Équations cartésiennes et équation réduite du plan

Table des matières

1 Avant de commencer la lecture de ce cours

1.1 Les notions qu'il faut maîtriser

Pour ce cours, vous *avez* besoin des notions suivantes :

— vecteurs colinéaires,

— déterminant de deux vecteurs,

— déterminer les coordonnées d'un vecteur sachant ses deux extrémités.

— les fonctions affines

Pour savoir si vous savez suffisamment les notions suivantes, répondez aux questions suivantes :

1. Savez-vous représenter deux vecteurs colinéaires ?
2. Quelle est la définition de deux vecteurs colinéaires ?
3. Que peut-on dire du déterminant de deux vecteurs colinéaires ?
4. Quelle est la formule du déterminant ? À quoi fait-elle penser ?
5. Sans faire de calcul, pourquoi voit-on que les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3.6 \\ 9.6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ?
6. Quel sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sachant que $A(-3;-1)$ et $B(4,5)$?

7. Quel est le coefficient directeur de la fonction affine dont la courbe représentative passe par les points A et B ?

Concernant la dernière question, voici un programme python qui pourrait vous donner la solution en l'éxécutant, et qui vous donne un moyen de calculer automatiquement le déterminant de deux vecteurs.
La fonction 4 demande deux vecteurs et retourne le déterminant des deux vecteurs qu'on lui donne.
La fonction 1 demande deux points, et retourne le vecteur qui admet ces deux points aux extrémités.
Vous remarquez que pour Python, un point et un vecteur peuvent être codé de la même manière, avec des crochets ([et], rien à voir avec les intervalles).

```
1  def coordonneVecteur(a, b) :
2      return b[0] - a[0], b[1] - a[1]
3  
4  def determinant(u, v) :
5      return u[0]*v[1] - u[1]*v[0]
6  
7  a = [-3, 1]
8  b = [4, 5]
9  
10 u = coordonneVecteur(a, b)
11 v = [3, 8]
12 
13 print("Le vecteur est de coordonne", u)
14 print("u et v sont de determinant", determinant(u, v))
```

```
Le vecteur est de coordonne (7, 4)
u et v sont de determinant 44
```

1.2 À quoi sert ce chapitre ?

Des droites, vous en avez déjà croisées beaucoup, avec les fonctions affines, et avec les vecteurs. Ce chapitre donne un dernier point de vue, plus général, et plus complet, sur la question. Il sera l'occasion de faire un vrai lien entre les vecteurs et les fonctions affines, dans un cadre plus élégant, et facile à comprendre.

2 Définition d'une équation cartésienne

Définition 1: Point de coordonnée (x, y)

Pour tout le cours, on considère que le plan est munit d'un repère orthonormée $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (la fameuse «base carreaux» !). Alors, on note $M(x, y)$ le point tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

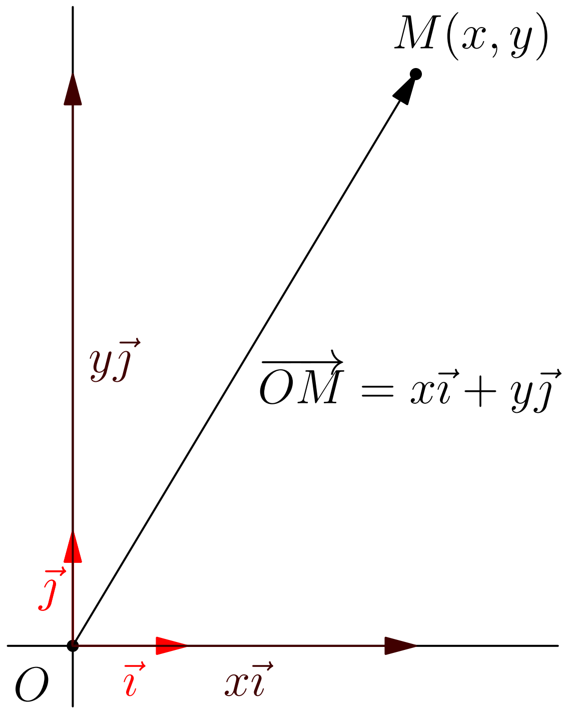

Figure 1 – Voici un point M de coordonnée (x, y).

Exemple 1

On dira donc y pour désigner les ordonnées, et x pour désigner les abscisses dans le cours.

Définition 2: Équation cartésiennes

Une équation cartésienne du plan est une équation aux inconnues x et y de la forme :

$$ax + by = c$$

Les constantes a, b et c sont des nombres réels quelconques mais a et b ne peuvent pas être nuls simultanément.

Exemple 2

Voici des exemples d'équations cartésiennes :

1. $3x - 4y = 2$ ($a = 3$, $b = -4$ et $c = 2$)
2. $2y = 1$ (ici, $a = 0$)
3. $3x = 1$ (ici, c'est b qui vaut 0)
4. $2x = 3y - 2$

Pour la dernière, on peut *manipuler l'équation*, en effet :

$$\begin{aligned} 2x &= 3y - 2 \\ 2x - 3y &= -2 \\ 2x - 3y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

sont des équations équivalentes. Mais celle qui se rapproche le plus de la définition (et qui permet de lire directement les valeurs de a, b, et c) est la deuxième.

Question 1

Pour chaque équation cartésienne de l'exemple précédent, donnez la valeur de a, b et c de la définition.

Question 2

Pourquoi l'équation :

$$x^2 + \sqrt{y} = 3$$

n'est pas une équation cartésienne ?

Question 3

Pourquoi l'équation :

$$\sqrt{2}x + 3y - 2 = 0$$

est une équation cartésienne ? Quelles sont les valeurs de a, b et c ?

3 Résoudre une équation cartésienne

On souhaite décrire les solutions des équations cartésiennes.

Proposition 1

Une équation cartésienne admet une **infinité** de solutions.

Question 4

Pourquoi une équation comme par exemple $x+y = 5$ aurait une infinité de solutions ? (j'ai pris $a = 1$,$b = 1$ et $c = 5$)

Reponse 1

Eh bien, on peut facilement en citer plusieurs :

— $x = 1$, $y = 4$

— $x = 2$, $y = 3$

— $x = 3$, $y = 2$

— $x = 4$, $y = 1$

— $x = 5$, $y = 0$

— $x = 6$, $y = -1$

Et on peut citer des solutions décimales :

— $x = 2{,}1$, $y = 2,9$

— $x = 2{,}2$, $y = 2{,}8$

— $x = 2{,}3$, $y = 2{,}7$

— etc.

et même des solutions non rationnelles :

— $x = \sqrt{2} \approx 1{,}414213$, $y = 5 - \sqrt{2} \approx 3.5857$

puisque $\sqrt{2} + 5 - \sqrt{2} = 5$ sans trop d'effort

Voici le théorème le plus important de ce cours :

Proposition 2

L'ensemble des solutions (x, y) d'une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by = c$$

avec a et b non nul simultanément, **forme une droite du plan**

Question 5

Représentez les solutions entières trouvées dans la question précédente dans le plan. On rappelle que x correspond aux abscisses, et y aux ordonnées.

Reponse 2

Vous devriez trouver la droite représentée à la figure 2

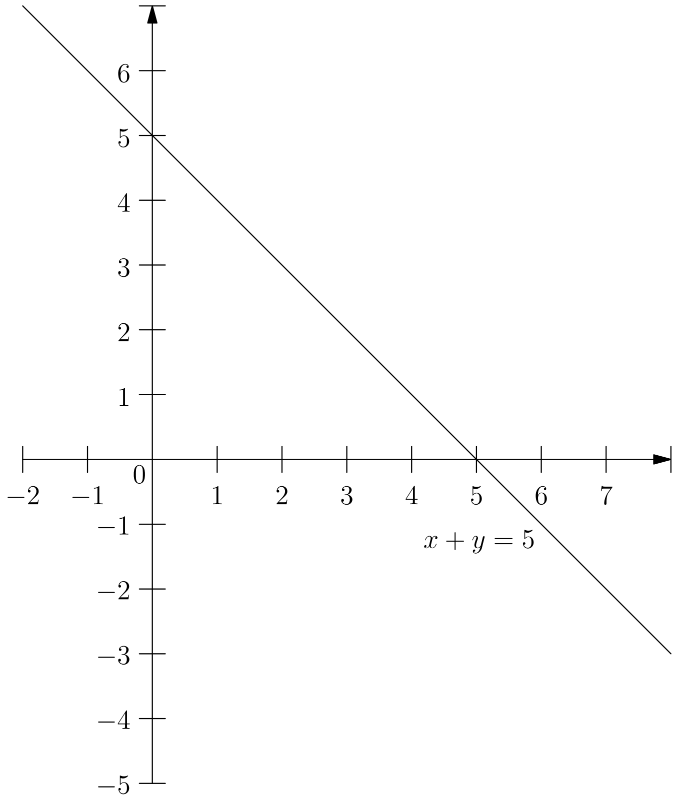

Figure 2 – L'ensemble des solutions de l'équation $x + y = 5$