$$\boxed{\frac{a_2}{2} \in \mathbb{Z} \qquad \frac{a_2}{4} \notin \mathbb{Z} \qquad \frac{b_2}{2} \notin \mathbb{Z}}$$

(1)

$$a_2 = d \cdot \tilde{a}_2$$
$$b_2 = d \cdot \tilde{b}_2 \qquad d = ggT(a_2, b_2)$$

$$\frac{a_1}{a_2} p^2 + \frac{b_1}{b_2} p = \frac{a_1 \cdot (n \cdot \frac{a_2}{2})^2}{a_2} + \frac{b_1 \cdot n \cdot \frac{a_2}{2}}{b_2}$$

$$= \frac{n \cdot (a_1 n a_2)}{4} + \frac{n\, b_1 \cdot a_2}{2 b_2}$$

$$= \frac{n \cdot a_2 (a_1 n b_2 + 2 b_1)}{4 b_2}$$

$$= \frac{n \cdot \frac{a_2}{2} (a_1 n b_2 + 2 b_1)}{2 b_2}$$

$$= \frac{n \cdot \frac{\tilde{a}_2}{2} (a_1 n b_2 + 2 b_1)}{2 \tilde{b}_2} \quad (*)$$

$$\underset{\text{ungeraden}}{n} \cdot \frac{\tilde{a}_2}{2} (\underset{\text{unger}}{a_1} n \underset{\text{unger}}{b_2} + \underset{\text{gerade}}{2 b_1})$$

Da $a_1, b_2, \frac{\tilde{a}_2}{2}$ ungerade sind, ist ungerade, wenn n ungerade ist. Damit der Term (*) jedoch in $\mathbb{Z}$ ist, muss also n gerade sein!

Also gilt $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$

$$= \frac{m \frac{\tilde{a}_2}{2} (a_1 2 m b_2 + 2 b_1)}{\tilde{b}_2} = \overbrace{2 m^2 \frac{\tilde{a}_2}{2} \frac{b_2}{\tilde{b}_2}}^{\in \mathbb{Z}} + \frac{m \cdot \tilde{a}_2 \cdot b_1}{\tilde{b}_2}$$

Da $\tilde{a}_2, \tilde{b}_2$ und $b_1, \tilde{b}_2$ teilerfremd sind, muss gelten $\underline{m = \tilde{b}_2}$

Resultat:

$n = 2 \tilde{b}_2 = 2 \frac{b_2}{ggT(\ldots)}$

$p = \underline{\tilde{b}_2 \cdot a_2}$

$= \frac{b_2 \cdot a_2}{ggT(a_2, b_2)}$

$$\boxed{\frac{a_2}{2} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{a_2}{4} \notin \mathbb{Z} \wedge \frac{b_2}{2} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{b_2}{4} \in \mathbb{Z}}$$ d)

Sei $b_2 = 2 \cdot d \cdot \tilde{b}_2$

$a_2 = 2 \cdot d \cdot \tilde{a}_2$ mit $d = ggT\left(\frac{a_2}{2}, \frac{b_2}{2}\right)$

Da $\frac{a_2}{4} \notin \mathbb{Z}$ ist, ist d eine ungerade Zahl & $\frac{\tilde{b}_2}{2} \in \mathbb{Z}$. (eine gerade Zahl)

$$\frac{a_1}{a_2} p^2 + \frac{b_1}{b_2} p = \frac{a_1 n^2 a_2}{4} + \frac{b_1 n a_2}{2 b_2} = \frac{n \cdot a_2 (n a_1 b_2 + 2 b_1)}{4 b_2}$$

$$= \frac{n \cdot \tilde{a}_2 (n \cdot a_1 \cdot 2 d \tilde{b}_2 + 2 b_1)}{2 \tilde{b}_2} = \frac{n \cdot \tilde{a}_2 (n \cdot a_1 \cdot d \cdot \tilde{b}_2 + b_1)}{2 \tilde{b}_2}$$

Da $\tilde{a}_2$, b_1 ungerade sind und $\tilde{b}_2$ gerade ist, muss n eine gerade Zahl sein, damit der Term eine ganze Zahl ergibt. Sei also $n = 2m$ $m \in \mathbb{Z}$.

$$= \underbrace{\frac{\cancel{2}m \cdot \tilde{a}_2 \cdot n \cdot a_1 \cdot d \cdot \cancel{\tilde{b}_2}}{\cancel{2 \tilde{b}_2}}}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{\cancel{2}m \cdot \tilde{a}_2 \cdot b_1}{\cancel{2} \tilde{b}_2}$$

Damit der Term in $\mathbb{Z}$ ist, muss also $m = \tilde{b}_2 = \frac{b_2}{2 \cdot ggT\left(\frac{a_2}{2}, \frac{b_2}{2}\right)}$ sein, da $\tilde{a}_2, \tilde{b}_2$ und $b_1, \tilde{b}_2$ teilerfremd sind.

$$\Rightarrow n = \frac{b_2}{ggT\left(\frac{a_2}{2}, \frac{b_2}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{p = \frac{a_2 \cdot b_2}{2 \cdot ggT\left(\frac{a_2}{2}, \frac{b_2}{2}\right)}} = \frac{a_2 \cdot b_2}{ggT(a_2, b_2)}$$

$$\boxed{\frac{a_2}{2} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{a_2}{4} \notin \mathbb{Z} \wedge \frac{b_2}{2} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{b_2}{2} \notin \mathbb{Z} \quad \left(\frac{b_2}{4} \notin \mathbb{Z}\right) \quad e)}$$

e)

Sei $b_2 = 2 \cdot d \cdot \tilde{b}_2$

$a_2 = 2 \cdot d \cdot \tilde{a}_2$ mit $d = ggT\left(\frac{a_2}{2}, \frac{b_2}{2}\right)$

$$\ldots = \frac{n \cdot \tilde{a}_2 (a_1 \cdot n \cdot d \cdot \tilde{b}_2 + b_1)}{2 \tilde{b}_2}$$

I Für welche Werte von n ist dieser Term in $\mathbb{Z}$, wenn n gerade ist?

$$= \underbrace{\frac{n}{2} \cdot \tilde{a}_2 \cdot a_1 \cdot n \cdot d}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{n\, b_1}{2 \tilde{b}_2}$$

Da $\frac{b_1}{2} \notin \mathbb{Z}$ & b_1, b_2 teilerfremd sind, muss n ein Vielfaches von $2\tilde{b}_2$ sein, ist also minimal für $n = 2\tilde{b}_2$.

II Für welche Werte von n ..., wenn n ungerade ist?

$$\ldots = \frac{\overbrace{n \cdot \tilde{a}_2\, a_1\, n\, d}^{\text{ungerade}}\, \tilde{b}_2}{2 \tilde{b}_2} + \frac{n \tilde{a}\, b_1}{2 \tilde{b}_2} \quad (*)$$

$$= \frac{k}{2} + \frac{n}{\tilde{b}_2} \frac{\tilde{a}_2 b_1}{2} \quad \text{für } k = \ldots$$

Da $\tilde{b}_2, \tilde{a}_2$ & $b_1, \tilde{b}_2$ teilerfremd sind, ~~und~~ muss n ein Vielfaches von $\tilde{b}_2$ sein, damit der Term (*) in $\mathbb{Z}$ ist. Also: $n = m \cdot \tilde{b}_2$ ist minimal für $m = 1$.

Für $n = \tilde{b}_2$: $\frac{k}{2} + \frac{\tilde{a}_2 b_1}{2} \in \mathbb{Z}$, da $k + \tilde{a}_2 b_1$ gerade ist.

$\Rightarrow n = \tilde{b}_2 = \frac{b_2}{2 ggT\left(\frac{a_2}{2}, \frac{b_2}{2}\right)} \Rightarrow p = \frac{a_2 \cdot b_2}{4\, ggT\left(\frac{a_2}{2}, \frac{b_2}{2}\right)} = \frac{a_2 \cdot b_2}{2\, ggT(a_2, b_2)}$!