L'arithmetique

1 Multiples et diviseurs d'un nombre entier.

Définition 1: Multiples d'un nombre entier

Soit n un nombre entier. Alors, on appelle *multiple* de n tous les nombres de la forme $kn = k \times n$ avec k un nombre entier relatif.

Exemple 1

On peut représenter l'ensemble des multiples d'un nombre à l'aide de la représentation ci-dessous.
Ici, vous avez un aperçu des multiples de 4.

$\cdots$	-20	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16	20	$\cdots$
$\cdots$	$4\times(-5)$	$4\times(-4)$	$4\times(-3)$	$4\times(-2)$	$4\times(-1)$	4×0	4×1	4×2	4×3	4×4	4×5	$\cdots$

Question 1

1. Peut-on dire que l'ensemble des multiples d'un nombre correspond aux tables de multiplication de ce nombre ?
2. Combien un nombre admet-il de multiples ?
3. Donner la «bande des multiples» de 3. Rappelez le critère rapide qui permet de savoir si un nombre est divisible par 3 ou non.
4. Donner la «bande des multiples» de 6. Y'a-t-il des éléments en commun avec la bande des multiples de 3 ? Pourquoi ?

Proposition 1

Seul 0 est multiple de tous les nombres entiers.

Démonstration 1

C'est le seul qui est présent dans toute les «bandes» de nombres qui correspond aux multiples.

Définition 2: Diviseurs d'un nombre entier

Soit n un nombre entier. Alors un diviseur de n est un nombre d tel que n est un multiple de d.

Exemple 2

les diviseurs des nombres dans les bandes du multiples sont présent dans la seconde ligne de la bande. regardez les multiples de 23 par exemple.

$\cdots$	-115	-92	-69	-46	-23	0	23	46	69	92	115	$\cdots$
$\cdots$	$23\times(-5)$	$23\times(-4)$	$23\times(-3)$	$23\times(-2)$	$23\times(-1)$	23×0	23×1	23×2	23×3	23×4	23×5	$\cdots$

Exemple 3

On peut lire par exemple que -115 est un multiple de -5 (mais aussi de 23).

Proposition 2

On voit donc que le terme **multiple** et **diviseur** sont en dualité. L'un est lié à l'autre, et le point de vue est inversé. Il faut prendre le temps d'utiliser ce vocabulaire.

Exemple 4

On représentera l'ensemble des diviseurs positifs d'un nombre à l'aide de la boite de la figure 1 dans le cours. Par exemple, voici la liste des diviseurs de 30.

30
$1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 30$

Figure 1 – Liste des diviseurs de 30

Question 2

À partir de la situation $23 \times 4 = 92$, faites une pharse qui contient le mot :

1. «multiple»
2. «diviseur»

(vous ferez donc deux phrases différentes).

Proposition 3

L'entier 1 est le seul diviseur positif de tous les nombres.

Démonstration 2

Tout nombre n peut s'écrire $n = n \times 1$, donc 1 est un diviseur de n.

Question 3

1. Faites la liste des diviseurs de 25 (il faut aussi compter les diviseurs négatifs).
2. De même pour 26.
3. Que peut-on dire des nombres qui admettent exactement trois diviseurs positifs ?

Question 4

Quelle est le nombre minimum de diviseurs que peut admettre un nombre entier ?

2 PGCD, PPCM.

2.1 Plus grand diviseur commun

Définition 3: PGCD : plus grand diviseur commun

Soit a et b deux nombres entiers positifs. On considère les listes respectives des diviseurs de a et des diviseurs de b. On définit $\text{pgcd}(a, b)$ par le plus grand diviseurs qui est présent dans la liste des diviseurs de a et dans la liste des diviseurs de b.

Exemple 5

Le plus grand diviseur commun de 42 et 54 est 6, puisque c'est le plus grand nombre commun aux deux listes des diviseurs de 42 et 36.

54
1 2 3 6 9 18 27 54

42
1 2 3 6 7 14 21 42

2.2 Plus petit commun multiple

Définition 4: PPCM : plus petit commun multiple

Soit a et b deux nombres entiers positifs. On considère la bande de multiple (positif), et on définit ppcm(a,b) par le plus petits multiples commun entre les deux.

Question 5

Soit a et b deux nombres entiers positifs. Montrer alors que $a \times b$ est un multiple commun de a et b.

Exemple 6

Prenons 6 et 15, et regardons leur multiple. Peux-tu montrer que $\text{ppcm}(6, 15) = 30$?

$\cdots$	-30	-24	-18	-12	-6	0	6	12	18	24	30	$\cdots$
$\cdots$	$6 \times (-5)$	$6 \times (-4)$	$6 \times (-3)$	$6 \times (-2)$	$6 \times (-1)$	6×0	6×1	6×2	6×3	6×4	6×5	$\cdots$

$\cdots$	-75	-60	-45	-30	-15	0	15	30	45	60	75	$\cdots$
$\cdots$	$15 \times (-5)$	$15 \times (-4)$	$15 \times (-3)$	$15 \times (-2)$	$15 \times (-1)$	15×0	15×1	15×2	15×3	15×4	15×5	$\cdots$

3 Division euclidienne.

3.1 Division euclidien : quotient et reste

Proposition 4

Soit $a > b$ deux nombres entiers naturels positifs.
Alors, il existe un unique couple d'entiers positifs q et r tel que

1. $a = bq + r$
2. $0 \leq r < b$

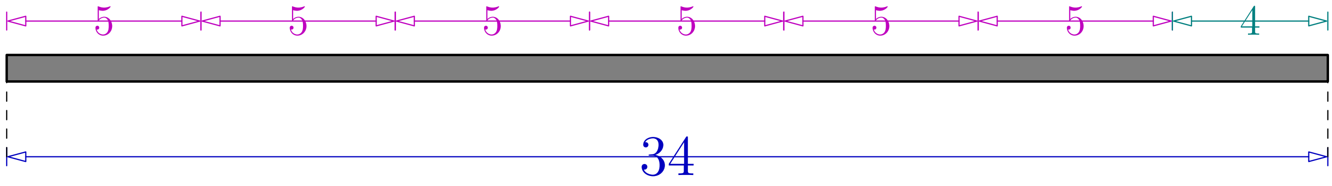
Définition 5: Reste de la division euclidienne

Dans la proposition précédente, on appelle q le *quotient* et r le *reste* de la division euclidienne de a par b.

Exemple 7

Regarde l'image suivante, et explique pourquoi si on prend $a = 34$ et $b = 5$ on obtient $q = 6$ et $r = 4$.
En effet, $34 = 5 \times 6 + 4$. On dit donc que le reste de la division euclidienne de 34 par 5 est 4.

Division euclidienne de 34 par 5



Question 6

1. Quelle est le reste de la division euclidienne de 340 par 50 ?
2. Quelle est le reste de la division euclidienne de 134 par 5 ?
3. Quelle est le reste de la division euclidienne de 35 par 5 ?

Proposition 5

Le reste d'une division euclidienne de a par b est nul **si et seulement si** b divise a.

Exemple 8

Voici un exemple avec $a = 40$ et $b = 5$, on voit que le reste est nul, et ainsi on a bien 5 qui divise 40, ou dit autrement, 40 est un multiple de 5.

Division euclidienne de 40 par 5

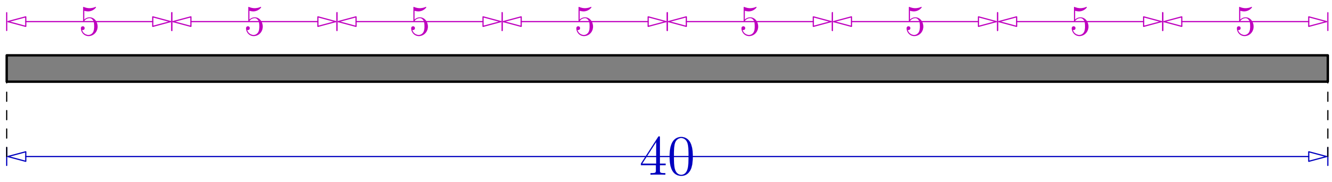


Figure 2 – 5 divise bien 40 car la division euclidienne de 40 par 5 a un reste nul.

Exemple 9

Réciproquement, si le reste d'une division euclidienne de a par b n'est pas nul, alors b ne divise pas a.
Prenons $a = 2341$ et $b = 301$ pour le voir sur la figure 3. Le reste (ici, $r = 234$) n'est pas nul, donc 301 ne divise pas 2341.

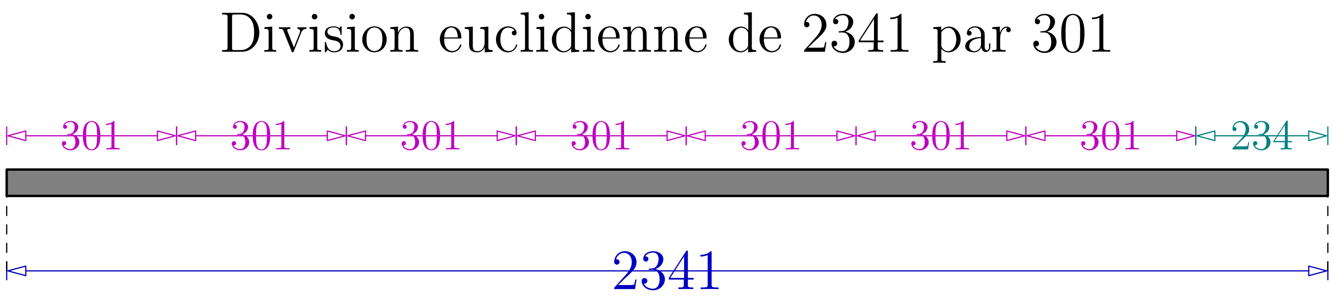
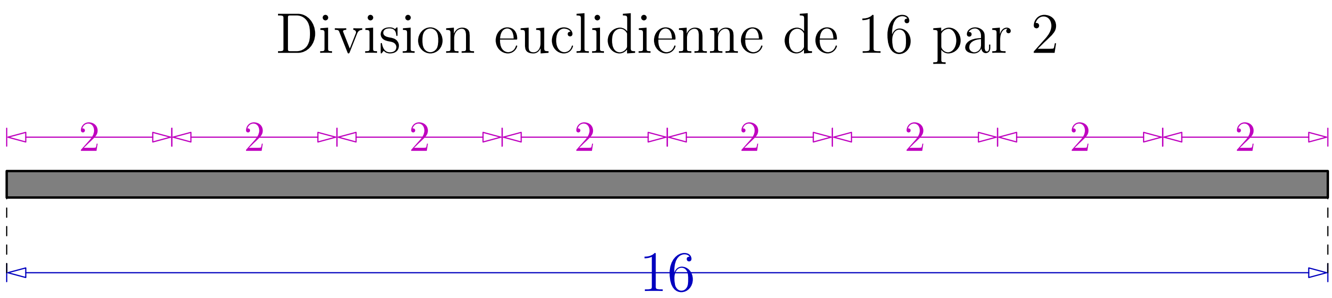


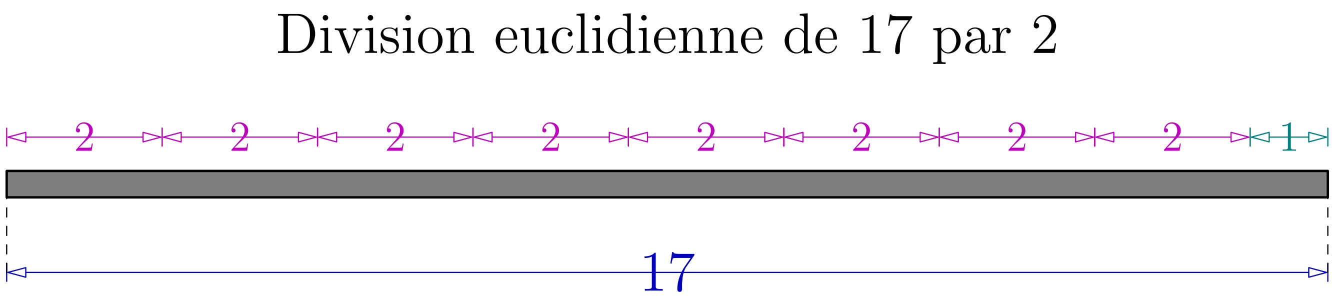
Figure 3 – 301 ne divise pas 2341

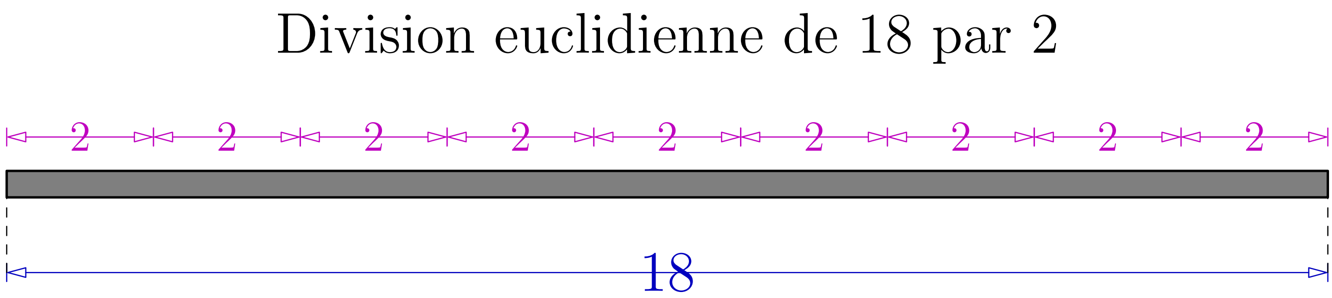
> **Question 7**
>
> Expliquer sans trop d'efforts pourquoi $2341 - 234 = 2107$ est divisible par 301 !

3.2 Division euclidienne par 2

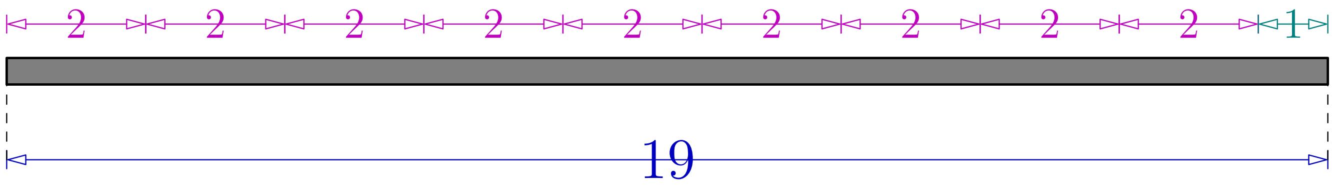
Regarde attentivement ces exemples :







Division euclidienne de 19 par 2



On peut montrer la proposition suivante :

Proposition 6

Un nombre est pair si et seulement si le reste de sa division euclidienne par 2 vaut 0. Si le reste de la division euclidienne d'un nombre par 2 vaut 1, alors ce nombre est impair, et réciproquement.

On peut reformuler cela par la proposition suivante :

Proposition 7

Pour tout nombre pair n, il existe k tel que :

$$n = 2k$$

De même, pour tout nombre impair, il existe k tel que :

$$n = 2k + 1$$

Question 8

1. Quel est le lien entre les deux propositions précédentes ?
2. Est-ce que le nombre $2 \times (53) + 4$ est pair ?
3. Est-ce que le nombre $2(n + 1)$ est pair, sachant que n est un entier positif ?
4. Si n est un entier pair, est-ce que $n + 4$ l'est aussi ? Montrer cela à l'aide de la proposition précédente.
5. Si n est un entier quelconque, quelle est la parité du nombre $n(n + 1)$?

4 Nombres premiers.

Définition 6: Nombres premiers

Un nombre entier strictement plus grand que 1 est dit premier si et seulement si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui même.

Exemple 10

D'après les liste de diviseurs ci-dessous, quels sont les nombres qui sont premiers parmi 245, 109, 1427 et 110 ?

245					
1	5	7	35	49	245

109	
1	109

1427	
1	1427

110							
1	2	5	10	11	22	55	110

Proposition 8

Tout nombre entier admet une unique décomposition en facteur premier.

Exemple 11

Soit le nombre 264. Alors, sa décomposition en nombre premier est :

$$264 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 11 = 2^3 \times 3 \times 11$$

Question 9

1. Trouver la décomposition de 245, de 352 et 1000.
2. Pourquoi la décomposition de 24 n'est pas $24 = 6 \times 4$?
3. Est-ce que 1 est un nombre premier ?
4. Regarde la figure 4. Que peut-on dire des diviseurs qui apparaissent dans la liste et de la décomposition en nombre premier de 265 ?

265			
1	5	53	265

Figure 4 – Liste des diviseurs de 264