Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of
Engineering

Name: ....

Vorname: ....

MANIT2 - 1. Bonustest - Lösungen

Klasse:	IT16a ZH
Datum:	20.03.2017
Zeit:	ca. 0900-1000
Raum:	ZL O1.05
Zugelassene Hilfsmittel:	- Basisbuch Analysis
	- Zusammenfassung im Umfang von ca. 10 A4-Seiten
	- Einfacher Taschenrechner (nicht graphikfähig, nicht algebrafähig)
Besonderes	- Keine Mobiles/Smartphones auf dem Tisch!
	- Schreiben Sie auf die abgegebenen Blätter
Zeit	60 Minuten

Punkte: Note:

---

1. Bestimmen Sie Näherungen für den Flächeninhalt über der x-Achse und unter dem Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

im Intervall $[1; 5]$. Verwenden Sie dazu eine

a) Obersumme mit vier Rechtecken gleicher Breite (2 P)
b) Untersumme mit vier Rechtecken gleicher Breite. (1 P)
c) Berechnen Sie schliesslich das bestimmte Integral zum Vergleich. (1 P)

Lösung

Wertetabelle:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$1 = \frac{60}{60}$	$\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$	$\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$	$\frac{1}{4} = \frac{15}{60}$	$\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$

a)

$$F^o = \frac{1}{60} \cdot (60 + 30 + 20 + 15) = \frac{125}{60} \cong 2.083$$

b)

$$F^u = \frac{1}{60}(30 + 20 + 15 + 12) = \frac{77}{60} = 1.283$$

c)

$$\int_1^5 \frac{dx}{x} = \ln x|_1^5 = \ln 5 \cong 1.609$$

2. a) Berechnen Sie die folgende Summe (2 P)

$$\sum_{n=0}^{3} \frac{(2n)!}{(n+1)^2}$$

Tipp: $n! \coloneqq n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ und $1! = 0! = 1$

b) Schreiben Sie die folgende Summe mit dem Summenzeichen (2 P)

$$1 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{24} + \frac{1}{20}$$

Tipp: Die einzelnen Summanden haben mit Quadratzahlen und Fakultäten zu tun.

Lösung

a)

$$\sum_{n=0}^{3} \frac{(2n)!}{(n+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1 \cdot 2}{2^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{4^2} = \frac{295}{6} \cong 49.17$$

b)

c)

$$1 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{24} + \frac{1}{20} = \frac{1^2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{4^2}{4!} + \frac{5^2}{5!} + \frac{6^2}{6!} = \sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{k!}$$

3. Kreuzen Sie jeweils bei jeder der folgenden Antworten an, ob sie richtig (R) oder falsch (F) ist.
Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, eine falsche Antwort einen Abzug von 1/2 Punkt. (4 P)

Beurteilen Sie jeweils, ob die rechts aufgeführte Funktion F eine Stammfunktion der links stehenden Funktion f ist.

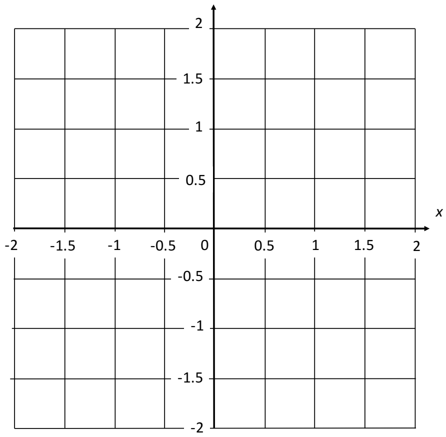
R	F		
❑	❑	$f(x) = 4x^3$	$F(x) = \frac{1}{3}x^4$
❑	❑	$f(x) = -\frac{2}{x^2}$	$F(x) = \frac{2}{x} - 2$
❑	❑	$f(x) = 3x^4 - x^2$	$F(x) = 12x^3 - 2x$
❑	❑	$f(x) = 2x^3 - 1$	$F(x) = \frac{1}{2}x^4 + x$

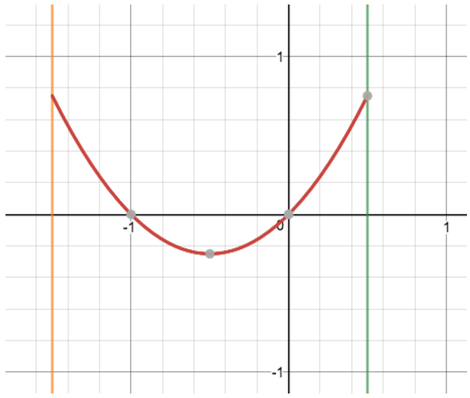
Lösung

1. Teilaufgabe:	$F'(x) = \frac{4}{3}x^3$	falsch
2. Teilaufgabe:	$F'(x) = 2 \cdot x^{-2}(-1)$	richtig
3. Teilaufgabe:	$F'(x) = 36x^2 - 2$	falsch
4. Teilaufgabe:	$F'(x) = 2x^3 + 1$	falsch

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + x$

   a) Skizzieren Sie den Graphen von f und schraffieren Sie die Fläche, welche im Intervall $[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}]$ zwischen der x-Achse und dem Graphen von f eingeschlossen wird. (1 P.)





   b) Bestimmen Sie (1 P.)

$$\int_{-3/2}^{1/2} f(x)\,dx$$

   c) Bestimmen Sie den Inhalt der in a) schraffierten Fläche. (2 P.)

Lösung

b)

$$\int_{-3/2}^{1/2} (x^2 + x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right|_{-3/2}^{1/2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{(-27)}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}\right) = \frac{4}{24} - 0 = \frac{1}{6}$$

c) Die Nullstelle von f im Integrationsintervall ist $x = -1$. Somit gilt für die Fläche unter Ausnutzung der Symmetrie:

$$F = 2\cdot\left|\int_{-3/2}^{-1} (x^2 + x)dx\right| + \left|\int_{-1}^{0} (x^2 + x)dx\right|$$

$$= 2\cdot\left|\left.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right|_{-3/2}^{-1}\right| + \left|\left.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0}\right| = 2\cdot\left|-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0\right| + \left|0 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\right|$$

$$= 2\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

5. Es sei

$$\int_{-2}^{2} g(x)dx = 3$$

Berechnen Sie (4 P)

a) $$\int_{2}^{-2} g(u)du$$

b) $$\int_{-2}^{2} 3g(z)dz$$

c) $$\int_{-2}^{-2} g(t)dt$$

d) $$\int_{2}^{-2} [-g(x)]dx$$

Lösung

a) $$\int_{2}^{-2} g(u)du = -3$$ Vertauschen der Integrationsgrenzen

b) $$\int_{-2}^{2} 3g(z)dz = 9$$ Faktorregel

c) $$\int_{-2}^{-2} g(t)dt = 0$$ Identische Integrationsgrenzen

d) $$\int_{2}^{-2} [-g(x)]dx = 3$$ Vertauschen der Integrationsgrenzen = Multiplikation mit (-1)

6. Bestimmen Sie das unbestimmte Integral (4 P)

$$\int \sqrt{x} \cdot \cos\left(\sqrt{x^3} - 2\right) dx$$

Lösung

Substitution

$$u = \sqrt{x^3} - 2$$

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$dx = \frac{2}{3\sqrt{x}}du$$

$$\int \sqrt{x} \cdot \cos(u)\frac{2}{3\sqrt{x}}du = \frac{2}{3}\int \cos u \, du$$

$$= \frac{2}{3}\sin u + C = \frac{2}{3}\sin\left(\sqrt{x^3} - 2\right) + C$$

7. Berechnen Sie das folgende Integral (4 P)

$$\int_{1}^{2} 3x \cdot \sqrt{4x-4}\,dx$$

Lösung

$$u(x) = 4x - 4$$
$$x = \frac{u+4}{4}$$

$$u(2) = 4$$

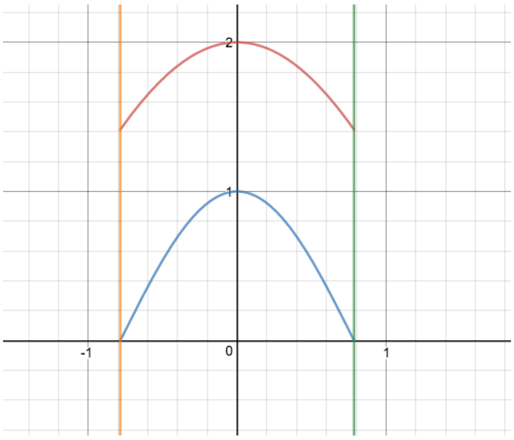
$$u(1) = 0$$

$$\frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{du}{4}$$

$$= \frac{3}{4}\int_{0}^{4} \frac{u+4}{4} \cdot \sqrt{u} \cdot du = \frac{3}{16}\int_{0}^{4} \left(u^{\frac{3}{2}} + 4u^{\frac{1}{2}}\right) du = \frac{3}{16}\left(\frac{2}{5} \cdot u^{\frac{5}{2}} + 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{0}^{4}$$
$$= \frac{3}{16}\left[\frac{2}{5} \cdot \sqrt{1024} + 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{64}\right] = \frac{3}{16}\left[\frac{2}{5} \cdot 32 + 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8\right] = \frac{32}{5}$$

8. Berechnen Sie die von den beiden Graphen von $f(x) = 2\cos x$ und $g(x) = \cos 2x$ im Intervall $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ eingeschlossene Fläche. (4 P)

Lösung



$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x - \cos 2x\ )\, dx$$

$$= \left(2\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 - \left(2 \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1\right)$$

$$= 2\sqrt{2} - 1$$