Grundlagen und diskrete Mathematik
Übung 2 Abgabe: Kalenderwoche 41

Aufgabe 1

Gegeben sind die beiden aussagenlogischen Formeln $F := p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_5)$ und $G := (p_3 \wedge p_2) \rightarrow p_4$ sowie eine Belegung B mit

$$B(p_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ eine Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\widehat{B}(F)$ und $\widehat{B}(G)$.

(b) Geben Sie eine Belegungen an, unter der F zu 0 und G zu 1 evaluiert wird.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} \widehat{B}(F) &= \widehat{B}(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_5)) \\ &= \widehat{B}(\neg p_1 \vee (p_2 \wedge p_5)) \\ &= \max(\widehat{B}(\neg p_1), \widehat{B}(p_2 \wedge p_5)) \\ &= \max(1 - \underbrace{\widehat{B}(p_1)}_{=0}, \widehat{B}(p_2 \wedge p_5)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{B}(G) &= \widehat{B}((p_3 \wedge p_2) \rightarrow p_4) \\ &= \widehat{B}(\neg(p_3 \wedge p_2) \vee p_4) \\ &= \max(\widehat{B}(\dots), \underbrace{\widehat{B}(p_4)}_{=0}) \\ &= \widehat{B}(\neg(p_3 \wedge p_2)) \\ &= 1 - \widehat{B}(p_3 \wedge p_2) \\ &= 1 - \min(\underbrace{\widehat{B}(p_3)}_{=1}, \underbrace{\widehat{B}(p_2)}_{=1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) Zum Beispiel

$$B(p_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{oder} \quad B(p_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2

Geben Sie von folgenden Formeln an, ob sie in DNF und/oder in KNF sind.

(a) p

(b) $p \wedge (\neg q \wedge p_1)$

(c) $p \vee (q \rightarrow p)$

(d) $p \vee (\neg p \wedge (p \vee q))$

(e) $(p \vee q) \wedge (p \vee (p \vee p))$

Lösung:

(a) p ist in KNF und DNF.

(b) $(p \wedge (\neg q \wedge p_1))$ ist in KNF und DNF.

(c) $p \vee (q \rightarrow p)$ ist nicht in KNF und nicht in DNF.

(d) $p \vee (\neg p \wedge (p \vee q))$ ist weder KNF noch in DNF.

(e) $(p \vee q) \wedge (p \vee (p \vee p))$ ist in KNF aber nicht in DNF.

Aufgabe 3

Bringen Sie folgende aussagenlogischen Formeln in DNF und KNF.

(a) $p \rightarrow (q \vee (p_1 \wedge p_2))$

(b) $p \rightarrow (q \rightarrow p_1)$

(c) $(p \rightarrow q) \rightarrow p_1$

Lösung:

(a) DNF und KNF

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \vee (p_1 \wedge p_2)) &\equiv \underbrace{\neg p \vee (q \vee (p_1 \wedge p_2))}_{DNF} \\ &\equiv \neg p \vee ((q \vee p_1) \wedge (q \vee p_2)) \\ &\equiv \underbrace{(\neg p \vee q \vee p_1) \wedge (\neg p \vee q \vee p_2)}_{KNF} \end{aligned}$$

(b) KNF und DNF

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow p_1) &\equiv \neg p \vee (q \rightarrow p_1) \\ &\equiv \underbrace{\neg p \vee \neg q \vee p_1}_{KNF \text{ und } DNF} \end{aligned}$$

(c) DNF und KNF

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \rightarrow p_1 &\equiv \neg(p \rightarrow q) \vee p_1 \\ &\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee p_1 \\ &\equiv \underbrace{(p \wedge \neg q) \vee p_1}_{DNF} \\ &\equiv \underbrace{(p \vee p_1) \wedge (\neg q \vee p_1)}_{KNF} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die aussagenlogische Formel F genau dann unerfüllbar ist, wenn die Formel $\neg F$ allgemeingültig ist.

Lösung: Wir nehmen an, dass F eine beliebige aussagenlogische Formel ist. Wir müssen zwei Dinge Zeigen:

(a) Wenn F unerfüllbar ist, dann ist $\neg F$ allgemeingültig.

(b) Wenn $\neg F$ allgemeingültig ist, dann ist F unerfüllbar.

Wir zeigen zuerst (a) und dann (b).

(a) Wenn F unerfüllbar ist, dann gilt für jede Belegung B, die Gleichung $\hat{B}(F) = 0$ und somit $\hat{B}(\neg F) = 1 - \hat{B}(F) = 1$. Also ist $\neg F$ allgemeingültig.

(b) Ist $\neg F$ allgemeingültig, dann gilt für jede Belegung B die Gleichung $\hat{B}(\neg F) = 1$ und somit auch $\hat{B}(F) = 0$. Also ist F unerfüllbar. $\square$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie mithilfe von Wahrheitstabellen ob folgende Formeln allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar sind.

(a) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

(c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

(d) $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$

Lösung:

(a) Allgemeingültig, da in der letzten Spalte der Wahrheitstabelle nur der Wahrheitswert 1 auftritt.

p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

(b) Allgemeingültig, da in der letzten Spalte der Wahrheitstabelle nur der Wahrheitswert 1 auftritt.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

(c) Erfüllbar und nicht allgemeingültig, da in der letzten Spalte beide Wahrheitswerte auftreten.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \to (q \to p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

(d) Unerfüllbar, da in der letzten Spalte der Wahrheitstabelle nur der Wahrheitswert 0 auftritt.

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$p \wedge \neg q$	$(p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0

Aufgabe 6

Eine Menge logischer Verknüpfungen heisst *funktional vollständig*, wenn man alle Junktoren $(\wedge, \vee, \neg, \to)$ durch Kombinationen dieser Verknüpfungen äquivalent ausdrücken kann. Die Verknüpfungen $\neg, \wedge$ sind zum Beispiel funktional vollständig weil man damit $\to$ und $\vee$ wie folgt ausdrücken kann:

- $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \to B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$.

Zeigen Sie, dass folgende Mengen von Verknüpfungen funktional vollständig sind:

(a) $\{\neg, \vee\}$

(b) $\{\neg, \rightarrow\}$

(c) $\{\,|\,\}$, wobei $A \,|\, B := \neg(A \wedge B)$ (NAND-Operator).

(d) $\{\oplus\}$, wobei $A \oplus B := \neg(A \vee B)$.

Lösung:

(a) Da wir bereits wissen, dass $\{\neg, \wedge\}$ funktional vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass wir $\wedge$ darstellen können. Die Behauptung folgt also aus

$$A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B).$$

(b) Aus dem Vorhergehenden genügt es zu zeigen, dass wir mit $\{\neg, \rightarrow\}$ die Verknüpfung $\vee$ darstellen können. Die Behauptung folgt also aus

$$A \vee B \equiv (\neg A) \rightarrow B.$$

(c) Aus dem Vorhergehenden genügt es zu zeigen, dass wir die Verknüpfungen $\vee$ und $\neg$ darstellen können. Die Behauptung folgt also aus

$$\neg A \;\equiv\; \neg(A \wedge A) \;\equiv\; A|A$$

und

$$A \vee B \;\equiv\; \neg(\neg A \wedge \neg B) \;\equiv\; \neg((A|A) \wedge (B|B)) \;\equiv\; (A|A)|(B|B).$$

(d) Aus dem Vorhergehenden genügt es zu zeigen, dass wir die Verknüpfung $|$ darstellen können. Die Behauptung folgt also aus

$$\begin{aligned}
&((A \oplus A) \oplus (B \oplus B)) \oplus ((A \oplus A) \oplus (B \oplus B))\\
&\equiv (\neg A \oplus \neg B) \oplus (\neg A \oplus \neg B)\\
&\equiv \neg((\neg A \oplus \neg B) \vee (\neg A \oplus \neg B))\\
&\equiv \neg(\neg A \oplus \neg B)\\
&\equiv \neg\neg(\neg A \vee \neg B)\\
&\equiv \neg(A \wedge B)\\
&\equiv A|B
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (Bonusaufgabe)

Implementieren Sie in einer Programmiersprache Ihrer Wahl aussagenlogische Formeln als Klasse/Datentyp. Stellen Sie folgende Funktionalitäten zur Verfügung:

- Eine Methode/Funktion `eval(Formel, Belegung)`, mit der Sie Aussagenlogische Formeln unter einer gegebenen Belegung auswerten können.
- Methoden/Funktionen `nnf(Formel)`, `dnf(Formel)`, `knf(Formel)`, um Formeln in die entsprechenden Normalformen umzuwandeln.

- Eine Methode/Funktion `pretty_print(Formel)`, die Formeln in einer gut lesbaren Form ausgibt (z.B. als LaTeX–Code).

Lösung: Vgl. OLAT im Code-Ordner.