Inéquation : Résoudre des inégalités affines

1 Résoudre des inéquations affines

Définition 1: Inéquation

Une inéquation est une équation avec une inégalité à la place d'une inégalité.

Proposition 1

Dans une inéquation, on peut **ajouter ou soustraire le même nombre** dans chaque terme de l'inéquation.

Exemple 1

Si $x + 3 > 12$, alors $x > 9$.

Proposition 2

Dans une inéquation, on peut **multiplier ou diviser par un nombre positif non nul** chaque terme de l'inéquation.

Exemple 2

Si $3x > 12$ alors $x > 4$

Proposition 3

Dans une inéquation, si on multiplie ou divise **par un nombre négatif non nul** alors on renverse l'inéquation.

Exemple 3

Si $-3x > 12$, alors $x < 4$.

Exemple 4

En combinant toutes ces techniques, on peut résoudre des inéquations comme la suivante :

$$-2x + 3 \leq 4x + 5$$

On procède alors comme il suit :

$$\begin{aligned} -2x + 3 &\leq 4x + 5 \\ -2x &\leq 4x + 2 \\ -6x &\leq 2 \\ x &\geq \frac{2}{-6} \\ x &\geq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Les solutions cherchées correspondent à l'intervalle $x \in [-1; +\infty[$. Vérifiez les solutions grâce à la figure suivante !

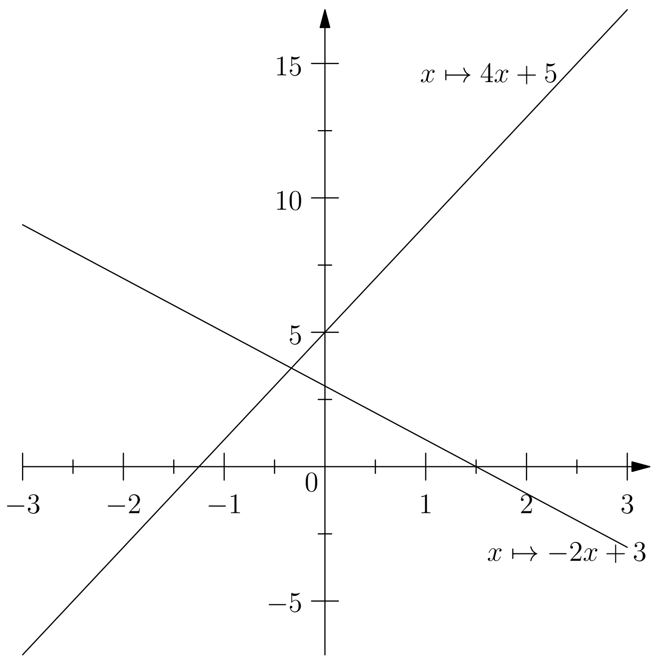

Figure 1 – Représentation graphique des deux fonctions de l'exemple précédent. Retrouvez-vous le résultat espéréré ?

Proposition 4

Les résolutions inéquations servent aussi à faire des tableaux de signe de fonction affine.

Exemple 5

Pour établir le tableau de signe de $f(x) = -3x+2$ on peut résoudre l'inéquation :

$$-3x+2 \geq 0$$

En appliquant les techniques vues plus haut, on aboutit à $x \leq \frac{2}{3}$. Donc f est positive sur l'intervalle $x \in \left]-\infty ; \frac{2}{3}\right]$, et négative ailleurs. On résume tout cela grâce au tableau de la figure 2.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3x+2$		$+$	0	$-$	

Figure 2 – Exemple de tableau de signe d'une fonction affine

2 Résoudre certaines inéquations non affines – cas de la parabole

Exemple 6

Si on souhaite résoudre l'inéquation :

$$x^2 \leq 5$$

on peut commencer par tracer la courbe représentative de x^2, et représenter l'axe $y = 5$. On peut ainsi lire la solution :

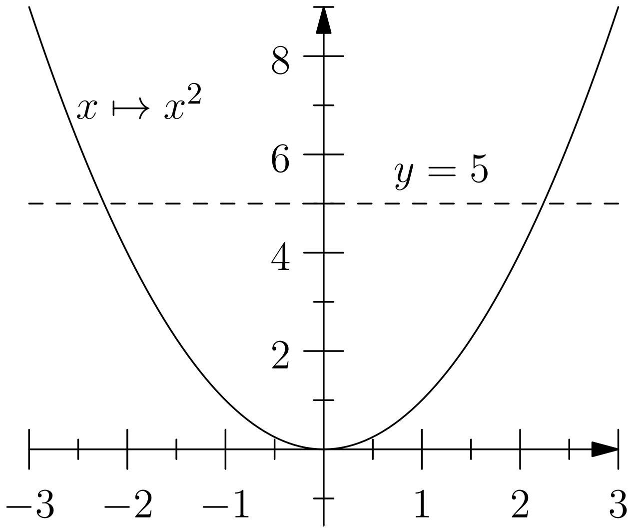

Figure 3 – On résout l'inéquation $x^2 \leq 5$

Question 1

Et que se passe-t-il si l'on souhaite résoudre l'inéquation $x^2 \geq 5$?

Question 2

Montrer que $x^2 - 5 = (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$. En quoi cela nous sert-il pour résoudre l'inéquation $x^2 \leq 5$?