Grundlagen und diskrete Mathematik
Übung 3

Abgabe: Kalenderwoche 43

Aufgabe 1

Die Mengen $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sind durch

$$A_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie $A_3 \cap A_{111}$.

(b) Bestimmen Sie $\bigcup_{i \in \{2,5,4\}} A_i$.

(c) In welcher Beziehung müssen i, j und m stehen, damit

$$A_i \cup A_j = A_m$$

gilt.

(d) In welcher Beziehung müssen i, j und m stehen, damit

$$A_i \cap A_j = A_m$$

gilt.

Lösung:

(a) $A_3 \cap A_{111} = A_{111}$

(b) $\bigcup_{i \in \{2,5,4\}} A_i = A_2 \cup A_5 \cup A_4 = A_2$

(c) $m = \min(i, j)$

(d) $m = \max(i, j)$

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie für beliebige Mengen A und B die Identität

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Lösung: Die Behauptung ist korrekt, wir geben also einen Beweis dazu.
Bew.: Für beliebige x gilt:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{P}(A \cap B) &\Leftrightarrow x \subset A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \subset A \wedge x \subset B \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A) \wedge x \in \mathcal{P}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 3

Schreiben Sie in der Programmiersprache ihrer Wahl eine Funktion/Methode `pow`, die von einer gegebenen Menge die Potenzmenge berechnet.
Mengen können Sie zum Beispiel als Listen oder Arrays modellieren.

Test cases:

```
pow([1,3]) = [[],[1],[3],[1,3]]
pow([]) = [[]]
pow(pow([])) = [[],[[]]]
```

Lösung: vgl. OLAT

Aufgabe 4

Geben Sie folgende Mengen explizit an.

(a) $\{1,3\} \times \{0,2\}$
(b) $A \times \{1, A\}$ wobei $A = \{2\}$.
(c) $\mathcal{P}(\varnothing \times \{\varnothing\})$
(d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$
(e) $\mathcal{P}(\{\varnothing\} \times \{a, b\})$

Lösung:

(a) $\{(1,0),(1,2),(3,0),(3,2)\}$
(b) $\{(2,1),(2,\{2\})\}$.
(c) $\{\varnothing\}$ weil $\varnothing \times \{\varnothing\} = \varnothing$
(d) $\mathcal{P}(\{\varnothing, \{1\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}\}$
(e) $\mathcal{P}(\{\varnothing\} \times \{a, b\}) = \{\varnothing, \{(\varnothing, a)\}, \{(\varnothing, b)\}, \{(\varnothing, a), (\varnothing, b)\}\}$

Aufgabe 5

Geben Sie paarweise disjunkte Mengen $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ an, mit

$$\bigcup_{i \text{ gerade}} A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade}\}$$
$$\bigcup_{i \text{ ungerade}} A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}$$

Lösung: Mögliche Lösung:

$$A_n = \begin{cases} \{n+1\} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \{n-1\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 6 (Bonusaufgabe)

Geben Sie eine Partition der ungeraden natürlichen Zahlen in unendlich viele unendliche Blöcke an.

Lösung: Eine Mögliche Lösung ist die Partition mit den Blöcken $B_1, B_2, B_3 \dots$ wobei

$$B_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ungerade und hat genau } n \text{ Primfaktoren } \}.$$

Die nat. Zahl 1 kann am Schluss einem beliebigen Block zugeordnet werden. Eine andere Lösung ist durch die Partition mit den Blöcken $A_1, A_2, \dots$ mit

$$A_n = \{2x+1 \mid x \in \mathbb{N} \text{ hat in der Dezimaldarstellung genau } n \text{ viele Nullen}\}$$

gegeben.