Dr. Jürg M. Stettbacher
Neugutstrasse 54
CH-8600 Dübendorf

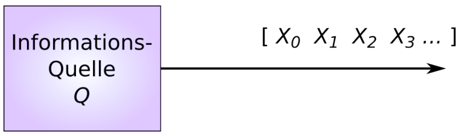
Telefon: +41 43 299 57 23
Email: dsp@stettbacher.ch

Quiz

Information und Entropie

Sie sollten in der Lage sein, die folgenden Fragen ohne langes Nachdenken beantworten zu können.

Die Fragen beziehen sich auf eine stochastische Quelle Q:



1. Wie bezeichnen wir X_k mit $k \geq 0$?

   Wsk $P(x_k)$

2. Worauf bezieht sich der Begriff *Information*?

   Information bezieht sich auf das Ereignis

3. Worauf bezieht sich der Begriff *Entropie*?

4. Wie hängen *Information* und *Entropie* zusammen?

5. Was sind die Einheiten von *Information* und *Entropie*?

6. Vor dem Fenster steht eine Verkehrsampel. Jedes Mal wenn ich raus schaue, sehe ich entweder *rot* (70 %), *orange* (5 %) oder *grün* (25 %). Wie gross ist der Informationsgehalt für jedes Ereignis? Wie gross ist die Entropie der Ampel? Wie gross ist die Redundanz, wenn ich die Farben mit je 2 Bit codiere?

   $r = 0.7$ $\quad I(r) = 0.515$ $\quad H = 1.0766$ Bit/Symbol
   $o = 0.05$ $\quad I(o) = 4.322$ $\quad L = 2$
   $g = 0.25$ $\quad I(g) = 2$
   $R = 2 - 1.077 = 0.923$ Bit/Symbol

7. Wie gross müssten bei der Verkehrsampel die Wahrscheinlichkeiten für *rot*, *orange* und *grün* sein, damit die Entropie der Ampel maximal wird?

   $r = \frac{1}{3}$ $\quad I(r) = I(o) = I(g) = 1.585$ Bit/Symbol
   $o = \frac{1}{3}$
   $g = \frac{1}{3}$ $\quad \rightarrow H = 1.585$ Bit/Symbol

Antworten

1. X_k sind Zufallsvariablen, die ein Zufallsexperiment[1] darstellen, das verschiedene Ereignisse $X_k = x_n$ mit individuellen Wahrscheinlichkeiten $P(x_n)$ produziert.

2. Der Begriff *Information* bezieht sich auf ein *Ereignis* $X_k = x_n$ gemäss:

$$I(x_n) = \log_2 \frac{1}{P(x_n)}$$

3. Der Begriff *Entropie* bezieht sich auf eine *Zufallsvariable* X_k oder eine *Quelle* Q. Für statistisch unabhängige Zufallsvariablen X_k gilt:

$$H(X_k) = H(Q) = \sum_n P(x_n) \cdot \log_2 \frac{1}{P(x_n)}$$

4. Entropie ist der *Erwartungswert* der Information einer Zufallsvariable X_k oder einer Quelle Q. Wir berechnen die Entropie als gewichteten Mittelwert der Informationen. Für statistisch unabhängige Zufallsvariablen X_k gilt:

$$H(X_k) = H(Q) = \sum_n P(x_n) \cdot I(x_n)$$

5. Die Einheit der Information ist *Bit*.
   Die Einheit der Entropie ist *Bit/Symbol*.

6. Zuerst nehmen wir an, dass die gesehenen Farben statistisch unabhängig sind. Wir sehen also nicht zu häufig hin. Dann definieren wir für die Ampel A die folgenden Ereignisse:

$$x_0 = \text{rot} \qquad x_1 = \text{orange} \qquad x_2 = \text{grün}$$

   Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse sind:

$$P(x_0) = 0.70 \qquad P(x_1) = 0.05 \qquad P(x_2) = 0.25$$

   Damit kann man die Information für jedes Ereignis berechnen:

$$I(x_0) = 0.515\,\text{Bit} \qquad I(x_1) = 4.322\,\text{Bit} \qquad I(x_2) = 2.000\,\text{Bit}$$

   Schliesslich erhalten wir die Entropie:

$$H(A) = 1.077\,\text{Bit/Symbol}$$

   Wird jedes Symbol mit 2 Bit codiert, so ist die mittlere Codewortlänge L ebenfalls 2 Bit. Somit wird die Redundanz:

$$R = L - H = 0.923\,\text{Bit/Symbol}$$

7. Die maximale Entropie wird erreicht, wenn alle Ereignisse gleich wahrscheinlich sind:

$$P(x_0) = P(x_1) = P(x_2) = \frac{1}{3}$$

   Damit folgt:

$$I(x_0) = I(x_1) = I(x_2) = 1.585\,\text{Bit} \quad \Longrightarrow \quad H(A) = 1.585\,\text{Bit/Symbol}$$

[1] Wir nennen ein Zufallsexperiment auch einen *stochastischen Prozess*.