ZHAW Zurich University of Applied Sciences

Institute for Applied Mathematics and Physics, School of Engineering

Lösungen PhIT Übung 1

Prof. Dr. R.M. Füchslin

Diese Übungen dienen dazu, Sie mit einigen Konzepten und Rechenmethoden der Physik vertraut zu machen. Sie machen diese Übungen für sich. Das bedeutet:

- Sie müssen keine Übungen abgeben.
- Sie können gerne in Gruppen arbeiten. Wir empfehlen das sogar.
- Wir machen keine Korrekturen, stellen aber Musterlösungen zur Verfügung. Der/die ÜbungsbetreuerIn ist Ihr Coach. Diese(r) wird Ihnen nach bestem Wissen Ihre Fragen beantworten. Die Fragen stellen müssen Sie aber selber.
- Wir präsentieren Ihnen Aufgaben und (manchmal) Zusatzaufgaben. Uns ist klar, dass Sie diese nicht alle zusammen lösen können:
    - Die Aufgaben sollten Sie zumindest verstanden haben. Lösen Sie einige der Aufgaben selber (und vollständig) und studieren Sie die Lösung der anderen. Der Inhalt der Aufgaben gehört zum Prüfungsstoff.
    - Zusatzaufgaben dienen lediglich zur weiteren Übung. Wir setzen nicht voraus, dass Sie diese gelöst haben.

Aufgaben

Aufgabe 1: Kontostand

Ein(e) StudentIn verfügt über ein regelmässiges Einkommen E von 2500 Franken pro Monat. Er oder sie haben vor Studienbeginn fleissig gespart und ein Vermögen von Fr. 10‘000 auf dem Konto (Kontostand $K(t=0)=10000\,\mathrm{SFr}$) . Studierende sind auch nur Menschen; das bedeutet, dass sie nicht immer ganz vernünftig handeln. Im betrachteten Fall äussert sich dies darin, dass der/die StudentIn die Ausgaben nicht am Einkommen sondern am Kontostand orientiert. Mathematisch ausgedrückt belaufen sich die monatlichen Ausgaben auf eine Summe, die gleich dem Kontostand multipliziert mit einer Konstanten α ist: Ausgaben A pro Monat zum Zeitpunkt t : $= \alpha K(t)$.

a) Formulieren Sie die Veränderungsraten Gleichung für den Kontostand $K(t)$.

b) Simulieren Sie die Entwicklung des Kontostandes $K(t)$ mit BM für $\alpha = 1.0, 0.5, 2.0$. Welche Höhe erreicht der Kontostand nach langer Zeit?
c) In BM müssen Sie keine Einheiten angeben. Nichtsdestotrotz: Welche Einheit hat die Konstante α ?
d) Ist das Vorgehen der/des Studenten/Studentin wirklich so unvernünftig?
e) Können Sie den Kontostand, der nach langer Zeit erreicht wird, auch ohne Simulation berechnen? Aus den Simulationen wissen Sie, dass das Ausgabeverhalten nach langer Zeit zu einem konstanten (stationören) Kontostand führt. Stationarität bedeutet: Der Kontostand verändert sich nicht mehr. Überlegen Sie, was das für die Veränderungsrate bedeutet.

Aufgabe 2 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Nehmen Sie an, Sie kennen die Trajektorie $\vec{r}(t)$ eines Punktes:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 t^2 + k_3 t^5 \\ k_4 + k_5 t^3 \\ k_6 \end{pmatrix} \tag{1}$$

- Welche Einheiten haben die Parameter k_i ?
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Punktes.
- Berechnen Sie die Beschleunigung des Punktes.
- Wie gross ist die Schnelligkeit des Punktes zum Zeitpunkt $t = 2s$ als Funktion der Parameter k_i ?

Aufgabe 3: Beschleunigung bei einer Kreisbewegung

Sie befinden sich auf einem Karussell.

- Nehmen Sie an, Sie sitzen auf einem Karussell, in einer Distanz $r = 7m$ von der Mitte entfernt. Das Karussell dreht sich mit drei Umdrehungen pro Minute. Werden Sie beschleunigt? Falls ja: Mit welcher Datenstruktur können Sie Ihre Beschleunigung beschreiben und welche aktuellen Werte haben die Elemente dieser Datenstruktur? (Achtung: Drehbewegungen werden nicht in Winkelgrad pro Sekunde sondern in Radian pro Sekunde angeben. In Radian entspricht ein voller Kreis einem Winkel von 2π.
- Die Umdrehungszahl wird verdoppelt. Nach dieser Erhöhung hat das ganze System wieder eine stabile, eben doppelt so grosse Umdrehungsgeschwindigkeit. Wie gross ist der Betrag Ihrer Beschleunigung, verglichen mit dem Startzustand?

Aufgabe 2

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 t^2 + K_3 t^5 \\ K_4 + K_5 t^3 \\ K_6 \end{pmatrix}$$

a) m/s^2

b)

$$\begin{tikzcd} \underset{\text{Beschleunigung}}{a(t)} \arrow[r, bend left, "\text{Int}"] & \underset{\text{Geschwindigkeit}}{v(t)} \arrow[l, bend left, "\text{Abl.}"] \arrow[r, bend left, "\text{Int}"] & \underset{\text{Trajektorie}}{s(t)} \arrow[l, bend left, "\text{Abl.}"] \end{tikzcd}$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} 2K_2 t + 5K_3 t^4 \\ 3K_5 t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $$a(t) = \begin{pmatrix} 2K_2 + 20 K_3 t \\ 6K_5 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Schnelligkeit = Betrag Geschwindigkeit

$$v(2) = \begin{pmatrix} 2K_2 \cdot 2 + 5K_3 \cdot 2^4 \\ 3 \cdot K_5 \cdot 2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4K_2 + 80K_3 \\ 12K_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$r = 7m$

$3x$ / Minute $\rightarrow$ $T = \frac{2\pi}{20} = \frac{1}{10}\pi$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Abl.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 7 \cdot \cos(\frac{1}{10}\pi) \\ 7 \cdot \sin(\frac{1}{10}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.657 \\ 2.163 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 Differentialgleichungen mit Berkeley Madonna

Lösen Sie folgendes System von gekoppelten Differentialgleichungen mit Berkeley - Madonna:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x\end{aligned} \tag{2}$$

mit $x(t=0)=x_0=1,\ y(t=0)=y_0=0.$

Aufgabe 5 Ort-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsdiagramme

Im Folgenden arbeiten wir in einer Dimension und lassen deshalb Vektorpfeile weg. Es gilt: $s(t)$ bezeichnet den Ort als Funktion der Zeit, $v(t), a(t)$ die zugehörige Geschwindigkeit respektive Beschleunigung.

Zuerst betrachten wir eine konstante Beschleunigung, gegeben durch Fig. 1.

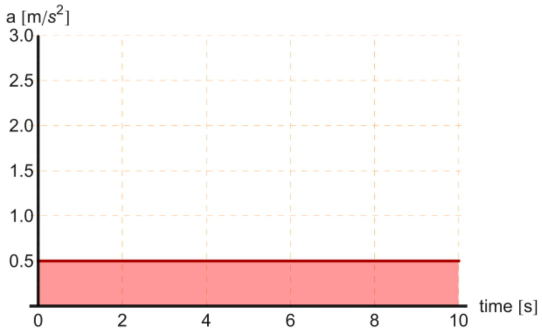

Fig. 1

Nehmen Sie an, Ihre Anfangsposition sei $s(0)=0$ und Ihre Anfangsgeschwindigkeit $v(0)=0$. Zeichnen Sie die Graphen für $v(t)$ und $s(t)$.

Machen Sie dann dasselbe unter der Annahme $s(0)=2m$ und Ihre Anfangsgeschwindigkeit $v(0)=1m/s$.

Zum Schluss: Fertigen Sie $v(t)$ und $s(t)$ Plots für die Beschleunigung gegeben in Fig. 2.

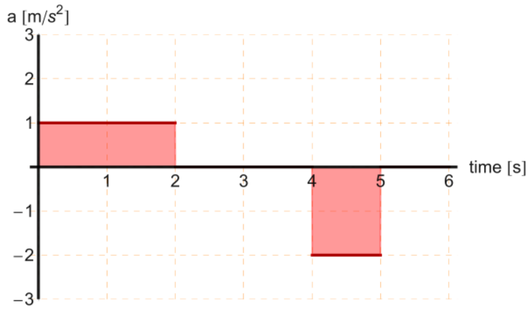

Fig. 2

Aufgabe 6 Schätzaufgabe: Fussball

Kommentar: Abschätzungen sind eines der wichtigsten Hilfsmittel für IngenieurInnen. Der Witz einer Schätzaufgabe ist nicht so sehr der gefundene numerische Zahlenwert sondern das Herausarbeiten der Grössen, von welchen die Schätzung abhängt. Eine grobe Schätzung eines realen Werts R gibt Ihnen die Grössenordnung einer Zahl (das heisst: wenn Sie eine Grösse auf einen Wert S schätzen, dann sollte S innerhalb von $0.1R < S < 10R$ liegen. Als gute Schätzung gilt: $0.5R < S < 2R$. Solche Schätzaufgaben sind recht beliebt bei Einstellungstests.

Frage: Wieviele Kilometer legt ein Fussballspieler während eines Spiels zurück? Begründen Sie Ihre Schätzung im Detail!

Aufgabe 7

(Aus Tipler und Mosca) Ein Schnellkäfer kann sich mit der Beschleunigung $a = 400g = 3924 ms^{-2}$ in die Luft katapultieren. Das ist eine Größenordnung mehr, als ein Mensch aushalten kann. Der Käfer springt, indem er seine $d = 6mm$ langen Beine „ausklappt“. Wie hoch kann er springen? Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand.

Zusatzaufgabe 8 Fragen und Antworten

Behauptung	Richtig	Falsch
Die Geschwindigkeit eines Punktes ist parallel zur Tangente an die Trajektorie des Punktes.		
Die Beschleunigung eines Punktes ist immer parallel zur Tangente an die Trajektorie des Punktes.		
Gegeben eine gleichförmige Kreisbewegung. Eine Verdoppelung der Winkelgeschwindigkeit führt zu einer Verdoppelung der auf den Punkt wirkenden Beschleunigung.		
Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung zeigt die Beschleunigung des Punktes zum Zentrum des Kreises.		

Zusatzaufgabe 9: Fahren auf der Achterbahn

Betrachten Sie Fig. 3. Sie sehen einen Ausschnitt einer Achterbahn. Die Steigung am Anfang (bei x = 0m) und am Ende (bei x = 36 m) ist null, d.h. die Bahn verläuft am Anfang und am Ende horizontal. Versuchen Sie, rein qualitativ die Schnelligkeit sowie die x-Komponente und die z-Komponente der Geschwindigkeit anzugeben. "Qualitativ" bedeutet: Geben Sie Extrema und eventuelle Nullpunkte richtig an. Die Zahlwerte sind bei dieser Aufgabe nicht wichtig, versuchen Sie aber, Grössenrelationen ("beim Punkt x_1 ist die Schnelligkeit grösser/kleiner als bei x_2) korrekt wiederzugeben. Wir nehmen an, die Achterbahn sei gut geölt, wir vernachlässigen jede Form von Reibung. Am Punkt x = 0m hat die Gondel eine Schnelligkeit von 5 m/s und fährt in Richtung der positiven x - Koordinate.

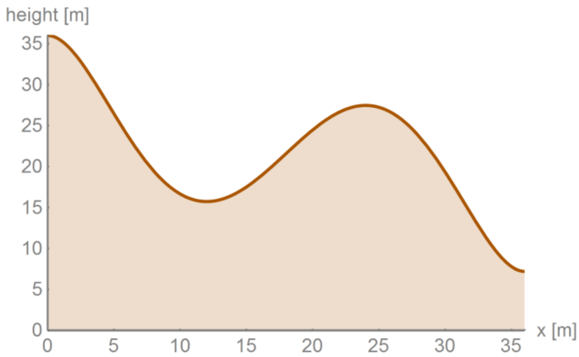

Fig. 3 Ausschnitt aus einer Achterbahn.

Zusatzaufgabe 10: Tank mit Zu- und Abfluss

Sie haben einen Tank mit Zu- und Abflüssen. Die Füllrate ist gegeben durch die Funktion flow(t), welche angibt, wieviel Wasser pro Sekunde zu- oder abfliesst. In Fig. 4 sehen Sie eine graphische Darstellung von flow(t).

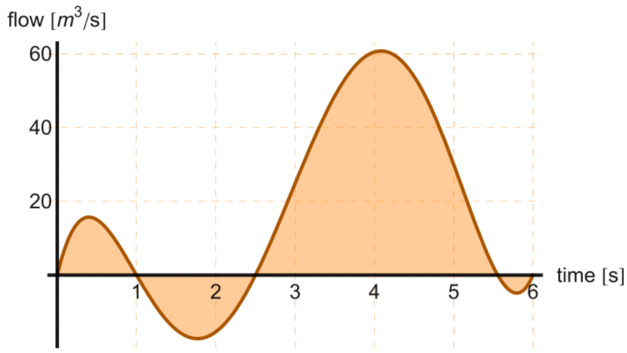

Fig. 4 Wasserfluss in einen Tank

Beantworten Sie folgende Fragen mit einer Begründung, welche auch für jemanden, der die Vorlesung nicht besucht hat, verständlich ist!

a) Wird sich bei $t = 6s$ mehr oder weniger Wasser als bei $t = 0s$ im Tank befinden?
b) Wird sich bei $t = 2.5s$ mehr oder weniger Wasser als bei $t = 0s$ im Tank befinden?
c) Wie gross (ungefähr) ist die Änderung des Wassergehalts im Tank zwischen $t = 2.5s$ und $t = 6s$ im Tank befinden?

Es geht bei dieser Frage weniger um die Antworten und viel mehr um Ihre Erklärungen!

Zusatzaufgabe 11 Darstellung einer geraden Bewegung

Gegeben seien zwei Punkte $\vec{P}_1 = (1,1,2)$ und $\vec{P}_2 = (3,4,5)$. Geben Sie die Trajektorie $\vec{r}(t)$ eines Punktes welcher

a) sich mit der konstanten Schnelligkeit 2 m/s bewegt,
b) und welcher zum Zeitpunkt t = 0 durch $\vec{P}_1$ geht,
c) und sich auf einer Geraden bewegt, die zu einem späteren Zeitpunkt durch $\vec{P}_2$ geht.

Zusatzaufgabe 12: Der schiefe Wurf}

Stellen Sie sich vor, Sie sprängen über eine Klippe der Höhe h = 5m (s. Fig. 5). Tückischerweise hat es unten einen Felsvorsprung von x = 2 m Länge. Mit welcher Geschwindigkeitskomponente v_x müssen Sie horizontal rennen, damit Sie ins Wasser springen? Setzen Sie die Erdbeschleunigung g = 10 ms^{-2}.

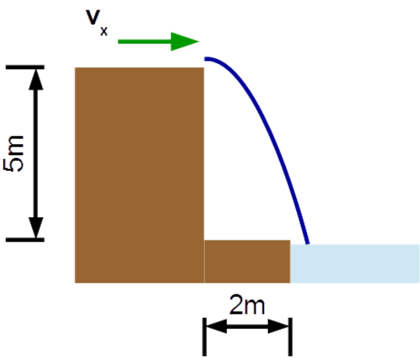

Fig. 5

Zusatzaufgabe 13 (Crazy Challenge)

Versuchen Sie nachzuvollziehen, wie man auf die Veränderungsratengleichungen in den Populationsmodellen im File „Populationsmodelle.pdf“ kommt. Im Idealfall versuchen Sie, diese Populationsmodelle in BM zu programmieren.