L' IMPOSTAZIONE ASSIOMATICA

- Gli eventi sono sottoinsiemi di uno spazio Ω e formano una σ-algebra $\mathcal{F}$:

  a) $\mathcal{F}$ è non vuota ;

  b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$;

  c) $A_n \in \mathcal{F}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

- Una misura di probabilità sullo spazio Ω è una funzione $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

  d) $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$ (ma $< \infty$)

  e) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

  f) se $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$: $\underset{i \neq j}{A_i \cap A_j} = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

La tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ prende il nome di **spazio di probabilità**.

CONSEGUENZE IMMEDIATE DEGLI ASSIOMI

1) $\mathbb{P}(\phi) = 0.$

DIM

Il vuoto è un evento in quanto complementare del certo. Inoltre il vuoto può essere visto come unione numerabile di insiemi vuoti (per una delle proprietà di identità):

$$\phi = \phi \cup \phi \cup \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi .$$

Dall' assioma f) si ottiene allora:

$$\mathbb{P}(\phi) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \phi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\phi)$$

$$= \mathbb{P}(\phi) + \mathbb{P}(\phi) + \dots$$

e per l' assioma d) l'unico numero che soddisfa la precedente relazione è $\mathbb{P}(\phi) = 0$.

2) Se $A_1 \in \mathcal{F}, A_2 \in \mathcal{F}, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ e $A_i \cap A_j = \phi$ per $i \neq j$ allora:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

DIM

Poniamo $B_1 = A_1$; $B_2 = A_2$; $\dots$, $B_n = A_n$ e

$B_{n+1} = B_{n+2} = \cdots = \emptyset$.

Ovviamente riesce $B_i \cap B_j = \emptyset$ per $i \neq j$ per cui dall'assioma f si ha:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i). \qquad (i)$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i &= B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \cup B_{n+1} \cup B_{n+2} \cup \cdots \\
&= (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cup (\emptyset \cup \emptyset \cup \cdots) \\
&= (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cup \emptyset \qquad (ii) \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} A_i
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) &= P(B_1) + P(B_2) + \cdots + P(B_n) + P(B_{n+1}) + \cdots \\
&= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + (0 + 0 + \cdots) \qquad (iii) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i).
\end{aligned}$$

La tesi segue da (i), (ii) e (iii).

La misura di probabilità $\mathbb{P}$ è quindi anche finitamente additiva.

3) $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

<u>DIM</u>

Per ogni $A \in \mathcal{F}$ si ha $\Omega = A \cup A^c$ per cui essendo $\mathbb{P}$ finitamente additiva si ha:

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c).$$

Ricordando l'assioma e) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ otteniamo infine

$$1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \Longrightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

4) $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \leq 1$.

<u>DIM</u>

Dal precedente risultato e dall'assioma d) discende immediatamente

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) \leq 1.$$

5) Se $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ sono tali che $A \subseteq B$ allora $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

<u>DIM</u>

Risulta
$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega = B \cap (A \cup A^c) \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap A^c) = A \cup (B \cap A^c) \end{aligned}$$

in quanto dall'ipotesi $A \subseteq B$ si ha $B \cap A = A$.
Dalla finita additività di $\mathbb{P}$ e dall'assioma d) si trae:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) \geq \mathbb{P}(A).$$

ALCUNI SPAZI DI PROBABILITÀ

- ## SPAZI DI PROBABILITÀ FINITI

$$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

Posto, per $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\mathbb{P}(\{a_i\}) = p_i : \text{"probabilità di } \{a_i\}\text{"}$$

bisognerà avere

1) $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$;
2) $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

La probabilità di un qualsiasi evento A sarà dunque definita come la somma delle probabilità degli elementi di A.

- ## SPAZI EQUIPROBABILI FINITI

$$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

basterà porre:

$$p_i = \frac{1}{n} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n.$$

Per ogni evento A la probabilità sarà definita:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\# A}{n}$$

- SPAZI DI PROBABILITÀ NUMERABILI

$$\Omega = \{a_1, a_2, \dots\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

Posto per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(\{a_n\}) = p_n : \text{"probabilità di } \{a_n\}\text{"}$$

bisognerà avere

1) $p_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$.

La probabilità di un qualsiasi evento A sarà dunque definita come la somma delle probabilità degli elementi di A.

- SPAZI DI PROBABILITÀ INFINITI NON NUMERABILI

In questo caso <u>non</u> sarà possibile porre $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Considereremo quindi alcuni sottoinsiemi di Ω che sono importanti per le applicazioni e $\mathcal{F}$ sarà la σ-algebra generata da tali eventi. Ad esempio se $\Omega = \mathbb{R}$ $\mathcal{F} = \mathcal{B} \equiv$ alla σ-algebra generata dagli intervalli di $\mathbb{R}$.

ESEMPI

- Si ponga, con $\lambda > 0$,

$$n \in \mathbb{N}_0, \quad p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Dal momento che la 1) è verificata in quanto $e^{-\lambda} > 0$, $n! > 0$, $\lambda^n > 0$, basta verificare che la serie di termine generale p_n si somma a 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

L'ultimo passaggio si ottiene ricordando lo sviluppo in serie di Mc Laurin della funzione e^x.

- Si ponga, con $p \in (0,1)$,

$$n \in \mathbb{N}, \quad p'_n = p(1-p)^{n-1}.$$

Procedendo come nell'esempio precedente, basta verificare che la serie di termine generale p'_n si somma a 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p'_n = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1}$$

$$= p \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m = p \frac{1}{1-(1-p)} = p \frac{1}{p} = 1.$$

L'ultimo passaggio si ottiene ricordando che la serie geometrica di ragione $h \in (-1,1)$ si somma a $\frac{1}{1-h}$.

EVENTI NON INCOMPATIBILI

6) $\forall A \in \mathcal{F}$ e $\forall B \in \mathcal{F}$ si ha:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

DIM

In primo luogo

$$A \cup B = A \cup (B \cap A^c).$$

Inoltre dalla relazione

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup A^c)$$
$$= (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

si ricava, per la finita additività di $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbb{P}(B \cap A^c) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

In definitiva:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$$
$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Osservazione

Se $A \cap B = \emptyset$ allora $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ e il risultato coincide con la finita additività.

7) $\forall A \in \mathcal{Y}$, $\forall B \in \mathcal{Y}$ e $\forall C \in \mathcal{Y}$ si ha:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - [\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)] + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

DIM

Applicando le proprietà delle operazioni insiemistiche ed il risultato precedente si ha:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}[(A \cup B) \cup C] = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}[(A \cup B) \cap C] \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}[(A \cap C) \cap (B \cap C)] \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - [\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)] + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

8) Se $A_i \in \mathcal{Y}$ per $i = 1, 2, \dots, n$ si ha:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

Questo risultato è noto come formula di inclusione-esclusione

9) Sia $A_n \in \mathcal{G}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Per ogni intero K si ha:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}(A_n).$$

DIM

La relazione è vera per $K=2$. Infatti, da

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c),$$

per la finita additività di $\mathbb{P}$ si ottiene:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c) \leq P(A_1) + P(A_2).$$

L'ultimo passaggio deriva dall'essere

$$A_2 \cap A_1^c \subseteq A_2.$$

Supponiamo ora la tesi vera per $K-1$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{K} A_n\right) = \mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{n=1}^{K-1} A_n\right) \cup A_K\right] \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{K-1} A_n\right) + \mathbb{P}(A_K)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{K-1} P(A_n) + P(A_K) = \sum_{n=1}^{K} P(A_n).$$

La tesi è vera per il principio di induzione matematica.

10) Sia $A_n \in \mathcal{G}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si ha:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

DIM

Poniamo

$$
\begin{aligned}
B_1 &= A_1 \\
B_2 &= A_2 \cap A_1^c \\
B_3 &= A_3 \cap (A_1^c \cap A_2^c) \\
&\vdots \\
B_n &= A_n \cap (A_1^c \cap A_2^c \cdots \cap A_{n-1}^c) \\
&= A_n \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i^c . \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

E' ovvio che $B_n \subseteq A_n$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$.
Inoltre, siccome B_2 contiene gli elementi di A_2 che non stanno in A_1, B_3 contiene gli elementi di A_3 che non stanno né in A_1 né in A_2 e così via, si ha:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n .$$

Quindi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

La formula appena dimostrata è nota come DISUGUAGLIANZA DI BOOLE

EVENTI QUASI IMPOSSIBILI
e
EVENTI QUASI CERTI

- Se $B \in \mathcal{F}$ è un evento per il quale riesce $\mathbb{P}(B) = 0$ diremo che esso è un evento **quasi impossibile**.
- Se $C \in \mathcal{F}$ è un evento per il quale riesce $\mathbb{P}(C) = 1$ diremo che esso è un evento **quasi certo**.

a) $$\mathbb{P}(B) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B) = 0 \,; \\ \\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) . \end{cases} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

b) $$\mathbb{P}(C) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(A \cup C) = 1 \,; \\ \\ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) . \end{cases} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

DIM

a) $A \cap B \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$
e siccome $\mathbb{P}(\cdot) \geq 0$ dall'ipotesi $\mathbb{P}(B) = 0$
segue $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
Inoltre:
$$A \cup B = A \cup (B \cap A^c) \text{ e quindi}$$
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) = \mathbb{P}(A) + 0$$
$$= \mathbb{P}(A)$$
in quanto $(B \cap A^c)$ è un evento che è parte di B.

b) $C \subseteq A \cup C \Rightarrow \mathbb{P}(C) \leq \mathbb{P}(A \cup C)$
e siccome $\mathbb{P}(\cdot) \leq 1$ dall'ipotesi $\mathbb{P}(C) = 1$
segue
$$\mathbb{P}(A \cup C) = 1.$$
Inoltre
$$A = A \cap \Omega = A \cap (C \cup C^c)$$
$$= (A \cap C) \cup (A \cap C^c)$$
e quindi
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap C^c)$$
$$= \mathbb{P}(A \cap C) + 0$$
in quanto $\mathbb{P}(C) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(C^c) = 0$ e
$(A \cap C^c)$ è un evento che è parte di C^c.