Semesterendprüfung NMIT1 HS 2014/15 (a)
Studiengang Informatik / 16. Januar 2015
Dozent: R. Knaack

Name :	
Vorname :	
Klasse :	IT13a_ZH

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Total**
Maximale Punktzahl	10	10	10	10	10	10	60
Erreichte Punktzahl							

Note	

- **Dauer:** 120 Minuten
- **Hilfsmittel:** Gemäss Kursvereinbarung.
- **Lösungsweg:** Der Lösungsweg muss vollständig (d.h. inklusive relevanter Zwischenschritte) angegeben und nachvollziehbar sein.
- **Bewertung:** Es hat insgesamt 6 Aufgaben. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten gleich bewertet.

Aufgabe 1:

a) Gegeben seien zwei verschiedene Rechenmaschinen. Die erste davon arbeite mit einer 46-stelligen Binärarithmetik und die zweite einer 14-stelligen Dezimalarithmetik. Welche Maschine rechnet genauer? (*Mit* Begründung!)

b) Stellen Sie die Zahl $x = \sqrt{3}$ korrekt gerundet als Maschinenzahl $\tilde{x}$ in einer Fliesskomma-Arithmetik mit 5 Binärstellen dar, und geben Sie den relativen Fehler von $\tilde{x}$ im Dezimalformat an.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto y = f(x) = x^2 \cdot e^{-x}.$$

Das Argument x sei mit einem betragsmässigen relativen Fehler von bis zu 5% behaftet. Bestimmen Sie mit Hilfe der Kondition alle x, für welche unter dieser Voraussetzung der Betrag des relativen Fehlers des Funktionswertes $y = f(x)$ ebenfalls höchstens 5% wird.

Aufgabe 3:

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und der exakten Lösung} \quad x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Kondition $\text{cond}(A)$ der Matrix A in der 1-Norm.

b) Gegeben ist nun die fehlerbehaftete rechte Seite $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 10^{-5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die entsprechende Lösung $\tilde{x}$.

c) Bestimmen Sie für die Lösung aus b) den relativen Fehler $\frac{\|\tilde{x}-x\|_1}{\|x\|_1}$, und vergleichen Sie diesen mit der Abschätzung aufgrund der Kondition. Was stellen Sie fest?

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Aufgabe 4:

Die Gleichung $2x = 2^x$ hat eine Lösung im Intervall $I = [0.5, 1.5]$ für die zugehörige Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{x_k}, \qquad x_0 = 1.5.$$

a) Überprüfen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach und mit obigem Intervall, dass die angegebene Fixpunktiteration tatsächlich konvergiert.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der a priori Fehlerabschätzung, wieviele Schritte es höchstens braucht, um einen absoluten Fehler von maximal 10^{-8} garantieren zu können.

Aufgabe 5:

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 5 \\ 10 & a & 20 \\ 5 & 20 & 50 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 5a \\ a \\ 5a \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $a \in \mathbb{N}$ ein ganzzahliger Parameter.

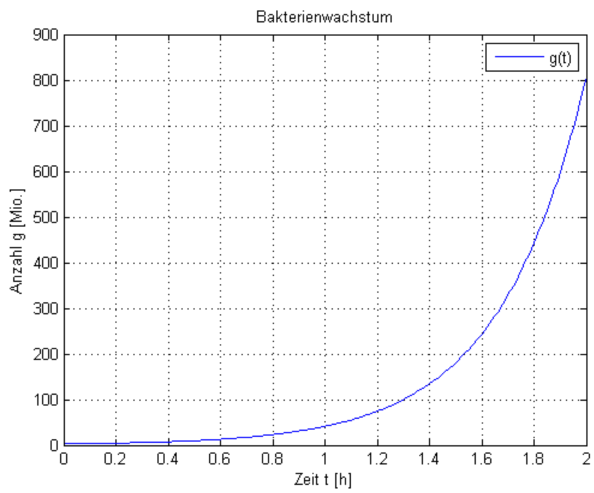
a) Welche Bedingung muss a erfüllen, damit A diagonal dominant ist und also das Jacobi-Verfahren konvergiert?

b) Berechnen Sie den ersten Iterationsschrit des Jacobi-Verfahrens für den Startvektor $x^{(0)} = (a, 0, a)^T$.

c) Bestimmen Sie für $a \geq 60$ mittels der a priori Abschätzung und bezüglich der ∞-Norm die Anzahl Iterationsschritte $n = n(a)$ als Funktion von a, um eine vorgegebene Fehlerschranke ε zu erreichen.

Aufgabe 6:

Die folgende Abbildung zeigt den gemessenen Verlauf einer Bakterienpopulation $g(t)$ (Einheit: Mio. Bakterien) als Funktion der Zeit t (Einheit: Stunden):



Es wird vermutet, dass sich $g(t)$ darstellen lässt als Funktion mit den drei (vorerst unbekannten) Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$ gemäss

$$g(t) = a + b \cdot \mathrm{e}^{c \cdot t}.$$

a) Bestimmen Sie eine Näherung für die drei Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$, indem Sie 3 Messpunkte $(t_i, g(t_i))$ (für $i = 1, 2, 3$) aus der Abbildung herauslesen, das zugehörige Gleichungssystem aufstellen und für das Newton-Verfahren für Gleichungssysteme die erste Iteration angeben (inkl. Jacobi-Matrix und $\delta^{(0)}$). Verwenden Sie als Startvektor $(1, 2, 3)^T$.

b) Bestimmen Sie mit Ihrer Näherung aus a) den Zeitpunkt t, an dem die Population auf 1600 [Mio. Bakterien] angewachsen ist. Verwenden Sie dafür das Newton-Verfahren mit einem sinnvollen Startwert t_0 und einer Genauigkeit von $\mid t_n - t_{n-1} \mid < 10^{-4}$. Geben Sie die verwendete Iterationsgleichung explizit an.
Falls Sie Aufgabe a) nicht lösen konnten, so verwenden Sie $g(t) = 5 + 3 \cdot \mathrm{e}^{4t}$.