Musterlösungen zur Serie 1: Banachscher Fixpunktsatz

1. Aufgabe (i) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : [0,\infty[\to [0,\infty[\,, \quad f(x) = \frac{x+\frac{1}{2}}{x+1}$$

strikt kontraktiv ist, d.h. dass ein $c \in [0,1[$ existiert, so dass gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y| \text{ für alle } x, y \in [0,\infty[.$$

(ii) Berechnen Sie den Fixpunkt von f.
(iii) Berechnen Sie (mit dem Taschenrechner) die ersten fünf Glieder der Approximationsfolgen $x_{j+1} = f(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots$ des Banachschen Fixpunktsatzes für die Startwerte $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ und $x_0 = 100$.
(iv) Vergleichen Sie jeweils den Abstand der Approximation x_5 vom Fixpunkt mit seiner a-priori-Abschätzung $\frac{c^5}{1-c}|x_1 - x_0|$ und seiner a-posteriori-Abschätzung $\frac{c}{1-c}|x_5 - x_4|$.

Lösung (i) Es gilt für $x, y \in [0,\infty)$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{x+\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{y+\frac{1}{2}}{y+1}\right| = \left|\frac{(x+\frac{1}{2})(y+1) - (x+1)(y+\frac{1}{2})}{(x+1)(y+1)}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}\right| \leq \frac{1}{2}|x-y|. \end{aligned}$$

Also ist f strikt kontraktiv mit der Kontraktionskonstanten $c = \frac{1}{2}$.

(ii) Die Lösung von

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{x+1} = x$$

ist $x = 1/\sqrt{2}$.

(iii) Mit dem Taschenrechnerechner erhalten wir (auf fünf Stellen gerundet) die folgenden Approximationen für den Fixpunkt $1/\sqrt{2} = 0.70711$:

$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 0.66667$	$x_3 = 0.70000$	$x_4 = 0.70588$	$x_5 = 0.70690$
$x_0 = 1$	$x_1 = 0.75000$	$x_2 = 0.71429$	$x_3 = 0.70833$	$x_4 = 0.70732$	$x_5 = 0.70714$
$x_0 = 100$	$x_1 = 0.99505$	$x_2 = 0.74938$	$x_3 = 0.71418$	$x_4 = 0.70832$	$x_5 = 0.70731$

(iv) Wir erhalten mit dem Rechner (auf fünf Stellen gerundet):

$x_0 = 0:$	$\lvert x_5 - 1/\sqrt{2}\rvert = 0.00021023$	$\frac{c}{1-c}\lvert x_5 - x_4\rvert = 0.0010142$	$\frac{c^5}{1-c}\lvert x_1 - x_0\rvert = 0.031250$
$x_0 = 1:$	$\lvert x_5 - 1/\sqrt{2}\rvert = 0.000036076$	$\frac{c}{1-c}\lvert x_5 - x_4\rvert = 0.00017422$	$\frac{c^5}{1-c}\lvert x_1 - x_0\rvert = 0.015625$
$x_0 = 100:$	$\lvert x_5 - 1/\sqrt{2}\rvert = 0.00020734$	$\frac{c}{1-c}\lvert x_5 - x_4\rvert = 0.0010020$	$\frac{c^5}{1-c}\lvert x_1 - x_0\rvert = 6.1878$

2. Aufgabe Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to X$ strikt kontraktiv bzgl. der jeweils angegebenen Metrik ρ sind:

(i) $n = 1,\ X = [1, \infty[\,,\ \rho(x, y) = |x - y|,\ f(x) = x + \frac{1}{x}$,

(ii) $n = 2,\ X = \mathbb{R}^2,\ \rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},\ f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\sin x_1, \cos x_2)$,

(iii) $n = 2,\ X = \mathbb{R}^2,\ \rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},\ f(x, y) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_2)$,

(iv) $n = 2,\ X = \mathbb{R}^2,\ \rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}\,,\ f(x, y) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_2)$.

Lösung (i) Wenn f strikt kontraktiv wäre, so müßte, nach dem Banachschen Fixpunktsatz, die Fixpunktgleichung

$$x + \frac{1}{x} = x$$

eine Lösung in $[1, \infty[$ besitzen. Das ist aber offensichtlich nicht der Fall, also ist f nicht strikt kontraktiv.

(ii) Mit Hilfe des Mittelwertsatzes erhalten wir für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Abschätzungen (dabei sind ξ und η gewisse Zahlen zwischen x und y)

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &= |(x - y)\cos\xi| \leq |x - y|, \\ |\cos x - \cos y| &= |(x - y)\sin\eta| \leq |x - y|. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \rho(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)) &= \left(\left|\frac{1}{2}\sin x_1 - \frac{1}{2}\sin y_1\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\cos x_2 - \frac{1}{2}\cos y_2\right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass f strikt kontraktiv mit der Kontraktionskonstanten $c = 1/2$ ist.

(iii) und (iv) Es gilt

$$f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2) = f(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \frac{1}{2}(x_1 - y_1 + x_2 - y_2, x_2 - y_2).$$

Im Fall (iii) der Euklidischen Metrik folgt also

$$\begin{aligned} \rho(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)) &= \frac{1}{2}\left(|x_1 - y_1 + x_2 - y_2|^2 + |x_2 - y_2|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(|x_1 - y_1|^2 + 2|x_1 - y_1||x_2 - y_2| + 2|x_2 - y_2|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(2|x_1 - y_1|^2 + 3|x_2 - y_2|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{2}\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)), \end{aligned}$$

d.h. f ist strikt kontractiv.

Im Fall (iv) der Maximum-Metrik ist f nicht strikt kontractiv, weil z.B.

$$\rho(f(1,1), f(0,0)) = \max\{1,0\} = 1 = \rho((1,1),(0,0)).$$

***Aufgabe** Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer sowie offen und abgeschlossen bzgl. der Standard-Metrik in $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass dann $M = \mathbb{R}$ gilt.

Lösung Wir nehmen das Gegenteil an, d.h. dass ein $x \in \mathbb{R} \setminus M$ existiert. Wegen $M \neq \emptyset$ existiert ferner ein $y \in M$. Es sei z.B. $x > y$. Dann ist x eine obere Schranke der Menge

$$N := \{z \in \mathbb{R} : \ [y,z] \subseteq M\}.$$

Folglich existiert

$$s := \sup N$$

als reelle Zahl. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $s - 1/n$ nicht obere Schranke von N, folglich exisiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in N$ mit

$$s - \frac{1}{n} < z_n \leq s,$$

also mit $z_n \to s$. Wegen $N \subseteq M$ gilt $z_n \in M$, und weil M abgeschlossen ist, folgt $s \in M$. Weil M offen ist, existiert ein $r > 0$ mit

$$[s-r, s+r] \subseteq M.$$

Wegen $z_n \in N$ gilt außerdem

$$[y, z_n] \subseteq M.$$

Wegen $z_n \to s$ folgt daraus

$$[y, s+r] \subseteq M,$$

d.h. $s + r \in N$. Das widerspricht aber der Eigenschaft, dass s obere Schranke von N ist.