Cours : vecteurs dans un repère

1 Base, et base orthonormé

Définition 1: Base du plan

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires non nuls. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base vectorielle du plan.

Définition 2: Décomposition dans une base

Soit une base vectorielle $(\vec{u}, \vec{v})$. On dit qu'un vecteur $\vec{w}$ se **décompose** dans cette base s'il existe deux nombres a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

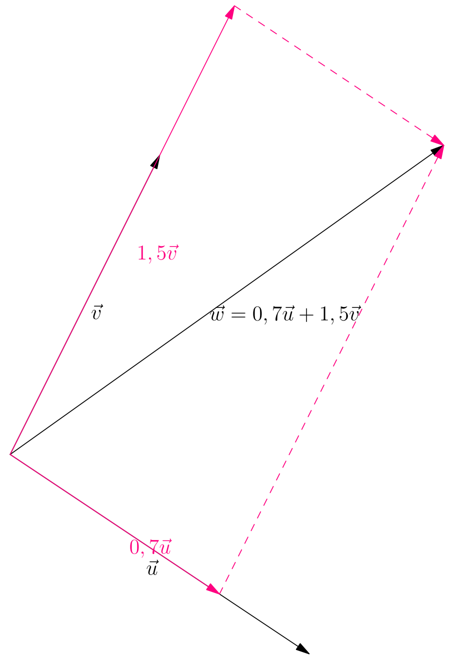


Figure 1 – Un exemple de base donné par $(\vec{u}, \vec{v})$. On a décomposé le vecteur $\vec{w}$.

Proposition 1

Tout vecteur $\vec{w}$ peut se décomposer de manière unique dans une base $(\vec{u}, \vec{v})$ donnée.

Définition 3: Coordonnées

On appelle coordonnée du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ les nombres a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ et on écrira $\vec{w} = (a; b)$, ou bien $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Exemple 1

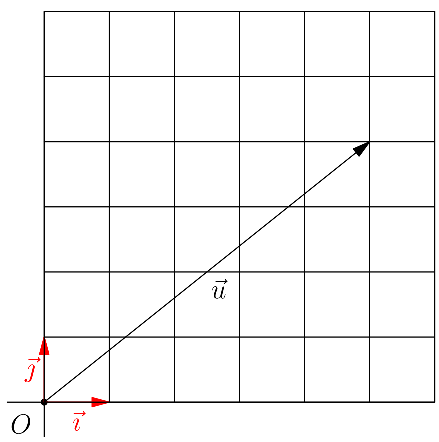
Dans la situation précédente, on a $\vec{w} = (0{,}7; 1{,}5)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

Définition 4: Base orthonormé

Une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base telle que :
- La norme de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ vaut 1.
- Les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires.

Exemple 2

Comment se décompose $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?



2 Coordonnées d'un vecteur dans une base

Définition 5: Coordonnées d'un vecteur dans un base

Si on a :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad x,y \in \mathbb{R}$$

Alors, on dira que les coordonnées du vecteurs $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, sont $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Proposition 2

Deux vecteurs qui admettent les même coordonnées dans une base sont égaux.

Proposition 3

Les coordonnées du vecteur somme de deux vecteurs est donné par la somme des coordonnées.

Proposition 4

Le produit par un scalaire multiplie chacune des coordonnées par ce scalaire.

Proposition 5

Dans une base orthonormée, la norme d'un vecteur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ est donnée par :

$$\vec{u} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3 Repère orthonormé

Définition 6: Repère orthonormé

On appelle repère orthonormé la donnée d'un point O que l'on appelle l'origine et d'une base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j})$.
Pour tout x, y des nombres réels, nous avons :

$$M = (x; y) \iff \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Proposition 6

Soit $A = (x_A; y_A)$ et $B = (x_B; y_B)$ deux points dans un repère orthonormé. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont données par :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Proposition 7

Trois points A, B et C non confondus sont alignés si et seulement si deux vecteurs formés par deux points différents parmi A, B et C sont colinéaires.