Grundlagen und diskrete Mathematik
Übung 6 — Abgabe: Kalenderwoche 50

Aufgabe 1

Gegeben sei die Ackermannfunktion $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch folgende Rekursionsgleichungen:

$$\begin{aligned} a(0, m) &= m + 1 \\ a(n + 1, 0) &= a(n, 1) \\ a(n + 1, m + 1) &= a(n, a(n + 1, m)) \end{aligned}$$

$=$

$$\begin{cases} a(0,n) = n+1 \\ a(n,0) = a(n-1,1) \\ a(n,m) = a(n-1, a(n, m-1)) \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie von Hand $a(2, 1)$.

(b) Implementieren Sie die Ackermannfunktion in einer Programmiersprache Ihrer Wahl.

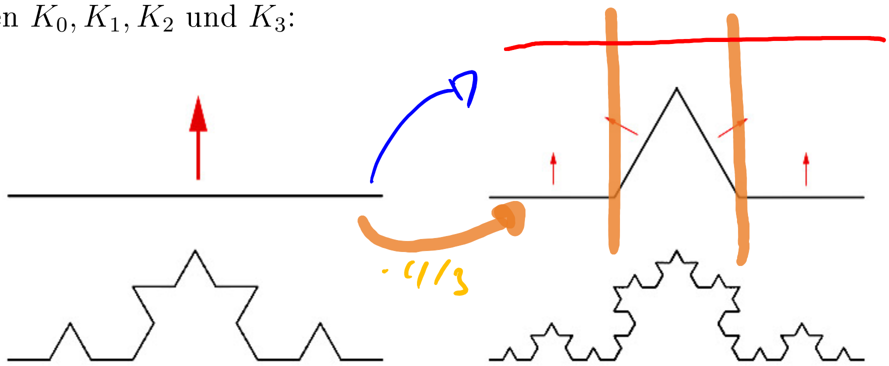
(c) Berechnen Sie so viele Werte wie möglich und beschreiben Sie die Probleme die dabei auftreten.

Aufgabe 2

Die n-te Koch-Kurve K_n ist wie folgt gegeben:

- Die Kurve K_0 ist eine Gerade der Länge 1.
- Die Kurve K_{n+1} erhält man aus der Kurve K_n, indem man jede Teilgerade von K_n in 3 gleich grosse Abschnitte unterteilt und danach den "mittleren" dieser Abschnitte gemäss unten stehender Skizze in zwei zusammenhängende Geraden gleicher Länge umsetzt.

Die Kurven K_0, K_1, K_2 und K_3:



(a) Berechnen Sie die Länge der Kurve K_4.

(b) Geben Sie eine rekursive Definition der Funktion $L : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$L(n) = \text{ Länge der Kurve } K_n.$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Induktion nach k, dass für alle natürlichen Zahlen n, m, k folgendes gilt:

$$(n + k = m + k) \Rightarrow n = m. \qquad \text{(Kürzbarkeit)}$$

Hinweis: Arbeiten sie mit der (rekursiven) Definition der Addition und benützen Sie die Peano Axiome.

Aufgabe 4

Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $x, y \neq 0$:

$$x|y \Rightarrow x \leq y.$$

Aufgabe 5

Finden Sie ganze Zahlen a und b, so dass die Gleichung

$$a \cdot 241 + b \cdot 114 = 1$$

erfüllt ist.

Aufgabe 1

$a: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$a(0,m) = m+1$$
$$a(n+1, 0) = a(n,1)$$
$$a(n+1, m+1) = a(n, a(n+1, m))$$

$$a(2,1) = a(1, a(2,0))$$

$$a(2,0) = a(1,1)$$
$$= a(0, a(1,0))$$
$$= a(1,$$

(3)

$n + k = m + k \Rightarrow n = m$

Induktion nach k

I.V.) $k = 0$ $\quad n+0 = m+0 \Rightarrow n = m$

I.A.)

$\underline{k \to k+1}$

z.z.: $n + (k+1) = m + (k+1) \Rightarrow n = m$

$$n + (k+1) = m + (k+1)$$

Def. Add.:

$\Rightarrow (n+k)+1 = (m+k)+1$

P.A.

$\Rightarrow n+k = m+k$

I.A.

$\Rightarrow n = m$