Grundlagen und diskrete Mathematik
Übung 2

Abgabe: Kalenderwoche 41

Aufgabe 1

Gegeben sind die beiden aussagenlogischen Formeln $F := p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_5)$ und $G := (p_3 \wedge p_2) \rightarrow p_4$ sowie eine Belegung B mit

$$B(p_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ eine Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\widehat{B}(F)$ und $\widehat{B}(G)$.

(b) Geben Sie eine Belegungen an, unter der F zu 0 und G zu 1 evaluiert wird.

Aufgabe 2

Geben Sie von folgenden Formeln an, ob sie in DNF und/oder in KNF sind.

(a) p

(b) $p \wedge (\neg q \wedge p_1)$

(c) $p \vee (q \rightarrow p)$

(d) $p \vee (\neg p \wedge (p \vee q))$

(e) $(p \vee q) \wedge (p \vee (p \vee p))$

Aufgabe 3

Bringen Sie folgende aussagenlogischen Formeln in DNF und KNF.

(a) $p \rightarrow (q \vee (p_1 \wedge p_2))$

(b) $p \rightarrow (q \rightarrow p_1)$

(c) $(p \rightarrow q) \rightarrow p_1$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die aussagenlogische Formel F genau dann unerfüllbar ist, wenn die Formel $\neg F$ allgemeingültig ist.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie mithilfe von Wahrheitstabellen ob folgende Formeln allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar sind.

(a) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

(c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

(d) $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$

Aufgabe 6

Eine Menge logischer Verknüpfungen heisst *funktional vollständig*, wenn man alle Junktoren $(\wedge, \vee, \neg, \rightarrow)$ durch Kombinationen dieser Verknüpfungen äquivalent ausdrücken kann. Die Verknüpfungen $\neg, \wedge$ sind zum Beispiel funktional vollständig weil man damit $\rightarrow$ und $\vee$ wie folgt ausdrücken kann:

- $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$.

Zeigen Sie, dass folgende Mengen von Verknüpfungen funktional vollständig sind:

(a) $\{\neg, \vee\}$

(b) $\{\neg, \rightarrow\}$

(c) $\{\,|\,\}$, wobei $A \,|\, B := \neg(A \wedge B)$ (NAND-Operator).

(d) $\{\oplus\}$, wobei $A \oplus B := \neg(A \vee B)$.

Aufgabe 7 (Bonusaufgabe)

Implementieren Sie in einer Programmiersprache Ihrer Wahl aussagenlogische Formeln als Klasse/Datentyp. Stellen Sie folgende Funktionalitäten zur Verfügung:

- Eine Methode/Funktion `eval(Formel, Belegung)`, mit der Sie Aussagenlogische Formeln unter einer gegebenen Belegung auswerten können.
- Methoden/Funktionen `nnf(Formel)`, `dnf(Formel)`, `knf(Formel)`, um Formeln in die entsprechenden Normalformen umzuwandeln.
- Eine Methode/Funktion `pretty_print(Formel)`, die Formeln in einer gut lesbaren Form ausgibt (z.B. als LaTeX–Code).