Sei $f(x) = ax^2 + bx \; (+c)$ $\quad a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a = \frac{a_1}{a_2}$

Sei p die gesuchte Periode. $\quad b = \frac{b_1}{b_2}$

Es muss gelten:

$$\text{I}$$

1. $2 \cdot a \cdot p \in \mathbb{Z} \iff \frac{2a_1 p}{a_2} \in \mathbb{Z} \iff p = n \cdot \frac{a_2}{2} \quad n \in \mathbb{N}$

$$\text{II}$$

2. $f(p) - c \in \mathbb{Z} \iff \frac{a_1}{a_2} p^2 + \frac{b_1}{b_2} p \in \mathbb{Z}$

Finde $p \in \mathbb{N}$ minimal, s.d. 1&2 gelten

Fallunterscheidung 1:

1. Fall: $\frac{a_2}{2} \in \mathbb{Z}$

$\frac{a_2}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_2 = 2x \quad x \in \mathbb{Z}$

$\overset{\text{I}}{\Rightarrow} \quad p = n \cdot \frac{a_2}{2} \Rightarrow p = n \cdot x$

Einsetzen in II:

$$\frac{a_1}{a_2} p^2 + \frac{b_1}{b_2} p = \frac{a_1 n^2 x^2}{a_2} + \frac{b_1 n x}{b_2} \overset{x = \frac{a_2}{2}}{=} \frac{a_1 n^2 a_2}{4} + \frac{b_1 n x}{b_2}$$

Fallunterscheidung 1.1:

1. Fall $\frac{a_2}{4} \in \mathbb{Z}$: Dann gilt $\frac{a_1 n^2 a_2}{4} \in \mathbb{Z}$

Es muss also gelten $\frac{b_1 n x}{b_2} \in \mathbb{Z}$

$\iff \quad nx = m \cdot b_2 \quad m \in \mathbb{N}$

$\iff \quad n = \frac{m \cdot b_2}{x} = \frac{m \cdot b_2}{\left(\frac{a_2}{2}\right)}$ Es ist also das Kleinste

$m \in \mathbb{N}$ gesucht mit $\frac{m \cdot b_2}{\left(\frac{a_2}{2}\right)} \in \mathbb{Z}$.

~~Fallen~~ 2. Fall : $\frac{a_2}{4} \notin \mathbb{Z}$

$\longrightarrow$ to be done , nicht schön

$\boxed{\text{2. Fall}}$ $\frac{a_2}{2} \notin \mathbb{Z}$:

Wegen $p = n \cdot \frac{a_2}{2}$, muss gelten: $p = n \cdot a_2$

Einsetzen in II :

$$\frac{a_1}{a_2} p^2 + \frac{b_1}{b_2} p = \underbrace{a_1 n^2 a_2}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{b_1 n a_2}{b_2}$$

$\Rightarrow$ Es muss gelten $\frac{b_1 n \cdot a_2}{b_2} \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \quad n \cdot a_2 = m \cdot b_2 \qquad m \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad n = \frac{m \cdot b_2}{a_2}$$

Es ist also das kleinste m gesucht mit

$$\frac{m \cdot b_2}{a_2} \in \mathbb{Z}$$