Lineare Algebra
Übung 1 Abgabe: Kalenderwoche 10

Aufgabe 1

Gegeben seien folgende Elemente von S_5:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Geben Sie $\sigma, \tau, \sigma \circ \tau$ in der Zyklenschreibweise an.

(b) Bestimmen Sie τ^{-1}. Skizzieren Sie τ^{-1} als bipartiten graph.

(c) Lösen Sie die Gleichung

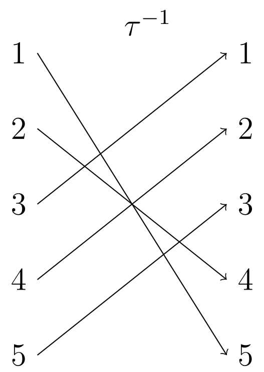
$$\tau \circ x = \sigma$$

nach x auf.

Lösung:

(a) $\sigma = (1,3)(2)(4,5)$, $\tau = (1,3,5)(2,4)$ und $\sigma \circ \tau(1)(2,5,3,4)$.

(b) $\tau^{-1} = (1,5,3)(2,4)$.



(c) Da $(S_5, \circ)$ eine Gruppe ist können wir fast "rechnen wie mit Zahlen" (Aber Achtung, ist keine kommutative Gruppe!).

$$\begin{aligned} \tau \circ x &= \sigma \\ \tau^{-1} \circ (\tau \circ x) &= \tau^{-1} \circ \sigma \\ (\tau^{-1} \circ \tau) \circ x &= \tau^{-1} \circ \sigma \\ x &= (1)(2,4,3,5) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Es seien die Verknüpfung $\oplus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $\ominus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $n \oplus k := \max\{n, k\}$ und $n \ominus k := \min\{n, k\}$ gegeben. Entscheiden Sie von den Strukturen $(\mathbb{N}, \oplus)$ und $(\mathbb{N}, \ominus)$ ob diese Halbgruppen, Monoide oder gar Gruppen sind.

Lösung: Beide Operationen induzieren eine Halbgruppenstruktur auf $\mathbb{N}$, da (Assoziativität von $\oplus$)

$$(x \oplus y) \oplus z = \max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, y, z\} = \max\{x, \max\{y, z\} = x \oplus (y \oplus z)$$

und (Assoziativität von $\ominus$)

$$(x \ominus y) \ominus z = \min\{\min\{x, y\}, z\} = \min\{x, y, z\} = \min\{x, \min\{y, z\} = x \ominus (y \ominus z)$$

gelten. Weiter ist 0 neutral bezüglich $\oplus$, weil für alle natürlichen Zahlen $x \in \mathbb{N}$ die Identität $x = \max\{x, 0\}$ gilt. Die Struktur $(\mathbb{N}, \oplus)$ ist somit ein Monoid. Da keine natürliche Zahl $x > 0$ ein Inverses bezüglich $\oplus$ besitzt ist $(\mathbb{N}, \oplus)$ jedoch keine Gruppe. Für die Verknüpfung $\ominus$ gibt es in $\mathbb{N}$ kein neutrales Element, da für jede natürliche Zahl x die Identität $x \ominus (x + 1) = x + 1$ gilt (somit kann x nicht neutral sein).

Aufgabe 3

Es sei $\mathbb{E}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Beweisen sie:

(a) Die Struktur $(\mathbb{E}, \cup)$ ist ein Monoid aber keine Gruppe.

(b) Die Struktur $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap)$ ist ein Monoid aber keine Gruppe.

Lösung: Wir wissen bereits aus dem ersten Semester, dass bilden von Vereinigungs- und Schnittmengen assoziativ ist. Wir müssen für die beiden Verknüpfungen noch zeigen, dass es in den entsprechenden Strukturen jeweils ein neutrales Element gibt und dass nicht alle Elemente invertierbar sind.

(a) Die leere Menge ist neutral in $(\mathbb{E}, \cup)$, weil für alle X aus $\mathbb{E}$

$$X \cup \varnothing = \varnothing \cup X = X$$

gilt. Die Struktur $(\mathbb{E}, \cup)$ ist also ein Monoid. Ist $Y \in \mathbb{E}$ eine nichtleere Menge (z.B. $Y = \{42\}$), dann gibt es kein Element Z aus $\mathbb{E}$ mit der Eigenschaft

$$Y \cup Z = \varnothing.$$

Es kann sich bei $(\mathbb{E}, \cup)$ somit nicht um eine Gruppe handeln.

(b) Die Menge $\mathbb{N}$ ist neutral in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap)$, weil für alle $X \subset \mathbb{N}$

$$X \cap \mathbb{N} = \mathbb{N} \cap X = X$$

gilt. Die Struktur $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap)$ ist also ein Monoid. Ist $Y \subsetneq \mathbb{N}$ eine Menge (z.B. $Y = \{42\}$), dann gibt es kein Element Z aus $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit der Eigenschaft

$$Y \cap Z = \mathbb{N}.$$

Es kann sich somit bei $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap)$ nicht um eine Gruppe handeln.

Aufgabe 4

In einer Halbgruppe $(H, \star)$ gilt die Kürzungsregel, wenn für alle $a, b, c \in H$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned} a \star b = a \star c \;&\Rightarrow\; b = c \\ b \star a = c \star a \;&\Rightarrow\; b = c. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass in allen Gruppen die Kürzungsregel gilt.

Lösung: Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe mit neutralem Element e, wir müssen die Kürzungsregeln nachweisen: Für die erste Regel betrachten wir für beliebige $a, b, c \in G$ folgende Implikationen:

$$\begin{aligned}
&a \star b = a \star c \\
&\Rightarrow a^{-1} \star (a \star b) = a^{-1} \star (a \star c) \\
&\Rightarrow (a^{-1} \star a) \star b = (a^{-1} \star a) \star c \\
&\Rightarrow e \star b = e \star c \\
&\Rightarrow b = c.
\end{aligned}$$

Die zweite Regel erhalten wir analog:

$$\begin{aligned}
&b \star a = c \star a \\
&\Rightarrow (b \star a) \star a^{-1} = (c \star a) \star a^{-1} \\
&\Rightarrow b \star (a \star a^{-1}) = c \star (a \star a^{-1}) \\
&\Rightarrow b \star e = c \star e \\
&\Rightarrow b = c.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe)

Es sei $(G, \bullet)$ eine endliche Gruppe mit neutralem Element e und $f : \mathbb{N} \to G$ sei eine beliebige Folge. Beweisen Sie, dass es natürliche Zahlen n und k gibt, so dass

$$f(n) \bullet f(n+1) \bullet .. \bullet f(n+k) = e$$

gilt.

Lösung: Es seien $(G, \bullet), f$ und e wie in der Behauptung. Wir definieren eine Folge $b_1, b_2, \ldots$ in G durch die Zuordnung

$$b_n = f(1) \bullet f(2) \bullet \cdots \bullet f(n).$$

Da die Menge G endlich ist, muss es natürliche Zahlen $m \neq r$ geben mit $b_m = b_r$. Weil $m \neq r$ gilt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass es eine weitere natürliche Zahl $h > 0$ mit $m + h = r$ gibt. Es folgt

$$b_m = b_r = b_{m+h}.$$

Wegen $b_{m+h} = b_m \bullet (f(m+1) \bullet \cdots \bullet f(m+h))$ gilt nun

$$b_m = b_m \bullet (f(m+1) \bullet \cdots \bullet f(m+h)).$$

Weil in jeder Gruppe die Kürzungsregeln gelten, können wir daraus

$$e = f(m+1) \bullet \cdots \bullet f(m+h)$$

schliessen. Weil $h > 0$ ist, gilt für $n = m+1$ und $k = h-1$

$$e = (f(n) \bullet \cdots \bullet f(n+k)).$$