Aufg. 1

$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

Hintereinanderausführung:

$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$

1. Abgeschlossenheit 1

$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ $\quad \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \in \mathbb{V}$ ✓

2. Assoziativ

$(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{x} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+e \\ b+d+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+e \\ d+f \end{pmatrix}$ 1,5

$= \vec{v} + (\vec{w} + \vec{x})$ ✓

3. neutrales Element: Nullvektor

$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, da $\vec{v} + \vec{0} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\vec{0} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ✓ 1,5

4. inverse Elemente: Gegenvektor

$-\vec{v} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, da $\vec{v} + (-\vec{v}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(-\vec{v}) + \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1,5

5. Kommutativität

$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+a \\ d+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{w} + \vec{v}$

1,5

$\Rightarrow$ komm. Gruppe 1

Aufg. 2

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = e^x$ von $(\mathbb{R}, +)$ in $(\mathbb{R}, \cdot)$

1. $f(a \circ_1 b) = f(a) \circ_2 f(b)$

$f(a+b) = e^{a+b} = e^a \cdot e^b = f(a) \cdot f(b)$ ✓ 1

2. $f(e_1) = e_2 \qquad e_1 = 0 \qquad e_2 = 1$ 1

$f(e_1) = f(0) = e^0 = 1 = e_2$ ✓ 1

3. $f(a_1^{-1}) = f(a)_2^{-1}$

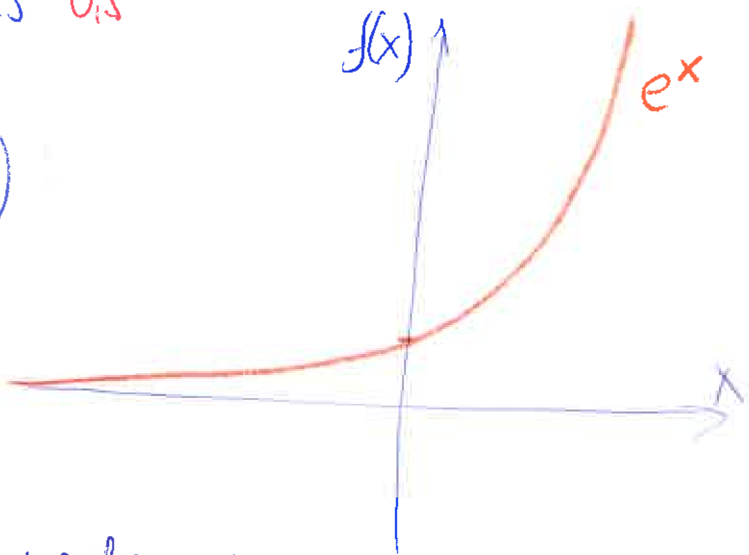
inverse Element von a in $(\mathbb{R}, +)$: $-a$

" " " " in $(\mathbb{R}, \cdot)$: $\frac{1}{a} = a^{-1}$ 1

$f(a_1^{-1}) = f(-a) = e^{-a} = f(a)_2^{-1}$ ✓ 1

$\Rightarrow$ Gruppenhomomorphismus 0,5

4. Bijektiv 2



a) surjektiv (rechtstotal)
nein, da $\mathbb{R}^-$ nicht als Funktionswert erreicht wird

b) injektiv (linkseindeutig)
ja, $f(x) = e^x$ ist streng monoton wachsend

$\Rightarrow$ Gruppenhomomorphismus, kein Gruppenisomorphismus 0,5

Aufg. 3

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

es muss gelten: $\vec{v} = t \cdot \vec{w}$

hier: $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 1

aus oberste Zeile:

$6 = t \cdot (-4)$ $t = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$ 1

$\Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $y = 0$, $z = \frac{2}{3}$ 1 3

Aufg. 4 Skalarprodukt = 0

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix} = 6a + 6a \overset{!}{=} 0$ 1 $\Rightarrow a = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -2 \end{pmatrix} = 2b - 10 \overset{!}{=} 0$ 1 $\Rightarrow b = 5$

1

3

Afg. 5

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

setze Parameter:

$x_3 = s$

$x_4 = 1 - s$

$x_5 = t$

$x_2 = -3x_3 - x_5 = -3s - t$

je 0,5

$x_1 = 1 - 2x_2 + x_3 - x_4$

$= 1 - 2(-3s - t) + s - (1 - s)$

$= 1 + 6s + 2t + s - 1 + s = 8s + 2t$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

0,5

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s^* \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufg. 6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & s^2 & -1 \\ 3 & 7 & s-1 & t \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \vert 2\cdot \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ \vert 3\cdot \mathrm{I} - \mathrm{III} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 4-s^2 & 11 \\ 0 & -4 & 7-s & 15-t \end{array}\right) \quad \vert 2\cdot \mathrm{II} - \mathrm{III} \quad 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 4-s^2 & 11 \\ 0 & 0 & 1-2s^2+s & 7+t \end{array}\right)$$

Achtung: $(1-2s^2+s)x_3 = 7+t$

I. $-2s^2+s+1=0$

$$s_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \frac{-1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \quad 1$$

II. $8+t=0 \qquad t=-7 \quad 1$

a) eine Lösung $s \neq 1 \wedge s \neq -\frac{1}{2}$ 1

b) keine Lösung $(s=1 \vee s=-\frac{1}{2}) \wedge t \neq -7$ 1

c) ∞ viele Lösungen $(s=1 \vee s=-\frac{1}{2}) \wedge t=-7$ 1