Im Lemma I wird ein 3-dim. lin. Fkt. gegeben, die die benötigten Bed. 1-5 erfüllt

Analog kann man eine 2-dim. Fkt erstellen. Dafür setzt man $y=0$. Es ergibt sich

$$f(x) = ax^2 + dx + g$$

Die zug. lin. Fkt. sieht folgendermaßen aus

$$A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\u&v&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2-x_1\\0\\w\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}x\\0\\ux+z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$$

Sie kann also ohne Inf. Verlust auf folgende 2-dim Fkt. runtergebrochen werden

$$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0\\u&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2-x_1\\w\end{pmatrix}$$

$$\text{bzw} \quad \begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0\\u&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2-x_1\\w\end{pmatrix}$$

u & w haben die Werte aus dem Beweis:

$$u = 2a(x_2-x_1)$$
$$w = f(x_2-x_1) - g$$

Da wir eine unimodulare Transf. haben wollen (ganzrat. Koeff), muss gelten:

$$\underline{\underline{u, w \in \mathbb{Z}}} \quad \& \quad x_2 - x_1 \in \mathbb{Z}$$

Die Frage ist also, wie müssen bei festem a, g die Werte x_1, x_2 ~~[illegible]~~ (mit (x_2-x_1) minimal) gewählt werden, s.d. $u, w \in \mathbb{Z}$

2

Sei $g=0$, dann gilt mit $a=\frac{a_1}{a_2}\in\mathbb{Q}$:

$$f(x) = a\,x^2 = \frac{a_1}{a_2}\cdot x^2$$

Sei o.B.d.A. $x_1=0$.

Da $x_2-x_1\in\mathbb{Z}$ sein muss, muss also gelten $x_2\in\mathbb{Z}$. x_2 ist dann die gesuchte Periode p. Nenne also $x_2=p\in\mathbb{N}$

Gesucht ist das kleinste $p\in\mathbb{N}$ mit:

$$\text{I} \quad u = 2\cdot a\cdot p \in\mathbb{Z}$$

$$\text{II} \quad w = f(p) = a\cdot p^2 \in\mathbb{Z}$$

Betrachte zuerst II:

$$a\cdot p^2 = \frac{a_1}{a_2}p^2 \in\mathbb{Z} \iff p^2 = n\cdot a_2 \quad \text{mit } n\in\mathbb{N}$$

Sei $a_2 = l\cdot x^2$ mit x maximal, dann gilt:

$$p^2 = n\cdot l\cdot x^2$$

$$\overset{p\in\mathbb{N}}{\iff} p = \sqrt{nl}\;x$$, da x maximal gewählt

wurde, gilt $l=\prod_1^k l_i$ mit $l_i\neq l_j$ für $i\neq j$

~~$\Rightarrow$ Das kleinstmögliche~~ p ist für $n=l$

$\Rightarrow$ p ist minimal für $n=l$ und p muss immer ein Vielfaches von lx sein.

Also gilt: $p\geq lx \wedge p=i\cdot l\cdot x$ für ein $i\in\mathbb{N}$

Betrachte nun I:

$$2\cdot a\cdot p = \frac{2a_1\cdot p}{a_2}\in\mathbb{Z} \iff 2p = m\cdot a_2 \quad \text{mit } m\in\mathbb{N}$$

Da $p=i\cdot l\cdot x \wedge a_2 = lx^2$ (mit x maximal) gilt:

$$2\cdot i\cdot l\cdot x = m\cdot lx^2 \iff 2\cdot i = m\cdot x \iff i=\frac{m\cdot x}{2}$$

③

1. Fall x gerade, dann ist i minimal für $m = 1$ $\Rightarrow$ $i = \frac{x}{2}$

$\Rightarrow$ $p = l \cdot x \cdot \frac{x}{2}$

2. Fall x ungerade, dann ist i minimal für $m = 2$ $\Rightarrow$ $i = x$

$\Rightarrow$ $p = l \cdot x^2$