Grundlagen und diskrete Mathematik
Übung 6

Abgabe: Kalenderwoche 50

Aufgabe 1

Gegeben sei die Ackermannfunktion $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch folgende Rekursionsgleichungen:

$$\begin{aligned} a(0, m) &= m + 1 \\ a(n+1, 0) &= a(n, 1) \\ a(n+1, m+1) &= a(n, a(n+1, m)) \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie von Hand $a(2, 1)$.

(b) Implementieren Sie die Ackermannfunktion in einer Programmiersprache Ihrer Wahl.

(c) Berechnen Sie so viele Werte wie möglich und beschreiben Sie die Probleme die dabei auftreten.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} a(2,1) &= a(1, a(2,0)) = a(1, a(1,1)) = a(1, a(0, a(1,0))) \\ &= a(1, a(0, a(0,1))) = a(1, a(0,2)) = a(1,3) = a(0, a(1,2)) \\ &= a(0, a(0, a(1,1))) = a(0, a(0, a(0, a(1,0)))) \\ &= a(0, a(0, a(0, a(0,1)))) = a(0, a(0, a(0,2))) \\ &= a(0, a(0,3)) = a(0,4) = 5 \end{aligned}$$

(b) In F#:

```
let rec a n m =
    if n=0 then m+1
    elif m=0 then a (n-1) 1
    else a (n-1) (a n (m-1))
```

(c) Schon um kleine Eingaben abzuarbeiten wird eine grosse Rekursionstiefe erreicht, was einen Stapelüberlauf zur Folge hat. Ein weiteres Problem ist, dass die Ackermannfunktion sehr schnell wächst (schneller als jede primitiv rekursive Funktion) und daher auch entsprechend schnell die üblichen primitiven Datentypen (int, int64) sprengt.

Aufgabe 2

Die n-te Koch-Kurve K_n ist wie folgt gegeben:

- Die Kurve K_0 ist eine Gerade der Länge 1.
- Die Kurve K_{n+1} erhält man aus der Kurve K_n, indem man jede Teilgerade von K_n in 3 gleich grosse Abschnitte unterteilt und danach den "mittleren" dieser Abschnitte gemäss unten stehender Skizze in zwei zusammenhängende Geraden gleicher Länge umsetzt.

Die Kurven K_0, K_1, K_2 und K_3:

(a) Berechnen Sie die Länge der Kurve K_4.

(b) Geben Sie eine rekursive Definition der Funktion $L : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$L(n) = \text{ Länge der Kurve } K_n.$$

Lösung:

(a) $L(4) = (\frac{4}{3})^4$.

(b) Da sich die Länge der Kurve bei jeder Iteration um den Faktor $\frac{4}{3}$ verlängert (das "mittlere Drittel" wird verdoppelt), ergibt sich die Rekursionsgleichung:

$$L(0) = 1$$
$$L(n+1) = \frac{4}{3} \cdot L(n).$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Induktion nach k, dass für alle natürlichen Zahlen n, m, k folgendes gilt:

$$(n + k = m + k) \Rightarrow n = m. \qquad \text{(Kürzbarkeit)}$$

Hinweis: Arbeiten sie mit der (rekursiven) Definition der Addition und benützen Sie die Peano Axiome.

Lösung: Induktion nach k.

- Verankerung: Es gilt offensichtlich
$$n + 0 = m + 0 \Rightarrow n = m.$$
- Schritt: Wir müssen
$$\underbrace{n + (k+1) = m + (k+1)}_{(1)} \Rightarrow n = m$$
zeigen. Aus der rekursiven Definition der Addition folgt:
$$n + (k+1) = m + (k+1) \Leftrightarrow (n+k) + 1 = (m+k) + 1.$$
Mit den Peano Axiomen (Jede Zahl hat genau einen Nachfolger) folgt aus (1)
$$n + k = m + k.$$
Durch Anwendung der Induktionsannahme erhalten wir schliesslich die gewünschte Identität $n = m$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $x, y \neq 0$:
$$x|y \;\Rightarrow\; x \leq y.$$

Lösung: Es sei $x \in \mathbb{N}$ ein Teiler von $y \in \mathbb{N}$. Wir müssen $x \leq y$ zeigen. Weil x ein Teiler von y ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $y = kx$. Da $y \neq 0$ gilt, muss auch $k > 0$ gelten. Daher gibt es eine natürliche Zahl s mit $k = s + 1$. Es gilt somit
$$y = kx = (s+1)x = \underbrace{sx}_{\in \mathbb{N}} + x \geq x.$$

Aufgabe 5

Finden Sie ganze Zahlen a und b, so dass die Gleichung
$$a \cdot 241 + b \cdot 114 = 1$$
erfüllt ist.

Lösung: Sukzessives Teilen mit Rest ergibt:

$$\begin{aligned} 241 &= 2 \cdot 114 + 13 \\ 114 &= 8 \cdot 13 + 10 \\ 13 &= 1 \cdot 10 + 3 \\ 10 &= 3 \cdot 3 + 1 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$1 = \underbrace{74}_{b} \cdot 114 + \underbrace{-35}_{a} \cdot 241.$$