ZHAW Zurich University of Applied Sciences

Institute for Applied Mathematics and Physics, School of Engineering

Lösungen PhIT Übung 6

Prof. Dr. R.M. Füchslin

Diese Übungen dienen dazu, Sie mit einigen Konzepten und Rechenmethoden der Physik vertraut zu machen. Sie machen diese Übungen für sich. Das bedeutet:

- Sie müssen keine Übungen abgeben.
- Sie können gerne in Gruppen arbeiten. Wir empfehlen das sogar.
- Wir machen keine Korrekturen, stellen aber Musterlösungen zur Verfügung. Der/die ÜbungsbetreuerIn ist Ihr Coach. Diese(r) wird Ihnen nach bestem Wissen Ihre Fragen beantworten. Die Fragen stellen müssen Sie aber selber.

Aufgaben

Augabe 1

Ein massiver, gleichförmiger Zylinder und eine massive, gleichförmige Kugel haben dieselbe Masse M. Beide rollen, ohne zu gleiten, auf einer horizontalen Ebene. Ihre beiden totalen kinetischen Energien (Kinetische Energie des Schwerpunkts plus Rotationsenergie) sind gleich gross. Berechnen Sie das Verhältnis ihrer Schwerpunktgeschwindigkeiten (Ja, es müsste Schnelligkeiten heissen, das sagt aber kein Mensch)! Welche Rolle spielt das Verhältnis der Radien von Kugel und Zylinder?

Lösung

(Subskript Z für Zylinder, K für Kugel).

Wir setzen die Radien gleich r_Z, r_K . Da die Objekte rollen, gilt für den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten:

$$\begin{aligned}\omega_K &= \frac{v_K}{r_K}\\ \omega_Z &= \frac{v_Z}{r_Z}\end{aligned} \tag{1.1}$$

Für die totale kinetische Energie gilt (X = Z,K):

$$E_{kin,tot,X} = E_{kin,S} + E_{rot} = J_X \frac{\omega_X^2}{2} + M\frac{v_X^2}{2} \tag{1.2}$$

Für die Trägheitsmomente entnehmen wir der Tabelle:

$$J_K = \frac{2}{5}Mr_K^2, J_Z = \frac{1}{2}Mr_Z^2, \tag{1.3}$$

Da die beiden totalen kinetischen Energien gleich sind, erhalten wir die Beziehung

$$\frac{2}{5}Mr_K^2\frac{\left(\frac{v_K^2}{r_K^2}\right)}{2} + M\frac{v_K^2}{2} = \frac{1}{2}Mr_Z^2\frac{\left(\frac{v_Z^2}{r_Z^2}\right)}{2} + M\frac{v_Z^2}{2} \tag{1.4}$$

Wir sehen sofort, dass sich die Radien rauskürzen; sie spielen also keine Rolle. Daraus ergibt sich

$$v_K^2\left(\frac{2}{5}\frac{M}{2} + \frac{M}{2}\right) = v_Z^2\left(\frac{1}{2}\frac{M}{2} + \frac{M}{2}\right) \tag{1.5}$$

und daraus

$$\frac{v_Z}{v_K} = \sqrt{\frac{14}{15}} \tag{1.6}$$

Aufgabe 2 Rollender Zylinder auf Abhang

Ein Zylinder rollt (ohne Schlupf) eine schiefe Ebene hinunter (s. Fig. 1). Es wirkt eine Reibungskraft. Geben Sie die Bewegungsgleichung des Zylinders an!

Hinweis: Damit der Zylinder ohne Schlupf rollt, muss die Reibungskraft gerade so gross sein, damit der Zuwachs der Rotationsgeschwindigkeit und der Schwerpunktsgeschwindigkeit aufeinander abgestimmt sind. Sie müssen erstens die nötige Beziehung zwischen Schwerpunktsgeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit finden und zweitens die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt und den Drehimpuls aufstellen. Diese drei Gleichungen enthalten drei Unbekannte, $\vec{v},\vec{\omega},\vec{F}_R$. Wählen Sie das Koordinatensystem so, wie in Fig. 2 angegeben. Dann erhalten Sie drei Gleichungen mit drei reellen Variablen v,ω,F_R . Eliminieren Sie ω,F_R.

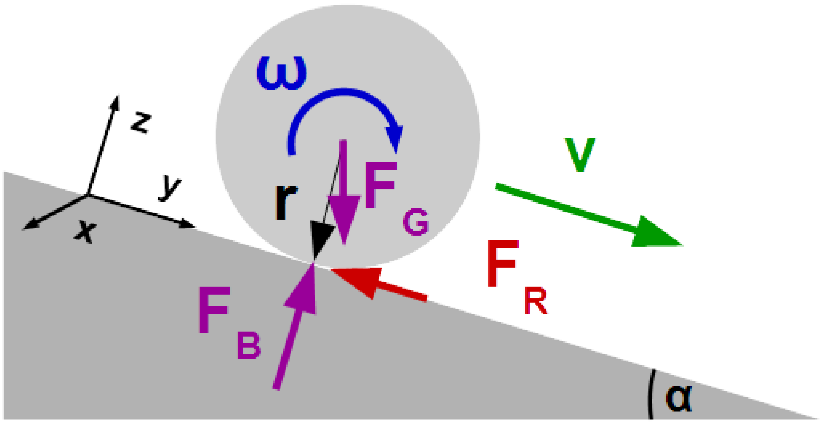

Fig. 1

Lösung

Zuerst geben wir alle Vektoren an:

$$\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ mg\sin(\alpha) \\ -mg\cos(\alpha) \end{pmatrix}, \vec{F}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_R \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_B \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}, \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Rollen bedeutet:

$$\omega r = v \tag{1.8}$$

Newton ergibt:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_G + \vec{F}_B + \vec{F}_R \tag{1.9}$$

Für das Drehmoment gilt:

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_R \tag{1.10}$$

Für das Drehmoment spielt nur die Reibungskraft eine Rolle, weil die anderen Kräfte „keinen Hebel haben“, d.h. das Kreuzprodukt des Angriffsvektors und der Kraft null ergibt (bei der Schwerkraft, weil der Angriffspunkt im Schwerpunkt liegt und damit der Angriffsvektor gleich null ist, bei der Bodenkraft, weil der Angriffsvektor (anti-)parallel zur Kraft steht).

Komponentenweise betrachtet, erhält man die folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&F_B = mg\cos(\alpha) \\
&\omega r = v \\
&m\frac{dv}{dt} = -F_R + mg\sin(\alpha) \\
&-J\frac{d\omega}{dt} = -rF_R
\end{aligned}
\qquad (1.11)
$$

Die letzte Gleichung entspricht der x – Komponente von Gl. (1.10). Beachten Sie, dass das Vorzeichen auf der linken Seite der vierten Gleichung in den Gls. (1.11) sich aus der Tatsache ergibt, dass die x – Komponente von $\vec{\omega}$ gleich $-\omega$ ist. Das hätte man anders setzen können, es ist im Wesentlichen eine Konsequenz aus unserer Wahl des Koordinatensystems und der Wahl von ω als positiver Zahl (Wenn wir dies nicht machen würden, müsste man die Rollbedingung anpassen.).

Daraus folgt dann:

$$
\frac{dv}{dt} = \frac{mg\sin(\alpha)}{m + \frac{J}{r^2}} \qquad (1.12)
$$

Für den Zylinder gilt $J = \frac{1}{2}mr^2$. Damit erhalten wir:

$$
\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}g\sin(\alpha) \qquad (1.13)
$$

Afugabe 3 Kistenschleppen

Sie tragen zu zweit eine Kiste eine Rampe hinauf. Die Situation ist dargestellt in Fig. 2. Nehmen wir an, Sie wären faul. Würden Sie lieber hinten oder lieber vorne tragen?

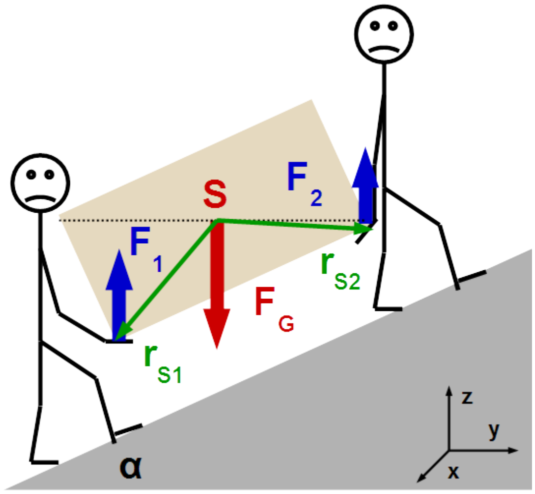

Fig. 2

Damit Ihnen die Formulierung etwas der Rechnung etwas leichter fällt, geben wir in Fig. 3 die Geometrie der Situation an. Die Steigung der Rampe beträgt $\alpha = 25°$ Die Höhe des Kastens beträgt $H = 2.2\text{m}$, die Breite $B = 1.2m$, Die Masse des Kastens ist $m = 60kg$. Bei dieser Aufgabe macht es Sinn, die Problemstellung vollständig in Vektorform zu formulieren.

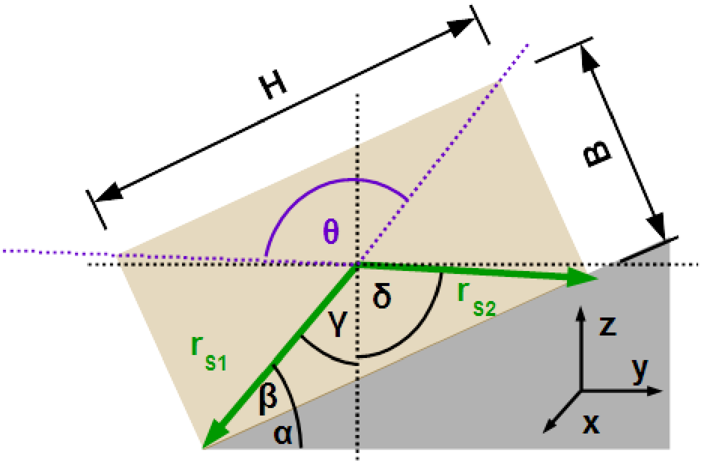

Fig. 3

Lösung

Es handelt sich um eine Gleichgewichtsaufgabe, d.h. wir müssen die Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ so wählen, dass erstens die Gravitationskraft ausgeglichen wird und zweitens keine Drehmomente entstehen. Die Rechnung wird letztlich einfacher, wenn wir uns die Mühe einer kompletten Formulierung in Vektorform machen.

Für die Kräfte gilt:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \end{pmatrix}, \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_2 \end{pmatrix}, \vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

Für die Ansatzpunkte der Kräfte müssen wir diverse Winkel berechnen. Wir arbeiten hier mit gewöhnlichen Winkelgraden, weil dies in der Geometrie so üblich ist. Wir erhalten $\beta = \arctan(\frac{B}{H}) = 28.6°$. Daraus folgt $\gamma = 90° - \alpha - \beta = 36.4°$ und $\theta = 180° - 2\beta = 122.8°$. Damit erhalten wir $\delta = \theta - \gamma = 86.4$ (falls Sie nicht verstehen, woher die Resultate kommen, fragen Sie Ihren Coach in den Übungen!). Weiter gilt $|\vec{r}_{S1}| = |\vec{r}_{S2}| = r = 1.253$.

$$\vec{r}_{S1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin(\gamma) \\ -r\cos(\gamma) \end{pmatrix}, \vec{r}_{S2} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin(\delta) \\ -r\cos(\delta) \end{pmatrix}$$

Damit der Schwerpunkt nicht beschleunigt wird (Was nicht heisst, dass er sich nicht bewegt!), muss gelten:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_G = 0$$

Damit sich der Kasten nicht zu drehen beginnt, muss gelten:

$$\vec{r}_{S1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{S2} \times \vec{F}_2 = 0$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &F_1 + F_2 - mg = 0 \\ &-r\sin(\gamma)F_1 + r\sin(\delta)F_2 = 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} &F_1 = \frac{mgr\sin(\delta)}{r(\sin(\delta) + \cos(\gamma))} = 369N \\ &F_2 = 231N \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Rollen und Reibung

(Tipler und Mosca A8.9) Eine vollständig starre Kugel mit Radius r rollt, ohne zu gleiten, auf einer vollständig starren, horizontalen Oberfläche. Zeigen Sie, dass die Reibungskraft auf die Kugel null sein muss. (Hinweis: Überlegen Sie, in welcher Richtung die Reibungskraft angreifen kann und welche Wirkung eine solche Kraft auf die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts und auf die Winkelgeschwindigkeit hätte.).

Hinweis: in dieser Aufgabe geht es nicht darum, irgend etwas konkret auszurechnen. Sie sollen aber durch korrekte Formalisierung eine Argumentation aufbauen, welche schlüssig zeigt, dass die oben beschriebene Situation nur bei völliger Absenz von Rollreibung auftreten kann. D. h.: Sie müssen die wirkenden Kräfte in Vektorform aufschreiben und zeigen, dass eine eventuell vorhandene Reibungskraft verschwinden muss.

Lösung

Die Situation ist dargestellt in Fig. 5. Wir geben zuerst alle Kräfte in Vektorform an. Dies sieht aus, als ob wir mit Kanonen auf Spatzen schössen, aber Sie werden feststellen, dass auf diese Art viele zum Teil recht lästige Vorzeichendiskussionen „von selbst" erledigt sind.

$$\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_B \end{pmatrix}, \vec{F}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_R \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \qquad (1.14)$$

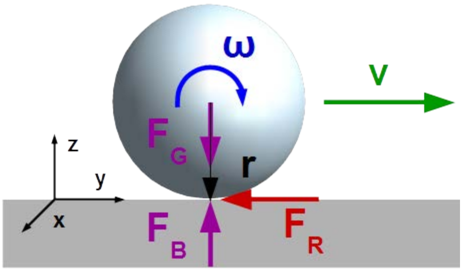

Fig. 5

Da der Boden absolut hart ist, gilt $F_B = mg$. Da die Kugel ohne zu gleiten rollt, muss weiter gelten $v = \omega r$. Wäre die Reibungskraft ungleich null, würde einerseits gelten:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{F_R}{m} \qquad (1.15)$$

Die Schwerpunktsgeschwindigkeit der Kugel würde also kleiner. Andererseits würde gelten:

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_R \qquad (1.16)$$

Für die x – Koordinate der Winkelgeschwindigkeit bedeutet dies (Einsetzen!)

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{F_R r}{J} \qquad (1.17)$$

wobei J das Trägheitsmoment der Kugel ist. Da die x – Komponente der Winkelgeschwindigkeit aber sowieso schon negativ ist, würde sie also betragsmässig anwachsen (von etwas Negativem ziehen wir in jedem Zeitschritt noch etwas ab!). Das würde heissen: Die Rotationsgeschwindigkeit würde grösser. Dann kann aber $v = \omega r$ nicht mehr gelten. ➔ Eine Kugel kann nur dann perfekt rollen, wenn keine Reibungskräfte wirken.

Aufgabe 5 Schätzaufgabe

Die Erde bewegt sich einmal pro Jahr um die Sonne und zwar in guter Näherung auf einer Kreisbahn. Wenn wir die Sonne als ruhend betrachten, wie gross ist ungefähr die kinetische Energie der Schwerpunktbewegung der Erde im Vergleich zur Rotationsenergie der Erde? Sie werden nicht umhin kommen, einige Zahlen, z.B. den Radius der Erdbahn, irgendwo nachzuschlagen.

Lösung

Die kinetische Energie der Schwerpunktbewegung ist gegeben durch:

$$E_{kin,S} = M_E \frac{v_{Bahn}^2}{2} \tag{1.18}$$

Die Rotationsenergie der Erde ist gegeben durch:

$$E_{rot} = J \frac{\omega_E^2}{2} = \frac{2}{5} M_E r_E^2 \frac{\omega_E^2}{2} \tag{1.19}$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{E_{kin,S}}{E_{rot}} = \frac{M_E \frac{v_{Bahn}^2}{2}}{M_E \frac{r_E^2 \omega_E^2}{5}} = \frac{5}{2} \frac{v_{Bahn}^2}{r_E^2 \omega_E^2} = \frac{5}{2} \frac{\left(\frac{2\pi r_{SE}}{1yr} \right)^2}{r_E^2 \omega_E^2} \tag{1.20}$$

Dabei bezeichnet v_{Bahn} die Schnelligkeit der Erde bei ihrem Lauf um die Sonne, r_E ist der Erdradius, ω_E die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und r_{SE} ist der Radius der Erdbahn.

Der Radius der Erdbahn ist ca. $r_{SE} = 1.5 \cdot 10^{11} m$, ein Jahr hat ungefähr $\pi \cdot 10^7 s$, der Erdradius ist etwa $6 \cdot 10^6 m$ und die Winkelgeschwindigkeit der Erdration (Ein Tag hat etwa 10^5 s) ist gleich $\frac{2\pi}{10^5 s}$. Alles einsetzen und (natürlich ohne Rechner!!!) sehr grob gerundet rechnen, ergibt

$$\frac{E_{kin,S}}{E_{rot}} = 10^4 \tag{1.21}$$

Wenn ich sage, Sie sollen ohne Rechner rechnen, meine ich das auch. Es geht mir nicht ums Kopfrechnen; aber als IngenieurIn sollten Sie in der Lage sein, Überschlagsrechnungen schnell durchzuführen.

Zusatzaufgabe 6: Konfibrot

Warum landet eine Toastbrotscheibe, die vom Tisch fällt, immer mit der Confiseite auf dem Teppich? Die Frage klingt komisch, ist aber ernsthaft wissenschaftlich untersucht worden. Die Theorie ist zu kompliziert, als dass man sie hier detailliert wiedergeben könnte, aber R. D. Edge und D. Steinert zeigten, dass eine (als quadratisch angenommene) Scheibe Toastbrot, die man vorsichtig über den Rand einer Tischplatte schiebt, bis sie kippt, typischerweise dann herunterfällt, wenn der Winkel ϕ_0 gegen die Horizontale größer ist als 30° (siehe Fig. 1). In diesem Moment hat die Scheibe eine Winkelgeschwindigkeit von ω = 0,956 $\sqrt{\frac{g}{L}}$, wobei L die Kantenlänge der Toastscheibe ist. Auf welche Seite fällt die Scheibe, wenn der Tisch die Höhe $h = 0.5m$ (Natürlich starten wir mit der Confiseite oben)? Wie sieht es bei einem 1,00 m hohen Tisch aus? Setzen Sie für die Kantenlänge L = 10,0 cm an und vernachlässigen Sie alle Effekte durch den Luftwiderstand.

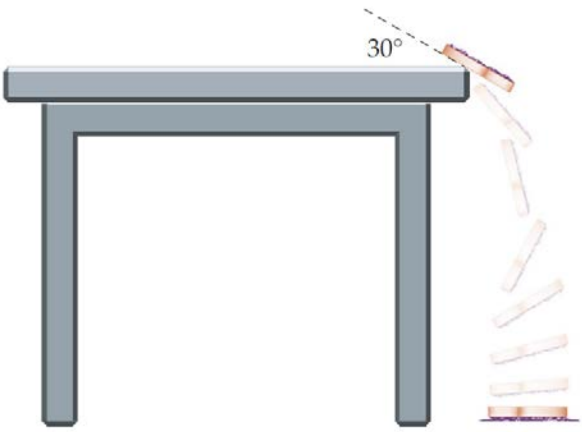

Fig. 1

Lösung

Die Fallzeit t_F der Toastscheibe beträgt $t_F = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (konstante Beschleunigung, BMS – Formel). Der Winkel α, um den die Scheibe sich in dieser Fallzeit dreht ist also gleich

$$\alpha = \phi_0 + t_F\omega = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot 0.956\sqrt{\frac{g}{L}} = \phi_0 + 0.956\sqrt{\frac{2h}{L}} \ .$$

Wir müssen in Radian rechnen. Dann ist $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$ und wir erhalten für den Drehwinkel der Toastscheibe wieder zurückgerechnet in Grad:

$$\begin{aligned} \alpha(h = 0.5m) &= 203^\circ \\ \alpha(h = 1m) &= 275^\circ \end{aligned} \tag{1.22}$$

Zusatzaufgabe 7

Um das Trägheitsmoment einer Stange, welche um einen ihrer Endpunkte rotiert, müsste man das Integral

$$J_A = \int_0^L \frac{m}{L} x^2 dx \qquad (1.23)$$

berechnen (S. Fig. 3). Der Stab habe die Länge L und die Masse m.

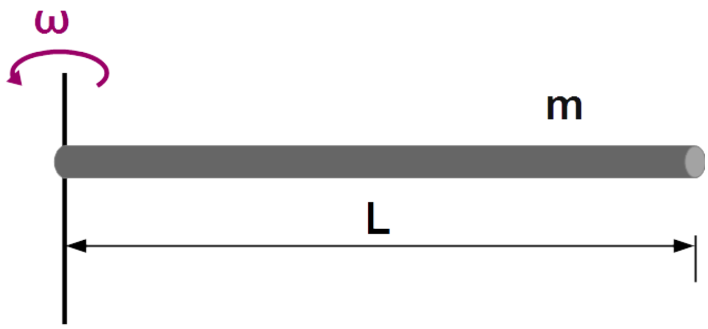

Fig. 2

Wenn man jetzt nicht so gerne integriert, kann man auch eine Näherung berechnen. Wir betrachten den Stab als zusammengesetzt aus drei Punktmassen, welche gleichmässig über den Stab verteilt sind (s. Fig. 4). Berechnen Sie das Trägheitsmoment dieses genäherten Objekts durch Summenbildung über Punktmassen und bestimmen Sie, um wie viele Prozent Sie danebenliegen.

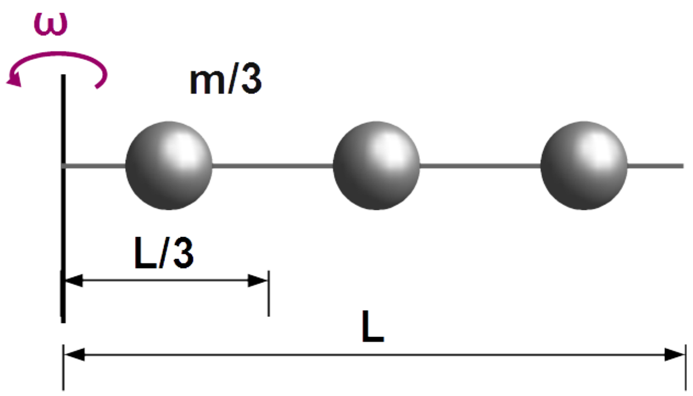

Fig. 3

Lösung

Einer Tabelle entnehmen Sie: $J_A = m\frac{L^2}{3}$. Eine Näherung über Punktmassen ergibt:

$$J_{A,approx} = \frac{m}{3}\left(\frac{L}{6}\right)^2 + \frac{m}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{m}{3}\left(\frac{5L}{6}\right)^2 = \frac{35}{108} mL^2 \qquad (1.24)$$

Die Näherung stimmt bis auf drei Prozent!

Zusatzaufgabe 8 Simulation eines Stangenpendels (Crazy challenge)

Achtung: Diese Aufgabe können Sie nur lösen, wenn Sie wissen, was ein Drehimpuls ist.

In dieser Aufgabe sollen Sie ein Stangenpendel simulieren. Die Situation ist illustriert in Fig. 4. Die Stange habe die Länge $L = 2m$ und die Masse $m = 20kg$. Eine Stange ist nicht dasselbe wie ein Seil; das bedeutet, dass die Lagerkraft nicht zwingend in Richtung der Stange erfolgen muss.

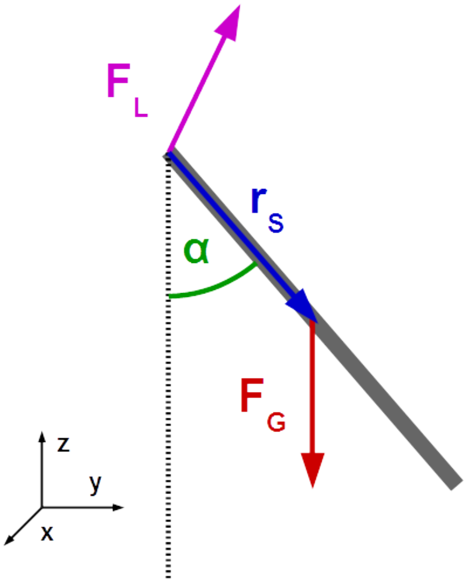

Fig. 4

Im ersten Teil der Aufgabe sollen Sie die Gleichung für das Drehmoment benützen, das heisst, Sie lösen mit BM die Gleichung

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{D}$$

Diejenigen unter Ihnen, die eine kleine Herausforderung nicht scheuen: Sie wissen, dass die Bahn des Schwerpunkts der Stange auf einem Kreis verlaufen wird. Mit dieser Information können Sie die Bewegungsgleichung auch mit dem Newton'schen Gesetz lösen und die Drehmomentegleichung auf den Schwerpunkt beziehen. Damit können Sie zusätzlich noch die wirkenden Lagerkräfte ermitteln.

Lösung

Wie immer zuerst die Vektoren:

$$\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

Wenn sich das Pendel in der yz – Ebene dreht, muss der Drehimpuls in x – Richtung zeigen (Da der Drehimpuls das Kreuzprodukt aus Ort und Geschwindigkeit ist):

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} J\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei ist $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$. Für das Drehmoment $\vec{D}$ haben wir

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L}{2}\sin(\alpha) \\ -\frac{L}{2}\cos(\alpha) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{mgL}{2}\sin(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Stange mit Drehpunkt am Stangenende entnehmen wir einer Tabelle (oder rechnen es aus!) $J = \frac{ML^2}{3}$. Nur die x-Komponente der Drehmomentegleichung ist von Interesse (d.h. nicht einfach durch 0 = 0 gegeben). Sie lautet:

$$J\frac{d\omega}{dt} = J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\frac{L}{2}\sin(\alpha)$$

Eine BM – Lösung dieser Gleichung ist gegeben in Stangenpendel.mmd.

Sie können auch anders argumentieren. Die Bahn des Schwerpunkts $\vec{r}_S(t)$ wird die muss, solange die Aufhängung hält, folgende Gestalt haben:

$$\vec{r}_S(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L}{2}\sin(\alpha(t)) \\ -\frac{L}{2}\cos(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

Durch zweimaliges Ableiten erhalten wir:

$$\vec{a}_S = \frac{L}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2}\cos(\alpha) - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \sin(\alpha) \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2}\sin(\alpha) - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Machen Sie sich folgendes klar: Sie kennen zwar die Bewegung des Schwerpunktes nicht, speziell kennen Sie die Funktion $\alpha(t)$ nicht, aber Sie können doch bereits etwas über die Beschleunigung aussagen, nämlich dass sie die Gestalt $\vec{a}_S(t)$ haben muss, da sich der Schwerpunkt auf einer Kreisbahn bewegen wird! Ihrem Wissen über die Gestalt der Beschleunigung steht Ihr Nichtwissen über die Lagerkraft $\vec{F}_L$ gegenüber. Diese hat die Gestalt:

$$\vec{F}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{Ly} \\ F_{Lz} \end{pmatrix}$$

Nun muss wegen Newton weiter gelten:

$$m\vec{a}_S(t) = \vec{F}_G + \vec{F}_L$$

Die Drehmomentegleichung liefert dann:

$$J\begin{pmatrix} \frac{d^2\alpha}{dt^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{r}_S(t) \times \vec{F}_L$$

Beachten Sie das Minuszeichen! Vom Schwerpunkt aus gesehen hat der Angriffspunkt der Lagerkraft die Koordinaten von $-\vec{r}_S(t)$.

Sie erhalten nun drei Gleichungen:

$$\frac{mL}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\cos(\alpha) - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \sin(\alpha)\right) = F_{L,y}$$

$$\frac{mL}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\sin(\alpha) - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \cos(\alpha)\right) = -mg + F_{L,z}$$

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{L}{2}F_{L,z}\sin(\alpha) - \frac{L}{2}F_{L,y}\cos(\alpha)$$

Auflösen liefert (wobei Sie jetzt das Trägheitsmoment der Stange bezüglich einer Drehachse durch den Schwerpunkt nehmen müssen):

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{3g}{2L}\sin(\alpha)$$

$$F_{L,y} = \frac{L}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\cos(\alpha) - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \sin(\alpha)\right)$$

$$F_{L,z} = -\frac{2}{L\sin(\alpha)}\left(J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{L}{2}F_{Ly}\cos(\alpha)\right)$$