INSIEMI, ELEMENTI

Ogni elenco o collezione ben definita è detto un **insieme**; gli oggetti che formano un insieme sono detti i suoi **elementi**.
Per dire che l'elemento x è un elemento di A si scrive $x \in A$ e si legge **x appartiene** ad A.

Se A e B sono due insiemi e si ha

$\forall x \in A \Longrightarrow x \in B$ $\boxed{\forall \text{ significa "qualunque"}}$

si dice che **A è una parte** (o **sottoinsieme**) di B oppure si dice che **A è contenuto** in B e si scrive $A \subseteq B$.

Un particolare insieme viene descritto o facendo l'elenco dei suoi elementi o formulando la **proprietà caratteristica** dei suoi elementi. Ad esempio:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \text{ numero: } x = 2\underset{\text{intero}}{\underset{\downarrow}{K}}+1 \text{ e } x \leq 9\}$$

A meno che non specificato diversamente, supporremo che tutti gli insiemi considerati in seguito siano parti di un insieme detto **insieme universo** e indicato con Ω. Useremo il simbolo ϕ (**vuoto**) per indicare l'insieme che non contiene elementi.

ESEMPI

- $A = \{ x : x = 2K+1 , x < 10 \}$ "i dispari minori di 10"

  $B = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13 \}$ "i primi fino a 13"

  $9 \in A$; $9 \notin B$ (non appartiene a B)

  $11 \notin A$; $11 \in B$

  $3 \in A$; $3 \in B$

  $6 \notin A$; $6 \notin B$

- Si usano i seguenti simboli:

  $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$ $\boxed{\text{interi positivi}}$

  $\mathbb{N}_0 = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$ $\boxed{\text{naturali}}$

  $\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$ $\boxed{\text{interi (relativi)}}$

  $\mathbb{Q} = \{ n/m : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0, \underset{\text{non hanno fattori comuni}}{} \}$ $\boxed{\text{razionali}}$

  $\mathbb{R} = \{ C, d_1 d_2 \dots : C \in \mathbb{Z}, d_1 \in S, d_2 \in S, \dots \}$ $\boxed{\text{reali}}$

  $S = \{ 0, 1, 2, 3, \dots, 9 \}$

- Siano $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$.

  $\{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \} =]a, b[= (a, b)$ $\boxed{\text{intervallo aperto}}$

  $\{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \} = [a, b]$ $\boxed{\text{" chiuso}}$

  $\{ x \in \mathbb{R} : x < b \} =]-\infty, b[$ semiretta sinistra aperta

  $\{ x \in \mathbb{R} : x > a \} =]a, +\infty[$ semiretta destra aperta

ESERCIZI

- Dimostrare che $A = \{2, 3, 4, 5\}$ non è una parte di $B = \{x \in \mathbb{N} : x = 2K \text{ e } K \in \mathbb{N}\}$.

- Dimostrare che

$$A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$$

- Dimostrare che
  - $A \subseteq B$ e $B \subseteq A \Rightarrow A = B$;
  - $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

- Siano $V = \{d\}$, $W = \{c, d\}$, $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$ e $Z = \{a, b, d\}$.
  Determinare il valore di verità (vero o falso) delle seguenti proposizioni

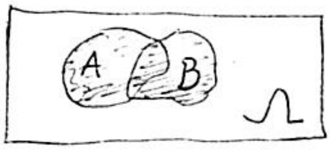
$$Y \subseteq X \; ; \; W \neq Z \text{ (diverso)} \; ; \; Z \supseteq V$$

$$V \subseteq X \; ; \; X = W \; ; \; W \subset Y.$$

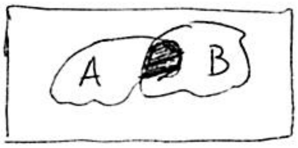
OPERAZIONI

Siano A e B parti di Ω.

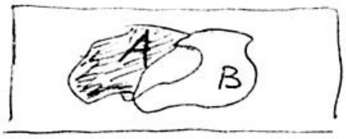
- $A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A$ o $x \in B\}$
  ↓
  unione



- $A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A$ e $x \in B\}$
  ↓
  intersezione



- $A \setminus B = \{x \in \Omega : x \in A$ e $x \notin B\} =$
  ↓
  differenza



- $A^c = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega : x \notin A\}$
  ↓
  complementare

> Se $A \cap B = \emptyset$ si dice che A e B sono **insiemi disgiunti**

- $A \setminus B = A \cap B^c$

PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI

Siano A, B, C parti di Ω.

- idempotenza	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
- associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
- Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identità	$A \cup \phi = A$ $A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \Omega = A$ $A \cap \phi = \phi$
- Complementare	$A \cup A^c = \Omega$ $(A^c)^c = A$	$A \cap A^c = \phi$ $\Omega^c = \phi$; $\phi^c = \Omega$
- De Morgan	$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$	$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$
-	$A \subseteq B \iff A^c \supseteq B^c$	
-	$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$	
-	$A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$	

ESERCIZI

- Sia $\Omega = \{1, 2, \dots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Trovare:

  A^c ; $A \cap C$; $(A \cap C)^c$; $A \cup B$; $B \setminus C$.

- Sia $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, d\}$ e $B = \{b, d, e\}$. Trovare:

  $A \cup B$; B^c ; $A^c \cap B$; $A^c \cap B^c$; $(A \cap B)^c$; $B \cap A$; $B \setminus A$; $A \cup B^c$; $B \setminus A$; $(A \cup B)^c$

- Dimostrare le proprietà distributive.

- Dimostrare che per arbitrari insiemi A e B si ha:

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B.$$

CARDINALITÀ DI UN INSIEME

- Un insieme Ω si dice **finito** se è possibile mettere i suoi elementi in corrispondenza biunivoca con un insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$. La **cardinalità** di tale insieme è n e si scrive $|\Omega| = n$, oppure $\# \Omega = n$.
- Un insieme Ω si dice **numerabile** se è possibile mettere i suoi elementi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. La **cardinalità** di tale insieme è $\aleph_0$ (aleph-zero) e si scrive $\# \Omega = \aleph_0$.
- Un insieme Ω si dice avere la **potenza del continuo** se esso non è né finito né numerabile. La cardinalità di tale insieme è c e si scrive $\# \Omega = c$.

ESEMPI

- $\Omega = \{$ i giorni delle settimana $\}$

Ω è finito in quanto: lunedì $\leftrightarrow 1$
martedì $\leftrightarrow 2$
$\vdots$
domenica $\leftrightarrow 7$

Inoltre $\# \Omega = 7$.

- $\Omega = \{$ i fiumi della terra $\}$

difficile da calcolare il numero dei fiumi

però possiamo sicuramente dire che Ω è finito.

- $\Omega = \{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$

$\# \Omega = \aleph_0 \iff \Omega$ è numerabile

- $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$

$\# \Omega = c \iff \Omega$ ~~ha~~ la potenza del continuo

CLASSI DI INSIEMI

- Quando gli elementi di un insieme $\mathcal{A}$ sono a loro volta degli insiemi si usa per $\mathcal{A}$ la parola **classe**. Ad esempio

$$\mathcal{A} = \{ \{2,3\}, \{2\}, \{5,6\} \}.$$

- In particolare se Ω è un insieme, la classe di tutti i sottoinsiemi di Ω si dice l'**insieme delle parti** di Ω e si indica con $\mathcal{P}(\Omega)$.

- Se Ω è un insieme e $\mathcal{A}$ è una classe di sottoinsiemi di Ω tale che l'unione di essi ha come risultato Ω allora $\mathcal{A}$ è detta essere un **ricoprimento** di Ω.

- Un ricoprimento $\mathcal{A}$ di Ω è detto essere una **partizione** di Ω se i suoi elementi sono a due a due disgiunti.

ESEMPI

- $\Omega = \{1, 2, --, 8, 9\}$

$\mathcal{A} = \{\{1,3,5\}, \{2,6\}, \{4,7\}, \{7,8,9\}\}$

$\mathcal{A}$ è un ricoprimento di Ω ma non una partizione in quanto:

$\{1,3,5\} \cup \{2,6\} \cup \{4,7\} \cup \{7,8,9\} = \Omega$;

$\{4,7\} \cap \{7,8,9\} = \{7\} \neq \phi$.

- $\Omega = \{1, 2, --, 8, 9\}$

$\mathcal{A} = \{\{1,3,5\}, \{2,4,6,8\}, \{7,9\}\}$

$\mathcal{A}$ è una partizione di Ω in quanto:

$\{1,3,5\} \cup \{2,4,6,8\} \cup \{7,9\} = \Omega$;

$\{1,3,5\} \cap \{2,4,6,8\} = \phi$

$\{1,3,5\} \cap \{7,9\} = \phi$

$\{2,4,6,8\} \cap \{7,9\} = \phi$

ALGEBRE e σ-ALGEBRE

- Sia Ω un insieme e $\mathcal{A}$ una classe **non vuota** di sottoinsiemi di Ω. Si dice che $\mathcal{A}$ è un'**algebra** se:

(i) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(ii) $A_1 \in \mathcal{A}$ e $A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

- Sia Ω un insieme e $\mathcal{F}$ una classe non vuota di sottoinsiemi di Ω. Si dice che $\mathcal{F}$ è una **σ-algebra** se:

(i)' $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$.

(ii)' $A_n \in \mathcal{F}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

In altri termini:

"Un'algebra è chiusa rispetto all'unione di due suoi elementi e rispetto al complemento."

"Una σ-algebra è chiusa rispetto all'unione numerabile di suoi elementi e rispetto al complemento."

ALCUNE OSSERVAZIONI

- Se $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ e

$$\mathcal{C} = \{ \{2,3\}, \{4,5\}, \{6\} \}$$

allora è sbagliato scrivere $\{4,5\} \subseteq \mathcal{C}$
" è corretto " $\{4,5\} \in \mathcal{C}$
" " " " $\{\{4,5\}\} \subseteq \mathcal{C}$

- Sia $A \subseteq \Omega$. Sono σ-algebre

$\mathcal{A} = \{\phi, \Omega\}$: "con due elementi"
$\mathcal{A} = \{\phi, A, A^c, \Omega\}$: "con quattro elementi"
$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$: "l'insieme delle parti"

- La chiusura finita di una classe $\mathcal{A}$ rispetto all'unione non implica la chiusura numerabile.
Infatti se $\Omega = \mathbb{R}$ e $\mathcal{C}$ è la classe di tutti gli intervalli limitati del tipo $]a,b[$ si ha

$$A_n =]0,n[\in \mathcal{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ma è immediato verificare che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n =]0,+\infty[\notin \mathcal{C}.$$

CONSEGUENZE IMMEDIATE

- $\boxed{\mathcal{A} \text{ è un'algebra} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{A},\ \phi \in \mathcal{A}.}$

Infatti

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup A^c = \Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow$$
$$\phi = \overline{\Omega} \in \mathcal{A}$$

- $\boxed{\mathcal{F} \text{ è una } \sigma\text{-algebra} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{F},\ \phi \in \mathcal{F}.}$

- $\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ è un'algebra} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots, A_n \in \mathcal{A} \\ \qquad \text{se } A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A}, \dots, A_n \in \mathcal{A}. \end{array}}$

Infatti, procedendo per induzione, l'asserto è vero per $n=2$. Se l'asserto è vero per $n-1$ si ha:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots, A_n = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cup A_n$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Con } B = A_1 \cup A_2 \cup \dots, \cup A_{n-1} \in \mathcal{A} \\ \text{per ipotesi di induzione} \end{array}}$$

$$= B \cup A_n \in \mathcal{A} \quad \text{per la (ii)}$$

- $\boxed{\text{Ogni } \sigma\text{-algebra è anche un'algebra.}}$

Infatti se $A_1 \in \mathcal{F}$, $A_2 \in \mathcal{F}$, $\dots$, $A_n \in \mathcal{F}$, poniamo $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$, $\dots$, $B_n = A_n$,

$$B_{n+1} = \phi,\ B_{n+2} = \phi,\ \dots$$

$$\bigcup_{K=1}^{\infty} B_K \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \left(\bigcup_{K=1}^{n} A_K\right) \cup \left(\bigcup_{K=n+1}^{\infty} \phi\right) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{F}.$$

ma anche un'algebra

- Una σ-algebra è chiusa rispetto all'intersezione finita o numerabile.

Infatti presi in $\mathcal{F}$ due elementi qualsiasi, A_1 e A_2, per le leggi di De Morgan si ha:

$$A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c)^c \in \mathcal{F}.$$

Valendo tali leggi anche nel caso numerabile e indicando con $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi $\mathcal{F}$ si ha:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{F}.$$

è un insieme di indici

- Sia $\mathcal{F}_\iota$ una σ-algebra su Ω, $\forall \iota \in J$.
La classe $\mathcal{F} = \bigcap_{\iota\in J} \mathcal{F}_\iota$ è una σ-algebra su Ω.

Infatti $\Omega \in \mathcal{F}_\iota, \forall \iota \in J \Rightarrow \Omega \in \bigcap_{\iota\in J} \mathcal{F}_\iota \Leftrightarrow \Omega \in \mathcal{F}$, ossia la classe $\mathcal{F}$ è non vuota. Inoltre si ha:

(i)' Sia $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \bigcap_{\iota\in J} \mathcal{F}_\iota \Rightarrow A \in \mathcal{F}_\iota, \forall \iota \in J \Rightarrow$
$A^c \in \mathcal{F}_\iota, \forall \iota \in J \Rightarrow A^c \in \bigcap_{\iota\in J} \mathcal{F}_\iota \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{F}$.

(ii)' Sia $A_n \in \mathcal{F}, \forall n \in \mathbb{N}$. Allora $A_n \in \mathcal{F}_\iota, \forall \iota \in J$ e $\forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_\iota, \forall \iota \in J \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{\iota\in J} \mathcal{F}_\iota \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

- Sia $\mathcal{C}$ una classe su Ω. Esiste una σ-algebra $\mathcal{F}$ che contiene $\mathcal{C}$ ed è contenuta in tutte le σ-algebre che contengono $\mathcal{C}$. Tale minima σ-algebra contenente $\mathcal{C}$ si dice generata da $\mathcal{C}$.

Indicata con $\mathcal{F}_i$ una qualsiasi σ-algebra contenente $\mathcal{C}$, per $i \in J$, basta porre

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i \in J} \mathcal{F}_i$$

per avere la σ-algebra generata da $\mathcal{C}$.

In primo luogo è non vuota la classe delle σ-algebre contenente $\mathcal{C}$: in essa vi è almeno $\mathcal{P}(\Omega)$.

ALGEBRA degli INSIEMI e LOGICA degli EVENTI

Ω	insieme universo	spazio campione o evento certo
A	insieme	evento
$\bar{A}$	complementare di A	"si verifica quando A non si verifica"
$A \cup B$	unione di A e B	"si verifica se almeno uno tra A e B si verifica"
$A \cap B$	intersezione di A e B	"si verifica se entrambi gli eventi A e B si verificano
$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$	unione finita di insiemi	"si verifica se almeno uno degli eventi si verifica"
$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$	unione numerabile di insiemi	"
$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$	intersezione finite di insiemi	"si verifica se si verificano tutti gli eventi"
$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$	intersezione numerabile di insiemi	"
$\emptyset$	insieme vuoto	evento impossibile
$A \cap B = \emptyset$	insiemi disgiunti	eventi incompatibili
$A \subset B$	A contenuto in B	se si verifica A allora si verifica anche B
$\bigcup_{k} A_k = \Omega$	ricoprimento di Ω	eventi "necessari"