Gruppe10_IT17tb_S3_Aufg2

Mittwoch, 2. Oktober 2019 17:23

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi} \cos(x^2)dx$$

mit der Trapezregel $Tf(h)$ für die Schrittweiten $h = \frac{b-a}{2^i}$, $(i = 0, ..., 4)$ (Achtung: die erste Spalte enthält also fünf Werte) und extrapolieren Sie diese mittels Romberg-Extrapolation so weit wie möglich. Schreiben Sie die Summen für die T_{i0} komplett mit allen Summanden auf, also z.B.

$T_{20} = h\left(\frac{\cos(...)+\cos(...)}{2} + \cos(...) + \cos(...) + \cos(...)\right)$.

$a = 0, \quad b = \pi, \quad h_0 = \pi, \quad h_1 = \frac{\pi}{2}, \quad h_2 = \frac{\pi}{4}, \quad h_3 = \frac{\pi}{8}, \quad h_4 = \frac{\pi}{16}$

$$T_{00} = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a) = 0{,}15286$$

$\leftarrow 0{,}0486 \Rightarrow$ nachfolgend 1

$n = 2^i = 2$

$$T_{10} = h_1\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) = h\cdot\left(1 + \cos\left((1\cdot h_1)^2\right)\right) = -1{,}1507$$

da $a=0$

$n = 4$

$$T_{20} = h_2\left(1 + \cos(h_2^2) + \cos((2h_2)^2) + \cos((3h_2)^2)\right) = 0{,}64976$$

$n = 8$

$$T_{30} = h_3\left(1 + \cos(h_3^2) + \cos((2h_3)^2) + \ldots + \cos((7h_3)^2)\right) = 0{,}60262$$

$n = 16$

$$T_{40} = h_4\left(1 + \cos(h_4^2) + \ldots + \cos((15\cdot h_4)^2)\right) = 0{,}57453$$

$$T_{01} = \frac{4T_{10} - T_{00}}{3} = -1{,}5852$$

$$T_{11} = \frac{4T_{20} - T_{10}}{3} = 1{,}2499$$

$$T_{21} = \frac{4T_{30} - T_{20}}{3} = 0{,}5869$$

$$T_{31} = \frac{4T_{40} - T_{30}}{3} = 0{,}5652$$

$$T_{02} = \frac{16T_{11} - T_{01}}{15} = 1{,}4389$$

$$T_{12} = \frac{16T_{21} - T_{11}}{15} = 0{,}5427$$

$$T_{22} = \frac{16T_{31} - T_{21}}{15} = 0{,}5638$$

$$T_{03} = \frac{64\cdot T_{12} - T_{02}}{63} = 0{,}52847$$

$$T_{13} = \frac{64\cdot T_{22} - T_{12}}{63} = 0{,}56413$$

$$T_{04} = \frac{256\cdot T_{13} - T_{03}}{255} = \underline{\underline{0{,}56427}}$$