Dr. Jürg M. Stettbacher
Neugutstrasse 54
CH-8600 Dübendorf

Telefon: +41 43 299 57 23
Email: dsp@stettbacher.ch

Quiz

Kanalcodierung: Kanalmodell und Theorem

Sie sollten in der Lage sein, die folgenden Fragen ohne langes Nachdenken beantworten zu können.

1. Was ist der Unterschied zwischen Quellencodierung und Kanalcodierung?

   Quellencodierung:

2. Wodurch wird das Ziel der Kanalcodierung erreicht?

3. Warum verwendet man einen R^3-Code, aber keinen R^4-Code? Erklären Sie den Unterschied.

4. Wie ist die Coderate R definiert?

   $R = \frac{K}{N}$

5. Wie gross ist die Kanalkapazität C eines BSC mit BER $\varepsilon = 0.03$?

   $C_{BSC} = 1 - h(\varepsilon)$

6. Welche Aussage macht das Kanalcodierungs-Theorem für den Fall $R < C$?

   solange C grösser R ist kann man verlustfrei komprimieren.

Antworten

1. Die Quellencodierung verfolgt das Ziel, Redundanz und evt. Irrelevanz zu entfernen. Es geht also um *Datenkompression*. Bei der verlustlosen Quellencodierung soll die mittlere Codewortlänge L möglichst der Entropie H entsprechen. Sie darf aber nicht kleiner als die Entropie werden. Nur bei der verlustbehafteten Quellencodierung kann die mittlere Codewortlänge L kleiner als die Entropie H werden.

   Die Kanalcodierung soll Daten gegen *Übertragungsfehler* auf einen nicht idealen Kanal sichern. Mit dem betreffenden Code sollen Übertragungsfehler erkannt oder sogar korrigiert werden können.

2. Die Kanalcodierung fügt den Daten gezielt Redundanz hinzu. Dadurch entstehen mehr Codeworte als tatsächlich benötigt werden. Die überzähligen Codeworte dienen dazu, Übertragungsfehler zu erkennen und allenfalls sogar zu korrigieren.

3. Bei einem R^3-Code wird aus jedem Eingangsbit ein Codewort mit drei Bits, wobei das Eingangsbit einfach drei mal wiederholt wird. Kommt auf der Empfängerseite eine derartige Dreiergruppe an, und sind nicht alle Bits identisch, so ist offensichtlich ein Übertragungsfehler aufgetreten. Es gibt dabei zwei Möglichkeiten:

   - Entweder es ist eines der drei Bits falsch.
   - Oder es sind zwei der drei Bits falsch.

   Mit der Bitfehler-Wahrscheinlichkeit[1] $0 \leq \varepsilon \leq 1$ folgt die Wahrscheinlichkeit $P_{1,3}$, dass in einem R^3-Codewort genau ein Datenbit falsch ankommt[2]:

   $$P_{1,3} = 3 \cdot \varepsilon \cdot (1 - \varepsilon)^2$$

   Die Wahrscheinlichkeit für zwei falsche Bits beträgt:

   $$P_{2,3} = 3 \cdot \varepsilon^2 \cdot (1 - \varepsilon)$$

   Die Wahrscheinlichkeit für drei falsche Bits wäre:

   $$P_{3,3} = \varepsilon^3$$

   Typischerweise ist ε eine sehr kleine Zahl. Somit gilt: $P_1 \gg P_2 \gg P_3$. Es ist also sinnvoll anzunehmen, dass bei ungleichen Bits in einem R^3-Code *ein* Fehler aufgetreten sei. Entsprechend wird korrigiert. Es ist allerdings zu beachten, dass die Annahme falsch sein kann. Es wird in der Folge falsch korrigiert. Genauso kann die Annahme, dass bei drei identischen Bits kein Fehler aufgetreten sei, falsch sein.

   Empfängt man bei einem R^4-Code beispielsweise die Vierergruppe 0011_b, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Nullen falsch sind, gleich gross wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Einsen falsch sind. Es gibt also kein eindeutiges Entscheidungskriterium. Daher ist die Verwendung eines R^4-Code nicht sinnvoll.

4. In der Kanalcodierung gehen wir davon aus, dass jeweils K Eingangsbits (wir nennen sie *informationstragende Bits*) in ein Codewort von N Bits verpackt werden. Die Coderate R ist definiert als das Verhältnis der Anzahl von informationstragenden Bits zur Anzahl Codebits:

   $$R = \frac{K}{N} \qquad 0 < R \leq 1$$

[1] Englisch: Bit Error Rate (BER). Die Bitfehler-Wahrscheinlichkeit ist eine Eigenschaft des Kanals und gibt für ein einzelnes Bit die Wahrscheinlichkeit an, dass es bei der Übertragung verfälscht wird.

[2] Es gibt drei Fälle für ein falsches Bit, nämlich das erste, zweite oder dritte Bit ist falsch. ε ist die Wahrscheinlichkeit, dass das falsche Bit auftritt, $1 - \varepsilon$ ist die Auftretenswahrscheinlichkeit eines korrekten Bits.

5. Die Kanalkapazität C eines BSC ist:

$$C = 1 - h(\varepsilon)$$

Dabei ist die binäre Entropiefunktion $h(\varepsilon)$ definiert als:

$$h(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + (1-\varepsilon) \cdot \log_2 \frac{1}{1-\varepsilon}$$

Mit $\varepsilon = 0.03$ folgt $C = 0.806$ Bit/Bit.

Auf die selbe Lösung kommen wir auch auf dem allgemeinen Weg, ohne Verwendung der binären Entropiefunktion. Wir starten mit der allgemeinen Definition der Kanalkapazität C eines BSC mit dem Eingang X und dem Ausgang Y. Dabei seien $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ die Eingangssymbole und $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$ die Ausgangssymbole.

$$C = \max_{P(x)} \{I(X;Y)\}$$

Wir wissen schon, dass $H(X)$ und folglich $I(X;Y)$ maximal werden, wenn $P(x_0) = P(x_1) = 0.5$. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Übertragung sind:

$$\begin{aligned} P(y_0|x_0) &= 1-\varepsilon \\ P(y_0|x_1) &= \varepsilon \\ P(y_1|x_0) &= \varepsilon \\ P(y_1|x_1) &= 1-\varepsilon \end{aligned}$$

Damit folgen die totalen Wahrscheinlichkeiten für Y:

$$\begin{aligned} P(y_0) &= P(x_0) \cdot P(y_0|x_0) + P(x_1) \cdot P(y_0|x_1) = P(x_0) \cdot (1-\varepsilon) + P(x_1) \cdot \varepsilon \\ P(y_1) &= P(x_1) \cdot P(y_1|x_1) + P(x_0) \cdot P(y_1|x_0) = P(x_1) \cdot (1-\varepsilon) + P(x_0) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Mit $P(x_0) = P(x_1) = 0.5$ folgt, dass auch $P(y_0) = P(y_1) = 0.5$ ist. Folglich sind $H(X) = H(Y) = 1$ Bit. Nun suchen wir $I(X;Y)$:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) - H(X|Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

Wir benötigen also noch $H(X,Y)$ und damit die Wahrscheinlichkeiten $P(x_k, y_l)$:

$$\begin{aligned} P(x_0,y_0) &= P(x_0) \cdot P(y_0|x_0) = P(x_0) \cdot (1-\varepsilon) = 0.485 \\ P(x_0,y_1) &= P(x_0) \cdot P(y_1|x_0) = P(x_0) \cdot \varepsilon = 0.015 \\ P(x_1,y_0) &= P(x_1) \cdot P(y_0|x_1) = P(x_1) \cdot \varepsilon = 0.015 \\ P(x_1,y_1) &= P(x_1) \cdot P(y_1|x_1) = P(x_1) \cdot (1-\varepsilon) = 0.485 \end{aligned}$$

Folglich:

$$H(X,Y) = \sum_{k,l=0}^{1} P(x_k,y_l) \cdot \log_2 \frac{1}{P(x_k,y_l)} = 1.194\,\text{Bit/Symbol}$$

Und schliesslich:

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = 0.806\,\text{Bit/Bit}$$

6. Das Kanalcodierungs-Theorem besagt:

Unter allen Codes mit $R < C$ existiert ein Code mit ausreichender Blockgrösse N, mit dem die Fehlerwahrscheinlichkeit der Übertragung beliebig klein gemacht werden kann. Im umgekehrten Fall, nämlich unter allen Codes mit $R > C$, findet sich kein Code, mit dem die Feherwahrscheinlichkeit beliebig klein gemacht werden kann.