# INSERTION SORT

| | |
|---|---|
| INSERTION_SORT(A, n) | |
| FOR J=2 TO n DO | $2n$ |
|   KEY = A[J] | $2(n-1)$ |
|   I = J-1 | $2(n-1)$ |
|   WHILE (I ≥ 1 AND KEY < A[I]) DO | $4\sum_{J=2}^{n} t_J$ |
|     A[I+1] = A[I] | $4\sum_{J=2}^{n} (t_J-1)$ |
|     I-- | $\sum_{J=2}^{n} (t_J-1)$ |
|   A[I+1] = KEY | $2(n-1)$ |

Il ciclo while, fissato J, viene eseguito almeno 1 volta e al massimo J volte (questo dipende maggiormente dalla seconda condizione). Indichiamo con $t_J$ il numero di volte che il ciclo while viene ripetuto fissato J. Il numero di iterazioni è banalmente $\sum_{J=2}^{n} t_J$ il costo quindi è $4\sum_{J=2}^{n} t_J$, si noti che $\forall\, 2 \le J \le n,\ 1 \le t_J \le J$

La complessità totale sarà una funzione di n (in realtà $t_n$):

$$T(n) = 8n-6+4\left(\sum_{2}^{n} t_J + \sum_{2}^{n} (t_J-1)\right) = 8n+6+4\left(2\sum_{2}^{n} t_J - (n-1)\right)$$

Abbiamo $n!$ possibili combinazioni (classi di equivalenza) per la nostra sequenza (ovvero $n!$ modi in cui e' "ordinata" la sequenza)

Quindi se $m$ e' il numero minimo di iterazioni e $M$ il numero MASSIMO abbiamo $T_m(n) \leq f(n) \leq T_M(n)$ in cui $f(n)$ rappresenta l'espressione esatta della nostra complessita'.

E' impossibile individuare $f(n)$ ma possiamo fare un calcolo del CASO MEDIO, per fare cio' iniziamo studiando caso migliore e caso peggiore.

## CASO MIGLIORE

Sostituiamo nell' espressione generale $t_J = 1$ (minima ripetizione):

$$T_m(n) = 8n + 6 + 4\left(2\sum_{2}^{n} 1 - (n-1)\right) = 8n + 6 + 8n - 8 - n + 1 = 15n - 13$$

## CASO PEGGIORE

Sostituiamo nell' espressione generale $t_J = J$ (massima ripetizione):

$$T_M(n) = 8n + 6 + 4\left(2\sum_{2}^{n} J - (n-1)\right) = 7n - 5 + 8\sum_{2}^{n} J = 7n - 5 + 8\left(\sum_{1}^{n} J - 1\right)$$

$$= 7n - 5 + 8\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) = 7n - 5 - 8 + 4n^2 + 4n = 4n^2 + 11n - 13$$

In definitiva $T_m(n) = \Theta(n)$ e $T_M(n) = \Theta(n^2)$