Les statistiques descriptives

Table des matières

1 Vocabulaire

Définition 1: Série

Une série statistique est la compilation de plusieurs nombres représentant un même phénomène.

Question 1

1. Citer différentes séries statistique que vous pouvez mesurer devant vous.
2. Même question, mais cette fois-ci imaginez vous à la place de l'entreprise Google : quelle série statistique cette entreprise peut-elle mesurer. À votre avis quelle est la taille de cette série ?

Les séries sont souvent gigantesques, c'est pourquoi on utilise des **indicateurs** qui permettent de les résumer.

Définition 2: Indicateur statistique

Un indicateur statistique est un calcul, à effectuer sur une série, qui permet de résumer l'information contenue dans cette série.
Il existe plusieurs types d'indicateurs : les indicateurs de position, et les indicateurs de dispersion.

1. Un indicateur de position d'une série donne un nombre qui situe l'ensemble de la série.
2. Un indicateur de dispersion est sensible à la dispersion de la série, c'est-à-dire à quel point il y a un écart entre les nombres qui constituent la série.

Exemple 1

La moyenne est un indicateur ! C'est d'ailleurs le premier que l'on va voir.

Question 2

À votre avis, la moyenne est un indicateur de position ou de dispersion ?

Définition 3: Effectif

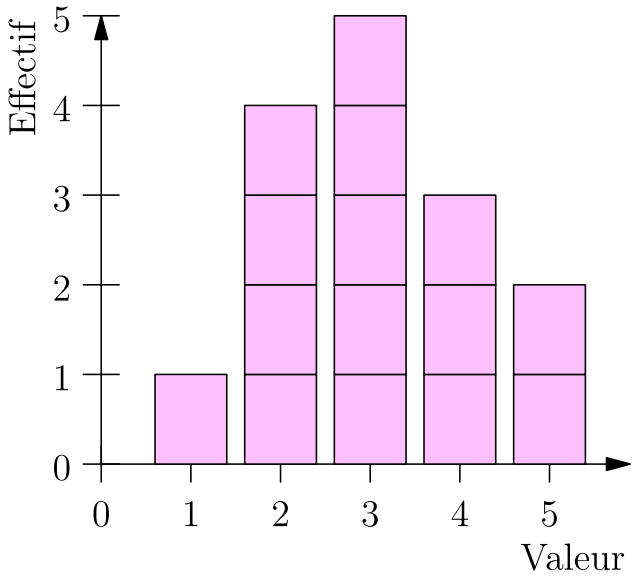
L'effectif de la série correspond au nombre d'occurrence d'une donnée dans la série, c'est-à-dire au nombre de fois où elle est répétée.

La série statistique suivante :

$$x = (1; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 5; 5)$$

peut se représenter par un tableau ou bien un histogramme.

(x_i)	Effectifs
1	1
2	4
3	5
4	3
5	2



Exemple 2

Cette série pourrait représenter par exemple les notes d'un contrôle noté sur 5 avec 3 élèves qui ont eu $1/5$, 5 élèves qui ont eu $3/5$ et 3 élèves qui ont eu $4/5$.

Question 3

Quel calcul permet de retrouver la taille de la série (x_i) de la question précédente ?

Question 4

À quoi ressemblerait le tableau qui correspond à la série statistique suivante ?

$$y = (3; 3; 3; 3; 4; 4; 7; 7; 7; 7; 7; 7)$$

Attention, cette fois-ci la série s'appelle (y). Vérifier que la taille de votre série est cohérente avec votre tableau.

Question 5

Construisez l'histogramme de la série

$$y = (3; 3; 3; 3; 4; 4; 7; 7; 7; 7; 7; 7)$$

en prenant exemple sur l'histogramme précédent.

2 Indicateur de position

2.1 Moyenne d'une série

2.1.1 Définition et calculs d'une moyenne

Définition 4: Moyenne d'une série (sans regroupement par effectif)

Soit (x_i) une série statistique contenant n données. Alors, si on note $\overline{x}$ la moyenne de cette série, par définition :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Définition 5: Moyenne d'une série (avec regroupement par effectif)

Soit (x_i) une série statistique, d'effectif (e_i) de taille n. Alors, si on note $\overline{x}$ la moyenne de cette série, on a :

$$\overline{x} = \frac{x_1 \times e_1 + x_2 \times e_2 + \ldots + x_n \times e_n}{e_1 + e_2 + \ldots e_n}$$

Exemple 3

Si on considère le tableau suivant, qui récapitule des notes d'élèves, regroupé par tranche de 5 points :

La série (x_i)	Valeur de la série retenue	Effectifs
$0 \leq x_i < 5$	$2{,}5$	12
$5 \leq x_i < 10$	$7{,}5$	23
$10 \leq x_i < 15$	12.5	8
$15 \leq x_i \leq 20$	$17{,}5$	10

Alors la moyenne de la série se calcule par :

$$\overline{x} = \frac{2{,}5 \times 12 + 7{,}5 \times 23 + 12{,}5 \times 8 + 17{,}5 \times 10}{12 + 23 + 8 + 10}$$

Question 6

Pour être sûr d'utiliser sa calculatrice correctement, montrez que la moyenne $\overline{x}$ de l'exemple précédent est :

$$\overline{x} = 9.00943396226415\ldots \approx 9$$

Question 7

Si j'ai eu trois notes (sur vingt) en dessous de 5, deux notes entre 5 et 10, et cinq notes entre 10 et 15, quelle est l'estimation de ma moyenne d'après les calculs précédents ?

2.1.2 Linéarité d'une moyenne

Proposition 1: Linéarité de la moyenne

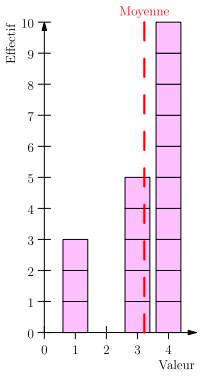
Quelque soit $k \in \mathbb{R}$, si on considère la série statistique $(x_i)_i$ et la série $(k \times x_i)_i$ alors :

$$\overline{k \times x} = k\overline{x}$$

Exemple 4

Si on considère la série suivante :

(x_i)	Effectifs
1	3
3	5
4	10

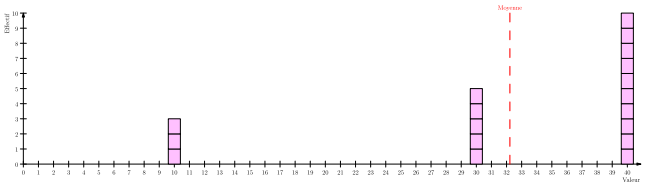


alors :

$$\overline{x} = \frac{1 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 10}{3 + 5 + 10} = \frac{58}{18} = \frac{29}{9} \approx 3{,}2$$

Si maintenant on considère la série suivante :

(x_i)	Effectifs
10	3
30	5
40	10



Alors, on remarque que c'est la série précédente où chaque valeur est multipliée par 10. Donc

$$\overline{y} = 10\overline{x} = \frac{290}{9} \approx 32$$

Soit exactement la valeur trouvée pour la série précédente mais multipliée par 10.

Démonstration 1

Cette proposition se démontre avec l'égalité suivante, valable quelque soit $k \in \mathbb{R}$, et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une série statistique :

$$\begin{aligned}
\overline{k \times x} &= \frac{k \times x_1 + k \times x_2 + \ldots + k \times x_n}{n} \\
&= \frac{k \times (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} \\
&= k \times \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \\
&= k \times \overline{x}
\end{aligned}$$

Proposition 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $x = (x_i)$ une série statistique. Alors :

$$\overline{x + a} = \overline{x} + a$$

Et $x + a$ désigne la série $(x_i + a)_i$

Exemple 5

Si on considère la série :

$$x = (1; 2; 3; 4)$$

De moyenne $\overline{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5$, alors la série

$$y = (10; 12; 13; 14) = x + 10$$

a comme moyenne $\overline{y} = \overline{x} + 10 = 12{,}5$.

Démonstration 2

Cette proposition se démontre à l'aide des égalités suivantes, vraies quelque soit la série statistique x et $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\overline{x+a} &= \frac{(x_1 + a) + (x_2 + a) + \ldots + (x_n + a)}{n} \\
&= \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (a + a + \ldots + a)}{n} \\
&= \frac{x_1 + x_2 \ldots x_n + n \times a}{n} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} + \frac{n \times a}{n} \\
&= \overline{x} + a
\end{aligned}$$

Question 8

On considère la série suivante :

$$x = (1, 1, 3, 4, 8)$$

1. Calculez sa moyenne.
2. Calculer rapidement la moyenne de la série $(2, 2, 6, 8, 16)$
3. Calculer rapidement la moyenne de la série $(3, 3, 5, 7, 11)$

Question 9

Si on augmente de 10% toutes les valeurs d'une série, que se passe-t-il pour sa moyenne ?

Question 10

Si un professeur a oublié un point à tous ces élèves lors d'un contrôle, que peut-on dire de la moyenne des notes des élèves ?

2.2 Médiane d'une série

Définition 6: Médiane d'une série

La médiane m d'une série statistique (x_i) est un nombre tel qu'il y ait autant de valeurs x_i plus grande que m que de valeurs x_i plus petite. (Dit autrement «m coupe en deux la série statistique»).
Le mot «médiane» vient du latin *medianus* qui signifie «du milieu».

Pour bien comprendre la différence entre la moyenne et la médiane d'une série, on considère la série suivante :

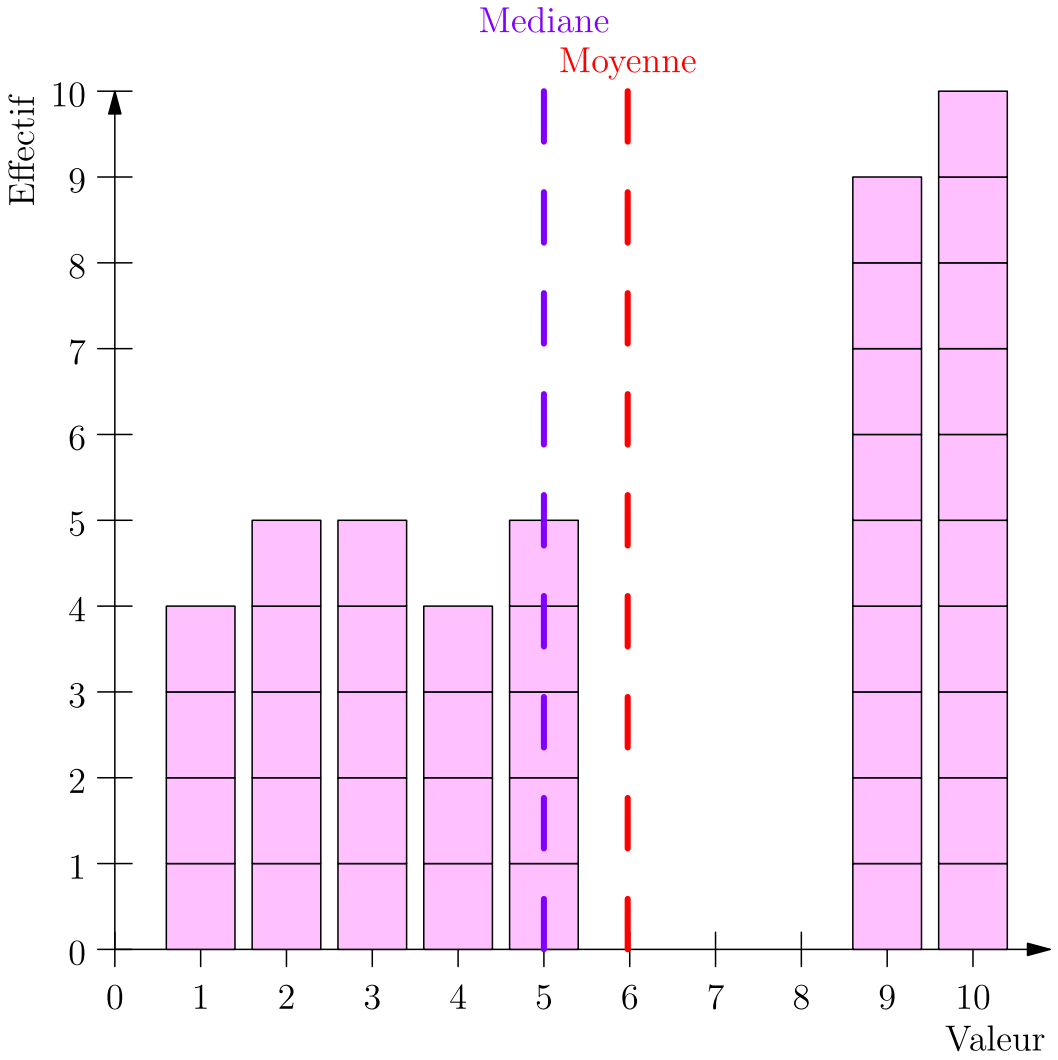


Figure 1 – Une série statistique pour comprendre la médiane et la moyenne.

D'après les calculs ce graphique, la moyenne est de 6 alors que la médiane est de 5. On peut donc constater plusieurs choses :

— La médiane correspond (quasiment toujours) à un nombre de la série, ici 5 est effectivement une valeur de la série, contrairement à la moyenne (personne n'a eu exactement 6).

— La médiane garantie que 50% des valeurs de la série soit en dessous. Ici, c'est le cas aussi pour la moyenne, mais la médiane en donne une meilleure idée (Par exemple

on peut dire que 50% des valeurs de la série sont inférieures à 8, mais c'est moins pertinent. Pourquoi ?).

Question 11

Retrouver la valeur de la médiane uniquement à l'aide du graphique de la figure 1.

Question 12

Comment modifier la série statistique pour faire bouger la valeur de la moyenne **sans modifier la valeur de la médiane** ?

Question 13

À votre avis, quel est le meilleur indicateur pour représenter la série de la figure 1 ? La moyenne ou la médiane ? Expliquer pourquoi ni l'une ni l'autre seule ne peuvent suffire.

2.3 Quartile

Le quartile est le même concept que la médiane mais pour couper la série en **quart**.

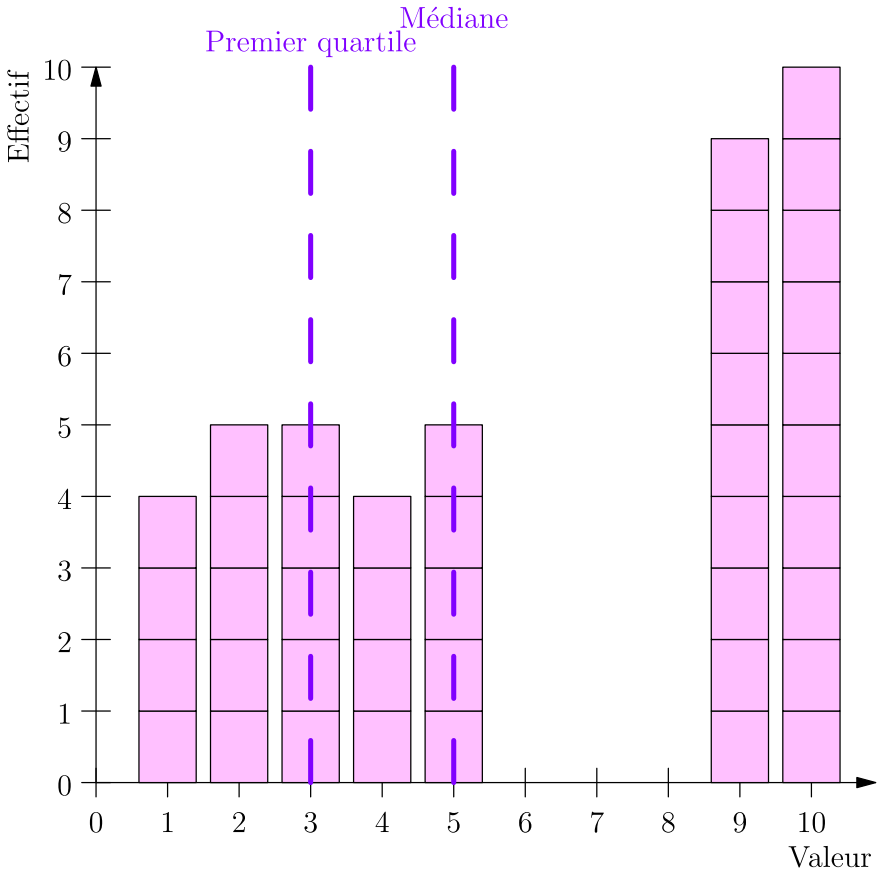
2.3.1 Premier quartile

Définition 7: Premier quartile

Le premier quartile Q_1 est le nombre tel que 25% des valeurs de la série statistique soient plus petite que Q_1.

Exemple 6

En reprenant une série déjà croisée, avec la médiane et le premier quartile :



2.3.2 Troisième quartile

Définition 8: Troisième quartile

Le troisième quartile Q_3 est le nombre tel que 75% des valeurs de la série statistique soient plus petite que Q_3.

En prenant comme exemple la série déjà croisée auparavant, et en plaçant cette fois-ci le premier quartile, la médiane, et le troisième quartile on obtient le diagramme suivant :

Exemple 7

Ici, sur la figure 2, on peut donc lire les informations suivantes :

- 25% des valeurs de la série sont inférieures ou égale à 3 (le premier quartile),
- 25% des valeurs de la série sont inférieures ou égale à 5 (la médiane, qui correspondrait au «deuxième quartile»),
- 75% des valeurs de la série sont inférieures ou égale à 9 (le premier quartile),

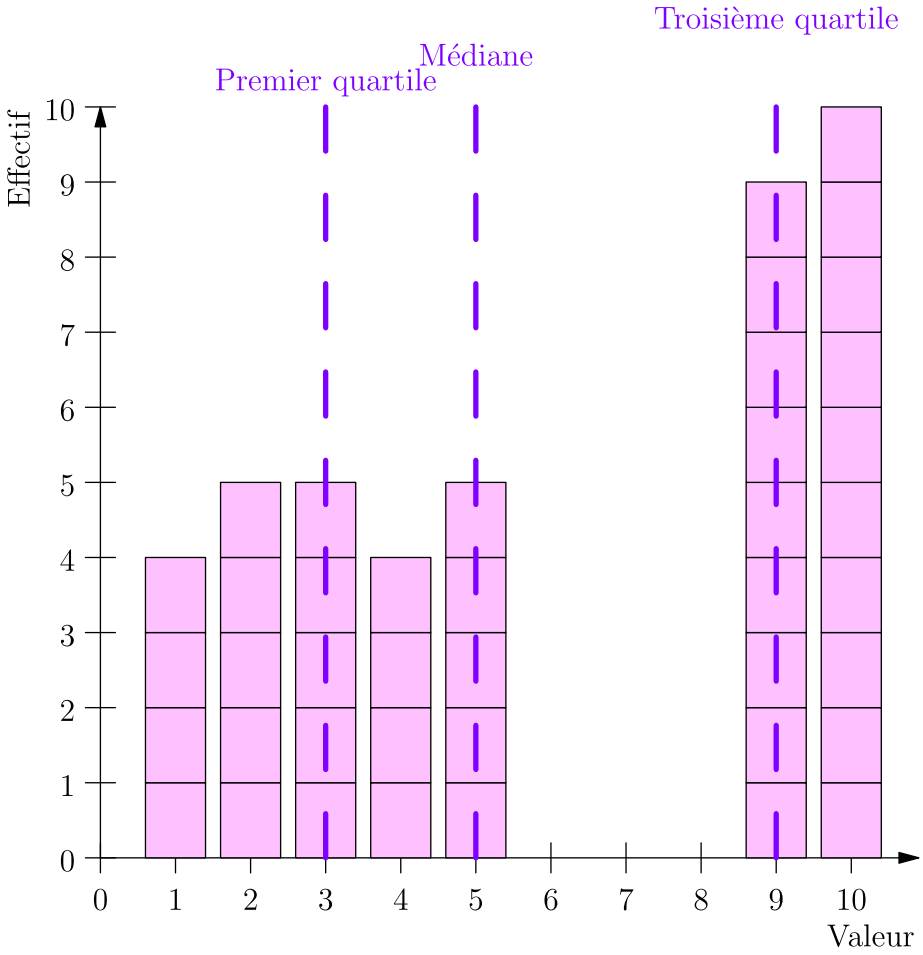
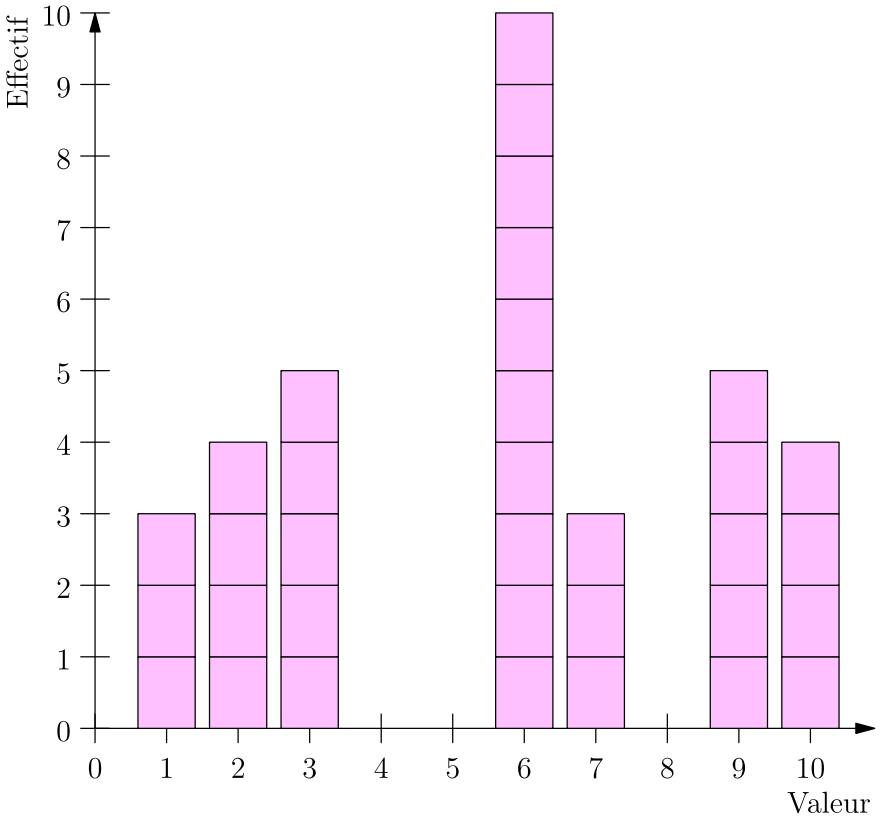


Figure 2 – Les trois quartiles représentés pour une série statistique

Question 14

Voici la représentation d'une série. Déterminer le premier quartile, la médiane, ainsi que le troisième quartile.

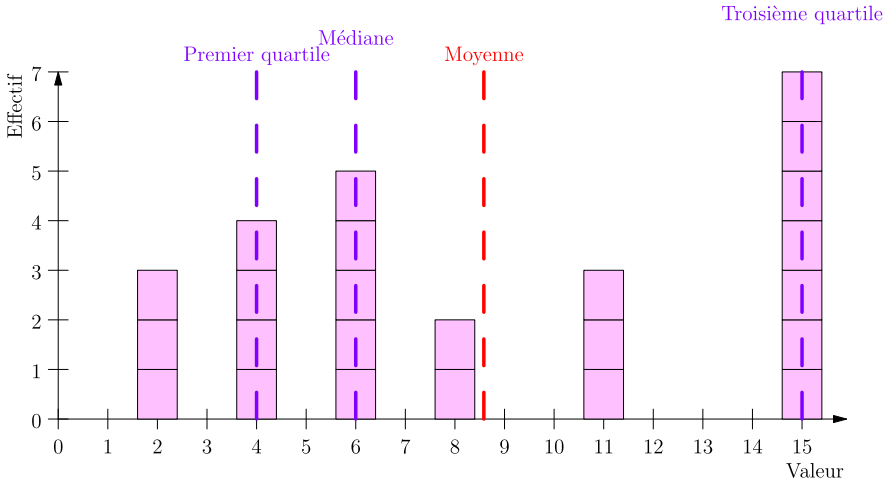


Vous devriez trouver les éléments suivants :

- $Q1 = 3$
- $M = 6$
- $Q3 = 9$

Question 15

Retrouver tous les indicateurs de la série suivante. Vérifiez bien que vous obtenez le même résultat que ceux affichés !



1. Combien de valeurs sont inférieures à la moyenne en proportion ?
2. Combien de valeurs sont inférieures à 11 en proportion ?

3 Indicateurs de dispersion

3.1 Écart-type, l'indicateur de dispersion lié à la moyenne

Définition 9: Écart-type

Soit (x_i) une série statistique, d'effectifs (n_i) de taille p. On note $\overline{x}$ la moyenne de la série. On calcule l'écart-type de cette série par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + n_p(x_p - \overline{x})^2}{n_1 + \ldots + n_p}}$$

Exemple 8

Voici une série :

$$(1\ ;\ 1\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;\ 7\ ;\ 9\ ;\ 9\ ;\ 9)$$

Pour calculer son écart-type, on calcule d'abord la moyenne de la série :

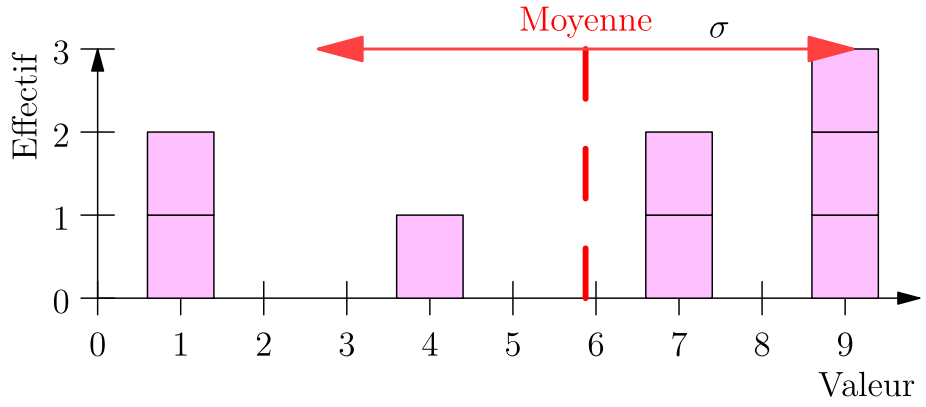
$$\overline{x} = \frac{2\times 1+4+2\times 7+3\times 9}{2+1+2+3} = \frac{47}{8} = 5{,}875$$

Puis, on utilise la formule vue plus haut :

$$\sigma = \sqrt{\frac{2(1-5{,}875)^2+(4-5{,}875)^2+2(7-5{,}875)^2+3(9-5{,}875)^2}{8}} = 3{,}218\ldots$$

Sur la calculatrice, on peut d'abord calculer «sans la racine», et appliquer la racine carré à la toute fin.

On peut vérifier effectivement sur le graphique ci-dessous les calculs de l'exemple précédent :



Question 16

Pourquoi y'a-t-il un carré dans la formule de l'écart-type ? Et pourquoi une racine carrée ?

Reponse 1

On souhaite avoir un nombre σ qui soit grand dès qu'il y a des valeurs loin de la moyenne de la série. Dans l'exemple précédent, si on se concentre sur le premier terme, qui est $(1-5{,}875)^2$, on voit qu'on calcule la différence entre la valeur de la série 1, et la moyenne, $5{,}875$. Cette différence est élevée au carrée pour marquer cette différence d'autant plus, mais aussi pour que les différence s'ajoutent (un carré est toujours positif). La racine carrée sert à contrebalancer les carrés dans l'expression (attention, la racine n'annule pas les carrés ici, puisque en générale $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

3.2 Écart interquartile, l'indicateur de dispersion lié à la médiane

Définition 10: Écart interquartile

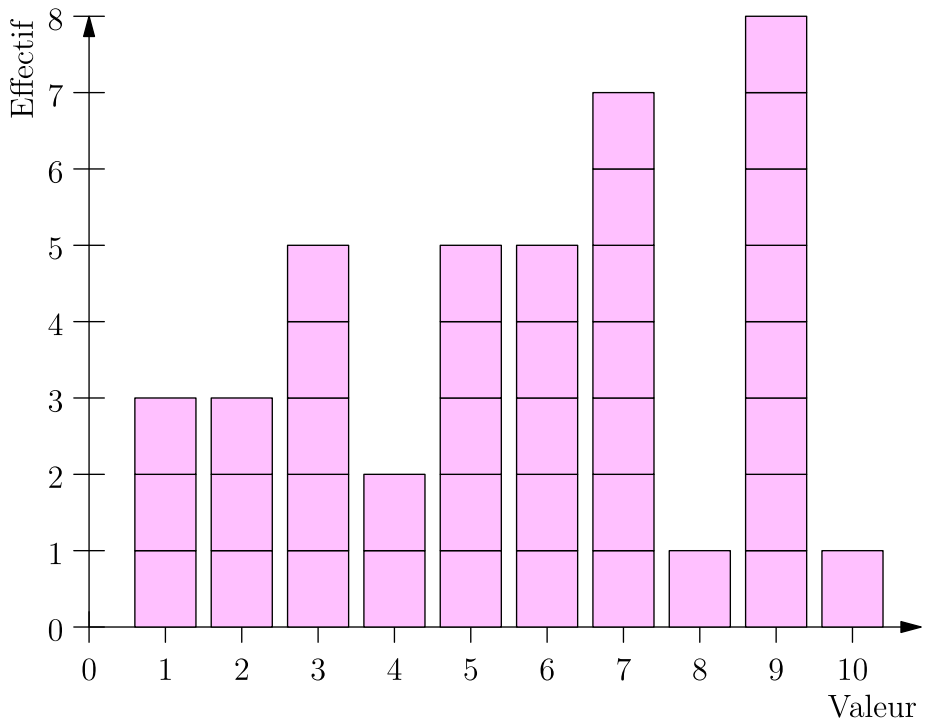
Si Q_1 et Q_3 sont les deux quartiles d'une série, on définit $E = Q_3 - Q_1$ l'écart interquartile de la série.

3.3 Visualiser les indicateurs de dispersion

Proposition 3

- L'écart-type est l'indicateur de dispersion associé à la moyenne. Plus l'écart-type est élevé, moins la moyenne est représentative de la série.
- De même, l'écart interquartile est un indicateur de dispersion associé à la médiane. Plus il est élevé, moins la mediane est représentative de la série.

À titre d'exemple, prenons la série (générée aléatoirement) suivante :



Puis, montrer la moyenne, et l'écart-type :

Exemple 9

Dans la figure 3, on voit la moyenne, et l'écart type qui est représenté par deux flèches rouges. La valeur de l'écart type correspond à la distance entre la moyenne et le bout d'une flèche (donc ici, $\sigma \approx 3$). On voit qu'effectivement les bouts de chaque flèche est proche d'une forte concentration des effectifs.

On va maintenant montrer l'écart-inter quartile, et la médiane :

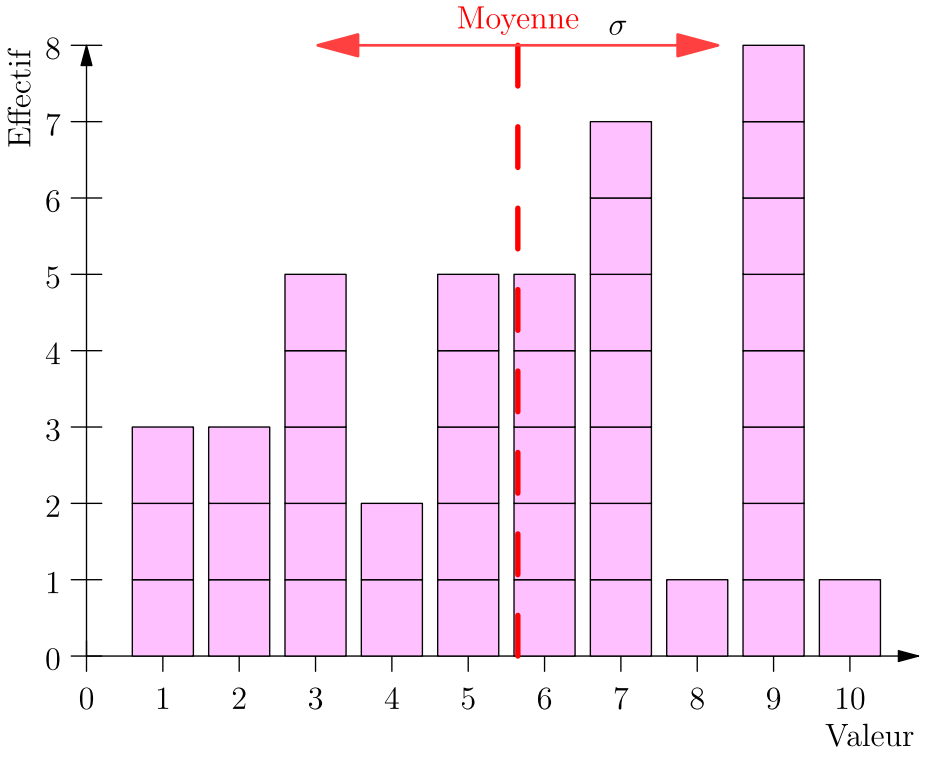


Figure 3 – Série avec la moyenne et l'écart-type.

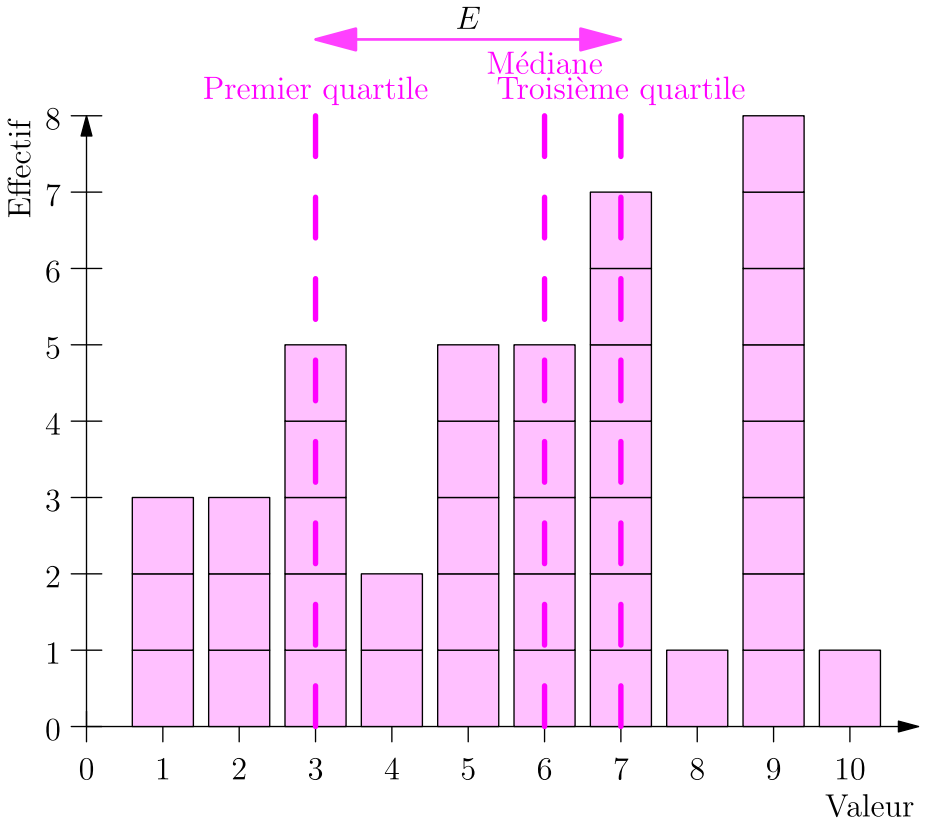


Figure 4 – Même série, mais en montrant la médiane et l'écart interquartile

Exemple 10

Cette fois, dans l'image , on a montré l'écart interquartile (qui vaut 4, puisque $7-3=4$) par rapport à la médiane. L'écart interquartile n'est pas centré autour de la médiane, puisqu'il correspond à la distance entre le premier quartile, et le troisième quartile. L'écart interquartile correspond est à rapprocher de l'étendue d'une série, sauf que l'on prend le premier et le troisième quartile comme extrémité.

Question 17

Dans cette situations, les valeurs de la médiane et de la moyenne sont proches, et leur indicateur respectif aussi.
Pourriez-vous imaginez une situation ou cela n'est pas le cas ?

4 Étude de cas

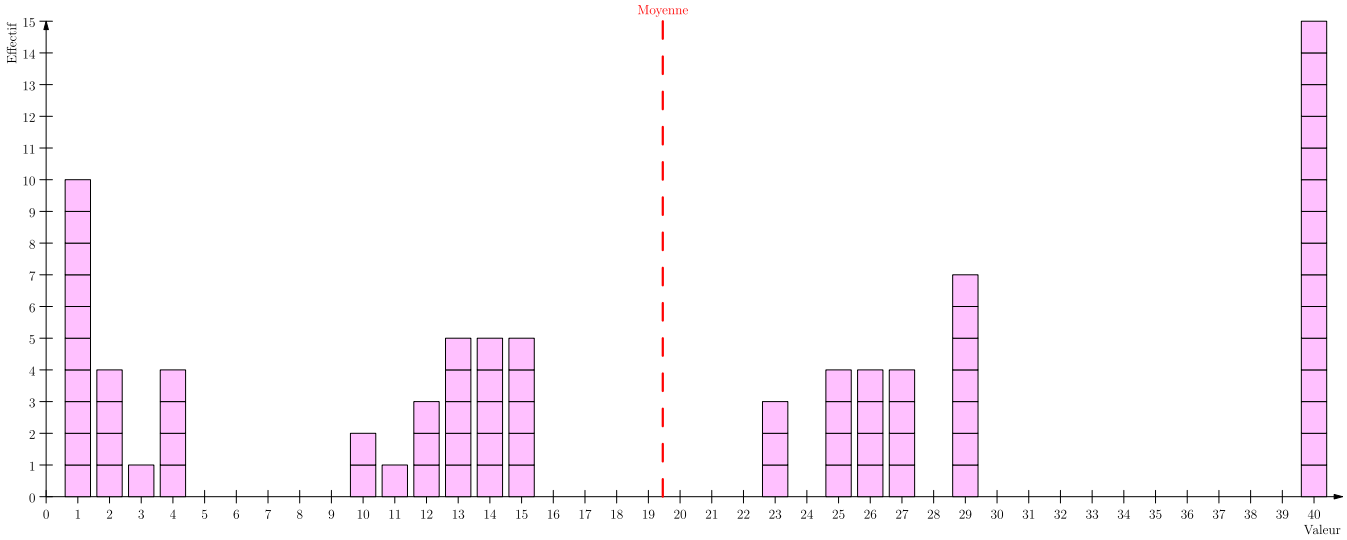


Figure 5 – Nous allons regarder cette série plus en détail.

Regardez la série 5. J'ai affiché la moyenne. Peut-être vous voyez déjà où je veux en venir.

Question 18

Pourquoi la moyenne n'est pas un indicateur adapté à cette série ? Combien de valeur sont autour de la moyenne ?

On devrait avoir une confirmation avec l'affichage de l'ecart-type :

Exemple 11

L'écart type est gigantesque ! C'est-à-dire que si l'on se contente de résumer la série à sa moyenne, on passe à coté de **beaucoup** d'information.

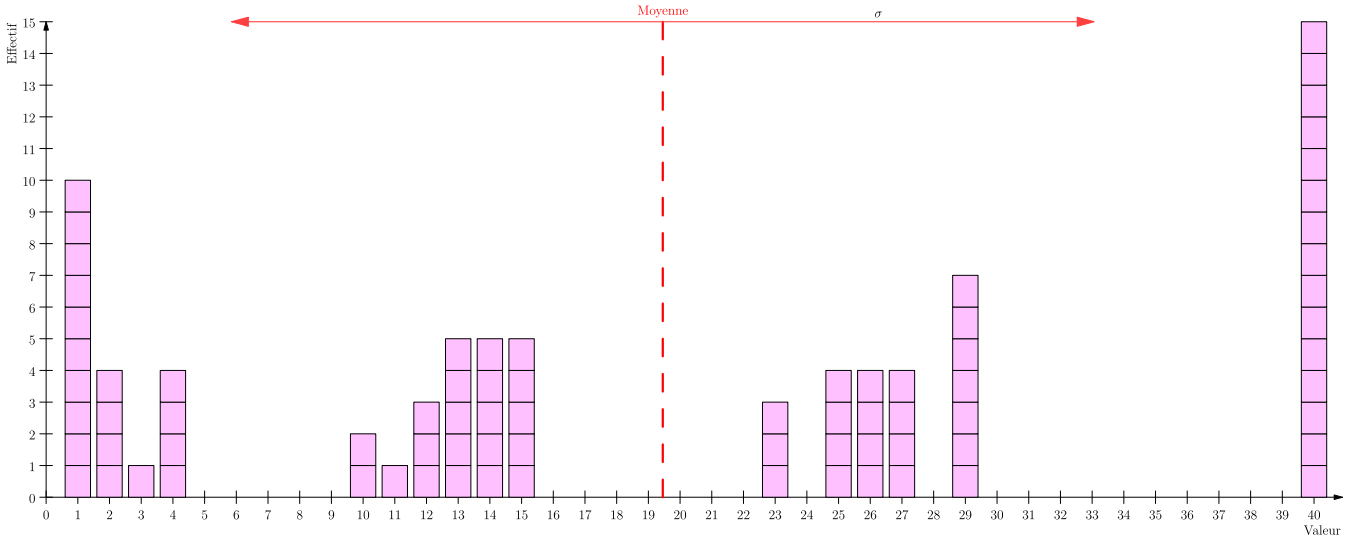


Figure 6 – Avec l'écart-type

Question 19

Pourquoi l'écart-type est-il gigantesque dans la figure ?

On peut faire le même travail avec la médiane

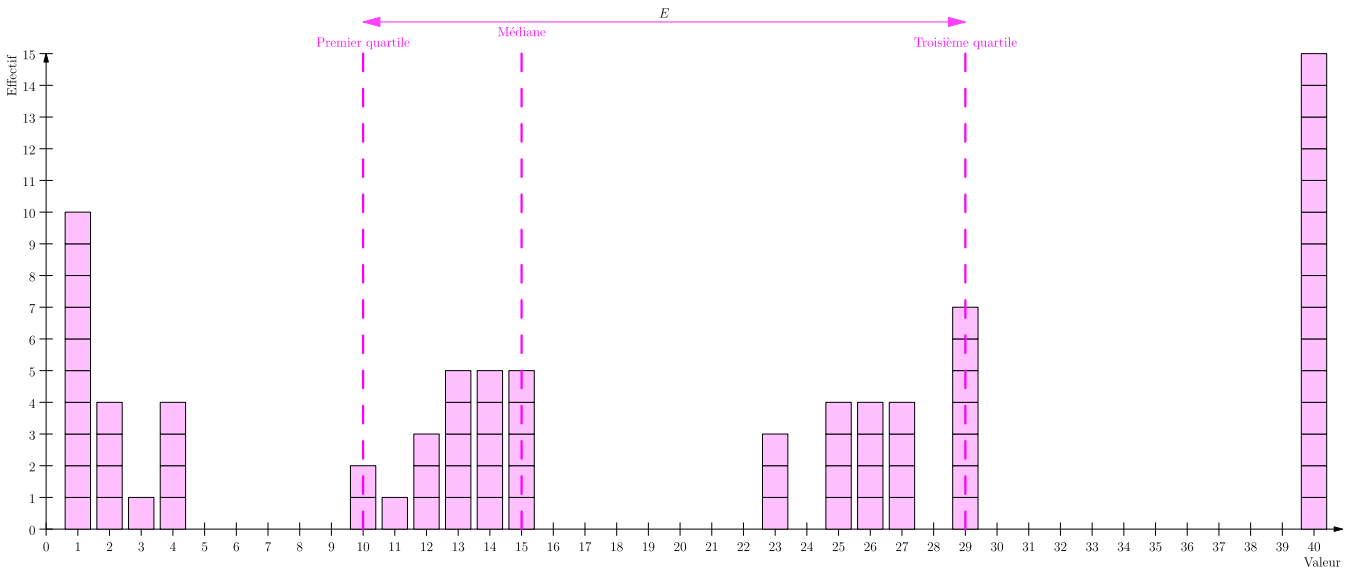


Figure 7 – Avec l'écart-type

Exemple 12

Cette fois-ci, grâce la médiane, on peut contrôler le fait que 50% des valeurs sont en dessous de 15. L'énorme valeur 40 n'a pas trop fait bougé notre médiane, et on sait que 75% des valeurs sont comprises entre 10 et 29, ce qui nous donne un écart-type de 19 (!).