Lineare Algebra
Übung 2

Abgabe: Kalenderwoche 12

Aufgabe 1

Implementieren Sie in der Programmiersprache Ihrer Wahl die symmetrischen Gruppen. Ihre Implementation soll folgendes erfüllen:

- Modellieren Sie Permutationen (z.B. als Arrays)
- Implementieren Sie eine Funktion `inv`, die eine gegebene Permutation invertiert (ihr Inverses zurückgibt).
- Implementieren Sie die Verknüpfung $\circ$ als zweistellige Funktion, die von zwei gegebenen Permutationen deren Komposition berechnet.
- Implementieren sie zwei Funktionen `print` und `printCyclic`, die eine gegebene Permutation als String ausgeben (in der zyklischen Schreibweise bei `printCyclic`).

Lösung: Siehe Uebungsstunde

Aufgabe 2

Geben Sie alle Verknüpfungen an, die zusammen mit der Menge $\{a, b\}$ eine Gruppe bilden. Skizzieren Sie die Verknüpfungstabellen.

Lösung: Wir geben alle möglichen Verknüpfungen (es gibt deren 2) direkt als Verknüpfungstabelle an.

$\star$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\bullet$	a	b
a	b	a
b	a	b

Bemerkung: Soll die resultierende Struktur eine Gruppe sein (wie in der Aufgabe verlangt), dann bemerken wir, dass die einzige Freiheit, die wir beim ausfüllen der Verknüpfungstabelle

$\bullet$	a	b
a		
b		

haben, die Wahl des neutralen Elementes ist.

Aufgabe 3

Es seien die folgenden Gruppenstrukturen auf den Menge $\{a, b, c\}$ wie folgt durch Verknüpfungstabellen gegeben:

$\star$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\bullet$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Geben Sie einen bijektive Gruppenhomomorphismus von $(\{a, b, c\}, \star)$ nach $(\{a, b, c\}, \bullet)$ an.

Lösung: Es gibt zwei mögliche Lösungen:

$$\begin{aligned} f_1(a) &= b \\ f_1(b) &= c \\ f_1(c) &= a \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_2(a) &= b \\ f_2(b) &= a \\ f_2(c) &= c \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Es sei $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}/12, +)$ mit $f(x) = [x]_{12}$ gegeben. Bestimmen Sie $ker(f)$.

Lösung:

$$\begin{aligned} ker(f) &= \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) = [0]_{12}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid [x]_{12} = [0]_{12}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 0 \mod 12\} \\ &= [0]_{12} = \{\dots, -24, -12, 0, 12, 24, \dots\} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Zeigen Sie, Wenn $(G, \star)$ eine Gruppe ist in der jedes Element sein eigenes Inverses ist, dann ist $(G, \star)$ eine kommutative Gruppe.

Lösung: Es seien a, b beliebige Elemente von G. Wir müssen $a \star b = b \star a$ zeigen. Weil jedes Element in G sein egienes Inverses ist, gilt $(a \star b)^{-1} = b \star a$ und somit (wiederum weil jedes Element sein eigenes Inverses ist), dass $a \star b = (a \star b)^{-1} = b \star a$.(

Alternative Lösung:

$$\begin{aligned} a \star b &= e \star (a \star b) \\ &= \underbrace{((b \star a) \star (b \star a))}_{\text{wegen } (b\star a)^{-1} = b\star a} \star (a \star b) \\ &= (b \star a) \star ((b \star a) \star (a \star b)) \\ &= (b \star a) \star (b \star \underbrace{(a \star a)}_{e} \star b) \\ &= (b \star a) \star \underbrace{(b \star b)}_{e} \\ &= b \star a \end{aligned}$$