Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of Engineering

Name: ....

Vorname: ....

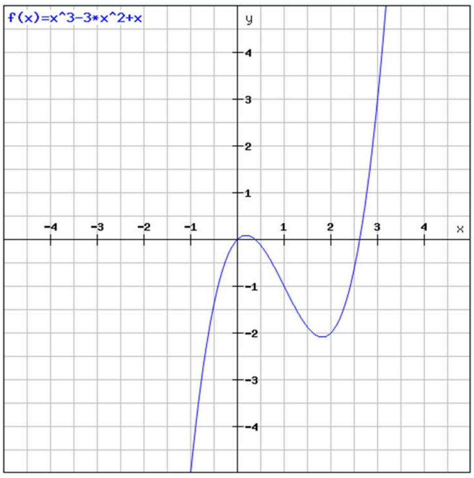
MANIT2 - 1. Bonustest - Lösungen

Klasse:	IT14a ZH
Datum:	30. April 2015
Zugelassene Hilfsmittel:	- Basisbuch Analysis - Zusammenfassung im Umfang von max. 10 A4-Seiten - Einfacher Taschenrechner (nicht graphikfähig, nicht algebrafähig)
Besonderes	- Keine Mobiles/Smartphones auf dem Tisch! - Schreiben Sie auf die abgegebenen Blätter (notfalls rückseitig) und reissen Sie die Prüfung nicht auseinander!
Zeit	60 Minuten
Total Punkte	32

---

1. Gegeben ist die $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$. (4 P)

Bestimmen Sie mittels des Newtonverfahrens die grösste der drei Nullstellen von f, also die Nullstelle im Intervall $[2; 3]$, und zwar so, dass ich die einzelnen Rechenschritte nachvollziehen kann. Wählen Sie als Startwert $x_0 = 3$. Brechen Sie nach 3 Schritten ab, d.h. berechnen Sie x_2. (Hinweis: Die Nullstelle ist $x = 2.61803$



Lösung

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	3	3	01	2.7
1	2.7	0.513	6.67	2.6231
2	2.6231	0.02971	5.90325	2.6181

2. Bestimmen Sie Näherungen für den Flächeninhalt über der x-Achse unter dem Graphen von

$$f(x) = 4x - x^2$$

zwischen $x = 0$ und $x = 2$. Verwenden Sie dazu

a) eine Untersumme mit 4 Rechtecken gleicher Breite und (2 P)

b) eine Obersumme mit 4 Rechtecken gleicher Breite. (1 P)

c) das bestimmte Integral (1 P)

Lösung

Wertetabelle:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{12}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{16}{4}$

a)

$$F^u = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{7}{4} + \frac{12}{4} + \frac{15}{4}\right) = \frac{34}{8} = 4.25$$

b)

$$F^o = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{12}{4} + \frac{15}{4} + \frac{16}{4}\right) = \frac{50}{8} = 6.25$$

c)

$$\int_0^2 (4x - x^2)dx = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 x\Big|_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5.\overline{3}$$

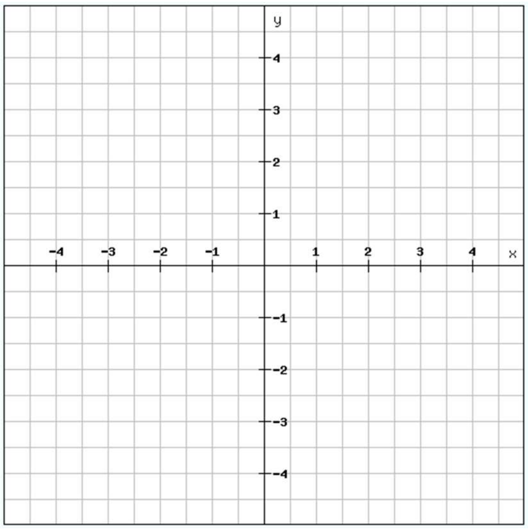
3. Kreuzen Sie jeweils bei jeder der folgenden Antworten an, ob sie richtig (R) oder falsch (F) ist. Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, eine falsche Antwort einen Abzug von 1/2 Punkt. (4 P)

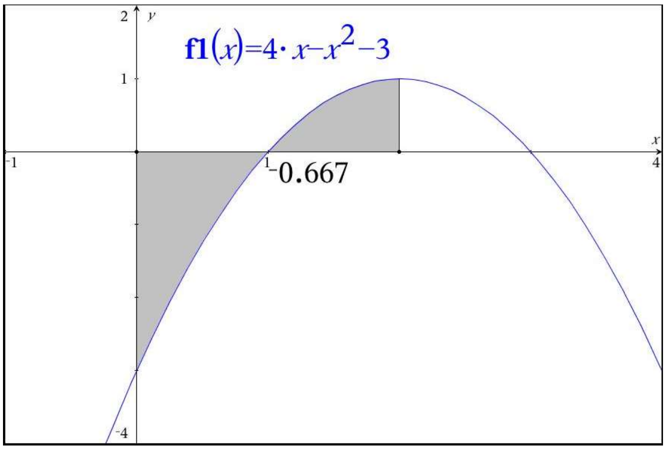
Beurteilen Sie jeweils, ob die rechts aufgeführte Funktion F das unbestimmte Integral der links stehenden Funktion f ist.

R	F		
❑	❑	$f(x) = 4x$	$F(x) = x^4 + C$
❑	❑	$f(x) = \frac{21}{x^2}$	$F(x) = -\frac{21}{x} + C$
❑	❑	$f(x) = \frac{9}{x-2}$	$F(x) = 9 \cdot \ln(x-2) + C$
❑	❑	$f(x) = e^{-x}$	$F(x) = e^{-x} + C$

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x - x^2 - 3$.

   a) Skizzieren Sie den Graphen von f und schraffieren Sie die Fläche, welche im Intervall $[0; 2]$ zwischen der x-Achse und dem Graphen von f eingeschlossen wird. (1 P.)





   b) Bestimmen Sie (1 P.)

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

   c) Bestimmen Sie den Inhalt der in a) schraffierten Fläche. (2 P.)

Lösung

b)

$$\int_0^2 (4x - x^2 - 3)\,dx = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 3x\Big|_0^2 = 8 - \frac{8}{3} - 6 = -\frac{2}{3}$$

c) Die Nullstelle von f ist $x = 1$. Somit gilt für die Fläche:

$$F = \left|\int_0^1 (4x - x^2 - 3)dx\right| + \left|\int_1^2 (4x - x^2 - 3)dx\right|$$

$$= \left|2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 3x\Big|_0^1\right| + \left|2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 3x\Big|_1^2\right| = \left|2 - \frac{1}{3} - 3\right| + \left|8 - \frac{8}{3} - 6 - \left(2 - \frac{1}{3} - 3\right)\right|$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

Geben Sie hier eine Formel ein.

5. Die eingeschlossene Fläche zwischen der Kurve $y = -\frac{1}{2}x + 2$ und der Kurve $y = 1$ für $x \geq 0$ wird um die x-Achse gedreht. Es entsteht ein Rotationskörper. Bestimmen Sie sein Volumen. (4 P)

Lösung

Ringmethode:

$$-\frac{1}{2}x + 2 = 1$$

$$-x + 4 = 2$$
$$x = 2$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[\left(-\frac{1}{2}x + 2 \right)^2 - 1^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left[\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 \right] dx = \pi \left(\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x \right) \Big|_0^2 = \pi \left(\frac{8}{12} - 4 + 6 \right) = \frac{8\pi}{3}$$

6. Die eingeschlossene Fläche zwischen den Kurven $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $y = 1$ und $x = 1$ wird um die y-Achse gedreht. Es entsteht ein Rotationskörper. Bestimmen Sie sein Volumen. (4 P)

Lösung

Schalenmethode:

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$2\pi \int_1^3 x\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) dx = 2\pi \int_1^3 \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2\pi \left(\frac{3x^2}{4} - \frac{1}{6}x^3\right)\Big|_1^3 = 2\pi \left[\frac{27}{4} - \frac{27}{6} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right)\right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{24}{4} - \frac{26}{6}\right] = \frac{10\pi}{3}$$

7. Berechnen Sie das folgende Integral mittels Substitution (4 P)

$$\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos x \cdot \sqrt{1 - 2\sin x}\, dx$$

Lösung

$$u(x) = 1 - 2\sin x$$

$$u(-\pi/6) = 1 - 2\sin(-\pi/6) = 2$$

$$u(\pi/6) = 1 - 2\sin(\pi/6) = 0$$

$$\frac{du}{dx} = -2\cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{-2\cos x}$$

$$= \int_{2}^{0} \cos x \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{du}{-2\cos x} = -\frac{1}{2}\int_{2}^{0} \sqrt{u}\, du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_{2}^{0} = -\frac{1}{3}[0 - \sqrt{8}] = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

8. Bogenlänge

Berechnen Sie die Länge der Kurve $y = x^{3/2}$ im Intervall $[0; 4]$ (4 P)

Lösung

$$y = x^{3/2}$$

$$y' = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

$$\int_0^4 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2} x^{1/2}\right]^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2}$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2} \Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10^{3/2} - 1\right) \cong 9.0734$$