1 Algebraische Grundstrukturen

Eine algebraische Struktur ist (in der einfachsten Form) eine Menge zusammen mit einer oder mehreren Verknüpfungen (Operationen) auf dieser Menge. Ein Beispiel einer algebraischen Struktur ist die Menge $\mathbb{Z}$ zusammen mit der Operation $+$. Die Algebra als solche untersucht nun im Wesentlichen, welche Eigenschaften für algebraische Strukturen abgeleitet werden können, wenn deren Verknüpfungen gewissen a priori Bedingungen genügen. Man kann sich beispielsweise fragen, welche "strukturellen Eigenschaften für $(\mathbb{N}, +)$ allein schon aus der Tatsache, dass die Addition assoziativ ist folgen. Durch diesen abstrakten Zugang lassen sich oft übergeordnete Symmetrien zwischen verschiedensten mathematischen Objekten entdecken, welche dann für unterschiedliche Probleme der klassischen Mathematik eine uniforme Lösung anbieten.

Beispiel 1. Die wohl bekanntesten Vertreter von algebraischen Strukturen sind die verschiedenen Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit ihren jeweiligen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$. Die Inklusionskette $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist durch folgende Abschlusskriterien gegeben:

$$
\begin{gathered}
\mathbb{N} \\
\downarrow \\
\text{Gleichungen von der Form } x + a = b \text{ auflösen} \\
\downarrow \\
\mathbb{Z} \\
\downarrow \\
\text{Gleichungen von der Form } ax = b \text{ auflösen} \\
\downarrow \\
\mathbb{Q} \\
\downarrow \\
\text{Grenzwerte von Folgen (analytische Erweiterung)} \\
\downarrow \\
\mathbb{R} \\
\downarrow \\
\text{Gleichungen von der Form } a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ auflösen} \\
\downarrow \\
\mathbb{C}
\end{gathered}
$$

Definition 1. Sind $A_1, .., A_n, B$ Mengen, dann nennt man eine Abbildung

$$\star : A_1 \times ... \times A_n \to B$$

eine n-stellige *Verknüpfung*. Eine Verknüpfung $\star : A^n \to A$ nennt man eine n-stellige Verknüpfung *auf* A. Zweistellige Verknüpfungen werden auch *binäre* Verknüpfungen genannt.

Bemerkung. Eine Menge zusammen mit einer oder mehreren Verknüpfungen (auf dieser Menge) nennt man eine Struktur.

Beispiel 2.

1. Die Funktion $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist eine binäre Verknüpfung auf der Menge der natürlichen Zahlen.

2. Die Funktion $\frown: \{a, b\}^* \times \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ mit $w \frown v = wv$ ist eine binäre Verknüpfung auf der Menge aller Wörter über dem Alphabet $\{a, b\}$ (endliche a, b-Sequenzen).

3. Es sei A die Menge der Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Die Funktion $\circ : A \times A \to A$ mit $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ist eine binäre Verknüpfung auf A. Vgl. Code "Beispiel 2" auf OLAT.

1.1 Halbgruppen, Gruppen und Monoide

Definition 2. Es sei A eine Menge und $\star$ eine binäre Verknüpfung auf A. Wir definieren:

1. $\star$ ist *kommutativ*, falls $\forall a, b \in A\,(a \star b = b \star a)$ gilt.

2. $\star$ ist *assoziativ*, falls $\forall a, b, c \in A\,(a \star (b \star c) = (a \star b) \star c)$ gilt.

3. $e_l \in A$ ist *linksneutral* bezüglich $\star$, falls $\forall a \in A\,(e_l \star a = a)$ gilt.

4. $e_r \in A$ ist *rechtsneutral* bezüglich $\star$, falls $\forall a \in A\,(a \star e_r = a)$ gilt.

5. $e \in A$ ist *neutral* bezüglich $\star$, falls $\forall a \in A\,(a \star e = e \star a = a)$ gilt.

Beispiel 3.

1. Die Addition $+$ ist eine assoziative und kommutative Verknüpfung auf der Menge $\mathbb{N}$.

2. Die Verknüpfung $\frown$ von Beispiel 2 ist assoziativ aber nicht kommutativ:

$$\begin{aligned} abb \frown ba &= abbba \\ ba \frown abb &= baabb. \end{aligned}$$

3. Die Zahl $0 \in \mathbb{N}$ ist neutral bezüglich der Addition (auf $\mathbb{N}$), weil für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung $n + 0 = 0 + n = n$ gilt.

4. Die Zahl 1 ist neutral bezüglich der Multiplikation (auf $\mathbb{N} \setminus \{0\}$), weil für alle natürlichen Zahlen die Gleichung $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$ gilt.

5. Das leere Wort[1] ε ist neutral bezüglich der Verknüpfung $\frown$.

6. Es sei $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Die Verknüpfung $A \times A \to A$ mit $x/y = \frac{x}{y}$ ist nicht assoziativ:

$$\begin{aligned} 1/(2/3) &= 3/2 \\ (1/2)/3 &= 1/6 \end{aligned}$$

   und nicht kommutativ

$$1/2 \neq 2/1.$$

   Die 1 ist rechtsneutral bezüglich /:

$$x/1 = \frac{x}{1} = x$$

   aber nicht linksneutral. Für die Verknüpfung / existiert kein linksneutrales Element.

Übung 1. Es sei A eine Menge und $\circ$ eine binäre Verknüpfung auf A. Zeigen Sie: Wenn es ein linksneutrales Element e_l und ein rechtsneutrales Element e_r gibt, dann gilt $e_l = e_r$. Ausserdem gibt es dann keine anderen links- bzw. rechtsneutralen Elemente.

Lösung. Sind e_l und e_r wie in der Aufgabenstellung, dann gilt:

$$e_l \stackrel{1}{=} e_l \circ e_r \stackrel{2}{=} e_r.$$

Wobei 1 gilt, weil e_r rechtsneutral ist und 2 gilt, weil e_l linksneutral ist. Somit ist alles gezeigt.

[1] Das Wort mit Länge 0.

Definition 3. Eine Struktur $(G, \cdot)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\cdot : G \times G \to G$ heisst:

1. *Halbgruppe*, falls $\cdot$ assoziativ ist.
2. *Monoid*, falls $(G, \cdot)$ eine Halbgruppe ist und ein neutrales Element $e \in G$ existiert.
3. *Gruppe*, falls $(G, \cdot)$ ein Monoid (mit neutralem Element e) ist und für alle $a \in G$ ein $b \in G$ existiert, so dass $a \cdot b = b \cdot a = e$ gilt. → inverses Element
4. *Kommutative Gruppe*, falls $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $\cdot$ kommutativ ist.

Bemerkung. In einer Gruppe $(G, \cdot)$ besitzt jedes Element $a \in G$ ein eindeutig bestimmtes inverses Element (dies kann auch a selbst sein). Wir bezeichnen dieses mit a^{-1}. Offensichtlich gilt für jedes $a \in G$ auch $(a^{-1})^{-1} = a$.

Übung 2. Zeigen Sie, dass in jeder Gruppe G für jedes Element $a \in G$ die Gleichung $(a^{-1})^{-1} = a$ gilt.

Lösung. In jeder Gruppe $(G, \cdot)$ mit neutralem Element e gilt für jedes Element $a \in G$:

$$a = a \cdot e = a \cdot (a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1}) = (a \cdot a^{-1}) \cdot (a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}.$$

Beispiel 4. Die Strukturen $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{Z}, \cdot)$ und $(\mathbb{N}, \cdot)$ sind Halbgruppen aber keine Gruppen. Das Paar $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine kommutative Gruppe.

Übung 3.

(a) Wir betrachten die Menge W aller (endlichen) Wörter mit Buchstaben aus $\{a, b, c\}$ zusammen mit der Verknüpfung $\frown : W \times W \to W$. Bestimmen Sie, welche der eben eingeführten Begriffe die Struktur $(W, \frown)$ erfüllt.

(b) Es sei $(H, \cdot)$ eine Halbgruppe, so dass die Kürzungsregeln gelten, d.h. für alle $a, b, x \in H$ die Implikationen

$$a \cdot x = b \cdot x \Rightarrow a = b \qquad \text{und} \qquad x \cdot a = x \cdot b \Rightarrow a = b$$

gelten[2]. Zeigen Sie: Wenn H ein endlicher Monoid ist, dann ist $(H, \cdot)$ bereits eine Gruppe.

[2] Eine solche Halbgruppe heisst kürzbar

Lösung.

(a) Die Struktur $(W, \frown)$ ist ein Monoid (und somit eine Halbgruppe) aber keine Gruppe. $(W, \frown)$ ist eine Halbgruppe, weil die Verknüpfung $\frown$ offensichtlich assoziativ ist. Weil weiter das leere Wort ε sich bezüglich $\frown$ neutral verhält, ist die Struktur ein Monoid. $(W, \frown)$ ist keine Gruppe, weil (ausser dem leeren Wort) kein Wort ein Inverses bezüglich $\frown$ besitzt (zusammengesetzte Wörter haben immer mindestens die Länge der Wörter aus denen sie zusammengesetzt werden).

(b) Es sei $(H, \cdot)$ wie in der Aufgabenstellung und sei e das neutrale Element von $(H, \cdot)$. Wir müssen zeigen, dass jedes Element $a \in H$ ein Inverses besitzt. Sei also $a \in H$ beliebig. Wir betrachten die Folge

$$\begin{aligned} a_0 &= e \\ a_{n+1} &= a \cdot a_n. \end{aligned}$$

Weil die Menge H nach Voraussetzung endlich ist, muss auch deren Teilmenge

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

endlich sein. Es gibt also natürliche Zahlen $n < k$ mit $a_n = a_k$. Es folgt

$$\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{k-n \text{ mal}}.$$

Wegen der Kürzbarkeit in $(H, \cdot)$ gilt somit

$$e = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{k-n \text{ mal}}.$$

Weil $k - n \geq 1$ gilt, können wir dies auch als

$$e = a \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{k-n-1 \text{ mal}} = a \cdot a_{k-n-1}$$

schreiben. Also ist a_{k-n-1} rechtsinvers zu a. Wegen

$$e = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{k-n-1 \text{ mal}} \cdot a = a_{k-n-1} \cdot a$$

ist a_{k-n-1} auch linksinvers und somit invers zu a.

Die symmetrische Gruppe

Definition 4. Für jede natürliche Zahl $n > 0$ ist die Menge S_n durch

$$S_n = \{\sigma \mid \sigma : \{1, .., n\} \to \{1, .., n\} \text{ bijektiv}\}$$

gegeben. Die Komposition $\circ : S_n \times S_n \to S_n$ von Funktionen ist durch

$$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x))$$

gegeben. Die Struktur $(S_n, \circ)$ nennt man die n-te *symmetrische Gruppe*. Die Elemente von S_n nennt man *Permutationen*.

Wir betrachten die bijektiven Abbildungen σ und τ aus S_4 mit

$$\sigma(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x < 4 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \tau(x) = \begin{cases} x-1 & \text{falls } x \text{ gerade} \\ x+1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

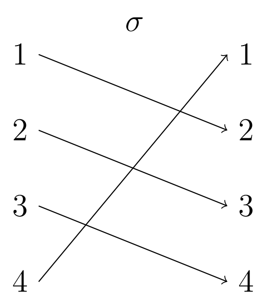
Permutationen werden oft nach folgendem Schema notiert:

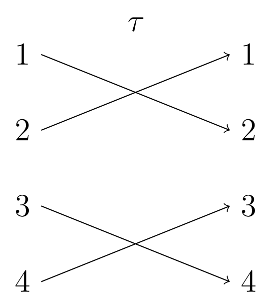
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \dots & \delta(n) \end{bmatrix}$$

Die Permutationen σ und τ sehen in dieser Notation wie folgt aus:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Angelehnt an diese Notation können wir Permutationen als (bipartite) gerichtete Graphen veranschaulichen (Wir nennen diese Darstellung *bipartite Darstellung*):

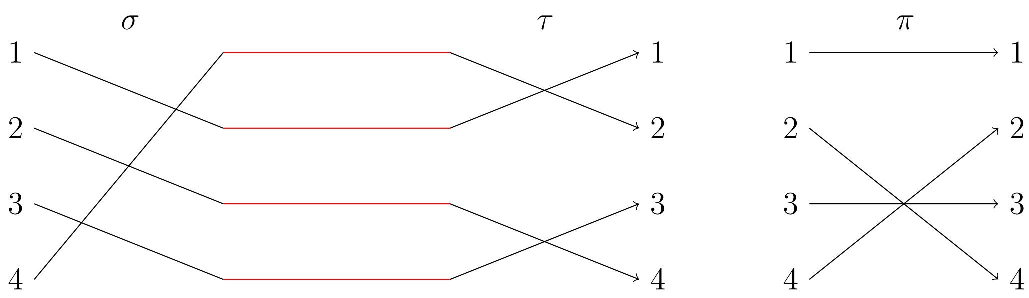




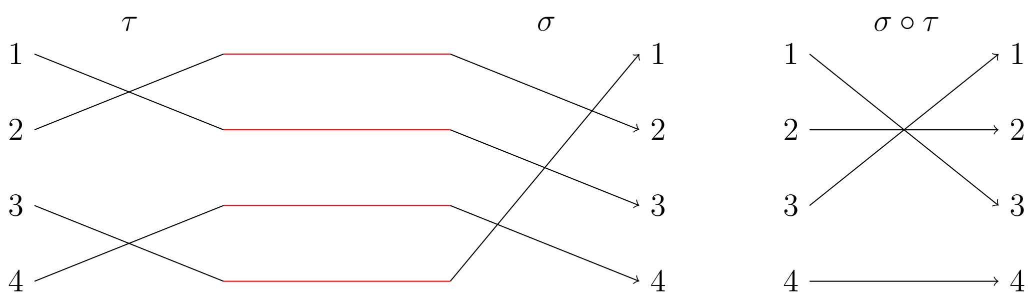
Was für eine Permutation erhalten wir, wenn wir σ und τ verknüpfen? Wie sieht die Funktion $\pi = \tau \circ \sigma$ aus? Zuerst betrachten wir die Funktionswerte:

$$\pi(1) = \tau(\sigma(1)) = \tau(2) = 1 \qquad \pi(2) = \tau(\sigma(2)) = \tau(3) = 4$$
$$\pi(3) = \tau(\sigma(3)) = \tau(4) = 3 \qquad \pi(4) = \tau(\sigma(4)) = \tau(1) = 2$$

Die bipartite Darstellung von π erhalten wir durch “Hintereinanderschalten” der bipartiten gerichteten Graphen von τ und σ:



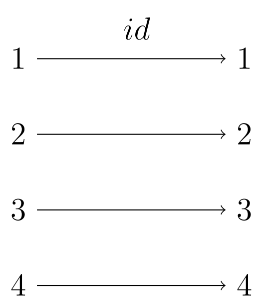
Wie sieht das Resultat aus, wenn wir die Funktionen σ und τ umgekehrt $(\sigma \circ \tau)$ verknüpfen? Ist die Verknüpfung $\circ$ eventuell kommutativ? Anhand des (bipartiten) gerichteten Graphen von $\sigma \circ \tau$



erkennen wir sofort, dass dies nicht der Fall ist (es gilt beispielsweise $\sigma \circ \tau(1) = 3$ aber $\tau \circ \sigma(1) = 1$). Wir wissen nun, *wenn* $(S_4, \circ)$ eine Gruppe ist, diese nicht kommutativ sein kann. Aus dem ersten Semester wissen wir, dass die Verknüpfung $\circ$ assoziativ ist. Um zu sehen, dass $(S_4, \circ)$ ein Monoid ist, genügt es somit ein neutrales Element anzugeben.

Übung 4. Geben Sie das neutrale Element von S_4 formal als Funktion und in der bipartiten Darstellung an.

Lösung. Das neutrale Element ist die identische Abbildung $id(x) = x$. Der bipartite gerichtete Graph ist:



Um zu überprüfen, dass die Struktur $(S_4, \circ)$ tatsächlich eine Gruppe ist, müssen wir noch feststellen, dass zu jedem Element $\gamma \in S_4$ ein $\gamma^{-1} \in S_4$ mit $\gamma \circ \gamma^{-1} = \gamma^{-1} \circ \gamma = id$ existiert.

Übung 5.

(a) Bestimmen Sie $\gamma = \sigma^{-1}$. Geben γ formal als Funktion sowie in der bipartiten Darstellung an.

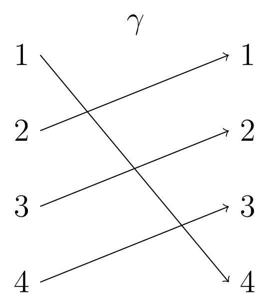
(b) Erklären Sie, wie man anhand der bipartiten Darstellung eines Elementes von S_n sofort die bipartite Darstellung des Inversen findet.

Lösung.

(a) Formal können wir γ etwa wie folgt beschreiben:

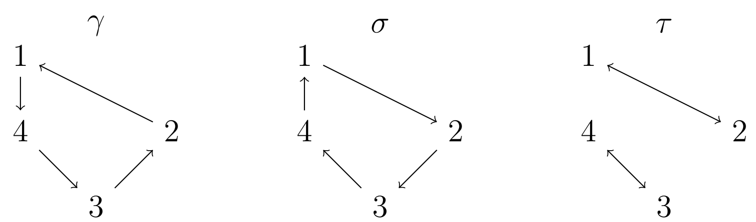
$$\gamma(x) = \begin{cases} x-1 & \text{falls } x > 1 \\ 4 & \text{sonst} \end{cases}$$

In der bipartiten Darstellung hat γ folgende Gestalt:



(b) Durch umdrehen der Pfeile (und eventuell vertauschen der Spalten).

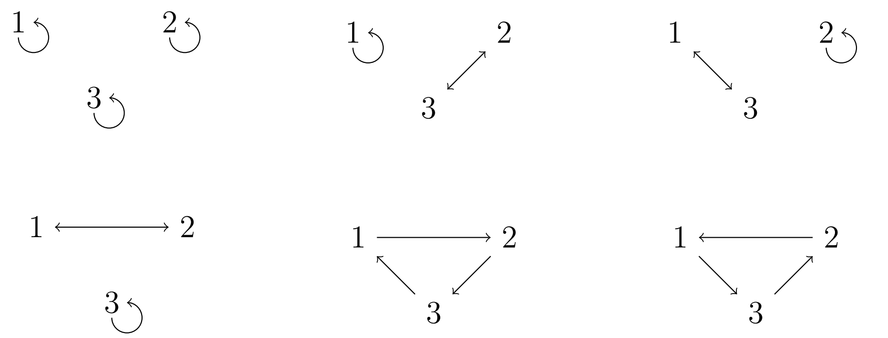
In der bipartiten Darstellung eines Elementes von S_n haben wir jede Zahl $1, \ldots, n$ doppelt dargestellt (je einmal auf der linken und rechten Seite). Wenn wir jede Zahl nur einmal darstellen, dann erhalten wir die *Zyklendarstellung* der entsprechenden Permutation. Die Zyklendarstellungen von γ, σ und τ sehen wie folgt aus:



Bemerkung. Ausgehend von der Zyklendarstellung einer Permutation, erhält man die Zyklendarstellung der inversen Permutation durch umdrehen der Pfeile.

Übung 6. Geben Sie alle Elemente von S_3 in der Zyklendarstellung an.

Lösung.



Angelehnt an die Zyklendarstellung von Permutationen, definiert man die *Zyklenschreibweise.* Dazu gruppiert man alle Elemente, die zu einem Zyklus gehören in der entsprechenden Reihenfolge zwischen ein Paar von Klammern. Die Permutationen γ, σ und τ werden wie folgt in der Zyklenschreibweise notiert:

$$\gamma = (4,3,2,1) \qquad \sigma = (1,2,3,4) \qquad \tau = (1,2)(3,4).$$

Die Zyklenschreibweise ist nicht eindeutig: Die Reihenfolge der Zyklen ist nicht festgelegt und die Elemente innerhalb von Zyklen können "zyklisch" vertauscht werden. Es gelten zum Beispiel folgende Identitäten:

$$(1,2,3,4) = (3,4,1,2) = (4,1,2,3) = (2,3,4,1)$$
$$(1,2)(3,4) = (3,4)(1,2) = (2,1)(3,4) = \dots$$

Es darf innerhalb von Zyklen aber nicht beliebig vertauscht werden:

$$(1,2,3,4) \neq (1,3,2,4) \qquad (1,2,3)(4) \neq (1,3,2)(4).$$

Übung 7. Vervollständigen Sie die Verknüpfungstabelle von S_3 (Zyklenschreibweise).

Lösung.

	(1)(2)(3)	(1)(23)	(2)(13)	(3)(12)	(123)	(321)
(1)(2)(3)	(1)(2)(3)	(1)(23)	(2)(13)	(3)(12)	(123)	(321)
(1)(23)	(1)(23)	(1)(2)(3)	(123)	(321)	(2)(13)	(3)(12)
(2)(13)	(2)(13)	(321)	(1)(2)(3)	(123)	(3)(12)	(1)(23)
(3)(12)	(3)(12)	(123)	(321)	(1)(2)(3)	(1)(23)	(2)(13)
(123)	(123)	(3)(12)	(1)(23)	(2)(13)	(321)	(1)(2)(3)
(321)	(321)	(2)(13)	(3)(12)	(1)(2)(3)	(1)(2)(3)	(123)

1.1.1 Unterstrukturen

Definition 5. Es sei $(A, \cdot)$ eine Struktur und U sei eine Teilmenge von A, dann heisst U abgeschlossen unter $\cdot$, falls $\forall a, b \in U\ (a \cdot b \in U)$ gilt.

Beispiel 5. Wir betrachten die Struktur $(\mathbb{N}, +)$ mit der üblichen Addition. Die Menge $G = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ aller geraden natürlichen Zahlen ist eine unter der Verknüpfung $+$ abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{N}$. Die Menge $U = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist hingegen nicht abgeschlossen unter $+$, da zum Beispiel $3, 5 \in U$ sind, aber $3 + 5 = 8 \notin U$ gilt.

Definition 6. Eine unter $\cdot$ abgeschlossene Teilmenge U von G nennen wir:

1. *Unterhalbgruppe* von $(G, \cdot)$, wenn $(G, \cdot)$ eine Halbgruppe ist.
2. *Untermonoid* von $(G, \cdot)$, wenn $(G, \cdot)$ ein Monoid mit neutralem Element e ist und $e \in U$ gilt.
3. *Untergruppe* von $(G, \cdot)$, wenn $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist und U ein Untermonoid von $(G, \cdot)$ ist, so dass für jedes $a \in U$ auch $a^{-1} \in U$ gilt.

Übung 8. Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$. Geben sie einen Untermonoid von $(\mathbb{Z}, +)$ an, der keine Untergruppe ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung. Die Menge $G = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ aller geraden Zahlen ist eine unter der Addition abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{Z}$. Weil zusätzlich $0 \in G$ gilt, ist G ein Untermonoid von $(\mathbb{Z}, +)$. G ist keine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$, weil (z.B.) 2 ein Element von G ist, aber das bezüglich der Addition zu 2 Inverse (-2) kein Element von G ist.

Lemma 1. *Es sei $(G, \cdot)$ eine Struktur.*

1. *Ist $(G, \cdot)$ eine Halbgruppe und sind $(U_i)_{i\in I}$ Unterhalbgruppen, dann ist $\bigcap_{i\in I} U_i$ eine Unterhalbgruppe.*

2. *Ist $(G, \cdot)$ ein Monoid und sind $(U_i)_{i\in I}$ Untermonoide, dann ist $\bigcap_{i\in I} U_i$ ein Untermonoid.*

3. *Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe und sind $(U_i)_{i\in I}$ Untergruppen, dann ist $\bigcap_{i\in I} U_i$ eine Untergruppe.*

Beweis. Wir machen den Fall für Untergruppen (die anderen Fälle leiten sich sofort aus diesem Fall ab). Es sei also $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $(U_i)_{i\in I}$ seien Untergruppen. Wir müssen zuerst zeigen, dass $U := \bigcap_{i\in I} U_i$ unter $\cdot$ abgeschlossen ist. Seien also $a, b \in U$, dann gilt für alle $i \in I$ auch $a, b \in U_i$ und somit (da alle U_i Untergruppen sind) $\forall i \in I\, (a \cdot b \in U_i)$ und deshalb $a \cdot b \in U$. Es sei nun e das neutrale Element von $(G, \cdot)$. Da alle U_i Untergruppen und somit Untermonoide von $(G, \cdot)$ sind, gilt also $\forall i \in I\, (e \in U_i)$ und deshalb auch $e \in U$. Nun sei $a \in U$ beliebig und somit $\forall i \in I\, (a \in U_i)$. Da die U_i Untergruppen sind, gibt es in jedem der U_i ein a_i, so dass $a \cdot a_i = a_i \cdot a = e$ gilt. Wenn wir zeigen, dass alle a_i gleich sind, dann sind wir fertig ($\bar{a} := a_i$ für ein beliebiges $i \in I$). Seien $i, j \in I$ beliebig, dann gilt

$$a_i = a_i \cdot (a \cdot a_j) = (a_i \cdot a) \cdot a_j = a_j \qquad \square$$

Folgerung. *Jede (Halb-) Gruppe besitzt eine kleinste Unter(halb)gruppe und jeder Monoid besitzt einen kleinsten Untermonoid, die eine gegebene Teilmenge der (Halb-) Gruppe bzw. des Monoids enthalten.*

Übung 9.

(a) Es sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe. Beweisen Sie, dass es für jedes Element $a \in G$ ein $0 \neq n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a^n := \underbrace{a \cdot .. \cdot a}_{n \text{ mal}} = e$ gilt.

(b) Es sei $(G, \star)$ eine beliebige Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie:

$$\{e\} = \bigcap_{\substack{U \subset G \text{ ist Unter-}\\ \text{gruppe von } G}} U.$$

(c) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $A \subset G$ sei eine beliebige nichtleere Teilmenge. Beweisen Sie:

$$\bigcap_{\substack{A \subset U \text{ und } U \text{ ist} \\ \text{Untergruppe von } G}} U = \{a_1 \star a_2 \star \cdots \star a_n \mid (a_i \in A \vee a_i^{-1} \in A) \text{ für } 1 < i \leq n\}.$$

Lösung. (a) Wir betrachten für ein beliebiges Element $a \in G$ die Folge

$$a, a^2, a^3, a^4, \ldots$$

Da diese Folge unendliche Länge hat und weil G endlich ist, gibt es mindestens zwei Folgenglieder a^k und a^r mit $a^k = a^r$ und $k \neq r$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $k < r$ gilt und es daher eine natürliche Zahl $n > 0$ mit $k + n = r$ gibt. Insgesamt erhalten wir

$$a^{k+n} = a^k.$$

Unter Ausnutzung der Assoziativität von $\cdot$ folgt

$$a^k \cdot a^n = a^k.$$

Da in Gruppen die Kürzungsregeln (vgl. Übungsaufgabe) gelten, erhalten wir daraus wie gewünscht

$$a^n = e.$$

(b) Dies folgt sofort aus (c), wenn man $A = \{e\}$ setzt.

(c) Wir bemerken zuerst, dass die Menge

$$M = \{a_1 \star a_2 \star \cdots \star a_n \mid (a_i \in A \vee a_i^{-1} \in A) \text{ für } 1 < i \leq n\}$$

eine Untergruppe von G ist. Offensichtlich ist M unter $\star$ abgeschlossen. Da die Menge A nichtleer ist, gibt es ein Element $a \in A$, somit ist $e = a \star a^{-1}$ ein Element von M, also ist M ein Untermonoid von G. Ist $b = a_1 \star \cdots \star a_n$ ein beliebiges Element von M, dann ist auch $b^{-1} = a_n^{-1} \star \cdots \star a_1^{-1}$ ein Element von M. M ist also eine Untergruppe von $(G, \star)$. Wegen $A \subset M$ gilt daher

$$\bigcap_{\substack{A \subset U \text{ und } U \text{ ist} \\ \text{Untergruppe von } G}} U \subset M.$$

Die umgekehrte Inklusion folgt nun aus der Tatsache, dass jede Untergruppe von $(G, \star)$, die A enthält auch M enthalten muss.

Iso = gleich
morph = form } Isomorphismus = gleiche Form

1.1.2 Die Morphismen von (Halb-) Gruppen und Monoiden

Im folgenden behandeln wir den Begriff einer "Struktur erhaltenden Abbildung". Damit sind Funktionen zwischen algebraischen Strukturen gemeint, die in gewissem Sinn mit den vorhandenen Verknüpfungen verträglich sind. Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0.5 \cdot x$ ist zum Beispiel mit der Addition "verträglich", weil für beliebige ganze Zahlen x, y die Gleichung $f(x+y) = 0.5 \cdot (x+y) = 0.5 \cdot x + 0.5 \cdot y = f(x) + f(y)$ gilt.

Definition 7.

1. Ein *Halbgruppenhomomorphismus* von einer Halbgruppe $(G, \cdot)$ in eine Halbgruppe $(G', \circ)$ ist eine Abbildung $f : G \to G'$, die für alle für alle $a, b \in G$

$$f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$$

   erfüllt.

2. Ein *Monoidhomomorphismus* vom Monoid $(M, \cdot)$ in den Monoid $(M', \circ)$ ist ein Halbgruppenhomomorphismus von $(M, \cdot)$ nach $(M', \circ)$, der das neutrale Element von $(M, \cdot)$ auf das neutrale Element von $(M', \circ)$ abbildet. → Dasselbe neutrale Element

3. Ein Gruppenhomomorphismus ist ein Halbgruppenhomomorphismus zwischen Gruppen.

Bemerkung. Anstelle von "$f : A \to B$ ist ein Homomorphismus von Struktur $(A, *)$ in die Struktur $(B, \bullet)$", schreiben wir auch "$f : (A, *) \to (B, \bullet)$".

Beispiel 6.

1. Die Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $h(n) = -n$ ist ein Monoidhomomorphismus von $(\mathbb{N}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$.

2. Die Funktion $g : \{a, b\}^* \to \{x, y\}^*$ mit

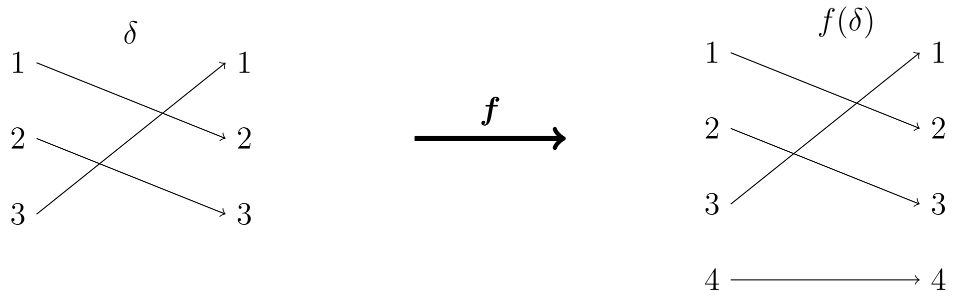
$$g(w) = \begin{array}{l}\text{Das Wort, das man erhält, wenn in} \\ w \text{ alle } a \text{ durch } x \text{ und alle } b \text{ durch } y \\ \text{ersetzt werden}\end{array}$$

   ist ein Monoidhomomorphismus von $(\{a, b\}^*, \frown)$ nach $(\{x, y\}^*, \frown)$.

3. Die Funktion $f : S_3 \to S_4$ mit

$$(f(\tau))(x) = \begin{cases} \tau(x) & \text{falls } x < 4 \\ x & \text{falls } x = 4. \end{cases}$$

   ist ein Gruppenhomomorphismus von $(S_3, \circ)$ nach $(S_4, \circ)$. Wir können uns die Funktion f graphisch wie folgt veranschaulichen:



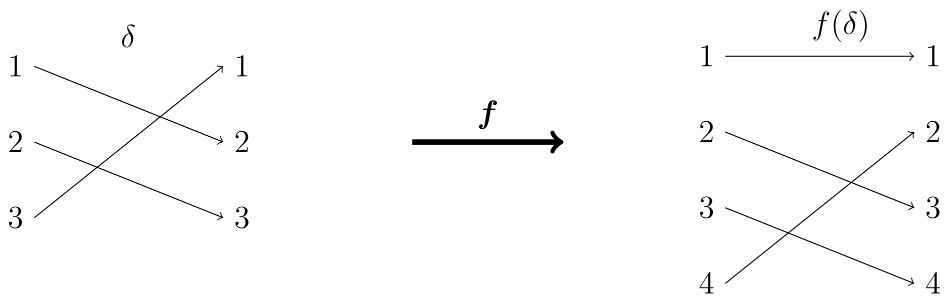
Bemerkung. Nicht jeder Halbgruppenhomomorphismus zwischen Monoiden ist auch ein Monoidhomomorphismus.

Übung 10. Geben Sie einen weiteren Gruppenhomomorphismus von $(S_3, \circ)$ nach $(S_4, \circ)$ an.

Lösung. Die Funktion $f : S_3 \to S_4$ mit

$$(f(\tau))(x) = \begin{cases} \tau(x-1)+1 & \text{falls } x > 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus von $(S_3, \circ)$ nach $(S_4, \circ)$. Wir können uns die Funktion f graphisch wie folgt veranschaulichen:



Als nächstes zeigen wir, dass jeder Gruppenhomomorphismus bereits ein Monoidhomomorphismus ist (dies steht nicht explizit in der Definition!). Darüber hinaus überzeugen wir uns davon, dass unter Gruppenhomomorphismen inverse Elemente auf inverse Elemente abgebildet werden.

Lemma 2. *Es sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen den Gruppen $(G, \cdot)$ und $(G', \bullet)$ mit neutralen Elementen e und e'. Es gilt*

1. $f(e) = e'$ → Das gleiche neutrale Element
2. $\forall a \in G \, (f(a^{-1}) = f(a)^{-1})$ → Die gleichen inversen Elemente

Eigenschaft von Homomorphismus

Beweis. 1. $e' = f(e) \bullet f(e)^{-1} = f(e \cdot e) \bullet f(e)^{-1} = f(e) \bullet \underbrace{f(e) \bullet f(e)^{-1}}_{e'} = f(e)$

2. Dies folgt sofort aus der ersten Aussage, es gilt nämlich: $f(a) \bullet f(a^{-1}) = f(a \cdot a^{-1}) = f(e) = e'$ und analog dazu $f(a^{-1}) \bullet f(a) = e'$. □

Als nächstes sollen Sie zeigen, dass die Komposition (Hintereinanderausführung) von Homomorphismen selbst auch wieder entsprechende Homomorphismen hervorbringt.

Übung 11. Zeigen Sie. Sind $f : (G, \cdot) \to (G', \bullet)$ und $h : (G', \bullet) \to (G'', \star)$ Homomorphismen von Gruppen oder Halbgruppen oder Monoiden, dann ist auch $h \circ f : (G, \cdot) \to (G'', \star)$ ein entsprechender Homomorphismus.

Lösung. Wir zeigen, wenn f und g aus der Behauptung Monoidhomomorphismen sind, dann ist auch $h \circ f$ ein Monoidhomomorphismus. Wir zeigen zuerst, dass $h \circ f$ ein Halbgruppenhomomorphismus ist. Es seien $a, b \in G$ beliebig. Weil f ein Halbgruppenhomomorphismus ist, gilt

$$(h \circ f)(a \cdot b) = h(f(a \cdot b)) = h(f(a) \bullet f(b)).$$

Nun wenden wir die Voraussetzung an, dass auch h ein Halbgruppenhomomorphismus ist und erhalten wie gewünscht:

$$(h \circ f)(a \cdot b) = h(f(a) \bullet f(b)) = h(f(a)) \star h(f(b)).$$

Es sei e das neutrale Element von $(G, \cdot)$, e' das neutrale Element von $(G', \bullet)$ und e'' das neutrale Element von $(G''', \star)$. Es gilt

$$(h \circ f)(e) = h(f(e)) = h(e') = e''.$$

Somit ist alles gezeigt.

Lemma 3. *Wenn $f : (G, *) \to (H, \cdot)$ ein Homomorphismus ist, dann ist $Im(f) \subset H$ eine entsprechende Unterstruktur von $(H, \cdot)$.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für Gruppen und Gruppenhomomorphismen, die anderen Fälle sind analog. Es seien $(G, *)$ und $(H, \cdot)$ Gruppen, $f : (G, *) \to (H, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus und $U \subset G$ sei eine Untergruppe von $(G, *)$. Wir müssen zeigen, dass $Im(f) = \{f(a) \mid a \in G\}$ eine Untergruppe von $(H, \cdot)$ ist. Wir müssen also drei Tatsachen beweisen:

1. $Im(f) \subset H$ ist unter $\cdot$ abgeschlossen.

2. Das neutrale Element von $(H, \cdot)$ liegt in $Im(f)$.

3. Mit jedem Element $y \in Im(f)$ liegt auch y^{-1} in $Im(f)$.

Wir verifizieren nun diese Punkte der Reihe nach:

1. Sind y und z beliebige Elemente von $Im(f)$, dann gibt es Elemente $a, b \in G$ mit $f(a) = y$ und $f(b) = z$. Weil f ein Gruppenhomomorphismus ist gilt

$$y \cdot z = f(a) \cdot f(b) = f(a * b).$$

   Somit ist $y \cdot z \in Im(f)$.

2. Es sei e das neutrale Element von $(G, *)$. Aus Lemma 2 wissen wir, dass $f(e)$ das neutrale Element von $(H, \cdot)$ ist, welches somit wie gewünscht ein Element von $Im(f)$ ist.

3. Ist y ein Element von $Im(f)$, dann gibt es ein $a \in G$ mit $f(a) = y$. Aus Lemma 2 wissen wir, dass $y^{-1} = f(a^{-1})$ gilt. Somit ist y^{-1} ein Element von $Im(f)$ ist. □

Beispiel 7. Die Funktion $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ mit $f(x) = 7x$ ist ein Gruppenhomomorphismus, daher ist

$$Im(f) = \{\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots\}$$

eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.

Übung 12. Ist die Menge $\{f \in S_4 \mid f(4) = 4\}$ eine Untergruppe von S_4? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung. Für die Funktion $f : S_3 \to S_4$ aus Beispiel 6 gilt $Im(f) = \{f \in S_4 \mid f(4) = 4\}$. Es folgt also aus Lemma 3, dass die Menge $\{f \in S_4 \mid f(4) = 4\}$ eine Untergruppe von S_4 ist.

Definition 8. Ist $f : (G, *) \to (H, \bullet)$ ein Monoidhomomorphismus und ist e das neutrale Element von $(H, \bullet)$, dann definieren wir durch

$$ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e\}$$

den *Kern* von f.

Lemma 4. *Ist $f : (G, \cdot) \to (G', \bullet)$ ein Gruppenhomomorphismus, dann ist $ker(f)$ eine Untergruppe von $(G, \cdot)$.*

Beweis. Es seien $f, (G, \cdot), (G', \bullet)$ wie in der Behauptung und e sei das neutrale Element in $(G, \cdot)$. Wir müssen Folgendes zeigen:

1. $ker(f)$ ist abgeschlossen unter $\cdot$.
2. $e \in ker(f)$.
3. Für jedes Element $a \in ker(f)$ gilt $a^{-1} \in ker(f)$.

Wir verifizieren diese Punkte der Reihe nach:

1. Sind $a, b \in ker(f)$, dann gilt
$$f(a \cdot b) = f(a) \bullet f(b) = e' \bullet e' = e'$$
und somit $a \cdot b \in ker(f)$. Die Menge $ker(f)$ ist also unter $\cdot$ abgeschlossen.
2. Die Tatssache, dass $e \in ker(f)$ gilt, folgt aus der Tatsache, dass Monoidhomomorphismen neutrale Elemente auf neutrale Elemente abbilden.
3. Es sei $a \in ker(f)$. Wir müssen $f(a^{-1}) = e'$ zeigen. Dies folgt aus
$$f(a^{-1}) = f(a^{-1}) \bullet f(a) = f(a^{-1} \cdot a) = f(e) = e'.$$

□

Lemma 5. *Ist $f : (G, \cdot) \to (G', \circ)$ ein Isomorphismus, dann auch $f^{-1} : (G', \circ) \to (G, \cdot)$.*

Beweis. Es sei $f : (G, \cdot) \to (G', \circ)$ wie in den Voraussetzungen. Falls f ein Monoidmorphismus ist, dann gilt $f(e) = e'$ und somit auch $f^{-1}(e') = e$. Seien nun $a', b' \in G'$, dann gibt es wegen der Surjektivität von $f : (G, \cdot) \to (G', \circ)$ Elemente a und b von G mit $f(a) = a'$ und $f(b) = b'$. Es gilt
$$f^{-1}(a' \circ b') = f^{-1}(f(a) \circ f(b)) = f^{-1}(f(a \cdot b)) = a \cdot b = f^{-1}(a') \cdot f^{-1}(b').$$

□

Lemma 6. *Ist $f : (G, \cdot) \to (G', \circ)$ ein Gruppenhomomorphismus mit $ker(f) = \{e\}$, dann ist f injektiv.*

Beweis. Wir zeigen
$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$
Wir betrachten
$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow f(a) \circ f(b)^{-1} = e' \\ &\Rightarrow e' = f(a) \circ f(b)^{-1} = f(a) \circ f(b^{-1}) = f(a \cdot b^{-1}) \\ &\Rightarrow a \cdot b^{-1} \in ker(f) \\ &\Rightarrow a \cdot b^{-1} = e \\ &\Rightarrow a^{-1} = b^{-1} \Rightarrow a = (a^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1} = b. \end{aligned}$$

□

Übung 13. Beweisen Sie auch die umgekehrte Implikation von Lemma 6.

Lösung. Es sei $f : (G, \cdot) \to (G, \circ)$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus, weiter seien e und e' die neutralen Element in $(G, \cdot)$ und $(G', \circ)$. Weil f injektiv ist und weil $f(e) = e'$ gilt (vgl. Lemma 2) kann es kein $a \in G$ geben mit $a \neq e$ und $f(a) = e'$. Daher gilt $ker(f) = \{e\}$.

Definition 9. Ein *(Halb-)Gruppenisomorphismus* ist ein bijektiver Gruppenhomomorphismus. (Halb-)Gruppen zwischen denen es einen Isomorphismus gibt nennt man *isomorph*.

Bemerkung. Isomorphe Gruppen unterscheiden sich nicht "in ihrer Struktur". Man kann sagen, dass isomorphe Gruppen bis auf die Benennung ihrer Elemente gleich sind.

Übung 14. Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie nur eine Gruppe mit 2 Elementen Gibt. Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Gruppe $(\{e, x\}, *)$ (wobei e das neutrale Element bezeichne) zu $(\mathbb{Z}/2, +)$ isomorph ist.

Lösung. Wir müssen einen Isomorphismus $f : (\{e, x\}, *) \to (\mathbb{Z}/2, +)$ konstruieren. Zuerst bemerken wir, dass $x * x = e$ gelten muss, weil x sonst kein neutrales Element in $(\{e, x\}, *)$ besässe. Wir definieren f durch

$$\begin{aligned} \bar{0} &\xrightarrow{\quad f \quad} e \\ \bar{1} &\xrightarrow{\qquad\quad} x \end{aligned}.$$

Offensichtlich ist f bijektiv, wir müssen überprüfen ob f ein Gruppenhomomorphismus ist. Dies sehen wir anhand der folgenden Fälle (wir haben bereits in den Übungen gesehen, dass jede Gruppe mit 2 Elementen kommutativ ist.):

$$\begin{aligned} f(\bar{0} + \bar{0}) &= f(\bar{0}) = e = e * e = f(\bar{0}) * f(\bar{0}) \\ f(\bar{0} + \bar{1}) &= f(\bar{1}) = x = e * x = f(\bar{0}) * f(\bar{1}) \\ f(\bar{1} + \bar{1}) &= f(\bar{0}) = e = x * x = f(\bar{1}) * f(\bar{1}). \end{aligned}$$

Der nächste Satz besagt, dass man jede endliche Gruppe als Untergruppe einer symmetrischen Gruppe auffassen kann. Die symmetrischen Gruppen (zusammen mit ihren Untergruppen) sind in diesem Sinn "universelle endliche Gruppen".

Theorem 1 (Satz von Cayley). *Zu jeder endlichen Gruppe $(G, *)$ gibt es eine natürliche Zahl n und eine Untergruppe $U \subset S_n$ so, dass $(G, *)$ zu $(U, \circ)$ isomorph ist.*

Beweis. Anstelle eines allgemeinen Beweises betrachten wir exemplarisch wie sich die Gruppe $(G, *)$, die durch folgende Verknüpfungstabelle gegeben ist, als Untergruppe von $(S_4, \circ)$ auffassen lässt:

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Wir konstruieren nun einen Gruppenisomorphismus $f : (G, *) \to (S_4, \circ)$. Definiere

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (x * 1) & (x * 2) & (x * 3) & (x * 4) \end{bmatrix}.$$

Es gilt zum Beispiel

$$f(3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bevor wir überprüfen ob f ein Gruppenhomomorphismus ist, stellen wir sicher, dass alle Funktionswerte von f tatsächlich in S_4 liegen (d.h. bijektive Funktionen sind). Dazu stellen wir fest, dass wegen der Kürzungsregeln für $x, y, z \in G$ mit $y \neq z$ die Ungleichung $x * y \neq x * z$ gilt.

Als nächstes rechnen wir nach, dass f ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir müssen dazu

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y)$$

für alle $x, y \in G$ nachweisen. Auch wenn wir für unser Beispiel alle Fälle $(x = 1, 2, 3, 4)$ "von Hand" nachrechnen könnten, wollen wir diesen Schritt doch so allgemein machen, dass er leicht für beliebige Gruppen angewendet werden kann. Es seien $x, y \in G$ beliebig, es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) \circ f(y) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (x * 1) & (x * 2) & (x * 3) & (x * 4) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (y * 1) & (y * 2) & (y * 3) & (y * 4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (x * (y * 1)) & (x * (y * 2)) & (x * (y * 3)) & (x * (y * 4)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (x * y) * 1 & (x * y) * 2 & (x * y) * 3 & (x * y) * 4 \end{bmatrix} \\ &= f(x * y). \end{aligned}$$

Wir wissen nun, dass $f : (G, *) \to (S_4, \circ)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Aus Lemma 3 wissen wir, dass $im(f) \subset S_4$ eine Untergruppe von $(S_4, \circ)$ ist, wenn wir nun zeigen, dass f

injektiv ist, dann haben wir mit $U = im(f)$ die gesuchte Untergruppe gefunden und das Theorem ist bewiesen. Gemäss Lemma 6 genügt es zu zeigen, dass $ker(f) = \{1\}$ gilt. Es sei $x \in ker(f)$ beliebig. Wir müssen $x = 1$ zeigen. Aus $x \in ker(f)$ folgt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (x*1) & (x*2) & (x*3) & (x*4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

und somit, dass für alle Elemente $a \in G$ die Gleichung

$$x * a = a$$

gilt. Folglich ist x linksneutral in der Gruppe $(G, *)$, da in jeder Gruppe das linksneutrale Element gerade dem neutralen Element entspricht, gilt wie gewünscht $x = 1$. □

Bemerkung. Wenn man auch Permutationen von unendlichen Mengen betrachtet, dann gilt der Satz von Caley auch für beliebige (nicht bloss endliche Gruppen).

Übung 15. Geben Sie eine Untergruppe U von $(S_3, \circ)$ zusammen mit einen Isomorphismus $f : (\mathbb{Z}/3, +) \to (U, \circ)$ an.

Lösung. Eine Untergruppe mit den geforderten Eigenschaften erhält man zum Beispiel durch die Menge U mit folgenden Elementen:

$$id = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ein Isomorphismus $f : (\mathbb{Z}/3, +) \to (U, \circ)$ ist durch

$$f(\bar{0}) = id$$
$$f(\bar{1}) = \sigma$$
$$f(\bar{2}) = \tau$$

gegeben.

2 Lineare Algebra

Die lineare Algebra behandelt die Theorie der (endlich dimensionalen) Vektorräume, der linearen Abbildungen und nicht zuletzt der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen.

Die Methoden der linearen Algebra durchdringen fast alle Gebiete der Mathematik und ihrer Anwendungen. Diese Theorie kann daher kaum in ihrer Bedeutung überschätzt werden.

Ein Teil der Rolle welche die lineare Algebra auch in der Informatik spielt ist wohl der Tatsache geschuldet, dass die betrachteten Funktionen (lineare Abbildungen) sich als Matrizen endlich darstellen lassen und somit algorithmisch handhabbar werden. Nur einige Gebiete der Informatik, in denen lineare Algebra eine zentrale Rolle spielt sind: Kryptographie, Spieltheorie, Computergrafik, neuronale Netze, Netzwerktheorie, und viele mehr.

2.1 Der euklidische Raum

Dieses Kapitel dient dazu, Ihnen eine gewisse Anschauung der euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ zu vermitteln. Diese Intuition wird Ihnen bei der Behandlung von allgemeinen Vektorräumen dahingehend dienlich sein, dass Sie sich eine konkrete Vorstellung des behandelten Stoffes machen können.

Viele alltägliche Grössen (z.B. Masse, Volumen, Spannung, Speicherplatz, ...) können adäquat mit Zahlen modelliert werden. Diese Grössen werden "skalare Grössen" genannt. Andere Grössen hingegen sind "strukturierter", eine Kraft kann zum Beispiel in verschiedene Richtungen wirken, eine Geschwindigkeit ist ebenfalls gerichtet, der Zustand eines Programmes hängt von der Belegung vieler verschiedener Variablen ab. Solche "gerichteten" Grössen werden oft als Vektoren modelliert. Vektoren modelliert man schliesslich als n-Tupel.

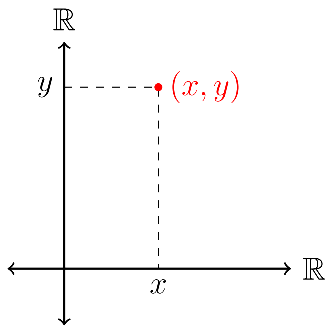
Viele dieser vektoriellen Grössen werden als n-Tupel mit mehr als nur 2 oder 3 Einträgen modelliert. Man denke zum Beispiel an den "Zustand eines Programmes mit 145 Variablen". Da die Räume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ die Grundlage für eine Anschauung der höherdimensionalen Räume darstellen, werden wir in der folgenden Einführung verstärkt auf diese Räume eingehen.

Definition 10. Die Elemente von $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ nennt man *reelle (n-dimensionale) Vektoren.* Ist $\vec{v} = (r_1, \ldots, r_n)$ ein reeller Vektor, dann nennt man die Zahlen $r_1, \ldots, r_n$ die *Komponenten* oder *Einträge* von $\vec{v}$.

Bemerkung. Wenn wir explizit darauf hinweisen wollen, dass eine Variable für eine vektorielle Grösse steht, dann verzieren wir die Variable mit einem $\vec{}$. Wir schreiben dann zum Beispiel $\vec{x}$ anstelle von x. Ist es der Darstellung dienlich, so schreiben wir Vektoren auch als Spalten anstatt als Zeilen. Den Vektor $\vec{v} = (a, b, c)$ beschreiben wir zum Beispiel auch als

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Wir können die Elemente von $\mathbb{R}^2$ als Punkte der 2-dimensionalen Koordinatenebene darstellen.

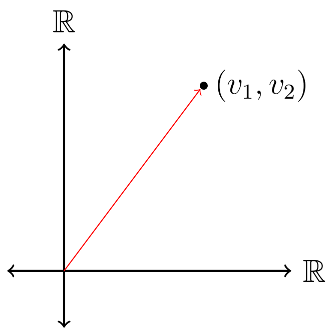


Analog dazu, lassen sich Punkte des $\mathbb{R}^3$ im 3-dimensionalen Raum veranschaulichen.

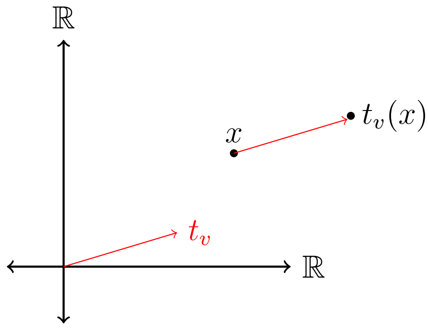
Bemerkung. Jeder Vektor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ kann als Funktion $t_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$t_v(x_1, \ldots, x_n) = (v_1 + x_1, \ldots, v_n + x_n)$$

interpretiert werden. Bei t_v spricht man von der Interpretation von v als *Ortsvektor*. Graphisch kann man sich t_v mit $v = (v_1, \ldots, v_n)$ als Pfeil mit Ursprung in $(0, \ldots, 0)$ und Ende in $(v_1, \ldots, v_n)$ veranschaulichen.



Das Anwenden der Funktion t_v auf einen Vektor $\vec{x}$ kann man sich als "anheften" von t_v (als Pfeil) an $\vec{x}$ verbildlichen:



Definition 11. Die Summe $\vec{v} + \vec{w}$ von zwei Vektoren ist durch

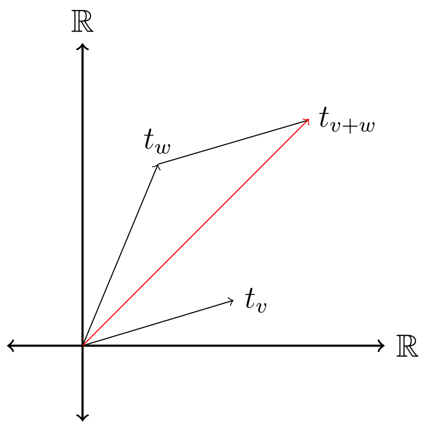
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

gegeben.

Bemerkung. Für alle Vektoren v, w gilt die Gleichung

$$t_v \circ t_w = t_{v+w}.$$

Wir können uns die Addition von Vektoren in der Interpretation als Ortsvektoren somit als Aneinanderheften von Pfeilen verbildlichen:



Übung 16. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^3, +)$ eine kommutative Gruppe ist.

Lösung. Wir müssen folgendes Zeigen:

1. $+ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist assoziativ und kommutativ.
2. Es gibt in $\mathbb{R}^3$ ein bezüglich $+$ neutrales Element.
3. Jedes Element in $\mathbb{R}^3$ hat ein additives Inverses in $\mathbb{R}^3$.

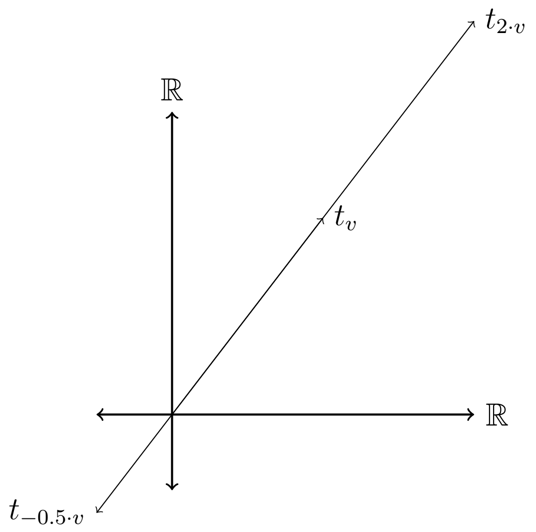
Wir verifizieren diese Punkte der Reihe nach:

1. Zur Assoziativität:
$$\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1+c_1\\a_2+b_2+c_2\\a_3+b_3+c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right)$$
   Zur Kommutativität:
$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1+a_1\\b_2+a_2\\b_3+a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$
2. Offensichtlich ist der Nullvektor $\vec{0} = (0, 0, 0)$ neutral bezüglich der Vektoraddition.
3. Ist $v = (x, y, z)$ ein beliebiger Vektor, dann ist $-v = (-x, -y, -z)$ wegen
$$\begin{pmatrix}x\\x\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x\\-y\\-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$
   der zu v inverse Vektor.

Definition 12. Die *Skalarmultiplikation* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ einer reellen Zahl (Skalar) mit einem reellen Vektor ist durch
$$r \cdot \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}rx_1\\\vdots\\rx_n\end{pmatrix}$$
gegeben.

Die Parameterform von Geraden

In der Ortsvektordarstellung lässt sich die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar als Streckung des entsprechenden Pfeiles veranschaulichen.



Aus dieser Darstellung wird sofort ersichtlich, dass jede Menge von der Form

$$g_1 = \{t_{\alpha\cdot\vec{v}}(\vec{0}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha \cdot \vec{v} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

einer Geraden durch den Nullvektor $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$ in Richtung $t_{\vec{v}}$ entspricht. Allgemein erhalten wir eine Gerade durch einen beliebigen Punkt $\vec{p}$ in Richtung von $t_{\vec{v}}$ durch die Menge

$$g_2 = \{t_{\alpha\cdot\vec{v}}(\vec{p}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\vec{p} + \alpha \cdot \vec{v} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Der Punkt $\vec{p}$ wird in der oben genannten Darstellung *Stützvektor* der Geraden g_2 genannt, der Vektor $\vec{v}$ heisst *Richtungsvektor* der Geraden. Die *Parameterdarstellung* der Geraden g_2 erhält man aus der oben gegebenen Beschreibung als Menge, in dem man im Wesentlichen die Mengenklammern weglässt:

$$\vec{x} = \vec{p} + \alpha\vec{v}.$$

Beispiel 8. Gegeben seien die Geraden g durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und h durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen den Schnittpunkt der Geraden g und h berechnen. Da der Schnittpunkt (x, y) zweier Geraden dadurch gegeben ist, dass er zugleich ein Element beider Geraden ist, müssen für geeignete α und β aus $\mathbb{R}$ die beiden Bedingungen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt werden. Durch Zusammenfassen der beiden Bedingungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese neue Bedingung entspricht dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0.5 + 4\alpha &= -1 + 0.2\beta \\ 0.5 + \alpha &= \beta \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der unteren Gleichung in die obere Gleichung, erhalten wir daraus:

$$\begin{aligned} 0.5 + 4\alpha &= -1 + 0.2(0.5 + \alpha) \\ \alpha &= -0.36\ldots \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist somit durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} - (0.36\ldots) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -0.94 \\ 0.14 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Da die Struktur $(\mathbb{R}^n, +)$ eine Gruppe ist, lassen sich Gleichungen von der Form

$$\vec{v} + x = \vec{w}$$

stets (eindeutig) nach x lösen. Die Lösung lässt sich leicht angeben:

$$x = \vec{w} - \vec{v} = \begin{pmatrix} w_1 - v_1 \\ \vdots \\ w_n - v_n \end{pmatrix}.$$

Der Ortsvektor, den man somit an den Punkt $\vec{v}$ “anheften” muss um den Punkt $\vec{w}$ zu erhalten ist durch $t_{\vec{w}-\vec{v}}$ gegeben. Sind zwei beliebige Punkte v und w gegeben, dann können wir somit die (eindeutige) Gerade, die durch diese beiden Punkte geht wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} w_1 - v_1 \\ \vdots \\ w_n - v_n \end{pmatrix}$$

Übung 17. Gegeben sei die Gerade g in $\mathbb{R}^2$ durch den Stützvektor $(3, 7)$ und den Richtungsvektor $(-5, 2)$. Berechnen Sie den Schnittpunkt von g mit der X-Achse und den Schnittpunkt von g mit der Y-Achse.

Lösung. Die X-Achse ist durch folgende Parametergleichung gegeben:

$$X\text{-Achse: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analog, kann die Y-Achse durch

$$Y\text{-Achse: } \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Wir berechnen zuerst den Schnittpunkt von g mit der X-Achse, dazu setzen wir

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und erhalten dadurch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha &= 3 - 5\beta \\ \beta &= -3.5 \end{aligned}$$

und somit (durch Einsetzen)

$$\alpha = 20.5.$$

Somit ist der Schnittpunkt von g mit der X-Achse durch $(20.5, 0)$ gegeben. Wir berechnen nun den Schnittpunkt von g mit der Y-Achse. Wir setzen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5\beta &= 3 \\ \alpha &= 7 + 2\beta \end{aligned}$$

und somit

$$\alpha = 7 + 2(\frac{3}{5}) = \frac{41}{5} = 8.2.$$

Der Schnittpunkt von g mit der Y-Achse ist somit durch $(0, 8.2)$ gegeben.

Die Parameterform von Ebenen

Zwei Vektoren heissen linear unabhängig, wenn keiner der Beiden ein Vielfaches des anderen ist. Es seien zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$ gegeben. Analog dazu wie wir Geraden mit der Parameterdarstellung beschrieben haben, können wir im $\mathbb{R}^n$ mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zusammen mit einem dritten Stützvektor $\vec{p}$ die Ebene darstellen, auf der $\vec{p}$ liegt und die sich in Richtung von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ausdehnt. Als Menge nimmt diese Ebene die Gestalt

$$E = \{\vec{p} + \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{u} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

an. Wir stellen die Ebene E wie folgt in der Parameterdarstelllung dar:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel 9. Die Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir wollen den Durchstosspunkt der Geraden g, die durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, mit der Ebene E berechnen. Wir erhalten die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung entspricht dem folgenden System von linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 + \gamma &= 1 + \alpha + \beta \\ 4 + 2\gamma &= 1 + 2\beta \\ -3 + 3\gamma &= 1 + \beta. \end{aligned}$$

Elementare Umformungen liefern:

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + \beta \\ 1.5 + \gamma &= \beta \\ -4 + 3\gamma &= \beta. \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite Gleichung liefert

$$\alpha = -1.5$$

Einsetzen in die dritte Gleichung liefert

$$\begin{aligned} 3\gamma &= \beta + 4 \\ &= (\gamma - \alpha) + 4 \\ &= \gamma + 5.5 \end{aligned}$$

Also

$$\gamma = 2.75.$$

Durch einsetzen in die Geradengleichung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 9.5 \\ 5.25 \end{pmatrix}.$$

Eine Ebene ist eindeutig durch drei (nicht auf einer Geraden liegenden) Punkte definiert. Sind $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ Punkte im $\mathbb{R}^n$, die nicht auf einer Geraden liegen, dann beschreibt die Parameterform

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} w_1 - v_1 \\ \vdots \\ w_n - v_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ \vdots \\ u_n - v_n \end{pmatrix}$$

Die Ebene auf der die Punkte $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ liegen.

Übung 18. Die Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ hat die X, Y- und Z-Achsenabschnitte 1. Wo schneidet E die Gerade, die durch den Nullpunkt und den Punkt $(1, 2, 3)$ geht?

Lösung. Die in der Aufgabe genannte Gerade können wir durch folgende Parametergleichung beschreiben:

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}.$$

Die Ebene lässt sich durch

$$E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Parametergleichung beschreiben. Zur Berechnung des Schnittpunktes von g mit E erhalten wir somit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \beta - \gamma \\ \beta &= 2\alpha \\ \gamma &= 3\alpha \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\alpha = 1 - 5\alpha$$

und somit $\alpha = 1/6$. Durch Einsetzen in die Parametergleichung von g erhalten wir den gesuchten Schnittpunkt $(1/6, 1/3, 1/2)$.

Die Koordinatenform einer Geraden in der Ebene

Wir haben gesehen, dass wir jede Gerade via der Parameterform

$$\vec{x} = \vec{p} + \alpha\vec{v}$$

als Vektorgleichung darstellen können. Wir wollen nun eine Gerade g in der Ebene als skalare Gleichung darstellen. Wir suchen demnach geeignete reelle Zahlen a, b und c, welche die Bedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in g \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \tag{2.1}$$

erfüllen.

Es sei eine Gerade g gegeben. Wir unterscheiden vier Fälle.

1. Die Gerade g verläuft parallel zur X-Achse.
2. Die Gerade g verläuft parallel zur Y-Achse.
3. Die Gerade g geht durch den Nullpunkt $(0, 0)$ (und ist nicht parallel zu einer Achse).
4. Die Gerade g hat je genau einen Schnittpunkt mit der X-Achse und der Y-Achse (und geht nicht durch den Nullpunkt).

Im ersten Fall erhalten wir eine Darstellung von g durch die Gleichung

$$y = c$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ den Abstand von g zur X-Achse beschreibt.

Im zweiten Fall erhalten wir eine Darstellung von g durch die Gleichung

$$x = c$$

wobei hier $c \in \mathbb{R}$ für den Abstand von g zur Y-Achse steht.

Im dritten Fall können wir die Gerade g durch eine Parametergleichung von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p_1 \\ \alpha p_2 \end{pmatrix}$$

mit $p_1, p_2 \neq 0$ beschreiben. Wir behaupten, dass die Gerade g in diesem Fall genau aus den Punkten (x, y) mit

$$x = \frac{p_1}{p_2} \cdot y \tag{2.2}$$

besteht. Ist ein Punkt $(x, y) = (\alpha p_1, \alpha p_2)$ aus g, dann gilt

$$\frac{p_1}{p_2} \cdot y = \frac{p_1}{p_2} \cdot \alpha p_2 = \alpha p_1 = x,$$

somit erfüllt jeder Punkt auf g die Gleichung (2.2). Es sei umgekehrt (x, y) ein Punkt der die Gleichung (2.2) erfüllt, dann erhalten wir mit $\alpha = \frac{y}{p_2}$

$$\alpha \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und somit, dass (x, y) tatsächlich auf g liegt.

Für den vierten Fall, bezeichnen $0 \neq g_X \in \mathbb{R}$ den X-Achsenabschnitt, und $0 \neq g_Y \in \mathbb{R}$ den Y-Achsenabschnitt von g. Wir können g demnach durch die Parametergleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_X \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -g_X \\ g_Y \end{pmatrix}$$

beschreiben. Wir wollen uns davon überzeugen, dass ein Punkt (x, y) genau dann auf g liegt, wenn die Gleichung

$$g_X \cdot g_Y = g_Y \cdot x + g_X \cdot y \tag{2.3}$$

oder äquivalent dazu

$$1 = \frac{x}{g_X} + \frac{y}{g_Y}$$

erfüllt ist. Gemäss der Parametergleichung ist ein Punkt (x, y) genau dann auf der Geraden g, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} x &= g_X - \alpha \cdot g_X \\ y &= \alpha \cdot g_Y \end{aligned} \tag{2.4}$$

gibt. Wir nehmen nun an, dass (x, y) auf g liegt und $\alpha \in \mathbb{R}$ die Gleichungen in (2.4) erfüllt. Es folgt

$$\begin{aligned} g_X y + g_Y x &= \alpha g_X g_Y + g_Y(g_X - \alpha g_X) \\ &= \alpha g_X g_Y + g_X g_Y - \alpha g_X g_Y \\ &= g_X g_Y. \end{aligned}$$

Wir wissen nun, dass jeder Punkt auf der Geraden g die Gleichung (2.3) erfüllt. Wir wollen uns nun noch davon überzeugen, dass auch jeder Punkt der diese Gleichung erfüllt auch tatsächlich auf der Geraden liegen *muss*. Es sei also (x, y) ein Punkt, der die Gleichung (2.3) erfüllt. Wir müssen demnach ein $\alpha \in \mathbb{R}$ finden, das den Gleichungen in (2.4) genügt. Weil $g_Y, g_X \neq 0$ gilt, können wir

$$\alpha = 1 - \frac{x}{g_X}$$

setzen. Weil einerseits

$$g_X - \alpha g_X = g_X - g_X(1 - \frac{x}{g_X}) = g_X - (g_X - \frac{x \cdot g_X}{g_X}) = x$$

und andererseits

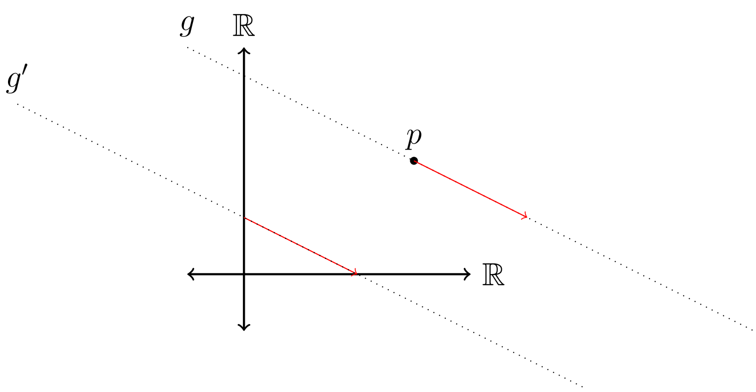
$$\alpha g_Y = g_Y(1 - \frac{x}{g_X}) = g_Y - x\frac{g_Y}{g_X} \overset{(2.3)}{=} y$$

gilt, sehen wir, dass die Gleichung (2.3) die Gerade g beschreibt.

In unserer Konstruktion einer Koordinatengleichung der Geraden g sind wir von einer Parametergleichung ausgegangen, in der der Stützvektor gerade einem Achsenabschnitt und der Richtungsvektor von diesem Achsenabschnitt zum anderen Achsenabschnitt gezeigt hat. Wir können diesen "Umweg" über die Achsenabschnitte wie folgt umgehen. Ist die Gerade g durch eine beliebige Parametergleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

gegeben, dann betrachten wir zuerst die unten veranschaulichte, zu g parallele Gerade g'.



von dieser können wir sofort eine Koordinatengleichung ablesen:

$$1 = \frac{x}{g'_X} + \frac{y}{g'_Y} = \frac{x}{v_1} + \frac{y}{-v_2}.$$

Weil wir die Gerade g durch verschieben der Geraden g' erhalten, können wir eine Koordinatenform von g bis auf eine Konstante c wie folgt angeben:

$$c = \frac{x}{v_1} + \frac{y}{-v_2}.$$

um diese Konstante im konkreten Fall zu bestimmen zu, brauchen wir bloss noch einen Punkt der auf g liegt (z.B. p) in die Koordinatengleichung einzusetzen.

Beispiel 10. Die Gerade g sei durch folgende Parametergleichung gegeben:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir wollen eine Koordinatengleichung von g bestimmen. Aus unseren vorhergehenden Überlegungen wissen wir, dass die Gleichung von der Form

$$c = \frac{x}{1} + \frac{y}{-2}$$

ist. Um die Konstante c zu bestimmen setzen wir den Punkt $(3, 3)$ in die Koordinatengleichung ein.

$$c = 3 - \frac{3}{2} = 1.5.$$

Die gesuchte Gleichung lautet also

$$0 = x - 0.5y - 1.5.$$

Übung 19. Geben Sie eine Koordinatengleichung der Geraden g an, auf der die Punkte $(1, 3)$ und $(2, 2)$ liegen.

Lösung. Der Richtungsvektor der Geraden g ist durch $(1, 3) - (2, 2) = (-1, 1)$ gegeben. Dadurch ergibt sich die Gleichung

$$c = \frac{x}{-1} + \frac{y}{-1} = -x - y$$

durch Einsetzen von $(2, 2)$ erhalten wir

$$c = -2 - 2 = -4$$

somit ist die gesuchte Gleichung

$$0 = -x - y + 4.$$

Bemerkung: Die Gleichung ist natürlich äquivalent zur Gleichung

$$0 = x + y - 4.$$

Bemerkung. Ist (x, y) ein beliebiger Vektor im zweidimensionalen Raum, dann steht der Ortsvektor von $(-y, x)$ senkrecht zum Ortsvektor von (x, y). Wir haben demnach in diesem Abschnitt hergeleitet, dass die Koordinatengleichung einer Geraden im wesentlichen die Form

$$0 = ax + by + c$$

hat, wobei (a, b) ein zu einem Richtungsvektor der Geraden rechtwinklig stehender Vektor ist.

Die Koordinatenform einer Ebene im $\mathbb{R}^3$

Wir haben gesehen, dass wir jede Ebene im dreidimensionalen Raum via der Parameterform

$$\vec{x} = \vec{p} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{u}$$

als Vektorgleichung darstellen können. Analog zur Koordinatenform von Geraden in der Ebene, wollen wir nun eine Ebene E im dreidimensionalen Raum als skalare Gleichung darstellen. Die Ebenengleichung soll dabei folgende Gestalt haben:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \tag{2.5}$$

wobei a, b, c, d geeignete reelle Zahlen sind.

Es sei eine Ebene E gegeben. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Die Ebene E liegt parallel zu einer von den Achsen aufgespannten Ebene.
2. Die Ebene E ist zu keiner Grundebene[1] parallel.

Im ersten Fall erhalten wir, je nachdem zu welcher der Grundebenen E parallel liegt, eine Darstellung von E durch eine der Gleichungen

$$x = c$$
$$y = c$$
$$z = c$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ den Abstand von E zur entsprechenden Grundebene beschreibt.

Im zweiten Fall verhält es sich Analog wie mit Geraden im zweidimensionalen Raum. Eine Koordinatengleichung

$$ax + by + cz + d = 0$$

erhalten wir dadurch, dass wir einen Vektor (a, b, c) finden, der zu beiden Richtungsvektoren der Ebene rechtwinklig steht. Einen solchen Vektor erhalten wir mit Hilfe des sogenannten “Kreuzproduktes”.

[1] Eine von den Achsen aufgespannte Ebene.

Definition 13. Das *Kreuzprodukt* $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yw - zv \\ uz - wx \\ xv - yu \end{pmatrix}$$

gegeben.

Die für uns entscheidende Eigenschaft des Kreuzproduktes von zwei Vektoren u und v, die nicht vielfache voneinander sind, ist, dass $u \times v$ senkrecht sowohl auf u sowie auf v steht.

Wählen wir a, b, c so, dass $(a, b, c) = \vec{v} \times \vec{u}$ (mit $\vec{u}, \vec{v}$ aus der Parametergleichung der Ebene E) gilt, dann kennen wir mit

$$ax + by + cz + d = 0$$

eine Koordinatengleichung von E bis auf eine Konstante d. Um Schliesslich die Konstante d zu bestimmen genügt es den Punkt $\vec{p}$ in diese Gleichung einzusetzen.

Übung 20. Die Ebene $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ beinhalte folgende Punkte $(1, 2, 3), (3, 2, 1), (0, 0, 0)$. Geben Sie eine Koordinatelgleichung von E_1 an.

Lösung. Die Ebene E_1 kann durch folgende Parametergleichung beschrieben werden:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Koordinatengleichung aufstellen zu können brauchen wir einen Vektor der sowohl auf $(1, 2, 3)$ und auch auf $(3, 2, 1)$ senkrecht steht. Wir erhalten einen geeigneten Vektor durch das Kreuzprodukt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten eine Koordinatengleichung von der Form

$$-4x + 8y - 4z = c.$$

Um die Konstante c zu bestimmen, setzen wir einen Punkt, von dem wir wissen, dass er auf der Ebene liegt, in die Gleichung ein. Durch einsetzen von $(0,0,0)$ erhalten wir $c = 0$. Die Ebene E_1 kann also durch die Koordinatengleichung

$$-4x + 8y - 4z = 0$$

beschrieben werden.

Übung 21. Gegeben sind zwei Ebenen E_2 und E_3 durch folgende Koordinatengleichungen

$$E_2 : x + y + z = 0$$
$$E_3 : 2x + y = 3.$$

Geben Sie die Gerade $g = E_2 \cap E_3$ in der Parameterform an.

Lösung. Wir wissen, dass der Vektor

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rechtwinklig auf der Ebene E_2 steht und dass der Vektor

$$\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

rechtwinklig auf der Ebene E_3 steht. Da der Vektor

$$\vec{n} = \vec{n}_2 \times \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sowohl rechtwinklig auf $\vec{n}_2$ sowie auf $\vec{n}_3$ steht, zeigt er in die Richtung der Schnittgerade g. Weil der Punkt $(0, 3, -3)$ auf g liegt, ergibt sich eine Parameterdarstellung durch

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Matrizenkalkül und lineare Gleichungssysteme

Wir wenden uns nun sogenannten Matrizen zu, für den Moment sind Matrizen nichts anderes als “2 dimensionale Vektoren”, das heisst Vektoren, die nicht nur aus einer sondern aus mehreren “Spalten” bestehen. Von der Informatik kennen Sie solche Datenstrukturen etwa als Arrays von (gleichlangen) Arrays. Später werden wir dann sehen, dass Matrizen dazu geeignet sind lineare Gleichungssysteme besonders kompakt darzustellen und darüber hinaus den “Homomorphismen von Vektorräumen” entsprechen. Dazu aber später mehr.

Definition 14. Es seien $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$. Eine $n \times m$ *Matrix* über $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung

$$A : \{1, .., n\} \times \{1, .., m\} \to \mathbb{R}$$

Die Menge aller $n \times m$ Matrizen über $\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{n,m}$

Bemerkung. Matrizen werden schematisch als Tabellen dargestellt.

$$A = (a_{i,j}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ . & & & . & \\ . & & & . & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

Die Spalten oder *Spaltenvektoren* von A sind die $(a_{1,k}, .., a_{n,k})$ mit $1 \leq k \leq m$. Die *Zeilen* oder *Zeilenvektoren* sind die $(a_{k,1}, .., a_{k,m})$ mit $1 \leq k \leq n$. Zur Veranschaulichung die dritte Spalte der Matrix A:

$$A = (a_{i,j}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ . & & & . & \\ . & & & . & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

Und die zweite Zeile:

$$A = (a_{i,j}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ . & & & . & \\ . & & & . & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}.$$

Definition 15. Es seien $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir erklären auf $\mathbb{R}^{n,m}$ die Addition wie folgt:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,m} + b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \cdots & a_{n,m} + b_{n,m} \end{bmatrix}$$

Beispiel 11.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 \end{bmatrix}$$

Übung 22. Überlegen Sie sich, dass $(\mathbb{R}^{n,m}, +)$ eine kommutative Gruppe ist und geben Sie ihr neutrales Element an. Beschreiben Sie wann zwei Matrizen bezüglich der Addition zueinander invers sind.

Lösung. Das additive Inverse von einer Matrix $(a_{i,j})$ erhält man durch die Matrix mit den Einträgen $(-a_{i,j})$. Das neutrale Element der Addition ist die Nullmatrix (alle Einträge sind 0).

Definition 16. Es seien $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir erklären auf $\mathbb{R}^{n,m}$ die Multiplikation mit Skalaren wie folgt:

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{1,1} & \cdots & \lambda \cdot a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{n,1} & \cdots & \lambda \cdot a_{n,m} \end{bmatrix}$$

Beispiel 12.

$$4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 28 \\ 8 & 8 & 24 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Nun führen wir die Matrixmultiplikation ein. die Matrixmultiplikation ist eine "multiplikative Verknüpfung", die aus zwei Matrizen geeigneter Dimension eine neue Matrix generiert. Neben den Anwendungen in der linearen Algebra (Komposition linearer Abbildungen, Lösen von linearen Gleichungssystemen) hat die Matrixmultiplikation weit reichende Anwendungen in verschiedenen gebieten wie: Computergraphik (Koordinatentransforamtion), Optik (Matrizenoptik), Elektrische Netzwerke und Ökonomie.

Definition 17. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m,k}$. Wir definieren das (Matrix-) Produkt $A \circ B$ von A mit B wie folgt:

$$A \circ B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{1,i} b_{i,1} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} a_{1,i} b_{i,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{n,i} b_{i,1} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} a_{n,i} b_{i,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,k}$$

Bemerkung. Damit das Produkt $A \circ B$ für Matrizen A und B definiert ist, muss die Zeilenlänge (Anzahl Spalten) von A gerade der Spaltenlänge (Anzahl Zeilen) von B entsprechen.

Anschaulich gesprochen wird Bei der Multiplikation der Matrix A mit der Matrix B die Einträge der i-te Zeile von A mit den Einträgen der j-ten Spalte von B multipliziert und die Ergebnisse Addiert um den Eintrag $a_{i,j}$ der Produktmatrix zu erhalten. Schematisch kann dies etwa wie folgt veranschaulicht werden:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} \ldots & \color{red}{3} & \ldots \\ \ldots & \color{red}{1} & \ldots \\ \ldots & \color{red}{5} & \ldots \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \color{blue}{2} & \color{blue}{4} & \color{blue}{6} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \color{blue}{2} \cdot \color{red}{3} + \color{blue}{4} \cdot \color{red}{1} + \color{blue}{6} \cdot \color{red}{5} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \end{array}$$

Beispiel 13.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 17 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Übung 23. Berechnen Sie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Lösung.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 16 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Beispiel 14. Es gilt einerseits

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

und andererseits

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Wir bemerken insbesondere, dass die Multiplikation von Matrizen nicht kommutativ ist.

Definition 18. Die $(n \times n)$-Einheitsmatrix $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat auf der Diagonalen lauter Einsen und ansonsten nur Nullen als Einträge:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Bemerkung. Die $n \times n$-Einheitsmatrix ist das neutrale Element der Matrixmultiplikation auf $\mathbb{R}^{n,n}$.

Definition 19. Ist $A = (a_{i,j})$ eine $n \times k$ Matrix, dann ist die zu A *transponierte* Matrix durch $A^T = (a_{j,i}) = (i, j) \mapsto a_{j,i}$ gegeben.

Bemerkung. Die zu einer Matrix A transponierte Matrix A^T erhält man durch vertauschen von Zeilen und Spalten.

Satz 1 (Eigenschaften)**.** *Die Matrixmultiplikation ist assoziativ, distributiv und nicht kommutativ. Es gilt zudem die Regel* $(A \circ B)^T = B^T \circ A^T$.

Beweis. Siehe Wandtafel. □

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Nachdem wir uns nun die Mühe gemacht habe Matrizen und deren Grundoperationen zu definieren, wollen wir nun eine erste Anwendung kennenlernen in der wir Matrizen gewinnbringend einsetzen können. Wir werden zunächst lineare Gleichungssysteme als Matrizen ausdrücken, dies erreichen wir mit der sogenannten Koeffizientenmatrix, und diese kompakte Notation im Zuge des "Gauss Verfahrens" zum lösen von linearen Gleichungssystemen verwenden.

Definition 20. Die *Koeffizientenmatrix* eines lineares Gleichungssystem von der Form

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m &= b_n
\end{aligned}$$

mit Unbekannten $x_1, .., x_n$ und *Koeffizienten* $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ ist durch

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

gegeben. Fügen wir der Koeffizientenmatrix den Vektor $(b_1, \dots, b_n)$ als letzte Spalte hinzu, dann erhalten wir die *erweiterte Koeffizientenmatrix*

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} & b_n \end{bmatrix}$$

des Gleichungssystems.

Beispiel 15. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
x + y - z &= 5 \\
2x + 2y &= 1 \\
x - y - z &= -5.
\end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses Systems ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Als nächstes wollen wir uns überlegen, wie wir mithilfe der Koeffizientenmatrix effektiv lineare Gleichungssysteme lösen können. Wir gehen dabei wie folgt vor:

- Wir überlegen uns, wie die Koeffizientenmatrix von besonders einfach zu lösenden Gleichungssystemen aussieht.
- Wir überlegen uns, wie wir jedes Gleichungssystem in ein einfach zu lösendes Gleichungssystem mit derselben Lösungsmenge umformen können.

Beispiel 16. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 14 \\ 3y - 5z &= 3 \\ 8z &= 16. \end{aligned}$$

Offensichtlich lässt sich dieses Gleichungssystem einfach durch "Einsetzen von Unten nach Oben" lösen. Wir bestimmen zuerst

$$z = 2$$

aus der letzten Gleichung. Daraus folgt zusammen mit der Gleichung $3y - 5z = 3$ sofort

$$y = \frac{3 + 5z}{3} = \frac{13}{3}.$$

Daraus erhalten wir wiederum mit der Gleichung $2x + 3y + z = 14$ sofort den Wert von x:

$$x = \frac{14 - 3y - z}{2} = \frac{14 - 13 - 2}{2} = \frac{-1}{2}.$$

Offenbar lässt sich dieses "von Unten nach Oben" Verfahren immer dann anwenden, wenn das zu lösende Gleichungssystem in jeder Zeile (Gleichung) neben genau einer "neuen" Unbekannten nur Unbekannte enthält, die bereits in Zeilen weiter unten vorkommen. Für die Koeffizientenmatrix entspricht dies einem Spezialfall der *Zeilenstufenform*.

Definition 21. Eine Matrix $(a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,m}$ ist in Zeilenstufenform, wenn folgende Kriterien erfüllt sind:

- Unterhalb einer Zeile aus lauter Nullen stehen keine von Null verschiedenen Einträge.
- Ist die Zeile Z oberhalb der Zeile Z', dann steht der erste Eintrag von Z, der von 0 verschieden ist, weiter Links als der erste Eintrag von Z' mit derselben Eigenschaft.

Beispiel 17. Die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist in Zeilenstufenform. Die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ist nicht in Zeilenstufenform.

Übung 24. Entscheiden Sie welche der folgenden Matrizen in Zeilenstufenform sind.

$$\begin{bmatrix} 12 & 56 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nachdem wir nun festgestellt haben, welche Matrizen besonders leicht zu lösende Gleichungssysteme darstellen, wollen wir uns der Frage widmen, wie wir ein lineares Gleichungssystem in ein äquivalentes, leicht zu lösendes System umwandeln können. Folgende Kriterien sollen demnach erfüllt sein:

- Das neue Gleichungssystem ist leicht lösbar. D.h. die erweiterte Koeffizientenmatrix des neuen Gleichungssystems ist in Zeilenstufenform.
- Das neue Gleichungssystem hat dieselbe Lösungsmenge wie das ursprüngliche System.

Bei der "Vereinfachung" von Gleichungssystemen spielen sogenannte "elementare Zeilenumformungen" eine wichtige Rolle. Elementare Zeilenumformungen sind (gewisse) Manipulationen an einer Koeffizientenmatrix, die nichts an der Lösungsmenge des entsprechenden Gleichungssystems ändern.

Definition 22. Unter *elementaren Zeilenumformungen* an einer Matrix versteht man folgende Operationen:

- Zeilen vertauschen
- Eine Zeile mit einem von Null verschiedenen Faktor multiplizieren
- Ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren

Bemerkung. Elementare Zeilenumformungen an der erweiterten Koeffizientenmatrix ändern an der Lösungsmenge des entsprechenden Gleichungssystems nichts.

Jede Matrix lässt sich mit dem im folgenden beschriebenen Algorithmus in Zeilenstufenform bringen.

Algorithmus (Gauss-Verfahren)**.** Folgende Schritte werden angewendet, bis die Matrix in Zeilenstufenform vorliegt.

1. Ordnen der Zeilen, so dass die oberste Zeile möglichst weit links stehende, von Null verschiedene Einträge hat.

2. Addieren von geeigneten Vielfachen der ersten Zeile zu den anderen Zeilen, bis unter dem ersten von Null verschiedenen Eintrag der ersten Zeile nur noch Nullen stehen.

3. Anwenden desselben Algorithmus auf die Teilmatrix, die entsteht, wenn die erste Zeile gelöscht wird.

Beispiel 18. Wir wollen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2y + 3z &= 11 \\ x + y + z &= 6 \\ 3x - 2y - 3z &= -8 \end{aligned}$$

lösen. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$

Wir wenden nun das Gauss-Verfahren auf diese Matrix an:
Wir ordnen die Zeilen um (Schritt 1) und erhalten

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & -2 & -3 & -8 \end{bmatrix}.$$

Wir ziehen das dreifache der ersten Zeile von der dritten Zeile ab (Schritt 2) und erhalten

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -5 & -6 & -26 \end{bmatrix}.$$

Wir setzen das Verfahren mit der Teilmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -5 & -6 & -26 \end{bmatrix}$$

fort (Schritt 3). Wir addieren $\frac{5}{2}$-fache der zweiten Zeile (erste Zeile der Teilmatrix) zur dritten Zeile hinzu (Schritt 2) und erhalten

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Da diese Matrix in Zeilenstufenform ist, endet das Gauss-Verfahren. Die resultierende Matrix entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ 2y+3z &= 11 \\ \frac{3}{2}z &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Durch "Einsetzen von Unten" erhalten wir

$$\begin{aligned} z &= 1 \\ y &= \frac{11-3z}{2} = 4 \\ x &= 6-y-z = 1. \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Gauss-Verfahren lässt sich auf vielfältige Weise modifizieren. Um sich den zweiten Schritt zu erleichtern kann man zum Beispiel nach dem ersten Schritt die erste Zeile mit $\frac{1}{\text{erster Koeffizient}}$ multipliziert. Eine weitere Verfeinerung ist es, mit Zeilenoperationen solange fortzufahren, bis die Koeffizientenmatrix (nicht erweiterte) einer Einheitsmatrix mit eventuellen zusätzlichen Nullzeilen entspricht, an der erweiterten Koeffizientenmatrix lässt sich dann die Lösung direkt (ohne Einsetzen) ablesen.

Übung 25. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x+y-z-u &= 0 \\ 2x-y &= 2 \\ 3x+2y+2z-u &= 9 \\ y-z+5u &= 16 \end{aligned}$$

mit dem Gauss-Verfahren.

Lösung.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 16 \end{bmatrix}$$

Subtrahiere von der 2. Zeile und der 3. Zele geeignete Vielfache der ersten Zeile.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 16 \end{bmatrix}$$

Vertausche 3. und 4. Zeile.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

geeginete Vielfache der 2. zur 3. und 4. Zeile addieren.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & 17 & 50 \end{bmatrix}$$

Letzte beiden Zeilen vertauschen (und letzte Zeile mit -1 multiplizieren).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & -50 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 25 \end{bmatrix}$$

Vier mal die 3. Zeile von der 4. Zeile abziehen, danach letzte Zeile durch 75 teilen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(hier könnte man bereits rückwärts einsetzen) Das 17 fache der 4. zur 3. Zeile addieren.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Zeile 2 ersetzen durch $Z2 - 5 * Z4 + Z3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Zeile 1 ersetzen durch $Z1 - Z2 + Z3 + Z4$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Die (einzige) Lösung des Gleichungssystems ist somit $x = y = 2$, $z = 1$ und $u = 3$.

Beispiel 19. Wir können mit dem Gauss-Verfahren auch erkennen, wenn ein lineares Gleichungssystem keine Lösung besitzt. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 0 \\ x - 2y &= 0. \end{aligned}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Wir wenden das Gauss-Verfahen an:
Schritt 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Schritt 3 und 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Die letzte Zeile entspricht der Gleichung

$$0x + 0y = 5$$

und zeigt somit, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist.

2.3 Vektorräume

Wir wenden uns nun einem zentralen Untersuchungsgegenstand der linearen Algebra, den Vektorräumen, zu. Vektorräume durchdringen so viele Zweige der Mathematik und der Informatik, dass es müssig wäre diese hier aufzählen zu wollen.

Wir möchten Vektorräume dadurch erhalten, dass wir in geeigneter Weise vom euklidischen Raum abstrahieren. Die Frage, die wir uns zunächst stellen ist demnach die, wie eine algebraische Struktur auszusehen hat, in der wir "Vektorgeometrie" betreiben können. Bevor wir uns aber den eigentlichen Vektoren zuwenden, wollen wir geeignete Eigenschaften von "Skalaren" festhalten. Wir tun dies in der folgenden Definition eines Körpers.

Definition 23. Ein *Körper* ist eine Struktur $\mathbb{K} = (K, +, \cdot)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0_K.
2. $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1_K.
3. (Distributivgesetz) Für alle $x, y, z \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= (x \cdot y) + (x \cdot z) \\ (x + y) \cdot z &= (x \cdot z) + (y \cdot z). \end{aligned}$$

Bemerkung. Wenn aus dem Kontext hervorgeht welcher Körper gemeint ist, dann schreiben wir auch 0 statt 0_K und 1 statt 1_K (selbst dann, wenn $0_K \neq 0$ oder $1_K \neq 1$ gilt).

Beispiel 20.

- Die Struktur $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (mit der üblichen Addition und Multiplikation) ist kein Körper, da $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ keine Gruppe ist.
- Die Strukturen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ (mit der üblichen Addition und Multiplikation) sind Körper.
- Die Struktur $(\mathbb{Z}/5, +, \cdot)$ (mit der üblichen Addition und Multiplikation von Restklassen) ist ein Körper.

Übung 26. Zeigen Sie, dass die Struktur $(\mathbb{Z}/n, +, \cdot)$ genau dann ein Körper ist, wenn n eine Primzahl ist.

Lösung. Wir wissen aus dem ersten Semester, dass ein Element $x \in Z/n$ genau dann ein multiplikatives Inverses hat, wenn $ggT(x, n) = 1$ gilt. Daraus folgt direkt die Behauptung.

Es sei für das ganze Kapitel $\mathbb{K}$ ein beliebiger aber fest gewählter Körper.

Definition 24. Ein $\mathbb{K}$-*Vektorraum*($\mathbb{K}$-VR) ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ mit:

1. $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe.
2. Es ist $\cdot : K \times V \to V$ und für alle Elemente $k, r \in K$ und $u, v \in V$ gelten:
   a) $k \cdot (r \cdot v) = kr \cdot v$
   b) $k \cdot (u + v) = (k \cdot u) + (k \cdot v)$
   c) $(r + s) \cdot v = (r \cdot v) + (s \cdot v)$
   d) $1_K \cdot v = v$.

Bemerkung. Wenn man in einem allgemeinen Kontext von Vektoren spricht, dann meint man damit die Elemente eines Vektorraumes. Wenn man von Skalaren spricht, dann sind damit die Elemente des zugrundeliegenden Körpers gemeint.

Beispiel 21.

1. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen (mit den üblichen Verknüpfungen) ist ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.
2. Die euklidischen Räume zusammen mit der Skalarmultiplikation und der Vektoraddition sind $(\mathbb{R}, +, \cdot)$-Vektorräume.

Bemerkung (Rechenregeln in Vektorräumen)**.** Es sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Es gelten für alle $r \in K$ und alle $u, v \in V$:

1. $0_K \cdot v = 0_V = r \cdot 0_V$
2. $(-r) \cdot v = -(r \cdot v) = r \cdot (-v)$
3. $r \cdot v = 0_V \Rightarrow r = 0_K \vee v = 0_V$

Beweis. Wir benutzen die Definition von Vektorräumen um die einzelnen Behauptungen nachzurechnen:

1. Weil $(V, +)$ eine Gruppe ist, können wir kürzen. Aus
$$0_K \cdot v = (0_K + 0_K) \cdot v = (0_K \cdot v) + (0_K \cdot v)$$
ergibt sich demnach $0_K \cdot v = 0_V$. Aus
$$r \cdot 0_V = r \cdot (0_V + 0_V) = (r \cdot 0_V) + (r \cdot 0_V)$$
ergibt sich in gleicher Weise $0_V = r \cdot 0_V$.

2. Dies folgt nun direkt aus dem ersten Punkt.
3. Wir nehmen an, dass $r \cdot v = 0_V$ und $r \neq 0_K$ gilt. Wir müssen zeigen, dass $v = 0_V$ gilt. Weil $r \neq 0_K$ gilt, hat $r \in K$ ein multiplikatives Inverses r^{-1}. Es gilt wie gewünscht

$$v = 1_K \cdot v = (r^{-1}r) \cdot v = r^{-1} \cdot (r \cdot v) = r^{-1}0_V = 0_V.$$

□

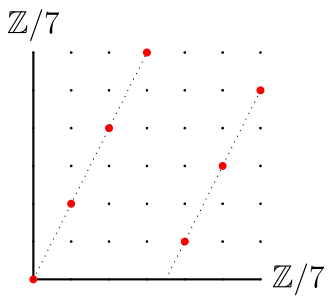
Beispiel 22. Wir betrachten den Körper $\mathbb{K} = (\mathbb{Z}/7, +, \cdot)$. Die Menge $\mathbb{K}^2$ wird (genau wie im Fall des euklidischen Raumes) durch die komponentenweise definierten Verknüpfungen zum $\mathbb{K}$-VR:

$$(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{u}, \bar{v}) = (\overline{x+u}, \overline{y+v})$$
$$\bar{a} \cdot (\bar{x}, \bar{y}) = (\overline{ax}, \overline{ay}).$$

Die "Gerade"

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix}$$

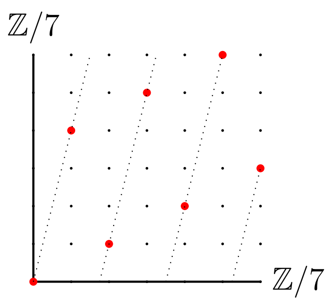
im Vektorraum $((\mathbb{Z}/7)^2, +, \cdot)$:



Die "Gerade"

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{4} \end{pmatrix}$$

im Vektorraum $((\mathbb{Z}/7)^2, +, \cdot)$:



Definition 25. Ist V ein K-VR und $\emptyset \neq U \subset V$ abgeschlossen unter den Verknüpfungen $\cdot$ und $+$, dann nennen wir U einen *Untervektorraum* von V.

Beispiel 23. Jede gerade im $\mathbb{R}^2$ die durch den Nullpunkt geht ist ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}^2$. Die (Hyper-) Ebene $U := \{(r_1, .., r_7, 0) \mid r_1, .., r_7 \in \mathbb{R}\}$ ist (zusammen mit den entsprechenden Verknüpfungen) ein 7-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^8$.

Bemerkung. E sei V ein K-VR und für alle $i \in I \neq \emptyset$ sei U_i ein Untervektorraum von V, dann ist $U := \bigcap_{i \in I} U_i$ ebenfalls ein Untervektorraum von V.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass U bezüglich $\cdot$ und $+$ abgeschlossen ist. Es seien also $r \in K$ und $u, v \in U$ beliebig, dann gilt

$$u \in U \Rightarrow \forall i \in I \, (u \in U_i) \overset{U_i \text{ abg.}}{\Rightarrow} \forall i \in I \, (ru \in U_i) \Rightarrow ru \in U$$

und

$$u, v \in U \Rightarrow \forall i \in I \, (u, v \in U_i) \overset{U_i \text{ abg.}}{\Rightarrow} \forall i \in I \, (u + v \in U_i) \Rightarrow u + v \in U.$$

□

Definition 26. Sind $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren und $r_1, \ldots r_n$ Skalare, dann nennen wir einen Asudruck von der Form

$$\sum_{i=1}^{n} r_i v_i$$

eine *Linearkombination* der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$. Ist X eine Teilmenge eines Vektorraumes V, dann bezeichnen wir mit

$$\langle X \rangle = \text{ Die Menge aller Linearkombinationen mit Vektoren aus } X$$

den *von X aufgespannten Untervektorraum* von V. Wir einigen uns dabei auf

$$\langle \varnothing \rangle = \{0_V\}.$$

Bemerkung. Jeder Vektor aus $\mathbb{R}^3$ kann als Linearkombination der Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Es ist demnach $\mathbb{R}^3 = \langle \{e_1, e_2, e_3\} \rangle$.

Übung 27. Schreiben Sie den Vektor $(1, 2, 3)$ als Linearkombination der Vektoren $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 2)$ und $(0, 0, 1)$

Lösung. Wir suchen eine Darstellung

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Wir müssen daher das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= r + s \\ 2 &= s \\ 3 &= r + 2s + t \end{aligned}$$

lösen. Wir erhalten

$$r = -3 \qquad s = 2 \qquad t = 2.$$

Und damit

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Übung 28. Wir arbeiten im Vektorraum $((\mathbb{Z}/7)^2, +, \cdot)$. Schreiben Sie den Vektor $(\bar{4}, \bar{1})$ als Linearkombination der Vektoren $(\bar{5}, \bar{2})$ und $(\bar{3}, \bar{0})$. Repräsentieren Sie alle Restklassen durch ihre kleinsten positiven Repräsentanten.

Lösung. Wir suchen eine Darstellung

$$\begin{pmatrix}\bar{4}\\\bar{1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\bar{5}\\\bar{2}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\bar{3}\\\bar{0}\end{pmatrix}$$

Wir müssen daher das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \bar{4} &= \bar{5}a + \bar{3}b \\ \bar{1} &= \bar{2}a \end{aligned}$$

lösen. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $a = \bar{4}$ und damit, durch Einsetzen in die erste Gleichung

$$\begin{aligned} \bar{3}b &= \bar{4} - \bar{5} \cdot \bar{4} \\ &= \bar{4} - \overline{20} \\ &= -\overline{16} = \bar{5} \end{aligned}$$

Somit gilt

$$b = \bar{5} \cdot \bar{5} = \overline{25} = \bar{4}.$$

Wir erhalten also die gewünschte Linearkombination durch

$$\begin{pmatrix} \bar{4} \\ \bar{1} \end{pmatrix} = \bar{4} \begin{pmatrix} \bar{5} \\ \bar{2} \end{pmatrix} + \bar{4} \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Ist eine Gerade g (durch den Nullpunkt) mit dir Parametergleichung

$$\vec{x} = \alpha \vec{v}$$

gegeben, dann gilt:

$$g = \langle \{\vec{v}\} \rangle.$$

Analog gilt für jede Ebene E, die durch den Nullpunkt und die Punkte p_1 und p_2 geht die Gleichung

$$E = \langle \{p_1, p_2\} \rangle.$$

Beispiel 24. Wir arbeiten in $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

1. $\langle \emptyset \rangle = \Big\{(0,0,0)\Big\}$
2. $\Big\langle \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \Big\rangle = \mathbb{R}^3$
3. $\Big\langle \{(1,1,0),(150,1,0)\} \Big\rangle \simeq \mathbb{R}^2$

Bemerkung. Für jede Teilmenge $X \subset V$ eines Vektorraumes V ist $\langle X \rangle$ ein Untervektorraum von V.

2.3.1 Basen und Dimension

Eine Menge $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ von Vektoren ist ein Erzeugendensystem eines Vektorraumes V, falls man alle Vektoren aus V als Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ schreiben kann. Die Beiden Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ bilden zum Beispiel ein Erzeugendensystem des Vektorraumes $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, da man jeden Vektor (x, y) als Linearkombination der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

darstellen kann. Erzeugendensysteme (insbesondere freie) spielen später eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von linearen Abbildungen. Wir werden zum Beispiel sehen, dass die gesamte Information über eine lineare Abbildung in ihrem "Verhalten" auf einem Erzeugendensystem gegeben ist.

Definition 27. Es sei V ein $\mathbb{K}$-VR und $X \subset V$. Die Menge X heisst *Erzeugendensystem von V*, wenn $\langle X \rangle = V$ gilt.

Beispiel 25. Die Menge $\{(2, 3), (4, 4)\}$ ist ein Erzeugendensystem des Vektorraumes $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. Um zu sehen wieso dies so ist, versuchen wir einen beliebigen Vektor (x, y) als Linearkombination von $(2, 3)$ und $(4, 4)$ zu schreiben. Wir wollen also $a, b \in \mathbb{R}$ finden, die der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

genügen. Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= 2a + 4b \\ y &= 3a + 4b. \end{aligned}$$

Es folgt

$$y - x = a.$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\begin{aligned} a &= (y - x) \\ b &= \frac{3x - 2y}{4}. \end{aligned}$$

Wir wollen unsere Lösung nun noch testen. Wir wollen den Vektor $(5, 7)$ als Linearkombination von $(2, 3)$ und $(4, 4)$ schreiben. Entsprechend unserer vorherigen Lösung setzen wir

$$\begin{aligned} a &= y - x = 7 - 5 = 2 \\ b &= \frac{3x - 2y}{4} = \frac{15 - 14}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun unsere Lösung ein und erhalten wie gewünscht

$$2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Wenn wir zeigen wollen, dass eine Menge von Vektoren ein Erzeugendensystem ist, dann ist eine Möglichkeit zu zeigen, dass ein "beliebiger" Vektor als Linearkombination von den gegebenen Vektoren dargestellt erden kann. Dies haben wir im vorhergehenden Beispiel mit dem "beliebigen Vektor" (x, y) gemacht. Eine andere Strategie besteht darin, sich davon zu überzeugen, dass die gegebenen Vektoren alle Vektoren eines uns bekannten Erzeugendensystems erzeugen können. Wollen wir in diesem Sinne etwa zeigen, dass die Vektoren $(2, 3)$ und $(4, 4)$ zusammen ein Erzeugendensystem des $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ bilden, dann genügt es zu zeigen, dass man die Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ darstellen kann.

Übung 29. Zeigen Sie, dass die Vektoren $(1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2)$ ein Erzeugendensystem des Vektorraumes $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ bilden.

Lösung. Wir müssem zeigen, dass sich der "beliebige" Vektor (x, y, z) als Linearkombination der gegebenen Vektoren schreiben lässt. Dazu lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a+3b+c&=x\\ 2a+2b+3c&=y\\ 3a+b+2c&=z \end{aligned}$$

nach a, b und c auf. Wir vereinfachen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a+3b+2c&=x\\ -4b-c&=y-2x\\ -8b-4c&=z-3x \end{aligned}$$

und weiter zu

$$\begin{aligned} a+3b+c&=x\\ -4b+c&=y-2x\\ -3c&=z+x-2y. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$c=-\frac{z+x-2y}{3} \qquad b=-\frac{y-5x+z}{12} \qquad a=\frac{x-5y+7z}{12} \qquad .$$

Weil dieses System somit für alle x, y, z eine Lösung besitzt, bilden die gegebenen Vektoren ein Erzeugendensystem vom $\mathbb{R}^3$.

Wir betrachten $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ und $S_2 = \{(1,2),(1,1),(3,4)\}$. Obwohl beide Mengen S_1, S_2 Erzeugendensysteme sind, fällt auf, dass S_1 “minimalistischer” als S_2 ist. Wir sehen zum Beispiel, dass der Vektor $(3,4)$ bereits von den anderen Vektoren in S_2 erzeugt werden kann:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

Man kann sagen, dass der Vektor $(3,4)$ im System S_2 gewissermassen “redundant” ist. Ein Nachteil solcher redundanter Systeme besteht darin, dass die Eindeutigkeit bei der Darstellung von Vektoren als Linearkombination verloren geht. Mengen von Vektoren die eindeutige Linearkombinationen generieren heissen “frei” oder “linear unabhängig”.

Definition 28. Es sei $(V,+,\cdot)$ ein Vektorraum (über $\mathbb{K} = (K,+,\cdot)$). Eine Menge $X \subset V$ von Vektoren heisst *linear unabhängig* oder *frei* (über $\mathbb{K}$), wenn für alle, paarweise verschiedenen, Vektoren $v_1,..v_n \in X$ und alle Skalare $r_1,..,r_n \in K$ mit $1 \leq n \in \mathbb{N}$ stets

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i \neq 0 \qquad \text{oder} \qquad r_1,..,r_n = 0$$

gilt. Ein freies Erzeugendensystem von V heisst *eine Basis* von V.

Beispiel 26. Die Menge $\{(0,0,1),(1,2,3)(0,2,0)\}$ ist eine freie Teilmenge des Vektorraumes $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$. Um dies zu sehen, müssen wir zeigen, dass für alle reellen Zahle a,b,c aus

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

sofort $a = b = c = 0$ folgt. Dies sehen wir anhand des entsprechenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned}0 &= b\\ 0 &= 2b + 2c\\ 0 &= a + 3b\end{aligned}$$

durch einsetzen der ersten Gleichung in die beiden anderen Gleichungen.

Übung 30. Entscheiden Sie welche der folgenden Mengen freie Teilmengen des Vektorraumes $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ sind.

(a) $(1,2),(2,1)$

(b) $(1,1),(\pi,\pi)$

(c) $(1,0),(0,1),(1,1)$

(d) $(3,3)$

(e) $(0,0),(0,1)$

(f) $(0,0)$

Lösung. (a),(d)

Als nächstes sehen wir, dass in freien Mengen von Vektoren keiner der Vektoren als Linearkombination der restlichen Vektoren dargestellt werden kann.

Satz 2. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-VR und $X \subset V$ enthalte nicht den Nullvektor. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *X ist nicht linear unabhängig.*
2. *Es gibt Vektoren $v \in X$ und $v_1, .., v_n \in X \backslash \{v\}$ und Skalare $r_1, .., r_n$ mit*
$$v = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i.$$

Beweis.

1. $\Rightarrow$ 2. : Ist X eine linear abhängige (=nicht freie) Teilmenge von V, dann gibt es paarweise verschiedene Vektoren $v_1, .., v_n \in X$ und Skalare $r_1, .., r_n \neq 0$ mit $n \geq 1$ und
$$0 = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i.$$
Es gilt also
$$-r_1 \cdot v_1 = \sum_{i=2}^{n} r_i \cdot v_i$$
und somit
$$v := v_1 = \sum_{i=2}^{n} (-(r_1)^{-1} \cdot r_i) \cdot v_i.$$
Da die Vektoren $v_1, .., v_n$ paarweise verschieden sind, kommt $v = v_1$ im rechten Teil der Gleichung nicht vor.

2. $\Rightarrow$ 1.: Es gelte nun

$$v = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i$$

mit Vektoren $v \in X$ und $v_1, .., v_n \in X \backslash \{v\}$ und Skalaren $r_1, .., r_n$. Offensichtlich lässt sich die Null, mit $v_{n+1} := v$ und $r_{n+1} := -1$, folgenderweise darstellen:

$$0 = (\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i) - v_{n+1} = (\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i) + r_{n+1} \cdot v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} r_i \cdot v_i.$$

$\square$

Wenn B eine Basis ist (eine freie und erzeugende Menge), dann kann jeder Vektor eindeutig als Linearkombination von Vektoren aus B geschrieben werden.

Beispiel 27. Die Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ bilden eine Basis des Vektorraumes $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. Weil aus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sofort $a = x$ und $b = y$ folgt (und weil die Menge $\{(1, 0), (0, 1)\}$ offensichtlich erzeugend ist).

Satz 3. *Es sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ mit $b_i \neq b_j$ falls $i \neq j$ eine Teilmenge von einem $\mathbb{K}$-VR V. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *B ist eine Basis von V.*

2. *Für jeden Vektor $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte Skalare $r_1, .., r_k \in K$ mit*

$$v = \sum_{i=1}^{k} r_i b_i$$

Beweis.

1. $\Rightarrow$ 2.: Es sei $\{b_1, .., b_k\}$ eine Basis und $v \in V$ beliebig. Da $\{b_1, .., b_k\}$ eine Basis ist, gilt $\langle\{b_1, .., b_k\}\rangle = V$. Somit gibt es Skalare $r_1, .., r_k \in K$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{k} r_i b_i.$$

Wir müssen noch zeigen, dass diese Skalare durch v eindeutig bestimmt sind. Es seien $s_1, .., s_k$ weitere Skalare mit der oben genannten Eigenschaft. Wir zeigen $(s_1, .., s_k) =$

$(r_1, .., r_k)$. Betrachte

$$\begin{aligned} v = \sum_{i=1}^{k} r_i b_i \text{ und } v &= \sum_{i=1}^{k} s_i b_i \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} r_i b_i &= \sum_{i=1}^{k} s_i b_i \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} r_i b_i - \sum_{i=1}^{k} s_i b_i &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} (r_i - s_i) b_i &\overset{B \text{ frei}}{=} 0 \Rightarrow \forall i \leq k \, (r_i = s_i) \end{aligned}$$

2. $\Rightarrow$ 1.: Wir müssen unter den gegebenen Voraussetzungen zeigen, dass B sowohl frei als auch erzeugend ist.

a) Erzeugend: Nach Voraussetzung besitzt jedes Element von V eine Darstellung $v = \sum_{i=1}^{k} r_i b_i$ für geeignete Elemente $r_i, .., r_k \in K$. Daraus folgt, dass jeder Vektor v aus V zu $\langle B \rangle$ gehört und somit, dass B ein Erzeugendensystem für V ist.

b) Frei: Wäre B nicht frei, dann gäbe es eine Darstellung $0 = \sum_{i=1}^{k} r_i b_i$ so, dass mindestens eines der Elemente von $\{r_1, .., r_k\}$ von 0 verschieden wäre, dies würde aber zu zwei verschiedenen Darstellungen der 0 führen, was im Widerspruch zur Annahme steht.

□

Theorem 2 (Basisergänzungssatz von Steinitz). *Ist V ein $\mathbb{K}$-VR und ist $E \subset V$ ein Erzeugendensytem und $F \subset V$ eine freie Teilmenge von V, dann gibt es eine Menge $X \subset E$ mit $X \cap F = \emptyset$, so dass $F \cup X$ eine Basis von V ist.*

Beweis. Der Beweis dieses Satzes basiert auf höheren mathematischen Prinzipien (Auswahlaxiom). □

Folgerung. *Jeder Vektorraum hat eine Basis. Besitzt ein Vektorraum V eine endliche Basis B, dann ist jede weitere Basis C von V ebenfalls endlich und es gilt sogar $|B| = |C|$.*

Definition 29. Es sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Existiert eine endliche Basis B von V, dann ist die *Dimension von V über K* als $dim_K(V) = |B|$ gegeben. Besitzt V keine endliche Basis, dann sagen wir, dass V über $\mathbb{K}$ unendlich dimensional sei und schreiben $dim_K(V) = \infty$.

Beispiel 28. 1. $dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$, da wie Sie in den Übungen gesehen haben, die Menge $\{1, \pi, \pi^2, ...\} \subset \mathbb{R}$ einerseits unendlich aber auch frei über $\mathbb{Q}$ ist.

2. $dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = 1$, da die Menge $\{1\} \subset \mathbb{Q}$ eine Basis von $\mathbb{Q}$ ist.

3. $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$, da die Menge $\{e_i \mid 0 < i < n\}$, mit

$$e_i = (0, .., \underbrace{1}_{i \text{ te Stelle}}, .., 0),$$

eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist.

Übung 31. Erweitern Sie die Menge $\{(\bar{1}, \bar{2})\}$ zu einer Basis von $((\mathbb{Z}/7)^2, +, \cdot)$.

Lösung. Die Menge $E = \{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})\}$ ist erzeugend. Aufgrund des Basisergänzungssatzes wissen wir, dass eine der beiden Mengen $\{(\bar{1}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{1})\}$ oder $\{(\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})\}$ eine Basis bildet. Tatsächlich sind beide diese Mengen Basen.

2.3.2 Lineare Abbildungen

Wir wollen im Folgenden, analog wie wir dies mit den algebraischen Grundstrukturen getan haben, den Begriff eines Homomorphismus von Vektorräumen untersuchen. Die Tatsache, dass sich Homomorphismen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen[2], durch Matrizen, endlich beschreiben lassen machen diese Objekte für Computer Systeme handhabbar und somit für die Informatik besonders interessant, weil man mithilfe des Matrizenkalküls gewissermassen mit linearen Funktionen und linearen Gleichungssystemen "rechnen" kann.

Definition 30. Es seien $(W, +', \cdot')$ und $(V, +, \cdot)$ beides $\mathbb{K}$-VR. Eine Abbildung $f : V \to W$ heisst $\mathbb{K}$-linear oder $\mathbb{K}$-VR Homomorphismus falls für alle Elemente $\lambda \in K$ und alle Vektoren $v, w \in V$ die Gleichungen

$$f(v + w) = f(v) +' f(w)$$

und

$$f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

erfüllt werden. Die Menge aller K-linearen Abbildungen von V nach W bezeichnen wir mit $Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$. Die Vektorräume V und W heissen zueinander ($\mathbb{K}$-)*isomorph*, falls es eine bijektive Abbildung in $Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ gibt.

Als erstes wollen wir feststellen, dass sich die Linearitätseigenschaft auf beliebige Linearkombinationen verallgemeinern lässt.

[2]Über einem Körper dessen Elemente sich ebenfalls endlich beschreiben lassen

Bemerkung. Ist $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung, dann gilt für alle $v_1, .., v_k \in V$ und alle $\lambda_1, .., \lambda_k \in K$ die Gleichung

$$f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(v_i).$$

Beweis. Induktion nach k:
Verankerung:

$$f(\sum_{i=1}^{0} \lambda_i v_i) = f(0_V) = 0_W = \sum_{i=1}^{0} \lambda_i f(v_i).$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i v_i) &= f((\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i) + \lambda_{k+1} v_{k+1}) = f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i) + f(\lambda_{k+1} v_{k+1}) \\ &\overset{I.A.}{=} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(v_i) + f(\lambda_{k+1} v_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(v_i) + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(v_i). \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Die Komposition von linearen Abbildungen ist wieder eine lineare Abbildung.

Beispiel 29. Einige Beispiele für $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen sind:

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\Big((r_1, r_2, r_3)\Big) = (r_2, r_3)$ (allgmein Projektionen).
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f\Big((r_1, r_2)\Big) = (0, r_1, r_2)$ (allgmein Einbettungen).
3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(r\mathrm{e}^{i\varphi}) = sr\mathrm{e}^{i(\varphi+\psi)}$ mit $s, \psi \in \mathbb{R}$ (Multiplikation von komplexen Zahlen).
4. Geometrische Transformationen wie z.B. Drehungen um den Ursprung, Spiegelungen an Geraden durch den Ursprung.

Definition 31. Für $f \in Hom_K(V, W)$ definieren wir

$$ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}.$$

Beispiel 30. Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (y, x) \\ g(x, y, z) &= (x, z) \\ h &= \text{“Drehung um } \frac{\pi}{2} \text{ (90°) im } \mathbb{R}^2 \text{ um den Ursprung”.} \end{aligned}$$

Der Kern von f besteht aus allen Punkten (x, y) mit $(y, x) = (0, 0)$. Es gilt daher $ker(f) = \{(0, 0)\}$. Der Kern von g besteht aus allen Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $(x, z) = (0, 0)$. Es gilt daher $ker(g) = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Der Einzige Punkt, der durch eine Drehung um $(0, 0)$ auf den Punkt $(0, 0)$ abgebildet wird ist der Ursprung selbst. Es gilt daher $ker(h) = \{(0, 0)\}$.

Übung 32. Bestimmen Sie den Kern der Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_1 - x_2).$$

Lösung. Der Kern besteht aus allen Punkte $(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5$, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Es gilt daher

$$ker(f) = \{(0, 0, x_3, x_4, x_5) \mid x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Satz 4. *Eine Funktion $f \in Hom_K(V, W)$ ist genau dann injektiv, wenn $ker(f) = \{0\}$ gilt.*

Beweis. Wir haben denselben Satz bereits für Gruppen und Gruppenhomomorphismen gezeigt (Lemma 6). Da Vektorräume mit der Addition von Vektoren eine Gruppe bilden folgt die Behauptung aus besagtem Satz. □

Der nächste Satz zeigt, dass die gesamte Information einer linearen Abbildung bereits durch die Werte, die die Abbildung auf einer Basis annimmt gegeben ist. Diese Tatsache ist die Grundlage, dass man lineare Abbildungen durch Matrizen darstellen kann.

Satz 5. *Sind V und W zwei K-VR und $f, g \in Hom_K(V, W)$, so dass f und g auf einer Basis von V dieselben Werte annehmen, dann gilt $f = g$.*

Beweis. Es sei $v \in V$ beliebig und B sei eine Basis von V auf der f und g übereinstimmen. Da B eine Basis ist, gibt es Elemente $b_1, .., b_k$ aus B und Skalare $\lambda_1, .., \lambda_k \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i$. Es gilt also

$$f(v) = f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(b_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g(b_i) = g(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i) = g(v).$$

□

Folgerung. *Sind V und W zwei K-VR und ist $B = \{b_1, .., b_k\}$ eine Basis von V sowie $f : B \to W$ eine beliebige Funktion, dann lässt sich f eindeutig zu einer $\mathbb{K}$-linearen Abbildung $\hat{f} : V \to W$ fortsetzen.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus der vorhergehenden Bemerkung. Wir definieren $\hat{f}(\sum_{i=1}^k \lambda_i b_i) := \sum_{i=1}^k \lambda_i f(b_i)$. Wir müssen zeigen, dass diese Funktion $\mathbb{K}$-linear ist. Für $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i$ und $w = \sum_{i=1}^k \mu_i b_i$ gilt

$$\begin{aligned}\hat{f}(v+w) &= \hat{f}\Big(\sum_{i=1}^k \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^k \mu_i b_i\Big) \\ &= \hat{f}\Big(\sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i) b_i\Big) = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i) f(b_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(b_i) + \sum_{i=1}^k \mu_i f(b_i) \\ &= \hat{f}(v) + \hat{f}(w).\end{aligned}$$

Für $\delta \in K$ gilt

$$\hat{f}(\delta v) = \hat{f}(\delta \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i) = \hat{f}(\sum_{i=1}^k (\delta\lambda_i) b_i) = \sum_{i=1}^k (\delta\lambda_i) f(b_i) = \delta \sum_{i=1}^k \lambda_i f(b_i) = \delta \hat{f}(v).$$

□

Beispiel 31. Es sei eine lineare Abbildungen $f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ gegeben. Wir wissen, dass

$$\begin{aligned} f(1,1) &= (3,3) \\ f(0,1) &= (5,1) \end{aligned}$$

gilt. Da die Vektoren $(1,1), (0,1)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden, können wir die Funktion f anhand der gegebenen Funktionswerte eindeutig bestimmen. Wir wollen $f(x,y)$ bestimmen. Zuerst stellen wir (x,y) in der Basis $(0,1), (1,1)$ dar. Wir lösen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= a + b. \end{aligned}$$

durch einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} a &= x \\ b &= y - x \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y - x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der linearität von f ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y-x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= x \cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y-x)\cdot f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + (y-x)\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5y-2x \\ 2x+y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beispiel 32. Es sei die $\mathbb{Z}/7$ lineare Abbildung $f : (\mathbb{Z}/7)^2 \to (\mathbb{Z}/7)^2$ durch die Funktionswerte

$$\begin{gathered} f(\bar{0},\bar{2}) = (\bar{4},\bar{1}) \\ f(\bar{1},\bar{1}) = (\bar{2},\bar{4}) \end{gathered}$$

gegeben. Wir wollen $f(x,y)$ allgemein bestimmen. Wir stellen (x,y) in der Basis $(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{1})$ dar.

$$\begin{aligned} x &= b \\ y &= \bar{2}a + b \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} b &= x \\ a &= \bar{4}(y-x). \end{aligned}$$

Aus der linearität von f ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f\left(\bar{4}(y-x)\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}\right) \\ &= \bar{4}(y-x)\cdot f\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \end{pmatrix} + x\cdot f\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \\ &= \bar{4}(y-x)\begin{pmatrix} \bar{4} \\ \bar{1} \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{2}y \\ \bar{4}y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Übung 33. Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei durch folgende Funktionswerte gegeben:

$$\begin{gathered} f(1,2) = (3,1,-1) \\ f(2,1) = (3,-1,1) \end{gathered}$$

Bestimmen Sie $f(6,0)$.

Lösung. Wir stellen einen allgemeinen Vektor (x, y) als Linearkombination der Vektoren $(1, 2)$ und $(2, 1)$ dar. Wir müssen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + 2b &= x \\ 2a + b &= y \end{aligned}$$

nach a und b auflösen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} a + 2b &= x \\ -3b &= y - 2x \end{aligned}$$

und somit

$$b = \frac{2x - y}{3} \qquad\qquad a = \frac{-x + 2y}{3}.$$

Daraus ergibt sich

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = a\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y - x \\ x - y. \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $f(6, 0) = (6, -6, 6)$.

Bemerkung. Zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume gleicher (endlicher) Dimension sind stets isomorph zueinander.

Beweis. Es seien V, W zwei K-VR mit $dim_K(V) = dim_K(W) = n \in \mathbb{N}$. Es sei $A := \{a_1, .., a_n\}$ eine Basis von V und $B := \{b_1, .., b_n\}$ eine Basis von W. Da $|A| = |B|$ gilt, gibt es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$. Entsprechend der vorhergehenden Bemerkung gibt es eine $\mathbb{K}$-lineare Fortsetzung $\hat{f} : V \to W$ von f. Wir müssen noch zeigen, dass $\hat{f} : V \to W$ bijektiv ist. Es sei $w \in W$ beliebig. Wir wählen $\lambda_1, .., \lambda_n \in K$ so, dass $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ gilt. Es folgt

$$\hat{f}(\sum_{i=1}^n \lambda_i f^{-1}(b_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(f^{-1}(b_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = w.$$

Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, dass $\hat{f}$ injektiv ist. Wir zeigen, dass $ker(\hat{f}) = \{0\}$ gilt. Es sei also $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \in ker(f)$ und somit

$$0 = \hat{f}(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i),$$

da B eine Basis ist, gilt somit für alle $0 < i < n$, die Gleichung $\lambda_i = 0$ und somit $v = 0$. □

Folgerung. *Ist V ein endlich dimensionaler K-VR, dann gibt es eine natürliche Zahl n, so dass V isomorph zu $(K^n, +, \cdot)$ ist.*

Bemerkung. Sind V, W zwei K-VR und ist $f \in Hom_K(V, W)$, dann ist $ker(f)$ ein Untervektorraum von V und $im(f)$ ein Untervektorraum von W.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass sowohl $ker(f) \subset V$ als auch $im(f) \subset W$ unter der entsprechenden Additione und Skalarmultiplikation abgeschlossen sind. Dazu seien zuerst $u, v \in ker(f)$, es gilt also

$$0 = 0 + 0 = f(u) + f(v) = f(u + v)$$

und somit $u + v \in ker(f)$. Für ein beliebiges $\lambda \in K$ gilt ausserdem

$$0 = \lambda \cdot 0 = \lambda f(v) = f(\lambda v),$$

also ist auch $\lambda v \in ker(f)$ und somit ist $ker(f)$ abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation.

Es seien nun $w, s \in im(f)$, es gibt also $u, v, \in V$ mit $w = f(v)$ und $s = f(u)$. Es gilt einerseits

$$w + s = f(v) + f(u) = f(v + u) \in im(f)$$

und andererseits auch für alle Skalare λ

$$\lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v) \in im(f)$$

also ist $im(f)$ abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation. □

Satz 6 (Dimensionssatz für lineare Abbildungen)**.** *Es seien V und W zwei endlich dimensionale K-VR und es sei $f \in Hom_K(V, W)$. Es gilt*

$$dim_K(im(f)) + dim_K(ker(f)) = dim_K(V)$$

Beweis. Es sei $\{v_1, .., v_n\}$ eine Basis von $ker(f)$. Wir benutzen den Basisergänzungssatz um die Menge $\{v_1, .., v_n\}$ zu einer Basis $\{v_1, .., v_n, b_1, .., b_k\}$ von ganz V zu erweitern, wobei $\{v_1, .., v_n\} \cap \{b_1, .., b_k\} = \emptyset$ gilt. Wir zeigen nun, dass die Menge $\{f(b_i) \mid i = 1, .., k\}$ eine Basis von $im(f)$ ist. Es sei $w = f(v)$ ein beliebiges Element von $im(f)$. Weil die Menge $\{v_1, .., v_n, b_1, .., b_k\}$ eine Basis von V ist, gibt es Skalare $\lambda_1, .., \lambda_n$ und $\mu_1, .., \mu_k$ so, dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i$$

und somit auch

$$w = f(v) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i\Big) = \underbrace{f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\Big)}_{=0} + f\Big(\sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i f(b_i),$$

also ist $\{f(b_i) \mid i = 1, .., k\}$ eine erzeugende Menge von $im(f)$. Wir müssen noch zeigen, dass $\{f(b_i) \mid i = 1, .., k\}$ frei in $im(f)$ ist. Wir nehmen an es gelte

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \mu_i f(b_i) = f\Big(\sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i\Big),$$

dann folgt

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i \in ker(f).$$

Weil $\{v_1, .., v_n\}$ eine Basis von $ker(f)$ ist, gibt es also Skalare $\lambda_1, .., \lambda_n$ mit

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

und somit

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i + \sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i) v_i.$$

Da die Menge $\{v_1, .., v_n, b_1, .., b_k\}$ aber eine Basis und somit frei ist, folgt $\lambda_1 = .. = \lambda_n = \mu_1 = .. = \mu_k = 0$. Insgesamt haben wir also eine Basis von V mit $k + n$ Elementen und eine Basis von $im(f)$ mit k sowie eine Basis von $ker(f)$ mit n Elementen, es gilt also

$$dim_K(V) = n + k = dim_K(ker(f)) + dim_K(im(f)),$$

was zu zeigen war. □

Folgerung. *Sind V und W endlich dimensionale K-Vektorräume gleicher Dimension, dann sind für $f \in Hom_K(V, W)$ folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist ein Isomorphismus*
2. *f ist injektiv*
3. *f ist surjektiv*

Beweis.

1⇒2 : Offensichtlich

2⇒3 : Es sei f surjektiv, dann ist also $im(f) = W$ und somit folgt aus dem Dimensionssatz, dass $dim_k(ker(f)) = 0$ ist, und daraus, dass $ker(f) = \{0\}$, die Funktion f ist also auch injektiv.

3⇒1 : Wenn f injektiv ist, dann gilt $ker(f) = \{0\}$ und somit $dim_K(ker(f)) = 0$. Aus dem Dimensionssatz folgt nun, dass $im(f)$ ein Untervektorraum von W von gleicher Dimension wie W selbst ist. Daraus folgt (überlegen Sie sich wieso dies so ist) $W = im(f)$, und somit die Surjektivität von f. □

Die darstellende Matrix von linearen Abbildungen

Wir haben bereits gesehen, dass lineare Abbildungen eindeutig durch ihre Werte auf einer Basis bestimmt sind. Wir werden nun diese Tatsache ausnutzen, um lineare Abbildungen als Matrizen zu notieren.

Definition 32. Es sei $v = (\lambda_1, .., \lambda_n) \in K^n$, für $i = 1, .., n$ bezeichnen wir mit $v[i] := \lambda_i$ die i-te Komponente von v.

Wir ordnen nun jeder $\mathbb{K}$-linearen Abbildung $f : (K^n, +, \cdot) \to (K^m, +, \cdot)$ eine darstellende Matrix zu.

Definition 33. Es sei $f \in Hom_K(K^n, K^m)$. Die *darstellende Matrix* M_f ist durch

$$M_f = \begin{bmatrix} f(e_1)[1] & \cdots & f(e_i)[1] & \cdots & f(e_n)[1] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f(e_1)[m] & \cdots & f(e_i)[m] & \cdots & f(e_n)[m] \end{bmatrix}$$

gegeben.

Bemerkung. Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $f : K^n \to K^m$ erhält man dadurch, dass man in der $n \times n$ Einheitsmatrix alle Spaltenvektoren durch ihre Bilder unter der Funktion f ersetzt.

Beispiel 33. Die darstellende Matrix der Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ x - z \\ y - z \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Übung 34. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von folgenden Funktionen

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(x, y, z) = (x + y, 0, y + z, 0)$
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(2, 0) = (0, 0)$ und $f(0, 3) = (3, 0)$

3. $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist Dreheung um 90 Grad im Gegenuhrzeigersinn.

Lösung.

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_d = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nachdem wir jeder linearen Abbildung eine Matrix zugeordnet haben, wollen wir nun jede Matrix als lineare Abbildung auffassen.

Definition 34. Ist $A \in K^{n,m}$ eine Matrix, dann bezeichnen wir mit F_A die zu A gehörende lineare Abbildung. F_A ist durch folgende Zuordnung gegeben:

$$F_A(v_1, \ldots, v_n) = A \circ \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = A \circ \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{bmatrix}^T.$$

Beispiel 34. Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y) = (y, x+y, x)$. Die darstellende Matrix von f ist

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nun berechnen wir $F_{M_f}(2, 3)$. Es gilt

$$F_{M_f}(2, 3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (3, 5, 2) = f(2, 3)$$

Beispiel 35. Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. Die darstellende Matrix von f ist dann

$$M_f = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Wir berechnen $F_{M_f}(2, 1)$. Es gilt

$$F_{M_f}(2, 1) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (2\lambda, \lambda) = f(2, 1)$$

Bemerkung. Wir haben beobachtet, dass in den gegebenen Beispielen, stets $F_{M_f} = f$ und $M_{f_A} = A$ gilt. Wenn wir also aus einer linearen Abbildung die darstellende Matrix konstruieren und diese Matrix wieder als lineare Abbildung interpretieren, dann erhalten wir die ursprüngliche Abbildung zurück. Analog dazu gilt, wenn wir eine beliebige Matrix als lineare Abbildung auffassen und davon die darstellende Matrix konstruieren, dann erhalten wir die ursprüngliche Matrix zurück. Dass diese Beobachtung im allgemeinen gilt beweisen wir im nächsten Satz.

Bemerkung. Ist A eine $n \times m$ Matrix und $v \in K^m$, dann schreiben wir auch $A \circ v$ für

$$A \circ \begin{bmatrix} v[1] \\ \vdots \\ v[m] \end{bmatrix}.$$

Bemerkung. Es sei $A = (a_{i,j})$ eine $n \times m$ Matrix. Es gilt

$$A \circ e_i^m = A \circ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{bmatrix} = i\text{'te Spalte von } A.$$

Satz 7. *Die Abbildungen*

$$A \mapsto F_A \qquad \textit{und} \qquad f \mapsto M_f$$

sind bijektiv und zueinander invers.

Beweis. Wir zeigen für beliebige Matrizen A und beliebige lineare Abbildungen f die Identitäten $M_{F_A} = A$ und $F_{M_f} = f$.

- Um $M_{F_A} = A$ einzusehen, betrachten wir die i-te Spalte von M_{F_A} und zeigen, dass sie mit der i-ten Spalte von A übereinstimmt. Es gilt:

$$\begin{aligned} i\text{-Spalte von } M_{F_A} &= F_A(e_i) \\ &= F_A(e_i) \\ &= A \circ (e_i) \\ &= i\text{-te Spalte von } A \end{aligned}$$

  Somit gilt $A = M_{F_A}$.

- Wir müssen noch $F_{M_f} = f$ überprüfen. Wegen

$$\begin{aligned} F_{M_f}(e_i) &= M_f \circ e_i \\ &= i\text{-te Spalte von } M_f \\ &= f(e_i) \end{aligned}$$

  stimmen die Funktionen F_{M_f} und f auf einer Basis überein und sind somit gleich.

□

Definition 35. Eine Matrix $A \in K^{n,n}$ heisst *invertierbar* oder *regulär*, falls es eine Matrix $B \in K^{n,n}$ gibt mit $A \circ B = B \circ A = E_n$. Die Matrix B ist in diesem Fall eindeutig bestimmt und wird mit A^{-1} bezeichnet.

Satz 8. *Es gelten folgende Tatsachen:*

1. *Die Multiplikation von Matrizen "entspricht" der Komposition von linearen Abbildungen. Das heisst, für alle linearen Abbildungen $f : K^n \to K^m$ und $g : K^m \to K^r$ gilt*
$$M_{g \circ f} = M_g \circ M_f$$
und für alle Matrizen $A \in K^{m,n}$ und $B \in K^{r,m}$ gilt
$$F_{B \circ A} = F_B \circ F_A.$$

2. *Ist $f : K^n \to K^n$ eine bijektive lineare Abbildung, dann ist M_f invertierbar und es gilt*
$$(M_f)^{-1} = M_{f^{-1}}$$
und wenn $A \in K^{n,n}$ eine invertierbare Matrix ist, dann ist F_A bijektiv und es gilt
$$F_{A^{-1}} = (F_A)^{-1}.$$

Beispiel 36. Es seien von einer $\mathbb{R}$ linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Werte $f(2,1) = (3,3)$ und $f(1,1) = (2,1)$ gegeben. Wir rekonstruieren die Matrix M_f. Wir betrachten den "Basiswechsel" $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$g(1,0) = (2,1) \qquad g(0,1) = (1,1).$$

Offensichtlich gilt nun

$$f \circ b(1,0) = (3,3) \qquad f \circ b(0,1) = (2,1)$$

und somit
$$M_f \circ M_g = M_{f \circ g} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

und dementsprechend

$$M_f = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \circ (M_g)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Übung 35. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei durch folgende Angaben gegeben:

$$f(1,1,1) = (3,2) \qquad f(1,1,0) = (2,1) \qquad f(0,1,1) = (2,2).$$

Geben Sie die Darstellungsmatrix von f an.

Lösung. Wir betrachten die Abbildung $g \circ f$ mit

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \overset{g}{\mapsto} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \overset{g}{\mapsto} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \overset{g}{\mapsto} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

wir können sofort folgendes ablesen:

$$M_{f\circ g} = \begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\end{bmatrix} \qquad M_g = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Da wir M_f bestimmen wollen, genügt es die Gleichung

$$M_f = M_f \circ M_g \circ (M_g)^{-1} = M_{f\circ g} \circ (M_g)^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\end{bmatrix} \circ (M_g)^{-1}$$

Wir berechnen $(M_g)^{-1}$ mit dem Gaussverfahren:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & -1\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Nun können wir die Matrix M_f berechnen:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definition 36. Es sei $A \in K^{n,m}$ und $b \in K^n$. Wir bezeichnen mit $[A, b] \in K^{n,m+1}$ die Matrix die entsteht wenn man zu A den Vektor b als weitere (letzte) Spalte hinzufügt.

Es sei G ein lineares Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A, b]$. Das Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A, (0, \ldots, 0)]$ nennen wir das zu G gehörende *homogene* Gleichungssystem.

Bemerkung. Ist A die Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems G und ist $[A, b]$ die erweiterte Koeffizientenmatrix desselben Gleichungssystems, dann entspricht G der (einen!) Gleichung

$$A \circ x = b.$$

Man spricht hierbei von der *Matrixform* von G. Das bestimmen der Lösungen von G entspricht also dem auffinden aller Vektoren in K^m die von der Abbildung F_A auf b geschickt werden. Die Lösungsmenge von G entspricht also genau dem Urbild von b unter der Abbildung F_A). Insbesondere ist die Lösungsmenge vom zu G gehörenden homogenen Gleichungssystem genau der Kern von F_A.

Satz 9. *Es sei G das lineare Gleichungssystem*

$$A \circ x = b$$

und H sei das dazugehörige homogene Gleichungssystem. Es gelten folgende Tatsachen:

1. *Die Lösungsmenge $\mathbb{L}(H)$ des homogenen Gleichungssystems ist ein Untervektorraum von K^n.*

2. *Ist $x \in \mathbb{L}(G)$ beliebig, dann gilt*

$$\mathbb{L}(G) = \{x + y \mid y \in \mathbb{L}(H)\}$$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der Tatsache, dass die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A genau dem dem Kern der linearen Abbildung F_A entspricht. Wir beweisen nun die zweite Behauptung. Wir müssen für jede Lösung $x \in \mathbb{L}(G)$ folgende zwei Aussagen beweisen:

- Ist $y \in \mathbb{L}(H)$, dann gilt $x + y \in \mathbb{L}(G)$.

- Jede Lösung $z \in \mathbb{L}(G)$ kann dargestellt als $z = x + y$ mit einem $y \in \mathbb{L}(H)$ dargestellt werden.

Es sei also $x \in \mathbb{L}(G)$ eine beliebige Lösung von G.

- Ist y eine Lösung von H, dann gilt $y \in ker(F_A)$ und somit wie gewünscht

$$F_A(x + y) = F_A(x) + F_A(y) = b.$$

- Wir müssen eine beliebige Lösung $z \in \mathbb{L}(G)$ als Summe von x und einer Lösung von H darstellen. Weil z eine Lösung von G ist, gilt

  $$F_A(z) = b = F_A(x).$$

  Es folgt also aus der Linearität von F_A, dass $z - x \in Ker(F_A)$ und somit $z - x \in \mathbb{L}(H)$ gilt. Es folgt die gewünschte Darstellung:

  $$z = x + (\underbrace{z - x}_{\in \mathbb{L}(H)}).$$

$\square$

Definition 37. Es sei $A \in K^{n,m}$ mit Spaltenvektoren $s_1, .., s_m$. Der *Spaltenrang* von A ist die Dimension des von den Spaltenvektoren aufgespannten Vektorraumes. Es gilt somit

$$rg(A) = dim_K(\langle s_1, \ldots, s_m \rangle).$$

Bemerkung. Der Spaltenrang einer Matrix A entspricht der Dimension des Bildes von F_A.

Beweis. Dies folgt aus der Beobachtung, dass die Menge $\{F_A(e_i) \mid i = 1, .., n\} \subset im(f)$ eine erzeugende Teilmenge des Bildes von F_A ist. $\square$

Übung 36. Bestimmen Sie $rg(A)$ für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung. Der Rang der Matrix beträgt 2. Man beachte, dass die letzte Spalte als Summe der ersten beiden Spalten geschrieben werden kann.

Theorem 3. *Es sei $A \in K^{n,m}$, dann gelten:*

1. *Das Gleichungssystem $A \circ x = b$ hat genau dann (mindestens) eine Lösung wenn $rg(A) = rg([A, b])$ gilt.*

2. *Alle Gleichungssysteme von der Form $A \circ x = b$ mit $b \in K^{n,1}$ haben genau dann mindestens eine Lösung, wenn $rg(A) = n$ gilt.*

3. *Alle Gleichungssysteme von der Form $A \circ x = b$ mit $b \in K^{n,1}$ haben genau dann höchstens eine Lösung, wenn $rg(A) = m$ gilt.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $s_1, .., s_m \in K^n$ die Spaltenvektoren von A.

1. Wir müssen beide Richtungen der Äquivalenz zeigen. Wir zeigen zuerst die "$\Rightarrow$" Richtung. Wenn das Gleichungssystem $A \circ x = b$ eine Lösung hat, dann weil der Vektor b als Linearkombination der Spaltenvektoren von A geschrieben werden kann und somit $b \in \langle s_1, \ldots, s_m \rangle$ gilt. Daraus folgt sofort $rg(A) = rg([A, b])$. Für die umgekehrte Richtung nehmen wir nun $rg(A) = rg([A, b])$ an. Es folgt dass $\langle s_1, .., s_m \rangle \subset \langle s_1, .., s_m, b \rangle$ Untervektorräume von K^n sind und die gleiche Dimension haben. Daraus folgt $\langle s_1, .., s_m \rangle = \langle s_1, .., s_m, b \rangle$ und somit $b \in \langle s_1, .., s_m \rangle$. Das Gleichungssystem ist somit lösbar.

2. Für die Richtung von Links nach Rechts, nehmen wir an, dass alle Gleichungssysteme von der Form $A \circ x = b$ mit $b \in K^{n,1}$ Lösbar seien. Daraus folgt, dass die Abbildung F_A surjektiv ist, und somit dass die Spalten von A (die ja den Bildern der e_i's unter der Abbildung F_A entsprechen) ein Erzeugendensystem von K^n sind. Es folgt also

$$rg(A) = dim_K(\langle s_1, .., s_m \rangle) = dim_K(K^n) = n.$$

Sei umgekehrt die Gleichung $n = rg(A)$ vorausgesetzt, dann folgt sofort, dass

$$\langle F_A(e_1), .., F_A(e_m) \rangle = \langle s_1, .., s_m \rangle = K^n$$

gilt, und somit, dass F_A surjektiv ist.

3. Das Gleichungssystem $A \circ x = b$ hat höchstsens eine Lösung, wenn die Abbildung F_A injektiv ist, dies ist genau dann der Fall wenn $dim_K(ker(F_A)) = 0$ ist. Dies wiederum ist wegen des Dimensionssatzes äquivalent zur Gleichung $rk(A) = dim_K(im(F_A)) = dim_K(K^m) = m$.

□

Folgerung. *Ist A eine $n \times n$ Matrix, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *A ist invertierbar.*

2. *Für alle $b \in K^{n,1}$ ist das Gleichungssystem $A \circ x = b$ lösbar.*

3. *Das Gleichungssystem $A \circ x = 0$ hat nur die Lösung $x = 0$.*

Beweis. Dies folgt sofort aus der der ersten Folgerung vom Dimensionssatz für lineare Abbildungen und dem zuvor bewiesenen Theorem. □