Numerik 2: Serie 8

Valmir Selmani und Luca Raffa, IT16tb_ZH

9. November 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1a **1**
1.1 Euler . . . 2
1.2 Runge-Kutta . . . 2

2 Aufgabe 1b **3**
2.1 Euler . . . 4
2.2 Runge-Kutta . . . 4

1 Aufgabe 1a

$$y^{(4)} + 1.1y''' - 0.1y'' - 0.3y = sin(x) + 5$$
$$y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \qquad y'(0) = 2 \qquad x_0 = 0 \qquad h = 0.1$$

1. Auflösen nach der höchsten Ableitung

$$y^{(4)} = sin(x) + 5 - 1.1y''' + 0.1y'' + 0.3y$$

2. Hilfsfunktionen einführen

$$z_1(x) = y(x) \qquad z_2(x) = y'(x) \qquad z_3(x) = y''(x) \qquad z_4(x) = y'''(x)$$

3. Hilfsfunktionen ableiten und in grösste Hilfsfunktion einsetzen

$$z_1'(x) = y' = z_2$$
$$z_2'(x) = y'' = z_3$$
$$z_3'(x) = y''' = z_4$$
$$z_4'(x) = y^{(4)}$$
$$\Rightarrow z_4' = sin(x) + 5 - 1.1y''' + 0.1y'' + 0.3y$$

4. in Vektorform schreiben

$$z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ sin(x) + 5 - 1.1z_4 + 0.1z_3 + 0.3z_1 \end{pmatrix} = f(x, z)$$

$$z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Euler

$$x_i + 1 = x_i + h \qquad z_{i+1} = z_i + h \cdot f(x_i, z_i)$$

$$z_1 = z_0 + 0.1 \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ sin(x_0) + 5 - 1.1z_4 + 0.1z_3 + 0.3z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \cancel{sin(0)} + 5 - \cancel{1.1 \cdot 0} + \cancel{0.4 \cdot 0} + \cancel{0.3 \cdot 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0.2 \\ 2 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}}}$$

1.2 Runge-Kutta

$$k_1 = f(x_0, z_0) = f(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \cancel{sin(0)} + 5 - \cancel{1.1 \cdot 0} + \cancel{0.4 \cdot 0} + \cancel{0.3 \cdot 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, z_0 + \frac{h}{2} \cdot k_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0.25 \\ 4.8050 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}, z_0 + \frac{h}{2} \cdot k_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.0125 \\ 0.2403 \\ 4.817 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = f(x_0 + h, z_0 + h \cdot k_3) = \begin{pmatrix} 2.0125 \\ 0.0240 \\ 0.4817 \\ 4.6324 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0.2002 \\ 2.0008 \\ 0.0244 \\ 0.4813 \end{pmatrix}}}$$

2 Aufgabe 1b

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + y(x^2 - n^2) = 0$$
$$y(1) = y'(1) = 2 \qquad x_0 = 1 \qquad h = 0.1 \qquad n^2 = 1$$

1. Auflösen nach der höchsten Ableitung

$$y'' = -\frac{y'}{x} - y + \frac{n^2 y}{x^2}$$

2. Hilfsfunktionen einführen

$$z_1(x) = y(x) \qquad z_2(x) = y'(x)$$

3. Hilfsfunktionen ableiten und in grösste Hilfsfunktion einsetzen

$$z_1'(x) = y' = z_2$$
$$z_2'(x) = y''$$
$$z_2'(x) = -\frac{y'}{x} - y + \frac{n^2 y}{x^2} = -\frac{z_2}{x} - z_1 + \frac{n^2 z_1}{x^2}$$

4. in Vektorform schreiben

$$z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{z_2}{x} - z_1 + \frac{n^2 z_1}{x^2} \end{pmatrix} = f(x, z)$$
$$z(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.1 Euler

$$x_i + 1 = x_i + h \qquad z_{i+1} = z_i + h \cdot f(x_i, z_i)$$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot f(x_i, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.1(\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-2}{1} - 2 + \frac{1 \cdot 2}{1} \end{pmatrix}) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2.2 \\ 1.8 \end{pmatrix}}}$$

2.2 Runge-Kutta

$$k_1 = f(x_0, z_0) = f(1, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-2}{1} - 2 + \frac{1 \cdot 2}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, z_0 + \frac{h}{2} \cdot k_1) = \begin{pmatrix} 1.9 \\ -2.0048 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}, z_0 + \frac{h}{2} \cdot k_2) = \begin{pmatrix} 1.8998 \\ -2.0041 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = f(x_0 + \frac{h}{2}, z_0 + \frac{h}{2} \cdot k_3) = \begin{pmatrix} 1.7800 \\ -2.0160 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2.19 \\ 1.7994 \end{pmatrix}}}$$