Name: ....

Vorname: ....

Semesterendprüfung MANIT2 2016 - Lösungsvorschlag

Klasse:	IT15a ZH
Datum:	22. Juni 2016
Zugelassene Hilfsmittel:	- Basisbuch Analysis
	- Zusammenfassung im Umfang von max. 10 A4-Seiten
	- abgegebene Unterlagen
	- Einfacher Taschenrechner (nicht graphikfähig, nicht algebrafähig)
Besonderes:	- Keine Mobiles/Smartphones auf dem Tisch!
	- Schreiben Sie auf die abgegebenen Blätter (notfalls rückseitig) und reissen Sie die Prüfung nicht auseinander (setzen Sie andernfalls Ihren Namen auf jede Seite!)
Zeit:	120 Minuten
Total Punkte:	42 (7 Aufgaben zu 6 Punkte)

Punkte: Note:

Wichtiger Hinweis:

Die Prüfung enthält 8 Aufgaben zu je 6 Punkte. Gewertet werden die besten 7 Aufgaben. Wenn Sie nicht alle 8 sondern nur 7 Aufgaben bearbeiten wollen, dann sollten Sie rechtzeitig eine Wahl treffen.

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Aufgabe 1a

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral (3 P.)

$$\int \frac{7x+15}{x^2-9}\,dx$$ (Tipp: Partialbruchzerlegung)

Lösung 1a

$$\frac{7x+15}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$ 1 P.

$7x + 15 = A(x+3) + B(x-3)$

$x^0: 15 = 3A - 3B$

$x^1: 7 = A + B$

Einsetzen $A = 7 - B$ 1 P.

$15 = 3(7-B) - 3B \Longrightarrow B = 1$ und $A = 6$

$$\int \frac{7x+15}{x^2-9}\,dx = \int \frac{6}{x-3}\,dx + \int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$= 6\ln|x-3| + \ln|x+3| + C$ 1 P.

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 1b

b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 e^{-x^4}$.

b1) Berechnen Sie manuell und unter Angabe aller wesentlichen Zwischenschritte den Wert des Integrals: (2 P.)

$$\int f(x)dx \qquad \text{(Tipp: Substitution)}$$

b2) Berechnen Sie die im Intervall $[0, \infty]$ zwischen dem Graph von f und der x-Achse eingeschlossenen Fläche. (1 P.)

Lösung 1b

b1)

$$u = x^4$$

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 \qquad \text{1 P.}$$

$$\int x^3 e^{-x^4} dx = \frac{1}{4}\int e^{-u}\, du$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-u} + C \qquad \text{1 P.}$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-x^4} + C$$

b2)

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{4}\int_0^b e^{-u} du = -\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^u}\right)\Big|_0^b$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^b}\right) - \frac{1}{e^0}\right] = -\frac{1}{4}[0-1] = \frac{1}{4} \qquad \text{1 P.}$$

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Berechnen Sie manuell und unter Angabe aller wesentlichen Zwischenschritte den Wert des bestimmten Integrals:

$$\int_1^e x(\ln x)^2\,dx \qquad \text{(Tipp: Partielle Integration)}$$

Lösung 2

Zweimalige partielle Integration

$$\int_1^e x(\ln x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \qquad \text{1 P.}$$

$$= \frac{e^2}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0 - \int_1^e x\cdot\ln x\,dx \qquad \text{1 P.}$$

$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \left[\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right] \qquad \text{1 P.}$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^2}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx\right] \qquad \text{1 P.}$$

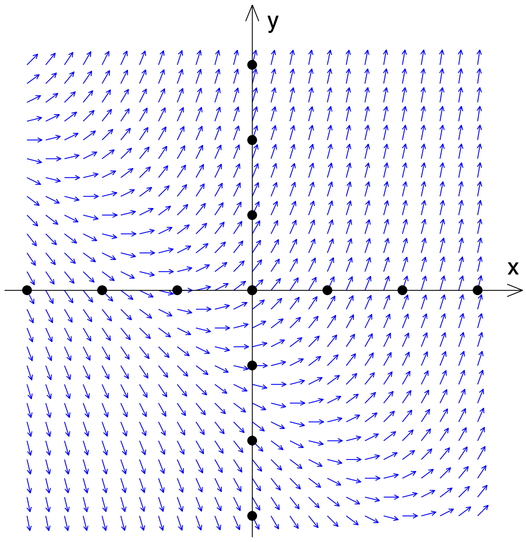
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + 0 + \frac{x^2}{4}\Big|_1^e \qquad \text{1P.}$$

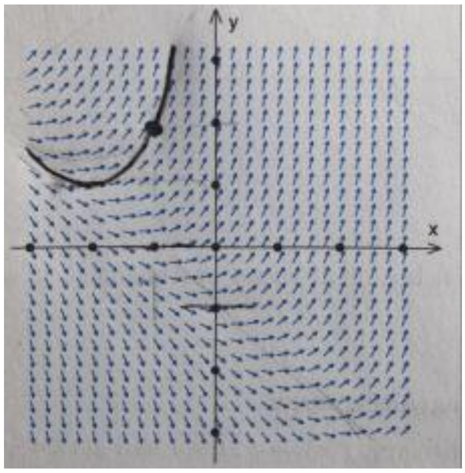
$$= \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \cong 1.5973 \qquad \text{1 P.}$$

Seitentotal	
Grand Total	

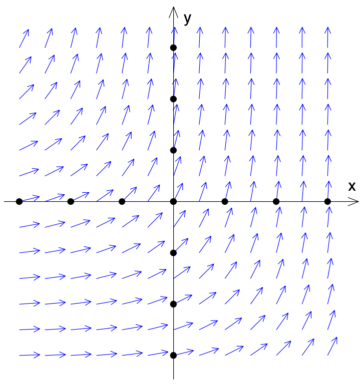
Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Wir betrachten das untenstehende Richtungsfeld. Der Abstand zwischen zwei Punkten auf den Koordinatenachsen beträgt jeweils 1. Skizzieren Sie für die Anfangsbedingung $y(-1) = 2$ grob den ungefähren Verlauf der zugehörigen Funktion. (1 P.)

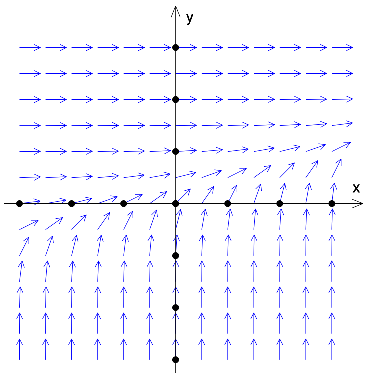




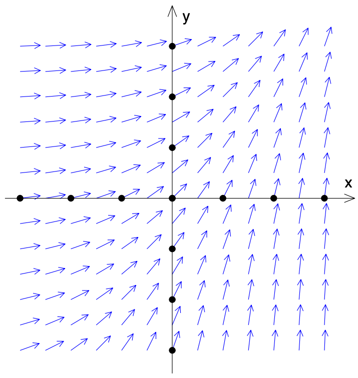
b) Welches der drei unten skizzierten Richtungsfeldern gehört zur Differentialgleichung $y' = 2^{x-0.5y}$? Begründen Sie Ihre Antwort. (Der Abstand zwischen zwei Punkten auf den Koordinatenachsen beträgt jeweils 1.) (2 P.)



(i)



(ii)



(iii)

Lösung:

(iii), weil die Steigung entlang $x - 0.5y = 0$ $(y = x - 2)$ stets 1 ist.

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 3 (Fortsetzung)

c) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' - 3(xy)^2 = y^2$ für die Bedingung $y(1) = -\frac{1}{8}$
(Tipp: Separation der Variablen). (3 P.)

Lösung

$$y' = y^2 + 3x^2y^2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = y^2(1 + 3x^2)$$

$$\frac{dy}{y^2} = (1 + 3x^2)dx$$ (1 P.)

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (1 + 3x^2)dx$$

$-y^{-1} = x + x^3 + C$ oder $y^{-1} = -x - x^3 - C$

$$y = \frac{1}{-x - x^3 - C}$$ (1 P.)

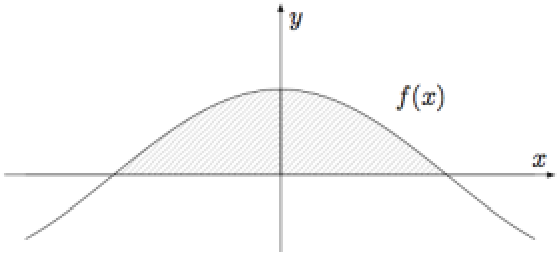
$$y(1) = -\frac{1}{8} = \frac{1}{-2 - C} \Longrightarrow C = 6$$

$$y(x) = \frac{1}{-x - x^3 - 6} = -\frac{1}{x^3 + 1 + 6}$$ (1 P.)

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f(x) = (1 + a^3) \cdot \cos(a \cdot x)$ mit dem Parameter $a > 0$. Wie soll der Parameter a gewählt werden, damit der unten skizzierte Flächeninhalt minimal wird?



(Tipp: Drücken Sie den Flächeninhalt zuerst in Abhängigkeit von a aus.)

Lösung 4

Integrationsgrenzen = Nullstellen:

$$(1 + a^3) \cdot \cos(a \cdot x) = 0 \Longrightarrow \cos(a \cdot x) = 0 \Longrightarrow a \cdot x = \pm\frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2a}$$ 1 P.

$$F(a) = (1 + a^3) \cdot \int_{-\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{2a}} \cos(a \cdot x)\, dx$$

$$F(a) = \frac{(1 + a^3)}{a} \cdot \sin(a \cdot x)\Big|_{-\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{2a}} = \frac{(1 + a^3)}{a} \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2(1 + a^3)}{a}$$ 2 P.

$$F'(a) = -\frac{2}{a^2}(1 + a^3) + \frac{2}{a} \cdot 3a^2 = 0$$ 1 P.

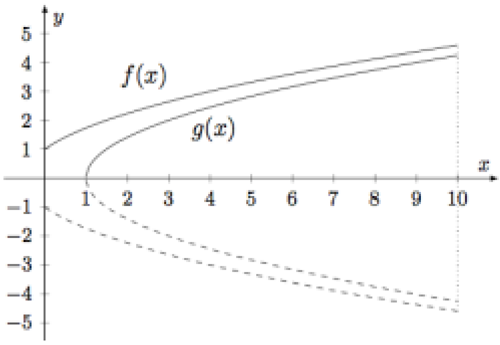
$$-\frac{2}{a^2} - 2a + 6a = 0 \Longrightarrow -2 + 4a^3 = 0 \Longrightarrow 4a^3 = 2 \Longrightarrow a^3 = \frac{2}{4}$$

$$a = \sqrt[3]{0.5} \cong 0.7937$$ 2 P.

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Durch Rotation der Graphen von $f(x) = \sqrt{2x+1}$ und $g(x) = \sqrt{2x-2}$ um die x-Achse entsteht der Glaskörper einer Vase (s. untenstehende Skizze). Dabei stellt $f(x)$ die Aussenwand und $g(x)$ die Innenwand der Vase dar. (Alle Zahlen sind in cm angegeben.)



a) Welches Volumen hat das zur Herstellung benötigte Glas? (4 P.)

b) Wie hoch steht das Wasser in der Vase, wenn $1\ dl\ (= 100\ cm^3)$ davon eingefüllt wird? (2 P.)

Lösung 5

a) Ansatz: $V = V_f - V_g$ mit $A_{Kreis} = \pi r^2$

Vereinfachung: $\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 = 2x+1$ und $\left(\sqrt{2x-2}\right)^2 = 2x-2$

$$V_f = \pi \int_0^{10} [r(x)]^2\, dx = \pi(x^2 + x)\big|_0^{10} = 110\pi$$ 1 P.

$$V_f = \pi \int_0^{10} (2x+1)\, dx = \pi(x^2 + x)\big|_0^{10} = 110\pi$$ 1 P.

$$V_g = \pi \int_1^{10} (2x-2)\, dx = \pi(x^2 - 2x)\big|_1^{10} = (100 - 20 - 1 + 2)\pi = 81\pi$$ 1 P.

$$V = V_f - V_g = (110 - 81)\pi = 29\pi \cong 91.11\ cm^3$$ 1 P.

b) $$V_g = 100 = \pi \int_1^{h} (2x-2)\, dx = \pi(x^2 - 2x)\big|_1^{h} = (h^2 - 2h - 1 + 2)\pi$$ 1 P.

$$h^2 - 2h + 1 = \frac{100}{\pi} \Longrightarrow h^2 - 2h + 1 - \frac{100}{\pi} = 0$$

$h_1 = 6.642$ cm 1 P.

(und hier keine Lösung da negativ $h_2 = -4.642$)

Aufgabe 6 (6 Punkte)

a) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Entwickeln Sie für f das Taylorpolynom vom Grad 4 um die Stelle $x_0 = 1$. (5 P.)

b) Schliessen Sie daraus auf die Taylorreihe und schreiben Sie diese als Summenformel. (1 P.)

Lösung 6

a) Taylorkoeffizienten $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

$f^{(0)}(x) = x^{-2}$ $\qquad a_0 = \frac{f^{(0)}(1)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

$f^{(1)}(x) = -2x^{-3}$ $\qquad a_1 = \frac{f^{(1)}(1)}{1!} = \frac{-2}{1} = -2$

$f^{(2)}(x) = 6x^{-4}$ $\qquad a_2 = \frac{f^{(2)}(1)}{2!} = \frac{6}{2} = 3$ $\qquad$ 3 P.

$f^{(3)}(x) = -24x^{-5}$ $\qquad a_3 = \frac{f^{(3)}(1)}{3!} = \frac{-24}{6} = -4$

$f^{(4)}(x) = 120x^{-6}$ $\qquad a_4 = \frac{f^{(4)}(1)}{4!} = \frac{120}{24} = 5$.

$P_4(x;1) = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + 5(x-1)^4$ $\qquad$ 2 P.

b) $t_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$ $\qquad$ 1 P.

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 7 (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe (2 P)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe (2 P.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} x^n$$

c) Geben Sie eine Potenzreihe an, die den Konvergenzbereich $-4 < x < 4$ besitzt. (2 P.)

Lösung 7

a) $$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$$ 2 P.

b) $$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{(n+2)(n+3)}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+3)}{(n+1)}\right| = 1$$ 2 P.

c) $$r = 4 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{4^{n+1}}{4^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{4^n}}{\frac{1}{4^{n+1}}}\right|$$

Potenzreihe: 2 P.

$$1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{64} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n$$

Seitentotal	
Grand Total	

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Wir betrachten die beiden Funktionen

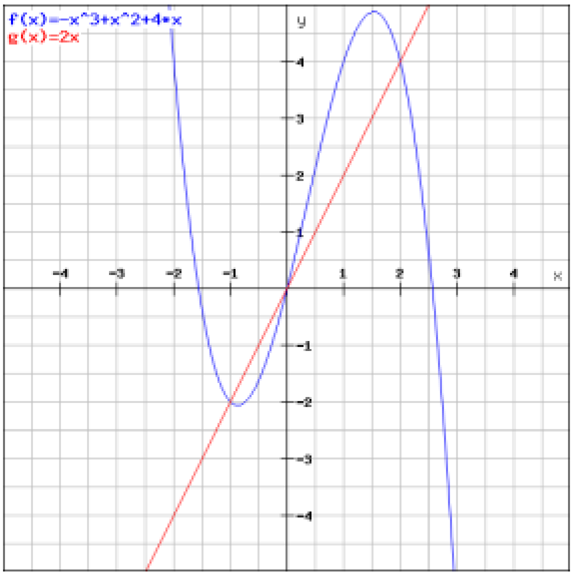
$$f(x) = -x^3 + x^2 + 4x$$

und

$$g(x) = 2x.$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die wie folgt definiert ist:

- Links und rechts begrenzt durch die äussersten beiden Schnittpunkte von f und g.
- Oben und unten begrenzt durch die Graphen der beiden Funktionen.



Lösung 8

Schnittpunkte: $-x^3 + x^2 + 4x = 2x \implies -x^3 + x^2 + 2x = 0$

$x_1 = 0$

$\implies -x^2 + x + 2 = 0$ 2 P.

$x_1 = -1$ und $x_2 = 2$

$$A_1 = \left|\int_{-1}^{0} (-x^3 + x^2 + 2x)dx\right| = \left|\left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_{-1}^{0}\right| = \left|0 - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1\right)\right| = \frac{5}{12}$$ 2 P.

$$A_2 = \left|\int_{0}^{2} (-x^3 + x^2 + 2x)dx\right| = \left|\left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_{0}^{2}\right| = \left|-\frac{16}{4} + \frac{8}{3} + 4 - 0\right| = \frac{8}{3}$$ 1 P.

$$A = A_1 + A_2 = \frac{5}{12} + \frac{32}{12} = \frac{37}{12}$$ 1 P.

Seitentotal	
Grand Total	