Lösung: Multiplikation: $f(x) = c \cdot x$ ($c \in \mathbb{R}$), $K := \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|} = \frac{|c| \cdot |x|}{|cx|} = 1$, daraus folgt gute Konditionierung. Analog für Division.

Kapitel 3

Augabe 3.2 [1]:

- Bestimmen Sie wie im obigen Beispiel die beiden anderen Nullstellen von $p(x) = x^3 - x + 0.3$ auf eine Nachkommastellen genau.

  Ausgehend von $[a_0, b_0] = [-2, -1]$ findet man:
  $[a_1, b_1] = [-1.5, -1]$, $[a_2, b_2] = [-1.25, -1]$, $[a_3, b_3] = [-1.25, -1.125]$, $[a_4, b_4] = [-1.1875, -1.125]$. Mit $[a_0, b_0] = [0.5, 1]$ erhält man:
  $[a_1, b_1] = [0.75, 1]$, $[a_2, b_2] = [0.75, 0.875]$, $[a_3, b_3] = [0.75, 0.8125]$, $[a_4, b_4] = [0.78125, 0.8125]$, $[a_5, b_5] = [0.78125, 0.796875]$.

- Bestimmen Sie mit dem Bisektionsverfahren die Lösung von $f(x) = x^2 - 2 = 0$ auf einem geeigneten Startintervall auf vier Nackommastellen genau.

  Lösung: Ausgehend von $[a_0, b_0] = [1, 1.5]$ iterieren wir solange, bis wir die Intervalgrenzen $[a_{13}, b_{13}] = [1.41418, 1.41425]$ erhalten haben. Da die Nullstelle zwischen den beiden Werten liegen muss, haben wir die Nullstelle auf vier Stellen genau bestimmt, nämlich $1.4142 \approx \sqrt{2}$.

a	b	(a+b)/2	f[(a+b)/2]
1.00000	1.50000	1.25000	-0.43750
1.25000	1.50000	1.37500	-0.10938
1.37500	1.50000	1.43750	0.06641
1.37500	1.43750	1.40625	-0.02246
1.40625	1.43750	1.42188	0.02173
1.40625	1.42188	1.41406	-0.00043
1.41406	1.42188	1.41797	0.01064
1.41406	1.41797	1.41602	0.00510
1.41406	1.41602	1.41504	0.00234
1.41406	1.41504	1.41455	0.00095
1.41406	1.41455	1.41431	0.00026
1.41406	1.41431	1.41418	-0.00008
1.41418	1.41431	1.41425	0.00009
1.41418	**1.41425**		

- Optional: Übersetzen Sie den obigen Satz zum Bisektionsverfahren in ein MATLAB Programm.

Aufgabe 3.3 [1]:

- Überprüfen Sie anhand des obigen Satzes, welche der drei Fixpunkte $\overline{x}_1 = -1.125$, $\overline{x}_2 = 0.3389$, $\overline{x}_3 = 0.7864$ abstossend oder anziehend sind.

Lösung: $F(x) = x^3 + 0.3$, also $F'(x) = 3\,x^2$. Damit ist wie erwartet $|F'(\bar{x}_2)| < 1$, also $\bar{x}_2$ anziehend. Dagegen ist $|F'(\bar{x}_1)| > 1$ und $|F'(\bar{x}_3)| > 1$, also sind $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_3$ abstoßend. ■

- Bestimmen Sie mit einer Fixpunktiteration die Lösung(en) von $x = \cos(x)$.

  Lösung: Wir haben die Iterationsvorschrift $x_{n+1} = \cos(x_n)$. Mit dem (frei wählbaren) Startpunkt $x_0 = 0$ erhalten wir die folgende Iteration, welche gegen $= 0.74$ konvergiert.

n	x_n
0	0.00
1	1.00
2	0.54
3	0.86
4	0.65
5	0.79
6	0.70
7	0.76
8	0.72
9	0.75
10	0.73
11	0.74
12	0.74

- Prüfen Sie, ob der Fixpunkt $\overline{x}_3$=0.7864 für die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n) = \sqrt[3]{x_n - 0.3}$ anziehend oder abstossend ist.

  $F(x) = \sqrt[3]{x - 0.3} \Longrightarrow F'(x) = \dfrac{1}{3\,\sqrt[3]{(x-0.3)^2}}$. Damit sieht man, dass $|F'(\bar{x}_3)| < 1$ gilt, also $\bar{x}_3$ anziehender Fixpunkt ist.

Aufgabe 3.4 [1]:

- Schätzen sie jetzt für das Beispiel 2.3 mit der a-priori Abschätzung ab, wie viele Iterationen ausreichen sollten, um ausgehend von $x_0 = 0$ einen absoluten Fehler von max. 10^{-4}zu erhalten. Wenden Sie dann die a-posteriori Abschätzung an, um den absoluten Fehler zu erhalten.

  Lösung: In Beispiel 2.3 hatten wir gesehen, dass $\alpha = 0.75$.

Die a-priori-Abschätzung lautet in diesem Fall

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| = \frac{0.75^n}{1-0.75}0.3 = 1.2 \cdot 0.75^n \overset{!}{\leq} 10^{-4} \iff n \leq 32.6\ldots$$

Demnach sind 33 Iterationen ausreichend, um die geforderte Genauigkeit zu erzielen.
Die a-posteriori-Abschätzung für $n = 9$ lautet

$$|x_9 - \bar{x}| \leq \frac{0.75}{1-0.75}|x_9 - x_8| = 3\,|x_9 - x_8| \leq 3.8 \cdot 10^{-5}$$

Man erkennt, dass nicht erst bei x_{33} die geforderte Genauigkeit erreicht ist, sondern schon wesentlich früher, nämlich bei x_9. Die a-priori-Abschätzung ist stets pessimistischer als die a-posteriori-Abschätzung. ∎

- Finden Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes den Fixpunkt $\overline{x}_2$ für die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n) = \sqrt[3]{x_n - 0.3}$ und den Startwert $x_0 = 0.7$.

n	x_n
0	0.700
1	0.737
2	0.759
3	0.771
4	0.778
5	0.782
6	0.784
7	0.785
8	0.786
9	0.786
10	0.786

- Welche der beiden Fixpunktiterationen $x_{n+1} = F(x_n) = x_n^3 + 0.3,\ x_0 = 0$ und $x_{n+1} = F(x_n) = \sqrt[3]{x_n - 0.3},\ x_0 = 0.7$ wird nach Ihrer Erwartung schneller konvergieren?

  Lösung: Wir hatten für die erste Fixpunktiteration den anziehenden Fixpunkt $\overline{x}_2 = 0.3389$ und für die zweite Fixpunktiteration den anziehenden Fixpunkt $\overline{x}$=0.7864

  Für die Iteration $x_{n+1} = x_n^3 + 0.3 =: F_1(x_n)$ gilt $|F_1'(\bar{x}_2)| = 0.345$ und für $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n - 0.3} =: F_2(x_n)$ gilt $|F_2'(\bar{x}_3)| = 0.539$. Wir erwarten daher in der Nähe von $\bar{x}_2$ einen kleineren Kontraktionsfaktor α für die Iteration mit F_1 und daher schnellere Konvergenz. Dies bestätigt sich

Aufgabe 3.5 [1]:

1. Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2 = 0$ näherungsweise mit dem Newton-Verfahren und dem Startwert $x_0 = 2$. Vergleichen Sie ihren Wert nach $n + 1 = 4$ Iterationsschritten mit dem exakten Wert von $\sqrt{2}$. Auf wievielen Nachkommastellen stimmt die Iterationslösung überein?

   Lösung: Die Iteration lautet

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2\,x_n} = \frac{1}{2}\,x_n + \frac{1}{x_n}\,.$$

   Gestartet mit $x_0 = 2$ erhalten wir die Näherungen $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.4167$, $x_3 = 1.41421569$, $x_4 = 1.414213562$, d. h., in 4 Schritten haben wir die Nullstelle schon bis auf 10 Stellen genau berechnet. Wie genau man an der Nullstelle dran ist, weiß man natürlich nur, wenn man sie wie in diesem Fall schon kennt (und dann kann man sich natürlich jegliche Iteration sparen).

2. Bestimmen Sie das Iterationsverfahren für $f(x) = x^2 - a = 0$ als Berechnungsmöglichkeit für $\sqrt{a}$ und vergleichen Sie das Resultat mit dem in Kap. 3.1 vorgestellten Heron-Verfahren.

   Mit $f'(x) = 2x$ erhalten wir

   $$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \\ &= \frac{2x_n^2 - x_n^2 + a}{2x_n} \\ &= \frac{x_n - \frac{a}{x_n}}{2} \end{aligned}$$

   und damit das vorgestellte Heron-Verfahren.

Aufgaben 3.6 [1]: .

2.5 Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $2\sin x = x$ bis auf einen nachgewiesenen absoluten Fehler von max. 10^{-3}.

2.6 Das Bauer-Ziege-Wiese-Problem: Ein Bauer besitzt eine kreisrunde Wiese vom Radius R. Am Rand dieser Wiese bindet er eine Ziege an mit einer Leine der Länge r, und zwar so, dass die Ziege genau die Hälfte der Wiese abgrasen kann (s. Bild 2.4). Wie groß ist r?

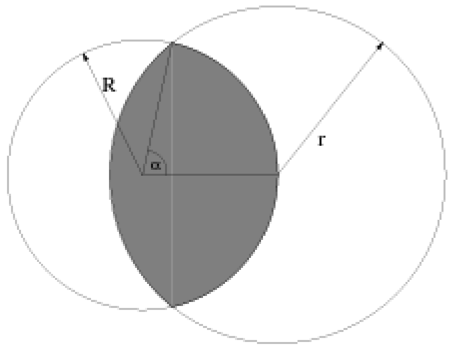

Bild 2.5

Mit dem Kosinussatz erhält man $r = R\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$. Das Problem führt auf folgende Gleichung für den Winkel α (im Bogenmaß):

$$\frac{\pi}{2\,\cos\alpha} + \alpha - \pi - \tan\alpha = 0.$$

Offensichtlich kann diese Gleichung nicht durch geschicktes Umformen nach α aufgelöst werden. Die Hilfe numerischer Methoden ist daher nötig. Bestimmen Sie ein Intervall, in dem sich die gesuchte Lösung befindet und bestimmen Sie die Lösung mit einem Verfahren Ihrer Wahl bis auf einen gesicherten absoluten Fehler von 0.0001.

2.7 Wenden Sie das Newton-Verfahren, das vereinfachte Newton-Verfahren und das Sekantenverfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$ an.

Lösungen:

2.5 Offensichtlich ist $x = 0$ eine Lösung. $f(x) := 2\sin x - x$ ist eine ungerade Funktion – wenn wir eine Nullstelle $\bar{x}$ gefunden haben, so ist $-\bar{x}$ eine weitere. Wir suchen daher nur positive Nullstellen. Da stets $|\sin x| \leq 1$ gilt, brauchen wir Nullstellen nur in $(0, 2]$ zu suchen. Aufgrund von Monotonieüberlegungen findet man, dass dort genau eine Nullstelle liegt, nämlich $\bar{x} \approx 1.9$. Mit dem Newton-Verfahren finden wir, ausgehend von $x_0 = 2$, als gute Näherung $x_3 = \tilde{x} = 1.895494267$. Aus $f(1.895) \cdot f(1.896) < 0$ folgt $\bar{x} \in [1.895, 1.896]$, womit klar ist, dass $|\tilde{x} - \bar{x}| \leq 10^{-3}$. Für die Näherung $-\tilde{x}$ für die Nullstelle $-\bar{x}$ gilt die gleiche Fehlerabschätzung.

2.6 Zunächst ist aus Bild 2.5 anschaulich klar, dass es nur ein solches α geben kann. Es ist $f(1) \leq -0.791 < 0$ und $f(1.5) \geq 6.4631 > 0$, also liegt die gesuchte Nullstelle in $[1, 1.5]$. Startet man das Newton-Verfahren mit $x_0 = 1$, so erhält man $x_5 = 1.235897098\ldots$, $x_6 = 1.235896924\ldots$ und bei diesen Stellen ist bei den weiteren Iterationen keine Änderung erkennbar. Wählen wir als Näherung $\tilde{x} = 1.2359$, so ist wegen $f(\tilde{x} + 0.0001) = f(1.236) > 0$ und $f(\tilde{x} - 0.0001) = f(1.2358) < 0$ die gesuchte Nullstelle in $[1.2358, 1.2359]$ und damit gilt $|\tilde{x} - \alpha| \leq 0.0001$ wie gefordert.

2.7 Im Folgenden sind x_i bzw. y_i bzw. z_i die vom Newton- bzw. vereinfachten Newton- bzw. Sekantenverfahren berechneten Werte.

i	x_i	y_i	z_i
-1	–	–	2
0	1	1	1
1	1.5	1.5	1.333333333
2	1.416666667	1.375	1.4
3	1.414215686	1.4296875	1.414634146
4	1.414213562	1.407684326	1.414211438
5	1.414213562	1.416896745	1.414213562
6	1.414213562	1.413098552	1.414213562

Man erkennt die unterschiedliche Konvergenzgeschwindigkeit: Das Newton-Verfahren liefert den Wert auf 10 Stellen genau nach 4 Schritten, das Sekantenverfahren nach 5 Schritten. Das vereinfachte Newton-Verfahren würde diesen Wert erst nach 22 Schritten liefern. Das Sekantenverfahren bricht übrigens bei „Stillstand" der berechneten Näherung mit Fehlermeldung ab, weil im Falle $x_n = x_{n-1}$ im nächsten Schritt eine Division durch 0 ansteht.

Aufgabe 3.7:

- Implementieren Sie das Sekanten-Verfahren in MATLAB. Wo würden Sie