Aufgabe 1 (ca. 20 Min.):

Ist das Potenzieren ($f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$) bzw. das Wurzelziehen ($f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $, n \in \mathbb{N}$) einer rellen Zahl x gut oder schlecht konditioniert? Begründen Sie! Was hat das für Auswirkungen auf die Auswertung von Polynomen für grosse n?

Potenzieren

$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$

$K = \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}$ $\Rightarrow$ falls K klein $\rightarrow$ gut konditioniert

$f(x) = x^n$

$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad \rightarrow \quad x^{n-1} = \frac{x^n}{x}$

$$K = \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot x}{x^n} = \frac{n \cdot \cancel{x^n} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x^n}} = n$$

$\Rightarrow$ Ist nur von Exponent abhängig, daher ist es schlecht konditioniert

Wurzelziehen

$f(x) = x^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}$

$K = \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}$ $\Rightarrow$ falls K klein $\rightarrow$ gut konditioniert

$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$

$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{x}$

$$K = \frac{\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \cdot x}{x^{\frac{1}{n}}} = \frac{1 \cdot \cancel{x^{\frac{1}{n}}} \cdot \cancel{x}}{n \cdot \cancel{x^{\frac{1}{n}}} \cdot \cancel{x}} = \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ Je grösser n, desto kleiner K $\rightarrow$ gut konditioniert

Aufgabe 2 (ca. 20 Min.):

Betrachten Sie einen Rechner, der im Dezimalsystem arbeitet mit einer zehnstelligen Gleitpunktarithmetik (also $n = 10$ für die Mantisse) und einem beliebig grossen Exponenten. Erklären Sie anhand einer kurzen konkreten Berechnung, weshalb für eine positve Zahl $x \neq 0$, die kleiner als die Maschinengenauigkeit eps ist, der Rechner $1+x$ nicht mehr korrekt berechnen kann (bekanntlich wird er $1+x=1$ ausgeben), wohingegen er keine Probleme hat, z.B. $\sqrt{x}$ oder $x/10^9$ richtig zu berechnen.

Tipp: nehmen Sie für x eine konkrete Zahl an, berechnen Sie die obigen Grössen und normieren Sie sie wie in Kap. 2 des Skriptes.

Rechner: 0.1234561237, ? darf bel. gross sein

eps : $5 \cdot 10^{-n}$

sei $x < eps \Rightarrow x = 4 \cdot 10^{-n}$

$$1+x \quad \begin{array}{r} 1,00000000000 \\ +\ 0,00000000004 \\ \hline \underbrace{1,00000000004}_{10 \text{ Stellen}} \end{array} \quad \begin{array}{l} = 1 \\ = 4 \cdot 10^{-n} \end{array}$$

10 Stellen $\rightarrow$ 4 wird auf 0 abgerundet

$\Rightarrow 0.100000000000 \cdot 10^{1}$

$$\sqrt{x} : \sqrt{4 \cdot 10^{-n}} = 2\sqrt{10^{-n}} = 2 \cdot 10^{-\frac{n}{2}} = 2 \cdot 10^{-5} = 0.00002$$

$$\frac{x}{10^9} : \frac{4 \cdot 10^{-n}}{10^9} = \frac{4 \cdot 10^{-10}}{10^9} = 4 \cdot 10^{-19}$$