Übungsserie 12

Musterlösung

Lösung Aufgabe 1:

Die Konditionszahl ist

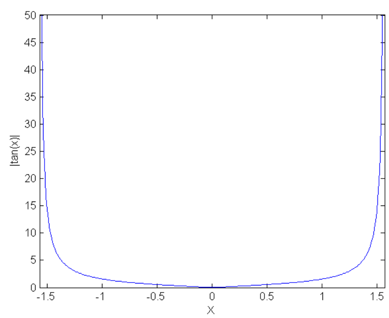
$$\begin{aligned} K &= \frac{\mid f'(\tilde{x}) \mid \cdot \mid \tilde{x} \mid}{\mid f(\tilde{x}) \mid} = \frac{\mid -\sin(\tilde{x}) \mid \cdot \mid \tilde{x} \mid}{\mid \cos(\tilde{x}) \mid} = \frac{\mid \sin(\tilde{x}) \mid}{\mid \cos(\tilde{x}) \mid} \cdot \mid \tilde{x} \mid \\ &= \mid \tan(\tilde{x}) \mid \cdot \mid \tilde{x} \mid \end{aligned}$$

Wir wissen, dass die Tangens-Funktion für $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ Nullstellen und für $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ Polstellen aufweist. Beschränken wir uns auf das Intervall $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dann gilt

$$\lim_{\tilde{x} \to \pm\frac{\pi}{2}} \mid \tan(\tilde{x}) \mid = \infty$$

und

$$\mid \tan(0) \mid = 0$$



Also gilt für die Konditionszahl

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{x} \to \pm\frac{\pi}{2}} K &= \infty \\ \lim_{\tilde{x} \to 0} K &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Funktionsauswertung von $f(x) = \cos(x)$ in einer Umgebung von $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ beliebig schlecht konditioniert sein kann (d.h. Fehler in x pflanzen sich dort sehr stark fort), während die Funktionsauswertung in einer Umgebung von $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ gut konditioniert ist.

Beispiel gut konditioniert: wir nehmen an, der exakte Wert sei $x = 0.0001$ und der fehlerhafte Wert sei $\tilde{x} = 0.00009$. Dann haben wir für die relativen Fehler

$$\begin{aligned} \frac{\mid x - \widetilde{x} \mid}{\mid x \mid} &= 0.1 \\ \frac{\mid f(x) - f(\widetilde{x}) \mid}{\mid f(x) \mid} &= \frac{\cos(0.0001) - \cos(0.00009)}{\cos(0.0001)} = 9.5 \cdot 10^{-10} \end{aligned}$$

Der relative Fehler bei der Funktionsauswertung hat also von 10% auf praktisch 0% abgenommen (um einen Faktor $9.5 \cdot 10^{-10}/0.1 = 9.50 \cdot 10^{-9}$) , was nahe bei der Konditionszahl $K = \mid \tan(\tilde{x}) \mid \cdot \mid \tilde{x} \mid = 8.1 \cdot 10^{-9}$ liegt.

Beispiel schlecht konditioniert: wir nehmen an, der exakte Wert sei $x = \frac{\pi}{2} + 0.0001$ und der fehlerhafte Wert sei $\tilde{x} = \frac{\pi}{2} + 0.00009$. Dann haben wir für die relativen Fehler

$$
\begin{aligned}
\frac{\mid x - \widetilde{x} \mid}{\mid x \mid} &= 6.3658 \cdot 10^{-6} \\
\frac{\mid f(x) - f(\widetilde{x}) \mid}{\mid f(x) \mid} &= \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + 0.0001) - \cos(\frac{\pi}{2} + 0.00009)}{\cos(\frac{\pi}{2} + 0.0001)} = 0.10
\end{aligned}
$$

Der relative Fehler bei der Funktionsauswertung hat also von praktisch 0% auf 10% zugenommen (Faktor von $0.1/6.3658 \cdot 10^{-6} = 1.5709 \cdot 10^{4}$), was wieder nahe bei der Konditionszahl $K = \mid \tan(\tilde{x}) \mid \cdot \mid \tilde{x} \mid = 1.7454 \cdot 10^{4}$ liegt.

Bemerkung: bei diesen Beispielen sind wir davon ausgegangen, dass die Funktionswerte vom Cosinus exakt berechnet werden. Dies ist natürlich auch wieder nur eine Näherung.

Lösung Aufgabe 2:

a) Berechnet wird eine numerische Näherung der Ableitung $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ an der Stelle $x = 1$ (1 Punkt) sowie der absolute bzw. relative Fehler.

b) Der Wert, an dem der absolute bzw. relative Fehler ein Minimum erreicht, also bei $h = 10^{-8}$. Dann wird $f'(1) \approx 3.75604916$.

c) Für $h < 10^{-8}$ nehmen der absolute und relative Fehler wieder zu wegen Auslöschung bei der Subtraktion sehr ähnlicher Werte $f(x+h)$ und $f(x)$. Für $h < eps$ wird das Resultat sogar 0, da für den Rechner dann $f(x+h) = f(x)$ gilt, bzw. $f(x+h) - f(x) = 0$.

Lösung Aufgabe 3:

Die Fixpunktiteration lautet

$$x_{n+1} = F(x_n) = \frac{1}{5}(x_n^3 + 3)$$

Damit der Banachsche Fixpunktsatz gillt, müssen wir zeigen, dass (a) $F : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ (d.h. F bildet $[0,1]$ auf sich selber ab) und (b) es existiert eine Konstante $\alpha < 1$ mit $\mid F(x) - F(y) \mid \leq \alpha \mid x - y \mid$ für alle $x, y \in [0,1]$

a) Die Funktion $F(x) = \frac{1}{5}(x^3 + 3)$ ist auf dem Intervall [0, 1] monoton steigend, da $F'(x) = \frac{3}{5}x^2 \geq 0$. Es genügt also, die Intervallsgrenzen in F einzsetzen: $F(0) = 0.6$ und $F(1) = 0.8$, damit gilt $F : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

b) Mit $\alpha = \max_{x \in [0,1]} |F'(x)| = \max_{x \in [0,1]} |\frac{3}{5}x^2| = \frac{3}{5} < 1$ haben wir auch die zweite Bedingung erfüllt.

Daraus folgt gemäss dem Fixpunktsatz, dass es auf [0, 1] genau einen anziehenden Fixpunkt gibt und die Fixpunktiteration für jeden Startwert $x_0 \in [0, 1]$ konvergiert. Wir wählen $x_0 = 1$ und iterieren so lange, bis wir sicher sein können, dass sich die dritte Nachkommastelle nicht mehr ändert:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= \frac{1}{5}(x_0^3 + 3) = 0.8000... \\
x_2 &= \frac{1}{5}(x_1^3 + 3) = 0.7024... \\
x_3 &= \frac{1}{5}(x_2^3 + 3) = 0.6693... \\
x_4 &= \frac{1}{5}(x_3^3 + 3) = 0.6599...
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_5 &= \frac{1}{5}(x_4^3+3) = 0.6574...\\
x_6 &= \frac{1}{5}(x_5^3+3) = 0.6568...\\
x_7 &= \frac{1}{5}(x_6^3+3) = 0.6566...
\end{aligned}
$$

Die Lösung ist also $x = 0.656...$

Lösung Aufgabe 4:

Mit

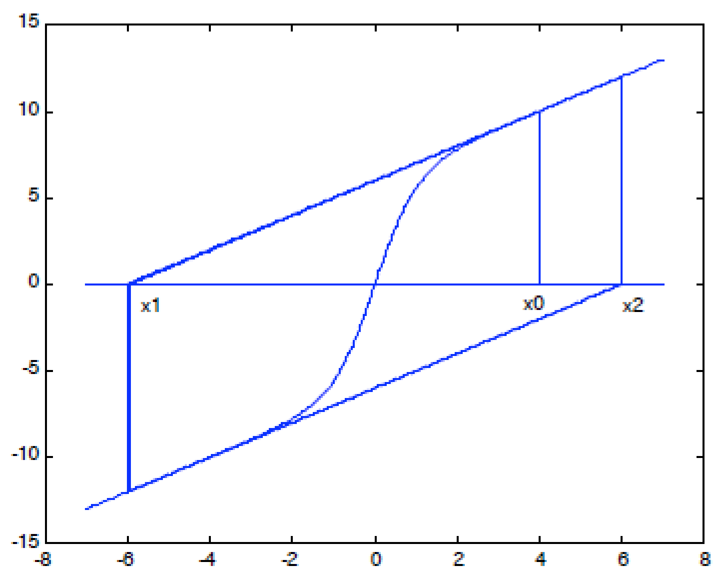
$$\tanh'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2-(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2} = 1-\frac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}$$

ergibt sich die Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{6\tanh(x_n)+x_n}{6\tanh'(x_n)+1}$$

Nein, die Iteration konvergiert nicht, sie pendelt nach wenigen Schritten zwischen $-5.998150...$ und $5.998150...$ hin und her. Durch die Symmetrie um die Nullstelle bewegt sich die Iteration entlang der immer wieder gleichen Tangenten im Kreis. Die ersten beiden Tangen haben die Funktionsgleichungen

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\\
g_2(x) &= f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)
\end{aligned}
$$



Lösungen Aufgaben 5:

2.5 Offensichtlich ist $x = 0$ eine Lösung. $f(x) := 2\sin x - x$ ist eine ungerade Funktion – wenn wir eine Nullstelle $\bar{x}$ gefunden haben, so ist $-\bar{x}$ eine weitere. Wir suchen daher nur positive Nullstellen. Da stets $|\sin x| \le 1$ gilt, brauchen wir Nullstellen nur in $(0,2]$ zu suchen. Aufgrund von Monotonieüberlegungen findet man, dass dort genau eine Nullstelle liegt, nämlich $\bar{x} \approx 1.9$. Mit dem Newton-Verfahren finden wir, ausgehend von $x_0 = 2$, als gute Näherung $x_3 = \tilde{x} = 1.895494267$. Aus $f(1.895) \cdot f(1.896) < 0$ folgt $\bar{x} \in [1.895,\, 1.896]$, womit klar ist, dass $|\tilde{x} - \bar{x}| \le 10^{-3}$. Für die Näherung $-\tilde{x}$ für die Nullstelle $-\bar{x}$ gilt die gleiche Fehlerabschätzung.

2.6 Zunächst ist aus Bild 2.5 anschaulich klar, dass es nur ein solches α geben kann. Es ist $f(1) \le -0.791 < 0$ und $f(1.5) \ge 6.4631 > 0$, also liegt die gesuchte Nullstelle in $[1, 1.5]$. Startet man das Newton-Verfahren mit $x_0 = 1$, so erhält man $x_5 = 1.235897098\ldots$, $x_6 = 1.235896924\ldots$ und bei diesen Stellen ist bei den weiteren Iterationen keine Änderung erkennbar. Wählen wir als Näherung $\tilde{x} = 1.2359$, so ist wegen $f(\tilde{x} + 0.0001) = f(1.236) > 0$ und $f(\tilde{x} - 0.0001) = f(1.2358) < 0$ die gesuchte Nullstelle in $[1.2358, 1.2359]$ und damit gilt $|\tilde{x} - \alpha| \le 0.0001$ wie gefordert.

2.7 Im Folgenden sind x_i bzw. y_i bzw. z_i die vom Newton- bzw. vereinfachten Newton- bzw. Sekantenverfahren berechneten Werte.

Lösung Aufgabe 6:

a) Anzahl Tonnen Dünger A sei x_1, die Anzahl Tonnen Dünger B sei x_2, Anzahl Tonnen Dünger C sei x_3. Es ist das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned}
\text{Kalium: } 0.64x_1 + 0.16x_2 + 0.20x_3 &= 0.324 \cdot 100 = 32.4\\
\text{Stickstoff: } 0.16x_1 + 0.68x_2 + 0.16x_3 &= 0.264 \cdot 100 = 26.4\\
\text{Phosphor: } 0.20x_1 + 0.16x_2 + 0.64x_3 &= 0.412 \cdot 100 = 41.2
\end{aligned}$$

in Matrixschreibweise

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.16 & 0.20 \\ 0.16 & 0.68 & 0.16 \\ 0.20 & 0.16 & 0.64 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 32.4 \\ 26.4 \\ 41.2 \end{pmatrix}$$

Gauss-Algorithmus ergibt:

$$i = 1,\ j = 2 \Rightarrow z_2 \equiv z_2 - \tfrac{0.16}{0.64} z_1 \Rightarrow (A_1 \mid b_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0.64 & 0.16 & 0.20 & 32.4 \\ 0 & 0.64 & 0.11 & 18.3 \\ 0.20 & 0.16 & 0.64 & 41.2 \end{array}\right)$$

$$i = 1,\ j = 3 \Rightarrow z_3 \equiv z_3 - \tfrac{0.20}{0.64} z_1 \Rightarrow (A_2 \mid b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0.64 & 0.16 & 0.20 & 32.4 \\ 0 & 0.64 & 0.11 & 18.3 \\ 0 & 0.11 & 0.5775 & 31.075 \end{array}\right)$$

$$i = 2,\ j = 3 \Rightarrow z_3 \equiv z_3 - \tfrac{0.11}{0.64} z_2 \Rightarrow (A_3 \mid b_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0.64 & 0.16 & 0.20 & 32.4 \\ 0 & 0.64 & 0.11 & 18.3 \\ 0 & 0 & 0.5586 & 27.9297 \end{array}\right)$$

Rückeinsetzen liefert:

$x_3 = \frac{27.9297}{0.5586} = 50,\ x_2 = \frac{18.3-50*0.11}{0.64} = 20,\ x_1 = \frac{32.4-0.16\cdot 20-0.20\cdot 50}{0.64} = 30$

b)

$$R = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.16 & 0.20 \\ 0 & 0.64 & 0.11 \\ 0 & 0 & 0.5586 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2500 & 1 & 0 \\ 0.3125 & 0.1719 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Absoluter Fehler:

$$\| x - \widetilde{x} \|_\infty \leq \| A^{-1} \|_\infty \| b - \widetilde{b} \|_\infty$$

Mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1.7902 & -0.3077 & -0.4825 \\ -0.3077 & 1.6154 & -0.3077 \\ -0.4825 & -0.3077 & 1.7902 \end{pmatrix}$$

erhalten wir $\| A^{-1} \|_\infty = 2.5804$ (0.5 P). Aus $\| b - \widetilde{b} \|_\infty \leq 0.5$ (0.5 P) folgt $\| x - \widetilde{x} \|_\infty \leq 1.2902$, d.h. jede Komponente von x kann um bis zu 1.29 Tonnen abweichen.

Relativer Fehler:

$$\frac{\| x - \widetilde{x} \|_\infty}{\| x \|_\infty} \leq \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty \frac{\| b - \widetilde{b} \|_\infty}{\| b \|_\infty}$$

Mit $\| A \|_\infty = 1$ (0.5 P) ergibt sich die Konditionszahl $cond(A) = \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty = 2.5804$ und mit $\| b \|_\infty = 41.2$ ergibt sich

$$\frac{\| x - \widetilde{x} \|_\infty}{\| x \|_\infty} \leq \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty \frac{\| b - \widetilde{b} \|_\infty}{\| b \|_\infty} \leq 2.5804 \cdot \frac{0.5}{41.2} = 0.0313 = 3.13\%$$

Die Matrix ist gut konditioniert.

Lösung Aufgabe 7:

a) Wir überprüfen, ob A diagonaldominant ist:

$$\begin{aligned} a_{11} = 10 &\quad > \quad 6 = a_{12} + a_{13} \\ a_{22} = 20 &\quad > \quad 13 = a_{21} + a_{23} \\ a_{33} = 30 &\quad > \quad 20 = a_{31} + a_{32} \end{aligned}$$

Daraus folgt, A ist diagonaldominant und das Jacobi-Verfahren konvergiert.

b) Wir benutzen die Matrixschreibweise

$$x^{(m+1)} = -D^{-1}(L+R)x^{(m)} + D^{-1}b$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= L + D + R \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also

$$
\begin{aligned}
L &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\
D &= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} \\
D^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \\
R &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und damit hat man

$$
\begin{aligned}
x^{(m+1)} &= - \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix} x^{(m)} - \begin{pmatrix} 62 \\ 116 \\ 280 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ -0.25 & 0 & -0.4 \\ -0.5 & -0.1667 & 0 \end{pmatrix} x^{(m)} + \begin{pmatrix} 6.2 \\ 5.8 \\ 9.3333 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
x^{(0)} &= \begin{pmatrix} 3.0000 \\ 2.0000 \\ 6.0000 \end{pmatrix} \\
x^{(1)} &= \begin{pmatrix} 4.2 \\ 2.65 \\ 7.5 \end{pmatrix} \\
x^{(2)} &= \begin{pmatrix} 3.64 \\ 1.75 \\ 6.7917 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c) Wir verwenden jetzt die Unendlichnorm und die a-priori Abschätzung

$$\| x^{(n)} - \overline{x} \|_\infty \leq \frac{\| B \|_\infty^n}{1 - \| B \|_\infty} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_\infty .$$

Für Jacobi ist

$$B = -D^{-1}(L+R) = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ -0.25 & 0 & -0.4 \\ -0.5 & -0.1667 & 0 \end{pmatrix}$$

und daraus folgt

$$\| B \|_\infty = \frac{2}{3} = 0.6667$$

Mit

$$\| x^{(1)} - x^{(0)} \|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 4.2 \\ 2.65 \\ 7.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.65 \\ 1.5 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1.5$$

folgt

$$\| x^{(n)} - \overline{x} \|_\infty \leq \frac{(\frac{2}{3})^n}{\frac{1}{3}} \cdot 1.5 \leq 10^{-4}$$

und daraus ergibt sich

$$n \geq \frac{\log(\frac{2}{3} \cdot 10^{-4}/3)}{\log(\frac{2}{3})} = 26.42...$$

Lösung Aufgabe 8:

- a)

Lösung

$\Rightarrow$ nichtlineares Gleichungssystem $k_1 \mathrm{e}_{k_2 r} + k_3 r - p = 0$.

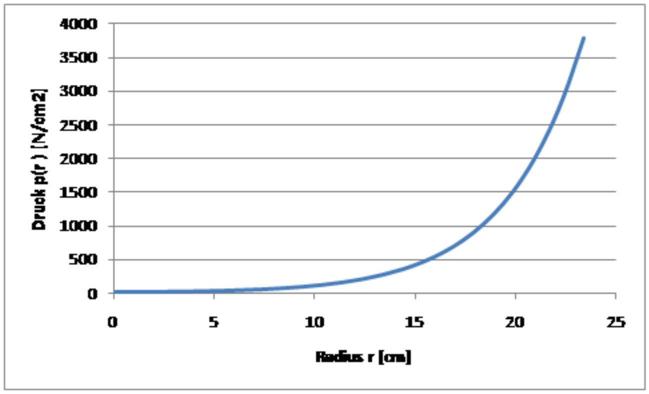
$$\begin{aligned} r = 1: &\quad k_1 \mathrm{e}^{k_2} + k_3 - 10 &= 0 \\ r = 2: &\quad k_1 \mathrm{e}^{2k_2} + 2k_3 - 12 &= 0 \\ r = 3: &\quad k_1 \mathrm{e}^{3k_2} + 3k_3 - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Jacobi–Matrix $J(k_1, k_2, k_3)$:

$$J = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{k_2} & k_1 \mathrm{e}^{k_2} & 1 \\ \mathrm{e}^{2k_2} & 2k_1 \mathrm{e}^{2k_2} & 2 \\ \mathrm{e}^{3k_2} & 3k_1 \mathrm{e}^{3k_2} & 3 \end{pmatrix}$$

k	x^k	$f(x^k)$	$\|f(x^k)\|_2$	$\|x^k - x^{k-1}\|_2$
0	$\begin{pmatrix} 10.000000 \\ 0.100000 \\ -1.000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.051709 \\ -1.785972 \\ -4.501412 \end{pmatrix}$	4.843045	
1	$\begin{pmatrix} 8.868195 \\ 0.431279 \\ -3.462075 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.188078 \\ 2.086515 \\ 6.953930 \end{pmatrix}$	7.262648	2.729935
2	$\begin{pmatrix} 8.940308 \\ 0.318569 \\ -2.222635 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.071704 \\ 0.461394 \\ 1.581437 \end{pmatrix}$	1.648929	1.246642
3	$\begin{pmatrix} 8.788372 \\ 0.269945 \\ -1.487606 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.024217 \\ 0.104040 \\ 0.289382 \end{pmatrix}$	0.308469	0.752140
4	$\begin{pmatrix} 8.771774 \\ 0.260049 \\ -1.376155 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000776 \\ 0.003492 \\ 0.009711 \end{pmatrix}$	0.010349	0.113114
5	$\begin{pmatrix} 8.771287 \\ 0.259696 \\ -1.372286 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000001 \\ 0.000004 \\ 0.000012 \end{pmatrix}$	0.000013	0.003916
6	$\begin{pmatrix} 8.771286 \\ 0.259695 \\ -1.372281 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000000 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \end{pmatrix}$	0.000000	0.000005

- Daraus ergibt sich die allgemeine Funktion $p = 8.771286 \cdot e^{0.259695 \cdot r} - 1.372281 \cdot r$, welche den Druck beschreibt, der nötig ist, um einen flachen Gegenstand mit Radius r um 30 cm tief in den Schlamm zu drücken.



- Wir müssen jetzt noch die nichtlineare Gleichung $500 = 8.771286 \cdot e^{0.259695 \cdot r} - 1.372281 \cdot r$ nach r auflösen. Das machen wir wieder über das Newtonverfahren. Also haben wir die Iterationsvorschrift

$$r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)} = r_n - \frac{8.771286 \cdot e^{0.259695 \cdot r} - 1.372281 \cdot r - 500}{8.771286 \cdot 0.259695 \cdot e^{0.259695 \cdot r} - 1.372281}$$

und wir sehen aus dem Graph, dass r ca. 15 cm ist. Wir wählen also $r_0 = 15$ und iterieren. Die Lösung konvergiert schnell gegen $r_0 = 15.731511$ cm:

n	r_n
0	15.000000
1	15.806529
2	15.732244
3	15.731511
4	15.731511
5	15.731511