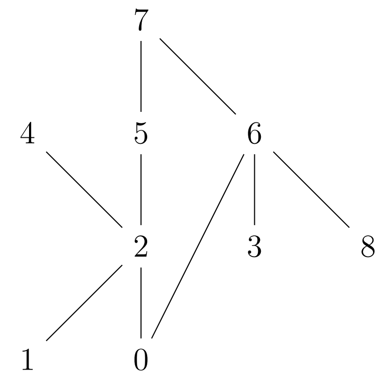
Grundlagen und diskrete Mathematik
Übung 5

Abgabe: Kalenderwoche 48

Aufgabe 1

Gegeben sei das Hasse-Diagramm der Relation R wie folgt:



(a) Geben Sie alle minimalen und alle maximalen Elemente von der Menge $\{2, 5, 6, 3, 8\}$ an.

(b) Geben Sie drei paarweise unvergleichbare Elemente an.

(c) Schreiben Sie die Menge $R \cap \{(x, y) \mid 0 < x < y < 6\}$ in aufzählender Schreibweise auf.

Aufgabe 2

Geben Sie eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Tiere an, so dass die Äquivalenzklassen genau den "Tierarten" entsprechen.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Halbordnung $\preceq$ auf der Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch:

$$f \preceq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}\,(f(x) \leq g(x)).$$

(a) Geben Sie zwei Funktionen f und g mit $f \preceq g$ an.

(b) Geben Sie paarweise verschiedene Funktionen $f_0, f_1, \ldots$ an, die eine echt aufsteigende Folge in $\preceq$ bilden.

$$f_0 \preceq f_1 \preceq \cdots$$

(c) Geben Sie paarweise verschiedene Funktionen $g_0, g_1, \ldots$ an, die eine echt absteigende Folge in $\preceq$ bilden.

$$g_0 \succeq g_1 \succeq \cdots$$

Aufgabe 4

(a) Ist jede endliche totale Ordnung eine Wohlordnung? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist die "normale" $\leq$-Relation eine Wohlordnung auf der Menge $\mathbb{Q}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5

Beweisen Sie mit Induktion, dass folgende Aussagen für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gelten:

(a)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

(c)

$$n^2 + n \text{ ist gerade}$$

(d)

$$a \in \mathbb{N}_{>1} \Rightarrow a^n - 1 \text{ ist durch } a - 1 \text{ teilbar}$$

Aufgabe 6

Die Fibonacci Folge $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist rekursiv wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1 \\ F(n+2) &= F(n) + F(n+1). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass aufeinander folgende Glieder der Fibonacci Folge stets teilerfremd sind.