Name: ............................................................

Vorname: ............................................................

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

School of Engineering

# Semesterendprüfung 2015 - Probeprüfung

| | |
|---|---|
| Klasse: | IT14a ZH |
| Datum: | 22. Mai 2015 |
| Zugelassene Hilfsmittel: | - Basisbuch Analysis |
| | - Unterlagen/Skripte von Plesko/Scherrer |
| | - Zusammenfassung im Umfang von max. 10 A4-Seiten |
| | - Einfacher Taschenrechner (nicht graphikfähig, nicht algebrafähig) |
| Besonderes: | - Keine Mobiles/Smartphones auf dem Tisch! |
| | - Schreiben Sie auf die abgegebenen Blätter (notfalls rückseitig) und reissen Sie die Prüfung nicht auseinander (andernfalls setzen Sie Ihren Namen auf …jedes Blatt!) |
| Zeit: | 120 Minuten |
| Total Punkte: | 53 (1 Aufgabe zu 8 Punkte, 5 Aufgaben zu 6 Punkte, 3 Aufgaben zu 5 Punkte) |

---

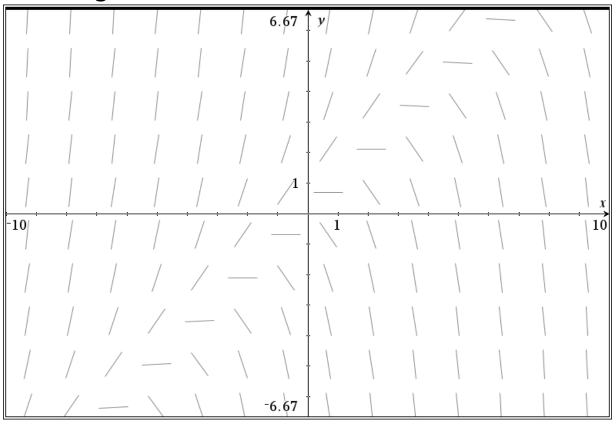
Punkte: Note:

---

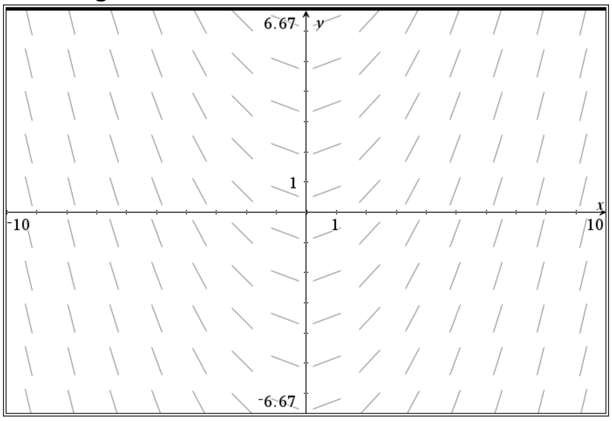
**Aufgabe 1** (6 Punkte)

Ordnen Sie in der Lösungstabelle die vier untenstehenden Richtungsfelder 1 - 4 der entsprechenden Differentialgleichung zu. (Hinweis: Für zwei Differentialgleichungen sind ihre Richtungsfelder hier nicht gezeigt. Markieren Sie diese Differentialgleichungen in der Lösungstabelle mit einem X.)

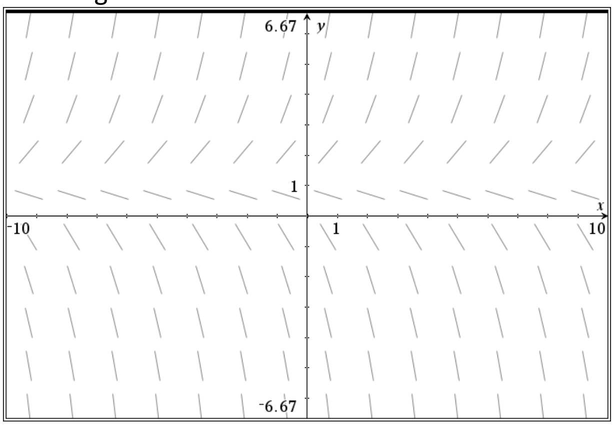
Richtungsfeld Nr. 1



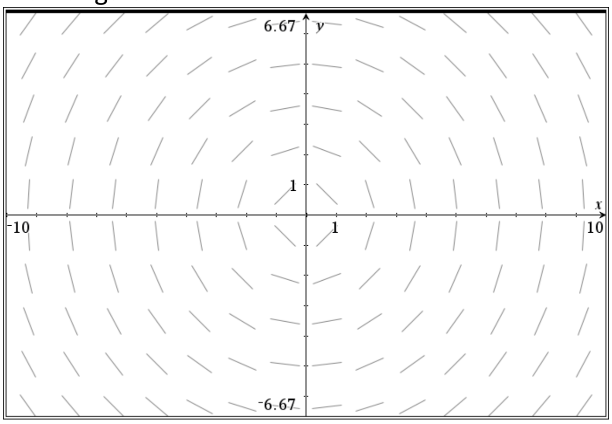

Richtungsfeld Nr. 2




Richtungsfeld Nr. 3




Richtungsfeld Nr. 4




**Lösungstabelle** (1 Punkt pro richtige Lösung):

| Differentialgleichung | Richtungsfeld Nr. |
|---|---|
| $y' = -1$ | X |
| $y' = y - x$ | 1 |
| $y' = y - 1$ | 3 |

| Differentialgleichung | Richtungsfeld Nr. |
|---|---|
| $y' = 0.5x$ | 2 |
| $y' = -x$ | X |
| $y' = \frac{x}{y}$ | 4 |

**Aufgabe 2** (6 Punkte)

Lösen Sie folgende Differentialgleichung durch Trennung der Variablen unter der Bedingung $y(1) = 0$

$$\frac{y'x}{2} - 1 = y$$

**Lösung 2**

$\frac{y'x}{2} = \mathrm{y} + 1$

$\frac{y'}{y+1} = \frac{2}{x}$

$\frac{dy}{y+1} = \frac{2dx}{x}$ 1P

$ln|y+1| = 2 \cdot ln|x| + C$ 1P

$|y+1| = e^C \cdot x^2$ 1P

Allgemeine Lösung

$y(x) = K \cdot x^2 - 1$ 1P

Spezielle Lösung

$y(1) = K - 1 = 0 \Longrightarrow K = 1$ 1P

$y(x) = x^2 - 1$ 1P

**Aufgabe 3** (6 Punkte)

Approximieren Sie die gebrochen-rationale Funktion

$$g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ durch ein Taylor-Polynom, indem Sie die ersten 4 Glieder der Taylorreihe bestimmen.(Tipp: Entwickeln Sie $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ in eine Taylorreihe und multiplizieren Sie danach mit $x$.)

**Lösung 3**

Entwicklung von $f$

$P_n(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$ 1P

Glied 1: $f(x_0) = f(0) = 1$ 1P

Glied 2: $f'(x) = -2(1-x)^{-3}(-1) \Longrightarrow f'(0) = 2$

$\frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) = 2x$ 1P

Glied 3: $f''(x) = -6(1-x)^{-4}(-1) \Longrightarrow f''(0) = 6$

$\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = 3x^2$ 1P

Glied 4: $f'''(x) = -24(2-x)^{-5}(-1) \Longrightarrow f''(0) = 24$

$\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 = 4x^3$ 1P

$P_4(x; 0) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ total max 5P

Anwenden für $g$ (Multiplikation mit $x$)

$P_4(x; 0) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$ total max 6P

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften
zh aw School of Engineering

**Aufgabe 4** (5 Punkte)

Geben Sie die Näherungswerte an, die man erhält, wenn man die Nullstelle von $f(x) = x^3 - x - 1$ ausgehend vom Startwert $x_0 = 1.5$ auf 4 Nachkommastellen genau bestimmen will.

**Lösung 4**

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Schritt 1: | $x_0 = 1.5$ | $f(x_0) = 0.87500$ | $f'(x_0) = 6.7500$ | $x_1 = 1.347826$ |
| Schritt 2: | $x_1 = 1.347826$ | $f(x_0) = 0.10068$ | $f'(x_0) = 4.4499$ | $x_2 = 1.325201$ |
| Schritt 1: | $x_2 = 1.325201$ | $f(x_0) = 0.00206$ | $f'(x_0) = 4.2685$ | $x_3 = 1.324718$ |
| Schritt 1: | $x_3 = 1.324718$ | $f(x_0) = 0.000002$ | Abbruch! | |

**Aufgabe 5** (5 Punkte)

Lösen Sie die inhomogene lineare Differentialgleichung 1.Ordnung unter der Anfangsbedingung $y(0) = 3$.

$$y' + 2xy = e^{-x^2}$$

**Lösung 5**

Lösung der homogenen DGL: 1P

$y_h(x) = K \cdot e^{-\int 2x dx} = K \cdot e^{-x^2}$

Partikuäre Lösung (Variation der Konstanten):

$y_p(x) = K(x) \cdot \ e^{-\int 2x dx}$

$\Rightarrow K'(x) = \frac{e^{-x^2}}{e^{-x^2}} = 1$ und $K(x) = x$

$y_p(x) = x \cdot e^{-x^2}$ 1P

Allgemeine Lösung:

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = K \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} = (K + x) \cdot e^{-x^2}$ 1P

Spezielle Lösung unter der Bedingung $y(0) = 3$:

$y(0) = 3 = (K + 0) \cdot e^0 \Rightarrow K = 3$ 1P

$y(x) = (3 + x) \cdot e^{-x^2}$ 1P

**Aufgabe 6** (8 Punkte)

Bestimmen Sie die gesamte Fläche, die der Graph von

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2(x+2)}$$

mit der $x$-Achse über dem Intervall $[0, \infty[$ einschliesst. (Tipp: Partialbruchzerlegung.)

[Alternativ können Sie die Ersatzfunktion

$$f^*(x) = \frac{6x-12}{(x+1)^2(x+4)} = \frac{4}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2} - \frac{4}{x+4}$$

verwenden, bei welcher die Partialbruchzerlegung schon vorliegt. (minus 2 P)]

**Lösung 6**

$$\frac{x-1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$x - 1 = A(x+1)(x+2) + B(x+2) + C(x+1)^2$$

$x^2$: $0 = A + C$
$x^1$: $1 = 3A + B + 2C$
$x^0$: $-1 = 2A + 2B + C$

$\Rightarrow A = 3, B = -2 \; und \; C = -3$

$$f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+2}$$ 2P

Nullstelle (aus dem Zählerpolynom ersichtlich): $x_0 = 1$
Oder alternativ $x_0 = 2$ 1P

$$\left|\int_0^1 \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+2}\right) dx\right| + \left|\int_1^\infty \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+2}\right) dx\right|$$

$$= \left| 3\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - 3\ln|x+2| \Big|_0^1 \right| + \left| \lim_{a\to\infty} \left( 3\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - 3\ln|x+2| \Big|_1^a \right) \right|$$ 3P

$$= |3\ln 2 + 1 - 3\ln 3 - 2 + 3\ln 2|$$
$$+ \left| \lim_{a\to\infty} \left( 3\ln|a+1| + \frac{2}{a+1} - 3\ln|a+2| \right) - 3\ln 2 - 1 + 3\ln 3 \right|$$ 2P
$$= |6\ln 2 - 1 + 3\ln 3| + |0 - 3\ln 2 - 1 + 3\ln 3| = 3\ln\frac{9}{8} \approx 0.3533$$

alternativ: $= 2$

Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

zh aw School of Engineering

**Aufgabe 7** (5 Punkte)

Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$ über dem Intervall $[4{,}9]$.
Tipp: der Ausdruck unter der Wurzel lässt sich so vereinfachen, dass er als Quadrat geschrieben werden kann.

**Lösung 7**

$$L = \int_4^9 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$$ 1P

$$L = \int_4^9 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2}\, dx = \int_4^9 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}}\, dx$$ 1P

$$= \int_4^9 \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}}\, dx \int_4^9 \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2}\, dx$$ 1P

$$L == \int_4^9 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx = \left.\left(\frac{x^2}{4} + \frac{\ln x}{2}\right)\right|_4^9$$ 1P

$$\frac{81}{4} + \frac{\ln 9}{2} - \frac{16}{4} - \frac{\ln 4}{2} = \frac{65}{4} + \ln 3 - \ln 2 = 16.6555$$ 1P

**Aufgabe 8** (6 Punkte)

a) Berechnen Sie mittels einer geeigneten Substitution manuell und unter Angabe aller Zwischenschritte das folgende Integral (3P):

$$\int_3^5 \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$$

**Lösung 8a**

Substitution:

$$u := 1 + x^2$$
$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2xdx$$
$$u(3) = 10$$
$$u(5) = 26$$

1P

$$\int_3^5 \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx = \int_{10}^{26} \frac{du}{u^2}$$

1P

$$-\frac{1}{u}\Big|_{10}^{26} = -\frac{1}{26} - \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{4}{65} = 0.0615$$

b) Berechnen Sie mittels partieller Integration manuell und unter Angabe aller Zwischenschritte das folgende Integral (3P):

$$\int x^3 lnxdx$$

**Lösung 8b**

$$\int x^3 lnxdx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx + C$$

2P

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + C$$

1P

**Aufgabe 9** (6 Punkte)

Der Graph von

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$$

wird um die$x$-Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers im Intervall $[1, \infty[$.

**Lösung 9**

Scheibenmethode:

$$V = \pi \int_1^\infty \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^2 dx$$ 2P

$$= \pi \int_1^\infty x^{-3} dx = \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)\Big|_1^a$$ 2P

$$= \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{1}\right)\right] = \frac{\pi}{2}$$ 2P

Oder

Schalenmethode:

$$y = x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow x = y^{-\frac{3}{2}}$$ 1P

$$V = 2\pi \cdot \lim_{a\to 0} \int_a^1 \left[y\left(y^{-\frac{2}{3}} - 1\right)\right] dy$$ 1P

$$= 2\pi \int_0^1 \left(y^{\frac{1}{3}} - y\right) dy$$ 2P

$$= 2\pi \left(\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$ 2P