Lineare Algebra
Übung 6 Abgabe: Kalenderwoche 20

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Dimension von

$$\langle (1,2,3),(2,5,3),(7,17,12)\rangle$$

Lösung: Weil $(1,2,3) + 3\cdot(2,5,3) = (7,17,12)$ gilt, ist

$$\langle (1,2,3),(2,5,3),(7,17,12)\rangle = \langle (1,2,3),(2,5,3)\rangle.$$

Weil die Vektoren $(1,2,3)$ und $(2,5,3)$ aber linear unabhängig sind, ist die gesuchte Dimension 2.

Aufgabe 2

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit

$$f(2,2) = (4,0,1)$$
$$f(1,2) = (2,1,1)$$

Bestimmen Sie allgemein $f(x,y)$.

Lösung: Wir betrachten folgende Situation:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \overset{b}{\mapsto} \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \overset{b}{\mapsto} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun die Darstellungsmatrizen der Funktionen b (also M_b) und $f \circ b$ (also $M_{f\circ b}$), wir erhalten dann die Darstellende Matrix von f schliesslich durch

$$M_f = \underbrace{M_f \circ M_b}_{M_{f\circ b}} \circ (M_b)^{-1}.$$

Wir können die Matrizen M_b und $M_{f\circ b}$ direkt ablesen:

$$M_b = \begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 2\end{bmatrix} \qquad M_{f\circ b} = \begin{bmatrix}4 & 2\\0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

Mit dem Gauss-Verfahren bestimmen wir nun $(M_b)^{-1}$:

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & -0.5\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

Wir erhalten damit

$$(M_b)^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -0.5\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

und damit

$$M_f = \begin{bmatrix}4 & 2\\0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1 & -0.5\\-1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\-1 & 1\\0 & 0.5\end{bmatrix}.$$

Es gilt somit

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\y-x\\\frac{y}{2}\end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Kern der $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, mit

$$\begin{aligned} f(1,2,5) &= (-1,-4) \\ f(2,1,3) &= (1,1) \\ f(2,0,2) &= (2,0) \end{aligned}$$

Lösung: Lösungsvariante 1: Wir gehen wie in der vorhergehenden Aufgabe vor und bestimmen **(mühsam)** $f(x, y, z) = (x - y, 3x + 4y - 3z)$. Wir bestimmen dann den Kern der Abbildung dadurch, dass wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 3x + 4y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

auflösen. Wir erhalten als Lösungsmenge $(x, y, \frac{7}{3}x)$ und somit

$$ker(f) = \{(x, x, \frac{7}{3}x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(3x, 3x, 7x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Lösungsvariante 2: Bei diesem Ansatz betrachten wir anstelle der Standardbasis (der Einheitsvektoren) die Basis $(1, 2, 5), (2, 1, 3), (2, 0, 2)$ und bestimmen die Darstellungsmatrix von f bezüglich dieser Basis:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wir wissen nun, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

$$f(a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b + 2c - a \\ b - 4a \end{pmatrix}.$$

Da wir am Kern der Abbildung f interessiert sind, lösen wir also das System

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

auf und erhalten

$$\begin{aligned} b &= 4a \\ c &= -\frac{3}{2}a \end{aligned}$$

Wir wissen nun

$$f(a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 4a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Kern von f lässt sich demnach als Vektoren von der Form:

$$\begin{pmatrix} a + 8a - 3a \\ 2a + 4a \\ 5a + 12a - 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a \\ 6a \\ 14a \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ beschreiben. Es gilt also

$$ker(f) = \{(6a, 6a, 14a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \{(3a, 3a, 7a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$