1 Eine Berechnung - ohne Rechnereinsatz

Im Folgenden wird ohne Rechnereinsatz $\mathbb{E}(321)$ rekursiv berechnet.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(321) &= p_1(\mathbb{E}(221)+1)+p_2(\mathbb{E}(311)+1)+p_3(\mathbb{E}(320)+1)\\ &= p_1+p_2+p_3+p_1\mathbb{E}(221)+p_2\mathbb{E}(311)+p_3\mathbb{E}(320)\\ &= 1+p_1\mathbb{E}(221)+p_2\mathbb{E}(311)+p_3\mathbb{E}(320)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(320) &= p_1+p_2+p_3+p_1\mathbb{E}(220)+p_2\mathbb{E}(310)+p_3\mathbb{E}(320)\\ &= \frac{1}{1-p_3}+\frac{p_1}{1-p_3}\mathbb{E}(121)+\frac{p_2}{1-p_3}\mathbb{E}(211)\\ &= \frac{1}{s}+\frac{p_1}{s}\mathbb{E}(220)+\frac{p_2}{s}\mathbb{E}(310);\ s:=\frac{1}{p_1+p_2}\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(220) = \frac{1}{s}+\frac{p_1}{s}\mathbb{E}(120)+\frac{p_2}{s}\mathbb{E}(210)$$

$$\mathbb{E}(120) = \frac{1}{s}+\frac{p_1}{s}\mathbb{E}(020)+\frac{p_2}{s}\mathbb{E}(110)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(110) &= \frac{1}{s}+\frac{p_1}{s}\mathbb{E}(010)+\frac{p_2}{s}\mathbb{E}(100)\\ &= \frac{19}{5}\end{aligned}$$

$$= \frac{158}{25}$$

$$\mathbb{E}(210) = \frac{1}{s}+\frac{p_1}{s}\mathbb{E}(110)+\frac{p_2}{s}\mathbb{E}(200) = \frac{127}{25}$$

$$= \frac{878}{125}$$

$$\mathbb{E}(310) = \frac{1}{s}+\frac{p_1}{s}\mathbb{E}(210)+\frac{p_2}{s}\mathbb{E}(300) = \frac{831}{125}$$

$$\mathbb{E}(320) = \frac{5046}{625}$$

Zwischenergebnis 1: $\mathbb{E}(321) = 1 + p_1\mathbb{E}(221) + p_2\mathbb{E}(311) + p_3 \cdot \frac{5046}{625}$

$$\mathbb{E}(311) = 1 + p_1\mathbb{E}(211) + p_2\mathbb{E}(301) + p_3\mathbb{E}(310)$$

$$\mathbb{E}(211) = 1 + p_1\mathbb{E}(111) + p_2\mathbb{E}(201) + p_3\mathbb{E}(210)$$

$$\mathbb{E}(111) = 1 + p_1\mathbb{E}(011) + p_2\mathbb{E}(101) + p_3\mathbb{E}(110)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(011) &= \frac{1}{s} + \frac{p_2}{s}\mathbb{E}(001) + \frac{p_3}{s}\mathbb{E}(010);\ s = \frac{1}{p_2 + p_3}\\ &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(101) &= \frac{1}{s} + \frac{p_1}{s}\mathbb{E}(001) + \frac{p_3}{s}\mathbb{E}(100);\ s = \frac{1}{p_1 + p_3}\\ &= \frac{13}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{73}{10}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(201) &= \frac{1}{s} + \frac{p_1}{s}\mathbb{E}(101) + \frac{p_3}{s}\mathbb{E}(200); \quad s = \frac{1}{p_1 + p_3}\\ &= \frac{59}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(210) &= \frac{1}{s} + \frac{p_1}{s}\mathbb{E}(110) + \frac{p_2}{s}\mathbb{E}(200); \quad s = \frac{1}{p_1 + p_2}\\ &= \frac{127}{25}\end{aligned}$$

$$= \frac{1591}{200}$$

$$\mathbb{E}(301) = \frac{1}{s} + \frac{p_1}{s}\mathbb{E}(201) + \frac{p_3}{s}\mathbb{E}(300); \quad s = \frac{1}{p_1 + p_3}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(201) &= \frac{1}{s} + \frac{p_1}{s}\mathbb{E}(101) + \frac{p_3}{s}\mathbb{E}(200); \quad s = \frac{1}{p_1 + p_3}\\ &= \frac{59}{8}\end{aligned}$$

$$= \frac{273}{32}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(310) &= \frac{1}{s} + \frac{p_1}{s}\mathbb{E}(210) + \frac{p_2}{s}\mathbb{E}(300); \quad s = \frac{1}{p_1 + p_2}\\ &= \frac{831}{125}\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(311) = \frac{35717}{4000}$$

Zwischenergebnis 2: $\mathbb{E}(321) = 1 + p_1\mathbb{E}(221) + p_2 \cdot \frac{35717}{4000} + p_3 \cdot \frac{5046}{625}$

$$\mathbb{E}(221) = 1 + p_1\mathbb{E}(121) + p_2\mathbb{E}(211) + p_3\mathbb{E}(220)$$

$$\mathbb{E}(121) = 1 + p_1\mathbb{E}(021) + p_2\mathbb{E}(111) + p_3\mathbb{E}(120)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(021) &= \frac{1}{s} + \frac{p_2}{s}\mathbb{E}(011) + \frac{p_3}{s}\mathbb{E}(020);\ s = \frac{1}{p_2+p_3}\\ &= \frac{26}{3}\end{aligned}$$

$$= \frac{441}{50}$$

$$= \frac{27697}{3000}$$

Endergebnis

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(321) &= 1 + p_1\mathbb{E}(221) + p_2\mathbb{E}(311) + p_3\mathbb{E}(320)\\ &= 1 + p_1 \cdot \frac{27697}{3000} + p_2 \cdot \frac{35717}{4000} + p_3 \cdot \frac{5046}{625}\\ &= \frac{596\,291}{60\,000} \approx 9.9382\end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt schon den Kern einer allgemeinen Berechnungsformel auf. Eine formalisierte Darstellung erleichtert die Erstellung eines (fehlerfreien) Programms. Es zeigt sich schon hier, dass ein Rechnereinsatz (sehr) sinnvoll ist.

Eine Anwendung

Der Erwartungswert der Anzahl der Bernoulli-Versuche bis zum n-ten Treffer (mit Trefferwahrscheinlichkeit p) ist n/p. Dies kann auch mithilfe eines Spezialfalls (alle Chips liegen auch genau einem Feld) Schritt für Schritt gezeigt werden. Die ersten zwei Schritte:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(100) &= 1 + p_1\mathbb{E}(000) + p_2\mathbb{E}(100) + p_3\mathbb{E}(100)\\ &= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1} \cdot \mathbb{E}(000)\\ &= \frac{1}{p_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(200) &= 1 + p_1\mathbb{E}(100) + p_2\mathbb{E}(200) + p_3\mathbb{E}(200)\\ &= \frac{1}{p_1} + \frac{p_1}{p_1} \cdot \mathbb{E}(100)\\ &= \frac{1}{p_1} + \frac{p_1}{p_1}\\ &= \frac{2}{p_1}\end{aligned}$$

2 Rekursionsformel für den Ein-Personen-Fall

Mit $V = (v_1, \dots, v_m)$ wird die Spielsituation von n Chips auf m Feldern bezeichnet, die mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_m$ getroffen werden.
Im Fall $v_j \geq 0$ wird durch Entfernen eines Chips von Feld j die entstehende Spielsituation durch

$$V_j := (v_1, \dots, v_j - 1, v_{j+1}, \dots, v_m)$$

dargestellt.
Abbruchbedingung: Das Spiel endet, sobald keine Chips mehr vorhanden sind. Dies kann durch

$$\sum_{i=1}^{m} v_i = 0. \tag{1}$$

dargestellt werden. Dann gilt $\mathbb{E}(V) = 0$.
Weiterhin wird die Summe der positiven Felderwahrscheinlichkeiten $p_j,\ j = 1, \dots, m$, benötigt. Auf den entsprechenden Felder befindet sich mindestens ein Chip. Mithilfe der Indikatorfunktion kann diese Bedingung definiert werden:

$$s := \sum_{j=1}^{m} p_j \, \mathbf{1}(v_j > 0).$$

Damit ergibt sich die folgende (kompakte) Berechnungsvorschrift für $\mathbb{E}(V)$:

$$\mathbb{E}(V) = \begin{cases} 0, & \text{falls (1)}, \\ \dfrac{1}{s} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \dfrac{p_j}{s} \cdot \mathbf{1}(v_j > 0) \cdot \mathbb{E}(V_j), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiele:

$$\mathbb{E}(3214) = 1 + p_1 \cdot \mathbb{E}(2214) + p_2 \cdot \mathbb{E}(3114) + p_3 \cdot \mathbb{E}(3204) + p_4 \cdot \mathbb{E}(3213)$$

$$\mathbb{E}(3010) = \frac{1}{p_1 + p_3} + \frac{p_1}{p_1 + p_3} \cdot \mathbb{E}(2010) + \frac{p_3}{p_1 + p_3} \cdot \mathbb{E}(3000)$$

Die Rekursionsformel kann mit der Mittelwertsregel nachvollzogen werden:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(3010) &= 1 + p_1 \cdot \mathbb{E}(2010) + p_2 \cdot \mathbb{E}(3010) + p_3 \cdot \mathbb{E}(3000) + p_4 \cdot \mathbb{E}(3010) \\
\mathbb{E}(3010)(1 - p_2 - p_4) &= 1 + p_1 \cdot \mathbb{E}(2010) + p_3 \cdot \mathbb{E}(3000) \\
&= \frac{1}{1 - p_2 - p_4} + \frac{p_1}{1 - p_2 - p_4}\mathbb{E}(2010) + \frac{p_3}{1 - p_2 - p_4}\mathbb{E}(3000) \\
&= \frac{1}{p_1 + p_3} + \frac{p_1}{p_1 + p_3}\mathbb{E}(2010) + \frac{p_3}{p_1 + p_3}\mathbb{E}(3000)
\end{aligned}$$

3 Rekursionsformel für den Zwei-Personen-Fall

Die vorangegangen Überlegungen lassen sich konzeptionell auf den Fall übertragen, dass mehrere Personen gegeneinander spielen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall, dass zwei Personen A und B mit den verschiedenen Setzstrategien $S = (s_1, \ldots, s_m)$ und $T = (t_1, \ldots, t_m)$ gegeneinander antreten und das Ergebnis jedes Wurfes für beide maßgeblich ist. Wer zuerst alle Chips abgeräumt hat, gewinnt. Entsteht eine Situation, in der A und B auf jedem Feld gleich viele Chips liegen haben, so ist das Spiel (mit unentschiedenem Ausgang) beendet.
Jede Spielsituation ist jetzt durch ein Paar (V, W) von m-Tupeln $V = (v_1, \ldots, v_m)$ und $W = (w_1, \ldots, w_m)$ gegeben. Hierbei bezeichnen v_j bzw. w_j die Anzahl der Chips, die A bzw. B noch auf Feld j stehen haben ($j = 1, \ldots, m$). Zu guter Letzt bezeichne $\mathbb{E}(V, W)$ den Erwartungswert *der Anzahl noch nötiger Würfe bis zum Spielende in der Spielsituation* (V, W). Bei identischer Spielsituation ist das Spiel mit einem Unentschieden beendet, sodass kein weiterer Wurf erfolgt. In diesem Fall gilt also $E(V, W) = 0$. Es erfolgt auch kein weiterer Wurf, wenn entweder A oder B keinen Chip mehr im Spiel haben. Diese beiden Abbruchbedingungen können symbolisch folgendermaßen dargestellt werden:

$$V = W \quad \vee \quad \sum_i v_i = 0 \quad \vee \quad \sum_i w_i = 0. \tag{2}$$

Weiter definieren wir die Normierung

$$s := \sum_{j=1}^{m} p_j \, \mathbf{1}(v_j + w_j > 0),$$

was die Gesamtwahrscheinlichkeit darstellt, dass in einem Wurf mindestens einer der beiden Spieler einen Chip verliert. Damit ergibt sich die folgende Berechnungsvorschrift für $\mathbb{E}(V, W)$:

$$\mathbb{E}(V, W) = \begin{cases} 0, & \text{falls (2)}, \\ \dfrac{1}{s} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{p_j}{s} \cdot \mathbf{1}(v_j + w_j > 0) \cdot \mathbb{E}(V_j, W_j), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die neuen Spielsituationen V_j und W_j sind so wie beim 1-Personen-Spiel definiert.

Beispiel

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(100, 010) &= 1 + p_1 \mathbb{E}(000, 010) + p_2 \mathbb{E}(100, 000) + p_3 \mathbb{E}(100, 010) \\ &= \frac{1}{p_1 + p_2} + \frac{p_1}{p_1 + p_2} \mathbb{E}(000, 010) + \frac{p_2}{p_1 + p_2} \mathbb{E}(100, 000) \\ &= \frac{6}{5}; \quad p_1 = \frac{1}{2},\ p_2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ergebnis: $\mathbb{E}(100, 010) < \min(\mathbb{E}(V); \mathbb{E}(W))$.

4 Programmdokumentation

```
from fractions import Fraction
from functools import lru_cache

# ------------------------------
# 1. Erwartungswert Einzelspieler
# ------------------------------
@lru_cache(maxsize=None)
def E_one(V, p):
    if all(v == 0 for v in V):
        return Fraction(0)
    total, s = Fraction(0), Fraction(0)
    for j, vj in enumerate(V):
        if vj > 0:
            Vj = list(V)
            Vj[j] -= 1
            total += p[j] * E_one(tuple(Vj), p)
            s += p[j]
    return (1 + total) / s

# ------------------------------
# 2. Erwartungswert Zweispieler
# ------------------------------
@lru_cache(maxsize=None)
def E_two(V, W, p):
    m = len(p)
    if V == W or all(v == 0 for v in V) or all(w == 0 for w in W):
        return Fraction(0)
    total, s = Fraction(0), Fraction(0)
    for j in range(m):
        if V[j] > 0 or W[j] > 0:
            Vj, Wj = list(V), list(W)
            if V[j] > 0: Vj[j] -= 1
            if W[j] > 0: Wj[j] -= 1
            total += p[j] * E_two(tuple(Vj), tuple(Wj), p)
            s += p[j]

    return (1 + total) / s
```