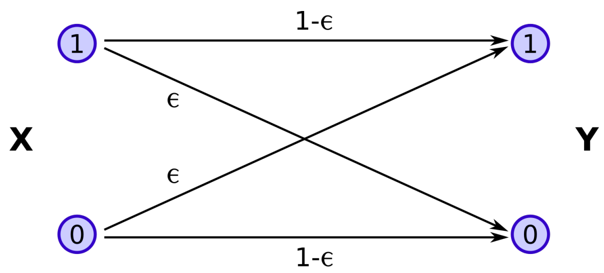
Dr. Jürg M. Stettbacher
Neugutstrasse 54
CH-8600 Dübendorf

Telefon: +41 43 299 57 23
Email: dsp@stettbacher.ch

Übung

Kanalcodierung



Gegeben sei der dargestellte BSC (Binary Symmetric Channel) mit den binären Zufallsvariabel X am Eingang und Y am Ausgang. Die Zufallsvariable X erzeugt die beiden Ereignisse $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$, die Zufallsvariable Y verfügt über die möglichen Ereignisse $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$. Ausserdem sei die BER (Bit Error Rate) $\epsilon = 0.02$ und die Wahrscheinlichkeit $P(x_0) = 0.25$ am Eingang.

1. Wie gross sind die vier bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(y_n|x_m)$ mit $n, m \in \{0, 1\}$?
2. Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten $P(y_0)$ und $P(y_1)$ am Ausgang?
3. Wie gross ist die Entropie $H(X, Y)$? Was sagt diese Grösse aus?
4. Wie gross ist die Entropie $H(Y|X)$? Was sagt diese Grösse aus?
5. Berechnen Sie die gemeinsame Information $I(X; Y)$. Was sagt diese Grösse aus?
6. Bestimmen Sie die Kanalkapazität C_{BSC} unter Verwendung der binären Entropiefunktion $H_b(\epsilon)$.
7. Wieviele Nutzbits (informationstragende Bits) dürfen grundsätzlich in ein Codewort mit Länge $L = 100$ Bit verpackt werden, damit die Fehlerwahrscheinlichkeit mit FEC (Forward Error Correction) bei der Übertragung über den BSC minimal werden kann?

Tipps:

- Verbundentropie:
$$H(X, Y) = \sum_{n,m=0}^{1} P(x_n, y_m) \cdot \log_2 \frac{1}{P(x_n, y_m)}$$
- Bedingte Wahrscheinlichkeit:
$$P(x_n|y_m) = \frac{P(x_n, y_m)}{P(y_m)}$$
- Bedingte Entropie:
$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y)$$

Antworten

1. Aus der Zeichnung folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} P(y_0|x_0) &= 1-\epsilon \\ P(y_1|x_0) &= \epsilon \\ P(y_0|x_1) &= \epsilon \\ P(y_1|x_1) &= 1-\epsilon \end{aligned}$$

2. Für die beiden Werte am Ausgang gibt es jeweils zwei Pfade. Entsprechend erhält man die Wahrscheinlichkeiten $P(y_0)$ und $P(y_1)$:

$$\begin{aligned} P(y_0) &= P(x_0) \cdot P(y_0|x_0) + P(x_1) \cdot P(y_0|x_1) \\ &= 0.245 + 0.015 \\ &= 0.26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(y_1) &= P(x_0) \cdot P(y_1|x_0) + P(x_1) \cdot P(y_1|x_1) \\ &= 0.005 + 0.735 \\ &= 0.74 \end{aligned}$$

Beachte, dass die Summe aus beiden eins sein muss.

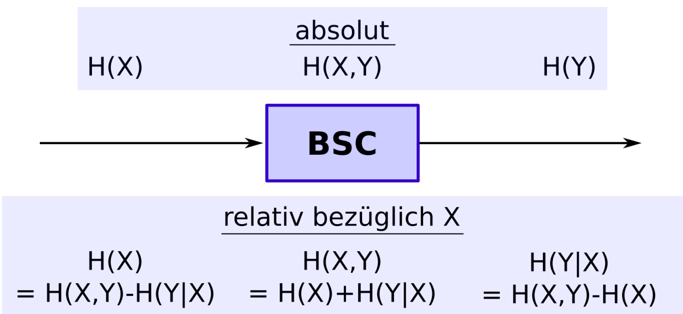
3. Zuerst benötigen wir die Verbundwahrscheinlichkeiten $P(x_n, y_m)$ mit $n, m \in \{0, 1\}$. Beachte, dass die Zufallsvariablen X und Y statistisch abhängig voneinander sind.

$$\begin{aligned} P(x_0, y_0) &= P(x_0) \cdot P(y_0|x_0) = 0.245 \\ P(x_1, y_0) &= P(x_1) \cdot P(y_0|x_1) = 0.015 \\ P(x_0, y_1) &= P(x_0) \cdot P(y_1|x_0) = 0.005 \\ P(x_1, y_1) &= P(x_1) \cdot P(y_1|x_1) = 0.735 \end{aligned}$$

Die Summe aus allen vieren muss eins sein. Nun kann man die Entropie $H(X, Y)$ berechnen:

$$H(X, Y) = \sum_{n,m=0}^{1} P(x_n, y_m) \cdot \log_2 \frac{1}{P(x_n, y_m)} = 0.953 \quad \text{Bit/Symbol}$$

Die Grösse $H(X, Y)$ ist die Verbundentropie von Eingang und Ausgang. Da Y statistisch abhängig von X ist, wäre $H(X, Y) = H(X)$, wenn der BSC keine Fehler machen würde, resp. wenn $\epsilon = 0$ wäre. Siehe dazu die Abbildung.



4. Beim BSC ist die Entropie $H(Y|X)$:

$$H(Y|X) = H(X, Y) - H(X)$$

Es fehlt uns noch die Entropie $H(X)$ am Eingang:

$$H(X) = \sum_{n=0}^{1} P(x_n) \cdot \log_2 \frac{1}{P(x_n)} = 0.811 \quad \text{Bit/Symbol}$$

Damit folgt:

$$H(X|Y) = 0.142 \quad \text{Bit/Symbol}$$

Die Grösse $H(X|Y)$ ist die Entropie am (abhängigen) Ausgang, wenn der Eingang gegeben ist. Sie ist die Verbundentropie $H(X,Y)$ minus die Entropie des Eingangs $H(X)$. Es ist demnach die (scheinbare) Entropie, die nur aufgrund der Fehler des BSC am Ausgang entsteht. Siehe die Abbildung.

5. Die gemeinsame Information $I(X;Y)$ ist:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

Es fehlt uns noch die Entropie $H(Y)$ am Ausgang:

$$H(Y) = \sum_{m=0}^{1} P(y_m) \cdot \log_2 \frac{1}{P(y_m)} = 0.827 \quad \text{Bit/Symbol}$$

Damit folgt:

$$I(X;Y) = 0.685 \quad \text{Bit/Symbol}$$

Die Grösse $I(X;Y)$ sagt aus, wieviel Information dem Eingang und dem Ausgang gemeinsam ist. Es ist somit jene Information (Entropie), die vom Eingang auf den Ausgang gelangt, resp. die vom BSC übertragen wird.

6. Das Maximum der gemeinsamen Information $I(X;Y)$, also die Kapazität C_{BSC} des BSC-Kanals, lässt sich mit Hilfe der binären Entropiefunktion $H_b(\epsilon)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} C_{BSC} &= 1 - H_b(\epsilon) \\ &= 1 - \left(\epsilon \cdot \log_2 \frac{1}{\epsilon} + (1-\epsilon) \cdot \log_2 \frac{1}{1-\epsilon}\right) \\ &= 0.859 \quad \text{Bit/Symbol} \end{aligned}$$

7. Das Theorem über die Kanalcodierung sagt, dass bei $R < C$ die Fehlerwahrscheinlichkeit beliebig klein gemacht werden kann. Bei einer gegebenen Codewortlänge L kann der Fehler nicht beliebig klein aber minimal gemacht werden, wenn das Theorem eingehalten ist. Die Coderate R ist definiert als die Anzahl Nutzbits N im Codewort geteilt durch die Codewortlänge L .

$$\begin{aligned} R &< C \\ \frac{N}{L} &< C \\ N &< L \cdot C \\ N &< 85.9 \quad \text{Bit} \end{aligned}$$

Cbsc = 0.856
R = K / N -> Nutzbit / Codebit

0.856 = K / 100 |*100
85.6 = K

--> 85Bit können sicher übermittelt werden

Man würde also in der Praxis $N \leq 85$ Bit wählen.