

Aufgabe 1

Gegeben sei die Ackermannfunktion $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch folgende Rekursionsgleichungen:

$$a(0, m) = m + 1$$

$$a(n + 1, 0) = a(n, 1)$$

$$a(n + 1, m + 1) = a(n, a(n + 1, m))$$

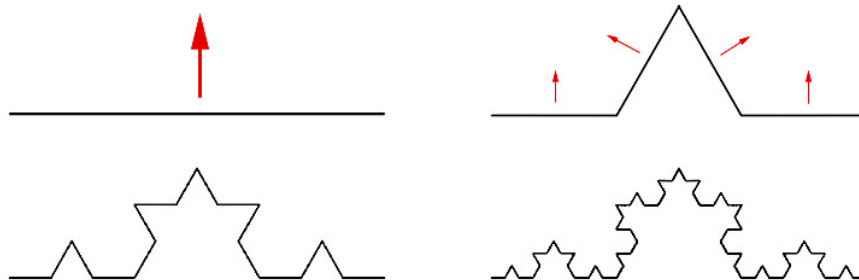
- Berechnen Sie von Hand $a(2, 1)$.
- Implementieren Sie die Ackermannfunktion in einer Programmiersprache Ihrer Wahl.
- Berechnen Sie so viele Werte wie möglich und beschreiben Sie die Probleme die dabei auftreten.

Aufgabe 2

Die n -te Koch-Kurve K_n ist wie folgt gegeben:

- Die Kurve K_0 ist eine Gerade der Länge 1.
- Die Kurve K_{n+1} erhält man aus der Kurve K_n , indem man jede Teilgerade von K_n in 3 gleich grosse Abschnitte unterteilt und danach den "mittleren" dieser Abschnitte gemäss unten stehender Skizze in zwei zusammenhängende Geraden gleicher Länge umsetzt.

Die Kurven K_0, K_1, K_2 und K_3 :



- Berechnen Sie die Länge der Kurve K_4 .
- Geben Sie eine rekursive Definition der Funktion $L : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$L(n) = \text{Länge der Kurve } K_n.$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Induktion nach k , dass für alle natürlichen Zahlen n, m, k folgendes gilt:

$$(n + k = m + k) \Rightarrow n = m. \quad (\text{Kürzbarkeit})$$

Hinweis: Arbeiten sie mit der (rekursiven) Definition der Addition und benützen Sie die Peano Axiome.

Aufgabe 4

Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $x, y \neq 0$:

$$x|y \Rightarrow x \leq y.$$

Aufgabe 5

Finden Sie ganze Zahlen a und b , so dass die Gleichung

$$a \cdot 241 + b \cdot 114 = 1$$

erfüllt ist.