geom. Reihe = $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$
$|q| < 1$

Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften
zhaw School of Engineering

Übungen zu Quotientenkriterium

Aufgabe 1
Bestimmen Sie den Wert der Reihen

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n}$ $a_1 = 4$ $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $S_\infty = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n} \cdot (-1)^n$ $a_1 = -2$ $q = -\frac{1}{2}$ $S_\infty = \frac{-2}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{2}{1.5} = -\frac{4}{3}$

c) $1 + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{64}{125} + \cdots$ $a_1 = 1$ $q = \frac{4}{5}$ $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 5$

d) $32 - 16 + 8 - 4 + \cdots$
$a_1 = 32$ $q = -\frac{1}{2}$ $S_\infty = \frac{32}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{64}{3}$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums, ob die Reihen konvergieren:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!\, n!}{(2n)!}$

Aufgabe 3
Bestimmen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums, ob die Reihen konvergieren:

a) $6 + \frac{7}{3} + 1 + \frac{13}{27} + \frac{7}{27} + \cdots$

b) $\frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{24} + \frac{81}{64} + \cdots$

c) $2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \cdots$

d) $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{6}{25} + \frac{2}{3} + \cdots$

Lösung 1

a) Geometrische Reihe mit $a_1 = 4$ und $q = 1/2$: $$s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

b) Geometrische Reihe mit $a_1 = -2$ und $q = -1/2$: $$s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-(-\frac{1}{2})} = -\frac{4}{3}$$

c) Geometrische Reihe mit $a_1 = 1$ und $q = 4/5$: $$s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 5$$

d) Geometrische Reihe mit $a_1 = 32$ und $q = -1/2$: $$s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{32}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{64}{3}$$

Lösung 2

a)
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{2n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+2n+1}{2n^2}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Reihe konvergiert ($R = 6$)

b)
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{2^n}{n^3}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2\cdot 2^n}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n^3}{n^3+3n^2+3n+1}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\right| = 2$$

Reihe konvergiert nicht (ist bestimmt divergent gegen ∞)

c)
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+2)^{n+1}}}{\frac{1}{(n+1)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}}\right| \cong \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^n+\cdots}{n^{n+1}+\cdots}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}+\cdots\right| = 0$$

Reihe konvergiert ($R \cong 1.6284$)

d)
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4^{n+1}(n+1)!\,(n+1)!}{\big(2(n+1)\big)!}}{\frac{4^n n!\,n!}{(2n)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4\cdot 4^n(n+1)n!\,(n+1)n!\,(2n)!}{\big(2(n+1)\big)!\,4^n n!\,n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4(n+1)^2(2n)!}{(2n+2)!}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4(n+1)^2(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{6}{4n}+\frac{1}{2n^2}}\right|$$
$$= 1$$

Keine Aussage möglich; Reihe konvergiert nicht (ist bestimmt divergent gegen ∞)

Lösung 3

a)

$$6+\frac{7}{3}+1+\frac{13}{27}+\frac{7}{27}+\cdots=\frac{6}{1}+\frac{7}{3}+\frac{9}{9}+\frac{13}{27}+\frac{21}{81}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5+2^n}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{5+2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{5+2^n}{3^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5+2^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{5+2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5+2^{n+1}}{3}\cdot\frac{1}{5+2^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{5}{2^n}+2}{3\left(\frac{5}{2^n}+1\right)}\right|=\frac{2}{3}$$

Reihe konvergiert ($R=10.5$)

b)

$$\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{24}+\frac{81}{64}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{3^n}{n\cdot 2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{3^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n}{2(n+1)}\right|=1.5$$

Reihe konvergiert nicht (ist bestimmt divergent gegen ∞)

c)

$$2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{15}+\cdots+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2\cdot 2^n\cdot n!}{(n+1)\cdot n!\cdot 2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{n+1}\right|=0$$

Reihe konvergiert ($R\cong 6.389$)

d)

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{6}{25}+\frac{2}{3}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+3)^2}}{\frac{n!}{(n+2)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{(n+3)^2}\cdot\frac{(n+2)^2}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|n\cdot\frac{n^2+4n+4}{n^2+6n+9}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|n\cdot\frac{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}}\right|=\infty$$

Reihe konvergiert nicht (ist bestimmt divergent gegen ∞)