Tout savoir sur les fonctions affines

L'essentiel à retenir

1 Définition

Définition 1: Fonctions affines

Une fonction affine est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b$$

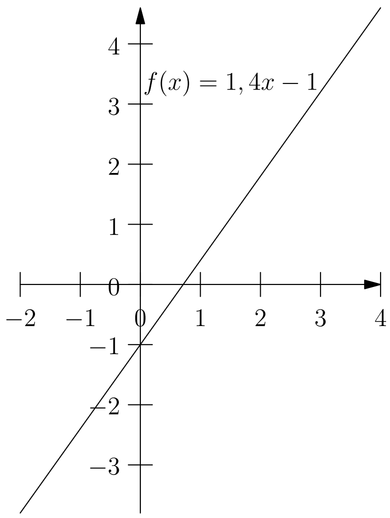
avec a et b des constantes réelles, $a \neq 0$ qui porte le nom :
- a est le **coefficient directeur**, car selon son signe f est croissante ou décroissante sur $\mathbb{R}$.
- b est **l'ordonnée à l'origine**, car $f(0) = b$

2 Représentation graphique

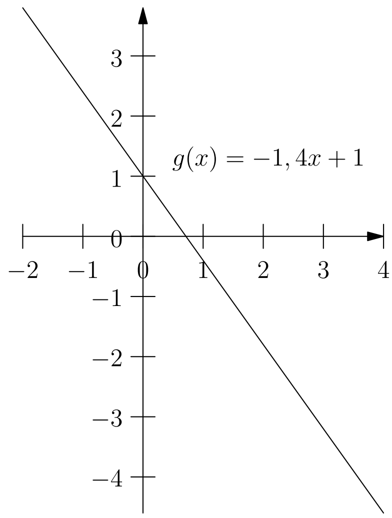
2.1 Les fonctions affines sont des droites

Proposition 1

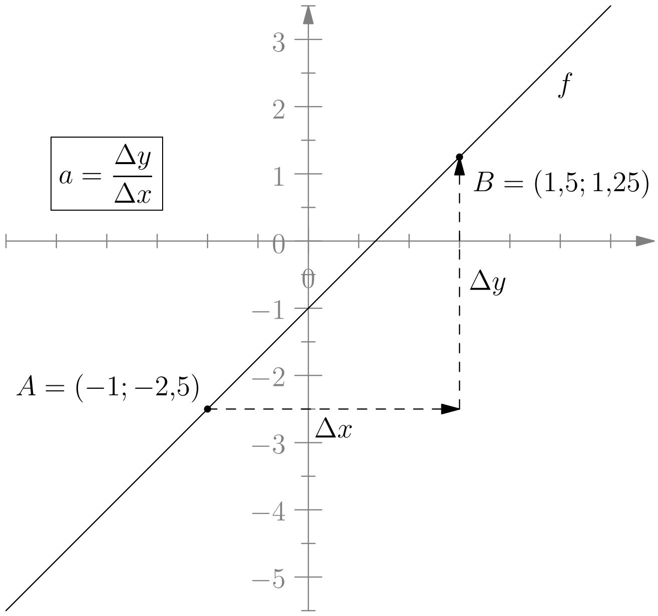
La courbe représentative d'une fonction affine est une **droite**.



Ci-contre, voici deux exemples de fonction affine.
f est croissante sur $\mathbb{R}$, alors que g est décroissante.



2.2 Lire le coefficient directeur d'une droite



Exemple 1

Ici, on peut lire deux points A et B qui appartiennent à la droite, avec :

$$A = (-1; -2{,}5) \quad \text{et} \quad B = (1{,}5; 1{,}25)$$

On peut calculer Δx et Δy par :

$$\begin{aligned} \Delta x &= 1{,}5 - (-1) & \Delta y &= 1{,}25 - (-2{,}5) \\ \Delta x &= 2{,}5 & \Delta y &= 3{,}75 \end{aligned}$$

On en déduit que le coefficient directeur a de la fonction affine f vaut :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3{,}75}{2{,}5} = 1{,}5$$

Donc $\boxed{a = 1{,}5}$

3 Antécédent de 0

Proposition 2

Pour trouver les antécédents de 0, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Si $f(x) = ax + b$, alors l'antécédent de 0 est $\boxed{x = \dfrac{-b}{a}}$.

Exemple 2

Si $f(x) = -3x + 5$ alors résoudre $f(x) = 0$ revient à la résolution suivante :

$$\begin{aligned} -3x + 5 &= 0 \\ -3x &= -5 \\ x &= \frac{-5}{-3} \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Donc l'antécédent de 0 par la fonction f est $\boxed{x = \dfrac{5}{3}}$. Autrement dit $f\left(\frac{5}{3}\right) = 0$

4 Tableau de variation

Proposition 3

Pour $f(x) = ax + b$ une fonction affine :

1. Si $a > 0$, alors f est **croissante** sur $\mathbb{R}$,
2. Si $a < 0$ alors f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3

Voici deux exemples de rédaction :

1. Si $g(x) = 3x - 2$ alors $a = 3 > 0$ donc g est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
2. Si $f(x) = 8 - 4x$ alors $a = -4 < 0$ donc f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

5 Tableau de signe

On utilise les résultats de la partie 3 pour trouver l'antécédent par une fonction affine de 0 et pouvoir compléter le tableau de signe.

Proposition 4

Si f est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$, alors son tableau de signe est donné par le tableau 1

Proposition 5

Si f est une fonction affine décroissante sur $\mathbb{R}$, alors son tableau de signe est donné par le tableau 2

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Figure 1 – Tableau de signe d'une fonction affine croissante ($a > 0$)

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Figure 2 – Tableau de signe d'une fonction affine décroissante ($a < 0$)

6 Tableau de signe d'un produit de fonctions affines

Proposition 6

Si $f(x) = f_1(x) \times f_2(x)$ avec f_1 et f_2 deux fonctions affines, alors :

1. $f(x)$ est positif si et seulement si $f_1(x)$ **et** $f_2(x)$ sont de même signe.
2. $f(x)$ est égal à 0 si et seulement si $f_1(x)$ **ou** $f_2(x)$ est égal à 0
3. Dans tous les autres cas, $f(x)$ est négatif.

Exemple 4

Soit la fonction $f(x) = (4x - 5)(-2x + 2)$. Donner le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$.

7 Tableau de signe d'un quotient de fonctions affines

Proposition 7

Si $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ avec f_1 et f_2 deux fonctions affines, alors f est définie sur $\mathbb{R}$ sauf pour l'antécédent de 0 de f_2 (car on ne peut pas diviser par 0).
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ excepté l'antécédent de 0 par f_2, on a :

1. $f(x)$ est positif si et seulement si $f_1(x)$ **et** $f_2(x)$ sont de même signe.
2. $f(x)$ est égal à 0 si et seulement si $f_1(x)$ est égal à 0
3. Dans tous les autres cas, $f(x)$ est négatif.

Exemple 5

Soit la fonction $f(x) = \frac{4x-3}{2x+1}$ Donner le tableau de signe de f sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}\}$.