Grundlagen und diskrete Mathematik
Übung 4

Abgabe: Kalenderwoche 46

Aufgabe 1

(a) Gegeben ist die Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wobei

$$F(n) = \text{Die Zahl } n \text{ in ihrer Dezimaldarstellung}$$
$$\text{rückwärts gelesen (fürende Nullen gestrichen).}$$

Es gilt z.B. $F(324) = 423$ $F(0) = 0$ und $F(10) = 1$. Ist F surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist die Funktion

$$G : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \text{mit} \qquad G(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{falls } x \text{ gerade} \\ 2x & \text{sonst.} \end{cases}$$

surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Die Funktion F ist nicht surjektiv, da (u.A.) die Zahl 10 nicht im Bild der Funktion ist (nicht gtroffen wird).

(b) Die Funktion G ist surjektiv, da für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $G(2n) = n$ gilt. Jede Zahl kann also dadurch getroffen werden, dass man ihr Doppeltes in die Funktion einsetzt.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Mengen A und B, die wie folgt gegeben sind:

$A :=$ endliche Wörter die mit Buchstaben 'a' und 'b' gebildet werden können
$B :=$ endliche Wörter die mit Buchstaben 'a','b', 'c' gebildet werden können

Geben Sie je eine surjektive Funktion $F : A \to B$ und eine surjektive Funktion $G : B \to A$ an.

Lösung: Mögliche Lösungen:

-
$$\begin{aligned} &G : B \to A \\ &G(w) = w \text{ ohne die } c\text{'s} \end{aligned}$$

  Beispiel: $G(abcacba) = ababa$.

- Die Funktion f sei durch die Zuordnung

$$\begin{aligned} f(aa) &= a \\ f(ab) &= b \\ f(ba) &= c \\ f(bb) &= c \end{aligned}$$

  Mithilfe der Funktion f können wir eine surjektive Funktion $F : A \to B$ wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} &F : A \to B \\ &F(x_1y_1x_2y_2 \ldots x_ny_n) = f(x_1y_1)f(x_2y_2) \ldots f(x_ny_n) \end{aligned}$$

  wobei der letzte Buchstabe bei einem Wort mit ungerader Länge weggelassen wird. Beispiel:

$$\begin{aligned} F(aabbabaababababaaab) &= f(aa)f(bb)f(ab)f(aa)f(ba)f(ba)f(ba)f(aa) \\ &= acbaccca \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Wir betrachten die Menge Seq aller Tupel (beliebiger Länge) von natürlichen Zahlen. Es gilt beispielsweise $(2, 4, 55) \in Seq$, $(1, 1, 1, 1) \in Seq$ etc... Geben Sie eine surjektive Funktion $F : \mathbb{N} \to Seq$ an. Diskutieren Sie was so eine Funktion für die Abzählbarkeit der Menge Seq bedeutet.

Lösung: Es gibt mehrere Möglichkeiten. Eine Option ist es, natürliche Zahlen (Wir betrachten nur ungerade natürliche Zahlen, die grösser als 1 sind. Für alle anderen natürlichen Zahlen n gelte $F(n) = (0)$) binär zu notieren und dabei alle auftretenden Einsen als Trennzeichen zu betrachten. Die zwischen den Einsen auftretenden Nullen codieren, in unär, die Zahl, die an der entsprechenden Stelle des Tupels steht.
Beispiel: $F(1010100100011001) = (1, 1, 2, 3, 0, 2)$.

Die Existenz einer surjektiven Abbildung $F : \mathbb{N} \to Seq$ bedeutet, dass die Menge Seq abzählbar ist.

Aufgabe 4

Skizzieren Sie eine Abzählung von der Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ähnlich wie wir dies für die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in der Vorlesung getan haben.

Lösung:

```
37—36—35—34—33—32—31
|                  |
38  17—16—15—14—13 30
|   |           |  |
39  18  5— 4— 3 12 29
|   |   |     | |  |
40  19  6  1— 2 11 28
|   |   |       |  |
41  20  7— 8— 9—10 27
|   |              |
42  21—22—23—24—25—26
|
43—44—45—46—47—48—49...
```

Aufgabe 5

Beweisen Sie: Wenn X und Y abzählbar sind, dann ist auch $X \times Y$ abzählbar.
Hinweis: Benützen Sie die Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Lösung: Wir wissen aus der Vorlesung:

1. Ist A eine abzählbare Menge und ist $F : A \to B$ eine surjektive Funktion, dann ist auch B abzählbar.
2. Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.

Wegen 1. und 2. genügt es zu zeigen, dass es für alle abzählbaren Mengen X und Y eine surjektive Funktion $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$ gibt. Wir nehmen also an, dass X und Y abzählbar seien. Es folgt, dass es surjektive Funktionen

$$F : \mathbb{N} \to X$$
$$G : \mathbb{N} \to Y$$

gibt. Die gewünschte surjektive Funktion

$$H : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$$

erhalten wir damit aus der Zuordnung

$$H(n, m) := (F(n), G(m)).$$

Um zu sehen, dass H surjektiv ist, wählen wir $(x, y) \in X \times Y$ beliebig. Da die Funktionen F und G per Annahme surjektiv sind, gibt es natürliche Zahlen n und m mit der Eigenschaft $F(n) = x$ und $G(m) = y$ und somit wie gewünscht $H(n, m) = (x, y)$.

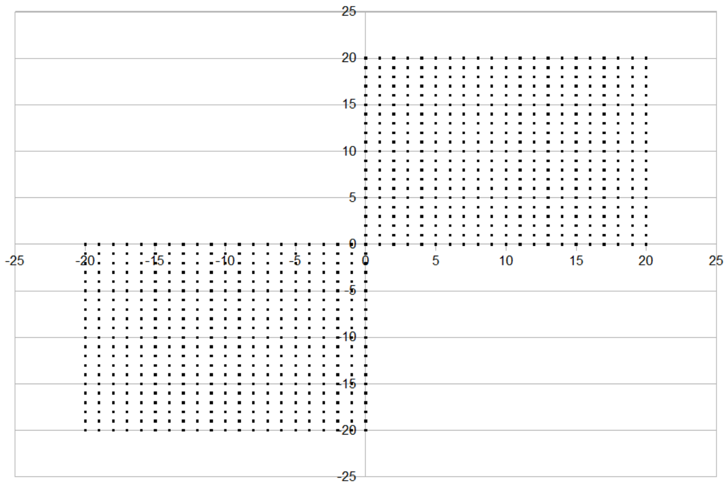
Aufgabe 6

Die Relation R ist auf der Menge $\{-20, -19, \ldots, 19, 20\}$, durch

$$xRy :\Leftrightarrow x \cdot y \geq 0$$

gegeben. Skizzieren Sie den Graphen.

Lösung:



Aufgabe 7

Gegeben sei eine Relation $\sim$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit:

$$X \sim Y \ :\Leftrightarrow \ X \subset Y \vee Y \subset X \vee X \cap Y = \varnothing.$$

Entscheiden Sie ob diese Relation reflexiv, (anti)symmetrisch und/oder transitiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

- Die Relation ist reflexiv, da für jede Menge X die Beziehung $X \subset X$ und somit $X \sim X$ gilt.
- Die Relation ist Symmterisch, da für beliebige Mengen X und Y die Äquivalenzen
$$X \cap Y = \varnothing \Leftrightarrow Y \cap X = \varnothing$$
und
$$(X \subset Y) \vee (Y \subset X) \Leftrightarrow (Y \subset X) \vee (X \subset Y)$$
gelten.
- Die Relation ist nicht antisymmetrisch, da $\{1\} \sim \{2\}$ und $\{2\} \sim \{1\}$, aber $\{1\} \neq \{2\}$ gilt.
- Die Relation ist nicht transitiv, da $\{1, 2\} \sim \{1, 2, 3\}$ und $\{1, 2, 3\} \sim \{2, 3\}$, aber **nicht** $\{1, 2\} \sim \{2, 3\}$ gilt.

Aufgabe 8

Ist jede symmetrische und transitive Relation auch reflexiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Nein, Die leere Menge als Relation über irgend einer (nichtleeren) Menge ist symmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv. Es gibt auch andere Gegenbeispiele, z.B. die Relation $R = \{(1, 1)\}$ auf der Menge $\{1, 2\}$.

Aufgabe 9 ("Doppelbonusaufgabe")

Finden Sie eine Menge $M = \{X_i \mid i \in I\}$ von Mengen, die folgende Eigenschaften hat:

1. M ist überabzählbar (insbesondere muss also I überabzählbar sein).
2. Alle X_i sind unendliche Teilmengen von $\mathbb{N}$.
3. Für beliebige verschiedene $i, j \in I$ gilt, dass $X_i \cap X_j$ endlich ist.

Bemerkung: Eine Doppelbonusaufgabe ist eine Bonusaufgabe, die doppelt so schwer wie eine "normale" Bonus Aufgabe ist.

Lösung: Wir wählen I als die Menge aller unendlichen Binärsequenzen die mit 1 beginnen. Nun können wir die Mengen X_s für alle $s \in I$ wie folgt angeben:

$$X_s = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ Die Dezimaldarstellung von } n \text{ ist ein Anfangsabschnitt von } s\}.$$

Es gilt zum Beispiel:

$$X_{101101\ldots} = \{1, 10, 101, 1011, 10110, 101101, \ldots\}$$

oder

$$X_{100000\ldots} = \{1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, \ldots\}.$$

Wir überprüfen[1] nun die Anforderungen 1. − 3. von der Aufgabenstellung:

1. Wir wissen, dass es überabzählbar viele unendliche Binärsequenzen gibt, daher gibt es auch überabzählbar viele unendliche Binärsequenzen, die mit einer 1 beginnen. Weil die X_s paarweise verschieden sind, ist M also überabzählbar.

2. Dies folgt daraus, dass jede unendliche Binärsequenz unendlich viele Anfangsabschnitte hat.

3. Dies sieht man wie folgt: Sind $a = a_1, a_2, \ldots$ und $b = b_1, b_2, \ldots$ zwei verschiedene Binärsequenzen, dann gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $a_{n_0} \neq b_{n_0}$ gilt. daraus folgt, dass keine Zahl mit mehr als n_0 Stellen (in der Dezimaldarstellung) ein Element von $X_a \cap X_b$ sein kann. Daher gilt

$$X_a \cap X_b \subset \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10^{n_0}\}.$$

also ist $X_a \cap X_b$ endlich.