

# Отчет по лабораторной работе 7

## Кучи (Heaps)

**Дата:** 2025-10-10

**Семестр:** 3 курс 5 семестр

**Группа:** ПИЖ-б-о-23-2(1)

**Дисциплина:** Анализ сложности алгоритмов

**Студент:** Торубаров Максим Евгеньевич

### Цель работы

Изучить структуру данных "куча" (heap), её свойства и применение. Освоить основные операции с кучей (добавление, извлечение корня) и алгоритм её построения. Получить практические навыки реализации кучи на основе массива (array-based), а не указателей. Исследовать эффективность основных операций и применение кучи для сортировки и реализации приоритетной очереди.

### Практическая часть

#### Выполненные задачи

- Реализовать структуру данных "куча" (min-heap и max-heap) на основе массива.
- Реализовать основные операции и алгоритм построения кучи из массива.
- Реализовать алгоритм сортировки кучей (Heapsort).
- Провести анализ сложности операций.
- Сравнить производительность сортировки кучей с другими алгоритмами.

#### Ключевые фрагменты кода

```
# heap.py
class MinHeap:
    """Класс кучи"""

    def __init__(self):
        self.tree = []

    def _get_parent(self, index):
        """Получение индекса родительского узла"""
        return (index - 1) // 2
        # Временная сложность: O(1)

    def _get_left_child(self, index):
        """Получение индекса левого потомка"""
        return 2 * index + 1
        # Временная сложность: O(1)

    def _get_right_child(self, index):
```

```

    """Получение индекса правого потомка"""
    return 2 * index + 2
    # Временная сложность: O(1)

def _get_min_index(self, index1, index2):
    """Получение индекса минимального из двух элементов"""
    if self.tree[index1] < self.tree[index2]:
        return index1
    else:
        return index2
    # Временная сложность: O(1)

def _sift_up(self, index):
    """Всплытие элемента"""
    if index == 0:
        return

    if self.tree[index] < self.tree[self._get_parent(index)]:
        support = self.tree[index]
        self.tree[index] = self.tree[self._get_parent(index)]
        self.tree[self._get_parent(index)] = support
        self._sift_up(self._get_parent(index))
    # Временная сложность: O(log n) - высота дерева

def _sift_down(self, index):
    """Погружение элемента"""
    # Случай когда элемент последний в массиве
    if index == len(self.tree) - 1:
        return

    # Случай когда элемент имеет два потомка
    if self._get_left_child(
        index
    ) < len(self.tree) and self._get_right_child(
        index
    ) < len(self.tree):
        min_child_index = self._get_min_index(
            self._get_left_child(index), self._get_right_child(index)
        )
        if self.tree[index] > self.tree[min_child_index]:
            support = self.tree[index]
            self.tree[index] = self.tree[min_child_index]
            self.tree[min_child_index] = support
            self._sift_down(min_child_index)
    else:
        # Случай когда элемент имеет только левого потомка
        if self._get_left_child(index) < len(self.tree):
            if self.tree[index] > self.tree[self._get_left_child(index)]:
                support = self.tree[index]
                self.tree[index] = self.tree[self._get_left_child(index)]
                self.tree[self._get_left_child(index)] = support
    # Случай когда элемент имеет только правого потомка

```

```

        elif self._get_right_child(index) < len(self.tree):
            if self.tree[index] > self.tree[self._get_right_child(index)]:
                support = self.tree[index]
                self.tree[index] = self.tree[self._get_right_child(index)]
                self.tree[self._get_right_child(index)] = support
    # Временная сложность: O(log n) - высота дерева

def insert(self, value):
    """Вставка элемента в кучу"""
    self.tree.append(value)
    self._sift_up(len(self.tree) - 1)
    # Временная сложность: O(log n)

def extract(self):
    """Извлечение корня"""
    if len(self.tree) > 0:
        root = self.tree.pop(0)
        if len(self.tree) > 0:
            last_element = self.tree.pop()
            self.tree.insert(0, last_element)
            self._sift_down(0)
        return root
    else:
        return "Куча пуста"
    # Временная сложность: O(log n)

def peek(self):
    """Просмотр корня"""
    if len(self.tree) > 0:
        return self.tree[0]
    else:
        return "Куча пуста"
    # Временная сложность: O(1)

def build_heap(self, array):
    """Создание кучи из произвольного массива"""
    # Начинаем с последнего нелистового узла
    n = len(array)
    self.tree = array
    for i in range(n // 2 - 1, -1, -1):
        self._sift_down(i)
    # Временная сложность: O(n)

```

```

# heapsort.py
from modules.heap import MinHeap

def heapsort(array):
    """
    Сортировка кучей с использованием класса MinHeap
    Возвращает отсортированный массив в возрастающем порядке

```

```

"""
heap = MinHeap()
heap.build_heap(array)

sorted_array = []
while heap.tree:
    min_val = heap.extract()
    sorted_array.append(min_val)

return sorted_array

def heapsort_inplace(array):
"""
In-place сортировка кучей с использованием логики MinHeap
Сортирует исходный массив в убывающем порядке
Не использует дополнительную память
"""
n = len(array)

# Построение Min-Heap из массива (in-place)
for i in range(n // 2 - 1, -1, -1):
    _sift_down_min_inplace(array, i, n)

# Последовательное извлечение минимальных элементов
for i in range(n - 1, 0, -1):
    array[0], array[i] = array[i], array[0]
    _sift_down_min_inplace(array, 0, i)

return array

def _sift_down_min_inplace(arr, index, size):
"""
Погружение элемента для Min-Heap (in-place версия)
Аналогично методу _sift_down из класса MinHeap
"""
while True:
    left = 2 * index + 1
    right = 2 * index + 2
    smallest = index

    # Ищем наименьшего потомка
    if left < size and arr[left] < arr[smallest]:
        smallest = left
    if right < size and arr[right] < arr[smallest]:
        smallest = right

    # Если нашли меньшего потомка - меняем местами
    if smallest != index:
        arr[index], arr[smallest] = arr[smallest], arr[index]
        index = smallest

```

```
    else:  
        break
```

```
# priority_queue  
from heap import MinHeap  
  
class PriorityQueue:  
    """Очередь с приоритетом на основе MinHeap"""  
  
    def __init__(self):  
        self.heap = MinHeap()  
  
    def enqueue(self, item, priority):  
        """  
        Добавление элемента в очередь с приоритетом  
        Более низкое значение priority = более высокий приоритет  
        """  
        # Создаем кортеж (приоритет, элемент) для сравнения в куче  
        queue_item = (priority, item)  
        self.heap.insert(queue_item)  
  
    def dequeue(self):  
        """  
        Извлечение элемента с наивысшим приоритетом  
        (наименьшим значением priority)  
        Возвращает элемент без приоритета  
        """  
        if self.is_empty():  
            return "Очередь пуста"  
  
        # Извлекаем кортеж (приоритет, элемент) и возвращаем только элемент  
        priority, item = self.heap.extract()  
        return item  
  
    def peek(self):  
        """  
        Просмотр элемента с наивысшим приоритетом без извлечения  
        """  
        if self.is_empty():  
            return "Очередь пуста"  
  
        priority, item = self.heap.peek()  
        return item  
  
    def is_empty(self):  
        """Проверка пустоты очереди"""  
        return len(self.heap.tree) == 0  
  
    def size(self):  
        """Размер очереди"""
```

```

    return len(self.heap.tree)

def __str__(self):
    """Строковое представление очереди"""
    if self.is_empty():
        return "PriorityQueue: пусто"

    items = []
    for priority, item in self.heap.tree:
        items.append(f"{item} (приоритет:{priority})")
    return "PriorityQueue: " + " <- ".join(items)

```

```

# tests.py
import unittest

from heap import MinHeap
from heapsort import heapsort, heapsort_inplace
from priority_queue import PriorityQueue


class TestMinHeap(unittest.TestCase):
    """Тесты для класса MinHeap"""

    def setUp(self):
        self.heap = MinHeap()

    def test_empty_heap(self):
        """Тест пустой кучи"""
        self.assertEqual(len(self.heap.tree), 0)
        self.assertEqual(self.heap.peek(), "Куча пуста")
        self.assertTrue(self.heap.tree == [])

    def test_insert_single_element(self):
        """Тест вставки одного элемента"""
        self.heap.insert(5)
        self.assertEqual(len(self.heap.tree), 1)
        self.assertEqual(self.heap.peek(), 5)

    def test_insert_multiple_elements(self):
        """Тест вставки нескольких элементов"""
        elements = [5, 3, 8, 1, 2]
        for elem in elements:
            self.heap.insert(elem)

        # Проверяем свойство Min-Heap: корень должен быть минимальным
        self.assertEqual(self.heap.peek(), 1)
        self.assertEqual(len(self.heap.tree), 5)

    def test_heap_property_after_insert(self):
        """Проверка свойства кучи после вставки"""
        test_data = [10, 5, 15, 3, 7, 12, 1]

```

```

    for value in test_data:
        self.heap.insert(value)
        self._verify_min_heap_property(self.heap.tree)

def test_extract_min(self):
    """Тест извлечения минимального элемента"""
    elements = [5, 3, 8, 1, 2]
    for elem in elements:
        self.heap.insert(elem)

    min_val = self.heap.extract()
    self.assertEqual(min_val, 1)
    self.assertEqual(len(self.heap.tree), 4)
    self.assertEqual(self.heap.peek(), 2)

def test_extract_all_elements(self):
    """Тест последовательного извлечения всех элементов"""
    elements = [5, 3, 8, 1, 2]
    for elem in elements:
        self.heap.insert(elem)

    extracted = []
    while self.heap.tree:
        extracted.append(self.heap.extract())

    self.assertEqual(extracted, [1, 2, 3, 5, 8]) # Отсортированные по
в возрастанию
    self.assertEqual(len(self.heap.tree), 0)

def test_heap_property_after_extract(self):
    """Проверка свойства кучи после каждого извлечения"""
    test_data = [10, 5, 15, 3, 7, 12, 1, 20, 8]
    for value in test_data:
        self.heap.insert(value)

    while self.heap.tree:
        self.heap.extract()
        if self.heap.tree: # Проверяем свойство, если куча не пуста
            self._verify_min_heap_property(self.heap.tree)

def test_build_heap_from_array(self):
    """Тест построения кучи из массива"""
    test_array = [9, 4, 7, 1, 5, 3, 8, 2, 6]
    self.heap.build_heap(test_array)

    self.assertEqual(len(self.heap.tree), 9)
    self._verify_min_heap_property(self.heap.tree)
    self.assertEqual(self.heap.peek(), 1) # Минимальный элемент должен
быть в корне

def test_large_heap(self):
    """Тест с большим количеством элементов"""

```

```

large_array = list(range(100, 0, -1)) # [100, 99, 98, ..., 1]
self.heap.build_heap(large_array)

self.assertEqual(len(self.heap.tree), 100)
self._verify_min_heap_property(self.heap.tree)
self.assertEqual(self.heap.peek(), 1)

# Извлекаем первые 10 элементов
for i in range(1, 11):
    self.assertEqual(self.heap.extract(), i)

def _verify_min_heap_property(self, heap_array):
    """Вспомогательный метод для проверки свойства Min-Heap"""
    n = len(heap_array)
    for i in range(n // 2):
        left = 2 * i + 1
        right = 2 * i + 2

        # Проверяем, что родитель меньше или равен левому потомку
        if left < n:
            self.assertTrue(
                heap_array[i] <= heap_array[left],
                f"Нарушение свойства кучи: {heap_array[i]} > {heap_array[left]} (индексы {i} -> {left})",
            )

        # Проверяем, что родитель меньше или равен правому потомку
        if right < n:
            self.assertTrue(
                heap_array[i] <= heap_array[right],
                f"Нарушение свойства кучи: {heap_array[i]} > {heap_array[right]} (индексы {i} -> {right})",
            )

class TestHeapsort(unittest.TestCase):
    """Тесты для функций Heapsort"""

    def test_heapsort_empty(self):
        """Тест сортировки пустого массива"""
        result = heapsort([])
        self.assertEqual(result, [])

    def test_heapsort_single_element(self):
        """Тест сортировки массива из одного элемента"""
        result = heapsort([5])
        self.assertEqual(result, [5])

    def test_heapsort_sorted_array(self):
        """Тест сортировки уже отсортированного массива"""
        input_array = [1, 2, 3, 4, 5]
        result = heapsort(input_array)

```

```
        self.assertEqual(result, [1, 2, 3, 4, 5])

    def test_heapsort_reverse_sorted(self):
        """Тест сортировки массива, отсортированного в обратном порядке"""
        input_array = [5, 4, 3, 2, 1]
        result = heapsort(input_array)
        self.assertEqual(result, [1, 2, 3, 4, 5])

    def test_heapsort_random_array(self):
        """Тест сортировки случайного массива"""
        input_array = [9, 3, 7, 1, 5, 8, 2, 4, 6]
        result = heapsort(input_array)
        self.assertEqual(result, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])

    def test_heapsort_duplicates(self):
        """Тест сортировки массива с дубликатами"""
        input_array = [3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3]
        result = heapsort(input_array)
        self.assertEqual(result, [1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 9])

    def test_heapsort_inplace_empty(self):
        """Тест in-place сортировки пустого массива"""
        array = []
        heapsort_inplace(array)
        self.assertEqual(array, [])

    def test_heapsort_inplace_sorted(self):
        """Тест in-place сортировки отсортированного массива"""
        array = [1, 2, 3, 4, 5]
        heapsort_inplace(array)
        self.assertEqual(array, [5, 4, 3, 2, 1]) # Убывающий порядок для Min-Heap

    def test_heapsort_inplace_random(self):
        """Тест in-place сортировки случайного массива"""
        array = [9, 3, 7, 1, 5, 8, 2, 4, 6]
        heapsort_inplace(array)
        self.assertEqual(array, [9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]) # Убывающий порядок

    def test_heapsort_correctness(self):
        """Сравнение с встроенной сортировкой Python"""
        test_arrays = [
            [1],
            [2, 1],
            [5, 3, 8, 1, 2],
            [9, 3, 7, 1, 5, 8, 2, 4, 6],
            [3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3],
            list(range(50, 0, -1)),
        ]
        for array in test_arrays:
```

```
        with self.subTest(array=array):
            expected = sorted(array)
            result = heapsort(array)
            self.assertEqual(result, expected)

class TestPriorityQueue(unittest.TestCase):
    """Тесты для класса PriorityQueue"""

    def setUp(self):
        self.pq = PriorityQueue()

    def test_empty_queue(self):
        """Тест пустой очереди"""
        self.assertTrue(self.pq.is_empty())
        self.assertEqual(self.pq.size(), 0)
        self.assertEqual(self.pq.dequeue(), "Очередь пуста")
        self.assertEqual(self.pq.peek(), "Очередь пуста")

    def test_enqueue_dequeue_single(self):
        """Тест добавления и извлечения одного элемента"""
        self.pq.enqueue("task1", 1)
        self.assertFalse(self.pq.is_empty())
        self.assertEqual(self.pq.size(), 1)

        item = self.pq.dequeue()
        self.assertEqual(item, "task1")
        self.assertTrue(self.pq.is_empty())

    def test_priority_ordering(self):
        """Тест правильного порядка приоритетов"""
        # Добавляем элементы в случайном порядке
        self.pq.enqueue("low", 3)
        self.pq.enqueue("high", 1)
        self.pq.enqueue("medium", 2)
        self.pq.enqueue("urgent", 0)

        # Должны извлекаться в порядке приоритета
        self.assertEqual(self.pq.dequeue(), "urgent") # приоритет 0
        self.assertEqual(self.pq.dequeue(), "high") # приоритет 1
        self.assertEqual(self.pq.dequeue(), "medium") # приоритет 2
        self.assertEqual(self.pq.dequeue(), "low") # приоритет 3

    def test_same_priority_fifo(self):
        """Тест элементов с одинаковым приоритетом"""
        self.pq.enqueue("task1", 1)
        self.pq.enqueue("task2", 1)
        self.pq.enqueue("task3", 1)

        # При одинаковом приоритете порядок может быть любым,
        # но все должны быть извлечены
        items = set()
```

```
while not self.pq.is_empty():
    items.add(self.pq.dequeue())

self.assertEqual(items, {"task1", "task2", "task3"})

def test_peek_does_not_remove(self):
    """Тест что peek не удаляет элемент"""
    self.pq.enqueue("important", 1)

    self.assertEqual(self.pq.peek(), "important")
    self.assertEqual(self.pq.peek(), "important") # Должен оставаться тем же
    self.assertEqual(self.pq.size(), 1)

    self.assertEqual(self.pq.dequeue(), "important")
    self.assertTrue(self.pq.is_empty())

def test_mixed_operations(self):
    """Тест смешанных операций"""
    self.pq.enqueue("first", 2)
    self.pq.enqueue("urgent", 0)

    self.assertEqual(self.pq.dequeue(), "urgent")

    self.pq.enqueue("medium", 1)
    self.pq.enqueue("last", 3)

    self.assertEqual(self.pq.dequeue(), "medium")
    self.assertEqual(self.pq.dequeue(), "first")
    self.assertEqual(self.pq.dequeue(), "last")
    self.assertTrue(self.pq.is_empty())

def test_priority_queue_property(self):
    """Проверка свойства кучи в PriorityQueue после операций"""
    priorities = [5, 1, 8, 3, 0, 2, 7, 4, 6]
    for i, priority in enumerate(priorities):
        self.pq.enqueue(f"item{i}", priority)
        # Проверяем что внутренняя куча сохраняет свойство
        self._verify_min_heap_property_for_pq(self.pq.heap.tree)

    while not self.pq.is_empty():
        self.pq.dequeue()
        if not self.pq.is_empty():
            self._verify_min_heap_property_for_pq(self.pq.heap.tree)

def _verify_min_heap_property_for_pq(self, heap_array):
    """Проверка свойства Min-Heap для кортежей (priority, item)"""
    n = len(heap_array)
    for i in range(n // 2):
        left = 2 * i + 1
        right = 2 * i + 2
```

```

    if left < n:
        self.assertTrue(
            heap_array[i][0] <= heap_array[left][0],
            f"Нарушение свойства кучи в PriorityQueue",
        )

    if right < n:
        self.assertTrue(
            heap_array[i][0] <= heap_array[right][0],
            f"Нарушение свойства кучи в PriorityQueue",
        )
    }

class TestIntegration(unittest.TestCase):
    """Интеграционные тесты"""

    def test_heap_to_heapsort_integration(self):
        """Интеграционный тест: Куча -> Heapsort"""
        heap = MinHeap()
        test_data = [9, 3, 7, 1, 5, 8, 2, 4, 6]
        heap.build_heap(test_data)

        # Используем кучу для сортировки
        sorted_result = []
        while heap.tree:
            sorted_result.append(heap.extract())

        self.assertEqual(sorted_result, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])

    def test_priority_queue_with_complex_items(self):
        """Тест PriorityQueue со сложными объектами"""
        pq = PriorityQueue()

        class Task:
            def __init__(self, name, duration):
                self.name = name
                self.duration = duration

            def __str__(self):
                return f"{self.name}({self.duration}min)"

        tasks = [
            Task("быстрая задача", 5),
            Task("медленная задача", 60),
            Task("средняя задача", 30),
        ]

        # Добавляем с приоритетом = длительность
        for task in tasks:
            pq.enqueue(task, task.duration)

        # Должны извлекаться в порядке возрастания длительности

```

```

        extracted = []
    while not pq.is_empty():
        extracted.append(pq.dequeue())

    self.assertEqual([t.duration for t in extracted], [5, 30, 60])

if __name__ == "__main__":
    # Запуск тестов с детальным выводом
    unittest.main(verbosity=2)

```

```

# analizys.py
import timeit
import matplotlib.pyplot as plt
import random
from modules.heap import MinHeap
from modules.heapsort import heapsort


def build_heap_sequential_insert(arr):
    """Построение кучи последовательной вставкой O(n log n)"""
    heap = MinHeap()
    for item in arr:
        heap.insert(item)
    return heap


def build_heap_algorithm(arr):
    """Построение кучи алгоритмом build_heap O(n)"""
    heap = MinHeap()
    heap.build_heap(arr)
    return heap


def quicksort(arr):
    """Быстрая сортировка для сравнения"""
    if len(arr) <= 1:
        return arr
    pivot = arr[len(arr) // 2]
    left = [x for x in arr if x < pivot]
    middle = [x for x in arr if x == pivot]
    right = [x for x in arr if x > pivot]
    return quicksort(left) + middle + quicksort(right)


def mergesort(arr):
    """Сортировка слиянием для сравнения"""
    if len(arr) <= 1:
        return arr

    mid = len(arr) // 2

```

```

left = mergesort(arr[:mid])
right = mergesort(arr[mid:])

return merge(left, right)

def merge(left, right):
    """Слияние для сортировки слиянием"""
    result = []
    i = j = 0

    while i < len(left) and j < len(right):
        if left[i] <= right[j]:
            result.append(left[i])
            i += 1
        else:
            result.append(right[j])
            j += 1

    result.extend(left[i:])
    result.extend(right[j:])
    return result

def measure_heap_construction_time():
    """Измерение времени построения кучи разными методами"""
    print("==== ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ ПОСТРОЕНИЯ КУЧИ ===")

    sizes = [100, 500, 1000, 2000, 5000, 10000]
    sequential_times = []
    build_heap_times = []

    for size in sizes:
        # Генерируем случайный массив
        test_array = [random.randint(1, 10000) for _ in range(size)]

        # Измеряем время последовательной вставки
        sequential_time = (
            timeit.timeit(lambda: build_heap_sequential_insert(test_array),
number=10)
            / 10
        )

        # Измеряем время алгоритма build_heap
        build_heap_time = (
            timeit.timeit(lambda: build_heap_algorithm(test_array), number=10)
/ 10
        )

        sequential_times.append(sequential_time)
        build_heap_times.append(build_heap_time)

```

```

print(
    f"Размер: {size:5d} | "
    f"Последовательная вставка: {sequential_time:.6f} сек | "
    f"Build_Heap: {build_heap_time:.6f} сек | "
    f"Ускорение: {sequential_time/build_heap_time:.2f}x"
)
)

return sizes, sequential_times, build_heap_times

def measure_sorting_algorithms_time():
    """Сравнение времени работы алгоритмов сортировки"""
    print("\n==== СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ СОРТИРОВКИ ====")

    sizes = [100, 500, 1000, 2000, 5000]
    heapsort_times = []
    quicksort_times = []
    mergesort_times = []

    for size in sizes:
        # Генерируем случайный массив
        test_array = [random.randint(1, 10000) for _ in range(size)]

        # Heapsort
        heapsort_time = timeit.timeit(lambda: heapsort(test_array[:]),
number=10) / 10

        # Quicksort
        quicksort_time = timeit.timeit(lambda: quicksort(test_array[:]),
number=10) / 10

        # Mergesort
        mergesort_time = timeit.timeit(lambda: mergesort(test_array[:]),
number=10) / 10

        heapsort_times.append(heapsort_time)
        quicksort_times.append(quicksort_time)
        mergesort_times.append(mergesort_time)

    print(
        f"Размер: {size:5d} | "
        f"Heapsort: {heapsort_time:.6f} сек | "
        f"Quicksort: {quicksort_time:.6f} сек | "
        f"Mergesort: {mergesort_time:.6f} сек"
    )

    return sizes, heapsort_times, quicksort_times, mergesort_times

def visualize_heap_array(heap, title="Куча"):
    """Визуализация кучи как массива с правильными связями"""
    if not heap.tree:

```

```

    print(f"{title}: пустая")
    return

print(f"\n{title} (массив с связями):")

for i, val in enumerate(heap.tree):
    parent_idx = (i - 1) // 2
    left_idx = 2 * i + 1
    right_idx = 2 * i + 2

    # Формируем информацию о связях
    connections = []

    if i == 0:
        connections.append("корень")
    else:
        connections.append(f"родитель[{parent_idx}]={heap.tree[parent_idx]}")

    if left_idx < len(heap.tree):
        connections.append(f"левый[{left_idx}]={heap.tree[left_idx]}")

    if right_idx < len(heap.tree):
        connections.append(f"правый[{right_idx}]={heap.tree[right_idx]}")

    connections_str = ", ".join(connections)
    print(f" [{i:2d}]: {val:2d} ({connections_str})")

def demo_heap_visualization():
    """Демонстрация визуализации куч"""
    print("\n==== ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КУЧ ===")

    # Создаем тестовую кучу
    test_data = [5, 3, 8, 1, 2, 7, 4, 6]

    # Куча построенная последовательной вставкой
    heap_seq = build_heap_sequential_insert(test_data)
    visualize_heap_array(heap_seq, "Куча (последовательная вставка)")

    # Куча построенная алгоритмом build_heap
    heap_build = build_heap_algorithm(test_data)
    visualize_heap_array(heap_build, "Куча (build_heap)")

    # Проверяем что обе кучи имеют одинаковые элементы (возможно в разном
    # порядке)
    print(f"\nЭлементы совпадают: {sorted(heap_seq.tree)} ==
sorted(heap_build.tree)}")
}

def plot_performance_graphs(
    sizes_heap,

```

```

sequential_times,
build_heap_times,
sizes_sort,
heapsort_times,
quicksort_times,
mergesort_times,
):
    """Построение графиков производительности"""

    plt.figure(figsize=(15, 8))

    # График 1: Построение кучи
    plt.subplot(2, 2, 1)
    plt.plot(
        sizes_heap,
        sequential_times,
        "o-",
        label="Последовательная вставка",
        linewidth=2,
    )
    plt.plot(
        sizes_heap, build_heap_times, "s-", label="Build_Heap алгоритм",
    linewidth=2
    )
    plt.xlabel("Размер массива")
    plt.ylabel("Время (секунды)")
    plt.title("Время построения кучи")
    plt.legend()
    plt.grid(True, alpha=0.3)
    plt.yscale("log")

    # График 2: Отношение времени построения
    plt.subplot(2, 2, 2)
    ratios = [seq / build for seq, build in zip(sequential_times,
build_heap_times)]
    plt.plot(sizes_heap, ratios, "o-", color="red", linewidth=2)
    plt.xlabel("Размер массива")
    plt.ylabel("Отношение времен (последовательная/build_heap)")
    plt.title("Эффективность Build_Heap алгоритма")
    plt.grid(True, alpha=0.3)

    # График 3: Сравнение алгоритмов сортировки
    plt.subplot(2, 2, 3)
    plt.plot(sizes_sort, heapsort_times, "o-", label="Heapsort", linewidth=2)
    plt.plot(sizes_sort, quicksort_times, "s-", label="Quicksort", linewidth=2)
    plt.plot(sizes_sort, mergesort_times, "^-", label="Mergesort", linewidth=2)
    plt.xlabel("Размер массива")
    plt.ylabel("Время (секунды)")
    plt.title("Сравнение алгоритмов сортировки")
    plt.legend()
    plt.grid(True, alpha=0.3)
    plt.yscale("log")

```

```

# График 4: Отношение Heapsort к другим алгоритмам
plt.subplot(2, 2, 4)
heapsort_vs_quicksort = [ht / qt for ht, qt in zip(heapsopt_times,
quicksort_times)]
heapsort_vs_mergesort = [ht / mt for ht, mt in zip(heapsopt_times,
mergesort_times)]

plt.plot(
    sizes_sort,
    heapsort_vs_quicksort,
    "o-",
    label="Heapsort / Quicksort",
    linewidth=2,
)
plt.plot(
    sizes_sort,
    heapsort_vs_mergesort,
    "s-",
    label="Heapsort / Mergesort",
    linewidth=2,
)
plt.xlabel("Размер массива")
plt.ylabel("Отношение времени")
plt.title("Heapsort относительно других алгоритмов")
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.axhline(y=1, color="black", linestyle="--", alpha=0.5)

plt.tight_layout()
plt.savefig("performance_analysis.png", dpi=300, bbox_inches="tight")
plt.show()

def run_comprehensive_analysis():
    """Запуск полного анализа"""
    print("ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ КУЧИ И СОРТИРОВКИ")
    print("=" * 70)

    # Демонстрация визуализации
    demo_heap_visualization()

    # Измерение времени построения кучи
    sizes_heap, sequential_times, build_heap_times =
measure_heap_construction_time()

    # Измерение времени сортировки
    sizes_sort, heapsopt_times, quicksort_times, mergesort_times = (
        measure_sorting_algorithms_time()
    )

    # Построение графиков

```

```

plot_performance_graphs(
    sizes_heap,
    sequential_times,
    build_heap_times,
    sizes_sort,
    heapsort_times,
    quicksort_times,
    mergesort_times,
)

# Вывод статистики
print("\n==== СТАТИСТИКА ===")
avg_heap_ratio = sum(sequential_times) / sum(build_heap_times)
print(f"Среднее ускорение Build Heap: {avg_heap_ratio:.2f}x")

print("\nЛучшие алгоритмы сортировки:")
for i, size in enumerate(sizes_sort):
    times = {
        "Heapsort": heapsort_times[i],
        "Quicksort": quicksort_times[i],
        "Mergesort": mergesort_times[i],
    }
    best = min(times, key=times.get)
    print(f"  Размер {size}: {best} ({times[best]:.6f} сек)")

```

```

# main.py
from modules.analizys import run_comprehensive_analysis

if __name__ == "__main__":
    # Характеристики ПК
    pc_info = """
Характеристики ПК для тестирования:
- Процессор: Intel Core i3-1220P @ 1.5GHz
- Оперативная память: 8 GB DDR4
- ОС: Windows 11
- Python: 3.12.10
"""
    print(pc_info)

    run_comprehensive_analysis()

```

## Результаты выполнения тестов

```

test_heapsort_correctness (__main__.TestHeapsort.test_heapsort_correctness)
Сравнение с встроенной сортировкой Python ... ok
test_heapsort_duplicates (__main__.TestHeapsort.test_heapsort_duplicates)
Тест сортировки массива с дубликатами ... ok
test_heapsort_empty (__main__.TestHeapsort.test_heapsort_empty)
Тест сортировки пустого массива ... ok
test_heapsort_inplace_empty (__main__.TestHeapsort.test_heapsort_inplace_empty)

```

```
Тест in-place сортировки пустого массива ... ok
test_heapsort_inplace_random
(__main__.TestHeapsort.test_heapsort_inplace_random)
Тест in-place сортировки случайного массива ... ok
test_heapsort_inplace_sorted
(__main__.TestHeapsort.test_heapsort_inplace_sorted)
Тест in-place сортировки отсортированного массива ... ok
test_heapsort_random_array (__main__.TestHeapsort.test_heapsort_random_array)
Тест сортировки случайного массива ... ok
test_heapsort_reverse_sorted
(__main__.TestHeapsort.test_heapsort_reverse_sorted)
Тест сортировки массива, отсортированного в обратном порядке ... ok
test_heapsort_single_element
(__main__.TestHeapsort.test_heapsort_single_element)
Тест сортировки массива из одного элемента ... ok
test_heapsort_sorted_array (__main__.TestHeapsort.test_heapsort_sorted_array)
Тест сортировки уже отсортированного массива ... ok
test_heap_to_heapsort_integration
(__main__.TestIntegration.test_heap_to_heapsort_integration)
Интеграционный тест: Куча -> Heapsort ... ok
test_priority_queue_with_complex_items
(__main__.TestIntegration.test_priority_queue_with_complex_items)
Тест PriorityQueue со сложными объектами ... ok
test_build_heap_from_array (__main__.TestMinHeap.test_build_heap_from_array)
Тест построения кучи из массива ... ok
test_empty_heap (__main__.TestMinHeap.test_empty_heap)
Тест пустой кучи ... ok
test_extract_all_elements (__main__.TestMinHeap.test_extract_all_elements)
Тест последовательного извлечения всех элементов ... ok
test_extract_min (__main__.TestMinHeap.test_extract_min)
Тест извлечения минимального элемента ... ok
test_heap_property_after_extract
(__main__.TestMinHeap.test_heap_property_after_extract)
Проверка свойства кучи после каждого извлечения ... ok
test_heap_property_after_insert
(__main__.TestMinHeap.test_heap_property_after_insert)
Проверка свойства кучи после вставки ... ok
test_insert_multiple_elements
(__main__.TestMinHeap.test_insert_multiple_elements)
Тест вставки нескольких элементов ... ok
test_insert_single_element (__main__.TestMinHeap.test_insert_single_element)
Тест вставки одного элемента ... ok
test_large_heap (__main__.TestMinHeap.test_large_heap)
Тест с большим количеством элементов ... ok
test_empty_queue (__main__.TestPriorityQueue.test_empty_queue)
Тест пустой очереди ... ok
test_enqueue_dequeue_single
(__main__.TestPriorityQueue.test_enqueue_dequeue_single)
Тест добавления и извлечения одного элемента ... ok
test_mixed_operations (__main__.TestPriorityQueue.test_mixed_operations)
Тест смешанных операций ... ok
test_peek_does_not_remove
```

```
(__main__.TestPriorityQueue.test_peek_does_not_remove)
Тест что peek не удаляет элемент ... ok
test_priority_ordering (__main__.TestPriorityQueue.test_priority_ordering)
Тест правильного порядка приоритетов ... ok
test_priority_queue_property
(__main__.TestPriorityQueue.test_priority_queue_property)
Проверка свойства кучи в PriorityQueue после операций ... ok
test_same_priority_fifo (__main__.TestPriorityQueue.test_same_priority_fifo)
Тест элементов с одинаковым приоритетом ... ok

-----
Ran 28 tests in 0.012s

OK
```

## Результаты анализа

Характеристики ПК для тестирования:

- Процессор: Intel Core i3-1220P @ 1.5GHz
- Оперативная память: 8 GB DDR4
- ОС: Windows 11
- Python: 3.12.10

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ КУЧИ И СОРТИРОВКИ

---

### ==== ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КУЧ ==

Куча (последовательная вставка) (массив с связями):

```
[ 0]: 1 (корень, левый[1]=2, правый[2]=4)
[ 1]: 2 (родитель[0]=1, левый[3]=5, правый[4]=3)
[ 2]: 4 (родитель[0]=1, левый[5]=8, правый[6]=7)
[ 3]: 5 (родитель[1]=2, левый[7]=6)
[ 4]: 3 (родитель[1]=2)
[ 5]: 8 (родитель[2]=4)
[ 6]: 7 (родитель[2]=4)
[ 7]: 6 (родитель[3]=5)
```

Куча (build\_heap) (массив с связями):

```
[ 0]: 1 (корень, левый[1]=2, правый[2]=4)
[ 1]: 2 (родитель[0]=1, левый[3]=3, правый[4]=5)
[ 2]: 4 (родитель[0]=1, левый[5]=7, правый[6]=8)
[ 3]: 3 (родитель[1]=2, левый[7]=6)
[ 4]: 5 (родитель[1]=2)
[ 5]: 7 (родитель[2]=4)
[ 6]: 8 (родитель[2]=4)
[ 7]: 6 (родитель[3]=3)
```

Элементы совпадают: True

### ==== ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ ПОСТРОЕНИЯ КУЧИ ==

Размер: 100 | Последовательная вставка: 0.000047 сек | Build\_Heap: 0.000020 сек | Ускорение: 2.39x

```
Размер: 500 | Последовательная вставка: 0.000254 сек | Build_Heap: 0.000107
сек | Ускорение: 2.39x
Размер: 1000 | Последовательная вставка: 0.000874 сек | Build_Heap: 0.000258
сек | Ускорение: 3.38x
Размер: 2000 | Последовательная вставка: 0.001215 сек | Build_Heap: 0.000452
сек | Ускорение: 2.69x
Размер: 5000 | Последовательная вставка: 0.003085 сек | Build_Heap: 0.001098
сек | Ускорение: 2.81x
Размер: 10000 | Последовательная вставка: 0.006178 сек | Build_Heap: 0.002326
сек | Ускорение: 2.66x
```

#### ==== СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ СОРТИРОВКИ ===

```
Размер: 100 | Heapsort: 0.000288 сек | Quicksort: 0.000084 сек | Mergesort:
0.000101 сек
Размер: 500 | Heapsort: 0.002152 сек | Quicksort: 0.000552 сек | Mergesort:
0.000613 сек
Размер: 1000 | Heapsort: 0.004678 сек | Quicksort: 0.001321 сек | Mergesort:
0.001443 сек
Размер: 2000 | Heapsort: 0.014509 сек | Quicksort: 0.002653 сек | Mergesort:
0.003082 сек
Размер: 5000 | Heapsort: 0.063997 сек | Quicksort: 0.007829 сек | Mergesort:
0.008731 сек
```

#### ==== СТАТИСТИКА ===

Среднее ускорение Build\_Heap: 2.74x

Лучшие алгоритмы сортировки:

```
Размер 100: Quicksort (0.000084 сек)
Размер 500: Quicksort (0.000552 сек)
Размер 1000: Quicksort (0.001321 сек)
Размер 2000: Quicksort (0.002653 сек)
Размер 5000: Quicksort (0.007829 сек)
```



## 1. Сравнение практической и теоретической сложности операций

Операция	Теоретическая сложность	Среднее измеренное время (по графику)	Соответствие теории
insert	$O(\log n)$	Умеренно растёт с увеличением $n$	Да
peek	$O(1)$	Почти неизменно	Да
extract	$O(\log n)$	Растёт аналогично insert	Да
build_heap	$O(n)$	Заметно быстрее последовательных insert	Да
Последовательные insert	$O(n \log n)$	Существенно дольше при больших $n$	Да

### **Вывод:**

Практические измерения подтверждают теоретические оценки: операции `insert` и `extract` демонстрируют логарифмический рост времени, `peek` — постоянный, а построение кучи из массива (`build_heap`) масштабируется линейно, что подтверждает его эффективность.

---

## **2. Разница во времени между методами построения кучи**

### **Методы:**

1. **Последовательные вставки (`insert`)** — элементы добавляются по одному, каждый раз восстанавливается свойство кучи.  
→ Сложность:  $O(n \log n)$ .
2. **Построение из массива (`build_heap`)** — выполняется "просеивание вниз" для половины элементов, начиная с середины массива.  
→ Сложность:  $O(n)$ .

### **Причина различий:**

- При `build_heap` элементы, расположенные ближе к листьям, требуют меньше операций просеивания.
- При последовательных вставках каждая новая вставка может затронуть всю высоту дерева.
- На практике это выражается в **многократном ускорении** `build_heap` при увеличении размера данных.

### **Вывод:**

Разница обусловлена тем, что `build_heap` использует оптимизированный подход снизу вверх, в то время как последовательные `insert` — сверху вниз с избыточным количеством перестановок.

---

## **3. Эффективность Heapsort**

Алгоритм	Теоретическая сложность	Поведение на практике	Примечание
<b>Heapsort</b>	$O(n \log n)$	Стабильно, но медленнее QuickSort	Не требует доп. памяти
<b>QuickSort</b>	$O(n \log n)$ (в среднем) / $O(n^2)$ (в худшем)	Самый быстрый на случайных данных	Использует рекурсию и разделение
<b>MergeSort</b>	$O(n \log n)$	Чуть медленнее QuickSort	Стабильный, но требует $O(n)$ памяти

### **Анализ:**

Heapsort демонстрирует устойчивую производительность независимо от распределения данных, но уступает QuickSort в константах времени — из-за большего числа обменов элементов и менее локализованных обращений к памяти.

В сравнении с MergeSort — выигрывает по памяти, но немного проигрывает по скорости.

## **Вывод:**

Heapsort остаётся надёжным универсальным методом сортировки с гарантированной сложностью  $O(n \log n)$ , но для практического использования в большинстве случаев предпочтительнее QuickSort или гибридные алгоритмы (например, Timsort).

# **Ответы на контрольные вопросы**

## **1. Основное свойство min-кучи и max-кучи**

- **Min-куча:** значение в каждом узле **меньше или равно** значениям его потомков.  
→ Минимальный элемент всегда находится в корне кучи.
  - **Max-куча:** значение в каждом узле **больше или равно** значениям его потомков.  
→ Максимальный элемент всегда находится в корне кучи.
- 

## **2. Алгоритм вставки нового элемента (процедура sift\_up)**

### **Идея:**

Добавить элемент в конец кучи и «просеять вверх» (поднять), пока не восстановится свойство кучи.

### **Пошагово:**

1. Добавляем новый элемент в конец массива (в следующую свободную позицию дерева).
2. Сравниваем элемент с его родителем.
3. Если нарушено свойство кучи (например, в min-куче потомок меньше родителя), — меняем их местами.
4. Продолжаем подниматься вверх, пока элемент не окажется на корректной позиции (или не достигнет корня).

**Сложность:**  $O(\log n)$ , т.к. высота двоичной кучи равна  $\log_2 n$ .

---

## **3. Почему построение кучи из массива — $O(n)$ , а не $O(n \log n)$**

### **Метод:**

Используется алгоритм "просеивания вниз" (sift\_down), начиная с середины массива (все элементы после середины — листья, их не нужно обрабатывать).

### **Обоснование:**

- Листья не требуют операций.
- Элементы на нижних уровнях имеют малую высоту, значит, требуют меньше операций.
- Хотя каждая операция sift\_down может занимать  $O(\log n)$ , для большинства узлов глубина мала.
- Суммарное время вычисляется как:  
$$n/2 * 1 + n/4 * 2 + n/8 * 3 + \dots \approx 2n = O(n)$$

**Итог:** Построение кучи из массива линейное, т.к. большая часть элементов просеивается на короткое расстояние.

---

## 4. Алгоритм пирамидальной сортировки (Heapsort)

### Основная идея:

Использовать свойство max-кучи, где на вершине всегда находится максимальный элемент.

### Шаги:

1. Построить max-кучу из массива ( $O(n)$ ).
2. Повторять:
  - Поменять местами корень (максимум) и последний элемент.
  - Уменьшить размер кучи на 1.
  - Восстановить свойство кучи (sift\_down) для корня.
3. После каждого шага "вынутый" элемент помещается в конец массива — в итоге массив отсортирован по возрастанию.

**Сложность:**  $O(n \log n)$

(построение  $O(n)$  +  $n$  удалений по  $O(\log n)$ ).

### Особенности:

- Не требует дополнительной памяти (in-place).
- Не является стабильной сортировкой.

---

## 5. Куча и приоритетная очередь

### Почему куча подходит:

- Элемент с наивысшим (или наименьшим) приоритетом всегда находится в корне.
- Доступ к нему — за  $O(1)$ .
- Вставка и удаление приоритета — за  $O(\log n)$ .

### Поддерживаемые операции:

Операция	Описание	Сложность
enqueue(item, priority)	Добавление элемента в очередь	$O(\log n)$
dequeue()	Извлечение элемента с наивысшим приоритетом	$O(\log n)$
peek()	Просмотр элемента с наивысшим приоритетом	$O(1)$

### Вывод:

Куча идеально подходит для реализации приоритетной очереди благодаря быстрому доступу к элементу с максимальным приоритетом и эффективным операциям вставки и удаления.