Lineare Algebra
Übung 4 Abgabe: Kalenderwoche 16

Aufgabe 1

Gegeben sind die Ebenen

$$E_1 : x + 2y + 3z = 0$$
$$E_2 : 2x - y - 2z = 4.$$

Beschreiben Sie die Gerade $g = E_1 \cap E_2$ als Parametergleichung.

Lösung: Von den Ebenengleichungen lesen wir die Vektoren $v_1 = (1, 2, 3)$ und $v_2 = (2, -1, -2)$ ab, die auf den beiden Ebenen rechtwinklig stehen. Der Richtungsvektor v der Geraden g steht senkrecht auf den beiden Vektoren v_1 und v_2, wir erhalten v demnach durch

$$v = v_1 \times v_2 = (-1, 8, -5)$$

Wir brauchen nun noch einen Stützvektor für die Parametergleichung. Da als Stützvektor jeder Punkt, der auf g liegt in Frage kommt, nehmen wir den Schnittpunkt von g mit der YZ-Ebene ($x = 0$ setzen). Wir lösen demnach das Gleichungssystem

$$2y + 3z = 0$$
$$-y - 2z = 4$$

und erhalten $z = -8$ und $y = 12$. Insgesamt erhalten wir die Geradengleichung

$$g : \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mit dem Gauss-Verfahren.

(a)

$$3x - 2y = -1$$
$$4x + 5y = 3$$
$$7x + 3y = 2$$

(b)

$$2x + 2z = 1$$
$$3x - y + 4z = 7$$
$$6x + y - z = 0$$

Lösung:

(a)

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$Z2 := 3Z2$ und $Z3 = 3Z3$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 12 & 15 & 9 \\ 21 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$Z2 := Z2 - 4Z1$ und $Z3 = Z3 - 7Z1$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 23 & 13 \\ 0 & 23 & 13 \end{bmatrix}$$

$Z3 := Z3 - Z2$ (und Nullzeile ignorieren)

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 23 & 13 \end{bmatrix}$$

$Z1 := 23Z1 + 2Z2$

$$\begin{bmatrix} 69 & 0 & 3 \\ 0 & 23 & 13 \end{bmatrix}$$

Als (einzige) Lösung ergibt sich somit

$$x = \frac{1}{23} \qquad y = \frac{13}{23}$$

Lösung:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$Z3 := Z3 - 3Z1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$Z2 := 2Z2 - 3Z1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$Z2 := Z2 + 2Z3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$Z1 := 6Z1 + Z2$

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -12 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$Z3 := 12Z3 - 7Z2$

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -12 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & -71 \end{bmatrix}$$

Vertauschen von $Z2$ und $Z3$.

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 12 & 0 & -71 \\ 0 & 0 & -12 & 5 \end{bmatrix}$$

Wir erhalten als (einzige) Lösung:

$$x = \frac{11}{12} \qquad y = \frac{-71}{12} \qquad z = \frac{-5}{12}$$

Aufgabe 3

Wir werden später sehen, dass bestimmte Matrizen "invertierbar" sind und wie dies mit "invertierbaren" (umkehrbaren) Funktionen zusammen hängt. Um eine "invertierbare" Matrix zu invertieren, gehen Sie wie folgt vor:

- Schreiben Sie die zu invertierende Matrix (links) neben die Einheitsmatrix gleicher Dimension.
- Führen Sie Zeilenoperationen (entsprechend dem Gauss Verfahren) an der Matrix durch bis an deren Stelle die Einheitsmatrix steht.
- Alle Zeilenoperationen der linken Seite müssen simultan auch auf der rechten Seite (dort wo anfangs die Einheitmatrix steht) ausgeführt werden.
- Am Schluss steht auf der rechten Seite die invertierte Matrix.

Invertieren Sie die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösung:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Z2 := Z2 - Z3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Z1 := Z1 - Z3$ und $Z3 := Z3 - Z2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vertausche $Z2$ und $Z3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Die gesuchte Matrix ist also $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 4 (Bonusaufgabe)

Implementieren Sie in der Programmiersprache Ihrer Wahl den Matrizenkalkül. Folgende Funktionalitäten sollen implementiert werden:

(a) Addition von Matrizen

(b) Skalarmultiplikation von Matrizen mit Skalaren

(c) Matrixmultiplikation

(d) Für gegebenes i die i-te Spalte einer Matrix zurückgeben

(e) für gegebenes j die j-te Zeile zurückgeben

(f) Transponieren von Matrizen

Testen Sie Ihr Programm an verschiedenen Matrizen.

Lösung: Siehe OLAT (code)