

1. Bestimmen Sie mit dem Gauss-Algorithmus ohne Taschenrechner die Parameter a und b , so dass das System lösbar ist:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

$$5x_1 + 4x_2 - 5x_3 = a$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = b$$

2. Gegeben seien das Parallelogramm $ABCD$ und ein Punkt E auf der Seite BC , der diese Seite im Verhältnis $BE : EC = 1 : 3$ teilt. S sei der Schnittpunkt der Strecke AE mit der Diagonalen BD . Berechnen Sie das Verhältnis $AS : SE$

3. Zerlegen Sie den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ in eine zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ parallele und eine zu \vec{a} senkrechte Komponente.

4. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E , welche die x -Achse bei $x = -3$, die z -Achse bei $z = -3$ schneidet und die parallel zur y -Achse verläuft.
b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g durch die Punkte $G(1,2,-1)$ und $H(-2,1,0)$ mit der Ebene E , falls ein solcher existiert.

5. Welche Punkte auf der Geraden g durch $P(9, -6, 11)$ und $Q(3, -6, 8)$ haben von der Ebene $E : 2x - y + 2z - 10 = 0$ die Entfernung 6?

6. Die Ebene α ist gegeben durch die Koordinatengleichung $2x - 2y + z = 1$. Vom Punkt $C(11/-4/-9)$ geht ein Lichtstrahl Richtung $D(2/-1/3)$ und wird an der Ebene α reflektiert. Bestimmen Sie die Gleichung des reflektierten Strahls.

7. Gegeben sind drei Punkte $A(3,6,-2)$, $B(-1,10,5)$, $C(5,4,-3)$.
a) Welches ist der grösste Winkel im Dreieck ABC und wie gross ist er?
b) Wie gross ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ?
c) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E durch A , B , C .
d) Zeigen Sie, dass der Punkt $S(-11, 20, -19)$ in der Ebene E liegt. Liegt er innerhalb des Dreiecks ABC oder ausserhalb? Begründen Sie ihre Antwort.

8. Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Gleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ lösbar ist. Wie lautet die Lösung \mathbf{x} ?

9. Wie muss der Parameter b der Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix}$ gewählt werden, damit die Gleichung $B\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$ lösbar ist (dh. nichttriviale Lösung hat). Welches ist eine solche Lösung?

10. Man hat $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} -1 & 19 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$ Wie lautet die Matrix A ?

11. Eine lineare Abbildung f von der Ebene auf sich wird bezüglich der Standardbasis durch die folgende Matrix A dargestellt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix A^* von f bezüglich der neuen Basis

$$\left\{ \tilde{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

12. Man bestimme alle a, b, c , so dass die Matrix symmetrisch ist:

$$\begin{bmatrix} 2 & a - 2b + 2c & 2a + b + c \\ 3 & 5 & a + c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

13. gegeben ist der Vektor \mathbf{c} durch $\mathbf{c}^T = (a, b, c)$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Die Matrix D ist definiert durch $D = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}^T$.
a) Berechnen Sie D und D^2 .
b) Bestimmen Sie $D^{100} - D + D^2$.

14. Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch die Vorschrift:

$$\varphi: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3y + 4z \\ -3x + 2z \\ -4x - 2y \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie von dieser linearen Abbildung φ die zugehörige Matrix A .
b) Welches ist der Kern von φ ,
c) Welche Punkte werden durch φ auf den Punkt $Q(7/-1/-6)$ abgebildet?

Resultate

1) a,b, mit $a-3b-2=0$

2) 4:1

3) $\mathbf{b} = (3,7,4)^T - (8,0,-6)^T$

4) a) $x+z+3=0$ b) $P(-3.5 / 0.5 / 0.5)$

5) $HNF = \pm 6$: $P1(3/-6/8)$ und $P2(-9/-6/2)$

6) Gerade durch die gespiegelten Punkte: $C'(\frac{19}{9} / \frac{44}{9} / \frac{-121}{9})$ und $D'(\frac{-14}{9} / \frac{23}{9} / \frac{11}{9})$

7) a) $\cos \alpha = \frac{-23}{27}$ b) $F = \sqrt{50}$ c) $x+y-9=0$ d) $\overrightarrow{AS} = -0.48\overrightarrow{AB} - 16.6\overrightarrow{AC}$ $S \notin \text{Dreieck}$

8) $a = 19$ $(x/y) = (-6/1)$

9) $b = -0.8$ $x = t \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$

10) $BA = C \Rightarrow A = B^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

11) $A^* = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

12) $a = 11, b = -9, c = -13$

13) a) $D = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ $D^2 = (cc^T)cc^T = c(\underset{=1}{c^T c})c^T = cc^T = D$ b) D

14) a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $x = (2t, -4t, 3t)$ c) $x = (2t + \frac{1}{3}, -4t + \frac{7}{3}, 3t)$