

## 1 Multiples et diviseurs d'un nombre entier.

### Définition 1: Multiples d'un nombre entier

Soit  $n$  un nombre entier. Alors, on appelle *multiple* de  $n$  tous les nombres de la forme  $kn = k \times n$  avec  $k$  un nombre entier relatif.

### Exemple 1

On peut représenter l'ensemble des multiples d'un nombre à l'aide de la représentation ci-dessous.

Ici, vous avez un aperçu des multiples de 4.

...	-20	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16	20	...
...	$4 \times (-5)$	$4 \times (-4)$	$4 \times (-3)$	$4 \times (-2)$	$4 \times (-1)$	$4 \times 0$	$4 \times 1$	$4 \times 2$	$4 \times 3$	$4 \times 4$	$4 \times 5$	...

### Question 1

1. Peut-on dire que l'ensemble des multiples d'un nombre correspond aux tables de multiplication de ce nombre ?
2. Combien un nombre admet-il de multiples ?
3. Donner la «bande des multiples» de 3. Rappelez le critère rapide qui permet de savoir si un nombre est divisible par 3 ou non.
4. Donner la «bande des multiples» de 6. Y'a-t-il des éléments en commun avec la bande des multiples de 3 ? Pourquoi ?

### Proposition 1

Seul 0 est multiple de tous les nombres entiers.

### Démonstration 1

C'est le seul qui est présent dans toute les «bandes» de nombres qui correspond aux multiples.

## Définition 2: Diviseurs d'un nombre entier

Soit  $n$  un nombre entier. Alors un diviseur de  $n$  est un nombre  $d$  tel que  $n$  est un multiple de  $d$ .

### Exemple 2

les diviseurs des nombres dans les bandes du multiples sont présent dans la seconde ligne de la bande. regardez les multiples de 23 par exemple.

...	-115	-92	-69	-46	-23	0	23	46	69	92	115	...
...	$23 \times (-5)$	$23 \times (-4)$	$23 \times (-3)$	$23 \times (-2)$	$23 \times (-1)$	$23 \times 0$	$23 \times 1$	$23 \times 2$	$23 \times 3$	$23 \times 4$	$23 \times 5$	...

### Exemple 3

On peut lire par exemple que  $-115$  est un multiple de  $-5$  (mais aussi de 23).

## Proposition 2

On voit donc que le terme **multiple** et **diviseur** sont en dualité. L'un est lié à l'autre, et le point de vue est inversé. Il faut prendre le temps d'utiliser ce vocabulaire.

### Exemple 4

On représentera l'ensemble des diviseurs positifs d'un nombre à l'aide de la boîte de la figure 1 dans le cours. Par exemple, voici la liste des diviseurs de 30.

30								
1	2	3	5	6	10	15	30	

Figure 1 – Liste des diviseurs de 30

## Question 2

À partir de la situation  $23 \times 4 = 92$ , faites une phrase qui contient le mot :

1. «multiple»
2. «diviseur»

(vous ferez donc deux phrases différentes).

### Proposition 3

L'entier 1 est le seul diviseur positif de tous les nombres.

### Démonstration 2

Tout nombre  $n$  peut s'écrire  $n = n \times 1$ , donc 1 est un diviseur de  $n$ .

### Question 3

1. Faites la liste des diviseurs de 25 (il faut aussi compter les diviseurs négatifs).
2. De même pour 26.
3. Que peut-on dire des nombres qui admettent exactement trois diviseurs positifs ?

### Question 4

Quelle est le nombre minimum de diviseurs que peut admettre un nombre entier ?

## 2 PGCD, PPCM.

### 2.1 Plus grand diviseur commun

#### Définition 3: PGCD : plus grand diviseur commun

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres entiers positifs. On considère les listes respectives des diviseurs de  $a$  et des diviseurs de  $b$ . On définit  $\text{pgcd}(a, b)$  par le plus grand diviseurs qui est présent dans la liste des diviseurs de  $a$  et dans la liste des diviseurs de  $b$ .

#### Exemple 5

Le plus grand diviseur commun de 42 et 54 est 6, puisque c'est le plus grand nombre commun aux deux listes des diviseurs de 42 et 36.

54								
1	2	3	6	9	18	27	54	

42
1   2   3   6   7   14   21   42

## 2.2 Plus petit commun multiple

### Définition 4: PPCM : plus petit commun multiple

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres entiers positifs. On considère la bande de multiple (positif), et on définit  $\text{ppcm}(a,b)$  par le plus petits multiples commun entre les deux.

### Question 5

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres entiers positifs. Montrer alors que  $a \times b$  est un multiple commun de  $a$  et  $b$ .

### Exemple 6

Prenons 6 et 15, et regardons leur multiple. Peux-tu montrer que  $\text{ppcm}(6, 15) = 30$  ?

...	-30	-24	-18	-12	-6	0	6	12	18	24	30	...
...	$6 \times (-5)$	$6 \times (-4)$	$6 \times (-3)$	$6 \times (-2)$	$6 \times (-1)$	$6 \times 0$	$6 \times 1$	$6 \times 2$	$6 \times 3$	$6 \times 4$	$6 \times 5$	...

...	-75	-60	-45	-30	-15	0	15	30	45	60	75	...
...	$15 \times (-5)$	$15 \times (-4)$	$15 \times (-3)$	$15 \times (-2)$	$15 \times (-1)$	$15 \times 0$	$15 \times 1$	$15 \times 2$	$15 \times 3$	$15 \times 4$	$15 \times 5$	...

## 3 Reste d'une division euclidienne.

### Proposition 4

Soit  $a > b$  deux nombres entiers naturels positifs.  
Alors, il existe un unique couple d'entiers positifs  $q$  et  $r$  tel que

1.  $a = bq + r$
2.  $0 \leq r < b$

### Définition 5: Reste de la division euclidienne

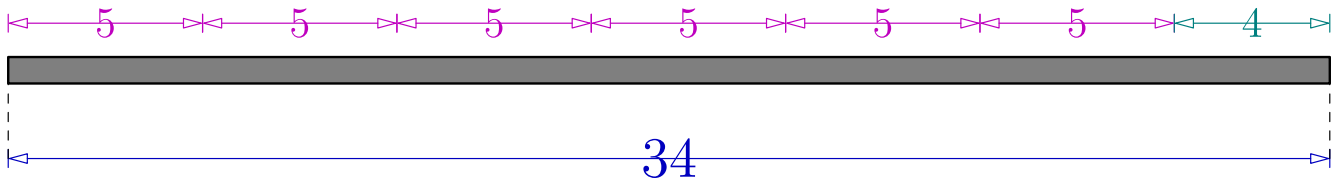
Dans la proposition précédente, on appelle  $q$  le *quotient* et  $r$  le *reste* de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

### Exemple 7

Regarde l'image suivante, et explique pourquoi si on prend  $a = 34$  et  $b = 5$  on obtient  $q = 6$  et  $r = 4$ .

En effet,  $34 = 5 \times 6 + 4$ . On dit donc que le reste de la division euclidienne de 34 par 5 est 4.

## Division euclidienne de 34 par 5



### Question 6

1. Quelle est le reste de la division euclidienne de 340 par 50 ?
2. Quelle est le reste de la division euclidienne de 134 par 5 ?
3. Quelle est le reste de la division euclidienne de 35 par 5 ?

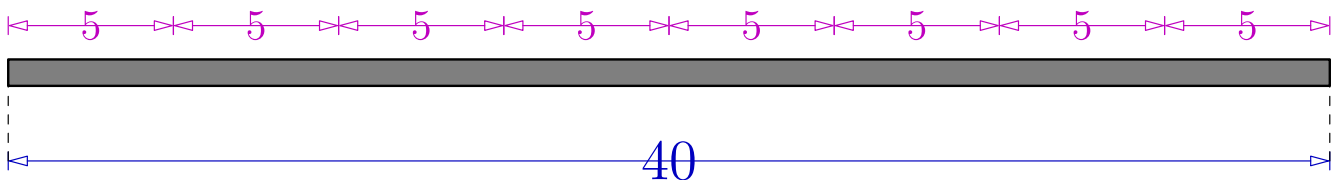
### Proposition 5

On suppose que le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  vaut  $r = 0$ . Alors,  $b$  divise  $a$ , et réciproquement.

### Exemple 8

Voici un exemple avec  $a = 40$  et  $b = 5$ , on voit que le reste est nul, et ainsi on a bien 5 qui divise 40, ou dit autrement, 40 est un multiple de 5.

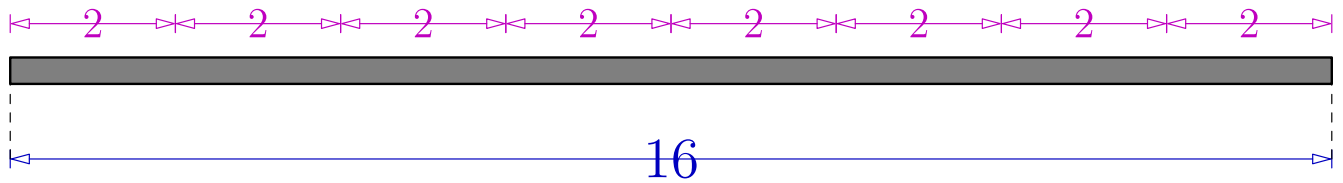
## Division euclidienne de 40 par 5



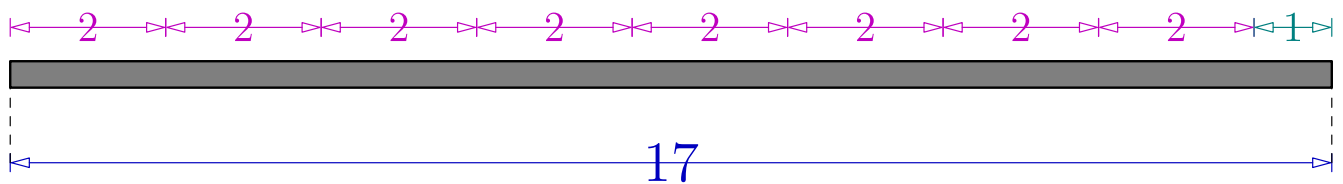
### 3.1 Division euclidienne par 2

Regarde attentivement ces exemples :

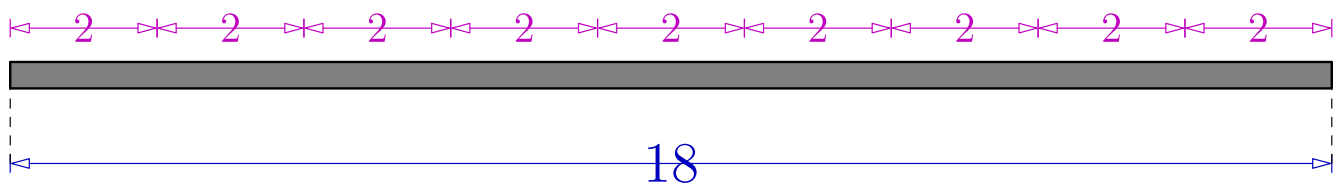
Division euclidienne de 16 par 2



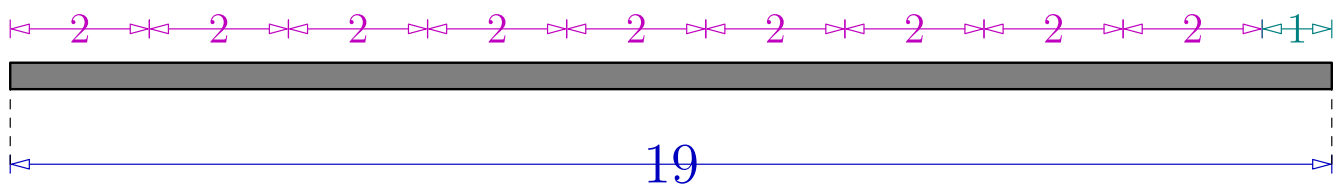
Division euclidienne de 17 par 2



Division euclidienne de 18 par 2



Division euclidienne de 19 par 2



On peut montrer la proposition suivante :

#### **Proposition 6**

Un nombre est pair si et seulement si le reste de sa division euclidienne par 2 vaut 0. Si le reste de la division euclidienne d'un nombre par 2 vaut 1, alors ce nombre est impair, et réciproquement.

On peut reformuler cela par la proposition suivante :

### Proposition 7

Pour tout nombre pair  $n$ , il existe  $k$  tel que :

$$n = 2k$$

De même, pour tout nombre impair, il existe  $k$  tel que :

$$n = 2k + 1$$

### Question 7

1. Quel est le lien entre les deux propositions précédentes ?
2. Est-ce que le nombre  $2 \times (53) + 4$  est pair ?
3. Est-ce que le nombre  $2(n + 1)$  est pair, sachant que  $n$  est un entier positif ?
4. Si  $n$  est un entier pair, est-ce que  $n + 4$  l'est aussi ? Montrer cela à l'aide de la proposition précédente.
5. Si  $n$  est un entier quelconque, quelle est la parité du nombre  $n(n + 1)$  ?

## 4 Nombres premiers.

### Définition 6: Nombres premiers

Un nombre entier strictement plus grand que 1 est dit premier si et seulement si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui même.

### Exemple 9

D'après les liste de diviseurs ci-dessous, quels sont les nombres qui sont premiers parmi 245, 109, 1427 et 110 ?

245						
1	5	7	35	49	245	

109	
1	109

1427	
1	1427

110							
1	2	5	10	11	22	55	110

**Proposition 8**

Tout nombre entier admet une unique décomposition en facteur premier.

**Exemple 10**

Soit le nombre 264. Alors, sa décomposition en nombre premier est :

$$264 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 11 = 2^3 \times 3 \times 11$$

**Question 8**

1. Trouver la décomposition de 245, de 352 et 1000.
2. Pourquoi la décomposition de 24 n'est pas  $24 = 6 \times 4$  ?
3. Est-ce que 1 est un nombre premier ?
4. Regarde la figure 2. Que peut-on dire des diviseurs qui apparaissent dans la liste et de la décomposition en nombre premier de 265 ?

265			
1	5	53	265

Figure 2 – Liste des diviseurs de 264