**Dr. Jürg M. Stettbacher**
Neugutstrasse 54
CH-8600 Dübendorf

Telefon: +41 43 299 57 23
Email: dsp@stettbacher.ch

# Quiz

## Kanalcodierung: Block Codes

Sie sollten in der Lage sein, die folgenden Fragen ohne langes Nachdenken beantworten zu können.

Betrachten Sie den (N,K) Block Code $C$ mit der folgenden Generatormatrix:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Wie gross sind $N$ und $K$ des Codes $C$?

   Einheitsmatrix

   $N = 5$ $K = 2$ $\rightarrow$ Da $I = K \times K = 2 \times 2$

2. Ist der Code $C$ linear? Ist er systematisch?

   linear: $2^K = 2^2 = 4$ syst.: falls Einheitsmatrix in G vorkommt ✓

   $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ⇒ zwei addieren = Codewort

3. Bestimmen Sie alle Codeworte des Codes $C$.

   $[00] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 0 0 0 0]$ $[10] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 0 1 0 1]$

   $[01] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 1 1 1 0]$ $[11] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 1 0 1 1]$

4. Wieviele Bitfehler kann der Code $C$ erkennen und korrigieren?

   $d_{min} = 3$ $3 - 1 = \underline{\underline{2}}$ $\frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$

5. Bestimmen Sie die Parity Check Matrix $\underline{H}$ zum Code $C$.

   $G = [I \; P]$ ⇒ $[P^T \; I]$

   $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = H$

6. Geben Sie für jeden 1-Bit Fehler das korrespondierende Syndrom an.

   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S = e \cdot H^T$

## Antworten

1. Die Anzahl Eingangsbits: $K = 2$
   Die Anzahl Codebits: $N = 5$

2. Der Code $C$ ist linear. Alle Block Codes mit einer Generatormatrix sind linear.
   Der Code ist auch systematisch, da rechts in der Generatormatrix eine Einheitsmatrix steht:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \underline{I}^{2x2} & \underline{P}^{2x3} \end{bmatrix}$$

3. Die Codeworte lassen sich wie folgt berechnen:

$$\underline{x} = \underline{u} \cdot \underline{G}$$

   Dabei sind $\underline{x}$ und $\underline{u}$ Zeilenvektoren. Statt $\underline{u}$ können wir in die Gleichung eine Matrix $\underline{U}$ einsetzen, die Zeilenweise alle möglichen Eingangsmuster $\underline{u}$ enthält. Wir erhalten dann $\underline{X}$, eine Matrix, die zeilenweise alle Codeworte enthält.

$$\underline{X} = \underline{U} \cdot \underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   Die Codeworte sind also:

$$\begin{aligned} \underline{x}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{x}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{x}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \underline{x}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Der Code $C$ hat die minimale Hamming Distanz $d_{min} = 3$.
   Also kann der Code 2 Fehler erkennen und einen Fehler korrigieren.

5. Die Parity Check Matrix findet man nach diesem Muster:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{P}^T & \underline{I}^{N-K \times N-K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Als Test können wir $\underline{G} \cdot \underline{H}^T$ berechnen. Das Resultat muss eine Null-Matrix sein.

$$\underline{G} \cdot \underline{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Es gilt für das Syndrom $\underline{s}$ und ein auf der Empfängerseite empfangenes Bitmuster $\underline{y}$:

$$\underline{s} = \underline{y} \cdot \underline{H}^T = (\underline{x} + \underline{e}) \cdot \underline{H}^T = \overbrace{\underline{xH}^T}^{=0} + \underline{eH}^T = \underline{eH}^T$$

   Dabei ist $\underline{e}$ der Fehlervektor, in dem jede Fehlerstelle mit einer 1 bezeichnet ist.

Wir wählen nun die Matrix $\underline{E}$, die zeilenweise alle 1-Bit Fehlervektoren enthält. Zudem sei $\underline{S}$ die Matrix, welche ebenfalls zeilenweise die entsprechenden Syndrome enthält. Damit schreiben wir:

$$\underline{S} = \underline{E} \cdot \underline{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es folgt, dass die Zeilen der Parity Check Matrix $\underline{H}^T$ gerade die gesuchten fünf Syndrome sind:

$$\begin{aligned} \underline{s}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \underline{s}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{s}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{s}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{s}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Das Syndrom für ein Bitmuster $\underline{y}$, das einem korrekten Codewort entspricht, ist $\underline{s}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Von den acht möglichen Syndromen sind demnach zwei noch unbenutzt und können für mehr-Bit Fehler verwendet werden.