Lineare Algebra

Übung 5 — Abgabe: Kalenderwoche 18

Aufgabe 1

Implementieren Sie in der Programmiersprache Ihrer Wahl folgende Funktionalität:

- Eingabe: Einen Modulo `n` und zwei Vektoren in $(\mathbb{Z}/n)^2$.
- Ausgabe: `frei` wenn die Vektoren frei sind und eine "nichttriviale Darstellung" des Nullvektors sonst.

Beispiele

1. Eingabe: `modulo = 5` und `v = (2,4), w = (4,2)`
   Ausgabe: `frei`
2. Eingabe: `modulo = 5` und `v = (2,3), w = (1,4)`
   Ausgabe: `1*(2, 3) + 3*(1, 4) = (0, 0)`

Lösung: Vgl. OLAT (Code)

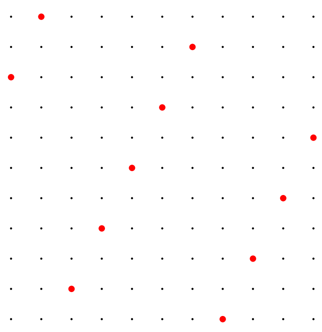
Aufgabe 2

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{K} = ((\mathbb{Z}/11)^2, +, \cdot)$. Skizzieren Sie die Geraden

$$g : \text{Geht durch den Punkt } (\bar{4}, \bar{5}) \text{ und hat die "Steigung" } 2$$
$$h : \text{Geht durch den Punkt } (\bar{4}, \bar{5}) \text{ und hat die "Steigung" } \frac{1}{6}$$

Skizzieren Sie die "Geraden" g und h.

Lösung: Da das multiplikative Inverse von $\bar{6}$ in $(\mathbb{Z}/11)$ gerade $\bar{2}$ ist, gilt $g = h$. Die gesuchte Gerade sieht wie folgt aus.



Aufgabe 3

(a) Schreiben Sie in $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ den Vektor $(2, 4, 1)$ als Linearkombination der Vektoren $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$ und $(1, 1, 1)$.

(b) Schreiben Sie in $((\mathbb{Z}/5)^2, +, \cdot)$ den Vektor $(\bar{1}, \bar{1})$ als Linearkombination der Vektoren $(\bar{2}, \bar{0})$ und $(\bar{3}, \bar{4})$.

Lösung:

(a) Durch lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2 &= a + b + c \\ 4 &= b + c \\ 1 &= c \end{aligned}$$

erhalten wir $a = -2, b = 3, c = 1$ und somit

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

(b) Durch lösen (in $\mathbb{Z}/5$) des linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \bar{1} &= \bar{2}a + \bar{3}b \\ \bar{1} &= \bar{4}b \end{aligned}$$

erhalten wir $b = \bar{4}, a = \bar{2}$ und somit

$$\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} = \bar{2} \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \end{pmatrix} + \bar{4} \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{4} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Entscheiden Sie ob folgende Vektoren linear unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $(\bar{2}, \bar{3})$ und $(\bar{3}, \bar{2})$ in $(\mathbb{Z}/5, +, \cdot)$.

(b) $(2, 3)$ und $(3, 2)$ in $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

(c) $(1, 2, 3)$ und $(3, 2, 1)$ in $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

(d) $(0, 0)$ und $(1, 0)$ in $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Lösung:

(a) Nicht linear unabhängig, weil $(\bar{2}, \bar{3}) + (\bar{3}, \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{0})$.

(b) Linear unabhängig, weil aus

$$\begin{aligned} 0 &= 2a + 3b \\ 0 &= 3a + 2b \end{aligned}$$

$9b = 4b$ also $b = 0$ sowie $a = -\frac{2}{3}b$ folgt. Es gilt also $a = b = 0$.

(c) Linear unabhängig, weil aus

$$\begin{aligned} 0 &= a + 3b \\ 0 &= 2a + 2b \\ 0 &= 3a + b \end{aligned}$$

einerseits $a = -b$ folgt (2.Zeile) und andererseits auch $a = 3a$ ($a = -b$ in erste Zeile einsetzen) folgt, gilt $a = b = 0$.

(d) Nicht linear unabhängig, weil $1 \cdot (0, 0) + 0 \cdot (1, 0) = (0, 0)$.

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe)

Es sei V ein beliebiger Vektorraum und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ sei eine Basis, weiter sei v ein beliebiger Vektor ausser dem Nullvektor. Zeigen Sie, dass es ein Element $b \in B$ gibt, so dass $(B \setminus \{b\}) \cup \{v\}$ eine Basis von V ist.

Lösung: Weil B eine Basis und somit erzeugend ist, gibt es Skalare $r_1, \ldots, r_n$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i. \tag{1}$$

Weil $v \neq 0_V$ gilt, können wir annehmen, dass $r_1 \neq 0$ gilt. Wir behaupten nun, dass die Menge $(B \setminus \{b_1\}) \cup \{v\}$ eine Basis von V ist.

Erzeugend: Weil $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis ist, genügt es zu zeigen, dass wir b_1 als Linearkombination der Vektoren $b_2, \ldots, b_n, v$ darstellen können. Wegen $r_1 \neq 0$ folgt aus der Gleichung (1) die gewünschte Darstellung

$$\begin{aligned} r_1 b_1 &= v + \sum_{i=2}^{n} (-r_i) b_i \\ \Rightarrow b_1 &= r_1^{-1} v + \sum_{i=2}^{n} (r_1^{-1}(-r_i)) b_i \end{aligned}$$

Frei: Wir zeigen, dass man keinen der Vektoren $b_2, \ldots, b_n, v$ als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen kann. Weil in der Darstellung (1) $r_1 \neq 0$ gilt, kann man den Vektor v nicht als linearkombination der $b_2, \ldots, b_n$ schreiben (Eindeutigkeit der Darstellung). Weil B eine Basis ist, können wir auch ausschliessen, dass sich einer der Vektoren aus $b_2, \ldots, b_n$ durch die restlichen Vektoren darstellen lässt. Weil aber eine Darstellung von einem der Vekotren aus $b_2, \ldots, b_n$ durch v und die restlichen Vektoren ebenfalls zu einer Darstellung von v durch die Vektoren $b_2, \ldots, b_n$ führen würde, folgt insgesamt die Behauptung.

Aufgabe 6 (Bonusaufgabe)

Wir fassen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (mit der üblichen Addition und Multiplikation) als Vektorraum über dem Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ auf. Unsere Skalare sind demnach rationale Zahlen und unsere Vektoren reelle Zahlen.

Geben Sie eine unendliche, *freie* Familie $v_1, v_2 \ldots$ von Vektoren (reellen Zahlen) an.

Hinweis: π ist eine transzendente Zahl.

Lösung: Wir fassen $\mathbb{R}$ folgendermassen als $\mathbb{Q}$-VR auf:

1. Addition von Vektoren ist die übliche Addition von reellen Zahlen
$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
2. Skalare Multiplikation ist die übliche Multiplikation von einer rationalen mit einer reellen Zahl.
$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Wir betrachten nun die unendliche Menge $\Pi := \{1, \pi, \pi^2, ..., \pi^n, ..\}$, und zeigen, dass Π linear unabängig ist. Angenommen es gilt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} q_i v_1$$

mit $v_1, .., v_n$ paarweise verschiedenen Elementen von Π und $q_1, .., q_n \in \mathbb{Q}$. Durch geeignetes Umordnen der v_i's und Nullsetzen entsprechender q_i's können wir annehmen, dass $v_i = \pi^i$ gilt. Es gilt also

$$0 = \sum_{i=1}^{n} q_i v_1 = \sum_{i=1}^{n} q_i \pi^i$$

und somit, da π transzendent ist, $q_0 = .. = q_n = 0$.