

59/Aufg. 1

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 10 & 17 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5720 \\ 3300 \\ 836 \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = 100$$

$$a) \|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{b} - b\|$$

$$C = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} \quad \|x - \tilde{x}\|_{\infty} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|C\|$$

$$\cdot \|x - \tilde{x}\|_{\infty} \leq 0.14 \Rightarrow \cdot 1000 = \underline{\underline{140}} \quad (\text{abs. Fehler der } \infty\text{-Norm})$$

$$\cdot \frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq 60'000 \cdot \frac{7}{3000} \cdot \frac{100'000}{5'720'000} \Rightarrow \frac{210}{143} \approx \underline{\underline{1.46853}} \quad (\text{rel. Fehler der } \infty\text{-Norm})$$

$$\cdot \text{cond}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty} = \underline{\underline{84}}$$

Kondition ist relativ: Je grösser $\text{cond}(A)$, desto grösser die Auswirkung von kleinen Fehlern im Vektor b , die zu grossen Fehlern im Ergebnis x führen.

$$\begin{aligned} b) \text{ rel. Fehler: } \frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} &\leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}}} \cdot \left(\frac{\|A - \tilde{A}\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} + \frac{\|c\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} \right) \\ &\leq \frac{84}{1 - 84 \cdot \frac{300}{60'000}} \cdot \left(\frac{300}{60'000} + \frac{100'000}{5'720'000} \right) \\ &\leq \underline{\underline{3.256}} \end{aligned}$$

$$c) \begin{pmatrix} 19'900 & 29'900 & 9'900 \\ 9'900 & 16'900 & 5'900 \\ 1'900 & 2'900 & 1'900 \end{pmatrix} \cdot \tilde{x} = \begin{pmatrix} 5'820'000 \\ 3'400'000 \\ 936'000 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 7.38298 \\ 58.766 \\ 395.553 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 22 \\ 88 \\ 264 \end{pmatrix} \quad \frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \underline{\underline{0.4983}}$$

Der relative Fehler aus Aufgabe 1.b) (59) ist eine Worst-Case-Abschätzung. Der tatsächliche Fehler ist viel kleiner.