Dr. Jürg M. Stettbacher
Neugutstrasse 54
CH-8600 Dübendorf

Telefon: +41 43 299 57 23
Email: dsp@stettbacher.ch

Übung

Kanalcodierung: Block Codes

1. Repetition-Code R^3

   (a) Zeigen Sie, dass ein Repetition-Code R^3 linear und systematisch ist.

   (b) Wie lautet die Generator-Matrix G des R^3 Codes?

   (c) Wie lautet die Parity-Check-Matrix H zur Generator-Matrix G?

   (d) Erstellen sie für den R^3 Code eine Tabelle, die jedem Syndromen $\underline{s}$ den entsprechenden Fehlervektor $\underline{e}$ gegenüber stellt.

   (e) Überprüfen Sie das Bitmuster $\widetilde{\underline{c}} = [110]$ mit der Syndromtabelle und decodieren Sie die Schätzung $\widehat{\underline{u}}$ für $\underline{u}$.

2. Fehlerkorrektur

   Gegeben ist der folgende lineare Code:

   $$C = \{\,(00000000)\,,\ (11010110)\,,\ (10111001)\,,\ (01101111)\}$$

   (a) Geben Sie für diesen Code die Generator-Matrix G an, so dass der Code systematisch wird. Überlegen Sie zuerst, welche Dimensionen K und N die Matrix haben muss.

   (b) Wieviele Bitfehler können mit diesem Code sicher korrekt erkannt werden?

   (c) Wieviele Bitfehler können mit dem Code sicher richtig korrigiert werden?

   (d) Wieviele verschiedene Syndrome $\underline{s}$ (resp. Syndromwerte) gibt es mit diesem Code?

   (e) Wieviele Syndrome (resp. Syndromwerte) sind notwendig, um alle Fehler bis zur oben berechneten Anzahl zu korrigieren?

3. Einfluss der Blockgrösse

   Wir betrachten einen BSC mit BER $\varepsilon = 0.01$. Dann wollen wir zwei Block Codes mit derselben Coderate $R = {}^4\!/\!_7$ miteinander vergleichen.

   (a) Erfüllen diese Codes das Kanalcodierungs-Theorem?

   (b) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle, in der jede Zeile für einen der beiden Codes steht. t ist dabei die Anzahl Bitfehler, die der Code sicher korrigieren kann, P_N bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass ein Codewort mit N Bits korrekt übertragen wird und P_{1200} sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 1200 Nutzbits korrekt übertragen werden. Achten Sie darauf, dass Sie die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mit genügend Nachkommastellen durchführen.

N	K	t	P_N	P_{1200}
7		1		
21		2		

   (c) Welches Fazit ziehen Sie?

Antworten

1. Repetition-Code R^3

   (a) Ein Repetion-Code umfasst nur zwei Codeworte:

   $$R^3 = \{\, (000),\ (111)\, \}$$

   Die Summe von jedem Codewort mit sich selbst, sowie die Summe beider Codeworte ist jeweils wieder ein Codewort. Der Code ist also linear. Da im Encoder jedes Eingangsbit $\underline{u}$ einfach dreifach aus

   (b) Beachte, dass der R^3 ein $(N,\, K)$ Block-Code ist mit $K = 1$ und $N = 3$.
   Die Generator-Matrix G des Repetition-Codes R^3 ist demnach:

   $$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   Damit können alle möglichen Codeworte erzeugt werden.

   $$\begin{aligned} \underline{c}_0 &= \underline{u}_0 \cdot G = [0] \cdot G = [000] \\ \underline{c}_1 &= \underline{u}_1 \cdot G = [1] \cdot G = [111] \end{aligned}$$

   (c) Die Generator-Matrix besteht aus einer Einheitsmatrix I^1 und der Parity-Matrix $P = [11]$. Folglich hat die Parity-Check-Matrix folgende Gestalt:

   $$H = \begin{bmatrix} P^T & I^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Beachte: Da die Reihenfolge von I^1 und P im vorliegenden Fall nicht eindeutig ist, könnte die Parity-Check-Matrix auch so definiert werden:

   $$H_2 = \begin{bmatrix} I^2 & P^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (d) Auf der Empfängerseite gilt für das Syndrom $\underline{s}$:

   $$\underline{s} = \underline{\widetilde{c}} \cdot H^T = (\underline{c} + \underline{e}) \cdot H^T = \underline{c} \cdot H^T + \underline{e} \cdot H^T = \underline{e} \cdot H^T$$

   Dabei ist $\underline{\widetilde{c}}$ ein Codewort das möglicherweise bei der Übertragung auf dem Kanal verfälscht wurde. $\underline{c}$ ist das unverfälschte Codewort, für das per Definition gilt: $\underline{c} \cdot H^T = 0$. Der Fehlervektor $\underline{e}$ einhält an jenen Stellen eine 1, wo $\underline{\widetilde{c}}$ von $\underline{c}$ abweicht. Damit können wir die Syndromtabelle mit $\underline{s} = \underline{e} \cdot H^T$ aufstellen:

$\underline{e}$	$\underline{s}$
[000]	[00]
[100]	[11]
[010]	[10]
[001]	[01]

   (e) Wir testen:

   $$\underline{s} = \underline{\widetilde{c}} \cdot H^T = [110] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [01]$$

   Mit der Syndromtabelle folgt $\underline{e} = [001]$. Damit korrigieren wir und erhalten die Schätzung $\underline{\widehat{c}}$ des Codeworts $\underline{c}$:

   $$\underline{\widehat{c}} = \underline{\widetilde{c}} + \underline{e} = [111]$$

   Da der Code systematisch ist, folgt die Schätung $\underline{\widehat{u}} = [1]$.

2. Fehlerkorrektur

(a) Die Generator-Matrix hat die Dimension $K = 2$ (Länge der Eingangsbitmuster, Anzahl Zeilen der Matrix) und $N = 8$ (Länge der Codeworte, Anzahl Spalten der Matrix). Wir finden:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mit:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Wir bestimmen die minimale Hamming-Distanz d_{min}:

$$d_{min} = 5$$

Daraus folgt dass bis zu $d_{min} - 1 = 4$ Bitfehler sicher korrekt erkannt werden können.

(c) Es lassen sich mit diesem Code bis zu $\lfloor (d_{min} - 1)/2 \rfloor = 2$ Bitfehler sicher richtig korrigieren.

(d) Die Parity-Check-Matrix hat die Form $H = \begin{bmatrix} I^6 & P^T \end{bmatrix}$.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mit $\underline{s} = \underline{\widetilde{c}} \cdot H^T$ folgt, dass sie Syndrome 6 Bit haben. Total gibt es also $2^6 = 64$ verschiedene Syndromwerte.

(e) Wir brauchen Syndrome, um 0, 1 und 2 Fehler zu korrigieren.

0 Fehler	$\Longrightarrow$	$\binom{8}{0} = 1$ Syndrom
1 Fehler	$\Longrightarrow$	$\binom{8}{1} = 8$ Syndrome
2 Fehler	$\Longrightarrow$	$\binom{8}{2} = 28$ Syndrome

Total werden also 37 verschiedene Syndrome (von 64) benötigt. Die überzähligen Syndrome können allenfalls für die Korrektur von einigen 3-Bit Fehlern verwendet werden.

3. Einfluss der Blockgrösse

(a) Die Kanalkapazität C ist:

$$\begin{aligned} C &= 1 - h(\varepsilon) \\ &= 1 - \left(\varepsilon \cdot \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + (1-\varepsilon) \cdot \log_2 \frac{1}{1-\varepsilon} \right) \\ &= 0.919 \end{aligned}$$

Damit gilt $R < C$, die Coderate ist kleiner als die Kanalkapazität. Es gibt also unter diesen Codes welche, mit denen die Fehlerwahrscheinlichkeit beliebig klein gemacht werden kann.

(b) Mit den folgenden Zusammenhängen können wir die Tabelle ausfüllen:

$$R = \frac{K}{N} \qquad \Longrightarrow \qquad K = R \cdot N$$

$$P_N = \sum_{k=0}^{t} \binom{N}{k} \cdot \varepsilon^k \cdot (1-\varepsilon)^{N-k}$$

$$P_{1200} = (P_N)^{\frac{1200}{K}}$$

Damit folgen diese Werte:

N	K	t	P_N	P_{1200}
7	4	1	0.997969	0.543
21	12	2	0.998838	0.890

(c) Grob kann man sagen: Beide Codes haben die selbe Coderate R aber unterschiedliche Blockgrössen K. Der Code mit der grösseren Blockgrösse überträgt besser, das heisst, seine Wahrscheinlichkeit für eine fehlerfrei Übertragung ist höher.

Blickt man genauer hin, so kann man sagen: Die Syndrome haben die Länge $N - K$. Damit hat der (21, 12) Code 9 Bit lange Syndrome (512 verschiedene), der (7, 4) Code hat 3 Bit lange Syndrome (8 verschiedene). Damit lassen sich Bitfehler wie folgt korrigieren. Der (7, 4) Code braucht für die 1-Bit Fehler bereits alle 7 Syndrome auf, das achte ist das (000)-Syndrom für korrekte Übertragungen. Der (21, 12) Code hat genügend Syndrome[1], dass sich auch 2-Bit Fehler korrigieren lassen. Rund die Hälfte der Syndrome bleibt dann noch übrig, reicht aber nicht aus, um alle 3-Bit Fehler zu korrigieren.

N	K	Syndrome total	Syndrome für 1-Bit Fehler	Syndrome für 2-Bit Fehler
7	4	8	7	-
21	12	512	21	210

[1] Die benötigte Anzahl Syndrome für eine bestimmte Zahl von Bitfehlern errechnet sich via Binomialkoeffizient.