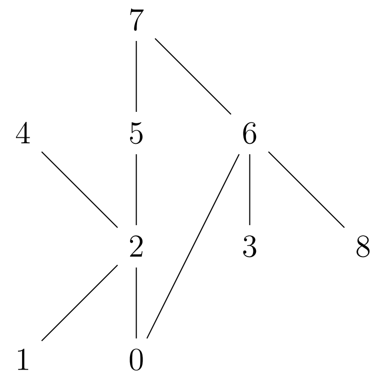
Grundlagen und diskrete Mathematik
Übung 5

Abgabe: Kalenderwoche 48

Aufgabe 1

Gegeben sei das Hasse-Diagramm der Relation R wie folgt:



(a) Geben Sie alle minimalen und alle maximalen Elemente von der Menge $\{2,5,6,3,8\}$ an.

(b) Geben Sie drei paarweise unvergleichbare Elemente an.

(c) Schreiben Sie die Menge $R \cap \{(x,y) \mid 0 < x < y < 6\}$ in aufzählender Schreibweise auf.

Lösung:

(a)
- Minimale Elemente: $2,3,8$
- Maximale Elemente: $5,6$

(b) $4,5,6$ oder $2,3,8$ oder $1,0,3$ usw.

(c) $\{(1,2),(1,5),(1,4),(2,4),(2,5)\}$

Aufgabe 2

Geben Sie eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Tiere an, so dass die Äquivalenzklassen genau den "Tierarten" entsprechen.

Lösung:

$xRy :\Leftrightarrow x$ und y sind Tiere der gleichen (Tier-) Art.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Halbordnung $\preceq$ auf der Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch:

$$f \preceq g \;\Leftrightarrow\; \forall x \in \mathbb{N}\,(f(x) \leq g(x)).$$

(a) Geben Sie zwei Funktionen f und g mit $f \preceq g$ an.

(b) Geben Sie paarweise verschiedene Funktionen $f_0, f_1, \ldots$ an, die eine echt aufsteigende Folge in $\preceq$ bilden.

$$f_0 \preceq f_1 \preceq \cdots$$

(c) Geben Sie paarweise verschiedene Funktionen $g_0, g_1, \ldots$ an, die eine echt absteigende Folge in $\preceq$ bilden.

$$g_0 \succeq g_1 \succeq \cdots$$

Lösung:

(a) Mögliche Lösung: $f(x) = 0$ und $g(x) = 1$

(b) Mögliche Lösung: $f_n(x) = n$

(c) Mögliche Lösung: $g_n(x) = \max(0, x - n)$

Aufgabe 4

(a) Ist jede endliche totale Ordnung eine Wohlordnung? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist die "normale" $\leq$-Relation eine Wohlordnung auf der Menge $\mathbb{Q}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Ja, weil jede endliche nichtleere Teilmenge einer totalen Ordnung ein minimales Element hat. Sei $\preceq$ eine beliebige totale Ordnung auf einer endlichen nichtleeren Menge X, wir zeigen (mit Induktion nach $|X|$), dass X ein $\preceq$-minimales Element besitzt.

- Induktionsverankerung ($|X| = 1$): Da in diesem Fall die Menge X nur aus einem Element besteht, ist dieses Element offensichtlich auch $\preceq$-minimal in X.
- Induktionsschritt: Wir können nun davon ausgehen, dass jede Menge mit n Elementen ein $\prec$-minimales Element besitzt (I.A.) und müssen zeigen, dass eine Menge X mit $|X| = n + 1$ ebenfalls ein $\preceq$-minimales Element besitzen muss. Wir wählen ein beliebiges Element $a \in X$. Aufgrund der Induktionsannahme wissen wir, dass die Menge $X \setminus \{a\}$ ein $\preceq$-minimales Element hat, b sei dieses Element. Da die Ordnung $\preceq$ total ist, wissen wir, dass entweder $a \preceq b$ oder $b \preceq a$ gilt. Im ersten Fall ist a ein $\preceq$-minimales Element von X und im zweiten Fall ist b ein $\preceq$-minimales Element von X. In jedem Fall hat also X ein $\preceq$-minimales Element.

(b) Die $\leq$ Relation ist keine Wohlordnung auf $\mathbb{Q}$, da z.B. die Menge $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ kein $\leq$-minimales Element besitzt.

Aufgabe 5

Beweisen Sie mit Induktion, dass folgende Aussagen für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gelten:

(a)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b)
$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

(c)
$$n^2 + n \text{ ist gerade}$$

(d)
$$a \in \mathbb{N}_{>1} \Rightarrow a^n - 1 \text{ ist durch } a-1 \text{ teilbar}$$

Lösung:

(a) Siehe Skript.

(b)
- Induktionsverankerung ($n = 0$):

$$\sum_{i=1}^{0}(2i-1) = 0 = 0 \cdot 0$$

- Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= \Big(\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\Big) + 2(n+1) - 1 \\ &\overset{I.A.}{=} n^2 + 2n + 2 - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2\end{aligned}$$

(c)
- Induktionsverankerung ($n = 0$): Dies gilt, da $0 = 0^2$ eine gerade Zahl ist.
- Induktionsschritt ($n \to n+1$): Aus der Induktionsannahme folgt, dass es eine ganze Zahl z mit $2z = n^2 + n$ gibt. Wir müssen zeigen, dass $(n+1)^2 + (n+1)$ gerade ist. Wegen

$$\begin{aligned}(n+1)^2 + (n+1) &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 \\ &= (n^2 + n) + 2n + 2 \\ &\overset{I.A.}{=} 2z + 2(n+1) = \underbrace{2(z+n+1)}_{\text{Vielfaches von } 2},\end{aligned}$$

ist dies offensichtlich der Fall.

(d) Es sei $a > 1$ eine natürliche Zahl. Wir zeigen per Induktion nach n, dass $a^n - 1$ ein Vielfaches von $a-1$ ist.

- Induktionsverankerung ($n = 0$): In diesem Fall gilt $a^n - 1 = 0$, daher ist $a^n - 1$ ein Vielfaches von $a-1$. Man beachte dazu $0 \cdot (a-1) = a^n - 1$.
- Induktionsschritt ($n \to n+1$): Aus der Induktionsannahme folgt, dass es eine ganze Zahl x mit $x(a-1) = a^n - 1$ gibt. Die Behauptung ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}a^{n+1} - 1 &= aa^n - 1 \\ &= (aa^n - a) + (a-1) \\ &\overset{I.A.}{=} x(a-1) + (a-1) = \underbrace{(x+1)(a-1)}_{\text{Vielfaches von } (a-1)}.\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Die Fibonacci Folge $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist rekursiv wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1 \\ F(n+2) &= F(n) + F(n+1). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass aufeinander folgende Glieder der Fibonacci Folge stets teilerfremd sind.

Lösung: Wir zeigen mit Induktion nach n, dass für alle natürlichen Zahlen a und n,

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ teilt } F(n) \\ a \text{ teilt } F(n+1) \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1$$

gilt.

- Induktionsverankerung ($n = 0$): In diesem Fall ist a ein Teiler von $F(0+1) = F(1) = 1$, somit ist $a = 1$.
- Induktionsschritt ($n \to n+1$): Wenn a ein Teiler von sowohl $F(n+1)$ wie auch $F(n+2)$ ist, dann können wir davon ausgehen, dass es natürliche Zahlen x, y gibt, mit $ax = F(n)$ und $ay = F(n+1)$. Es folgt nun aus

  $$F(n) = F(n+2) - F(n+1) = ax - ay = a(x-y),$$

  dass a ein Teiler von sowohl $F(n)$ als auch $F(n+1)$ ist. Aus der Induktionsannahme folgt daher, wie gewünscht, dass $a = 1$ sein muss.