

Équations cartésiennes et équation réduite du plan

Table des matières

1 Avant de commencer la lecture de ce cours	1
1.1 Les notions qu'il faut maîtriser	1
1.2 À quoi sert ce chapitre?	2
2 Définition d'une équation cartésienne	2
3 L'ensemble des solutions d'une équation cartésienne	4
4 Cas particuliers ($a = 0$ ou $b = 0$)	6
4.1 Cas où $a = 0$	6
4.2 Cas où $b = 0$	8
5 Vecteur directeur & équations cartésiennes	9
5.1 Définition d'un vecteur directeur	9
5.2 Vecteur directeur d'une droite donnée par une équation cartésienne.	10
5.3 Et le déterminant dans tout ça?	13
6 Trouver un point sur la droite	17
7 Représenter une droite à partir d'une équation cartésienne	17
7.1 En utilisant un vecteur directeur, méthode 1	17
7.2 En trouvant deux points différents, méthode 2	18
7.3 À vous de jouer!	19
8 Intersection de deux droites	23

1 Avant de commencer la lecture de ce cours

1.1 Les notions qu'il faut maîtriser

Pour ce cours, vous avez besoin des notions suivantes :

- vecteurs colinéaires,
- déterminant de deux vecteurs,
- déterminer les coordonnées d'un vecteur sachant ses deux extrémités.
- les fonctions affines

Pour savoir si vous savez suffisamment les notions suivantes, répondez aux questions suivantes :

1. Savez-vous représenter deux vecteurs colinéaires?
2. Quelle est la définition de deux vecteurs colinéaires?
3. Que peut-on dire du déterminant de deux vecteurs colinéaires?
4. Quelle est la formule du déterminant? À quoi fait-elle penser?
5. Sans faire de calcul, pourquoi voit-on que les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3.6 \\ 9.6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires?
6. Quel sont les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sachant que $A(-3; -1)$ et $B(4, 5)$?
7. Quel est le coefficient directeur de la fonction affine dont la courbe représentative passe par les points A et B ?

Concernant la dernière question, voici un programme python qui pourrait vous donner la solution en l'exécutant, et qui vous donne un moyen de calculer automatiquement le déterminant de deux vecteurs.

La fonction 4 demande deux vecteurs et retourne le déterminant des deux vecteurs qu'on lui donne.

La fonction 1 demande deux points, et retourne le vecteur qui admet ces deux points aux extrémités.

Vous remarquez que pour Python, un point et un vecteur peuvent être codé de la même manière, avec des crochets ([et], rien à voir avec les intervalles).

```

1 def coordonneVecteur(a, b) :
2     return b[0] - a[0], b[1] - a[1]
3
4 def determinant(u, v) :
5     return u[0]*v[1] - u[1]*v[0]
6
7 a = [-3, 1]
8 b = [4, 5]
9
10 u = coordonneVecteur(a, b)
11 v = [3, 8]
12
13 print("Le vecteur est de coordonne", u)
14 print("u et v sont de determinant", determinant(u, v))

```

Le vecteur est de coordonne (7, 4)
u et v sont de determinant 44

1.2 À quoi sert ce chapitre ?

Des droites, vous en avez déjà croisées beaucoup, avec les fonctions affines, et avec les vecteurs. Ce chapitre donne un dernier point de vue, plus général, et plus complet, sur la question. Il sera l'occasion de faire un vrai lien entre les vecteurs et les fonctions affines, dans un cadre plus élégant, et facile à comprendre.

2 Définition d'une équation cartésienne

Définition 1: Point de coordonnée (x, y)

Pour tout le cours, on considère que le plan est muni d'un repère orthonormée (O, \vec{i}, \vec{j}) (la fameuse «base carreaux» !). Alors, on note $M(x, y)$ le point tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Exemple 1

On dira donc y pour désigner les ordonnées, et x pour désigner les abscisses dans le cours.

Définition 2: Équation cartésiennes

Une équation cartésienne du plan est une équation aux inconnues x et y de la forme :

$$ax + by = c$$

Les constantes a, b et c sont des nombres réels quelconques mais a et b ne peuvent pas être nuls simultanément.

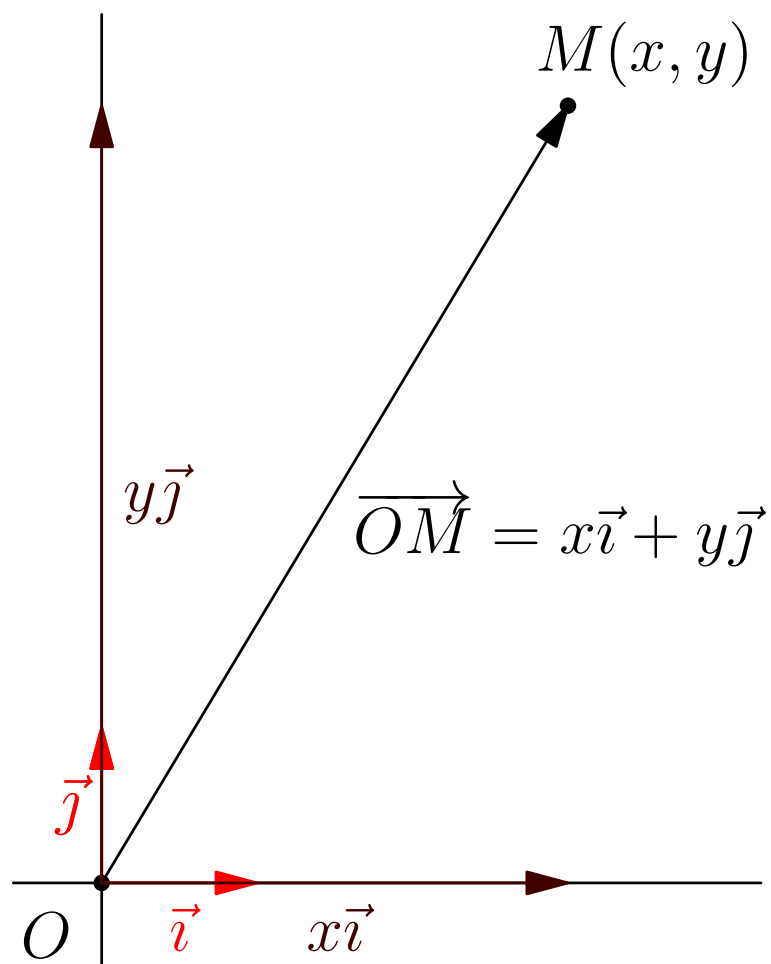


Figure 1 – Voici un point M de coordonnée (x, y) .

Exemple 2

Voici des exemples d'équations cartésiennes :

1. $3x - 4y = 2$ ($a = 3$, $b = -4$ et $c = 2$)
2. $2y = 1$ (ici, $a = 0$)
3. $3x = 1$ (ici, c'est b qui vaut 0)
4. $2x = 3y - 2$

Pour la dernière, on peut *manipuler l'équation*, en effet :

$$\begin{aligned}2x &= 3y - 2 \\2x - 3y &= -2 \\2x - 3y + 2 &= 0\end{aligned}$$

sont des équations équivalentes. Mais celle qui se rapproche le plus de la définition (et qui permet de lire directement les valeurs de a , b , et c) est la deuxième.

Question 1

Pour chaque équation cartésienne de l'exemple précédent, donnez la valeur de a , b et c de la définition.

Question 2

Pourquoi l'équation :

$$x^2 + \sqrt{y} = 3$$

n'est pas une équation cartésienne ?

Question 3

Pourquoi l'équation :

$$\sqrt{2}x + 3y - 2 = 0$$

est une équation cartésienne ? Quelles sont les valeurs de a , b et c ?

3 L'ensemble des solutions d'une équation cartésienne

On souhaite décrire les solutions des équations cartésiennes.

Proposition 1

Une équation cartésienne admet une **infinité** de solutions.

Question 4

Pourquoi une équation comme par exemple $x + y = 5$ aurait une infinité de solutions ? (j'ai pris $a = 1$, $b = 1$ et $c = 5$)

Reponse 1

Eh bien, on peut facilement en citer plusieurs :

- $x = 1, y = 4$
- $x = 2, y = 3$
- $x = 3, y = 2$
- $x = 4, y = 1$
- $x = 5, y = 0$
- $x = 6, y = -1$

Et on peut citer des solutions décimales :

- $x = 2,1, y = 2,9$
- $x = 2,2, y = 2,8$
- $x = 2,3, y = 2,7$
- etc.

et même des solutions non rationnelles :

- $x = \sqrt{2} \approx 1,414213, y = 5 - \sqrt{2} \approx 3,5857$

puisque $\sqrt{2} + 5 - \sqrt{2} = 5$ sans trop d'effort

Voici le théorème le plus important de ce cours :

Proposition 2

L'ensemble des solutions (x, y) d'une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by = c$$

avec a et b non nul simultanément, **forme une droite du plan**

Question 5

Représentez les solutions entières trouvées dans la question précédente dans le plan. On rappelle que x correspond aux abscisses, et y aux ordonnées.

Reponse 2

Vous devriez trouver la droite représentée à la figure 2. On a pris soin de représenter les points trouvés dans le paragraphe vu un peu plus haut. On constate bien que tous les points sont alignés.

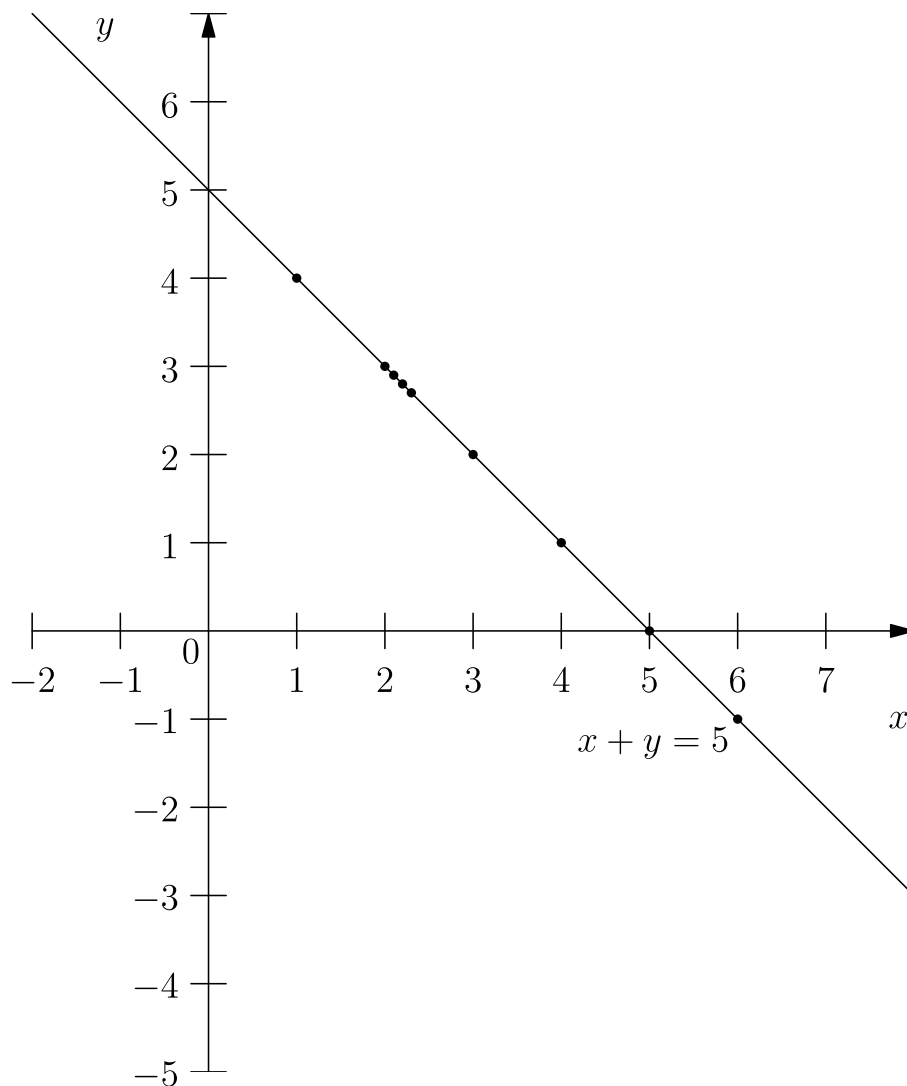


Figure 2 – L'ensemble des solutions de l'équation $x + y = 5$. Comme prévu par le théorème, c'est une droite.

Question 6

Retrouvez l'abscisse et l'ordonnée des points qui ont été ajoutés à la droite de la figure. Vérifiez bien que vous avez compris que chaque point admet une abscisse x et une ordonnée y qui sont telles que $x + y = 5$. En traçant la droite, vous avez ainsi représenté **toutes** les solutions de l'équation $x + y = 5$.

4 Cas particuliers ($a = 0$ ou $b = 0$)

Étudions les cas où :

1. $a = 0$
2. $b = 0$

On rappelle qu'il est impossible que a et b soient nuls en même temps, sinon l'équation est vide, et il n'y a rien à résoudre.

Vous pouvez sauter cette partie si vous en êtes à la première lecture. C'est pas la plus fascinante.

4.1 Cas où $a = 0$

Exemple 3

Voici l'ensemble des solutions de l'équation cartésienne $3y = 5$.

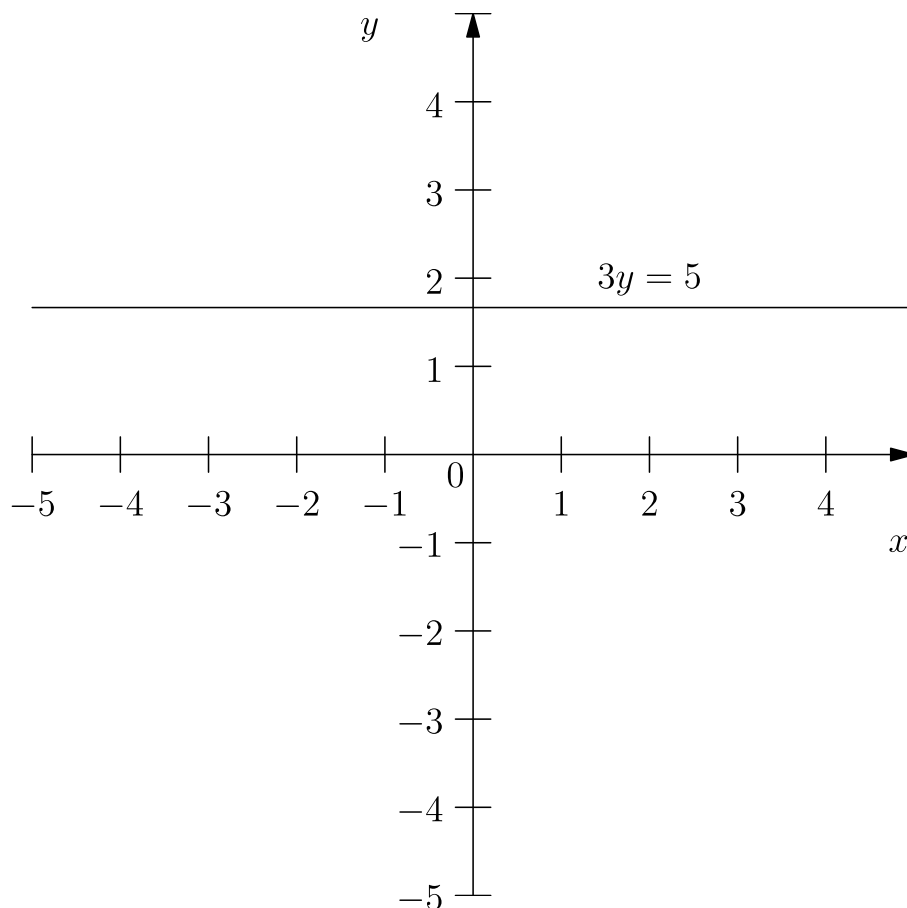


Figure 3 – Représentation des solutions de l'équation cartésienne $3y = 5$

Question 7

Que remarquez-vous ?

Donnez une solution de l'équation cartésienne $3y = 5$, puis une deuxième.

Reponse 3

L'équation cartésienne $3y = 5$ n'impose aucune condition sur la valeur de x . Je peux choisir n'importe quelle valeur de x . Prenons $x = 1$. Puis, je dois résoudre $3y = 5$, et je trouve $y = \frac{5}{3}$.

Pour l'instant j'ai la solution suivante :

— $x = 1$ et $y = \frac{5}{3}$

mais on disait plus tôt que je peux choisir n'importe quelle valeur de x , **puisque'il n'y a pas de x dans l'équation de départ**, donc on peut trouver autant d'autre point que l'on veut :

— $x = 10$ et $y = \frac{5}{3}$

— $x = 5$ et $y = \frac{5}{3}$

— $x = 7989401,2098$ et $y = \frac{5}{3}$ (oui, j'ai laissé mon chat me proposer une valeur de x).

Proposition 3

Si $a = 0$ alors l'ensemble des solutions de l'équation cartésienne $ax + by = c$ sera une **droite parallèle à l'axe des abscisses**.

Question 8

Expliquez à l'aide de la réponse 3 pourquoi la droite se retrouve parallèle à l'axe des abscisses.

4.2 Cas où $b = 0$

On retrouve les même raisonnements.

Exemple 4

Voici une représentation de l'ensemble des solutions de l'équation $3x = 5$

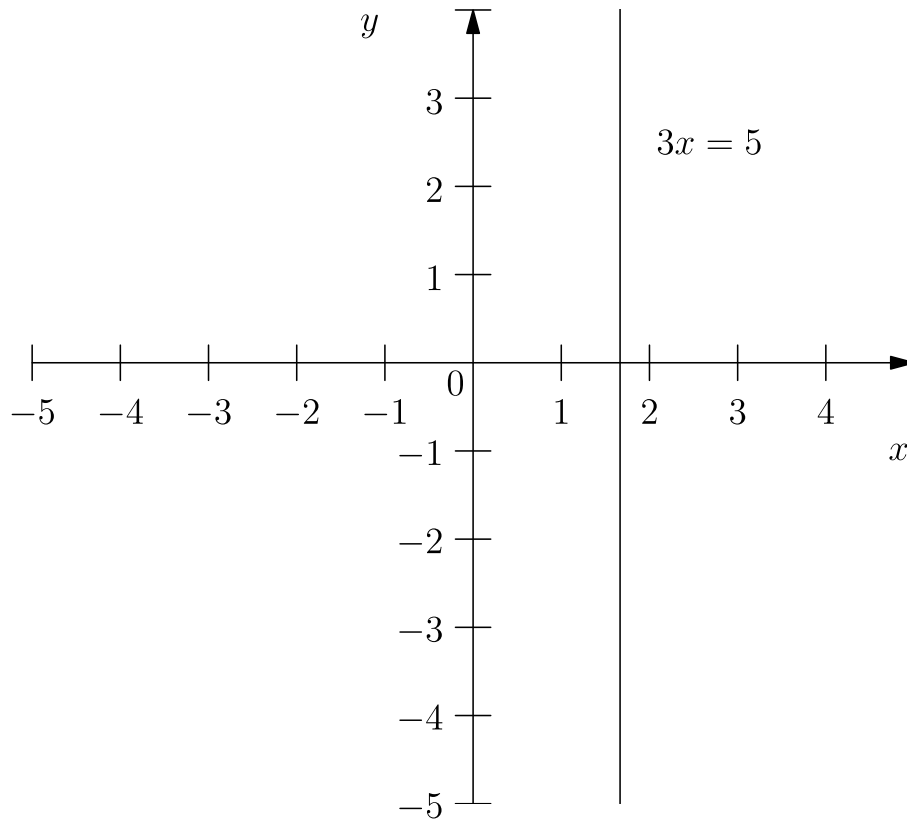


Figure 4 – Représentation des solutions de l'équation cartésienne $3x = 5$

Proposition 4

Si $b = 0$ alors l'ensemble des solutions de l'équation cartésienne $ax + by = c$ sera une **droite parallèle à l'axe des ordonnées**.

Question 9

Est-ce que la courbe de la figure 4 peut-être une courbe d'une fonction ? Expliquer.

Proposition 5

Dans ce cas, et dans ce cas uniquement, l'ensemble des solutions des équations $bx = c$ ne peut pas être le graphe d'une fonction (affine) puisque aucune fonction ne peut admettre plusieurs images à partir d'un même nombre.

5 Vecteur directeur & équations cartésiennes

5.1 Définition d'un vecteur directeur

Définition 3: Vecteurs directeurs d'une droite

Un vecteur \vec{u} est un vecteur directeur d'une droite \mathcal{D} si et seulement si la **direction** de \vec{u} est donnée par la droite \mathcal{D}

Exemple 5

Dans la figure 5, je vous montre une équation cartésienne, la représentation de ses solutions qui forme une droite, et **un** vecteur directeur de cette droite. Je vous expliquerai ensuite comment trouver un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation cartésienne.

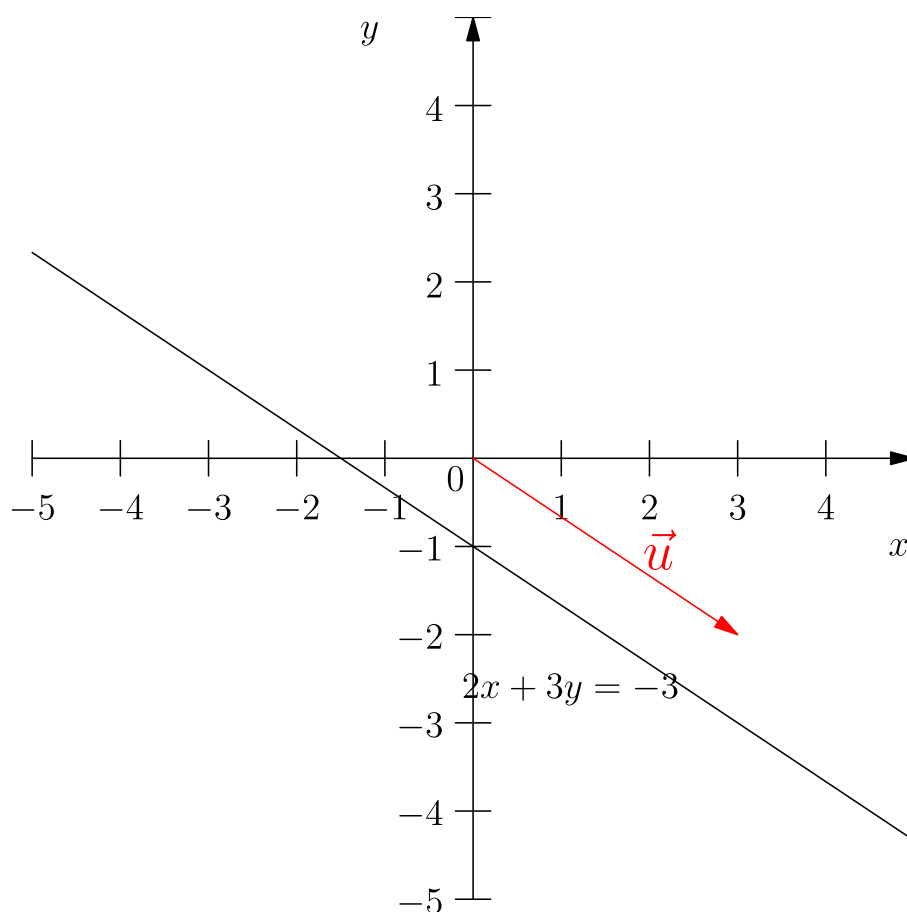


Figure 5 – Le vecteur \vec{u} a la direction donnée par la droite d'équation cartésienne $3x + 3y = -3$. Donc \vec{u} un vecteur directeur de cette droite.

Question 10

Pourquoi ne peut-on pas dire *le* vecteur directeur? Dit autrement, pourquoi faut-il **toujours** utiliser l'expression « **un vecteur directeur** »?

Question 11

Donnez un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} qui admet pour équation cartésienne $x + y = 5$ (on l'a déjà étudiée, voir la figure 2). Vous donnerez les **coordonnées** de ce vecteur. Pour l'instant vous n'avez pas de formule, mais vous pouvez raisonner uniquement avec le graphique.

5.2 Vecteur directeur d'une droite donnée par une équation cartésienne.

Proposition 6

Soit une droite \mathcal{D} donnée par l'équation cartésienne :

$$ax + by = c$$

Alors, la droite \mathcal{D} admet (par exemple) comme vecteur directeur \vec{u} de coordonnées :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

Notez quel le vecteur \vec{v} de coordonnées :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

est aussi un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} .

Question 12

Qu'est-ce qu'on peut dire des vecteurs \vec{v} et \vec{u} de la proposition précédente ?

Reponse 4

Ils sont colinéaires, oui, mais plus que ça, il sont opposés ! Les coordonnées de l'un sont données par l'opposé des coordonnées de l'autre.

Exemple 6

Retrouvez les coordonnées du vecteur \vec{u} de la figure 5. J'ai tout simplement utilisé les formules de la proposition précédente dans mon programme pour afficher un vecteur directeur.

Question 13

Comment trouvez **tous** les vecteurs directeurs d'une droite ?

Reponse 5

Il suffit d'en trouver un seul, et les autres ne sont que des multiples du premier ! Dit autrement, tous les vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires (il faut revoir son cours sur les vecteurs si ce n'est pas clair).

Question 14

Dans les cinq figures suivantes, retrouvez tous les vecteurs directeurs de chaque équation.
Puis posez vous les questions suivantes :

- Peut-on avoir deux équations cartésiennes qui représentent la même droite ?
- Pourquoi le vecteur directeur ne dépend-t-il pas de la valeur de c ?

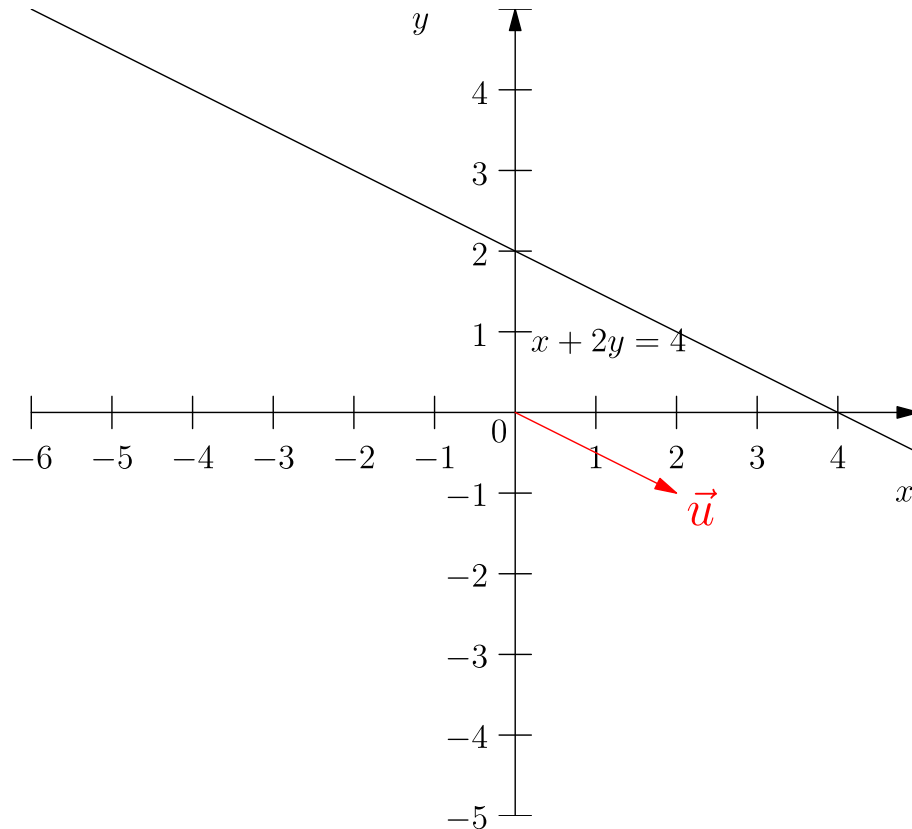


Figure 6 – Exercice 1

Reponse 6

Si vous avez pas eu l'impression de vous faire arnaquer dans les questions précédentes, c'est que vous êtes passé à coté de quelque chose !

Question 15

Montrer que les équations suivantes :

1. $-2x + y = 4$
2. $2x - y = -4$
3. $-8x + 4y = 16$

sont équivalentes. Ces équations correspondent aux exercices 3, 4 et 5. La manipulation vue plus haut n'est pas exactement la manipulation attendue ici.

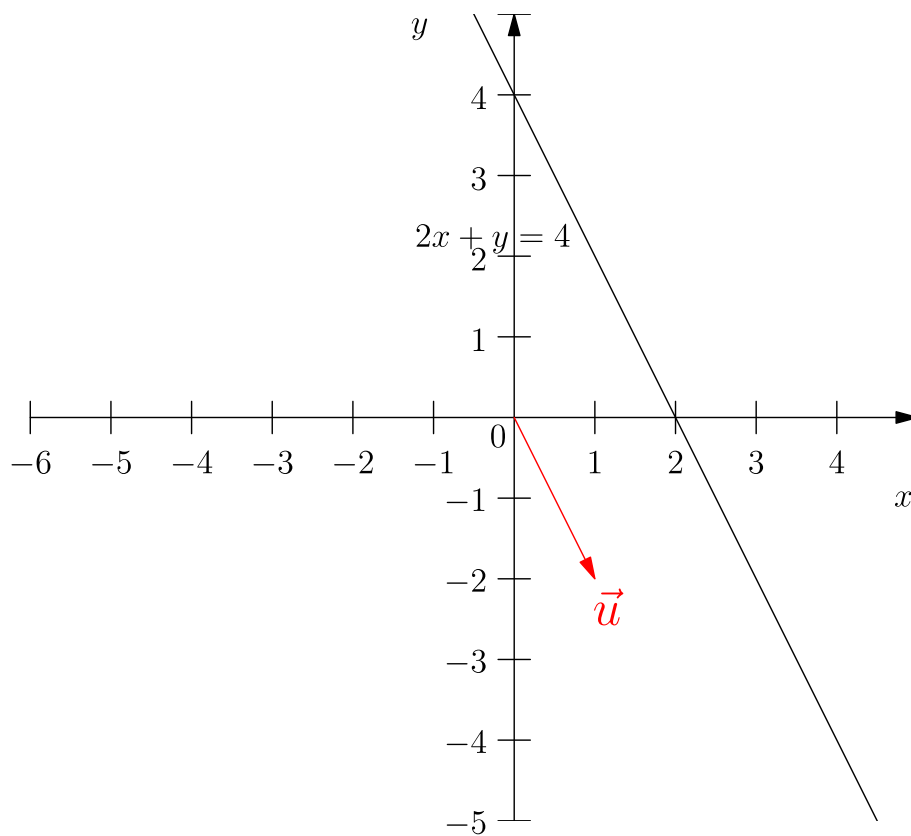


Figure 7 - Exercice 2

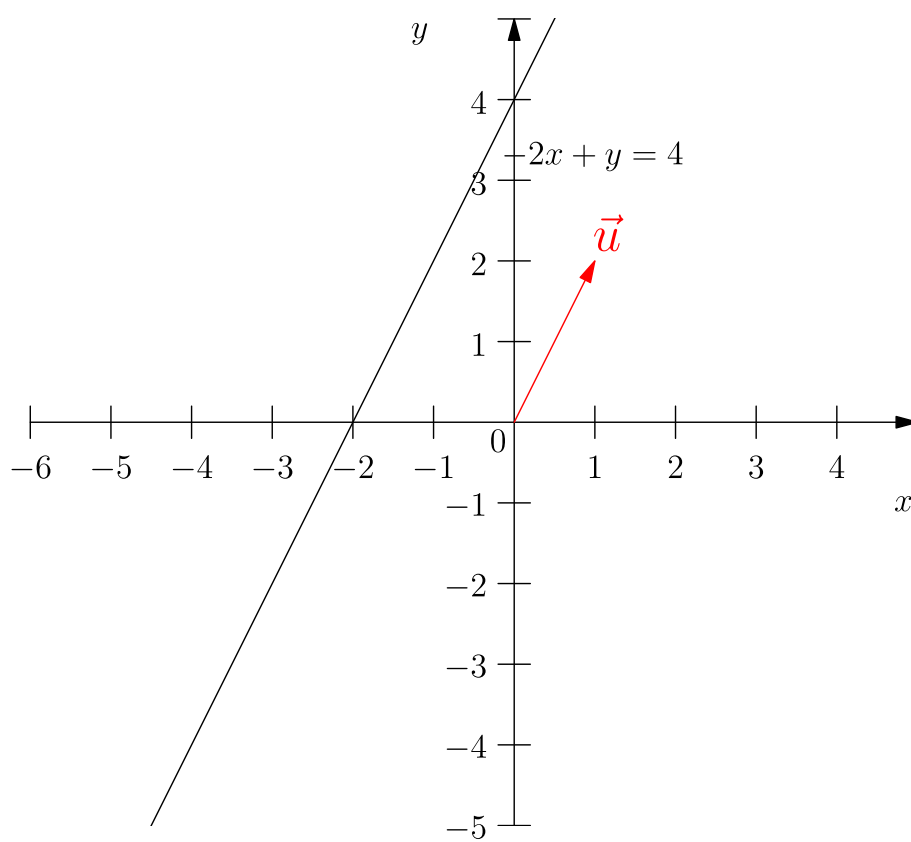


Figure 8 - Exercice 3

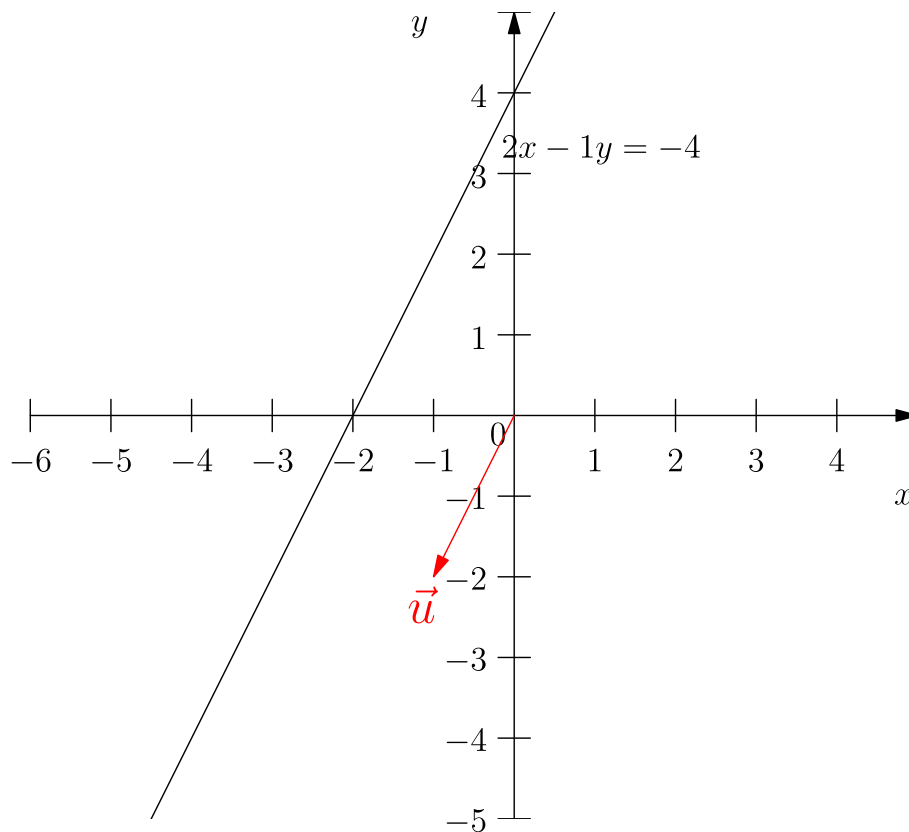


Figure 9 – Exercice 4

Reponse 7

Pour passer de la première équation à la seconde, on a multiplié par -1 , en effet :

$$\begin{aligned} -2x + y &= 4 \\ (-1) \times (-2)x + (-1) \times y &= (-1) \times 4 \\ 2x - y &= -4 \end{aligned}$$

et voilà le travail.

Pour passer de la deuxième équation à la troisième, on a multiplié par -4 .

$$\begin{aligned} 2x - y &= -4 \\ (-4) \times 2x - (-4)y &= (-4) \times (-4) \\ -8x + 4y &= 16 \end{aligned}$$

Question 16

Quelle a été la multiplication effectuée de chaque côté pour passer de l'équation 3 à l'équation 2 ?

5.3 Et le déterminant dans tout ça ?

On résume tout dans une seule proposition, les exercices précédents vous ont fait comprendre le pourquoi du comment.

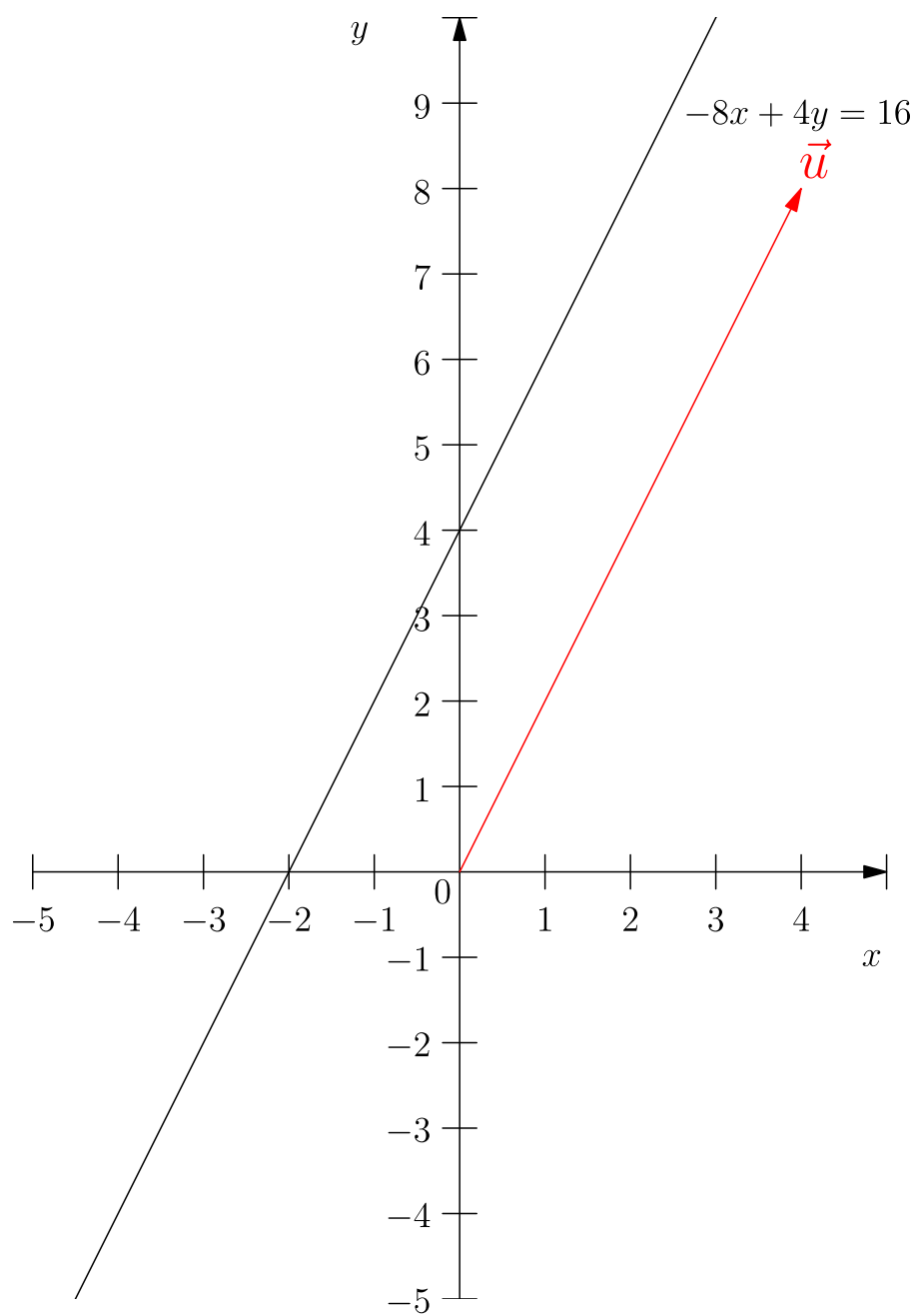


Figure 10 – Exercice 5

Proposition 7

Deux équations cartésiennes sont équivalentes si et seulement si leur équations sont équivalentes.

Proposition 8

Si deux équations cartésiennes sont équivalentes, alors le déterminant des vecteurs directeurs de chaque équation sera nul.

Mais si le déterminant de deux vecteurs directeurs de deux équations est nul, les équations cartésiennes ne sont pas forcément équivalentes (mais les droites seront parallèles !!).

Exemple 7

Les équations cartésiennes suivantes :

1. $5x - 3y = 2$

2. $-5x + 3y = -2$

désignent la **même droite** puisque l'on est passé de la première équation à la deuxième en multipliant par -1 .

Exemple 8

Les équations cartésiennes suivantes :

1. $4x - 3y = 2$

2. $\frac{5}{3}x - \frac{5}{4}y = 5$

ne sont pas équivalente, mais les vecteurs :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

sont colinéaires, c'est-à-dire que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Ces équations ne sont pas équivalentes puisque on voit que le point $(2, 2)$ appartient à la première droite $4x - 3y = 2$ puisque $4 \times 2 - 3 \times 2 = 2$, mais le point $(2, 2)$ **n'appartient pas** à la droite d'équation $\frac{5}{3}x - \frac{5}{4}y = 5$ (vérifiez !).

J'ai représenté les deux droites dans la figure 11 qui suit.

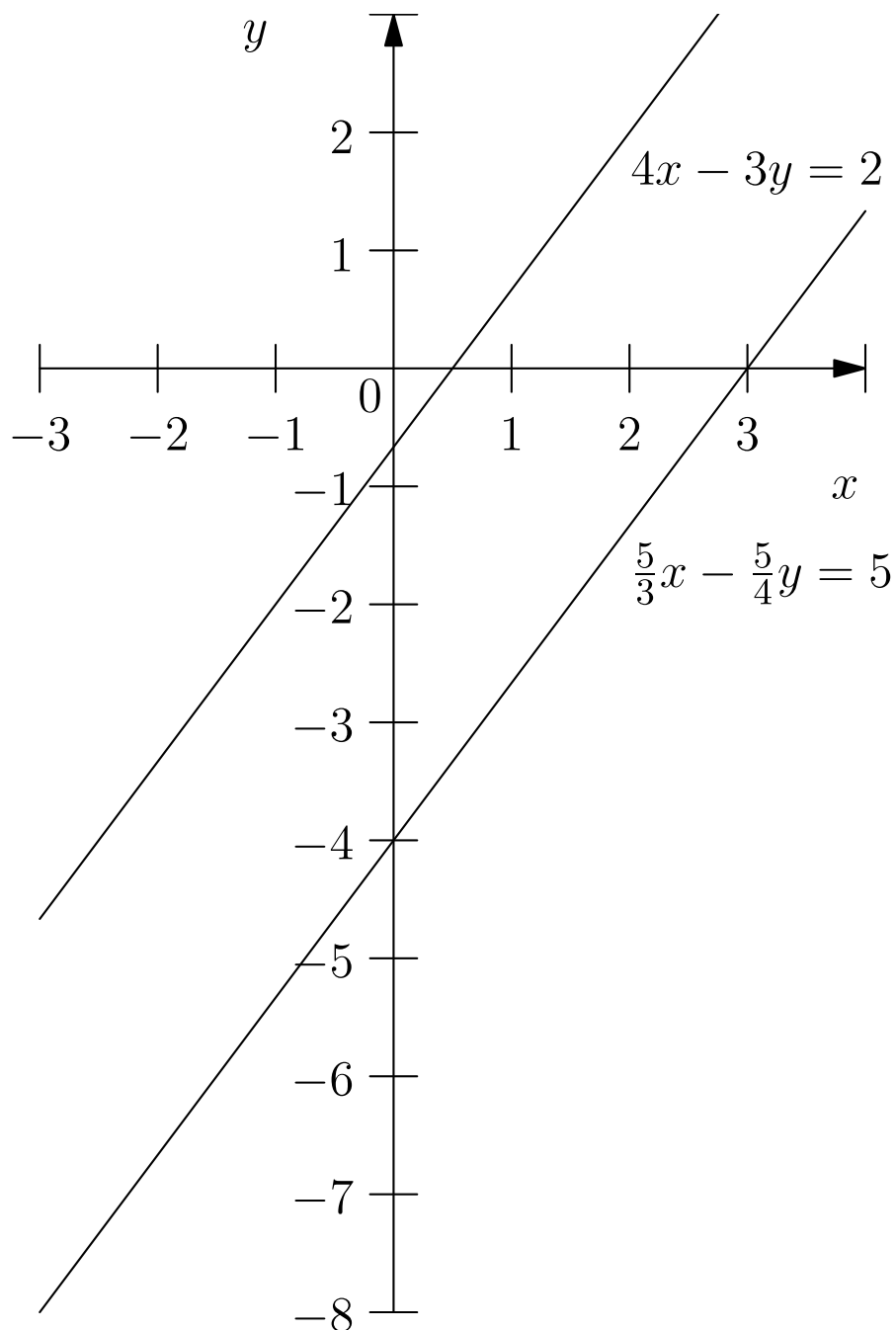


Figure 11 – Deux équations telles que le déterminant soit nul, MAIS qui sont pas équivalentes. On remarque que les droites sont parallèles.

Question 17

1. Calculer les vecteurs directeurs des droites d'équations :
 - a) $4x - 3y = 2$
 - b) $\frac{5}{3}x - \frac{5}{4}y = 5$
2. Montrer que le point $(3, 0)$ appartient à la deuxième équation **mais pas** à la première.
3. Montrer que les droites sont parallèles en calculant le déterminant des vecteurs trouvés à la question 1.

6 Trouver un point sur la droite

Dans cette partie, on explique comment trouver un point solution d'une équation cartésienne.
Fixons l'équation suivante :

$$3x - 2y = 8$$

Proposition 9

Pour trouver un point (x,y) solution d'une équation cartésienne $ax + by = c$, on peut commencer par **choisir** une valeur de x ou bien **choisir** une valeur de y , puis de résoudre une équation pour trouver la valeur de l'autre point. Cette méthode marche très bien, et peut même être appliquée aux cas particuliers en réfléchissant un peu.

Exemple 9

Si l'on peut choisir une valeur pour x ou bien pour y , autant prendre des valeurs **qui simplifient nos calculs**. On va donc choisir 0.

On rappelle que l'on a l'équation suivante :

$$3x - 2y = 8$$

Choisissons pour x la valeur 0. On obtient alors l'équation :

$$-2y = 8 \quad x = 0 \quad \text{En effet, } 3x = 0 \text{ puisque } x = 0$$

On résout :

$$\begin{array}{ll} -2y = 8 & x = 0 \\ y = \frac{8}{-2} & x = 0 \\ y = -4 & x = 0 \end{array}$$

Ainsi, on trouve une solution donnée par $x = 0$ et $y = -4$. Donc, on en déduit un point sur la droite de coordonné $(0; -4)$.

Question 18

Trouver un autre point solution de l'équation $3x - 2y = 8$ en choisissant $y = 0$ cette fois-ci.

7 Représenter une droite à partir d'une équation cartésienne

Dans cette partie, nous allons nous fixer comme objectif de représenter les solutions de l'équation cartésienne suivante :

$$3x - 2y = 8$$

Il existe plusieurs méthodes, que nous allons détailler.

7.1 En utilisant un vecteur directeur, méthode 1

Proposition 10

Pour représenter une droite solution d'une équation cartésienne en utilisant un vecteur directeur :

1. On calcule un vecteur directeur de l'équation cartésienne,
2. puis on trouve un point sur la droite,
3. on part du point trouvé, on suit la direction du vecteur, et le tour est joué.

Exemple 10

Grâce à une proposition vue précédemment, on sait que l'équation :

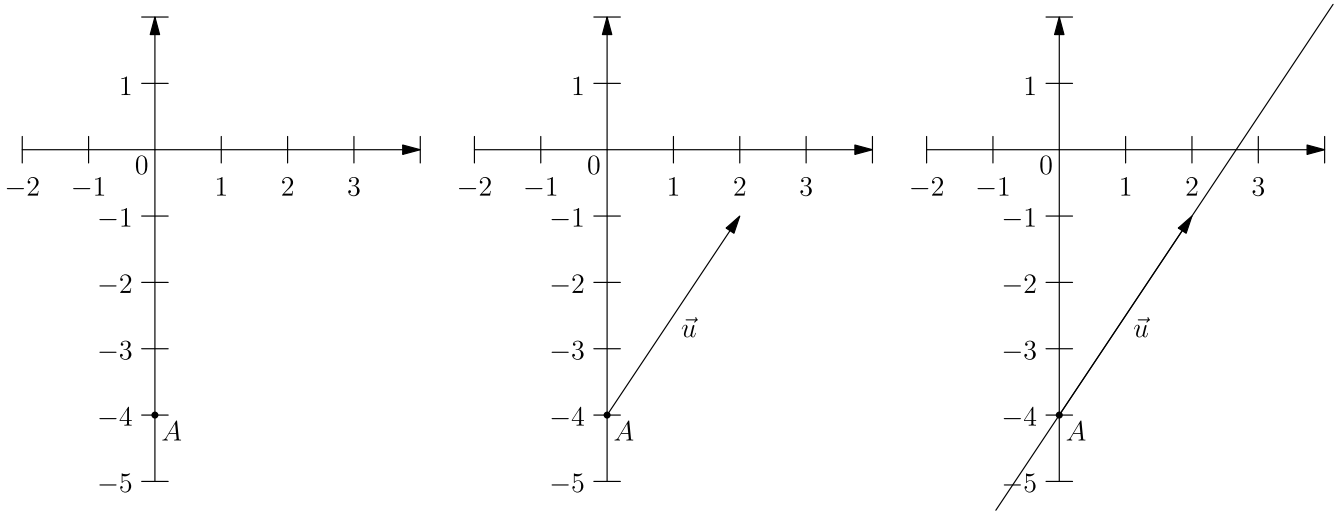
$$3x - 2y = 8$$

admet comme un vecteur directeur \vec{u} par :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

D'après la section précédente, où nous avons vu comment trouver un point sur une droite, on peut trouver comme point par exemple $A = (0; -4)$.

On peut maintenant représenter la droite. Les étapes sont données en image ci-dessous.



Proposition 11

De gauche à droite dans les images précédentes :

1. je place le point A
2. je place mon vecteur \vec{u} **à partir de** A
3. je prolonge ma droite !

7.2 En trouvant deux points différents, méthode 2

Proposition 12

Deux points différents suffisent pour définir une droite

On peut donc aussi utiliser la section précédente deux fois d'affilés, pour tracer la droite.

Exemple 11

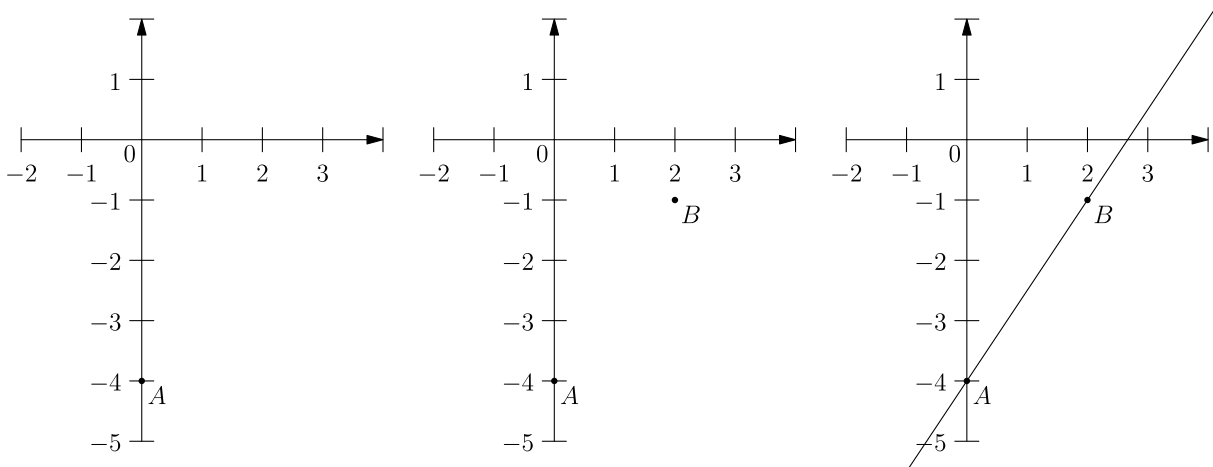
On savait que le point $A = (0; -4)$ appartenait à la droite d'équation $3x - 2y = 8$, donc il nous faut trouver un autre point. On a le choix !

- Utiliser $x = 1$, puisque l'on a pris $x = 0$ pour trouver A .
- Utiliser $x = 2$ pour avoir «plus d'espace» pour tracer notre droite,
- Ou bien choisir $y = 0$ pour avoir des calculs simplifiées.
- etc.

Ici, je choisis ici de prendre $x = 2$ pour changer. On obtient alors :

$3x - 2y = 8$	$x = 2$
$3 \times 2 - 2y = 8$	$x = 2$
$6 - 2y = 8$	$x = 2$
$-2y = 2$	$x = 2$
$y = -1$	$x = 2$

On trouve ainsi un deuxième point, que l'on appelle $B = (2; -1)$. On peut ainsi représenter notre droite !



Exemple 12

De gauche à droite :

1. On place le point A ,
2. On place le point B ,
3. On relit les deux points en prolongeant la droite

7.3 À vous de jouer !

En utilisant la méthode de votre choix, **représentez les droites suivantes sur les carreaux d'une feuille, ou de votre ardoise**. Les solutions sont données à partir de la page suivante.

1. $4x - 5y = 2$
2. $-3x - 5y = 2$
3. $4x + 5y = 2$
4. $4x + 5y = -2$

Question 19

1. Que se passe-t-il lorsque l'on change le signe du paramètre a sans changer celui de b ?
2. Que se passe-t-il lorsque l'on modifie la valeur de c ?

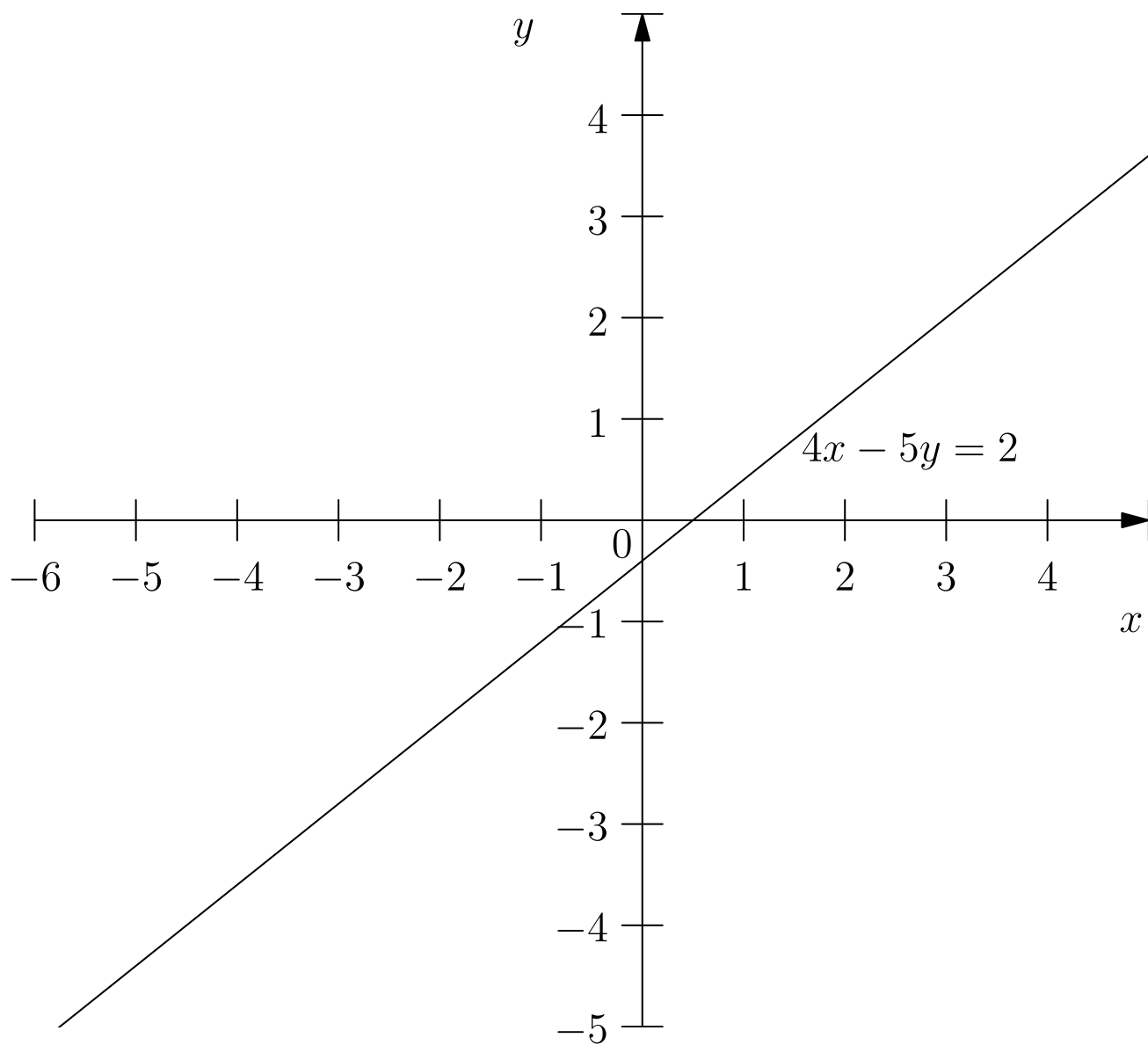


Figure 12 – On peut avoir une droite croissante avec $b < 0$, mais ce n'est pas la règle.

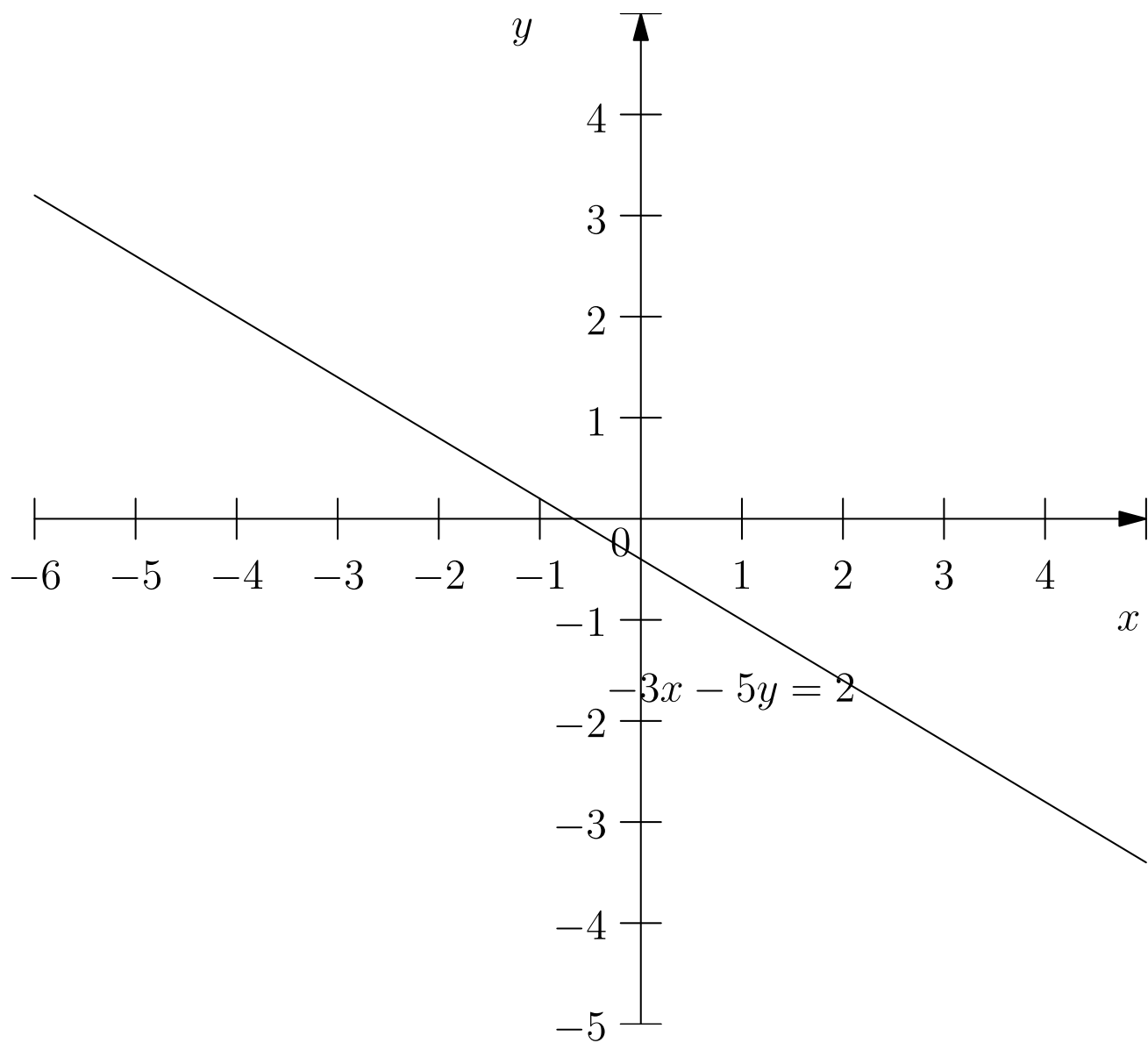


Figure 13 – La preuve, ici $b < 0$ mais pourtant la droite est décroissante. En fait la croissance ou non de la droite dépend de a **et** b .

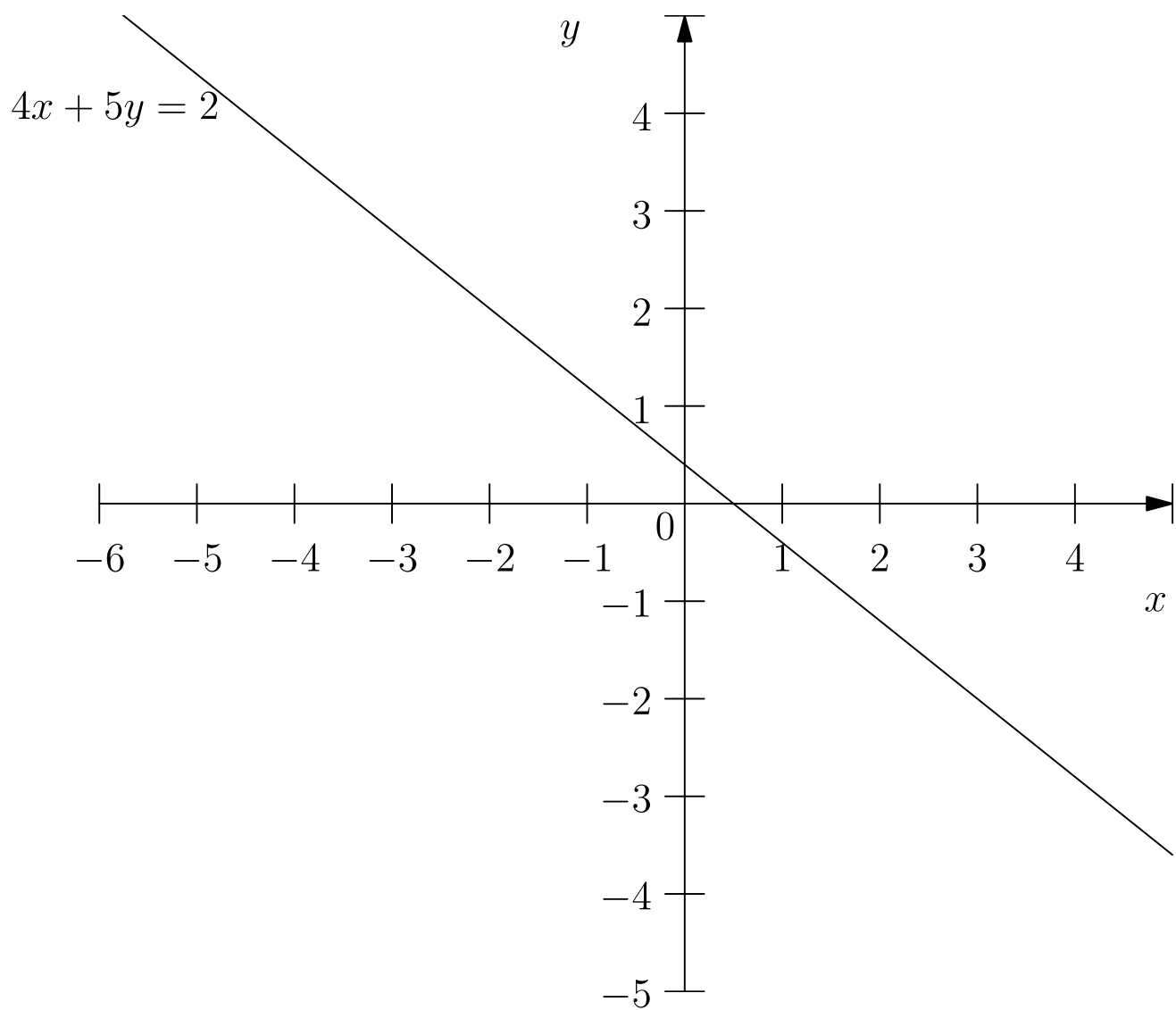


Figure 14 – Si on choisit a et b positif, on retrouve encore une droite décroissante (!)

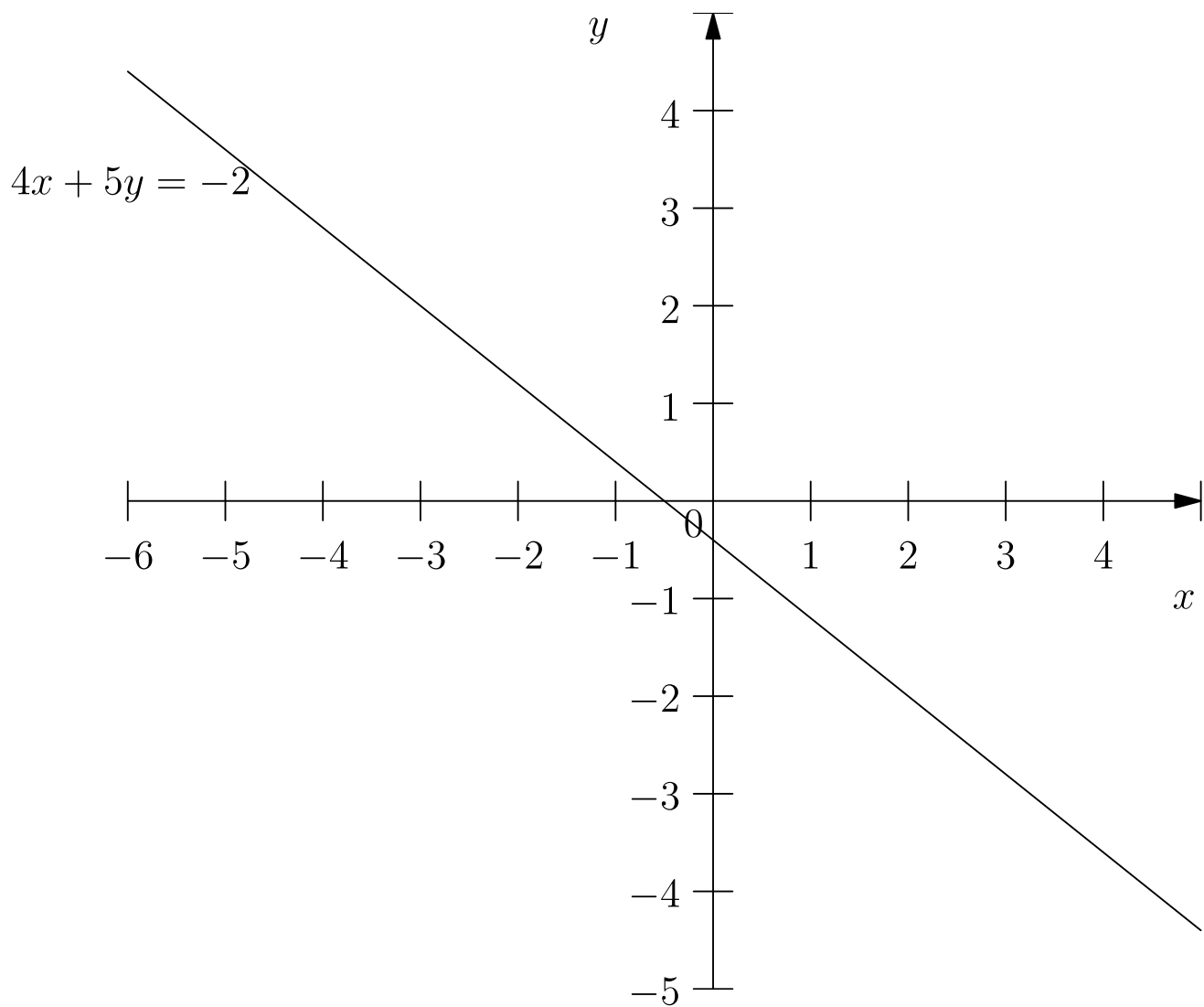


Figure 15 – Avez-vous remarqué la différence entre cette droite et la précédente ?

8 Intersection de deux droites

Si vous êtes ici, c'est que vous savez représenter à la perfection une droite à partir d'une équation cartésienne.