① $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$

$$H = \begin{pmatrix} 1-2|a_1|^2 & -2a_1a_2^* & \dots & -2a_1a_n^* \\ -2a_2a_1^* & 1-2|a_2|^2 & \dots & \\ \dots & & & \\ -2a_na_1^* & \dots & & 1-2|a_n|^2 \end{pmatrix}$$

$(H^+)^+ = H^+$ $\qquad HH^+ = H^2 = b_{ij}$

$b_{11} = (1-2|a_1|^2)^2 + 4|a_1|^2|a_2|^2 + 4|a_1|^2|a_3|^2 + \dots$

$b_{11} = 1 - 4|a_1|^2 + 4|a_1|^4 + 4|a_1|^2|a_2|^2 + \dots + 4|a_1|^2||a_n|^2$

$b_{11} = 1 + 4|a_1|^2(-1 + (|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)) = 1 + 4|a_1|^2 \cdot 0 \Rightarrow b_{ii} = 1$

Если $i \neq j$

$b_{ij} = (1-2|a_i|^2)2a_ia_j^* - 2a_i^*a_j(1-2|a_j|^2) + \sum a_ja_k^* \cdot a_k \cdot a_j^*$

$b_{ij} = -a_ia_j(2 - 4|a_i|^2 + 2 - 4|a_j|^2 - 4\sum|a_k|^2) = -a_ia_j^*(4 - 4\sum|a_k|^2) = 0$

Значит $HH^+ = 1 \Rightarrow H$ - унитарная

$H^+ = H^{-1}$. значит $\det H \neq 0$. Значит $\mathrm{rk}\, H = \dim v$

④ Доказать $\forall$ унит. матрицы $\|UA\|_F = \|AU\|_F = \|A\|_F$

Возьмем вектор $\bar{x}$ $\langle U\bar{x}, U\bar{y}\rangle = x^* \underbrace{U^+ U}_{1} y = x^* y = \langle x, y\rangle$

Значит $\|Ux\|_F^2 = \langle x, x\rangle = \|x\|_F^2$

$\exists\ A = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$

$\|UA\|_F^2 = \|(Ua_1, Ua_2, \dots, Ua_n)\|_F^2$

$\|UA\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle Ua_i, Ua_i\rangle = \sum \|a_i\|_F^2 = \sum \langle a_i, a_i\rangle = \|A\|_F^2$

$\|AU\|_F = \|(AU)^T\|_F = \|U^T A^T\|_F = \|A^T\|_F = \|A\|_F$