Équations de droite dans le plan

Table des matières

1 Avant de commencer la lecture de ce cours

1.1 Les notions qu'il faut maîtriser pour que tout se passe bien

Pour ce cours, vous *avez besoin des notions suivantes* :

— vecteurs colinéaires,

— déterminant de deux vecteurs,

— déterminer les coordonnées d'un vecteur sachant ses deux extrémités.

— les fonctions affines.

Pour savoir si vous êtes prêt, répondez aux questions suivantes :

Question 1

1. Savez-vous représenter deux vecteurs colinéaires ?
2. Quelle est la définition de deux vecteurs colinéaires ?
3. Que peut-on dire du déterminant de deux vecteurs colinéaires ?
4. Quelle est la formule du déterminant ? À quoi fait-elle penser ?
5. Sans faire de calcul, pourquoi voit-on que les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3.6 \\ 9.6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ?

Voici des questions qui portent sur les coordonnées.

Question 2

6. Quel sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sachant que $A(-3;-1)$ et $B(4,5)$?
7. Quel est le coefficient directeur de la fonction affine dont la courbe représentative passe par les points $A(-3;-1)$ et $B(4,5)$?

Le programme python **??** vous donne les solutions à la question 6. Vous pourrez réutiliser ce programme plus tard pour vous aider.

```
1  def coordonneVecteur(a, b) :
2      return b[0] - a[0], b[1] - a[1]
3  
4  def determinant(u, v) :
5      return u[0]*v[1] - u[1]*v[0]
6  
7  a = [-3, 1]
8  b = [4, 5]
9  
10 u = coordonneVecteur(a, b)
11 v = [3, 8]
12 
13 print("Le vecteur est de coordonne", u)
14 print("u et v sont de determinant", determinant(u, v))
```

Listing 1: Voici un programme qui définit deux fonctions qui peuvent vous être utiles.

```
Le vecteur est de coordonne (7, 4)
u et v sont de determinant 44
```


```
Le vecteur est de coordonne (7, 4)
u et v sont de determinant 44
```


Quelques explications du programme **??** :

1. Un point et un vecteur sont codés de la même manière. On utilise les crochets `[` et `]`. Ces crochets n'ont rien à voir avec les intervalles.
2. La fonction `coordonneVecteur` définie à la ligne 1 demande deux points, et retourne le vecteur qui admet ces deux points aux extrémités.
3. La fonction `determinant` définie à la ligne 4 demande deux vecteurs et retourne le déterminant des deux vecteurs qu'on lui donne.

1.2 À quoi sert ce chapitre ?

Des droites, vous en avez déjà croisées beaucoup, avec les fonctions affines, et avec les vecteurs. Ce chapitre donne un dernier point de vue, plus général, et plus complet, sur la question. Il sera l'occasion de faire un vrai lien entre les vecteurs et les fonctions affines, dans un cadre plus élégant, et facile à comprendre.

2 Définitions

2.1 Coordonnée d'un point

Définition 1: (Rappel) Point de coordonnée (x, y)

Pour tout le cours, on considère que le plan est munit d'un repère orthonormée $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (la fameuse «base carreaux» !). Alors, on note $M(x, y)$ le point tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

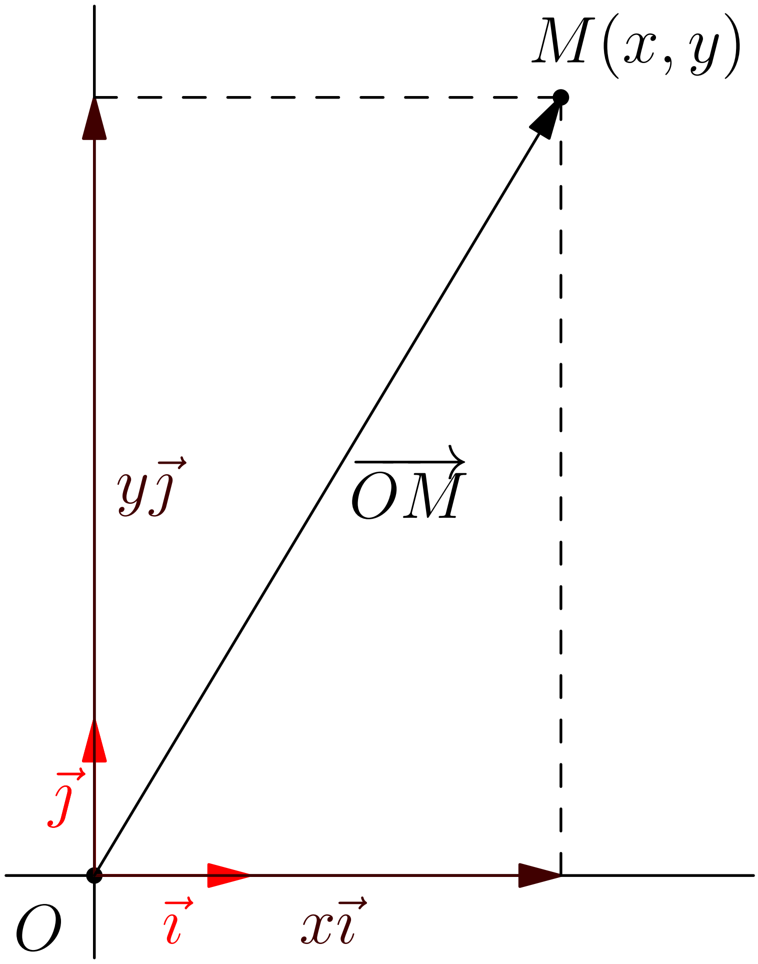


Figure 2.1 – Le point M admet pour coordonnées (x, y).

Remarque 1

On utilisera donc la lettre y pour désigner les ordonnées, la lettre x pour désigner les abscisses.

2.2 Équations cartésiennes

Définition 2: Équation cartésienne

Une équation cartésienne du plan est une équation aux inconnues x et y de la forme :

$$ax + by = c$$

Les constantes a, b et c sont des nombres réels quelconques mais a et b ne peuvent pas être nuls simultanément.

Remarque 2

Le nom «équation cartésienne» vient du physicien, philosophe et mathématicien René Descartes(1596-1650). Descartes est célèbre pour la citation «Je pense donc je suis», entre autre. En mathématiques, c'est lui qui a introduit les notations x et y

Définition 3: Représenter les solutions d'une équation cartésienne

Toutes les solutions (x, y) de cette équation peuvent être *représentées* sur le plan. x désigne la valeur aux abscisses, et y la valeur au ordonnées. Chaque solution correspond donc à un **point** sur le plan.

Exemple 1

Voici des exemples d'équations cartésiennes :

1. $3x - 4y = 2$ ($a = 3$, $b = -4$ et $c = 2$)
2. $2y = 1$ (ici, $a = 0$)
3. $3x = 1$ (ici, c'est b qui vaut 0)
4. $2x = 3y - 2$

Pour la dernière, on peut *manipuler l'équation* pour se rapprocher de la définition, en effet :

$$\begin{aligned} 2x &= 3y - 2 \\ 2x - 3y &= -2 \quad \text{Cette forme est la plus proche de la définition} \\ 2x - 3y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

sont des **équations équivalentes**.

Question 3

Pour chaque équation cartésienne de l'exemple précédent, donnez la valeur de a, b et c de la définition.

Question 4

Pourquoi l'équation :

$$x^2 + \sqrt{y} = 3$$

n'est pas une équation cartésienne ?

Question 5

Pourquoi l'équation :

$$\sqrt{2}x + 3y - 2 = 0$$

est une équation cartésienne ? Quelles sont les valeurs de a, b et c ?

3 L'ensemble des solutions d'une équation cartésienne

On souhaite décrire les solutions des équations cartésiennes.

Proposition 1

Une équation cartésienne admet une **infinité** de solutions.

Question 6

Pourquoi une équation comme par exemple $x + y = 5$ aurait une infinité de solutions ? (j'ai pris $a = 1$,$b = 1$ et $c = 5$)

Reponse 1

Eh bien, on peut facilement en citer plusieurs :

— $x = 1$, $y = 4$

— $x = 2$, $y = 3$

— $x = 3$, $y = 2$

— $x = 4$, $y = 1$

— $x = 5$, $y = 0$

— $x = 6$, $y = -1$

Et on peut citer des solutions décimales :

— $x = 2{,}1$, $y = 2, 9$

— $x = 2{,}2$, $y = 2{,}8$

— $x = 2{,}3$, $y = 2{,}7$

— etc.

et même des solutions non rationnelles :

— $x = \sqrt{2} \approx 1{,}414213$, $y = 5 - \sqrt{2} \approx 3.5857$

puisque $\sqrt{2} + 5 - \sqrt{2} = 5$ sans trop d'effort

Voici le théorème le plus important de ce cours :

Proposition 2

L'ensemble des solutions (x, y) d'une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by = c$$

avec a et b non nul simultanément, **forme une droite du plan**

Question 7

Représentez les solutions entières trouvées dans la question précédente dans le plan. On rappelle que x correspond aux abscisses, et y aux ordonnées.

Reponse 2

Vous devriez trouver la droite représentée à la figure 3.1. On a pris soin de représenter les points trouvés dans le paragraphe vu un peu plus haut. On constate bien que tous les points sont alignés.

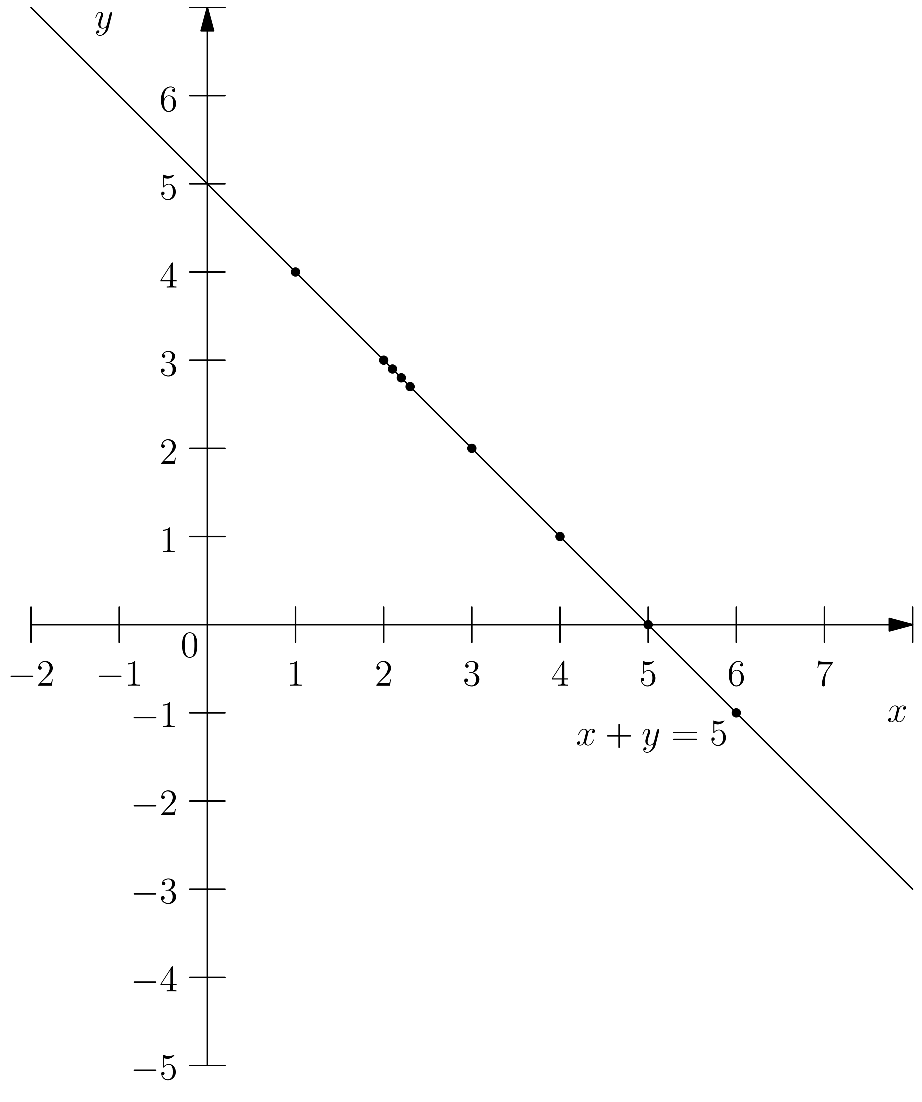


Figure 3.1 – L'ensemble des solutions de l'équation $x + y = 5$. Comme prévu par le théorème, c'est une droite.

Question 8

Retrouvez l'abscisse et l'ordonnée des points qui ont été ajoutés à la droite de la figure 3.1e]. Vérifiez bien que vous avez compris que chaque point admet une abscisse x et une ordonnée y qui sont telles que $x + y = 5$. En traçant la droite, vous avez ainsi représenté **toutes** les solutions de l'équation $x + y = 5$.

4 Cas particuliers ($a = 0$ ou $b = 0$)

Cette partie du cours étudie les cas où l'on a

1. $a = 0$, ou bien
2. $b = 0$

On rappelle qu'il est **impossible** que a et b soient nuls en même temps. Sinon l'équation est vide, et il n'y a rien à résoudre.
Vous pouvez sauter cette partie si vous en êtes à la première lecture. C'est pas la plus fascinante.

4.1 Cas où $a = 0$

Exemple 2

Voici l'ensemble des solutions de l'équation cartésienne $3y = 5$.

Question 9

Que remarquez-vous ?
Donnez une solution de l'équation cartésienne $3y = 5$, puis une deuxième.

Reponse 3

L'équation cartésienne $3y = 5$ n'impose aucune condition sur la valeur de x. Je peux choisir n'importe quelle valeur de x. Prenons $x = 1$. Puis, je dois résoudre $3y = 5$, et je trouve $y = \frac{5}{3}$.
Pour l'instant j'ai la solution suivante :

— $x = 1$ et $y = \frac{5}{3}$

mais on disait plus tôt que je peux choisir n'importe quelle valeur de x, **puisqu'il n'y a pas de x dans l'équation de départ**, donc on peut trouver autant d'autre point que l'on veut :

— $x = 10$ et $y = \frac{5}{3}$
— $x = 5$ et $y = \frac{5}{3}$
— $x = 7989401{,}2098$ et $y = \frac{5}{3}$ (oui, j'ai laissé mon chat me proposer une valeur de x).

Proposition 3

Si $a = 0$ alors l'ensemble des solutions de l'équation cartésienne $ax + by = c$ sera une **droite parallèle à l'axe des abscisses**.

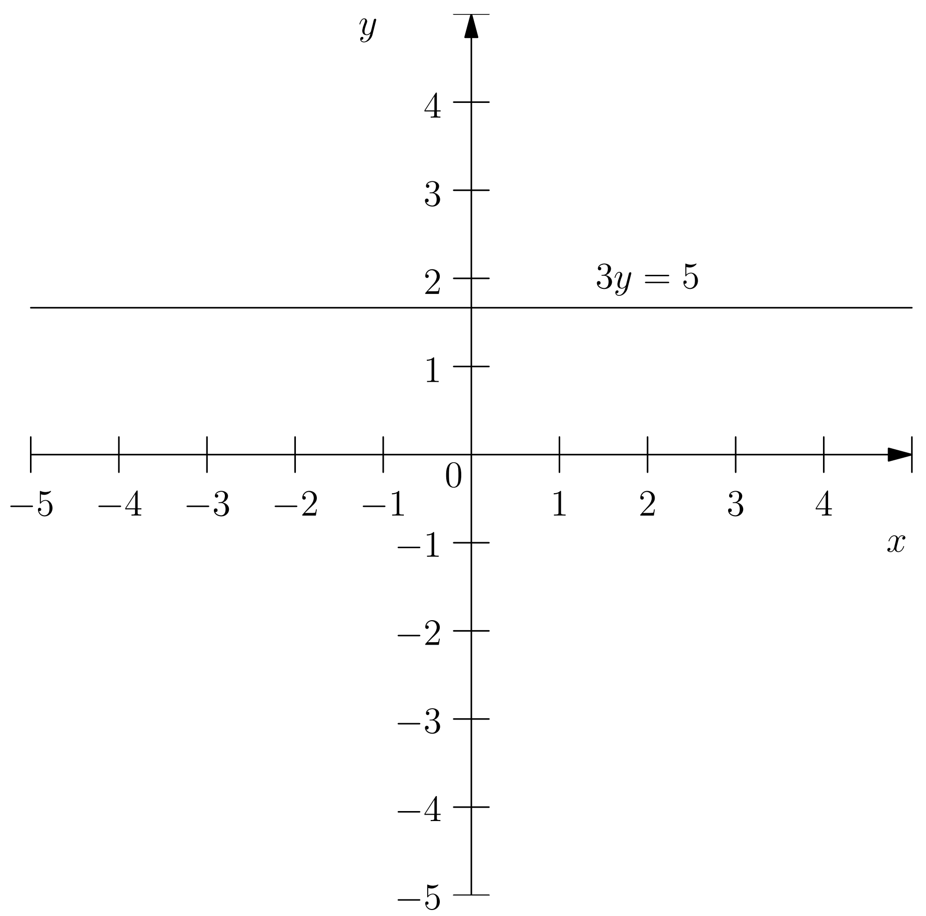


Figure 4.1 – Représentation des solutions de l'équation cartésienne $3y = 5$

Question 10

Expliquez à l'aide de la réponse 3 pourquoi la droite se retrouve parallèle à l'axe des abscisses.

4.2 Cas où $b = 0$

On retrouve les même raisonnements.

Exemple 3

Voici une représentation de l'ensemble des solutions de l'équation $3x = 5$

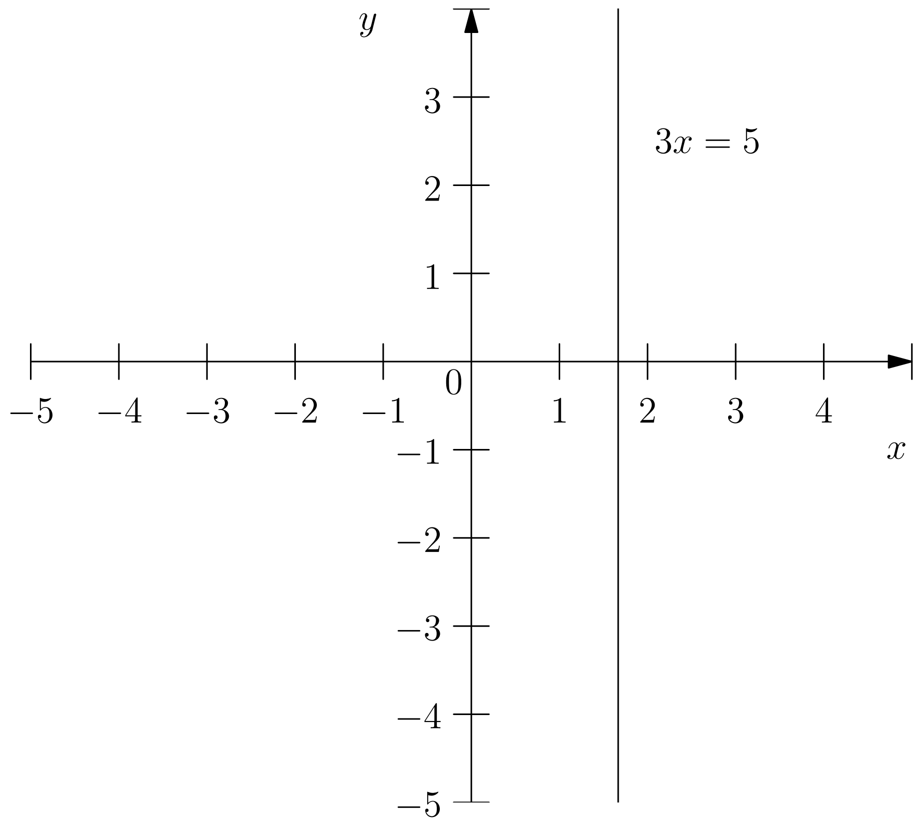


Figure 4.2 – Représentation des solutions de l'équation cartésienne $3x = 5$

Proposition 4

Si $b = 0$ alors l'ensemble des solutions de l'équation cartésienne $ax + by = c$ sera une **droite parallèle à l'axe des ordonnées**.

Question 11

Est-ce que la courbe de la figure 4.2 peut-être une courbe d'une fonction ? Expliquer.

Proposition 5

Dans ce cas, et dans ce cas uniquement, l'ensemble des solutions des équations $bx = c$ ne peut pas être le graphe d'une fonction (affine) puisque aucune fonction ne peut admettre plusieurs images à partir d'un même nombre.

5 Vecteur directeur et équations cartésiennes

5.1 Définition d'un vecteur directeur

Définition 4: Vecteurs directeurs d'une droite

Un vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$ si et seulement si la **direction** de $\vec{u}$ est donnée par la droite $\mathcal{D}$

Exemple 4

Dans la figure 5.1, je vous l'ensemble des solutions de l'équation cartésienne $2x+3y = -3$ qui forme une droite. Le vecteur $\vec{u}$ est **un** vecteur directeur de cette droite.
Je vous expliquerai ensuite comment trouver un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation cartésienne.

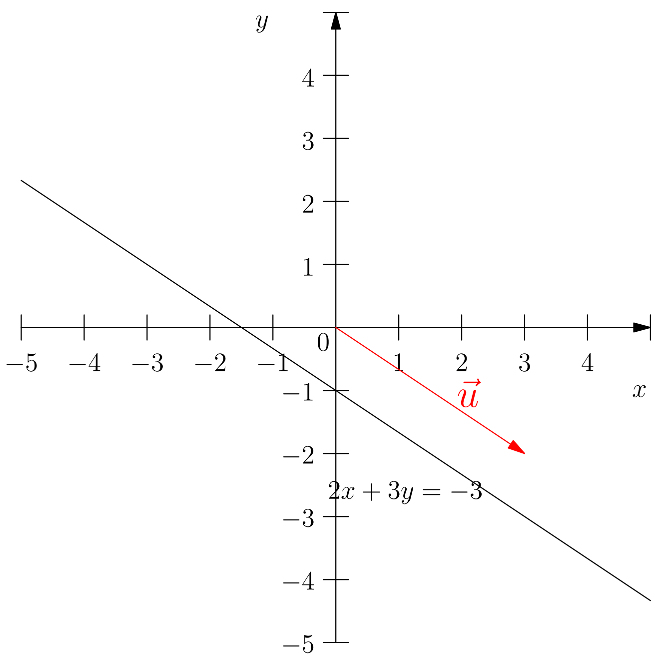


Figure 5.1 – Le vecteur $\vec{u}$ a la direction donnée par la droite d'équation cartésienne $2x + 3y = -3$. Donc $\vec{u}$ un vecteur directeur de cette droite.

Proposition 6

Toutes les droites admettent une **infinité** de vecteurs directeurs.

Démonstration 1

On peut toujours former un vecteur directeur d'une droite en prenant deux points A et B différents. On aura alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ qui sera un vecteur directeur.
Pour avoir d'autres vecteurs directeurs, il suffit de prendre deux points plus éloignés pour obtenir un autre vecteur directeur.

Proposition 7

Tous les vecteurs directeurs d'une même droite sont **colinéaires**

Question 12

Pourquoi ne peut-on pas dire *le* vecteur directeur ? Dit autrement, pourquoi faut-il **toujours** utiliser l'expression « **un vecteur directeur** » ?

Question 13

Donnez un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ qui admet pour équation cartésienne $x+y = 5$ (on l'a déjà étudiée, voir la figure 3.1). Vous donnerez les **coordonnées** de ce vecteur. Pour l'instant vous n'avez pas de formule, mais vous pouvez raisonner uniquement avec le graphique.

5.2 Vecteur directeur d'une droite donnée par une équation cartésienne.

Proposition 8

Soit une droite $\mathcal{D}$ donnée par l'équation cartésienne :

$$ax + by = c$$

Alors, la droite $\mathcal{D}$ admet (par exemple) comme vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

Notez quel le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

est aussi un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

Question 14

Qu'est-ce qu'on peut dire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ de la proposition précédente ?

Reponse 4

Ils sont colinéaires, oui, mais plus que ça, il sont opposés ! Les coordonnées de l'un sont données par l'opposé des coordonnées de l'autre.

Exemple 5

Retrouvez les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ de la figure 5.1. J'ai tout simplement utilisé les formules de la proposition précédente dans mon programme pour afficher un vecteur directeur.

Question 15

Comment trouvez **tous** les vecteurs directeurs d'une droite ?

Reponse 5

Il suffit d'en trouver un seul, et les autres ne sont que des multiples du premier ! Dit autrement, tous les vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires (il faut revoir son cours sur les vecteurs si ce n'est pas clair).

Question 16

Dans les cinq figures suivantes, retrouvez tous les vecteurs directeurs de chaque équation.
Puis posez vous les questions suivantes :

- Peut-on avoir deux équations cartésiennes qui représentent la même droite ?
- Pourquoi le vecteur directeur ne dépend-t-il pas de la valeur de c ?

Reponse 6

Si vous avez pas eu l'impression de vous faire arnaquer dans les questions précédentes, c'est que vous êtes passé à coté de quelque chose !

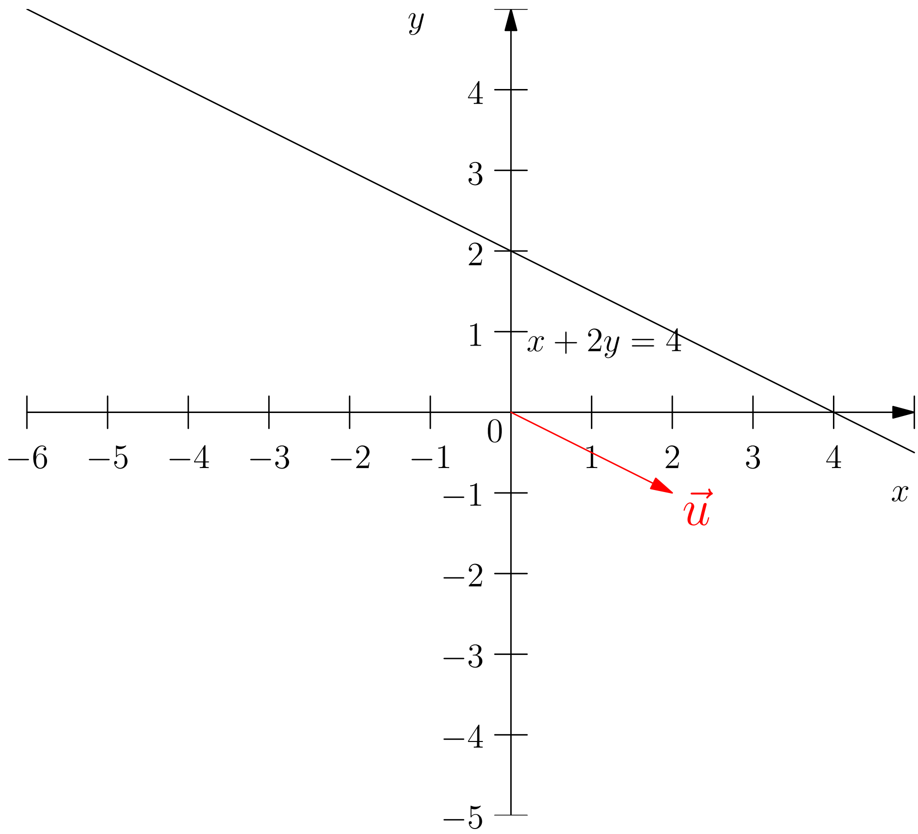


Figure 5.2 – Exercice 1

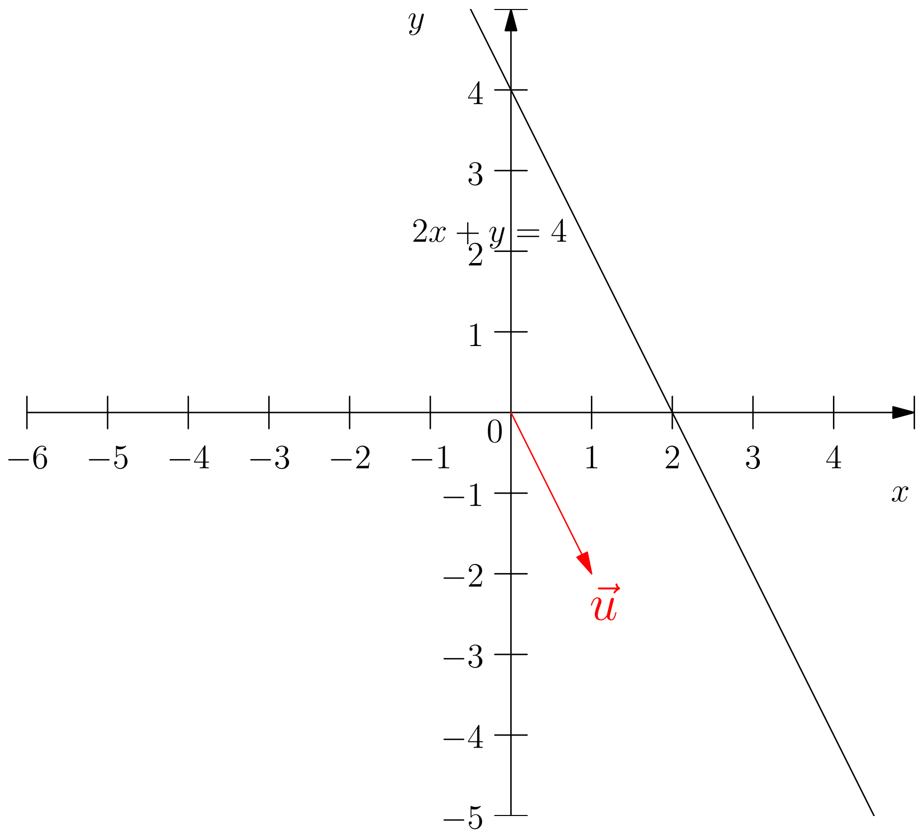


Figure 5.3 – Exercice 2

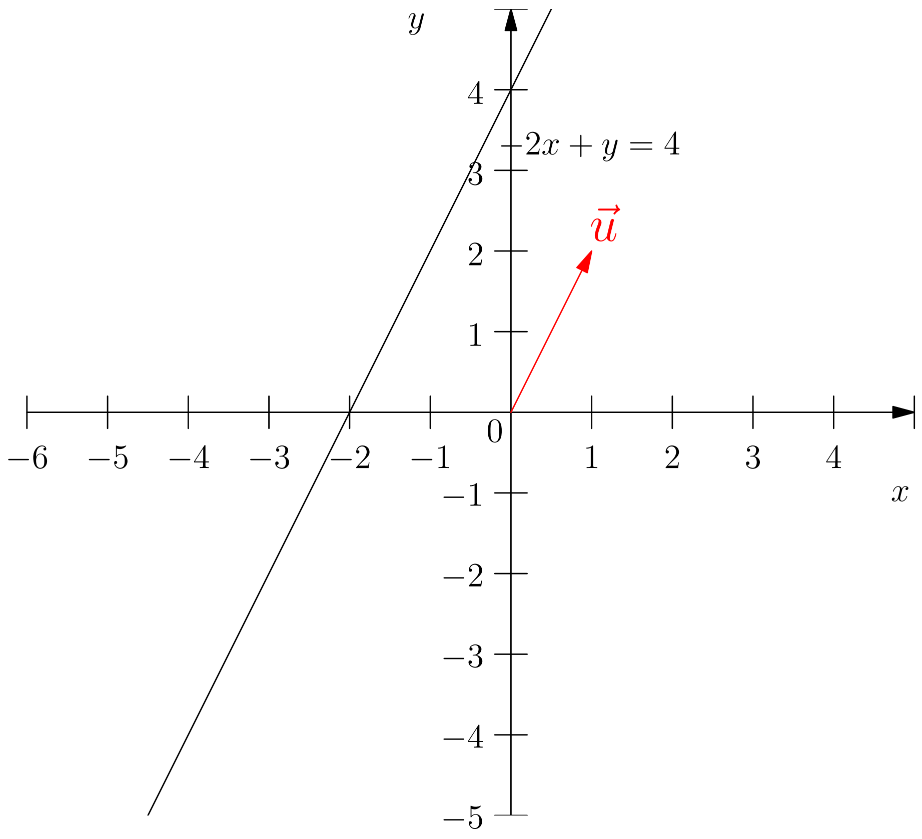


Figure 5.4 – Exercice 3

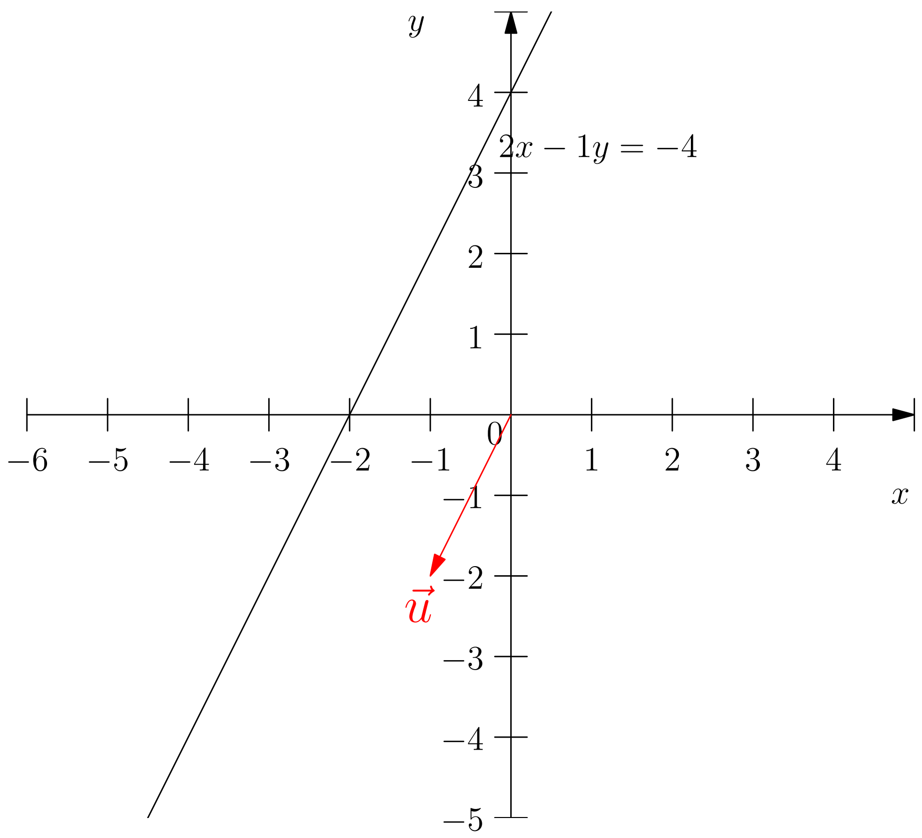


Figure 5.5 – Exercice 4

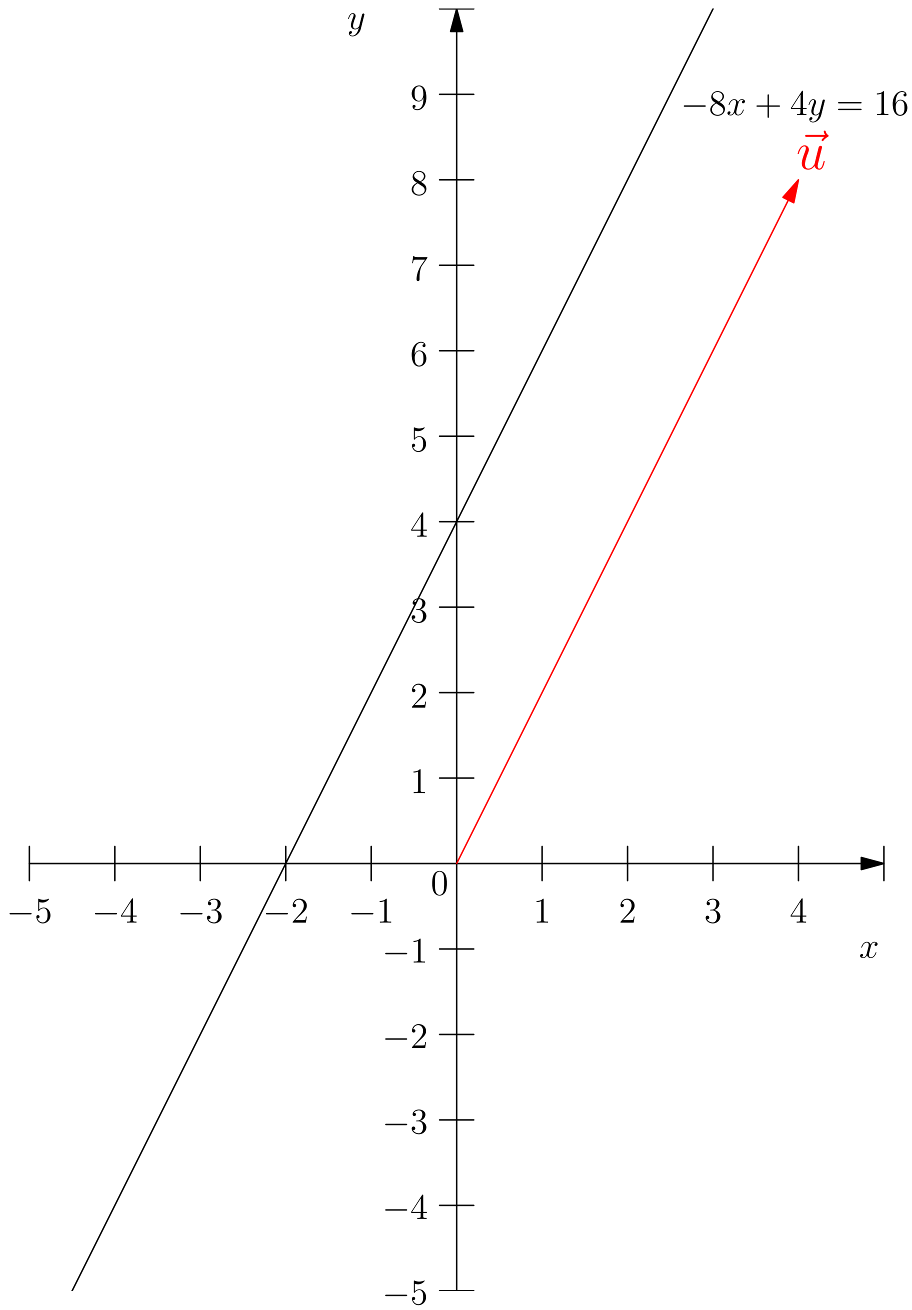


Figure 5.6 – Exercice 5

Question 17

Montrer que les équations suivantes :

1. $-2x + y = 4$
2. $2x - y = -4$
3. $-8x + 4y = 16$

sont équivalentes. Ces équations correspondent aux exercices 3, 4 et 5. La manipulation vue plus haut n'est pas exactement la manipulation attendue ici.

Reponse 7

Pour passer de la première équation à la seconde, on a multiplié par -1, en effet :

$$\begin{gathered} -2x + y = 4 \\ (-1) \times (-2)x + (-1) \times y = (-1) \times 4 \\ 2x - y = -4 \end{gathered}$$

et voilà le travail.
Pour passer de la deuxième équation à la troisième, on a multiplié par -4.

$$\begin{gathered} 2x - y = -4 \\ (-4) \times 2x - (-4)y = (-4) \times (-4) \\ -8x + 4y = 16 \end{gathered}$$

Question 18

Quelle a été la multiplication effectuée de chaque coté pour passer de l'équation 3 à l'équation 2 ?

5.3 Déterminant de deux vecteurs directeurs.

Proposition 9

Deux droites sont parallèles (ou confondues) si et seulement si le déterimant de leur vecteurs directeurs est nul.

Exemple 6

Les équations cartésiennes suivantes :

1. $5x - 3y = 2$
2. $-5x + 3y = -2$

désignent la **même droite** puisque l'on est passé de la première équation à la deuxième en multipliant par -1.

Vous pouvez vérifier que le déterminant des vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est nul, puisque $3 \times 5 - (-3) \times (-5) = 0$. Ici les deux droites sont confondues.

Exemple 7

Les équations cartésiennes suivantes :

1. $4x - 3y = 2$
2. $\frac{5}{3}x - \frac{5}{4}y = 5$

ne sont pas équivalente, mais les vecteurs :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

sont colinéaires. Pour le savoir, on peut vérifier que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
On sait ainsi que les droites sont soit parallèles, soit confondues.
On peut savoir qu'elle ne sont pas confondue en regardant un point qui appartient à l'une et pas à l'autre.
Par exemple, $(2, 2)$ appartient à la première droite d'équation $4x - 3y = 2$ puisque $4 \times 2 - 3 \times 2 = 2$. Le point $(2, 2)$ **n'appartient pas** à la droite d'équation $\frac{5}{3}x - \frac{5}{4}y = 5$.
J'ai représenté les deux droites dans la figure 5.7 qui suit.

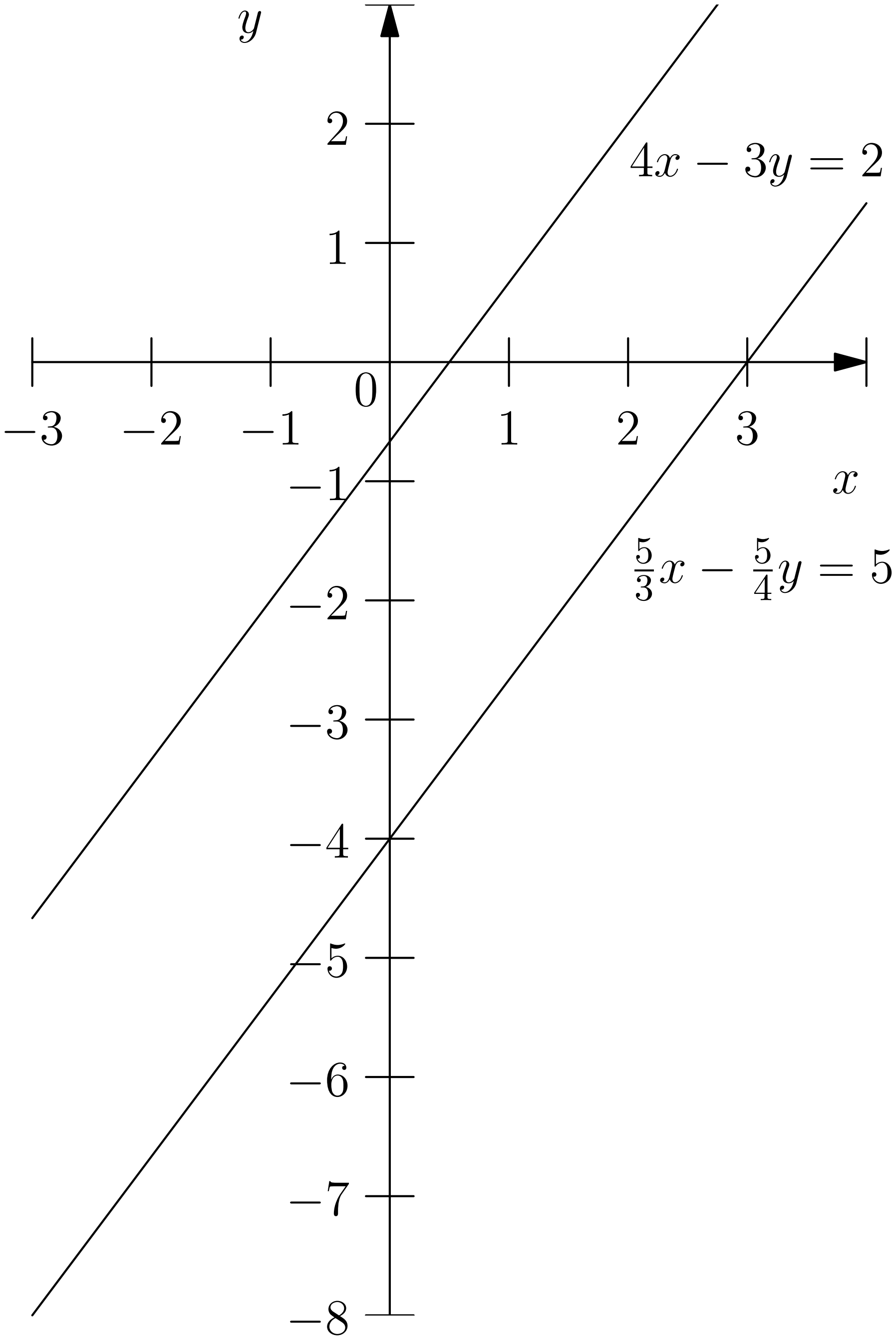


Figure 5.7 – Deux équations telles que le déterminant soit nul, MAIS qui sont pas équivalente. On remarque que les droites sont parallèles.

Question 19

1. Calculer les vecteurs directeurs des droites d'équations :
   a) $4x - 3y = 2$
   b) $\frac{5}{3}x - \frac{5}{4}y = 5$
2. Montrer que le point $(3, 0)$ appartient à la deuxième équation **mais pas** à la première.
3. Montrer que les droites sont parallèles en calculant le déterminant des vecteurs trouvés à la question 1.

6 Trouver un point sur la droite

Dans cette partie, on explique comment trouver un point solution d'une équation cartésienne. Fixons l'équation suivante :

$$3x - 2y = 8$$

Proposition 10

Pour trouver un point (x,y) solution d'une équation cartésienne $ax + by = c$, on peut commencer par **choisir** une valeur de x ou bien **choisir** une valeur de y, puis de résoudre une équation pour trouver la valeur de l'autre point. Cette méthode marche très bien, et peut même être appliquée aux cas particuliers en réfléchissant un peu.

Exemple 8

Si l'on peut choisir une valeur pour x ou bien pour y, autant prendre des valeurs **qui simplifient nos calculs**. On va donc choisir 0.
On rappelle que l'on a l'équation suivante :

$$3x - 2y = 8$$

Choisissons pour x la valeur 0. On obtient alors l'équation :

$$-2y = 8 \quad x = 0 \quad \text{En effet, } 3x = 0 \text{ puisque } x = 0$$

On résout :

$$\begin{aligned} -2y &= 8 & x &= 0 \\ y &= \frac{8}{-2} & x &= 0 \\ y &= -4 & x &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve une solution donnée par $x = 0$ et $y = -4$. Donc, on en déduit un point sur la droite de coordonné $(0; -4)$.

Question 20

Trouver un autre point solution de l'équation $3x - 2y = 8$ en choisissant $y = 0$ cette fois-ci.

7 Représenter une droite à partir d'une équation cartésienne

Dans cette partie, nous allons nous fixer comme objectif de représenter les solutions de l'équation cartésienne suivante :

$$3x - 2y = 8$$

Il existe plusieurs méthodes, que nous allons détailler.

7.1 En utilisant un vecteur directeur, méthode 1

Proposition 11

Pour représenter une droite solution d'une équation cartésienne en utilisant un vecteur directeur :

1. On calcule un vecteur directeur de l'équation cartésienne,
2. puis on trouve un point sur la droite,
3. on part du point trouvé, on suit la direction du vecteur, et le tour est joué.

Exemple 9

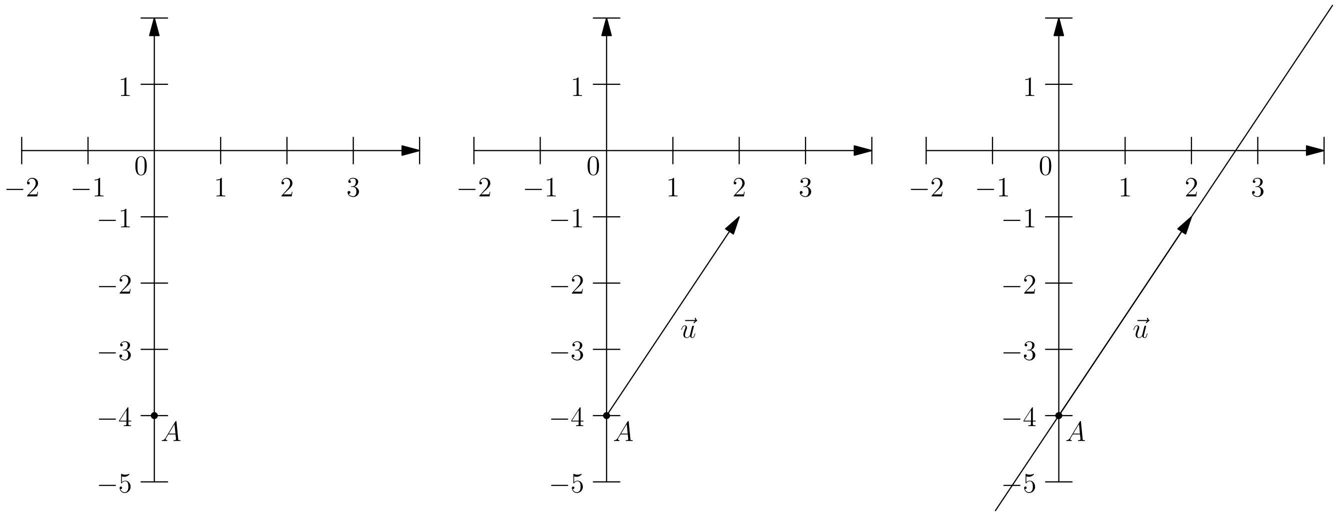
Grâce à une proposition vue précédement, on sait que l'équation :

$$3x - 2y = 8$$

admet comme un vecteur directeur $\vec{u}$ par :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

D'après la section précédente, où nous avons vu comment trouver un point sur une droite, on peut trouver comme point par exemple $A = (0; -4)$.
On peut maintenant représenter la droite. Les étapes sont données en image ci-dessous.



Proposition 12

De gauche à droite dans les images précédentes :

1. je place le point A
2. je place mon vecteur $\vec{u}$ **à partir de** A
3. je prolonge ma droite !

7.2 En trouvant deux points différents, méthode 2

Proposition 13

Deux points différents suffisent pour définir une droite

On peut donc aussi utiliser la section précédente deux fois d'affilés, pour tracer la droite.

Exemple 10

On savait que le point $A = (0; -4)$ appartenait à la droite d'équation $3x - 2y = 8$, donc il nous faut trouver un autre point. On a le choix !

— Utiliser $x = 1$, puisque l'on a pris $x = 0$ pour trouver A.

— Utiliser $x = 2$ pour avoir «plus d'espace» pour tracer notre droite,

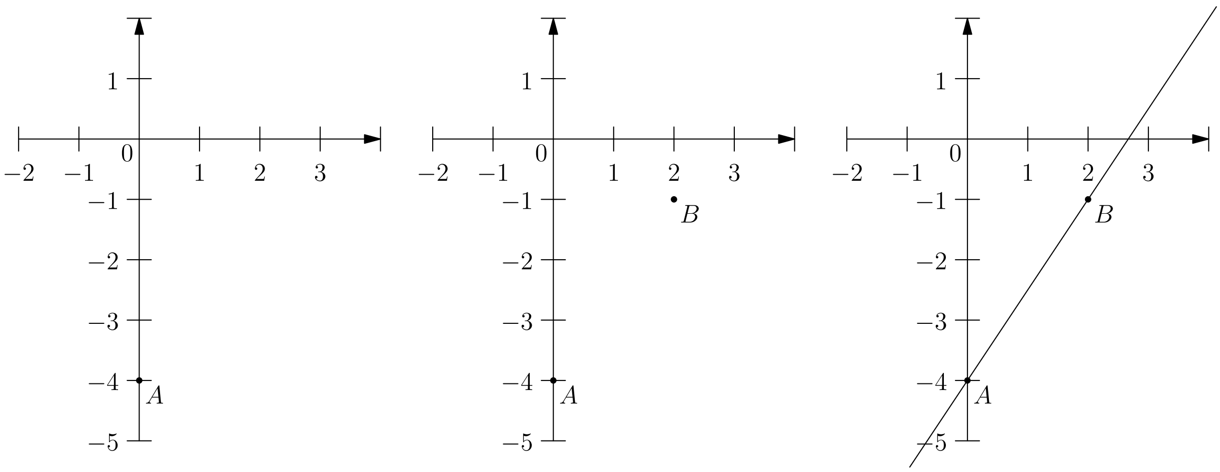
— Ou bien choisir $y = 0$ pour avoir des calculs simplifiées.

— etc.

Ici, je choisis ici de prendre $x = 2$ pour changer. On obtient alors :

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 & x &= 2 \\ 3 \times 2 - 2y &= 8 & x &= 2 \\ 6 - 2y &= 8 & x &= 2 \\ -2y &= 2 & x &= 2 \\ y &= -1 & x &= 2 \end{aligned}$$

On trouve ainsi un deuxième point, que l'on appelle $B = (2; -1)$. On peut ainsi représenter notre droite !



Exemple 11

De gauche à droite :

1. On place le point A,
2. On place le point B,
3. On relit les deux points en prolongeant la droite

7.3 À vous de jouer !

En utilisant la méthode de votre choix, **représentez les droites suivantes sur les carreaux d'une feuille, ou de votre ardoise**. Les solutions sont données à partir de la page suivante.

1. $4x - 5y = 2$

2. $-3x - 5y = 2$
3. $4x + 5y = 2$
4. $4x + 5y = -2$

Question 21

1. Que se passe-t-il lorsque l'on change le signe du paramètre a sans changer celui de b ?
2. Que se passe-t-il lorsque l'on modifie la valeur de c ?

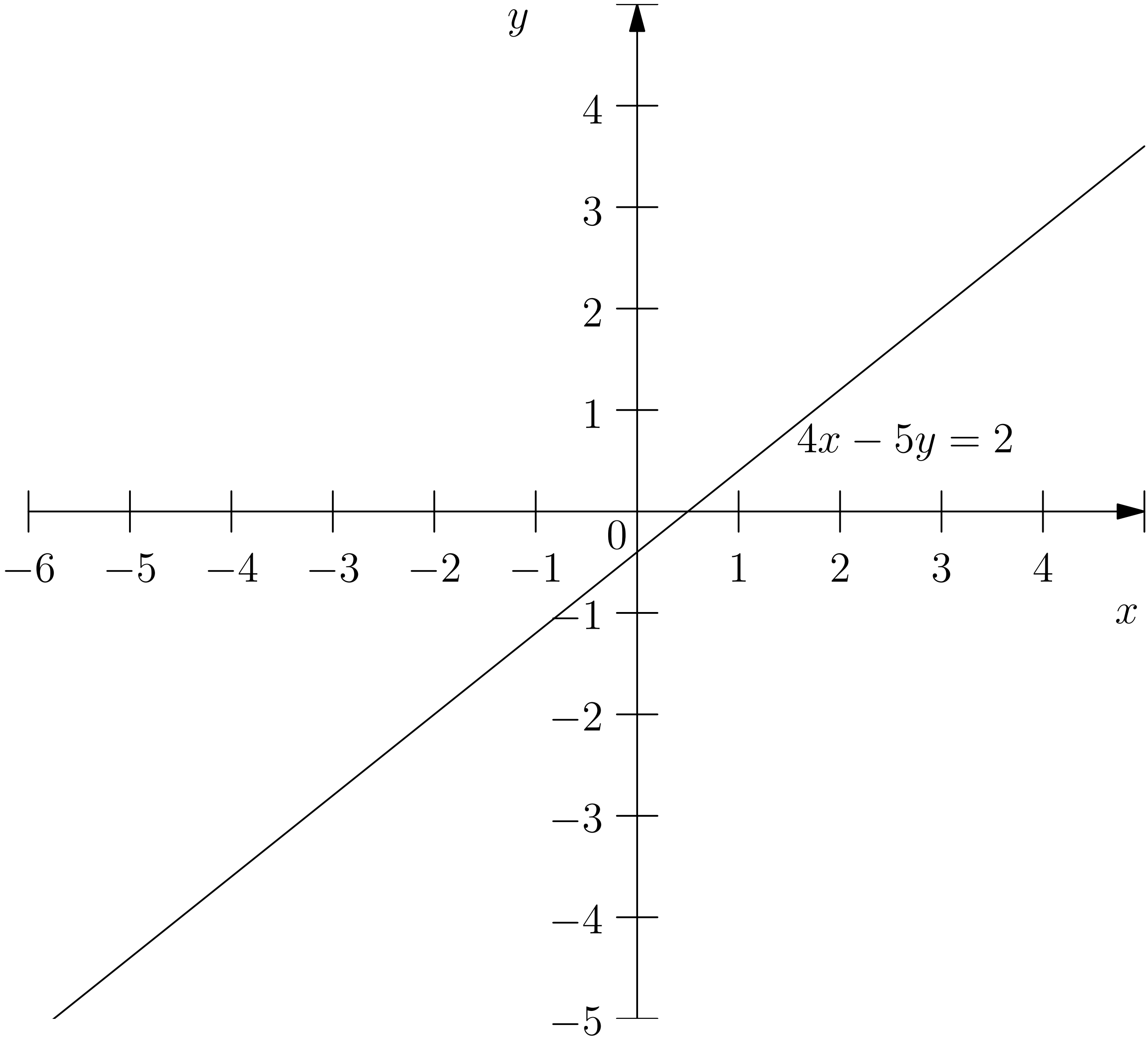


Figure 7.1 – On peut avoir une droite croissante avec $b < 0$, mais ce n'est pas la règle.

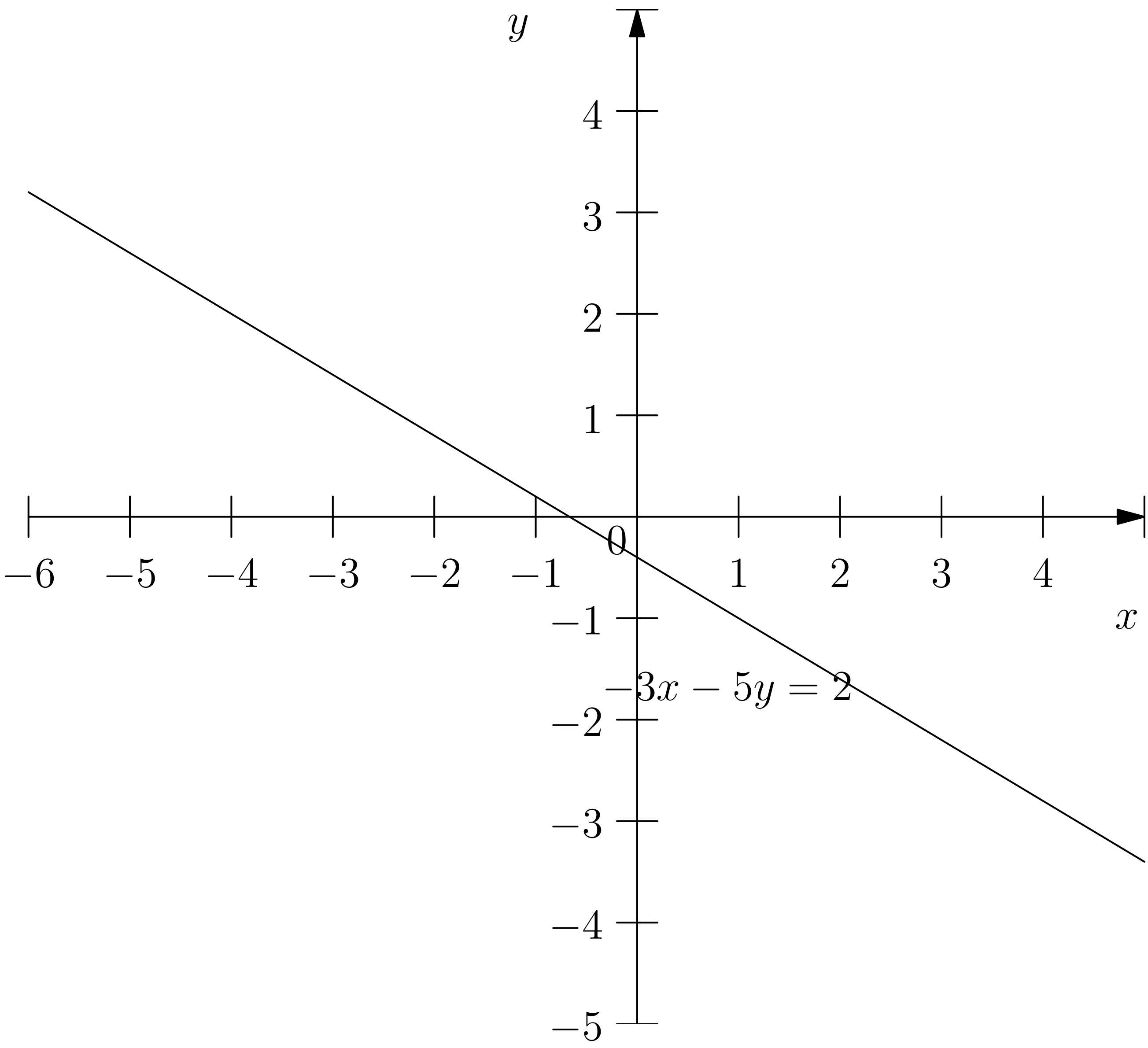


Figure 7.2 – La preuve, ici $b < 0$ mais pourtant la droite est décroissante. En fait la croissance ou non de la droite dépend de a **et** b.

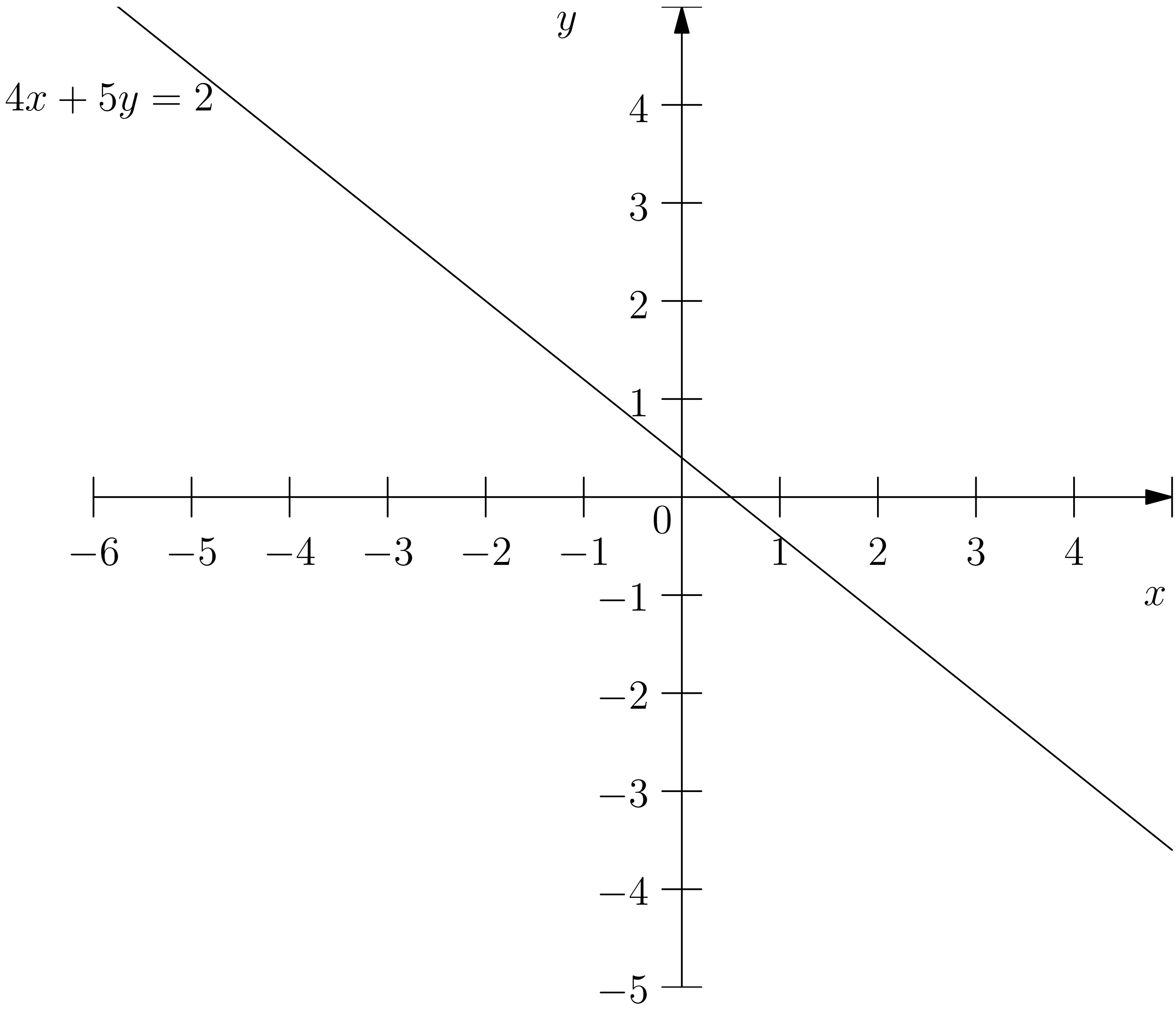


Figure 7.3 – Si on choisit a et b positif, on retrouve encore une droite décroissante (!)

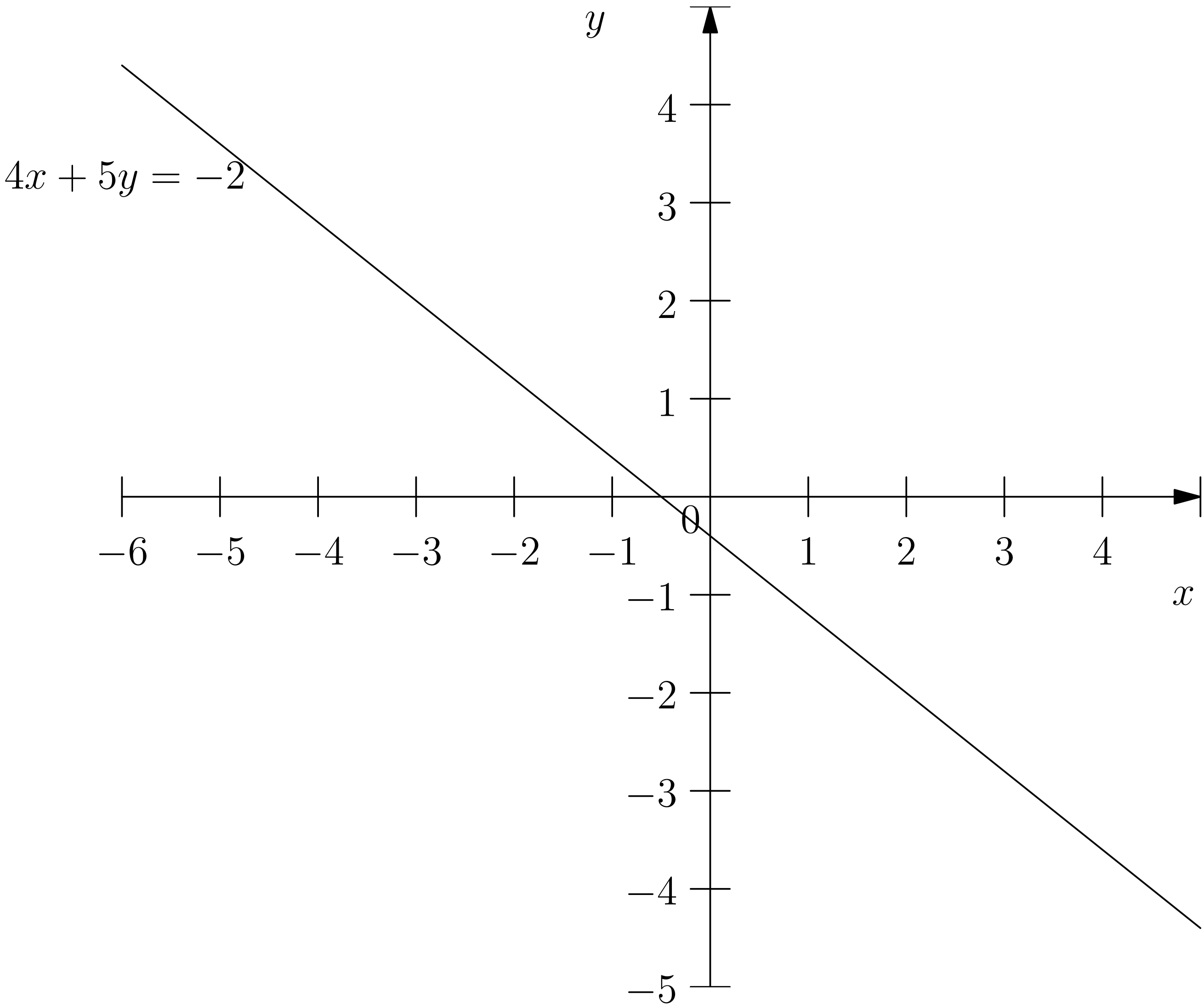


Figure 7.4 – Avez-vous remarqué la différence entre cette droite et la précédente ?

8 Équation réduite d'une équation cartésienne

Définition 5: Équation réduite

Une équation réduite d'une droite est une équation de la forme :

$$y = mx + p$$

C'est la forme d'une fonction affine, avec m le coefficient directeur, et p l'ordonnée à l'origine.

Exemple 12

On a déjà vu plein d'exemple d'équation réduite puisque **toutes fonctions affines correspond à une équation affine**. Donnons quand même des exemples :

1. $y = -3x + 2$
2. $y = 3$
3. $y = 4 - x$

Question 22

Pour chaque équation réduite donnée à l'exemple précédent :

1. redonnez le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.
2. Représentez cette équation sur un graphique en utilisant les techniques issues du cours sur les fonctions affines.

Proposition 14

Toutes équations cartésiennes de la forme :

$$ax + by = c$$

admet une équation réduite de la forme :

$$y = mx + p$$

si et seulement si $b \neq 0$

Exemple 13

Cette proposition se comprend à l'aide d'un exemple. Si on cherche l'équation réduite de l'équation suivante :

$$4x - 3y = 2$$

On peut **manipuler l'équation comme il suit** :

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 2 \\ -3y &= -4x + 2 \\ y &= \frac{-4}{-3}x + \frac{2}{-3} \\ y &= \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ainsi, l'équation $4x - 3y = 2$ admet comme équation réduite $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$. On trouve ainsi $m = \frac{4}{3}$ et $p = -\frac{2}{3}$.

Question 23

Justifiez chaque manipulation dans l'exemple précédent.

Question 24

Quelle est la forme réduite de l'équation $5x + 3y = 1$?

Question 25

Pourquoi faut-il absolument que $b \neq 0$ dans la proposition précédente ?

9 Trouver l'équation cartésienne d'une droite passant par deux points

Dans cette partie, nous allons montrer comment déterminer une équation cartésienne d'une droite passant par deux points dont les coordonnées sont connues.
Cette section a été écrite uniquement autour d'un exemple, puisque les formules théoriques ne nous intéressent pas.
On choisit les deux points suivants dans le plan :

— $A(5;3)$

— $B(7;2)$

L'objectif est de trouver **une** équation cartésienne de la droite (AB).
Voici la proposition qui nous permet de trouver une équation cartésienne :

Proposition 15

Un point $M(x;y) \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BM}$. Ainsi nous avons l'équivalence entre les propositions suivantes :

1. $M(x;y) \in (AB)$
2. $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BM}) = 0$
3. $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}) = 0$
4. $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{MA}) = 0$
5. $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{MB}) = 0$

Cette proposition est illustrée à la figure 9.1.

Remarque 3

Quel calcul prendre ? C'est simple : il faut un vecteur que l'on connaisse parfaitement (ici $\overrightarrow{AB}$) et un que l'on ne connait pas (ici, par exemple, $\overrightarrow{BM}$). Ensuite, l'ordre des points n'a aucune importance, ni même l'ordre des vecteurs dans le calcul du déterminant.

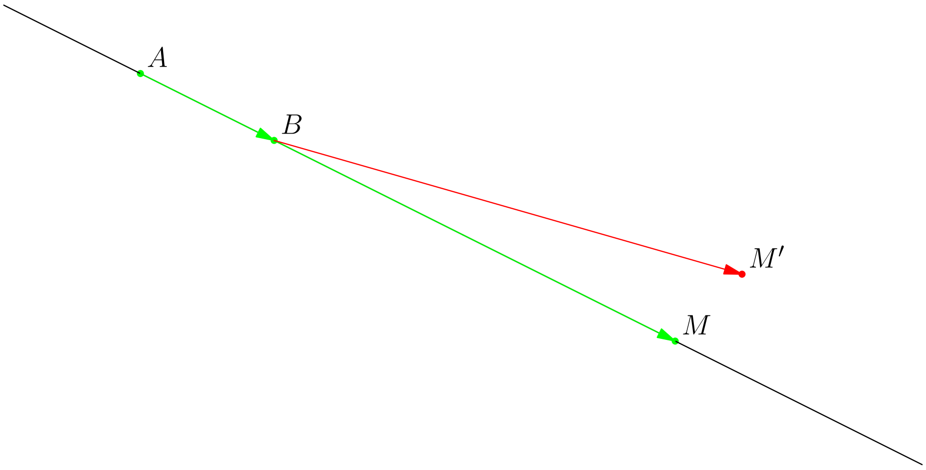


Figure 9.1 – On a $M \in (AB)$ mais $M' \notin (AB)$

Question 26

D'après la figure 9.1 quels sont les déterminants ci-dessous qui sont nuls ?

1. $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})$
2. $\det(\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{BM'})$
3. $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BM})$
4. $\det(\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{M'M})$

Exemple 14

On calcule alors une équation cartésienne de (AB) comme il suit. On rappelle que :

— $A(5;3)$

— $B(7;2)$

Soit $M(x;y)$ un point du plan. M est sur la droite (AB) si et seulement si

$$\text{det}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}) = 0.$$

Or,

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-5 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} x-7 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

(on utilise deux fois la formule du deuxième bus «moins» le premier !)
On cherche tous les x, y tels que det$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BM}) = 0$, or :

$$\text{det}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}) = 2 \times (y-2) + (x-7) \times (-1)$$

ainsi une équation cartésienne de (AB) est donnée par :

$$2 \times (y-2) - (x-7) \times (-1) = 0$$

Que l'on peut simplifier comme il suit :

$$\begin{aligned} 2 \times (y-2) - (x-7) \times (-1) &= 0 \\ 2y - 4 + x - 7 &= 0 \\ 2y + x - 11 &= 0 \\ x + 2y - 11 &= 0 \\ x + 2y &= 11 \end{aligned}$$

L'équation finalement retenue est la suivante :

$$M(x,y) \in (AB) \text{ si et seulement si } x + 2y = 11$$

Remarque 4

Attention aux calculs, une erreur au début et tout est à refaire ! Prenez le temps de vérifiez vos calculs (plusieurs fois) !

Question 27

Vérifiez que $A(5;3)$ et $B(7;2)$ appartiennent bien à la droite d'équation cartésienne :

$$x + 2y = 11$$

Remarque 5

Cette question permet de vérifier vos calculs ! Si l'un de vos deux points n'appartient pas à votre droite, c'est que vous vous êtes trompé quelque part !

Question 28

En utilisant l'équation cartésienne de (AB) :

$$x + 2y = 11$$

Montrer que les points $M(9;1)$, $A(5;3)$ et $B(7;2)$ sont alignés.

Question 29

Que fait le programme python 2 ?

```python
def estSurDroiteAB(x, y) :
    if x + 2*y == 11 :
        print("Est sur la droite")
    else :
        print("N'est pas sur la droite")

estSurDroiteAB(9,1)
```

Listing 2: Un programme qui pourrait vous aider

Question 30

Par la méthode donnée dans cette section, donner une équation cartésienne de droite qui passe par les points :

1. $C(5;5)$ et $D(7;9)$,
2. $E(4;-3)$ et $F(7;-2)$,
3. $G(0{,}5;10)$ et $H(3;5)$.

10 Intersection de deux droites

Si vous êtes ici, c'est que vous savez représenter à la perfection une droite à partir d'une équation cartésienne.
Il s'agit de trouver le(s) point(s) en commun entre deux droites, s'il en existe !

10.1 Définition

Définition 6: Système d'équation

Un système d'équation correspond à deux (ou plus) équation qu'il faut résoudre **simultanément**.

Exemple 15

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y & = 2 \\ 4x + 5y & = 5 \end{cases}$$

revient à trouver toutes les solutions (x,y) telles que : $3x + 2y = 1$ **et** $4x + 5y = 5$.
Par exemple, ici, $x = 0$ et $y = 1$ est solution du système puisqu'on a :

$$3 \times 0 + 2 \times 1 = 2$$

et aussi :

$$4 \times 0 + 5 \times 1 = 5$$

Question 31

Montrer que $x = 3$ et $y = -3{,}5$ **n'est pas** solution du système :

$$\begin{cases} 3x + 2y & = 2 \\ 4x + 5y & = 5 \end{cases}$$

Question 32

Montrer que $x = 4$ et $y = 2$ est bien solution du système :

$$\begin{cases} 3x + 5y & = 22 \\ -3x + 2y & = -8 \end{cases}$$

10.2 Solution d'un système

Proposition 16

Déterminer l'intersection de deux droites d'équation $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ revient à résoudre un **système d'équation** :

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{cases}$$

Proposition 17

Un système d'équation cartésienne peut admettre :

1. aucune solution,
2. une seule solution
3. une infinité de solution.

Exemple 16

Le système suivant :

$$\begin{cases} x + y &= 4 \\ x + y &= 5 \end{cases}$$

n'admet évidemment pas de solution.

Proposition 18

Un système d'équation cartésienne n'admet pas de solution si et seulement si les droites qui admettent ces équations sont **parallèles** (non confondues).

Proposition 19

Un système d'équation cartésienne n'admet qu'une seule solution si et seulement si les droites qui admettent ces équations s'intersectent en un seul point.

Proposition 20

Un système d'équations cartésienne admet une infinité de solution si les droites qui admettent ces équations sont les mêmes. Autrement dit les équations sont équivalentes.

Proposition 21

Soit le système d'équation :

$$\left\{ \begin{array}{ll} ax + by & = c \\ a'x + b'y & = c' \end{array} \right.$$

Ce système admet une unique solution si et seulement si :

$$\text{det}\left(\left(\begin{array}{c} a \\ a' \end{array} \right) ; \left(\begin{array}{c} b \\ b' \end{array} \right) \right) \neq 0$$

Sinon, le système admet soit une infinité de solutions, soit aucune.
Rappel :

$$\text{det}\left(\left(\begin{array}{c} a \\ a' \end{array} \right) ; \left(\begin{array}{c} b \\ b' \end{array} \right) \right) = a \times b' - a' \times b$$

Exemple 17

Le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3x + 2y & = 1 \\ 8x + 2y & = 3 \end{array} \right.$$

admet une et une unique solution parce que $3 \times 2 - 8 \times 2 = 6 - 16 = -10 \neq 0$.

Exemple 18

Le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 5x + 3y & = 1 \\ 10x + 6y & = 3 \end{array} \right.$$

n'admet pas une unique solution. En effet $5 \times 6 - 3 \times 10 = 30 - 30 = 0$. Pour savoir si les deux droites sont parallèles ou confondues, il faut utiliser une méthode vue déjà vue précédement.

10.3 Résolution d'un système

Je vous montre comment résoudre un système en vidéo !
Je résous le même système dans le cours que sur la vidéo. Vous pouvez donc choisir de suivre selon le média que vous préférez, et comparer.
Voici le lien de la vidéo (il n'y a pas de son) : `https://peertube.monlycee.net/w/gU6GcoYPERJAk5AML`
et voici un QR code qui vous mène directement au lien :

10.3.1 Méthode des combinaisons

Définition 7: La méthode par combinaisons

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre un système d'équations comme les notre. Celle que je vous recommande est la méthode par combinaisons. Le principe est de combiner chaque ligne dans le but **d'éliminer une variable** (soit x, soit y) et de revenir à une équation plus simple à résoudre.

J'explique cette méthode à travers la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y &= 1 \\ 8x + 2y &= 3 \end{cases}$$

On s'est déjà assuré plus haut que ce système admettait des solutions en calculant un déterminant. Maintenant nous allons trouver l'unique couple de valeurs (x, y) qui est solution de ce système.

Exemple 19

On donne un nom à chaque ligne du système. Souvent, on les appelle L_1 et L_2. Ici, on a donc :

$$\begin{cases} (L_1) & 3x+2y &= 1 \\ (L_2) & 8x+2y &= 3 \end{cases}$$

Quand on écrit $8 \times (L_1)$ on désigne la première équation multipliée par 8. Autrement dit :

$$8 \times (L_1) \iff 8 \times (3x+2y) = 8 \times 1$$

Vous allez comprendre **pourquoi on multiplie cette ligne par** 8 **un peu plus tard**. On obtient ainsi en **distribuant** la multiplication par 8 :

$$8 \times (L_1) \iff 24x + 16y = 8$$

Maintenant, nous allons calculer $3 \times (L_2)$. Vous allez comprendre pourquoi dans un instant :

$$3 \times (L_2) \iff 3 \times (8x+2y) = 3 \times 3$$

ce qui correspond à :

$$3 \times (L_2) \iff 24x + 6y = 9$$

Le système que l'on obtient actuellement est le suivant :

$$\begin{cases} 8 \times (L_1) & 24x+16y &= 8 \\ 3 \times (L_2) & 24x+6y &= 9 \end{cases}$$

Question 33

Que remarquez vous ? Avez-vous compris pourquoi faut-il multiplier la première ligne par 8 et la deuxième par 3 ?

Exemple 20

On constate que le coefficient devant x est le même dans les deux lignes. On peut donc calculer $8 \times (L_1) - 3 \times (L_2)$ pour **enlever la variable** x de nos calculs. Voici ce que cela donne :

$$8 \times (L_1) - 3 \times (L_2) \iff (24x + 16y) - (24x + 6y) = 8 - 9$$

On enlève les parenthèses, en faisant attention aux changements de signe provoqués par le $-$:

$$8 \times (L_1) - 3 \times (L_2) \iff 24x + 16y - 24x - 6y = 8 - 9$$

Et on simplifie les expressions :

$$8 \times (L_1) - 3 \times (L_2) \iff 16y - 6y = -1$$

Pour finalement obtenir :

$$8 \times (L_1) - 3 \times (L_2) \iff 10y = -1$$

et donc $10y = -1$ implique $y = \frac{-1}{10} = -0{,}1$. On a réussi à trouver la valeur de y !

Question 34

Après une courte pause bien méritée, revenez sur ces calculs, et assurez vous d'avoir compris toutes les étapes. Il reste une dernière partie, qui est la plus facile.

Exemple 21

Maintenant que l'on sait que $y = -0{,}1$, on peut revenir à notre système de départ :

$$\begin{cases} (L_1) & 3x + 2y &= 1 \\ (L_2) & 8x + 2y &= 3 \end{cases}$$

Choisir ensuite **soit la première ligne, soit la deuxième** pour remplacer y par $-0{,}1$. Moi je vais choisir la première mais vous pouvez choisir la deuxième. J'effectue mon remplacement :

$$3x + 2y = 1 \quad \text{devient} \quad 3x + 2 \times (-0{,}1) = 1$$

Et je résous l'équation ainsi obtenue :

$$\begin{aligned} 3x - 0{,}2 &= 1 \\ 3x &= 1 + 0{,}2 \\ 3x &= 1{,}2 \\ x &= \frac{1{,}2}{3} \\ x &= 0{,}4 \end{aligned}$$

On obtient ainsi la valeur de $x = 0{,}4$.
En conclusion, la seule solution (x, y) du système

$$\begin{cases} (L_1) & 3x + 2y &= 1 \\ (L_2) & 8x + 2y &= 3 \end{cases}$$

est :

$$\begin{cases} x &= 0{,}4 \\ y &= -0{,}1 \end{cases}$$

Remarque 6

La seule manière d'apprendre, c'est de suivre avec un crayon ce que j'ai fait, de réfléchir aux étapes de calculs, puis de s'entraîner sur des exercices.

Question 35

Comment vérifier nos solutions d'après la figure 10.1 ?

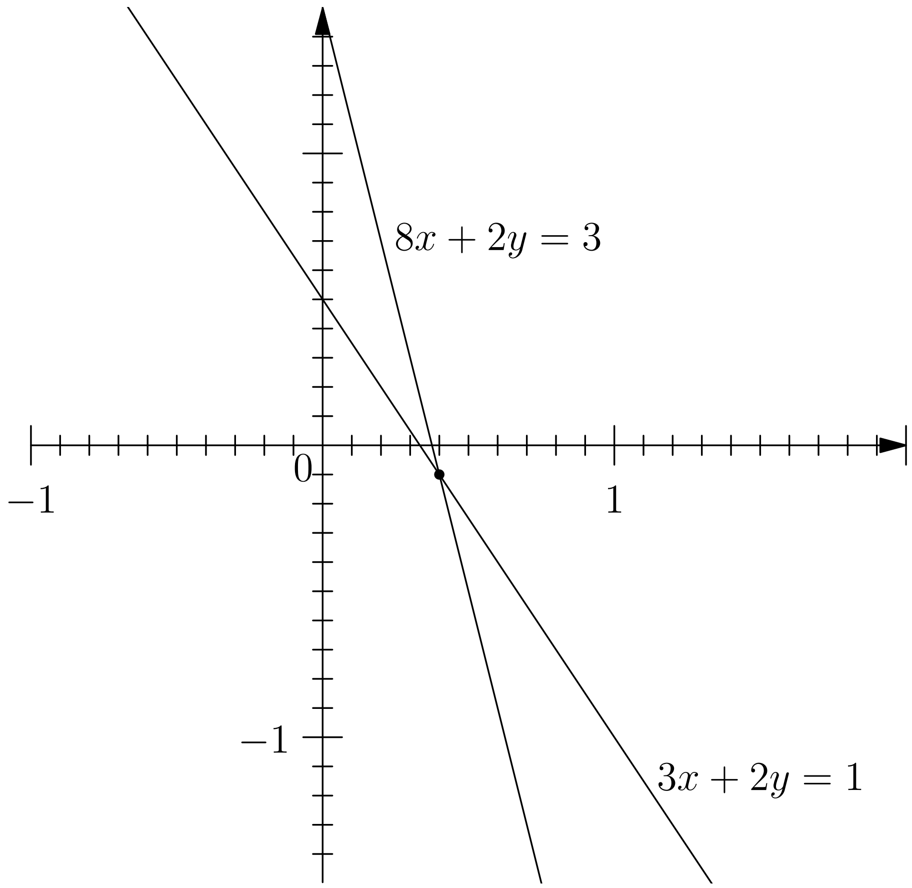


Figure 10.1 – On peut vérifier que les droites s'intersectent au point de coordonnées $(0{,}4; -0{,}1)$