Grundlagen und diskrete Mathematik
Übung 4

Abgabe: Kalenderwoche 46

Aufgabe 1

(a) Gegeben ist die Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wobei

$$F(n) = \text{Die Zahl } n \text{ in ihrer Dezimaldarstellung} \\ \text{rückwärts gelesen (fürende Nullen gestrichen).}$$

Es gilt z.B. $F(324) = 423$ $F(0) = 0$ und $F(10) = 1$. Ist F surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist die Funktion

$$G : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \text{mit} \qquad G(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{falls } x \text{ gerade} \\ 2x & \text{sonst.} \end{cases}$$

surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Mengen A und B, die wie folgt gegeben sind:

$A :=$ endliche Wörter die mit Buchstaben 'a' und 'b' gebildet werden können

$B :=$ endliche Wörter die mit Buchstaben 'a','b', 'c' gebildet werden können

Geben Sie je eine surjektive Funktion $F : A \to B$ und eine surjektive Funktion $G : B \to A$ an.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Menge Seq aller Tupel (beliebiger Länge) von natürlichen Zahlen. Es gilt beispielsweise $(2, 4, 55) \in Seq$, $(1, 1, 1, 1) \in Seq$ etc... Geben Sie eine surjektive Funktion $F : \mathbb{N} \to Seq$ an. Diskutieren Sie was so eine Funktion für die Abzählbarkeit der Menge Seq bedeutet.

Aufgabe 4

Skizzieren Sie eine Abzählung von der Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ähnlich wie wir dies für die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in der Vorlesung getan haben.

Aufgabe 5

Beweisen Sie: Wenn X und Y abzählbar sind, dann ist auch $X \times Y$ abzählbar.
Hinweis: Benützen Sie die Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Aufgabe 6

Die Relation R ist auf der Menge $\{-20, -19, \ldots, 19, 20\}$, durch

$$xRy :\Leftrightarrow x \cdot y \geq 0$$

gegeben. Skizzieren Sie den Graphen.

Aufgabe 7

Gegeben sei eine Relation $\sim$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit:

$$X \sim Y \;:\Leftrightarrow\; X \subset Y \vee Y \subset X \vee X \cap Y = \varnothing.$$

Entscheiden Sie ob diese Relation reflexiv, (anti)symmetrisch und/oder transitiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8

Ist jede symmetrische und transitive Relation auch reflexiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9 ("Doppelbonusaufgabe")

Finden Sie eine Menge $M = \{X_i \mid i \in I\}$ von Mengen, die folgende Eigenschaften hat:

1. M ist überabzählbar (insbesondere muss also I überabzählbar sein).
2. Alle X_i sind unendliche Teilmengen von $\mathbb{N}$.
3. Für beliebige verschiedene $i, j \in I$ gilt, dass $X_i \cap X_j$ endlich ist.

Bemerkung: Eine Doppelbonusaufgabe ist eine Bonusaufgabe, die doppelt so schwer wie eine "normale" Bonus Aufgabe ist.