Übungsserie 8

1) a) geg: $y^{(4)} + 1.1\,y''' - 0.1\,y'' - 0.3\,y = \sin x + 5$ $\quad y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0 \quad y'(0) = 2$

$x_0 = 0 \qquad h = 0.1$

1) auflösen nach der höchsten Ableitung:

$$y^{(4)} = \sin x + 5 - 1.1\,y''' + 0.1\,y'' + 0.3\,y$$

2) Hilfsfunktionen einführen

$z_1(x) = y(x)$
$z_2(x) = y'(x)$
$z_3(x) = y''(x)$
$z_4(x) = y'''(x)$

✓

3) Hilfsfunktion ableiten und in grösste Hilfsfunktion einsetzen

$z_1'(x) = y' = z_2$
$z_2'(x) = y'' = z_3$
$z_3'(x) = y''' = z_4$
$z_4'(x) = y^{(4)}$ $\Rightarrow$ $z_4' = \sin(x) + 5 - 1.1\,z_4 + 0.4\,z_3 + 0.3\,z_1$

4) DGL in Vektorielle Form schreiben

$$z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \sin(x) + 5 - 1.1\,z_4 + 0.4\,z_3 + 0.3\,z_1 \end{pmatrix} = f(x, z), \quad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Euler:

$$x_{i+1} = x_i + h \qquad z_{i+1} = z_i + h \cdot f(x_i, z_i)$$

$$z_1 = z_0 + 0.1 \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \sin(x_0) + 5 - 1.1\,z_4 + 0.4\,z_3 + 0.3\,z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \cancel{0} + \underline{5} - \cancel{1.1 \cdot 0} + \cancel{0.4 \cdot 0} + \cancel{0.3 \cdot 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0.2 \\ 2 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}}} = z_1$$

Runge-Kutta

$$K_1 = f(x_0, z_0) = f\left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \cancel{0} + \underline{5} - \cancel{1.1 \cdot 0} + \cancel{0.4 \cdot 0} + \cancel{0.3 \cdot 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, \; z_0 + \frac{h}{2} \cdot K_1\right) = f\left(0.05, \begin{pmatrix} 0.1 \\ 2 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0.25 \\ 4.8050 \end{pmatrix}$$

$$K_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, \; z_0 + \frac{h}{2} \cdot K_2\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.25 \\ 4.75 \\ 4.77 \end{pmatrix}$$

$$K_4 = f\left(x_0 + h, \; z_0 + h \cdot K_3\right) = \begin{pmatrix} 2.025 \\ 0.475 \\ 0.477 \\ 5.123 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = z_0 + h \cdot \frac{1}{6}\left(K_1 + K_2 + K_3 + K_4\right) = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 2.02 \\ 0.17 \\ 0.48 \end{pmatrix}$$

b) geg: $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + y(x^2 - n^2) = 0$ $\qquad y(1) = y'(1) = 2$

$x_0 = 1 \qquad h = 0.1 \qquad n^2 = 1$

1) auflösen nach der höchsten Ableitung:

$$y'' = -\frac{y'}{x} - y + \frac{n^2 y}{x^2}$$

2) Hilfsfunktionen einführen

$z_1(x) = y(x)$

$z_2(x) = y'(x)$

3) Hilfsfunktion ableiten und in grösste Hilfsfunktion einsetzen

$z_1'(x) = y' = z_2$

$z_2'(x) = y'' = -\frac{y'}{x} - y + \frac{n^2 y}{x^2}$

$= -\frac{z_2}{x} - z_1 + \frac{n^2 z_1}{x^2}$

4) DGL in Vektorielle Form schreiben

$$z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{z_2}{x} - z_1 + \frac{n^2 \cdot z_1}{x^2} \end{pmatrix} = f(x, z), \quad z(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Euler: $x_{i+1} = x_i + h \qquad z_{i+1} = z_i + h \cdot f(x_i, z_i)$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot f\left(x_i, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{2}{1} - 2 + \frac{1 \cdot 2}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 1.8 \end{pmatrix}$$

Runge-Kutta

$$K_1 = f(x_0, z_0) = f\left(1, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{2}{1} - 2 + \frac{1 \cdot 2}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, z_0 + \frac{h}{2} \cdot K_1\right) = \begin{pmatrix} -2.1 \\ 2.2 \end{pmatrix}$$

$$K_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, z_0 + \frac{h}{2} \cdot K_2\right) = \begin{pmatrix} -1.85 \\ 1.976 \end{pmatrix}$$

$$K_4 = f(x_0 + h, z_0 + h \cdot K_3) = \begin{pmatrix} -1.802 \\ 1.9 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = z_0 + h \cdot \frac{1}{6}(K_1 + K_2 + K_3 + K_4) = \begin{pmatrix} 1.996 \\ 2.009 \end{pmatrix}$$