Lineare Algebra

Übung 5

Abgabe: Kalenderwoche 18

Aufgabe 1

Implemeniteren Sie in der Programmiersprache Ihrer Wahl folgende Funktionalität:

- Eingabe: Einen Modulo `n` und zwei Vektoren in $(\mathbb{Z}/n)^2$.
- Ausgabe: `frei` wenn die Vektoren frei sind und eine "nichttriviale Darstellung" des Nullvektors sonst.

Beispiele

1. Eingabe: `modulo = 5` und `v = (2,4), w = (4,2)`
   Ausgabe: `frei`
2. Eingabe: `modulo = 5` und `v = (2,3), w = (1,4)`
   Ausgabe: `1*(2, 3) + 3*(1, 4) = (0, 0)`

Aufgabe 2

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{K} = ((\mathbb{Z}/11)^2, +, \cdot)$. Skizzieren Sie die Geraden

$$g : \text{Geht durch den Punkt } (\bar{4}, \bar{5}) \text{ und hat die "Steigung" } 2$$

$$h : \text{Geht durch den Punkt } (\bar{4}, \bar{5}) \text{ und hat die "Steigung" } \frac{1}{6}$$

Skizzieren Sie die "Geraden" g und h.

Aufgabe 3

(a) Schreiben Sie in $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ den Vektor $(2, 4, 1)$ als Linearkombination der Vektoren $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$ und $(1, 1, 1)$.

(b) Schreiben Sie in $((\mathbb{Z}/5)^2, +, \cdot)$ den Vektor $(\bar{1}, \bar{1})$ als Linearkombination der Vektoren $(\bar{2}, \bar{0})$ und $(\bar{3}, \bar{4})$.

Aufgabe 4

Entscheiden Sie ob folgende Vektoren linear unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $(\bar{2}, \bar{3})$ und $(\bar{3}, \bar{2})$ in $(\mathbb{Z}/5, +, \cdot)$.

(b) $(2, 3)$ und $(3, 2)$ in $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

(c) $(1, 2, 3)$ und $(3, 2, 1)$ in $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

(d) $(0, 0)$ und $(1, 0)$ in $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe)

Es sei V ein beliebiger Vektorraum und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ sei eine Basis, weiter sei v ein beliebiger Vektor ausser dem Nullvektor. Zeigen Sie, dass es ein Element $b \in B$ gibt, so dass $(B \setminus \{b\}) \cup \{v\}$ eine Basis von V ist.

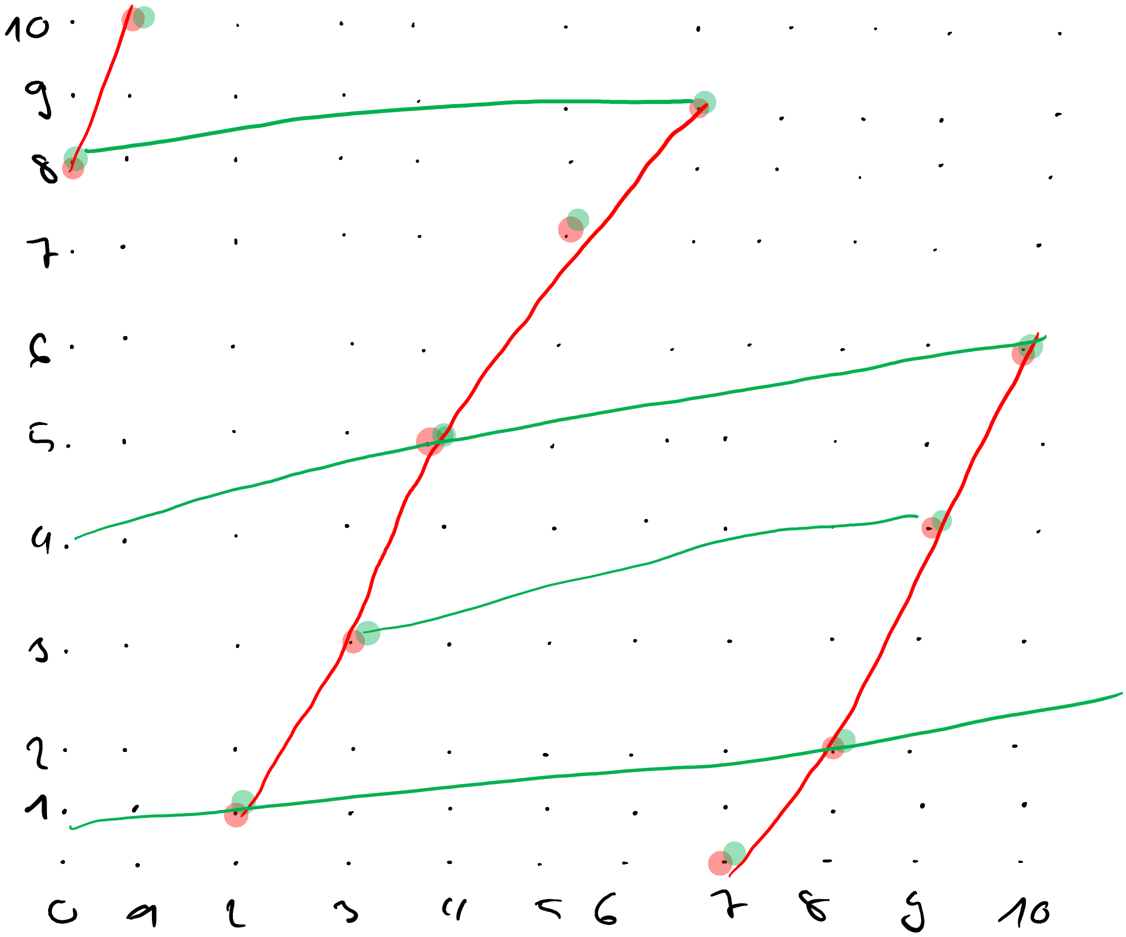
Aufgabe 6 (Bonusaufgabe)

Wir fassen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (mit der üblichen Addition und Multiplikation) als Vektorraum über dem Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ auf. Unsere Skalare sind demnach rationale Zahlen und unsere Vektoren reelle Zahlen.

Geben Sie eine unendliche, *freie* Familie $v_1, v_2 \ldots$ von Vektoren (reellen Zahlen) an.

Hinweis: π ist eine transzendente Zahl.

Aufgabe 2



$$\text{"}\frac{1}{6}\text{"} = 2$$