10^6	5.79×10^{10}	2.98×10^{-19}
Venere	4.87×10^{24}	6.05×10^6	1.94×10^7	1.08×10^{11}	2.99×10^{-19}
Terra	5.97×10^{24}	6.37×10^6	3.156×10^7	1.496×10^{11}	2.97×10^{-19}
Marte	6.42×10^{23}	3.39×10^6	5.94×10^7	2.28×10^{11}	2.98×10^{-19}
Giove	1.90×10^{27}	6.99×10^7	3.74×10^8	7.78×10^{11}	2.97×10^{-19}
Saturno	5.68×10^{26}	5.82×10^7	9.29×10^8	1.43×10^{12}	2.95×10^{-19}
Urano	8.68×10^{25}	2.54×10^7	2.65×10^9	2.87×10^{12}	2.97×10^{-19}
Nettuno	1.02×10^{26}	2.46×10^7	5.18×10^9	4.50×10^{12}	2.94×10^{-19}
Plutone[a]	1.25×10^{22}	1.20×10^6	7.82×10^9	5.91×10^{12}	2.96×10^{-19}
Luna	7.35×10^{22}	1.74×10^6	—	—	—
Sole	1.989×10^{30}	6.96×10^8	—	—	—

dati planetari

8 Fluidi

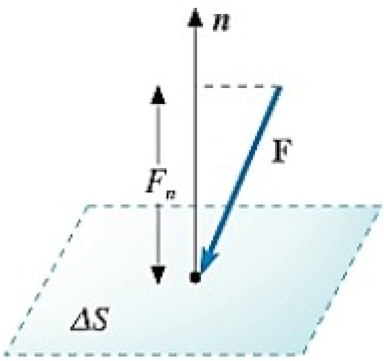
Si dice **fluido** un corpo allo stato liquido o gassoso.

8.1 Pressione

La pressione è una grandezza scalare:

$$P = \frac{\vec{F} \cdot \hat{n}}{S}$$
$$P = \frac{F}{A}$$

L'unità di misura è il pascal. 1Pa=$\frac{1N}{m^2}$.
La pressione atmosferica è uguale a 1 atm=$1 \times 10^5 Pa$



8.2 Densità

La densità ρ di una densita è definita come la sua massa per unità di volume: $\rho = \frac{m}{V}$. Nel S.I. si misura in $\frac{kg}{m^3}$.
Il peso di un oggetto si può scrivere come mg=$\rho V g$.
La densità relativa di una sostanza è un numero puro definito come il rapporto tra la densità di una sostanza e la densità dell'acqua a 4°C ($10^3 kg/m^3$).

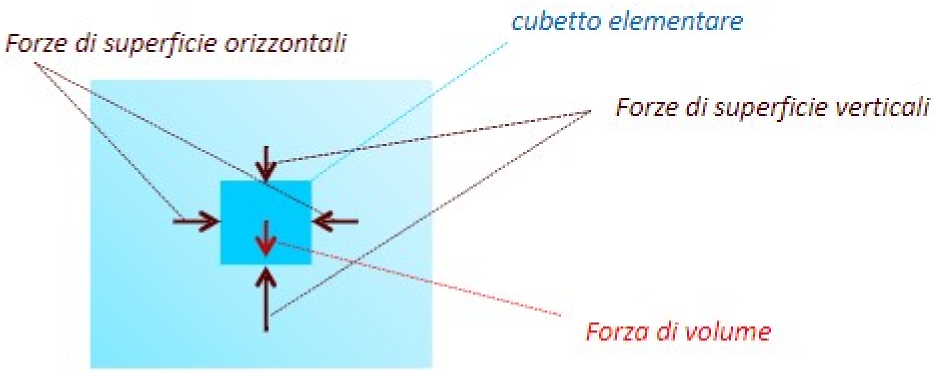
TABELLA 10-1 Densità delle sostanze*

Sostanza	Densità, ρ (kg/m^3)	Sostanza	Densità, ρ (kg/m^3)	Sostanza	Densità, ρ (kg/m^3)
Solidi		Vetro, comune	$2.4\text{-}2.8 \cdot 10^3$	Alcol etilico	$0.79 \cdot 10^3$
Alluminio	$2.70 \cdot 10^3$	Ghiaccio	$0.917 \cdot 10^3$	Benzina	$0.68 \cdot 10^3$
Ferro e acciaio	$7.8 \cdot 10^3$	Osso	$1.7\text{-}2.0 \cdot 10^3$	*Gas*	
Rame	$8.9 \cdot 10^3$	*Liquidi*		Aria	1.29
Piombo	$11.3 \cdot 10^3$	Acqua (4 °C)	$1.00 \cdot 10^3$	Elio	0.179
Oro	$19.3 \cdot 10^3$	Sangue, plasma	$1.03 \cdot 10^3$	Biossido di carbonio	1.98
Calcestruzzo	$2.3 \cdot 10^3$	Sangue, intero	$1.05 \cdot 10^3$		
Granito	$2.7 \cdot 10^3$	Acqua di mare	$1.025 \cdot 10^3$	Acqua (vapore, 100 °C)	0.598
Legno (tipico)	$0.3\text{-}0.9 \cdot 10^3$	Mercurio	$13.6 \cdot 10^3$		

8.3 Idrostatica

Su un volumetto di fluido in quiete agiscono due tipi di forze:

- **Forze di volume**: forze agenti sui volumetti in cui possiamo immaginare di sudddividere il liquido (es: forza peso agente sulla massa del volume)
- **Forze di superficie**: forze agenti sulle superfici che delimitano il volume considerato.



8.3.1 Legge di Stevino

All'equilibrio $\sum_i \vec{F}_i = 0$:

Le forze di superficie orizzontali sono eguali e opposte. Quindi la loro risultante è nulla.
Per le forze verticali:

$$F_1 = P_1 \cdot A$$
$$F_2 = P_2 \cdot A$$

e sappiamo che: $P = mg = Ah\rho g$
All'equilibrio: $F_1 + P = F_2 \Rightarrow P_1 \cdot A + Ah\rho g = P_2 \cdot A$
$\Rightarrow P_2 = P_1 + \rho gh$

Quindi per la legge di Stevino la pressione di un liquido dipende sola dalla profondità. Il termine ρgh prende il nome di **pressione idrostatica**.
La pressione esercitata da una colonna di liquido sulla sua base non dipende dalla sezione, ma dipende dall'altezza.
Poiché la pressione è uguale alla stessa profondità, in recipienti comunicanti il liquido si dispone alla stessa altezza.
Liquidi non miscibili di densità diversa posti in vasi comunicanti raggiungono altezze diverse in modo inversamente proporzionale alle loro densità.

Pressione vs Profondità Come varia la pressione al variare della profondità?
Consideriamo una profondità h sotto la superficie del liquido.
La pressione dovuta al liquido a questa profondità è causata dal peso della colonna di liquido che sta sopra, per cui la forza che agisce sull'area A è $F = mg = (\rho V)g = \rho Ahg$.
La pressione dovuta al peso del liquido è:

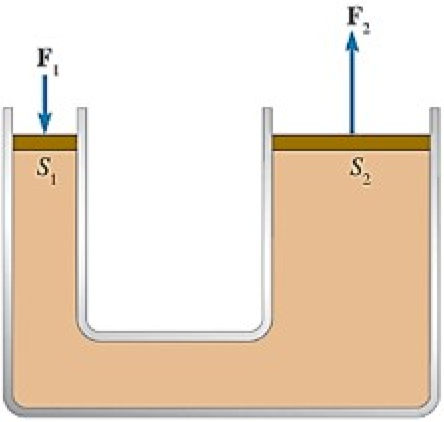
$$P = \frac{F}{A} = \frac{\rho Ahg}{A} = \rho hg$$

8.3.2 Principio di Pascal

Una variazione di pressione applicata a un fluido chiuso viene trasmessa integralmente in ogni punto del fluido e alle pareti del contenitore

$$P = P_{ext} + \rho gh$$

Pressa idraulica Come conseguenza del principio di Pascal, si ha il principio della pressa idraulica, che permette di "amplificare" le forze:
Se applichiamo una forza F_1, la pressione P_1 si trasmettera inalterata sulla sezione di area A_2.



$$P = P_1 = P_2$$

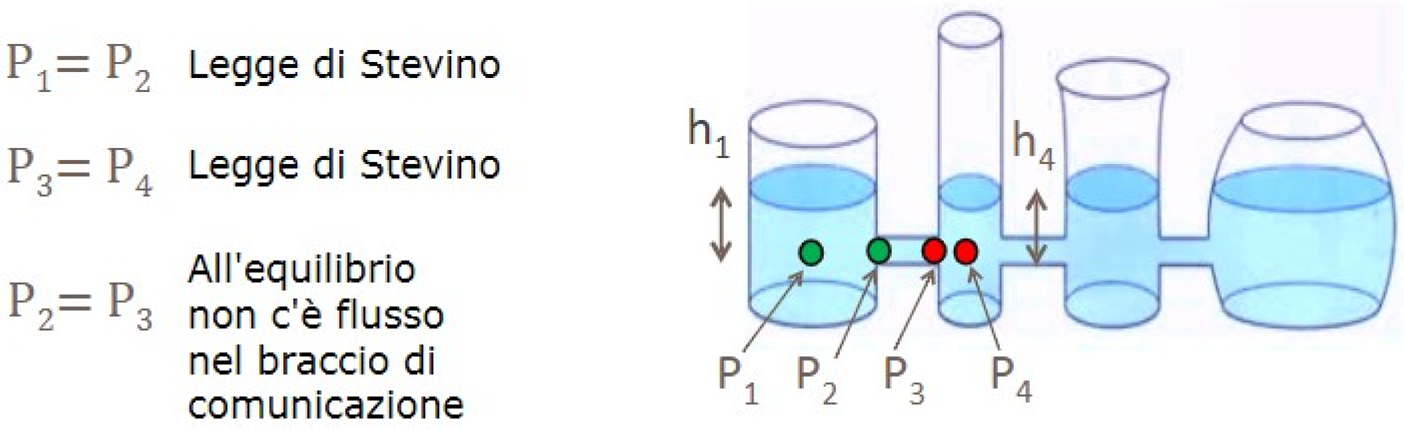
$$P = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$$

$$S_2 > S_1 \rightarrow F_2 > F_1$$

8.3.3 Vasi Comunicanti

All'equilibrio, l'altezza del liquido nei vasi comunicanti raggiunge la stessa altezza, indipendentemente dalla forma del recipiente.

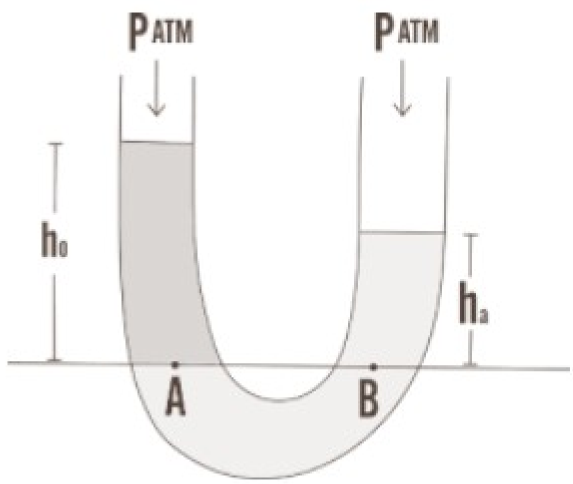


$$P_1 = P_4 \rightarrow h_1 = h_4$$

Cosa succede invece se i vasi sono riempiti di liquidi non miscibili tra loro?

$$P_A = P_B$$
$$P_A = \rho_1 g h_1 + P_{atm}$$
$$P_B = \rho_2 g h_2 + P_{atm}$$
$$\rho_1 g h_1 + P_{atm} = \rho_2 g h_2 + P_{atm}$$
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Il liquido più denso occupa la colonna più bassa.

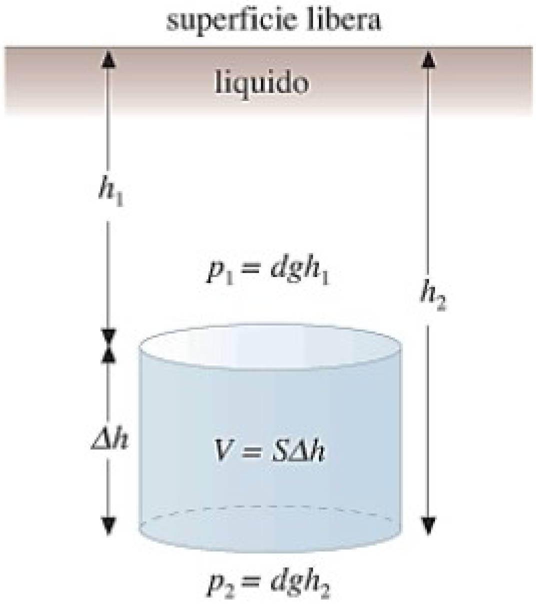


8.4 Principio di Archimede

Ogni oggetto immerso parzialmente o totalmente in un fluido riceve una **spinta** verso l'alto la cui intensità è uguale al peso del fluido spostato.

$$B = \rho_f g V_{spost}$$

Considero un volume $V = S(h_2 - h_1)$ di liquido:
Su di esso agisce una spinta S_A data dalla differenza delle forze agenti sulle superfici superiore $(P_1 S)$ ed inferiore $(P_2 S)$:
$B = P_2 S - P_1 S$
Dove: $P_2 = \rho_f g h_2 \quad P_1 = \rho_f g h_1$
Quindi: $B = \rho_f g h_2 S - \rho_f g h_1 S = \rho_f g S(h_2 - h_1) = \rho_f g S \Delta h = \rho_f g V_{spost}$



8.4.1 Corpo completamente e parzialmente inverso immerso

Se il corpo è completamente immerso si ha allora che la forza risultante sul corpo è data da:
$F_{tot} = B - F_p = \rho_f V_f g - \rho_c V_c g = (\rho_f - \rho_c) V g$

Se $\rho_f > \rho_c$ allora il corpo galleggia, altrimenti il corpo affonda.

Se il corpo è parzialmente immerso, si ha allora che la forza risultante sul corpo è data da:

$$F_{tot} = B - F_p = \rho_f V_f g - \rho_c V_c g = 0$$

Se un corpo è parzialmente immerso:

$$\frac{V}{V_c} = \frac{\rho_c}{\rho_f}$$

La frazione di volume del corpo immersa è pari al rapporto fra la densità del corpo e quella del fluido.

8.5 Dinamica dei fluidi

La dinamica dei fluidi si occupa dello studio dei fluidi in movimento. Considereremo il moto delle particelle del fluido nel loro insieme e non particella per particella.
Tratteremo **fluidi ideali**:

- **incomprimibili:** la densità non varia
- **privi di viscosità:** cioè privi di forze d'attrito.

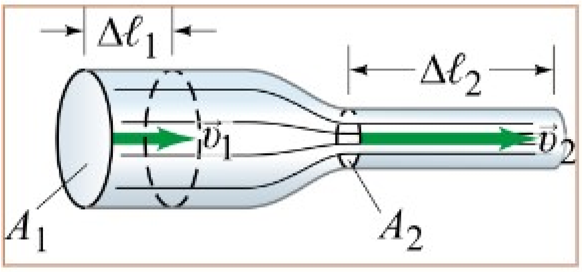
Distinguiamo 2 tipi di moto:

- **stazionario e laminare**:le linee seguite da ogni singola particella non si intersecano e la velocità del fluido in ogni punto rimane costante (questo sarà il tipo di moto che tratteremo).
- **turbolento**: sono presenti vortici (detti mulinelli)

8.5.1 Portata

Consideriamo il flusso stazionario e laminare di un fluido attraverso un tubo.

La **portata di massa** è definita come la massa di fluido che passa in un determinato punto nell'unità di tempo: $Q = \frac{\Delta m}{\Delta t}$

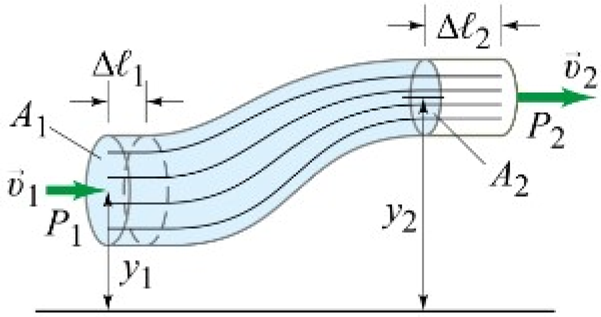


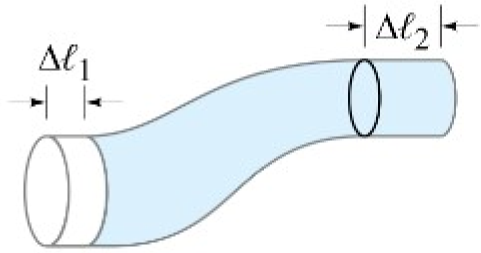
Se il diametro del tubo cambia:
Nel punto 1 avremo: $\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\rho_1 \Delta A_1 \Delta l_1}{\Delta t} = \rho_1 A_1 v_1$ e analogamente nel punto 2: $\frac{\Delta m_2}{\Delta t} = \rho_2 A_2 v_2$
Poiché il fluido non fuoriesce dalle pareti: $\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} \Rightarrow \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$ (equazione di continuità)
Se il fluido è incomprimibile allora $\rho = cost \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$

Ricaviamo dunque che: Dove l'area della sezione è grande la velocità è bassa, dove l'area è piccola la velocità è alta.

8.5.2 Teorema: Equazione di Bernoulli

Il teorema di Bernoulli stabilisce che dove la velocità di un fluido è alta, la pressione è bassa e dove la velocità è bassa, la pressione è alta.
Si applica al moto di un fluido ideale, incomprimibile, in moto stazionario e laminare in un condotto a pareti rigide. Consideriamo un fluido che attraversa un condotto di sezione non uniforme, la cui altezza varia rispetto a un livello di riferimento.





Dimostrazione: Valutiamo il lavoro necessario a spostare una certa quantità di fluido dalla posizione 1 (fig in alto) alla posizione 2 (fig in basso).
Il fluido che entra nella sezione A_1 percorre una distanza Δl_1 e obbliga il fluido nella sezione A_2 a spostarsi di una distanza Δl_2.
Il fluido a sinistra della sezione A_1 esercita una pressione P_1 sulla sezione di fluido e compie una quantità di lavoro: $W_1 = F_1 \Delta l_1 = P_1 A_1 \Delta l_1$.
Al punto 2, il lavoro compiuto sulla sezione di fluido è: $W_2 = -P_2 A_2 \Delta l_2$ (segno negativo perché la forza esercitata sul fluido è opposta allo spostamento).
A ciò si aggiunge anche il lavoro fatto dalla gravità che muove una massa m di volume $Vol = A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2$ dal punto 1 al punto 2: $W_3 = -mg(y_2 - y_1)$ (segno negativo perchè il moto è verso l'alto).
Quindi il lavoro totale è: $W_1 + W_2 + W_3 = P_1 A_1 \Delta l_1 - P_2 A_2 \Delta l_2 - mgy_2 + mgy_1$.
Questo è uguale alla variazione di energia cinetica (per il teorema dell'energia cinetica) quindi:
$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = P_1 A_1 \Delta l_1 - P_2 A_2 \Delta l_2 - mgy_2 + mgy_1$
Possiamo riscrivere l'equazione dato che $m = \rho A_1 \Delta l_1 = \rho A_2 \Delta l_2$ e dividere per $A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2$ ottenendo: $\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_1 - P_2 + \rho g y_2 + \rho g y_1$.
Riordinando otteniamo: $P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1$.
Questa è l'equazione di Bernoulli, che in forma generale è: $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = cost$

Considerazioni: L'equazione di Bernoulli è un'espressione della legge di conservazione dell'energia. Per un fluido ideale, su cui non venga esercitato alcun lavoro, per ogni incremento della velocità si hanno:

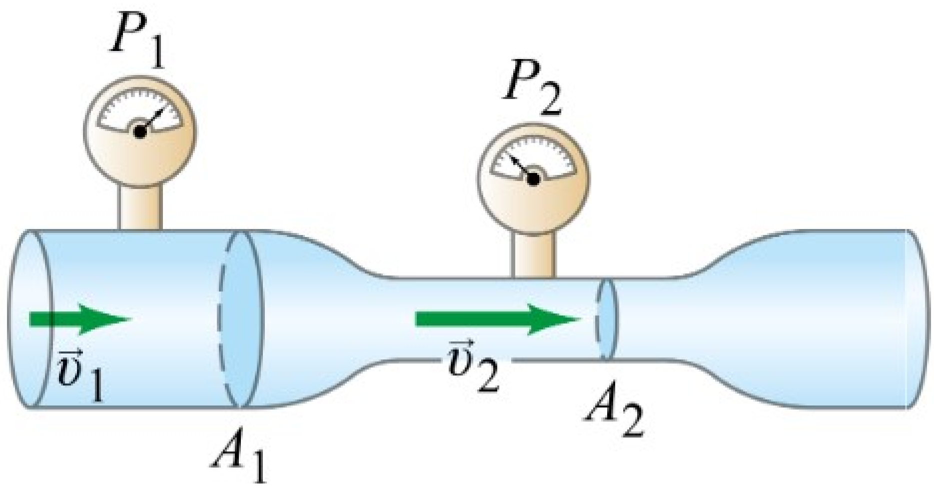
- una diminuzione della pressione

- un cambiamento dell'energia potenziale gravitazionale del fluido.

Se non c'è movimento $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = P + \rho g y = cost \Rightarrow P_1 - P_2 = \rho g(y_2 - y_1)$, che è l'equazione idrostatica.

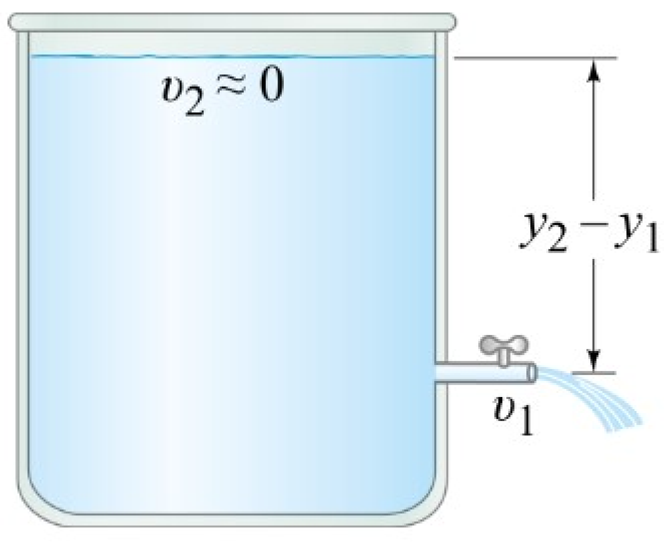
8.5.3 Tubo di Venturi

Il tubo di Venturi è un tubo con strozzatura. Quando un fluido passa per la strozzatura fluisce più velocemente e quindi la pressione è minore. Il tubo di Venturi è alla base del **venturimetro** usato per misurare la velocità di flusso dei gas, dei liquidi e per misurare la velocità del sangue nelle arterie.



8.5.4 Teorema di Torricelli

Il teorema di Bernoulli si può usare per calcolare la velocità di un fluido che fluisce da un rubinetto posto sul fondo di un serbatoio.
Ipotizziamo che il diametro del serbatoio sia grande rispetto a quello del rubinetto ($v_2 \approx 0$) e che su entrambi i punti agisca la pressione atmosferica ($P_1 = P_2$).
$P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(y_2 - y_1)}$



9 Termodinamica

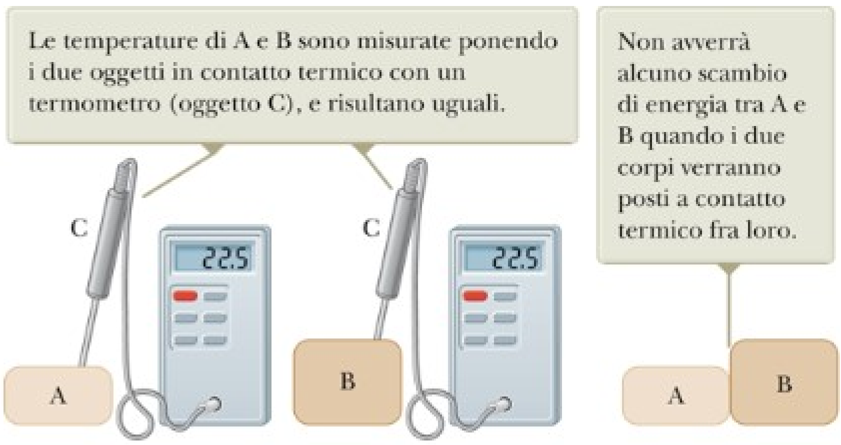
La **termodinamica** studia:

- il trasferimento di energia fra un sistema e l'ambiente circostante e le conseguenti variazioni di temperatura o di stato
- le trasformazioni fisiche e chimiche della materia in tutti i suoi stati di aggregazione: solido, liquido, gas.

9.1 Principio zero

Due o più oggetti si dicono in **contatto termico** se possono scambiarsi energia. L'**equilibrio termico** si raggiunge quando due oggetti in contatto termico cessano di scambiarsi energia mediante calore o radiazione elettromagnetica.

Principio zero della Termodinamica:
Se gli oggetti A e B sono separatamente in equilibrio termico con un terzo oggetto C, allora A e B sono in equilibrio termico tra loro



9.2 Temperatura

La **temperatura** è la proprietà che determina se un oggetto è in equilibrio termico con gli altri oggetti oppure no. Due oggetti in equilibrio termico tra loro sono alla stessa temperatura
I **termometri** sono dispositivi utilizzati per misurare la temperatura di un oggetto. Sfruttano proprietà fisiche che variano con la temperatura, quali:

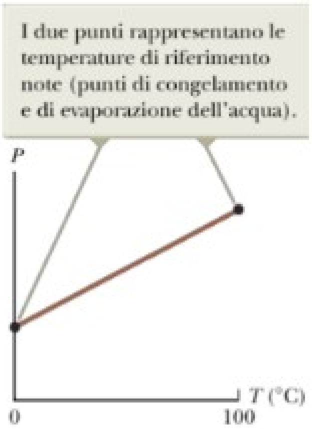
- volume di un liquido
- lunghezza di un solido
- pressione di un gas mantenuto a volume costante
- volume di un gas mantenuto a pressione costante
- resistenza elettrica di un conduttore
- colore di un oggetto caldo

9.2.1 Scala Celsius

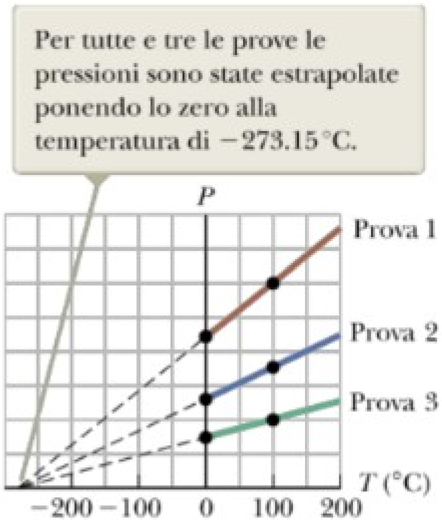
Il termometro di uso comune si basa sulla dilatazione di un liquido (mercurio o alcool) all'interno di un capillare di vetro.
La taratura avviene ponendo il termometro in contatto con miscele a temperatura nota.
0° C è il punto di congelamento (miscela di acqua e ghiaccio); 100° Punto di ebollizione (miscela di acqua e vapore).

9.2.2 Zero Assoluto

In un termometro a gas, le misure di temperatura sono indipendenti dalla sostanza usata nel termometro. Si sfrutta la variazione di pressione con la temperatura di un volume fissato di gas.
Sperimentalmente si osserva che le letture dei termometri sono indipendenti dal tipo di gas usato finché la pressione del gas è bassa e la temperatura è molto al di sopra del punto di liquefazione.
Se la pressione del gas è bassa ed effettuiamo lo stesso procedimento partendo da pressioni diverse



del gas otteniamo differenti rette di taratura. Indipendentemente dal tipo di gas o dal valore della pressione di partenza (assunta bassa), la pressione viene estrapolata a zero quando la temperatura è **-273.15°C** Questa particolare temperatura è universale poiché non dipende dal gas usato per il



termometro.
Questa temperatura è detta **Zero assoluto** poiché rappresenta il limite inferiore per i processi fisici, dato che per T=273.15°C la pressione è nulla, ciò corrisponde al vuoto assoluto.

9.2.3 Scala Kelvin

Lo zero assoluto viene preso come temperatura base della scala di temperatura Kelvin (-273.15°C = 0 K)
Poiché l'ampiezza di un grado nella scala Kelvin è scelta identica all'ampiezza di un grado nella scala Celsius:

$$T_C = T - 273.15C$$

La temperatura è una grandezza fondamentale nel S.I. e come punti di riferimento per la taratura sono stati scelti:

- Lo zero assoluto T=0 K
- Il punto triplo dell'acqua T=273.16 K (dove acqua liquida, solida e gassosa coesistono in equilibrio)

Nel Sistema Internazionale il Kelvin è definito come $\frac{1}{273.16}$ della temperatura del punto triplo dell'acqua.

9.2.4 Scala Fahrenheit

Si tratta di una scala comunemente usata negli usa. Essa pone la temperatura del punto di congelamento dell'acqua a 32°F e la temperatura di ebollizione a 212°F (si può notare che quindi non è centigrada). Le formule di passaggio sono:

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32F$$
$$T_C = \frac{5}{9}T_F - 32F$$

9.3 Dilatazione Termica

Il fenomeno della dilatazione termica corrisponde all'aumento di volume di una sostanza in seguito a un aumento della temperatura. Essa corrisponde ad un aumento della distanza media fra gli atomi o molecole che costituiscono il solido.

9.3.1 Dilatazione lineare

Consideriamo un oggetto che abbia una lunghezza iniziale L_i ad una certa temperatura
Per effetto della variazione di temperatura ΔT la lunghezza aumenta di una quantità ΔL pari a

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T$$

(dove α è Coefficiente di dilatazione lineare $[C^{-1}]$)

$$\Delta L = L_f - L_i$$
$$L_f = L_i + \alpha L_i \Delta T$$
$$L_f = L_i(1 + \alpha \Delta T)$$

9.3.2 Dilatazione superficiale

Per un materiale con estensione superficiale si deve considerare la dilatazione nelle due dimensioni. Per effetto della variazione di temperatura ΔT, la superficie aumenta di una quantità ΔA pari a:

$$\Delta A = 2\alpha A_i \Delta T$$

La superficie finale risulta:

$$A_f = A_i(1 + 2\alpha \Delta T)$$

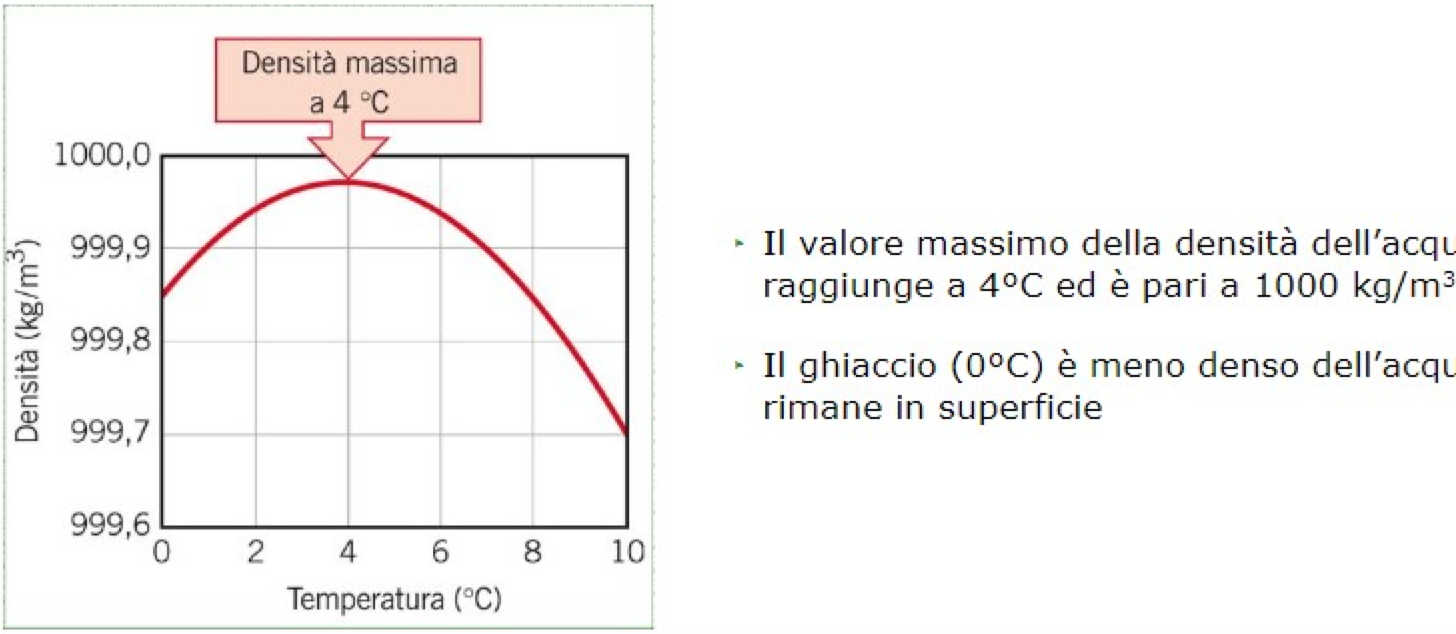
9.3.3 Dilatazione volumica

Per un materiale con estensione volumetrica si deve considerare la dilatazione nelle due dimensioni. Per effetto della variazione di temperatura ΔT, la superficie aumenta di una quantita ΔV pari a:

$$\Delta V = 3\alpha V_i \Delta T$$

Il volume finale risulta:

$$V_f = V_i(1 + 3\alpha \Delta T)$$



9.3.4 Comportamento anomalo dell'acqua

I liquidi aumentano il loro volume all'aumentare della temperatura e hanno coefficienti di dilatazione volumica circa 10 volte maggiori di quelli dei solidi.
Nell'intervallo tra 0°C e 4°C l'acqua si contrae e la sua densità aumenta, diventando quindi un'eccezione.
Superati i 4°C l'acqua si comporta in modo normale dilatandosi all'aumentare della temperatura.

9.4 Leggi dei Gas

Il volume dei gas dipende fortemente dalla pressione oltre che dalla temperatura: è necessaria una relazione tra V, P, T e quantità del gas. Tale relazione è detta **equazione di stato**. Se lo stato del sistema cambia, bisogna aspettare che le condizioni si stabilizzino e siano le stesse per tutto il gas e non cambino nel tempo: consideriamo solo **stati di equilibrio**.

Legge di Boyle: il volume di un gas è inversamente proporzionale alla pressione applicata a esso quando la temperatura è mantenuta costante: $V \propto \frac{1}{P} \Rightarrow PV = cost$ [T cost]

Legge di Charles: il volume di un gas è direttamente proporzionale alla temperatura assoluta quando la pressione è mantenuta costante: $V \propto T$ [P cost]

Legge di Gay-Lussac: la pressione assoluta di una quantità fissata di gas è direttamente proporzionale alla pressione applicata a esso quando il volume è mantenuto costante: $P \propto T$ [V cost]

La Mole Una mole (mol) di qualunque sostanza è quella quantità di sostanza che contiene un **numero di Avogadro** di molecole, ovvero $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ elementi (atomi, molecole, ioni ...). Tale valore è stato ottenuto empiricamente.
La **massa molecolare** di una sostanza è il rapporto tra la massa in grammi di tale sostanza e il numero di entità elementari presenti nel campione considerato.
Mole e massa sono legati dalla relazione: n (mol)=$\frac{\text{massa (g)}}{\text{massa molecolare (g/mol)}}$

9.4.1 Gas Perfetti

Le leggi di Boyle, Charles e Gay-Lussac possono essere combinate in un'unica relazione generale fra le tre variabili: $PV \propto T$

Legge di stato dei gas perfetti

Fornisce una descrizione macroscopica del comportamento di un gas a bassa densità

$$PV = nRT$$

(Dove R è detta Costante universale dei gas. $R = 8.314 J/molK$)

I gas reali non seguono l'equazione in modo preciso, soprattutto se sono ad alta pressione(e densità) e vicini al punto di liquefazione. A pressioni minori di circa 1 atm e T non vicina al punto di liquefazione, la legge dei gas perfetti si può usare per i gas reali con buona approssimazione.

Costante di Boltzmann Poiché il numero di molecole totali N di un gas è dato da $N = nN_A$, la legge dei gas perfetti si può riscrivere come:

$$PV = nRT = \frac{N}{N_A}RT = NkT$$

dove k indica la **costante di Boltzmann** e vale: $k = \frac{R}{N_A} = \frac{8.314 J/mol \cdot K}{6.02 \cdot 10^{23}/mol} = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$

9.5 Energia interna e Calore

ENERGIA INTERNA: energia associata alle componenti macroscopiche di un sistema atomi-molecole. Include energia cinetica e potenziale associata al moto casuale degli atomi e delle molecole che costituiscono il sistema

Calore: il meccanismo con il quale l'energia è trasferita fra un sistema e l'ambiente circostante a causa di una differenza di temperatura fra loro.

Unità di misura: caloria (calore necessario per aumentare la temperatura di 1g di acqua da 15.5°C a 16.5°C). **1cal=4.186J**

9.5.1 Calore specifico

La quantità di calore trasferito a una sostanza di massa m per determinare un aumento di temperatura ΔT dipende dalla sostanza

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} \qquad [\frac{J}{kg°C}]$$

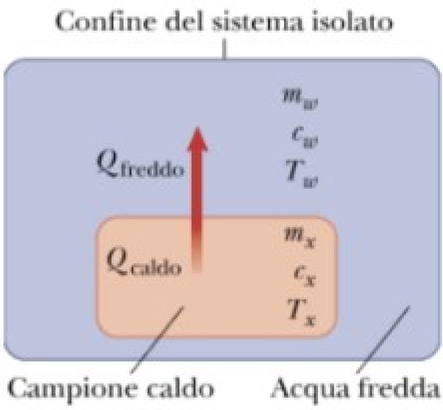
Il calore specifico dell'acqua è 4186 J/kg°C.

- Quando la temperatura aumenta, l'energia entra nel sistema: $\Delta T > 0 \rightarrow Q > 0$
- Quando la temperatura diminuisce, l'energia esce dal sistema: $\Delta T < 0 \rightarrow Q < 0$

9.5.2 Calorimetria

Il **calorimetro** consente di misurare il calore specifico di una sostanza.

L'energia è rilasciata dal corpo caldo attraverso il calore è uguale a quella acquistata dal sistema (acqua in questo caso)



$Q_{fredda} = c_w m_w (T - T_w) > 0$
$Q_{calda} = c_x m_x (T - T_x) < 0$
$|Q_{fredda}| = |Q_{calda}| \Rightarrow |c_w m_w (T - T_w)| = |c_x m_x (T - T_x)|$

Legge della calorimetria Il calore va "spontaneamente" dal corpo più caldo al corpo più freddo, fino a che la temperatura dei due corpi non diventa la stessa.

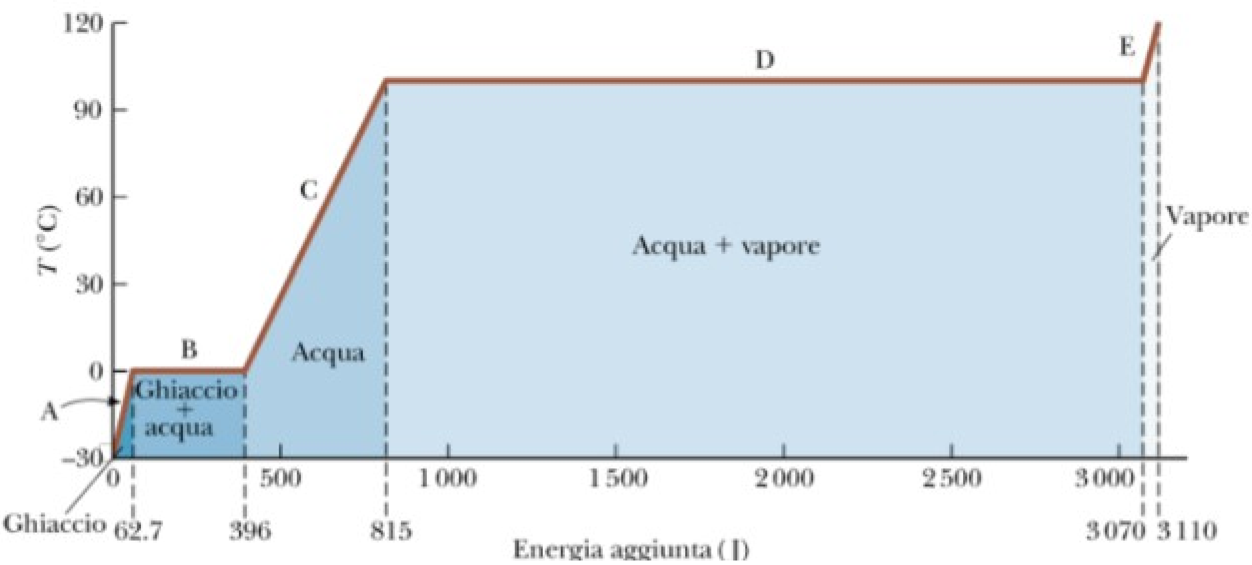
9.5.3 Calore Latente

Nei cambiamenti di fase **non** si ha variazione di temperatura. Il calore trasferito si trasforma in energia interna.

$$L = \frac{Q}{\Delta m}$$

Dove Δm è la quantita di massa che ha cambiato fase: $m_{alta} - m_{bassa}$

Passaggio di fase dell'acqua In questo grafico vediamo la temperatura in funzione dell'energia quando 1 grammo di acqua inizialmente a -30°C è convertito in vapore a 120°C.



- **Fase A: aumento della temperatura del ghiaccio da -30°C a 0°C**
  $Q_A = c_w m_w (0+30)°C \Rightarrow 2090J/(kg \cdot° C) \cdot 10^{-3}kg \cdot 30°C = 62.7J$
- **Fase B: cambiamento di stato da ghiaccio ad acqua**
  $Q_B = L\Delta m \Rightarrow (3.33 \cdot 10^5 J/kg) \cdot (1 \cdot 10^{-3}kg - 0) = 333J$
- **Fase C: aumento della temperatura del ghiaccio da -30°C a 0°C**
  $Q_C = c_w m_w (100-0)°C \Rightarrow 4190J/(kg \cdot° C) \cdot 10^{-3}kg \cdot 100°C = 419J$
- **Fase D: cambiamento di stato da acqua a vapore**
  $Q_D = L\Delta m \Rightarrow (2.26 \cdot 10^6 J/kg) \cdot (1 \cdot 10^{-3}kg - 0) = 2260J$
- **Fase E: aumento della temperatura del vapore da 100°C a 120°C**
  $Q_E = c_w m_w (120-100)°C \Rightarrow 2010J/(kg \cdot° C) \cdot 10^{-3}kg \cdot 20°C = 40.2J$
- **Calore totale assorbito**
  $Q_{tot} = Q_A + Q_B + Q_C + Q_D + Q_E = 3114.9J$

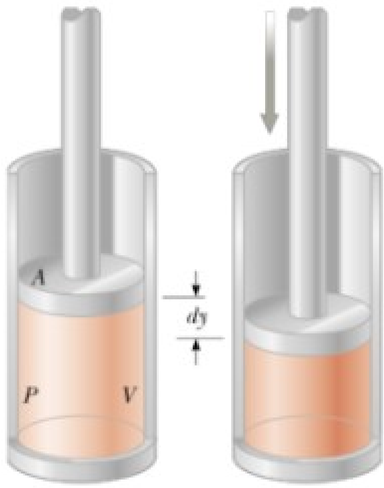
9.6 Variabili di Stato e di Trasferimento

Variabili di stato: grandezze macroscopiche che descrivono lo stato di un sistema quando questo si trova in equilibrio (Temperatura, Pressione, Volume, Energia cinetica, Energia interna,...)
Variabili di trasferimento grandezze macroscopiche che entrano in gioco quando è in atto un trasferimento di energia attraverso le pareti che delimitano il sistema (Lavoro, Calore, Onde elettromagnetiche,...)

9.6.1 Lavoro

Per **trasformazione quasi-statica** si intende una trasformazione che avviene in modo così lento da poter considerare il sistema in equilibrio in ogni istante.

Il gas inizialmente occupa un volume V ed esercita una pressione P sulle pareti del cilindro.



Il gas viene compresso quasi-staticamente da una forza esterna e il pistone si muove di un tratto dy. Il lavoro fatto sul gas risulta $dW = F_{ext}dy$.
La forza esterna genera una forza di reazione da parte del gas

$$F_{ext} = -F_{gas} = -P \cdot A$$
$$dW = -PAdy = -PdV$$

Il **lavoro** compiuto su un sistema in seguito ad una trasformazione quasi statica

$$dW = -PdV$$

In una trasformazione termodinamica il lavoro risulta

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} PdV$$

- Se il gas si espande $V_f > V_i \rightarrow W < 0$ il lavoro è negativo.
- Se il gas viene compresso $V_f < V_i \rightarrow W > 0$ il lavoro è positivo.
- Se il volume rimane costante $V_f = V_i \rightarrow W = 0$ il lavoro è nullo

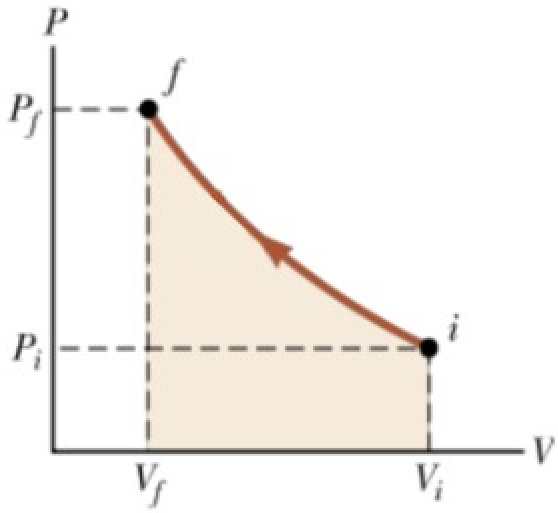
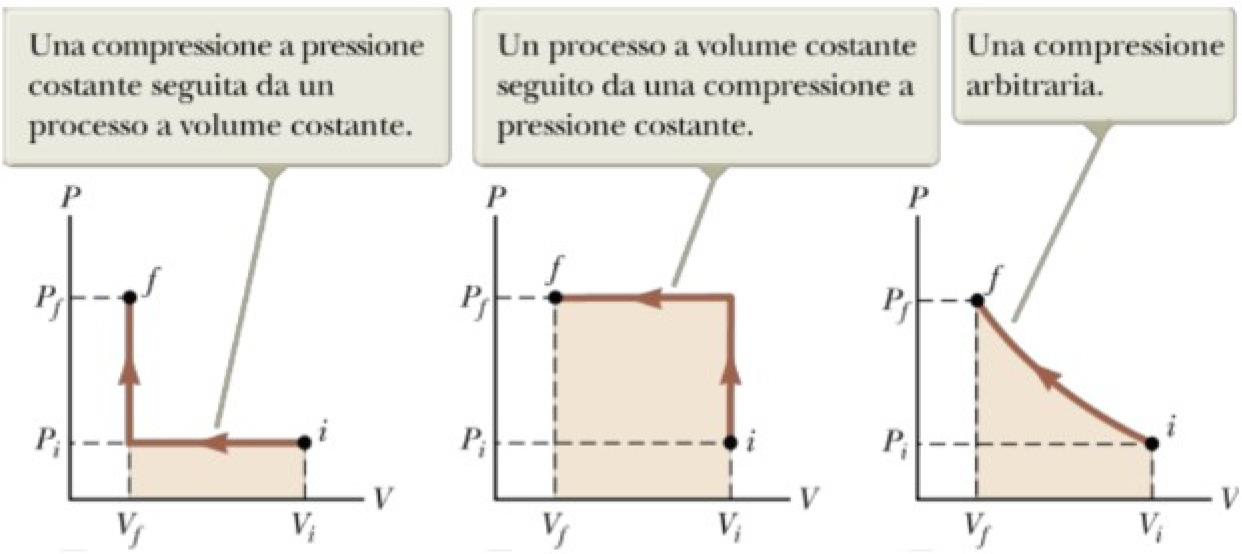


Figure 2: Graficamente il lavoro compiuto dal sistema corrisponde all'area sottesa alla curva tra V_i e V_f

9.6.2 Diagramma Pressione-Volume

Il diagramma P-V è un grafico che mette in relazione il volume e la pressione durante una trasformazione



9.7 I Principio della Termodinamica

La variazione di energia interna di un sistema è pari alla somma dell'energia trasferita attraverso il calore e dell'energia trasferita tramite il lavoro.

$$\Delta E_{int} = Q + W$$

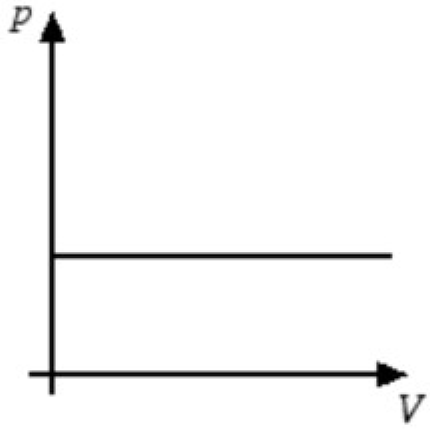
- Il calore è positivo se assorbito dal sistema.

- Il lavoro è positivo se compiuto sul sistema.

L'energia interna di una trasformazione dipende solamente da temperatura iniziale e temperatura finale.

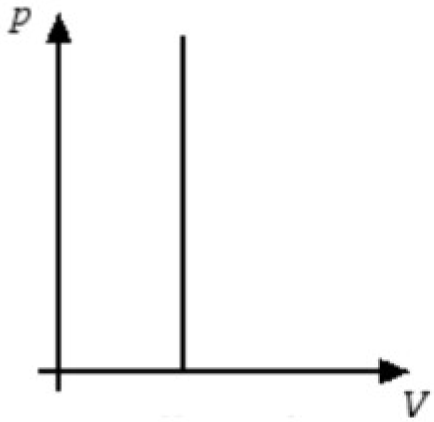
9.7.1 Trasformazione Isobara

In una trasformazione **Isobara** la pressione rimante costante, Il lavoro risulta $W = -p(V_f - V_i)$
Per il primo principio della Termodinamica: $\Delta E_{int} = Q + W$
Equazione dell'isobara nel piano P-V: retta parallela alle ascisse.



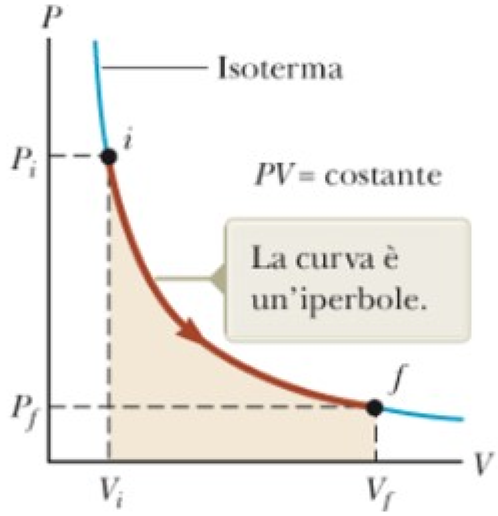
9.7.2 Trasformazione Isocora

In una trasformazione **Isocora** il volume rimane costante. Il lavoro è nullo W=0.
Per il primo principio della Termodinamica: $\Delta E_{int} = Q$.
Equazione dell'isocora nel piano P-V: retta parallela alle ordinate.



9.7.3 Trasformazione Isoterma

In una trasformazione **Isoterma** la temperatura rimane costante. Di conseguenza non ci sono variazioni di energia interna $\Delta E_{int} = 0$.
Per il primo principio della Termodinamica:
$Q = -W$
$W = -nRt\ln(\frac{V_f}{V_i})$



9.7.4 Calori specifici molari

L'energia necessaria per aumentare la temperatura di moli di gas dipende dal cammino seguito tra lo stato iniziale e lo stato finale.
Definiamo in questo modo i calori specifici molari associati alle trasformazioni isobara e isocora:

- **Isobara** $Q = nC_P\Delta T$
- **Isocora** $Q = nC_V\Delta T$

I calori specifici molari (C_P e C_V) li otteniamo:

- Per i gas monoatomici: $C_V = \frac{3}{2}R \quad C_P = \frac{5}{2}R$
- Per i gas biatomici: $C_V = \frac{7}{2}R \quad C_P = \frac{9}{2}R$

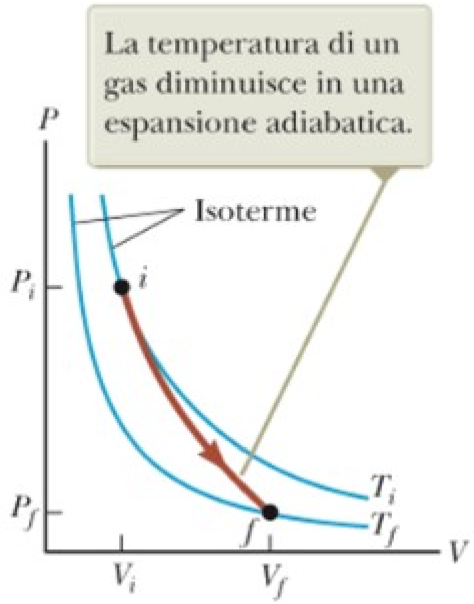
Per entrambi abbiamo che: $C_P - C_V = R$.
Il rapporto dei calori specifici molari è una grandezza adimensionale: $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$

9.7.5 Trasformazione Adiabatica

In una trasformazione **adiabatica** non ci sono scambi di calore (**Q=0**)
Per il primo principio della Termodinamica:
$\Delta E_{int} = W$
$W = nC_v\Delta T$
Quando un gas è compresso adiabaticamente ($V_f < V - i$), lavoro e variazione di energia interna sono entrambi positivi.
$V_f < V_i \rightarrow \Delta E_{int} < 0$, $Q < 0$

Quando un gas si espande adiabaticamente ($V_f > V_i$), lavoro e variazione di energia interna sono entrambi negativi.
$V_f > V_i \rightarrow \Delta E_{int} > 0$, $Q > 0$

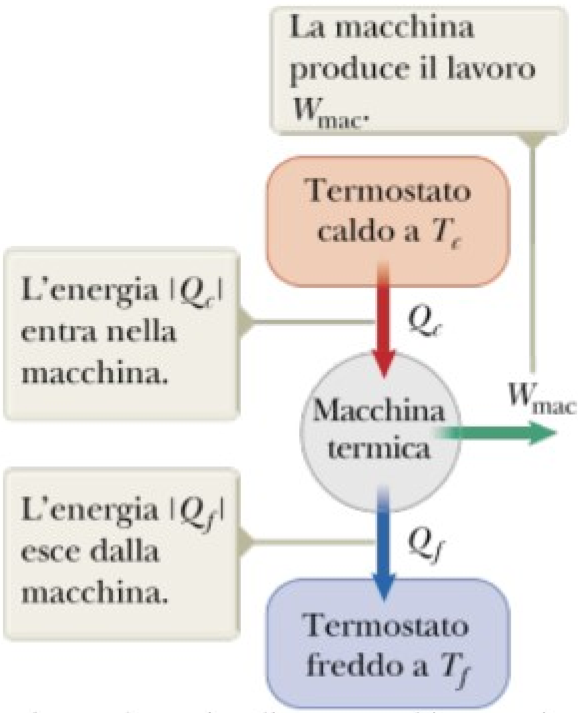
$$PV^{\gamma} = cost$$



9.8 Macchina Termica

La macchina termica è un dispositivo che fa compiere una trasformazione ciclica in modo che:

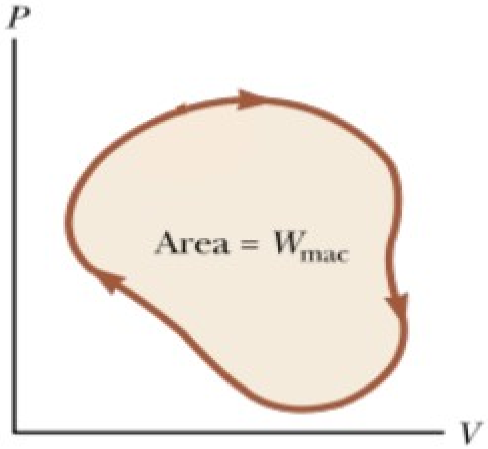
- La macchina assorbe energia (calore Q_C) da un termostato caldo (T_C)
- Parte di questa energia viene "espulsa" sotto forma di lavoro.
- Parte dell'energia (Q_f, detta energia persa o di scarico) viene ceduta alla macchina ad un termostato a temperatura più bassa (T_f)



Il lavoro compiuto dalla macchina termica corrisponde all'energia totale assorbita dalla macchina.

$$\Delta E = 0 \rightarrow W_{mac} = |Q_c| - |Q_f|$$

Per un gas il lavoro totale svolto in una trasformazione ciclica è dato dall'area racchiusa dalla curva che rappresenta la trasformazione nel piano PV



Rendimento: si tratta di una misura, espressa in percentuale, di quanta energia si ricava (sotto forma di lavoro) dall'energia impiegata

$$\eta = \frac{W_{mac}}{|Q_c|} = \frac{|Q_c| - |Q_f|}{|Q_c|} = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|}$$

Se $\eta = 1$ tutta l'energia si trasforma in lavore, ciò è impossibile per i sistemi reali

9.8.1 Secondo principio della Termodinamica

Enunciato di Kelvin-Planck:
È impossibile costruire una macchina termica che, operando in un ciclo, abbia come unico risultato quello di assorbire energia da un termostato e di produrre una uguale quantità di lavoro

Enunciato di Clausius
Il calore non fluisce mai da un oggetto freddo ad uno caldo

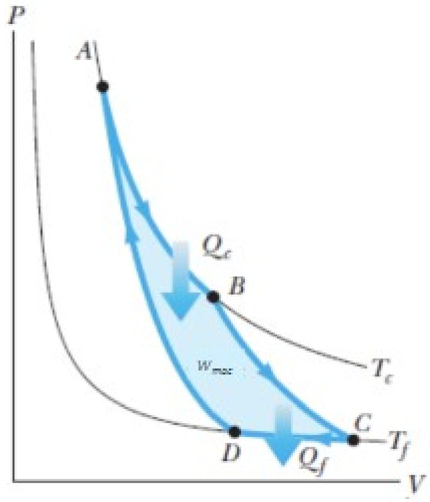
9.8.2 Trasformazioni reversibili

Una trasformazione si dice **reversibile** se il sistema può ritornare nelle condizioni iniziali lungo lo stesso percorso e se ogni punto lungo il cammino costituisce uno stato di equilibrio. La trasformazione reversibile è un'**idealizzazione**. Se una trasformazione reale avviene molto lentamente in modo che il sistema sia sempre prossimo all'equilibrio, allora la trasformazione può essere considerata reversibile.
In natura tutte le trasformazioni sono **irreversibile**, cioè non reversibili.

9.8.3 Macchina di Carnot

La macchina di Carnot è una macchina termica il cui rendimento è il massimo che può essere raggiunto da una macchina reale operante tra le stesse temperature.
Essa opera tra due termostati in un ciclo ideale reversibile:

- **A-B**: espansione isoterma
- **B-C**: espansione adiabatica
- **C-D**: compressione isoterma
- **D-A**: compressione adiabatica



ramo A-B Trasformazione isoterma a temperatura T_C
$P_A \to P_B$ $V_A \to V_B$: espansione isoterma
$|Q_C|$ calore assorbito dalla sorgente a temperatura T_C
$W_{A\to B}$: lavoro di espansione

ramo B-C Trasformazione adiabatica
$P_B \to P_C$ $V_B \to V_C$: espansione adiabatica
$T_B \to T_C$: abbassamento di temperatura
$W_{B\to C}$: lavoro di espansione

ramo C-D Trasformazione isoterma a T_F (mettendo il sistema in contatto con una sorgente a $T_F < T_C$)
$P_C \to P_D$ $V_C \to V_D$: compressione isoterma
$|Q_F|$ calore ceduto $W_{C\to D}$: lavoro di compressione

ramo D-A Trasformazione adiabatica
$P_D \to P_A$ $V_D \to V_A$: compressione adiabatica
$T_D \to T_A$: innalzamento di temperatura
$W_{D\to A}$: lavoro di compressione

Carnot ha dimostrato che nel ciclo descritto: $\frac{|Q_f}{|Q_c|} = \frac{T_f}{T_c}$.
Di conseguenza il rendimento della macchina di Carnot risulta:
$\eta = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|} = 1 - \frac{T_f}{T_c|}$
Il rendimento risulta essere 1 solo se $T_f = 0K$, ma ciò non è mai possibile.