Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of Engineering

Name: ....

Vorname: ....

MANIT2 - Abschlussübungen - Lösungen

Klasse:	IT13b ZH
Datum:	20. Mai 2014
Zugelassene Hilfsmittel:	- Basisbuch Analysis - Unterlagen/Skripte von Plesko/Scherrer - Zusammenfassung im Umfang von max. 10 A4-Seiten - Einfacher Taschenrechner (nicht graphikfähig, nicht algebrafähig)
Besonderes	- Keine Mobiles/Smartphones auf dem Tisch! - Schreiben Sie auf die abgegebenen Blätter (notfalls rückseitig) und reissen Sie die Prüfung nicht auseinander!
Zeit	90 Minuten
Total Punkte	wird nicht bewertet

---

1. Bestimmen Sie das unbestimmte Integral mit geeigneter Substitution

$$\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$$

Lösung

Substitution : $u = x^3$ $\quad u' = \frac{du}{dx} = 3x^2$

$$du = 3x^2 dx$$

$$\frac{1}{3} du = x^2 dx$$

$$\frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3} e^u + c$$

Rücksubstitution

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3} e^{x^3} + c}}$$

2. Bestimmen Sie das unbestimmte Integral mittels partieller Integration:

$$\int x^2 \cdot \ln(x)dx$$

Lösung

$$\int \underset{\uparrow}{x^2} \cdot \underset{\downarrow}{\ln(x)}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^2}{3}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{3}\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right) + C$$

3. Bestimmen Sie das unbestimmte Integral mittels Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4}dx$$

Lösung

1) Polynomdivision notwendig:

$$2x^3 - 14x^2 + 14x + 30 \div (x^2 - 4) = 2x - 14 + \frac{22x - 26}{x^2 - 4}$$

$$\begin{array}{l} -(2x^3 \quad\quad - 8x) \\ \hline 0 \quad -14x^2 + 22x \\ -(-14x^2 \quad\quad +56) \\ \hline 0 \quad + 22x - 26 \end{array}$$

2) $$\frac{22x-26}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow 22x - 26 = A(x-2) + B(x+2)$$

x^1: $22 = A + B$

x^0: $-26 = -2A + 2B$

$\triangleright$ $A = 22 - B$

$-26 = -44 + 2B + 2B \quad 4B = 18$

$B = 4.5 \quad A = 17.5$

$$\rightarrow \int (2x - 14)dx + \int \frac{17.5}{x+2}dx + \int \frac{4.5}{x-2}dx = x^2 - 14x + 17.5\ln|x+2| + 4.5\ln|x-2| + C$$

4. Ein frei durchhängendes Seil habe die Form einer sog. Kettenlinie mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Bestimmen Sie die Länge des Seils im Intervall $[-1; 1]$

Bogenlänge: $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$(f'(x))^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2\underbrace{e^x e^{-x}}_{1} + e^{-2x})$ $\qquad 1 - f'(x)^2 = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$

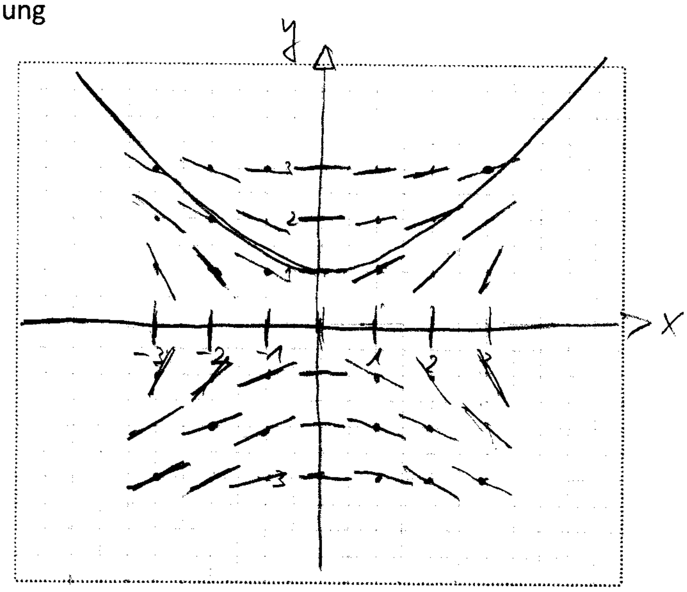
$$= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + e\right) = e - \frac{1}{e} = 2.35$$

5. Zeichnen Sie im untenstehenden Raster ein Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$2yy' = x$$

für ganzzahlige x- und y-Werte in den Intervallen $-3 \leq x \leq 3$ und $-3 \leq y \leq 3$

Lösung



$y' = \frac{1}{2}\,\frac{x}{y}$

$y \backslash x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
-2	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$
-1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
2	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

6. Lösen Sie die Differentialgleichung unter der Bedingung $y(-1) = 1$

$x^2y' + y^2 = 0$

Lösung

$$x^2 y' + y^2 = 0 \longrightarrow x^2 y' = -y^2 \longrightarrow y' = -\frac{y^2}{x^2} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{x^2} \longrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{x^2} \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + C$$

Einsetzen $y(-1) = 1$ $\quad -\frac{1}{1} = \frac{1}{-1} + C \Rightarrow \underline{C = 0}$

$$\underline{\underline{y(x) = -x}}$$

7. Lösen Sie die Differentialgleichung unter der Bedingung $y(1) = 2$

$2xy' - y - x = 0 \longrightarrow y' - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$

Lösung

homogene Gleichung $y' - \frac{1}{2x} y = 0$

$$y_h(x) = k \cdot e^{-\int -\frac{1}{2x} dx} = k e^{\frac{1}{2} \ln(x)} = k \cdot e^{\ln \sqrt{x}} = k \cdot \sqrt{x}$$

partikuläre Lösung

$$y_p(x) = K(x) \sqrt{x} \qquad K'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow K(x) = \sqrt{x}$$

$$y_p(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$$

$$y(x) = k \cdot \sqrt{x} + x$$

$$y(1) = k \cdot 1 + 1 = 2 \Rightarrow k = 1$$

$$y(x) = \sqrt{x} + x$$

8. Bestimmen Sie Konvergenzradius und Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihe.

$$P(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{6} + \frac{4x^4}{24} + \frac{8x^5}{120} + \cdots$$

Lösung

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+2)!} x^{n+2} \qquad r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^n}{(n+2)!}}{\frac{2^{n+1}}{(n+3)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{(n+3)!}{(n+2)!} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2} \cdot (n+3) \right| = \infty \qquad \text{Konvergenzbereich}: -\infty < x < \infty$$

9. Bestimmen Sie die lokalen Extremalstellen der folgenden Funktion:

$$f(x,y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$$

Lösung

$$f_x = -6x + 6y = 0 \quad \rightarrow \quad 6x = 6y$$

$$f_y = 6y - 6y^2 + 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad 6y - 6y^2 + 6y = 12y - 6y^2 = 0$$

$$= 6y(2-y) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \quad \text{oder} \quad y = 2$$

$$x = 0 \qquad y = 2$$

$\Rightarrow$ 2 stationäre Stellen $P_1(0;0)$ und $P_2(2;2)$

P_1: $f_{xx} = -6 \qquad f_{yy} = 6 - 12y = 6 \qquad f_{xy} = 6$

$f_{xx} \cdot f_{yy} = -36 \qquad f_{xy}^2 = 36 \rightarrow$ Sattelpunkt

P_2: $f_{xx} = -6 \qquad f_{yy} = 6 - 12y = -18 \qquad f_{xy} = 6$

$f_{xx} \cdot f_{yy} = 108 \qquad f_{xy}^2 = 36 \longrightarrow$ Extremum

und weil $f_{xx} < 0$: lokales Maximum