Das Integral

$$I(a) = 2\int_1^a x \cdot \ln(x^2)\, dx$$

liegt in Abhängigkeit der oberen Intervallgrenze a als Wertetabelle vor

a	$e-\frac{1}{2}$	$e-\frac{1}{4}$	$e+\frac{1}{4}$	$e+\frac{1}{2}$
$I(a)$	3.9203	5.9169	11.3611	14.8550

Lösen Sie die folgenden Aufgaben manuell und scannen Sie die Lösung in *Name_ Vorname_ Gruppe_ S9_ Aufg1.pdf* :

a) Benutzen Sie die Lagrange-Interpolation, um $I(a)$ für $a = e$ zu interpolieren.

b) Berechnen Sie analytisch den exakten Wert des bestimmten Integrals $I(e)$. Wie gross ist dann der absolute und relative Fehler Ihrer Näherung aus a) im Vergleich zum exakten Wert?

c) Berechnen sie erneut die Näherung für $I(e)$, diesmal basierend auf der Romberg-Extrapolation mit Ihrem Program `Name_Vorname_Klasse_S3_Aufg3.m` für $n = 3$. Wie gross sind der absolute und relative Fehler hier? Was schneidet in diesem Beispiel besser ab, die Polynominterpolation oder die Romberg-Extrapolation?

a) $n+1 = 4 \Rightarrow n = 3$

$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{i=0}^{3} l_i(x)\cdot y_i = 3{,}9203\cdot l_0(x) + 5{,}9169\cdot l_1(x) + 11{,}3611\cdot l_2(x) + 14{,}8550\cdot l_3(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

$$l_0 = \frac{(e-x_1)}{(x_0-x_1)}\cdot\frac{(e-x_2)}{(x_0-x_2)}\cdot\frac{(e-x_3)}{(x_0-x_3)} = \frac{1/32}{-3/16} = -\frac{16}{96} = \underline{-\frac{1}{6}}$$

$$l_1: \frac{e-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{e-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{e-x_3}{x_1-x_3} = \frac{1/16}{3/32} = \underline{\frac{2}{3}}$$

$$l_2: \frac{e-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{e-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{e-x_3}{x_2-x_3} = \frac{-1/16}{-3/32} = \underline{\frac{2}{3}}$$

$$l_3: \frac{e-x_0}{x_3-x_0}\cdot\frac{e-x_1}{x_3-x_1}\cdot\frac{e-x_2}{x_3-x_2} = \frac{-1/32}{3/16} = \underline{-\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow P_3 = 3{,}9203\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) + 5{,}9169\cdot\frac{2}{3} + 11{,}3611\cdot\frac{2}{3} + 14{,}8550\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$\underline{I_e = 8{,}38945}$$

b) $$F(x) = \Big[\underbrace{x^2\cdot(2\ln(x)-1)}_{z}\Big]_1^e = z(e) - z(1) = \underline{\underline{8{,}389056099}}$$

Absoluter Fehler

$$|I(e) - P_3(e)| = \underline{\underline{3{,}93901\cdot 10^{-4}}}$$

Relativer Fehler

$$\left|\frac{I(e) - P_3(e)}{I(e)}\right| = \underline{\underline{4{,}6952\cdot 10^{-5}}}$$

```
>> Gruppe10_IT17tb_S3_Aufg3(@(x) 2*x*log(x^2), 1, exp(1), 3)
    9.3415    8.3964    8.3887
    8.6327    8.3896         0
    8.4504         0         0

ans =

    8.3887
```

c) S3_Aufg3 $\Rightarrow$ 8,3887 $= I_R$

Absoluter Fehler $= I_e - I_R = \underline{\underline{7{,}5 \cdot 10^{-4}}}$

Relativer Fehler $= \dfrac{I_e - I_R}{I_e} = \underline{\underline{8{,}9398 \cdot 10^{-5}}}$

$\Rightarrow$ Lagrange schneidet <u>besser</u> ab.