Name: ………………………………………………………

Vorname: ………………………………………………………

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

School of Engineering

Semesterendprüfung Frühlingssemester 17 - Lösungsvorschlag

Klasse:	IT16a ZH
Datum:	21. Juni 2017
Zugelassene Hilfsmittel:	- Basisbuch Analysis
	- Zusammenfassung im Umfang von max. 10 A4-Seiten
	- Einfacher Taschenrechner (nicht graphikfähig, nicht algebrafähig)
Besonderes:	- Keine Mobiles/Smartphones auf dem Tisch!
	- Schreiben Sie auf die abgegebenen Blätter (notfalls rückseitig) und reissen Sie die Prüfung nicht auseinander (setzen Sie andernfalls Ihren Namen auf jede Seite!)
Zeit:	120 Minuten
Total Punkte:	42 (7 Aufgaben zu 6 Punkte)

Punkte: Note:

Viel Erfolg!

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Inhalt des *abgeschlossenen Flächenstücks*, welches vom Graph der Funktion $f(x) = -x^2 + 6x + 1$ und vom Graph der Funktion $g(x) = 2x + 4$ begrenzt wird. (3 P.)

b) Bestimmen Sie das Integral mithilfe einer geeigneten *Substitution*: (3 P.)

$$\int \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x) dx$$

Lösung

a) Schnittpunkte = Integrationsgrenzen: (1 P.)

$-x^2 + 6x + 1 = 2x + 4$

$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0$

$\Longrightarrow x_1 = 1$ und $x_1 = 3$

$$F = \left| \int_1^3 [f(x) - g(x)] dx \right| = \int_1^3 [x^2 - 4x + 3] dx$$ (1 P.)

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]\Bigg|_1^3 = 9 - 18 + 9 - \left[\frac{1}{3} - 2 + 3\right] = \frac{4}{3}$$ (1 P.)

b) $u := \sin(x)$ und $\frac{du}{dx} = \cos(x) \Longrightarrow du = \cos(x)\, dx$ (1 P.)

$$\int \cos(u) \cdot du = \sin(u) + C$$ (1 P.)

$$= \sin(\sin(x)) + C$$ (1 P.)

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 2

(6 Punkte)

a) Bestimmen Sie das folgende Integral mithilfe einer geeigneten *Partialbruchzerlegung*: (4 P.)

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx$$

b) Berechnen Sie das untenstehende Integral mittels geeigneter *partieller Integration:* (2 P.)

$$\int \ln(x^2-1)dx$$

(Tipp: $\ln(x^2-1) = 1 \cdot \ln(x^2-1)$)

Hinweis: Sie dürfen das Resultat aus Teilaufgabe a) benutzen. Die anderen Schritte müssen explizit angegeben werden.

Lösung

a) $x^2 : (x^2-1) = 1 + \frac{1}{x^2-1}$ (1 P.)

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$1 = A(x-1) + B(x+1)$$

$0 = A + B$ und $1 = -A + B$ mit $A = -\frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$ (1 P.)

$$= \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right) dx = \int \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1}\right) dx \quad \text{(1 P.)}$$

$$= x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C \quad \text{(1 P.)}$$

b) $\int \ln(x^2-1)\,dx = x \cdot \ln(x^2-1) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2-1}\,dx$ (1 P.)

$$= x \cdot \ln(x^2-1) - 2\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx \quad \text{(1 P.)}$$

$$= x \cdot \ln(x^2-1) - 2\left(x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\right) + C$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Bogenlänge von

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

im Intervall $2 \leq x \leq 3$.

Lösung

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \text{(0 P.)}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} \qquad \text{(1 P.)}$$

$$L = \int_2^3 \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)^2}\, dx \qquad \text{(1 P.)}$$

$$= \int_2^3 \sqrt{1 + \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right) + \frac{1}{4x^4}}\, dx$$

$$= \int_2^3 \sqrt{\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}}\, dx = \int_2^3 \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)^2}\, dx \qquad \text{(2 P.)}$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x}\right]\Bigg|_2^3 = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} - \left(\frac{8}{6} - \frac{1}{4}\right) = \frac{18}{6} + \frac{1}{4} = \frac{36}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{4} \qquad \text{(2 P.)}$$

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sind die drei Integrale: $\int_6^8 f(x)dx = 2\pi$ $\quad \int_4^6 f(x)dx = \frac{\pi}{2}$ $\quad \int_4^6 g(x)dx = -\pi$

Bestimmen Sie damit folgende Integrale:

a) $\int_4^6 [3f(x) + 2g(x)]dx$ (2 P.)

b) $\int_6^6 f(x)dx$ (1 P.)

c) $\int_4^8 f(x)dx$ (2 P.)

d) $4 \cdot \int_6^4 f(x)dx + 6 \cdot \int_4^6 g(x)dx$ (1 P.)

Lösung

a) $\int_4^6 [3f(x) + 2g(x)]dx = 3 \cdot \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$

b) $\int_6^6 f(x)dx = 0$

c) $\int_4^8 f(x)dx = \int_4^6 f(x)dx + \int_6^8 f(x)dx = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$

d) $4 \cdot \int_6^4 f(x)dx + 6 \cdot \int_4^6 g(x)dx = 4 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + 6 \cdot (-\pi) = -8\pi$

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 5 (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert: (3 P.)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\cos(x)}\right)$$

b) Beurteilen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums die Konvergenz der folgenden Reihe: (3 P.)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots$$

Lösung

a) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\cos(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin(x)}\right)$$ (1 P.)

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(x)}\right)$$ (1 P.)

$$=\frac{1}{4}$$ (1 P.)

b) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$ (1 P.)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+2)}\right)=1$$ (1 P.)

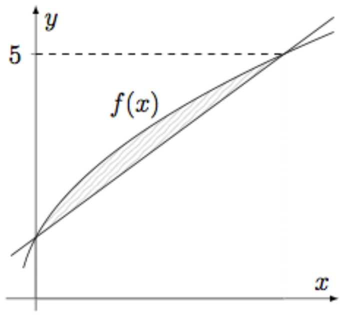
Keine Aussage zur Konvergenz mit dem Quotientenkriterium möglich.

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sqrt{21x+4}$.

Das unten skizzierte Flächenstück lassen wir um die x-Achse rotieren. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers (freie Wahl der Methode).



Hinweis:
Die Skizze ist <u>nicht</u> massstabsgetreu gezeichnet!

Lösung

1. Ringmethode: $V = \pi \int_a^b R^2(x)dx - \int_a^b r^2(x)dx$ (0 P.)

   $a = 0$ und $b = 1$, weil $\sqrt{21 \cdot 1 + 4} = 5$ (1 P.)

   $R(x) = f$(x)=$\sqrt{21x+4}$ und (0 P.)

   $r(x) = 3x + 2$ (2 P.)

   $$V = \pi \int_0^1 [21x+4]\,dx - \pi \int_0^1 [9x^2+12x+4]\,dx$$ (1 P.)

   $$= \pi\left(\frac{21x^2}{2} + 4x - \frac{9x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} - 4x\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{9}{2} - 3\right) = \frac{3\pi}{2}$$ (2 P.)

2. Schalenmethode: $V = 2\pi \int_a^b (Radius \cdot Höhe)\,dy$

   $a = 2$ und $b = 5$

   $Höhe = x_g(y) - x_f(y)$ mit $x_g(y) = \frac{y-2}{3}$ und $x_f(y) = \frac{y^2-4}{21}$

   $$V = 2\pi \int_2^5 \left(y \cdot \left(-\frac{y^2}{21} + \frac{y}{3} - \frac{10}{21}\right)\right) dy = \frac{3\pi}{2}$$

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 7 (Teil 1)

(3 Punkte)

a) Wir betrachten die Funktion:

$$f(x) = x \cdot \ln(x)$$

Bestimmen Sie das entsprechende Taylor-Polynom vom Grad 3 um $x_0 = e$.

Lösung

a) Ansatz: $P_2(x; e) = a_0 + a_1(x-e) + a_2(x-e)^2 + a_3(x-e)^3$ (0 P.)

$$a_0 = \frac{f(e)}{0!} = e$$ (0.5 P.)

$$f'(x) = \ln(x) + 1$$ (0.5 P.)

$$a_1 = \frac{f'(e)}{1!} = 2$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$ (0.5 P.)

$$a_2 = \frac{f''(e)}{2!} = \frac{1}{2e}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$$ (0.5 P.)

$$a_3 = \frac{f''(e)}{3!} = -\frac{1}{6e^2}$$

$$P_2(x; e) = e + 2(x-e) + \frac{1}{2e}(x-e)^2 - \frac{1}{6e^2}(x-e)^3$$ (1 P.)

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 7 (Teil 2) (3 Punkte)

b) Wir betrachten die Potenzreihe: (3P)

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{s \cdot n} (x-2)^n$$

b1) Welchen Wert muss man für den Parameter s einsetzen, damit der Konvergenzradius $r = 9$ beträgt? (2 P.)

b2) Geben Sie den Konvergenzbereich (in Abhängigkeit des Parameters s) an. (1 P.)

Lösung

b1) $r = \lim\limits_{\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{3^{s \cdot n}}{3^{s\cdot(n+1)}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{3^{s\cdot n}}{3^s \cdot 3^{s \cdot n}}\right| = \frac{1}{3^s}$ (1P.)

$\frac{1}{3^s} = 9 \Longrightarrow s = -2$ (1P)

b2) Konvergenzbereich:

$$2 - \frac{1}{3^s} < x < 2 + \frac{1}{3^s}$$

Seitentotal	
Grand Total	