Cours sur les probabilités

Table des matières

1 Expérience aléatoire, univers, loi de probabilité.

Définition 1: Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance.

Exemple 1

Un lancer de dé, un lancer de pièce, etc. Sont autant d'expérience aléatoire.

Question 1

Donner un exemple simple d'expérience aléatoire.

Définition 2: Univers

L'univers d'une expérience aléatoire correspond à **l'ensemble des issues** de cette expérience aléatoire. On note Ω (lire «Omega») cet ensemble.

Exemple 2

Si on lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, alors l'univers de cette expérience aléatoire est :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Question 2

Quel est l'univers de l'expérience aléatoire d'un lancer d'une seule pièce de monnaie ?

Question 3

Quel est l'univers associé à l'expérience aléatoire au résultat de **deux** lancer de pièces de monnaie consécutifs ?

Reponse 1

Si on note P l'issue qui correspond à pile sur une pièce, et F l'issue qui correspond à face, alors il y a quatre résultats possibles, autrement dit :

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$$

C'est-à-dire, qu'on obtient soit pile et pile, soit pile et face, soit face et pile, ou soit face et face.

Définition 3: Loi de probabilité

Donner une loi de probabilité d'une expérience aléatoire c'est associer à chaque **issu** une probabilité.
Il faut que la loi de probabilité respecte plusieurs conditions :

- Les probabilités de chaque issue est un nombre entre 0 et 1
- La somme de l'ensemble des probabilités fait 1

On représente souvent une loi de probabilité sous la forme d'un tableau.

Exemple 3

Pour un dé à 6 faces que l'on considère équilibré (toutes les faces ont autant de chance de tomber) alors on associe à chaque issue une probabilité $\frac{1}{6}$. Sous forme de tableau on a :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On remarque bien que $\frac{1}{6} \in [0; 1]$, et que :

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

Question 4

Imaginer la loi de probabilité d'un dé qui est non équilibré, donner cette loi sous la forme d'un tableau. Vous vérifierez que votre loi respecte bien les conditions de la définition précédente.

Définition 4: Loi équirépartie

Une loi est dite équirépartie lorsque chaque issue à la même probabilité de se réaliser.

Exemple 4

L'exemple précédent est un exemple de loi équirépartie ! Très souvent lorsque l'on considère une pièce de monnaie équilibrée, ou un dé équilibré, c'est en fait la loi équirépartie que l'on utilise.

Question 5

Donner la loi de probabilité d'un lancer d'une pièce de monnaie équilibré sous la forme d'un tableau.

Question 6

Voici un tableau d'une loi de probabilité :

Issue	A	B	C
Probabilité	$0,2$	$0,1$	?

Compléter-le (réponse à la page d'après, faites la question avant de regarder la page suivante !)

Reponse 2

Puisque la somme des probabilités doit faire 1, on calcule $1 - 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}7$, donc $? = 0{,}7$

2 Événements

Définition 5: Événements

Un événement est un **ensemble d'issues**

Exemple 5

Dans l'expérience aléatoire d'un lancer de dé équilibré à 6 faces, on peut définir l'événement suivant :

$$A = \text{"Le résultat est pair"}$$

Cet évènement correspond à l'ensemble suivant :

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Définition 6: Probabilité d'un événement

Si on note A un événement, alors on note $\mathbb{P}(A)$ la probabilité de cet évènement. La probabilité d'un évènement correspond à la **somme** des probabilités de ses issues.

Exemple 6

En reprenant l'événement A de l'exemple précédent, c'est-à-dire :

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

car les issues $2, 4$ et 6 sont associés à la probabilité $\frac{1}{6}$. Finalement :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Donc l'événement A a une chance sur deux de se produire.

Question 7

Calculer la probabilité de l'événement B défini par :

$$B = \text{"Le résultat divisible par trois"}$$

Proposition 1

Dans le cas d'une loi équirépartie, avec k le nombre d'issues de A et n le nombre d'issues de l'univers Ω, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n}$$

Exemple 7

On retrouve les mêmes calculs que l'exemple précédent, puisque si :

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Alors, il y a trois issues dans A ($k = 3$).
Et l'univers Ω :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

contient six issues ($n = 6$).
Donc, d'après la formule de la proposition précédente, on retrouve :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6}$$

Et on conclura en simplifiant : $\mathbb{P}(A) = 0{,}5$

Question 8

Utiliser la formule vue précédemment avec l'événement $B =$ "Le résultat divisible par trois", en gardant toujours la même expérience aléatoire.

3 Opération sur les événements

3.1 Événement contraire

Définition 7: Événement contraire

Soit A un événement. On définit l'événement contraire de A l'événement qui contient toutes les issues qui ne sont pas dans A. On note $\bar{A}$ (qu'on lit « A barre») cet événement.

Proposition 2

Si A est un événement, alors :

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

et réciproquement :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$$

Exemple 8

Si A est un événement tel que $\mathbb{P}(A) = 0{,}33$. Quelle est la probabilité de $\bar{A}$? (*Attention aux calculs trop rapides !*)

Reponse 3

Vous avez proposé $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0{,}77$? Et bien réfléchissez encore !

3.2 Union de deux événements

Définition 8: Union de deux événements

Soit A et B deux événements. On note alors $A \cup B$ l'événement qui correspond à l'ensemble des issues qui sont soit dans l'événement A soit dans l'événement B (ou les deux).

3.3 Intersection de deux événements

Définition 9: Intersection de deux événements

Soit A et B deux événements. On note alors $A \cap B$ l'événement qui correspond à l'ensemble des issues qui appartiennent à la fois à l'événement A **et** à l'événement B (il faut appartenir au deux).