Version 2.0 / 01.06.2018 / Woche 25

MANIT – Analysis 2 Formelsammlung

Verfasser
Colin Talamona

INHALTSVERZEICHNIS

$\boxed{+C}$ Bei unbestimmten Integral!

$$\int e^{-5x} = -\frac{e^{-5x}}{5} \boxed{+C}$$

Ableitung: 1) Hochzahl nach unten
2) Hochzahl -1

$$y = x^5 \Rightarrow y' = 5x^4$$

Integral: 1) Hochzahl $+1$
2) Geteilt durch neue Hochzahl

$$\int x^5 = \frac{1}{6}x^6 + C$$

1.1.1 Folgen und Reihen

Arithmetisch (= konstante Differenz d)

Rekursiv: $a_{n+1} = a_n \pm d$, Explizit: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

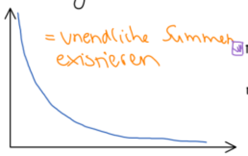
Reihe: $\sum = S_n = \frac{n}{2}\left(2\cdot a_1 + (n-1)\cdot d\right) \Rightarrow 0 = dn^2 - dn + 2a_1 n - 2S_n$

Geometrisch (= festen Quotient $\boxed{q}$)
- wenn $q > 1 \Rightarrow$ kein lim
- wenn $0 < q < 1 \Rightarrow$ Nullfolge
- wenn $q < 0 \Rightarrow$ alternierend

Rekursiv: $a_{n+1} = a_n \cdot q$, Explizit: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Reihe: $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\left[(q)^k\right]$

Konvergenz: Funktion geht gegen einen Wert wenn ∞ eingesetzt



= unendliche Summen existieren

- $\lim_{n\to\infty}(b_n) = 0$
- $\neq$ harmonisch
  z.B. $\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{=>\frac{1}{2}} \dots$
- alternierend + harmonisch
  z.B. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
  Leibniz-Kriterium

Divergenz

Grenzwert unbestimmt

Spezialfall $\frac{1}{x}$ divergiert weil harmonisch

bestimmt div: gegen ∞ / $-\infty$
unbestimmt: z.B. Alternierend

- $\lim_{n\to\infty}(b_n) \neq 0$

Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_{(n+1)}}{b_n}\right) \begin{cases} < 1 \Rightarrow \text{konvergiert} \\ > 1 \Rightarrow \text{divergiert} \end{cases}$$

Wenn $\lim_{n\to\infty} = 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Bsp. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right) = \left(\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{1}\right) = \frac{n}{n+1} = 1$

Bsp: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}\right) = \left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^2}\right) = \frac{(n+\cancel{1})^2}{\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{n^2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)}{n^2}\right) \Rightarrow \underline{0} \Rightarrow$ konvergiert

Beispiel für Radius, Konvergenzbereich und Randpunkte

Bsp: $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ aus $(x - x_0)^n$ folgt: $x_0 = 1$ ohne minus

$r = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{1}\right| = 1 \Rightarrow$ Konvergenz für alle $|x-1| < 1$

KB = 1.) $x = 1 - 1 = 0 \Rightarrow -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\dots\right) \Rightarrow$ Divergenz

2.) $x = 1 + 1 = 2 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\dots \Rightarrow$ Konvergenz

$\Rightarrow$ KB = $]0 ; 2]$

Potenzreihen Form: $\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{a_n}_{\text{Folge}}\cdot\underbrace{(x-x_0)^n}_{\text{Potenz}}$ darum für Konvergenzuntersuch nur die Folge.

(1) Konvergenzradius $\left(= r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)$

(2)
- konvergiert Intervall $|x - x_0| < r$
- divergiert Intervall $|x - x_0| > r$

} keine Aussage wenn $|x - x_0| = r \Rightarrow$ Randpunkte

(3) Randpunkte: 1. Fall: $x = x_0 - r$; 2. Fall: $x = x_0 + r$ } $\Rightarrow$ Einsetzen in $P(x)$
- Konvergenz $[x_0 - r ; x_0 + r]$
- Divergenz $]x_0 - r ; x_0 + r[$

Gesetze:
- Innerhalb des Konvergenzbereichs darf P abgel- / aufgeleitet werden
- r von $P'(x) \Leftrightarrow r$ von $P(x)$
- $P_1(x)$ und $P_2(x)$ dürfen im gemeinsamen KB (+) und (·) gerechnet werden.
- Für $r = \infty$ konvergiert für alle x

Taylorreihen

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\boxed{a_n}\cdot(x-x_0)^n \quad // \text{ Taylorentwicklung um } x_0$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

(1) Prüfen ob Taylorreihe

$f(x) = x\ln(x) \Longleftarrow f(x) = \ln(x)\cdot x$

(2) Ableiten und Koeffizienten rechnen

$f^0(x) = \ln(x)\,x \Rightarrow a_0 = \frac{f(e)}{0!} = e$

$f^1(x) = \ln(x) + 1 \Rightarrow a_1 = \frac{f^1(e)}{1!} = 2$

$f^2(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow a_2 = \frac{f^2(e)}{2!} = \frac{1}{2e}$

$f^3(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow a_3 = \frac{f^3(e)}{3!} = -\frac{1}{6e^2}$

(3) Zusammenstellen

$P_2(x;e) = a_0 + a_1(x-e) + a_2(x-e)^2 + a_3(x-e)^3$

$x\cdot\ln(x) = e + 2(x-e) + \frac{1}{2e}(x-e)^2 - \frac{1}{6e^2}(x-e)^3$

1.1.2 Grenzwerte

Der Grenzwert existiert, wenn links und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmt.

$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$; $\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 0$

L'Hospital wenn $\lim_{x \to y} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{"\infty"}{"\infty"}$ oder $\frac{"0"}{"0"}$ wenn f, g ableitbar

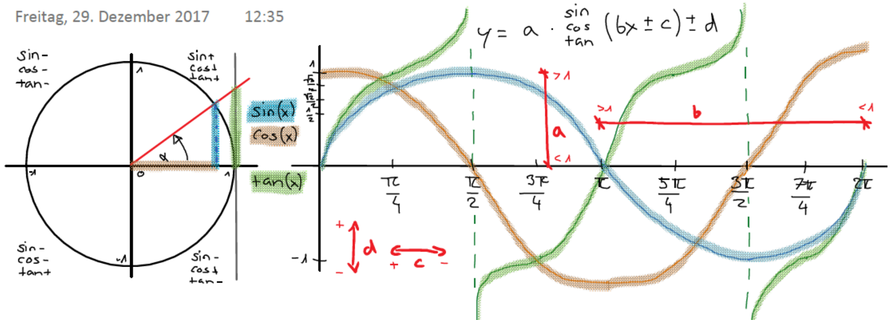
$$\lim_{x \to y} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to y} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

Grenzwertsätze $\lim f(x) = L$, $\lim g(x) = M$

1) SUMME: $\lim (f(x) + g(x)) = L + M$
2) DIFFERENZ: $\lim (f(x) - g(x)) = L - M$
3) FAKTOR: $\lim (k \cdot f(x)) = k \cdot L$
4) PRODUKT: $\lim (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
5) QUOTIENT: $\lim (f(x) / g(x)) = L / M$ $M \neq 0$

1.1.3 Trigonometrie

Freitag, 29. Dezember 2017 12:35



|TR| = |TABLE| -> 'edit-func' (TR auf RAD!)

Additionstheorem
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

Doppelwinkelgleich.
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

Halbwinkelgleich.
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$
- $\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$

Gesetze
- $1 - \cos^2(\alpha) = \sin^2(\alpha)$
- $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

1.1.4 Differentialgleichungen

$y' = x \cdot y$ mit $y(0) = 3$

$\frac{dy}{dx} = x \cdot y$ // Leibnitz-Schreibweise

$\frac{dy}{y} = x \cdot dx$ // Separieren

$\int \frac{1}{y} dy = \int x \, dx$ // Integrieren

$\ln(y) = \frac{x^2}{2} + c$

$e^{\ln(y)} = e^{\frac{x^2}{2} + c}$ // => weil $e^{\ln(y)} = y$

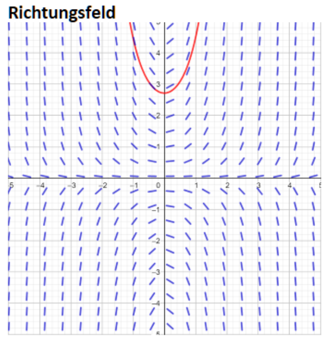
$y(x) = e^{\frac{x^2}{2} + c}$ // => allgemeine Lösung

$y(0) = 3 \Rightarrow 3 = e^{\frac{0}{2} + c}$

$3 = e^c$

$\ln(3) = c \Rightarrow c = 1$ => spezielle Lösung $= y(x) = e^{\frac{x^2}{2} + 1}$

Richtungsfeld



$y' = x + y$ mit $y(0) = 2$

$y' = x + y$ // Substituieren $u = x + y \xRightarrow{\text{umformen}} y = u - x$

$y' = u$ Ableiten $\Rightarrow y' = u' - 1$

$u = u' - 1$ // nur noch eine Variable

$u' = u + 1$

$\frac{du}{dx} = u + 1$ // Separieren

$\frac{du}{u+1} = dx$

$\int \frac{1}{u+1} du = \int dx$ // Integrieren

$\ln(u+1) = x + c$ // $e^{\square}$

$e^{\ln(u+1)} = e^{x+c}$

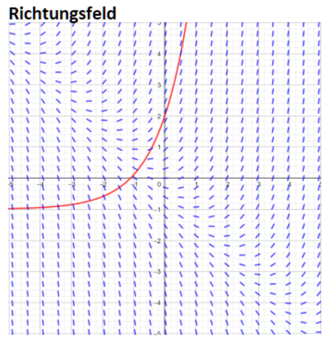
$u + 1 = e^{x+c}$ // Rücksubstituieren

$x + y + 1 = e^{x+c}$

$y(x) = e^{x+c} - x - 1$ // Allgemeine Lösung

$2 = e^c - 1 \Rightarrow c = 1{,}1 \Rightarrow y(x) = e^{x+1{,}1} - 1$

Richtungsfeld

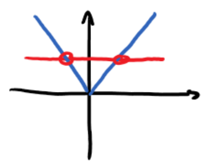


1.1.5 Ableitungen

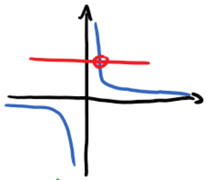
Ableitungsregeln

- Potenzregel $f'(x) = n x^{n-1}$ $x^3 \Rightarrow 3x^2$
- Faktorregel $f'(x) = k \cdot n x^{n-1}$ $3x^5 \Rightarrow 3 \cdot 5 x^4 = 15 x^4$
- Summenregel $f'(x) = u' - v'$ $7x^4 - 2x^3 \Rightarrow 7 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2$
- Produktregel $f(x) = uv \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$
  $f(x) = (3x+1)(x-2x) \Rightarrow u' = 3 \quad v' = 1$
  $\Rightarrow f'(x) = 3(x-2x) + (3x+1)$
- Quotientenregel $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- Kehrwertregel $f(x) = \frac{1}{u(x)} \Rightarrow f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$
  $\Rightarrow \frac{1}{\sin(x)} = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$; $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$
- Kettenregel (Wird bei Substitution angewendet 'äussere mal innere Ableitung')
  $\Rightarrow \sin(x^2) \Rightarrow \cos(x^2) \cdot 2x$
- Linealisierung $L(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
  x_0 = vorgegebener Wert für x
- Logarithmus $y = \log_a(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$; $y = \ln(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$
  $y = e^{x^2} \Rightarrow y' = e^{x^2} \cdot 2x$; $y = e^{3x} \Rightarrow y' = e^{3x} \cdot 3$
  Ableitung von $e^x = e^x$

linkseindeutig (= injektiv) = Für jedes y ($= f(x)$) existiert genau 1 x!



nicht injektiv da 2 Schn.pkt



ja, weil nur ein Schn.pkt

Inverse Funktion (= Umkehrfunktion)

- An $y = x$ gespiegelt
1. $f(x)$ nach x auflösen
2. y und x vertauschen

$$\boxed{\text{Ableitung inverses } f(x) \quad \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Bsp.: $f(x) = x^2 + 1$, $x \geq 0$
$y = x^2 + 1$
$x = \sqrt{y - 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$

Wertebereich W der Funktion $f(x)$ = Def. Bereich D von $f^{-1}(x)$. Def. Bereich D von $f(x)$ = W von $f^{-1}(x)$

$W: \frac{1}{x^2+1} =]0; 1]$ $\quad D: [0; \infty[$

$W(f^{-1}) = [0; \infty[$ $\quad D(f^{-1}) =]0; 1]$

Grenzwertbestimmung mit l'hospital

wenn $\lim_{x \to a} \Rightarrow \frac{"0"}{"0"}$ oder $\frac{"\infty"}{"\infty"}$

$\Rightarrow$ obere und untere Funktion so lange ableiten bis es geht, dann einsetzen:

Bsp.: $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 3x}{7x^2 + 1} = \frac{"\infty"}{"\infty"} = \frac{10x - 3}{14x} = \frac{"\infty"}{"\infty"} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

Integration und Ableitung von ln(x)

Ableitung ln(x): $\ln(e) = 1$

$y = \ln(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C$

innere Ableitung

$y = \ln(3x) \Rightarrow y' = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$

$y = \ln\left(\frac{3}{x}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{\frac{3}{x}} \cdot -\frac{3}{x^2} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{3}} \cdot -\frac{\cancel{3}}{x^{\cancel{2}}} = -\frac{1}{x}$

↳ oder $\ln\left(\frac{3}{x}\right) = \ln(3) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \underbrace{\ln(3)}_{=0\ (\text{konst}).} - \underbrace{\ln(x)}_{\frac{1}{x}} \Rightarrow -\frac{1}{x}$

$\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{2-\cos(t)}\,dt \Rightarrow$ $u = 2-\cos(t) \Rightarrow u' = \sin(t) = \frac{1}{\sin(t)}dx$

$\int_0^\pi \frac{\cancel{\sin(t)}}{\cancel{\sin(t)}} \cdot \frac{1}{u} \Rightarrow \int_0^\pi \frac{1}{u} \Rightarrow \Big[\,|\ln(2-\cos(t))|\,\Big]_0^\pi$

Integration und Ableitung von e^x

Ableitung e^x: $e^{\ln(x)} = x$; $\ln(e^x) = x$

innere Abl.

$y = e^x \Rightarrow y' = e^x \cdot 1$, $\int e^u = e^u + C$

$y = e^{-5x} \Rightarrow y' = e^{-5x} \cdot (-5)$

$y = 5^{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = 5^{\sqrt{x}} \cdot \ln(5) \cdot \frac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \frac{5^{\sqrt{x}} \cdot \ln(5)}{2\sqrt{x}}$ | $\int 5^x = \frac{5^x}{\ln(5)} + C$

Gesetze: $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$; $y = a^u \Rightarrow y' = a^u \cdot \ln(a)$

$a^{\log_a(x)} = x$; $\log_a(a^x) = x$; $\int a^u\,du \Rightarrow \frac{a^u}{\ln(a)} + C$; $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Gesetze: $\ln(bx) = \ln(b) + \ln(x)$ $\quad \ln(1/x) = -\ln(x)$

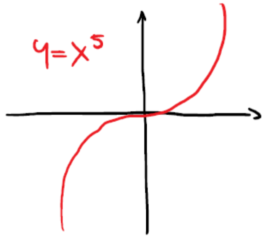
$\ln(b/x) = \ln(b) - \ln(x)$ $\quad \ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$

1.1.6 Funktionen

Verkettung $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad g(x) = \sqrt{1-x}$

- $f(x) + g(x) \rightarrow (f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$
  ↳ gilt für '−' '·' '/'
- $(f \circ g)(x) \Rightarrow f(g(x)) = \sqrt{\sqrt{1-x}}$

Graphenverschiebung



- Gerade Funktion (exp. grade)
  ⇒ Symm. bez. Y-Achse
- Ungerade Funktion (exp. ungerade)
  ⇒ Symm. bez. Ursprung

Funktion	Änderung	Verschiebung
$y = \sqrt{a}$	$\sqrt{a} + 1$	↑
	$\sqrt{a} - 1$	↓
	$\sqrt{a+1}$	←
	$\sqrt{a-1}$	→
	$3\sqrt{a}$	Streckung vertik.
	$1/3\sqrt{a}$	Stauchung vertik.
	$\sqrt{3a}$	Stauchung horiz.
	$\sqrt{a/3}$	Streckung horiz.
	$-\sqrt{a}$	Spiegelung x-Achse
	$\sqrt{-a}$	Spiegelung Y-Achse

Lineare Funktion

$y = f(x) = mx + q \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

1) $\mathbb{D}$ Ermitteln => Polstellen (Achtung, wenn Zähler an Polstelle $= 0$ => keine Polstelle => ersatzfunktion)

2) Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$ (evtl. $f'''(x)$)

3) Nullstellen (TR poly-solv oder Newton-Verfahren)

4) Asymtoren $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x))$, wenn Zählergrad > Nennergrad => schiefe

5) Y-Achsenabschnitt $(x = 0)$

6) kritische Stellen: $f'(x) = 0$ => Hoch, Tiefpkt wenn $f''(x) \neq 0$

(Bestimmen wo $f(x)$ steigt / fällt) ↳ $f''(x) > 0$ (Tiefpkt), $f''(x) < 0$ (Hochpkt)

7) Wendepunkte $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$: rechts-links $(f'''(x) > 0)$ (konvex / konkav)

links-rechts $(f'''(x) < 0)$ (konkav / konvex)

__Bsp:__ $f(x) = -\frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$

1) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ Zähler $\neq 0$ wenn $x = 1$ => Polstelle bei $x = 1, -1$

2) $f'(x)$ => Quotientenregel => $-\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x(2-x^2)}{(x^2-1)^2} = f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$

$f''(x)$ => " => ... $f''(x) = \frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$

3) $0 = f(x) \Rightarrow 0 = -x^2 + 2 \Rightarrow$ Nullstellen bei $\pm\sqrt{2}$

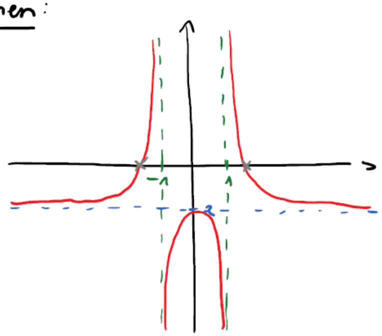
4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(-\frac{x^2-2}{x^2-1}\right) = -\frac{1}{1} = -1 \Rightarrow$ x geht gegen (-1) bei $\pm\infty$

5) $y = -\frac{0^2-2}{0^2-1} = -2 \Rightarrow$ Y-Achsenabschnitt $= -2$

6) $f'(x) = 0 \Rightarrow 0 = -2x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f''(0) = \frac{2(3 \cdot 0^2 + 1)}{(0^2-1)^3} = -2 \Rightarrow HP(0; -2)$

7) $f''(x) = 0 \Rightarrow$ keine Wendepunkte

8) __Zeichnen:__

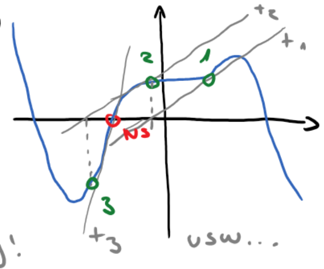


1.1.8 Newton Verfahren

- Nullstellen einer Funktion (nicht linear) abschätzen

1) Anfangspkt. bel. $= x_1$
↳ $t_1 = f(x_1) + (x - x_1) \cdot f'(x_1) = 0$

$f(x) = \sin(x) \cdot x^2 + \cos(x)$



2) nach x umformen $x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_2$

3) $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ wenn die ersten zwei kommazahlen bei x_n und x_{n+1} gleich sind => Fertig!

Bsp.: $f(x) = x^3 + 2x - 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2$

=> Wertetabelle (TR) beim Vorzeichen-wechsel dazwischen x_1 wählen.

1) $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1{,}4$

2) $x_3 = 1{,}4 - \frac{f(1{,}4)}{f'(1{,}4)} = 1{,}33096$ 3) $x_4 = 1{,}2078..$ usw ...

__Wurzel 2 berechnen__: $x = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2 = 0$ $f'(x) = 2x$ $x_1 = \sim 1{,}5$

$x = 1{,}5 - \frac{f(1{,}5)}{f'(1{,}5)} = 1{,}41\overline{6}\ldots$ usw.

__Parameter a, b sodass f(x) differenzierbar__

$$g(x) = \begin{cases} 2ax^4 - 1 & \text{für } x \leq -1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

▹ Stetigkeit: $g(1)$ gleichsetzen $\Rightarrow 2ax^4 - 1 = ax^2 + bx + 1$ für $x = -1$

▹ Differenzierbarkeit: $g_1'(1) = g_2'(1)$ (Steigungen gleichsetzen)

1.1.9 Stammfunktion

1) → Hochzahl + 1 2) → Dividieren durch neue Hochzahl 3) → hinten $+C$	$f(x) = 3x - 4 \Rightarrow 3x^{1+1} - 4x^{0+1}$ $= 3x^2 - 4x \Rightarrow \frac{1}{2}3x^2 - \frac{1}{1}4x$ $\Rightarrow F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + C$
	$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 2 \Rightarrow F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$
→ Wurzeln 1) $\sqrt{x} \Rightarrow x^{1/2}$	$f(x) = 5 \cdot \sqrt{x} \Rightarrow 5 \cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\frac{3}{2}} 5x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{2}{3}5x^{\frac{3}{2}}$ $\Rightarrow F(x) = \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$
→ Brüche 1) Umschreiben Spezialfall: $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln(\lvert x \rvert) + C$	$f(x) = \frac{2}{3x^2} \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot x^{-2} \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(-1)} \cdot x^{-2+1}$ $\Rightarrow F(x) = -\frac{2}{3}x^{-1} + C$
→ Sinus / Cosinus Ableiten Integrieren sin, cos, -sin, -cos	$f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x) + C$
→ Kettenregel 1) Geteilt innere Abl.	$f(x) = (2x+3)^2 \Rightarrow (2x+3)^3 \Rightarrow \frac{1}{3}\underbrace{(2x+3)}_{\text{Ableiten} := 2}{}^3$ $\Rightarrow \frac{1}{3}(2x+3)^3 \cdot \boxed{\frac{1}{2}} + C$ muss linear sein. ansonsten: Substitution $\Rightarrow F(x) = \frac{1}{6}(2x+3)^3 + C$ $f(x) = 2\cos(3x) \Rightarrow 2\sin(3x) \Rightarrow 2\sin(3x) \cdot \frac{1}{3}$ $\Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}\sin(3x) + C$
→ Eulersche Zahl	$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + C$ $f(x) = 2e^x \Rightarrow F(x) = 2e^x + C$
→ Exponential	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} \Rightarrow \int 2^x = \frac{2^x}{\ln(2)}$

→ Standardintegrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan(x)$$

1.1.10 Integral mit Substitution

Unbestimmt

1. Substituieren der Klammer
2. Nach x ableiten
3. Nach dx umformen
4. Klammer durch t und dx durch □ ersetzen
5. Integrieren

Bsp:

$$\int (2-4x)^4 \, dx \Rightarrow t = 2-4x$$

$$\frac{dt}{dx} = -4$$

$$dx = \frac{dt}{-4} = \boxed{-\frac{1}{4}dt}$$

$$\Rightarrow \int t^4 \left(-\frac{1}{4}\right) dt$$

$$-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}t^5 + C \Rightarrow -\frac{1}{20}t^5 + C$$

Bsp 2:

$$\int (x^3+x)^5 \underbrace{(3x^2+1)}_{\text{Ableitung}} dx$$

① $u = (x^3+x) \Rightarrow du = (3x^2+1)dx$

② $\int (u)^5 \, du$

③ $\frac{1}{6}u^6 + C \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot (x^3+x)^6 + C$

bestimmt

① Geg: $\int_a^b f(x)\,dx$

② schon: $\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)$

$= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$

Bei Rücksubstitution muss mit den ursprünglichen 'b' und 'a' gerechnet werden!

$$\int_0^{2\pi} \sin(2x)\,dx \qquad u = 2x$$

$$u' = 2 = \frac{du}{dx}$$

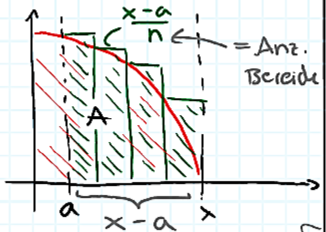
$$2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

$$\int_0^{4\pi} \sin(u) \cdot \frac{du}{2} \qquad dx = \frac{du}{2}$$

$$\int_0^{4\pi} \frac{1}{2}\sin(u)\,du = \left[\frac{1}{2} - \cos(u)\right]_0^{4\pi}$$

$$\int = F(4\pi) - F(0) = \underline{\underline{0}}$$

Obersummen | Untersummen



Analog mit Start 0 anstatt 1x

$$\sim A = \frac{x-a}{n}\cdot f\left(1\cdot\frac{x-a}{n}\right) + \frac{x-a}{n}\cdot f\left(2\cdot\frac{x-a}{n}\right) + \ldots + \frac{x-a}{n}\cdot f\left(n\cdot\frac{x-a}{n}\right)$$

Mittelwert

A unter der Kurve berechnen
Geteilt durch länge

$\lim_{n\to\infty} \Rightarrow$ Fläche

Summen

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k)$$

Endindex, Formel, Startwert

Riemann'sche Summen

$$\Rightarrow \sum_{k=a}^{x}\frac{x-a}{n}\cdot f\left(k\,\frac{x-a}{n}\right) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k$$

selber bestimmen

Bsp: $f(x) = \sin(x)$ $[0;\pi]$

$$\sum_{k=1}^{4}\left(\left(\frac{\pi-0}{4}\right)\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi-0}{4}\right)\right)$$

Obersummen / Untersummen

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

b ← obere Grenze; f(x) ← Funktion; dx ← Variable; a ← untere Grenze

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

① Stammfunktion bilden $\Rightarrow [F(x)]_a^b$
② a und b einsetzen $\rightarrow F(b) - F(a) =$ Fläche

ACHTUNG: Flächeninhalt unterhalb der x-Achse wird abgezogen $\Rightarrow |f(x)|$ oder $-\int_a^b f(x)dx$

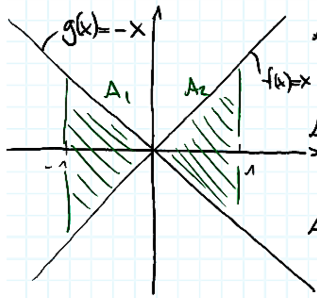
Mittelwertsatz: $\text{mittel} = \frac{\text{Fläche}}{\text{Breite}} = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$

keppler Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{6}(b-a)\cdot\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

Flächen mittels Integral

! Wie über einen Schnittpunkt der Funktion integrieren



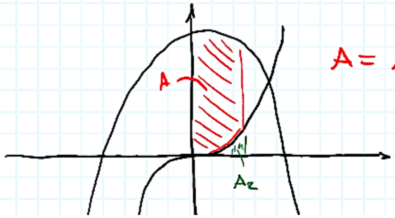
$$A_1 = \int_{-1}^{0}(-x)-x\,dx = \int_{-1}^{0}-2x\,dx$$

obere Kurve − untere

$$A_2 = \int_0^1 (x)-(-x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx$$

$$A = [-x^2]_{-1}^{0} + [x^2]_0^1 = \underline{\underline{2\,FE}}$$

① Skizze + Fläche gesucht zeichnen
② Welche Funktion ist oben?
③ Integral obere minus untere Funktion



$A = A_1 - A_2$

Flächen zwischen 2 Kurven

Aufgabe: Gesucht minimale Fläche unter einer Funktion für einen Parameter a:

→ Integral für die Fläche (abhängig von a)
→ Funktion für die Fläche (abhängig von a) ableiten
→ Ableitung = 0 (weil Extrempunkt)
→ Nach a auflösen, a in Flächenformel einsetzen

1.1.12 Partialbruchzerlegung

$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx$ Form = $\frac{f(x)}{g(x)}$ → weil Grad von $f(x)$ = Grad von $g(x)$ und Grad $f(x)$ muss < $g(x)$ => Division

① Geeignete Form

$$x^2 : x^2 - 1 = 1 + \frac{1}{x^2-1}$$

② Zerlegung

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \overset{\times(x^2-1)}{\Longrightarrow} 1 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$1 = Ax + A + Bx - B$$

③ Koeffizientenvergleich

$$x^2 \Rightarrow 0 = 0$$

$$x^1 \Rightarrow 0 = A + B \qquad \uparrow\ 0 = 1 + B + B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$x^0 \Rightarrow 1 = A - B \Rightarrow A = 1 + B \qquad A = \frac{1}{2}$$

④ Einsetzen und Integrieren

$$\int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right) = \int (1) + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\int\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= x + \frac{1}{2}\ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + C$$

$$\frac{x+4}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

Wichtig!!

1.1.13 Uneigentliche Integrale

• Bei Integrationsgrenzen $\pm\infty$ oder vertikale Asymptoten als Grenze

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}\,dx \Rightarrow \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b \Rightarrow \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b} - (-1)\right) \Rightarrow \underline{\underline{1}}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow \lim_{\underbrace{u\to 0^+}_{\text{wichtig!}}}\int_u^1 x^{-2}\,dx \Rightarrow \lim_{u\to 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_u^1 \Rightarrow \lim_{u\to 0}\left(-1 - \overset{-\infty}{\left(-\frac{1}{u}\right)}\right) \Rightarrow \underline{\underline{+\infty}}$$

1.1.14 Partielle Integration

Unbestimmt

Fall: $\int f(x)g(x)\,dx = \int uv\,dx$

Annahme: 1 Funktion ist eine Ableitung

$$\Rightarrow \int f(x)g'(x) = \boxed{f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

'aufleiten' 'ableiten'

Bsp.: $\int \cos^n(x)\,dx = \int \cos^{n-1}(x)\cdot\cos(x)\,dx$

① $u = \cos^{n-1}(x)$ $\qquad v' = \cos(x)$

② $u' = (n-1)\cos^{n-2}(x)\cdot(-\sin(x))$ $\qquad v = \sin(x)$

③ $\int \cos^n(x) =$

$$= \cos^{n-1}(x)\sin(x) - \int (n-1)\cos^{n-2}(x)(-\sin^2(x))$$

$$= \cos^{n-1}(x)\sin(x) + (n-1)\int \sin^2(x)\cos^{n-2}(x)$$

$$\ldots\ = \frac{1}{3}\cos^2(x)\sin(x) + \frac{2}{3}\sin(x) + C$$

Bestimmt

Grenzen einsetzen

aufleiten

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \boxed{[f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx}$$

Bsp.: $\int_0^4 xe^{-x}\,dx$

① $u = x$ $\qquad v' = e^{-x}$

② $u' = 1$ $\qquad v = -e^{-x}$

③ $\int_0^4 xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x})\,dx$

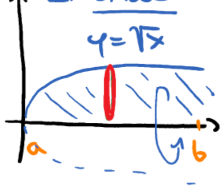
$$= (-4e^{-4} - 0) - \int_0^4 -e^{-x}\,dx = -4e^{-4} - \left[e^{-x}\right]_0^4$$

$$= -4e^{-4} - \left[e^{-4} - e^0\right] = -4e^{-4} - e^{-4} + 1$$

$$= 1 - 5e^{-4} \approx 0{,}91$$

Scheibenmethode (x-Achse): $V = \int_a^b \pi \left(R(x)\right)^2 \, dx$

Skizze



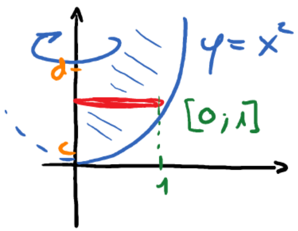
① $R(x) = f(x) \qquad = \sqrt{x}$

② $^2 \quad = (R(x))^2 \qquad = x$

③ $\int \qquad = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b$

④ $\cdot \, \pi \qquad [VE]$

Scheibenmethode (y-Achse): $V = \int_c^d \pi \left(R(y)\right)^2 \, dy$



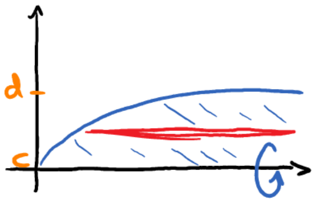
① f(x) nach f(y) umformen $\quad x = \sqrt{y}$

② $\int_c^d$ Grenzen berechnen falls x-Intervall

$c = 0^2 \,, d = 1^2 \Rightarrow \int_0^1$

③ Schritte 1–4 von Scheiben (x-A.)

Schalenmethode (x-Achse): $V = \int_c^d 2\pi \overbrace{\left(\text{Radius der Schale}\right)}^{y}\left(\text{Höhe der Schale}\right) dy$

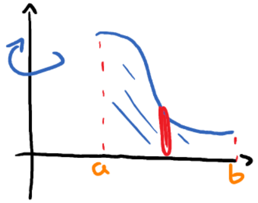


① Fläche zeichnen, Strecke parallel zur Rot-Achse zeichnen

② Grenzen bestimmen

③ $y = \sqrt{x}$ zu $x = y^2$ umformen

Schalenmethode (y-Achse): $V = \int_a^b 2\pi \overbrace{\left(\text{Radius der Schale}\right)}^{\text{hier } x}\left(\text{Höhe der Schale}\right) dx$

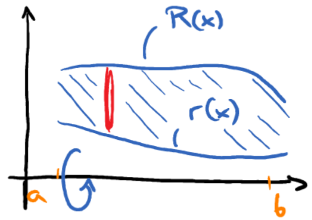


① f(x) – Höhe der Schale

② Radius = x

③ Integrieren

Ringmethode (x-Achse): $V = \int_a^b \pi \left((R(x))^2 - (r(x))^2 \right) dx$



① Obere Funktion $^2 \quad = (R(x))^2$

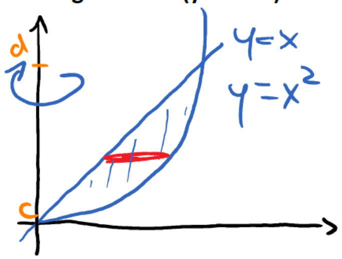
② Untere Funktion $^2 \quad = (r(x))^2$

③ $(R(x))^2 - (r(x))^2$ ausmulti...

④ $\int$

⑤ $\cdot \, \pi$

Ringmethode(y-Achse): $V = \int_c^d \pi \left((R(y))^2 - (r(y))^2 \right) dy$



① nach x = ... umformen

② Grenzen Transformieren – $\int_c^d$

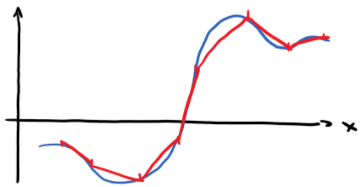
③ $R(y) =$ Weiter rechts

$r(y) =$ Weiter links

④ Schritte 1–5 aus Ring (x-Achse)

1.1.16 Bogenlängen

Bogenlängen:



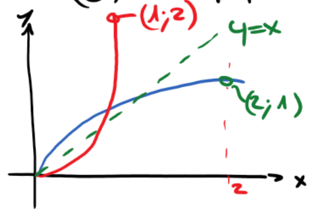
$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

wenn Integral nicht möglich => nach Y umformen:

$$L=\int_c^d \sqrt{1+(f'(y))^2}\,dy$$

Beispiel:

$y=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}$ BL zwischen $[0;2]$



① y' berechnen

$\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x}{2}}}$ ↯ division durch 0

② f(x) spiegeln => länge des roten Bogens

$\Rightarrow \int_{y_1}^{y_2}\sqrt{1+(x')^2}$

③ Umkehrfunktion

$y^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{2}$

$x = 2y^{\frac{3}{2}}$

④ x' ableiten

$x'(y) = 2\,\frac{3}{2}\,y^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{y}$

⑤ Einsetzen weil gespiegelt

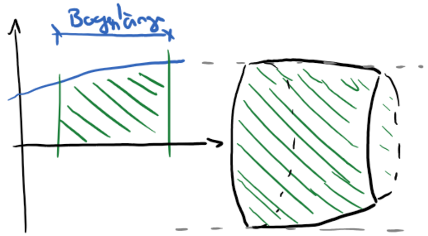
innere Ableitung

$$\int_0^1 \sqrt{1+9y}\,dy = \int_0^1 (1+9y)^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{2}{3}\cdot(1+9y)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{9}$$

$$= \left[\frac{2}{27}\left(1+9y\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

1.1.17 Rotationsflächen

Rotationsflächen:



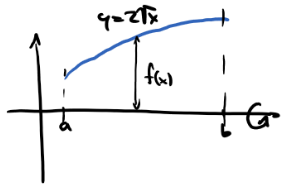
Um die x-Achse:

$$S=\int_a^b 2\pi(f(x))\overbrace{\sqrt{1+(f'(x))^2}}^{BL}$$

Um die Y-Achse:

$$S=\int_c^d 2\pi(f(y))\overbrace{\sqrt{1+(f'(y))^2}}^{BL}$$

Beispiel:



$\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = x+\frac{x}{x} = (x+1)$

$\frac{1}{x}$

① $\int_1^2 \overbrace{2\pi\cdot 2\sqrt{x}}^{4\pi\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$

$$= 4\pi\int_1^2\sqrt{x+1}\,dx = 4\pi\int_1^2 (x+1)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{8\pi}{3}(x+1)\right]_1^2$$