beim Versuch, das Newton-Verfahren zu implementieren, momentan noch auf Schwierigkeiten stossen?

Kapitel 4

Aufgabe 4.1

- Bringen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ auf die obere Dreiecksform und lösen sie nach x auf, wobei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$i = 1,\ j = 2 \Rightarrow z_2 \equiv z_2 - \tfrac{1}{(-1)} z_1 \Rightarrow (\boldsymbol{A}_1 \mid \boldsymbol{b}_1) = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$i = 1,\ j = 3 \Rightarrow z_3 \equiv z_3 - \tfrac{5}{(-1)} z_1 \Rightarrow (\boldsymbol{A}_2 \mid \boldsymbol{b}_2) = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$i = 2,\ j = 3 \Rightarrow z_3 \equiv z_3 - \tfrac{6}{(-2)} z_2 \Rightarrow (\boldsymbol{A}_3 \mid \boldsymbol{b}_3) = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right)$$

Rückeinsetzen liefert:

$x_3 = \frac{18}{6} = 3,\ x_2 = \frac{5-(-1)\cdot 3}{(-2)} = -4,\ x_1 = \frac{0-1\cdot(-4)-1\cdot 3}{(-1)} = -1$

Aufgabe 4.2

- Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$ aus Aufgabe 3.1 mittels des Gauss-Algorithmus.

  Lösung: die obere Dreiecksform $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ von $\boldsymbol{A}$ haben wir bereits gerechnet:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Dabei wurde keine Zeilenvertauschung durchgeführt, d.h. die Determinante von A ist das Produkt der Diagonalelemente von $\widetilde{A}$:

$$det(\boldsymbol{A}) = (-1) \cdot (-2) \cdot 6 = 12$$

Aufgabe 4.3

- Implementieren Sie den Gauss-Algorithmus in MATLAB und bestimmen Sie damit die Lösungen für die untenstehenden Gleichungssysteme sowie die Determinanten der Matrizen $\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_4$. Wer die Aufgabe lieber von Hand löst, kann dies tun.

$$\boldsymbol{A}_1\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -12 & 4 & 17 \\ 32 & -10 & -41 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 19 \\ -39 \end{pmatrix} \text{ bzw. } = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 48 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -4 & -10 & 0 \\ 12 & 34 & 9 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 25 \\ -24 \\ 107 \end{pmatrix} \text{ bzw. } = \begin{pmatrix} 5 \\ -22 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ -14 & 38 & 22 \\ 6 & -9 & -27 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 40 \\ 75 \end{pmatrix} \text{ bzw. } = \begin{pmatrix} 16 \\ 82 \\ -120 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & 5 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 7 & 5 & -1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & -3 & 7 & 2 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & 8 & 7 & 6 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 3 & 6 & 4 & 9 & 7 & 9 \\ -3 & 14 & -2 & 1 & 0 & -2 & 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 103 \\ 53 \\ -20 \\ 95 \\ 78 \\ 131 \\ -26 \end{pmatrix}$$

- Lösung: Implementation des Gauss-Alg. erfolgt in den Übungen.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -12 & 4 & 17 \\ 32 & -10 & -41 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3 := z_3 - 8z_1]{z_2 := z_2 + 3z_1} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{z_3 := z_3 + 2z_2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \det \boldsymbol{A}_1 = 4 \cdot 1 \cdot 3 = 12.$$

Als Lösung des Gleichungssystems $\boldsymbol{A_1}\,\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{b_i}$ (die rechte Seite ist mit den gleichen Zeilenumformungen zu behandeln wie die Matrix) erhält man: $\boldsymbol{x}_1 = (2, -2, 3)^{\mathrm{T}}$ bzw. $\boldsymbol{x}_2 = (6, -2, 4)^{\mathrm{T}}$.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -4 & -10 & 0 \\ 12 & 34 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3 := z_3 - 6z_1]{z_2 := z_2 + 2z_1} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{z_3:=z_3+2z_2} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ \det A_2 = 24, \ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ -14 & 38 & 22 \\ 6 & -9 & -27 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3 := z_3 + 3\,z_1]{z_2 := z_2 - 7\,z_1} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 6 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{z_3:=z_3-2\,z_2} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \ \det A_3 = 18, \ x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \ x_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Für A_4erhalten wir die Lösung $\det A_4 = 1142026$ und $x = (1,-1, 0, 2, 3, 3, -8, 15)^T$

Aufgabe 4.4:

- Finden Sie für die Matrix A des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

  die LR-Zerlegung. Benutzen Sie dafür die folgenden Operationen der Gauss-Elimination:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 4 & -2 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2:=z_2-4z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -10 & 10 & -40 \\ 3 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{z_3:=z_3-3z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -10 & 10 & -40 \\ 0 & -5 & 3 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3:=z_3-0.5z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -10 & 10 & -40 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

  Berechnen Sie die Lösung x zuerst mittels Rückwärtseinsetzen direkt aus der obigen Dreiecksform und dem b Vektor. Lösen Sie anschliessend die beiden linearen Systeme $Ly = b$ und $Rx = y$ und vergleichen Sie.

- Lösung: mit den obigen Faktoren erhalten wir direkt

$$\begin{aligned} l_{21} &= 4 \\ l_{31} &= 3 \\ l_{32} &= 0.5 \end{aligned}$$

und damit $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$. Das Gleichungssystem $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$ hat die Lösung $\boldsymbol{y} = (9, -40, 2)^T$ und $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{y}$ hat die Lösung $\boldsymbol{x} = (2, 3, -1)^T$. Die Lösung für $\boldsymbol{x}$ stimmt also wie zu erwearten war mit der Lösung aus dem Gaussalgorithmus überein.

- Erweitern Sie ihren unter Aufgabe 3.3 erstelltes Programm zum Gauss-Algorithmus, so dass es gleichzeitig auch die $\boldsymbol{LR}$- Zerlegung von $\boldsymbol{A}$ berechnet.
- Berechnen Sie damit die $\boldsymbol{LR}$-Zerlegung für die Matrixen aus Aufgabe 3.3

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.5:

- Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung für die folgende Matrix:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & -1 \\ 6 & -1 & 26 \end{pmatrix}$$

- Implementieren Sie den Cholesky-Algorithmus und testen Sie Ihn an den folgenden Matrizen:

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 12 & 25 & 23 \\ 6 & 23 & 78 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 6 \\ -8 & 17 & -8 \\ 6 & -8 & 34 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 36 & -24 & 18 \\ -24 & 17 & -8 \\ 18 & -8 & 25 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 64 & -40 & 16 \\ -40 & 29 & -4 \\ 16 & -4 & 62 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}_6 = \begin{pmatrix} 9 & -21 & 6 \\ -21 & 49 & -14 \\ 6 & -14 & 29 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & 20 & 23 & 26 & 29 \\ 3 & 8 & 14 & 20 & 26 & 32 & 38 & 44 & 50 & 56 \\ 4 & 11 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 \\ 5 & 14 & 26 & 40 & 55 & 70 & 85 & 100 & 115 & 130 \\ 6 & 17 & 32 & 50 & 70 & 91 & 112 & 133 & 154 & 175 \\ 7 & 20 & 38 & 60 & 85 & 112 & 140 & 168 & 196 & 224 \\ 8 & 23 & 44 & 70 & 100 & 133 & 168 & 204 & 240 & 276 \\ 9 & 26 & 50 & 80 & 115 & 154 & 196 & 240 & 285 & 330 \\ 10 & 29 & 56 & 90 & 130 & 175 & 224 & 276 & 330 & 385 \end{pmatrix}$$

- Lösung:

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_5 = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_6 \text{ sind nicht positiv definit.}$$

$$\boldsymbol{R}_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.6:

- Prüfen Sie, ob das Jacobi-Verfahren in Beispiel 3.11 konvergiert. Schätzen Sie den Fehler des Vektors $\boldsymbol{x}^{(5)}$ ab. Wie viele Schritte sollten Sie rechnen, damit der berechnete Näherungsvektor in jeder Komponente um max. 10^{-4} von der exakten Lösung $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)^T$ abweicht? Vergleichen Sie Ihre Fehlerabschätzung mit den wirklichen Gegebenheiten.

Lösung: Wir prüfen, ob die Matrix $\boldsymbol{A}$ das Zeilensummenkriterium erfüllt:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \implies \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \;=\; \begin{cases} 2 & i=1 \\ 3 & i=2 \\ 3 & i=3 \end{cases} \;<\; \begin{cases} 4 & i=1 \\ 5 & i=2 \\ 5 & i=3 \end{cases}$$

Damit ist die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens garantiert. Für die Fehlerabschätzungen in der ∞-Norm wird der Faktor

$$\|\boldsymbol{B}\|_\infty = \max\{\frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}\} = 0.6$$

benötigt. Wir verwenden nun die a-posteriori-Abschätzung (3.12) mit $n = 5$:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}^{(5)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty &\leq \frac{\|\boldsymbol{B}\|_\infty}{1 - \|\boldsymbol{B}\|_\infty} \cdot \|\boldsymbol{x}^{(5)} - \boldsymbol{x}^{(4)}\|_\infty = \frac{0.6}{0.4}\|\boldsymbol{x}^{(5)} - \boldsymbol{x}^{(4)}\|_\infty \\ &\leq 1.5 \cdot \max\{0.009175,\, 0.01082,\, 0.01764\} = 0.02646. \end{aligned}$$

Der wirkliche Fehler von $\boldsymbol{x}^{(5)}$ ist:

$$\|\boldsymbol{x}^{(5)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty = \max\{0.0065,\, 0.0094,\, 0.0201\} = 0.0201,$$

so dass unsere Abschätzung durchaus realistisch erscheint.
Die Forderung, dass der Fehler in jeder Komponente max. 10^{-4} sei, bedeutet nichts anderes als $\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty \leq 10^{-4}$. Mit der a-priori-Abschätzung (3.13),

ausgehend von $\boldsymbol{x}^{(0)}$, erhalten wir:

$$\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty \le \frac{0.6^n}{0.4} \cdot \|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{0.6^n}{0.4} \cdot 2.4 \overset{!}{\le} 10^{-4}$$
$$\iff 0.6^n \le \frac{1}{6} \cdot 10^{-4} \iff n \ge \frac{\log(\frac{1}{6} \cdot 10^{-4})}{\log 0.6} = 21.53\ldots$$

Ab $\boldsymbol{x}^{(22)}$ würden die Iterierten also der Genauigkeitsforderung genügen. Da wir aber möglichst wenig rechnen wollen, und $\boldsymbol{x}^{(5)}$ schon berechnet haben, führen wir die obige Rechnung einfach nochmals mit $\boldsymbol{x}^{(5)}$ anstelle von $\boldsymbol{x}^{(0)}$ durch. Wir erhalten dann die Anzahl der Schritte, die wir von $\boldsymbol{x}^{(5)}$ aus durchzuführen haben. Da die Genauigkeit dieser Abschätzung größer sein sollte, hoffen wir, dass die Genauigkeitsforderung vielleicht schon früher als $\boldsymbol{x}^{(22)}$ erfüllt ist:

$$\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty \le \frac{0.6^{n-4}}{0.4} \cdot \|\boldsymbol{x}^{(5)} - \boldsymbol{x}^{(4)}\|_\infty = \frac{0.6^{n-4}}{0.4} \cdot 0.01764 \overset{!}{\le} 10^{-4}$$
$$\iff n - 4 \ge 11.92$$

Das bedeutet, dass auch schon $\boldsymbol{x}^{(16)}$ die Genauigkeitsforderung erfüllt. Die Rechnung ergibt $\boldsymbol{x}^{(16)} = (1.000000016, 1.999999991, 3.000000013)^{\mathrm{T}}$ und damit $\|\boldsymbol{x}^{(16)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty = 1.6 \cdot 10^{-8}$. ∎

- Bearbeiten Sie die Aufgabenstellung nochmals, aber mit dem Gauss-Seidel-Verfahren und dem Näherungsvektor $\boldsymbol{x}^{(4)}$ aus Beispiel 4.14.

  Die Konvergenz an sich ist schon durch die Diagonaldominanz gesichert (siehe Beispiel 3.17). Für die Iterationsmatrix $\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{R}$ erhalten wir $\|\boldsymbol{B}\|_\infty = 0.5$ (zur Erinnerung: Im Falle des Gesamtschrittverfahren hatten wir hier 0.6). Wir gehen analog zu Beispiel 3.17 vor: Mit der a-posteriori-Abschätzung erhalten wir:

  $$\|\boldsymbol{x}^{(4)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty \le \frac{\|\boldsymbol{B}\|_\infty}{1 - \|\boldsymbol{B}\|_\infty} \cdot \|\boldsymbol{x}^{(4)} - \boldsymbol{x}^{(3)}\|_\infty = 0.0068091$$

  Der wirkliche Fehler von $\boldsymbol{x}^{(4)}$ ist: $\|\boldsymbol{x}^{(4)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty = 0.001355750$.
  Die a-priori-Abschätzung (3.13), ausgehend von $\boldsymbol{x}^{(0)}$, führt auf die Forderung $n \ge 15.9$. Ab $\boldsymbol{x}^{(16)}$ würden die Iterierten also der Genauigkeitsforderung genügen. Verbesserte Abschätzung a-priori ab $n = 4$:

  $$\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty \le \frac{0.5^{n-3}}{0.5} \cdot \|\boldsymbol{x}^{(4)} - \boldsymbol{x}^{(3)}\|_\infty \overset{!}{\le} 10^{-4} \iff n \ge 8.09.$$

  Also würde auch schon $\boldsymbol{x}^{(9)}$ der Genauigkeitsforderung genügen.