Grundlagen und diskrete Mathematik
Übung 3 Abgabe: Kalenderwoche 43

Aufgabe 1

Die Mengen $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sind durch

$$A_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie $A_3 \cap A_{111}$. A_{111}

(b) Bestimmen Sie $\bigcup_{i \in \{2,5,4\}} A_i$. A_2

(c) In welcher Beziehung müssen i, j und m stehen, damit

$$A_i \cup A_j = A_m$$

gilt. $m := \min(i,j)$

(d) In welcher Beziehung müssen i, j und m stehen, damit

$$A_i \cap A_j = A_m$$

gilt. $M := \max(i,j)$

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie für beliebige Mengen A und B die Identität

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

$x \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow x \subset A \cap B$
$\Leftrightarrow x \subset A \wedge x \subset B$
$\Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A) \wedge x \in \mathcal{P}(B)$
$\Leftrightarrow x \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Aufgabe 3

Schreiben Sie in der Programmiersprache ihrer Wahl eine Funktion/Methode `pow`, die von einer gegebenen Menge die Potenzmenge berechnet.
Mengen können Sie zum Beispiel als Listen oder Arrays modellieren.

Test cases:

```
pow([1,3]) = [[],[1],[3],[1,3]]
pow([]) = [[]]
pow(pow([])) = [[],[[]]]
```

Aufgabe 4

X = 1 Element von links + 1 Element von rechts = Paar

Geben Sie folgende Mengen explizit an.

(a) $\{1,3\} \times \{0,2\}$ $= \{(1,0),(1,2),(3,0),(3,2)\}$

(b) $A \times \{1, A\}$ wobei $A = \{2\}$. $= \{(2,1),(2,2)\}$ → unsider da $2 \propto 2$

(c) $\mathcal{P}(\varnothing \times \{\varnothing\})$ $= \{(\varnothing,\{\varnothing\})\}$

(d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$ $= \{\varnothing\ \{1\}\}$

(e) $\mathcal{P}(\{\varnothing\} \times \{a,b\})$
$= \{(\varnothing,a),(\varnothing,b)\}$

=> Die Leeremenge ist eine Teilmenge von jeder Menge a)

$= \{\{1\},\{3\},\{0\},\{2\},\{1,3\},\{0,2\},\{1,0\},\{1,2\},\{3,0\},\{3,2\},\{1,0,2\},$
$\{3,0,2\},\{1,3,0\},\{1,3,2\},\{1,3,0,2\}\ \emptyset\}$

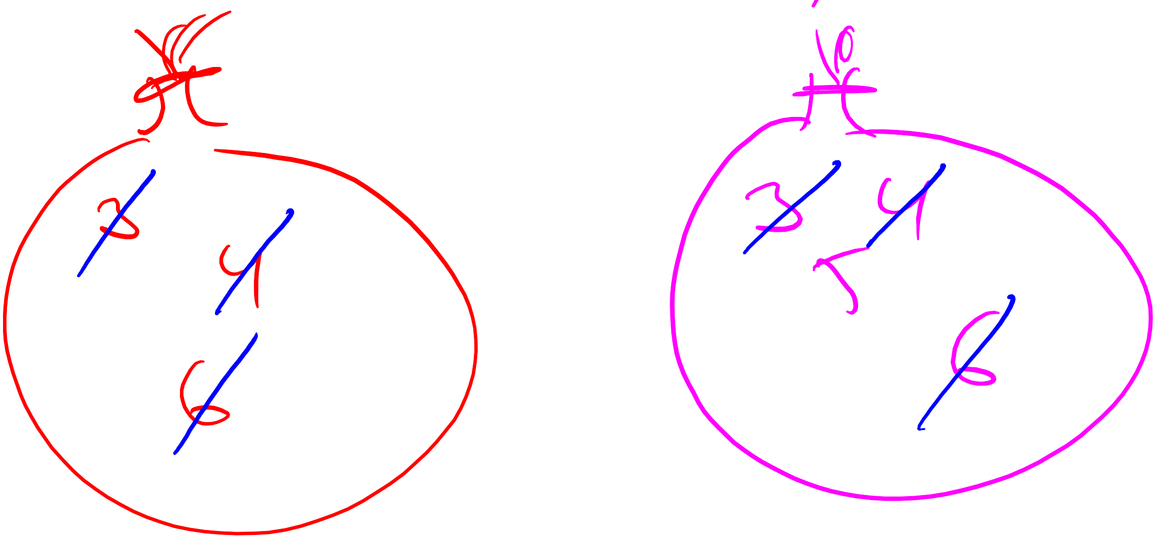
b) $= \{\{2\},\{1\},\{2,1\}\ \emptyset\}$

c) $= \{\emptyset\ \{\emptyset\}\}$

d) $= \{\emptyset\ \{1\}\}$

e) $= \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{\emptyset\{a\}\},\{\emptyset\{b\}\},\{\emptyset\{a,b\}\}\}$

$X \subset Y$



Keine gemeinsamen Teilmengen

Aufgabe 5

Geben Sie paarweise disjunkte Mengen $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ an, mit

Vereinigung

$$\bigcup_{i \text{ gerade}} A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade}\}$$

$$\bigcup_{i \text{ ungerade}} A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}$$

$\{ \forall i, (2i \vee 2i + 1) \}$

Aufgabe 6 (Bonusaufgabe)

Geben Sie eine Partition der ungeraden natürlichen Zahlen in unendlich viele unendliche Blöcke an.

$P_i = \{ i \in \mathbb{N} \mid (2i + 1) \}$