Modulprüfung Grundlagen und Diskrete Mathematik (t.MGMIT)

23.01.2014

Name:	
Vorname:	
Matrikelnummer:	
Punkte:	
Note:	

Hinweise

1. Dauer: 90 Minuten
2. Hilfsmittel:
   - Selber verfasste Notizen im Umfang von 5 Blättern im Format A4.
   - Nicht-grafik- und nicht-algebrafähiger Taschenrechner (nur für Grundoperationen und Auswertungen elementarer Funktionen)
3. Schreiben Sie auf die Prüfung nur die fertige Antwort **inklusive Lösungsweg** zur entsprechenden Aufgabe. Benutzen Sie für Notizen separate (nicht abzugebende) Blätter.
4. Achten Sie darauf, dass Ihre Lösungen gut strukturiert und *leserlich* aufgeschrieben sind.

1 Multiple-choice (5 Punkte)

Aufgabe 1.1 (5 Punkte)**.**
Kommentieren Sie folgende Aussagen mit “wahr” oder “falsch”.
Bewertung: Jede richtig kommentierte Aussage gibt einen Punkt und für jede falsch kommentierte Aussage wird ein Punkt abgezogen. Ist die Summe der erreichten Punkte positiv, so ergibt sich daraus die Punktzahl für die Aufgabe, sonst wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet.

$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N}\, (n = 3k)$	☐ wahr	☐ falsch
$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N}\, (3n = k)$	☐ wahr	☐ falsch
Die aussagenlogische Formel $(p \to q) \vee (q \to p)$ ist allgemeingültig.	☐ wahr	☐ falsch
Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ ist abzählbar.	☐ wahr	☐ falsch
Jede binäre Relation auf einer Menge mit nur 2 Elementen ist transitiv.	☐ wahr	☐ falsch

2 Logik (14 Punkte)

Aufgabe 2.1 (6 Punkte)**.** Es sei $\mathsf{E}(n)$ irgend eine Eigenschaft, die auf natürliche Zahlen zutreffen kann oder nicht. Formalisieren Sie folgende Aussagen:

(a) Jede natürliche Zahl besitzt (mindestens) einen Teiler, der nicht die Eigenschaft E hat. (3 Punkte)

(b) Alle Vielfachen von einer natürlichen Zahl mit der Eigenschaft E haben selbst die Eigenschaft E. (3 Punkte)

Sie dürfen das Prädikat

$$\mathsf{div}(x, y) := x \text{ ist ein Teiler von } y$$

verwenden.

Lösung.

a)

Aufgabe 2.2 (9 Punkte)**.** Die aussagenlogische Formel $F = p_1 \to \neg(q_1 \to q_2)$ ist gegeben.

(a) Ist die Formel F erfüllbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

(b) Ist die Formel F allgemeingültig? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

(c) Bringen Sie die Formel F in KNF. (3 Punkte)

Lösung.

3 Mengen (12 Punkte)

Aufgabe 3.1 (8 Punkte)**.** Es seien $A = \{a, b, x, y\}$ und $B = \{x\}$ gegeben. Schreiben Sie folgende Mengen in aufzählender Schreibweise auf, so dass im Resultat nur die Zeichen $\varnothing, \{, \}, a, b, x, y, (,), ,$ vorkommen.

(a) $\mathcal{P}(A \setminus B)$ (4 Punkte)

(b) $(B \times A) \times B$ (4 Punkte)

Lösung.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)**.** Es sei $X \cup Y$ überabzählbar, können Sie etwas über die Abzählbarkeit von X und Y aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung.

4 Relationen (19 Punkte)

Aufgabe 4.1 (15 Punkte)**.** Wir betrachten folgende Halbordnung ...
Diese Aufgabe wurde zwecks Wiederverwendbarkeit zensiert.

Lösung.

Lösung (Fortsetzung).

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)**.** Skizzieren Sie den gerichteten Graph ("Pfeildiagramm") einer symmetrischen und nicht transitiven Relation.

Lösung.

5 Induktion & Rekursion (20 Punkte)

Aufgabe 5.1 (8 Punkte)**.** Beweisen Sie mit Induktion: Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Lösung.

Lösung (Fortsetzung).

Aufgabe 5.2 (12 Punkte)**.** Die Funktionen $F : \mathbb{N} \to \{true, false\}$ und $H : \mathbb{N} \to \{true, false\}$ erfüllen folgende Rekursionsgleichungen:

$$\begin{aligned} F(0) &= true & H(0) &= false \\ F(n+1) &= H(n) & H(n+1) &= F(n) \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie $F(5)$. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie mit Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$F(n) = true \Leftrightarrow H(n) = false$$

gilt. (7 Punkte)

(c) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $H(n) = true$ und für welche gilt $F(n) = true$? (3 Punkte)

Lösung.

Lösung (Fortsetzung).

6 Elementare Zahlentheorie (20 Punkte)

Aufgabe 6.1 (10 Punkte)**.**

(a) Skizzieren Sie die Verknüpfungstabelle der Multiplikation von $\mathbb{Z}/4$ und markieren Sie die Elemente, die kein multiplikatives Inverses besitzen. (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie das multiplikative Inverse von $\overline{6111}$ in $\mathbb{Z}/6211$. (8 Punkte)

Repräsentieren Sie alle Restklassen mit ihrem kleinsten nicht-negativen Repräsentanten.

Lösung.

Lösung (Fortsetzung).

Aufgabe 6.2 (10 Punkte)**.** Lösen Sie folgende simultane Kongruenz mit dem in der Vorlesung behandelten Algorithmus. Geben Sie die gesamte Lösungsmenge an.

$$\begin{aligned} x &= 5 \mod 7 \\ x &= 2 \mod 3 \\ x &= 1 \mod 8 \end{aligned}$$

Lösung.

Lösung (Fortsetzung).