Dr. Jürg M. Stettbacher
Neugutstrasse 54
CH-8600 Dübendorf

Telefon: +41 43 299 57 23
Email: dsp@stettbacher.ch

Übung

Digitaltechnik

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Beweisen Sie, dass: $A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$

2. Wandeln Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass nur noch einzelne Variablen zu negieren sind. Vereinfachen Sie gleichzeitig, wo möglich und zeichnen Sie die Gatterschaltung dazu.

   (a) $\overline{A \cdot C + B}$

   (b) $\overline{A + \overline{B} + \overline{A + B}}$

3. Bilden Sie aus der folgenden Wahrheitstablle die disjunkive Normalform für q und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich.

x	y	z	q
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

4. Stellen Sie die Wahrheitstabellen für die folgenden Booleschen Funktionen auf:

   (a) $F_1 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$

   (b) $F_2 = A + B \cdot \overline{C}$

5. Bestimmen Sie für die Funktionen f_1 und f_2 je den vereinfachten Booleschen Ausdruck. Verwenden Sie die beiden vorbereiteten Karnaugh Tafeln für das Vereinfachen.

a	b	c	f_1	f_2
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

f_1	b	b	$\overline{b}$	$\overline{b}$
a				
$\overline{a}$				
	$\overline{c}$	c	c	$\overline{c}$

f_2	b	b	$\overline{b}$	$\overline{b}$
a				
$\overline{a}$				
	$\overline{c}$	c	c	$\overline{c}$

Antworten

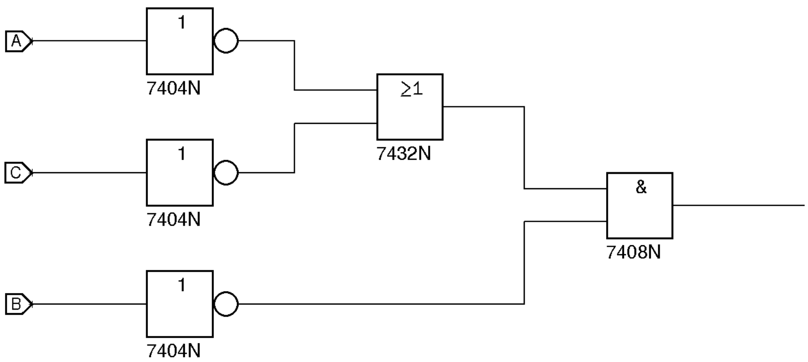
1. Den Beweis kann man über die Wahrheitstabelle führen:

A	B	$A \oplus B$	$\overline{A} \cdot B$	$A \cdot \overline{B}$	$\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

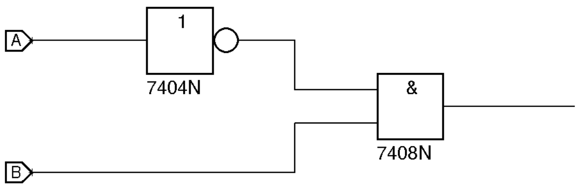
Wir stellen ausserdem fest, dass $\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$ gerade die disjunktive Normalform von $A \oplus B$ ist.

2. Unter Verwendung der Regeln von de Morgan folgt:

(a) $\overline{A \cdot C + B} = \overline{A \cdot C} \cdot \overline{B} = \left(\overline{A} + \overline{C}\right) \cdot \overline{B}$



(b) $\overline{A + \overline{B} + \overline{A + B}} = \overline{A} \cdot B \cdot (A + B) = \overline{A} \cdot B \cdot A + \overline{A} \cdot B \cdot B = \overline{A} \cdot B$



3. Aus der Wahrheitstabelle lesen wir die Terme für $q = 1$ und fügen sie zu einer disjunktiven Normalform zusammen:

$$
\begin{aligned}
q &= \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z \\
&= \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot (x + \overline{x}) + y \cdot \overline{z} \cdot (x + \overline{x}) + y \cdot z \cdot (x + \overline{x}) \\
&= \overline{y} \cdot \overline{z} + y \cdot \overline{z} + y \cdot z \\
&= \overline{z} \cdot (y + \overline{y}) + y \cdot z \\
&= \overline{z} + y \cdot z \\
&= \overline{z} + y
\end{aligned}
$$

Als Alternative können wir auch die Karnaugh Tafel benutzen:

q	y	y	$\overline{y}$	$\overline{y}$
x	1	1		1
$\overline{x}$	1	1		1
	$\overline{z}$	z	z	$\overline{z}$

In der Karnaugh Tafel können wir zwei 4-er Blöcke bilden und finden:

$$q = \overline{z} + y$$

Das Resultat lässt sich leicht via Wahrheitstabelle verifizieren.

4. Wir suchen für jeden Term die entsprechende(n) Zeile(n) in der Wahrheitstabelle und setzen dort je eine 1. Alle übrigen Zeilen bleiben null:

A	B	C	F_1	F_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Es kommt uns der Verdacht, dass sich F_1 noch vereinfachen liesse. Das wollen wir überprüfen und zeichnen daher die Karnaugh Tafel:

F_1	B	B	$\overline{B}$	$\overline{B}$
A			1	
$\overline{A}$	1		1	
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$

Tatsächlich, wir finden $F_1 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C$. Natürlich hätten wir das auch mit Hilfe der Booleschen Algebra herausfinden können:

$$\begin{aligned} F_1 &= \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \\ &= \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C \cdot \left(A + \overline{A}\right) \\ &= \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C \end{aligned}$$

5. Wir übertragen die Einsen aus den Wahrheitstabellen in die Karnaugh Tafeln:

f_1	b	b	$\overline{b}$	$\overline{b}$
a	1	1		
$\overline{a}$	1			1
	$\overline{c}$	c	c	$\overline{c}$

f_2	b	b	$\overline{b}$	$\overline{b}$
a	1	1	1	
$\overline{a}$	1	1	1	
	$\overline{c}$	c	c	$\overline{c}$

$$f_1 = a \cdot b + \overline{a} \cdot \overline{c}$$

$$f_2 = b + c$$