第一章　质点运动学

1.1　选择题

(1) 一质点做直线运动,某时刻的瞬时速度 $v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,瞬时加速度 $a=-2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,则 1 s 后质点的速度等于　[　　]

(A) 0;　　(B) $2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$;

(C) $-2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$;　　(D) 不能确定.

解　因为 $v_{t_0+1}=v_{t_0}+\int_{t_0}^{t_0+1}a(t)\mathrm{d}t$,$a(t)$ 未知,所以 v 不能确定,

选[D].

(2) 一质点做一般平面曲线运动,其瞬时速度为 $\boldsymbol{v}$,速率为 v,平均速度为 $\overline{\boldsymbol{v}}$,则这些量之间的关系必定是　[　　]

(A) $|\boldsymbol{v}|=v,\ |\overline{\boldsymbol{v}}|=\bar{v}$;　　(B) $|\boldsymbol{v}|\neq v,\ |\overline{\boldsymbol{v}}|=\bar{v}$;

(C) $|\boldsymbol{v}|\neq v,\ |\overline{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$;　　(D) $|\boldsymbol{v}|=v,\ |\overline{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$.

解　选[D]

(3) 一质点做平面曲线运动,某一瞬时的位矢为 $\boldsymbol{r}(x,y)$,则它该时刻的速度大小为　[　　]

(A) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$;　　(B) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$;

(C) $\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$;　　(D) $\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{1/2}$.

解　$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

1.2　填空题

(1) 一架飞机以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 在空中做水平飞行. 某时刻在飞机上以水平速度 $\boldsymbol{u}$ 向前发射一发子弹. 如果忽略空气阻力,并设发射过程不影响飞机的飞行速度,则

(a) 以地面为参考系,子弹的轨迹方程是__________;

(b) 以飞机为参考系,子弹的轨迹方程是__________.

解 以地面为参考系,子弹参与水平(x 轴)方向速度为 v_0+u 的匀速直线运动,竖直(y 轴)方向自由落体运动. 取坐标系如解图 1.2(1)(a)所示,有

$$x = (v_0 + u)t$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

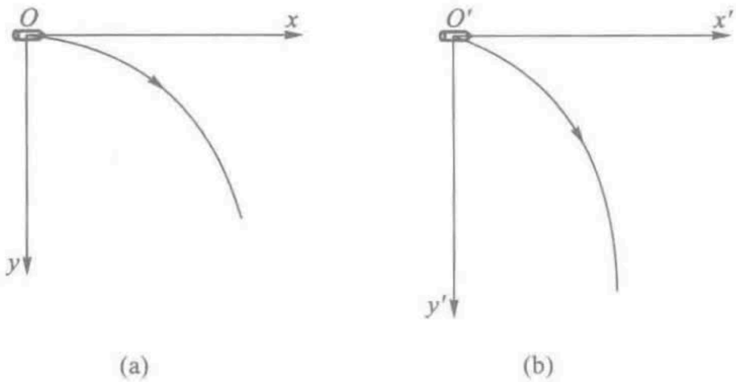
消去时间 t 得子弹的轨迹方程

$$y = \frac{gx^2}{2(v_0 + u)^2}$$

以飞机为参考系,子弹参与水平(x'轴)方向速度为 u 的匀速直线运动,竖直方向(y'轴)自由落体运动. 取坐标系如解图 1.2(1)(b)所示,有

$$x' = ut'$$

$$y' = \frac{1}{2}gt'^2$$

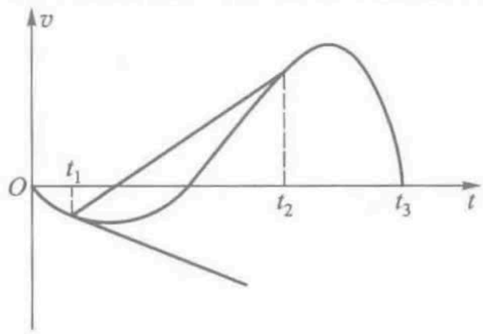


解图 1.2(1)

消去时间 t'得子弹的轨迹方程

$$y' = \frac{gx'^2}{2u^2}$$

(2) 做直线运动的质点,其速度 v 随时间变化的关系如题图 1.2(2)中 $v-t$



题图 1.2(2)

曲线所示，则

（a）t_1时刻曲线的切线斜率表示________；

（b）t_1与t_2之间曲线的割线的斜率表示________；

（c）从$t=0$到t_3时间内，质点的位移可由________表示；

（d）从$t=0$到t_3时间内，质点的路程又可由________表示.

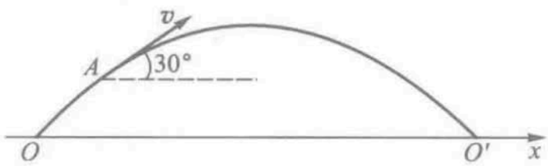
解　（a）t_1时刻曲线的切线斜率$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1}$表示该时刻质点的加速度；

（b）t_1与t_2之间曲线的割线斜率$\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$，表示该时间间隔（$t_1 \sim t_2$）质点的平均加速度；

（c）从$t=0$到t_3时间内，质点的位移$\Delta x=\int_0^{t_3} v\mathrm{d}t$可由曲线与$x$轴围成的面积的代数和表示；

（d）从$t=0$到t_3时间内，质点的路程$\Delta S=\left|\int_0^{t'} v\mathrm{d}t\right|+\int_{t_1}^{t_3} v\mathrm{d}t$，可由曲线与$x$轴围成的面积的绝对值之和表示.

（3）一质点做如题图1.2(3)所示的斜抛运动，测得它在轨道A点处的速度大小为v，方向与水平方向成30°角，则该质点在A点的切向加速度$a_t=$______；轨道该点的曲率半径$\rho=$________.



题图1.2(3)

解　质点做斜抛运动，是加速度$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}$（重力加速度）恒定的曲线运动. A处的切向加速度a_t（即重力加速度$\boldsymbol{g}$在切线方向的投影）

$$a_t=g\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{g}{2},$$

负号表示切向加速度与速度$\boldsymbol{v}$的方向相反.

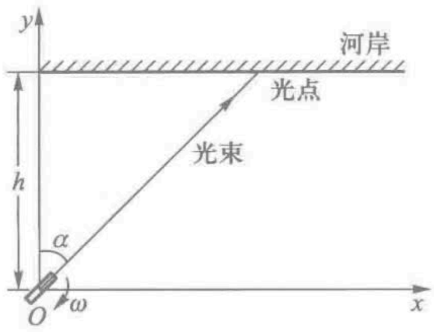
$$a_n=g\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}g$$

$$=\frac{v^2}{\rho}$$

$$\rho=\frac{2\sqrt{3}v^2}{3g}$$

1.3 一只军舰停在距河岸(河岸为直线)500 m 处,舰上的探照灯以转速 $n=1\ \mathrm{r\cdot min^{-1}}$转动. 当光束与河岸成 60°角时,光束打在河岸上的光点移动的速度是多少?

解 取坐标系如解图 1.3 所示.



解图 1.3

$$\omega = 2\pi \frac{1}{60} = \frac{\pi}{30}\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

光点沿河岸的运动方程为

$$x = h\tan\alpha = h\tan\omega t$$

$$y = h$$

光点沿河岸移动的速度 v 为

$$v = v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{h\omega}{\cos^2\omega t}$$

当 $\omega t = \dfrac{\pi}{6}$时

$$v = \frac{h\omega}{\cos^2\omega t} = \frac{500\times\dfrac{\pi}{30}}{\cos^2\dfrac{\pi}{6}}\mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 69.8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

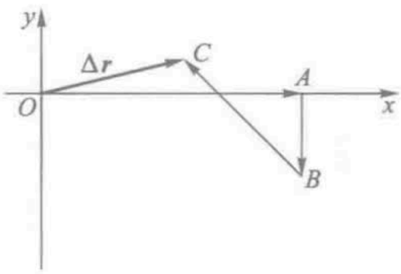
1.4 一只小船自原点出发,在 25 s 内向东航行了30 m,又在 10 s 内向南行驶了 10 m,再在 15 s 内向正西北航行了 18 m,求这 50 s 内

(1) 小船的平均速度;

(2) 小船的平均速率.

解 小船运动轨迹如解图 1.4 所示,在这 50 s 内的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$

$$\Delta\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



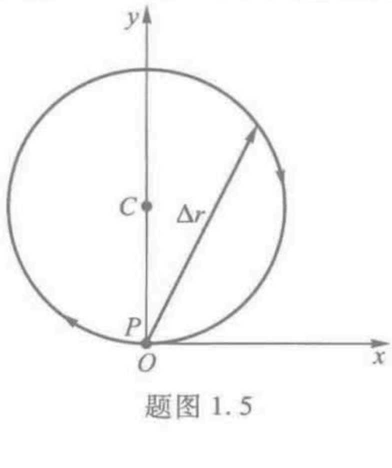
解图 1.4

其中
$$\overrightarrow{OA}=30\boldsymbol{i}\ \mathrm{m}$$
$$\overrightarrow{AB}=-10\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}$$
$$\overrightarrow{BC}=BC\left(\cos\frac{3\pi}{4}\boldsymbol{i}+\sin\frac{3\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)$$
$$=18\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\boldsymbol{i}\ \mathrm{m}+18\times\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}$$
$$\Delta\boldsymbol{r}=30\boldsymbol{i}\ \mathrm{m}-10\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}-9\sqrt{2}\boldsymbol{i}\ \mathrm{m}+9\sqrt{2}\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}$$
$$=(30-9\sqrt{2})\boldsymbol{i}\ \mathrm{m}+(9\sqrt{2}-10)\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}$$

平均速度为
$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{(30-9\sqrt{2})\boldsymbol{i}+(9\sqrt{2}-10)\boldsymbol{j}}{25+10+15}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=(0.35\boldsymbol{i}+0.05\boldsymbol{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

平均速率为
$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{30+10+18}{25+10+15}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=1.16\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

1.5　一质点 P 从 O 点出发以匀速率 $0.1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 作半径为 1 m 的圆周运动，如题图 1.5 所示. 当它走完2/3圆周时，它走过的路程是多少？这段时间内的



题图 1.5

平均速度如何?

解 路程为

$$s=\frac{\pi}{3}\times 2\pi R=\frac{2}{3}\times 2\pi\times 1\ \text{m}=4.19\ \text{m}$$

位移大小为

$$|\Delta \boldsymbol{r}|=2R\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\ \text{m}$$

时间间隔为

$$\Delta t=\frac{s}{v}=\frac{4.19}{0.1}\ \text{s}=41.9\ \text{s}$$

平均速度的大小为

$$|\bar{\boldsymbol{v}}|=\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|=\frac{\sqrt{3}}{41.9}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}=4.13\times 10^{-2}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

平均速度的方向:与 x 轴夹角为$\frac{\pi}{3}$.

1.6 已知一质点做平面曲线运动,运动学方程为

$$\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(2-t^2)\boldsymbol{j}\quad (\text{SI 单位})$$

试求:

(1) 质点在第 2 s 内的位移;

(2) 质点在 $t=2$ s 时的速度和加速度;

(3) 质点的轨迹方程;

(4) 在 Oxy 平面内画出质点的运动轨迹,并在图上标出 $t=2$ s 时质点的位矢 $\boldsymbol{r}$,速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$.

解 (1) $t=1$ s 时, $\boldsymbol{r}_1=[2\times 1\boldsymbol{i}+(2-1^2)\boldsymbol{j}]\ \text{m}=(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\ \text{m}$

$t=2$ s 时, $\boldsymbol{r}_2=[2\times 2\boldsymbol{i}+(2-2^2)\boldsymbol{j}]\ \text{m}=(4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})\ \text{m}$

质点在第 2 s 内的位移

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=[(4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})-(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})]\ \text{m}=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j})\ \text{m}$$

(2)
$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(2\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j})\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1},\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-2\boldsymbol{j}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

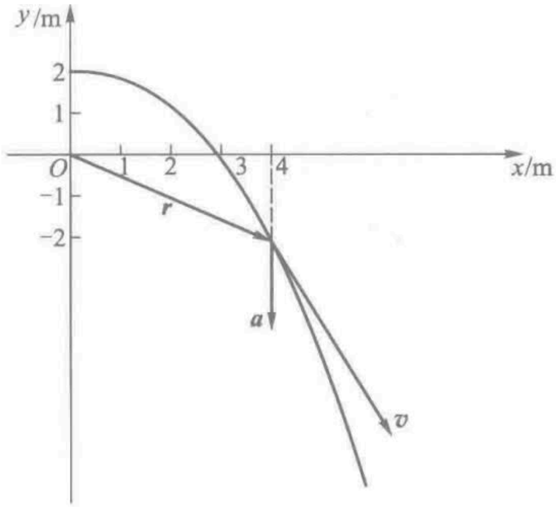
当 $t=2$ s 时,$\boldsymbol{v}=(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j})\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{j}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

(3)
$$\begin{cases}x=2t\\ y=2-t^2\end{cases}$$

消去 t 得轨迹方程

$$y=2-\frac{x^2}{4}\text{（抛物线）}$$

（4）在 Oxy 平面内质点运动轨迹如解图 1.6 所示.



解图 1.6

1.7　一运动质点的位置与时间的关系为 $x=10t^2-5t$（SI 单位），试求：
（1）质点的速度和加速度与时间的关系，以及初速度的大小和方向；
（2）质点在原点左边最远处的位置；
（3）何时 $x=0$，此时质点的速度是多少？

解　（1）

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(20t-5)$$

$$a(t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=20\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

当 $t=0$

$$v(0)=-5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\quad\text{（方向沿 } x \text{ 轴负向）}$$

（2）当 $v=0$ 时，质点离原点左边最远，即

$$20t-5=0,\quad t=\frac{5}{20}\ \mathrm{s}=0.25\ \mathrm{s}$$

$$x=10\times0.25^2\ \mathrm{m}-5\times0.25\ \mathrm{m}=-0.625\ \mathrm{m}\quad\text{（左边最远处）}$$

（3）当 $x=10t^2-5t=0$，得 $t_1=0$，或 $t_2=0.5$ s.

当 $t_1=0$ 时　　$v(0)=-5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

当 $t_2=0.5$ s 时

$$v(0.5)=(20\times 0.5-5)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

1.8　一质点在 Oxy 平面内运动,运动学方程为

$$x=2t,\quad y=19-2t^2\quad (\text{SI 单位})$$

(1) 计算并图示质点的运动轨迹;

(2) 写出 $t=1$ s 和 $t=2$ s 时刻质点的位矢,并计算这一秒内质点的平均速度;

(3) 计算 $t=1$ s 和 $t=2$ s 时刻的速度和加速度;

(4) 在什么时刻质点的位矢与其速度恰好垂直?

(5) 在什么时刻,质点离原点最近? 距离是多少?

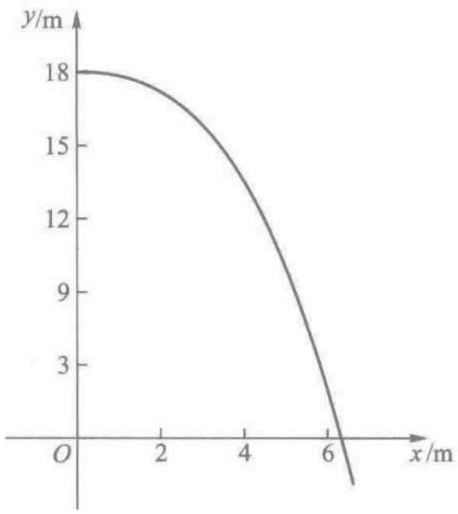
解　(1)

$$\begin{cases}x=2t\\ y=19-2t^2\end{cases}$$

消去时间 t 得轨迹方程

$$y=19-\frac{x^2}{2},\quad x\geqslant 0$$

轨迹如解图 1.8 所示.



解图 1.8

(2)

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}$$

$$t_1=1\ \mathrm{s},\quad \boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+17\boldsymbol{j}$$

$$t_2=2\ \mathrm{s},\quad \boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{t_2-t_1}=2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}$$

(3)
$$v(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j})$$
$$\boldsymbol{v}(1)=(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$
$$\boldsymbol{v}(2)=(2\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$
$$\boldsymbol{a}=-4\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

(4) 当 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=0$, $|\boldsymbol{r}|\cos\theta|\boldsymbol{v}|=0$,则 $\cos\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$,因此,该时刻质点的位矢与其速度恰好垂直.

$$[2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}]\cdot(2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j})=0$$
$$2t\times2+(19-2t^2)(-4t)=0$$

解之得 $t_1=0$ 或 $t_2=3$ s.

(5) 质点离原点 O 的距离 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2t)^2+(19-2t^2)^2}$取极值,有$\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=0$,得

$$t^3-9t=0,\quad t_1=0\ 或\ t_2=3\ \mathrm{s}$$
$$|\boldsymbol{r}(0)|>|\boldsymbol{r}(3)|=6.08\ \mathrm{m}.$$

则当 $t_2=3$ s 时,质点离原点 O 最近,距离为 6.08 m.

1.9　一质点以初速度 v_0 沿与水平地面成 θ 角的方向上抛,并落回到同一水平地面上,求该质点在 t 时刻的切向加速度和法向加速度,以及该抛体运动轨道的最大和最小曲率半径.

解　抛体运动是恒定加速度 $\boldsymbol{g}$(重力加速度)的曲线运动.

设 t 时刻质点在轨道上的速度 $\boldsymbol{v}$ 与水平面的夹角为 α,则 $a=g$,方向与水平面垂直指向地心.

$$a_t=g\sin\alpha,\quad a_n=g\cos\alpha$$
$$v_{水平}=v\cos\alpha=v_0\cos\theta$$

所以
$$v=\frac{v_0\cos\theta}{\cos\alpha}$$
$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{v_0^2\cos^2\theta}{g\cos^3\alpha}$$

其中
$$\sin\alpha=\frac{v_0-gt}{\sqrt{(v_0\cos\theta)^2+(v_0-gt)^2}},\quad\cos\alpha=\frac{v_0\cos\theta}{\sqrt{(v_0\cos\theta)^2+(v_0-gt)^2}}$$

由于
$$0\leqslant\alpha\leqslant\theta$$

当 $\alpha=\theta$ 时 $\rho_{\max}=\dfrac{v_0^2}{g\cos\theta}$(即抛出处或落地处)

当 $\alpha=0,\cos\alpha=1$ 时 $\rho_{\min}=\dfrac{v_0^2\cos^2\theta}{g}$(即在最高点)

1.10 一质点沿半径 0.1 m 的圆周运动,其角位置

$$\theta=2+4t^3\quad(\text{SI 单位})$$

求:

(1) $t=2$ s 时的切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n;

(2) 当 $a_t=a/2$ 时,θ 等于多少?

(3) 何时质点的加速度与半径的夹角为 45°.

解 (1) $$\omega=\frac{d\theta}{dt}=12t^2,\quad \alpha=\frac{d\omega}{dt}=24t$$

当 $t=2$ s 时

$$a_n=R\omega^2=0.1\times(12\times2^2)^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}=230.4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_t=R\alpha=0.1\times24\times2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}=4.8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

(2) 依题意$\dfrac{a_t}{a}=\dfrac{1}{2}$ 设 $\boldsymbol{a}_t$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 φ,则

$$a_t=a\cos\varphi,\quad \text{即}\ \cos\varphi=\frac{1}{2},\quad \varphi=\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{a_n}{a_t}=\tan\frac{\pi}{3},\quad \frac{R\omega^2}{R\alpha}=\tan\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{(12t^2)^2}{24t}=\sqrt{3},\quad t^3=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

即 $$\theta=2+4t^3=2+4\times\frac{\sqrt{3}}{6}\approx3.15\ (\text{rad})$$

(3) 当 $a_t=a_n$ 时,质点的加速度与半径成$\dfrac{\pi}{4}$夹角

$$R\omega^2=R\alpha,\quad (12t^2)^2=24t,$$

$$t^3=\frac{1}{6}\ \text{s},\quad t\approx0.55\ \text{s}$$

1.11 一质点沿 x 轴运动,其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为 $a=2+6x^2$ (SI 单位). 如果质点在 $x=0$ 处的速度 $v=0$,试求其在任意位置的速度.

解　由于　$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

则　$$v\,dv = a\,dx = (2+6x^2)\,dx$$

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^x (2+6x^2)\,dx$$

$$v^2 = 4(x+x^3),\quad x\geqslant 0$$

又由于 $a>0$,则　$$v=2\sqrt{x+x^3}$$

1.12　一飞轮从静止开始以恒角加速度 2 $rad\cdot s^{-2}$ 转动,经过某一段时间后开始计时,在 5 s 内飞轮转过 75 rad. 问开始计时以前,飞轮转动了多长时间?

解　依题意,$t=0,\omega=0,\alpha=2\ rad\cdot s^{-2}$

则　$$\omega=\alpha t,\quad \theta=\frac{1}{2}\alpha t^2=\frac{1}{2}\times 2t^2=t^2$$

$$\Delta\theta=\theta(t+5)-\theta(t)=(t+5)^2-t^2=75\ (\text{SI 单位})$$

即 $t^2+10t+25-t^2=75$,得 $t=5$ s.

1.13　一质点沿 x 轴运动,其加速度 $a=4t$(SI 单位),已知 $t=0$ 时,质点位于 $x=10$ m 处,初速度 $v_0=0$,求质点的运动学方程.

解　$a=\frac{dv}{dt},dv=a\,dt$

当 $t=0$ 时,$v_0=0$,且 $a=4t$,有

$$\int_0^v dv=\int_0^t a\,dt,\quad \int_0^v dv=\int_0^t 4t\,dt,\quad v=2t^2$$

$$v=\frac{dx}{dt},\quad dx=v\,dt$$

当 $t=0$ 时,$x_0=10$ m,有

$$\int_0^x dx=\int_0^t 2t^2\,dt,\quad x=10+\frac{2}{3}t^3$$

此为质点运动学方程

1.14　一质点在竖直方向上做一维振动,其加速度与坐标的关系为 $a=-ky$(SI 单位),式中 k 为常量,y 为以平衡位置为原点测得的坐标. 已知质点在 $y=y_0$处的速度为 v_0,求质点的速度与坐标 y 的函数关系.

解　$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=v\frac{dv}{dy}$$

由于 $v\,dv=a\,dy$,其中 $a=-ky$,且 $y=y_0$ 时,$v=v_0$. 两边积分得

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = \int_{y_0}^{y} -ky\mathrm{d}y,\quad \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{-1}{2}k(y^2 - y_0^2)$$

$$v^2 = v_0^2 + k(y_0^2 - y^2)$$

讨论：因为 $$v^2 \geqslant 0$$

所以 $$v_0^2 + k(y_0^2 - y^2) \geqslant 0$$

$$-\frac{1}{k}(v_0^2 + ky_0^2) \leqslant y \leqslant \frac{1}{k}(v_0^2 + ky_0^2)$$

即质点振动振幅为

$$A = \frac{1}{k}(v_0^2 + ky_0^2)$$

当 $v=0$ 时，$y=\pm A$.

1.15 一辆直线行驶的摩托车，关闭发动机后其加速度方向与速度方向相反，大小与速率平方成正比，即 $a=-kv^2$（SI 单位），式中 k 为正的常量. 试证明：摩托车在关机后又行驶 x 距离时的速度为

$$v = v_0 \mathrm{e}^{-kx}$$

其中 v_0是发动机关闭时的速度.

解 $$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$v\mathrm{d}v = a\mathrm{d}x,\quad v\mathrm{d}v = -kv^2\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -k\mathrm{d}x$$

当 $t=0$ 时，$v=v_0$，$x=0$，两边积分，得

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = \int_0^x -k\mathrm{d}x$$

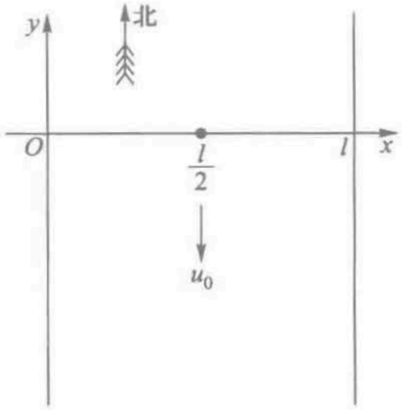
$$\ln\frac{v}{v_0} = -kx$$

$$v = v_0\mathrm{e}^{-kx}$$

1.16 一条南北走向的大河，河宽为 l，河水自北向南流，河中心水流速度为 u_0，靠两岸流速为零. 在垂直河宽方向上任一点的水流速度与 u_0之差和该点到河中心的距离的平方成正比. 今有一汽船由西岸出发，以相对于水流的速度 v_0向东偏北 45°方向航行，试求：汽船航线的轨迹方程及它到达东岸的地点.

解 建立坐标系如解图 1.16 所示. 依题意,水流速度沿 y 轴负向,河中心$\frac{l}{2}$处水流速率为 u_0,x 处水流速率为 u_y,则

$$u_y - u_0 = C\left(x - \frac{l}{2}\right)^2$$



解图 1.16

由初始条件 $x = 0$ 处,$u_y = 0$,

$$0 - u_0 = C\left(0 - \frac{l}{2}\right)^2$$

$$C = -\frac{4u_0}{l^2}$$

$$u_y = u_0 + C\left(x - \frac{l}{2}\right)^2$$

将 $u_0 = -C\frac{l^2}{4}$代入上式

$$u_y = -C\frac{l^2}{4} + C\left(x - \frac{l}{2}\right)^2$$

$$= C(x - l)x$$

即 $$u_y = -\frac{4u_0}{l^2}(x - l)x$$

$$\boldsymbol{v}_{船对岸} = \boldsymbol{v}_{船对水} + \boldsymbol{v}_{水对岸}$$

其中 $$\boldsymbol{v}_{船对岸} = \boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{v}_{船对水} = \boldsymbol{v}_0,\quad \boldsymbol{v}_{水对岸} = \boldsymbol{u}$$

即 $$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{u}$$

x:
$$v_x = v_0\cos\frac{\pi}{4}$$

y:
$$v_y = v_0\sin\frac{\pi}{4} - u_y$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad \int_0^x dx = \int_0^t v_x dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0\cos\frac{\pi}{4}\cdot dt$$

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{2}}t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{y_0}{\sqrt{2}} - u_y = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\frac{dy}{dx}$$

$$\int_0^x\left[\frac{v_0}{\sqrt{2}} + \frac{4u_0}{l^2}(x-l)x\right]dx = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\int_0^y dy$$

$$y = x - \frac{2\sqrt{2}u_0}{lv_0}x^2 + \frac{4\sqrt{2}u_0}{3l^2v_0}x^3$$

到达东岸的地点.

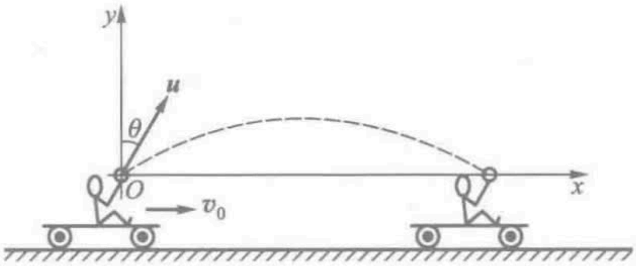
$$x' = l$$

$$y' = y_{x=l} = l\left(1 - \frac{2\sqrt{2}u_0}{3v_0}\right)$$

1.17 坐在匀加速直线运动(加速度为 a)的平板车上的小孩,沿车前进的斜上方抛出一苹果. 抛出时,苹果相对于车的速率为 u,此时平板车的速率为 v_0. 设苹果抛出过程对平板车的加速度 a 无影响,试问:若要使小孩保持在车上的位置不变就能接住落下的苹果,则苹果在车上被抛出的方向与竖直方向的夹角 θ 应为多少?

解 苹果在抛射过程中,以地面为参考系,如解图 1.17 所示,则车的位移为

$$\Delta x_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$



解图 1.17

苹果的位移为

$$\Delta x_2 = (u\sin\theta + v_0)t$$

$$\Delta y_2 = (u\cos\theta)\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

小孩接住苹果的条件为

$$\Delta x_2 = \Delta x_1,\quad \Delta y_2 = 0$$

$$(u\sin\theta + v_0)t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$(u\cos\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

由此可得

$$\tan\theta = \frac{a}{g}$$

$$\theta = \arctan\frac{a}{g}$$

1.18　一只轮船在河中航行,相对于河水的速度为 20 km · h^{-1},相对于流水的航向为北偏西 30°,河水自西向东流,速度为 10 km · h^{-1}. 此时有正西风,风速为 10 km · h^{-1}. 试求在船上观测到烟囱冒出的烟缕的飘行方向.(设烟离开烟囱后很快就获得与风相同的速度.)

解　以 w、f、s 和 e 分别标记水、风、船和地,则水对地、风对地、船对地和风对船的相对速度分别表示为 v_{we}、v_{fe}、v_{se}、v_{fs}.

$$v_{we} = 10\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}\quad（正东方向）$$

$$v_{fe} = 10\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}\quad（正东方向）$$

$$v_{sw} = 20\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}\quad（相对于流水的航向为北偏西 30°）$$

由速度变换公式可知

$$\boldsymbol{v}_{se} = \boldsymbol{v}_{sw} + \boldsymbol{v}_{we}$$

$$v_{se} = 10\sqrt{3}\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\quad (方向正北)$$

同理

$$\boldsymbol{v}_{fs} = \boldsymbol{v}_{fe} - \boldsymbol{v}_{se}$$

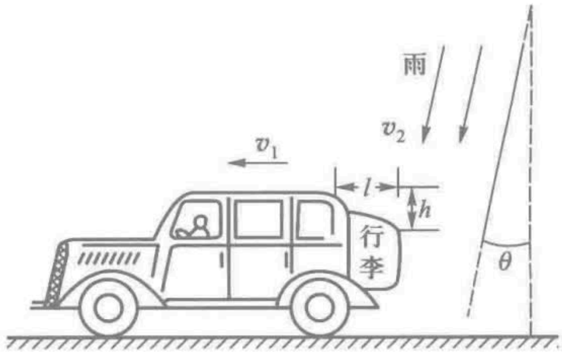
$$\boldsymbol{v}_{fe} = \boldsymbol{v}_{we}$$

$$\boldsymbol{v}_{fs} = \boldsymbol{v}_{we} - \boldsymbol{v}_{se}$$

$$v_{fs} = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 + 10^2}\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = 20\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\quad (方向南偏东 30°)$$

船上观察到的烟缕的方向即为 $\boldsymbol{v}_{fs}$的方向.

1.19 如题图 1.19 所示,汽车以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 在雨中行驶,雨滴落下的速度 $\boldsymbol{v}_2$ 偏离竖直方向 θ 角,问在什么情况下车后的一卷行李不会被打湿?



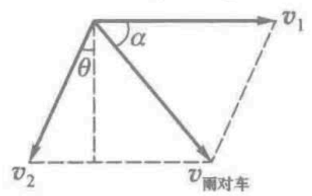
题图 1.19

解 行李是否被打湿,决定于雨对车(即对行李)的运动方向,选雨滴为研究对象,以车为参考系,由速度变换公式可知(由解图 1.19 所示).

$$\boldsymbol{v}_{雨对车} = \boldsymbol{v}_{雨对地} + \boldsymbol{v}_{地对车} = \boldsymbol{v}_{雨对地} - \boldsymbol{v}_{车对地}$$

$$= \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$$

$$\tan\alpha = \frac{v_2\cos\theta}{v_1 - v_2\sin\theta}$$



解图 1.19

则若 $\tan\alpha = \tan\varphi = \dfrac{h}{l}$,雨点下落相对于行李斜面平行,雨点将从行李卷表面擦过,若 $\alpha < \varphi$,行李不会被打湿,否则将会被打湿.