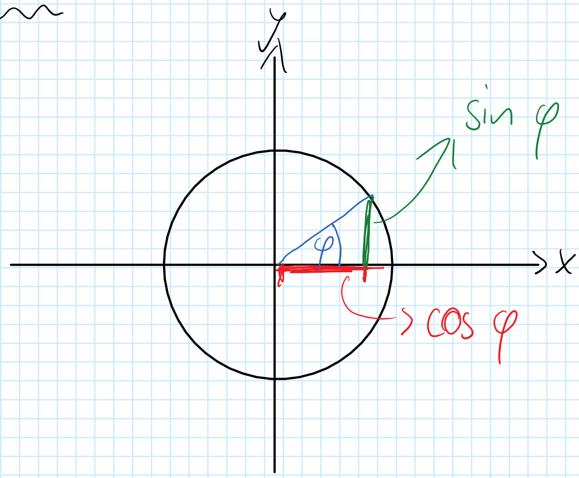
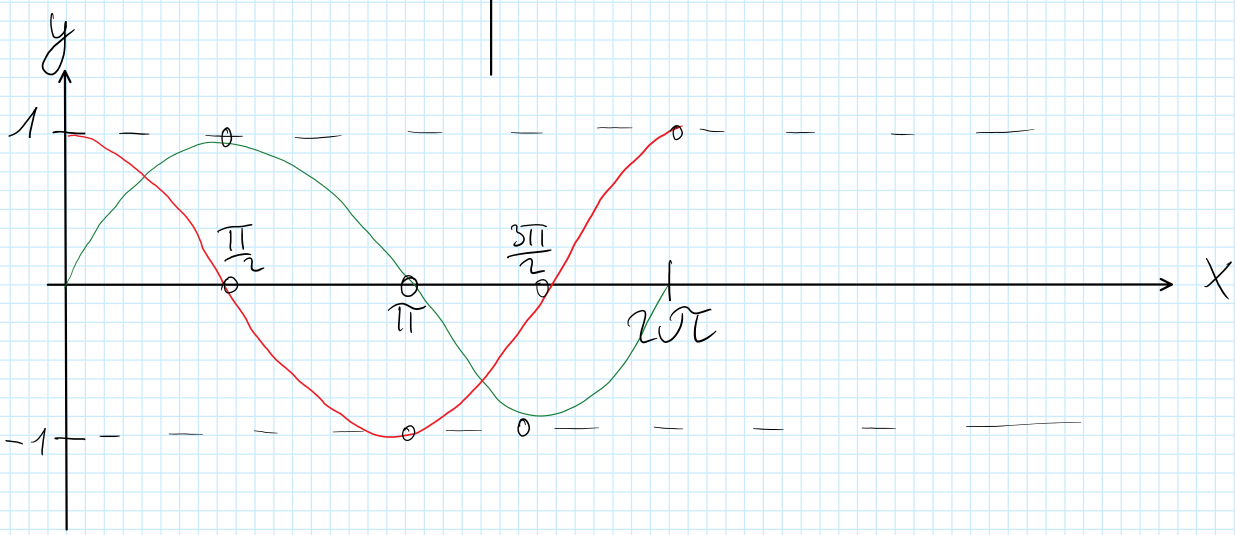
Trigonometrie





Wir möchten nun die cos-Funktion so verschieben, dass dieser Deckungsgleich mit der sin-Funktion ist:

$$\cos(x) \Longrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hookrightarrow \sin(x)$$

Auf diese neue Formel wenden wir nun die Additionstheoreme an:

Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,, \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Wir setzen für $\alpha = x$ ein und für $\beta = -\frac{\pi}{2}$ ein

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cdot \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{0} - \sin(x)\,\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1}$$

! kann man aus dem Graph oben ablesen

$$= -\sin(x)\cdot(-1) = \underline{\underline{\sin(x)}} \qquad \square$$

Aufgabe 16

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow$$ wieder in Additionstheorem einsetzen – verschiedene Werte lassen sich dann aus Tabelle 1.2 auf S. 39 rauslesen

$$\hookrightarrow \frac{\pi}{12} = \underbrace{\frac{4\pi}{4\cdot 3} - \frac{3\pi}{3\cdot 4}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}}}$$

Aufgabe 17

Doppelwinkelgleichung umformen: $\cos^2\theta = \cos 2\theta + \sin^2\theta$

Werte einsetzen: $\cos^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{8}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin^2\frac{\pi}{8}$$ → durch Pythagoras umgeformt

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \cos^2\frac{\pi}{8} \qquad \Big| + \cos^2\frac{\pi}{8}$$

$$2\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \qquad \Big| \div 2$$

$$\underline{\underline{\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}}$$

Aufgabe 19

$$\sin^2\theta = \frac{3}{4} \Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}$$

für $\underline{\theta_1 = \frac{\pi}{3}}$; $\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \underline{\frac{2\pi}{3}}$

$\theta_3 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$$\Theta_4 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$\square$

ABSCHNITT 2.1

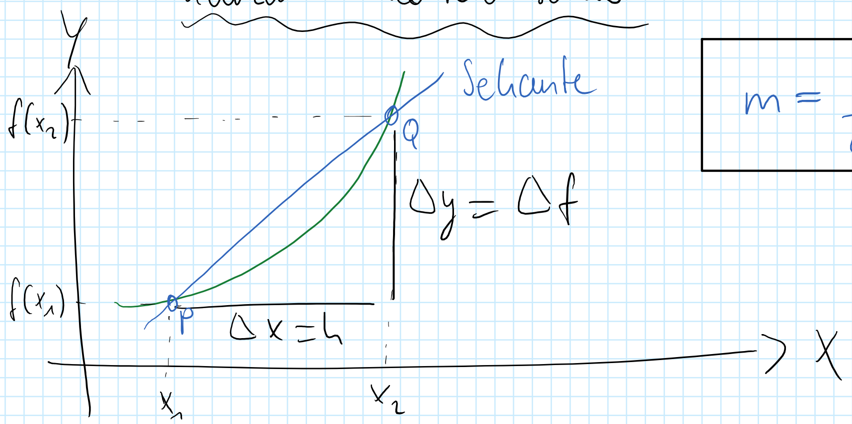
Sicherheitsklammern damit keine Vorzeichenfehler geschehen

Aufgabe 1

a) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3-2} = \frac{3^3+1-(2^3+1)}{1} = 27+1-8-1 = \underline{\underline{19}}$

b) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1^3+1-((-1)^3+1)}{2} = \underline{\underline{1}}$

kurzer Theorieeinschub



$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Wie berechnen wir Steigung an einem Punkt?

$\Rightarrow$ eine Tangente schneidet Graph an genau einem Punkt

$\hookrightarrow$ berechnen Steigung der Tangente

Aufgabe 4

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \frac{(2+h)^2 - 2(2+h) - 3 - (2^2-4-3)}{h}$$

$$= \frac{\cancel{4} + 4h + h^2 - \cancel{4} - 2h \cancel{-3} \cancel{-4} \cancel{+4} \cancel{+3}}{h}$$

$$= \frac{4h + h^2 - 2h}{h} = \frac{2h + h^2}{h}$$

$$= \frac{4h + h^2 - 2h}{h} = \frac{2h + h^2}{h}$$

$$\frac{\Delta f}{h} = \underline{2 + h}$$

$$m_b = \lim_{h \to 0} (2+h) = \underline{\underline{2}}$$

Steigung Tangente

Tangente ist eine Gerade:

$$y_T = mx + b$$

$$= 2x + b$$ nach b auflösen

$$-3 = 2 \cdot 2 + b \rightarrow b = -7$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_T = 2x - 7}}$$

Aufgabe 6

b.) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{174 - 62}{2004 - 2002} = \frac{112}{2} = \underline{\underline{56 \frac{TE}{Jahr}}}$$

ERINNERUNG

Sekante $m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{h}$

Tangente $m_t = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h}$

Abschnitt 2.2

Aufgabe 9

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5} = \frac{\cancel{(x+5)}(x-2)}{\cancel{x+5}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -5} (x-2) = -7 - 2 \underline{\underline{= -9}}$$

Aufgabe 10

$$\frac{t^2 + t - 2}{t^2 - 1} = \frac{(t+2)\cancel{(t-1)}}{(t+1)\cancel{(t-1)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 1} \frac{t+2}{t+1} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

Aufgabe 11

$$\frac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2} = \frac{-2\cancel{(x+2)}}{x^2\cancel{(x+2)}} \Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{-2}{x^2} = \frac{-2}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

Aufgabe 12

$$\frac{\frac{1}{x} - 1}{\quad} = \frac{x\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{\quad} = \frac{1 - x}{\quad} = \frac{(-1)(-1+x)}{\quad} = \frac{(-1)\cancel{(x-1)}}{\quad}$$

$$\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x(x-1)} = \frac{1-x}{x(x-1)} = \frac{(-1)(-1+x)}{x(x-1)} = \frac{(-1)\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} -\frac{1}{x} = \underline{\underline{-1}}$$

Aufgabe 18

! „Solche Aufgaben wiederholen sich immer wieder. Es gibt Regeln, mit denen es einfacher ist → Ableiten. Dies schauen wir uns im späteren Verlauf des Semesters an."

$f(x) = 3x-4$

für $x=2 \Rightarrow f(2) = 6-4 = 2$

$$f(2+h) = 3(2+h)-4 = 6+3h-4 = 2+3h$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{2+3h-2}{h} = \lim \frac{3h}{h} = \underline{\underline{3}}$$

Aufgabe 19

$f(x) = \sqrt{x}$, $x=7$

$f(x+h) = \sqrt{x+h}$ $\qquad f(7+h) = \sqrt{7+h}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{7+h}-\sqrt{7}\right)}{h} \cdot \frac{\sqrt{7+h}+\sqrt{7}}{\sqrt{7+h}+\sqrt{7}} = \lim_{h\to 0} \frac{7+h-7}{h\left(\sqrt{7+h}+\sqrt{7}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{7+h}+\sqrt{7}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{7+h}+\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{7}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{7}}}}$$

! Abschnitt 2.3 wird nicht behandelt !

Abschnitt 2.4

Folgende Funktion schauen wir uns an:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \qquad (\rightarrow \text{Graph auf S. 66})$$

! ist undefiniert für 0

Unser Problem jetzt: zwei verschiedene Grenzwerte

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ → Funktion rechts von y-Achse

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ → Funktion links von y-Achse

Lösung des Problems: Definition von rechtsseitigem / linksseitigem Grenzwert

Notation: $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$

$\lim_{x \to c^-} f(x) = M$

Wir korrigieren lim von oben.

Abschnitt 2.5

Begriff der Stetigkeit eingeführt

⇒ Funktion ist stetig, wenn diese den Stetigkeitstest (S. 74) besteht

Stetige Fortsetzung einer Funktion

$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ → ist nicht definiert für $x = 1$

↳ Division durch 0

Dieses „Loch" lässt sich stopfen:

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$