Kapitel 5

Aufgabe 5.1:

1. Geben Sie je ein konkretes (nicht zu kompliziertes) Beispiel einer skalarwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie einer vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ an.

   Lösung: $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2+x_2^2+x_3^2$, $\boldsymbol{g} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x_1) \cdot \sin(x_2) \\ x_2 + x_3 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$

2. Geben sie die lineare Funktion $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ an, für die die Lösung $\boldsymbol{x}$ des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ mit } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

   gerade $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ergibt.

   Lösung: $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$,

Aufgabe 5.2:

- Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung für die folgenden Funktionen

  1. $z = f(x, y) = x^2y^4 + \mathrm{e}^x \cdot \cos y + 10x - 2y^2 + 3$
  2. $z = f(x, y) = xy^2 \cdot (\sin x + \sin y)$
  3. $z = f(x, y) = \ln(x + y^2) - \mathrm{e}^{2xy} + 3x$

- Lösungen:

  1. $f_x = 2xy^4 + \mathrm{e}^x \cdot \cos y + 10,\ f_y = 4x^2y^3 - \mathrm{e}^x \cdot \sin y - 4y$
  2. $f_x = y^2(\sin x + \sin y) + xy^2 \cdot \cos x,\ f_y = 2xy(\sin x + \sin y) + xy^2 \cdot \cos y$
  3. $f_x = \frac{1}{x+y^2} - 2y \cdot \mathrm{e}^{2xy} + 3,\ f_y = \frac{2y}{x+y^2} - 2x \cdot \mathrm{e}^{2xy}$

Aufgabe 5.3 [1]:

- Finden Sie für das obige Beispiel 5.4 Startvektoren, so dass das Newton-Verfahren mit diesen Startvektoren gegen die beiden anderen Nullstellen von f konvergiert.

- Lösung [1]:

i	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{x}^{(i)}$	$\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2.909\\-1.455\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2.302\\-1.151\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2.051\\-1.025\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2.0018\\-1.0009\end{pmatrix}$
i	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{x}^{(i)}$	$\begin{pmatrix}1\\0.4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.492\\-0.246\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-0.0729\\0.0365\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.95\cdot 10^{-4}\\-9.73\cdot 10^{-5}\end{pmatrix}$	$\approx \boldsymbol{o}$

Aufgabe 5.4:

- Das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(x_1,x_2) &= \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2)\\ f_2(x_1,x_2)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 5x_1^2-x_2^2\\ x_2-0.25(\sin x_1+\cos x_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  besitzt in der Nähe von $\boldsymbol{x}=(0.25,0.25)^T$ eine Lösung.

- Bestimmen Sie mit dem Newton–Verfahren eine Näherungslösung, die bezüglich der euklidischen Norm eine Genauigkeit von 10^{-5} besitzt.

- Lösung:
  - Für die Jacobi-Matrix erhalten wir

    $$\boldsymbol{Df}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x_1 & -2x_2\\ -0.25\cos x_1 & 1+0.25\sin x_2\end{pmatrix}$$

  - Wir wählen den Startvektor $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix}0.25\\0.25\end{pmatrix}$. Daraus ergibt sich für die erste Iteration das lineare Gleichungssystem

    $$\boldsymbol{Df}(0.25,0.25)\delta^{(0)} = -\boldsymbol{f}(0.25,0.25) \Rightarrow \begin{pmatrix}2.5 & -0.5\\ -0.2422 & 1.0619\end{pmatrix}\boldsymbol{\delta}^{(0)} = -\begin{pmatrix}0.25\\-0.0541\end{pmatrix}$$

    $\Rightarrow \boldsymbol{\delta}^{(0)} = \begin{pmatrix}-0.0941\\0.0295\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(0)}+\boldsymbol{\delta}^{(0)} = \begin{pmatrix}0.25\\0.25\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0.0941\\0.0295\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.1559\\0.2795\end{pmatrix}$ und für den Fehler $\|\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\ \|_2 = 0.0434$

  - Die weiteren Iterationen ergeben sich zu:

i	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{x}_i$	$\begin{pmatrix}0.25\\0.25\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.1559\\0.2795\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.1254\\0.2721\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.1213\\0.2711\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.1212\\0.2711\end{pmatrix}$
$\|\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i)\ \|_2$	0.2558	0.0434	0.0046	$8.2483e-05$	$2.8593e-08$

Aufgabe 5.5:

- Der Druck, der benötigt wird, damit ein grosser, schwerer Gegenstand in einem weichen, auf einem harten Untergrund liegenden, homogenen Boden absinkt, kann über den Druck vorhergesagt werden, der zum Absinken kleinerer Gegenstände in demselben Boden benötigt wird.

- Speziell der Druck p, der benötigt wird, damit ein runder flacher Gegenstand vom Radius r um d cm tief in den weichen Boden sinkt, kann über eine Gleichung der Form

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$$

  approximiert werden, wobei k_1, k_2 und k_3 Konstanten mit $k_2 > 0$ sind, die von d und der Konsistenz des Bodens, aber nicht vom Radius des Gegenstandes abhangen. Der harte Untergrund liege in einer Entfernung $D > d$ unter der Oberfläche.

1. Bestimmen Sie die Werte von k_1, k_2 und k_3, falls angenommen wird, dass ein Gegenstand vom Radius 1 cm einen Druck von 10 N/cm^2 benötigt, um 30 cm tief in einen schlammigen Boden zu sinken, ein Gegenstand vom Radius 2 cm einen Druck von 12 N/cm^2 benötigt, um 30 cm tief zu sinken und ein Gegenstand vom Radius 3 cm einen Druck von 15 N/cm^2 benötigt, um ebensoweit abzusinken (vorausgesetzt, der Schlamm ist tiefer als 30 cm). Benutzen Sie den Startvektor $k^{(0)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0.1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Sagen Sie aufgrund Ihrer Berechnungen aus Übung a) die minimale Grösse eines runden Gegenstandes voraus, der eine Belastung von 500 N aushält und dabei weniger als 30 cm tief sinkt.

Lösung: in den Übungen