Angewandte Mathematik

Studienbrief 2

Zahlenmengen und Zahlensysteme

Gerald und Susanne Teschl

Druckfehler/Feedback bitte an:
susanne.teschl@technikum-wien.at

WS 23/24

Studienbrief 2

Zahlenmengen und Zahlensysteme

Inhalt

2.1 Die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

In diesem Abschnitt werden Ihnen einige vertraute Begriffe begegnen. Wir beginnen mit den natürlichen Zahlen. Sie haben sich historisch einerseits aus der Notwendigkeit zu *zählen* („Kardinalzahlen“) und andererseits aus dem Bedürfnis zu *ordnen* („Ordinalzahlen“) entwickelt:

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Definition 2.1 Die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ heißt Menge der **natürlichen Zahlen**. Nehmen wir die Zahl „0“ hinzu, so schreiben wir $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Manchmal wird auch die Zahl „0“ als natürliche Zahl betrachtet. Man definiert in diesem Fall $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ und $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Die natürlichen Zahlen sind **geordnet**. Das heißt, dass es zu jeder Zahl n einen eindeutigen **Nachfolger** $n+1$ gibt. Man kann also die natürlichen Zahlen wie auf einer Kette auffädeln. Wir erhalten dadurch die *Ordnungsrelation* „m kleiner n“, geschrieben

$$m < n,$$

die aussagt, dass in der „Kette“ der natürlichen Zahlen m vor n kommt. Die Schreibweise $m \leq n$ bedeutet, dass m kleiner oder gleich n ist. Beispiel: $3 < 5$; eine andere Schreibweise dafür ist $5 > 3$ (die Spitze zeigt immer zur kleineren Zahl). Oder: $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ bedeutet: n ist eine natürliche Zahl größer oder gleich 3.

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Das Rechnen mit natürlichen Zahlen ist für uns kein Problem. Wenn wir zwei natürliche Zahlen addieren oder multiplizieren, so ist das Ergebnis stets wieder eine natürliche Zahl. Die Subtraktion führt uns aber aus der Menge der natürlichen Zahlen hinaus: Es gibt zum Beispiel keine natürliche Zahl x, die $x+5=3$ erfüllt. Um diese Gleichung zu lösen, müssen wir den Zahlenbereich der natürlichen Zahlen auf den der ganzen Zahlen erweitern:

Definition 2.2 Die Menge $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ heißt Menge der **ganzen Zahlen**.

Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Die ganzen Zahlen sind wie die natürlichen Zahlen geordnet, können also ebenso auf einer Kette aufgereiht werden. Beachten Sie dabei, dass $m < n \Leftrightarrow -n < -m$. Beispiel: Es ist $1 < 2$, jedoch $-2 < -1$ (und nicht $-1 < -2$)!

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Auch wenn uns nun bereits alle ganzen Zahlen zur Verfügung stehen, so stoßen wir doch sehr bald wieder auf Probleme: Es gibt z. B. keine ganze Zahl x, die die Gleichung $3x = 2$ erfüllt. Wieder müssen wir neue Zahlen hinzunehmen und sind damit bei den rationalen Zahlen angelangt:

Definition 2.3 Die Menge

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid q \neq 0 \text{ und } p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

heißt Menge der **rationalen Zahlen** oder auch Menge der Bruchzahlen. Man nennt p den **Zähler** und q den **Nenner** der rationalen Zahl $\frac{p}{q}$.

Der Nenner einer rationalen Zahl muss also laut Definition immer ungleich 0 sein. Es gibt unendlich viele rationale Zahlen. Die ganzen Zahlen begegnen uns dabei als Brüche mit Nenner 1: $\mathbb{Z} = \{\dots, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \dots\} \subseteq \mathbb{Q}$.

Man vereinbart, dass zwei rationale Zahlen $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ gleich sind genau dann, wenn $p_1 \cdot q_2 = q_1 \cdot p_2$. Das heißt nichts anderes, als dass Zähler und Nenner mit dem gleichen Faktor multipliziert bzw. durch den gleichen Faktor dividiert (*gekürzt*) werden können. Beispiel: $\frac{8}{16} = \frac{1}{2} = \frac{-4}{-8} = \dots$

Addition und Multiplikation von rationalen Zahlen sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} &= \frac{p_1\, q_2 + p_2\, q_1}{q_1\, q_2}, \\ \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} &= \frac{p_1\, p_2}{q_1\, q_2}. \end{aligned}$$

Beispiele: $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{3\cdot4+1\cdot5}{20} = \frac{17}{20}$; $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$. Wir gehen aber davon aus, dass Ihnen das Rechnen mit rationalen Zahlen vertraut ist. Erinnern Sie sich noch an die Abkürzung **Prozent** für „ein Hundertstel“:

$$1\% = \frac{1}{100} = 0.01.$$

Beispiele: $0.62 = 62 \cdot \frac{1}{100} = 62\%$; $0.0003 = 0.03\%$.

Für das n-fache Produkt der rationalen Zahl a mit sich selbst verwendet man die abkürzende Schreibweise

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}.$$

Dabei heißt a die **Basis** und n der **Exponent** der **Potenz** a^n. Für $a \neq 0$ vereinbart man außerdem

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{und} \qquad a^0 = 1.$$

Negative Potenzen sind also nichts anderes als die Kehrwerte von positiven Potenzen. Beispiele: $10^2 = 100$; $2^4 = 16$; $2^{-1} = \frac{1}{2}$; $(\frac{3}{4})^{-1} = \frac{4}{3}$; $(\frac{1}{2})^{-3} = 2^3 = 8$; $2^0 = 1$. Mit dieser Definition gilt für $a, b \in \mathbb{Q}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ ($a, b \neq 0$, falls $m < 0$ oder $n < 0$):

$$a^n a^m = a^{n+m}, \qquad a^n b^n = (a\, b)^n, \qquad (a^m)^n = a^{m\, n},$$

wie man sich leicht überlegen kann. Beispiele: $x^4 \cdot x^2 = x^6$; $10^{-3} \cdot (\frac{1}{2})^{-3} = 5^{-3}$; $(x^4)^3 = x^{12}$.

Die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ ist durch

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} \quad \Leftrightarrow \quad p_1 q_2 < p_2 q_1, \qquad q_1, q_2 > 0,$$

erklärt. Die Voraussetzung $q_1, q_2 > 0$ ist keine Einschränkung, da wir das Vorzeichen des Bruches immer in den Zähler packen können.
Beispiele:
- $\frac{1}{4} < \frac{3}{5}$, weil $1 \cdot 5 < 3 \cdot 4$.
- $-\frac{3}{8} > -\frac{1}{2}$, also $\frac{-3}{8} > \frac{-1}{2}$, weil $-3 \cdot 2 > -1 \cdot 8$.

Gibt es eine Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist?

Man könnte glauben, dass nun alle Zahlen „gefunden" sind. Die Anhänger von Pythagoras (ca. 570–480 v. Chr.) im antiken Griechenland waren jedenfalls dieser Ansicht. Insbesondere waren sie davon überzeugt, dass es eine rationale Zahl geben muss, deren Quadrat gleich 2 ist:

Zeichnen wir ein Quadrat mit der Seitenlänge 1. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras für die Länge d der Diagonale: $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ (siehe Abbildung 2.1). Gibt es eine *rationale* Zahl d, deren Quadrat gleich 2 ist? Durch scharfes Hinsehen

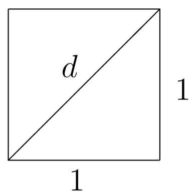

Abbildung 2.1: Quadrat mit Seitenlänge 1

lässt sich d auf jeden Fall nicht angeben. Es bleibt uns daher nichts anderes übrig, als systematisch nach Werten für p und q mit $(\frac{p}{q})^2 = 2$ zu suchen.

Beginnen wir mit $q = 2$ und probieren der Reihe nach Werte für p durch. Da $d \geq 1$ ist, kommen nur Werte $p = 2, 3, \ldots$ in Frage. Mit $p = 2$ folgt $(\frac{2}{2})^2 = 1 < 2 = d^2$ und deshalb (mit Satz 2.10) $1 < d$. Mit $p = 3$ folgt $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} > 2 = d^2$ und deshalb $d < \frac{3}{2}$. Alle weiteren Werte $p = 4, 5, \ldots$ liefern nur noch größere Zahlen und $q = 2$ ist damit aus dem Rennen. Trotzdem können wir aber wenigstens schon den Bereich, in dem d zu suchen ist, einschränken (also eine grobe Abschätzung nach unten und oben für d geben): $1 < d < \frac{3}{2}$.

Die Wahl $q = 2$ hat zwar nicht geklappt, so leicht geben wir aber nicht auf, denn es stehen ja noch ausreichend Kandidaten zur Verfügung: $q = 3, 4, \ldots$! Da die Suche von Hand allerdings etwas mühsam ist, bietet sich ein Computerprogramm (→CAS) an, das für gegebenes q zwei rationale Zahlen $\frac{p-1}{q}$ und $\frac{p}{q}$ liefert, zwischen denen d liegen muss:

- Beginne die Suche bei $p = q$.
- Erhöhe p so lange um 1, bis $(\frac{p}{q})^2 \geq 2$ erfüllt ist.

- Gib $\frac{p-1}{q}$ und $\frac{p}{q}$ aus.

Damit können wir nun den Computer auf die Suche schicken. Sie können es gerne ausprobieren, aber leider können wir Ihnen jetzt schon sagen, dass die Suche erfolglos bleiben wird:

Satz 2.4 (Euklid) Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist.

Den Beweis hat erstmals der griechische Mathematiker Euklid (ca. 300 v. Chr.) geführt, und sein Beweis gilt als Musterbeispiel der mathematischen Beweisführung. Es ist ein Beweis durch Widerspruch. Dabei wird aus der Verneinung (Negation) der Behauptung ein Widerspruch abgeleitet, weshalb die Verneinung falsch und daher die Behauptung wahr sein muss. Hier Euklids Beweis:

Angenommen, $d = \frac{p}{q}$ ist eine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist. Natürlich können wir voraussetzen, dass p und q nicht *beide* gerade sind, denn sonst könnten wir ja einfach den gemeinsamen Faktor kürzen.

Es ist also $(\frac{p}{q})^2 = 2$ oder, leicht umgeformt $p^2 = 2q^2$. Da $p^2 = 2q^2$ offensichtlich eine gerade Zahl ist (da Vielfaches von 2), muss auch p eine gerade Zahl sein (denn wenn das Produkt zweier Zahlen gerade ist (hier $p \cdot p$), dann muss mindestens eine der beiden Zahlen gerade sein). Wir können daher p in der Form $p = 2p_0$ mit einer natürlichen Zahl p_0 schreiben, und daraus ergibt sich nach Quadrieren beider Seiten: $p^2 = 4p_0^2$.

Aus $p^2 = 2q^2$ und $p^2 = 4p_0^2$ folgt nun $2q^2 = 4p_0^2$, und nachdem wir beide Seiten durch 2 dividiert haben: $q^2 = 2p_0^2$. Mit der gleichen Überlegung wie oben folgt daraus, dass q gerade ist. Also sind p und q beide gerade, was wir aber doch am Anfang ausgeschlossen haben! Die Annahme, d sei rational, führt also zu einem Widerspruch und muss daher falsch sein. Etwa 200 Jahre vor Euklids Beweis hat Hippasus, ein Schüler von Pythagoras, die Vermutung geäußert, dass d keine rationale Zahl ist. Die Pythagoräer sollen darüber so erzürnt gewesen sein, dass sie Hippasus ertränken ließen.

Ganz analog kann man zeigen (unter Verwendung von Satz 2.52), dass die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl nur dann rational ist, wenn die Zahl selbst schon ein Quadrat war. So sind also z.B. auch $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ ... auch nicht rational.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Die Länge der Diagonale unseres Quadrates ist also keine rationale Zahl, kann aber, wie wir gesehen haben, *beliebig genau durch rationale Zahlen approximiert (d.h. angenähert) werden*: In der Tat können wir zum Beispiel $q = 100$ wählen, und unser Programm liefert uns die Schranken $\frac{141}{100} < d < \frac{142}{100}$. Wählen wir den Wert in der Mitte $d \approx \frac{283}{200}$, so haben wir d bis auf einen Fehler von maximal $\frac{1}{200}$ approximiert, was für viele Zwecke vollkommen ausreichend ist.

Der Ausweg aus dem Dilemma ist also, die Menge der rationalen Zahlen um jene Zahlen zu erweitern, die sich durch rationale Zahlen approximieren lassen:

Definition 2.5 Die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen** besteht aus den rationalen Zahlen und aus Zahlen, die sich beliebig genau durch rationale Zahlen „approximieren" lassen.

Wir wollen hier nicht näher auf die Konstruktion der reellen Zahlen eingehen und uns damit begnügen, dass die reellen Zahlen alle Rechenregeln (inklusive der Ordnung mittels $<$) von den rationalen Zahlen erben und die rationalen Zahlen als Teilmenge enthalten.

Eine etwas konkretere Definition mithilfe von Dezimalzahlen (Kommazahlen) wird in Abschnitt 2.4 gegeben. Die Approximation ergibt sich dann dadurch, dass man je nach gewünschter Genauigkeit nach einer bestimmten Anzahl von Nachkommastellen abbricht.

Reelle Zahlen, die nicht rational sind, nennt man **irrationale Zahlen**. Ihre Existenz hat man, wie der Name zeigt, lange nicht wahrhaben wollen. Zwei der wichtigsten und zugleich bekanntesten irrationalen Zahlen sind die **Euler'sche Zahl**

$$\mathrm{e} = 2.7182818285\ldots$$

und die **Kreiszahl**

$$\pi = 3.1415926535\ldots$$

Der Schweizer Leonhard Euler (1707–1783) war einer der bedeutendsten und produktivsten Mathematiker aller Zeiten. Sein Werk umfasst über 800 Publikationen und ein großer Teil der heutigen mathematischen Symbolik geht auf ihn zurück (z. B. e, π, i, das Summenzeichen, die Schreibweise $f(x)$ für Funktionen).

In der Praxis muss man eine irrationale Zahl immer durch eine rationale Zahl approximieren. Zum Beispiel ist $\pi \approx \frac{22}{7}$ eine gute Näherung, bei der der relative Fehler $\frac{22/7-\pi}{\pi}$ nur ca. 0.04% beträgt. Wie genau der Wert von π sein muss, hängt immer vom betrachteten Problem ab. Falls Sie mit $\pi \approx \frac{22}{7}$ die benötigte Farbmenge für einen runden Tisch ausrechnen, geht das sicher in Ordnung. Verwenden Sie es aber zur Berechnung der Flugbahn einer Mondsonde, so ergibt ein relativer Fehler von 0.04% bei der Entfernung zum Mond von 384 000 km einen Fehler von 155 km, und das könnte bedeuten, dass Ihre Sonde den Mond knapp, aber doch, verfehlt.

Wie schon erwähnt, gilt alles, was wir bis jetzt über rationale Zahlen gelernt haben, auch für reelle Zahlen. Zum Beispiel gilt für die Ordnung:

Satz 2.6 (Rechenregeln für Ungleichungen) Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

- $a < b$ und $b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$
- $a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + c < b + c$
- $a < b \quad \Leftrightarrow \quad ac < bc \qquad$ falls $c > 0$
- $a < b \quad \Leftrightarrow \quad ac > bc \qquad$ falls $c < 0$

Die Regeln bleiben natürlich auch gültig, wenn man $<$ durch $\leq$ ersetzt.

Beispiele:
- $2 < 4$ und $4 < 7$, daher $2 < 7$. Oder: Wenn $x < 4$ und $4 < y$, so folgt $x < y$.
- $x < y + 1$ bedeutet $x - 1 < y$ (auf beiden Seiten wurde $c = -1$ addiert).
- Wenn $x + 10 < 5y$, so ist das gleichbedeutend mit $\frac{1}{5}x + 2 < y$.
- $-2x < 8$ ist äquivalent zu $x > -4$ (auf beiden Seiten wurde mit $c = -\frac{1}{2}$ multipliziert).

Sie können also jederzeit bei einer Ungleichung auf beiden Seiten die gleiche Zahl addieren oder beide Seiten mit der gleichen *positiven* Zahl multiplizieren. Multiplizieren Sie aber beide Seiten mit einer negativen Zahl, so muss das Ungleichzeichen umgedreht werden!

Außerdem können wir nun problemlos Wurzelziehen:

Definition 2.7 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Wenn $b^n = a$, so heißt b die **n-te Wurzel** von a. Man schreibt

$$b = \sqrt[n]{a} \qquad \text{oder auch} \qquad b = a^{\frac{1}{n}}.$$

b ist für jede positive reelle Zahl a eindeutig bestimmt.

Beispiele: $2^4 = 16$, daher ist 2 die vierte Wurzel aus 16: $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$. Oder: $10^3 = 1000$, daher: $\sqrt[3]{1000} = 10$. Außerdem gilt

$$\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}.$$

Beispiel: $\sqrt{4x} = \sqrt{4}\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$. Wird n nicht angegeben, so ist $n = 2$, d.h. $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$. Das Wurzelziehen führt oft auf ein irrationales Ergebnis. So ist ja, wie wir vorhin gesehen haben, $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl.

Die Definition einer Potenz lässt sich nun für beliebige reelle Exponenten erweitern:

Definition 2.8 Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
Eine Potenz mit rationalem Exponenten ist definiert als

$$a^{\frac{n}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^n = (\sqrt[m]{a})^n \qquad \text{für } m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}.$$

Eine Potenz mit *irrationalem* Exponenten $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ definiert man, indem man b je nach gewünschter Genauigkeit durch eine geeignete rationale Zahl annähert:

$$a^b \approx a^{b_i},$$

wobei b_1, b_2, b_3, ... eine Folge von rationalen Zahlen ist, die b approximieren.

Beispiele:
- $5^{\frac{2}{3}} = (5^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{5})^2$.

• 2^π kann man je nach gewünschter Genauigkeit durch eine der rationalen Zahlen $2^{3.14}$, $2^{3.141}$, $2^{3.1415}$, ... nähern.

Es gelten weiterhin die bekannten Regeln

Satz 2.9 (Rechenregeln für Potenzen) Seien $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$. Dann gilt:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \qquad (a^x)^y = a^{(x \cdot y)}, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Beispiele: $2^3 \cdot 2^5 = 2^8$, $10^{-1} \cdot 10^3 = 10^2$, $3^4 \cdot 5^4 = 15^4$, $(a^{\frac{1}{2}})^6 = a^3$, $2^{-4} = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$.

Satz 2.10 Seien $a, b, x \in \mathbb{R}$ mit $a, b, x > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a < b \quad &\Leftrightarrow \quad a^x < b^x, \\ a < b \quad &\Leftrightarrow \quad a^{-x} > b^{-x}. \end{aligned}$$

Die Zahlen -3 und 3 haben, wenn wir sie uns auf einer Zahlengeraden vorstellen, von 0 denselben Abstand, nämlich 3 Längeneinheiten. Diesen Abstand einer reellen Zahl von 0 nennt man den Betrag der Zahl. Er ist – als Länge – immer nichtnegativ.

Definition 2.11 Der **Absolutbetrag** oder kurz **Betrag** einer reellen Zahl a ist definiert durch

$$|a| = a, \quad \text{wenn } a \geq 0 \qquad \text{und} \qquad |a| = -a, \quad \text{wenn } a < 0.$$

Die Schreibweise $|a| = -a$ für $a < 0$ erscheint vielleicht etwas verwirrend, sagt aber nichts anderes als: Wenn a negativ ist, dann ist der Betrag gleich der positiven Zahl $-a$.

Beispiel: Für $a = -3$ ist $|a| = |-3| = -(-3) = 3 = -a$. Insbesondere ist $|3| = |-3| = 3$. Der Absolutbetrag $|a - b|$ wird als **Abstand** der Zahlen a und b bezeichnet. Beispiele: Der Abstand von 3 und -2 ist $|3 - (-2)| = 5$; der Abstand von -3 und 0 ist $|-3 - 0| = 3$.

Beispiel 2.12 Lösen Sie die Ungleichung für $a, b \in \mathbb{R}$:
a) $a^2 < 25$ b) $a^3 < 8$ c) $a^2 < b^2$

Lösung zu 2.12 a) Wir machen eine Fallunterscheidung:
Sei $a > 0$: $a^2 < 25$ ist dann nach Satz 2.10 äquivalent zu $a < 5$.
Sei $a = 0$: Dann erfüllt a die Ungleichung, denn $0 < 25$ ist wahr.
Sei $a < 0$: Dann ist $-a > 0$ und wir können wieder Satz 2.10 anwenden: $a^2 < 25$ ist dasselbe wie $(-a)^2 < 25$. Das ist äquivalent zu $-a < 5$, also $a > -5$. Insgesamt ist die Lösung $-5 < a < 5$ oder äquivalent $|a| < 5$.
b) Wie vorher gilt im Fall $a > 0$, dass $a < 2$ und auch im Fall $a = 0$ ist die Ungleichung erfüllt. Im Fall $a < 0$ ist $a^3 < 0$ und somit die Ungleichung ebenfalls immer erfüllt. Insgesamt ist die Lösung: $a < 2$.
c) Analog wie bei a) erhält man $|a| < |b|$. ■

Eine Abschätzung, die oft verwendet wird, sagt aus, dass der Betrag einer Summe kleiner oder gleich als die Summe der Beträge ist:

Satz 2.13 (Dreiecksungleichung) Für zwei beliebige reelle Zahlen a und b gilt

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Haben beide Zahlen gleiches Vorzeichen, so gilt Gleichheit. Haben sie aber verschiedenes Vorzeichen, so hebt sich links ein Teil weg, und $|a + b|$ ist strikt kleiner als $|a|+|b|$. Beispiele: $|2+3| = |2|+|3|$; $|-2-3| = |-2|+|-3|$; $|2-3| = |-1| < |2|+|-3|$.

Nun werden wir noch einige Begriffe und Schreibweisen für reelle Zahlen einführen, die Ihnen aber sicher schon bekannt sind. Zunächst kommen einige Abkürzungen für bestimmte Teilmengen der reellen Zahlen:

$$\begin{array}{rcll} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & \text{heißt } \textbf{abgeschlossenes Intervall,} \\ [a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} & \text{und} \\ (a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} & \text{heißen } \textbf{halboffene Intervalle,} \\ (a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} & \text{heißt } \textbf{offenes Intervall}. \end{array}$$

Man nennt sie **beschränkte Intervalle**, im Gegensatz zu **unbeschränkten Intervallen**, die „unendlich lang“ sind. Diese unendliche Länge drückt man mit dem Unendlich-Zeichen ∞ aus:

$$\begin{array}{rcl} [a,\infty) & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\ (a,\infty) & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ (-\infty,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\ (-\infty,b) & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}. \end{array}$$

Beispiele: $[0, 1]$ enthält alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 inklusive 0 und 1. Hingegen ist in $(0, 1]$ die 0 nicht enthalten. Das Intervall $(-\infty, 0)$ enthält alle negativen reellen Zahlen.

Anstelle einer runden Klammer wird auch oft eine umgedrehte eckige Klammer verwendet: $(a, b] =]a, b]$, $[a, b) = [a, b[$, $(a, b) =]a, b[$.

Definition 2.14 Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ von reellen Zahlen heißt **nach oben beschränkt**, falls es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$x \leq K \qquad \text{für alle } x \in M.$$

Eine solche Zahl K wird als eine **obere Schranke** von M bezeichnet.

Eine Menge muss nicht nach oben beschränkt sein. Falls sie es ist, so nennt man die *kleinste* obere Schranke das **Supremum** von M. Man schreibt für das Supremum kurz $\sup M$. Ist M nach oben beschränkt, so ist das Supremum eine eindeutig bestimmte Zahl:

Satz 2.15 (Vollständigkeit der reellen Zahlen) Jede nach oben beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Dieser Satz gilt nicht in $\mathbb{Q}$, denn zum Beispiel die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ hat eben kein Supremum *in* $\mathbb{Q}$. Das Supremum $\sqrt{2}$ ist eine reelle Zahl. Die reellen Zahlen sind in diesem Sinn vollständig im Vergleich zu $\mathbb{Q}$.

Ist M nicht nach oben beschränkt, so schreibt man dafür $\sup M = \infty$. Analog:

Definition 2.16 $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **nach unten beschränkt**, falls es eine Zahl $k \in \mathbb{R}$ mit

$$x \geq k \qquad \text{für alle } x \in M$$

gibt. Eine solche Zahl k wird dann als eine **untere Schranke** von M bezeichnet.

Die *größte* untere Schranke heißt das **Infimum** von M, kurz $\inf M$. Es ist ebenfalls eindeutig bestimmt (wir können $\inf M = -\sup(-M)$ mit $-M = \{-x | x \in M\}$ setzen). Ist M nicht nach unten beschränkt, so schreibt man $\inf M = -\infty$. Wenn M sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt ist, so nennt man M kurz **beschränkt**. Wenn M nach oben oder unten nicht beschränkt ist, so nennt man M **unbeschränkt**..

Beispiel 2.17 Beschränkte und unbeschränkte Mengen
Finden Sie (falls vorhanden) Beispiele für obere und untere Schranken, sowie das Supremum bzw. Infimum folgender Mengen: a) $(3, 4)$ b) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{Z}$

Lösung zu 2.17

a) Für alle Zahlen aus dem offenen Intervall $(3, 4)$ gilt: $x \geq 3$ (es gilt sogar $x > 3$, aber das ist für die Bestimmung des Infimum unwichtig). Daher ist 3 eine untere Schranke von $(3, 4)$. Jede reelle Zahl, die kleiner als 3 ist, ist ebenfalls eine untere Schranke von $(3, 4)$, z. B. -17. Von allen unteren Schranken ist 3 aber die *größte*, also $\inf(3, 4) = 3$. Analog ist 4 die kleinste obere Schranke: $\sup(3, 4) = 4$. Weitere obere Schranken sind alle reelle Zahlen, die größer als 4 sind, z. B. 291.

b) Für alle natürlichen Zahlen x gilt: $x \geq 1$. Daher ist 1 eine untere Schranke von $\mathbb{N}$. Jede reelle Zahl, die kleiner als 1 ist, z. B. $-\frac{1}{2}$, ist ebenfalls eine untere Schranke. Es gibt aber keine Zahl, die größer als 1 ist, und die gleichzeitig auch untere Schranke von $\mathbb{N}$ ist. Also ist 1 die *größte* untere Schranke von $\mathbb{N}$, d.h., $1 = \inf \mathbb{N}$. Nach oben sind die natürlichen Zahlen aber nicht beschränkt (denn es gibt keine größte natürliche Zahl). Das schreibt man in der Form: $\sup \mathbb{N} = \infty$.

c) Die ganzen Zahlen sind weder nach unten noch nach oben beschränkt: $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, $\sup \mathbb{Z} = \infty$. ■

Beachten Sie, dass das Supremum von M nicht unbedingt auch Element von M sein muss (z. B. $\sup(3, 4) = 4 \notin (3, 4)$). Wenn jedoch das Supremum auch in M liegt, dann ist es gleichzeitig auch das **größte Element** von M. Man nennt das größte Element von M das **Maximum** von M, geschrieben $\max M$. Analog muss auch das Infimum von M nicht in M liegen. Falls aber das Infimum in M liegt, so ist es das **kleinste Element** von M, genannt **Minimum** von M, kurz geschrieben $\min M$.

Beispiel 2.18 Maximum und Minimum

a) Das offene Intervall $(3, 4)$ ist beschränkt, besitzt aber kein Minimum, denn 3 liegt nicht im Intervall. Ebenso besitzt es kein Maximum.

b) Das abgeschlossene Intervall $[3, 4]$ besitzt das kleinste Element 3, also $\inf[3, 4] = \min[3, 4] = 3$ und das größte Element 4, d.h. $\sup[3, 4] = \max[3, 4] = 4$.

c) Das Minimum von $\mathbb{N}$ ist 1, also $\min \mathbb{N} = 1$.

Definition 2.19 Die **Abrundungsfunktion** $\lfloor x \rfloor$ ordnet jeder reellen Zahl x die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist, zu:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}.$$

Analog ordnet die **Aufrundungsfunktion** $\lceil x \rceil$ jeder reellen Zahl x die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist zu:

$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\}.$$

Die Abrundungsfunktion wird auch **Gaußklammer** genannt, nach dem deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777–1855). Die englischen Bezeichnungen für $\lfloor x \rfloor$ und $\lceil x \rceil$ sind **floor** („Boden“) bzw. **ceiling** („Zimmerdecke“). Es gilt übrigens $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

Beispiel 2.20 Es gilt $\lfloor 1.7 \rfloor = 1$, $\lceil 1.7 \rceil = 2$ und $\lfloor -1.7 \rfloor = -2$, $\lceil -1.7 \rceil = -1$.

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Für unsere Zahlenmengen gilt bisher $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ und man könnte wirklich glauben, dass wir nun in der Lage sind, *jede* Gleichung zu lösen. Betrachten wir aber zum Beispiel die Gleichung $x^2+1 = 0$, so müssen wir wohl oder übel einsehen, dass es keine reelle Zahl gibt, deren Quadrat gleich -1 ist. Um diese Gleichung lösen zu können, müssen wir weitere Zahlen einführen:

Definition 2.21 Die Menge $\mathbb{C} = \{x+\mathrm{i}\cdot y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ heißt Menge der **komplexen Zahlen**. Die Zahl $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ wird **imaginäre Einheit** genannt. Sie ist definiert durch: $\mathrm{i}^2 = -1$. Man nennt x den **Realteil** beziehungsweise y den **Imaginärteil** der komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}\, y$ und schreibt

$$\mathrm{Re}(z) = x, \qquad \mathrm{Im}(z) = y.$$

Beispiel: $3-5\mathrm{i}$ ist die komplexe Zahl mit Realteil 3 und Imaginärteil -5. Achtung: Der Imaginärteil ist die reelle Zahl -5, und nicht $-5\mathrm{i}$!

In der Elektrotechnik wird die imaginäre Einheit mit j anstelle von i bezeichnet, denn das Symbol i ist dort bereits für die Stromstärke vergeben.

Die reellen Zahlen erscheinen Ihnen vielleicht als technisches Ärgernis, mit dem man leben muss, weil die Wurzel aus 2 sich eben nicht als Bruch schreiben lässt. Wozu aber soll es gut sein, dass man für die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ *formal* eine Lösung angeben kann?

Auch die Mathematik ist lange ohne komplexe Zahlen ausgekommen. Sie wurden zuerst nur in Zwischenrechnungen, bei denen sich am Ende alles Nicht-Reelle weggehoben hat, verwendet (z. B. zur Lösung von Gleichungen). Im Laufe der Zeit hat man aber erkannt, dass viele Berechnungen einfach und effizient werden, wenn man komplexe Zahlen verwendet (z. B. in der Elektrotechnik oder der Signalverarbeitung sind sie heute nicht mehr wegzudenken). Der französische Mathematiker Jacques Salomon Hadamard (1865–1963) hat sogar einmal gemeint: „Der kürzeste Weg zwischen zwei reellen Wahrheiten führt durch die komplexe Ebene.“

Ein Vergleich: In einer zweidimensionalen Welt lebend würden Sie wahrscheinlich jeden Mathematiker belächeln, der erzählt, dass Kreis und Rechteck eigentlich ein-und dasselbe Objekt darstellen; nur einmal von der Seite, und einmal von oben betrachtet. Wenn ich Sie dann aber in die dreidimensionale Welt hole und Ihnen einen Zylinder zeige, werden Sie wohl Ihre Meinung über die Mathematiker revidieren müssen. Ähnlich, wie ein Zylinder einen Kreis und ein Rechteck verknüpft, sind in der komplexen Welt die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen verknüpft; eine Erkenntnis, die mit einem Schlag eine Vielzahl von praktischen Resultaten liefert!

Die reellen Zahlen sind gerade die komplexen Zahlen mit Imaginärteil 0. Somit gilt: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Die komplexen Zahlen können in einer Ebene veranschaulicht werden (Abbildung 2.2), der sogenannten **Gauß'schen Zahlenebene**.

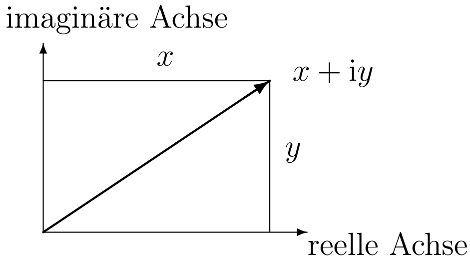

Abbildung 2.2: Gauß'sche Zahlenebene

Eine komplexe Zahl $x+\mathrm{i}y$ kann also als Punkt in der Gauß'schen Zahlenebene betrachtet werden. In diesem Sinn kann $x+\mathrm{i}y$ auch als geordnetes Paar von reellen Zahlen (x, y) angegeben werden.

Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen folgen aus den entsprechenden Operationen für reelle Zahlen:

$$\begin{aligned}
(x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) &= (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \\
(x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + y_1x_2) \\
\frac{1}{x + \mathrm{i}y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Man kann mit komplexen Zahlen also wie mit reellen Zahlen rechnen. Die Zahl i wird dabei wie eine Variable behandelt, man muss nur berücksichtigen, dass $\mathrm{i}^2 = -1$ ist.

Aber Achtung: Im Gegensatz zu den reellen Zahlen können zwei komplexe Zahlen nicht ihrer Größe nach verglichen werden (d.h., nicht geordnet werden). Der Ausdruck $z_1 \leq z_2$ macht also für komplexe Zahlen z_1, z_2 keinen Sinn!

Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ benötigt man oft ihre **konjugiert komplexe Zahl**

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}y$$

(sie wird oft auch mit z^* bezeichnet). Real- und Imaginärteil lassen sich damit als

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$$

schreiben und es gelten folgende Rechenregeln:

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Der **Absolutbetrag** einer komplexen Zahl ist

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Für den Spezialfall, dass z reell ist, ergibt sich daraus der vorhin definierte Absolutbetrag für reelle Zahlen. Die **Dreiecksungleichung** gilt auch für komplexe Zahlen:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Außerdem gilt

$$|\overline{z}| = |z|, \qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Nach dem Satz von Pythagoras entspricht $|z|$ der Länge des Pfeils, der z in der Gauß'schen Zahlenebene darstellt. Die komplexe Konjugation entspricht der Spiegelung des Pfeils an der reellen Achse.

Beispiel 2.22 (→CAS) Rechnen mit komplexen Zahlen
Berechnen Sie für die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = 3 - \mathrm{i}$:
a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 z_2$ c) $\overline{z_2}$ d) $|z_2|$ e) $\frac{z_1}{z_2}$

Lösung zu 2.22 Wir rechnen wie gewohnt und betrachten dabei i zunächst als Variable. Wann immer wir möchten, spätestens jedoch im Endergebnis, verwenden wir $\mathrm{i}^2 = -1$:

a) $z_1 + z_2 = 1 + 2\mathrm{i} + 3 - \mathrm{i} = 4 + \mathrm{i}$.
b) $z_1 z_2 = 3 - \mathrm{i} + 6\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 3 + 5\mathrm{i} - 2 \cdot (-1) = 5 + 5\mathrm{i}$.
c) $\overline{z_2} = 3 + i$, es dreht sich also das Vorzeichen des Imaginärteils um.
d) $|z_2| = \sqrt{(3-i)(3+i)} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.
e) Wir multiplizieren Zähler und Nenner mit der konjugiert komplexen Zahl von $3 - \mathrm{i}$. Durch diesen „Trick“ wird der Nenner eine reelle Zahl:

$$\frac{1 + 2\mathrm{i}}{3 - \mathrm{i}} = \frac{(1 + 2\mathrm{i})(3 + \mathrm{i})}{(3 - \mathrm{i})(3 + \mathrm{i})} = \frac{1 + 7\mathrm{i}}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}\mathrm{i}.$$

■

Ganzzahlige Potenzen sind analog wie für reelle Zahlen definiert und erfüllen auch die gleichen Rechenregeln. Bei gebrochenen Potenzen (z. B. Wurzelziehen) muss man aber vorsichtig sein: Wurzeln lassen sich zwar analog definieren, aber die gewohnten Rechenregeln (Satz 2.9) stimmen zum Teil nicht mehr. Mehr dazu, und insbesondere wie man komplexe Wurzeln berechnet, werden wir in Abschnitt 19.1 erfahren.

2.2 Summen und Produkte

Definition 2.23 Für die Summe von reellen (oder komplexen) Zahlen $a_0, \dots, a_n$ schreibt man abkürzend

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \ldots + a_n, \quad \text{gelesen „Summe über alle } a_k \text{ für } k \text{ gleich 0 bis } n\text{“.}$$

Das Summenzeichen $\sum$ ist das griechische Symbol für „S“ (großes Sigma).

Die einzelnen Summanden ergeben sich dadurch, dass der „Laufindex“ k alle ganzen Zahlen von 0 bis zu einer bestimmten Zahl n durchläuft. Anstelle von k kann jeder beliebige Buchstabe für den Laufindex verwendet werden. Der Laufindex muss auch nicht bei 0, sondern kann bei jeder beliebigen ganzen Zahl beginnen.

Beispiel 2.24 Summenzeichen
Berechnen Sie:
a) $\sum_{k=1}^{4} k^2$ b) $\sum_{k=0}^{4} (-1)^k 2^k$ c) $\sum_{m=1}^{5} (-1)^{m+1}(2m)$
Schreiben Sie mithilfe des Summenzeichens:
d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{20}$ e) $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11$ f) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

Lösung zu 2.24

a) Wir erhalten alle Summanden, indem wir für k nacheinander $1, 2, 3$ und 4 einsetzen: $\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$.
b) Der Faktor $(-1)^k$ bewirkt hier, dass das Vorzeichen der Summanden abwechselt:
$\sum_{k=0}^{4} (-1)^k 2^k = (-1)^0 \cdot 2^0 + (-1)^1 \cdot 2^1 + (-1)^2 \cdot 2^2 + (-1)^3 \cdot 2^3 + (-1)^4 \cdot 2^4$ $= 2^0 - 2^1 + 2^2 - 2^3 + 2^4 = 11$.
c) Hier haben wir den Laufindex zur Abwechslung mit m bezeichnet:
$\sum_{m=1}^{5} (-1)^{m+1}(2m) = (-1)^2 \cdot (2 \cdot 1) + (-1)^3 \cdot (2 \cdot 2) + \ldots + (-1)^6 \cdot (2 \cdot 5) = 2 - 4 + 6 - 8 + 10 = 6$. Der Term $2m$ hat uns lauter gerade Zahlen erzeugt.
d) Der k-te Summand kann als $\frac{1}{k}$ geschrieben werden. Für den ersten Summanden muss $k = 1$ sein, für den letzten muss $k = 20$ sein. Daher läuft k von 1 bis 20: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{20} = \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k}$.
e) Hier ist der k-te Summand immer eine ungerade Zahl, die wir mit $2k + 1$ erzeugen können. Der Index k muss von 0 bis 5 laufen, damit der erste Summand 1 und der letzte Summand 11 ist: $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 = (-1)^0 \cdot (2 \cdot 0 + 1) + (-1)^1 \cdot (2 \cdot 1 + 1) + \ldots + (-1)^5 \cdot (2 \cdot 5 + 1) = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k (2k+1)$.
f) Der k-te Summand ist $\frac{1}{2^k}$ und k muss von 0 bis 4 laufen:
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{2^k}$.

■

Aus dem Assoziativ- und Distributivgesetz für reelle Zahlen folgt, dass man Summen gliedweise addieren und konstante Faktoren herausheben kann:

Satz 2.25 (Rechenregeln für Summen) Für $n \in \mathbb{N}$, reelle oder komplexe Zahlen $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ und c gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) &= \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k, \\ \sum_{k=0}^{n} c\, a_k &= c \sum_{k=0}^{n} a_k. \end{aligned}$$

Beispiel 2.26 Rechenregeln für Summen

a) Hier kann die Summe „auseinander gezogen“ und leichter berechnet werden, weil wir auf das Ergebnis von Beispiel 2.24 a) zurückgreifen können:

$$\sum_{k=1}^{4}(k^2 + k) = \sum_{k=1}^{4} k^2 + \sum_{k=1}^{4} k = 30 + (1 + 2 + 3 + 4) = 40.$$

b) Hier kann 3 vor die Summe gezogen werden und damit wieder mithilfe unserer Vorarbeit in Beispiel 2.24 a)

$$\sum_{k=0}^{4} 3k^2 = 3 \sum_{k=0}^{4} k^2 = 3 \cdot 30 = 90$$

berechnet werden.

Summenzeichen können auch verschachtelt werden:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{j} (-1)^j 2^k &= \sum_{k=1}^{1}(-1)^1 2^k + \sum_{k=1}^{2}(-1)^2 2^k + \sum_{k=1}^{3}(-1)^3 2^k = \\ &= (-2) + (2 + 4) + (-2 - 4 - 8) = -10. \end{aligned}$$

Hier wurde einfach schrittweise aufgelöst. Zuerst wurde die äußere Summe ausgeschrieben, wodurch drei Summanden (für $j = 1, 2, 3$) entstanden. Dann wurde noch das Summenzeichen jedes Summanden aufgelöst, indem für k eingesetzt wurde. Sind die Grenzen der Indizes konstant, so ist sogar die Reihenfolge, in der die Summen ausgewertet werden, egal (denn nach dem Kommutativgesetz spielt die Reihenfolge in der die Zahlen addiert werden keine Rolle):

Satz 2.27 (Vertauschung von Summen) Für $m, n \in \mathbb{N}$, und reelle oder komplexe Zahlen $a_{00}, \ldots, a_{mn}$ gilt:

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{jk} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{jk}$$

Auch für Produkte von reellen (oder komplexen) Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ gibt es eine abkürzende Schreibweise:

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot a_1 \cdots a_n, \quad \text{gelesen „Produkt über alle } a_k \text{ für } k \text{ gleich 0 bis } n\text{“}$$

Das Produktzeichen $\prod$ ist das griechische Symbol für „P“ (großes Pi).

Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen wird als **Fakultät** bezeichnet

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Beispiel: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Man vereinbart $0! = 1$. Im Gegensatz zur Summe über die ersten n natürlichen Zahlen, kann für dieses Produkt keine einfachere Formel mehr angegeben werden.

2.3 Vollständige Induktion

Ich behaupte jetzt einfach, dass folgende Formel gilt:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wie überzeuge ich Sie (und mich) davon? Wir könnten als Erstes einmal nachrechnen, ob die Formel für $n = 1$ richtig ist: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ stimmt. Für $n = 2$ erhalten wir: $1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}$, stimmt also auch. Auf diese Weise können wir die Formel für weitere Werte von n überprüfen. Nie werden wir aber so die *Gewissheit* haben, dass sie für *jedes* n stimmt. Der Ausweg aus unserem Dilemma ist:

Satz 2.28 (Induktionsprinzip oder Vollständige Induktion)
Die Aussage $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn gilt:

1) **Induktionsanfang**: $A(1)$ ist wahr.

2) **Induktionsschritt**: Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.
In Worten: Wenn die Aussage für (irgend)ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, so ist sie auch für die nachfolgende Zahl $n + 1$ wahr.

Das Induktionsprinzip kann mit dem Dominoeffekt verglichen werden: Dabei müssen wir den ersten Stein anstoßen (Induktionsanfang) und es muss sichergestellt sein (der Induktionsschritt gilt), dass ein beliebiger Stein beim Umfallen den nächsten umwirft.

Bemerkungen:

- Der Induktionsanfang muss nicht bei 1 liegen. Man kann damit auch Aussagen beweisen, die für $n \geq n_0$ mit einem $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gelten. In diesem Fall muss als Induktionsanfang $A(n_0)$ bewiesen werden und der Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ muss dann für beliebiges $n \geq n_0$ gezeigt werden.

- Der Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ wird auch als **Induktionsschluss** oder **„Schluss von n auf $n+1$"** bezeichnet. Man nennt weiters $A(n)$ **Induktionsvoraussetzung** (abgekürzt: IV) und $A(n+1)$ **Induktionsbehauptung** (kurz: IB). Daher schreibt man für den Induktonsschritt auch (IV) $\Rightarrow$ (IB).

- Die Aussage $A(n)$, die man beweisen möchte, kann beliebige Form haben, z.B. eine Gleichung sein wie oben, eine Ungleichung, eine Teilbarkeitsaussage, usw. Wesentlich ist nur, dass sie für alle Zahlen ab einem Anfangswert behauptet wird, die im Abstand 1 voneinander liegen. Man könnte also auch Aussagen für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{Z}$, mithilfe des Induktionsprinzips beweisen.

- Anstatt der Richtigkeit von $A(n)$ kann als Induktionsvoraussetzung sogar die Richtigkeit von $A(k)$ für alle $n_0 \leq k \leq n$ vorausgesetzt werden.

Beispiel 2.29 Induktionsprinzip
Zeigen Sie, dass die Formel

$$A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösung zu 2.29

a) Induktionsanfang: Wir überprüfen $A(1)$, also die Formel für den Anfangswert $n = 1$: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ ist richtig.
b) Induktionsschritt:
   • Wir nehmen an, dass wir ein $n \in \mathbb{N}$ gefunden haben, für das die Induktionsvoraussetzung $A(n)$ gilt, also:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{IV}$$

- Es ist nun zu zeigen, dass die Induktionsbehauptung $A(n+1)$ gilt, d.h.:

$$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{IB}$$

- Beweis von (IV) $\Rightarrow$ (IB): Wir formen die linke Seite von (IB) um, bis wir (IV) verwenden können:

$$\begin{aligned}\underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{=\frac{n(n+1)}{2}\text{ nach (IV)}}+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)= \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Beim zweiten „=“ haben wir auf gleichen Nenner gebracht, und im dritten Schritt $(n+1)$ im Zähler herausgehoben. Am Ende erhalten wir die rechte Seite von (IB), wie zu zeigen war.

■

Der Mathematiker Carl Friedrich Gauß bekam in der Volksschule die Aufgabe, die ersten hundert natürlichen Zahlen zu addieren. Sein Lehrer hoffte, er könnte die Klasse damit eine Zeit beschäftigen. Leider hat das nicht funktioniert, denn der kleine Gauß war nach kürzester Zeit fertig. Er hatte erkannt, dass die größte und die kleinste Zahl addiert $1+100=101$ ergibt, genauso wie die zweite und die zweitletzte Zahl $2+99=101$, und so weiter. Die Summe kann also aus 50 Summanden der Größe 101 gebildet werden und das Ergebnis ist somit 5050. Mit diesem Trick könnte man das letzte Beispiel auch ohne vollständige Induktion lösen.

Zuletzt noch ein Beispiel zur Anwendung von Satz 2.25:

> **Beispiel 2.30 Rechenregeln für Summen**
> Berechnen Sie die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen.

Lösung zu 2.30 Wir suchen eine Formel für $1+3+\cdots+2n-1$, oder kompakt angeschrieben:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=?$$

Wir könnten versuchen, die Formel zu erraten und diese dann mit Induktion beweisen. Aber mit den Rechenregeln für Summen aus Satz 2.25 und unter Verwendung der Formel, die wir im Beispiel 2.29 gerade bewiesen haben, erhalten wir das Ergebnis schneller:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=2\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2.$$

■

2.4 Stellenwertsysteme

Gewöhnlich schreiben wir Zahlen mithilfe der zehn Ziffern 0, ..., 9. Mit der Schreibweise 26.73 meinen wir zum Beispiel die folgende Summe:

$$26.73 = 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}.$$

Die Schreibweise 26.73 ist also nichts anderes als eine abgekürzte Schreibweise für eine Summe von Potenzen von 10.

Definition 2.31 Wir nennen eine Zahl in der Darstellung

$$a_n \cdots a_0.a_{-1} \cdots a_{-m} = \sum_{j=-m}^{n} a_j 10^j, \qquad a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

eine **Dezimalzahl**.

(Achtung: Zwischen a_0 und a_{-1} steht der Dezimalpunkt!) Die Stelle einer Ziffer innerhalb der Zahl gibt an, mit welcher Potenz von 10 sie zu multiplizieren ist („Einerstelle“, „Zehnerstelle“, „Nachkommastellen“, ...). Man nennt ein derartiges System allgemein auch **Stellenwertsystem**.

Im Gegensatz dazu haben die Römer für bestimmte natürliche Zahlen Symbole (I, V, X, L, C, ...) benutzt, die – unabhängig von ihrer Lage innerhalb einer Zahlendarstellung – immer denselben Wert haben. Wie man sich vorstellen kann, war das Rechnen in diesem System aber ziemlich schwierig. (Böse Zungen behaupten sogar, das sei der Grund für den Untergang des römischen Weltreichs gewesen.)

Rationale Zahlen sind genau jene Zahlen, die entweder **endlich viele** oder **unendlich viele periodische** Nachkommastellen haben.

Das können wir uns leicht veranschaulichen:
- $\frac{7}{4} = 7 : 4 = 1.75$. Die Division bricht ab, weil der Rest 0 wird. Umgekehrt können wir leicht 1.75 als Bruch darstellen: $1.75 = \frac{175}{100} = \frac{7}{4}$.
- $\frac{5}{27} = 5 : 27 = 0.185185185\ldots = 0.\overline{185}$. Die Division bricht nie ab. Die Reste müssen sich aber irgendwann wiederholen, weil ein Rest immer kleiner als der Nenner ist und es somit nur endlich viele Möglichkeiten dafür gibt. Es entsteht eine **periodische** Zahl. Hier lässt sich umgekehrt die Bruchdarstellung von $0.\overline{185}$ nicht so ohne weiteres durch Hinsehen finden.

Beispiel 2.32 Rationale Zahlen als Kommazahlen geschrieben

a) $\frac{7}{4} = 1.75$	b) $\frac{4}{30} = 0.133333\ldots = 0.1\overline{3}$	c) $\frac{2}{11} = 0.18181\ldots = 0.\overline{18}$
d) $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0.\overline{3}$	e) $\frac{4}{9} = 0.\overline{4}$	f) $1 = \frac{9}{9} = 0.\overline{9}$

Irrationale Zahlen, also Zahlen, die nicht als Bruch geschrieben werden können, haben immer **unendlich viele nicht-periodische** Nachkommastellen.

Beispiel 2.33 Irrationale Zahlen als Kommazahlen geschrieben
a) $\pi = 3.141592653\ldots$ b) $\sqrt{2} = 1.4142135623\ldots$

Wir hätten also die reellen Zahlen auch als die Menge aller Dezimalzahlen mit endlich vielen oder unendlich vielen Nachkommastellen einführen können.

Dabei ist zu beachten, dass eine Zahl verschiedene Darstellungen haben kann, z. B. $1 = 0.\overline{9}$.

Die Approximation einer irrationalen Zahl durch eine rationale Zahl erhält man, indem man die unendlich vielen Nachkommastellen der irrationalen Zahl – je nach gewünschter Genauigkeit – an irgendeiner Stelle abbricht. So genügt es etwa für viele Anwendungen, für π die rationale Zahl 3.14 zu verwenden.

Kommen wir nun zurück zum Begriff des Stellenwertsystems. Die Basis „10" hat sich vor allem für das alltägliche Rechnen als sehr praktisch erwiesen (nicht zuletzt deshalb, weil der Mensch zehn Finger hat). Es ist aber natürlich möglich, eine beliebige andere natürliche Zahl b als Basis zu wählen und Zahlen in der Form

$$\sum_{j=-m}^{n} a_j b^j, \qquad a_j \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$$

darzustellen. Insbesondere ist für Computer, die nur *zwei* Finger besitzen („Spannung" und „keine Spannung"), das System mit Basis 2 vorteilhafter. Dieses System wird **Dualsystem** (auch **Binärsystem**) genannt und Zahlen, die im Dualsystem dargestellt werden, heißen **Dualzahlen** (oder **Binärzahlen**). Sie enthalten nur zwei Ziffern 0 und 1, die den beiden Zuständen entsprechen.

Wussten Sie übrigens, dass man die Menschen in 10 Gruppen einteilen kann: in jene, die Dualzahlen kennen und jene, die sie nicht kennen;-)

Beispiel 2.34 Dualzahlen

a) Stellen Sie die Dualzahl 1101 im Dezimalsystem dar.
b) Stellen Sie die Dezimalzahl 36.75 im Dualsystem dar.

Lösung zu 2.34

a) $(1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (13)_{10}$.
Wenn nicht klar ist, in welchem Zahlensystem eine Ziffernfolge zu verstehen ist, dann kann man, so wie hier, einen tiefergestellten Index verwenden.
b) $(36.75)_{10} = 32 + 4 + 0.5 + 0.25 = 2^5 + 2^2 + 2^{-1} + 2^{-2} = (100100.11)_2$.
Das Komma kennzeichnet in jedem Stellenwertsystem den Beginn der negativen Potenzen.

■

In der Datenverarbeitung sind neben dem Dualsystem auch das **Oktalsystem** und das **Hexadezimalsystem** gebräuchlich. Im Oktalsystem wird 8 als Basis verwendet, im Hexadezimalsystem wird 16 verwendet. Da das Hexadezimalsystem auf einem Vorrat von 16 Ziffern aufbaut, muss man zu den zehn Ziffern $0, \dots, 9$ noch sechs weitere Ziffern hinzufügen. Üblicherweise werden dazu die Buchstaben A, B, C, D, E, F verwendet, die den Dezimalzahlen $10, \dots, 15$ entsprechen. Die Bedeutung dieser beiden Systeme in der Datenverarbeitung liegt vor allem darin, dass man mit ihrer Hilfe Dualzahlen übersichtlicher schreiben kann. Denn eine Ziffer im Hexadezimalsystem bzw. Oktalsystem entspricht genau einem Block aus vier bzw. drei Ziffern im Dualsystem.

Beispiel 2.35 (→CAS) Oktalzahlen, Hexadezimalzahlen

a) Stellen Sie die Hexadezimalzahl $(FAD)_{16}$ im Dezimalsystem dar.
b) Stellen Sie die Hexadezimalzahl $(FAD)_{16}$ im Dualsystem dar.
c) Stellen Sie die Oktalzahl $(67)_8$ im Dezimalsystem dar.

Lösung zu 2.35

a) $(FAD)_{16} = 15 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = (4013)_{10}$.
b) Hier können wir verwenden, dass jede Ziffer im Hexadezimalsystem einem Block aus vier Ziffern im Dualsystem entspricht: $(F)_{16} = (1111)_2$, $(A)_{16} = (1010)_2$, $(D)_{16} = (1101)_2$. Die gesuchte Dualdarstellung erhalten wir nun durch Aneinanderreihung dieser Blöcke: $(FAD)_{16} = (111110101101)_2$.
c) $(67)_8 = 6 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = (55)_{10}$.

■

Die Umwandlung vom Dezimalsystem in ein anderes Zahlensystem von Hand funktioniert am schnellsten, wenn man beachtet, dass Division durch die Basis das Komma um eine Stelle nach links und Multiplikation mit der Basis das Komma um eine Stelle nach rechts verschiebt.

Im Zehnersystem überlegt: Wird die Dezimalzahl 234.0 durch 10 dividiert, so verschiebt sich die Einerstelle 4 hinter das Komma: 23.4. Der Rest bei Division durch 10 ist also gerade die Einerstelle (im Dezimalsystem) der Zahl 234. Wenn wir die Kommastelle von 23.4 weglassen, und 23.0 nochmals durch 10 dividieren, so erhalten wir als Rest die Zehnerstelle von 234 usw.

Analog funktioniert es, wenn wir die Nachkommastellen von 0.51 erhalten möchten: Wir multiplizieren mit 10 und erhalten 5.1. Der Überlauf 5 links vom Komma ist gerade der Koeffizient von 10^{-1}, usw.

Hier gleich ein Beispiel dazu:

Beispiel 2.36 Umwandlung einer Dezimalzahl ins Dualsystem

a) Stellen Sie die Dezimalzahl 59 im Dualsystem dar.
b) Stellen Sie die Dezimalzahl 0.1 im Dualsystem dar.
c) Stellen Sie die Dezimalzahl 59.1 im Dualsystem dar.

Lösung zu 2.36

a) Wir dividieren fortlaufend durch 2 und notieren die Reste:

$$\begin{aligned}
59 : 2 &= 29 \quad \text{Rest } 1 \quad \ldots \text{ Koeffizient von } 2^0\\
29 : 2 &= 14 \quad \text{Rest } 1 \quad \ldots \text{ Koeffizient von } 2^1\\
14 : 2 &= 7 \quad \text{Rest } 0 \quad \ldots \text{ Koeffizient von } 2^2\\
7 : 2 &= 3 \quad \text{Rest } 1 \quad \ldots \text{ Koeffizient von } 2^3\\
3 : 2 &= 1 \quad \text{Rest } 1 \quad \ldots \text{ Koeffizient von } 2^4\\
1 : 2 &= 0 \quad \text{Rest } 1 \quad \ldots \text{ Koeffizient von } 2^5
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich (alle Reste angeschrieben): $(59)_{10} = (111011)_2$.

b) Wir multiplizieren fortlaufend mit 2 und notieren die Überläufe:

$$\begin{aligned}
0.1 \cdot 2 &= 0.2 \quad \text{Überlauf } 0 \quad \ldots \text{ Koeffizient von } 2^{-1}\\
0.2 \cdot 2 &= 0.4 \quad \text{Überlauf } 0 \quad \ldots \text{ Koeffizient von } 2^{-2}\\
0.4 \cdot 2 &= 0.8 \quad \text{Überlauf } 0 \quad \ldots \text{ Koeffizient von } 2^{-3}\\
0.8 \cdot 2 &= 1.6 \quad \text{Überlauf } 1 \quad \ldots \text{ Koeffizient von } 2^{-4}\\
0.6 \cdot 2 &= 1.2 \quad \text{Überlauf } 1 \quad \ldots \text{ Koeffizient von } 2^{-5}\\
0.2 \cdot 2 &= 0.4 \quad \text{Überlauf } 0 \quad \ldots \text{ Koeffizient von } 2^{-6}\\
&\ldots \qquad\quad \ldots \qquad\quad \ldots
\end{aligned}$$

Da 0.4 bereits aufgetreten ist, wiederholen sich ab nun die Überläufe periodisch. Die gesuchte Dualdarstellung ist daher (alle Überläufe angeschrieben):

$$(0.1)_{10} = (0.0\overline{0011})_2,$$

im Dualsystem ist es also eine Zahl mit unendlich vielen periodischen Nachkommastellen.

c) Mithilfe von a) und b) kein Problem: $(59.1)_{10} = (111011.0\overline{0011})_2$.

■

Es kann also – wie wir in Beispiel 2.36 b) sehen – vorkommen, dass eine rationale Zahl in einem Zahlensystem nur *endlich* viele, in einem anderen System aber *unendlich viele periodische* Nachkommastellen hat. Niemals aber wird eine rationale Zahl in einem System unendlich viele *nicht-periodische* Nachkommastellen haben.

2.5 Maschinenzahlen

Ein Computer hat nur eine endliche Speicherkapazität und kann daher nur endlich viele Stellen einer Zahl abspeichern. Jene Zahlen, die ein Rechner noch exakt darstellen kann, heißen **Maschinenzahlen**. Maschinenzahlen bilden also eine endliche Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen. Alle anderen reellen Zahlen werden vom Computer immer auf die nächstgelegene Maschinenzahl gerundet.

Im einfachsten Fall verwendet man eine feste Anzahl von Stellen vor und nach dem Komma (**Festkommadarstellung** oder **Festpunktdarstellung**). Dabei kann aber nur ein relativ enger Zahlenbereich abgedeckt werden. Um einen möglichst weiten Zahlenbereich abzudecken, werden Zahlen im Computer daher in der sogenannten *Gleitkommadarstellung* gespeichert:

Definition 2.37 Die **Gleitkommadarstellung** (**Gleitpunktdarstellung**) hat die Form

$$M \cdot b^E, \qquad \text{mit } |M| < 1, E \in \mathbb{Z}.$$

Dabei ist b die Basis des Stellenwertsystems, die Kommazahl M heißt **Mantisse** und die ganze Zahl E wird **Exponent** genannt.

Im Computer wird die Basis $b = 2$ verwendet. M und E werden im zugrunde liegenden Stellenwertsystem mit Basis b dargestellt. Dabei ist für sie eine feste Anzahl von t bzw. s Stellen festgelegt:

$$M = \pm 0.m_1 m_2 \dots m_t = \pm \sum_{j=1}^{t} m_j b^{-j}, \qquad E = \pm e_{s-1} \dots e_1 e_0 = \pm \sum_{j=0}^{s-1} e_j b^j.$$

Der IEEE 754 Standard für einfache Genauigkeit (single precision) sieht 32 Bit vor: $s = 8$, $t = 23$ und das letzte Bit wird für das Vorzeichen verwendet. Beim Standard für doppelte Genauigkeit (double precision) sind es 64 Bit: $s = 11$ und $t = 52$. Inzwischen gibt es auch schon vierfache Genauigkeit (quad precision) mit $s = 15$ und $t = 112$.

Die Gleitkommadarstellung einer Zahl ist aber so weit noch nicht eindeutig, da zum Beispiel (im Dezimalsystem) 0.1 als $0.1 \cdot 10^0$, $0.01 \cdot 10^1$, ... dargestellt werden kann. Um eine *eindeutige* Darstellung zu erhalten wird bei der **normalisierten Gleitkommadarstellung** der Exponent so gewählt, dass die erste Stelle der Mantisse ungleich 0 ist. Der kleinste Wert für die Mantisse ist daher b^{-1}:

$$b^{-1} \leq |M| < 1.$$

Insbesondere kann die Zahl Null nicht in normalisierter Gleitkommadarstellung dargestellt werden und erhält eine Sonderstellung.
Beispiel: 346.17 wird in der Form $0.34617 \cdot 10^3$ abgespeichert. Die Mantisse ist dabei 0.34617 (Länge 5) und der Exponent ist 3.

Versuchen wir uns den Unterschied zwischen Gleit- und Festkommadarstellung anhand eines kleinen Beispiels zu veranschaulichen. Damit es für uns leichter wird, stellen wir uns vor, dass der Computer Zahlen im Dezimalsystem darstellt. Unsere Überlegung gilt aber gleichermaßen für das Dualsystem bzw. für jedes beliebige Stellenwertsystem. Nehmen wir weiters an, dass es sich um einen sehr einfachen Computer mit Mantissenlänge 1 und Exponentenlänge 1 handelt. Dann sind die positiven darstellbaren Zahlen gegeben durch

$$0.1 \cdot 10^{-9},\ 0.2 \cdot 10^{-9}, \dots, 0.9 \cdot 10^{-9},\ 0.1 \cdot 10^{-8},\ 0.2 \cdot 10^{-8}, \dots, 0.9 \cdot 10^{9}.$$

Die Maschinenzahlen dieses Computers können also in Gleitkommadarstellung den positiven Zahlenbereich von 0.0000000001 bis 900000000 abdecken. Dazu kommen noch ebenso viele negative Zahlen und die 0. Bei einer Festkommadarstellung mit je einer Zahl vor und nach dem Komma könnte nur der positive Zahlenbereich von 0.1 bis 9.9 abgedeckt werden (d.h. gleich viele Zahlen wie in Gleitkommadarstellung, aber auf einem engeren Zahlenbereich konzentriert). Der Preis, den man für den weiteren Zahlenbereich in Gleitkommadarstellung zahlt, ist, dass die Maschinenzahlen in Gleitkommadarstellung nicht gleichmäßig verteilt sind: Zwischen 1 und 10 liegen z. B. genauso viele Maschinenzahlen (1, 2, 3, ..., 10) wie zwischen 10 und 100 (10, 20, 30, ..., 100), nämlich genau zehn.

Bei der Verarbeitung von Kommazahlen durch den Computer müssen immer wieder Zahlen auf die nächstgelegene Maschinenzahl gerundet werden. Und zwar passiert das nicht nur nach der Eingabe (aufgrund der Umwandlung vom Dezimal- ins Dualsystem), sondern auch nach jeder Rechenoperation, da die Summe bzw. das Produkt von zwei Maschinenzahlen im Allgemeinen nicht wieder eine Maschinenzahl ist.

Wie groß ist dieser **Rundungsfehler** maximal? Ist $x = M\, b^E$ der exakte und $\tilde{x} = \tilde{M}\, b^E$ der zugehörige gerundete Wert, so ist der **absolute Fehler** gleich

$$|\text{gerundeter Wert} - \text{exakter Wert}| = |\tilde{x} - x| = |\tilde{M} - M| b^E.$$

Definition 2.38 Der **relative Fehler** ist gegeben durch

$$\left|\frac{\text{absoluter Fehler}}{\text{exakter Wert}}\right| = \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| = \left|\frac{\tilde{M}\, b^E - M\, b^E}{M\, b^E}\right| = \left|\frac{\tilde{M} - M}{M}\right|.$$

Den relativen Fehler möchten wir nun abschätzen: Wenn die Mantisse t Stellen hat, so wird beim Runden die t-te Stelle um höchstens $\frac{1}{2} b^{-t}$ auf- oder abgerundet.

Beispiel aus dem Dezimalsystem mit 3-stelliger Mantisse: Die exakten Werte 0.4275, 0.4276, 0.4277, 0.4278 und 0.4279 werden auf 0.428 aufgerundet; die exakten Werte 0.4271, 0.4272, 0.4273 und 0.4274 werden auf 0.427 abgerundet; die Mantisse wird also um höchstens $0.0005 = \frac{1}{2} 10^{-3}$ gerundet.

Das Ergebnis beim Runden hängt vom verwendeten Zahlensystem und der Konvention beim Runden ab. Beim **kaufmännischen Runden** wird z. B. eine letzte Ziffer 5 immer aufgerundet (*round to larger*). Das bedeutet aber, dass ein systematischer Fehler entsteht, der sich im statistischen Mittel nicht weghebt. Deshalb wird in Computern im Grenzfall so gerundet, dass die letzte Stelle gerade ist (*round to even*). Im Dualsystem ist das noch wichtiger, denn während das Rundungsproblem im Dezimalsystem nur in 10% aller Fälle eintritt (der Grenzfall 5 ist eine von zehn möglichen Ziffern), muss im Dualsystem in 50% der Fälle (der Grenzfall 1 ist eine von zwei möglichen Ziffern) gerundet werden.

Das heißt, $\tilde{M}$ und M unterscheiden sich um höchstens $\frac{1}{2} b^{-t}$: $|\tilde{M} - M| \le \frac{1}{2} b^{-t}$. Da in der normalisierten Gleitkommadarstellung weiters $b^{-1} \le |M| < 1$ gilt, folgt

$\frac{1}{|M|} \leq b$. Also erhalten wir insgesamt

$$\left|\frac{\tilde{M} - M}{M}\right| \leq \frac{1}{2}b^{-t} \cdot b = \frac{1}{2}b^{1-t}.$$

Damit folgt:

Satz 2.39 Beim Rechnen in Gleitkommadarstellung gilt für den relativen Rundungsfehler:

$$\left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| \leq \frac{1}{2}b^{1-t} \qquad (|x| \geq b^{-b^s}).$$

Der maximale Wert $\varepsilon = \frac{1}{2}b^{1-t}$ für den relativen Fehler wird als **Maschinengenauigkeit** bezeichnet.

Damit kann also der relative Fehler beim Runden abgeschätzt werden. Was passiert aber, wenn das Ergebnis einer Rechnung zu groß wird, oder zu nahe bei 0 liegt? Wenn also $E \geq b^s$ oder $E \leq -b^s$ wird? Ein Exponentenüberlauf (zu großes Ergebnis) wird in der Regel als Fehler gemeldet. Bei einem *Exponentenunterlauf* wird das Ergebnis gleich null gesetzt, $\tilde{x} = 0$. Im letzteren Fall ist der relative Fehler 1 und somit größer als die Maschinengenauigkeit.

In den meisten Fällen sind Rundungsfehler klein und können vernachlässigt werden. Auch wenn eine Zahl viele Rechenoperationen durchläuft und das Ergebnis immer wieder gerundet wird, haben Rundungsfehler die Tendenz sich nicht aufzusummieren, sondern sich wegzumitteln (es ist eben unwahrscheinlich, dass bei zehn Operationen jedes Mal auf- und nie abgerundet wird).

Beispiel 2.40 Rundungsfehler
Gehen wir einfachheitshalber von einem Computer aus, der Zahlen im Dezimalsystem darstellt und der eine 4-stellige Mantisse hat. Wie groß ist die Maschinengenauigkeit? Welches Ergebnis gibt der Computer für $1.492 \cdot 1.066$ aus? Wie groß ist der relative Fehler?

Lösung zu 2.40 Wegen $t = 4$ ist die Maschinengenauigkeit gleich $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{1-4} = 0.0005 = 0.05\%$. D.h., die Abweichung (der absolute Fehler) vom exakten Wert beträgt maximal 0.05% vom exakten Wert. Konkret wäre für unsere Rechenoperation das exakte Ergebnis gleich $1.492 \cdot 1.066 = 1.590472$. Aufgrund der 4-stelligen Mantisse muss der Computer runden und gibt daher den Wert $0.1590 \cdot 10^1 = 1.590$ aus. Der relative Fehler beträgt hier

$$\left|\frac{\text{absoluter Fehler}}{\text{exakter Wert}}\right| = \left|\frac{1.590 - 1.590472}{1.590472}\right| \approx 0.0003,$$

also 0.03%. ■

Allein durch die im Computer nötige Umwandlung vom Dezimal- ins Dualsystem können bereits Rundungsfehler auftreten. Beispiel 2.36 hat uns ja gezeigt, dass bei Umwandlung von $(0.1)_{10}$ ins Dualsystem eine Zahl mit unendlich vielen Nachkommastellen entsteht. Diese Nachkommastellen müssen vom Computer abgebrochen und gerundet werden.

Der relative Fehler des Computers aus Beispiel 2.40 wird in den meisten Anwendungen vernachlässigbar sein. Im folgenden Beispiel ergibt sich aber ein großer relativer Fehler:

> **Beispiel 2.41 Großer Rundungsfehler**
> Welches Ergebnis gibt unser Computer aus Beispiel 2.40 für die Berechnung von $(0.01 + 100) - 100 = 0.01$ aus? Wie groß ist der relative Fehler?

Lösung zu 2.41 Die Zahlen 0.01 und 100 werden intern im Gleitkommaformat dargestellt als $0.1 \cdot 10^{-1}$ bzw. $0.1 \cdot 10^3$. Für die Addition müssen die beiden Zahlen in eine Form mit gleicher Hochzahl umgewandelt werden. Es ist (exakt) $0.1 \cdot 10^{-1} = 0.00001 \cdot 10^3$, unser Computer kann aber nur 4 Stellen der Mantisse abspeichern und muss daher auf $0.0000 \cdot 10^3$ runden. Sein Ergebnis ist daher $(0.0 \cdot 10^3 + 0.1 \cdot 10^3) - 0.1 \cdot 10^3 = 0.0$! Der relative Fehler ist damit $\frac{0.01-0}{0.01} = 1$, also 100%. ■

Dieses Beispiel mag Ihnen vielleicht unrealistisch erscheinen. Der gleiche Effekt kann aber auch bei einer Genauigkeit von 16 Stellen bewirken, dass die Lösung eines einfachen Gleichungssystems vollkommen falsch berechnet wird (Übungsaufgabe 22).

In der Praxis tendiert man oft dazu, Rundungsfehler zu vernachlässigen und meistens geht das auch gut. In bestimmten Situationen können sich Rundungsfehler aber aufsummieren und dadurch von kleinen Problemen zu schweren Unfällen führen. So ist das im Golfkrieg beim Steuerprogramm der amerikanischen Abwehrraketen passiert: Während der kurzen Testphasen haben sich die Rundungsfehler nie ausgewirkt und wurden daher im Steuerprogramm nicht bemerkt. Beim längeren Betrieb während des Einsatzes haben sich die Fehler aber so weit aufsummiert, dass die Abwehrraketen ihr Ziel verfehlt haben.

Eine Möglichkeit ist, die Rechengenauigkeit zu erhöhen. Aber auch dann ist nicht immer klar, ob die erhöhte Genauigkeit ausreicht. Besser ist es, anstelle eines gerundeten Näherungswertes zwei Werte zu berechnen, die einmal nach oben und einmal nach unten gerundet wurden. Dadurch erhält man ein Intervall, begrenzt durch den nach oben und nach unten gerundeten Wert, in dem der exakte Wert liegen muss. Man spricht in diesem Fall von **Intervallarithmetik**. Intervallarithmetik ist zwar nicht genauer als Gleitkommaarithmetik, man kann aber sofort ablesen, wie genau das Ergebnis *mindestens* ist. Der Hauptnachteil besteht darin, dass Prozessoren derzeit nur Gleitkommaarithmetik beherrschen, während Intervallarithmetik mittels Software implementiert werden muss.

2.6 Teilbarkeit und Primzahlen

Es gilt $15 : 5 = 3$, oder anders geschrieben, $15 = 3 \cdot 5$. Man sagt, dass 3 und 5 Teiler von 15 sind. Es gibt Zahlen, die besonders viele Teiler haben und daher in der Praxis sehr beliebt sind. Zum Beispiel sind die Zahlen 24 und 60 besonders vielfältig teilbar, und nicht umsonst hat ein Tag 24 Stunden, eine Stunde 60 Minuten. Auf der anderen Seite gibt es die sogenannten unteilbaren Zahlen, die Primzahlen. Sie haben große praktische Bedeutung für die Kryptographie und Codierungstheorie.

Definition 2.42 Eine ganze Zahl a heißt durch eine natürliche Zahl b **teilbar**, wenn es eine ganze Zahl n gibt, sodass $a = n \cdot b$ ist. Die Zahl b heißt in diesem Fall **Teiler** von a. Man schreibt dafür $b \mid a$, gelesen: „b teilt a“.

Beispiel 2.43 Teilbarkeit

a) $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$, hat also die Teiler 1, 3, 5 und 15. Insbesondere ist jede Zahl durch sich selbst und 1 teilbar. Also: $1 \mid 15$, $3 \mid 15$, $5 \mid 15$ und $15 \mid 15$.
b) -15 hat die Teiler 1, 3, 5 und 15. (Ein Teiler ist per Definition immer positiv.)
c) 13 hat nur die Teiler 1 und 13.

Teilbarkeit ist transitiv, das heißt, aus $a \mid b$ und $b \mid c$ folgt $a \mid c$ für beliebige $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Denn wenn $b = n \cdot a$ und $c = m \cdot b$ gilt (mit $m, n \in \mathbb{Z}$), so gilt $c = m \cdot b = m \cdot n \cdot a$.

Definition 2.44 Eine natürliche Zahl $p > 1$, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist, heißt **Primzahl.** Die Menge der Primzahlen wird mit $\mathbb{P}$ bezeichnet.

Beispiel 2.45 (→CAS) Primzahlen

a) 2 ist eine Primzahl, weil 2 nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist.
b) Auch 3 ist eine Primzahl.
c) 4 ist keine Primzahl, weil 4 neben 1 und 4 auch den Teiler 2 hat.
d) 1 ist nur durch sich selbst teilbar, wird aber laut Definition nicht als Primzahl bezeichnet.

Die ersten Primzahlen sind $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ Primzahlen bilden im folgenden Sinn die „Bausteine“ der natürlichen Zahlen:

Satz 2.46 (Primfaktorzerlegung) Jede natürliche Zahl größer als 1 ist entweder selbst eine Primzahl, oder sie lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben. Die Faktoren einer solchen Zerlegung sind (bis auf ihre Reihenfolge) eindeutig und heißen **Primfaktoren**.

Warum haben Klavierbauer ein Problem mit der Primfaktorzerlegung? Pythagoras hat vermutlich als erster erkannt, dass „wohlklingende Intervalle“ durch Schwingungsverhältnisse niedriger ganzer Zahlen beschrieben werden können. So wird eine Oktave durch das Schwingungsverhältnis $\frac{2}{1}$ beschrieben, eine Quint durch $\frac{3}{2}$, eine Quart durch $\frac{4}{3}$, usw. Das Schwingungsverhältnis zweier Quinten ist $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

Will man ein Klavier bauen, so stellt sich die Frage, wieviele Tasten pro Oktave benötigt werden, damit von jedem Ton weg eine reine Oktave und eine reine Quint gespielt werden kann. Ist c das Schwingungsverhältnis zweier benachbarter Tasten, so muss $c^n = \frac{2}{1}$ gelten, um nach n Tasten eine Oktave zu haben. Also $c = \sqrt[n]{2}$. Um zusätzlich nach m Tasten eine Quint zu haben, muss $\frac{3}{2} = c^m = 2^{m/n}$ gelten, oder umgeformt

$$3^n = 2^{n+m}.$$

Nach der Primfaktorzerlegung kann es für diese Gleichung aber keine ganzzahligen Lösungen geben. Kann man also kein Klavier bauen?

In der heutigen Praxis wird als Ausweg die *gleichstufige Stimmung* verwendet. Es wird dabei bei allen Intervallen ein wenig geschummelt. Die Schwingungsverhältnisse sind allesamt irrational, aber in der Nähe einfacher ganzzahliger Verhältnisse. Die Anzahl von 12 Tasten (7 weiße und 5 schwarze) bietet sich an, weil man dabei nur wenig schummeln muss ($\frac{3}{2} \approx 2^{7/12} = 1.4983$). Die nächstgrößere Zahl, bei der man weniger schummeln müßte, ist $2^{17/29} = 1.5012$. Allerdings ist die Verbesserung marginal und erst bei $2^{24/41} = 1.5004$ wird es deutlich besser.

Beispiel 2.47 (→CAS) Primfaktorzerlegung

Zerlegen Sie in Primfaktoren: a) 60 b) 180

Lösung zu 2.47

a) $60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Nun wird auch klar, warum man 1 nicht als Primzahl bezeichnen möchte: Dann wären die Primfaktoren nicht mehr eindeutig, denn $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ oder zum Beispiel auch $60 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ oder $60 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

b) $180 = 3 \cdot 60 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

■

Man kann zeigen, dass es **unendlich viele Primzahlen** gibt. Bis heute wurde aber kein *Bildungsgesetz* gefunden, nach dem sich alle Primzahlen leicht berechnen lassen.

Der erste Beweis dafür, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, stammt vom griechischen Mathematiker Euklid. Er leitet aus der Verneinung der Behauptung einen Widerspruch ab (Beweis durch Widerspruch).

Die Behauptung ist: „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“ Nehmen wir nun deren Verneinung an, dass es also nur endlich viele Primzahlen gibt. Schreiben wir sie der Größe nach geordnet auf: $2, 3, 5, \ldots, p$, wobei also p die größte Primzahl ist. Bilden wir nun das Produkt dieser Primzahlen und zählen 1 dazu: $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p) + 1$. Diese Zahl lässt sich nicht durch die Primzahlen $2, 3, 5, \ldots, p$ teilen, denn wir erhalten stets den Rest 1. Sind (wie angenommen) $2, 3, 5, \ldots, p$ die *einzigen* Primzahlen, so ist diese Zahl also nur durch sich selbst und durch 1 teilbar – das bedeutet aber, dass sie eine weitere Primzahl ist! Damit haben wir einen Widerspruch zu unserer Annahme, dass $1, 2, 3, 5, \ldots, p$ bereits alle Primzahlen sind. Es muss also unendlich viele Primzahlen geben.

Definition 2.48 Wenn zwei natürliche Zahlen a und b keinen gemeinsamen Teiler außer 1 besitzen, dann nennt man sie **teilerfremd**. Das ist genau dann der Fall, wenn a und b keine gemeinsamen Primfaktoren haben.

Beispiel: $14 = 2 \cdot 7$ und $15 = 3 \cdot 5$ sind teilerfremd.

Ob zwei Zahlen a und b teilerfremd sind, kann man auch überprüfen, indem man ihren **größten gemeinsamen Teiler** $\mathrm{ggT}(a, b)$ berechnet. Ist dieser gleich 1, dann sind die Zahlen teilerfremd.

Beispiel 2.49 (→CAS) Teilerfremd, größter gemeinsamer Teiler
Bestimmen Sie: a) $\mathrm{ggT}(8, 12)$ b) $\mathrm{ggT}(137, 139)$ c) $\mathrm{ggT}(630, 180)$

Lösung zu 2.49

a) $\mathrm{ggT}(8, 12) = 4$; denn 8 und 12 haben die *gemeinsamen* Teiler $1, 2, 4$, der größte gemeinsame Teiler ist daher 4.

b) $\mathrm{ggT}(137, 139) = 1$, die beiden Zahlen sind also teilerfremd. Warum sieht man das ohne zu rechnen? Nun, wenn q ein Teiler von 137 ist, dann gilt $q > 2$ und $139 \bmod q = (137 + 2) \bmod q = 2$. Es bleibt also immer ein Rest und die beiden Zahlen sind teilerfremd (was wir hier verwendet haben, ist bereits die Grundidee des Euklid'schen Algorithmus zur Berechnung des ggT – wir kommen in Abschnitt 3.3 darauf zurück).

c) Kennt man die Primfaktorzerlegungen so kann man den ggT direkt ablesen: $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ und $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Somit $\mathrm{ggT}(630, 180) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ (alle gemeinsamen Primfaktoren werden multipliziert, jeweils mit dem kleineren der in den Primfaktorzerlegungen vorkommenden Exponenten). ■

Eng verwandt mit dem größten gemeinsamer Teiler ist das **kleinste gemeinsame Vielfache** $\mathrm{kgV}(a, b)$ zweier natürlichen Zahlen a und b. Das ist die kleinste natürliche Zahl, die sowohl ein Vielfaches von a als auch von b ist. Ein Vielfaches ist auf jeden Fall das Produkt ab. In diesem steckt $\mathrm{ggT}(a, b)$ doppelt drin, wird aber nur einmal gebraucht. Also gilt

$$\mathrm{kgV}(a, b) = \frac{ab}{\mathrm{ggT}(a, b)}.$$

Beispiel: $a = 630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $b = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ haben als $\mathrm{kgV}(630, 180) = \frac{630 \cdot 180}{\mathrm{ggT}(630,180)} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 1260$.

Sowohl den ggT als auch das kgV kann man für mehr als zwei Zahlen definieren. Beide können dann rekursiv berechnet werden, $\mathrm{ggT}(a, b, c) = \mathrm{ggT}(a, \mathrm{ggT}(b, c))$ und $\mathrm{kgV}(a, b, c) = \mathrm{kgV}(a, \mathrm{kgV}(b, c))$, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt.

Im Allgemeinen wird bei der Division einer ganzen Zahl durch eine natürliche Zahl ein Rest auftreten. Wenn wir etwa 17 durch 5 dividieren, so erhalten wir $17 = 3 \cdot 5 + 2$, also den Rest 2.

Satz 2.50 (Division mit Rest) Ist allgemein $a \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$, so ist

$$a = q \cdot m + r,$$

mit ganzen Zahlen q und r. Diese sind eindeutig bestimmt, indem man festlegt, dass $0 \leq r < m$ sein soll (das heißt, r soll die *kleinstmögliche nichtnegative* Zahl sein). Man nennt dabei m den **Modul**, r den **Rest modulo** m und schreibt abkürzend

$$r = a \bmod m \qquad \text{und} \qquad q = a \operatorname{div} m.$$

Beispiel 2.51 (→CAS) Rest modulo m
Berechnen Sie den Rest von a modulo 5:
a) $a = 17$ b) $a = -17$ c) $a = 35$ d) $a = 3$ e) $a = 22$

Lösung zu 2.51

a) Es ist $17 = 3 \cdot 5 + 2$, der Rest von 17 modulo 5 ist also $r = 2$. Es wäre z. B. auch $17 = 4 \cdot 5 - 3$, oder auch $17 = -1 \cdot 5 + 22$, oben wurde aber vereinbart, dass wir als Rest die kleinstmögliche nichtnegative Zahl bezeichnen. Daher muss r in diesem Beispiel $0 \leq r < 5$ erfüllen.
b) $-17 = -4 \cdot 5 + 3$, der Rest der Division ist also $r = 3$.
c) $35 = 7 \cdot 5 + 0$ der Rest ist hier also $r = 0$. Mit anderen Worten: 35 ist durch 5 teilbar.
d) $3 = 0 \cdot 5 + 3$, auch hier ist also der Rest $r = 3$.
e) $22 = 4 \cdot 5 + 2$, daher ist der Rest $r = 2$.

■

Auch im Alltag rechnen wir „modulo m“: Ist es zum Beispiel 16 Uhr am Nachmittag, so sagen wir auch, es sei 4 Uhr nachmittags. Wir haben den Rest von 16 modulo 12 angegeben.

Das Rechnen modulo einer natürlichen Zahl hat eine Vielzahl von Anwendungen in der Praxis, z. B. bei der Verwendung von Prüfziffern (siehe Studienbrief 3).

Eine oft verwendete Teilbarkeitseigenschaft ist:

Satz 2.52 (Lemma von Euklid) Teilt eine Primzahl p ein Produkt $a \cdot b$, so teilt p mindestens einen der Faktoren. Kurz formuliert: $p \mid (a \cdot b) \Rightarrow p \mid a$ oder $p \mid b$.

Etwas allgemeiner gilt sogar: Aus $n \mid (a \cdot b)$ und a, n teilerfremd folgt $n \mid b$.

Das zeigt man z.B. mit dem **Lemma von Bézout** (nach nach dem französischen Mathematiker Étienne Bézout, 1730–1783), welches besagt, dass für ganze Zahlen a, c immer ganze Zahlen x, y gefunden werden können mit

$$xa + yc = \mathrm{ggT}(a, c).$$

Das kann direkt mithilfe von Satz 2.50 bewiesen werden, aber wir verweisen hier auf den erweiterten Euklid'schen Algorithmus, der uns sogar eine explizite Lösung x, y liefern wird – siehe Abschnitt 3.3.

Seien also $a, b, n \in \mathbb{N}$ mit $n \mid (a \cdot b)$ und a und n teilerfremd. Dann gibt es x, y mit

$$xa + yn = \mathrm{ggT}(a, n) = 1.$$

Multiplizieren wir jetzt beide Seiten mit b,

$$xab + ynb = b,$$

so ist nach Voraussetzung die linke Seite durch n teilbar und somit auch die rechte Seite, was zu zeigen war.

Damit kann man nun auch die Primfaktorzerlegung (Satz 2.46) beweisen. Es ist zu beweisen, dass sie sowohl existiert als auch eindeutig ist. Existenz ist klar, indem man den kleinsten Teiler sucht (das muss eine Primzahl sein), durch diesen dividiert, und das Verfahren wiederholt, solange der noch übrige Faktor nicht prim ist. Um die Eindeutigkeit zu sehen, nimmt man an, es gäbe zwei Primfaktorzerlegungen $\prod_{i=1}^m p_i = \prod_{j=1}^n q_j$. Dann kann man in einem ersten Schritt alle Faktoren kürzen, die in beiden Darstellungen vorkommen, sodass $p_i \neq q_j$ für alle i, j gilt. Nun muss nach dem Lemma von Euklid p_1 entweder q_n oder $\prod_{j=1}^{n-1} q_j$ teilen. Da $p_1 \neq q_n$, muss es $\prod_{j=1}^{n-1} q_j$ teilen und wir können das Verfahren wiederholen, bis wir beim Widerspruch $p_1 \mid q_1$ angekommen sind.

Beispiel 2.53 (Lemma von Euklid) Betrachten wir $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Wenn wir 450 als Produkt von zwei Zahlen schreiben, z.B. $450 = 18 \cdot 25 = 9 \cdot 50 = 15 \cdot 30 = \dots$, so teilt jede der in der Primfaktorzerlegung von 450 vorkommenden Primzahlen mindestens einen der beiden Faktoren des Produktes.

2.7 Kontrollfragen

Fragen zu Abschnitt 2.1: Die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Erklären Sie: natürliche/ganze/rationale/irrationale/reelle Zahlen, Potenz, Wurzel, Betrag einer reellen Zahl, Intervall, beschränkte Menge, Supremum, Infimum, Maximum, Minimum, Abrundungsfunktion, komplexe Zahl, Realteil, Imaginärteil, Gauß'sche Zahlenebene, Betrag einer komplexen Zahl, konjugiert-komplexe Zahl.

1. Richtig oder falsch?

a) $10^{-1} = \frac{1}{10}$	b) $10^0 = 0$	c) $100^{\frac{1}{2}} = 50$	d) $3 \cdot 2^2 = 6^2$
e) $\frac{3x-2y}{3a-2b} = \frac{x-y}{a-b}$	f) $(5a^3)^2 = 25 \cdot a^6$	g) $9^{-2} = 3$	h) $(2x^3)^3 = 8x^6$

(Lösung zu Kontrollfrage 1)

2. Bringen Sie den vor dem Wurzelzeichen stehenden Faktor unter die Wurzel:
   a) $3\sqrt{3}$ b) $3x\sqrt{x}$ c) $5\sqrt[3]{2}$ d) $x^2\sqrt[3]{4x}$

   (Lösung zu Kontrollfrage 2)

3. Ziehen Sie möglichst viele Faktoren vor die Wurzel:
   a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt[3]{81}$ c) $\sqrt{4a}$ d) $\sqrt[3]{2x^3}$ e) $\sqrt{\frac{8}{x^3}}$

   (Lösung zu Kontrollfrage 3)

4. Für welche reellen x sind die folgenden Ausdrücke definiert?
   a) $\frac{2x-1}{x^2-9}$ b) $\frac{x^2-1}{x^2}$ c) $\frac{4}{(x-1)(x+2)}$ d) $\frac{1}{x(x-1)}$

   (Lösung zu Kontrollfrage 4)

5. Richtig oder falsch? Sind a, b beliebige reelle Zahlen mit $a < b$, dann gilt:
   a) $-b < -a$ b) $2a < 3b$ c) $a^2 < b^3$

   (Lösung zu Kontrollfrage 5)

6. Richtig oder falsch?
   a) $|-5| > 0$ b) $|-1| - |1| = -2$ c) $|-a| = |a|$
   d) $|a| = a$ e) $4 - |-3| = 7$

   (Lösung zu Kontrollfrage 6)

7. Welche Zahlen haben den Abstand 2 voneinander?
   a) -2 und 2 b) -2 und 0 c) 1 und -1

   (Lösung zu Kontrollfrage 7)

8. Welche reellen Zahlen x sind hier gemeint? Alle x mit:
   a) $|x| = 1$ b) $|x| < 1$ c) $|x-3| = 1$ d) $|x| \le 1$ e) $|x+2| = 3$

   (Lösung zu Kontrollfrage 8)

9. Geben Sie die folgenden Mengen in Intervallschreibweise an:
   a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 4\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \le 1\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$
   d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\}$ f) $\mathbb{R}$

   (Lösung zu Kontrollfrage 9)

10. Berechnen Sie folgende Intervalle:
    a) $[0, 5] \cap (1, 6] =?$ b) $[0, 7) \cup [7, 9] =?$

    (Lösung zu Kontrollfrage 10)

11. Richtig oder falsch?
    a) $2 + 4\mathrm{i}$ und $-2 - 4\mathrm{i}$ sind zueinander konjugiert komplex.
    b) Der Imaginärteil von $3 - 5\mathrm{i}$ ist $-5\mathrm{i}$.
    c) $|2 + 4\mathrm{i}|$ hat Imaginärteil 0.

    (Lösung zu Kontrollfrage 11)

Fragen zu Abschnitt 2.2: Summen und Produkte

Erklären Sie: Summenzeichen, Produktzeichen, Fakultät.

1. Schreiben Sie die Summe aus und berechnen Sie sie gegebenenfalls:
   a) $\sum_{n=0}^{3}(-1)^n n^2$ b) $\sum_{n=1}^{3} n^n$ c) $\sum_{k=0}^{3} k\,(k+1)$
   d) $\sum_{k=0}^{3} x^k$ e) $\sum_{k=0}^{3} 4a_k$ f) $\sum_{k=0}^{3} b_{2k+1}$
   (Lösung zu Kontrollfrage 1)

2. Schreiben Sie mithilfe des Summenzeichens:
   a) $1+3+5+7+\ldots+23$ b) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\mp\ldots-\frac{x^8}{8}$
   c) $1-2+3-4+5-\ldots+9-10$ d) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+8\cdot 9$
   e) $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$ f) $2\cdot 4^1+2\cdot 4^2+2\cdot 4^3+2\cdot 4^4+2\cdot 4^5$

   (Lösung zu Kontrollfrage 2)

Fragen zu Abschnitt 2.3: Vollständige Induktion

Erklären Sie: vollständige Induktion, Induktionsanfang, Induktionsvoraussetzung, Induktionsschritt.

1. Richtig oder falsch:
   a) Die vollständige Induktion kann auch Aussagen für *endlich* viele natürliche Zahlen beweisen.
   b) Der Induktionsanfang besteht immer darin, dass die Aussage für $n = 1$ geprüft wird.
   c) Beim Induktionsschritt wird vorausgesetzt, dass die Behauptung für alle n stimmt.
   d) Die Induktion kann auch verwendet werden um Aussagen für alle reellen Zahlen zu beweisen.

   (Lösung zu Kontrollfrage 1)

Fragen zu Abschnitt 2.4: Stellenwertsysteme

Erklären Sie: Stellenwertsystem, Dezimalsystem, Dualsystem, Hexadezimalsystem.

1. Welche Zahlen sind durch einen Bruch darstellbar?
   a) 1.367 b) $0.00\overline{145}$ c) 0.3672879... (nicht periodisch)
   (Lösung zu Kontrollfrage 1)

2. $0.\overline{145} = \frac{145}{999}$. Geben Sie eine Bruchdarstellung von $0.00\overline{145}$ an.

3. Geben Sie 302.015 als Summe von Zehnerpotenzen an.
   (Lösung zu Kontrollfrage 3)

4. a) Stellen Sie $(10101.1)_2$ im Dezimalsystem dar.
   b) Stellen Sie $(23.25)_{10}$ im Dualsystem dar.
   c) Stellen Sie $(75.25)_{10}$ im Oktalsystem dar.
   d) Stellen Sie $(2D)_{16}$ im Dezimalsystem dar.

   (Lösung zu Kontrollfrage 4)

Fragen zu Abschnitt 2.5: Maschinenzahlen

Erklären Sie: Maschinenzahl, Festkommadarstellung, (normalisierte) Gleitkommadarstellung, Mantisse, Exponent, Rundungsfehler, Maschinengenauigkeit.

1. Richtig oder falsch?
   a) Ein Computer kann aus Speichergründen nur endlich viele Zahlen darstellen.
   b) Die Zahl $\frac{1}{3}$ kann im Computer wie jede andere rationale Zahl ohne Rundungsfehler im Gleitkommaformat dargestellt werden.
   c) Bei der elektronischen Zahlenverarbeitung liegen (relative) Rundungsfehler immer unter 1%.

   (Lösung zu Kontrollfrage 1)

2. Einfachheitshalber gehen wir von einem Computer aus, der Zahlen im Dezimalsystem darstellt und eine 2-stelliger Mantisse hat. Welches gerundete Ergebnis gibt der Computer für $0.70 \cdot 10^1 \cdot 0.42 \cdot 10^1$ aus? Wie groß ist der relative Fehler?

   (Lösung zu Kontrollfrage 2)

Fragen zu Abschnitt 2.6: Teilbarkeit und Primzahlen

Erklären Sie: teilbar, Primzahl, Primfaktorzerlegung, teilerfremd, größter gemeinsamer Teiler, Lemma von Euklid, Division mit Rest, Modul, Rest modulo m.

1. Geben Sie alle Teiler an von: a) 24 b) 10 c) 7

   (Lösung zu Kontrollfrage 1)

2. Welche der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 sind Primzahlen?

   (Lösung zu Kontrollfrage 2)

3. Wie viele Primzahlen gibt es?

   (Lösung zu Kontrollfrage 3)

4. Kann man ein Bildungsgesetz angeben, nach dem sich alle Primzahlen berechnen lassen?

   (Lösung zu Kontrollfrage 4)

5. Finden Sie die Primfaktorzerlegung von: a) 24 b) 20 c) 28

   (Lösung zu Kontrollfrage 5)

6. Sind die folgenden Zahlen teilerfremd? Bestimmen Sie ihren größten gemeinsamen Teiler: a) 8 und 12 b) 8 und 9 c) 5 und 7

   (Lösung zu Kontrollfrage 6)

7. Richtig oder falsch:
   a) Zwei Primzahlen sind immer teilerfremd.
   b) Zwei teilerfremde Zahlen sind immer Primzahlen.

   (Lösung zu Kontrollfrage 7)

Lösungen zu den Kontrollfragen

Lösungen zu Abschnitt 2.1

1. a) richtig
   b) falsch; es ist $a^0 = 1$ für jede beliebige Basis $a \neq 0$, also $10^0 = 1$
   c) falsch; $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$
   d) falsch; Potenzieren hat Vorrang vor Multiplikation, daher $3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$
   e) falsch; nur gemeinsame Faktoren von Zähler und Nenner können gekürzt werden
   f) richtig g) falsch; $9^{-2} = \frac{1}{9^2}$ h) falsch; $(2x^3)^3 = 8x^9$

2. a) $\sqrt{27}$ b) $\sqrt{9x^3}$ c) $\sqrt[3]{250}$ d) $\sqrt[3]{4x^7}$

3. a) $3\sqrt{2}$ b) $3\sqrt[3]{3}$ c) $2\sqrt{a}$ d) $x\sqrt[3]{2}$ e) $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{2}{x}}$

4. Die Brüche sind nur für jene x definiert, für die der Nenner ungleich 0 ist, also:
   a) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 3\}$ b) $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ c) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$ d) $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$

5. a) richtig b) falsch; (z. B. $a = -4$, $b = -3$)
   c) falsch; (z. B. $a = -2$, $b = -1$)

6. a) richtig b) falsch; $|-1| - |1| = 0$ c) richtig
   d) falsch; $|a| = a$ stimmt nicht, wenn a negativ ist, z. B. $|-3| \neq -3$
   e) falsch; $4 - |-3| = 1$

7. a) falsch; $|-2-2| = 4$ b) richtig c) richtig

8. a) $x \in \{-1, 1\}$ b) $x \in (-1, 1)$
   c) alle x, deren Abstand von 3 gleich 1 ist: $x = 4$ oder $x = 2$
   d) $x \in [-1, 1]$ e) $x = 1$ oder $x = -5$

9. a) $[0,4]$ b) $(-1,1]$ c) $(-\infty,-1)$ d) $(0,\infty)$ e) $(-\infty,0]$ f) $(-\infty,\infty)$

10. a) $(1,5]$ b) $[0,9]$

11. a) falsch; komplexe Konjugation ändert nur das Vorzeichen des Imaginärteils
b) falsch; der Imaginärteil ist -5 (eine reelle Zahl!)
c) richtig; der Betrag ist immer eine reelle (nichtnegative) Zahl

Lösungen zu Abschnitt 2.2

1. a) -6 b) 32 c) 20 d) $1+x^1+x^2+x^3$ e) $4\,a_0+4\,a_1+4\,a_2+4\,a_3$
f) $b_1+b_3+b_5+b_7$

2. Es gibt oft mehr als eine mögliche Schreibweise der Summe mithilfe des Summenzeichens (z.B. je nachdem, wo man den Index beginnen läßt). Hier also jeweils nur eine Lösungsmöglichkeit:
a) $\sum_{k=0}^{11}(2k+1)$ b) $\sum_{n=1}^{8}(-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n}$ c) $\sum_{k=0}^{9}(-1)^k\,(k+1)$
d) $\sum_{k=1}^{8}k\,(k+1)$ e) $\sum_{n=1}^{5}a_{2n}$ f) $\sum_{k=1}^{5}2\cdot 4^k$

Lösungen zu Abschnitt 2.3

1. a) Falsch. Die vollständige Induktion kann nur Aussagen für *unendlich* viele natürliche (allgemeiner sogar ganze) Zahlen ab einem Anfangswert n_0 beweisen.
b) Falsch. Am Induktionsanfang wird die Aussage für die kleinste Zahl, für die sie gelten soll, geprüft. Das ist meist $n=1$, kann aber z. B. auch $n=0$ oder $n=2$ oder sogar eine negative ganze Zahl sein.
c) Falsch. Beim Induktionsschritt setzt man voraus, dass die Behauptung für *irgendein festgehaltenes* n gilt.
d) Falsch, denn je zwei reelle Zahlen liegen nicht im Abstand 1 voneinander entfernt. (Beim Induktionsschritt wird aber von n auf $n+1$ geschlossen.)

Lösungen zu Abschnitt 2.4

1. a) $1.367=\frac{1367}{1000}$
b) durch Bruch darstellbar, weil periodisch
c) nicht als Bruch darstellbar, weil nicht-periodisch

2. $0.00\overline{145}=\frac{145}{99900}$

3. $302.015=3\cdot 10^2+2\cdot 10^0+1\cdot 10^{-2}+5\cdot 10^{-3}$

4. a) $(10101.1)_2=2^4+2^2+2^0+2^{-1}=(21.5)_{10}$
b) $(23.25)_{10}=16+4+2+1+0.25=(10111.01)_2$
c) $(75.25)_{10}=64+11+0.25=8^2+8^1+3\cdot 8^0+2\cdot 8^{-1}=(113.2)_8$
d) $(2D)_{16}=2\cdot 16^1+13\cdot 16^0=(45)_{10}$

Lösungen zu Abschnitt 2.5

1. a) richtig
   b) falsch; rationale Zahlen, die unendlich viele Nachkommastellen haben, müssen vom Computer gerundet werden
   c) falsch; siehe Beispiel 2.41 auf Seite 81

2. $0.70 \cdot 10^1 \cdot 0.42 \cdot 10^1 = 0.294 \cdot 10^2$ (exakt). Wegen der nur 2-stelligen Mantisse gibt der Computer das Ergebnis $0.29 \cdot 10^2$ aus. Relativer Fehler: $\frac{0.4}{29.4} = 0.0136 = 1.4\%$.

Lösungen zu Abschnitt 2.6

1. a) $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ b) $1, 2, 5, 10$ c) $1, 7$

2. 2, 3 und 5 sind Primzahlen. 1 ist per Definition keine Primzahl, und 4 hat neben 1 und 4 noch den Teiler 2.

3. unendlich viele

4. nein, ein solches Bildungsgesetz wurde bis heute nicht gefunden

5. Man spaltet so oft wie möglich die kleinste Primzahl 2 ab, dann so oft wie möglich 3, dann 5, usw.:
   a) $24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$ b) $20 = 2^2 \cdot 5$ c) $28 = 2^2 \cdot 7$

6. a) nein; $\mathrm{ggT}(8, 12) = 4$
   b) $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ und $9 = 3 \cdot 3$ sind teilerfremd, weil sie keine gemeinsamen Primfaktoren besitzen. Anders argumentiert: teilerfremd, weil $\mathrm{ggT}(8, 9) = 1$.
   c) ja, da $\mathrm{ggT}(5, 7) = 1$

7. a) richtig
   b) falsch; zum Beispiel sind 9 und 4 teilerfremd, aber keine Primzahlen

2.8 Übungen

Aufwärmübungen

1. Vereinfachen Sie $|a| + a$ für a) positives a b) negatives a.
   Machen Sie am Ende die Probe, indem Sie eine konkrete positive bzw. negative Zahl für a einsetzen.

2. (Wiederholung Rechnen mit Brüchen) Schreiben Sie den Ausdruck als einen einzigen Bruch und vereinfachen Sie:
   a) $\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{y-x}$ b) $\dfrac{5}{b-1} - \dfrac{6b}{b^2-1} - \dfrac{1-2b}{b+b^2}$

3. Lösen Sie nach der angegebenen Variablen auf:
   a) $w = \frac{1}{2}v\left(1 - \frac{1+k}{1+\frac{a}{b}}\right)$; $\quad b = ?$ $\qquad$ b) $\frac{A}{2} = \frac{b}{a\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)}$; $\quad x = ?$

4. (Wiederholung Rechnen mit Potenzen) Vereinfachen Sie:
   a) $\frac{(3\cdot 10^{-2})^2 \cdot 4 \cdot 10^3}{10^{-1}}$ $\qquad$ b) $\left(2a^2\right)^2 \frac{1}{(2a)^3}\frac{1}{a^{-1}}$ $\qquad$ c) $\frac{b^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{5}{2}})}{b}$
   d) $\left(x^{-1} + \frac{1}{3x}\right)\left(\frac{x}{3} + 1\right)^{-1}$

5. (Wiederholung Rechnen mit Potenzen) Vereinfachen Sie:
   a) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ $\qquad$ b) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\frac{x}{y}}}$ $\qquad$ c) $\frac{\sqrt[3]{u^4 v}}{\sqrt[3]{uv}}$ $\qquad$ d) $\frac{\sqrt{x^{2m+1}}}{\sqrt{x}}$

6. Es gilt $0 = 1$, wie die folgende Kette von Äquivalenzumformungen zeigt:

$$\begin{aligned} 6^2 - 6\cdot 11 &= 5^2 - 5\cdot 11 \\ 6^2 - 6\cdot 11 + (\frac{11}{2})^2 &= 5^2 - 5\cdot 11 + (\frac{11}{2})^2 \\ (6 - \frac{11}{2})^2 &= (5 - \frac{11}{2})^2 \\ 6 - \frac{11}{2} &= 5 - \frac{11}{2} \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

   Wo steckt der Fehler?

7. (Wiederholung Rechnen mit Ungleichungen) Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die folgende Ungleichung erfüllen:
   a) $|x - 2| < 1$ $\qquad$ b) $\frac{1+x}{1-x} < 3$

8. Schreiben Sie in Intervallschreibweise:
   a) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-3| < 2\}$ $\qquad$ b) $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-2| < 3\}$
   c) $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-4| \leq 2\}$

9. Berechnen Sie für $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ und $z_2 = 6 + 2\mathrm{i}$ und geben Sie jeweils den Real- und den Imaginärteil an.
   a) $z_1 + z_2$ $\quad$ b) $z_1 z_2$ $\quad$ c) $\overline{z_2}$ $\quad$ d) $|z_2|$ $\quad$ e) $\frac{z_1}{z_2}$

10. Schreiben Sie die Summe aus und berechnen Sie sie gegebenenfalls:
    a) $\sum_{n=0}^{3} n^2$ $\qquad$ b) $\sum_{n=1}^{3}(-1)^n n^n$ $\qquad$ c) $\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}k\,(k+1)$
    d) $\sum_{k=0}^{3}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ $\qquad$ e) $\sum_{k=0}^{3} 2a_k$ $\qquad$ f) $\sum_{k=0}^{3} b_{2k}$

11. Schreiben Sie mithilfe des Summenzeichens:
    a) $2+4+6+8+\ldots+20$ b) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^9}{9}$
    c) $2-4+8-16+32-64+128$ d) $1\cdot 2-2\cdot 3+3\cdot 4-\ldots-8\cdot 9$
    e) $-a_2-a_4-a_6-a_8-a_{10}$ f) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}$
    g) $-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{8}$ h) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$

12. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass
$$2^0+2^1+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$$
für alle natürlichen Zahlen n gilt.

13. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2 \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N}.$$

14. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n} \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N}.$$

15. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2=(-1)^n\frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N}.$$

16. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:
$$2^n\le n! \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N} \text{ mit } n\ge 4.$$

17. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass $n!\le n^n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.

18. a) Stellen Sie die Dualzahl $(11\,0110\,1110)_2$ im Hexadezimalsystem dar.
    b) Stellen Sie dezimale Kommazahl (124.4) im Dualsystem dar.

19. Welches gerundete Ergebnis gibt ein Computer für $0.738\cdot 0.345$ aus, der
    a) eine 3-stellige Mantisse hat b) eine 4-stellige Mantisse hat.
    Wie groß ist jeweils der relative Fehler? (Nehmen Sie einfachheitshalber an, dass der Computer Zahlen im Dezimalsystem darstellt.)

20. Richtig oder falsch? Begründen Sie!
a) Für (alle) $n \in \mathbb{N}$ gilt: n Primzahl $\Rightarrow$ n ungerade Zahl.
b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: n ungerade Zahl $\Rightarrow$ n Primzahl

21. Ist die Zahl 97 eine Primzahl? Überprüfen Sie das, indem Sie *der Reihe nach* für die Primzahlen $2, 3, 5, 7, \cdots$ feststellen, ob sie ein Teiler von 97 sind (d.h., ermitteln Sie die Primfaktorzerlegung von 97). Müssen Sie alle Primzahlen von 2 bis 97 durchprobieren, oder können Sie schon früher aufhören?

Aufgaben

1. Richtig oder falsch? Begründen Sie!
a) $[-1, 3) = \{-1, 0, 1, 2\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\} = [-3, 3]$
c) $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{N} = (-\infty, 0]$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| = 8\} = \{-6, 10\}$

2. a) Gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ und für beliebiges $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ immer
$$\frac{x}{b+x} < \frac{y}{b+y}?$$
b) Gilt für beliebige Zahlen $a, b, n \in \mathbb{N}$ immer
$$\frac{a \cdot 2^{-n}}{a \cdot 2^{-n} + b} \leq \frac{a}{b} \cdot 2^{-n}?$$
Diese Abschätzungen werden z. B. gebraucht um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass ein Primzahltest – der z. B. Primzahlen für den RSA-Algorithmus finden soll – eine Zahl fälschlicherweise als Primzahl identifiziert.

3. Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.

4. Geben Sie die Lösung der quadratischen Gleichung $z^2 + 4z + 13 = 0$ an und veranschaulichen Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

5. Für welche komplexen Zahlen gilt $\overline{z} = \frac{1}{z}$?

6. Sei $z = 2 + 4\mathrm{i}$ und $w = -3 - \mathrm{i}$. Berechnen Sie:
a) $3 \cdot \mathrm{i} \cdot z$ b) $z^2 + w - 2(z + w)$ c) $\mathrm{i} - \frac{z}{w}$

7. Sei $z = 1 - 2\mathrm{i}$. In welchem Quadranten befindet sich die folgende Zahl?
a) $2z$ b) $\mathrm{i} \cdot z$ c) $\frac{1}{z}$ d) $\overline{z}$ e) $|z|$ f) $\frac{z}{\mathrm{i}}$

8. Schreiben Sie mithilfe des Summenzeichens:
a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2$ b) $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$
c) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}$ d) $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}$
e) $2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5$ f) $a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4$

9. Schreiben Sie die Summe aus:
   a) $\sum_{i=0}^{3} a_i \cdot a_{i+1}$ b) $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$ c) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2$ d) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} a_{ik}x_k$
10. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k(k+1)} = \frac{3n}{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
11. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
12. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:
$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n^3-n}{3} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
13. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:
$$\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{2}{k}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
14. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass $2^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
15. Untersuchen Sie mithilfe vollständiger Induktion, für welche $n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung gilt:
$$n(n+1) \leq 2^n.$$
16. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion die **Bernoulli Ungleichung** (nach nach dem Schweizer Mathematiker Jakob I Bernoulli, 1655–1705):
$$1+nx \leq (1+x)^n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}, x \geq -1$$
17. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass
$$n^3 - n \ \text{ durch 6 teilbar} \quad \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
ist.

18. a) Stellen Sie $(1010111001)_2$ im Oktalsystem dar.
    b) Stellen Sie $(1010111001)_2$ im Hexadezimalsystem dar.
    c) Stellen Sie $(734)_8$ im Dualsystem dar.
    d) Stellen Sie $(A39C)_{16}$ im Dualsystem dar.

19. a) Stellen Sie $(110\,011.01)_2$ im Dezimalsystem dar.
    b) Stellen Sie $(359.2)_{10}$ im Dualsystem dar.
    c) Stellen Sie $(8978.3)_{10}$ im Oktalsystem dar.
    d) Stellen Sie $(ABCD)_{16}$ im Dezimalsystem dar.

20. Unter UNIX werden die Zugriffsrechte für eine Datei durch neun Bit (d.h. eine 9-stellige Dualzahl) dargestellt. Die ersten drei Bit legen fest, ob der Besitzer Lese-, Schreib- oder Ausführbarkeitsrechte besitzt. Die nächsten drei Bit legen dasselbe für Benutzer der gleichen Gruppe fest, und die letzten drei Bit definieren die Rechte für alle anderen Benutzer. Beispiel: $(111\,110\,100)_2$ würde bedeuten, dass der Besitzer alle Rechte hat, die Gruppe Lese- und Schreibrechte, und alle übrigen Benutzer nur Leserechte. Die Rechte werden übersichtlichkeitshalber in der Regel nicht dual, sondern oktal angegeben. So würde man anstelle von $(111\,110\,100)_2$ schreiben: $(764)_8$.

    Geben Sie die UNIX-Zugriffsrechte dual und oktal an:
    a) Besitzer kann lesen und schreiben, alle anderen nur lesen.
    b) Besitzer kann alles, alle anderen lesen und ausführen.
    c) Besitzer und Gruppe können lesen und schreiben, alle anderen nur lesen.

21. Welche UNIX-Zugriffsrechte wurden definiert?
    a) $(640)_8$ b) $(744)_8$ c) $(600)_8$

22. Die Lösung des Gleichungssystems $ax - by = 1$, $cx - dy = 0$ ist gegeben durch $x = \frac{d}{ad-bc}$ und $y = \frac{c}{ad-bc}$. Berechnen Sie die Lösung für den Fall $a = 64919121$, $b = 159018721$, $c = 41869520.5$, $d = 102558961$ mit Gleitkommaarithmetik (Mantisse mit 16 Dezimalstellen) und exakt. Nehmen Sie an, dass eine zu lange Mantisse einmal auf- und einmal abgerundet wird (in der Praxis hängt das Ergebnis vom verwendeten Zahlensystem und der genauen Rundungsvorschrift ab).

    Dieses Problem kann auch geometrisch verstanden werden: Die beiden Gleichungen können als zwei Geraden interpretiert werden. Die Lösung ist der Schnittpunkt der beiden Geraden. Im Allgemeinen wird eine kleine Verschiebung einer Geraden (aufgrund von Rundungsfehlern) auch den Schnittpunkt nur wenig verschieben. Sind die beiden Geraden aber fast parallel, so bewirkt eine kleine Verschiebung eine starke Verschiebung des Schnittpunkts. Letzterer Fall liegt hier vor.

Lösungen zu den Aufwärmübungen

1. a) positives a: $|a| + a = a + a = 2a$; Probe z. B. mit $a = 3$: $|3| + 3 = 3 + 3 = 6 = 2 \cdot 3$

b) negatives a: $|a|+a = (-a)+a = 0$; Probe z. B. mit $a = -3$: $|-3|+(-3) = 3-3 = 0$

2. a) $\frac{1}{x-y} - \frac{1}{y-x} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{-(y-x)} = \frac{2}{x-y}$
   b) Wir bringen alle Brüche auf gemeinsamen Nenner und vereinfachen:
   $\frac{5}{b-1} - \frac{6b}{(b+1)(b-1)} - \frac{1-2b}{b(b+1)} = \frac{5b(b+1)-6b^2-(1-2b)(b-1)}{b(b+1)(b-1)} = \frac{b+1}{b(b-1)}$

3. a) $b = \frac{a(v-2w)}{kv+2w}$ b) $x = \frac{Aay}{2by+Aa}$

4. a) 36 b) $\frac{a^2}{2}$ c) $1-b^2$ d) $\frac{4}{x(x+3)}$

5. a) 2 b) y c) u d) x^m

6. Aus $a^2 = b^2$ folgt nur $|a| = |b|$: $6 - \frac{11}{2} = +\frac{1}{2}$ und $5 - \frac{11}{2} = -\frac{1}{2}$.

7. a) Die Unbekannte x steht zwischen Betragstrichen. Um die Betragsstriche loszuwerden, müssen wir laut Definition 2.11 unterscheiden, ob der Ausdruck zwischen den Betragstrichen ≥ 0 oder < 0 ist:
   (i) $x-2 \geq 0$, also $x \geq 2$. Für diese x lautet die Angabe: $|x-2| = x-2 < 1$, also $x < 3$. Alle x mit $x \geq 2$ und $x < 3$ sind also Lösungen. In Intervallschreibweise notiert: $x \in [2,3)$.
   (ii) $x-2 < 0$, d.h. $x < 2$, wir durchsuchen nun also diese x auf Lösungen. Die Angabe lautet nun: $|x-2| = -x+2 < 1$, also $x > 1$. Unter den x mit $x < 2$ sind demnach alle x mit $x > 1$ Lösungen: $x \in (1,2)$.
   Insgesamt wird die gegebene Ungleichung von jenen x erfüllt, die $x \in (1,2)$ oder $x \in [2,3)$ erfüllen, also von $x \in (1,3)$.
   b) Um die Ungleichung aufzulösen, möchten wir als Erstes beide Seiten mit dem Nenner multiplizieren. Nun kann dieser, je nach dem Wert von x, positiv oder negativ sein, und dementsprechend bleibt die Richtung des Ungleichungszeichens bestehen oder ändert sich. Daher sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden:
   (i) Nenner $1-x > 0$ bzw. umgeformt, $x < 1$. Für diese x lautet die Angabe (nach Multiplikation beider Seiten mit dem Nenner): $1+x < 3(1-x)$ und daraus folgt $x < \frac{1}{2}$. Es muss also für eine Lösung $x < 1$ und $x < \frac{1}{2}$ gelten. Die Bedingung $x < 1$ ist insbesondere für alle x mit $x < \frac{1}{2}$ erfüllt, also $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$.
   (ii) Nenner $1-x < 0$, also suchen wir unter den x mit $x > 1$ nach Lösungen. Nach Multiplikation beider Seiten mit dem Nenner (und Umdrehung der Richtung des Ungleichungszeichens), lautet die Angabe $1+x > 3(1-x)$ und daraus folgt $x > \frac{1}{2}$. Lösungen müssen demnach $x > 1$ und $x > \frac{1}{2}$ erfüllen; also $x \in (1,\infty)$.
   Insgesamt wird die gegebene Ungleichung von $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ oder $x \in (1,\infty)$ erfüllt: $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1,\infty)$.

8. a) Gemeint sind alle reellen Zahlen, die von der Zahl 3 einen Abstand von weniger als 2 Längeneinheiten haben. Somit $A = (3-2, 3+2) = (1,5)$
b) $B = (-1,5)$
c) Gemeint sind alle reellen Zahlen die von 4 den Abstand 2 oder weniger als 2 haben. Somit $A = [2,6]$.

9. a) $7 + \mathrm{i}$; Realteil: 7, Imaginärteil: 1
b) $8 - 4\mathrm{i}$; Realteil: 8, Imaginärteil: -4
c) $6 - 2\mathrm{i}$; Realteil: 6, Imaginärteil: -2
d) $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$; Realteil: $\sqrt{40}$, Imaginärteil: 0 (Absolutbetrag ist reelle Zahl!)
e) $\frac{1}{10}(1-2\mathrm{i})$; Realteil: $\frac{1}{10}$, Imaginärteil: $-\frac{1}{5}$

10. a) $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$
b) $(-1)^1 1^1 + (-1)^2 2^2 + (-1)^3 3^3 = -24$
c) $2 - 6 + 12 = 8$
d) $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7}$
e) $2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3$
f) $b_0 + b_2 + b_4 + b_6$

11. a) $\sum_{k=1}^{10} 2k$ b) $\sum_{k=1}^{5} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$ c) $\sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} 2^k$ d) $\sum_{k=1}^{8} (-1)^{k+1} k \cdot (k+1)$
e) $\sum_{k=1}^{5} -a_{2k}$ f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ g) $\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k}$ h) $\sum_{k=0}^{4} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

12. Induktionsanfang: Wir prüfen die Formel für $n = 1$: $2^0 = 2^1 - 1$ ist richtig.
Induktionsschritt:
• Sei ein $n \in \mathbb{N}$ gefunden mit

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1. \qquad \text{(IV)}$$

• Zu zeigen: Für dieses n gilt auch:

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1. \qquad \text{(IB)}$$

• Beweis von (IV) $\Rightarrow$ (IB): Wir formen die linke Seite von (IB) mithilfe (IV) um, vereinfachen und erhalten die rechte Seite von (IB):

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1}}_{=2^n - 1 \text{ laut (IV)}} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1,$$

was zu zeigen war.

13. Induktionsanfang: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2$ ist richtig.
Induktionsschritt:
• Sei $n \in \mathbb{N}$ mit:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2. \qquad \text{(IV)}$$

- Es ist zu zeigen, dass für dieses n gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2. \tag{IB}$$

- Beweis von (IV) $\Rightarrow$ (IB):

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}_{=n^2 \text{ nach (IV)}} + (2(n+1)-1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2,$$

wie zu zeigen war.

14. Induktionsanfang: $n=1$: $\frac{1}{2^1} = \frac{2^{1+1}-1-2}{2^1}$ stimmt.
Induktionsschritt:
- Es sei ein $n \in \mathbb{N}$ gefunden mit:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n} \tag{IV}$$

- Es ist zu zeigen, dass für dieses n auch gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+2}-n-3}{2^{n+1}} \tag{IB}$$

- Beweis von (IV) $\Rightarrow$ (IB):

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \overset{?}{=} \frac{2^{n+2}-n-3}{2^{n+1}}$$

Das letzte $\overset{?}{=}$ ist noch durch einfache Umformungen zu zeigen – Übung :)

15. Induktionsanfang: $(-1)1^2 = (-1)\frac{1\cdot 2}{2}$ ist richtig.
Induktionsschritt:
- Sei $n \in \mathbb{N}$ mit:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} \tag{IV}$$

- Zu zeigen: Für dieses n gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2 = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{IB}$$

• Beweis von (IV) $\Rightarrow$ (IB):

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2 \overset{\text{(IV)}}{=} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \overset{?}{=} (-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Es bleibt noch das letzte $\overset{?}{=}$ zu zeigen, was nach kurzer Umformung erledigt ist.

16. Induktionsanfang: Prüfe die Ungleichung für $n = 4$, denn das ist das kleinste n, für das sie behauptet wird: $2^4 \leq 4!$ ist richtig.
Induktionsschritt:
• Es sei ein $n \geq 4$ gefunden mit $2^n \leq n!$ (IV).
• Zu zeigen: Für dieses n gilt auch $2^{n+1} \leq (n+1)!$ (IB).
• Beweis von (IV) $\Rightarrow$ (IB): Wir beginnen bei der linken Seite von (IB) und formen diese um, bis wir (IV) verwenden können:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\text{(IV)}}{\leq} n! \cdot 2 \overset{(*)}{\leq} n! \cdot (n+1) = (n+1)!,$$

wobei in $(*)$ verwendet wurde, dass $2 \leq n+1$.

17. Induktionsanfang: $1! = 1 \leq 1^1$ ist richtig.
Induktionsschritt:

   - Wir setzen voraus, dass wir ein $n \in \mathbb{N}$ gefunden haben mit $n! \leq n^n$ (IV).
   - Zu zeigen: Für dieses n gilt auch $(n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$ (IB).
   - Beweis von (IV) $\Rightarrow$ (IB):

   $$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{\text{(IV)}}{\leq} (n+1)n^n \overset{(*)}{\leq} (n+1)(n+1)^n = (n+1)^{n+1},$$

   wie zu zeigen war. Dabei haben wir für die letzte Abschätzung $(*)$ Satz 2.10 verwendet.

18. a) Wir fassen die Bit von rechts beginnend in Viererblöcken zusammen: 0011, 0110, 1110; nun wandeln wir jeden Block ins Hexadezimalsystem um: $0011 = 3$; $0110 = 6$; $1110 = E$; zuletzt reihen wir die Hexadezimalzahlen aneinander: $(11\,0110\,1110)_2 = (36E)_{16}$
b) Wir trennen die Zahl in den ganzzahligen Anteil $(124)_{10}$ und die Nachkommastellen $(0.4)_{10}$ und wandeln getrennt um. Um 124 umzuwandeln, dividieren wir sukzessive durch 2 und notieren die Reste. Wir erhalten $(124)_{10} = (1111100)_2$. Um $(0.4)_{10}$ umzuwandeln, multiplizieren wir sukzessive mit 2 und notieren die Überläufe. Es ergibt sich die periodische Dualzahl $(0.\overline{0110})_2$. Insgesamt daher: $(124.4)_{10} = (1111100.\overline{0110})_2$

19. Exakte Lösung wäre 0.25461; Ergebnis des Computers:
    a) 0.255; relativer Fehler = 0.15% b) 0.2546; relativer Fehler = 0.004%

20. a) falsch (denn 2 ist Primzahl, aber nicht ungerade)
    b) falsch (denn z.B. 9 ist ungerade, aber keine Primzahl)

21. Ja. Es reicht, 2, 3, 5, 7 zu probieren (alle Primzahlen $\leq \sqrt{121} = 11$), da $11^2 = 121$ bereits größer als 97 ist. Diese Idee geht auf den griechischen Mathematiker Eratosthenes (ca. 284–202 v. Chr.) zurück: „Sieb des Eratosthenes“.

Lösungen zu ausgewählten Aufgaben

1. a) f b) r c) f d) r

2. a) ja b) ja

3. Tipp: Gehen Sie analog wie für $\sqrt{2}$ vor.

4. $z_{1,2} = -2 \pm 3\mathrm{i}$

5. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

6. a) $-12 + 6\mathrm{i}$ b) $-13 + 9\mathrm{i}$ c) $1 + 2\mathrm{i}$

7. a) IV b) I c) I d) I e) auf der reellen Achse f) III

8. –

9. –

10. –

11. –

12. –

13. –

14. –

15. –

16. Induktionsanfang: $n = 0$: $1 + 0 \cdot x = 1 \leq 1 = (1 + x)^0$
    Induktionsschritt: $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) =$
    $= 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$

17. Hinweis: $n(n+1)$ ist immer eine gerade Zahl, es lässt sich also 2 herausheben.

18. a) $(1271)_8$ b) $(2B9)_{16}$ c) $(111\,011\,100)_2$ d) $(1010\,0011\,1001\,1100)_2$

19. a) $(51.25)_{10}$ b) $(101100111.\overline{0011})_2$ c) $(21422, 2\overline{3146})_8$ d) $(43981)_{10}$

20. a) $(110\,100\,100)_2 = (644)_8$ b) $(111\,101\,101)_2 = (755)_8$
    c) $(110\,110\,100)_2 = (664)_8$

21. a) Besitzer kann lesen und schreiben, Gruppe kann lesen.
    b) Besitzer kann alles, alle anderen nur lesen.
    c) Nur der Besitzer kann lesen und schreiben.

22. exakt: $x = 2d = 205117922$, $y = 2c = 83739041$
    abgerundet: $x = d = 102558961$ und $y = c = 41869520.5$
    aufgerundet: $ad - bc = 0$, also keine Lösung