ZHAW Zurich University of Applied Sciences

Institute for Applied Mathematics and Physics, School of Engineering

Lösungen PhIT Übung 1

Prof. Dr. R.M. Füchslin

Diese Übungen dienen dazu, Sie mit einigen Konzepten und Rechenmethoden der Physik vertraut zu machen. Sie machen diese Übungen für sich. Das bedeutet:

- Sie müssen keine Übungen abgeben.
- Sie können gerne in Gruppen arbeiten. Wir empfehlen das sogar.
- Wir machen keine Korrekturen, stellen aber Musterlösungen zur Verfügung. Der/die ÜbungsbetreuerIn ist Ihr Coach. Diese(r) wird Ihnen nach bestem Wissen Ihre Fragen beantworten. Die Fragen stellen müssen Sie aber selber.
- Wir präsentieren Ihnen Aufgaben und (manchmal) Zusatzaufgaben. Uns ist klar, dass Sie diese nicht alle zusammen lösen können:
    - Zusatzaufgaben dienen lediglich zur Übung. Wir setzen nicht voraus, dass Sie diese gelöst haben.
    - Die Aufgaben sollten Sie zumindest verstanden haben. Lösen Sie einige der Aufgaben selber (und vollständig) und studieren Sie die Lösung der anderen. Der Inhalt der Aufgaben gehört zum Prüfungsstoff.

Aufgaben

Aufgabe 1: Kontostand

Ein(e) StudentIn verfügt über ein regelmässiges Einkommen E von 2500 Franken pro Monat. Er oder sie haben vor Studienbeginn fleissig gespart und ein Vermögen von Fr. 10‘000 auf dem Konto (Kontostand $K(t=0)=10000\,\mathrm{SFr}$) . Studierende sind auch nur Menschen; das bedeutet, dass sie nicht immer ganz vernünftig handeln. Im betrachteten Fall äussert sich dies darin, dass der/die StudentIn die Ausgaben nicht am Einkommen sondern am Kontostand orientiert. Mathematisch ausgedrückt belaufen sich die monatlichen Ausgaben auf eine Summe, die gleich dem Kontostand multipliziert mit einer Konstanten α ist: Ausgaben A pro Monat zum Zeitpunkt t : $= \alpha K(t)$.

a) Formulieren Sie die Veränderungsraten Gleichung für den Kontostand $K(t)$.

b) Simulieren Sie die Entwicklung des Kontostandes $K(t)$ mit BM für $\alpha = 1.0, 0.5, 2.0$. Welche Höhe erreicht der Kontostand nach langer Zeit?

c) In BM müssen Sie keine Einheiten angeben. Nichtsdestotrotz: Welche Einheit hat die Konstante α ?

d) Ist das Vorgehen der/des Studenten/Studentin wirklich so unvernünftig?

e) Können Sie den Kontostand, der nach langer Zeit erreicht wird, auch ohne Simulation berechnen? Aus den Simulationen wissen Sie, dass das Ausgabeverhalten nach langer Zeit zu einem konstanten (stationören) Kontostand führt. Stationarität bedeutet: Der Kontostand verändert sich nicht mehr. Überlegen Sie, was das für die Veränderungsrate bedeutet.

Lösung

Die Veränderungsrate des Kontostandes ist gegeben durch Einnahmen und Ausgaben:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= E - A \\ &= E - \alpha K \end{aligned} \tag{1}$$

Ein BM – Programm, welches diese Entwicklung simuliert, finden Sie in Konto.mmd. Aus den Simulationen können Sie entnehmen:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1.0[1/Monat]: \ K(t=\infty) = 2500 SFr. \\ \alpha &= 0.5[1/Monat]: \ K(t=\infty) = 5000 SFr. \\ \alpha &= 2.0[1/Monat]: \ K(t=\infty) = 1250 SFr. \end{aligned} \tag{2}$$

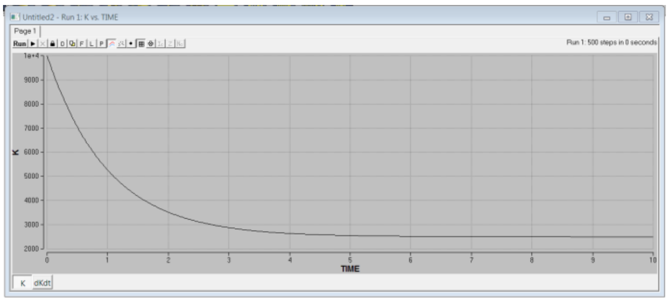

Fig. 1: Entwicklung des Kontostandes für $\alpha = 1.0$ [1/Monat].

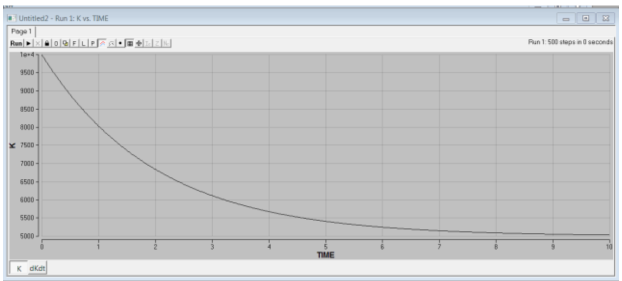

Fig. 2: Entwicklung des Kontostandes für $\alpha = 0.5$ [1/Monat].

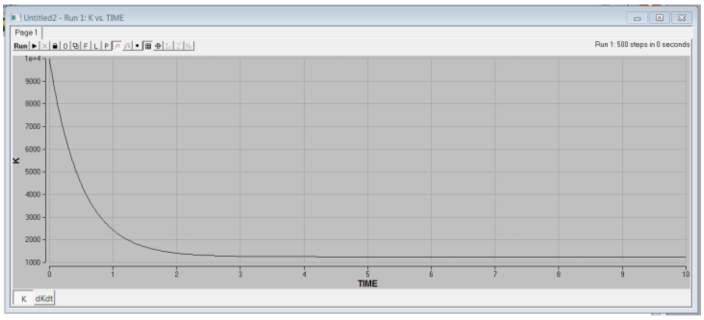

Fig. 3: Entwicklung des Kontostandes für $\alpha = 2.0\ [1/\text{Monat}]$.

Die Veränderungsrate hat die Einheit SFr/Zeit. Wir berechnen die Zeit hier in Monaten. Das bedeutet: Die Veränderungsrate hat die Einheit SFr/Monat. Die Einnahmen haben ebenfalls die Einheit SFr/Monat. Der Kontostand K hat die Einheit SFr. Damit die Ausgaben αK die Einheit der Veränderungsrate haben, muss die Konstante α die Einheit 1/Monat haben.

Ganz so unvernünftig ist das Verhalten des/der StudentIn nicht; das Konto leert sich nicht völlig. Und beachten Sie: Die Ausgaben sind letztlich immer gleich gross. Was sich verändert, ist die Grösse der Reserve.

Wir beobachten, dass nach langer Zeit (Mathematisch: nach unendlich langer Zeit) der Kontostand eine stationäre Grösse annimmt. Das bedeutet: Die Veränderungsrate des Kontostandes ist gleich null: $\frac{dK}{dt} = 0$. Das bedeutet

$$\frac{dK(t=\infty)}{dt} = E - \alpha K(t=\infty) = 0 \tag{3}$$

Damit erhalten wir:

$$K(t=\infty) = \frac{E}{\alpha} \tag{4}$$

Aufgabe 2 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Nehmen Sie an, Sie kennen die Trajektorie $\vec{r}(t)$ eines Punktes:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 t^2 + k_3 t^5 \\ k_4 + k_5 t^3 \\ k_6 \end{pmatrix} \tag{5}$$

- Welche Einheiten haben die Parameter k_i?
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Punktes.
- Berechnen Sie die Beschleunigung des Punktes.

- Wie gross ist die Schnelligkeit des Punktes zum Zeitpunkt $t = 2s$ als Funktion der Parameter k_i?

Lösung

Einheiten: $[k_1] = [m], [k_2] = [ms^{-2}], [k_3] = [ms^{-5}], [k_4] = [m], [k_5] = [ms^{-3}], [k_6] = [m]$

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2k_2 t + 5k_3 t^4 \\ 3k_5 t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 2k_2 + 20k_3 t^3 \\ 6\ k_5\ t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Schnelligkeit:

$$|\vec{v}(t = 2s)| = \sqrt{(4k_2 + 80k_3)^2 + 144k_5^2} \tag{8}$$

Aufgabe 3: Beschleunigung bei einer Kreisbewegung

Sie befinden sich auf einem Karussell.

- Nehmen Sie an, Sie sitzen auf einem Karussell, in einer Distanz $r = 7m$ von der Mitte entfernt. Das Karussell dreht sich mit drei Umdrehungen pro Minute. Werden Sie beschleunigt? Falls ja: Mit welcher Datenstruktur können Sie Ihre Beschleunigung beschreiben und welche aktuellen Werte haben die Elemente dieser Datenstruktur? (Achtung: Drehbewegungen werden nicht in Winkelgrad pro Sekunde sondern in Radian pro Sekunde angeben. In Radian entspricht ein voller Kreis einem Winkel von 2π.
- Die Umdrehungszahl wird verdoppelt. Nach dieser Erhöhung hat das ganze System wieder eine stabile, eben doppelt so grosse Umdrehungsgeschwindigkeit. Wie gross ist der Betrag Ihrer Beschleunigung, verglichen mit dem Startzustand?

Lösung

Eine Kreisbewegung in der xy - Ebene kann in kartesischen Koordinaten dargestellt werden durch:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t + \phi) \\ r\sin(\omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

(Normalerweise verzichtet man auf die dritte Komponente). Die Phasenkonstante ϕ ist hier nur der Vollständigkeit angegeben und eigentlich irrelevant.

Die Geschwindigkeit ist dann gegeben durch:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -r\,\omega\sin(\omega t + \phi) \\ r\,\omega\cos(\omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

und die Beschleunigung durch:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -r\,\omega^2\cos(\omega t + \phi) \\ -r\,\omega^2\sin(\omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Beschleunigungen sind also Vektoren!

Die Kreisfrequenz ω ergibt sich aus folgender Überlegung: Sie gehen in einer Minute 3 mal im Kreis herum, machen also pro 60 Sekunden 3 mal einen Winkel von 2π . Das heisst:

$$\omega = \frac{3 \cdot 2\pi}{60s} = 0.314s^{-1} \tag{12}$$

Wie Sie Gleichung (11) entnehmen können, führt eine Verdoppelung von ω zu einer Vervierfachung (des Betrags) der Beschleunigung!

Aufgabe 4 Differentialgleichungen mit Berkeley Madonna

Lösen Sie folgendes System von gekoppelten Differentialgleichungen mit Berkeley - Madonna:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned} \tag{13}$$

mit $x(t=0) = x_0 = 1, \; y(t=0) = y_0 = 0.$

Lösung

Siehe das File BM_Serie_1_Aufgabe_3.mmd

Aufgabe 5 Ort-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsdiagramme

Im Folgenden arbeiten wir in einer Dimension und lassen deshalb Vektorpfeile weg. Es gilt: $s(t)$ bezeichnet den Ort als Funktion der Zeit, $v(t), a(t)$ die zugehörige Geschwindigkeit respektive Beschleunigung.

Zuerst betrachten wir eine konstante Beschleunigung, gegeben durch Fig. 4.

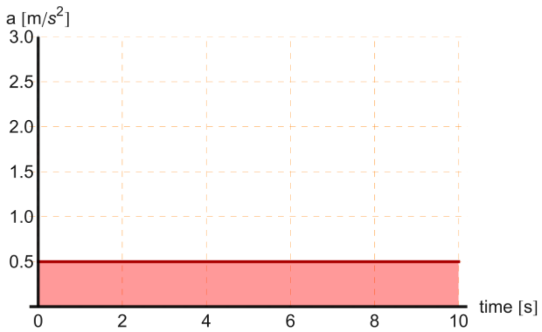

Fig. 4

Nehmen Sie an, Ihre Anfangsposition sei $s(0) = 0$ und Ihre Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$. Zeichnen Sie die Graphen für $v(t)$ und $s(t)$.

Machen Sie dann dasselbe unter der Annahme $s(0) = 2m$ und Ihre Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 1m/s$.

Zum Schluss: Fertigen Sie $v(t)$ und $s(t)$ Plots für die Beschleunigung gegeben in Fig. 5.

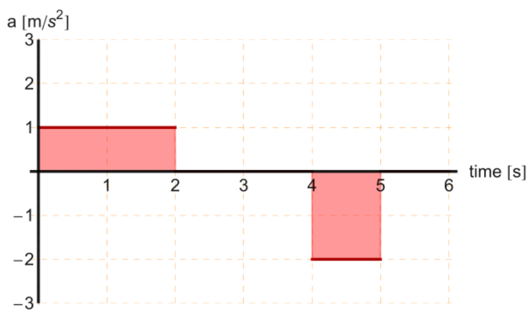

Fig. 5

Lösung

Es gelten die Zusammenhänge:

$$
\begin{aligned}
v(t) &= v(0) + \int_0^t a(t')dt' \\
s(t) &= s(0) + \int_0^t v(t')dt'
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Normalerweise verwenden Sie Ableitungen, wenn Sie die Ortskurve haben und sich für Beschleunigungen interessieren. Vielfach haben Sie Beschleunigungen und suchen den Ort: Dann brauchen Sie Integrale. Versuchen Sie, graphisch zu integrieren, also "Häuschen zu zählen". Dann erhalten Sie im ersten Fall die Geschwindigkeits- und Ortskurven in Fig. 6 und Fig. 7.

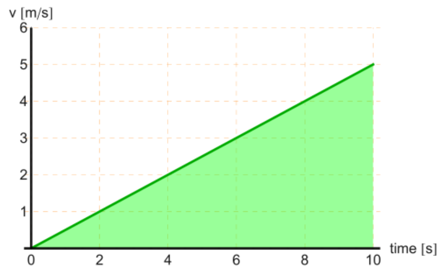

Fig. 6

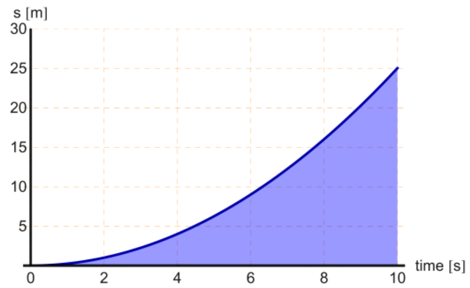

Fig. 7

Für die zweite Situation mit Anfangsort und insbesondere Anfangsgeschwindigkeit erhalten Sie die Geschwindigkeits- und Ortskurven in Fig. 8 und Fig. 9.

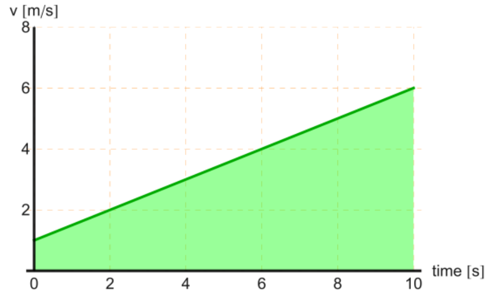

Fig. 8

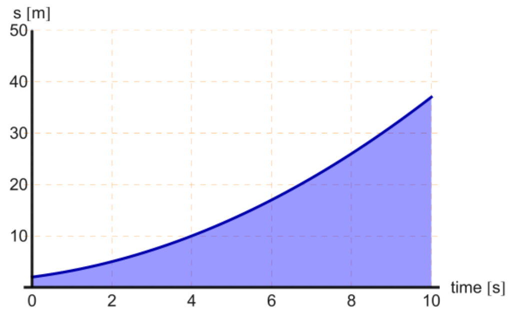

Fig. 9

Versuchen Sie wirklich, die Steigungen und Achsenabschnitte zu verstehen. In diesen stecken die Anfangspositionen und – geschwindigkeiten!

Für nichtkonstante Beschleunigungen ergeben sich die Geschwindigkeits- und Ortskurven in Fig. 10 und Fig. 11.

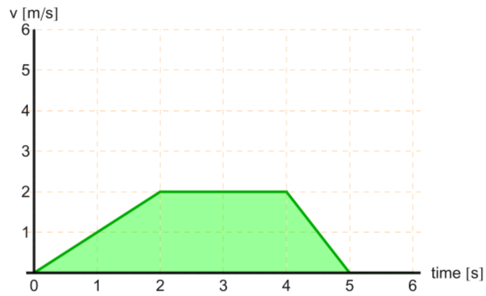

Fig. 10

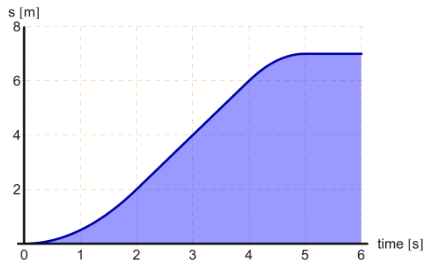

Fig. 11

Aufgabe 6 Schätzaufgabe: Fussball

Kommentar: Abschätzungen sind eines der wichtigsten Hilfsmittel für IngenieurInnen. Der Witz einer Schätzaufgabe ist nicht so sehr der gefundene numerische Zahlenwert sondern das Herausarbeiten der Grössen, von welchen die Schätzung abhängt. Eine grobe Schätzung eines realen Werts R gibt Ihnen die Grössenordnung einer Zahl (das heisst: wenn Sie eine Grösse auf einen Wert S schätzen, dann sollte S innerhalb von $0.1R < S < 10R$ liegen. Als gute Schätzung gilt: $0.5R < S < 2R$. Solche Schätzaufgaben sind recht beliebt bei Einstellungstests.

Frage: Wieviele Kilometer legt ein Fussballspieler während eines Spiels zurück? Begründen Sie Ihre Schätzung im Detail!

Lösungsvorschlag

Ein Fussballmatch dauert 90 Minuten, also 5400 Sekunden. Während dieser Zeit stehen die Spieler selten still: Entweder sie treten vor Ort, sie laufen oder sie rennen. Der Weltrekord im Hundertmeterlauf beträgt ungefähr 10 Sekunden. Ein Spieler wird also sicher nicht schneller als mit $v_{\max} = 10m/s$ rennen. Wir nehmen an: $v_{renn} = 4m/s$ (was immer noch 14.5 km pro Stunde ergibt!). Forciertes Marschieren geschieht mit $v_{marsch} = 2m/s$ (also 7.2 km pro Stunde). Vor Ort treten geschieht mit etwa $v_{vorOrt} = 1m/s$ (also etwa 3.6 km pro Stunde). Wir nehmen an, dass ein Spieler etwa ein Drittel der Zeit rennt, ein Drittel forciert läuft und ein Drittel vor Ort tritt. Damit kommen wir auf eine Strecke. Damit kommen wir auf eine Strecke von ungefähr 13 km. So ein Fussballspiel ist also ein recht gutes Workout! Beachten Sie Folgendes: Die Schätzung ist wohl nicht allzu weit vom realen Wert entfernt. Der Weltrekord im Marathonlauf liegt ungefähr bei zwei Stunden (42 km in 2 Stunden, also $v_{Marathon} = 6m/s$). Maximal könnte also ein Fussballspieler etwa 32 km zurücklegen, wäre er ein Weltspitzenläufer. Ein bisschen mehr als Seniorenwandern (5 km /h) wird er schon schaffen. Also dürfte 13 km ein realistischer Wert darstellen.

Beachten Sie, dass für eine Schätzung die Plausibilitätsüberlegung am Schluss sehr wichtig ist!

Aufgabe 7

(Aus Tipler und Mosca) Ein Schnellkäfer kann sich mit der Beschleunigung $a = 400g = 3924ms^{-2}$ in die Luft katapultieren. Das ist eine Größenordnung mehr, als ein Mensch aushalten kann. Der Käfer springt, indem er seine $d = 6mm$ langen Beine „ausklappt". Wie hoch kann er springen? Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand.

Lösung

Die positive Koordinatenrichtung soll nach oben zeigen. Wir gehen davon aus, dass der Käfer beim Absprung durch seine Beine gleichförmig beschleunigt wird und dass er danach (sobald er in der Luft ist) nur noch der Erdbeschleunigung unterliegt.

Während der ganzen Beschleunigungsphase wirkt auf einer Strecke d eine Beschleunigung von a. Damit erhalten wir für die Absprunggeschwindigkeit mit $v_{z,0} = \sqrt{2ad} = 6.86ms^{-1}$.

Wir kennen die allgemeine Formel für die Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ v_{y,0} \\ v_{z,0} - gt \end{pmatrix} \tag{15}$$

Wir haben $v_{x,0} = v_{y,0} = 0$. Der Käfer wird solange steigen, bis $v_z(t_{steig}) = 0$. Das bedeutet

$$t_{steig} = \frac{v_{z,0}}{g} = 0.7s \tag{16}$$

Unter Benützung der allgemeinen Formel

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_{x,0} + v_{x,0}t \\ r_{y,0} + v_{y,0}t \\ r_{z,0} + v_{z,0}t - g\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Wir haben $r_{x,0} = r_{y,0} = v_{x,0} = v_{y,0} = 0$ und $r_{z,0} = 6mm$. Damit bekommen wir für die maximale Flughöhe $h_{\max} = 2.4m$.

Zusatzaufgabe 8 Fragen und Antworten

Behauptung	Richtig	Falsch
Die Geschwindigkeit eines Punktes ist parallel zur Tangente an die Trajektorie des Punktes.		
Die Beschleunigung eines Punktes ist immer parallel zur Tangente an die Trajektorie des Punktes.		
Gegeben eine gleichförmige Kreisbewegung. Eine Verdoppelung der Winkelgeschwindigkeit führt zu einer Verdoppelung der auf den Punkt wirkenden Beschleunigung.		
Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung zeigt die Beschleunigung des Punktes zum Zentrum des Kreises.		

Lösung

Behauptung	Richtig	Falsch
Die Geschwindigkeit eines Punktes ist parallel zur Tangente an die Trajektorie des Punktes.	x	
Die Beschleunigung eines Punktes ist immer parallel zur Tangente an die		x

Trajektorie des Punktes.		
Gegeben eine gleichförmige Kreisbewegung. Eine Verdoppelung der Winkelgeschwindigkeit führt zu einer Verdoppelung der auf den Punkt wirkenden Beschleunigung.		x
Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung zeigt die Beschleunigung des Punktes zum Zentrum des Kreises.	x	

Zusatzaufgabe 9: Fahren auf der Achterbahn

Betrachten Sie Fig. 12. Sie sehen einen Ausschnitt einer Achterbahn. Die Steigung am Anfang (bei x = 0m) und am Ende (bei x = 36 m) ist null, d.h. die Bahn verläuft am Anfang und am Ende horizontal. Versuchen Sie, rein qualitativ die Schnelligkeit sowie die x-Komponente und die z-Komponente der Geschwindigkeit anzugeben. "Qualitativ" bedeutet: Geben Sie Extrema und eventuelle Nullpunkte richtig an. Die Zahlwerte sind bei dieser Aufgabe nicht wichtig, versuchen Sie aber, Grössenrelationen ("beim Punkt x_1 ist die Schnelligkeit grösser/kleiner als bei x_2) korrekt wiederzugeben. Wir nehmen an, die Achterbahn sei gut geölt, wir vernachlässigen jede Form von Reibung. Am Punkt x = 0m hat die Gondel eine Schnelligkeit von 5 m/s und fährt in Richtung der positiven x - Koordinate.

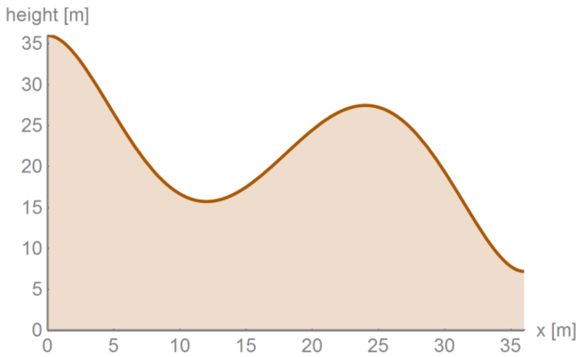

Fig. 12 Ausschnitt aus einer Achterbahn.

Lösung

Bei Punkt **A** fährt die Gondel in horizontaler Richtung mit endlicher Geschwindigkeit nach rechts. Die z - Komponente der Geschwindigkeit ist gleich null, da ja die Bahn in diesem Punkt horizontal verläuft. Die x-Komponente entspricht der Schnelligkeit.

Grundsätzlich ist der Punkt **A** der höchste Punkt der Bahn. Das bedeutet, dass die Schnelligkeit an jedem anderen Punkt grösser ist als in **A**. Im Punkt **B** sind wir in einem Tal. v_z ist gleich null mit positiver Steigung, v_x nimmt ein Maximum an und ist gleich der Schnelligkeit. In Punkt **C** sind wir auf einem Hügel. Wieder verschwindet v_z, sinkt jetzt aber. In Punkt **D** nimmt die Schnelligkeit ihren maximalen Wert an, wieder mit verschwindendem v_z.

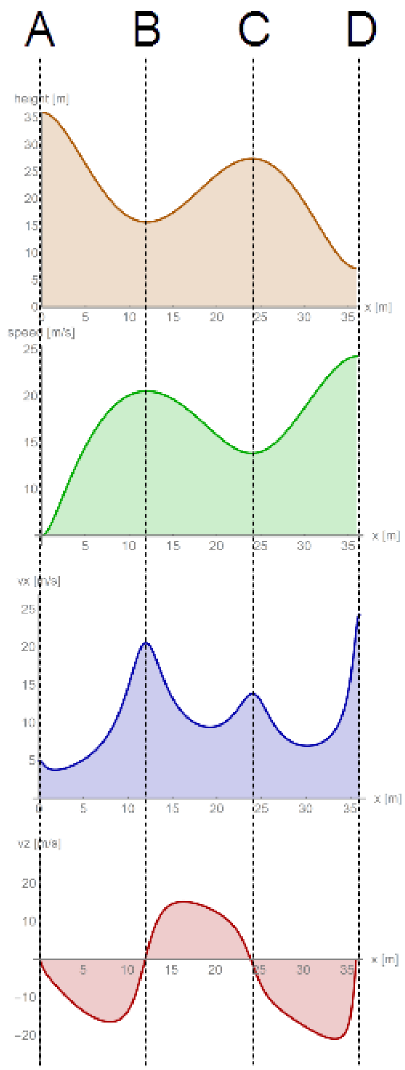

Fig. 13 Extrema und Nullpunkte der Schnelligkeit (grün) der v_x-Komponente (blau) und der v_z-Komponente (rot) der Geschwindigkeit auf einer Achterbahn (orange).

Zusatzaufgabe 10: Tank mit Zu- und Abfluss

Sie haben einen Tank mit Zu- und Abflüssen. Die Füllrate ist gegeben durch die Funktion flow(t), welche angibt, wieviel Wasser pro Sekunde zu- oder abfliesst. In Fig. 14 sehen Sie eine graphische Darstellung von flow(t).

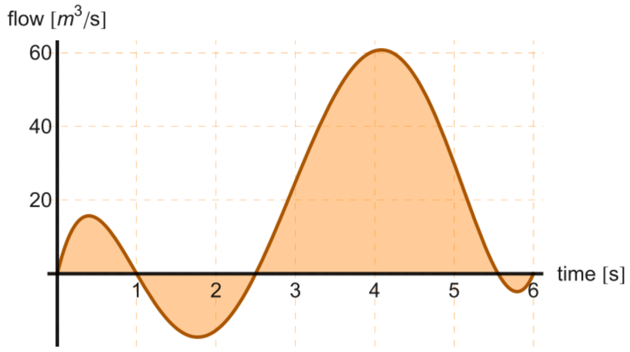

Fig. 14 Wasserfluss in einen Tank

Beantworten Sie folgende Fragen mit einer Begründung, welche auch für jemanden, der die Vorlesung nicht besucht hat, verständlich ist!

a) Wird sich bei $t = 6s$ mehr oder weniger Wasser als bei $t = 0s$ im Tank befinden?
b) Wird sich bei $t = 2.5s$ mehr oder weniger Wasser als bei $t = 0s$ im Tank befinden?
c) Wie gross (ungefähr) ist die Änderung des Wassergehalts im Tank zwischen $t = 2.5s$ und $t = 6s$ im Tank befinden?

Es geht bei dieser Frage weniger um die Antworten und viel mehr um Ihre Erklärungen!

Lösung

Grundsätzlich gilt:

$$\text{Änderung des Inhalts } \Delta I = \int_{t_{start}}^{t_{end}} flow(t)dt \tag{18}$$

Das Integral entspricht der Fläche unter der Kurve. Damit ergeben sich folgende Antworten:

a) Mehr Wasser.
b) Weniger Wasser.
c) Ungefähr 120 m^3 mehr Wasser (ein Häuschen = 20m^3).

Zusatzaufgabe 11 Darstellung einer geraden Bewegung

Gegeben seien zwei Punkte $\vec{P}_1 = (1,1,2)$ und $\vec{P}_2 = (3,4,5)$. Geben Sie die Trajektorie $\vec{r}(t)$ eines Punktes welcher

a) sich mit der konstanten Schnelligkeit 2 m/s bewegt,
b) und welcher zum Zeitpunkt t = 0 durch $\vec{P}_1$ geht,
c) und sich auf einer Geraden bewegt, die zu einem späteren Zeitpunkt durch $\vec{P}_2$ geht.

Lösung

Grundsätzlich hat die Trajektorie die Form:

$$\vec{r}(t) = \vec{P}_1 + \vec{v}t \tag{19}$$

Die Frage ist: Wie sieht $\vec{v}$ aus? Damit sich der Punkt auf einer Geraden bewegt und sowohl durch $\vec{P}_1$ und $\vec{P}_2$ geht, muss gelten:

$$\vec{v} = \alpha(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \tag{20}$$

für eine Konstante α .

Damit der Punkt die Schnelligkeit 2 m/s hat muss gelten:

$$|\vec{v}| = 2ms^{-1} = \alpha\sqrt{4+9+9} \tag{21}$$

Damit ergibt sich $\alpha = 0.43$. Schliesslich ergibt sich:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.853 \\ 1.279 \\ 1.279 \end{pmatrix} ms^{-1} \tag{22}$$

Zusatzaufgabe 12: Der schiefe Wurf}

Stellen Sie sich vor, Sie sprängen über eine Klippe der Höhe h = 5m (s. Fig. 15). Tückischerweise hat es unten einen Felsvorsprung von x = 2 m Länge. Mit welcher Geschwindigkeitskomponente v_x müssen Sie horizontal rennen, damit Sie ins Wasser springen? Setzen Sie die Erdbeschleunigung g = 10 ms^{-2}.

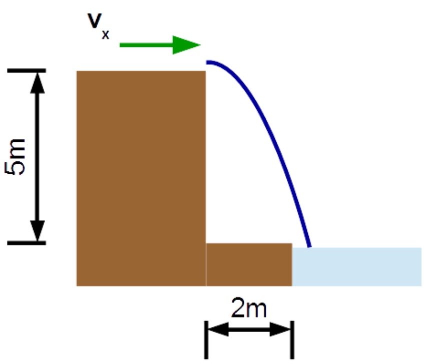

Fig. 15

Lösung

Die Trajektorie hat die Gestalt:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x t \\ 0 \\ h - g\dfrac{t^2}{2} \end{pmatrix} \tag{23}$$

Zum Zeitpunkt $t_{Aufschlag}$ soll die z-Komponente der Bewegung gleich null sein. Die x - Komponente muss, damit Sie ins Wasser springen, grösser als 2m sein.

Es gilt

$$t_{Aufschlag} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{24}$$

Damit kein Unglück geschieht, muss gelten $v_x t_{Aufschlag} > 2m$. Wir erhalten $v_x > 2ms^{-1}$.

Zusatzaufgabe 13 (Crazy Challenge)

Versuchen Sie nachzuvollziehen, wie man auf die Veränderungsratengleichungen in den Populationsmodellen im File „Populationsmodelle.pdf“ kommt. Im Idealfall versuchen Sie, diese Populationsmodelle in BM zu programmieren.