ZHAW ZURICH UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Institute for Applied Mathematics and Physics, School of Engineering

PhIT Lösungen zu Übung 4

Prof. Dr. R. M. Füchslin, Dr. M. Hertwig, Dr. M. Jazbinsek,
Dr. R. Luchsinger, Dr. A. - C. Uldry

October 19, 2017

Diese Übungen dienen dazu, Sie mit einigen Konzepten und Rechenmethoden der Physik vertraut zu machen. Sie machen diese Übungen für sich. Das bedeutet:

- Sie müssen keine Übungen abgeben.
- Sie können gerne in Gruppen arbeiten. Wir empfehlen das sogar.
- Wir machen keine Korrekturen, stellen aber Musterlösungen zur Verfügung. Der/die ÜbungsbetreuerIn ist Ihr Coach. Diese(r) wird Ihnen nach bestem Wissen Ihre Fragen beantworten. Die Fragen stellen müssen Sie aber selber.

Wir geben Ihnen Hinweise, wie schwierig eine Aufgabe ist: • Einfach, Einsetzaufgabe, •• Etwas schwieriger, braucht eigene Denkarbeit, • • • Irgendetwas zwischen Schwierig und Crazy Challenge.

AUFGABEN

1 IMPULS UND KRAFT

1.1 PROBLEMSTELLUNG

• Ein Ball mit der Masse $m = 200g$ prallt vertikal auf den Boden. Beim Aufprall beträgt die Geschwindigkeit $v = 2m/s$ und wir nehmen an, der Aufprall sei vollkommen elastisch. Wie gross ist die durchschnittliche Kraft auf den Boden (während des Aufpralles) wenn der Ball während $\Delta t = 20ms$ in Kontakt mit dem Boden ist?

1.2 LÖSUNG

"Elastisch und vertikal" bedeutet, dass die Bewegung nur auf der z-Achse stattfindet und dass wenn die Geschwindigkeit vor dem Aufprall $\vec{v}_{in} = (0, 0, -v)$ beträgt, sie nach dem Aufprall $\vec{v}_{out} = (0, 0, v)$ sein wird. Die Impulsänderung $\Delta\vec{p}$ des Balls verursacht durch den Aufprall beträgt also

$$\Delta\vec{p} = m(\vec{v}_{out} - \vec{v}_{in}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2mv \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Wir nehmen im Folgenden an, der Ball pralle bei $t = 0$ auf den Boden. Der Bodenkontakt dauert also bis $t = \Delta t$. Der Zusammenhang zwischen Impulsänderung und Kraft ist gegeben durch:

$$\Delta\vec{p} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}(t)dt. \tag{1.2}$$

Nun interessieren wir uns für die durchschnittliche Kraft $\vec{F}_{av}$ (av: average) welche, würde sie während des ganzen Aufprallintervalls konstant wirken, zu einer Impulsänderung $\Delta\vec{p}$ führen würde. Für die Durchschnittskraft $\vec{F}_{av}$ gilt

$$\vec{F}_{av} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \vec{F}(t)dt. \tag{1.3}$$

Das heisst natürlich auch:

$$\vec{F}_{av}\Delta t = \Delta\vec{p}. \tag{1.4}$$

Da die Bewegung lediglich entlang der z - Achse geschieht, können wir uns bei der Berechnung auf die entsprechende Komponente beschränken. Wir erhalten:

$$F_{av,z} = \frac{2mv}{\Delta t} = 40N. \tag{1.5}$$

2 Inelastische Kollision zweier Autos

2.1 Problemstellung

•• Zwei Autos ($m_1 = 1200kg$ und $m_2 = 2200kg$) kollidieren **inelastisch** gegeneinander und bewegen sich weiter zusammen ("inelastisch" bedeutet, dass der Impuls, nicht aber die kinetische Energie erhalten bleibt; "weiter zusammenbleiben" hiesst, dass die Autos ineinander verkeilt weiterfahren und somit dieselbe Geschwindigkeit haben.). Vor dem Stoss bewegen sie sich mit $v_1 = 50km/h$ und $v_2 = 100km/h$ in positiver, bzw. negativer x-Richtung (Wir könnten jetzt ein Riesentheater um Geschweinidigkeiten und Schnelligkeiten machen, aber wir lassen das).

1. Wie gross ist die gemeinsame Geschwindigkeit v_{out} nach der Kollision?

2. Wie viel Energie geht durch den inelastischen Stoss "verloren"? Wohin geht diese Energie?

2.2 Lösung

Es gilt:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{out}. \tag{2.1}$$

Auflösung nach v_{out} liefert $v_{out} = -47.1km/h = -13.1m/s$.
Die kinetische Energie ist nicht erhalten. Folgende Energie wird in Deformation, Wärme, usw. verwandelt:

$$m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} - (m_1 + m_2) \frac{v_{out}^2}{2} = 685kJ. \tag{2.2}$$

3 Dynamische und energetische Behandlung des schiefen Wurfs

3.1 Problemstellung

•• Ein Ball der Masse m wird aus einer Höhe h mit der Geschwindigkeit v_0 horizontal geworfen (s. Fig. 3.1). Wie schnell ist der Ball, wenn er auf dem Boden auftrifft? Vernachlässigen vorerst den Luftwiderstand. Benutzen und vergleichen Sie:

1. Dynamische Gleichungen,

2. Impuls- und/oder Energie-Erhaltung.

Geben Sie die Aufprallgeschwindigkeit als Funktion der Höhe h an. Beantworten Sie folgende weiteren Fragen:

1. Vernachlässigter Luftwiderstand:
    a) Was passiert, wenn die Masse des Balls verdoppelt wird?

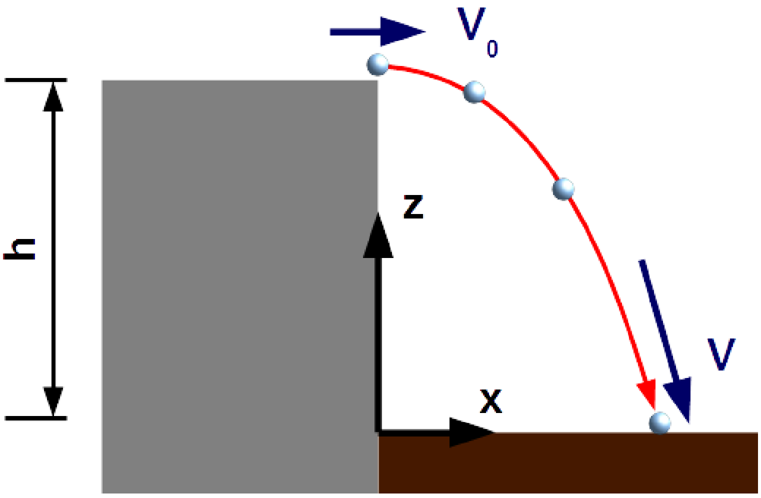

Figure 3.1: Horizontaler Wurf.

   b) Wie verändert sich die x-Komponente der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit?

2. Mit Luftwiderstand:
   a) Was passiert, wenn die Masse des Balls verdoppelt wird? Wir möchten lediglich eine qualitative Antwort. Wird die Aufprallgeschwindigkeit grösser oder kleiner?
   b) Wie verändert sich die x-Komponente der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit? Wieder ist nur eine qualitative Antwort gefordert. Wird v_x grösser oder kleiner mit fortschreitender Zeit?

Anwendung dynamischer Gleichungen bedeutet, dass wir von

$$\vec{F} = m\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

ausgehen und die entstehenden Differentialgleichungen lösen. Wir verlangen nicht, dass Sie die Differentialgleichung allgemein lösen. Der Spezialfall für den Fall ohne Luftreibung können Sie aber rein durch Integration bewältigen.

3.2 LÖSUNG

Ohne Luftwiderstand gilt:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Weiter haben wir: $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = h$ und $v_x(0) = v_0, v_y(0) = 0, v_z(0) = 0$. Für die x - Komponente gilt:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')dt', \tag{3.3}$$

$$v_x(t') = v_x(0) + \int_0^{t'} v(t'')dt''. \tag{3.4}$$

Entsprechendes gilt für die anderen Komponenten. Damit bekommen wir für die Bewegung ohne Luftwiderstand für die Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

und für den Ortsvektor:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ 0 \\ h - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Damit bekommen wir für die Fallzeit t_a (Das heisst für den Zeitpunkt bei dem $z(t) = 0$ ist):

$$t_a = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{3.7}$$

Für den Betrag der Aufprallgeschwindigkeit v_a gilt dann:

$$v_a = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \tag{3.8}$$

Mit Hilfe der Energieerhaltung kann dieses Problem sehr viel einfacher gelöst werden. Es gilt als Funktion der Höhe h:

$$E_{kin}(h) + E_{pot}(h) = E_{kin}(0) + E_{pot}(0). \tag{3.9}$$

Dies heisst konkret:

$$m\frac{v_0^2}{2} + mgh = m\frac{v_a^2}{2} + 0. \tag{3.10}$$

Damit bekommen wir sofort $v_a = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.
Bemerkung: Warum ist die energetische Betrachtung so viel einfacher als die Lösung mit Hilfe dynamischer Gleichungen? Wir suchen die Geschwindigkeit beim Aufprall; der Zeitpunkt oder die Details der Bahnkurve sind nicht gefragt. All dies liefert Ihnen aber der dynamische Ansatz, also viel mehr als Sie brauchen. Der energetische Ansatz sagt Ihnen nichts über die Art und Weise aus, wie Sie vom Start- zum Endpunkt kommen, sondern vergleicht nur Grössen am Start mit solchen am Endpunkt.
Ohne Luftwiderstand ist die Fallzeit und die Aufprallgeschwindigkeit unabhängig von der Masse (was wir aus der dynamischen Betrachtungsweise sofort entnehmen können). Die

Grösse der x-Komponente der Geschwindigkeit ändert sich nicht.Unter Berücksichtigung der Luftreibung "überlebt" nur die Geschwindigkeitsrichtung, welche durch eine Kraft "genährt" bleibt (Man kann das auch formal rechtfertigen). Das zeigt, dass die x- Komponente der Geschwindigkeit immer kleiner wird, während die Endgeschwindigkeit in z - Richtung je grösser ist, desto grösser die Gravitationskraft ist. Letztere ist proportional zu m; je grösser also m, desto grösser die Aufprallgeschwindigkeit.

4 Schätzaufgabe

4.1 Problemstellung

• Wieviel Energie verbrauchen Sie pro Jahr?
Eine Möglichkeit, den privaten Energieverbrauch abzuschätzen bietet die Website http://www.2000watt.ch mich/wo-stehe-ich/.
Sie wissen natürlich, dass es an sich fehlerhaft ist, den Energieverbrauch in Watt anzugeben. Was die Leute meinen, wenn sie von Energieverbrauch sprechen, ist folgendes: Die angegebene Wattzahl multipliziert mit 24 Stunden mal 3600 Sekunden pro Stunde mal 365 Tage pro Jahr ergibt den Energieverbrauch pro Jahr. Ansonsten ist die angegebene Website recht gut.

5 Simulation von Impulsänderungen

5.1 Problemstellung

•• Ein Objekt bewegt sich in x-Richtung (z.B. ein Schienenwagen mit Antrieb auf Geleisen, welche in x-Richtung ausgerichtet sind). Dabei ändert sich die x-Komponente des Impulses gemäss:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x - ap_x - bp_x^2. \tag{5.1}$$

Dabei sind F_x, a, b Konstanten.

1. Modellieren Sie $p_x(t)$ mit Berkeley-Madonna. Wählen Sie Werte für die Konstanten F_x, a, b.
2. Überprüfen Sie die Simulation mit der Lösung für den stationären Zustand.

5.2 Lösung

Ein BM - Programm finden Sie unter Ex3-Impuls.mmd. Für den stationären Fall gilt:

$$\frac{dp_x}{dt} = 0 = F_x - ap_x - bp_x^2. \tag{5.2}$$

Das bedeutet:

$$p_x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bF_x}}{2b}. \tag{5.3}$$

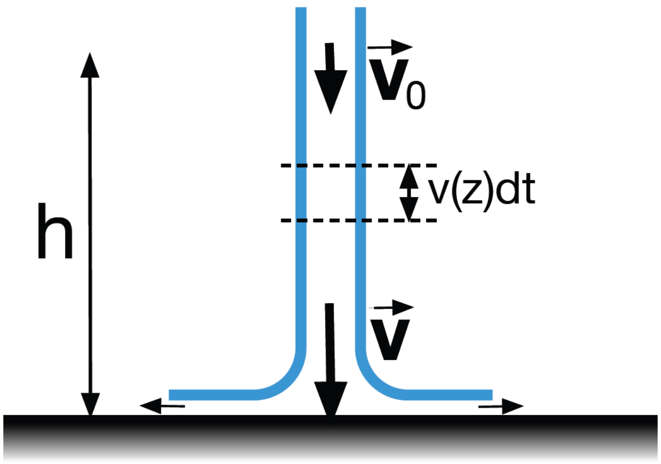

Figure 6.1: Wasserstrahl trifft auf Boden.

6 Kraft = Impulsänderung!

6.1 Problemstellung

••• Wasser fliesst aus einer Höhe $h = 25cm$ vertikal aus einem Rohr in Richtung Boden. Die Ausflussgeschwindigkeit beträgt (Komponente in z-Richtung) $v_0 = -1m/s$ und der Strahldurchmesser des Strahls mit kreisförmigen Querschnitt beträgt $D = 1cm$. Beim Auftreffen auf den Boden wird das Wasser um 90ř symmetrisch abgelenkt (siehe Fig. 6.1). Welche Kraft wirkt auf den Boden? Beachten Sie: Sie müssen zuerst klären, mit welcher Geschwindigkeit das Wasser auf den Boden auftrifft (Das Wasser fällt eine Streche h hinunter). Dann müssen Sie klären, wie gross die Impulsänderung ist. Beachten Sie eine Schwierigkeit: Der Wasserstrahl hat, wenn er das Rohr verlässt, einen Durchmesser D. Nun wird das Wasser beim Runterfallen beschleunigt, fliesst also schneller. Da ja kein Wasser entsteht, muss der Strahl dünner werden (sonst käme ja unten pro Sekunde mehr Wasser an als oben aus dem Rohr geflossen ist). Formal ist die Lösung dieser Schwierigkeit sehr einfach, aber Sie müssen wirklich etwas überlegen.

6.2 Lösung

Die Aufprallgeschwindigkeit des Wassers v_a können wir mit über die Energieerhaltung bekommen. Es gilt:

$$m\frac{v_0^2}{2} + mgh = m\frac{v_a^2}{2} + 0. \tag{6.1}$$

Damit bekommen wir sofort $v_a = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 2.43m/s$ (Vorgehen genau wie in Aufgabe 3).

Nun hat das Wasser, wenn es aus dem Rohr kommt und solange es in der Luft ist, lediglich Impuls in z-Richtung. Nach dem Aufprall ist der Gesamtimpuls des Wassers gleich null (In

z - Richtung fliesst es nicht mehr und in der Ebene fliesst das Wasser gleichmässig in alle Richtungen ab. Der Gesamtimpuls, der ja ein Vektor ist, setzt sich aus den Teilimpulsen des abfliessenden Wassers zusammen, und diese Teilimpulse addieren sich zu null (Für jede Richtung fliesst gleich viel Wasser in die Gegenrichtung).
Für die vom Wasser auf den Boden ausgeübte Kraft gilt:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_a)}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v}_a. \tag{6.2}$$

Die letzte Beziehung gilt formal, weil wir die Grösse von $\vec{v}_a$ ja berechnet haben (v_a) und damit der Geschwindigkeitsvektor am Aufprallpunkt eine Konstante ist. Der Ausdruck $\frac{dm}{dt}$ können Sie interpretieren als die Masse dm die in einer Zeit dt umgelenkt wird. Nun kommt pro Sekunde unten gleich viel Wasser an, wie oben aus dem Rohr austrat. Wenn Sie sich eine Wassersäule vorstellen, welche das Rohr mit einer Geschwindigkeit v_0 verlässt, dann verlässt in einer Zeit dt ein Wasservolumen dV von $\frac{\pi D^2}{4} v_0 dt$ das Rohr (Kreisfläche: $\frac{\pi D^2}{4}$. Wenn die Dichte des Wassers gleich ρ ist, dann bekommen wir $dm = \rho dV$ und somit

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_a)}{dt} = \frac{\pi D^2 \rho v_0}{4}\vec{v}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\pi D^2 \rho v_0 \sqrt{v_0^2+2gh}}{4} \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

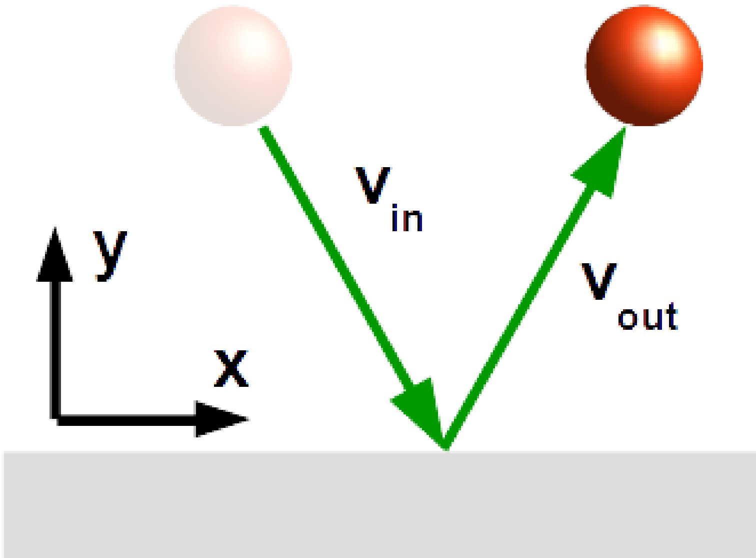

Figure 7.1: Ball prallt auf Boden.

ZUSATZAUFGABEN

7 FRAGEN UND ANTWORTEN

• Ein Ball prallt elastisch auf den Boden, s. Fig. 7.1. Wie gross ist die Impulsänderung in x-Richtung?

- $\Delta p_x = 0$.
- $\Delta p_x = 2p_x$.
- $\Delta p_x = mv_x$.
- $\Delta p_x = -p_x$.
- $\Delta p_x = p_y$.

Lösung: $\Delta p_x = 0$.
Wie gross ist die Impulsänderung in y-Richtung?

- $\Delta p_y = 0$.
- $\Delta p_x = 2p_y$.
- $\Delta p_x = mv_y$.
- $\Delta p_x = -2p_y$.
- $\Delta p_x = p_y$.

Lösung: $\Delta p_x = -2p_y$.
Zwei Massen mit $m_2 > m_1$ haben dieselbe Geschwindigkeit und werden durch eine Feder gebremst. Die Bremszeiten seien gegeben durch t_1, t_2 (Zeit, bis die Masse ruht). Welche Masse ist zuerst in Ruhe?

- $t_1 = t_2$.
- $t_1 < t_2$.
- $t_1 > t_2$.
- Kann man nicht sagen.

Lösung: $t_1 < t_2$.

8 Simulation einer Rakete

8.1 Problemstellung

Eine Feuerwerksrakete mit einer Startmasse $m_0 = m_{leer} + m_{T,0}$ bewegt sich durch Ausstossen von Masse mit einem konstanten Brennrate r_B. Die Austrittsgeschwindigkeit des verbrannten Treibstoffs betrage (relativ zur Rakete) $v_B = 900 m/s$. Selbstverständlich spielt auch die Luftreibung eine Rolle.
Erstellen Sie ein BM - Modell, welches diesen Raketenflug simuliert.

8.2 Lösung

Ein Beispiel finden Sie unter feuerwerksrakete.mmd.