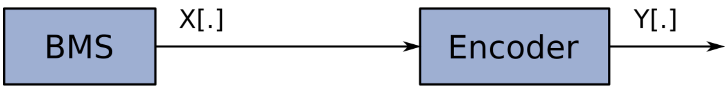
Dr. Jürg M. Stettbacher
Neugutstrasse 54
CH-8600 Dübendorf

Telefon: +41 43 299 57 23
Email: dsp@stettbacher.ch

Übung

Quellencodierung



Quelle

Eine binäre gedächtnislose Quelle (BMS[1]) erzeugt zu jedem diskreten Zeitpunkt $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ eine Zufallsvariable $X[k]$. Das heisst, es entsteht mit der Zeit eine Sequenz $X[.] = \{X[0]\ X[1]\ X[2]\ \ldots\}$ von derartigen Zufallsvariablen. Jede Zufallsvariable $X[k]$ nimmt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit den Wert $x_0 = 0$ oder $x_1 = 1$ an[2]. Gegeben ist ein repräsentativer Ausschnitt der Sequenz $X[.]$:

$$X[.] = \Big\{ \ \ldots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \ \Big\}$$

1. Was bedeutet es, dass die Quelle *gedächtnisfrei* ist?
2. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(x_0)$ und $P(x_1)$ der Zufallsvariable $X[k]$.
3. Berechnen Sie die Entropie $H(X)$ der Quelle, resp. der Sequenz $X[.]$, basierend auf den Schätzungen.
4. Wie gross ist die Redundanz R_X der Sequenz $X[.]$?

[1] Englisch: Binary Memoryless Source.

[2] Darum heisst die Quelle *binär*. Die Werte x_0 und x_1 bezeichnen wir auch als Symbole der Quelle.

Encoder

5. Der Encoder fasst nun immer zwei aufeinander folgende Symbole der Sequenz $X[.]$ zusammen und codiert sie neu. Daraus entsteht die Sequenz $Y[.]$.

$$X[.] = \{ \quad \underbrace{X[0] \quad X[1]}_{Y[0]} \quad \underbrace{X[2] \quad X[3]}_{Y[1]} \quad \underbrace{X[4] \quad X[5]}_{Y[2]} \quad \ldots \quad \}$$

   Dabei wendet der Encoder die folgende Abbildungstabelle[3] an:

Zweiergruppe in $X[.]$	Symbol in $Y[.]$
0 0	$y_0 =$ 0
0 1	$y_1 =$ 1 0
1 0	$y_2 =$ 1 1 0
1 1	$y_3 =$ 1 1 1

   Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(y_n)$ mit $n = 0 \ldots 3$ an.

6. Wie gross ist die Entropie $E(Y)$ der Sequenz $Y[.]$?

7. Wie gross ist die Redundanz R_Y? Vergleichen Sie R_Y mit R_X.

8. Betrachten Sie nun einen langen Ausschnitt der Sequenz $X[.]$ mit beispielsweise 1000 Symbolen. Untersuchen Sie die Häufigkeiten (in %) von Nullen und Einsen in den Bits dieses Ausschnitts und im dazu gehörigen Ausschnitt der Sequenz $Y[.]$. Was fällt Ihnen auf?

Binäre Messungen

Von 8 identisch aussehenden Kugeln ist eine etwas schwerer oder leichter als die anderen. Mit der Hilfe einer Balkenwaage soll die abweichende Kugel mit möglichst wenigen Wägungen sicher ermittelt werden. Die Waage erlaubt binäre Messungen: Die Inhalte der beiden Waagschalen sind gleich schwer oder nicht. Jede der Waagschalen kann mehrere Kugeln aufnehmen.

9. Ohne an ein bestimmtes Verfahren zu denken, überlegen Sie rein theoretisch, mit wievielen binären Messungen die abweichende Kugel ausfindig gemacht werden kann.

10. Überlegen Sie sich jetzt einen Algorithmus dazu.

[3] Beachten Sie, dass die Symbole y_n unterschiedlich lang sind. Es handelt sich hier um einen sogenannten Huffman Code. Am Ausgang des Encoders werden die Bits der Symbole y_n einfach aneinander gereiht.

Antworten

1. Bei einer gedächtnisfreien Quelle besteht zwischen aufeinander folgenden Symbolen keine Abhängigkeit. Damit kann man für jedes Symbol, unabhängig von dessen Vorgängern und Nachfolgern, eine Wahrscheinlichkeit angeben.

2. Der repräsentative Ausschnitt der Sequenz $X[.]$ enthält in 20 Symbolen genau 16 mal x_0 und 4 mal x_1. Damit schätzen wir:
$$P(x_0) \approx \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \qquad\qquad P(x_1) \approx \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$
Als Kontrolle können wir überprüfen, ob $P(x_0) + P(x_1) = 1$ ist. Das ist hier der Fall.

3. Entropie $H(X)$:
$$H(X) = P(x_0) \cdot \log_2 \frac{1}{P(x_0)} + P(x_1) \cdot \log_2 \frac{1}{P(x_1)} = 0.722 \quad \text{Bit/Symbol}$$

4. Die Quelle stellt jedes der Symbole x_0 und x_1 mit einem Bit dar. Folglich die die mittlere Codewortlänge $L_X = 1$ Bit/Symbol. Damit erhalten wir die Redundanz R_X:
$$R_X = L_X - H(X) = 0.278 \quad \text{Bit/Symbol}$$

5. Die Wahrscheinlichkeit $P(y_n)$ ist identisch mit der Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Zweiergruppe in $X[.]$. Da die Quelle gedächtnislos ist, können wir die gesuchten Wahrscheinlichkeiten folgendermassen angeben:
$$\begin{aligned} P(y_0) &= \quad P(x_0) \cdot P(x_0) = \tfrac{16}{25} & \qquad P(y_2) &= \quad P(x_1) \cdot P(x_0) = \tfrac{4}{25} \\ P(y_1) &= \quad P(x_0) \cdot P(x_1) = \tfrac{4}{25} & \qquad P(y_3) &= \quad P(x_1) \cdot P(x_1) = \tfrac{1}{25} \end{aligned}$$
Natürlich muss auch hier gelten:
$$\sum_{n=0}^{3} P(y_n) = 1$$

6. Man kann die Entropie nach der üblichen Formel berechnen:
$$E(Y) = \sum_{n=0}^{3} P(y_n) \cdot \log_2 \frac{1}{P(y_n)} = 1.444 \quad \text{Bit/Symbol}$$
Man kann aber auch so argumentieren: Jedes Symbol y_n enthält genau die Information von zwei unabhängigen Symbolen aus der Sequenz $X[.]$. Daraus folgt:
$$E(Y) = 2 \cdot E(X) = 1.444 \quad \text{Bit/Symbol}$$

7. Zuerst müssen wir die mittlere Codewortlänge L_Y berechnen. Dabei verwenden wir $l(y_n)$, die individuelle Codewortlänge des Symbols y_n in Bit.
$$L_Y = \sum_{n=0}^{3} P(y_n) \cdot l(y_n) = 1.560 \quad \text{Bit/Symbol}$$
Die Redundanz R_Y folgt:
$$R_Y = L_Y - E(Y) = 0.116 \quad \text{Bit/Symbol}$$
Es ist $R_Y > 0$. Dies sagt uns, dass der Encoder verlustfrei arbeitet. Das heisst, er ist in der Lage, die gesamte Information am Eingang auch in seinem Code am Ausgang abzubilden.
Beachte, dass bezogen auf die Sequenz $X[.]$ der Wert von R_Y zwei Symbole enthält. Möchten wir also R_Y mit R_X vergleichen, so müssen wir fairerweise $R_{Y/2} = R_Y/2$ verwenden:
$$R_{Y/2} = 0.058 \quad \ll \quad R_X = 0.278 \quad \text{Bit/Symbol}$$
Die Redundanz wurde durch den Encoder also auf rund 20 % des ursprünglichen Werts reduziert.

8. Wir haben bereits die Wahrscheinlichkeiten aller Symbole von $X[.]$ und $Y[.]$ bestimmt. Damit können wir sofort das Verhältnis von Nullen und Einsen in $X[.]$ angeben:

Symbol	Wahrscheinlichkeit	Anzahl Nullen pro Symbol	Anzahl Einsen pro Symbol	Total Nullen in 1000 Symbolen (im Mittel)	Total Einsen in 1000 Symbolen (im Mittel)
x_0	$P(x_0) = 0.8$	1	0	800	0
x_1	$P(x_1) = 0.2$	0	1	0	200
Total				800	200
Anteil				80.0 %	20.0 %

Nun betrachten wir das Verhältnis von Nullen und Einsen in $Y[.]$:

Symbol	Wahrscheinlichkeit	Anzahl Nullen pro Symbol	Anzahl Einsen pro Symbol	Total Nullen in 1000 Symbolen (im Mittel)	Total Einsen in 1000 Symbolen (im Mittel)
y_0	$P(y_0) = 0.64$	1	0	640	0
y_1	$P(y_1) = 0.16$	1	1	160	160
y_2	$P(y_2) = 0.16$	1	2	160	320
y_3	$P(y_3) = 0.04$	0	3	0	120
Total				960	600
Anteil				61.5 %	38.5 %

Man erkennt, dass mit abnehmender Redundanz das Verhältnis von Nullen und Einsen ausgeglichener wird. Tatsächlich ist die Entropie in einem Bitstorm maximal, wenn $P(0) = P(1) = 0.5$ eintritt und gleichzeitig ist die Redundanz dann minimal.

9. Wenn es gelingt, in jeder Wägung die Hälfte aller verbleibenden Kugeln zu eliminieren, dann müsste es in jedem Fall mit 3 Wägungen gelingen die abweichende Kugel zu finden.

10. 1. Wägung: 2 und 2 beliebig ausgewählte Kugeln von den 8 auf der Waage vergleichen. Sind sie gleich, so scheiden alle 4 aus, sonst scheiden die 4 nicht gewogenen Kugeln aus.
2. Wägung: 1 und 1 beliebig ausgewählte Kugel von den verbleibenden vergleichen: Sind sie gleich, so scheiden beide aus, sonst scheiden die beiden nicht gewogenen Kugeln aus.
3. Wägung: 1 beliebig ausgewählte Kugel von den verbleibenden mit einer bereits ausgeschiedenen Kugel vergleichen. Sind sie gleich, so ist die nicht gewogene der verbleibenden Kugeln die gesuchte. Sonst ist es die Gewogene unter den Verbleibenden.