Grundlagen und diskrete Mathematik
Übung 1

Abgabe: Kalenderwoche 39

Bemerkung: Das Zeichen $\mathbb{N}$ steht für die Menge aller natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ Alle Quantoren verstehen wir hier als Quantoren über der Menge $\mathbb{N}$.

Aufgabe 1

Es sei $\mathsf{E}(n)$ irgend eine Eigenschaft welche auf natürliche Zahlen zutreffen kann oder nicht. Formalisieren Sie folgende Aussagen:

(a) "Es gibt eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft E"

(b) "Alle natürlichen Zahlen habe die Eigenschaft E"

(c) "Genau eine natürliche Zahl hat die Eigenschaft E"

(d) "Mindestens drei natürliche Zahlen haben die Eigenschaft E"

(e) "Es gibt höchstens zwei natürliche Zahlen mit der Eigenschaft E"

Lösung: Unter der eingangs erwähnten Konvention, dass alle Quantoren hier über $\mathbb{N}$ laufen, sind mögliche Formalisierungen:

(a) $\exists x\, (\mathsf{E}(x))$

(b) $\forall x\, (\mathsf{E}(x))$

(c) $\underbrace{\exists x\, (\mathsf{E}(x))}_{\text{mindestens ein..}} \wedge \underbrace{\forall x, y\, (\mathsf{E}(x) \wedge \mathsf{E}(y) \Rightarrow x = y)}_{\text{und nicht zwei..}}$

(d) $\exists x, y, z\, (\mathsf{E}(x) \wedge \mathsf{E}(y) \wedge \mathsf{E}(z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$

(e) $\neg\big(\underbrace{\exists x, y, z\, (\mathsf{E}(x) \wedge \mathsf{E}(y) \wedge \mathsf{E}(z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)}_{\text{mindestens drei..}}\big)$

Aufgabe 2

Es sind folgende Prädikate gegeben:

- $\mathsf{PF}(x, y) :=$ "x ist ein Primfaktor von y"
- $\mathsf{Prim}(x) :=$ "x ist eine Primzahl"

Formalisieren Sie folgende Aussagen über die Natürlichen Zahlen:

(a) "Primfaktoren sind immer Primzahlen"

(b) "Jede natürliche Zahl die grösser als 1 ist besitzt einen Primfaktor"

(c) "Jede Primzahl besitzt genau einen Primfaktor"

(d) "Zahlen die genau einen Primfaktor besitzen sind nicht notwendigerweise Primzahlen"

(e) "Primzahlen sind genau die Zahlen die sich selbst als Primfaktor haben"

Lösung: Mögliche Formalisierungen sind:

(a) $\forall x\,(\underbrace{\exists y\,(\mathsf{PF}(x,y))}_{x \text{ ist ein Primfaktor..}} \;\Rightarrow\; \mathsf{Prim}(x))$

(b) Alternativ: $\forall x, y\,(\mathsf{PF}(x,y) \Rightarrow \mathsf{Prim}(x))$

(c) $\forall x\,\big(1 < x \;\Rightarrow\; \exists y\,(\mathsf{PF}(y,x))\big)$

(d) $\exists x\,\big(\neg\,\mathsf{Prim}(x) \;\wedge\; \exists y\,\underbrace{\forall z\,(\mathsf{PF}(y,x) \;\wedge\; (z \neq y \;\Rightarrow\; \neg\,\mathsf{PF}(z,x)))}_{y \text{ ist eindeutiger Primfaktor von x}}\big)$

(e) $\forall x\,\big(\mathsf{Prim}(x) \;\Leftrightarrow\; \mathsf{PF}(x,x)\big)$

Aufgabe 3

Übersetzen Sie (möglichst prägnant) folgende Formeln in natürlichsprachliche Aussagen und bestimmen Sie deren Wahrheitsgehalt.

(a) $\forall x\,\big(\neg\mathsf{PF}(x, x+1)\big)$

(b) $\forall x\,\big(\mathsf{Prim}(x) \;\wedge\; \mathsf{Prim}(x+1) \;\Rightarrow\; x = 2\big)$

(c) $\exists x\,\forall y\,\big(\neg\mathsf{PF}(y,x)\big)$

(d) $\exists x\,\forall y\,\big(\neg\mathsf{PF}(x,y)\big)$

Lösung: Mögliche Übersetzungen sind:

(a) Keine natürliche Zahl ist ein Primfaktor ihres Nachfolgers[1]. (wahr)

(b) Die 2 ist die einzigen Primzahl deren Nachfolger ebenfalls eine Primzahl ist. (wahr)

(c) Es gibt (mind.) eine natürliche Zahl, die keinen Primfaktor besitzt. (wahr)

(d) Es gibt (mind.) eine natürliche Zahl, die kein Primfaktor ist. (wahr)

Aufgabe 4

Bemerkung: Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heisst *monoton*, wenn für alle natürlichen Zahlen x, y die Implikation $x \leq y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y)$ gilt.

Zeigen Sie, dass für jede monotone Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und alle natürlichen Zahlen x, n folgendes gilt:

$$f(x) < n \wedge n < f(x+1) \;\Rightarrow\; \forall y \in \mathbb{N}\,(f(y) \neq n).$$

Hinweis: Fallunterscheidung

Lösung: Wir nehmen an, dass die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton ist und dass die natürlichen Zahlen x, n die Eigenschaft

$$f(x) < n < f(x+1) \tag{1}$$

erfüllen. Wir müssen zeigen, dass für alle natürlichen Zahlen y die Ungleichung $f(y) \neq n$ gilt. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- Falls $y \leq x$ gilt, dann folgt aus der Monotonie von f und aus (1), dass

  $$f(y) \leq f(x) < n$$

  und somit $f(y) \neq n$.
- Falls $x < y$ gilt, dann folgt $x + 1 \leq y$ und daher wieder aus der Monotonie von f und aus (1), dass

  $$n < f(x+1) \leq f(y)$$

  und somit $f(y) \neq n$.

Da aber für jede natürliche Zahl y einer der beiden betrachteten Fälle eintritt, folgt in jedem Fall $f(y) \neq n$ und somit die Behauptung.