Modulprüfung Lineare Algebra

25.06.2015

Name:	
Vorname:	
Klasse:	
Punkte:	
Note:	

Hinweise

1. Dauer: 90 Minuten
2. Hilfsmittel:
   - Selber verfasste Notizen im Umfang von 5 Blättern im Format A4.
   - Nicht-grafik- und nicht-algebrafähiger Taschenrechner (nur für Grundoperationen und Auswertungen elementarer Funktionen)
3. Schreiben Sie auf die Prüfung nur die fertige Antwort **inklusive Lösungsweg** zur entsprechenden Aufgabe. Benutzen Sie für Notizen separate (nicht abzugebende) Blätter.
4. Achten Sie darauf, dass Ihre Lösungen gut strukturiert und *leserlich* aufgeschrieben sind.

1 Multiple-Choice

Aufgabe (5 Punkte)**.**
Kommentieren Sie folgende Aussagen mit “wahr” oder “falsch”.
Bewertung: Jede richtig kommentierte Aussage gibt einen Punkt und für jede falsch kommentierte Aussage wird ein Punkt abgezogen. Ist die Summe der erreichten Punkte positiv, so ergibt sich daraus die Punktzahl für die Aufgabe, sonst wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet.

Es gibt keine Gruppe mit 7 Elementen. ☐wahr ☐falsch

Jeder Monoidhomomorphismus zwischen Gruppen
ist ein Gruppenhomomorphismus. ☐wahr ☐falsch

Sind die Punkte $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, dann gibt es
genau eine Ebene, die u, v und w enthält. ☐wahr ☐falsch

Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ ist ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$,
dann gilt $U = \mathbb{R}^2$. ☐wahr ☐falsch

Die Vektoren $(1, 1)$ und (π, π) sind frei über $\mathbb{R}$. ☐wahr ☐falsch

2 Grundstrukturen

Aufgabe (10 Punkte)**.**

(a) (4 Punkte) Lösen Sie die Gleichung

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \circ x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

in der Gruppe $(S_4, \circ)$ nach x auf.

(b) (2 Punkt) Schreiben Sie

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

in der Zyklenschreibweise.

(c) (4 Punkte) Gegeben ist die Menge $M = \{a, b\}$. Definieren Sie die Verknüpfung $\star$, durch ausfüllen der Verknüpfungstabelle, so dass die Struktur $(M, \star)$ ein Monoid aber keine Gruppe ist.

⋆	a	b
a		
b		

Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen und Rechnungen.

Lösung.

Lösung.

3 Der euklidische Raum

Aufgabe (12 Punkte)**.** Gegeben sind zwei Ebenen E_1 und E_2 im $\mathbb{R}^3$ durch folgende Koordinatengleichungen.

$$E_1 : 2x - y + z = 0$$
$$E_2 : x + y - z = 1$$

(a) (10 Punkte) Bestimmen Sie die Parametergleichung der Schnittgerade $g = E_1 \cap E_2$ der Ebenen E_1 und E_2.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene E_2 mit der z-Achse.

Lösung.

Lösung.

4 Gauss-Verfahren

Aufgabe (20 Punkte)**.** Gegeben sind die Gleichungssysteme A in $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 5x - y + z &= 12 \\ y - 5z &= 28 \\ -x - y - z &= -2 \end{aligned} \tag{A}$$

und B in $\mathbb{Z}/11$

$$\begin{aligned} \bar{2}x + \bar{5}y - z &= \bar{5} \\ x - y - z &= \bar{0} \\ \bar{2}x + \bar{10}y + \bar{4}z &= \bar{7} \end{aligned} \tag{B}$$

(a) (2 Punkte) Schreiben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix beider Gleichungssysteme auf.

(b) (18 Punkte) Lösen Sie beide Gleichungssysteme mit dem Gauss-Verfahren.

Lösung.

Lösung.

5 Vektorräume, Basen und Dimension

Aufgabe (18 Punkte)**.** Wir arbeiten im $\mathbb{Z}/11$-Vektorraum $((\mathbb{Z}/11)^2, +, \cdot)$. Die Gerade g gehe durch die Punkte $(\bar{2}, \bar{1})$ und $(\bar{1}, \bar{7})$.

(a) (6 Punkte) Bestimmen Sie rechnerisch ein $y \in \mathbb{Z}/11$ so, dass der Punkt $(\bar{7}, y)$ auf g liegt.

(b) (6 Punkte) Stellen Sie den Vektor $(\bar{9}, \bar{1})$ als Linearkombination der Vektoren $(\bar{2}, \bar{3})$ und $(\bar{3}, \bar{2})$ dar.

(c) (6 Punkte) Bilden die Vektoren $(\bar{2}, \bar{3})$ und $(\bar{3}, \bar{2})$ eine Basis von $((\mathbb{Z}/11)^2, +, \cdot)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung.

Lösung.

6 Lineare Abbildungen

Aufgabe (14 Punkte)**.** Gegeben sei eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} f(1,2,0) &= (2,4) \\ f(1,1,2) &= (6,2) \\ f(2,2,2) &= (8,4) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie rechnerisch $Ker(f)$. Dokumentieren Sie Ihre Rechnungen und Überlegungen.

Lösung.