Cous sur l’arithmétique

Table des matières

1 Multiples et diviseurs d'un nombre entier **3**
1.1 Multiple . . . 3
1.2 Diviseur . . . 4

2 Nombres premiers **6**
2.1 Définition d'un nombre premier . . . 6
2.2 Montrer qu'un nombre entier est premier . . . 6
2.3 Propriété fondamentale des nombres premiers . . . 7
2.4 La liste des nombres premiers . . . 8

3 Division euclidienne **10**
3.1 Division euclidien : quotient et reste . . . 10
3.2 Division euclidienne par 2 . . . 11

4 PGCD, PPCM **14**
4.1 Plus grand diviseur commun . . . 14
4.2 Plus petit commun multiple . . . 14
4.3 Le point sur les fractions . . . 15
4.4 (hors programme) Propriété surprenante du PGCD et PGCM . . . 15

1 Multiples et diviseurs d'un nombre entier

1.1 Multiple

Définition 1: Multiples d'un nombre entier

Soit $n \in \mathbb{Z}$ un nombre relatif. Alors, on appelle *multiple* de n tous les nombres de la forme $kn = k \times n$ avec $k \in \mathbb{Z}$ un nombre entier relatif.

Exemple 1

On peut représenter l'ensemble des multiples d'un nombre à l'aide de la représentation ci-dessous.
Ici, vous avez un aperçu des multiples de 4.

$\cdots$	-20	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16	20	$\cdots$
$\cdots$	$4\times(-5)$	$4\times(-4)$	$4\times(-3)$	$4\times(-2)$	$4\times(-1)$	4×0	4×1	4×2	4×3	4×4	4×5	$\cdots$

Question 1

1. Peut-on dire que l'ensemble des multiples d'un nombre correspond aux tables de multiplication de ce nombre ?
2. Combien un nombre admet-il de multiples ?
3. Donner la «bande des multiples» de 3. Rappelez le critère rapide qui permet de savoir si un nombre est divisible par 3 ou non.
4. Donner la «bande des multiples» de 6. Y'a-t-il des éléments en commun avec la bande des multiples de 3 ? Pourquoi ?

Exemple 2

Voici les diviseurs de 35 :

$\cdots$	-175	-140	-105	-70	-35	0	35	70	105	140	175	$\cdots$
$\cdots$	$35\times(-5)$	$35\times(-4)$	$35\times(-3)$	$35\times(-2)$	$35\times(-1)$	35×0	35×1	35×2	35×3	35×4	35×5	$\cdots$

Figure 1.1 – Multiple de 35

Question 2

Par rapport à définition des multiples d'un nombre dans la figure 1.1, à quoi correspond k ? À quoi correspond n ? À quoi correspond les multiples.

1.2 Diviseur

Définition 2: Diviseurs d'un nombre entier

Soit n un nombre entier. Alors un diviseur de n est un nombre k tel que n est un multiple de k.

Exemple 3

Les diviseurs des nombres dans les bandes du multiples sont présents dans la seconde ligne de la bande. Regardez les multiples de 23 par exemple, à la figure 1.2.

$\cdots$	-115	-92	-69	-46	-23	0	23	46	69	92	115	$\cdots$
$\cdots$	$23\times(-5)$	$23\times(-4)$	$23\times(-3)$	$23\times(-2)$	$23\times(-1)$	23×0	23×1	23×2	23×3	23×4	23×5	$\cdots$

Figure 1.2 – Multiple de 23

Proposition 1

On voit donc que le terme **multiple** et **diviseur** sont en dualité. L'un est lié à l'autre, et le point de vue est inversé. Il faut prendre le temps d'utiliser ce vocabulaire.

Exemple 4

On représentera l'ensemble des diviseurs positifs d'un nombre à l'aide de la boite de la figure 1.3 dans le cours. Par exemple, voici la liste des diviseurs de 30.

129			
1	3	43	129

Figure 1.3 – Liste des diviseurs de 30

Question 3

À partir de la situation $23 \times 4 = 92$, faites une pharse qui contient le mot :

1. «multiple»
2. «diviseur»

(vous ferez donc deux phrases différentes).

Proposition 2

L'entier 1 est le seul diviseur positif de tous les nombres.

Démonstration 1

Tout nombre n peut s'écrire $n = n \times 1$, donc 1 est un diviseur de n, et n est aussi un diviseur de n. De même il y a -1 et $-n$. Donc tout nombre entier n a au minimum **deux** diviseurs **positifs** : n et 1.

Question 4

Comment appelle-t-on les nombres qui n'admettent comme diviseur uniquement 1 et eux-même ?

Question 5

1. Faites la liste des diviseurs positifs de 25.
2. De même pour 26.
3. Que peut-on dire des nombres qui admettent exactement trois diviseurs positifs ?

2 Nombres premiers

2.1 Définition d'un nombre premier

Définition 3: Nombres premiers

Un nombre entier strictement plus grand que 1 est dit premier si et seulement si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui même.

Question 6

D'après les liste de diviseurs ci-dessous, quels sont les nombres qui sont premiers ?

245
1 5 7 35 49 245

109
1 109

1427
1 1427

110
1 2 5 10 11 22 55 110

99
1 3 9 11 33 99

34
1 2 17 34

25
1 5 25

1234
1 2 617 1234

2.2 Montrer qu'un nombre entier est premier

Proposition 3

Pour montrer qu'un nombre est premier, il suffit de vérifier que sa liste des diviseurs est réduite à 1 et lui-même.

Proposition 4

Pour montrer qu'un nombre entier est premier, il suffit de montrer qu'aucun *nombre premier* plus petit que lui ne le divise.

Proposition 5

Un nombre n n'est pas premier si et seulement si il existe un diviseur d de n tel que :

$$1 < d \leq \sqrt{n}$$

Autrement dit, on peut se contenter de chercher un diviseur de n sur l'intervalle $]1; \sqrt{n}]$, ce qui est plus réduit que $]1; n[$!

Exemple 5

On veut montrer que 113 est premier. On a $\sqrt{113} \approx 10{,}63 > 10$. La liste des nombres premiers plus petit ou égaux à 10 est la suivante :

$$2, 3, 5, 7$$

Donc si aucun de ces nombres ne divise 113, on aura montrer que 113 est premier.
Or :

- 113 n'est pas divisible par 2 car 113 est impair (il termine par 3)
- 113 n'est pas divisible par 3 car $1 + 1 + 3 = 5$ qui n'est pas divisible par 3
- 113 n'est pas divisible par 5 car il ne se termine pas par un 0 ou un 5
- 113 n'est pas divisible par 7 car $113 = 7 \times 16 + 1$ (le reste de la division euclidienne de 113 par 7 a un reste non nul).

Donc 113 est bien un nombre premier, et on vérifie qu'il est bien présent dans notre tableau vu plus loin, le tableau 2.1.

Question 7

Montrer que 137 est premier.

Question 8

Montrer que 129 n'est pas un nombre premier.

Question 9

Montrer que 143 n'est pas un nombre premier.

2.3 Propriété fondamentale des nombres premiers

Proposition 6

Tout nombre entier admet une **unique décomposition** en facteur(s) premier(s) (cette décomposition est unique à l'odre des facteurs près).

Exemple 6

Soit le nombre 264. Alors, sa décomposition en nombre premier est :

$$264 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 11 = 2^3 \times 3 \times 11$$

Question 10

Ça fait combien déjà 2^3 ? Si vous avez répondu 6, je pense qu'il est temps de faire une petite pause, non ?

Question 11

1. Trouver la décomposition de 245, de 352 et 1000.
2. Pourquoi la décomposition de 24 n'est pas $24 = 6 \times 4$?
3. Regarde la figure 2.1. Que peut-on dire des diviseurs qui apparaissent dans la liste et de la décomposition en nombre premier de 265 ?

265			
1	5	53	265

Figure 2.1 – Liste des diviseurs de 265

2.4 La liste des nombres premiers

Proposition 7

La liste des nombres premiers est **infinie**. Autrement dit, il n'existe pas d'entier premier plus grand que tous les autres.
Il existe des théorèmes très compliqué à démontrer en mathématiques qui expliquent la «répartition» des nombres premiers. En particulier, plus on avance dans la liste des nombres, plus les nombres premiers sont «rares» !

Démonstration 2

L'idée de la démonstration est de montrer qui s'il y en a un plus grand noté p_n, alors on peut en construire un entier N premier plus grand que p_n. Ce qui montre bien qu'il n'y a pas de plus grand nombre premier.
On peut construire N de la manière suivante : on forme produit de tous les nombres premiers p_1, p_2, etc, plus petit que p_n auquel on ajoute 1 :

$$N = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$$

Ainsi aucun nombre plus petit que N ne le divise à part 1. Car aucun nombre premier parmi la liste $\{p_1, \ldots, p_n\}$ ne divise N. Ce qui permet de dire que N est premier d'après une proposition vue auparavant. Donc, on a une contradiction, puisque $N > p_n$. La liste les nombres premiers est donc infinie.

Exemple 7

À l'aide de Python, on peut facilement fournir la liste des «petits» nombres premiers. Le programme 1 donne la liste des nombres premiers plus petit que 1000. La liste générée par ce programme est à retrouver au tableau 2.1.

```python
import sympy #permet d'utiliser la fonction isprime

listePremier = []
for i in range(1000) :
    if sympy.isprime(i) : #isprime nous indique si le nombre testé (ici, i) est premier ou non
        listePremier.append(i)
return listePremier
```

Listing 1: Programme qui permet de lister les nombres premiers plus petit que 1000

Table 2.1 – Liste des nombres premiers plus petit que 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	283
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433	439
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	661
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827	829
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911	919
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997	

Question 12

Expliquez sur le tableau 2.1 le phénomène de « rarification » des nombres premiers, expliqué au théorème précédent.

3 Division euclidienne

3.1 Division euclidien : quotient et reste

Proposition 8

Soit $a > b$ deux nombres entiers naturels positifs.
Alors, il existe un unique couple d'entiers positifs q et r tel que

1. $a = bq + r$
2. $0 \leq r < b$

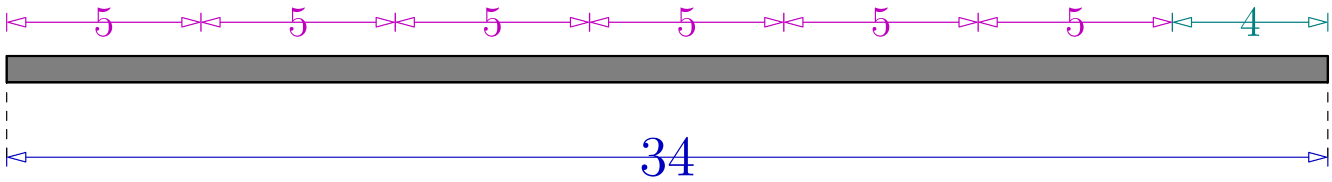
Définition 4: Reste de la division euclidienne

Dans la proposition précédente, on appelle q le *quotient* et r le *reste* de la division euclidienne de a par b.

Exemple 8

Regarde l'image suivante, et explique pourquoi si on prend $a = 34$ et $b = 5$ on obtient $q = 6$ et $r = 4$.
En effet, $34 = 5 \times 6 + 4$. On dit donc que le reste de la division euclidienne de 34 par 5 est 4.

Division euclidienne de 34 par 5



Exemple 9

Pour obtenir rapidement le quotient et le reste d'une division euclidienne à la calculatrice, voici ce que vous pouvez faire. Ici, on cherche à retrouver le résultat de l'exemple précédent.

1. Calculer $34 \div 5 = 6{,}8$, arrondissez à l'entier inférieure, et vous obtenez $q = 6$
2. Maintenant que vous connaissez q, vous pouvez en déduire r par $a - bq = r$ autrement dit $r = 34 - 5 \times 6 = 4$.
3. Vous trouvez bien $q = 6$ et $r = 4$

Question 13

1. Quelle est le reste de la division euclidienne de 340 par 50 ?
2. Quelle est le reste de la division euclidienne de 134 par 5 ?
3. Quelle est le reste de la division euclidienne de 35 par 5 ?

Proposition 9

Le reste d'une division euclidienne de a par b est nul **si et seulement si** b divise a.

Exemple 10

Voici un exemple avec $a = 40$ et $b = 5$, on voit que le reste est nul, et ainsi on a bien 5 qui divise 40, ou dit autrement, 40 est un multiple de 5.

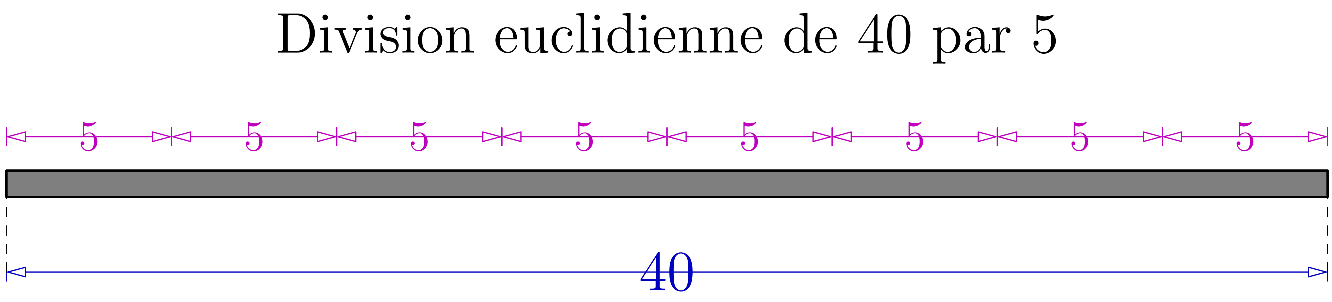


Figure 3.1 – 5 divise bien 40 car la division euclidienne de 40 par 5 a un reste nul.

Exemple 11

Réciproquement, si le reste d'une division euclidienne de a par b n'est pas nul, alors b ne divise pas a. Prenons $a = 2341$ et $b = 301$ pour le voir sur la figure 3.2. Le reste (ici, $r = 234$) n'est pas nul, donc 301 ne divise pas 2341.

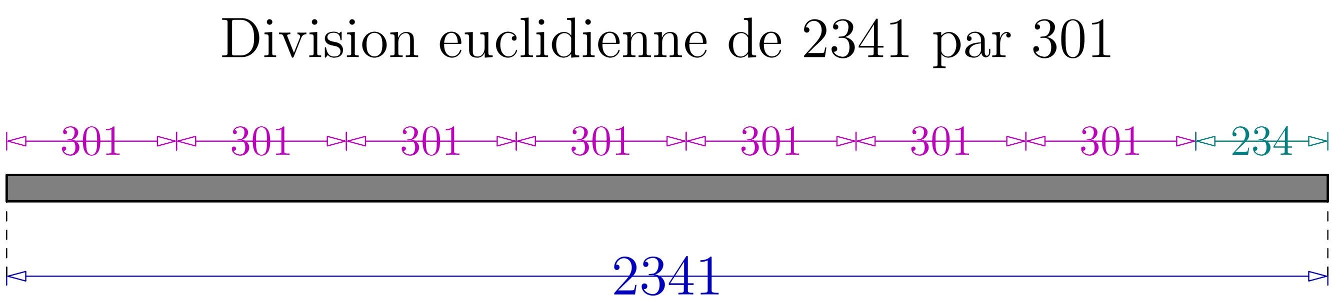


Figure 3.2 – 301 ne divise pas 2341

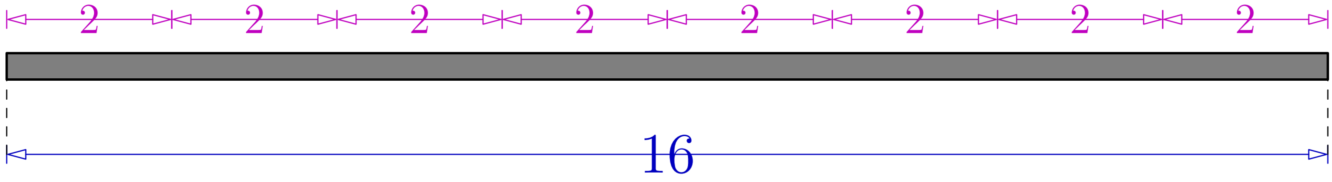
Question 14

Expliquer sans trop d'efforts pourquoi $2341 - 234 = 2107$ est divisible par 301 !

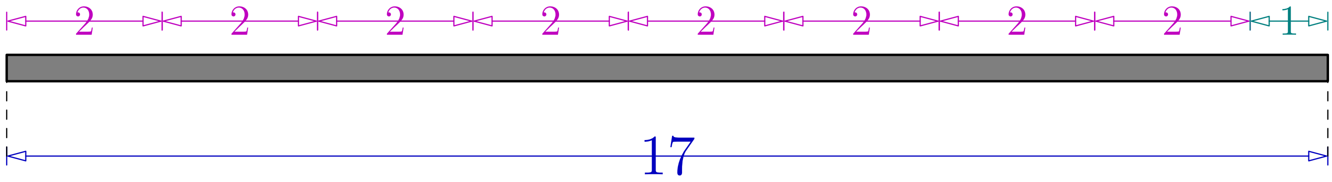
3.2 Division euclidienne par 2

Regarde attentivement ces exemples :

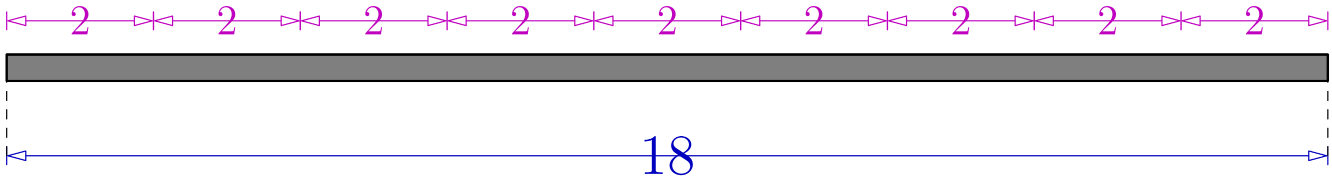
Division euclidienne de 16 par 2



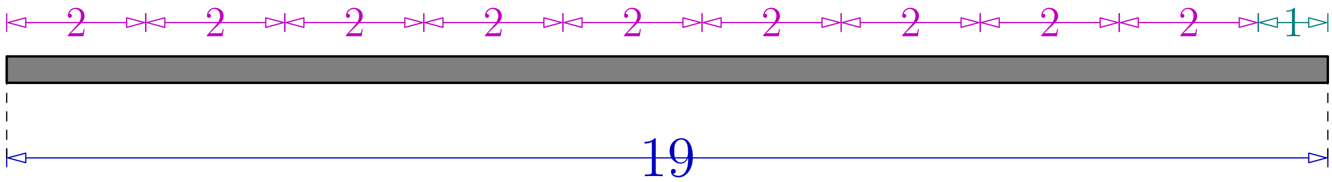
Division euclidienne de 17 par 2



Division euclidienne de 18 par 2



Division euclidienne de 19 par 2



On peut montrer la proposition suivante :

Proposition 10

Un nombre est pair si et seulement si le reste de sa division euclidienne par 2 vaut 0. Si le reste de la division euclidienne d'un nombre par 2 vaut 1, alors ce nombre est impair, et réciproquement.

On peut reformuler cela par la proposition suivante :

Proposition 11

Pour tout nombre pair n, il existe k tel que :

$$n = 2k$$

De même, pour tout nombre impair, il existe k tel que :

$$n = 2k + 1$$

on remarque que ces écritures correspondent aux deux restes possibles de la division euclidienne de n par 2 !

Exemple 12

On peut montrer que le nombre $n = (4k+1)^2$ est un nombre impair, quelque soit le nombre k. En effet, on a :

$$\begin{aligned} n &= (4k+1)^2 \\ &= 16k^2 + 2 \times 4k \times 1 + 1^2 \quad \text{Identité remarquable !} \\ &= 16k^2 + 8k + 1 \\ &= 2(8k^2 + 4k) + 1 \quad \text{On a factorisé par deux au maximum} \\ n &= 2 \times K + 1 \quad \text{Avec} \quad K = (8k^2 + 4k) \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc n s'écrit $2K + 1$ donc c'est un nombre impair, **quelque soit** la valeur de k.
On peut le vérifier rapidement avec le calcul des premieres valeurs de n selon la valeur de k.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n = (4k+1)^2$	1	25	81	169	289	441	625	841	1089	1369	1681

Exemple 13

Pour générer ce tableau, j'ai utilisé le programme Python 2 suivant. Vous remarquerez que les boucles sont **imbriquées** dans la liste. Cela permet de créer rapidement des listes, et cela se rapproche très fortement de l'écriture en mathématique des ensembles. Le mot clé `return` est utilisé ici pour que le tableau soit affiché dans le cours. Si vous voulez testez ce code sur basthon, remplacez `return` par notre bonne veille amie la fonction `print` (n'oubliez pas les parenthèses).

```python
n = 11 #pourquoi n=11 et pas n=10 ?
return [[k for k in range(n) ], [(4*k + 1)**2 for k in range(n)]]
```

Listing 2: Programme python pour générer le tableau précédent.

Question 15

1. Quel est le lien entre les deux propositions précédentes ?
2. Est-ce que le nombre $2 \times (53) + 4$ est pair ?
3. Est-ce que le nombre $2(n+1)$ est pair, sachant que n est un entier positif ?
4. Si n est un entier pair, est-ce que $n+4$ l'est aussi ? Montrer cela à l'aide de la proposition précédente.
5. Si n est un entier quelconque, quelle est la parité du nombre $n(n+1)$?

4 PGCD, PPCM

4.1 Plus grand diviseur commun

Définition 5: PGCD : plus grand diviseur commun

Soit a et b deux nombres entiers positifs. On considère les listes respectives des diviseurs de a et des diviseurs de b. On définit pgcd(a, b) par le plus grand diviseur qui est présent dans la liste des diviseurs de a **et** dans la liste des diviseurs de b.

Exemple 14

Le plus grand diviseur commun de 42 et 54 est 6, puisque c'est le plus grand nombre commun aux deux listes des diviseurs de 42 et 36.

Exemple 15

Les boites suivantes illustrent les diviseurs des nombres inscrits en haut.

54							
1	2	3	6	9	18	27	54

42							
1	2	3	6	7	14	21	42

4.2 Plus petit commun multiple

Définition 6: PPCM : plus petit commun multiple

Soit a et b deux nombres entiers positifs. On considère la bande de multiples positifs, et on définit ppcm(a,b) par le **plus petit multiple positif** commun entre les deux.

Question 16

Soit a et b deux nombres entiers positifs. Montrer alors que $a \times b$ est un multiple commun de a et b.

Exemple 16

Prenons 6 et 15, et regardons leur multiple. Peux-tu montrer que ppcm$(6, 15) = 30$?

$\cdots$	-30	-24	-18	-12	-6	0	6	12	18	24	30	$\cdots$
$\cdots$	$6 \times (-5)$	$6 \times (-4)$	$6 \times (-3)$	$6 \times (-2)$	$6 \times (-1)$	6×0	6×1	6×2	6×3	6×4	6×5	$\cdots$

$\cdots$	-75	-60	-45	-30	-15	0	15	30	45	60	75	$\cdots$
$\cdots$	$15 \times (-5)$	$15 \times (-4)$	$15 \times (-3)$	$15 \times (-2)$	$15 \times (-1)$	15×0	15×1	15×2	15×3	15×4	15×5	$\cdots$

4.3 Le point sur les fractions

Proposition 12

Une fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si et seulement si $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Exemple 17

La fraction $\frac{6}{15}$ n'est pas irréductible puisque $\text{pgcd}(6, 15) = 3$. On peut donc simplifier par 3 au numérateur et au dénominateur, pour obtenir $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. La fraction $\frac{2}{5}$ est bien irréductible.

Question 17

Simplifier la fraction $\frac{286}{715}$. Vous remarquerez que $\text{pgcd}(286, 715) = 143$

Proposition 13

Quelque soit les entiers a, b, c, d avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$, alors si l'on veut faire la somme des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on devra toujours le mettre au dénominateur $\text{pgcd}(b, d)$:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{k}{\text{ppcm}(b, d)}$$

Exemple 18

Essayons de calculer S.

$$S = \frac{5}{12} + \frac{8}{9}$$

À quel dénominateur doit-on mettre les deux fractions pour pouvoir les sommer ? On peut faire $12 \times 9 = 108$ mais on peut faire bien mieux et utiliser le $\text{ppcm}(12, 9) = 26$

En effet, $12 \times 3 = 26 = 9 \times 4$

Voici comment on peut donc mener les calculs :

$$\begin{aligned} S &= \frac{5}{12} + \frac{8}{9} \\ &= \frac{5 \times 3}{12 \times 3} + \frac{8 \times 9}{9 \times 4} \\ &= \frac{15}{26} + \frac{72}{26} \\ &= \frac{15 + 72}{26} \\ S &= \frac{87}{26} \end{aligned}$$

On a $\text{pgcd}(87, 26) = 1$, donc la fraction est directement sous forme irréductible, on a donc terminé.

4.4 (hors programme) Propriété surprenante du PGCD et PGCM

Question 18

1. Grâce aux illustrations suivantes, déterminer le pgcd et le pgcm de 76 et 57
2. Que peut-on dire de $\text{pgcd}(76, 57)$ multiplié par $\text{pgcm}(76, 57)$? *Indice :* $76 \times 57 = 4332$
3. Félicitation, vous avez montré (sur un exemple) une propriété peu connue sur le pgcd et le pgcm !

$\cdots$	-380	-304	-228	-152	-76	0	76	152	228	304	380	$\cdots$
$\cdots$	$76 \times (-5)$	$76 \times (-4)$	$76 \times (-3)$	$76 \times (-2)$	$76 \times (-1)$	76×0	76×1	76×2	76×3	76×4	76×5	$\cdots$

$\cdots$	-285	-228	-171	-114	-57	0	57	114	171	228	285	$\cdots$
$\cdots$	$57 \times (-5)$	$57 \times (-4)$	$57 \times (-3)$	$57 \times (-2)$	$57 \times (-1)$	57×0	57×1	57×2	57×3	57×4	57×5	$\cdots$

76
1   2   4   19   38   76

57
1   3   19   57