

Aufgabe 1 (40 Minuten):

Zu den folgenden Stützpunkten soll die natürliche kubische Splinefunktion bestimmt werden, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i der kubischen Polynome S_i für $i = 0, 1, 2$ und geben Sie die $S_i(x)$ explizit an.

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

Scannen Sie ihre manuelle Lösung in die Datei Name_Vorname_Gruppe_S10_Aufg1.pdf.

$$\textcircled{1} a_i = y_i = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} h_i = x_{i+1} - x_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & - \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} c_i = ? \rightarrow \text{siehe nach } \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} z = \begin{pmatrix} 3 \frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3 \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ 3 \frac{y_3 - y_2}{h_2} - 3 \frac{y_2 - y_1}{h_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(2-1) - 3(1-2) \\ 3(2-2) - 3(2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+1) & 1 \\ 1 & 2(1+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Ac = z \Rightarrow c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot z = \begin{pmatrix} 0,267 & -0,07 \\ -0,07 & 0,267 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8 \\ -1,2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,8 \\ -1,2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{5} b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{3} (c_{i+1} + 2c_i)$$

$$b_0 = \frac{1-2}{1} - \frac{1}{3} (1,8 + 0) = -1 - \frac{1,8}{3} = -1,6$$

$$b_1 = \frac{2-1}{1} - \frac{1}{3} (-1,2 + 2 \cdot 1,8) = 1 - \frac{2,4}{3} = 0,2 \quad \Rightarrow b = \begin{pmatrix} -1,6 \\ 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{2-2}{1} - \frac{1}{3} (0 + 2 \cdot -1,2) = 0 - \frac{-2,4}{3} = 0,8$$

$$(6) d_i = \frac{1}{3h_i} (c_{i+1} - c_i)$$

$$d_0 = \frac{1}{3} (1,8 - 0) = 0,6$$

$$d_1 = \frac{1}{3} (-1,2 - 1,8) = -1 \quad \Rightarrow \quad d = \begin{pmatrix} 0,6 \\ -1 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

$$d_2 = \frac{1}{3} (0 - (-1,2)) = 0,4$$

$$(7) S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

$$S_0 = 2 + (-1,6)(x - 0) + 0(x - 0)^2 + 0,6(x - 0)^3$$

$$S_1 = 1 + (0,2)(x - 1) + 1,8(x - 1)^2 + (-1)(x - 1)^3$$

$$S_2 = 2 + (0,8)(x - 2) + (-1,2)(x - 2)^2 + (0,4)(x - 2)^3$$

kein ausrechnen, da explizit