

**Dr. Jürg M. Stettbacher**

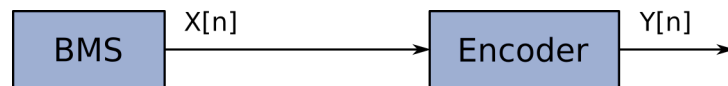
Neugutstrasse 54  
CH-8600 Dübendorf

Telefon: +41 43 299 57 23

Email: dsp@stettbacher.ch

## Übung

### Quellencodierung



### Quelle

Eine binäre gedächtnislose Quelle (BMS<sup>1</sup>) erzeugt zu jedem diskreten Zeitpunkt  $n = 0, 1, 2, \dots$  eine Zufallsvariable  $X[n]$ . Das heisst, es entsteht mit der Zeit eine Sequenz  $X[.] = \{X[0] X[1] X[2] \dots\}$  von derartigen Zufallsvariablen. Jede Zufallsvariable  $X[n]$  nimmt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit den Wert  $x_0 = 0$  oder  $x_1 = 1$  an<sup>2</sup>. Gegeben ist ein repräsentativer Ausschnitt der Sequenz  $X[.]$ :

$$X[.] = \left\{ \dots 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 \dots \right\}$$

1. Was bedeutet es, dass die Quelle *gedächtnisfrei* ist?
2. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeiten  $P(x_0)$  und  $P(x_1)$  der Zufallsvariable  $X[n]$ .
3. Berechnen Sie die Entropie  $H(X)$  der Quelle, resp. der Sequenz  $X[.]$ , basierend auf den Schätzungen.
4. Wie gross ist die Redundanz  $R_X$  der Quelle, resp. der Sequenz  $X[.]$ ?

---

<sup>1</sup> Englisch: Binary Memoryless Source.

<sup>2</sup> Darum heisst die Quelle *binär*. Die Werte  $x_0$  und  $x_1$  bezeichnen wir auch als Symbole der Quelle.

## Encoder

5. Der Encoder fasst nun immer zwei aufeinander folgende Symbole der Sequenz  $X[.]$  zusammen und codiert sie neu. Daraus entsteht die Sequenz  $Y[.]$ .

$$X[.] = \{ \underbrace{X[0] \ X[1]}_{Y[0]} \ \underbrace{X[2] \ X[3]}_{Y[1]} \ \underbrace{X[4] \ X[5]}_{Y[2]} \ \dots \}$$

Dabei wendet der Encoder die folgende Abbildungstabelle<sup>3</sup> an:

Zweiergruppe in $X[.]$	Symbol in $Y[.]$
0 0	$y_0 = 0$
0 1	$y_1 = 1 \ 0$
1 0	$y_2 = 1 \ 1 \ 0$
1 1	$y_3 = 1 \ 1 \ 1$

Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten  $P(y_k)$  mit  $k = 0 \dots 3$  an.

6. Wie gross ist die Entropie  $E(Y)$  der Sequenz  $Y[.]$ ?
7. Wie gross ist die Redundanz  $R_Y$ ? Vergleichen Sie  $R_Y$  mit  $R_X$ .
8. Betrachten Sie nun einen langen Ausschnitt der Sequenz  $X[.]$  mit beispielsweise 1000 Symbolen. Untersuchen Sie die Häufigkeiten (in %) von Nullen und Einsen in den Bits dieses Ausschnitts und im dazu gehörigen Ausschnitt der Sequenz  $Y[.]$ . Was fällt Ihnen auf?

0|10|0|0|10|0|110|0|10|0

## Binäre Messungen

Von 8 identisch aussehenden Kugeln ist eine etwas schwerer oder leichter als die anderen. Mit der Hilfe einer Balkenwaage soll die abweichende Kugel mit möglichst wenigen Wägungen sicher ermittelt werden. Die Waage erlaubt binäre Messungen: Die Inhalte der beiden Waagschalen sind gleich schwer oder nicht. Jede der Waagschalen kann mehrere Kugeln aufnehmen.

9. Ohne an ein bestimmtes Verfahren zu denken, überlegen Sie rein theoretisch, mit wievielen binären Messungen die abweichende Kugel ausfindig gemacht werden kann.
10. Überlegen Sie sich jetzt einen Algorithmus dazu.

<sup>3</sup> Beachten Sie, dass die Symbole  $y_k$  unterschiedlich lang sind. Es handelt sich hier um einen sogenannten Huffman Code. Am Ausgang des Encoders werden die Bits der Symbole  $y_k$  einfach aneinander gereiht.