Задачи по программированию

Авторы:
С.А. Абрамов, Г.Г. Гнездилова,
Е.Н. Капустина, М.И. Селюн.

Компьютерный набор и оформление:
Е.А. Гречникова

Вологда, 2000г.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1. Арифметика действительных чисел. Вычисление по формулам.

1. Даны два действительных числа *a* и *b*. Получить их сумму, разность и произведение.

2. Даны действительные числа *x* и *y*. Получить

$$\frac{|x|-|y|}{1+|xy|}.$$

3. Дана длина ребра куба. Найти объем куба и площадь его боковой поверхности.

4. Даны два действительных положительных числа. Найти среднее арифметическое и среднее геометрическое этих чисел.

5. Даны два действительных числа. Найти среднее арифметическое этих чисел и среднее геометрическое их модулей.

6. Даны катеты прямоугольного треугольника. Найти его гипотенузу и площадь.

7. Смешано v_1 литров воды температуры t_1 с v_2 литрами воды температуры t_2. Найти объем и температуру образовавшейся смеси.

8. Определить периметр правильного *n*-угольника, описанного около окружности радиуса *r*.

9. Три сопротивления R_1, R_2, R_3 соединены параллельно. Найти сопротивление соединения.

10. Определить время падения камня на поверхность земли с высоты h.

11. Даны *x, y, z*. Вычислить *a, b,* если

а) $a = \dfrac{\sqrt{|x-1|} - \sqrt[3]{|y|}}{1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4}}$, $b = x(\mathrm{arctg}(z) + e^{-(x+3)})$;

б) $a=\dfrac{3+e^{y-1}}{1+x^2\left|y-\operatorname{tg} z\right|}$, $b=1+\left|y-x\right|+\dfrac{(y-x)^2}{2}+\dfrac{\left|y-x\right|^3}{3}$;

в) $a=(1+y)\dfrac{x+y/(x^2+4)}{e^{-x-2}+1/(x^2+4)}$, $b=\dfrac{1+\cos(y-2)}{x^4/2+\sin^2 z}$;

г) $a=y+\dfrac{x}{y^2+\left|\dfrac{x^2}{y+x^3/3}\right|}$, $b=(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{z}{2})$;

д) $a=\dfrac{2\cos(x-\pi/6)}{1/2+\sin^2 y}$, $b=1+\dfrac{z^2}{3+z^2/5}$;

е) $a=\dfrac{1+\sin^2(x+y)}{2+\left|x-2x/(1+x^2y^2)\right|}+x$, $b=\cos^2(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{z})$;

ж) $a=\ln\left|(y-\sqrt{|x|})(x-\dfrac{y}{z+x^2/4}\right|$, $b=x-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$.

12. Дана сторона равностороннего треугольника. Найти площадь этого треугольника.

13. Вычислить период колебания маятника длины *l*.

14. Определить силу притяжения F между телами массы m_1 и m_2, находящимися на расстоянии *r* друг от друга.

15. Даны гипотенуза и катет прямоугольного треугольника. Найти второй катет и радиус вписанной окружности.

16. Известна длина окружности. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

17. Найти площадь кольца, внутренний радиус которого равен 20, а внешний – заданному числу *r* ($r>20$).

18. Треугольник задан величинами своих углов и радиусом описанной окружности. Найти стороны треугольника.

19. Определить время, через которое встретятся два тела, равноускоренно движущиеся навстречу друг другу, если известны их начальные скорости, ускорения и начальное расстояние между ними.

20. Найти сумму членов арифметической прогрессии a, $a+d$,…, $a+(n-1)d$ по данным значениям a, d, n.

21. Даны действительные числа c, d. Вычислить

$$\left|\frac{\sin^3\left|cx_1^3+dx_2^2-cd\right|}{\sqrt{(cx_1^3+dx_2^2-x_1)^2+3.14}}\right|+\mathrm{tg}(cx_1^3+dx_2^2-x_1)$$, где x_1 – больший, а

x_2 – меньший корни уравнения $x^2-3x-\left|cd\right|=0$.

22. Найти площадь равнобочной трапеции с основаниями a и b и углом α при большем основании a.

23. Треугольник задан длинами сторон. Найти:

а) длины высот;

б) длины медиан;

в) длины биссектрис;

г) радиусы вписанной и описанной окружностей.

24. Вычислить расстояние между двумя точками с координатами x_1, y_1 и x_2, y_2 .

25. Треугольник задан координатами своих вершин. Найти:

а) периметр треугольника;

б) площадь треугольника.

26. Найти площадь сектора, радиус которого равен 13.7, а дуга содержит заданное число радиан φ .

27. Даны действительные положительные числа *a*, *b*, *c*. По трем сторонам с длинами *a*, *b*, *c* можно построить треугольник. Найти углы треугольника.

28. Дано действительное число *x*. Не пользуясь никакими другими арифметическими операциями, кроме умножения, сложения и вычитания, вычислить

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 .$$

Разрешается использовать не более четырех умножений и четырех сложений и вычитаний.

29. Даны действительные числа *x, y.* Не пользуясь никакими операциями, кроме умножения, сложения и вычитания, вычислить

$$3x^2y^2 - 2xy^2 - 7x^2y - 4y^2 + 15xy + 2x^2 - 3x + 10y + 6 .$$

Разрешается использовать не более восьми умножений и восьми сложений и вычитаний.

30. Дано действительное число *x*. Не пользуясь никакими другими арифметическими операциями, кроме умножения, сложения и вычитания, вычислить

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \text{ и } 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 .$$

Разрешается использовать не более восьми операций.

31. Дано действительное число *a.* Не пользуясь никакими другими арифметическими операциями, кроме умножения, получить:

а) a^4 за две операции;

б) a^6 за три операции;

в) a^7 за четыре операции;

г) a^8 за три операции;

д) a^9 за четыре операции;

е) a^{10} за четыре операции;

ж) a^{13} за пять операций;

з) a^{15} за пять операций;

и) a^{21} за шесть операций;

к) a^{28} за шесть операций;

л) a^{64} за шесть операций;

32. Дано действительное число *a*. Не пользуясь никакими другими арифметическими операциями, кроме умножения, получить:

а) a^3 и a^{10} за четыре операции;

б) a^4 и a^{20} за пять операций;

в) a^5 и a^{13} за пять операций;

г) a^5 и a^{19} за пять операций;

д) a^2, a^5, a^{17} за шесть операций;

е) a^4, a^{12}, a^{28} за шесть операций.

§ 2. Разветвления

33. Даны действительные числа x, y. Получить:

а) max (x, y);

б) min (x, y);

в) max (x, y) , min (x, y).

34. Даны действительные числа x, y, z. Получить:

а) max (x, y, z);

б) min (x, y, z), max(x, y, z).

35. Даны действительные числа x, y, z. Вычислить:

а) max ($x + y + z$, xyz);

б) $\min^2 (x + y + z/2, xyz) + 1$.

36. Даны действительные числа a, b, c. Проверить, выполняются ли неравенства $a < b < c$.

37. Даны действительные числа a, b, c. Удвоить эти числа, если $a \geq b \geq c$, и заменить их абсолютными значениями, если это не так.

38. Даны действительные числа x, y. Вычислить z:

$$z = \begin{cases} x - y, & \text{если } x > y, \\ y - x + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

39. Даны два действительных числа. Вывести первое число, если оно больше второго, и оба числа, если это не так.

40. Даны два действительных числа. Заменить первое число нулем, если оно меньше или равно второму, и оставить числа без изменения в противном случае.

41. Даны три действительных числа. Выбрать из них те, которые принадлежат интервалу (1, 3).

42. Даны действительные числа x, y $(x \neq y)$. Меньшее из этих двух чисел заменить их полусуммой, а большее – их удвоенным произведением.

43. Даны три действительных числа. Возвести в квадрат те из них, значения которых неотрицательны.

44.Если сумма трех попарно различных действительных чисел x, y, z меньше единицы, то наименьшее из этих чисел заменить полусуммой двух других; в противном случае заменить меньшее из x и y полусуммой двух оставшихся значений.

45.Даны действительные числа a, b, c, d. Если $a \le b \le c \le d$, то каждое число заменить наибольшим из них; если $a>b>c>d$, то оставить без изменения; в противном случае все числа заменяются их квадратами.

46.Даны действительные числа x, y. Если x и y отрицательны, то каждое значение заменить его модулем; если отрицательно только одно из них, то оба значения увеличить на 0.5; если оба значения неотрицательны и ни одно из них не принадлежит отрезку [0.5, 2.0], то оба значения уменьшить в 10 раз; в остальных случаях x и y оставить без изменения.

47. Даны действительные положительные числа x, y, z.

а) Выяснить существует ли треугольник с длинами сторон x, y, z.

б) Если треугольник существует, то ответить – является ли он остроугольным.

48.Даны действительные числа a, b, c $(a \neq 0)$. Выяснить, имеет ли уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$ действительные корни. Если действительные корни имеются, то найти их. В противном случае ответом должно служить сообщение, что действительных корней нет.

49. Дано действительное число h. Выяснить, имеет ли уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительные корни, если

$$a = \sqrt{\frac{|\sin 8h| + 17}{(1 - \sin 4h \cos(h^2 + 18))^2}},$$

$$b = 1 - \sqrt{\frac{3}{3 + \left|\operatorname{tg} ah^2 - \sin ah\right|}},$$

$$c = ah^2 \sin bh + bh^3 \cos ah.$$

Если действительные корни существуют, то найти их. В противном случае ответом должно служить сообщение, что действительных корней нет.

50. Даны действительные числа a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2. Выяснить, верно ли, что $\left|a_1 b_2 - a_2 b_1\right| \geq 0.0001$, и если верно, то найти решение системы линейных уравнений

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

(при выполнении выписанного неравенства система заведомо совместна и имеет единственное решение).

51. Даны действительные числа a, b, c ($a \neq 0$). Полностью исследовать биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$, т. е. если действительных корней нет, то должно быть выдано сообщение об этом, иначе должны быть выданы два или четыре корня.

52. Даны действительные числа a, b, c, d, s, t, u (s и t одновременно не равны нулю). Известно, что точки (a, b) и (c, d) не лежат на прямой l, заданной уравнением $sx + ty + u = 0$. Прямая l разбивает координатную плоскость на две полуплоскости. Выяснить, верно ли, что точки (a, b) и (c, d) принадлежат разным полуплоскостям*).

*) В этой задаче, как и в ряде следующих задач, надо воспользоваться тем, что две точки (a, b) и (c, d), не лежащие на прямой, определяемой уравнением $sx + ty + u = 0$, принадлежат одной полуплоскости, если $sa + tb + u$ и $sc + td + u$ – числа одного знака. Справедлив и более общий факт: если уравнение $F(x, y) = 0$ определяет прямую или

кривую, разбивающую координатную плоскость на две части, то точки (a, b) и (c, d), не лежащие на этой линии, принадлежат одной и той же части плоскости, если $F(a, b)$ и $F(c, d)$ – числа одного знака.

53. Даны действительные числа a, b, c, d, e, f, g, h. Известно, что точки (e, f) и (g, h) различны. Известно также, что точки (a, b) и (c, d) не лежат на прямой l, проходящей через точки (e, f) и (g, h). Прямая l разбивает координатную плоскость на две полуплоскости. Выяснить, верно ли, что точки (a, b) и (c, d) принадлежат одной и той же полуплоскости*).

*) В этой задаче, как и в ряде следующих задач, надо воспользоваться тем, что уравнением прямой, проходящей через две различные точки (e, f) и (g, h), является уравнение

$$(x-e)(h-f)-(y-f)(g-e)=0.$$

54. Даны действительные числа x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3. Принадлежит ли начало координат треугольнику с вершинами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)?

55. Даны действительные положительные числа a, b, c, d. Выяснить, можно ли прямоугольник со сторонами a, b уместить внутри прямоугольника со сторонами c, d так, чтобы каждая из сторон одного прямоугольника была параллельна или перпендикулярна каждой стороне второго прямоугольника.

56. Даны действительные положительные числа a, b, c, x, y. Выяснить, пройдет ли кирпич с ребрами a, b, c в прямоугольное отверстие со сторонами x и y. Просовывать кирпич в отверстие разрешается только так, чтобы каждое из его ребер было параллельно или перпендикулярно каждой из сторон отверстия.

57. Дано действительное число a. Вычислить $f(a)$, если

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } -2 \le x < 2, \\ 4 & \text{в противном случае;} \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+5 & \text{при } x\le 2, \\ \dfrac{1}{x^2+4x+5} & \text{в противном случае;} \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0, \\ x & \text{при } 0<x\le 1, \\ x^4 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0, \\ x^2-x & \text{при } 0<x\le 1, \\ x^2-\sin \pi x^2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

58. Дано действительное число *a*. Для функций *f*(*x*), графики которых представлены на рис. 1,*а* - 1,*г*, вычислить *f*(*a*).

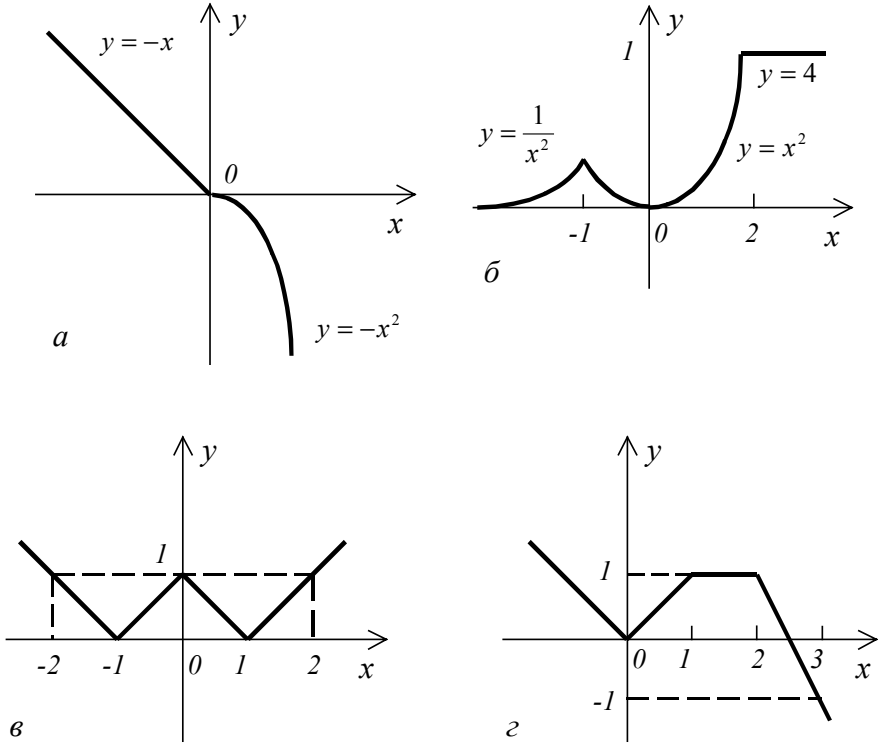
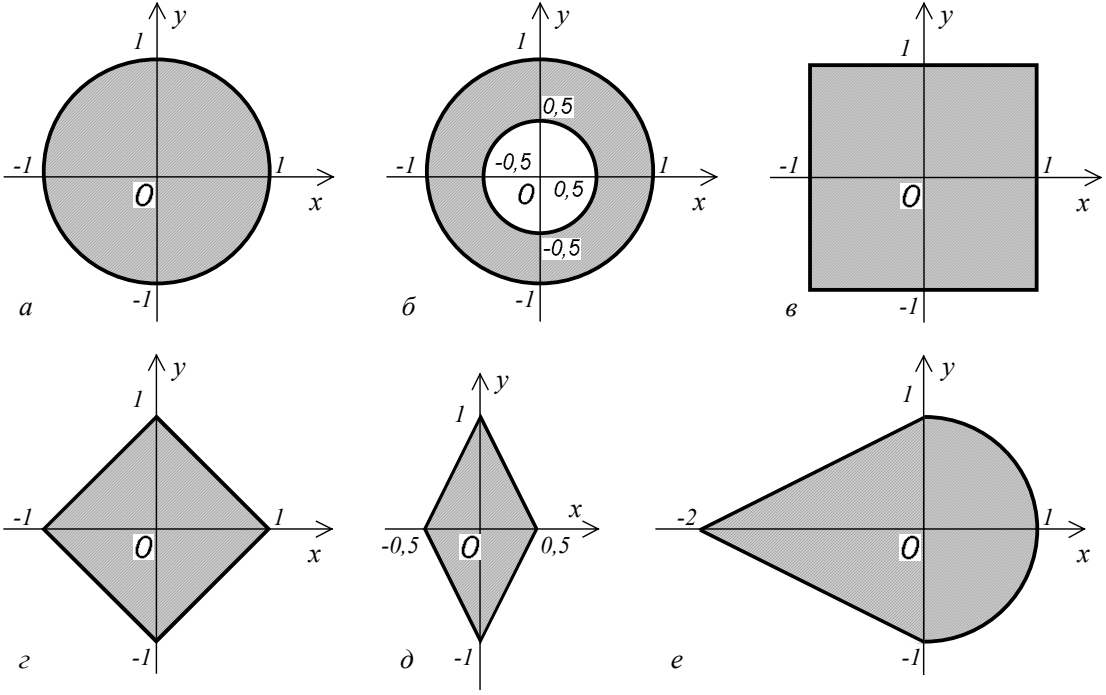


Рис. 1

59. Даны действительные числа *x*, *y*. Определить, принадлежит ли точка с координатами *x*, *y* заштрихованной части плоскости (рис. 2, *а*—2, *к*).



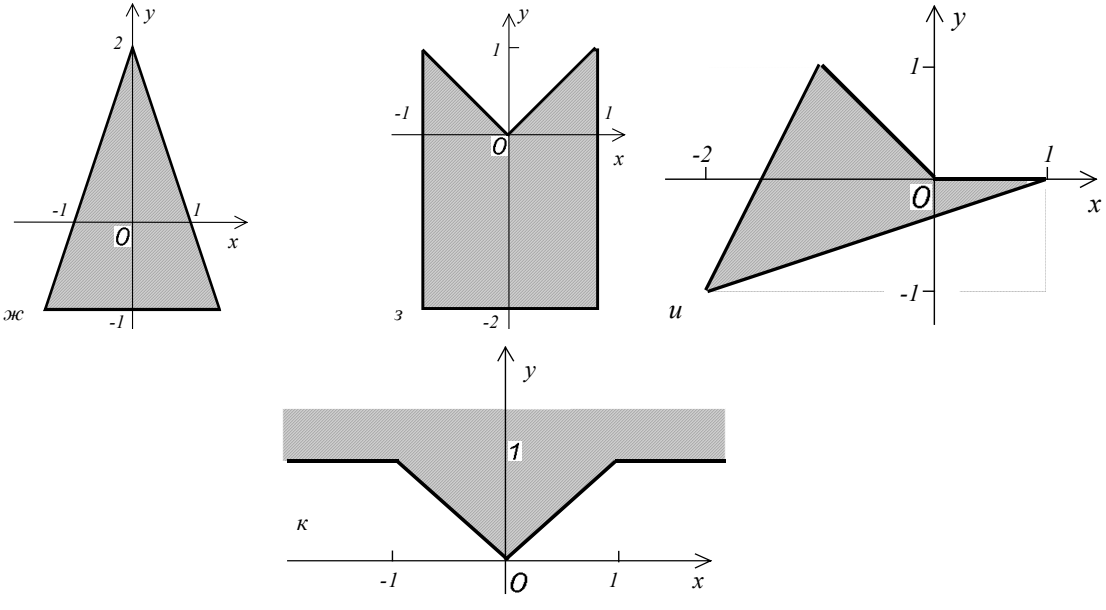


Рис. 2

60. Пусть D – заштрихованная часть плоскости (рис. 1, *а*—3, *е*) и пусть u определяется по x и y следующим образом (запись $(x, y) \in D$ означает, что точка с координатами x, y принадлежит D):

а) $u = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \in D, \\ x & \text{в противном случае;} \end{cases}$

б) $u = \begin{cases} -3, & \text{если } (x, y) \in D, \\ y^2 & \text{в противном случае;} \end{cases}$

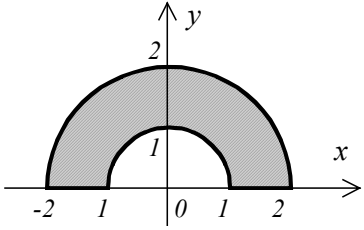
в) $u = \begin{cases} x - y & \text{если } (x, y) \in D, \\ xy + 7 & \text{в противном случае;} \end{cases}$

г) $u = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } (x, y) \in D, \\ \sqrt{|x - 1|} & \text{в противном случае;} \end{cases}$

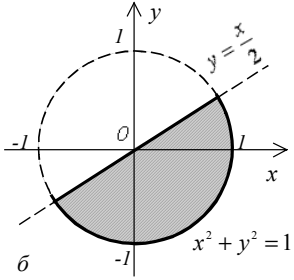
д) $u = \begin{cases} \sqrt{|x^2 - 1|}, & \text{если } (x, y) \in D, \\ x + y & \text{в противном случае;} \end{cases}$

е) $u = \begin{cases} x + y, & \text{если } (x, y) \in D, \\ x - y & \text{в противном случае.} \end{cases}$

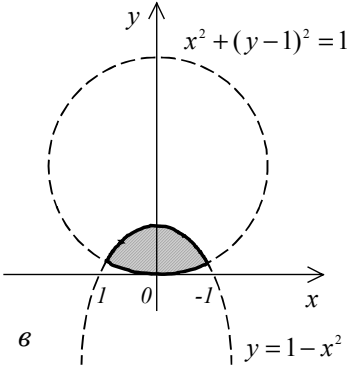
Даны действительные числа x, y. Определить u.


y
2
1
x
-2
1
0
1
2

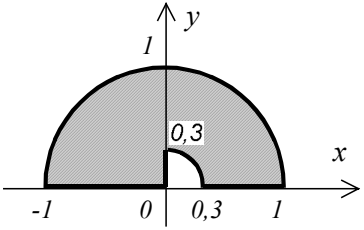
а


y
1
$y = \frac{x}{2}$
-1
0
1
x
$x^2 + y^2 = 1$
-1

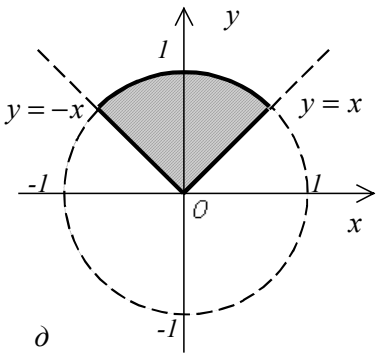
б


y
$x^2 + (y-1)^2 = 1$
1
0
-1
x
$y = 1 - x^2$

в


y
1
0,3
x
-1
0
0,3
1

г



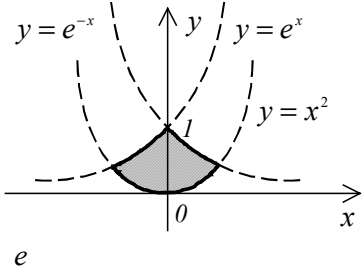


Рис.3

§ 3. Простейшая целочисленная арифметика

61. Дано действительное число x. Получить целую часть *) числа x; затем – число x, округленное до ближайшего целого; затем – число x без дробных цифр.

*) Целой частью числа x, обозначаемой [x], называется наибольшее целое, не превосходящее x, так, [3.14] = 3, [3] = 3, [–3. 1 4] = –4, [– 3] = –3.

62. Определить, является ли данное целое число четным.

63. Определить, верно ли, что при делении неотрицательного целого числа a на положительное целое число b получается остаток, равный одному из двух заданных чисел r или s.

64. Дано натуральное число n (n>99). Определить число сотен в нем.

65. Дано натуральное число n (n>99). Выяснить, верно ли, что n^2 равно кубу суммы цифр числа n.

66. Даны целые числа k, m, действительные числа x, y, x. При $k<m^2$, $k=m^2$ или $k>m^2$ заменить модулем соответственно значения x, y или z, а два других значения уменьшить на 0.5.

67. Дано натуральное число n ($n \leq 100$).

а) Сколько цифр в числе n?

б) Чему равна сумма его цифр?

в) Найти последнюю цифру числа n.

г) Найти первую цифру числа n.

д) В предположении, что $n \geq 10$, найти предпоследнюю цифру числа n.

68. Дано натуральное число n ($n \leq 9999$).

а) Является ли это число палиндромом (перевертышем) с учетом четырех цифр, как, например, числа 2222, 6116, 0440 и т. д.?

б) Верно ли, что это число содержит ровно три одинаковые цифры, как, например, числа 6676, 4544, 0006 и т. д.?

в) верно ли, что все четыре цифры числа различны?

69. Часовая стрелка образует угол φ с лучом, проходящим через центр и через точку, соответствующую 12 часам на циферблате, $0 < \varphi \leq 2\pi$. Определить значение угла для минутной стрелки, а также количество часов и полных минут.

70. Даны целые числа m, n ($0 < m \leq 12$, $0 \leq n < 60$), указывающие момент времени: «m часов, n минут». Определить наименьшее время (число полных минут), которое должно пройти до того момента, когда часовая и минутная стрелки на циферблате:

а) совпадут;

б) расположатся перпендикулярно друг другу.

71. Дано действительное число a. Вычислить $f(a)$, где f – периодическая функция с периодом 1.5, совпадающая на отрезке [0,1.5]:

а) с функцией $x^3 – 2.25x$;

б) с функцией, график которой изображен на рис. 4.

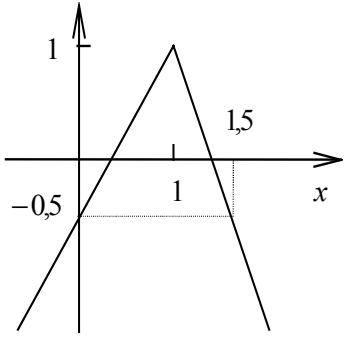


Рис.4

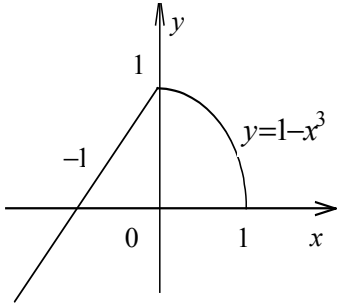


Рис.5

72. Дано действительное число a. Вычислить $f(a)$, где f – периодическая функция с периодом 2, совпадающая на отрезке $[-1,1]$:

а) с функцией $-x^2+1$;

б) с функцией, график которой изображен на рис. 5**.**

73. Даны целые числа k, l. Если числа не равны, то заменить каждое из них одним и тем же числом, равным большему из исходных, а если равны, то заменить числа нулями.

74. Дано натуральное n ($n \leq 100$), определяющее возраст человека (в годах). Дать для этого числа наименования «год», «года» или «лет»: например, 1 год, 23 года, 45 лет и т. д.

75. Доказать, что любую целочисленную денежную сумму, большую 7 руб., можно выплатить без сдачи трешками и пятерками. Для данного $n > 7$ найти такие целые неотрицательные a и b, что $3a + 5b = n$.

76. Поле шахматной доски определяется парой натуральных чисел, каждое из которых не превосходит восьми: первое число – номер вертикали (при счете слева направо), второе – номер горизонтали (при счете снизу вверх). Даны натуральные числа k, l, m, n, каждое из которых не превосходит восьми. Требуется:

а) Выяснить являются ли поля (k, l) и (m, n) полями одного цвета.

б) На поле (k, l) расположен ферзь. Угрожает ли он полю (m, n)?

в) Аналогично б), но ферзь заменяется на коня.

г) Выяснить, можно ли с поля (k, l) одним ходом ладьи попасть на поле (m, n). Если нет, то выяснить, как это можно сделать за два хода (указать поле, на которое приводит первый ход).

д) Аналогично г), но ладья заменяется на ферзя.

е) Аналогично г), но ладья заменяется на слона.

Предполагается, что указанные поля имеют один и тот же цвет.

§ 4. Простейшие циклы

77. Дано натуральное число n. Вычислить:

а) 2^n;

б) $n!$;

в) $\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

г) $\frac{1}{\sin 1}+\frac{1}{\sin 1+\sin 2}+\ldots+\frac{1}{\sin 1+\ldots+\sin n}$;

д) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{\text{n корней}}$;

е) $\frac{\cos 1}{\sin 1}\cdot\frac{\cos 1+\cos 2}{\sin 1+\sin 2}\cdot\ldots\cdot\frac{\cos 1+\ldots+\cos n}{\sin 1+\ldots+\sin n}$;

ж) $\sqrt{3+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{3(n-1)+\sqrt{3n}}}}$.

78. Даны действительное число a, натуральное число n. Вычислить:

а) a^n;

б) $a(a+1)\ldots(a+n-1)$;

в) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a(a+1)}+\ldots+\frac{1}{a(a+1)\ldots(a+n)}$;

г) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}+\ldots+\frac{1}{a^{2^n}}$;

д) $a(a-n)(a-2n)\ldots(a-n^2)$.

79. Вычислить $(1+\sin 0.1)(1+\sin 0.2)\ldots(1+\sin 10)$.

80. Дано действительное число x. Вычислить

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\frac{x^{13}}{13!}.$$

81. Даны действительные числа x, a, натуральное число n. Вычислить

$$\underbrace{((...((}_{\text{n скобок}}x+a)^2+a)^2+...+a)^2+a)^2+a\,.$$

82. Дано действительное число x. Вычислить

$$\frac{(x-2)(x-4)(x-8)...(x-64)}{(x-1)(x-3)(x-7)...(x-63)}\,.$$

83. Дано действительное число a. Найти:

а) среди чисел 1, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, … первое, большее a;

б) такое наименьшее n, что $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}>a$.

84. Даны натуральное n, действительное x. Вычислить:

а) $\sin x+\sin^2 x+...+\sin^n x$;

б) $\sin x+\sin x^2+...+\sin x^n$;

в) $\sin x + \sin\sin x + \ldots + \underbrace{\sin\sin\ldots\sin x}_{n}$;

85. Даны действительные числа *a, h*, натуральное число *n*. Вычислить

$$f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+\ldots+2f(a+(n-1)h)+f(a+nh),$$

где

$$f(x)=(x^2+1)\cos^2 x.$$

86. Дано натуральное число *n*.

а) Сколько цифр в числе *n*.

б) Чему равна сумма его цифр?

в) Найти первую цифру числа *n*.

г) Найти знакочередующуюся сумму цифр числа *n* (пусть запись *n* в десятичной системе есть $\alpha_k\alpha_{k-1}\ldots\alpha_0$; найти $\alpha_k - \alpha_{k-1} + \ldots + (-1)^k\alpha_0$).

87. Даны натуральное n, m. Получить сумму m последних цифр числа n.

88. Дано натуральное число n.

а) Выяснить, входить ли цифра 3 в запись числа n^2.

б) Поменять порядок цифр числа n на обратный.

в) Переставить первую и последнюю цифры числа n.

г) Приписать по единице в начало и в конец записи числа n.

89. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя (НОД) неотрицательных целых чисел основан на следующих свойствах этой величины. Пусть m и n – одновременно не равные нулю целые неотрицательные числа и пусть $m \geq n$. Тогда, если $n = 0$, то НОД $(n, m) = m$, а если $n \neq 0$, то для чисел m, n и r, где r – остаток от деления m на n, выполняется равенство НОД (m, n) = НОД (n, r). Например, НОД(15, 6) = НОД(6, 3) = НОД(3, 0) = 3.

Даны натуральные числа n, m.

а) Используя алгоритм Евклида, найти наибольший общий делитель n и m.

б) Найти наименьшее общее кратное n и m.(Как здесь может помочь алгоритм Евклида?)

90. Даны натуральные числа m и n. Найти такие натуральные p и q, не имеющие общих делителей, что $p/q = m/n$.

91. Пусть

$$a_0 = 1;\ a_k = ka_{k-1} + 1/k, \quad k = 1,2,...$$

Дано натуральное число n. Получить a_n.

92. Пусть

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0;\ \upsilon_3 = 1.5;$$

$$\upsilon_i = \frac{i+1}{i^2+1}\upsilon_{i-1} - \upsilon_{i-2}\upsilon_{i-3},\ i = 4, 5, \ldots$$

Дано натуральное n ($n \geq 4$). Получить υ_n.

93. Пусть

$$x_0 = c; \;\; x_1 = d \;;$$

$$x_k = qx_{k-1} + rx_{k-2} + b \,;\; k = 2, 3, \ldots$$

Даны действительные q, r, b, c, d, натуральное n ($n \geq 2$). Получить x_n.

94. Пусть

$$u_1 = u_2 = 0; \;\; \upsilon_1 = \upsilon_2 = 0 \,;$$

$$u_i = \frac{u_{i-1} - u_{i-2}\upsilon_{i-1} - \upsilon_{i-2}}{1 + u_{i-1}^2 + \upsilon_{i-1}^2} \,;\; \upsilon_i = \frac{u_{i-1} - \upsilon_{i-1}}{\left|u_{i-2} + \upsilon_{i-1}\right| + 2}, \quad i = 3, 4, \ldots$$

Дано натуральное n ($n \geq 3$). Получить υ_n.

95. Пусть

$$a_0 = a_1 = 1 \,;\; a_i = a_{i-2} + \frac{a_{i-1}}{2^{i-1}}, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Найти произведение $a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{14}$.

96. Пусть

$$a_1 = b_2 = 1;\ a_k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b_{k-1}} + \frac{1}{2}\sqrt{a_{k-1}}\right);$$

$$b_k = 2a_{k-1}^2 + b_{k-1},\ k = 2, 3, \ldots$$

Дано натуральное n. Найти $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ *).

***)** Выражение $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ есть краткая запись суммы $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$;

вообще $\sum_{k=m}^{n} f_k$ обозначает при $n \geq m$ сумму $f_m + \ldots + f_n$; при $n < m$

выражение смысла не имеет.

97. Пусть

$x_1 = y_1 = 1; \quad x_i = 0.3x_{i-1};$

$y_i = x_{i-1} + y_{i-1}, \ i = 2, 3, \ldots$

Дано натуральное n. Найти

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+|y_i|}.$$

98. Пусть

$a_1 = b_1 = 1; \ a_k = 3b_{k-1} + 2a_{k-1};$

$b_k = 2a_{k-1} + b_{k-1}, \ k = 2, 3, \ldots$

Дано натуральное n. Найти

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^k}{\left(1 + a_k^2 + b_k^2\right)k!}.$$

99. Пусть

$a_1 = u, \ b_1 = v, \ a_k = 2b_{k-1} + a_{k-1};$

$b_k = 2a_{k-1}^2 + b_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots$

Даны действительные u, υ, натуральное n. Найти

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{(k+1)!}.$$

100. Пусть

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1; \qquad x_i = x_{i-1} + x_{i-3}, \qquad i = 4, 5, \ldots$$

Найти $\sum_{i=1}^{100} \frac{x_i}{2^i}$.

101. Даны положительные действительные числа a, x, ε. В последовательности $y_1, y_2, \ldots$, образованной по закону

$$y_0 = a; y_i = \frac{1}{2}\left(y_{i-1} + \frac{x}{y_{i-1}} \right), i = 1, 2, \ldots;$$

найти первый член y_n, для которого выполнено неравенство

$$\left| y_n^2 - y_{n-1}^2 \right| < \varepsilon .$$

102. Пусть $x_0 = 1$; $x_k = \dfrac{2 - x_{k-1}^3}{5}$, $k = 1, 2, \ldots$ Найти первый член x_n, для которого $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-5}$.

103. Пусть

$$y_0 = 1;\ y_k = \frac{y_{k-1} + 1}{y_{k-1} + 2},\ k = 1, 2, \ldots$$

Дано действительное $\varepsilon > 0$. Найти первый член y_n, для которого выполнено $y_n - y_{n-1} < \varepsilon$.

104. Дано действительное $a > 0$. Последовательность $x_0, x_1, \ldots$ образована по закону

$$x_0 = \begin{cases} \min(2a,\ 0.95) & \text{при } a \le 1, \\ \dfrac{a}{5} & \text{при } 1 < a \le 25, \\ \dfrac{a}{25} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$x_n = \frac{a}{5} x_{n-1} + \frac{4}{5x_{n-1}^4}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Найти первый член x_n, для которого $\frac{5}{4} a \left| x_{n+1} - x_n \right| < 10^{-6}$.Вычислить для найденного значения x_n разность $a - x_n^5$.

105. Даны натуральное число *n*, действительное число *x*. Вычислить:

а) $x^{n^2} / 2^n$;

б) $x^{n^3} / 3^n$.

106. Даны действительные числа a, b, натуральное число n $(b > a)$. Получить $(f_1 + ... + f_n)h$, где

$$h = \frac{b - a}{n},\ f_i = \frac{a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h}{1 + \left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right)^2},\ i = 1, 2, ..., n.$$

107. Дано целое число $m > 1$. Получить наибольшее целое k, при котором $4^k < m$.

108. Дано натуральное число n. Получить наименьшее число вида 2^r, превосходящее n.

109. Дано натуральное число n. Вычислить $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + n \cdot (n+1) \cdot ... \cdot 2n$.

110. Вычислить:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\ddots\,101+\cfrac{1}{103}}}}}$$

111. Дано действительное число $x \neq 0$. Вычислить

$$\cfrac{x}{x^2+\cfrac{2}{x^2+\cfrac{4}{x^2+\cfrac{8}{\ddots\,x^2+\cfrac{256}{x^2}}}}}\ !$$

112. Даны целые числа n, k, ($n \geq k \geq 0$). Вычислить

$$\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

113. Пусть n - натуральное число и пусть $n!!$ означает $1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot n$ для нечетного n и $2\cdot4\cdot\ ...\ \cdot n$ для четного n. Для заданного натурального n вычислить:

а) $n\ !!$;

б) $(-1)^{n+1}n!!$.

114. Вычислить :

а) $\sum_{i=1}^{100}\frac{1}{i^2}$;

б) $\sum_{i=1}^{50}\frac{1}{i^3}$;

в) $\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{i!}$;

г) $\sum_{i=1}^{128}\frac{1}{(2i)^2}$;

д) $\prod_{i=1}^{52} \frac{i^2}{i^2+2i+3}$ *);

е) $\prod_{i=1}^{10} \left(2+\frac{1}{i!}\right)$;

ж) $\prod_{i=2}^{100} \frac{i+1}{i+2}$;

з) $\prod_{i=2}^{10} \left(1-\frac{1}{i!}\right)^2$.

*) Выражение $\prod_{i=1}^{52} \frac{i^2}{i^2+2i+3}$ есть краткая запись произведения

$\frac{1^2}{1^2+2\cdot 1+3}\cdot\frac{2^2}{2^2+2\cdot 2+3}\cdot\ldots\cdot\frac{52^2}{52^2+2\cdot 52+3}$; вообще, $\prod_{i=m}^{n} f_i$ обозначает при $n \geq m$ произведение $f_m \cdot f_{m+1} \cdot \ldots \cdot f_n$; при $n < m$ выражение смысла не имеет.

115. Дано натуральное число n. Вычислить:

а) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$;

б) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5}$;

в) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$;

г) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k}$;

д) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$;

е) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (k+1)}{k!}$;

ж) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k+1}}$.

116. Даны натуральное число n, действительное число x. Вычислить:

а) $\sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!}$;

б) $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i!}+\sqrt{|x|}\right)$;

в) $\sum_{i=1}^{n} \frac{x+\cos(ix)}{2^i}$;

г) $\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{\sin(kx)}{k!}\right)$;

д) $\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}-\cos^{k}|x|\right)$; е) $\prod_{k=1}^{n}\frac{(1-x)^{k+1}+1}{((k-1)!+1)^{2}}$.

117. Дано натуральное число n. Вычислить произведение первых n сомножителей:

а) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots$;

б) $\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\ldots$

118. Вычислить $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{9999}-\frac{1}{10000}$ следующими четырьмя способами:

а) последовательно слева направо;

б) последовательно слева направо вычисляются $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9999}$ и $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{10000}$, затем второе значение вычитается из первого;

в) последовательно справа налево;

г) последовательно справа налево вычисляются суммы, выписанные в б), затем - вычитание.

Почему при вычислениях на вычислительной машине каждым из способов получаются разные результаты?

119. Вычислить бесконечную сумму с заданной точностью ε(ε > 0). Считать что требуемая точность достигнута, если несколько первых слагаемых и очередное слагаемое оказалось по модулю меньше, чем ε, это и все последующие слагаемые можно уже не учитывать.

Вычислить:

а) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$;

б) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$;

в) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$;

г) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i!}$;

д) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i(i+1)(i+2)}$;

е) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i + 5^{i+2}}$.

§ 5. Простейшие графические построения

120. Построить:

а) треугольник с вершинами (100, 100), (150, 100), (80, 170);

б) прямоугольник с вершинами (80, 80), (170, 80), (170, 150), (80, 150);

в) пятиугольник с вершинами (100, 100), (150, 100), (170, 120), (150, 140), (100, 140), (80, 120);

г) шестиугольник с вершинами (120, 100), (140, 120), (140, 140), (120, 160), (100, 140), (100, 120);

д) выполнить задания а) - г), дополнив каждое из них требованием закраски построенной плоской фигуры *).

*) Построения и закраску фигур в этой и последующих задачах выполнять любыми цветами, имеющимися на конкретной вычислительной машине.

121. Построить и закрасить квадрат со стороной 30 пиксел *), центр которого совмещен с центром экрана. Стороны квадрата должны быть параллельны осям координат экрана.

*) Длины отрезков в этой и следующих задачах указываются в количестве адресуемых точек экрана (пикселах).

122. Построить и закрасить прямоугольник со сторонами 30 и 50 пиксел, центр которого совмещен с центром экрана. Стороны прямоугольника должны быть параллельны осям координат экрана.

123.Построить и закрасить круг радиуса 40 пиксел, центр которого совмещён с центром экрана.

124. Столбчатая диаграмма (гистограмма) представляет собой набор прямоугольников, основания которых равны, а высоты пропорциональны числовым величинам, взятым из некоторой совокупности (рис. 6). Для большей наглядности прямоугольники

диаграммы обычно закрашивают в разные цвета.

Даны семь действительных положительных чисел a_1, a_2 , …, a_7. Построить гистограмму для этих значений.

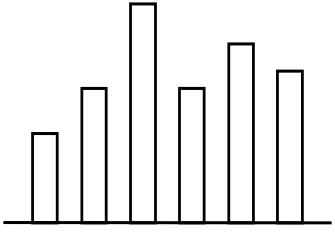


Рис. 6

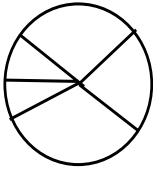


Рис. 7

125. Секторная диаграмма — это круг, площади секторов которого пропорциональны соответствующим числовым величинам, взятым из некоторой совокупности (рис. 7). Для большей наглядности секторы диаграмм закрашивают в разные цвета.

Даны семь действительных чисел a_1, a_2 , … a_7. Построить секторную диаграмму для этих значений.

126. Даны натуральные v_1, v_2, …, v_8, задающие число дней в году, в которых преобладало соответственно северное, северо-восточное, восточное, юго-восточное, южное, юго-западное, западное или северо-западное направление ветра. Построить розу ветров (рис. 8).

127. Стрелка (рис.9) состоит из отрезка прямой и равностороннего треугольника-острия. Сторона треугольника, пересекающая отрезок, образует с ним прямой угол; точка пересечения делит отрезок в отношении 1:5. Построить:

а) горизонтальную стрелку, направленную из точки (100,100) в точку (150,100);

б) горизонтальную стрелку, направленную из точки (150,100) в точку (100,100);

в) вертикальную стрелку, направленную из точки (100, 50) в точку (100,150);

г) вертикальную стрелку, направленную из точки (100,100) в точку (100,50).

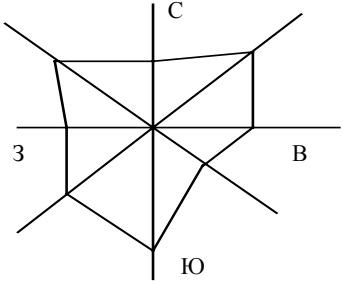


Рис. 8

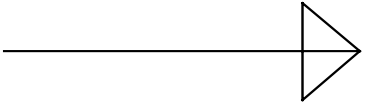


Рис. 9

128. Построить оси координат (рис. 10). Начало координат следует поместить вблизи левого нижнего угла экрана, полуоси *Ox* и *Oy* разместить, как показано на рис.10.

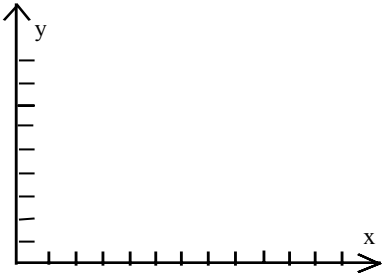
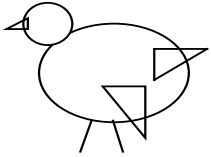
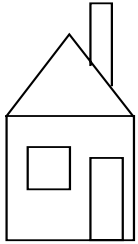


Рис. 10

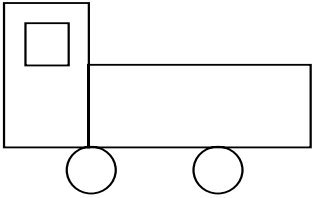
129. Рис. 11, *а* - *о* составлены из простейших геометрических фигур треугольников, квадратов, окружностей, точек и т.п. Цыпленок (рис. 11, *а*) состоит из эллипса (тело цыпленка), окружности (голова), трех треугольников (нос, хвост и крыло цыпленка) и двух прямых (лапы). Дом (рис. 11, *б*) состоит из двух квадратов (дом и окно), прямоугольника (дверь), треугольника (крыша) и ломаной (труба). Грузовик (рис. 11, *в)* состоит из двух прямоугольников (кабина и кузов), квадрата (окно) и двух окружностей (колеса). Елка (рис. 11, *г*) состоит из трех треугольников (ветви) и прямоугольника (ствол) и т. п.



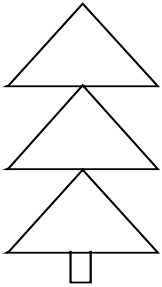
а



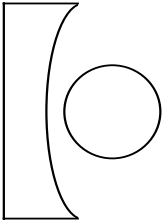
б



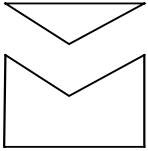
в



г

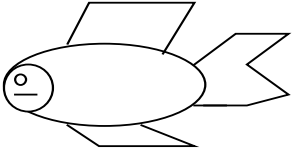


д

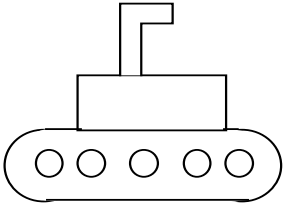


е

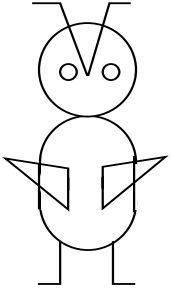
ж



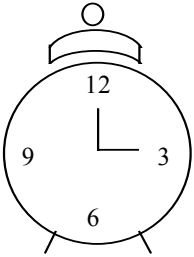
з



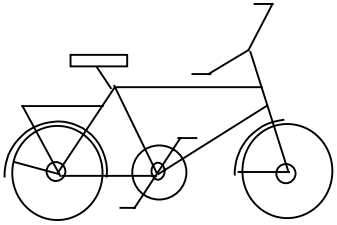
и



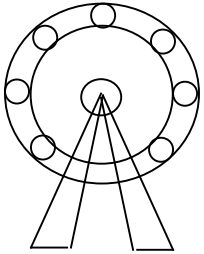
к



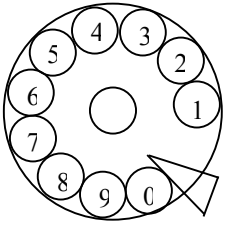
л



м



н

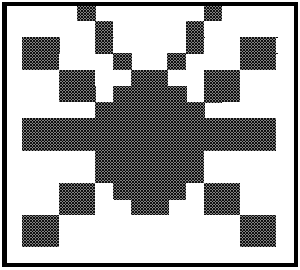


о

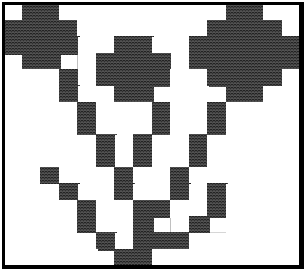
Рис. 11

Получить на экране и раскрасить рис .11, *а* - *о*.

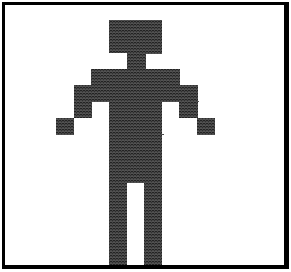
130. На рис. 12, *а* – *р* даны шаблоны нескольких фигур: жука, букета цветов, робота, самолета и т. д. Закрашенный квадрат на шаблоне соответствует высвечиваемой точке, пустой квадрат – точке, которая не высвечивается (или, что то же самое, точке, цвет которой совпадает с цветом фона).



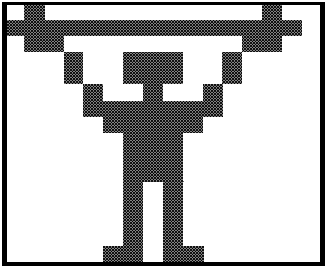
а



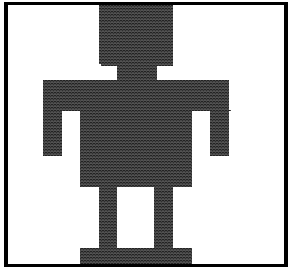
б

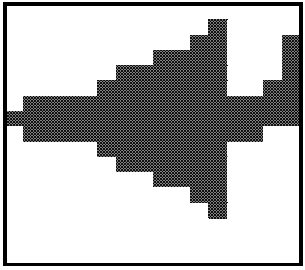


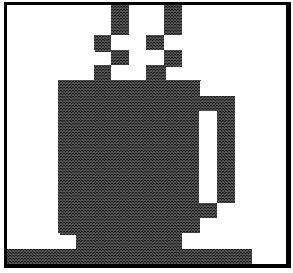
в



г







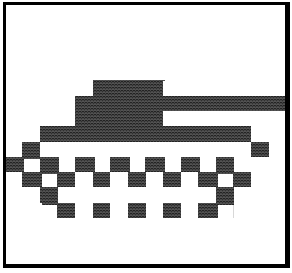
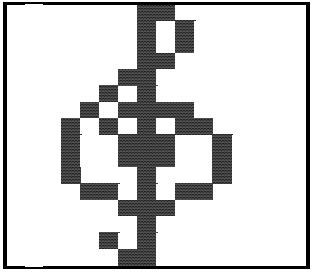
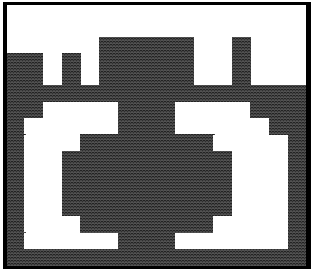


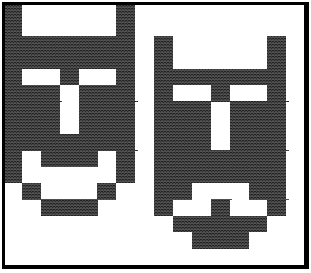
Рис. 12, *а-з*



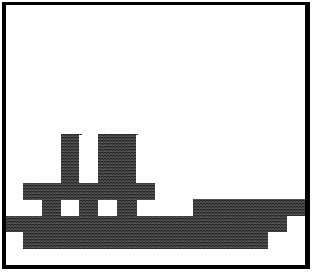
и



к



л



м

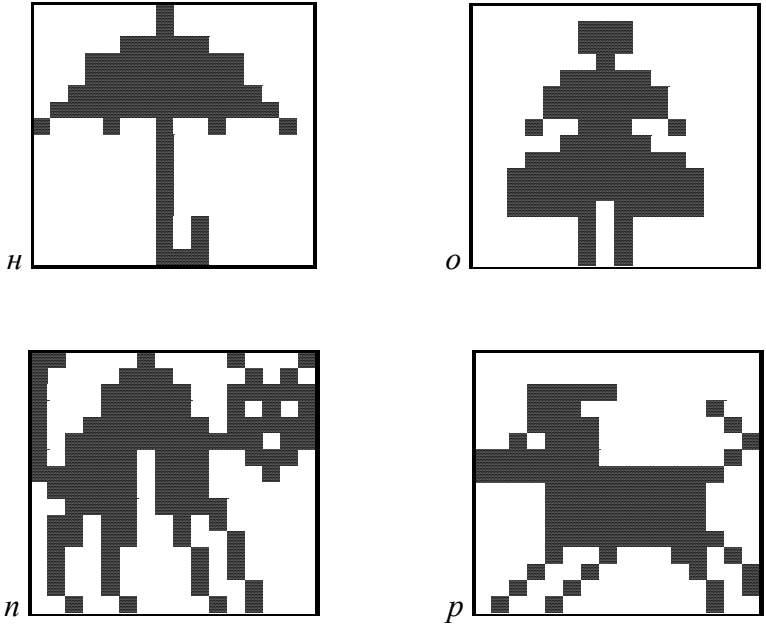


Рис. 12, *и-р*

Получить на экране фигуры по шаблонам, приведенным на рис. 12, *а – р*.

131. Составить шаблоны рукописных букв от а до я. Используя эти шаблоны, выполнить подрисуночные подписи к фигурам предыдущей задачи и фигурам задачи 129. (Шаблон рукописной буквы г см. на рис. 13.)

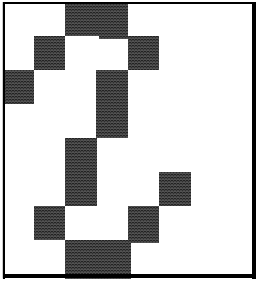


Рис. 13

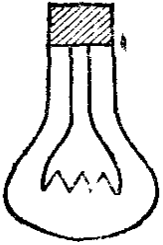


Рис. 14

132. Дано натуральное число n ($n \le 999999$). Записать его шестью цифрами, используя девятисегментный шаблон (как на почтовых конвертах).

133. Получить на экране рис. 14 и обеспечить возможность «зажигать» и «гасить» нарисованную лампочку: включение и выключение лампочки должно выполнятся с клавиатуры, спираль зажженной и погашенной лампочек окрашивается в разные цвета.

134. Получить на экране рис. 15 и обеспечить возможность «зажигать» и «гасить» свет в доме: включение и выключение света должно выполнятся с клавиатуры, окно дома при зажженном и при

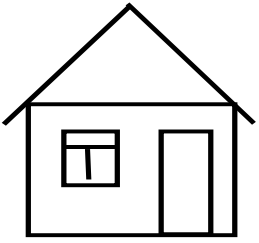


Рис. 15

погашенном свете окрашивается в разные цвета.

135. Получить на экране изображение действующих электронных часов, показывающих текущее время. Шаблоны используемых цифр должны соответствовать обычному для электронных часов семисегментному шаблону.

§ 6. Пошаговый ввод данных и вывод результатов *)

***)** В задачах этого параграфа не требуется хранения исходных последовательностей значений.

136. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1,...,a_n$.

Вычислить:

а) $a_1 + ... + a_n$; б) $a_1 a_2 \ ... \ a_n$;

в) $|a_1| + ... + |a_n|$; г) $|a_1| \cdot |a_2| \cdot ... \cdot |a_n|$;

д) $a_1^2 + ... + a_n^2$; е) $a_1 + ... + a_n$ и $a_1 a_2 \ ... \ a_n$;

ж) $a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{n+1} a_n$;

з) $-\frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} - ... + \frac{(-1)^n a_n}{n!}$;

и) $\frac{a_1}{0!} + \frac{a_2}{1!} + ... + \frac{a_n}{(n-1)!}$;

к) $2(a_1 + ... + a_n)^2$; л) $\sqrt{|a_1 a_2 \ ... \ a_n|}$;

м) $\sin|a_1 + ... + a_n|$;

н) $\left(\sqrt{|a_1|} - a_1\right)^2 + ... + \left(\sqrt{|a_n|} - a_n\right)^2$;

о) $\sqrt{10 + a_1^2} + ... + \sqrt{10 + a_n^2}$.

137. Даны натуральное число *n*, действительные числа $a_1,...,a_n$. Вычислить:

а) a_1, $a_1 + a_2$, ... , $a_1 + a_2 + ... + a_n$;

б) a_1^2, $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, ... , $a_1 a_n$;

в) $|a_1|$, $|a_1 + a_2|$, ... , $|a_1 + ... + a_n|$;

г) a_1, $-a_1 a_2$, $a_1 a_2 a_3$, ... , $(-1)^{n+1} a_1 a_2 \ ... \ a_n$;

д) $-a_1$, a_2, $-a_3$, ... , $(-1)^n a_n$;

е) $a_1 + 1!,\ a_2 + 2!,\ \ldots,\ a_n + n!$.

138. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{70}$. Получить(вывести) последовательность $a_2, a_3, \ldots, a_{70}, a_1$.

139. Дано натуральное число *n*. Получить последовательность $b_1, \ldots, b_n$, где при $i = 1, 2, \ldots, n$ значение b_i равно:

а) i;

б) i^2;

в) $i!$;

г) 2^{i+1};

д) $2^i + 3^{i+1}$;

е) $\dfrac{2^i}{i!}$;

ж) $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{i}$;

з) $1 - \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{(-1)^{i+1}}{i}$;

и) $i\left(\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{i!}\right)$.

140. Вычислить значение выражения $\dfrac{3a+4}{a^2-5a-9}$ для a = 1, 2, ..., 100.

141. Цилиндр объема единица имеет высоту h. Определить радиус основания цилиндра для значений h, равных 0.5, 1, 1.5, ..., 5.

142. Вычислить значения многочлена $x^5-9x^4+1.7x^2-9.6$ для x = 0, 1, ..., 5.

143. Даны действительные числа $a_1, a_2, a_3, a_4, x_1, ..., x_{50}$. Получить $b_1, ..., b_{50}$, где

$$b_i=\frac{x_i^2-x_i-a_1}{x_i-a_1}\cdot\frac{x_i^3-x_i-a_2}{x_i-a_2}\left(x_i-a_3\right)-\frac{x_i^4-x_i-a_4}{x_i}+x_i\left(x_i+a_3\right),$$

i = 1, 2, ..., 50.

144. Последовательность чисел Фибоначчи $u_0, u_1, \ldots$ образуется по закону $u_0 = 0; \quad u_1 = 1; \quad u_i = u_{i-1} + u_{i-2} \quad (i = 2, 3, \ldots)$.

а) Дано натуральное число $n > 1$. Получить $u_0, u_1, \ldots, u_n$.

б) Последовательность $f_0, f_1, \ldots$ образуется по закону $f_0 = 0$; $f_1 = 1$; $f_i = f_{i-1} + f_{i-2} + u_{i-2} \quad (i = 2, 3, \ldots)$. Дано натуральное $n > 1$. Получить $f_0, f_1, \ldots, f_n$.

145. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ образована по закону:

а) $x_1 = 0; \; x_2 = \frac{5}{8}; \; x_i = \frac{x_{i-1}}{2} + \frac{3}{4} x_{i-2}, \; i = 3, 4, \ldots;$

б) $x_1 = 1; \; x_2 = 0.3; \; x_i = (i+1) x_{i-2}, \quad i = 3, 4, \ldots;$

в) $x_1 = x_2 = x_3 = 1; \; x_i = (i+3)(x_{i-1} - 1) + (i+4) x_{i-3}, \; i = 4, 5, \ldots;$

Получить $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$.

146. Даны натуральное число n, действительные числа a, b $(a \neq b)$. Получить $r_0, r_1, ..., r_n$, где $r_i = a + ih$, $h = (b–a)/n$.

147. Вычислить последовательности значений функций $p_1(x) = x$, $p_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$, $p_3(x) = \frac{5x^2 - 3x}{2}$ для значений аргумента $x = 0, 0.05, 0.1, ..., 20$.

148. Получить таблицу температур по Цельсию от 0 до 100 градусов и их эквивалентов по шкале Фаренгейта, используя для перевода формулу $t_F = \frac{9}{5} t_c + 32$.

149. Вычислить значения функции $y = 4x^3 – 2x^2 + 5$ для значений x, изменяющихся от –3 до 1, с шагом 0.1.

150. Дано натуральное число n. Вычислить значения функции $y = \frac{x^2 – 3x + 2}{\sqrt{2x^3 – 1}}$ для $x = 1, 1.1, 1.2, ..., 1 + 0.1n$.

151. Даны натуральное число n, действительные положительные числа $C_1, ..., C_n$. Значения $C_1, ..., C_n$ являются емкостями n конденсаторов. Определить емкости систем конденсаторов, которые получаются последовательным и параллельным соединением исходных конденсаторов.

152. Даны натуральное число n, действительные числа a, h, b, $d_0, ..., d_n$. Вычислить

$$d_0 + d_1 (b-a) + d_2(b - a) (b - a - h) + ...$$
$$... + d_n (b - a) (b - a - h) ... (b - a (n - 1) h).$$

153. Даны натуральное число n, действительные числа x, a_n, $a_{n-1}, ..., a_0$. Вычислить, используя схему Горнера *), значение $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$.

*) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 = (... (a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2}) x + ... + a_1) x + a_0$

154. Даны натуральное число n, действительные числа a, b, $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$. Пара a, b – координаты школы микрорайона, а

пары x_i, y_i (i=1, ..., n) – соответственно координаты домов этого микрорайона. Найти расстояния от домов до школы и среднее арифметическое этих расстояний.

155. Даны натуральное число n, действительные числа $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$. Вычислить

$$\left(\frac{1}{|x_1|+1}+x_2\right)\left(\frac{1}{|x_2|+1}+x_3\right)\ldots\left(\frac{1}{|x_{n-1}|+1}+x_n\right).$$

156. Даны натуральное число n, действительные числа $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 3)$. Вычислить:

а) $(x_1+2x_2+x_3)\,(x_2+2x_3+x_4)\ldots(x_{n-2}+2x_{n-1}+x_n)$;

б) $(x_1+x_2+x_3)x_2+(x_2+x_3+x_4)x_3+\ldots+(x_{n-2}+x_{n-1}+x_n)x_{n-1}$.

157. Даны натуральное число n, действительные числа a, b ($b > a > 0$). Получить последовательность действительных чисел y_0, y_1, ..., y_n, где $y_i=\sqrt{x_i}$, $x_i = a + ih$, $h = (b-a)/n$.

158. Даны натуральное число n, целые числа $a_1, ..., a_{39}$. В последовательности $a_1, ..., a_{39}$ заменить каждый из членов остатком от деления его квадрата на n.

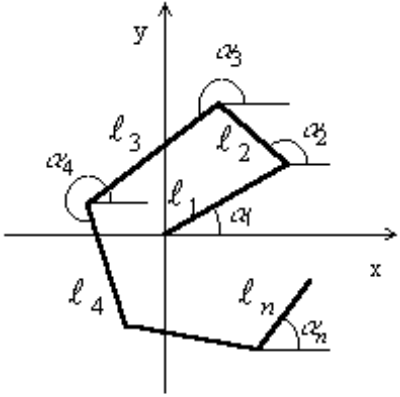


Рис. 16

159. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, ..., a_n$ $(n \geq 3)$. Получить $b_1, ..., b_{n-2}$, где $b_i = a_{i+1} + a_{i+2}$, $i = 1, ..., n-2$.

160. Даны натуральное число n, действительные числа α_1, ℓ_1, α_2, ℓ_2, ..., α_n, ℓ_n ($\ell_1, \ell_2, ..., \ell_n \geq 0$). Найти координаты конца ломаной линии, изображенной на рис. 16.

161. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, ..., a_n$ Получить $b_1, ..., b_n$, где

$$b_i = \frac{a_i}{1 + \left(a_1 + \ldots + a_i\right)^2}, \; i = 1, \ldots, n.$$

162. Даны натуральные числа i, n, действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ $\left(i \le n\right)$. Найти среднее арифметическое всех чисел $a_1, \ldots, a_n$, кроме a_i.

163. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{37}$. Все члены этой последовательности, начиная с первого положительного, уменьшить на 0.5.

164. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{50}$. Получить «сглаженные» значения $a_1, \ldots, a_{50}$, заменив в исходной последовательности все члены, кроме первого и последнего, по формуле

$$a_i = \frac{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}}{3}, \qquad i = 2, 3, \ldots, 49;$$

считается, что

а) после того как получено новое значение некоторого члена, оно используется для вычисления нового значения следующего члена;

б) при «сглаживании» используются лишь старые значения членов.

165. Даны действительные числа a_1, a_2, ...Известно, что $a_1 > 0$ и что среди a_2, a_3, … есть хотя бы одно отрицательное число. Пусть a_1, ..., a_n – члены данной последовательности, предшествующие первому отрицательному члену (n заранее неизвестно). Получить:

а) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$;

б) $a_1 a_2 \ldots a_n$;

в) среднее арифметическое $a_1, \ldots, a_n$;

г) среднее геометрическое $a_1, \ldots, a_n$;

д) a_1, $a_1 a_2$, $a_1 a_2 a_3, \ldots, a_1 a_2 \ldots a_n$;

е) $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$;

ж) $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1$;

з) $(-1)^n a_n$;

и) $n + a_n$;

к) $|a_1 - a_n|$.

166. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \ldots, a_n$. Получить числа $b_1, \ldots, b_n$, которые связаны с $a_1, \ldots a_n$ следующим образом:

$$b_1 = a_1,\ b_n = a_n,\ b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{3},\quad i = 2, \ldots, n-1.$$

167. Пусть

$$x_1 = y_1 = 1;\quad x_2 = y_2 = 2;\quad x_i = \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{i};$$

$$y_i = \frac{x_{i-1}^2 + x_{i-2} + y_{i-1}}{i!},\quad i = 3, 4, \ldots$$

Получить:

а) x_1 $y_1, x_2, y_2, ..., x_{25}, y_{25}$;

б) $y_1/2$, $y_2/3, ..., y_{25}/26$.

168. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 6)$. Получить:

а) $a_6, a_7, \ldots, a_n$;

б) $a_6, a_7, \ldots, a_n, a_1$;

в) $a_6, a_7, \ldots, a_n, a_5$.

169. Даны действительные числа x, $y_1, \ldots, y_{100}$ ($y_1 < y_2 < \ldots < y_{100}$, $y_1 < x \leq y_{100}$). Найти натуральное k, при котором $y_{k-1} < x \leq y_k$.

170. Даны натуральные числа $n, a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 4)$. Числа $a_1, \ldots, a_n$ – это измеренные в сотых долях секунды результаты n спортсменов в беге на 100 м. Составить команду из четырех лучших

бегунов для участия в эстафете 4×100, т. е. указать одну из четверок натуральных чисел i, j, k, l, для которой $1 \le i < j < k < l \le n$ и $a_i + a_j + a_k + a_l$ имеет наименьшее значение.

171. Даны натуральные числа n, a_0, a_1, a_2, …, a_{3n-1}. Каждая тройка чисел a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, где i кратно трем, задает координаты центра квадрата (a_i, a_{i+1}) и длину его стороны a_{i+2}. Предполагается, что стороны квадратов расположены параллельно осям координат экрана. Построить и закрасить какими-либо цветами квадраты, заданные последовательностью a_0, a_1, a_2, …, a_{3n-1}.

172. Даны натуральные числа n, a_0, a_1, a_2, …, a_{3n-1}. Каждая тройка чисел a_{i}, $a_{\mathrm{i}+1}$, a_{i+2}, где i кратно трем, задает координаты центра круга (a_{i}, $a_{\mathrm{i}+1}$) и его радиус $a_{\mathrm{i}+2}$. Построить и закрасить какими-либо цветами круги, заданные последовательностью a_0, a_1, a_2, …, a_{3n-1} .

173. Даны натуральные числа n, a_0, a_1, a_2, …, a_{4n-1}. Каждые четыре числа a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, где i кратно четырем, задают прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат экрана: числа a_i, a_{i+1} - это координаты центра прямоугольника, a_{i+2}, a_{i+3}- длины его сторон. Построить и закрасить каким-либо цветами прямоугольники, заданные последовательностью a_0, a_1, a_2, …, a_{4n-1}.

174. Даны натуральные числа n, a_0, a_1, a_2, …, a_{6n-1}. Каждые шесть чисел a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i+4}, a_{i+5}, где i кратно шести, задают координаты вершин треугольника:
числа a_i, a_{i+1}- координаты первой вершины, a_{i+2}, a_{i+3} – координаты второй вершины, a_{i+4}, a_{i+5} - координаты третьей вершины. Построить треугольники, заданные последовательностью a_0, a_1, a_2, … , a_{6n-1}.

175. Даны натуральные числа n, a_1, a_2, a_3, … , a_{2n-1}. Каждая пара чисел a_i, a_{i+1}, где i кратно двум, задает координаты вершин ломаной.

а) Построить ломаную, заданную последовательностью $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$.

б) Построить ломаную, заданную последовательностью $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$; последнюю вершину соединить с первой.

176. Даны натуральные числа $n, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{3n-1}$. Каждая тройка чисел a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, где i кратно трем, задает координаты точки и ее цвет. Построить все точки, заданные последовательностью $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3n-1}$.

177. Даны натуральные числа $n, x, y, r_1, c_1, r_2, c_2, r_n, \ldots, c_n$. Построить n концентрических окружностей с общим центром в точке (x, y), имеющих радиусы $r_1, \ldots, r_n$ и окрашенных в цвета $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

§ 7. Сочетания цикла и разветвления

178. Даны натуральные числа n, a_1, … , a_n. Определить количество членов

a_k последовательности a_1, … , a_n:

а) являющихся нечетными числами;

б) кратных 3 и не кратных 5;

в) являющихся квадратами четных чисел;

г) удовлетворяющих условию $a_k < \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$;

д) удовлетворяющих условию $2^k < a_k < k!$;

е) имеющих четные порядковые номера и являющихся нечетными числами.

179. Даны натуральные числа n, q_1, … , q_n. Найти те члены q_i последовательности q_1, … , q_n, которые

а) являются удвоенными нечетными числами;

б) при делении на 7 дают остаток 1, 2 или 5;

в) обладают тем свойством, что корни уравнения $x^2 + 3q_i - 5$ действительны и положительны.

180. Дано натуральное число n. Получить сумму тех чисел вида $i^3 - 3in^2 + n$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), которые являются утроенными нечетными *).

*) В ряде задач этого и следующих параграфов требуется вычислить сумму или произведение тех членов последовательности, которые обладают заданным свойством. Можно условиться, что при отсутствии таких членов искомая сумма равна нулю, а произведение - единице. Можно усложнить условия задач, приняв соглашение, что в подобных случаях должно выдаваться сообщение об отсутствии соответствующих членов.

181. Даны целые числа $a_1, \dots, a_{50}$. Получить сумму тех чисел данной последовательности, которые

а) кратны 5;

б) нечетны и отрицательны;

в) удовлетворяют условию $|a_i| < i^2$.

182. Даны натуральное число n, целые числа $a_1, \dots, a_n$. Найти количество и сумму тех членов данной последовательности, которые делятся на 5 и не делятся на 7.

183. Даны натуральные числа n, p, целые числа $a_1, \dots, a_n$. Получить произведение членов последовательности $a_1, \dots, a_n$, кратных p.

184. Даны целые числа p, q, $a_1, \dots, a_{67}$ ($p > q \geq 0$). В последовательности $a_1, \dots, a_{67}$ заменить нулями члены, модуль которых при делении на p дает в остатке q.

185. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \dots, a_n$. Получить удвоенную сумму всех положительных членов последовательности $a_1, \dots, a_n$.

186. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \dots, a_n$. Вычислить обратную величину произведения тех членов a_i последовательности $a_1, \dots, a_n$, для которых выполнено $i+1 < a_i < i!$.

187. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \dots, a_n$. В последовательности $a_1, \dots, a_n$ все отрицательные члены увеличить на 0.5, а все неотрицательные заменить на 0.1.

188. Даны натуральное число n, действительные числа $x_1, \dots, x_n$. В последовательности $x_1, \dots, x_n$ все члены, меньшие двух, заменить нулями. Кроме того, получить сумму членов, принадлежащих отрезку [3,7], а также число таких членов.

189.Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \dots, a_n$. В последовательности $a_1, \dots, a_n$ все неотрицательные члены, не

принадлежащие отрезку [1, 2], заменить на единицу. Кроме того, получить число отрицательных членов и число членов, принадлежащих отрезку [1, 2].

190. Даны натуральное число n, целые числа $a_1, \dots, a_n$. Получить сумму
положительных и число отрицательных членов последовательности $a_1, \dots, a_n$.

191. Даны натуральное число n, целые числа $a_1, \dots, a_n$. Заменить все большие семи члены последовательности $a_1, \dots, a_n$ числом 7. Вычислить количество таких членов.

192. Даны целые числа $a_1, \dots, a_{45}$. Получить число отрицательных членов последовательности $a_1, \dots, a_{35}$ и число нулевых членов всей последовательности $a_1, \dots, a_{45}$.

193. Пусть $x_0 = a$; $x_k = qx_{k-1} + b$, ($k = 1, 2, ...$). Даны неотрицательное целое n, действительные a, b, c, d, q ($c < d$). Принадлежит ли x_n интервалу (c, d)?

194. Даны натуральное число n, целые числа $a_1, x_1, \dots, x_n$. Если в последовательности $x_1, \dots, x_n$ есть хотя бы один член, равный a, то получить сумму всех членов, следующих за первым таким членом; в противном случае ответом должно быть число -10.

195. Даны натуральное число n, действительные числа $a, b, c_1, \dots, c_n$. Верно ли *), что при $1 \le k \le n-1$ всякий раз, когда $c_k < a$, выполнено $c_{k+1} > b$?

*) В качестве ответов к этой и ряду других задач, в которых требуется определить истинность какого-либо утверждения, должны быть получены соответствующие текстовые сообщения.

196. Даны целые числа $a_1, \ldots, a_{50}$. Получить последовательность $b_1, \ldots, b_{50}$, которая отличается от исходной тем, что все нечетные члены удвоены.

197. Вычислить $\sum_{i=1}^{30}(a_i - b_i)^2$, где

$$a_i = \begin{cases} i, & \text{если } i - \text{нечетное}, \\ i/2 & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} i^2, & \text{если } i - \text{нечетное}, \\ i^3 & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

198. Даны натуральные числа n, $b_0, \ldots, b_n$. Вычислить $f(b_0)+f(b_1)+\ldots+f(b_n)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ кратно } 3, \\ x, & \text{если } x \text{ при делении на } 3 \text{ дает остаток } 1, \\ [x/3] & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

199. Даны натуральное число n, действительные числа $r, a_1, \dots, a_n$ ($n \geq 2$). Сколько среди точек (a_1, a_n), (a_2, a_{n-1}), … , (a_n, a_1) таких, которые принадлежат кругу радиуса r с центром в начале координат?

200. Даны целые числа a, n, $x_1, \dots, x_n$ ($n > 0$). Определить, каким по счету идет в последовательности $x_1, \dots, x_n$ член, равный a. Если такого члена нет, то ответом должно быть число 0.

201. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \dots, a_n$. Получить:

а) $\max(a_1, \dots, a_n)$;

б) $\min(a_1, \dots, a_n)$;

в) $\max(a_2, a_4, \dots)$;

г) $\min(a_1, a_3, \dots)$;

д) $\min(a_2, a_4, \dots) + \max(a_1, a_3, \dots)$;

е) $\max(|a_1|, \dots, |a_n|)$;

ж) $\max(-a_1, a_2, -a_3, \dots, (-1)^n a_n)$;

з) $(\min(a_1, \dots, a_n))^2 - \min(a_1^2, \dots, a_n^2)$.

202. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \dots, a_n$.

а) Верно ли, что отрицательных членов в последовательности $a_1, \dots, a_n$ больше, чем положительных?

б) Верно ли, что наибольший член последовательности $a_1, \dots, a_n$ по модулю больше единицы?

203. У прилавка в магазине выстроилась очередь из n покупателей. Время обслуживания продавцом i–го покупателя равно t_i ($i = 1, \dots, n$). Пусть даны натуральное n и действительные $t_1, \dots, t_n$. Получить $c_1, \dots, c_n$, где c_i – время пребывания i–го покупателя в очереди ($i = 1, \dots, n$). Указать номер покупателя, для обслуживания которого продавцу потребовалось самое малое время.

204. В некоторых видах спортивных состязаний выступление каждого спортсмена независимо оценивается несколькими судьями,

затем из всей совокупности оценок удаляются наиболее высокая и наиболее низкая, а для оставшихся оценок вычисляется среднее арифметическое, которое и идет в зачет спортсмену. Если наиболее высокую оценку выставило несколько судей, то из совокупности оценок удаляется только одна такая оценка; аналогично поступают с наиболее низкими оценками.

Даны натуральное число n, действительные положительные числа $a_1, \ldots, a_n (n \geq 3)$. Считая, что числа $a_1, \ldots, a_n$ – это оценки, выставленные судьями одному из участников соревнований, определить оценку, которая пойдет в зачет этому спортсмену.

205. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \ldots, a_n$. Получить $\max(|a_1|, \ldots, |a_n|)$ и $\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$.

206. Дано натуральное число n. Найти наибольшее среди чисел $k e^{\sin^2(k+1)}$ (k = 1, … , n), а также сумму всех этих чисел.

207. Дано натуральное число n. Выбросить из записи числа n цифры 0 и 5, оставив прежним порядок остальных цифр. Например, из числа 59015509 должно получиться 919.

208. Даны натуральное число n, целые числа $a_1, \ldots, a_n$. Найти:

а) наименьшее из четных чисел, входящих в последовательность $a_1 - 1, a_1, a_2, \ldots, a_n$;

б) наибольшее из нечетных и количество четных чисел, входящих в последовательность $a_1, \ldots, a_n, a_n + 1$.

209. Даны натуральное число n, действительное число x. Среди чисел $e^{\cos(x^{2k})}\sin(x^{3k})$ $(k = 1, \ldots, n)$ найти ближайшее к какому–нибудь целому.

210. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \ldots, a_n$. Получить все натуральные j $(2 \le j \le n-1)$, для которых $a_{j-1} < a_j < a_{j+1}$.

211. Пусть

$$x_1 = 0.3; \quad x_2 = -0.3; \quad x_i = \sin(x_{i-2}), \quad i = 3, 4, \ldots$$

Среди $x_1, \ldots, x_{100}$ найти ближайшее к какому–нибудь целому.

212. Пусть

$$x_1 = y_1 = 1;\ x_i = x_{i-1} + \frac{y_{i-1}}{i^2};\ y_i = y_{i-1} + \frac{x_{i-1}}{i},\ \ i = 2, 3, \ldots$$

Получить x_8, x_{18}.

213. Пусть

$$a_i = \frac{i-1}{i+1} + \sin\frac{(i-1)^3}{i+1},\ \ i = 1, 2, \ldots$$

Дано натуральное n. Среди $a_1, \ldots, a_n$ найти все положительные числа, среди положительных $a_1, \ldots, a_n$ выбрать наименьшее число.

214. Пусть

$$a_0 = \cos^2 1;\ a_1 = -\sin^2 1;\ a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}; \quad k = 2, 3, \ldots$$

Найти сумму квадратов тех чисел $a_1, \dots, a_{100}$, которые не превосходят двух.

215. Даны натуральное n, действительные числа $a_1, \dots, a_n$. В последовательности $a_1, \dots, a_n$ определить число соседств:

а) двух положительных чисел;

б) двух чисел разного знака;

в) двух чисел одного знака, причем модуль первого числа должен быть больше модуля второго числа;

216. Даны целые числа $c_1, \dots, c_{95}$. Имеются ли в последовательности $c_1, \dots, c_{95}$:

а) два идущих подряд нулевых члена;

б) три идущих подряд нулевых члена?

217. Даны натуральное число n, действительные числа $x_1, \dots, x_{3n}$. Последовательность чисел $x_1, \dots, x_{3n}$ определяет на плоскости n квадратов со сторонами, параллельными координатным осям: так, x_1,

x_2 – координаты центра первого квадрата, x_3 – длина его стороны; аналогично, числа x_4, x_5, x_6 определяют второй квадрат, x_7, x_8, x_9 – третий и т. д. Имеются ли точки, принадлежащие всем квадратам? Если да, то указать координаты одной из них.

218. Даны натуральное число n, действительные числа $x_1, \ldots, x_{3n}$. последовательность чисел $x_1, \ldots, x_{3n}$. Вычислить сумму чисел из $x_{n+1}, \ldots, x_{3n}$, которые превосходят по величине все числа $x_1, \ldots, x_n$.

219. Даны действительные числа a, b ($a < b$), натуральное число n, функция $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$. Для значений аргумента $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \ldots, n$), $h = (b-a)/n$ вычислить значения функции $y_i = f(x_i)$ ($i = 0,1, \ldots, n$).

Вывести x_i и y_i ($i = 0,1, \ldots, n$) в виде таблицы из двух колонок. В i-ю строку таблицу заносятся соответствующие значения x_i и y_i .Рассмотреть следующие функции:

а) $y = \sin x + \cos 2x$, $a = -\pi$, $b = \pi$, $n = 50$;

б) $y = \sin\sqrt{2x} + \cos x$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $n = 50$;

в) $y = \sqrt{x^2+2}$, $a = -3$, $b = 5$, $n = 40$;

г) $y = x|x+1|$, $a = -1$, $b = 2$, $n = 30$;

д) $y = xe^{-x}$, $a = -1$; $b = 3$, $n = 40$.

220. Рассматривается последовательность $a_1, \ldots, a_{1000}$. Требуется определить, сколько членов последовательности с номерами 1, 2, 4, 8, 16, … имеют значение, меньшее, чем 0.25 . При этом считать, что

а) $a_k = \sin^2(3k+5) - \cos^2(k^2-15)$, $k = 1, 2, \ldots, 1000$;

б) $a_1, \ldots, a_{1000}$ – заданные действительные числа;

в) $a_1 = 0.01$; $a_k = \sin(k + a_{k-1})$, $k = 2, \ldots, 1000$.

221. Даны натуральное число n, действительные числа $x_1, \ldots, x_n$. Получить $(1+r)/(1+s)$, где r – сумма всех тех членов последовательности $x_1, \ldots, x_n$, которые не превосходят 1, а s – сумма членов, больших 1.

222. Даны натуральное число n, действительные числа $y_1, \ldots, y_n$. Найти:

а) $\max(|z_1|, \ldots, |z_n|)$, где $z_i = \begin{cases} y_i & \text{при } |y_i| \le 2, \\ 0.5 & \text{в противном случае;} \end{cases}$

б) $\min(|z_1|, \ldots, |z_n|)$, где $z_i = \begin{cases} y_i & \text{при } |y_i| > 1, \\ 2 & \text{в противном случае;} \end{cases}$

в) $z_1 + \ldots + z_n$ где $z_i = \begin{cases} y_i & \text{при } 0 < y_i < 10, \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$

г) $(\sqrt{z_1} - z_1)^2 + \ldots + (\sqrt{z_n} - z_n)^2$, где

$$z_i = \begin{cases} y_i & \text{при } 0 < y_i \le 15, \\ 2.7 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

д) $z_1^2 + \ldots + z_n^2$, где $z_i = \begin{cases} y_i & \text{при } |y_i| < 1, \\ 1/y_i & \text{в противном случае.} \end{cases}$

223. Даны целые числа a_1, a_2, … Известно, что $a_1 > 0$ и что среди a_2, a_3, … есть хотя бы одно отрицательное число. Пусть a_1, …, a_n – члены данной последовательности, предшествующие первому отрицательному члену (n заранее неизвестно). Получить:

а) $\max(a_1^2, \ldots, a_n^2)$;

б) $\max(a_1^3, \ldots, a_n^3)$;

в) $\min(a_1, 2a_2, \ldots, na_n)$;

г) $\min(a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n)$;

д) $\max(a_1, a_1a_2, \ldots a_1a_2 \ldots a_n)$;

е) количество четных среди a_1, …, a_n;

ж) количество удвоенных нечетных среди a_1, …, a_n;

з) количество полных квадратов среди a_1, …, a_n;

и) количество квадратов нечетных среди a_1, …, a_n.

224. Дано натуральное число n. Получить все его натуральные делители.

225. Дано натуральное число n. Получить все такие натуральные q, что n делится на q^2 и не делится на q^3.

226. Даны натуральные числа m, n. Получить все их натуральные общие кратные, меньшие mn.

227. Даны целые числа m, n ($m \neq 0$, $n \neq 0$). Получить все их общие делители (положительные и отрицательные).

228. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \ldots, a_n$. Выяснить, является ли последовательность $a_1, \ldots, a_n$ упорядоченной по убыванию.

229. Даны действительные числа x, y ($x > 0$, $y > 1$). Получить целое число k (положительное, отрицательное или равное нулю), удовлетворяющее условию $y^{k-1} \leq x < y^k$.

230. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \ldots, a_n$. Найти длину наименьшего отрезка числовой оси, содержащего числа $a_1, \ldots, a_n$.

231. Даны действительные числа x, y_1, …, y_{12}. Выяснить, во-первых, верно ли, что $y_1 \le x \le y_{12}$, и, во-вторых, верно ли, что $t_1 \le x \le t_2$, где t_1 – наименьшее, а t_2– наибольшее среди y_1, …, y_{12}. (Какие комбинации ответов на первый и второй вопросы возможны?)

232. Даны натуральное число n, действительные числа a, x_1, …, x_n ($x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$). Получить последовательность y_1, …, y_{n+1}, членами которой являются члены последовательности x_1, …, x_n и значение a, такую, что $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_{n+1}$.

233. Дано натуральное число n, целые числа a_1, …, a_n. Оставить без изменения последовательность a_1, …, a_n, если ее члены упорядочены по неубыванию или по невозрастанию. В противном случае получить подпоследовательность a_1, …, a_m ($m < n$), где m таково, что либо $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_m$ и $a_m > a_{m+1}$, либо $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_m$ и $a_m < a_{m+1}$.

234. Дано натуральное число n, действительные числа $x_1, \ldots, x_n$. Получить в порядке следования все x_k, удовлетворяющие неравенствам $x_k > x_1, x_k > x_2, \ldots, x_k > x_{k-1}$.

235. Даны натуральные числа n и m. Получить $\dfrac{m!+n!}{(m+n)!}$.

236. Даны натуральное число n, действительное число x.

Получить $\displaystyle\sum_{s=0}^{10} \frac{1}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n}$.

237. Даны натуральное число n, действительное число r.

Вычислить $\dfrac{(2r)^n}{n!!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{[n/2]}$ (см. задачу 113).

238. Дано натуральное число n. Вычислить произведение первых n сомножителей

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots$$

239. Дано натуральное число n. Вычислить

$$\frac{(-1)^{[\lg 1]}}{1}+\frac{(-1)^{[\lg 2]}}{2}+\ldots+\frac{(-1)^{[\lg n]}}{n}.$$

240. Для любого целого k обозначим количество цифр в его десятичной записи через $Ц(k)$.

а) Дано натуральное число n. Вычислить $\frac{Ц(1)}{1^2}+\frac{Ц(2)}{2^2}+\ldots+\frac{Ц(n)}{n^2}$.

б) Даны натуральное число n, действительное число x.

Вычислить

$$\frac{10^{Ц(1)}}{1}(1-x)+\frac{10^{Ц(2)}}{2}(1-x)^2+\ldots+\frac{10^{Ц(n)}}{n}(1-x)^n.$$

241. Даны натуральное число n, действительное число x. Вычислить

$$\frac{(-1)^{[\sqrt{1}]}}{1}x+\frac{(-1)^{[\sqrt{2}]}}{2}x^2+\ldots+\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n.$$

242. Дано натуральное число n. Вычислить

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k(k-1)/2}}{k!}.$$

243. Дано натуральное число n. Можно ли представить его в виде суммы двух квадратов натуральных чисел? Если можно, то

а) указать пару x, y таких натуральных чисел, что $n = x^2 + y^2$;

б) указать все пары x, y таких натуральных чисел, что $n = x^2 + y^2$, $x \geq y$.

244. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \ldots, a_n$.

а) Выяснить, какое число встречается в последовательности $a_1, \ldots, a_n$ раньше – положительное или отрицательное. Если все члены последовательности равны нулю, то сообщить об этом.

б) Найти номер первого члена последовательности $a_1, \ldots, a_n$; если четных членов нет, то ответом должно быть число 0.

в) Найти номер последнего нечетного члена последовательности $a_1, \ldots, a_n$; если нечетных членов нет, то ответом должно быть число $n+1$.

245. Даны натуральное число n, целые числа $a_1, \ldots, a_{30}, b_1, \ldots, b_{40}, c_1, \ldots, c_n$. Верно ли, что отрицательный член в последовательности $c_1, \ldots, c_n$, встречается раньше, чем в последовательностях $a_1, \ldots, a_{30}$ и $b_1, \ldots, b_{40}$? Предполагается, что каждая из последовательностей содержит хотя бы один отрицательный член.

246. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \ldots, a_n$. Выяснить, образуют ли возрастающую последовательность числа:

а) $a_1, \ldots, a_n, 2a_1, 3a_2, \ldots, (n+1)a_n$;

б) $a_1, \ldots, a_n, a_n+1, a_{n-1} + 2, \ldots, a_1+n$;

в) $a_1, \ldots, a_n, n(a_{n-1}+1), (n-1)(a_{n-2}+2), \ldots, 2(a_1+n-1)$.

247. Даны натуральные числа $n, x_0, y_0, r, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$. Построить на экране точки с координатами x_i, y_i:

а) принадлежащие кругу с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом r;

б) не принадлежащие кругу с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом r.

248. Даны натуральные числа n, x_1, y_1, x_2, y_2, …, x_n, y_n. Построить на экране точки с координатами x_i, y_i:

а) расположенные в верхней половине экрана;

б) расположенные в нижней половине экрана.

249. Даны натуральные числа n, x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, …, x_n, y_n, r_n. Построить на экране окружности с центрами в точках (x_i, y_i) и радиусами r_i, для которых выполнено условие $r_i>5$.

250. Даны натуральные числа n, x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, …, x_n, y_n, r_n. Построить на экране окружности с центрами в точках (x_i, y_i) и радиусами r_i, если $r_i > 5$, и радиусами $2r_i$ - в противном случае.

§ 8. Обработка последовательностей символов *)

*) Если в используемом языке имеется возможность работы со строками, то наряду с приведенными в параграфе задачами имеет смысл рассмотреть аналогичные задачи, сформулированные в терминах строк. В условии задачи 251 выписан дополнительный строковый вариант, но в дальнейшем это уже не делается, так как самостоятельная формулировка таких вариантов не составит труда для решающего задачи. В каждом таком варианте число символов в строке не вносится в исходные данные задачи, но предполагается, что оно не превосходит максимально допустимой длины строки в используемом языке программирования.

251. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$. Подсчитать, сколько раз среди данных символов встречается буква x. (Строковый

вариант: дана строка символов; подсчитать, сколько раз среди символов строки встречается буква *x*.)

252. Даны натуральное число *n*, символы $s_1, \ldots, s_n$. Подсчитать:

а) сколько раз среди данных символов встречается символ + и сколько раз символ $*$;

б) общее число вхождений символов +, –, * в последовательность $s_1,\ldots,s_n$

253. Даны натуральное число *n*, символы $s_1, \ldots, s_n$. Преобразовать последовательность $s_1, \ldots, s_n$, заменив в ней:

а) все восклицательные знаки точками;

б) каждую точку многоточием (т. е. тремя точками);

в) каждую из групп стоящих рядом точек одной точкой;

г) каждую из групп стоящих рядом точек многоточием (т. е. тремя точками).

254. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$. Выяснить, имеются ли в последовательности $s_1, \ldots, s_n$ такие члены последовательности $s_{i,}$ s_{i+1}, что s_i – это запятая, а s_{i+1} – тире.

255. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_{n.}$ Получить первое натуральное число i, для которого каждый из символов s_i и s_{i+1} совпадает с буквой a. Если такой пары символов в последовательности $s_1, \ldots, s_n$ нет, то ответом должно быть число 0.

256. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$. Известно, что среди $s_1, \ldots, s_n$ есть по крайней мере одна запятая. Найти такое натуральное $i,$ что:

а) s_i – первая по порядку запятая;

б) s_i – последняя по порядку запятая.

257. Даны символы $s_1, s_2, \ldots$ Известно, что символ s_1 отличен от восклицательного знака и что среди $s_2, s_3,$. .. есть по крайней мере один восклицательный знак. Пусть $s_1, \ldots, s_n$ – символы данной

последовательности, предшествующие первому восклицательному знаку (n заранее неизвестно).

а) Определить количество пробелов среди $s_1, \ldots, s_n$.

б) Выяснить, входит ли в последовательность $s_1, \ldots, s_n$ буква *ю*.

в) Выяснить, верно ли, что среди $s_1, \ldots, s_n$ имеются все буквы, входящие в слово *шина*.

г) Выяснить, имеется ли среди $s_1, \ldots, s_n$ пара соседствующих букв *но* или *он*.

д) Выяснить, имеется ли среди $s_1, \ldots, s_n$ пара соседствующих одинаковых символов.

е) Выяснить, верно ли, что существуют такие натуральные i и j, что $1 < i < j < n$ и что s_i совпадает с s_{i+1}, а s_j – с s_{j+1}.

258. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$. Удалить из данной последовательности все группы букв вида *abcd*.

259. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$. Преобразовать последовательность $s_1, \ldots, s_n$, удалив каждый символ * и повторив каждый символ, отличный от *.

260. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$, среди которых есть двоеточие.

а) Получить все символы, расположенные до первого двоеточия включительно.

б) Получить все символы, расположенные после первого двоеточия.

в) Получить все символы, расположенные между первым и вторым двоеточием. Если второго двоеточия нет, то получить все символы, расположенные после единственного имеющегося двоеточия.

261. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$.

а) Подсчитать наибольшее количество идущих подряд пробелов.

б) Выяснить, верно ли, что в последовательности $s_1, \ldots, s_n$ имеются пять идущих подряд букв *e*.

262. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$. Определить число вхождений в последовательность $s_1, \ldots, s_n$ группы букв:

а) *abc*.

б) *aba*.

263. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$. Заменить в последовательности $s_1, \ldots, s_n$ каждую группу букв *child* группой букв *children.*

264. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$. Исключить из последовательности $s_1, \ldots, s_n$ группы символов, расположенные между скобками (,). Сами скобки тоже должны быть исключены. Предполагается, что внутри каждой пары скобок нет других скобок.

265. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$. Преобразовать последовательность $s_1, \ldots, s_n$: если нет символа *, то оставить ее без изменения, иначе заменить каждый символ, встречающийся после первого вхождения символа *, на символ -.

266. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$, среди которых есть хотя бы одна точка. Преобразовать последовательность $s_1, \ldots, s_n$, удалив из нее все запятые, предшествующие первой точке, и заменив знаком + все цифры 3, встречающиеся после первой точки.

267. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$ ($n > 1$). Преобразовать последовательность $s_1, \ldots, s_n$, заменив запятыми все двоеточия, встречающиеся среди $s_1, \ldots, s_{[n/2]}$, и заменив точками все восклицательные знаки, встречающиеся среди $s_{[n/2]+1}, \ldots, s_n$.

268. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$. Известно, что среди данных символов есть хотя бы один, отличный от пробела. Требуется преобразовать последовательность $s_1, \ldots, s_n$ следующим

образом. Удалить группы пробелов, которыми начинается и которыми заканчивается последовательность, а также заменить каждую внутреннюю группу пробелов одним пробелом. Если указанных групп нет в данной последовательности, то оставить последовательность без изменения.

269. Даны натуральное число n, символы $s_1, \ldots, s_n$. Группы символов, разделенные пробелами (одним или несколькими) и не содержащие пробелов внутри себя, будем называть *словами.*

а) Подсчитать количество слов в данной последовательности.

б) Подсчитать количество букв *а* в последнем слове данной последовательности.

в) Найти количество слов, начинающихся с буквы *б.*

г) Найти количество слов, у которых первый и последний символы совпадают между собой.

д) Найти какое-нибудь слово, начинающееся с буквы *а*.

е) Преобразовать данную последовательность, заменяя каждое вхождение слова *это* на слово *то*.

ж) Найти длину самого короткого слова.

270. Даны символы s_1, s_2, … Известно, что символ s_1 отличен от пробела и что среди s_2, s_3, … имеется хотя бы один пробел. Рассматриваются s_1, …, s_n – символы, предшествующие первому пробелу (n заранее неизвестно). Преобразовать последовательность s_1, …, s_n:

а) удалив из нее все символы, не являющиеся буквами;

б) заменив все малые буквы одноименными большими;

в) удалив все символы, не являющиеся буквами или цифрами, и заменив каждую большую букву одноименной малой;

г) удалив из каждой группы идущих подряд цифр, в которой более двух цифр и которой предшествует точка, все цифры, начиная с третьей (например, $ab + 0.1973 - 1.1$ преобразуется в $ab + 0.19 - 1.1$);

д) удалив из каждой группы цифр, которой не предшествует точка, все начальные нули (кроме последнего, если за ним идет точка).

§ 9. Вычисления с хранением последовательности значений

271. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{15}$. Получить

$$\tilde{a} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} a_i\,, \quad \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15}(a_i - \tilde{a})^2}{14}}\,.$$

272. Даны действительные числа $a_{1901}, a_{1902}, \ldots, a_{1950}$ – количество осадков (в миллиметрах), выпавших в Москве в течение первых 50 лет нашего столетия. Надо вычислить среднее количество осадков и отклонение от среднего для каждого года.

273. Система из 25 материальных точек в пространстве задана с помощью последовательности действительных чисел $x_1, y_1, z_1, p_1, x_2, y_2, z_2, p_2, \ldots, x_{25}, y_{25}, z_{25}, p_{25}$, где x_i, y_i, z_i - координаты i-ой точки, а p_i – ее вес (i=1, 2, …, 25). Получить координаты центра тяжести системы, а также расстояние от центра тяжести до всех точек системы.

274. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{20}$. Получить числа $b_1, \ldots, b_{20}$, где b_i – среднее арифметическое всех членов последовательности $a_1, \ldots, a_{20}$, кроме a_i (i=1, 2,. .., 20).

275. Даны действительные числа $x_1, \ldots, x_{10}, y_1, \ldots, y_{10}$. Получить $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i$. Как упростить решение, если исходные данные будут иметь следующий порядок: $x_1, y_1, \ldots, x_{10}, y_{10}$?

276. Построить последовательность целых чисел $a_1, \ldots, a_{30}$, где a_1=1, a_2=1; $a_i = a_{[i/2]} + a_{i-2}$ (i = 3,..., 30).

277. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_n$. Получить $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$*).

*) Каждый раз, когда число членов в данной последовательности зависит от некоторой величины n, m,..., не отнесенных явно к данным задачи, то подразумевается, что при работе с языками, в которых не предусмотрены массивы с динамическими границами (таким языком

является, в частности, паскаль), эти величины либо определяются в программе как константы (например, в программе на Паскале даются определения const n=...; const m=... с конкретными числами вместо многоточий), либо же еще до составления программы эти величины заменяются конкретными числами. Если же язык позволяет после ввода значений переменных n, m,..., рассматривать массив, границы которого зависят от n, m,..., то следует воспользоваться этой возможностью и считать значения n, m,..., данными числами.

278. Даны натуральные числа $n_1, \ldots, n_{20}$, действительные числа $x_1, \ldots, x_{20}$. Вычислить $\dfrac{n_1x_1+\ldots+n_{20}x_{20}}{n_1+\ldots+n_{20}}$.

279. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Вычислить $(a_1+b_n)(a_2+b_{n-1})\ldots(a_n+b_1)$.

280. Пусть x_i, y_i (i=1, 2,. ..) определены, как в задаче 167. Получить $x_1, \ldots, x_{25}, y_1, \ldots, y_{25}$.

281. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{28}, b_1, \ldots, b_{28}$. Члены последовательности $c_1, \ldots, c_{29}$ связаны с членами данных последовательностей соотношениями $c_{29} = 0$, $c_{29-i} = \dfrac{a_{29-i}}{b_{29-i} - c_{29-i+1}}$ (i=1, ..., 28). Получить $c_1, \ldots, c_{29}$.

282. Даны действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Получить:

а) $a_1, a_{n+1}, a_2, a_{n+2}, \ldots, a_n, a_{2n}$;

б) $a_1, a_{2n}, a_2, a_{2n-1}, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$;

в) $a_1 + a_{2n}, a_2 + a_{2n-1}, \ldots, a_n + a_{n+1}$.

283. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{17}$. Получить:

а) $a_{17}, a_1, a_2, \ldots, a_{16}$;

б) $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{17}, a_1, a_2, \ldots, a_{10}$;

в) $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{17}, a_{10}, a_9, \ldots, a_1$;

284. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{20}$. Получить:

а) $a_{20}, a_{11}, a_{19}, a_{10}, \ldots, a_{10}, a_1$;

б) $a_1, a_3, \ldots, a_{19}, a_2, a_4, \ldots, a_{20}$;

в) $a_1, a_{11}, a_3, a_{13}, \ldots, a_9, a_{19}$;

г) $a_{12}, a_2, a_{14}, a_4, \ldots, a_{20}, a_{10}$;

д) $a_1, a_{11}, a_{12}, a_2, a_3, a_{13}, a_{14}, a_4, \ldots, a_9, a_{19}, a_{20}, a_{10}$;

285. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_n$. Если в результате замены отрицательных членов последовательности $a_1, \ldots, a_n$ их квадратами члены будут образовывать неубывающую последовательность, то получить сумму членов исходной последовательности; в противном случае получить их произведение.

286. Даны целые числа $a_1, \ldots, a_{99}$. Получить новую последовательность, выбросив из исходной все члены со значением $\max(a_1, \ldots, a_{99})$.

287. Даны целые числа $a_1, \ldots, a_n$. Все члены последовательности с четными номерами, предшествующие первому по порядку члену со значением $\max(a_1, \ldots, a_n)$, домножить на $\max(a_1, \ldots, a_n)$.

288. Даны целые числа $a_1, \ldots, a_n$, каждое из которых отлично от нуля. Если в последовательности отрицательные и положительные члены чередуются (+, –, +, –, … или –, +, –, +, …), то ответом должна служить сама исходная последовательность. Иначе получить все отрицательные члены последовательности, сохранив порядок их следования.

289. Даны натуральное число m, действительные числа $a_1, \ldots, a_{30}$ (числа $a_1, \ldots, a_{30}$ попарно различны, $m \le 30$).
В последовательности $a_1, \ldots, a_{30}$ поменять местами наибольший член и член с номером m.

290. Даны действительные числа $x_1, \ldots, x_{101}, y_1, \ldots, y_{101}$. Получить действительные $x'_1, \ldots, x'_{101}, y'_1, \ldots, y'_{101}$, преобразовав для получения x'_i, y'_i члены x_i, y_i по правилу: если они оба отрицательны, то каждый из них увеличить на 0.5; если отрицательно только одно

число, то отрицательное число заменить его квадратом; если оба числа неотрицательны, то каждое из них заменить на среднее арифметическое исходных значений.

291. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{30}$. Получить:

а) max $(a_1 + a_{30}, a_2 + a_{29}, \ldots, a_{15} + a_{16})$;

б) min $(a_1 a_{16}, a_2 a_{17}, \ldots, a_{15} a_{30})$

292. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{20}$. Преобразовать эту последовательность по правилу: большее из a_i и a_{10+i} ($i = 1, \ldots, 10$) принять в качестве нового значения a_i, а меньшее – в качестве нового значения a_{10+i}.

293. Даны целые числа $a_1, \ldots, a_n$. Если в данной последовательности ни одно четное число не расположено после нечетного, то получить все отрицательные члены последовательности,

иначе – все положительные. Порядок следования чисел в обоих случаях заменяется на обратный.

294. Даны действительные числа $r_1,\ldots, r_{17}$, среди которых заведомо есть как отрицательные, так и неотрицательные. Получить $x_1y_1 + \ldots + x_sy_s$, где $x_1,\ldots, x_p$ – отрицательные члены последовательности $r_1,\ldots,r_{17}$, взятые в порядке их следования, $y_1,\ldots,y_q$ – неотрицательные члены, взятые в обратном порядке, $s = \min(p, q)$.

295. Даны целые числа $a_1,\ldots, a_{20}$. Наименьший член последовательности $a_1,\ldots, a_{20}$ заменить целой частью среднего арифметического всех членов, остальные члены оставить без изменения. Если в последовательности несколько членов со значением $\min(a_1,\ldots, a_{20})$, то заменить последний по порядку.

296. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{20}$ (все числа попарно различны). Поменять в этой последовательности местами:

а) наибольший и наименьший члены;

б) наибольший и последний члены.

297. Даны целые числа $a_1,\ldots, a_{100}$. Получить новую последовательность из 100 целых чисел, заменяя a_i нулями, если $|a_i|$ не равно max ($a_1,\ldots, a_{100}$), и заменяя a_i единицей в противном случае ($i = 1, \ldots, 100$).

298. Даны целые числа $a_1,\ldots, a_{25}$, $b_1,\ldots, b_{25}$. Преобразовать последовательность $b_1, \ldots, b_{25}$ по правилу: если $a_i \le 0$, то b_i увеличить в 10 раз, иначе b_i заменить нулем ($i = 1, \ldots, 25$).

299. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{26}$. Требуется домножить все члены последовательности $a_1, \ldots, a_{26}$ на квадрат ее наименьшего члена, если $a_1 \ge 0$, и на квадрат ее наибольшего члена, если $a_1 < 0$.

300. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1,\ldots, a_n$. Получить $b_1,\ldots, b_{10}$, где b_i равно сумме тех членов последовательности $a_1, \ldots a_n$, которые принадлежат полуинтервалу $(i-1, i]$ $(i = 1, \ldots, 10)$. Если полуинтервал не содержит членов последовательности, то соответствующее b_i положить равным нулю.

301. Даны действительные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{20}, y_{20}, r_1, r_2,\ldots, r_{11}$ $(0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_{11})$. Пары $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{20}, y_{20})$ рассматриваются как координаты точек плоскости. Числа $r_1,\ldots, r_{11}$ рассматриваются как радиусы одиннадцати полукругов в полуплоскости $y>0$ с центром в начале координат. Найти количество точек, попадающих внутрь каждого полукруга (границы-полуокружности не принадлежат полукругам).

302. Дано натуральное число n. Сколько различных цифр встречается в его десятичной записи?

303. Даны действительные числа $x_1, \ldots, x_{200}$, принадлежащие интервалу (0, 1]. Полуинтервал разбивается на 100 равных частей. Вычислить $p_1, \ldots, p_{100}$, где $p_k = m_k/2000$, а m_k – количество заданных чисел, принадлежащих полуинтервалу $(0.01(k-1), 0.01k]$ $(k = 1, \ldots, 100)$.

304. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{16}$. Переставить члены последовательности $a_1, \ldots, a_{16}$ так, чтобы сначала расположились все ее неотрицательные члены, а потом – все отрицательные. Иначе говоря, после перестановки должно найтись такое k, что $1 \le k \le 16$, и если $i \le k$, то $a_i \ge 0$; если $i > k$, то $a_i < 0$ $(i = 1, \ldots, 16)$. Порядок как среди неотрицательных членов, так и среди отрицательных должен быть сохранен прежним.

305. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{30}$. Оставить без изменения последовательность $a_1, \ldots, a_{30}$, если она упорядочена по неубыванию или по по невозрастанию; в противном случае удалить из

последовательности те члены, порядковые номера которых кратны четырем, сохранив прежним порядок оставленных членов.

306. Даны натуральные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$. Числа x_i, y_i являются координатами точек. Построить на экране точки, заданные последовательностью $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$, а затем удалить их. Процесс построения должен начинаться точкой с номером 1 и заканчиваться точкой с номером n; процесс удаления точек должен происходить в обратном порядке – начинаться точкой с номером n и заканчиваться точкой с номером 1.

307. Даны натуральные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$. Числа x_i, y_i являются координатами точек. Построить на экране точки, заданные последовательностью $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$. Точки должны строиться поочередно: построение каждой последующей точки должно сопровождаться удалением предыдущей. Процесс построения следует выполнять дважды: первый раз начиная точкой с номером 1 и кончая

точкой с номером n, второй раз – в обратном порядке – начиная точкой с номером n и заканчивая точкой с номером 1.

308. В условие предыдущей задачи вносится изменение: поочередное построение точек следует выполнять так, чтобы после появления на экране первых трех точек построение каждой новой точки сопровождалось удалением точки, которая была построена раньше трех других видимых точек.

309. Даны натуральные числа $x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, \ldots, x_n, y_n, r_n$. Числа x_i, y_i являются центрами кругов радиуса r_i. Построить на экране круги, заданные последовательностью $x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, \ldots, x_n, y_n, r_n$, а затем закрасить их (одним и тем же цветом или разными цветами). Процесс построения должен начинаться кругом с номером 1 и заканчиваться кругом с номером n; процесс закраски должен происходить в обратном порядке – начинаться кругом с номером n и заканчиваться кругом с номером 1.

310. Даны натуральные числа x, y, r_1, r_2, …, r_n .Числа r_i являются сторонами квадратов с центрами в точке (x, y). Построить на экране квадраты, заданные последовательностью r_1, r_2,…, r_n, а затем удалить их. Процесс построения должен начинаться квадратом с номером 1 и заканчиваться квадратом с номером n; процесс удаления должен происходить в обратном порядке – начинаться квадратом с номером n и заканчиваться квадратом с номером 1.

311. Даны натуральные числа x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, …, x_n, y_n, r_n. Построить на экране окружности с центрами в точках (x_i, y_i) и радиусами r_i, если среди r_1, r_2, …, r_n найдется число, меньше 5, и квадраты с центрами в точках (x_i, y_i) и сторонами r_i в противном случае.

312. Даны символы s_1, …, s_n *). Оставить последовательность s_1, …, s_n без изменения, если в нее не входит символ * , иначе каждый символ / , предшествующий первому вхождению символа *:

а) заменить на запятую;

б) удалить из последовательности.

*) Задачи **312 – 316** допускают строковые варианты.

313. Даны символы $s_1, \ldots, s_n$. Если последовательность $s_1, \ldots, s_n$ является палиндромом , т.е. $s_1 = s_n$, $s_2 = s_{n-1}$, …, то оставить ее без изменения, иначе получить последовательность $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n, s_{n-1}, \ldots, s_2, s_1$.

314. Даны символы $s_1, \ldots, s_{66}$. Если последовательность $s_1, \ldots, s_{66}$ такова, что $s_1 = s_{34}$, $s_2 = s_{35}$, …, $s_{33} = s_{66}$, то оставить ее без изменения, иначе получить последовательность $s_1, s_2, \ldots, s_{66}, s_1, s_2, \ldots, s_{66}$.

315. Даны символы $s_1, \ldots, s_{80}$. Определить количество неверных равенств среди:

а) $s_1 = s_{41}$, $s_2 = s_{42}$, ... , $s_{40} = s_{80}$;

б) $s_1 = s_{80}$, $s_2 = s_{79}$, ... , $s_{40} = s_{41}$.

316. Даны натуральное число n, символы $s_1,\dots,s_n$. Будем рассматривать слова, образованные символами, входящими в последовательность $s_1, \dots, s_n$ (см. задачу 269), считая при этом, что количество символов в каждом слове не превосходит 15.

а) Найти какое-нибудь слово, оканчивающееся буквой *д* (если таких слов нет, то сообщить об этом).

б) Найти какое-нибудь слово, начинающееся буквой *а* и оканчивающееся буквой *я* (если таких слов нет, то сообщить об этом).

в) Удалить из $s_1,\dots,s_n$ все слова с нечетными порядковыми номерами и перевернуть все слова с четными номерами. Например, если $n = 21$ и данная последовательность символов представляет собой последовательность

во_что_бы_то_ни_стало,

то должна получиться последовательность

отч_от_олатс.

г) Удалить из $s_1, \ldots, s_n$ все слова, в которых встречается не более двух различных букв.

д) Удалить из $s_1, \ldots, s_n$ все слова, оканчивающиеся группой букв *кая* или *кое*.

§10. Вложенные циклы

317. Даны действительные числа $a_1,\ldots, a_{10}$. Вычислить $a_1 + a_2^2 + \ \ldots \ + a_{10}^{10}$.

318. Дано натуральное число n. Получить $f_0 f_1 \ \ldots f_n$, где

$$f_i = \frac{1}{i^2+1} + \frac{1}{i^2+2} + \ldots + \frac{1}{i^2+i+1}.$$

319. Даны действительные числа $a_1,\ldots , a_{24}$. Получить последовательность $b_1, \ldots, b_{10}$, где $b_1 = a_1+a_2+ \ldots +a_{24}$, $b_2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{24}^2,\ldots , b_{10} = a_1^{10} + a_2^{10} + \ldots + a_{24}^{10}$.

320. Вычислить $\sum_{k=1}^{10} k^3 \sum_{l=1}^{15} (k-l)^2$.

321. Даны натуральные числа m, n, действительные числа a_1, a_2, ..., a_{mn}. Вычислить $a_1 a_2 \ \ldots \ a_m + a_{m+1} a_{m+2} \ \ldots \ a_{2m} + a_{(n-1)m+1} a_{(n-1)m+2} \ \ldots \ a_{nm}$.

322. Найти натуральное число от 1 до 10 000 с максимальной суммой делителей.

323. Дано натуральное число n. Получить все натуральные числа, меньшие n и взаимно простые с ним.

324. Даны целые числа p и q. Получить все делители числа q, взаимно простые с p.

325. Дано натуральное число n. Получить все простые делители этого числа.

326. Найти наименьшее натуральное число n, представимое двумя различными способами в виде суммы кубов двух натуральных чисел x^3+y^3 ($x \geq y$).

327. Даны натуральные числа a, b ($a \leq b$). Получить все простые числа p, удовлетворяющие неравенствам $a \leq p \leq b$.

328. Найти 100 первых простых чисел.

329. Даны натуральные числа n, m. Получить все меньшие n натуральные числа, квадрат суммы цифр которых равен m.

330. Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, за исключением себя самого. Число 6 – совершенное, так как 6 = 1+2+3. Число 8 – не совершенное, так как $8 \neq 1+2+4$.Дано натуральное число n. Получить все совершенные числа, меньшие n.

331. Дано натуральное число n. Можно ли представить его в виде суммы трех квадратов натуральных чисел? Если можно, то

а) указать тройку x, y, z таких натуральных чисел, что $n = x^2 + y^2 + z^2$,

б) указать все тройки x, y, z таких натуральных чисел, что $n = x^2 + y^2 + z^2$.

332. Известно, что любое натуральное число можно представить в виде суммы не более чем четырех квадратов натуральных чисел или, что то же самое, в виде суммы четырех квадратов неотрицательных

целых чисел (теорема Лагранжа). Дано натуральное n; указать такие неотрицательные x, y, z, t, что $n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.

333. Даны натуральные числа $m, n_1, \ldots, n_m$ $(m \geq 2)$. Вычислить НОД$(n, \ldots, n_m)$, воспользовавшись для этого соотношением НОД$(n, \ldots, n_k) =$ НОД$(\text{НОД}(n, \ldots, n_{k-1}) n_k)$ $(k = 3, \ldots, n)$ и алгоритмом Евклида (см. задачу 89).

334. Вычислить

а) $\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{50} \frac{1}{i + j^2}$; б) $\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{60} \sin\left(i^3 + j^4\right)$;

в) $\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} \frac{j - i + 1}{i + j}$; г) $\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{2j + i}$

335. Дано натуральное число n. Вычислить:

а) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots k^2$; б) $\sum_{k=1}^{n} k^k$;

в) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k^2)!}$; г) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (2k^2+1)!$

336. Даны натуральное число n, действительное число x. Вычислить:

а) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(2i)!+|x|}{(i^2)!}$; б) $\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{(k!+1)!}$;

в) $\sum_{k=1}^{n} k^k x^{2k}$; г) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=k}^{n} \frac{x+k}{m}$.

337. Даны действительные числа $a, b \ldots (a < b)$, натуральное число n, функция $y = f(x)$ определенная на отрезке $[a, b]$. Вывести

на печатающее устройство график функции. Для построения графика вычислить значения функции $y_i = f\,(x_i)$, где

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = (b - a)/n,$$

Ось *Ox* расположить вертикально, ось *Oy* - горизонтально. Шаг по оси *Ox* – это переход на новую строку, шаг по оси *Oy* –позиция следующего символа в текущей строке. Точки графика изображать символом *.

Рассмотреть следующие функции:

а) $y = |\sin x| + \cos|x|, \quad a = 0, \quad b = \pi, \quad n = 40$;

б) $y = 2\sin x + 3\cos x, \quad a = -\pi, \quad b = \pi, \quad n = 50$;

в) $y = \sqrt{x^4 + 1}, \quad a = -1, \quad b = 2, \quad n = 30$;

г) $y = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}, \quad a = -1, \quad b = 3, \quad n = 40$;

д) $y = \dfrac{x-3}{x^2+2}$, $a=-1$, $b=4$, $n=50$;

е) $e = x^2\, e^{-|x|}$, $a=-1$, $b=3$, $n=40$;

ж) $y = e^{-x}\sin 2x$, $a=-\pi/2$, $b=2\pi$, , $n=50$;

з) $\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$, $a=-3$, $b=3$, $n=50$.

338. Даны натуральное число n, целые числа $a_1, \dots, a_{25}$, $b_1, \dots, b_n$. Среди $a_1, \dots, a_{25}$ нет повторяющихся чисел, нет их и среди $b_1, \dots, b_n$.

а) Построить пересечение последовательностей $a_1, \dots, a_{25}$ и $b_1, \dots, b_n$ (т.е. получить в каком-нибудь порядке все числа, принадлежащие последовательности $a_1, \dots, a_{25}$ и последовательности $b_1, \dots, b_n$ одновременно)+.

б) Построить объединение данных последовательностей.

в) Получить все члены последовательности $b_1, \dots, b_n$, которые не входят в последовательность $a_1, \dots, a_{25}$.

г) Верно ли, что все члены последовательности $a_1, \dots, a_{25}$ входят в последовательность $b_1, \dots, b_n$?

д) Верно ли, что все члены последовательности $b_1, \dots, b_n$ входят в последовательность $a_1, \dots, a_{25}$?

е) Верно ли, что все члены последовательности $a_1, \dots, a_{25}$ входят в последовательность $b_1, \dots, b_n$ и при этом a_1 встречается в последовательности $b_1, \dots, b_n$ не позднее, чем a_2, a_2 - не позднее, чем a_3, и т.д.?

339. Даны целые числа $a_1, \dots, a_n$ (в этой последовательности могут быть повторяющиеся члены).

а) Получить все числа, которые входят в последовательность по одному разу.

б) Получить числа, взятые по одному из каждой группы равных членов.

в) Найти число различных членов последовательности

г) Выяснить, сколько чисел входит в последовательность по одному разу.

д) Выяснить, сколько чисел входит в последовательность более чем по одному разу.

е) Выяснить, имеется ли в последовательности хотя бы одна пара совпадающих чисел.

340 . Даны целые числа $m, a_1, \ldots, a_{20}$. Найти три натуральных числа i, j, k, каждое из которых не превосходит двадцати, такие, что $a_i + a_j + a_k = m$. Если таких чисел нет, то сообщить об этом.

341. Даны пять различных целых чисел. Найти среди них два числа, модуль разности которых имеет:

а) наибольшее значение;

б) наименьшее значение.

342. Даны действительные числа $x, y_1, \ldots, y_{25}$. В последовательности $y_1, \ldots, y_{25}$ найти два члена, среднее арифметическое которых ближе всего к x.

343. Даны действительные числа $x_1, \ldots, x_{17}$ Найти сумму значений $\left| x_i - x_j \right|, \quad (1 \le i < j \le 17)$.

344. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{10}$, натуральное число m. Последовательность $b_1, b_2, \ldots$ образована по закону

$$b_1 = a_1, \ldots, b_{10} = a_{10},$$

$$b_k = b_{k-1} + b_{k-2} + \ldots + b_{k-10}, \quad k = 11, 12, \ldots$$

Получить b_m.

345. Пусть

$$t_0 = 1, \quad t_k = t_0 t_{k-1} + t_1 t_{k-2} + \ldots + t_{k-2} t_1 + t_{k-1} t_0, \qquad k = 1, 2, \ldots..$$

Получить t_{10}.

346. Даны натуральное число k, действительное число a, (a>0). Последовательность $x_0, x_1, \ldots.$ образована по закону

$$x_0 = a, \quad x_i = \frac{k-1}{k} x_{i-1} + \frac{a}{x_{i-1}^{k-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots. .$$

Найти первое значение x_n, для которого $\left| x_n^k - a \right| < 10^{-4}$

(последовательность, $x_0, x_1, \ldots$ сходится к $\sqrt[k]{a}$).

347. Даны целые числа $a_1, \dots, a_{30}$. Пусть M – наибольшее, а m – наименьшее из $a_1, \dots, a_{30}$ Получить в порядке возрастания все целые из интервала (m, M), которые не входят в последовательность $a_1, \dots, a_{30}$.

348. Даны целые числа $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ *). Верно ли, что эти две последовательности отличаются не более чем порядком следования членов?

*) В этой и некоторых из следующих задач этого параграфа надо иметь ввиду соглашение, принятое в примечании №277.

349. Даны целые числа $a_1, \dots, a_n$. Для каждого из чисел, входящих в последовательность $a_1, \dots, a_n$, выяснить, сколько раз оно входит в эту последовательность. Результат представить в виде ряда строк, первая из которых есть $a_1 - k$, где k-число вхождений a_1 в последовательность $a_1, \dots, a_n$. Вторая строка будет иметь вид $a_i - m$,

где a_i - первый по порядку член последовательности, отличный от a_1 а m - число вхождений этого члена в последовательность.

350. Даны натуральные числа k, n действительные числа $a_1, \dots, a_{kn}$. Получить:

а) последовательность

$a_1 + \dots + a_k \; a_{k+1} + \dots + a_{2k}, \dots, a_{k(n-1)+1} + \dots + a_{kn}$;

б) последовательность

$\max(a_1, \dots, a_k), \max(a_{k+1}, \dots, a_{2k}), \dots, \max(a_{k(n-1)+1}, \dots, a_{kn})$;

в)

$\min(a_1, \dots, a_k) + \min(a_{k+1}, \dots, a_{2k}) + \dots + \min(a_{k(n-1)+1}, \dots, a_{kn})$;

г) $\max\left(a_1 + \dots + a_k, a_{k+1} + \dots + a_{2k}, a_{k(n-1)+1} + \dots + a_{kn}\right)$;

д)

$\min\left(\max(a_1, \dots, a_k), \max(a_{k+1}, \dots, a_{2k}), \dots, \max\left(a_{k(n-1)+1}, \dots, a_{kn}\right)\right)$

351. Даны натуральные числа $a_1, \dots, a_n$. Известно, что $a_1, \dots, a_n$ – перестановка чисел $1, \dots, n$, т.е. в последовательности $a_1, \dots, a_n$ встречаются все числа $1, \dots, n$. Будем говорить, что натуральное m переводится данной перестановкой в натуральное k $(m \le n, k \le n)$, если $a_m = k$. Например, число 1 переводится в a_1, a_1 переводится в a_{a_1} и т.д. Рассмотрим образованную этим способом последовательность $1, a, a_{a_1}, \dots$.

а) Доказать, что первый член этой последовательности, для которого имеется равный среди предыдущих, есть 1. Получить по порядку все члены последовательности $1, a, a_{a_1}, \dots$ предшествующие повторению числа 1.

б) Кроме той последовательности, которую требуется получить в а), получить аналогичные последовательности, начинающиеся с

чисел, больших 1. При этом последовательности должны быть попарно различны, и каждая из них должна начинаться с наименьшего члена. Например, если $n = 6, a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 5,\ a_4 = 6,\ a_5 = 1,\ a_6 = 4$, то должны быть получены последовательности

1, 3, 5,

2

4, 6.

352. Пусть цвета экрана имеют номера $0, 1, \ldots, k$. Высветить все точки экрана (или точки некоторой прямоугольной области) различными цветами, используя для точки с координатами i, j цвет с номером, равным остатку от деления $|m|$ на $k+1$, где m может быть взято, например, равным:

а) $i + j$;

б) $(i-10)^2 + 25j^2$;

в) $(i-50)^2 - j$;

г) $25(i+5) + (i-5)j^2$;

д) $(i-50)^2-(j-50)^3$; е) $(i^2+j^2)-2(i^2-j^2)$.

353. Даны натуральные числа $x_1, y_1, ..., x_{10}, y_{10}$. Получить на экране точки (x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_{10}, y_{10}), которые входят в эту последовательность ровно один раз.

354. Даны натуральные числа. $x_1, y_1, ..., x_{10}, y_{10}$. Построить на экране точки с координатами x_i, y_i $(i=1,..., n)$ и соединить отрезками прямых:

а) каждую из n точек со всеми остальными $n-1$ точками;

б) точки с номерами одной четности;

в) точки с номерами разной четности.

355. Даны натуральные числа x_1, y_1,...,x_n, y_n. Построить на экране точки с координатами x_i, y_i $(i=1,...,n)$ и соединить пары наиболее удаленных друг от друга.

356. Даны натуральные числа $x_1,\ y_1,\ c_1,...,x_n,\ y_n,\ c_n$. Каждые три числа x_i, y_i, c_i задают координаты точки и ее цвет $(i = 1, ..., n)$. Из точек одного цвета получить на экране:

а) первую;

б) последнюю.

357. Даны натуральные числа $x_1, y_1, r_1,....,x_n, y_n, r_n$, которые задают последовательность окружностей так, что x_i, y_i – координаты центра, а r_i – радиус i-й окружности $(i = 1, ..., n)$. Получить на экране окружности , которые имеют общие точки с некоторыми другими окружностями последовательности.

358. Получить окружности, указанные в предыдущей задаче, и дополнительно целиком закрасить каким-нибудь одним цветом часть экрана, покрываемую кругами, ограниченными этими окружностями (рис. 17).

359. Даны натуральное число n, символы $s_1, ..., s_{10}$, $t_1, ..., t_n$*). Получить все не превосходящие $n-9$ натуральные i, для которых $s_1 = t_i$, $s_2 = t_{i+1}, ...,$ $s_{10} = t_{i+9}$.

*) Задачи 359-366 допускают строковые варианты (см. примечание к задаче 252).

360. Даны натуральное число n, символы $s_1,...,s_n$. Найти все палиндромические начальные отрезки последовательности $s_1,...,s_n$, т. е. такие отрезки $s_1,...,s_k$ $(k \le n)$, что $s_1 = s_k$, $s_2 = s_{k-1},...$.

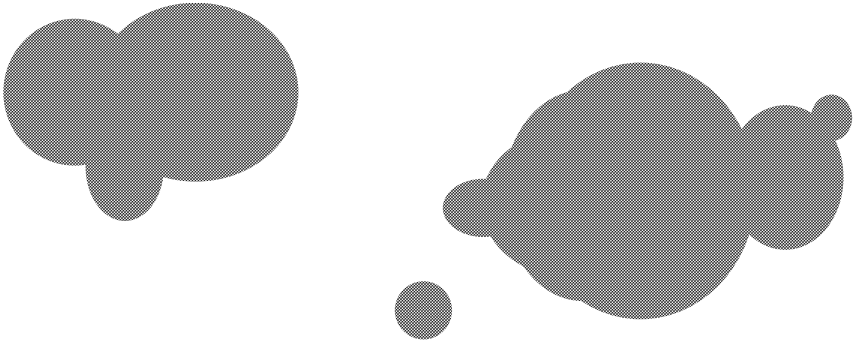


Рис.17

361. Даны натуральное число n, символы $s_1,...,s_n$. Указать все натуральные i, для которых $2i \le n$, $s_1 = s_{i+1}, s_2 = s_{i+2},...,s_i = s_{2i}$.

362. Даны символы $s_1,...,s_n$. Найти такое наибольшее натуральное i, что $2i < n$, $s_1 = s_{i+1}$, $s_2 = s_{i+2}$, ..., $s_i = s_{2i}$ и s_1, s_2, ..., s_i – палиндром, т.е. $s_1 = s_i$, $s_2 = s_{i-1}$,... .

363. Даны натуральное число n, символы $s_1,...,s_n$. Преобразовать последовательность $s_1,...,s_n$, добавив к ней наименьшее число символов $s_{n+1},...,s_m$ так, чтобы последовательность $s_1,...,s_m$ стала палиндромом: $s_1 = s_m$, $s_2 = s_{m-1},...$.

364. Даны символы $s_1,...,s_{50}$. Выяснить, верно ли, что хотя бы один символ входит в $s_1,...,s_{50}$ более одного раза и при этом так, что между любыми двумя его вхождениями встречается буква *a* или *b*.

365. Даны натуральное число n, символы $s_1,...,s_n$. Будем рассматривать слова, образованные символами, входящими в последовательность $s_1,...,s_n$ (см. задачу 269) считая при этом, что количество символов в каждом слове не превосходит 15.

а) Найти наибольшую длину символов-палиндромов. (Если палиндромов нет, то ответом должно быть число 0.)

б) Выяснить, верно ли, что каждое слово, не являющееся палиндромом, имеет четную длину.

в) Выяснить, имеются ли два слова, каждое из которых получается переворачиванием другого.

г) Удалить из $s_1,...,s_n$ все слова, встречающиеся более двух раз.

366. Даны символы $a_1,...,a_{10}$, натуральное число n, символы $s_1,...,s_n$. Как и в предыдущей задаче, будем рассматривать слова, входящие в последовательность $s_1,...,s_n$, по-прежнему считая, что количество символов в каждом слове не превосходит 15. Будем также считать, что среди символов $a_1,...,a_{10}$ нет пробелов, и поэтому последовательность $a_1,...,a_{10}$ может рассматриваться как одно слово. В словах могут встретиться ошибки:

1) переставлены две соседние буквы;

2) заменена одна буква;

3) пропущена одна буква.

Требуется найти в $s_1,...,s_n$ все слова, из которых могло бы получиться $a_1,...,a_{10}$ в результате одной ошибки.

§11. Вложенные циклы в матричных задачах

367. Даны целые числа a_1, a_2, a_3. Получить целочисленную матрицу $\lfloor b_{ij} \rfloor_{i,j=1,2,3}$, для которой $b_{ij} = a_i - 3a_j$.

368. Даны действительные числа $a_1,..., a_{10}$, $b_1,..., b_{20}$. Получить действительную матрицу $\lfloor c_{ij} \rfloor_{i=1,...,20;\, j=1,...,10}$, для которой $c_{ij}=a_j/(1+|b_i|)$.

369. Получить $\lfloor a_{ij} \rfloor_{i=1,...,10;\, j=1,...,12}$ – целочисленную матрицу, для которой $a_{ij}= i+2j$.

370. Дано натуральное число n. Получить действительную матрицу $\lfloor a_{ij} \rfloor_{i,j=1,...,n}$, для которой

а) $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j}$;

б) $a_{ij} = \begin{cases} \sin(i+j) & \text{при } i < j \\ 1 & \text{при } i = j \\ \arcsin\dfrac{i+j}{2i+3j} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

371. Дана действительная квадратная матрица $\lfloor a_{ij} \rfloor_{i,j=1,..,n}$.

Получить две квадратные матрицы $\lfloor b_{ij} \rfloor_{i,j=1,...,n}, \lfloor c_{ij} \rfloor_{i,j=1,...,n}$, для которых

$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{при } j \geq i, \\ a_{ji} & \text{при } j < i, \end{cases}$ и $c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{при } j < i, \\ -a_{ij} & \text{при } j \geq i. \end{cases}$

372. Получить действительную матрицу $\lfloor a_{ij} \rfloor_{i,j=1,...,7}$, первая строка которой задается формулой $a_{1j} = 2j+3 \ \ (j = 1,...,7)$, вторая строка задается формулой $a_{2j} = j - \dfrac{3}{2+1/j} \ \ (j = 1,...,7)$, а каждая следующая строка есть сумма двух предыдущих.

373. Даны натуральное число *n*, действительная матрица размером $n \times 9$. Найти среднее арифметическое:

а) каждого из столбцов;

б) каждого из столбцов, имеющих четные номера.

374. Дано натуральное число *n*. Выяснить, сколько положительных элементов содержит матрица $\lfloor a_{ij} \rfloor_{i,\, j=1,\ldots,n}$, если

а) $a_{ij} = \sin(i + j/2)$;

б) $a_{ij} = \cos(i^2 + n)$;

в) $a_{ij} = \sin\left(\dfrac{i^2 - j^2}{n}\right)$.

375. Дана действительная матрица размера $n \times m$, в которой не все элементы равны нулю. Получить новую матрицу путем деления всех элементов данной матрицы на ее наибольший по модулю элемент.

376. Даны натуральное число m, целые числа $a_1,...,a_m$ и целочисленная квадратная матрица порядка m. Строку с номером i матрицы назовем отмеченной, если $a_i > 0$, и неотмеченной в противном случае.

а) Нужно все элементы, расположенные в отмеченных строках матрицы, преобразовать по правилу: отрицательные элементы заменить на -1, положительные – на 1, а нулевые оставить без изменения.

б) Подсчитать число отрицательных элементов матрицы, расположенных в отмеченных строках.

377. Дана действительная квадратная матрица порядка 12. Заменить нулями все ее элементы, расположенные на главной диагонали и выше нее.

378. Даны действительные числа $x_1,...,x_8$. Получить действительную квадратную матрицу порядка 8:

а) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_8 \\ x_1^2 & x_2^2 & ... & x_8^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_1^8 & x_2^8 & ... & x_8^8 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_1 & x_2 & ... & x_8 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_1^7 & x_2^7 & ... & x_8^7 \end{bmatrix}$.

379. Дана действительная матрица размера $m \times n$. Определить числа $b_1,...,b_m$, равные соответственно:

а) суммам элементов строк;

б) произведениям элементов строк;

в) наименьшим значениям элементов строк;

г) значениям средних арифметических элементов строк;

д) разностям наибольших и наименьших значений элементов строк.

380. Даны натуральное число n, действительная матрица $\lfloor a_{ij} \rfloor_{i=1,\dots,n;\, j=1,\dots,n}$. Получить последовательность элементов главной диагонали $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

381. Все элементы с наибольшим значением в данной целочисленной квадратной матрице порядка 10 заменить нулями.

382. Дана действительная матрица размера 6×9. Найти среднее арифметическое наибольшего и наименьшего значений ее элементов.

383. Дана действительная матрица размера $18 \times n$. Найти значение наибольшего по модулю элемента матрицы, а также индексы какого-нибудь элемента с найденным значением модуля.

384. Дана действительная матрица размера $m \times n$. Найти сумму наибольших значений элементов ее строк.

385. В данной действительной квадратной матрице порядка n найти сумму элементов строки, в которой расположен элемент с

наименьшим значением. Предполагается, что такой элемент единственный.

386. В данной действительной матрице размера 6×9 поменять местами строку, содержащую элемент с наибольшим значением, со строкой, содержащей элемент с наименьшим значением. Предполагается, что эти элементы единственны.

387. Даны натуральное число *n*, действительная квадратная матрица порядка *n*, действительные $a_1,...,a_{n+5}$. Элементы последовательности $a_1,...,a_{n+5}$ домножить на 10, если наибольший элемент матрицы (в предположении, что такой элемент единственный) находится на главной диагонали, и на 0.5 в противном случае.

388. В данной квадратной целочисленной матрице порядка 17 указать индексы всех элементов с наибольшим значением.

389. Дана действительная матрица размера $n \times m$, все элементы которой различны. В каждой строке выбирается элемент с наименьшим значением, затем среди этих чисел выбирается наибольшее. Указать индексы элемента с найденным значением.

390. Дана действительная матрица размера $n \times m$. Получить последовательность $b_1,...,b_n$, где b_k – это

а) наибольшее из значений элементов *k*-й строки;

б) сумма наибольшего и наименьшего из значений элементов *k*-й строки;

в) число отрицательных элементов в *k*-й строке;

г) произведение квадратов тех элементов *k*-й строки, модули которых принадлежат отрезку $[1, 1.5]$.

391. Даны натуральное число *n*, целочисленная матрица $\lfloor a_{ij} \rfloor_{i=1,2;\, j=1,...,m}$. Найти сумму тех из элементов a_{2j} (*j*= 1,..., *m*), для

которых a_{1j} имеет значение наибольшего среди значений

a_{11}, a_{12}, ..., a_{1m}.

392. Дана целочисленная квадратная матрица порядка 8. Найти наименьшее из значений элементов столбца, который обладает наибольшей суммой модулей элементов. Если таких столбцов несколько, то взять первый из них.

393. Даны натуральное число *n*, целочисленная квадратная матрица порядка *n*. Получить $b_1,...,b_n$, где b_i – это

а) наименьшее из значений элементов, находящихся в начале *i*-й строки матрицы до элемента, принадлежащего главной диагонали, включительно;

б) значение первого по порядку положительного элемента *i*-й строки (если таких элементов нет, то принять $b_i = 1$);

в) сумма элементов, расположенных за первым отрицательным элементом в *i*-й строке (если все элементы строки неотрицательны, то принять $b_i = 100$);

г) сумма элементов, предшествующих последнему отрицательному элементу *i*-й строки (если все элементы строки неотрицательны, то принять $b_i = -1$).

394. Дана целочисленная квадратная матрица порядка *n*. Найти номера строк:

а) все элементы которых – нули;

б) элементы в каждой из которых одинаковы;

в) все элементы которых четны;

г) элементы каждой из которых образуют монотонную последовательность (монотонно убывающую или монотонно возрастающую);

д) элементы которых образуют симметричные последовательности (палиндромы).

395. Даны натуральное число n, действительное число x, действительная матрица размера $n \times 2n$. Получить последовательность $b_1,...,b_n$ из нулей и единиц, где b_i=1, если элементы i-й строки матрицы не превосходят x, и b_i= 0 в противном случае.

396. Дана действительная квадратная матрица порядка n. Построить последовательность действительных чисел $a_1,...,a_n$ по правилу: если в i-й строке матрицы элемент, принадлежащий главной диагонали, отрицателен, то a_i равно сумме элементов i-й строки, предшествующих первому отрицательному элементу; в противном случае a_i равно сумме последних элементов i-й строки, начиная с первого по порядку неотрицательного элемента.

397. Дана действительная квадратная матрица порядка 10. В строках с отрицательным элементом на главной диагонали найти:

а) сумму всех элементов;

б) наибольший из всех элементов.

398. Дана действительная квадратная матрица порядка n. Рассмотрим те элементы, которые расположены в строках, начинающихся с отрицательного элемента. Найти суммы тех из них, которые расположены соответственно ниже, выше и на главной диагонали.

399. Дана действительная квадратная матрица порядка 9. Получить целочисленную квадратную матрицу того же порядка, в которой элемент равен единице, если соответствующий ему элемент исходной матрицы больше элемента, расположенного в его строке на главной диагонали, и равен нулю в противном случае.

400. Дана действительная квадратная матрица порядка n. Получить $x_1x_n + x_2x_{n-1} + ... + x_n x_1$, где x_k — наибольшее значение элементов k-й строки данной матрицы.

401. Дана действительная квадратная матрица порядка n**,** натуральные числа i, j ($1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$). Из матрицы удалить i-строку и j-столбец.

402. Даны натуральное число $n \ge 2$, действительная квадратная матрица порядка n. Построить последовательность $b_1, \ldots, b_n$ из нулей и единиц, в которой $b_i = 1$ тогда и только тогда, когда

а) элементы i-строки матрицы образуют возрастающую последовательность;

б) элементы i-строки матрицы образуют возрастающую убывающую или убывающую последовательность.

403. Дана целочисленная квадратная матрица порядка 15. Выяснить, имеются ли в матрице ненулевые элементы, и если имеются, то указать индексы:

а) одного из ненулевых элементов;

б) всех ненулевых элементов.

404. Даны натуральные числа i, j, действительная матрица размера 18×24 ($1\le i<j\le24$). Поменять в матрице местами i-й и j-й столбцы.

405. Даны натуральное число n, действительная квадратная матрица порядка n. Построить последовательность $b_1, \ldots, b_n$ из нулей и единиц, в которой $b_i = 1$ тогда и только тогда, когда в i-строке матрицы есть хотя бы один отрицательный элемент.

406. С помощью $[x_{ij}]_{i=1,2;\ j=1,\ \ldots,\ n}$ — действительной матрицы на плоскости задано n точек так, что x_{1j}, x_{2j} — координаты j-точки. Точки попарно соединены отрезками. Найти длину наибольшего отрезка.

407. Даны натуральные числа n и m, действительное число r, действительная матрица размера $n \times m$. Получить значение

$$b_1 r^{n-1} + b_2 r^{n-2} + \ldots + b_n,$$

где b_k — первый по порядку положительный элемент в k-й строке матрицы ($k = 1, \ldots, n$); если в k-строке нет положительных элементов, то $b_k = 0.5$.

408. Найти сумму квадратов тех элементов a_{ij} матрицы $[a_{ij}]_{i,\, j = 1,\ldots,\, 10}$, для которых выполнено $2 \le i \le 9$, $2 \le j \le 9$,

$$a_{ij} \ge \frac{a_{i-1j} + a_{ij-1} + a_{i+1j} + a_{i+1j}}{4}.$$

409. Дана действительная квадратная матрица порядка 9. Вычислить сумму тех из её элементов, расположенных на главной диагонали и выше неё, которые превосходят по величине все элементы, расположенные ниже главной диагонали. Если на главной

диагонали и выше неё нет элементов с указанным свойством, то ответом должно служить сообщение об этом.

410. Дана целочисленная матрица $[a_{ij}]_{i,\, j\, =\, 1,\, \ldots,\, n}$. Получить $b_1, \ldots, b_n$, где b_i — это

а) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$;

б) $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}$;

в) $\prod_{j=1}^{n} a_{ij}$;

г) $\sum_{j=1}^{n} \left| a_{ji} \right|$;

д) $\prod_{j} a_{ji}$ для всех таких j, что $1 < a_{ji} \le n$;

е) $\max_{1 \le j \le n} a_{ij} \cdot \min_{1 \le j \le n} a_{ji}$.

411. Будем называть соседями элемента с индексами i, j некоторой матрицы такие элементы этой матрицы, соответствующие индексы которых отличаются от i и j не более чем на единицу. Для

данной целочисленной матрицы $[a_{ij}]_{i=1, ..., n; j=1, ..., m}$ найти матрицу из нулей и единиц $[b_{ij}]_{i=1, ..., n; j=1, ..., m}$, элемент которой b_{ij} равен единице, когда

а) все соседи a_{ij} меньше самого a_{ij};

б) все соседи a_{ij} и само a_{ij} равны нулю;

в) среди соседей a_{ij} есть не менее двух совпадающих с a_{ij}.

412. Даны две целочисленные квадратные матрицы порядка 6. Найти последовательность из нулей и единиц $b_1, \ldots, b_6$ такую, что $b_i = 1$, когда

а) все элементы *i*-строки первой матрицы больше соответствующих элементов *i*-строки второй матрицы;

б) все элементы *i*-х строк первой и второй матриц отрицательны;

в) *i*-е строки первой и второй матриц содержат вместе не более трёх положительных элементов;

г) количество отрицательных и неотрицательных элементов i-строки первой матрицы совпадает соответственно с количеством отрицательных и неотрицательных элементов i-строки второй матрицы.

413. Таблица футбольного чемпионата задана квадратной матрицей порядка n, в которой все элементы, принадлежащие главной диагонали, равны нулю, а каждый элемент, не принадлежащий главной диагонали, равен 2, 1 или 0 (числу очков, набранных в игре: 2 — выигрыш, 1 — ничья, 0 — проигрыш).

а) Найти число команд, имеющих больше побед, чем поражений.

б) Определить номера команд, прошедших чемпионат без поражений.

в) Выяснить, имеется ли хотя бы одна команда, выигравшая более половины игр.

414. Даны натуральные числа $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$. Числа x_i, y_i рассматриваются как координаты i-й точки ($i = 1, \ldots, n$). Обозначим через r_{ij} расстояние от i-й точки до j-й. Получить на экране заданные точки и соединить отрезком i-ю точку с j-й в том случае, если выполняется по крайней мере одно условие:

а) r_{ij} имеет наибольшее значение из $r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{in}$;

б) r_{ji} имеет наибольшее значение из $r_{j1}, r_{j2}, \ldots, r_{jn}$.

415. Дана целочисленная квадратная матрица порядка n. Каждый элемент матрицы ставится в соответствие точке, принадлежащей квадратной области экрана размером $n \times n$ точек. Левый верхний угол области имеет координаты 0×0. Соответствие между элементами матрицы и точками области экрана устанавливается следующим образом: элемент матрицы, стоящий в строке с номером i и в столбце с номером j, соответствует точке экрана, находящейся на пересечении строки точек области с номером i и столбца точек области

с номером j. Полагая, что каждый элемент матрицы задаёт цвет соответствующей точки экрана, получить на экране изображение, закодированное в матрице A.

416. Даны две целочисленные квадратные матрицы порядка n. В каждой из матриц закодировано изображение прямоугольной области экрана размером $n \times n$ точек с координатами левого верхнего угла 0, 0 (см. предыдущую задачу). В отличие от предыдущей задачи, все элементы обеих матриц — это числа, равные нулю, если точка — часть изображения. Получить на экране изображение, являющееся:

а) пересечением изображений, закодированных в первой и второй матрицах;

б) объединением изображений, закодированных в первой и второй матрицах.

417. Даны натуральные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$, целочисленная матрица $[a_{ij}]_{i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, n}$. Последовательность $x_1, y_1, x_2,$

$y_2, \ldots, x_n, y_n$ задаёт координаты n точек. Матрица указывает, как соединены между собой точки: $a_{ij} = 1$, если i-я точка соединена с j-й, и $a_{ij} = 0$ в противном случае ($a_{ij} = a_{ji}$). Получить на экране точки, заданные последовательностью $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ и соединить их между собой так, как указано в данной матрице.

418. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность квадратных матриц из нулей и единиц такая, что порядок матрицы A_i равен 3^i и

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

2) При $i > 1$ имеет место

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i-1} & 0 & A_{i-1} \\ 0 & A_{i-1} & 0 \\ A_{i-1} & 0 & A_{i-1} \end{bmatrix},$$

где 0 обозначает часть матрицы, заполненную нулями.

Дано натуральное число n. Построить изображение квадратной области экрана, закодированное в матрице A_n (см. задачу 415). Левый верхний угол области должен совпадать с левым верхним углом экрана. Опробовать различные способы использования цвета при построении изображения. Если фоновый цвет имеет номер 0, а остальные цвета — номера 1, …, k, то при обработке элемента $a_{ij} \neq 0$ можно, например, брать цвет с номером $l + 1$, где l равно остатку от деления $i^2 + j^3$ на k, и т. д.

419. Дана символьная квадратная матрица порядка 10. Заменить буквой a все ее элементы, расположенные выше главной диагонали.

420. Дано натуральное n, символьная квадратная матрица порядка n. Получить последовательность b_1, …, b_n из нулей и единиц, в которой $b_i = 1$ тогда и только тогда, когда в i-строке число символов * не меньше числа пробелов.

421. Дана символьная матрица размера 13×18. Найти:

а) номер первой по порядку строки, содержащий наибольшее число цифр;

б) номер первого по порядку столбца, содержащего наименьшее число пробелов на пересечении со строками, номера которых чётны;

в) номер последней по порядку строки, содержащей наибольшее количество букв *ш*, *щ*;

г) номер последнего по порядку столбца, в котором содержится наибольшее количество попарно различных символов.

422. При перепечатке текста на пишущей машинке часто получается так, что в конце строки остаётся несколько неиспользованных позиций. Число неиспользованных позиций меняется от строки к строке, и поэтому правый край отпечатанного текста получается неровным. Типографский набор даёт ровный правый

край, в частности, за счёт увеличения промежутков между словами, встречающимися в строке.

Предполагается задача выбора подходящих промежутков. Дана символьная матрица $n \times m$, в каждой из строк которой имеется по крайней мере один пробел, за которым следует отличный от пробела символ (т. е. имеется по крайней мере одна группа пробелов внутри строки). За счёт изменения групп пробелов внутри строк надо добиться того, чтобы в конце каждой из строк пробелы отсутствовали. Количества пробелов в разных группах, располагающихся внутри одной и той же строки, должны различаться не более чем на единицу.

423. Выполнение следующих заданий не требует привлечения вложенных циклов при работе с матрицами. Подобные не слишком частые ситуации*) возникают, как правило, тогда, когда обрабатываются или исследуются элементы, образующие «одномерную» часть матрицы: строку, столбец, диагональ и т.д.

*) Добавим, что ввод и вывод матрицы в некоторых языках программирования естественно задавать с помощью вложенных (двойных) циклов.

Дана действительная квадратная матрица порядка n.

а) Найти сумму элементов первого столбца.

б) Найти сумму элементов главной и побочной диагоналей.

в) Найти наибольшее из значений элементов первой и последней строк.

г) Найти наименьшее из значений элементов побочной диагонали и двух соседних с ней линий.

д) Для данного натурального m ($m \leq 2n$) найти сумму тех элементов матрицы, сумма индексов которых равна m.

е) Выяснить, верно ли, что наибольшее из значений элементов главной диагонали больше, чем наименьшее из значений элементов побочной диагонали.

§12. Использование процедур*)

*) В задачах этого параграфа будем для краткости говорить просто о процедурах, подразумевая, что решающий задачи сам выберет подходящее средство программирования – подпрограмму, функцию и т. д. Этот выбор должен быть сделан с учётом как характера задач, так и особенностей используемого языка программирования.

424. Даны действительные числа s, t. Получить

$$f(t, -2s, 1.17)+f(2.2, t, s-t),$$

где

$$f(a, b, c)=\frac{2a-b-\sin c}{5+|c|}.$$

425. Даны действительные числа s, t. Получить

$$g(1.2, s)+g(t, s)-g(2s-1, st),$$

где

$$g(a, b)=\frac{a^2+b^2}{a^2+2ab+3b^2+4}.$$

426. Дано действительное число y. Получить

$$\frac{1.7t(0.25)+2t(1+y)}{6-t(y^2-1)}, \text{ где } \quad t(x)=\frac{\sum_{k=0}^{10}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{\sum_{k=0}^{10}\frac{x^{2k}}{(2k)!}}.$$

427. Даны действительные числа a, b, c. Получить

$$\frac{\max(a, a+b)+\max(a, b+c)}{1+\max(a+bc, 1,\ 15)}.$$

428. Даны действительные числа a, b. Получить

$$u=\min(a,b), \upsilon=\min(ab, a+b), \min(u+\upsilon^2,\ 3.14).$$

429. Даны натуральные числа n, m, целые числа a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m, c_1, ..., c_{30}. Получить

$$l = \begin{cases} \min(b_1,...,b_m) + \min(c_1,...,c_{30}) \\ \text{при } \left|\min(a_1,...,a_n)\right| > 10, \\ 1 + (\max(c_1,...,c_{30}))^2 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

430. Даны натуральные числа k, l, m, действительные числа $x_1,...,\ x_k,\ y_1,...,y_l,\ z_1,...,\ z_m$. Получить

$$t = \begin{cases} (\max(y_1,...,y_l) + \max(z_1,...,z_m))/2 \\ \text{при } \max(\mathrm{x}_1,...,x_k) \geq 0, \\ 1 + (\max(x_1,...,x_k))^2 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

431. Даны действительные числа s, t. Получить

$$h(s,t) + \max(h^2(s-t,\ st),\ h^4(s-t,\ s+t)) + h(1,1),$$

где

$$h(a,b) = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+a^2} - (a-b)^3.$$

432. Даны действительные числа a_0, ..., a_6. Получить для x=1, 3, 4 значения $p(x+1) - p(x)$, где

$$p(y)=a_6 y^6+a_5 y^5+...+a_0.$$

433. Даны действительные числа s, t, a_0, ..., a_{12} . Получить

$$p(1) - p(t)+p^2(s - t) - p^3(1),$$

где

$$p(x) = a_{12} x^{12}+a_{11}x^{11}+ ... +a_0.$$

434. Даны действительные числа a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m. В последовательности a_1,...,a_n и в последовательности b_1,...,b_m все члены, следующие за членом с наибольшим значением (за первым по порядку, если их несколько), заменить на 0.5.

435. Даны целые числа a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m, k. Если в последовательности a_1, ..., a_n нет ни одного члена со значением k, то первый по порядку член этой последовательности, не меньший всех остальных членов, заменить на значение k. По такому же правилу

преобразовать последовательность $b_1, ..., b_m$ применительно к значению 10.

436. Даны целые числа $n_0, d_0, n_1, d_1, ..., n_7, d_7, a, b$ ($d_0 d_1 ... d_7 b \neq 0$. Вычислить по схеме Горнера $\frac{n_7}{d_7}\left(\frac{a}{b}\right)^7 + \frac{n_6}{d_6}\left(\frac{a}{b}\right)^6 + ... + \frac{n_0}{d_0}$, определив процедуры полного сокращения рационального числа, заданного числителем и знаменателем, а также процедуры сложения и умножения рациональных чисел.

437. Даны целые числа $f_0, ..., f_{10}$. Исследовать существование целочисленных корней уравнения $f_{10}x^{10} + f_9x^9 + ... + f_0 = 0$. (Если $f_0 = 0$, то имеется корень 0; если же $f_0 \neq 0$, то целочисленный корень, если он существует, принадлежит конечному множеству положительных и отрицательных делителей числа f_0.) Здесь полезно определить процедуру вычисления по схеме Горнера значения многочлена, а также процедуру, которая по двум заданным числам k и m ($m > k \geq 0$)

позволяет определить значение наименьшего делителя числа m, содержащегося среди чисел k+1, k+2, ..., m.

438. Даны натуральное число n, действительные числа x, y, a_n, b_n, a_{n-1}, b_{n-1}, ..., a_0, b_0. Вычислить по схеме Горнера значение многочлена с комплексными коэффициентами

$$(a_n + ib_n)(x+iy)^n + (a_{n-1} + ib_{n-1})(x+iy)^{n-1} + \ldots + (a_0 + ib_0)\,.$$

(Определить процедуры выполнения арифметических операций над комплексными числами.)

439. Даны действительные числа u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2. Получить $2u + \dfrac{3uw}{2+w-v} - 7$, где u, v, w – комплексные числа $u_1 + iu_2$, $v_1 + iv_2$, $w_1 + iw_2$. (Определить процедуры выполнения арифметических операций над комплексными числами.)

440. Даны натуральное число n, целые числа $a_1, ..., a_n$. Рассмотреть отрезки последовательности $a_1, ..., a_n$ (подпоследовательности идущих подряд членов), состоящие из

а) полных квадратов;

б) степени пятёрки;

в) простых чисел.

В каждом случае получить наибольшую из длин рассматриваемых отрезков. (Определить процедуры, позволяющие распознавать полные квадраты, степени пятёрки, простые числа.)

441. Дано натуральное число n. Среди чисел 1,2, ..., n найти все те, которые можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел. (Определить процедуру, позволяющую распознавать полные квадраты.)

442. Даны действительные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_{10}, y_{10}$. Найти периметр десятиугольника, вершины которого имеют соответственно

координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{10}, y_{10}). (Определить процедуру вычисления расстояния между двумя точками, заданными своими координатами.)

443. Даны действительные числа a, b, c, d. Найти площадь пятиугольника, изображенного на рис. 18. (Определить процедуру вычисления площади треугольника по трем его сторонам.)

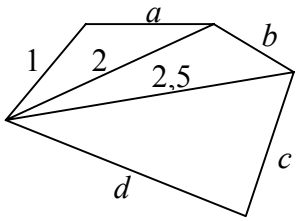


Рис. 18

444. Даны натуральное число n, действительные числа x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n. Найти площадь $n-$ угольника, вершины которого при некотором последовательном обходе имеют координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2),

..., (x_n, y_n). (Определить процедуру вычисления площади треугольника по координатам его вершин.)

445. Дано четное число $n > 2$; проверить для этого числа гипотезу Гольдбаха. Эта гипотеза (по сегодняшний день не опровергнутая и полностью не доказанная) заключается в том, что каждое четное n, большее двух, представляется в виде суммы двух простых чисел. (Определить процедуру, позволяющую распознавать простые числа.)

446. Дано натуральное число n. Выяснить, имеются ли среди чисел n, $n+1$, ..., $2n$ близнецы, т.е. простые числа, разность между которыми равна двум. (Определить процедуру, позволяющую распознавать простые числа.)

447. Даны натуральное число n, целые числа a_1, ..., a_n. Рассмотреть все отрезки последовательности a_1, ..., a_n (см. задачу 440),

состоящие из совершенных чисел. (Определить процедуру, позволяющую распознавать совершенные числа.)

448. Бесконечная последовательность рациональных чисел v_0, v_1, ... образована по следующему закону:

а) $v_0 = 1; v_0 + C_{k+1}^1 v_1 + \ldots + C_{k+1}^k v_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots;$

б) $v_0 = 1; v_0 + C_{2k}^2 v_1 + C_{2k}^4 v_2 + \ldots + C_{2k}^{2k} v_k = 0, \; k = 1, 2, \ldots$

Дано неотрицательное целое число n. Вычислить числитель и знаменатель несократимой формы числа v_n. (Определить процедуры полного сокращения рационального числа, заданного числителем и знаменателем, а также процедуры сложения и умножения рациональных чисел.)

449. Даны действительные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_6, y_6$. Точки с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) рассматриваются как вершины первого треугольника, точки с координатами (x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_6, y_6)– второго треугольника. Выяснить, верно ли, что первый треугольник целиком содержится во втором, и если да, определить площадь области, принадлежащей внешнему треугольнику и не принадлежащей внутреннему (на рис. 19 область заштрихована). (Определить процедуру, позволяющую выяснить, лежат ли две точки в одной полуплоскости относительно заданной прямой (см. задачу 52), процедуру вычисления расстояния между двумя точками, а также процедуру

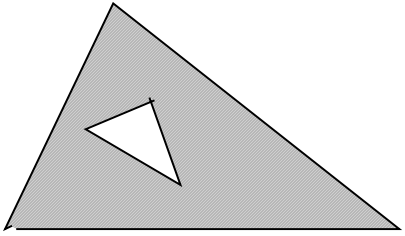


Рис. 19

вычисления площади треугольника по трем сторонам.)

450. Два треугольника заданы координатами своих вершин так, как указано в предыдущей задаче. Выяснить, лежит ли какой-либо из треугольников целиком внутри другого. Если да, построить стороны треугольников и закрасить область, принадлежащую внешнему треугольнику и не принадлежащую внутреннему(рис. 19). Построения сторон и закраску области выполнить одним цветом. Если ни один из треугольников не лежит целиком внутри другого, построить стороны треугольников, используя для каждого треугольника свой цвет. (Определить процедуру, позволяющую выяснить, лежат ли две точки в одной полуплоскости относительно заданной прямой (см. задачу 52), и процедуру построения сторон треугольника по заданным координатам вершин и номеру цвета.)

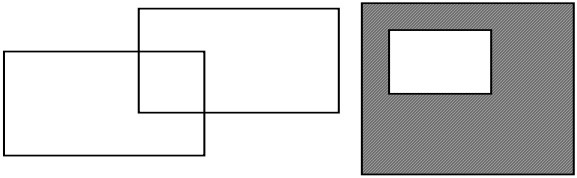


Рис. 20

451. Даны натуральные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_6, y_6$. Точки с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) рассматриваются как три вершины первого прямоугольника, точки с координатами (x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_6, y_6) – второго. Провести построения, аналогичные тем, которые были описаны в предыдущей задаче в отношении треугольников. Стороны прямоугольника считаются параллельными осям экрана (рис. 20**)**

452. Представим себе, что в центре экрана сидит жучок, который может перемещаться по прямой на указанное расстояние и поворачиваться направо и налево. У жучка есть перо, которое может

оставлять след, повторяющий движение жучка. Если перо опущено, след остается; если перо поднято, следа нет. Итак, жучок может выполнять следующие приказы:

1) *Forward* – переместиться на заданное расстояние;

2) *Left* – повернуть налево на заданный угол;

3) *Right* – повернуть направо на заданный угол;

4) *Pen Up* – поднять перо;

5) *Pen Down* – опустить перо.

Реализовать процедуры *Forward, Left*, *Right, Pen Up, Pen Down*. Процедуры должны взаимодействовать через глобальные переменные *xPos*, *yPos* --координаты жучка на экране; *Pen* – признак, говорящий о том, поднято перо или опущено; *Angle* -- угол, который образует текущее направление перемещения жучка с осью абсцисс.

С помощью перечисленных процедур получить на экране:

а) Квадрат со стороной 75 единиц и центром, совпадающим с центром экрана.

б) Прямоугольник с отношением сторон 1:2 и со срезанными углами. Срезаются равнобедренные прямоугольные треугольники, катеты которых имеют длину, равную 1/20 длины большей стороны (рис. 21). Длина меньшей стороны – данная величина. Положение прямоугольника на экране может быть выбрано произвольно.

Рис. 21

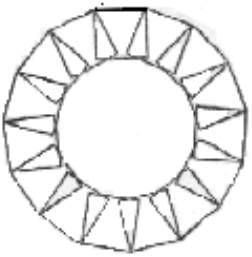


Рис. 22

в) Фигуру, составленную из пятнадцати квадратов, которая изображена на рис. 22.

г) Четыре крупные цифры – текущий год; цифры должны быть написаны по девятисегментному шаблону (как на почтовых конвертах).

д) Те же цифры, что и в задании г), но написанные по семисегментному шаблону (как на электронных часах).

е) Кривые Серпинского порядка 1 и 2, изображенные на рис. 23.

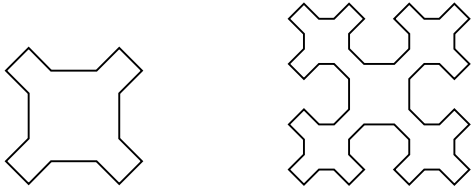
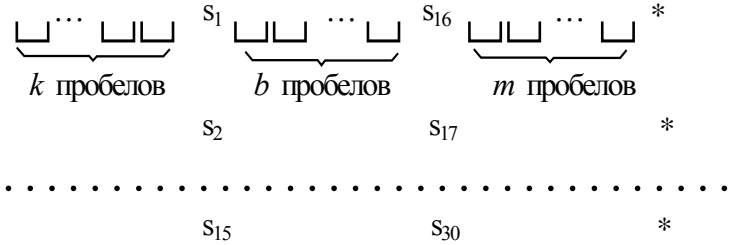


Рис. 23

453. Даны натуральные числа k, l, m, символы $s_{1, \dots, } s_{30.}$ Вывести данные символы в следующем виде:



(Определить процедуру, обращение к которой дает вывод символа t после n пробелов.)

454. Дано натуральное число n; найти $n!$. Использовать программу, включающую рекурсивную процедуру вычисления $n!$. Чем эта программа хуже нерекурсивной программы вычисления $n!$?

455.Даны натуральные числа n, m; найти НОД(n, m). Использовать программу, включающую рекурсивную процедуру

вычисления НОД, основанную на соотношении НОД(n, m) = НОД(m, r), где r – остаток от деления n на m (см. задачу 89). Чем эта программа хуже нерекурсивной программы вычисления НОД(n, m)?

456. Числа Фибоначчи u_0, u_1, u_2, ... определяются следующим образом: $u_0=0$, $u_1=1$, $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ (n=2, 3, ...) (см. задачу 144). Написать программу вычисления u_n для данного неотрицательного целого n, включающую рекурсивную процедуру, которая основана на непосредственном использовании соотношения $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$. Доказать по индукции, что при вычислении u_n (n=2, 3, ...) по этой программе придется выполнить u_n-1 сложение чисел Фибоначчи. Итак, для нерекурсивной программы количество сложений чисел Фибоначчи при вычислении u_n для n=0, 1, ..., 10 есть соответственно 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, а для рекурсивной – 0, 0, 1, 2, 4, 7, 12, 20, 30, 54. Ввиду последнего обстоятельства никогда не следует пользоваться такого рода

рекурсивными процедурами, основанными на непосредственном применении соотношений вида

$$x_n = F(x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}), \ k \geq 2 .$$

457. Даны натуральные числа a, c, m. Получить $f(m)$, где

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{если} \quad 0 \leq n \leq 9, \\ g(n) f(n-1-g(n)) + n & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

$g(n) =$ *остаток от деления* a_{n+c} на 10.

Использовать программу, включающую рекурсивную процедуру вычисления $f(n)$.

458. Даны неотрицательные целые числа n, m; вычислить $A(n, m)$, где

$$A(n,m) = \begin{cases} m+1, & \text{если} \quad n = 0, \\ A(n-1,1), & \text{если} \quad n \neq 0, \ m = 0, \\ A(n-1, A(n, m-1)), & \text{если} \quad n > 0, \ m > 0 \end{cases}$$

(это – так называемая функция Аккермана).

Использовать программу, включающую рекурсивную процедуру.

459. Многие задачи, помещенные в §9, где речь идет о вложенных циклах, могут решаться с привлечением процедур – внутренние циклы могут быть заменены обращениями к должным образом определенным процедурам. Например, для решения задачи 317 можно определить процедуру вычисления a^n, для решения задачи 318 – процедуру вычисления $\frac{1}{i^2+1}+\frac{1}{i^2+2}+\ldots+\frac{1}{i^2+i+1}$ и т. д. Посмотреть задачи §9 и сказать, какие процедуры были бы полезны для решения этих задач.

460*). Составить процедуру вычисления значения целого числа по заданной строке символов, являющейся записью этого числа:

а) в десятичной системе счисления;

б) в шестнадцатеричной системе счисления (шестнадцатеричные цифры – это цифры от 0 до 9 и буквы от A до F).

*) В этой и следующих задачах настоящего параграфа требуется составить отдельные процедуры, не включая их в какие-либо программы. На практике эти процедуры могут оказаться полезными в целом ряде программ.

461. Составить процедуру построения строки символов, являющейся записью заданного действительного числа в десятичной системе счисления; строка должна содержать указанное количество цифр после запятой.

462. Составить процедуру, результатом работы которой является истинное значение, если символ, заданный при обращении к процедуре, – буква, и ложное значение в противном случае.

463. Составить процедуру, результатом работы которой является символ, заданный при обращении к процедуре, если этот

символ не является буквой, и соответствующая строчная (малая) буква в противном случае.

464. Составить процедуру «сжатия» исходной последовательности символов: каждая подпоследовательность, состоящая из нескольких вхождений одного и того же символа, заменяется на текст *x(k)*, где *x* – символ, *k* – строка, являющаяся записью числа вхождений символа *x* в исходную последовательность.

465. Составить процедуру, позволяющую определить позицию самого правого вхождения заданного символа в исходную строку. Если строка не содержит символа, результатом работы процедуры должна быть –1.

466. Составить процедуру, заменяющую в исходной строке символов все единицы нулями и все нули единицами. Замена должна выполняться, начиная с заданной позиции строки.

467. Составить процедуру, в результате обращения к которой из первой заданной строки удаляется каждый символ, принадлежащий и второй заданной строке.

468. Составить процедуру, позволяющую определить позицию первого вхождения в заданную строку какого-либо символа из второй заданной строки. Результатом работы процедуры должна быть –1, если первая строка не содержит ни одного символа, принадлежащего и второй заданной строке.

469. Выравнивание строки заключается в том, что между ее отдельными словами (см. задачу 269) дополнительно вносятся пробелы так, чтобы длина строки стала равной заданной длине (предполагается, что требуемая длина не меньше исходной), а последнее слово строки сдвинулось к ее правому краю. Составить процедуру выравнивания заданной строки текста.

470. При выводе текстов на экран или печатающее устройство часто используются табуляционные остановки – выделенные позиции строки. Например, при печати таблиц полезно зафиксировать положение столбцов таблицы. Если в исходном тексте встречается символ табуляции *tab* (например, символ с кодом 9), это означает, что текст, следующий за символом *tab*, должен печататься со следующей табуляционной остановки, а до нее следует выдавать пробелы. Составить процедуру печати текста с указанной интерпретацией символа *tab* (предположить фиксированный набор табуляционных остановок).

§ 13. Файлы

471. Дан файл f, компоненты которого являются действительными числами. Найти:

а) сумму компонент файла f;

б) произведение компонент файла f;

в) сумму квадратов компонент файла f;

г) модуль суммы и квадрат произведения компонент файла f;

д) последнюю компоненту файла.

472. Дан файл f, компоненты которого являются действительными числами. Найти:

а) наибольшее из значений компонент;

б) наименьшее из значений компонент с четными номерами;

в) наибольшее из значений модулей компонент с нечетными номерами;

г) сумму наибольшего и наименьшего из значений компонент;

д) разность первой и последней компонент файла.

473. Дан файл *f*, компоненты которого являются целыми числами. Найти:

а) количество четных чисел среди компонент;

б) количество удвоенных нечетных чисел среди компонент;

в) количество квадратов нечетных чисел среди компонент.

474. Дано натуральное *n*. Записать в файл *g* целые числа b_1, ..., b_n, определенные так, как указано в заданиях а) - д) задачи 139.

475. Последовательность x_1, x_2, ... образована по закону $x_i = \dfrac{i-0.1}{i^3+|\mathrm{tg}\,2i|}$ (i=1, 2, ...). Дано действительное $\varepsilon > 0$. Записать в файл *h* члены последовательности x_1, x_2, ..., остановившись после первого члена, для которого выполнено $|x_i| < \varepsilon$.

476. Дан символьный файл *)*f*. Получить копию файла в файле *g*.

*) Файл, компоненты которого являются символами, называется символьным файлом.

477. Даны символьные файлы f_1 и f_2. Переписать с сохранением порядка следования компоненты файла f_1 в файл f_2, а компоненты файла f_2 – в файл f_1. Использовать вспомогательный файл h.

478. Даны файлы f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, компоненты которых являются действительными числами. Организовать обмен компонентами между файлами в соответствии со следующей схемой:

$$\begin{array}{ccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f_3 & f_4 & f_5 & f_2 & f_1 \end{array}$$

т. е. компоненты файла f_1 переписываются в файл f_3, компоненты файла f_2 – в f_4 и т. д. Разрешается использовать только один вспомогательный файл h.

479. Дан символьный файл f. В файле f не менее двух компонент. Определить, являются ли два первых символа файла цифрами. Если да, то установить, является ли число, образованное этими цифрами, четным.

480. Дан файл, компоненты которого являются целыми числами. Получить в файле g все компоненты файла f:

а) являющиеся четными числами;

б) делящиеся на 3 и не делящиеся на 7;

в) являющиеся точными квадратами.

481. Дан файл f, компоненты u_0, u_1, …, u_n которого являются последовательными числами Фибоначчи (см. задачу 144). Получить в файле f последовательные числа Фибоначчи u_0, u_1, …, u_{n+1}.

482. Дан символьный файл f. Получить файл g, образованный из файла f заменой всех его прописных (больших) букв одноименными строчными (малыми).

483. Вычислить по схеме Горнера значение многочлена с рациональными коэффициентами для данного рационального значения переменной. Считать, что числители и знаменатели коэффициентов записаны в файле f: вначале числитель и знаменатель старшего коэффициента и т. д., в последнюю очередь числитель и знаменатель свободного члена *).

*) Во многих языках программирования (например, в Паскале) компоненты файла могут быть массивами. В этом случае можно

предполагать, что числители и знаменатели образуют массивы длины 2.

484. Дан файл f, компоненты которого являются целыми числами. Записать в файл g все четные числа файла f, а в файл h – все нечетные. Порядок следования чисел сохраняется.

485. Дан символьный файл f. Записать в файл g компоненты файла f в обратном порядке.

486. Даны символьные файлы f и g. Записать в файл h сначала компоненты файла f, затем – компоненты файла g с сохранением порядка.

487. Дан файл f, компоненты которого являются целыми числами. Получить файл g, образованный из файла f исключением повторных вхождений одного и того же числа.

488. Дан файл f, компоненты которого являются целыми числами. Никакая из компонент файла не равна нулю. Файл f содержит столько же отрицательных чисел, сколько и положительных. Используя вспомогательный файл h, переписать компоненты файла f в файл g так, чтобы в файле g:

а) не было двух соседних чисел с одним знаком;

б) сначала шли положительные, потом отрицательные числа;

в) числа шли в следующем порядке: два положительных, два отрицательных, два положительных, два отрицательных и т. д. (предполагается, что число компонент в файле f делится на 4).

489. Дан файл f, компоненты которого являются целыми числами. Никакая из компонент файла f не равна нулю. Числа в файле идут в следующем порядке: десять положительных, десять отрицательных, десять положительных, десять отрицательных и т. д.

Переписать компоненты файла f в файл g так, чтобы в файле g числа шли в следующем порядке:

а) пять положительных, пять отрицательных, пять положительных, пять отрицательных и т. д.;

б) двадцать положительных, двадцать отрицательных, двадцать положительных, двадцать отрицательных и т. д. (предполагается, что число компонент файла f делится на 40).

490. Дан файл f, компоненты которого являются целыми числами. Число компонент файла делится на 100. Записать в файл g наибольшее значение первых ста компонент файла f, затем – следующих ста компонент и т. д.

491. Из условия предыдущей задачи удаляется предположение о том, что число компонент файла f делится на 100. Если в последней группе окажется менее ста компонент, то последняя компонента файла

g должна быть равна наибольшей из компонент файла f, образующих последнюю (неполную) группу.

492. Дан символьный файл f. Добавить в его конец символы *e*, *n*, *d* (если это необходимо, использовать дополнительный файл *g*).

493. Дан символьный файл *f*.

а) Подсчитать число вхождений в файл сочетаний *ab*.

б) Определить, входит ли в файл сочетание *abcdefgh*.

в) Подсчитать число вхождений в файл каждой из букв *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* и вывести результат в виде таблицы

$$a - N_a \quad b - N_b \quad c - N_c$$
$$d - N_d \quad e - N_e \quad f - N_f$$

где N_a, N_b, N_c, N_d, N_e, N_f – числа вхождений соответствующих букв.

494. Даны символьные файлы *f* и *g*. Определить, совпадают ли компоненты файла *f* с компонентами файла *g*. Если нет, то получить номер первой компоненты, в которой файлы *f* и *g* отличаются между собой. В случае, когда один из файлов имеет *n* компонент ($n \geq 0$) и повторяет начало другого (более длинного) файла, ответом должно быть число $n+1$.

495. Даны символьные файлы *f* и *g*. Записать в файл *h* все начальные совпадающие компоненты файлов *f* и *g*.

496. Дан символьный файл *f*. Записать в файл *g* с сохранением порядка следования те символы файла *f*:

а) которым в этом файле предшествует буква *a*;

б) вслед за которым в этом файле идет буква *a*.

497. Дан символьный файл *f*. Группы символов, разделенные пробелами (одним или несколькими) и не содержащие пробелов внутри себя, будем, как и прежде (см. задачу 269), называть словами.

Удалить из файла все однобуквенные слова и лишние пробелы. Результат записать в файл *g*.

498. Дан символьный файл *f*. Найти самое длинное слово (см. предыдущую задачу) среди слов, вторая буква которых есть *e*; если таких слов с наибольшей длиной несколько, то найти последнее. Если таких слов нет вообще, то сообщить об этом. Решить эту задачу:

а) полагая, что слова состоят не более чем из 10 символов;

б) без ограничения на число символов в слове.

499. Дан символьный файл *f*. Считая, что количество символов в слове (см. задачу 497) не превосходит двадцати:

а) определить, сколько в файле *f* имеется слов, состоящих из одного, двух, трех и т. д. символов;

б) получить гистограмму (столбчатую диаграмму) длин всех слов файла *f*;

в) определить количество слов в файле *f*.

500. Дан символьный файл *f*. Предполагается, что длина одного слова (см. задачу 497) не превосходит десяти и что число слов делится на 100. Подготовить файл для печати слов в две колонки по пятьдесят строк на странице. Слова должны быть размещены в файле f_1 в следующем порядке: 1-е слово, 51-е слово, 2-е слово, 52-е слово, …, 50-е слово, 100-е слово, затем (следующая страница) 101-е слово, 151-е слово, …, 150-е слово, 200-е слово и т. д.

501. Дан символьный файл *f*, содержащий сведения о сотрудниках учреждения, записанные по следующему образцу: фамилия _ имя _ отчество, фамилия _ имя _ отчество, … Записать эти сведения в файле *g*, используя образцы:

а) имя _ отчество _ фамилия, имя _ отчество _ фамилия, …;

б) фамилия _ и.о., фамилия _ и.о., …

502. Дан символьный файл *f*, содержащий произвольный текст длиной более 5000 слов. Слова в тексте разделены пробелами и

знаками препинания. Получить 100 наиболее часто встречающихся слов и число их появлений. Решить задачу:

а) без ограничения на длины слов;

б) предполагая, что любое слово текста состоит не более чем из 16 букв.

503. Даны два символьных файла f_1 и f_2. Файл f_1 содержит произвольный текст. Слова в тексте разделены пробелами и знаками препинания. Файл f_2 содержит не более 40 слов, которые разделены запятыми. Эти слова образуют пары: каждое первое слово считается заменяемым, каждое второе слово - заменяющим. Найти в файле f_1 все заменяемые слова и заменить их на соответствующие заменяющие. Результат поместить в файле *g*.

504. Прямая на плоскости задается уравнением $ax+by+c=0$, где a и b одновременно не равны нулю. Будем рассматривать только

прямые, для которых коэффициенты a, b, c–целые числа. Пусть f – файл, содержащий коэффициенты нескольких прямых (не менее трех). Переписать из файла f в файл g коэффициенты тех прямых, которые

а) параллельны первой из прямых, заданной в файле f;

б) указаны в а), но дополнительно требуется, чтобы все прямые были различны;

в) пересекают первую из прямых, заданных в файле f;

г) указаны в в), но дополнительно требуется, чтобы среди прямых не было параллельных.

505. Условие предыдущей задачи сохраняется. Требуется получить в файле g коэффициенты всех различных прямых файла f.

506. Багаж пассажира характеризуется количеством вещей и общим весом вещей. Дан файл f, содержащий информацию о багаже нескольких пассажиров, информация о багаже каждого отдельного пассажира представляет собой соответствующую пару чисел *).

*) Предполагается, что либо числа каждой пары объединены в записи и компонентами файла являются эти записи (что естественно, например, для языка Паскаль), либо числа занесены в файл по отдельности и чередуются в файле в следующем порядке: целое, действительное, целое, действительное, … (это естественно, например, для языка Бейсик). В задачах 507, 517 это соглашение сохраняется – при работе с языком типа Паскаль информация о каждом отдельном предмете упрятывается в одну компоненту файла, и все компоненты имеют один и тот же тип. Компоненты файла будут массивами или записями, и элементы массива или поля записи могут иметь в свою очередь довольно сложный тип. При работе с Бейсиком простые типы компонент файла будут чередоваться в определенном порядке.

а) Найти багаж, средний вес одной вещи в котором отличается не более чем на 0,3 кг от общего среднего веса вещи.

б) Найти число пассажиров, имеющих более двух вещей и число пассажиров, количество вещей которых превосходит среднее число вещей.

в) Определить, имеются ли два пассажира, багажи которых совпадают по числу вещей и различаются по весу не более чем на 0,5 кг.

г) Выяснить, имеется ли пассажир, багаж которого превышает багаж каждого из остальных пассажиров и по числу вещей, и по весу.

д) Выяснить, имеется ли пассажир, багаж которого состоит из одной вещи весом не менее 30 кг.

е) Дать сведения о багаже, число вещей в котором не меньше, чем в любом другом багаже, а вес вещей не больше, чем в любом другом багаже с этим же числом вещей.

507. Сведения об ученике состоят из его имени и фамилии и названия класса (года обучения и буквы), в котором он учится. Дан файл *f*, содержащий сведения об учениках школы.

а) Выяснить, имеются ли в школе однофамильцы.

б) Выяснить, имеются ли однофамильцы в каких-либо параллельных классах.

в) Выяснить, имеются ли однофамильцы в каком-нибудь классе.

г) Ответить на вопросы а) – в), но в отношении учеников, у которых совпадают и имя, и фамилия.

д) Выяснить, в каких классах насчитывается более 35 учащихся.

е) Выяснить, насколько человек в восьмых классах больше, чем в десятых.

ж) Собрать в файле *g* сведения об учениках 9-х и 10-х классов, поместив вначале сведения об учениках класса 9а, затем 9б и т. д., затем 10а, 10б и т. д.

з) Получить список учеников данного класса по следующим образцам:

фамилия _ имя

фамилия _ и.

и. _ фамилия

508. Дан файл *f,* содержание те же самые сведения об учениках школы, что и в предыдущей задаче, и дополнительно отметки, полученные учениками в последней четверти.

а) Выяснить, сколько учеников школы не имеют отметок ниже четырех.

б) Собрать в файле *g* сведения о лучших учениках школы, т. е. об учениках, не имеющих отметок ниже четырех и по сумме баллов, не уступающих другим ученикам своего и параллельных классов.

509. Сведения об автомобиле состоят из его марки, номера и фамилии владельца. Дан файл *f*, содержащий сведения о нескольких

автомобилях. Найти:

а) фамилии владельцев и номера автомобилей данной марки;

б) количество автомобилей каждой марки.

510. Дан файл *f*, содержащий различные даты. Каждая дата - это число, месяц и год. Найти:

а) год с наименьшим номером;

б) все весенние даты;

в) самую позднюю дату.

511. Дан файл *f*, содержащий сведения о книгах. Сведения о каждой из книг - это фамилия автора, название и год издания.

а) Найти название книг данного автора, изданных с 1960 г.

б) Определить, имеется ли книга с названием «Информатика».

Если да, то сообщить фамилию автора и год издания. Если таких книг несколько, то сообщить имеющиеся сведения обо всех этих книгах.

512. Дан файл f_1, который содержит номера телефонов сотрудников учреждения: указывается фамилия, его инициалы и номер телефона. Найти телефон сотрудника по его фамилии и инициалам.

513. Дан файл f, содержащий сведения о кубиках: размер каждого кубика (длина ребра в сантиметрах), его цвет (красный, желтый, зеленый или синий) и материал (деревянный, металлический, картонный). Найти:

а) количество кубиков каждого из перечисленных цветов и их суммарный объем;

б) количество деревянных кубиков с ребром 3 см и количество металлических кубиков с ребром, большим 5 см.

514. Дан файл f, содержащий сведения о веществах: указывается название вещества, его удельный вес и проводимость (проводника, полупроводник, изолятор).

а) Найти удельные веса и названия всех полупроводников.

б) Выбрать данные о проводниках и упорядочить их по убыванию удельных весов.

515. Дан файл f, содержащий сведения об экспортируемых товарах: указывается наименование товара, страна, импортирующая товар, и объем поставляемой партии в штуках. Найти страны, в которые экспортируется данный товар, и общий объем его экспорта.

516. Даны два файла f_1 и f_2. Файл f_1 - это инвентарный файл, содержащий сведения о том, сколько изделий каких видов продукции хранится на складе (вид продукции задается его порядковым номером). Файл f_2 - это вспомогательный файл, содержащий сведения о том, на сколько уменьшилось или увеличилось количество изделий по некоторым видам продукции. Вспомогательный файл может содержать несколько сообщений по продукции одного вида или не содержать ни одного такого сообщения. Обновить инвентарный файл на основе вспомогательного, образовав новый файл g.

517. Дан файл *f*, содержащий сведения об игрушках: указывается название игрушки (например, кукла, кубики, мяч, конструктор и т. д.), ее стоимость в копейках и возрастные границы детей, для которых игрушка предназначена (например, для детей от двух до пяти лет). Получить следующие сведения:

а) названия игрушек, цена которых не превышает 4 руб. и которые подходят детям 5 лет;

б) цену самого дорогого конструктора, оформленную по образцу … руб. …коп.;

в) названия наиболее дорогих игрушек (цена которых отличается от цены самой дорогой игрушки не более чем на 1 руб.);

г) названия игрушек, которые подходят как детям 4 лет, так и детям 10 лет;

д) цены всех кубиков, оформленные по образцу, указанному в б);

е) можно ли подобрать игрушку, любую, кроме мяча, подходящую ребенку 3 лет, и дополнительно мяч так, чтобы суммарная стоимость игрушек не превосходила 5 руб.?;

ж) имеется ли мяч ценой 2 руб. 50 коп., предназначенный детям от 3 до 8 лет?; если нет, занести сведения об этой игрушке в файл *f*.

518. Даны натуральное *k*, символьный файл *f* и текстовый файл f_1 *). Файл *f* содержит 30 слов (см. задачу 497), каждое из которых будем называть ключевым. Сформировать файл *g*, который содержит строки файла f_1, циклически сдвинутые так, чтобы каждое ключевое слово, входящее в строку, начиналось с *k*-й позиции. Строки, не содержащие ключевых слов, в файл *g* не включаются. Строки, которые содержат *n* ключевых слов, записываются в файл *g* *n* раз.

*) Текстовым называется файл, компоненты которого являются строками. Будем предполагать, что строки имеют произвольную

длину, не превосходящую некоторого оговоренного числа символов, например 255.

519. Дан текстовый файл *f*, содержащий программу на языке Паскаль. Проверить эту программу на несоответствие числа открывающих и закрывающих круглых скобок. Считать, что каждый оператор программы

а) занимает не более одной строки файла *f*;

б) может занимать произвольное число строк файла *f*.

520. Дан текстовый файл *f*. Получить все его строки, содержащие более 60 символов.

521. Дан текстовый файл *f*. Переписать в файл *g* все компоненты файла *f* с заменой в них символа 0 на символ 1 и наоборот.

522. Дан текстовый файл *f*. Получить самую длинную строку файла. Если в файле имеется несколько строк с наибольшей длиной, то получить одну из них.

523. Дан текстовый файл *f*. Записать в перевернутом виде строки файла *f* в файл *g*. Порядок строк в файле *g* должен

а) совпадать с порядком исходных строк в файле *f*;

б) быть обратным по отношению к порядку строк исходного файла.

524. Дан текстовый файл *f*. Переписать компоненты файла *f* в файл *g*, вставляя в начало каждой строки по одному пробелу. Порядок компонент должен быть сохранен.

525. Даны текстовый файл, строка *s*. Получить все строки файла *f*, содержащие в качестве фрагмента строку *s*.

526. Дан текстовый файл *f*. Исключить пробелы, стоящие в концах его строк. Результат поместить в файл f_1.

527. Даны два текстовых файла *f* и *g*. Определить, совпадают ли компоненты файла *f* с компонентами файла *g*. Если нет, то получить номер первой строки и позицию первого символа в этой строке, в

которых файлы *f* и *g* отличаются между собой. Принять во внимание уточнение к задаче 494.

528. Дан файл *f*, компоненты которого являются натуральными числами. Количество чисел в файле кратно 4. Первые два числа из каждых четырех задают координаты левого верхнего угла прямоугольника, следующие два числа – координаты его правого нижнего угла. Построить прямоугольники, заданные в файле *f*.

529. Дан текстовый файл *f*. Каждая строка файла несколько натуральных чисел в их символьном представлении. Числа разделяются запятыми или пробелами и определяют вид некоторой геометрической фигуры, ее размеры и положение на экране. Приняты следующие соглашения:

1) отрезок прямой задается координатами своих концов, имеет номер 1;

2) прямоугольник задается координатами левого верхнего и правого нижнего угла, имеет номер 2;

3) окружность задается координатами центра и радиусом, имеет номер 3;

4) ломаная задается количеством ее вершин, их координатами и имеет номер 4. Так, например, строка 1, 10, 10, 30, 30 определяет отрезок прямой с координатами концов (10, 10) и (30, 30), а строка 3, 100, 100, 50 - окружность с центром в точке (100, 100) и радиусом 50.

а) Построить на экране все геометрические фигуры, заданные в файле *f*.

б) Разработать способ создания более широкого набора фигур по сравнению с указанным и выполнить пункт а).

530. Дан файл *f*, компоненты которого являются натуральными числами. Число компонент файла кратно четырем. Каждые две последовательные компоненты определяют координаты двух точек.

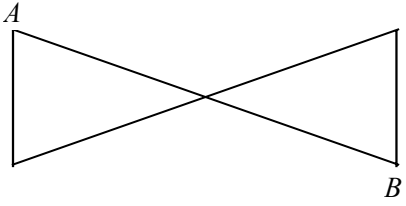


Рис. 24

а) Считая, что заданы координаты концов отрезков, построить все такие отрезки.

б) Считая, что заданы координаты противоположных углов прямоугольника, построить все такие прямоугольники.

в) Считая, что заданы вершины *A* и *B* фигуры, представленной на рис. 24, построить все такие фигуры.

г) Считая, что заданы координаты центра окружности и одной из ее точек, построить все такие окружности.

§14. Вычисления с хранением последовательностей, число членов которых зависит от исходных данных *)

*) В некоторых языках программирования допускаются массивы с динамическими границами, и это снимает многие трудности в решении задач; в этом случае настоящий параграф продолжает § 9. В Паскале же, например, где такие массивы не допускаются, естественно использовать списки. Возможный вид этих списков указан в задачах 531-534. Для работы со списками полезны процедуры вставки элемента в начало списка, вставки элемента в конец списка, удаление элемента и т. д. (эти процедуры отдельно рассмотрены в §36). Для решения задач этого параграфа можно использовать и файлы, но это резко увеличивает время выполнения программы и имеет смысл в том случае, когда все исходные данные не помещаются в памяти вычислительной машины.

531. Даны натуральное число n, действительные числа $x_1,...,x_n (n \geq 2)$. Получить последовательность

$x_1 - x_n,\ x_2 - x_n,\ ...,\ x_{n-1} - x_n$.

Для решения этой задачи полезен список, изображенный на рис. 25.

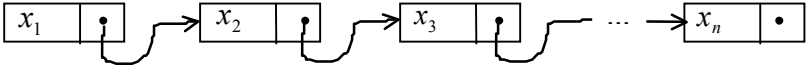


Рис. 25

532. Даны натуральное число n, действительны числа $a_1, ..., a_n$. Если последовательность $a_1, ..., a_n$ упорядочена по неубыванию (т. е. если $a_1 \leq a_2 \leq. ... \leq a_n$),то оставить ее без изменения. Иначе получить последовательность a_n, ..., a_1.

Для решения этой задачи полезен список, изображенный на рис. 26.

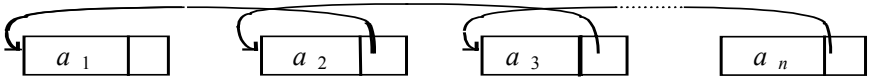


Рис. 26

533. Даны натуральное число n, действительные числа $x_1, ..., x_n$. Вычислить:

а) $x_1x_n + x_2x_{n-1} + ... + x_nx_1$;

б) $(x_1 + x_n)(x_2 + x_{n-1})...(x_n + x_1)$;

в) $(x_1 + x_2 + 2x_n)(x_2 + x_3 + 2x_{n-1})...(x_{n-1} + x_n + 2x_2)$.

Для решения этой задачи полезен список, изображенный на рис. 27.

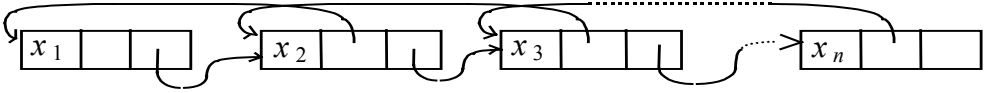


Рис. 27

534. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, ..., a_{2n}$. Получить:

а) $(a_1 - a_{2n})(a_3 - a_{2n-2})(a_5 - a_{2n-4})...(a_{2n-1} - a_2)$;

б) $a_1a_{2n} + a_2a_{2n-1} + ... + a_na_{n+1}$;

в) $\min(a_1 + a_{n+1}, a_2 + a_{n+2}, a_n + a_{2n})$;

г) $\max(\min(a_1, a_{2n}), \min(a_2, a_{2n-1}), ..., \min(a_n, a_{n+1}))$.

535. Пусть $a_1 = 1$; $a_2 = 1.5$; $a_i = a_{[i/2]}a_{[i/3]}+1$ ($i = 3, 4, ...$). Дано натуральное m. Получить a_m.

536. Даны натуральное число n, целые числа $a_1, ..., a_n$. Выяснить, имеются ли среди чисел $a_1, ..., a_n$ совпадающие.

537. Даны натуральное число n, целые числа $a_1, ..., a_{3n}$. Выяснить, верно ли, что для всех $a_{2n+1}, ..., a_{3n}$ имеются равные среди $a_1, ..., a_{2n}$.

538. Даны натуральное число n, действительные числа $r_1, ..., r_n$

Получить последовательность:

а) $r_1, ..., r_n, r_1, ..., r_n$;

б) $r_1, ..., r_n, r_n, ..., r_1$;

в) $r_n, ..., r_1, r_1, ..., r_n$.

539. Даны натуральное число n, целые числа $a_1, ..., a_n$. Требуется получить последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_k, y_k$, где $x_1, ..., x_m$ – взятые в порядке следования четные члены последовательности $a_1, ..., a_n$, а $y_1, ..., y_l$ – нечетные члены, $k = \min(m, l)$.

540. Даны натуральное число n, целые числа $a_1, ..., a_{2n}$. Выяснить, верно ли, что для $i = 1, 2, ..., n$ выполнено:

а) $a_i = -a_{n+i}$;

б) $a_i = 2a_{n-i} + a_{2n-i+1}$;

в) $a_i + a_{2n-i+1} > 17$;

г) $a_{2n-i+1} < a_i \le a_{2n-i}$.

541. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, ..., a_n$. Преобразовать последовательность $a_1, ..., a_n$, расположив вначале отрицательные члены, а затем – неотрицательные. При этом:

а) порядок как отрицательных, так и неотрицательных чисел сохраняется прежним;

б) порядок отрицательных чисел изменяется на обратный, а порядок неотрицательных сохраняется прежним;

в) порядок отрицательных чисел сохраняется прежним, а порядок неотрицательных изменяется на обратный;

г) порядок тех и других чисел изменяется на обратный.

542. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, ..., a_n$. Вычислить $\min\limits_{1 \le i \le n} |a_i - \tilde{a}|$, где $\tilde{a}$ – среднее арифметическое чисел $a_1, ..., a_n$.

543. Даны натуральное число n, действительные числа $x_1, ..., x_n$, $p_1, ..., p_n$.

Последовательности $x_1, ..., x_n$ и $p_1, ..., p_n$ определяют систему n материальных точек на прямой: x_i – координата, p_i – вес i-й точки ($i = 1, 2, 3, ..., n$). Указать номер точки, наиболее близко расположенной к центру тяжести системы. Если таких точек несколько, то взять любую из них.

544. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, ..., a_n$. Если в последовательности $a_1, ..., a_n$ есть хотя бы один член, меньший, чем – 3, то все неотрицательные члены заменить их квадратами, оставив остальные члены без изменения; в противном случае домножить все члены на 0.1.

545. «Считалка». Даны натуральные n, m. Предполагается, что n человек встают в круг и получают номера, считая против часовой

стрелки, 1, 2, ..., *n*. Затем, начиная с первого, также против часовой стрелки отсчитывается *m*-й человек (поскольку люди стоят по кругу, то за *n*–м человеком стоит первый). Этот человек выходит из круга, после чего, начиная со следующего, снова отсчитывается *m*-й человек и так до тех пор, пока из всего круга не остается один человек. Определить его номер.

Для решения этой задачи полезен список, соединенный в кольцо так, как показано на рис. 28.

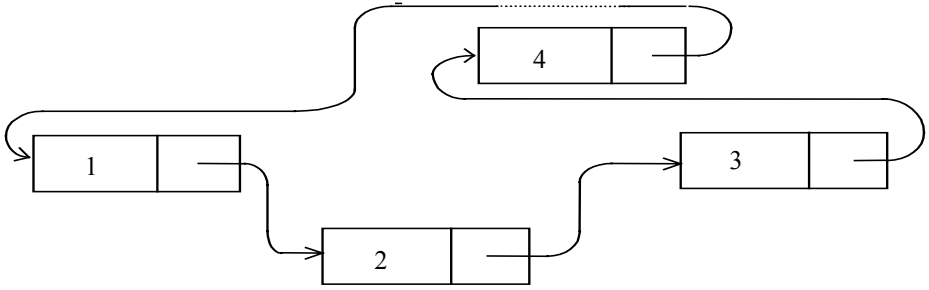


Рис. 28

546. Даны натуральные числа n, m, символы s_1, ..., s_n ($m < n$). Получить последовательность символов:

а) s_{m+1}, s_{m+2}, ..., s_n, s_1, ..., s_m;

б) s_{m+1}, s_{m+2}, ..., s_n, s_m, ..., s_1;

в) s_n, s_{n-1}, ..., s_{m+1}, s_1, ..., s_m .

547. Даны натуральное число n, символы s_1, ..., s_n. Известно, что в последовательность s_1, ..., s_n входит по крайней мере один пробел. Пусть m таково, что s_m – это первый по порядку пробел, входящий в s_1, ..., s_n (m заранее неизвестно). Выполнить преобразования а), б), в), сформулированные в предыдущей задаче.

548. Даны натуральное число n, символы s_1, ..., s_n. Получить те символы, принадлежащие последовательности s_1, ..., s_n, которые входят в эту последовательность по одному разу.

549. Даны натуральное число n, символы s_1, ..., s_n. Получить последовательность символов, содержащую только последние вхождения каждого символа с сохранением взаимного порядка этих вхождений.

550. Даны натуральные числа k, m, l, символы s_1, ..., s_k, t_1, ..., t_m, u_1, ..., u_l. Получить по одному разу те символы, которые входят одновременно во все три последовательности.

551. Даны натуральное число n, символы s_1, ..., s_n. Будем рассматривать слова, образованные входящими в последовательность s_1, ..., s_n символами (см. задачу 269). Ниже описываются преобразования, каждое из которых следует произвести при выполнении указанного условия. Затем последовательность вне зависимости от того, подвергалась она или нет преобразованию, должна быть отредактирована следующим образом. Должны быть

удалены группы пробелов, которыми начинается и заканчивается последовательность, а каждая внутренняя группа пробелов должна быть заменена одним пробелом.

Преобразования:

а) если общее количество слов больше единицы и нечетно, то удалить первое слово;

б) если последнее слово начинается буквой *a* и общее число слов больше единицы, то переставить последнее слово в начало последовательности, отделив его пробелом от s_1;

в) если первое и последние слова совпадают и общее число слов больше единицы, то удалить первое и последнее слова, а оставшиеся символы переставить в обратном порядке.

552. Даны символы s_1, s_2, ... Известно, что символ s_i отличен от точки и что среди s_2, s_3, ... имеется хотя бы одна точка. Пусть s_1, ..., s_n

– символы, предшествующие первой точке (n заранее неизвестно). Получить:

а) последовательность s_n, s_{n-1}, ..., s_1;

б) последовательность s_1, s_3, ..., s_n, если n – нечетное, и последовательность s_2, s_4, ..., s_n, если n – четное.

553. Если требуется хранение последовательности, число членов которой ограничено сверху некоторым известным числом N, то можно использовать для хранения последовательности массив с N элементами, занимая, таким образом, память вычислительной машины с некоторым запасом. Это позволяет обойтись без списков.

а) Вернуться к задаче 531, считая, что $n \le 1000$.

б) Вернуться к задаче 532, считая, что $n \le 1500$.

в) Вернуться к задаче 550, считая, что $k \le 1000$, $m \le 1000$, $l \le 100$.

г) Вернуться к задаче 550, считая, что $k + m + l \leq 2000$.

Следует иметь в виду, что если используется несколько таких массивов, то суммарный излишек занятой памяти может оказаться слишком большим для того, чтобы можно было воспользоваться этим приемом.

ГЛАВА II

ЗАДАЧИ ПО ТЕМАМ

§ 15. Целые числа.

554. Дано натуральное число n. Получить все пифагоровы тройки натуральных чисел, каждое из которых не превосходит n, т. е. все такие тройки натуральных чисел a, b, c, что $a^2 + b^2 = c^2$ $(a \le b \le c \le n)$.

555. Треугольником Паскаля называется числовой треугольник

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

в котором по краям стоят единицы, а каждое число внутри равно сумме двух стоящих над ним в ближайшей строке сверху.

Дано натуральное n. Получить первые n строк треугольника Паскаля.

556. Для чисел Фибоначчи $u_0, u_1, \ldots$ (см. задачу 144) справедлива формула Бине

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k, \ k = 0, 1, \ldots.$$

Так как $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, то для больших k выполнено приближенное равенство

$$u_k \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

Вычислить и округлить до целого все числа $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$

(k = 0, 1, ..., 15). Вычислить $u_0, u_1, ..., u_{15}$ по формулам

$u_0 = 0; u_1 = 1; u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$ (k = 2, 3, …) и сравнить результаты.

557. Дано натуральное число n ($n \geq 2$). Найти все меньшие n простые числа, используя решето Эратосфена. Решетом Эратосфена называют следующий способ. Выпишем подряд все целые числа от 2 до n. Первое простое число 2. Подчеркнем его, а все большие числа, кратные 2, зачеркнем. Первое из оставшихся чисел 3. Подчеркнём, его как простое, а все большие числа, кратные 3, зачеркнем. Первое число из оставшихся теперь 5, так как 4 уже зачеркнуто. Подчеркнем его как простое, а все большие числа, кратные 5, зачеркнем и т. д.:

$$\underline{3},\cancel{4},\underline{5},\cancel{6},\underline{7},\cancel{8},\cancel{9},\cancel{10},$$

558. Дано натуральное число n. С помощью решета Эратосфена (см. предыдущую задачу) найти четверки меньших n простых чисел, принадлежащих одному десятку (например, 11, 13, 17, 19).

559. Дано натуральное число n. Найти все меньшие n числа Мерсена. (Простое число называется числом Мерсена, если оно может быть представлено в виде $2^p - 1$, где p – тоже простое число.)

560. Два натуральных числа называют дружественными, если каждое из них равно сумме всех делителей другого, кроме самого этого числа. Найти все пары дружественных чисел, лежащих в диапазоне от 200 до 300.

561. Дано натуральное число n. Среди чисел 1, ..., n найти все такие, запись которых совпадает с последними цифрами записи их квадрата (как, например, $6^2 = 36$, $25^2 = 625$ и т. д.).

562. Натуральное число из n цифр является числом Армстронга, если сумма его цифр, возведенных в n-ю степень, равна самому числу

(как, например, $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$). Получить все числа Армстронга, состоящие из двух, трех и четырех цифр.

563. Назовем натуральное число палиндромом, если его запись читается одинаково с начала и с конца (как, например, 4884, 393, 1).

а) Найти все меньшие 100 натуральные числа, которые при возведении в квадрат дают палиндром.

б) Найти все меньшие 100 числа – палиндромы, которые при возведении в квадрат также дают палиндромы.

564. Рассмотрим некоторое натуральное число n. Если это не палиндром, то изменим порядок его цифр на обратный и сложим исходное число с получившимся. Если сумма не палиндром, то над ней повторяется то же действие и т. д., пока не получится палиндром. До настоящего времени неизвестно, завершается ли этот процесс для любого натурального n.

Даны натуральные числа k, l, m ($k \leq l$). Проверить, верно ли, что для любого натурального числа из диапазона от k до l процесс завершается не позднее, чем после m таких действий.

565. Рассмотрим некоторое натуральное число n ($n > 1$). Если оно четно, то разделим его на 2, иначе умножим на 3 и прибавим 1. Если полученное число не равно 1, то повторяется то же действие и т. д., пока не получится 1. До настоящего времени неизвестно, завершается ли этот процесс для любого $n > 1$.

Даны натуральные числа k, l, m ($1 < k \leq l$). Проверить, верно ли, что для любого натурального n из диапазона от k до l процесс завершается не позднее, чем после m таких действий.

566. Найти все простые несократимые дроби, заключенные между 0 и 1, знаменатели которых не превышают 7 (дробь задается двумя натуральными числами – числителем и знаменателем).

567. Дано натуральное число n. Выяснить, можно ли представить $n!$ в виде произведения трех последовательных целых чисел.

568. Дано натуральное число m. Вставить между некоторыми цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 записанными именно в таком порядке, знаки +, – так, чтобы значением получившегося выражения было число m. Например, если m=122, то подойдет следующая расстановка знаков: 12 + 34 – 5 – 6 + 78 + 9. Если требуемая расстановка знаков невозможна, то сообщить об этом.

569. Дано натуральное число n. Получить в порядке возрастания n первых натуральных чисел, которые не делятся ни на какие простые числа, кроме 2, 3 и 5.

570. Алгоритм Евклида (см. задачу 89) допускает многочисленные обобщения. Например, вместе с *НОД* (f, g) можно вычислять целые u и v такие, что $fu + gv$ = НОД (f, g). Это дает

возможность находить некоторое целочисленное решение уравнения вида $kx + ly = m$, где k, l, m – целые числа такие, что k и l одновременно не равны 0, а m делится на d = НОД($|k|$, $|l|$). Пусть $|k|u + |l|v = d$; тогда $|k|um/d + |l|vm/d = m$ и, как следствие этого, $k(c_1um/d) + l(c_2vm/d) = m$, где $c_j = \pm 1$ (j = 1, 2). Укажем алгоритм нахождения целых чисел u и v, удовлетворяющих $fu+gv$=НОД(f, g). Обозначим временно f через f_0 и g через f_1. Получаемые в процессе применения алгоритма Евклида ненулевые остатки обозначим через f_2, …, f_n, частные от деления f_0 на f_1, f_1 на f_2, ..., f_{n-1} на f_n – через a_1, a_2, ..., a_n:

$$
\begin{aligned}
&f_0 = a_1 f_1 + f_2,\\
&f_1 = a_2 f_2 + f_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&f_{n-2} = a_{n-1} f_{n-1} + f_n,\\
&f_{n-1} = a_n f_n;
\end{aligned}
$$

здесь НОД(f_0, f_1) = f_n. Пусть для некоторого $i \le n-2$ вместе с числами f_i, f_{i+1} известны соответствующие им множители p, q, s, t такие, что $f_0p + f_1q = f_i$, $f_0s + f_1t = f_{i+1}$. Тогда, разделив f_i на f_{i+1} и получив частное a_{i+1}, и остаток f_{i+2}, мы можем вычислить множители, соответствующие f_{i+2}: так как $f_i - a_{i+1}f_{i+1} = f_{i+2}$, то $f_0(pa_{i+1}s) + f_1(q - a_{i+1}t) = f_{i+2}$.

Таким образом, для нахождения целых u и v таких, что $fu + gv$ = НОД(f, g), надо применять к f и g алгоритм Евклида, рассматривая на каждом шаге его применения, кроме тех двух чисел, которые рассматривались и прежде, еще и соответствующие этим числам множители p, q и s, t. На первом шаге в качестве множителей, соответствующих исходным числам f и g берутся 1,0 и 0,1. Выполнив деление и получив частное a и некоторый остаток, надо, если остаток не равен 0, вычислить по формулам $p - as$, $q - at$ множители, соответствующие полученному остатку. Множители, соответствующие

последнему ненулевому остатку, дадут решение рассматриваемого уравнения $fu + gv =$ НОД(f, g).

а) Даны одновременно не равные 0 целые f и g. Найти НОД$(|f|, |g|)$ и целые u и v, такие, что $fu + gv =$ НОД$(|f|, |g|)$.

б) Даны целые k, l, m такие, что k и l одновременно не равны 0, а m делится на НОД$(|k|, |l|)$. Найти какое-нибудь целочисленное решение уравнения $kx + ly = m$.

в) Заметим, что предложенный выше алгоритм поиска множителей u и v можно изменить так, что число требуемых им операций сократится почти в полтора раза: из двух чисел u и v достаточно вычислить вместо НОД(f, g) только v, а затем определить u по формуле $u =$ (НОД$(f, g) - gv)/f$. Внести это усовершенствование в программы, дающие решения заданий а), б).

571. Показать, что если x_1, y_1 и x_2, y_2 – два целочисленных решения уравнения $kx + ly = m$, то $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$ – целочисленное

решение уравнения $kx + ly = 0$. Вывести отсюда, что если $\bar{x}, \bar{y}$ – какое-нибудь целочисленное решение уравнения $kx + ly = m$, то все целочисленные решения этого уравнения описываются формулами $x = \bar{x} + l't,\ y = \bar{y} - k't$, где $k' = k/\text{НОД}(k, l)$, $l' = l/\text{НОД}(k, l)$ $t = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Написать программу, которая позволяет проверить, обладает ли уравнение $kx + ly = m$ решением в целых неотрицательных числах, и если обладает, то позволяет построить какое-то одно такое решение.

572. Даны натуральное число k, одновременно не равные 0 целые числа $n_1, \ldots, n_k$. Найти НОД($|n_1|, \ldots, |n_k|$) и целые $u_1, \ldots, u_k$ такие, что $u_1n_1 + \ldots + u_kn_k$ = НОД($|n_1|, \ldots, |n_k|$) (см. задачу 333).

573. Даны натуральные взаимно простые числа n, p. Используя алгоритм, описанный в задаче 570а, найти натуральное m такое, что, во-первых, $m < p$ и, во-вторых -nm при делении на p дает остаток 1.

574. Известная в теории чисел китайская теорема об остатках утверждает следующее. Пусть $p_1, \ldots, p_r$ – попарно взаимно простые натуральные числа; пусть $v = p_1 \ldots p_r$. Пусть $a_1, \ldots, a_r$, – такие целые неотрицательные числа, что $a_1 < p_1, \ldots, a_r < p_r$. Тогда существует ровно одно целое неотрицательное $u < v$, которое при делении на p_1, дает остаток a_1, при делении на p_2, дает остаток $a_2, \ldots$, при делении на p_r, дает остаток a_r. (Процесс восстановления числа по его остаткам был известен в Китае уже около 2000 лет назад, поэтому теорема и имеет такое название.) Если даны $p_1, \ldots, p_r, a_1, \ldots, a_r$ то на основании этой теоремы число u может быть найдено последовательной проверкой чисел $0, 1, \ldots, v - 1$. Однако есть алгоритм значительно более быстрого решения этой задачи, который мы сформулируем без доказательства (имеет смысл попытаться самостоятельно найти доказательство).

Обозначим через v_i $(1 \le i \le r)$ произведение всех $p_i, \ldots, p_r$ кроме p_i, т.е. $v_i = p_1 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_r = v/p_i$. Пусть числа w_i $(1 \le i \le r)$ таковы, что

$1 \le w_i < p_i$ и $v_i w_i$ при делении на p_i дает остаток 1 (см. предыдущую задачу). Тогда можно положить u равным остатку от деления $v_1w_1a_1 + \ldots + v_rw_ra_r$ на v. Например, если p_1, p_2, p_3, p_4 равно соответственно 2, 3, 5, 7, а a_1, a_2, a_3, a_4 равны соответственно 1, 2, 4, 3, то получится $u = 59$. Проверка показывает, что u удовлетворяет условию задачи: $59 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$,

$59 = 2 \cdot 29 + 1 = 3 \cdot 19 + 2 = 5 \cdot 11 + 4 = 7 \cdot 8 + 3$.

Даны натуральные числа r, $p_1, \ldots, p_r$, целые неотрицательные числа $a_1, \ldots, a_r$, ($p_1, \ldots, p_r$ – попарно взаимно простые, $a_1 < p_1, \ldots, a_r < p_r$). Найти u, удовлетворяющие сформулированным выше условиям.

575. Цепной дробью (конечной) называется выражение

$$\cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\dots \cfrac{1}{b_k}}}}$$

где $b_1, \dots, b_k$ – натуральные числа. Для цепной дроби такого вида используют краткую запись $[b_1, b_2, \dots, b_k]$. Каждое положительное, меньшее единицы рациональное число s/t можно представить цепной дробью. Пусть s, t – натуральные числа ($s < t$). После деления t на s с остатком получается, что $t = as + r$, $(a > 0, \quad 0 \le r < s)$, откуда

$$\frac{s}{t} = \frac{1}{t/s} = \frac{1}{a + r/s}.$$

Полагаем $b_1 = a$, затем этим же способом преобразуем r/s и получаем b_2, и т.д. Видно, что $b_1, \dots, b_k$ – это последовательность частных, возникающих в процессе применения к s и t алгоритма Евклида (см.

задачу 89). Итак, пусть $s/t = [b_1, \ldots, b_k]$. Дополнительно рассмотрим цепные дроби $[b_1]$, $[b_1, b_2]$, ..., $[b_1, \ldots, b_{k-1}]$, значения которых называются подходящими дробями числа s/t. Обозначим несократимые формы подходящих дробей через p_1/q_1, ..., p_{k-1}/q_{k-1}. Подходящие дроби обладают следующими важными свойствами:

1) $\left|\frac{s}{t} - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i^2}$, $i = 1, \ldots, k-1$;

2) если для некоторой дроби u/v и подходящей дроби $\frac{p_i}{q_i}$ выполнено

$$\left|\frac{s}{t} - \frac{u}{v}\right| < \left|\frac{s}{t} - \frac{p_i}{q_i}\right|,$$

то $v > q_i$.

Свойства 1), 2) используются в решении разнообразных практических задач, требующих подбора для данного рационального

числа хорошего приближения в виде дроби со сравнительно небольшим знаменателем. Примером может служить задача расчета зубчатой передачи, состоящей из двух шестерен. Передаточное число должно быть близко к заданному значению, и при этом число зубьев каждой из шестерен не может превышать некоторой указанной границы. Для решения такого рода задач полезны следующие соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей:

$p_1=1;\ \ p_2 = b_2;\ \ p_n = b_n p_{n-1} + p_{n-2},\qquad n = 3, 4, ..., k-1$

$q_1=b_1;\ \ q_2 = b_1 b_2+1;\ \ q_n = b_n q_{n-1}+q_{n-2},\ \ n = 3, 4, \ldots k-1$ *).

*) Доказательство этих соотношений и свойств 1), 2) можно найти, например, в книге [50].

Написать программы выполнения следующих заданий. Даны натуральные s, t ($s < t$)

а) Получить все подходящие дроби числа s/t (указать их числители и знаменатели).

б) Считая, что дополнительно дано натуральное k, выяснить, существуют ли такие подходящие дроби числа s/t, числители и знаменатели которых меньше k. Если такие подходящие дроби существуют, то построить последнюю по порядку (указать ее числитель и знаменатель), а также указать модуль разности числа r/s и найденной подходящей дроби.

576. Даны натуральные числа $a_1,\ldots, a_{10}$. Предположим, что имеются 10 гирь весом $a_1,\ldots, a_{10}$. Обозначим через c_k число способов, которыми можно составить вес k, т.е. c_k – это число решений уравнения $a_1x_1+\ldots+a_{10}x_{10} = k$, где x_i может принимать значение 0 или 1 ($i = 1,\ldots, 10$). Получить $c_0,\ldots, c_{10}$.

577. Даны натуральные числа $a_1,\ldots, a_{10}$. Предположим, что имеются 10 видов монет достоинством $a_1,\ldots, a_{10}$. Обозначим через b_k число способов, которыми можно выплатить сумму k, т.е. b_k –это число

решений уравнения $a_1x_1+\ldots+a_{10}x_{10}=k$, где x_i может принимать целые неотрицательные значения. Получить $b_0,\ldots, b_{20}$.

578. Дано натуральное число n. Как наименьшим количеством монет можно выплатить n копеек? Предполагается, что в достаточно большом количестве имеются монеты достоинством в 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 и 50 коп.

579. Дано натуральное число n ($n\geq 5$). Получить все пятерки натуральных чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 такие, что $x_1\geq x_2\geq x_3\geq x_4\geq x_5$ и $x_1+\ldots+x_5=n$.

580. Дано натуральное число n ($n\leq 99$). Получить все способы выплаты суммы n с помощью монет достоинством 1, 5, 10 и 20 коп.

§ 16. Системы счисления

581.Получить последовательность d_k, d_{k-1}, …,d_0 десятичных цифр числа 2^{200}, т.е. такую целочисленную последовательность, в которой каждый член d_i удовлетворяет условию $0 \le d_i \le 9$ и, дополнительно, $d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + d_0 = 2^{200}$.

582. Получить последовательность d_{-1}, d_{-2}, …, d_{-k} десятичных цифр числа 2^{-200}, т.е. такую целочисленную последовательность, в которой каждый член d_i удовлетворяет условию $0 \le d_i \le 9$ и, дополнительно, $d_{-1} \cdot 10^{-1} + d_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots + d_{-k} \cdot 10^{-k} = 2^{-200}$.

583. Получить последовательность d_k, d_{k-1}, …, d_0 десятичных цифр числа 100!, т.е. такую целочисленную последовательность, в которой каждый член d_i удовлетворяет условию $0 \le d_i \le 9$ и, дополнительно, $d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + d_0 = 100!$.

584. Получить последовательность d_k, d_{k-1}, …, d_0 десятичных цифр числа:

a) $100!+2^{100}$;

b) $100!-2^{100}$,

т.е. получить такую целочисленную последовательность, в которой каждый член d_i удовлетворяет условию $0 \le d_i \le 9$ и, дополнительно, $d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + d_0$ равно $100!+2^{100}$ или соответственно $100!-2^{100}$.

585. Дано натуральное число p. Получить двоичное представление числа p в виде последовательности $a_0,\ldots, a_n$ нулей и единиц такой, что $p = a_n \cdot 2^n + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0$ ($a_n \neq 0$).

586. Даны натуральные числа p и q ($q \geq 2$). Получить q-ичное представление числа p в виде такой последовательности $a_0,\ldots, a_n$ целых неотрицательных чисел что $a_i < q$ ($i=0,\ldots, n$) и $p=a_n q^n+\ldots+ a_1 q+a_0$ ($a_n \neq 0$)

587. Даны действительное число x и натуральное число q ($0 \le x < 1$, $q \ge 2$). Получить пять цифр q-ичного представления числа x, т.е. получить последовательность целых неотрицательных $a_{-1},\ldots, a_{-5}$ такую, что $x = a_{-1} q^{-1} + \ldots + a_{-5} q^{-5} + r$, $0 \le a_i \le q-1$, $r < q^{-5}$.

588. Дано натуральное число p. Получить последовательность $a_0,\ldots a_n$, каждый член которой равен –1, 0 или 1, такую что $p = a_n \cdot 3^n + \ldots + a_1 \cdot 3 + a_0$ ($a_n \neq 0$).

589. Даны натуральное число n, целые числа $a_0,\ldots, a_n$, такие, что каждое a_i равно нулю или единице и $a_n \neq 0$. Последовательность $a_0,\ldots, a_n$ задает двоичное представление некоторого целого числа $p = a_n \cdot 2^n + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0$. Получить последовательность нулей и единиц, задающую двоичное представление:

a) числа $p+1$;

b) числа $p-1$;

c) числа $3p$.

590. Получить все меньшие 10^6 натуральные числа, которые являются палиндромами (см. задачу 563) как в десятичной так и в двоичной системах.

591. Дано натуральное число m. Найти такое натуральное n, что двоичная запись n получается из двоичной записи m изменением порядка цифр на обратный (m задано в десятичной системе, и n надо также получить в десятичной системе, например, для m=6 получается n=3).

592. Дано натуральное число n. Требуется получить последовательность, которая состоит из нулей и семерок и образует десятичную запись некоторого натурального числа, делящегося на n.

(Воспользоваться тем, что в числовой последовательности 7, 77, 777, … обязательно найдутся два члена, дающие при делении на n один и тот же остаток.)

593. Дано натуральное число m (m<27). Получить все трехзначные натуральные числа, сумма цифр которых равна m.

594. Получить все шестизначные счастливые номера. (Про целое число n, удовлетворяющее условию $0 \le n \le 999999$, говорят, что оно представляет собой счастливый номер, если сумма трех его первых цифр равна сумме трех его последних цифр; если в числе меньше шести цифр, то недостающие начальные цифры считаются нулями).

595. Даны взаимно простые натуральные числа p, q ($p<q$). Найти периодическую и непериодическую части (две последовательности однозначных неотрицательных чисел, разделенных числом –1) десятичной дроби, равной p/q.

596. Получить все четырехзначные числа в записи которых нет двух одинаковых цифр.

597. Даны натуральные числа n, m, неотрицательные целые числа a_m, a_{m-1},…, a_0 такие, что $a_m\, a_{m-1} \ldots a_0$ – запись n в некоторой

системе счисления (среди a_m, a_{m-1},…, a_0 могут быть и числа, большие девяти, – это будет означать, что основание системы счисления заведомо больше десяти). Требуется определить основание использованной системы счисления.

598. Даны натуральное число n, действительные числа a_1,…, a_n ($a_i \neq 0$, i=1,…, n). Знаки чисел в каждой из троек a_i, a_{i+1}, a_{i+2} (i=1,…, n–2) могут образовать одну из следующих комбинаций: + + +, + + –, + – +, + – –, – + +, – + –, – – +, – – –. Получить целые b_0,…,b_7, равные количествам вхождений в последовательность a_1,…, a_n указанных троек a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, с той или иной комбинацией знаков.

599. В последовательности действительных чисел a_0, a_1,…, a_{10} выбрать последовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}$ ($0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq 10$), для которой значение $\sin(a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_k})$ является наибольшим. (Перебрать все подпоследовательности данной последовательности

путем рассмотрения всех последовательностей $b_0, b_1,\ldots, b_{10}$ из нулей и единиц: a_i входит в подпоследовательность, если b_i=1. Использовать решение задачи 589а.)

600. Дано натуральное число n; представить его в двоично-десятичной системе счисления. Последнее означает, что надо получить последовательность двоичных цифр – нулей и единиц; при этом первые четыре двоичные цифры дают запись (в виде двоичного числа) первой (старшей) десятичной цифры числа n, следующие четыре двоичные цифры – запись второй десятичной цифры числа n и т.д. Таким образом, общее число двоичных цифр должно делиться на четыре. Примеры: если n =93, то двоично-десятичная запись n есть 10010011; если n=607, то – 011000000111 и т.д.

601. Даны натуральное число m, двоичные цифры $b_1,\ldots, b_{4m}$. Рассматривая последовательность $b_1,\ldots, b_{4m}$ как запись некоторого

натурального n в двоично-десятичной системе (см. предыдущую задачу), найти натуральное n в десятичной системе.

602. Доказать, что любое натуральное число n можно единственным способом представить с помощью некоторых целых неотрицательных $d_0,\ldots, d_s$ в виде $d_s(s+1)!+ d_{s-1}s!+\ldots+ d_1 2!+ d_0$ при условии, что $0 \le d_i \le i+1$, $i=0, \ldots, s$, $d_s \ne 0$.

Дано натуральное число n; найти соответствующие d_s, d_{s-1}, …, d_0.

603. В качестве основания позиционной системы может быть взято отрицательное целое число. Например, можно рассмотреть систему с основанием –10. Любое целое n единственным образом представляется в виде суммы $a_s (-10)^s+ a_{s-1}(-10)^{s-1}+\ldots+ a_1(-10)+a_0$, где $0 \le a_i \le 9$, $i =0, \ldots, s$. Из сказанного следует, что любое целое n записывается в системе с основанием –10 в виде целого числа без знака $a_s\, a_{s-1}, \ldots, a_1 a_0$.

Дано целое число n. Построить представление n в системе с основанием –10, т.е. найти соответствующие a_s, a_{s-1}, …, a_0.

604. Рассмотрим последовательность натуральных чисел w_0, w_1, …, образованную по следующему закону: $w_0=1$, $w_1=2$, $w_k= w_{k-1}+ w_{k-2}$ (k=2, 3, …). Эта последовательность – сдвинутая последовательность чисел Фибоначчи (см. задачу 144) $w_0=u_2$, $w_1=u_3$, $w_2=u_4$. Последовательность w_0, w_1, …, – это 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … Доказать, что любое натуральное n можно единственным способом представить с помощью некоторых неотрицательных целых b_0,…, b_t в виде $b_t w_t+ b_{t-1}w_{t-1}+\ldots+ b_0 w_0$ при условии, что $0 \le b_i \le 1$, i=0, …, t, $b_t \neq 0$. При этом две единицы не могут стоять рядом: если $b_i=1$, то $b_{i+1}=0$ (i=0,…, t–2).

Дано целое неотрицательное число n; найти соответствующие b_t, b_{t-1}, …, b_0.

605. «Римские цифры».

а) Проверить, правильна ли запись числа римскими цифрами.

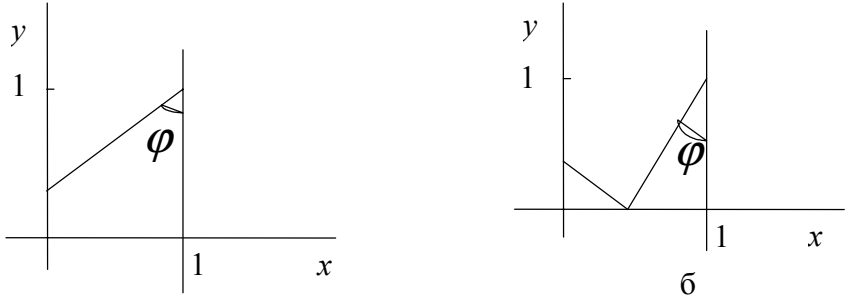
б) Записать данное число из диапазона от 1 до 1999 римскими цифрами.

в) Перевести число, записанное римскими цифрами, в десятичную систему.

§ 17. Геометрия

606. Даны действительные положительные числа a, b, c, d. Выяснить, можно ли построить четырехугольник с такими длинами сторон.

607. Дано действительное число φ $(0 < \varphi < \pi)$. Из точки (1, 1) под углом φ к прямой x=1 выпущен световой луч (рис. 29, *а* – 29, *b*). Найти точку оси ординат, в которой луч падает на эту ось.
Если $\varphi < \pi / 4$, то луч сначала отразится по закону «угол падения равен углу отражения» от оси абсцисс.



а б

Рис. 29

608. Даны действительные числа x_1, y_1, x_2, y_2 ($x_1 \neq x_2$), которые определяют две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. На оси абсцисс найти такую точку, сумма расстояний от которой до точек A и B – наименьшая для всех точек этой оси.

609. Даны действительные числа x, y. Вычислить расстояние от точки плоскости с координатами (x, y) до границы квадрата *) с вершинами:

а) (–0.5, –0.5), (–0.5, 0.5), (0.5, 0.5), (0.5, –0.5);

б) (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0).

*) То есть минимум расстояний от данной точки до точек границы квадрата.

610. Даны натуральное число n, целые числа x_1, y_1, x_2, y_2, …, x_n, y_n. Известно, что точки p_1, …, p_n с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n,

y_n) попарно различны. Пусть точка p_i удалена от начала координат на расстояние r_i (i=1, …, n). Пусть $R = \max(r_1, \ldots, r_n)$.

а) Среди точек $p_1, \ldots, p_n$ выбрать какую-нибудь одну p_i, для которой $r_i=R$; указать координаты выбранной точки и расстояние от этой точки до начала координат.

б) Среди точек p_i, ($1 \le i \le n$)для которых $r_i=R$, выбрать те, которые обладают наименьшей абсциссой. Если таких точек больше одной, то выбрать из них точку, которая имеет наибольшую ординату. Указать номер выбранной точки.

611. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{50}$. Эти числа определяют 25 интервалов числовой оси: (a_1, a_2), (a_3, a_4), …, (a_{49}, a_{50}).

а) Имеют ли все данные интервалы общие точки? Если да, то указать какую-нибудь из этих точек.

б) Является ли интервалом объединение данных интервалов? Если да, то указать концы этого интервала.

в) Указать число i $(1 \le i \le 25)$ такое, что объединение данных интервалов можно представить в виде i непересекающихся интервалов.

г) Имеются ли точки числовой оси, принадлежащие по крайней мере трем каким-нибудь из данных интервалов? Если да, то указать какую-нибудь из этих точек.

612. Даны действительные числа $x_1, \ldots, x_{15}, y_1, \ldots, y_{15}, r_1, \ldots, r_{15}$. Выяснить, есть ли на плоскости точка, принадлежащая всем кругам $c_1, \ldots, c_{15}$, где c_i имеет центр с координатами x_i, y_i и радиус r_i (i=1, …, 15).

613. Даны действительные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{15}, y_{15}$, которые рассматриваются как координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{15}, y_{15})$ точек на плоскости. Выяснить, верно ли, что для каждой из этих пятнадцати точек найдется другая, такая, что все оставшиеся тринадцать точек лежат по одну сторону от прямой, проходящей через эти две точки.

614.Даны целые числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$. Выяснить, найдутся ли среди точек с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ четыре таких, которые являются вершинами квадрата.

615.Даны целые числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$. Известно, что точки с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ являются тремя вершинами некоторого прямоугольника. Найти координаты четвертой вершины.

616.Прямая на плоскости может быть задана уравнением $ax+by+c=0$, где a и b одновременно не равны нулю. Будем рассматривать прямые только с целыми коэффициентами a, b, c. Пусть даны коэффициенты нескольких прямых: $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \ldots, a_n, b_n, c_n$.

а) Определить, имеются ли среди этих прямых совпадающие или параллельные.

б) Определить, имеются ли три прямые, пересекающиеся в одной точке.

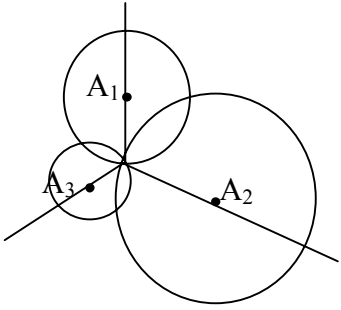
в) Определить, находятся ли данные прямые в общем положении. (Прямые находятся в общем положении, если все они различны, никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке.)

617.Окружность на плоскости может быть задана координатами x, y ее центра и радиусом r. Пусть даны соответствующие характеристики нескольких окружностей: $x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, \ldots, x_n, y_n, r_n$

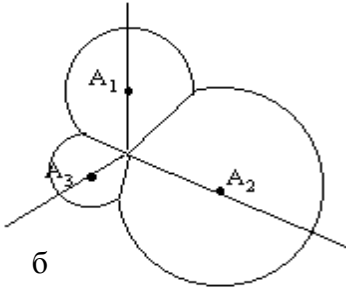
а) Определить, имеются ли среди этих окружностей три попарно пересекающиеся.

б) Найти среди этих окружностей все уединенные окружности, т. е. такие, которые не имеют общих точек ни с одной из остальных окружностей, не лежат целиком внутри и не заключают внутри себя какой-либо из остальных окружностей.

618.Рассматриваются три луча, проведенные в плоскости из точки O. Углы между соседними лучами равны $2\pi/3$. На лучах выбраны точки A_1, A_2, A_3, и из этих точек как из центров проведены окружности, проходящие через точку O. Считая данными расстояния A_1O, A_2O, A_3O, вычислить площадь фигуры, изображенной на рис. 30, *а*. Для вычисления разбить фигуру на части так, как показано на рис. 30, *б*.



а



б

Рис.30

619. Эта задача является обобщением предыдущей. Рассматривается n лучей, проведенных в плоскости из точки O ($n \geq 2$). Углы между соседними лучами равны $2\pi/n$. Вновь на лучах выбираются точки $A_1, \ldots, A_n$ и проводятся соответствующие окружности. Считая данными расстояния $A_1O, A_2O, \ldots, A_nO$, вычислить площадь фигуры, аналогичной описанной в предыдущей задаче.

620. Медианой множества, состоящего из четного числа точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, называется прямая, соединяющая две точки множества, с обеих сторон от которой лежит равное число точек.

Даны действительные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ (n—нечетное число). Найти число медиан множества точек с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) в предположении, что никакие три точки этого множества не лежат на одной прямой.

621. Даны действительные числа a, b, c, d. Выяснить, можно ли прямоугольник со сторонами a, b целиком уместить в прямоугольнике со сторонами c, d (в отличие от задачи 55, здесь не обязательна взаимная параллельность сторон).

622. Даны действительные числа a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, …, a_n, b_n, c_n. Эта последовательность определяет на плоскости n квадратов со сторонами, параллельными осям: a_i, b_i – координаты центра квадрата, c_i – длина его стороны (i =1, …, n). Определить площадь фигуры, образованной всеми квадратами (рис. 31).

Здесь может оказаться полезным предварительное решение следующей задачи.

Стороны двух прямоугольников параллельны координатным осям. Каждый из прямоугольников задан четырьмя действительными числами – двумя абсциссами и двумя ординатами. Представить ту часть первого прямоугольника, которая не покрывается вторым прямоугольником, в виде объединения нескольких прямоугольников, не накладывающихся друг на друга.

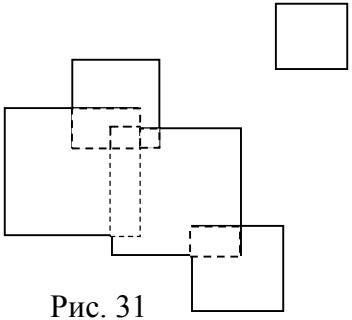


Рис. 31

623. Даны действительные числа x, y. В треугольнике, вершинами которого служат точки (0, 0), (0, 1), (x, y), найти точку (для

определения ее координат разрешается использовать методы приближенных вычислений), сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна. Известно (теорема Штейнера), что для треугольника с углами, не превосходящими $2\pi/3$ (т. е. 120°), эта точка совпадает с точкой Торричелли, т. е. точкой, из которой все стороны треугольника видны под углом $2\pi/3$. Если же в треугольнике имеется угол, больший $2\pi/3$, то решением задачи будет вершина этого угла.

624. Даны действительные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$. Известно, что точки $p_1, p_2, \ldots, p_n$ с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ попарно различны. Рассмотрим замкнутую ломаную $p_1 p_2 \ldots p_n$.

а) Верно ли, что ломаная не имеет самопересечений?

б) В предположении, что ломаная не имеет самопересечений, выяснить, является ли n-угольник $p_1 p_2 \ldots p_n$ выпуклым.

625. Даны действительные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$. Известно, что точки $p_1, p_2, \ldots, p_n$ с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n,$

y_n) попарно различны. Найти выпуклый многоугольник с вершинами в некоторых из точек $p_1, p_2, \ldots, p_n$, который содержит все точки $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Многоугольник должен быть представлен последовательностью вершин.

626. Сетью называется совокупность точек (узлов), некоторые из которых соединены между собой стрелками. Сети, состоящие из n узлов, можно сопоставить две квадратные матрицы порядка n: матрицу соединений и матрицу связей. Элемент матрицы соединений a_{ij} равен 1, если сеть содержит стрелку, ведущую из узла i в узел j, и 0 в противном случае. Элемент b_{ij} матрицы связей равен 1, если из узла i можно попасть в узел j, двигаясь по стрелкам, и 0 в противном случае. Так, для сети,

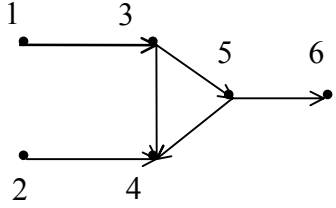


Рис. 32

изображенной на рис.32, матрицы соединений и связей имеют вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Дана матрица соединений некоторой сети из n узлов; получить матрицу связей этой сети.

627. Линия называется уникурсальной, если ее можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя два раза одно и тоже звено. Доказать, что линия уникурсальна тогда и только тогда, когда число тех ее узлов, из которых выходит нечетное число звеньев, не превосходит двух. Линии, содержащей n узлов, можно сопоставить квадратную матрицу порядка

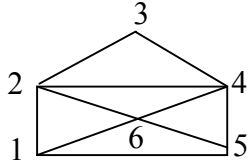


Рис. 33

n – матрицу соединений, элемент a_{ij} которой равен 1, если узел i соединен с узлом j некоторым звеном, не содержащим других вершин, и 0 в противном случае (i, j=1, …, n). Для линии, изображенной на рис. 33, матрица соединений имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Дана матрица соединений для линии с n узлами. Выяснить, является ли линия уникурсальной, и если является, то получить последовательность номеров узлов, которые будут пройдены во время требуемого вычерчивания.

§18. Сортировка массивов и файлов *)

*) В задачах 628 – 648 этого параграфа существенно, что данные рассматриваются в программе как массив; в задачах 649 – 657 рассматриваются файлы, и это усложняет некоторые алгоритмы.

628. Рассмотрим массив целых или действительных чисел $a_1,\ldots,a_n$. Пусть требуется представить элементы этого массива так, чтобы после перестановки они были упорядочены по неубыванию: $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Эта задача называется задачей сортировки или упорядочения массива (эту же задачу можно рассматривать применительно к упорядочению по невозрастанию: $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$; если числа попарно различны, то можно говорить об убывании и о возрастании). Для решения этой задачи можно воспользоваться, например, следующими алгоритмами:

а) Найти элемент массива, имеющий наименьшее значение, переставить его с первым элементом, затем проделать то же самое, начав со второго элемента и т.д. (Сортировка выбором.)

б) Последовательным просмотром чисел $a_1, \ldots, a_n$ найти наименьшее i такое, что $a_i > a_{i+1}$. Поменять местами a_i и a_{i+1}, возобновить просмотр с элемента a_{i+1} и т.д. Тем самым наибольшее число передвинется на последнее место. Следующие просмотры начинать опять сначала, уменьшая на единицу количество просматриваемых элементов. Массив будет упорядочен после просмотра, в котором участвовали только первый и второй элементы.(Сортировка обменами.)

в) Просматривать последовательно $a_2, \ldots, a_n$ и каждый новый элемент a_i вставлять на подходящее место в уже упорядоченную совокупность $a_1, \ldots, a_{i-1}$. Это место определяется последовательным

сравнением a_i с упорядоченными элементами $a_1, \ldots, a_{i-1}$. (Сортировка простыми вставками.)

Написать программы, реализующие алгоритмы а), б), в).

629. Исследовать число сравнений и число перемещений (т. е. перестановок с одного места на другое) элементов $a_1, \ldots, a_n$ в процессе применения описанных в предыдущей задаче алгоритмов. Показать, что число перемещений для алгоритма сортировки выбором ограничено некоторой линейной функцией от n. В это же время и число сравнений для алгоритма сортировки выбором, и обе указанные характеристики для алгоритмов сортировки обменами и сортировки простыми вставками в некоторых случаях (например, когда исходный массив таков, что $a_1>a_2>\ldots>a_n$) являются квадратичными функциями от n.

630. Из утверждения предыдущей задачи следует, что алгоритм сортировки выбором выгодно отличается от алгоритмов сортировки

обменами и сортировки простыми вставками в тех случаях, когда перемещение элемента оказывается существенно более сложным делом, чем сравнение элементов. Использовать это при выполнении следующих заданий.

Дана действительная матрица размера $n \times m$; упорядочить (переставить) строки матрицы:

а) по неубыванию значений первых элементов строк;

б) по невозрастанию сумм элементов строк;

в) по неубыванию значений наименьших элементов строк;

г) по невозрастанию значений наибольших элементов строк.

В заданиях б), в), г) разрешается дополнительно определить числовой массив $a_1,\ldots,a_n$.

631. Пусть дан упорядоченный по неубыванию массив целых или действительных чисел $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ и пусть дано некоторое число b (соответственно целое или действительное), для которого нужно

найти такое место среди чисел $a_1,\ldots,a_n$, чтобы после вставки числа b на это место упорядоченность не нарушилась. Если вследствие равенства между собой некоторых элементов массива число b можно вставлять на разные места, то требуется определить ближайшее к началу массива место. Эта задача называется задачей поиска места элемента. Для b имеется n+1 возможность: $b \leq a_1$, $a_1 < b \leq a_2$, …, $a_{n-1} < b \leq a_n$, $a_n < b$, и решением задачи поиска места элемента b будет соответственно одно из чисел 1, …, n+1. Для решения задачи полезен алгоритм, который называется алгоритмом деления пополам: взять первоначально 1 и n+1 в качестве границ поиска места элемента; далее, до тех пор, пока границы не совпадут, шаг за шагом сдвигать эти границы следующим образом: сравнить b с a_s, где s – целая часть среднего арифметического границ; если $a_s < b$, то заменить прежнюю нижнюю границу на s + 1, а верхнюю оставить без изменения, иначе оставить без изменения нижнюю границу, а верхнюю заменить на s; когда границы совпадут,

став равными некоторому числу t, выполнение вышеописанного алгоритма закончится с результатом t. (Число сравнений, требуемых этим алгоритмом, не превосходит $[\log_2(n+1)]+1$.)

а) Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m (a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n)$. Получить натуральные числа $k_1, \ldots, k_m$ такие, что k_i – это решение задачи поиска места b_i среди $a_1, \ldots, a_n$ $(i = 1, \ldots, m)$. Применить алгоритм деления пополам.

б) Таблица выигрышей денежной лотереи представлена массивом выигравших номеров $a_1, \ldots, a_n$ и массивом выигрышей в рублях $p_1, \ldots, p_n$ (p_i – это выигрыш, выпавший на номер a_i $(i=1, \ldots, n)$). Определить суммарный выигрыш, выпавший на билеты с номерами $b_1, \ldots, b_m$. Применить алгоритм деления пополам.

в) Пусть место некоторого числа b среди упорядоченных по неубыванию $a_1, \ldots, a_n$ выбирается как наиболее удаленное от начала последовательности место, на которое можно вставить это число, не

нарушая этим упорядоченности по неубыванию. Внести изменение в описание алгоритма деления пополам и соответственно дать новое решение задания а), сформулированного выше.

632. Даны действительные числа $a_1,\ldots, a_n, p$, натуральное число k ($a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, $k \le n$). Удалить из $a_1, \ldots, a_n$ элемент с номером k (т. е. a_k) и вставить элемент, равный p, так, чтобы не нарушилась упорядоченность.

633. Алгоритм упорядочения простыми вставками (см. алгоритм в) в задаче 628) можно изменить следующим образом. Место, на которое надо вставить a_i в уже упорядоченную совокупность $a_1, \ldots, a_{i-1}$, определяется алгоритмом деления пополам (см. задачу 631). Получится новый алгоритм сортировки, который называется алгоритмом сортировки бинарными вставками (слова “бинарная вставка” следует понимать как “вставка делением пополам”). Этот

алгоритм требует всего около $n\log_2 n$ сравнений элементов. Написать программу, реализующую этот алгоритм.

634. Даны целые числа $a_1, \ldots, a_n$. Получить в порядке возрастания все различные числа, входящие в $a_1, \ldots, a_n$. Здесь удобно воспользоваться алгоритмом сортировки вставками (если n велико, то лучше применить бинарные вставки; если n сравнительно мало, скажем, $n<50$, то можно обойтись и простыми вставками). В процессе сортировки следует отбрасывать элементы, уже встречавшиеся раньше. Если в результате поиска места a_i в упорядоченной совокупности $a_1, \ldots, a_k$ ($k<i$) обнаружится, что среди $a_1, \ldots, a_k$ есть элемент, равный a_i, то следует перейти к рассмотрению a_{i+1} без изменения $a_1, \ldots, a_k$.

635. Даны действительные числа $c_1, \ldots, c_p, d_1, \ldots, d_q$ ($c_1 \le c_2 \le \ldots \le c_p$, $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_q$). Внести единую упорядоченность в $c_1, \ldots, c_p, d_1, \ldots, d_q$,

получив $f_1, f_2, \ldots, f_{p+q}$ такие, что $f_1 \le f_2 \le \ldots \le f_{p+q}$. Число сравнений не должно превосходить $p+q$.

636. Алгоритм фон Неймана упорядочения массива $a_1, \ldots, a_n$ по неубыванию (алгоритм сортировки слияниями) основан на многократных слияниях уже упорядоченных групп элементов массива (см. предыдущую задачу). Вначале весь массив рассматривается как совокупность упорядоченных групп по одному элементу в каждой. Слиянием соседних групп получаем упорядоченные группы, каждая из которых содержит два элемента (кроме, может быть, последней группы, которой не нашлось парной). Далее, упорядоченные группы укрупняются тем же способом и т. д. Здесь приходится оперировать не только с массивом $a_1, \ldots, a_n$, но и с вспомогательным массивом $b_1, \ldots, b_n$ (первоначальные значения его элементов не играют роли). Рис. 34 демонстрирует два последовательных этапа укрупнения: массивы $a_1, \ldots, a_n$, и $b_1, \ldots, b_n$ представлены в виде отрезков, которые разбиты на

части, изображающие упорядоченные группы. Число упорядоченных групп убывает, следовательно, настанет такой момент, когда в массиве $a_1, \ldots, a_n$, или $b_1, \ldots, b_n$ будет содержаться только одна упорядоченная группа. А это означает, что массив упорядочен. Для слияния двух упорядоченных групп, содержащих соответственно p и q элементов, достаточно произвести $p + q$ сравнений. Следовательно, для одного этапа укрупнения достаточно произвести не более n сравнений. Столько же требуется на одном этапе и перемещений. Можно показать, что алгоритм фон Неймана требует в целом приблизительно $n \log_2 n$ сравнений и столько же перемещений. Из рассмотренных до сих пор алгоритмов только алгоритм сортировки бинарными вставками требовал столь небольшого числа сравнений. Однако алгоритм фон Неймана выгодно отличается от последнего алгоритма тем, что требует меньше перемещений элементов $a_1, \ldots, a_n$ (хотя и требует дополнительного массива $b_1, \ldots, b_n$).

Написать программу, реализующую алгоритм фон Неймана.

Рис.34

637. Пусть дан массив $a_1, \ldots, a_n$. Требуется переставить $a_1, \ldots, a_n$ так, чтобы вначале в массиве шла группа элементов, больших того элемента, который в исходном массиве располагался на первом месте, затем – сам этот элемент, потом – группа элементов, меньших или равных ему. Число сравнений и перемещений, каждое в отдельности, не должно превышать $n - 1$.

638. На преобразовании массива, описанном в предыдущей задаче, основывается следующий рекурсивный алгоритм сортировки (так называемая быстрая сортировка). Если массив содержит не более

одного элемента, то он упорядочен. Иначе применяем к нему преобразование, описанное в предыдущей задаче, и определяем результат применения алгоритма быстрой сортировки к $a_1, \ldots, a_n$ следующим образом: вначале идет первая группа элементов, упорядоченная с помощью алгоритма быстрой сортировки, затем без изменения тот элемент, который разделял первую и вторую группы элементов, затем вторая группа элементов, упорядоченная с помощью алгоритма быстрой сортировки. Этот алгоритм не использует дополнительного массива и требует в среднем приблизительно $n\log_2 n$ сравнений и столько же перемещений элементов. Правда, это лишь среднее число: в худшем случае число сравнений может достигать $n(n-1)/2$; кроме того, алгоритм быстрой сортировки содержит рекурсии.

Написать программу, реализующую алгоритм быстрой сортировки.

639. На преобразовании массива, описанном в задаче 637, основывается также следующий алгоритм поиска значения k-го по величине элемента массива $a_1, \ldots, a_n$ (т. е. того элемента, который бы занял место с номером k после упорядочения массива). Пусть в результате преобразования, описанного в задаче 637, первый элемент занял p-е место; если $k = p$, то поиск закончен; если $k < p$, то надо перейти к поиску k-го по величине элемента в начальной группе элементов, содержащей $p - 1$ элемент (задача упростилась, так как $p - 1 < n$); если же $k > p$, то надо перейти к поиску $(k - p)$-го по величине элемента во второй группе элементов (задача упростилась, так как $n - p < n$). Этот алгоритм не содержит рекурсий. Не пользуясь рекурсиями, написать программу, реализующую этот алгоритм.

640. Нетрудно заметить, что алгоритм, описанный в предыдущей задаче, фактически позволяет найти не только k-й по величине элемент, но и дополнительно 1-й, 2-й, …, $(k - 1)$-й элементы,

хотя и в неупорядоченном виде. Основываясь на этом, выполнить следующие задания:

а) В массиве $a_1,\ldots, a_{2m+1}$ найти $(m+1)$-й по величине элемент (это так называемая медиана массива $a_1, \ldots, a_{2m+1}$) и группу элементов с первыми m значениями.

б) Вновь решить задачу 170, положив для этого $k = 4$.

641. Алгоритм сортировки обменами (см. алгоритм б) в задаче 628) также имеет свои достоинства. Рассмотрим следующий пример. Пусть слова, которые можно выделить в массиве символов $a_1, \ldots, a_n$ (см. задачу 269), требуется переставить в лексикографическом порядке. Так как разные слова могут иметь разную длину, то без больших затруднений можно менять местами только слова, стоящие рядом. Но алгоритм сортировки обменами и предписывает только такие обмены. Эта задача не является, конечно, задачей сортировки массива, но тем не менее алгоритм сортировки обменами оказывается здесь полезным.

Написать программу, предполагая, что длина слова не превосходит пятнадцати.

642. Алгоритм б), сформулированный в задаче 628, – это, строго говоря, лишь один из алгоритмов сортировки обменами. Он иногда называется алгоритмом пузырька. Есть и другие алгоритмы, которые естественно отнести к алгоритмам сортировки обменами. Приведём пример такого алгоритма. Последовательным просмотром чисел $a_1, \ldots, a_n$ найти наименьшее i такое, что $a_i > a_{i+1}$. Поменять местами a_i и a_{i+1} местами и возобновить просмотр с начала массива. Когда не удастся найти такое i, массив будет упорядочен нужным образом. Написать программу, реализующую этот алгоритм.

643. Рассмотреть все алгоритмы сортировки, сформулированные в этом параграфе, и указать достоинства и недостатки каждого из них. Необходимо помнить, что в случае небольших массивов те алгоритмы, которые сформулированы в задаче

628, дают вполне удовлетворительное решение задачи. При больших n требуется тщательно изучить все особенности конкретной ситуации и, исходя из этого, подобрать алгоритм. Задачи сортировки массивов возникают не только в связи с числовыми массивами. Тип элемента может быть довольно сложным, и надо учитывать, во что обходится сравнение и перемещение элементов в том или ином случае.

644. Даны пять попарно различных целых чисел a, b, c, d, e. Упорядочить их по возрастанию, используя для этого не более семи сравнений.

645. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_n$. Получить попарно различные целые $j_1, \ldots, j_n$ такие, что $1 \le j_k \le n$, $k = 1, \ldots, n$ и $a_{j1} \ge a_{j2} \ge \ldots \ge a_{j\,n}$.

646. Даны натуральное число n, целые числа $a_1, \ldots, a_n$. Найти наибольшее значение, встречающееся в последовательности $a_1, \ldots, a_n$, после выбрасывания из неё

а) одного из членов со значением $\max(a_1, \ldots, a_n)$;

б) всех членов со значением $\max(a_1, \ldots, a_n)$ – здесь предполагается, что не все числа $a_1, \ldots, a_n$ равны между собой.

647. Даны натуральное число n, действительные числа $a_1, \ldots, a_n$. Требуется найти $\max(a_1, \ldots, a_n)$ и $\min(a_1, \ldots, a_n)$. Рассмотрим два алгоритма решения этой задачи. Первый алгоритм. Шаг за шагом получать пары $\max(a_1,\ldots,a_i)$, $\min(a_1, \ldots, a_i)$ ($i = 1, \ldots, n$). При этом, чтобы получить $\max(a_1, \ldots, a_{i+1})$, $\min(a_1, \ldots, a_{i+1})$ сравнивается a_{i+1} с $\max(a_1, \ldots, a_i)$, а затем, если $a_{i+1} < \max(a_1, \ldots, a_i)$, дополнительно сравнивается a_{i+1} с $\min(a_1, \ldots, a_i)$. Второй алгоритм. Пусть n – чётное число, т.е. $n = 2k$. Тогда шаг за шагом получать $\max(a_1, \ldots, a_{2l})$, $\min(a_1, \ldots, a_{2l})$ ($l = 1, \ldots, k$). При этом, чтобы получить $\max(a_1, \ldots, a_{2l+2})$, $\min(a_1, \ldots, a_{2l+2})$, вначале сравниваются между собой a_{2l+1}, a_{2l+2} и $\max(a_{2l+1}, a_{2l+2})$ сравнивается с $\max(a_1, \ldots, a_{2l})$, а $\min(a_{2l+1}, a_{2l+2})$ – с $\min(a_1, \ldots, a_{2l})$. Если n – нечетное число, то потребуется еще дополнительный шаг:

сравнение последнего элемента a_n с $\max(a_1,\ldots, a_{n-1})$ и, возможно, с $\min(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

Сколько сравнений в худшем случае потребует первый алгоритм и сколько - второй? Написать программу реализующую второй алгоритм. (Заметим, что второй алгоритм даёт ещё одно решение задачи 230).

648. Даны натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – перестановка чисел $1, \ldots, n$. Получить натуральные $r_1, \ldots, r_n$ такие, что

$$r_{a_i} = i \text{ для } i = 1, \ldots, n.$$

649. Решить задачи 646, 647, предполагая, что числа $a_1, \ldots, a_n$ являются компонентами данного файла. При этом значение n неизвестно заранее.

650. Число компонент файла f, компонентами которого являются целые числа, кратно десяти. Переписать компоненты файла f в файл g, изменяя порядок чисел в каждой десятке так, чтобы

а) вначале шли отрицательные числа десятки, а за ними – неотрицательные;

б) вначале шли числа, делящиеся на 3, затем числа, дающие при делении на 3 остаток 1, затем числа, дающие при делении на 3 остаток 2.

Порядок самих десяток должен быть сохранён.

651. Рассматриваются слова (см. задачу 269), содержащиеся в символьных файлах f_1 и f_2. Известно, что число символов в словах не превосходит шестнадцати. Известно, что слова в файле f_1 идут в лексикографическом порядке и их число равно пятидесяти. Выяснить, сколько раз каждое из слов файла f_2 встречается в файле f_1. Для

решения задачи переписать слова, содержащиеся в файле f_2, в массив и последовательно применять метод деления пополам (см. задачу 631).

652. Пусть файлы c и d с компонентами, являющимися действительными или целыми числами, упорядочены по невозрастанию компонент. Требуется собрать компоненты файлов c и d в упорядоченном виде в файле f (см. задачу 635). Количество сравнений не должно превосходить $p + q$, где p и q – число компонент в файлах c и d.

653. Пусть a и b – файлы, k – натуральное число. Будем говорить, что файлы a и b согласованно k-упорядочены, если

1) в каждом из файлов a и b первые k компонент, следующие за ними k компонент и т.д. образуют упорядоченные группы; последняя группа файла (тоже упорядоченная) может быть неполной, т.е. содержать менее k компонент, но при этом только один из файлов a и b может иметь неполную последнюю группу;

2) число упорядоченных групп файла a отличается от числа упорядоченных групп файла b не более чем на единицу;

3) если в одном файле число упорядоченных групп меньше на единицу, чем в другом, то неполной может быть только последняя группа более длинного файла.

Компоненты двух согласованно k - упорядоченных файлов a и b можно разместить в файлах g и h так, что g и h будут согласованно $2k$-упорядочены. Это делается с помощью описанных в предыдущей задаче слияний; при этом результаты слияний попеременно размещаются то в файле g, то в файле h. Рис. 35 демонстрирует происходящее при первых двух слияниях. Файлы представлены в виде отрезков, части которых изображают упорядоченные группы с указанным числом компонент.

Завершить описание этого алгоритма, рассмотрев его заключительную стадию. Доказать, что файлы g и h действительно

будут согласованно $2k$-упорядочены. Реализовать этот алгоритм в виде программы.

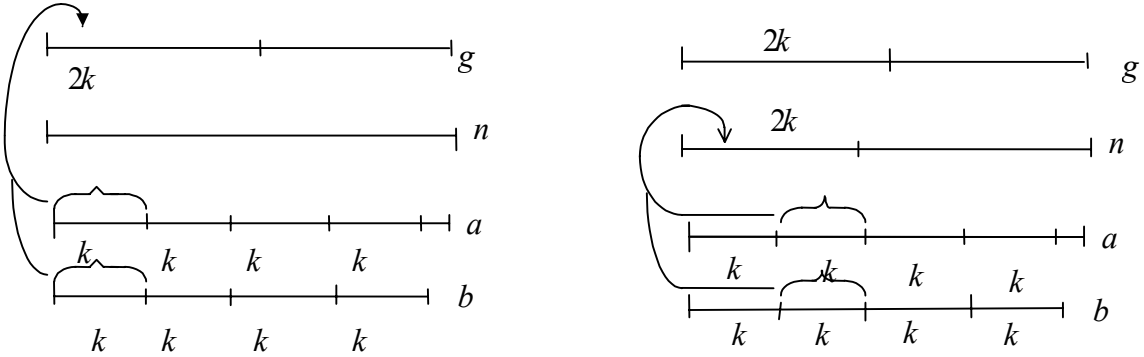


Рис 35

654. Для сортировки файла g может быть применен следующий алгоритм. Пусть h, a, b - вспомогательные файлы. Прежде всего, компоненты файла g распределяются по файлам a, b: компоненты с четными номерами попадают в файл a, а компоненты с нечетными

номерами – в *b*. Эти компоненты рассматриваются как упорядоченные группы, по одной компоненте в каждой, а файлы *a*, *b* – как согласованно 1- упорядоченные (см. предыдущую задачу). Затем с помощью алгоритма, описанного в предыдущей задаче, файлы *g* и *h* превращаются в согласованно 2-упорядоченные и т.д. Так как число упорядоченных групп убывает с каждым применением предложенного в предыдущей задаче алгоритма, то настанет момент, когда все компоненты соберутся в некотором файле в виде упорядоченной группы; на этом упорядочение будет закончено.

Этот алгоритм очень похож на алгоритм фон Неймана, для массивов (см. задачу 636) и тоже относится к алгоритмам сортировки слияниями.

Реализовать этот алгоритм в виде программы.

655. Пусть файлы *a* и *b,* компоненты которых являются целыми числами, упорядочены по неубыванию. Получить в файле *c* все числа

файлов *a* и *b* без повторений. Файл *c* должен быть упорядочен по возрастанию.

656. Дан файл *f*, компоненты которого являются целыми числами. Получить в файле *g* все нечетные числа, входящие в файл *f*. Числа в файле *g* должны следовать:

а) в порядке невозрастания;

б) в порядке убывания, без повторений.

657. Дан символьный файл *f*, компоненты которого - малые латинские буквы и пробелы. Слова (см. задачу 269) файла *f* имеют не более шестнадцати букв. Записать эти слова в файл *g* в лексикографическом порядке.

§19. Многочлены *)

*) Каждый раз, когда в задачах этого раздела говориться, что дан многочлен $P(x)$ степени n, то подразумевается, что даны действительные числа (коэффициенты) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ такие, что $P(x)=$ $p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_0$. Аналогично, получить многочлен – это значит получить последовательность его коэффициентов.

658. Дан многочлен $P(x)$ степени n. Получить многочлен $P^2(x)$.

659. Дан многочлен $P(x)$ степени n. Получить многочлен $P(x+1)$ - $P(x)$. (Какова степень этого многочлена?).

660. Дан многочлен $P(x)$ степени n. Получить его производную $P'(x)$, а также вычислить $P'(1)$, $P'(2)$, $P'(3)$

661. Даны действительное число a, многочлен $P(x)$ степени n. Получить

а) многочлен $(x - a)P(x)$;

б) многочлен $(x^2+2ax+3)P(x)$;

в) многочлен $(x^2 + a^2)P(x)$.

662. Даны действительные числа s и t, натуральное число n, действительные числа $a_0, \ldots, a_n$. Среди $a_1, \ldots, a_n$ есть как отрицательные, так и неотрицательные числа. Получить значение $P(s)+Q(t)$, где в качестве коэффициентов многочлена P взяты отрицательные члены последовательности $a_0, \ldots, a_n$ (с сохранением порядка их следования), а в качестве коэффициентов многочлена Q – неотрицательные члены (также с сохранением порядка их следования).

663. Даны действительные числа s, t, многочлен $P(x)$ степени n. Найти значение $\int_s^t P(x)dx$.

664. Даны действительные числа s, t, многочлен $P(x)$ степени n. Получить многочлен $(sx^2+t)P(x)+ P'(x)$, где $P'(x)$ производная многочлена $P(x)$.

665. Даны действительные числа $a_0, a_1, ..., a_5$. Получить многочлен шестой степени $(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_5)$.

666. Даны действительные числа $a_0, ..., a_5$, $d_0, ..., d_5$. Получить многочлен шестой степени $d_0 + d_1(x - a_0) + d_2(x - a_0)(x - a_1) + \ldots + d_5 (x - a_0)(x - a_1)\ldots (x - a_5)$.

667. Даны действительные числа $a_0, ..., a_5$, многочлен $P(x)$ шестой степени. Получить действительные числа $d_0, ..., d_7$ такие, что $P(x)= d_0 + d_1(x - a_0) + + d_2(x - a_0)(x - a_1)+\ldots+ d_7 (x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_5)$.

668. Последовательность многочленов $T_0(x)$, $T_1(x)$, … определяется следующим образом: $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$, $T_k(x)=2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$, ($k = 2, 3, \ldots$). Получить $T_2(x)$, …, $T_8(x)$.

669. Последовательность многочленов $H_0(x)$, $H_1(x)$, … определяется следующим образом: $H_0(x)=1$, $H_1(x)=2$, $H_k(x)=xH_{k-1}(x) - (k-1)H_{k-2}(x)$ ($k = 2, 3, \ldots$).

а) Получить $H_3(x)$, $H_5(x)$, $H_6(x)$.

б) Даны действительные числа a_0, …, a_6. Получить многочлен $a_0H_0(x)+\ldots+a_6H_6(x)$.

в) Дано действительное число a. Вычислить $H_0(a)+\ldots+H_6(a)$.

670. Последовательность многочленов $G_0(x)$, $G_1(x)$, … определяется следующим образом: $G_0(x)=1$, $G_1(x)= x - 1$, $G_k(x) = (x - 2k+1)G_{k-1}(x) - (k-1)^2G_{k-2}(x)$ ($k = 2, 3, \ldots$). Выполнить для $G_0(x)$, $G_1(x)$, … задания а), б), в), сформулированные в предыдущей задаче для многочленов $H_0(x)$, $H_1(x)$, ….

671. Последовательность многочленов $L_0(x)$, $L_1(x)$, …, определяется следующим образом $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x$,

$$L_k(x) = xL_{k-1}(x) - \frac{(k-1)^2}{(2k-3)(2k-1)} L_{k-2}(x),\ k = 2, 3, \ldots$$

а) Получить $L_5(x)$, $L_7(x)$.

б) Даны действительные числа d_0, …d_8, a. Вычислить $d_0+d_1L_1(a)+\ldots+d_8L_8(a)$.

в) Получить многочлен $L_0(x)+L_1(x)+\ldots+L_6(x)$.

672. Даны действительные числа a_0, …, a_n, b_0,…, b_n (a_0, …, a_n попарно различны). Требуется найти многочлен $F(x)$ степени не выше, чем n, такой, что $F(a_i) = b_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$).

Отметим, что нетрудно построить многочлены $w_0(x), w_1(x), \ldots, w_n(x)$ каждый из которых имеет степень n и которые обладают тем свойством, что $\omega_i(x)$ равен 1 при $x = a_i$ и равен 0 при $x = a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ – для этого достаточно положить

$$\omega_i(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})...(x-a_n)}{(a_i-a_0)(a_i-a_1)...(a_i...a_{i-1})(a_i-a_{i+1})...(a_i-a_n)},$$

$i = 0, 1, \ldots, n$.

В качестве искомого многочлена $F(x)$ берется сумма

$b_0\omega_0(x) + b_1\omega_1(x) + ... + b_n\omega_n(x)$.

§ 20. Преобразование и построение матриц

673. Даны действительная матрица размера $n\times(n+1)$, действительные числа $a_1, ..., a_{n+1}$, $b_1, ..., b_{n+1}$, натуральные числа p, q ($p \le n$, $q \le n+1$). Образовать новую матрицу размера $(n+1)\times(n+2)$ вставкой после строки с номером p данной матрицы новой строки с элементами $a_1,\ldots, a_{n+1}$ и последующей вставкой после столбца с номером q нового столбца с элементами $b_1, \ldots, b_{n+1}$.

674. Даны целые числа $a_1, \ldots, a_{10}$, целочисленная квадратная матрица порядка n. Заменить нулями в матрице те элементы с четной суммой индексов, для которых имеются равные среди $a_1, \ldots, a_{10}$.

675. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_n$, действительная квадратная матрица порядка n ($n \ge 6$). Получить действительную матрицу размера $n\times(n+1)$, вставив в исходную матрицу между пятым и шестым столбцами новый столбец с элементами $a_1, \ldots, a_n$.

676. Дана целочисленная матрица размера 6×9. Найти матрицу, получающуюся из данной:

а) перестановкой столбцов – первого с последним, второго с предпоследним и т. д.;

б) перестановкой строк – первой с последней, второй – с предпоследней и т.д.

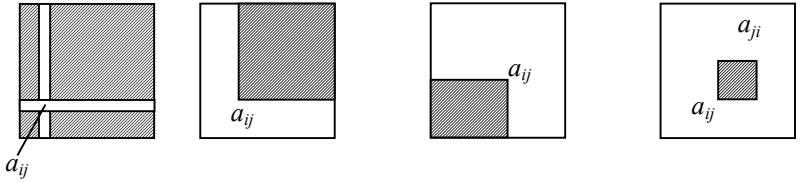


Рис. 36

677. Дана действительная матрица $[\, a_{ij} \,]_{i,j\,=\,1,\,\ldots,\,n}$. Получить действительную матрицу $[\, b_{ij} \,]_{i,j\,=\,1,\,\ldots,\,n}$, элемент b_{ij} который равен сумме элементов данной матрицы, расположенных в области,

определяемой индексами i, j так, как показано на рис. 36, *а – г* (область заштрихована).

Сходным образом можно рассмотреть вместо суммы элементов их произведение, набольшее значение, наименьшее значение.

678. Дана действительная квадратная матрица порядка n. Преобразовать матрицу по правилу: строку с номером n сделать столбцом с номером n, а столбец с номером n сделать строкой с номером n.

679. Даны две действительные квадратные матрицы порядка n. Получить новую матрицу:

а) умножением элементов каждой строки первой матрицы на наибольшее из значений элементов соответствующей строки второй матрицы;

б) прибавлением к элементам каждого столбца первой матрицы произведения элементов соответствующих строк второй матрицы.

680. В данной действительной матрице размером $n \times m$ (n=3, m=3) поменять местами:

а) строки с номерами 2 и $n - 1$;

б) столбцы с номерами 3 и $n - 2$.

681. Даны действительные числа $b_1, \ldots, b_{15}$. В действительной матрице $[a_{ij}]=_{1,\ldots,17;\, j=1,\ldots,10}$ первая и последняя строки заполнены нулями: $a_{11}= a_{12} =\ldots= a_{1\,10} = a_{171}= a_{17\,2} =\ldots= a_{17\,10} = 0$. Элементы $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{16\,1}$ первого столбца соответственно равны $b_1, \ldots, b_{15}$. Известно, что при $2 \le i \le 16$, $2 \le j \le 10$ имеет место $a_{ij}= \frac{1}{2}(a_{i+1\,j-1}+a_{i-1\,j-1})$. Требуется определить $a_{2\,10}, a_{3\,10}, \ldots, a_{16\,10}$.

682. Даны целочисленная матрица размера $n \times 3$, целые числа k, l ($1 \le k \le n$, $1 \le l \le n$, $k \ne 1$). Преобразовать матрицу так, чтобы строка с исходным номером k непосредственно следовала за строкой с исходным номером l, сохранив порядок следования остальных строк.

683. Назовем допустимым преобразованием матрицы перестановку двух строк или двух столбцов. Дана действительная квадратная матрица порядка n. С помощью допустимых преобразований добиться того, чтобы

а) один из элементов матрицы, обладающий наибольшим по модулю значением, располагался в левом верхнем углу матрицы;

б) один из элементов матрицы, обладающий наименьшим значением, располагался в левом нижнем углу матрицы.

684. В данной действительной квадратной матрице порядка n найти наибольший по модулю элемент. Получить квадратную матрицу порядка $n - 1$ путем выбрасывания из исходной матрицы какой-нибудь строки и столбца, на пересечении которых расположен элемент с найденным значением.

685. Дана действительная квадратная матрица порядка n, все элементы которой различны. Найти наибольший элемент среди

стоящих на главной и побочной диагоналях и поменять его местами с элементом, стоящим на пересечении этих диагоналей

686. Построить квадратную матрицу порядка 2*n*:

$$
\begin{array}{c}
n \\ \\ \\ \\ \\ n \\ \\ \\ \\
\end{array}
\left\{
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\right.
\underbrace{\begin{bmatrix}
11\ldots1 & 22\ldots2 \\
11\ldots1 & 22\ldots2 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
11\ldots1 & 22\ldots2 \\
33\ldots3 & 44\ldots4 \\
33\ldots3 & 44\ldots4 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
33\ldots3 & 44\ldots4
\end{bmatrix}}_{\begin{array}{cc} n & n \end{array}}
$$

687.Дано действительное число *x*. Получить квадратную матрицу порядка10:

$$\begin{bmatrix} 1 & x \ldots x^8 & x^9 \\ x & 0 \ldots 0 & x^8 \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ x^8 & 0 \ldots 0 & x \\ x^9 & x^8 \ldots x & 1 \end{bmatrix}$$

(середина заполняется нулями).

688. Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_n$. Получить квадратную матрицу порядка n:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 \ldots & a_{n-1} & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 \ldots & a_n & a_1 & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_1 & a_2 \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

689. Получить целочисленную квадратную матрицу порядка 7, элементами которой являются числа 1, 2, …, 49, расположенные в ней по спирали (рис. 37).

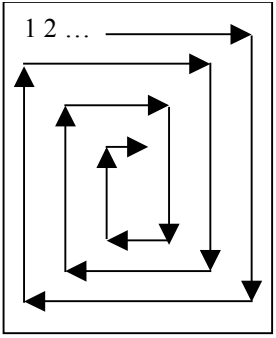
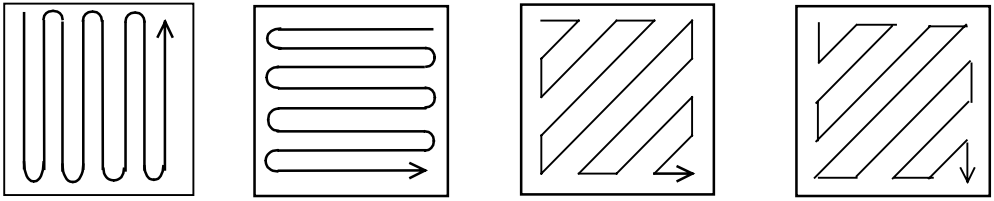


Рис. 37

690. Дана действительная квадратная матрица порядка 7.Найти последовательность действительных чисел b_1 …, b_{49}, получающуюся при чтении данной матрицы по спирали (см. предыдущую задачу).

691.Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_{64}$. Получить действительную квадратную матрицу порядка 8, элементами которой являются числа $a_1, \ldots, a_{64}$, расположенные в ней по схеме, которая приведена на рис. 38, *а–г*.



а б в г

Рис. 38

692. Дана действительная квадратная матрица порядка n. Найти наибольшее из значений элементов, расположенных в заштрихованной части матрицы (рис. 39).

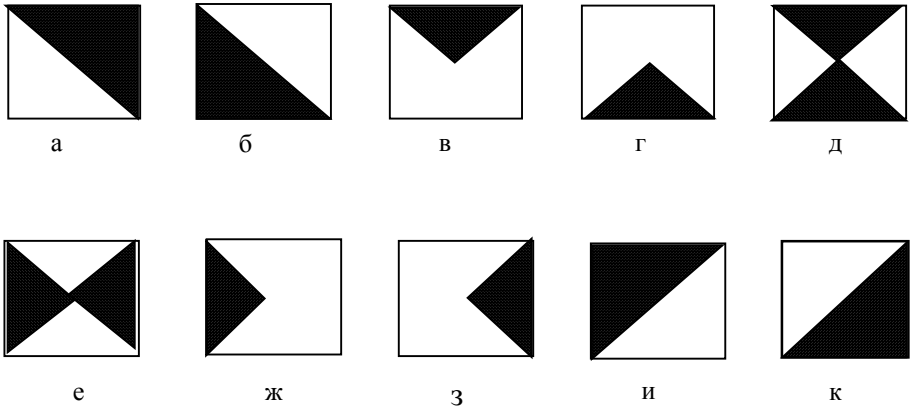


Рис 39

693. Дана действительная квадратная матрица порядка $2n$. Получить новую матрицу, переставляя ее блоки размера $n \times n$:

а) в соответствии с рис. 40, *а*;

б) в соответствии с рис. 40, *б*;

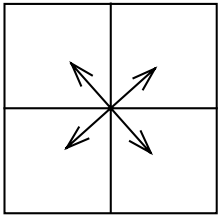
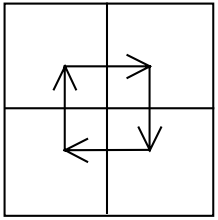
а  б 

Рис. 40

694. Получить квадратную матрицу порядка n:

а) $\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} & & & 1 \\ 0 & & 2 & \\ & \dots & & \\ n & & 0 & \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} n & & & 0 \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1\cdot 2 & & & 0 \\ & 2\cdot 3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n(n+1) \end{bmatrix}$

д) $\begin{bmatrix} & 2 & 1 & & 0 \\ 1 & & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & & 2 \end{bmatrix}$;

е) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \\ . & & & & . \\ . & & 0 & & . \\ . & & & & . \\ 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

ж) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & \\ 3 & 3 & \dots & 3 & & \\ & & & . & & \\ & & . & & & \\ & . & & & & 0 \\ n & & & & & \end{bmatrix}$;

з) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & 1 & \dots & 1 & \\ & & .. & & \\ 0 & & . & & 0 \\ & & .. & & \\ & 1 & \dots & 1 & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

и) $\begin{bmatrix} 1 & & 0 & & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \\ . & . & & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & & . & . \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & & 0 & & 1 \end{bmatrix}$;

к) $\begin{bmatrix} n & & 0 \\ n-1 & n & \\ n-2 & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3\dots n \end{bmatrix}$;

л) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & . \\ n-2 & n-1 & n & \\ n-1 & n & & \\ n & & & 0 \end{bmatrix}$;

м) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\ldots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 2\ldots & n-2 & n-1 \\ 3 & 2 & 1\ldots & n-3 & n-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \ldots 1 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \ldots 2 & 1 \end{bmatrix}$;

н) $\begin{bmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \ldots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{1!^2} & \frac{1}{2!^2} & \ldots & \frac{1}{n!^2} \\ .. & .. & .. & .. \\ \frac{1}{1!^n} & \frac{1}{2!^n} & \ldots & \frac{1}{n!^n} \end{bmatrix}$;

о) $\begin{bmatrix} 1 & & & & n \\ & 2 & 0 & n-1 & \\ & . & & . & \\ & 0 & . & 0 & \\ & . & & . & \\ & 2 & 0 & n-1 & \\ 1 & & & & n \end{bmatrix}$.

695. Таблица футбольного чемпионата, в котором участвовало n команд (см. задачу 413), задана своей верхней правой частью в виде последовательности чисел 0, 1 или 2: первые $n-1$ чисел последовательности относятся к первой строке таблицы, следующие $n-2$ чисел – ко второй и т. д. Построить таблицу целиком, т. е. получить

соответствующую квадратную матрицу порядка n (элементы главной диагонали заполняются нулями).

696. Имеется таблица футбольного чемпионата, в котором участвовало n команд (см. задачу 413). Таблица представлена целочисленной квадратной матрицей порядка n, элементы главной диагонали этой матрицы равны нулю. Перестроить эту таблицу, присвоив каждой команде номер, равный занятому ею месту (для простоты считается, что при равном числе очков места распределяются произвольно). Отдельно указать распределение команд в старой нумерации по занятым ими местам.

§ 21. Матричная алгебра *)

*) В матричной алгебре [10] принято обозначать матрицу какой-нибудь большой буквой латинского алфавита, а элемент матрицы– одноименной малой буквой с индексами. Такая система обозначений выдержана и в этом разделе книги.

За исключением задачи 714, во всех задачах матрицы и векторы считаются действительными.

697. Даны матрицы A и B размера $k\times m$ и $m\times l$ соответственно. Найти произведение AB.

698. Дана квадратная матрица прядка n. Получить матрицу A^2.

699. Даны квадратные матрицы A и B порядка n. Получить матрицу $AB–BA$.

700. Дана квадратная матрица A порядка n. Получить матрицу AB; элементы матрицы B вычисляются по формуле:

а) $b_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$;

б) $b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{i+j-1}, & \text{если } i \le j, \\ \dfrac{1}{i+j+1} & \text{в противном случае;} \end{cases}$

в) $b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{i+j-1}, & \text{если } i < j, \\ 0, & \text{если } i = j, \\ -\dfrac{1}{i+j-1} & \text{в остальных случаях} \end{cases}$

(i, j=1, …, n).

701. Даны квадратная матрица A порядка n и вектор b с n элементами. Получить вектор:

а) Ab;

б) A^2b;

в) $(A–E)b$, где E–единичная матрица порядка n.

702. Дана квадратная матрица порядка n. Получить вектор Ab, где b–вектор, элементы которого вычисляются по формуле:

а) $b_i = \dfrac{1}{i^2+2}$;

б) $b_i = \begin{cases} \dfrac{1}{i^2+2}, & \text{если } i \text{ - четное,} \\ \dfrac{1}{i} & \text{в противном случае} \end{cases}$

(i=1, …, n).

703. Даны квадратная матрица A порядка n, векторы x и y с n элементами. Получить вектор $A(x+y)$.

704. Даны квадратные матрицы A, B и C порядка n. Получить матрицу $(A+B)C$.

705. Даны квадратные матрицы A и B порядка n. Получить матрицу $A(B–E)+C$, где E–единичная матрица порядка n, а элементы матрицы C вычисляются по формуле

$$C_{ij} = \frac{1}{i+j}, \qquad i, j = 1, 2, ..., n.$$

706. Пусть даны квадратная матрица A порядка m и натуральное число n; требуется найти A^n. Алгоритм, основанный на непосредственном применении формулы $A^n = A \cdot A \ldots A$ (n сомножителей), слишком разорителен. Например, A^4 экономичнее вычислять как $(A^2)^2$. Идея одного достаточно экономного алгоритма вычисления A^n заключена в следующем: если $n = 2k$, то $A^n = (A^2)^k$; если же $n = 2k+1$, то $A^n = (A^2)^k \cdot A$. Степень с показателем k вычисляется с учетом этих же соображений. Итак, надо разделить n на 2 с остатком: $n = 2k + l\ (0 \le l \le 1)$, потом это же проделать с k и т. д.

Эти действия приводят, как известно, к построению двоичной записи *n*. Алгоритм, основанный на этой идее, состоит в том, что последовательно вычисляются $A^{a_0}, A^{a_1 a_0}, ..., A^{a_l a_{l-1} \dots a_1 a_0}$, где $a_l a_{l-1} ... a_1 a_0$ – двоичная запись числа *n*. Для этого вычисляется, цифра за цифрой, двоичная запись *n* и, параллельно, степень за степенью, $A^{(2^0)}, A^{(2^1)}, A^{(2^2)}, ...$– каждая следующая степень получается из предыдущей возведением в квадрат. Подсчитывается произведение тех из вычисленных степеней, для которых соответствующая цифра двоичного представления равна 1. Например, запись 9 в двоичной системе есть 1001 $(9 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1)$; для вычисления A^9 достаточно найти A^2, A^4, A^8 (3 умножения), а затем определить $A \cdot A^8$ (1 умножение).

Преимущество этого алгоритма в сравнении с простейшим состоит в том, что простейший алгоритм требует числа умножений,

растущего как линейная функция от n, а здесь число умножений, грубо говоря, пропорционально количеству цифр числа n или двоичному логарифму n. Это преимущество весьма ощутимо при работе с матрицами (из-за трудоемкости каждого умножения), хотя, разумеется, этот алгоритм может быть использован и для вычисления степени любого числа.

Написать программу, реализующую предложенный алгоритм.

707. Дана квадратная матрица порядка 5. Получить матрицу A^{15} (см. задачу 706).

708. Даны квадратная матрица A порядка m, натуральное число n. Получить матрицу $E + A + A^2 + ... + A^n$, где E–единичная матрица порядка m.

709. Даны квадратная матрица A порядка m, натуральное число n, действительные числа p_n, p_{n-1}, …, p_0. Получить матрицу

$p_n A^n + p_{n-1} A^{n-1} + ... + p_1 A + p_0 E$, где E – единичная матрица порядка m.

710. Дана матрица A размера $m \times n$. Получить транспонированную матрицу A^* (ее размер – $m \times n$).

711. Дана матрица A:

а) размера $m \times m$;

б) размера $m \times n$.

Получить матрицу AA^* (ее размер $m \times m$).

712. Дана квадратная матрица A порядка m. Получить матрицы $\frac{1}{2}(A + A^*)$ и $\frac{1}{2}(A - A^*)$.

713. Следом квадратной матрицы называется сумма элементов, расположенных на главной диагонали.

Даны квадратная матрица порядка m, натуральное число n. Вычислить следы матриц A, A^2, …, A^n.

714. Комплексная матрица Z представляется парой X, Y действительных матриц так, что $Z = X + iY$. Даны действительные квадратные матрицы A, B, C и D порядка m. Найти произведение двух комплексных матриц $A + iB$ и $C + iD$, т. е. найти действительные квадратные матрицы X и Y порядка m такие, что
$X + iY = (A + iB)(C + iD)$.

715. Пусть для квадратной матрицы A, имеющей порядок n, существует обратная матрица A^{-1}. Тогда, рассматривая элементы матрицы A^{-1} ка неизвестные величины, из соотношения $AA^{-1}=E$, где E– единичная матрица порядка n, можно получить систему n^2 линейных уравнений с n^2 неизвестными. Найти матрицу этой системы и вектор, определяющий ее правую часть, считая, что неизвестные элементы матрицы A^{-1} пронумерованы так, что сначала по порядку идут элементы первой строки, затем–второй, и т. д. Считать, что A –

заданная матрица порядка 4; в ответе должны получиться квадратная матрица и вектор порядка 16.

716. Правая треугольная матрица A порядка n задана в виде последовательности $(n+1)n/2$ чисел: сначала идет n элементов первой строки, затем $n-1$ элемент второй строки, начиная со второго элемента, и т. д. (из последней, n–й строки берется только n–й элемент). Кроме этой последовательности дан вектор b с n элементами. Найти вектор Ab.

717. Две правые треугольные матрицы A и B порядка n заданы так, как описано в предыдущей задаче. Получить в аналогичном виде:

а) матрицу AB;

б) матрицу $A(E+B^2)$, где E–единичная матрица порядка n.

718. Симметричная квадратная матрица A порядка n задана последовательностью $n(n+1)/2$ чисел, аналогично правой

треугольной матрице (см. задачу 716). Кроме этой последовательности дан вектор b с n элементами. Найти вектор Ab.

719. Симметричные квадратные матрицы A и B порядка n заданы последовательностями из $n(n+1)/2$ чисел, аналогично правым треугольным матрицам (см. задачу 716). Получить в аналогичном виде:

а) матрицу AB;

б) матрицу $A^2 - B^2$.

§ 22. Численные методы *)

*) С численными методами, рассматриваемыми в задачах этого раздела, можно ознакомиться в [10].

720. Даны действительные числа $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$, $t_1, \ldots, t_m$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_n,\ x_1 \le t_i \le x_n, \quad i = 1, \ldots, m)$. Число y представляет собой значение некоторой функции f от аргумента; $y_j = f(x_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$. С помощью линейной интерполяции получить значения $f(t_1)$, $f(t_2)$, …, $f(t_m)$.

721. Даны действительные числа h, x_1, …, x_n, y_1, …, y_n. Все сказанное о x_1, …, x_n, y_1, …, y_n в предыдущей задаче остается в силе. С помощью линейной интерполяции получить значения функции f для значений аргументов, равных x_1, x_1+h, x_1+2h, ..., x_1+kh, где k - наибольшее целое, для которого $x_1 + kh \le x_n$.

722. Даны натуральное число n, действительные числа $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_n$. Рассмотреть предыдущую задачу, считая, что $h = (x_n - x_1)/n$ (ответом должна служить последовательность, содержащая $n+1$ число).

723. Даны действительные числа $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_n$, t ($x_1<x_2<...<x_n$, $y_1 \le t \le y_n$). Предполагается, что $y_1, ..., y_n$ представляют собой результаты измерения температуры воздуха в моменты времени $x_1, ..., x_n$. С помощью линейной интерполяции указать все моменты времени, в которые температура воздуха была равна t (не исключен случай $y_j=y_{j+1}=t$ для некоторых j ($1 \le j \le n-1$)).

724. Вернуться к задачам 721, 723, считая, что разности между соседними известными значениями аргумента $x_1, ..., x_n$ равны между собой: $x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} = ... = x_2 - x_1 = h$. Вместо $x_1, ..., x_n$ задаются x_1 и h, порядок остальных исходных данных не изменяется.

725. Дано действительное положительное число ε. Методом деления отрезка пополам найти приближенное значение корня уравнения $f(x) = 0$. Абсолютная погрешность найденного значения не должна превосходить ε. (Ниже, рядом с уравнением $f(x) = 0$, дополнительно указан отрезок , содержащий корень.)

а) $x + \ln(x + 0.5) - 0.5 = 0$, $[0, 2]$;

б) $x^5 - x - 0.2 = 0$, $[1, 1.1]$;

в) $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$, $[0, 1]$;

г) $x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2 = 0$, $[1, 1.5]$;

д) $\dfrac{2\sin^2 x}{3} - \dfrac{3\cos^2 x}{4} = 0$, $[0, \pi/2]$;

е) $x^4 + 0.8x^3 - 0.4x^2 - 1.4x - 1.2 = 0$, $[-1.2, -0.5]$;

ж) $x^4 - 4.1x^3 + x^2 - 5.1x + 4.1 = 0$, $[3.7, 5]$.

726. Дано действительное положительное число ε. Методом хорд вычислить с точностью ε *) корень уравнения $f(x) = 0$ (ниже,

следом за уравнением $f(x) = 0$, дополнительно задан отрезок, содержащий корень):

а) $x \cdot 2^x - 1 = 0$, [0, 1];

б) $x^2 - \sin 5x = 0$, [0.5, 0.6];

в) $\dfrac{2\sin^2 2x}{3} - \dfrac{3\cos^2 2x}{4} = 0$, $[0, \pi/4]$;

г) $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$, [2.1, 2.2]

д) $(4 + x^2)(e^x - e^{-x}) = 18$, [1.2, 1.3];

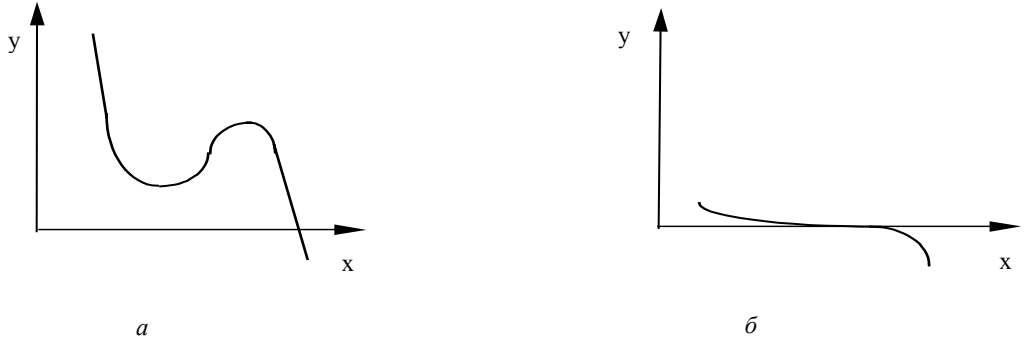
е) $x^4 + 0.5x^3 - 4x^2 - 3x - 0.5 = 0$, [–1, 0];

ж) $x^2 - 1.3 \ln(x + 0.5) - 2.8x + 1.15 = 0$, [2.1, 2.5].

*) Когда заходит речь о «вычислении с точностью ε», следует иметь в виду, что лишь немногие численные методы, основанные на построении последовательных приближений x_0, x_1, ... к искомому числу x, гарантируют, подобно методу деления отрезка пополам, что абсолютная погрешность найденного значения будет меньше ε. Будем

считать, что требуемая точность ε достигнута, как только получено такое x_m (при $m > 1$), для которого $|x_m - x_{m-1}| < \varepsilon$. В данной задаче предполагается, что в программе будет реализован именно этот подход к оценке точности.

727. Вернуться к предыдущей задаче, считая, что построение приближений к корню уравнения $f(x) = 0$ следует закончить, когда будет получено такое приближение $\bar{x}$, для которого $|f(\bar{x})| < \varepsilon$. (Этот



а *б*

Рис. 41

подход к оценке точности может быть приемлемым только в тех случаях, когда известно, что $|f(x)|$ не принимает значений меньше ε при значениях x, удаленных от корня уравнения $f(x) = 0$; рис.41, *а*, *б*.)

728. В уравнениях, приведенных в задачах 725, 726, вычислить корень, находящийся в заданном отрезке (отрезок следует за уравнением), методом деления отрезка пополам и методом хорд с одной и той же точностью ε. Сравнить количество шагов, которые нужно сделать для получения корня этими методами.

729. Дано действительное положительное ε. Методом касательных вычислить с точностью ε (см. замечание к № 726) корень уравнения $f(x) = 0$ (ниже, следом за уравнением $f(x) = 0$, в скобках указано начальное приближение к корню):

а) $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$, (2.2);

б) $\operatorname{tg} x - x = 0$, (4.67);

в) $1.8\,x^4 - \sin 10x = 0$, (0.22);

г) $x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$, (–11);

д) $x^3 - 6x^2 + 20 = 0$, (2.31).

730. Решить методом касательных перечисленные в предыдущей задаче уравнения, прекращая построение приближений к корню уравнения $f(x) = 0$ в тот момент, когда будет получено такое приближение $\bar{x}$, для которого $\left|f(\bar{x})\right| < 0.00001$.

731. Дано действительное положительное число ε. Методом итераций вычислить с точностью ε (см. замечание к № 726) корень уравнения $f(x) = 0$ (ниже, следом за уравнением $f(x) = 0$, в скобках указано начальное приближение к корню):

а) $x - \dfrac{\sin x}{2}\Big| - 1 = 0$, (0);

б) $2x^3 + 4x - 1 = 0$, (0.11);

в) $x^3 + 12x - 2 = 0$, (0.95);

г) $5x - 8 \ln x = 8$, (4.32);

д) $x^3 + x = 1000$, (9.42);

е) $x - \sin x = 0.25$, (1.17);

ж) $x^3 - 6x^2 + 20 = 0$, (2.25);

з) $5x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0$, (0.6).

732. Сравнить методы деления отрезка пополам, хорд, касательных и итераций, поочередно используя их для решения одного и того же уравнения. Независимо от метода построение приближений к корню уравнения $f(x) = 0$ следует заканчивать, как только будет получено такое приближение $\bar{x}$, для которого $\left|f(\bar{x})\right| < \varepsilon$. Значение ε следует поочередно брать равным 0.01, 0.001, ..., 0.0000001. Для каждого из методов построить график или столбчатую диаграмму изменения числа потребовавшихся приближений при переходе от одного значения ε к другому. В качестве уравнения, на котором

проводится сравнение методов, и отрезка, которому принадлежит корень, следует взять:

а) $x^3 + x^2 - 3 = 0$, [0.6, 1.4];

б) $x^5 - x - 0.2 = 0$, [0.9, 1.1];

в) $5x^3 - x - 1 = 0$, [0.6, 0.8];

г) $x^3 - 2x - 5 = 0$, [1.9, 2.93];

д) $x^3 + x = 1000$, [9.1, 10];

е) $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$, [0, 1].

Для метода касательных и итераций в качестве начального приближения выбирается подходящий конец отрезка.

733. Дано действительное положительное число ε. Найти с помощью подходящих методов все корни уравнения $f(x) = 0$ с точностью ε. Для получения отрезков, содержащих по одному корню уравнения $f(x)$, или для получения начальных приближений к корням исследовать график функции $y = f(x)$. В качестве $f(x)$ рассмотреть:

а) $x^3 - 6x^2 + 12x + 5 = 0$;

б) $x^6 + x^2 - 2 = 0$;

в) $x^3 + 3x + 2 = 0$;

г) $\sqrt{x} + 1 = \cos(0.5x)$;

д) $3x^2 - \cos 2x - 1 = 0$;

е) $2\ln x - 1/x + 0.5 = 0$;

ж) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 16 = 0$.

734. Найти с точностью 0.00001 наименьший корень уравнения:

а) $x^3 - 6x^2 + 19.8 = 0$;

б) $x^4 + x^3 - 10x^2 - 34x - 25 = 0$;

в) $x^3 - 1.75x + 0.75 = 0$;

г) $x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 3 = 0$;

д) $3x - \sin x = 7$;

е) $x^8 - 0.4x^3 - 1.24 = 0$;

ж) $x = \cos x + 1$;

з) $e^{-x} = 0.5 + \sqrt{x}$;

и) $x^4 + 39x^3 + 958x^2 - 1081x - 1987 = 0$.

Использовать какой-нибудь подходящий численный метод решения уравнений. Для получения отрезка, содержащего наименьший корень уравнения $f(x) = 0$, или для получения начального приближения к этому корню исследовать график функции $y = f(x)$.

735. Вернуться к предыдущей задаче, рассматривая вместо наименьшего корня:

а) наибольший;

б) наименьший отрицательный;

в) наибольший положительный;

г) второй по величине;

д) наименьший по модулю.

736. Найти с точностью 0.0001 все корни уравнения $1/x = \sin x$, принадлежащего отрезку $[-\pi, \pi]$.

737. Для каждого целого числа n из диапазона от 1 до 50 найти подходящим методом с точностью $1/n^2$ наибольший корень уравнения $\frac{x^3}{n^2} - 3x^2 + 1 = 0$ (этот корень, как нетрудно показать, меньше, чем $3n^2$). Получить графическое изображение зависимости значения наибольшего корня от n.

738. Иногда функция $y = f(x)$ задается на некотором отрезке с помощью уравнения вида $F(x, y) = 0$. Вычислить значения функции, заданной уравнением:

а) $y^3 + x^3 - 2xy = 0$ для $x = 0, -0.1, -0.2, ..., -1$;

б) $y^3 + y^2 - x^2 = 0$ для $x = 1, 1.1, 1.2, ..., 2$.

В первом случае функция определена и неотрицательна на отрезке $[-1, 0]$, ее значения на этом отрезке меньше, чем 1; во втором случае функция определена и отрицательна на отрезке $[1, 2]$, ее значения на этом отрезке меньше, чем 1.5. Для нахождения значений y

использовать подходящий численный метод решения уравнений. Вычисление проводить с точностью 0.0001.

739. Написать программу решения по методу Гаусса системы линейных уравнений

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Квадратная матрица $[a_{ij}]_{i,j = 1, \ldots, n}$ и вектор $b_1, \ldots, b_n$ - исходные данные задачи (предполагается, что система совместна и имеет единственное решение).

Применить программу для решения следующих систем:

а)
$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 14; \end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 &= 8, \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 &= 9, \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 &= 20; \end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned} 6x_1 - x_2 - x_3 &= 11.33, \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 &= 32, \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 &= 42; \end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 5, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 15; \end{aligned}$$

д) $$\begin{aligned} 0.427x_1 + 3.210x_2 - 1.307x_3 &= 2.425, \\ 4.270x_1 - 0.513x_2 + 1.102x_3 &= -0.176, \\ 0.012x_1 + 1.273x_2 - 4.175x_3 &= 1.423; \end{aligned}$$

е)
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0, \\ x_1 - 10x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 &= -10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 &= 15; \end{aligned}$$

ж)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 3.1 &= 0, \\ 0.1x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 &= 0, \\ 0.15x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - 1 &= 0, \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2.1x_4 + 4.7 &= 0; \end{aligned}$$

з)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1.5x_2 - x_3 + 2.4x_4 &= 6, \\ -0.5x_1 + x_2 - 3.1x_3 - 4x_4 &= -12, \\ 2x_1 - 0.8x_2 - 4x_4 &= 1, \\ x_1 - 1.3x_2 + 3.9x_3 - 3.7x_4 &= 3.1; \end{aligned}$$

и)
$$\begin{aligned} 4.13x_1 - 2.87x_2 - 1.94x_3 + 0.61x_4 &= 0.32, \\ 1.27x_1 + 7.23x_2 - 0.15x_3 + 1.71x_4 &= -4.16, \\ 0.19x_1 + 2.75x_2 + 3.14x_3 - 0.76x_4 &= 2.33, \\ 2.87x_1 + 4.33x_2 - 2.41x_3 - 3.42x_4 &= 2.79; \end{aligned}$$

к)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_5 &= 0.5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 3x_5 &= 5.4, \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 5, \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 &= 7.5, \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 3.3; \end{aligned}$$

л)
$$\begin{aligned} 7.9x_1 + 5.6x_2 + 5.7x_3 - 7.2x_4 &= 6.68, \\ 8.5x_1 - 4.8x_2 + 0.5x_3 + 3.5x_4 &= 9.95, \\ 4.3x_1 + 4.2x_2 - 3.2x_3 + 9.3x_4 &= 8.6, \\ 3.2x_1 - 1.4x_2 - 8.9x_3 + 8.3x_4 &= 1; \end{aligned}$$

м) $$\begin{aligned} 10.2x_1 + 6.07x_2 - 9.1x_3 + 50.3 &= 0, \\ 9.28x_1 - 79.6x_2 - 4.92x_3 + 25.8 &= 0, \\ 68.3x_1 - 2.71x_2 - 8.14x_3 + 32.6 &= 0. \end{aligned}$$

740. Дано действительное положительное число ε. Методом итераций решить систему линейных алгебраических уравнений с точностью ε. В данной задаче вычисление с точностью ε означает следующее. Вычисляется последовательность векторов-приближений $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ... x_n^{(m)})$ где n—число неизвестных системы, m=0, 1, 2, ... Если для некоторого k выполнено условие

$$\max_i \left| x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon, \ i=1, 2, \dots, n,$$

то вектор $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$ считается решением системы с точностью ε:

а)
$$\begin{aligned} x_1 &= 2-0.06x_2+0.02x_3, \\ x_2 &= 3-0.03x_1+0.05x_3, \\ x_3 &= 5-0.01x_1+0.02x_2; \end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned} x_1 &= 1.2-0.1x_2-0.1x_3, \\ x_2 &= 1.3-0.2x_1-0.1x_3, \\ x_3 &= 1.4-0.2x_1-0.2x_2; \end{aligned}$$

в)
$$\begin{aligned} x_1 &= 0.1x_2-0.2x_3+0.3x_4, \\ x_2 &= -0.1x_1+0.1x_3-0.2x_4+0.5, \\ x_3 &= -0.1x_1-0.15x_2+0.05x_4-0.5, \\ x_4 &= -0.15x_1-0.1x_2-0.005x_3+0.75; \end{aligned}$$

г)
$$\begin{aligned} x_1 &= -0.2x_2+0.1x_3-0.2x_4-0.4, \\ x_2 &= 0.2x_1-0.2x_3+0.2, \\ x_3 &= 0.2x_1-0.4x_2+0.2x_4-0.4, \\ x_4 &= 0.333x_1-1.111; \end{aligned}$$

д) $$\begin{aligned} x_1 &= 0.12x_1 - 0.18x_2 + 0.08x_3 - 0.64, \\ x_2 &= 0.15x_1 + 0.06x_2 - 0.11x_3 + 0.26, \\ x_3 &= 0.04x_1 - 0.1x_2 - 0.09x_3 + 1.34; \end{aligned}$$

е) $$\begin{aligned} x_1 - 0.1x_2 + 0.2x_3 &= 0.3, \\ 0.1x_1 + x_2 - 0.1x_3 - 0.1x_4 &= -0.2, \\ -0.1x_2 + x_3 - 0.1x_4 &= 0.1, \\ -0.1x_2 + 0.1x_3 + x_4 &= 0.2; \end{aligned}$$

ж) $$\begin{aligned} 5.92x_1 - 1.24x_2 - 1.84x_3 &= 2.44, \\ 2.72x_1 - 9.71x_2 + 2.43x_3 &= 2.4, \\ 1.76x_1 - 3.12x_2 + 9.38x_3 &= 1.93. \end{aligned}$$

741. Вычислить интегралы по формулам численного интегрирования и по формуле Ньютона-Лейбница. Сравнить результаты:

а) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$; б) $\int_1^9 \frac{dx}{x}$; в) $\int_0^{\pi/3} \sin x dx$;

г) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; д) $\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx$.

742. Дано действительное число ε. Вычислить интегралы с точностью ε. В данной задаче вычисление с точностью ε означает следующее. Отрезок интегрирования разбивается на n_i равных частей и строится сумма S_{n_i}, которая является приближенным значением интеграла. Если выполняется условие $\left|S_{n_{i+1}} - S_{n_i}\right| < \varepsilon$, $\left|S_{n_{i+1}}\right|$ считается значением интеграла с точностью ε. (Здесь, $n_i < n_{i+1}$ (i=1, 2, ...).)

а) $\int_0^{1,2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int_0^3 \sqrt{4+x^2 dx}$;

в) $\int\limits_0^6 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

г) $\int\limits_0^2 e^{-2}\cos\frac{\pi x}{4}dx$;

д) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{1-0.25\sin^2 x}}$;

е) $\int\limits_0^{\pi/6} \sqrt{tgx}\,dx$;

ж) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{x}dx$;

з) $\int\limits_1^7 \frac{e^x}{x}dx$;

и) $\int\limits_0^{10} (x-5)^2(10-x)dx$;

к) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$;

л) $\int\limits_0^1 e^{2x}\sin(2x^2+1)dx$;

м) $\int\limits_{0.2}^{0.56} \arccos e^{-\sqrt[3]{3x}}dx$;

н) $\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(4+t^2)}}$;

о) $\int\limits_0^5 e^x \sin x^2 dx$;

п) $\int_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{t}}\,dt.$

Если удается с помощью формулы Ньютона—Лейбница найти точное значение интеграла, то полезно сравнить с ним результат приближенного вычисления.

743. Вычислить длину эллипса по формуле

$$S = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi}\,d\varphi,\quad a = 30,\quad b = 20$$ (a и b – полуоси эллипса),

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

744. Вернуться к задаче 738. Найти приближенные значения интегралов функций $y = f(x)$, определенных в *а*) и *б*) с помощью уравнений вида $F(x, y) = 0.$ Первая функция интегрируется на отрезке [–1, 0], вторая на отрезке [1, 2]. Вычисление интеграла следует

начинать, разделив отрезок интегрирования на 5 частей. Затем уточнить значение интеграла, уменьшая шаг вдвое. Вычисление проводить с точностью 0.001. Значения функции вычислять с точностью 0.00001.

745. Дано действительное положительное число ε. Вычислить с точностью ε площадь фигуры между дугами двух кривых:

а) $y = \sin x^2 + 2, \quad y = e^{x^2}$;

б) $y = 2^{x^2}, \quad y = \cos x^2 + 1$.

Воспользоваться численными методами решения уравнений и интегрирования.

746. Решить дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$. После уравнения в скобках записаны исходные данные для решения: x_0 –

начальное значение аргумента, y_0 – начальное значение функции от x_0, отрезок, на котором решается уравнение, h – шаг.

а) $y' = x + \cos\frac{y}{\pi}$ (x_0 =1.7, y_0 =5.3, [1.7, 5.2], h=0.15);

б) $y' = \frac{x}{2} + \frac{e^2}{x+y}$ (x_0=1.8, y_0=4.5, [1.8, 4.6], h=0.1);

в) $y' = \sqrt[3]{x^2 + 3y}$ (x_0=3, y_0=5, [3, 11.4], h=0.3);

г) $y' = \frac{y}{x}(y\ln x - 1)$ (x_0=1, y_0=0.5, [1, 0.6], h=0.005);

д) $y' = 2x + \sin\frac{y}{x}$ (x_0=0, y_0=1, [0, 1], h=0.1);

е) $y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ (x_0=0, y_0=0, [0, 1], h=0.1);

ж) $y' = x + \sqrt[3]{3 + y^2}$ (x_0=0, y_0=0, [0, 1], h=0.1);

з) $y' = \dfrac{y}{e^{-x} + y^2}$ (x_0=0, y_0=1, [0, 1], h=0.01);

и) $y' = x - y$ (x_0=0, y_0=0, [0, 1], h=0.05);

к) $y' = \dfrac{xy}{1 - x^2}$ (x_0=0, y_0=1, [0, 0.5], h=0.05);

л) $y' = 2xy$ (x_0=0, y_0=1, [0, 1], h=0.025);

м) $y' = 2x - 3y$ (x_0=0, y_0=0, [0, 1], h=0.1);

н) $y' = \sqrt{1 + x^3 + y}$ (x_0=0.8, y_0=3.8, [0.8, 5.0], h=0.15).

§ 23. Случайные числа

747. Если записать результаты серии бросаний монеты, то может получиться, например, последовательность:

орел, решка, решка, орел, решка, орел, орел, орел, решка, ...

Обозначив выпадение решки единицей, а выпадение орла – двойкой, получим числовую последовательность

2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, ...

Протокол серии независимых испытаний, каждое из которых может иметь один из n равновероятных исходов (в предыдущем номере n=2), удобно изображать последовательностью чисел 1, 2, ..., n – номеров исходов. При n=6 (таково, например, число исходов при бросании игральной кости) может получиться

5, 4, 2, 1, 4, 3, 6, 6, 5, 2, 5, 6, 1, 3, ...

Подобного рода последовательности на практике могут быть использованы для подбора исходных данных для опытной проверки некоторой гипотезы, многократного принятия решения в повторяющейся сложной ситуации, моделировании различных физических явлений (например, броуновского движения) и т. д. Некоторые языки программирования позволяют включать в программы обращения к так называемым датчикам случайных чисел – операторам или функциям, вырабатывающим при каждом обращении очередной член некоторой числовой последовательности, похожей на рассмотренные выше. Обычно датчики устроены так, что членами последовательности оказываются действительные числа r_0, r_1, ..., принадлежащие интервалу (0,1). В практических применениях большинства таких датчиков последовательность r_0, r_1, ... может рассматриваться как последовательность равномерно распределенных в интервале (0, 1) независимых случайных чисел, т. е. можно считать,

что какой бы интервал (a, b) внутри (0, 1) мы ни взяли, при $k \geq 0$ вероятность того, что r_k попадает в (a, b), не зависит от значений других членов последовательности и равна длине b-a этого интервала. Как правило, числа r_0, r_1, ... при работе с датчиками образуются вовсе не случайно, а по определенному закону, лишь достаточно хорошо имитирующему случайность, поэтому правильнее говорить о псевдослучайных числах. Однако для краткости приставку «псевдо» часто опускают, как и упоминание о независимости чисел, и говорят о последовательности случайных чисел или случайной последовательности, уточняя, при необходимости, характер распределения. Так будем поступать и мы.

Предполагается провести следующие эксперименты с датчиком случайных чисел:

а) Получить с помощью датчика 20 чисел и оценить на глаз их «случайность» (проконтролировать отсутствие заметных закономерностей).

б) Получить с помощью датчика 300 чисел r_0, r_1 ..... , r_{299} и оценить по ним равномерность распределения: разбить интервал (0, 1) на 10 интервалов равной длины, построить столбчатую диаграмму (гистограмму) и секторную диаграмму, показывающие, сколько чисел из последовательности r_0, r_1 ....., r_{299} попало в каждый интервал.

748. Если готового датчика случайных чисел (см. предыдущую задачу) в распоряжении программиста нет, то он может самостоятельно определить датчик в программе. Не вдаваясь в довольно сложную теорию, опишем один из таких датчиков (см. [35]). Зафиксируем некоторые натуральные a, c, m, s_0 такие, что m – наибольшее из них. Определим последовательность неотрицательных целых чисел s_0, s_1,… следующим правилом: s_n равно остатку от

деления суммы $as_{n-1}+c$ на m, и вместе с последовательностью $s_0, s_1,\ldots$ рассмотрим последовательность $r_n = \dfrac{s_n+1}{m+1}$ ($n = 0, 1, \ldots$). При удачном выборе a, c, m, s_0 последовательность $r_0, r_1,\ldots$ будет хорошо имитировать последовательность равномерно распределенных в интервале (0, 1) случайных чисел. Одним из таких выборов оказывается следующий:

1) $m = 2^k$,где k берется настолько большим, насколько это возможно (надо иметь в виду, что последовательность $s_0, s_1, \ldots$, равно как и последовательность $r_0, r_1, \ldots$, будет периодической с периодом 2^k; при небольших значениях k периодичность будет слишком заметной)

2) При делении a на 8 должен получаться остаток 5. Кроме этого, требуется, чтобы выполнялось $\sqrt{m} < a < m - \sqrt{m}$.

3) Число c должно быть нечетным; при этом желательно, чтобы выполнялось приближенное равенство $\frac{c}{m} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0.21132\ldots$

4) Число s_0 можно выбирать произвольно в диапазоне от 0 до $m - 1$.

В связи со сказанным предполагаются следующие задания:

а) Подобрать несколько вариантов троек a, c, m, удовлетворяющих условиям 1) – 3).

б) Найти еще какое-нибудь соображение, позволяющее хорошо имитировать случайность, и на его основе описать новый датчик.

в) Пользуясь различными датчиками, среди которых должны быть датчики, построенные по предложенной выше схеме с различным выбором a, c, m, s_0, и «самодельные» датчики, построенные на других соображениях, требуется провести эксперименты , описанные в предыдущей задаче.

749. Датчики случайных чисел находят интересное применение в вычислении площадей и объемов: на этом принципе основан известный метод Монте-Карло (объяснение происхождения названия и подробное изложение самого метода с многочисленными примерами изложений имеется, например, в [47]). Пусть задана фигура M, целиком лежащая внутри единичного квадрата, и пусть нужно вычислить ее площадь. Пусть в единичном квадрате выбрано наугад n точек (рис. 42) и пусть $v(n)$ – число точек, попавших внутрь M. Тогда геометрически ясно, что при больших n площадь фигуры M будет

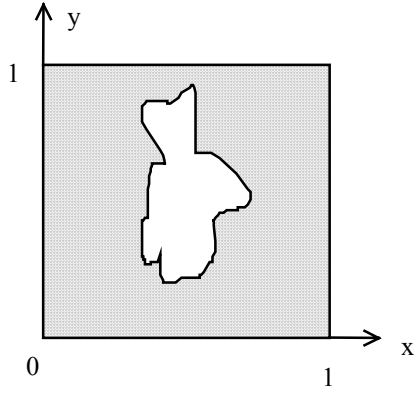


Рис. 42

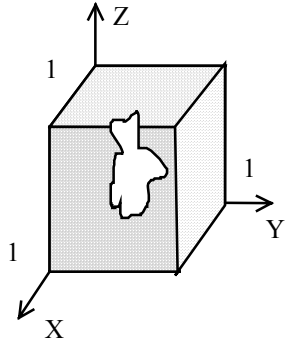


Рис 43

приблизительно равна $v(n)/n$ и чем больше будет n, тем ближе мы подойдем к истинному значению площади. В качестве выбираемых «наугад» точек в этих вычислениях можно взять точки с координатами (r_0, r_1), (r_2, r_3), …, где в роли r_0, r_1,… выступают числа, получаемые с помощью датчика случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0, 1).

Аналогично, беря точки с координатами (r_0, r_1, r_2), (r_3, r_4, r_5), …, можно вычислять объемы тел, целиком лежащие внутри единичного куба (рис. 43).

В связи с методом Монте-Карло предлагаются следующие задания. Воспользовавшись несколькими датчиками (в крайнем случае одним датчиком):

а) определить площадь круга $(x - 0.5)^2+(y - 0.5)^2 < 1/4$; для этого найти по 200 точек с помощью каждого из датчиков; ответы сравнить с $\pi/4$;

б) определить объем шара $(x-0.5)^2+(y-0.5)^2+(z-0.5)^2<1/4$; для этого найти по 200 точек с помощью каждого из датчиков; ответы сравнить с $\pi/6$.

750. Случайная числовая последовательность r_0, r_1, … , члены которой равномерно распределены в интервале (0, 1), может быть использована для построения случайной последовательности v_0, v_1, …, члены которой принадлежат конечному множеству, состоящему из элементов x_1, … , x_n. Элементы x_1, …, x_n повторяются в последовательности v_0, v_1,… с заданными частотами, соответственно равными p_1, …, p_n (т.е. относительно последовательности v_0, v_1,… можно считать, что x_i встречается в ней с вероятностью p_i (i=1, 2, … , n) $p_1+\ldots+p_n=1$). Последовательность v_0, v_1, … будем называть случайной последовательностью с распределением $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$.

Для построения v_0, v_1, … используется следующий прием [47].

Интервал (0, 1) разбиваем на n интервалов, длины которых равны p_1 , … , p_n . Координаты точек разбиения будут p_1 , p_1+p_2 , $p_1+p_2+p_3$, …, $p_1+p_2+...+p_{n-1}$. Полученные интервалы обозначаем через I_1 , … , I_n. Теперь перебираем числа r_0, r_1, r_2, …., и если очередное число r_k попадает в интервал I_j $(1 \le j \le n)$, то в качестве v_k берем x_j (в силу равномерного распределения членов последовательности r_0, r_1, … в интервале (0 , 1) вероятность попадания r_k в некоторый интервал равна длине этого интервала). Если вдруг окажется, что r_k совпадает с точкой разбиения (концом интервала), то можно условно считать, что число r_k попало в интервал, лежащий справа от него.

Предлагаются следующие задания, в которых надо воспользоваться датчиком случайных чисел:

а) Построить 100 первых членов случайной последовательности из нулей и единиц, в которой нуль и единица равновероятны, т. е.

последовательности с распределением $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

б) Построить 100 первых членов случайной последовательности из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, в которой все эти цифры равновероятны, т. е. последовательности с распределением $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$.

в) Построить 100 первых членов случайной последовательности из нулей и единиц, в которой нуль встречается с вероятностью 1/4, а единица – с вероятностью 3/4, т. е. последовательности с распределением $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

г) Построить 100 первых членов случайной последовательности из слов «камень», «ножницы», «бумага», в которой эти три слова равновероятны, т. е. последовательности с распределением

$\begin{pmatrix} \text{камень} & \text{ножницы} & \text{бумага} \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. (Эту последовательность можно использовать для выбора ходов в известной игре «камень, ножницы, бумага».)

д) Построить 100 первых членов случайной последовательности из слов «камень», «ножницы», «бумага», в которой слово «камень» встречается с вероятностью 1/3, слово «ножницы» – с вероятностью 1/2, слово «бумага» – с вероятностью 1/6 , т. е. последовательности с распределением $\begin{pmatrix} \text{камень} & \text{ножницы} & \text{бумага} \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$. (Эту последовательность можно использовать для выбора ходов в известной игре «камень, ножницы, бумага» со следующей системой премий: когда «камень» тупит «ножницы», присуждается одно очко, когда «ножницы» режут «бумагу», присуждается два очка, когда «бумага» покрывает «камень», присуждается три очка.) *)

*) Указанные в заданиях г) и д) стратегии чередования ходов, основанные на случайных последовательностях, является в определенном смысле оптимальными. См. об этом, например, в книге [33].

751. Для наглядной демонстрации некоторых законов теории вероятностей используется прибор, называемый доской Гальтона (рис. 44). Металлические шарики по очереди попадают в верхний канал; встретив препятствие они должны выбрать путь налево или направо, затем проходить второй выбор и т. д. Каждый из выборов случаен, каждая из вероятностей выбора пути налево и направо равна 1/2. При достаточно высоком качестве прибора наблюдаемая картина распределения шариков в нижних отделениях доски Гальтона хорошо согласуется с вероятностными расчетами, по которым количества шариков, оказавшихся в отделениях, пронумерованных числами 1, …, m (на рис.44 $m=5$), должны быть пропорциональными (с некоторым

коэффициентом пропорциональности, зависящим от общего числа шариков) числам из m-й строки треугольника Паскаля (см. задачу 555). Кривая, огибающая верхушки столбцов из шариков, должна иметь колоколообразную форму (рис. 45). Путь шарика по доске Гальтона, содержащей m нижних отделений, можно изобразить группой из m нулей и единиц: нуль изображает выбор пути налево, единица - направо. Получив с помощью датчика случайных чисел mn членов случайной последовательности $v_0, v_1, \ldots$ из нулей и единиц с распределением $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$(см. задачу 750а) и взяв группы $(v_0, \ldots, v_{m-1})$, $(v_m, \ldots, v_{2m-1})$, …, $(v_{(n-1)m}, \ldots, v_{nm})$, мы получим изображения путей n воображаемых шариков. Номер отделения, в которое попадает шарик, определяется по количеству единиц в изображении маршрута. Пусть даны натуральные n и m ($n \geq 2^m$). Требуется подсчитать, исходя из модели, которая основана на датчике случайных чисел, количество

воображаемых шариков, попавших в каждое из отделений. Построить графические представления результатов подсчета (колоколообразность диаграммы или графика будет говорить о хорошем качестве датчика).

752. Датчики случайных чисел могут использоваться для построения на вычислительных машинах моделей сложных физических явлений. Пусть имеются два закрытых сосуда, первый из

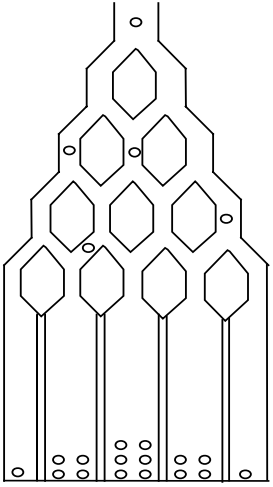


Рис. 44

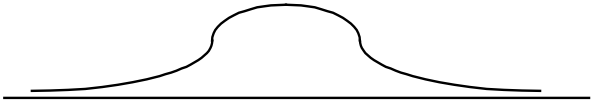


Рис. 45

которых наполнен газом, а второй пуст. Сосуды соединены трубкой, перекрытой клапаном. После того как клапан откроют, молекулы газа будут стремиться перейти из области с более высоким давлением в область с более низким давлением. Но взаимные столкновения молекул и их столкновения со стенками сосудов и трубки будут приводить к тому, что любая из молекул может изменить свое движение на противоположное, поэтому картина выравнивания давлений в первом и втором сосудах будет непростой. В начале XX века физики П. и Т. Эренфесты описали интересную модель этого явления. Первый сосуд наполнен большим количеством пронумерованных шаров, а второй сосуд пуст. Третий сосуд наполнен билетиками, пронумерованными так же, как и шары. Вытягивается наудачу билетик, затем отыскивается шар с вытянутым номером и этот шар перекладывается из того сосуда, в котором он находился в другой сосуд. Затем билетик возвращается в третий сосуд и процедура

возобновляется. Модель П. и Т. Эренфестов очень удобно реализуется программой. Разделение n воображаемых шаров по двум сосудам может быть описано, например, массивом с n элементами, равными -1 (шар в первом сосуде) и 1 (шар во втором сосуде). Вытягивание шаров легко заменить получением членов случайной последовательности с распределением $\begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$ (см. задачу 750); величину n желательно брать как можно больше, не менее 1000. Построить график или диаграмму, отмечая отношение количеств шаров в сосудах через каждые 100 шагов.

753. Датчики случайных чисел можно привлекать при подборе проверочных исходных данных для программ.

Получить с помощью датчика случайных чисел:

а) 25 действительных чисел, лежащих в диапазоне от -50 до 50;

б) 30 целых чисел, лежащих в диапазоне от -20 до 20;

в) 20 неотрицательных действительных чисел, не превосходящих 40;

г) 35 неотрицательных целых чисел, не превосходящих 1000;

д) 27 натуральных чисел, не превосходящих 20;

е) натуральное n, не превосходящее 30, и n действительных чисел, лежащих в диапазоне от -100 до 100;

ж) натуральные n, m, не превосходящие 20; n целых чисел, лежащих в диапазоне от -150 до 150; m неотрицательных действительных чисел, не превосходящих n;

з) 15 чисел, среди которых 7 двоек и 8 троек;

и) перестановку чисел 1, …, 12, т.е. последовательность чисел $p_1,..., p_{12}$, в которую входит каждое из чисел 1, …, 12;

к) 28 малых латинских букв;

л) 5 неповторяющихся малых латинских букв.

754. Возможно, что при решении задачи на вычислительной машине придется вначале получать члены случайной

последовательности с некоторым распределением $\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ p_1 \ldots p_n \end{pmatrix}$ (см. задачу 750), а затем перейти к последовательности с каким-то другим распределением. Рассмотрим, например, схему такой программы проверки знаний (точнее, программы-тренажера), которая вразбивку предлагает вопросы из некоторого набора вопросов $x_1, \ldots, x_n$. Вопрос выбирается случайно, вначале все вопросы равноправны и распределение есть $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ 1/n & \ldots & 1/n \end{pmatrix}$. Далее можно придерживаться следующей стратегии. Если на вопрос p_i, который предлагался самым первым, был получен правильный ответ (правильность устанавливается сравнением полученного ответа с известным ответом), то этот вопрос исключается из набора вопросов и происходит переход к распределению

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{i-1} & x_{i+1} & \dots & x_n \\ 1/(n-1) & \dots & 1/(n-1) & 1/(n-1) & \dots & 1/(n-1) \end{pmatrix}$$; если ответ был неправильным, то объявляется правильный ответ и происходит переход к распределению

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots & x_n \\ 1/(n+1) & \dots & 1/(n+1) & 2/(n+1) & 1/(n+1) & \dots & 1/(n+1) \end{pmatrix}$$, т.е. как бы считается, что набор теперь содержит n+1 вопрос, два из которых совпадают (x_i входит в набор с кратностью 2). В результате этого трудный вопрос будет предлагаться в дальнейшем чаще, чем более легкие. После каждого полученного ответа распределение меняется так, что если был предложен вопрос, имеющий кратность k ($k > 0$), и на него был получен правильный ответ, то k уменьшается на 1; если же был получен неправильный ответ, то k увеличивается на 1. Если в результате уменьшения на 1 оказалось, что $k = 0$, то вопрос

исключается из набора. Знания могут быть оценены по количеству вопросов, заданных до того момента, когда набор вопросов стал пустым. Реализовать эту стратегию в программе проверки знания таблицы умножения на 7 или проверки знания переводов некоторого количества английских (французских, немецких, ...) слов.

§ 24. Вычисления с некоторой точностью

755. Даны действительные числа x, ε $(x \neq 0, \varepsilon > 0)$. Вычислить с точностью ε *):

а) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}$;

б) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+3}}{(2k+1)!(4k+3)}$;

в) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+1}}{(2k)!(4k+1)}$;

г) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{((k+1)!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+1)}$;

д) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k)!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$;

е) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} \left(\frac{x}{3}\right)^{4k}$;

ж) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!(2k+1)!}$;

з) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!}$.

*) Смысл этого выражения применительно к бесконечным суммам был объяснен в условии задачи 119.

756. Даны действительные числа x, a, ε ($\varepsilon > 0$, $|x| < 1$).

Вычислить с точностью ε значение $1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k!}x^k$.

757. Даны целое число n, действительные числа x,ε ($\varepsilon > 0$, $n \geq 0$). Вычислить с точностью ε значение

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k)!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}.$$

758. Дано действительное число x. Вычислить с точностью 10^{-6}:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^3k^2}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+k^3}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{k^{(3/2)}}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{|x|}+k^2}$;

д) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{|x|}}{k^3}$;

е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k^3+k\sqrt{|x|}+1}$;

ж) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$;

з) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} \left(\frac{x}{3}\right)^{4k+2}$.

759. Даны действительные числа x, ε $(x \neq 0, \quad \varepsilon > 0)$.

Вычислить с точностью ε бесконечную сумму и указать количество учтенных слагаемых:

а) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k}}{2k!}$;

б) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+2}}{(k+1)(k+2)!}$;

в) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1) x^k}{3^k}$;

г) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(k+1)^2}$.

760. Дано действительное число x. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ образована по следующему закону:

а) $a_n = \frac{x^n}{(2n)!}$;

б) $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{n(n+1)(n+2)}$;

в) $a_n = \dfrac{x}{\sqrt{n}(n+2)!}$; г) $a_n = \dfrac{x^{2n}\sin(x^n)}{n^2}$.

Получить $a_1 + ... + a_k$, где k- наименьшее целое число, удовлетворяющее двум условиям: $k > 10$ и $\left|a_{k+1}\right| < 10^{-5}$.

761. Дано действительное число ε $(\varepsilon > 0)$. Вычислить $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\cos^3(3^{n-1})$, учитывая только те слагаемые, в которых множитель $1/3^n$ имеет величину, не меньшую, чем ε.

762. Дано действительное число ε $(\varepsilon > 0)$. Последовательность $a_1, a_2, ...$ образована по следующему закону:

а) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}$;

б) $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$;

в) $a_n = \left(1-\frac{1}{2!}\right)\left(1+\frac{1}{3!}\right)\ldots\left(1+\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\right)$;

г) $a_n = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\ldots\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$.

Найти первый член $a_n (n \geq 2)$, для которого выполнено условие $|a_n - a_{n-1}| < \varepsilon$.

763. Даны действительные числа *x*, ε $(\varepsilon > 0)$. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ образована по следующему закону: $a_1 = x$; далее, для *n* = 2, 3, ... выполнено:

а) $a_n = \sqrt{|4a_{n-1}^2 - 2x|}$; б) $a_n = \frac{16+x}{1+|a_{n-1}^3|} + 3a_{n-1}$;

в) $a_n = 2a_{n-1} + \dfrac{x}{4 + a_{n-1}^2}$; г) $a_n = 3 + \dfrac{1}{2^n}\cos^2(a_{n-1} - x)$.

Найти первый член $a_n (n \geq 2)$, для которого выполнено условие $|a_n - a_{n-1}| < \varepsilon$. (ограничиться рассмотрением первых 10^4 членов).

764. Рассмотрим последовательность $d_0, d_1, ...,$ периметров, вписанных в данную окружность многоугольников с удваивающимся числом сторон. Радиус окружности - данное действительное число *r*. Первый из рассматриваемых многоугольников - шестиугольник. Вычислить $d_n (n > 0)$, для которого $|d_n - d_{n-1}| < 10^{-6}$.

765. Даны действительные числа *x*, ε $(0 < x < 1,\ \varepsilon > 0)$.

Вычислить с точностью ε значение $\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k^2)}$.

766. Даны действительные числа $a,\ b,\ \varepsilon$ $(a > b > 0, \varepsilon > 0)$.

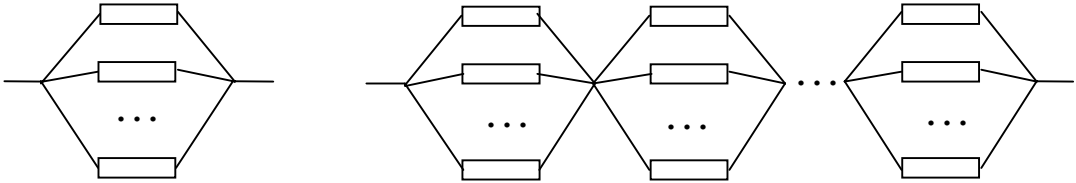
Последовательности $x_1,\ x_2,\ ...,\ y_1,\ y_2,\ ...$ образованы по закону

$x_1 = a,\ y_1 = b,\ x_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + y_{k-1}),\ y_k = \sqrt{x_{k-1} y_{k-1}}$. Найти первое x_n такое, что $|x_n - y_n| < \varepsilon$.

767. Даны действительные числа *a, b*. Последовательности $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ образованы по следующему закону: $x_n = a + b\cos(0.5n), y_n = 0.5an - b\sin(0.5n)$. Получить x_k / y_k, где *k*-наибольшее натуральное число удовлетворяющее двум условиям: $k \le 20$ и $|y_k| > 10^{-3}$.

§ 25. Физика

768. Группа параллельно соединенных сопротивлений, изображенная на рис. 46, *а*, задается неотрицательными числами r_1, r_2, ..., r_i - значениями сопротивлений. Последовательное соединение ряда таких групп, показанное на рис. 46, *б*, задается так: сначала идут значения сопротивлений входящих в первую группу, затем - некоторое отрицательное число, затем - значения сопротивлений, входящих во вторую группу, затем - некоторое отрицательное число и т.д. После значения последнего сопротивления последней группы идут два отрицательных числа. Рассчитать сопротивление соединения.



а *б*

Рис. 46

769. Аналогично предыдущей задаче, рассчитать сопротивление параллельного соединения последовательных групп (рис. 47), вновь предполагая, что каждая группа задается рядом значений сопротивлений, за которым идет отрицательное число, а вслед за значением последнего сопротивления последней группы идут два отрицательных числа.

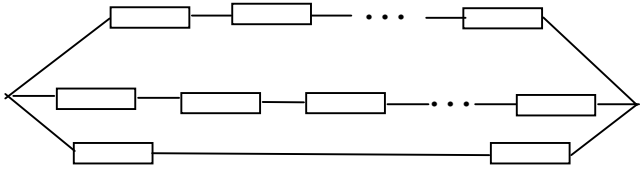


Рис. 47

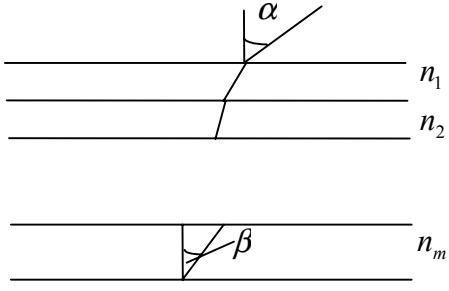


Рис. 48

770. Прозрачная пластина состоит из m слоев, показатели

преломления которых $n_1,...,n_m$. Луч входит в пластину из вакуума под данным углом α (рис. 48). Найти угол β, под которым луч пересекает последний слой.

771. На воду опущен шар радиуса *r,* изготовленный из вещества плотности $\rho(\rho < 1)$. Найти расстояние центра шара от поверхности воды.

772. На прямой находятся три положительных заряда величины q_1, q_2, q_3, так, как показано на рис. 49.

Определить расстояния от заряда q_1 до точек, в которых равнодействующая сил отталкивания зарядами q_1, q_2, q_3 некоторого четвертого положительного заряда равна нулю.

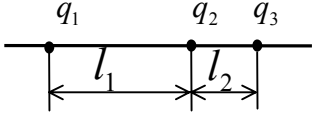


Рис. 49

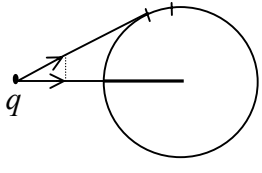


Рис.50

773. Найти силу, с которой точечный заряд $q = 10^{-6}$ Кл притягивается к тонкому непроводящему кольцу радиуса R = 0.1 м. Заряд расположен в плоскости кольца. Кольцо равномерно по всей длине заряжено с плотностью заряда $v = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Кл}}{\text{м}}$. Расстояние от заряда до кольца равно l = 0.1м. Электрическая постоянная равна $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{Кл^2}{Н \cdot м}$. Для вычислений разбить кольцо на 100 равных частей и считать каждую часть точечным зарядом величины $v \frac{2\pi R}{100}$. Рассмотреть проекции кулоновых сил на прямую, соединяющую заряд q с центром кольца (рис. 50).

774. «Кривая погони». В точке P находится собака, а в точке Q - заяц. Расстояние от P до Q равно 100 м (рис. 51, *а*). Заяц бежит вдоль прямой l, образующей угол 45° с отрезком PQ, с постоянной

скоростью $5\ \frac{м}{с}$. Собака бежит все время в направлении зайца со скоростью $10\ \frac{м}{с}$. Найти траекторию движения собаки в течение 10 с. Для приближенного решения предлагается заменить кривую ломаной линией. Считается, что в первую секунду заяц вбегает отрезок QQ', собака - PP', во вторую секунду заяц пробегает отрезок $Q'Q''$ и т. д; собака принимает решение о направлении погони ровно один раз в секунду (рис. 51, *б*).

а *б*

Рис. 51

775. Вернуться к предыдущей задаче. Вычислить приближенно (заменой кривой на ломаную) длину траектории собаки, рассматривая первые 15 с погони.

776. Пусть на плоскости задан угол *AOB* и из некоторой точки *P* внутри угла выпущен биллиардный шар, который отражается от сторон угла как от бортов по закону «угол падения равен углу отражения». Доказать, что после нескольких отражений шар начнет удаляться от вершины угла (рис. 52, *а*). Это обстоятельство объясняет трудности игры на биллиарде: угол биллиарда не затягивает, а отторгает шар.

Рис. 52

Пусть сторона *OB* совпадает с неотрицательной частью оси абсцисс, а сторона *OA* - *с* той частью прямой $y = kx$, которая лежит в верхней полуплоскости. Пусть координаты точки *P* суть действительные числа *a, b* такие, что $a>0$, $0<b< ka$; пусть известен первый угол падения α (рис. 52, *б*). По *k, a, b* а найти все точки отражения луча, абсциссы которых меньше *a*.

777. Прямоугольное хоккейное поле размера $a \times b$ освещено *n* рядами ламп, по *m* ламп в ряду, расположенных на высоте *h* от поверхности льда. Расстояние между рядами ламп равно *a/(n-1)*, расстояние между лампами в ряду- *b/(m-1)*. Определить освещенность хоккейного поля в точке, расстояния от которой до бортов соответственно равны a_1, b_1 ($a_1 \le a$, $b_1 \le b$).. Мощность ламп-200 Вт, к.п.д. ламп - 1%.

778. “Письмо Робина Гуда узнику замка Ноттингем”. Письмо привязывается к камню, а камень броском посылается через бойницу

стены замка в окно темницы. Расположение строений и известные величины указаны на рис. 53. Рост Робина Гуда - 1.6 м. Можно ли забросить камень с письмом в окно? Если да, то с какой начальной скоростью и под каким углом должен бросить камень Робин Гуд? В расчетах пренебрегать сопротивлением воздуха.

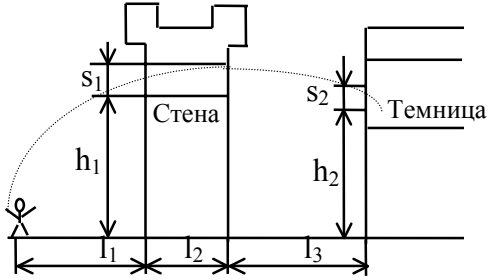


Рис. 53

779. Между двумя проводящими параллельными плоскостями расположен заряд 10^{-6} Кл, расстояние между плоскостями равно 0.1 м, расстояние от заряда до ближайшей плоскости равно 0.01 м.

Вычислить силу, действующую на заряд. Многократное применение метода отражений, согласно которому проводящую плоскость можно заменить зарядом противоположного знака, расположенным на том же расстоянии, но с другой стороны плоскости. приводит к суммированию двух бесконечных числовых рядов (один - с положительными членами, другой - с отрицательными). Это суммирование можно выполнить приближенно, преобразовав предварительно два ряда в один.

780. В стенке цилиндрического ведра просверлено *n* маленьких отверстий, диаметр каждого из которых равен *d*. Остальные величины отмечены на рис. 54. Известно, что $nd \langle\langle D$. Ведро наполнено доверху водой. Необходимо определить время, за которое уровень воды в ведре опуститься до нижнего отверстия. При вычислении воспользоваться тем, что скорость вытекания воды через отверстие, находящееся на

глубине x, равна $\sqrt{2gx}$.

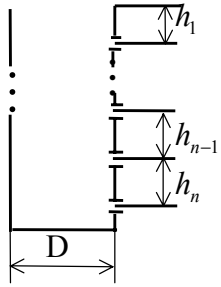


Рис. 54

781. К вертикальной стене на некоторой высоте от пола прижат гимнастический обруч. Из стены выступают два гвоздя, соприкасаясь с обручем с внутренней стороны. Известны значения углов φ_1, φ_2, отмеченных на рис.55, *а*. Определить, будет ли обруч сохранять свое положение, если отпустить его.

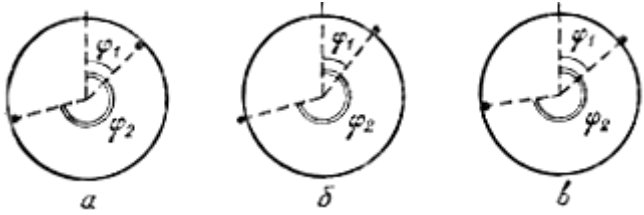


Рис. 55

782. Задача аналогична предыдущей, с той разницей, что

а) гвозди соприкасаются с обручем с внешней стороны рис. 55, *б*);

б) первый гвоздь соприкасается с обручем с внешней стороны, а второй-с внутренней (рис. 55, *в*).

783. Ракета стартует вертикально вверх с поверхности Земли. Масса ракеты без топлива равна 10 т, запас топлива M = 50 т. Изве - стно, что за каждую секунду полета сгорает 50 кг топлива. Скорость вылета из сопла частиц сгоревшего топлива постоянна относительно

ракеты и равна 10^4 м/с. На какой высоте окажется ракета через 100 с и через 1000 с полета? Какова скорость ракеты в эти моменты? (Масса Земли равна $6 \cdot 10^{21}$ т, радиус Земли- 6 400 км, гравитационная постоянная в законе всемирного тяготения равна $6.6 \cdot 10^{-34}$ $H \cdot м^2/ кг^2$, сопротивлением воздуха пренебрегаем.) Для вычисления рассмотреть величины M_n, h_n, v_n - соответственно массу неизрасходованного топлива, высоту подъема и скорость движения через *n* секунд полета; найти приближенные выражения M_n, h_n, v_n через $M_{n-1}, h_{n-1}, v_{n-1}$.

784. Имеется сферическая линза (радиус сферы R), диаметр которой равен *D.* Показатель преломления материала, из которого сделана линза, равен *n.* На расстоянии $l = R/(n-1)$ от линзы установлен экран (рис. 56, *а)*. На линзу падает пучок параллельных лучей. Определить диаметр светового пятна на экране. Характер преломления лучей указан на рис. 56, *б*; в этой ситуации

$$\sin\psi = n\sin\varphi .$$

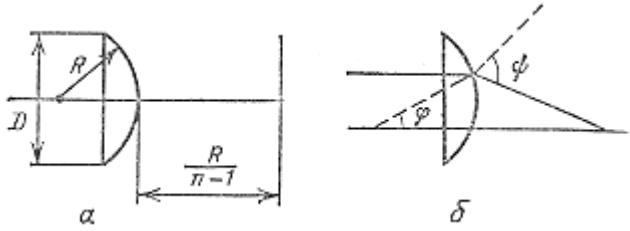


Рис. 56

§ 26. Биология

785. У кроликов черная окраска (определяемая аллелем *B)* доминирует над белой (определяемой аллелем *b).* Даны сочетания аллелей *B* и *b* в генотипах кроликов-родителей, каждое из сочетаний- это *BB*, *Bb* или *bb*. Используя законы Менделя, перечислить возможности для сочетаний аллелей *B* и *b* в генотипе потомка первого поколения (F_1) этой пары. Вместе с каждым возможным сочетанием указать окраску потомка.

786. Каждый из двух подвергнутых скрещиванию сортов гороха имел либо желтые, либо зеленые семядоли. Известно, что желтая окраска семядолей (аллель *R*) доминирует над зеленой (аллель *r).* Среди растений F_1 (см. предыдущую задачу) имелось *n* с желтыми семядолями и *m* с зелеными ($n \geq 0$, $m \geq 0$). Используя законы Менделя, перечислить наиболее вероятные возможности сочетаний аллелей *R* и *r* в генотипах родителей.

787. Вернемся к сортам гороха с желтыми (аллель R) и зелеными (аллель r) семядолями (см. предыдущую задачу). Были подвергнуты скрещиванию два растения, одно из которых имело зеленые семядоли. В результате скрещивания получили m растений F_1 (см. задачу 785) с желтыми семядолями и n - с зелеными ($m \geq 0, n \geq 0$). Используя законы Менделя, указать наиболее вероятное сочетание аллелей R и r в генотипе второго родителя и в генотипах каждого из растений F_1.

788. Два сорта пшеницы различаются устойчивостью к определенному пестициду (ядохимикату). Делается предположение, что в гетерозиготном растении проявляет свое действие только один аллель - устойчивости или неустойчивости к данному пестициду, т. е. имеет место явление доминирования. Взяты два растения - одно устойчивое, другое неустойчивое. В результате .скрещивания этих растений появилось несколько устойчивых растении F_1 и несколько

неустойчивых. Проведены также возвратные скрещивания исходных растений с двумя растениями F_1, из которых одно было устойчивым к пестициду, а другое - нет. Результаты этих четырех возвратных скрещиваний известны и записаны четырьмя парами неотрицательных целых чисел (первое число пары указывает количество растений, устойчивых к пестициду, второе- неустойчивых). Подтверждают ли результаты проведенных опытов гипотезу о доминировании? Если да, то какой из признаков (устойчивость или неустойчивость) является доминирующим?

789. ”Контакты первого и второго порядка в эпидемиологии”. Предположим, что k человек заболели инфекционной болезнью. Вторую группу из l человек опросили с целью выяснения, кто из них имел контакт с больными. Затем опросили третью группу из m человек.. чтобы выяснить контакт с кем-нибудь из l человек второй группы. Результаты первого опроса записаны в виде матрицы $\lfloor a_{ij} \rfloor_{i=1,\ldots,k;\, j=1,\ldots,l}$ так, что $a_{ij} = 1$, если j-й человек второй группы

находился в контакте с i-м больным из первой группы, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Аналогично определена матрица $\lfloor b_{ij} \rfloor_{i=1,\ldots,l;\, j=1,\ldots,m}$: $b_{ij} = 1$, если j-й человек третьей группы находился в контакте с i-м человеком из второй группы, и $b_{ij} = 0$ в противном случае. Эти две матрицы описывают схему контактов первого порядка между группами. Могут представлять интерес непрямые контакты, или, иначе говоря, контакты второго порядка между людьми третьей группы и больными первой группы. Исходя из двух упомянутых матриц, получить матрицу $\lfloor c_{ij} \rfloor_{i=1,\ldots,k;\, j=1,\ldots,m}$ контактов второго порядка.

790. Реакция организма на лекарство через n часов после инъекции выражается показателем r_n, измеряемым в подходящих единицах. Экспериментально установлено, что для лекарственных препаратов некоторой группы показатель реакции $r_n = \alpha r_{n-1} + 0.4^n$, где

$r_0 = 1$, а α - меньшее единицы данное положительное число, характеризующее конкретный препарат группы. Определить, через сколько часов наступает максимальная реакция на введение препарата. После скольких часов реакция понизится ниже 50 % первоначального уровня r_0?

791. В процессе лечебного голодания вес пациента за 30 дней снизился с 96 до 70 кг. Было установлено, что ежедневные потери веса пропорциональны весу тела. Вычислить, чему был равен вес пациента через k дней после начала голодания для k =1, 2, ..., 29.

792. Если культура клеток в питательной среде растет, не подвергаясь внешним воздействиям, то прирост массы в течение (n+1)-го часа оказывается вдвое больше прироста в течение n-го часа. Однако в исследовательских целях к растущей массе по истечении каждого часа добавляется по 2 г культуры.

Дано натуральное число k. Найти массу x_k в конце k-го часа исследования, если первоначально было взято 3 г. (Исходя из предположения, что при отсутствии внешнего воздействия масса x_n в конце n-го часа исследования удовлетворяет соотношению $x_n = \alpha x_{n-1}$ (n= 1, 2, ...) для некоторой постоянной величины α .)

793. В одном большом стаде, состоящем из животных одного возраста и пола, рост животных, измеренный в сантиметрах, колеблется от k до l (данные натуральные числа).

а) Пусть m и n -данные натуральные числа такие, что $k \le m < n \le l$. Каких животных в стаде больше - с ростом, близким к m см, или с ростом, близким к n см?

б) Если r-количество пищи, потребляемое в сутки животным с ростом k, то каково примерное количество пищи, потребляемое в сутки животным с ростом l ? Если s- количество шерсти,

состригаемой ежегодно с животного с ростом k, то сколько приблизительно шерсти можно ежегодно состригать с животного с ростом l ? (Предполагается, что густота и длина шерсти не зависят от роста.)

794. Числа Фибоначчи $u_0, u_1, \ldots$ (см. задачу 144) получили название в честь итальянского математика XIII века Леонардо Фибоначчи, который ввел их для описания численности поколений животных (без учета смертности). Предполагается, что каждая пара животных некоторого вида приносит ежегодно приплод в одну пару животных (самку и самца), которые в свою очередь начинают давать приплод через два года после рождения. Если имеется одна пара новорожденных животных, то, как можно показать, по прошествии n лет будет иметься u_{n+1} пар животных. Внести в эту модель уточнение,

касающееся смертности. Считать, что продолжительность жизни животного:

а) 5 лет;

б) m лет, где m - данное натуральное число.

Вычислить количество пар животных, которое будет иметься по прошествии срока в n лет (n-данное натуральное).

795. Для описания происходящего со временем изменения численности популяции удобно рассматривать распределение популяции по возрастным группам (в первую группу попадают все особи в возрасте до года, во вторую - все те не попавшие в первую группу особи, возраст которых меньше двух лет, и т. д.). Пусть в первую возрастную группу входит p_1 особей, во вторую - p_2 особей и т. д. Смертность весьма упрощенно можно учесть, положив, что все особи вымирают, находясь в n-й возрастной группе, где n - некоторое фиксированное натуральное число. Ясно, что общее число особей в

популяции есть $p_1 + ... + p_n$. Для каждой возрастной группы имеется свой коэффициент рождаемости; если коэффициенты для рассматриваемых возрастных групп соответственно равны $b_1,...,b_n$, то годовой прирост, обусловленный присутствием в популяции *i*-й возрастной группы с численностью p_i, есть $b_i p_i$. Таким образом, годовой прирост по всей популяции есть $b_1 p_1 + ... + b_n p_n$. В то же время особи, принадлежащие *i*-й возрастной группе, через год перейдут в (*i*+1)-ю возрастную группу (*i* = 1, . . ., *n*-1), а особи, принадлежащие *n*-й возрастной группе, вымрут в течение года. Поэтому через год распределение популяции по возрастным группам будет следующим: $b_1 p_1 + ... + b_n p_n$, $p_1 + ... + p_{n-1}$.

Даны натуральные числа *n, m*, действительные числа $b_1,...,b_n$, неотрицательные целые числа $p_1,...,p_n$. Считая, что $p_1,...,p_n$ -

первоначально зарегистрированное распределение популяции по возрастным группам, а $b_1,...,b_n$, - коэффициенты рождаемости для возрастных групп, определить общую численность популяции через *m* лет.

796. Описанную в предыдущей задаче модель изменения численности популяции можно сделать более точной введением, кроме коэффициентов рождаемости, еще и коэффициентов выживания $s_1,....s_n(0 \le s_i < 1, i = 1,...,n)$ для всех возрастных групп: считаем, что если в текущем году *i*-я возрастная группа имеет численность p_i, то в будущем году (*i*+1)-я возрастная группа будет иметь численность, равную $s_i p_i (i = 1,...,n-1)$ При этом $s_n = 0$ (так как мы по-прежнему считаем, что возраст особи не превосходит *n* лет), и фактически можно рассматривать только $s_1,...,s_{n-1}$. Годовой прирост за счет *i*-й группы в этой модели считается равным $b_i s_i p_i (i = 1,...,n-1)$. Коэффициенты

выживания, так же как и коэффициенты рождаемости, выводятся на основе многолетних наблюдений за популяциями данного вида.

Считая заданными $s_1,...,s_{n-1}$, вновь рассмотреть задачу расчета численности популяции через *m* лет.

797. Дополняя модель, которая была описана в предыдущей задаче, предположим, что когда численность популяции оказывается к концу года большей, чем некоторое число *l*, то из-за большой скученности начинается эпидемия, приводящая к понижению вдвое коэффициентов выживания $s_1,...,s_{n-1}$ в следующем году.

Считая *l* заданным числом, вновь рассмотреть задачу расчета численности популяции через *m* лет.

798. Взаимное влияние некоторых двух конкурирующих видов на размер x_n, y_n их популяций в *n*-м году описывается системой

$$x_{n+1} = 2x_n - y_n$$
$$y_{n+1} = -x_n + 2y_n.$$

Пусть $x_0 = a, y_0 = b (a \neq b)$, где a и b - данные числа. Найти численности обоих видов за все годы, предшествующие полному вымиранию одного из них.

799. Даны натуральные числа $n, a_1, ..., a_n$, отражающие наблюдения за лесным муравейником. Вначале было отловлено 100 рабочих муравьев, все они были помечены и выпущены на волю. Далее, в течение n дней повторялось следующее: отлавливалось по 100 рабочих муравьев, подсчитывалось число помеченных среди них (a_i - количество помеченных муравьев среди отловленных в i-й день, i =1,...,n), помечались непомеченные муравьи, находящиеся в этой сотне, затем все 100 муравьев выпускались на волю. Требуется

подсчитать (приблизительно) число рабочих муравьев в этом муравейнике.

800. Эта задача является продолжением предыдущей. Через год наблюдения над муравейником были возобновлены. Вновь сначала было отловлено 100 рабочих муравьев и все они были помечены новой, отличимой от прошлогодней меткой и выпущены на волю. Затем в течение *n* дней повторялось следующее: отлавливалось по 100 рабочих муравьев, подсчитывалось число помеченных только прошлогодней меткой, только новой меткой и обеими метками (в *i*- й день фиксировались соответственно числа a_i, b_i и c_i), затем помечались муравьи этой сотни, еще не помеченные меткой этого года, и все 100 муравьев выпускались на волю.

Требуется выдвинуть разумные гипотезы относительно числа рабочих муравьев в муравейнике в этом году, о количестве среди них новых рабочих муравьев и количестве прошлогодних. Исходные данные

задачи: $k, l, n, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, ..., a_n, b_n, c_n$, где *k*- число рабочих муравьев, помеченных в прошлом году, *l*- предположительное общее число рабочих муравьев в прошлом году. Смысл остальных чисел разъяснен выше.

801. «Зависимость веса от роста». Часто пытаются «уложить» некоторые экспериментальные или статистические данные в некоторую простую формулу. Пусть, например, обследовано *n* взрослых людей с нормальным телосложением и измерен рост (в см) x_i и вес (в кг) y_i каждого из них. Можно пытаться на основании этих измерений получить формулу вида $y = ax+b$, выражающую вес *y* через рост *x*. Конечно, трудно рассчитывать на то, что для каких-либо конкретных *a* и 6 будут с абсолютной точностью выполнены все *n* равенств $y_i = ax_i + b (i = 1, ..., n)$. Но нетрудно найти *a* и *b* такие, что величина $f(a, b)$, равная

$(ax_1+b-y_1)^2+(ax_2+b-y_2)^2+...+(ax_n+b-y_n)^2$, , имеет наименьшее из возможных значений (рис. 57). Для выполнения этого условия достаточно, чтобы *)

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}=0, \frac{\partial f(a,b)}{\partial b}=0 .$$

Последние равенства дают два линейных уравнения для определения *a* и *b* (это частный случай метода наименьших квадратов, принадлежащего Гауссу):

$$(x_1^2+...+x_n^2)a+(x_1+...+x_n)b=x_1y_1+...+x_ny_n,$$
$$(x_1+...+x_n)a+nb=y_1+...+y_n.$$

Даны действительные числа $x_1,...,x_n, y_1,...,y_n$. Получить указанные *a* и *b*.

*) Пусть $g(t_1, ..., t_k)$ - функция указанных действительных переменных, $\partial g/\partial t_i$ - это частная производная *g* по t_i, т. е. результат

дифференцирования g по t_i, при котором все величины, кроме t_i, считаются постоянными.

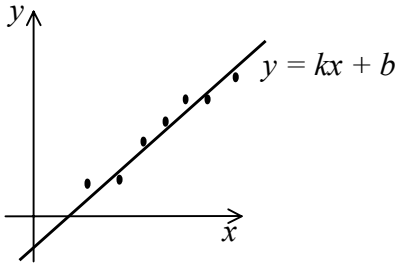


Рис.57

По поводу этой задачи сделаем следующее замечание. Действительно, этим способом можно получить некоторые a и b; более того, считается, например, что для мужчин с нормальным телосложением $a \approx 1, b \approx -100$. Однако значительно более точную формулу можно, видимо, получить, используя не многочлен первой степени $ax + b$, а многочлен третьей степени $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (ср. с

задачей 793 6). Этот многочлен тоже можно искать методом наименьших квадратов.

§27. Тексты *)

*) Способ задания текста может выбираться в зависимости от используемого языка программирования и от того, какие сложности готов преодолевать решающий задачу. Текст может быть последовательностью символов (в частности - содержимым символьного файла), строкой, группой строк (в частности - содержимым текстового файла) и т. д.

802. Дан текст; найти наибольшее количество цифр, идущих в нем подряд.

803. Дан текст; определить, содержит ли он символы, отличные от букв и пробела.

804. Дан текст.

а) Если в тексте нет символа *, то оставить этот текст без изменения, иначе каждую из малых латинских букв,

предшествующих первому вхождению символа *, заменить на цифру 3.

б) Если в тексте нет символа +, то оставить текст без изменения, иначе каждую из цифр, предшествующую первому вхождению символа +, заменить символом - .

805. Дан текст; если в нем нет малых латинских букв, то оставить его без изменения, иначе каждый из символов, следующих за первой группой малых латинских букв, заменить точкой.

806. Дан текст; выяснить, является ли этот текст:

а) идентификатором;

б) десятичной записью целого числа.

807. Дана символьная матрица размера $n \times m$. Получить последовательно все строки матрицы, исключая те, для которых есть равные среди строк с меньшими номерами.

808. Дан текст. Группы символов, разделенные пробелами (одним или несколькими) и не содержащие пробелов внутри себя, будем называть, как и прежде (см. задачу 269), словами.

а) Для каждого из слов указать, сколько раз оно встречается среди всех слов, образованных символами данного текста.

б) Найти все слова, содержащие наибольшее количество гласных латинских букв (*a*, *e*, *i*, *o*, *u*).

в) Найти все слова, в которых доля букв *a*, *b* максимальна.

г) В тех словах, которые оканчиваются сочетанием букв *ing*, заменить это окончание на *ed*.

809. Дано натуральное число *n*. Получить символьное представление *n* в виде последовательности цифр и пробелов отделяющих группы по три цифры, начиная справа. Например, если *n*=1753967, то должно получиться 1 753 967.

810. Дано натуральное число n ($n \leq 1000$). Записать это число русскими словами (семнадцать, двести пятьдесят три, тысяча и т. д.).

811. Дано натуральное число n, равное выраженной в копейках цене некоторого товара, например 317, 5005, 100 и т. д. Выразить цену в рублях и копейках, например 3 руб. 17 коп., 50 руб. 05 коп., 1 руб. 00 коп. и т.д. (число копеек записывается всегда двумя цифрами).

812. Дан текст, каждый символ которого может быть малой буквой, цифрой или одним из знаков +, - , *. Группой букв будем называть такую совокупность последовательно расположенных букв, которой непосредственно не предшествует и за которой непосредственно не следует буква. Аналогично определим группу цифр и группу знаков.

а) Выяснить, встречается ли в данном тексте группа букв *one*.

б) Выяснить, верно ли, что в данном тексте больше групп букв, чем групп знаков.

в) Если в данном тексте имеется не менее двух групп букв, то каждый знак +, встречающийся между двумя первыми по порядку группами букв, заменить цифрой 1, знак - заменить цифрой 2, а знак * - цифрой 3. Иначе оставить текст без изменений.

г) Подсчитать число вхождений буквы f в первые три группы букв (в предположении, что текст содержит не менее трех групп букв).

д) Найти число таких групп букв, которые начинаются и кончаются одной и той же буквой.

е) Найти все такие группы букв, в которые буква a входит не менее двух раз.

ж) Найти самую длинную группу цифр. Если эту наибольшую длину имеет несколько групп, то взять первую по порядку.

813. Дан текст. Если первый символ текста не является малой латинской буквой, то оставить его без изменения. Если же это малая латинская буква, но за начальной группой малых латинских букв не

следует цифра, то также оставить текст без изменения. Иначе каждую цифру, принадлежащую группе цифр, следующей за начальной группой малых латинских букв, заменить символом *.

814. Дан текст.

а) Найти номер первой по порядку группы цифр (см. задачу 812), начинающейся цифрой 2.

б) Найти число тех групп букв (см. задачу 812), которые заканчиваются той же буквой, что и первая группа букв.

в) Если в данном тексте есть группа знаков (см. задачу 812), начинающаяся знаком *, то взять первую по порядку из них и в следующей группе знаков (если таковая имеется) заменить каждый из знаков знаком +.

815. Шахматную доску будем представлять символьной матрицей размера 8x8. Даны натуральные числа n и m ($1 \le n \le 8, 1 \le m \le 8$) - номера вертикали и горизонтали, определяющие

местоположение ферзя. Соответствующий элемент матрицы надо положить равным символу *ф*. Поля, находящиеся под угрозой ферзя, надо положить равными символу *, а остальные поля- символу 0. Решить аналогичную задачу для коня.

816. Преобразовать выражение (т. е. текст специального вида), составленное из цифр и знаков четырех арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления), в постфиксную форму. В постфиксной форме сначала записываются операнды, а затем знак операции.

Примеры:

обычная запись	постфиксная запись
3+4	34+
(5 - 4) + 2	54 - 2 +
2*(3+4)*5	234+ *5*

817. Для большинства существительных, оканчивающихся на -*онок* и -*енок*, множественное число образуется от другой основы. Как правило, это происходит по образцу: цыпленок-цыплята, мышонок-мышата и т. д. (в новой основе перед последней буквой *т* пишется *а* или я в зависимости от предыдущей буквы: если это шипящая, то *а*, иначе - *я*). Имеются слова-исключения, из которых укажем следующие: ребенок (дети), бесенок (бесенята), опенок (опята), звонок (звонки), позвонок (позвонки), подонок (подонки), колонок (колонки), жаворонок (жаворонки), бочонок (бочонки). Есть еще ряд малоупотребительных слов-исключений, которые мы не рассматриваем.

Дан текст, среди символов которого имеется пробел. Группа символов, предшествующая первому пробелу, представляет собой русское слово, оканчивающееся на -*онок* или -*енок*. Получить это слово во множественном числе.

818. Рассмотрим существительные мужского рода, оканчивающиеся на -*ок*: кружок, масленок, брелок и т. д. При склонении таких слов буква *о* может выступать как беглая гласная: кружка, масленком и т. д. При склонении некоторых таких слов гласная *о*, однако, сохраняется. Это, во-первых, слова из трех букв: ток, сок и т. д.; затем слова: скок, блок, волок, восток, шток и слова, основа которых оканчивается на такие сочетания букв (т. е. перескок, пищеблок, юго-восток и т. д.); наконец, имеется еще ряд слов, среди которых укажем следующие: брелок, щелок, войлок, челнок, зарок, срок, урок, знаток, поток, сток, артишок.

Дан текст, среди символов которого имеется пробел. Группа символов, предшествующая первому пробелу, представляет собой русское слово - существительное мужского оканчивающееся на -*ок*; после первого пробела идет одна из букв *и*, *р*, *д*, *в*, *т*, *п*, указывающая падеж (именительный, родительный, дательный, винительный,

творительный, предложный). Получить данное слово в указанном падеже.

819. Даны натуральное число n, символ s ($n \le 1000$, s - одна из букв *и*, *р*, *д*, *в*, *м*, *т*, указывающая падеж - именительный, родительный, дательный, винительный, творительный, предложный). Записать количественное числительное, обозначающее n, в соответствующем падеже (эта задача обобщает задачу 810).

820. Как показывают многочисленные эксперименты, разбиение русского слова на части для переноса с одной строки на другую с большой вероятностью выполняется правильно, если пользоваться следующими простыми приемами *):

1) Две идущие подряд гласные можно разделить, если первой из них предшествует согласная, а за второй идет хотя бы одна буква (буква *й* при этом рассматривается вместе с предшествующей гласной как единое целое).

2) Две идущие подряд согласные можно разделить, если первой из них предшествует гласная, а в той части слова, которая идет за второй согласной, имеется хотя бы одна гласная (буквы *ь*, *ъ* вместе с предшествующей согласной рассматриваются как единое целое).

3) Если не удается применить пункты 1), 2), то следует попытаться разбить слово так, чтобы первая часть содержала более чем одну букву и оканчивалась на гласную, а вторая содержала хотя бы одну гласную.

Вероятность правильного разбиения увеличивается, если предварительно воспользоваться хотя бы неполным списком приставок, содержащих гласные, и попытаться прежде всего выделить из слова такую приставку.

Дан текст, являющийся русским словом. Выполнить разделение его на части для переноса.

*) Программа, реализующая эти приемы, была описана в [42].

821. Используя решение предыдущей задачи и задачи о выравнивании правого края страницы (задача 422), выполнить следующее. Даны натуральное число *n* и символьный файл, последовательность компонент которого представляет собой текст на русском языке. Абзац (красная строка) обозначен символом $\uparrow$. Вывести этот текст строками длины *n*. Абзац начинать с трех пробелов.

§ 28. Календарь *)

*) При решении задач этого раздела принять во внимание, что в современном (григорианском) календаре каждый год, номер которого делится на 4, является високосным, за исключением тех номеров, которые делятся на 100 и не делятся на 400.

822. Дан номер года. Указать число дней в этом году.

823. Даны натуральные числа n, m ($n \le m$). Определить, сколько из чисел n, $n+1$, ..., m являются номерами високосных годов.

824. Даны натуральные числа a, b, c, которые обозначают число, месяц и год, например 1, 4, 1901 - 1 апреля 1901 года. Получить тройку чисел, соответствующих следующему дню.

825. Даны натуральные числа a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, которые указывают две даты (число, месяц, год). Вычислить:

а) количество дней, прошедших между двумя этими датами;

б) количество полных лет, прошедших между двумя этими датами.

826. Даны натуральные числа *a*, *b*, *c*, которые обозначают число, месяц и год.

а) Проверить корректность этой даты (например, 30 февраля 1900 года- некорректная дата).

б) Найти номер этого дня с начала года.

в) Определить, сколько полных дней осталось до конца года.

827. Даны натуральные числа *a*, *b*, которые обозначают число и месяц. На какой день недели приходится эта дата, если год - невисокосный, 1 января этого года - среда?

828. «Вечный календарь». Даны натуральные числа *a*, *b*, *c*, которые обозначают число, месяц и год. Определить день недели, на который падает указанная дата.

При решении этой и некоторых следующих задач можно считать, что исследуемая дата лежит в диапазоне от 1582 до 4902 гг. Как установлено (см. [56]), в этом случае номер дня недели (воскресенье имеет номер 0, понедельник - номер 1, ..., суббота - номер 6) равен остатку от деления на 7 значения выражения $[2.6\,m - 0.2] + d + y + [y/4] + [c/4] - 2c$, где d -номер дня в месяце (1, 2, ...); m- номер месяца в году, нумерация начинается с марта (март имеет номер 1, апрель - номер 2, ..., декабрь - номер 10, январь и февраль считаются месяцами с номерами 11 и 12 предыдущего года); y - две младшие цифры года (00, . . . , 99); c - две старшие цифры года (15, . . ., 49); $[x]$ означает целую часть числа x.

Для создания более универсального календаря, охватывающего все годы, можно использовать непосредственный подсчет, основанный нагом, что 1 января 1 года нашей эры было понедельником.

829. Вычислить количество пятниц, приходящихся на 13-е числа

а) XX столетия;

б) столетия с номером n, где n -данное натуральное число.

830. Даны натуральные числа a, b, c, обозначающие дату (число, месяц, год) по юлианскому календарю. Получить эту дату по современному календарю. Расхождение между датами определяется тем, что в юлианском календаре каждый год, номер которого делится на 4, является високосным, и из этого правила нет никаких исключений.

831. День учителя ежегодно отмечается в первое воскресенье октября. Дано натуральное число n, означающее номер года. Определить число, на которое в октябре указанного года приходится День учителя.

832. В некоторой библиотеке последний четверг каждого месяца - санитарный день. Дано натуральное число n, означающее номер года. Получить по порядку все числа, на которые в январе, феврале, . . . , декабре указанного года приходится санитарный день.

833. Земной год продолжается $365\frac{1211}{5000}$ суток. Из этого следует, что точной была бы такая календарная система, при которой среди 5000 следующих друг за другом годов имеется 1211 високосных и соответственно 3789 невисокосных. Эта система, основанная на 5000 летних циклах, была бы неудобной в практических отношениях. Задача построения более удобных календарных систем решается с помощью подходящих дробей (см. задачу 575). Найти, используя вычислительную машину, все подходящие дроби числа 1211/5000. Какая именно из этих дробей определяет закон чередования невисокосных и високосных годов в современном календаре

(четырехлетние циклы)? Указать также подходящую дробь, определяющую закон чередования в календаре Омара Хайяма, в котором рассматривались не четырехлетние, а тридцатилетние циклы.

§ 29. Криптография

834. Чтобы зашифровать текст, записанный с помощью русских букв и знаков препинания, его можно переписать, заменив каждую букву непосредственно следующей за ней по алфавиту (буква *я* заменяется на *а).*

а) Зашифровать данный текст.

б) Расшифровать данный текст.

835. Можно обобщить способ шифровки, изложенный в предыдущей задаче - сдвиг производится не на одну букву, а на n букв, где n-данное натуральное число (можно представлять себе, что буквы выписаны по кругу, как цифры на циферблате). Выполнить задания а), б) предыдущей задачи, используя это обобщение.

836. Один из простейших способов шифровки текста состоит в табличной замене каждого символа другим символом - его шифром.

Выбрать некоторую таблицу, разработать способ ее представления, затем

а) зашифровать данный текст;

б) расшифровать данный текст.

837. Чтобы зашифровать текст из 121 буквы, его можно записать в квадратную матрицу порядка 11 по строкам, а затем прочитать по спирали, начиная с центра (т. е. с элемента, имеющего индексы 6, 6).

а) Зашифровать данный текст.

б) Расшифровать данный текст.

838. Шифровка текста с помощью решетки заключается в следующем. Решетка, т.е. квадрат из клетчатой бумаги 10×10 клеток, некоторые клетки в котором вырезаны, совмещается с целым квадратом 10×10 клеток и через прорези на бумагу наносятся первые буквы текста. Затем решетка поворачивается на $90°$ и через прорези

записываются следующие буквы. Это повторяется еще дважды. Таким образом, на бумагу наносится 100 букв текста. Решетку можно изображать квадратной матрицей порядка 10 из нулей и единиц (нуль изображает прорезь). Доказать, что матрица $[a_{ij}]_{i=1,\dots,10;\, j=1,\dots,10}$ может служить ключом шифра, если из элементов $a_{ij}, a_{10-i+1\,j}, a_{i\,10-j+1}, a_{10-i+1;10-j+1}$ в точности один равен нулю.

Даны последовательность из 100 букв и матрица-ключ.

а) Зашифровать данную последовательность.

б) Расшифровать данную последовательность.

839. Зафиксируем натуральное k и перестановку чисел 1, ..., k (ее можно задать с помощью последовательности натуральных чисел $p_1, \dots, p_k$, в которую входит каждое из чисел 1, . . . , k). При шифровке в исходном тексте к каждой из последовательных групп по k символов применяется зафиксированная перестановка. Пусть $k = 4$ и

перестановка есть 3, 2, 4, 1. Тогда группа символов s_1, s_2, s_3, s_4 заменяется на s_3, s_2, s_4, s_1. Если в последней группе меньше четырех символов, то к ней добавляются пробелы. Пользуясь изложенным способом:

а) зашифровать данный текст;

б) расшифровать данный текст.

840. Следующий способ предназначен для шифровки последовательностей нулей и единиц (или же, например, точек и тире). Пусть $a_1,...,a_n$ -такая последовательность. То, что предлагается в качестве ее шифра,- это последовательность $b_1,...,b_n$, образованная по следующему закону:

$$b_1 = a_1, \quad b_i = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i = a_{i\text{-}1}, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(i = 2,..., n)·

Пользуясь изложенным способом:

а) зашифровать данную последовательность;

б) расшифровать данную последовательность.

841. «Исправление ошибок». Пусть по некоторому каналу связи передается сообщение, имеющее вид последовательности нулей и единиц (или, аналогично, точек и тире). Из-за помех возможен ошибочный прием некоторых сигналов: нуль может быть воспринят как единица и наоборот. Можно передавать каждый сигнал трижды, заменяя, например, последовательность 1, 0, 1 последовательностью 1,1,1,0,0,0,1,1,1. Три последовательные цифры при расшифровке заменяются той цифрой, которая встречается среди них по крайней мере дважды. Такое утраивание сигналов существенно повышает вероятность правильного приема сообщения.

Написать программу расшифровки.

842. Способы шифровки текста, основанные на табличной замене входящих в него букв некоторыми символами (см. задачу 836)

или на сдвиге букв (см. задачи 834, 835), нехороши тем, что шифр может быть разгадан путем частотного анализа символов, водящих в зашифрованный текст - вспомним рассказ Э. По «Золотой жук». Следующий способ лишен этого недостатка. Пусть шифруемым текстом является последовательность, состоящая из букв $s_0, s_1, ..., s_m$. С помощью датчика случайных чисел можно, например, получать члены последовательности $v_0, v_1, ...$ с распределением $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ и при шифровке символа $s_i (0 \le i \le m)$ применять сдвиг на v_i букв. Тогда две встречающиеся в зашифрованном тексте одинаковые буквы не обязаны обозначать одну и ту же букву исходного текста. Для расшифровки сообщения нужно воспользоваться таким же датчиком случайных чисел.

В следующих двух заданиях для простоты предполагается, что текст записан русскими буквами без знаков препинания, пробел после шифровки остается пробелом.

а) Зашифровать данный текст.

б) Расшифровать данный текст.

§ 30. Графика

*) При решении задач 843-846, 849 на построение графиков функций следует предварительно выбрать расположение координатных осей и масштаб на них. Выбор подходящей системы координат необходим также в задачах 847, 848, 850-854 на построение кривых, заданных уравнениями того или иного вида. В дальнейшем в зависимости характера задачи может применяться от либо специально подобранная, либо экранная система координат.

843. Построить графики *) линейной функции $y = kx$ для k = 0.1, 0.2, 0.3, .., 1.

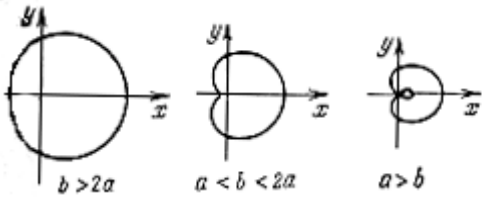


Рис.58

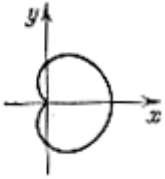


Рис.59

844. Построить графики функций:

а) $y = 3x^2$; б) $y = -6x^2 + 3x$;

в) $y = x^3 + 2x^2 + x$; г) $y = x^5$;

д) $y = \sin x$; е) $y = \cos(x-1) + |x|$.

845. Построить графики функций, указанных в задаче 337.

846. Исследовать область определения и построить графики следующих функций:

а) $y = \dfrac{1}{x}$; б) $y = \dfrac{x+3}{x-2}$; в) $y = 3 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}$;

г) $y = 3 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}$; д) $y = \dfrac{1}{3x^2 + 2x + 1}$;

е) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$; ж) $y = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 1}$;

з) $y = \dfrac{x}{3x^2 + 2x + 1}$; и) $y = \dfrac{x}{x^2 + 2x + 1}$;

к) $y=\dfrac{x}{x^2-2x+1}$; л) $y=\dfrac{x}{x^2+3x+1}$; м) $y=\dfrac{x}{x^2-3x+1}$.

847. Построить кривые по заданному параметрическому представлению*).

а) Окружность радиуса r с центром в начале координат: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t\in[0, 2\pi)$.

б) Эллипс с большой и малой полуосями, равными соответственно r_1 и r_2 и расположенными параллельно осям координат: $x= r_1\cos t$, $y = r_2\sin t$, $t\in[0,2\pi)$..

в) Улитка Паскаля (рис. 58):

$x=a\cos^2 t+b\cos t,\ y=a\cos t\sin t+b\sin t,\ \ a>0,\ \ b>0,\ \ t\in[0,2\pi)$.

Рассмотреть случаи, когда $b\ge 2a, a<b<2a, a>b$.

г) Кардиоида (рис. 59): $x = a\cos t\,(1+\cos t)$, $y = a\sin t\,(1+\cos t)$, $a>0$, $t\in[0,2\pi)$.

д) Эпициклоида (рис. 60): $x = (a+b)\cos t - a\cos((a+b)\,t/a)$, $y = (a+b)\sin t - a\sin((a+b)\,t/a)$, $a > 0$, $b > 0$. Рассмотреть следующие случаи:

1) если b/a есть целое положительное число, $t \in [0, 2\pi)$;

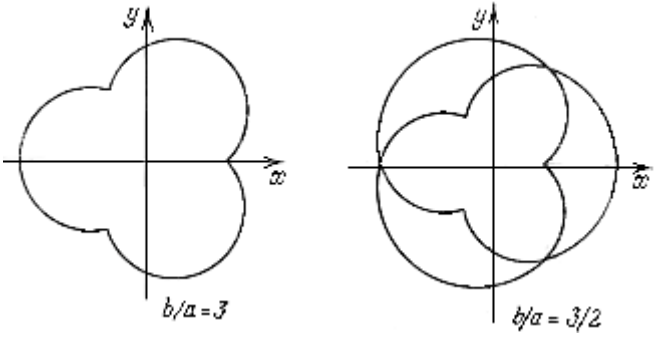


Рис. 60

2) если $b/a = p/q$, где p и q -положительные целые взаимно простые числа, $t \in [0, 2q\pi)$.

е) Астроида (рис. 61): $x = b\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $t \in [0,2\pi)$.

ж) Циссоида (рис. 62):

$$x = at^2/(1+t^2),\ y = at^3/(1+t^2),\ \ t \in (-\infty,\infty), a > 0.$$

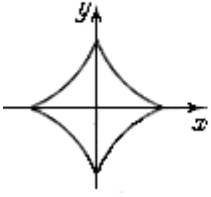


Рис. 61

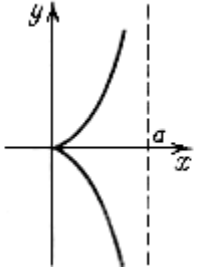


Рис. 62

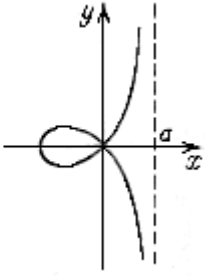


Рис. 63

3) Строфоида (рис. 63):

$$x = a(t^2-1)/(t^2+1), y = at(t^2-1)/(t^2+1), y = at(t^2-1)/(t^2+1), t \in (-\infty,\infty), a > 0$$

. и) Конхоида Никомеда (рис. 64): $x = a + l\cos t$, $y = a\,\mathrm{tg}\,t + l\sin t$,

$t \in (-\pi/2, \pi/2)$ - правая ветвь, $t \in (\pi/2, 3\pi/2)$ - левая ветвь, $a > 0$, $l > 0$.

Рассмотреть случаи, когда $l < a$, $l > a$, $l = a$.

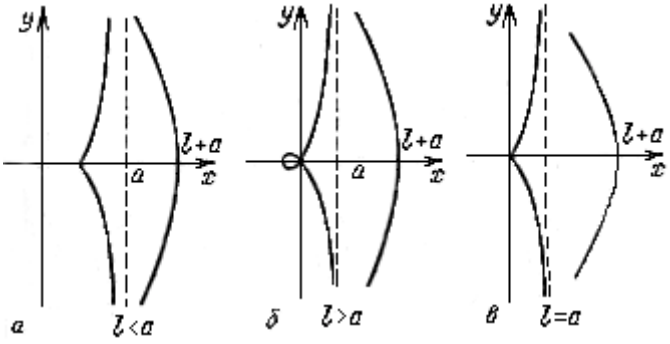


Рис. 64

*) Параметрическое представление кривой *l* на плоскости с координатами *x*, *y* -это две функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, определенные на одном и том же числовом множестве.

848. Построить кривые по их уравнениям в полярных координатах *).

*) Полярные координаты ρ,φ точки *M* на плоскости - это расстояние $\rho = OM$ от фиксированной точки O (полюса) до точки *M* и угол $\varphi =$

$=\angle POM$ между OM и полярной осью (полупрямой) OP (рис. 68).

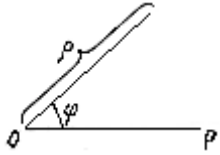


Рис. 68

а) Овалы Кассини (рис. 65):

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4 \cos^2 2\varphi + (a^4 - c^4)}$$

Рассмотреть случаи, когда $a > c\sqrt{2} > 0, 0 < c < a < c\sqrt{2}, 0 < a < c$.

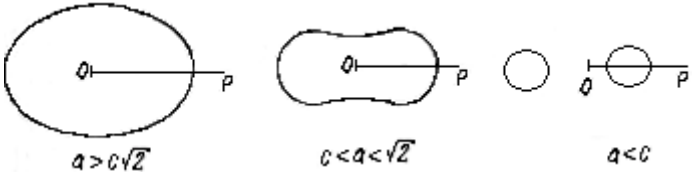


Рис. 65

б) Лемниската (рис. 66): $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}, \quad a > 0$.

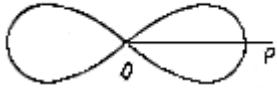


Рис. 66

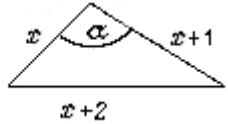


Рис. 67

849. Рассмотрим треугольник со сторонами x, $x+1$, $x+2$, где x - некоторое действительное число (рис. 67).

Угол α между сторонами x и $x+1$ является функцией от x. Исследовать область определения и построить график этой функции.

850. Вычерчивание окружности, заданной параметрическими уравнениями $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in [0,2\pi)$ (см. предыдущую задачу), выполняется довольно медленно в связи с необходимостью вычисления тригонометрических функций. Процесс можно ускорить, если воспользоваться параметрическими уравнениями

$$x = x_c + r\frac{1-t^2}{1+t^2},\ y = y_c + r\frac{2t}{1+t^2},\quad t \in [0,1).$$

Указанное изменение параметра соответствует дуге окружности от 0 до $\pi/2$. Полная окружность может быть построена симметричным отображением каждой полученной точки относительно оси *OX*, оси *OY* и начала координат в предположении, что начало координат совмещено с центром окружности (рис. 69).

Даны натуральные x_c, y_c, r. Построить окружность с центром в точке (x_c, y_c) и радиусом *r*, воспользовавшись алгоритмом, описанным выше.

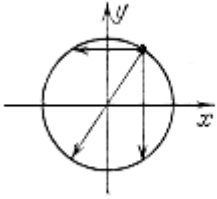


Рис. 69

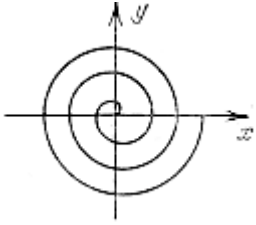


Рис.70

851. Построить спираль вокруг начала координат с *n* витками и

внешним радиусом r ; начальное направление спирали образует с осью OX угол α (рис. 70). Параметрическое представление спирали: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $r = t/2$, $\alpha \le t \le 2n\pi$.

852. Используя решение предыдущей задачи, начертить фигуру, показанную на рис. 71. Фигура состоит из четырех спиралей, заключенных в окружность радиуса r с центром в точке (x_c, y_c). Начальный угол одной из спиралей задан и равен α , начальный угол каждой следующей спирали превышает начальный угол каждой предыдущей спирали на 45°.

Рис. 71

853. Спирограф - это зубчатый диск радиуса B, расположенный внутри колеса радиуса A. Диск вращается против часовой стрелки и всегда находится в зацеплении с внешним колесом. В диске имеется небольшое отверстие на расстоянии D от центра диска, в которое помещается карандаш. Грифель карандаша в процессе вращения вычерчивает рисунок ; вычерчивание заканчивается, когда карандаш возвращается в исходное положение. С помощью спирографа могут быть построены рисунки, подобные приведенному на рис. 72 .

Уравнение кривой, вычерчиваемой грифелем, в параметрической форме имеет вид

$x = (A\text{-}B) \cos t + D \cos\varphi$,

$y = (A\text{-}B) \sin t - D \sin\varphi$, где $\varphi = (A/B)\, t$, $D < B < A$.

Угол t меняется от 0 до $2\pi n$, n равно В, деленному на наибольший общий делитель (НОД) B и A (см. задачу 89).

Даны натуральные A, B, D ($D < B < A$). Составить программу, моделирующую спирограф.

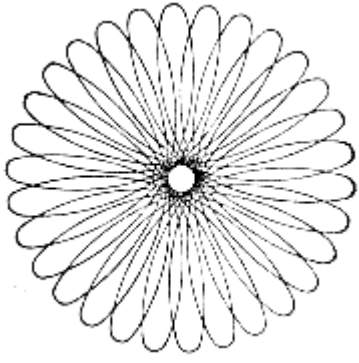


Рис. 72

854. Построить на экране множество точек, координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам или системам неравенств:

а) $|y|+2|x|\le x^2+1$;

б) $x^2+y^2\le 2(|x|+|y|)$;

в) $4\le x^2+y^2\le 2(|x|+|y|)$;

г) $\log_{1/3}(2x+y-2)>\log_{1/3}(y+1)$, $\sqrt{y-2x-3}<\sqrt{3-2x}$;

д) $y\ge\sqrt{1-x^2}$, $y+|x|\le 4$;

е) $2y-x^2<0,\ x^2-y^2\ge 0$;

ж) $y\ge x^2-4x+3,\ y<x^2+4x+3$;

з) $2y\ge x^2,\ y\le -2x^2+3x$;

и) $\sqrt{x^2-3y^2+4x+4}\le 2x+1,\ x^2+y^2\le 4$.

855. Кривые дракона, показанные на рис. 73, *а* -73, *в*, могут быть построены с помощью следующего рекуррентного метода.

Каждой кривой ставится в соответствие последовательность, состоящая из нулей и единиц (будем называть ее двоичной формулой), где единица соответствует повороту кривой налево, а нуль - повороту направо. Кривая дракона первого порядка имеет двоичную формулу 1 (рис. 73, *а*). Для того чтобы получить двоичную формулу кривой дракона каждого следующего порядка, следует приписать справа к формуле кривой предыдущего порядка единицу. Полученная последовательность дает половину искомой формулы. Затем в последовательности цифр, предшествующих приписанной единице, следует заменить на нуль единицу, стоящую в ее середине, после чего приписать полученную последовательность справа от уже построенной части формулы. На рис. 73, *б* показана кривая дракона второго порядка, которой соответствует двоичная формула 110, а на рис. 73, *в* - кривая дракона третьего порядка - ей соответствует двоичная формула 1101100. Кривые строятся от хвоста к голове дракона и повернуты так,

чтобы драконы «плыли» направо, а пасть и кончик хвоста касались «поверхности воды». Прямые углы обычно скругляются дугой окружности или срезаются (показано на рис. 73, *а* -73, *в* штриховой линией) для того, чтобы вершины углов не соприкасались и не создавалась иллюзия самопересечения кривой.

Дано натуральное *n*. Получить кривую дракона порядка *n*.

Рис. 73

856. Построить изображения, приведенные на рис. 74, применив какой-нибудь способ раскраски.

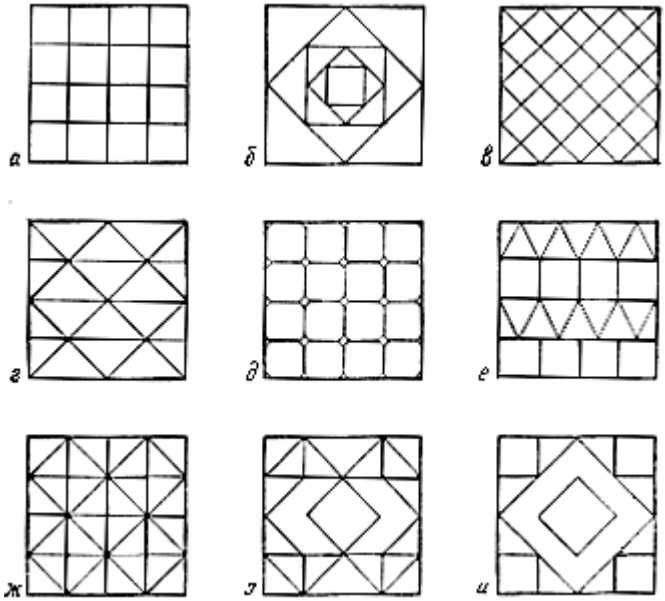


Рис. 74

857. Даны натуральные числа n и r. Построить n точек, являющихся вершинами правильного n - угольника, вписанного в

окружность радиуса r, и соединить каждую из точек со всеми остальными n-1 точками. Координаты точек задаются формулами $x_i = r\cos(2\pi i/n), \quad y_i = r\sin(2\pi i/n)(i = 1,2,...,n)$.

Во избежание повторного вычерчивания линий, соединяющих одни и те же точки, каждую точку с номером i следует соединять только с теми точками с номерами j, для которых выполнено условие $i < j$.

858. Дано натуральное число r. Построить фигуры, построенные на рис. 75, *а* - 75, *г*. Фигуры образованы окружностью радиуса r и восемью точками, являющимися вершинами правильного многоугольника, вписанного в эту окружность, и соединенных между собой определенным образом. Фигура на рис. 75, *а* - это правильный восьмиугольник, образованный последовательным соединением его вершин. Для построения фигуры на рис. 75, *б* следует соединять вершины многоугольника через одну. При построении фигуры на рис.

75, *в* соединяются вершины, отстоящие друг от друга на две вершины, а при построении фигуры на рис. 75, *г* - отстоящие на три вершины.

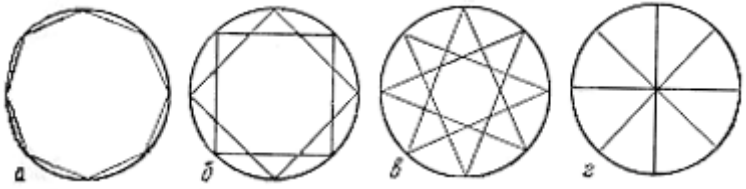


Рис. 75

859. Даны натуральные числа n и r. Построить квадрат, длина стороны которого равна r. Разместить по одной точке в каждом углу квадрата и по n-1 точек на каждой его стороне. Расстояния между соседними точками на любой из сторон должны быть одинаковыми и равными r/n. Тем самым будет построено всего $4n$ точек, которые можно занумеровать числами 1, ..., $4n$ (нумерация начинается с левого верхнего угла квадрата и выполняется последовательно). Соединить каждую точку с номером i со всеми точками с номерами j (i, j = 1, ...,

$4n$) такими, что $j > i$ и разность j-i есть число Фибоначчи, меньшее $4n$ (см. задачу 144).

860. Уравнение $f(x, y)=0$, представляющее все точки (x, y) некоторой кривой, называют уравнением кривой в неявной форме. Если кривая делит плоскость на две части, то уравнение в неявной форме позволяет определить, лежит ли точка на кривой, или если нет, то в какой части она лежит (см. задачу 52).

Даны натуральные числа r, x_c, y_c, n, a_0,..., a_{2n-1}. Числа r, x_c, y_c задают окружность радиуса r с центром в точке (x_c, y_c). Пары чисел a_i, a_{i+1} (i кратно 2) являются координатами точек.

а) Построить окружность и все точки, заданные последовательностью a_0,..., a_{2n-1} и лежащие вне окружности.

б) Построить окружность и все точки, заданные последовательностью a_0,..., a_{2n-1} и лежащие внутри окружности.

в) Построить окружность и все точки, заданные последовательностью $a_0, \ldots, a_{2n-1}$ и не принадлежащие окружности. Точки, лежащие вне окружности и внутри нее, должны иметь разные цвета.

861. Даны натуральные числа a, b, c, n, $a_0, \ldots, a_{2n-1}$. Числа a, b, c задают прямую l с уравнением $ax + by + c = 0$. Пары чисел a_i, a_{i+1} (i кратно 2) являются координатами точек.

а) Построить прямую l и все точки, заданные последовательностью $a_0, \ldots, a_{2n-1}$ и такие, что $ax + by + c < 0$.

б) Построить прямую l и все точки, заданные последовательностью $a_0, \ldots, a_{2n-1}$ и такие, что $ax + by + c > 0$.

в) Построить прямую l и все точки, заданные последовательностью $a_0, \ldots, a_{2n-1}$ и не принадлежащие прямой l. Точки, лежащие по разные стороны от прямой, должны иметь разные цвета.

862. Уравнение прямой в неявной форме (см. задачу 860) имеет весьма полезное свойство: $|f(x, y)| / (a^2 + b^2)$ равно длине

перпендикуляра от точки (x, y) к прямой. Например, если $f(x, y) = -x + 2y + 2$, то длина перпендикуляра, опущенного на прямую из точки (0,1), равна $|f(0,1)|/5 = 4/5$.

Даны натуральные числа a, b, c, n, $a_0, \ldots, a_{2n-1}$ действительное число r. Числа a, b, c определяют прямую с уравнением $ax + by + c = 0$. Пары чисел a_i, a_{i+1} (i кратно 2) являются координатами точек.

а) Построить прямую l и все точки, заданные последовательностью $a_0, \ldots, a_{2n-1}$, не принадлежащие прямой l такие, что длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, меньше r.

б) Построить прямую l и все точки, заданные последовательностью $a_0, \ldots, a_{2n-1}$, не принадлежащие прямой l такие, что длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, больше r.

в) Построить прямую l и все точки, заданные последовательностью $a_0, \ldots, a_{2n-1}$ и не принадлежащие прямой l. Точки,

для которых длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, меньше r и больше r, должны быть окрашены в разные цвета.

863. Пусть дана система линейных неравенств

$$a_1x + b_1y + c_1 \geq 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 \geq 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_mx + b_my + c_m \geq 0.$$

Каждое из неравенств этой системы определяет в координатной плоскости некоторую полуплоскость. Если какие- либо числа x и y удовлетворяют всем неравенствам системы, то точка (x, y) принадлежит пересечению указанных полуплоскостей. Граница этого пересечения может состоять из отрезков, полупрямых и целых прямых. В том случае, когда граница состоит только из отрезков, пересечение полуплоскостей является выпуклым многоугольником (мы здесь называем многоугольником не только границу, но и все множество

точек, охваченное границей). Обратно, любой выпуклый многоугольник, принадлежащий координатной плоскости, может быть описан системой линейных неравенств. Пусть $A_1,...,A_n$ - последовательные вершины выпуклого многоугольника, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Можно выписать уравнение $a_1x+b_1y+c_1=0$ прямой, проходящей через точки A_1,A_2. Так как многоугольник выпуклый, то все $A_1, A_2, A_3,...,A_n$ лежат в одной полуплоскости относительно этой прямой. Поэтому в качестве первого неравенства можно взять

$$a_1x+b_1y+c_1 \geq 0 \text{ или } -a_1x-b_1y-c_1 \geq 0$$

в зависимости от того, является или нет положительным числом результат подстановки в $a_1x+b_1y+c_1$ координат какой-либо из точек $A_3, A_4,..., A_n$. Аналогичным образом следует поступать с уравнениями

прямых, проходящих через точки A_2, A_3 и т. д. (последние две точки - A_n, A_1).

Даны натуральные числа n, a_0,..., a_{2n-1}. Пары чисел a_i, a_{i+1} (i кратно 2) являются координатами точек. Рассматривается граница l выпуклого многоугольника с вершинами в точках (36, 30), (30, 27), (24, 30), (30, 39). Построить l, а также точки, заданные последовательностью a_0,..., a_{2n-1}:

а) лежащие вне многоугольника;

б) лежащие внутри многоугольника, но не на l;

в) принадлежащие l (точки выделить цветом, отличным от цвета l).

г) лежащие где-либо на плоскости; те точки, которые лежат внутри многоугольника, на его границе и вне его, должны иметь разные цвета, ни один из которых не совпадает с цветом границы.

864. Пусть две точки заданы своими координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Прямая, проходящая через эти две точки может быть описана следующими параметрическими уравнениями:

$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$.

При $0 < t < 1$ точка (x, y) лежит внутри отрезка и делит его в отношении $t/(1 - t)$; при $t = 0$ достигается конец отрезка (x_1, y_1), при $t = 1$ - конец (x_2, y_2). При $t > 1$ точка (x, y) лежит на прямой вне отрезка с той же стороны от (x_1, y_1), что и (x_2, y_2); при $t < 0$ - с противоположной стороны.

Даны натуральные числа x_1, y_1, x_2, y_2, действительное число $\mu (0 \le \mu < 1)$. Построить отрезок с координатами концов $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ и точку, делящую отрезок в отношении $\mu/(1-\mu)$.

865. Начертить узор, показанный на рис. 76. Узор образован 20 вложенными квадратами. Стороны первого квадрата параллельны осям

координат экрана и равны 60. Вершины каждого последующего квадрата - это точки на сторонах предыдущего квадрата, делящие эти стороны в отношении $\mu = 0.08$ (см. предыдущую задачу).

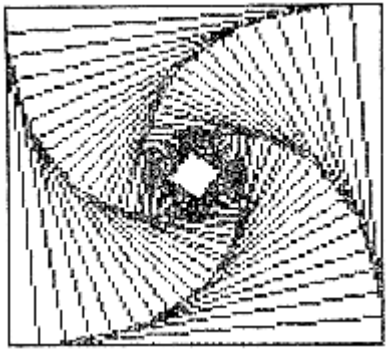


Рис. 76

866. Начертить узор, повторяющий узор, описанный в предыдущей задаче, но составленный из

а) треугольников;

б) пятиугольников;

в) шестиугольников.

867. Построить узор, показанный на рис. 77, используя алгоритм описанный в задаче 864.

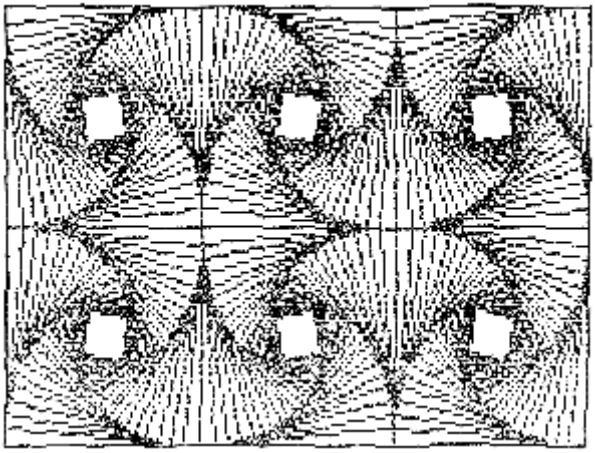


Рис. 77

868. Даны натуральные числа x_1, y_1, x_2, y_2. Начертить штриховые линии между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) так, как показано на рис. 78.

Способ определения координат точки, лежащей на отрезке с концами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и делящей отрезок в заданном отношении, см. в задаче 864.

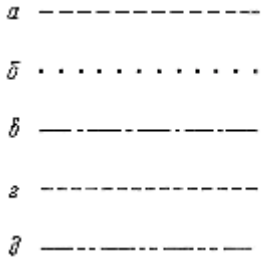


Рис. 78

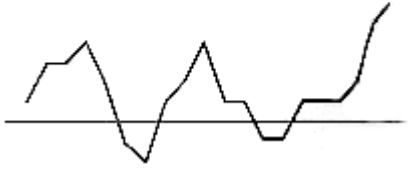


Рис. 79

869. Даны натуральные числа x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4. Построить две прямые, одна из которых проходит через точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) а другая - через точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Построить точку пересечения этих прямых, если она существует, и

определить, лежит ли точка пересечения внутри отрезков с концами (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3), (x_4, y_4) или вне их (см. задачу 864).

870. Даны целые числа $t_1, t_2, ..., t_{31}$. Последовательность значений $t_1, t_2, ..., t_{31}$ задает график температур за март месяц, подобный показанному на рис. 79. Построить график температур. Отрезки прямых, лежащие выше горизонтальной прямой, соответствующей нулевой температуре, и лежащие ниже этой прямой, должны быть окрашены в разные цвета.

871. Даны натуральные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$. Построить отрезок с координатами концов (x_1, y_1) и (x_2, y_2), а также отрезок, параллельный и равный по длине первому отрезку; один конец отрезка должен иметь координаты (x_3, y_3), второй следует расположить:

а) по ту же сторону от (x_3, y_3), что и (x_2, y_2) от (x_1, y_1);

б) с противоположной стороны.

Воспользоваться тем, что параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (x_3, y_3) и параллельной прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), могут иметь вид

$$x = x_3 + (x_2 - x_1)\, t, \quad y = y_3 + (y_2 - y_1)\, t.$$

Координаты конца искомого отрезка вычисляются подстановкой значений $t = 1$ и $t = -1$. При $t = 1$ конец отрезка будет расположен на прямой с той же стороны от (x_3, y_3), что и точка (x_2, y_2) от точки (x_1, y_1); при $t = -1$ *с* противоположной.

872. Даны натуральные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$. Построить отрезок с координатами концов (x_1, y_1) и (x_2, y_2).Через точку (x_3, y_3) провести отрезок, параллельный и равный по длине первому отрезку, таким образом, чтобы точка (x_3, y_3) делила искомый отрезок пополам (см. предыдущую задачу и задачу 864).

873. Даны натуральные числа x_c, y_c, h, w, x, y. Построить прямоугольник с центром в точке (x_c, y_c), высотой h и шириной w, а

также отрезок прямой с координатами концов (x_c, y_c) и (x, y). Отметить точку пересечения отрезка со стороной прямоугольника (рис. 80).

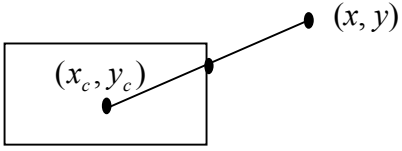


Рис. 80

874. Даны натуральные числа x_c, y_c, h, w, x, y. Построить прямоугольник с центром в точке (x_c, y_c), высотой h и шириной w, а также определить координаты x_p, y_p точки пересечения с прямоугольником невидимой прямой, проходящей через точки (x_c, y_c) и (x, y) (см. предыдущую задачу). Кроме того, построить:

а) отрезок прямой с координатами концов (x_c, y_c) и (x_p, y_p) (рис. 81, *а*);

б) отрезок прямой с координатами концов (x, y) и (x_p, y_p) (рис. 81, *б*).

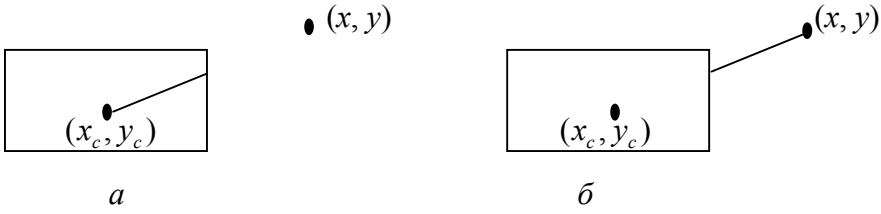


Рис. 81

875. Прямоугольник задан координатами левого верхнего и правого нижнего угла, отрезок - координатами концов. Предполагается, что отрезок пересекает противоположные стороны прямоугольника так, как показано на рис. 82, *а*. Построить фигуру, изображенную на рис. 82, *б* (см. задачу 873).

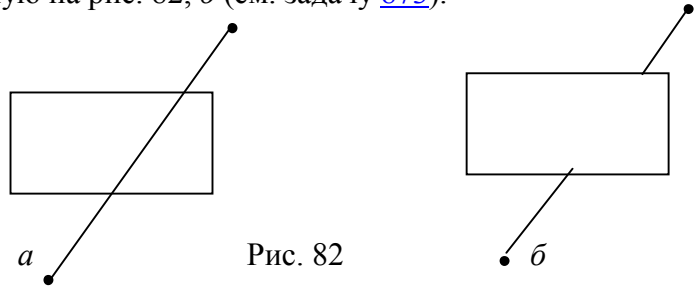


Рис. 82

876. Даны натуральные числа x_c, y_c, r, x, y. Построить окружность с центром в точке (x_c, y_c) и радиусом r, а также отрезок с координатами концов (x_c, y_c) и (x, y). Отметить точку пересечения отрезка и окружности.

Воспользоваться тем, что прямая, проходящая через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) может быть описана параметрическими уравнениями $x = x_1 + et$, $y = y_1 + f\,t$, где

$$e = (x_2 - x_1)/d,\ f = (y_2 - y_1)/d,\ d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Такой способ задания прямой отличается от указанного в задаче 864 тем, что при $t = 1$ мы получаем не второй конец отрезка (x_2, y_2), как в задаче 864, а точку, отстоящую от конца (x_1, y_1) на единичное расстояние. Из этого следует, что координаты точки пересечения отрезка с окружностью могут быть вычислены подстановкой в данные параметрические уравнения значения $t = r$, где r - радиус окружности.

877. Даны натуральные числа x_c, y_c, r, x, y. Построить окружность с центром в точке (x_c, y_c) и радиусом r, а также определить координаты x_p, y_p точки пересечения с окружностью невидимой прямой, проходящей через точки (x_c, y_c) и (x, y). Кроме того, построить отрезок с координатами концов:

а) (x_c, y_c) и (x_p, y_p);

б) (x, y) и (x_p, y_p).

Отметить точку пересечения отрезка и окружности.

878. Даны натуральные числа x_1, y_1, x_2, y_2, действительное $\mu(0 < \mu < 1)$. Построить отрезок с координатами концов (x_1, y_1), (x_2, y_2), и восстановить перпендикуляр к отрезку из точки (x_3, y_3), делящей его в отношении $\mu/(1-\mu)$.

Воспользоваться тем, что прямая, перпендикулярная отрезку с концами (x_1, y_1), (x_2, y_2) и проходящая через точку (x_3, y_3), описывается

параметрическими уравнениями

$x = x_3 - ft$, $y = y_3 + et$ или $x = x_3 + ft$, $y = y_3 - et$, где $e = (x_2 - x_1)/d$, $f = (y_2 - y_1)/d$, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Расстояние произвольной точки на этой прямой от точки (x_3, y_3) определяется параметром t (см. также задачу 864).

879. Даны натуральные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$. Построить отрезок с координатами концов (x_1, y_1), (x_2, y_2) и опустить на него или на его продолжение перпендикуляр из точки (x_3, y_3) (см. предыдущую задачу и задачу 876)

880. Даны натуральные числа x_1, y_1, x_2, y_2. Построить отрезок с координатами концов (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и какой-нибудь отрезок, параллельный и равный по длине первому отрезку и отстоящему от него на 30 единиц (см. задачу 871 и 878).

881. Пусть стрелка, соединяющая две произвольные точки, устроена, как в задаче 127. Даны натуральные числа x_1, y_1, x_2, y_2.

Построить стрелку, направленную из точки (x_1, y_1) в точку (x_2, y_2). (Способ определения координат точки, лежащей на отрезке с заданными концами и делящий отрезок в заданном отношении, см. в задаче 864. Способ построения прямой, перпендикулярной данной, см. в задаче 878).

882. Даны натуральные числа x, y, r, x_1, y_1, h, w. Построить окружность радиуса r с центром в точке (x, y), прямоугольник с центром в точке (x_1, y_1) высотой h и шириной w, а также отрезок, соединяющий центр окружности с центром прямоугольника (рис. 83).

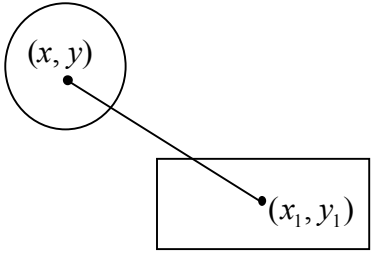


Рис. 83

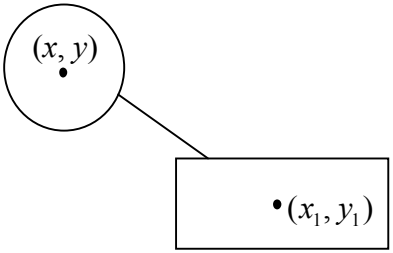


Рис. 84

883. Даны натуральные числа x, y, r, x_1, y_1, h, w. Построить окружность радиуса r с центром в точке (x, y), прямоугольник с центром в точке (x_1, y_1) высотой h и шириной w, а также отрезок, соединяющий окружность с прямоугольником. Отрезок должен лежать на невидимой прямой, проходящей через центры окружности и прямоугольника и начинаться в точке пересечения этой прямой с окружностью и заканчиваться в точке пересечения прямой с прямоугольником(рис. 84).

(Способ определения координат точек пересечения прямой проходящей через две заданные точки, с окружностью и прямоугольником см. в задачах 876 и 873.)

884.Даны натуральные числа x, y, n, символы s_1, ..., s_n. Последовательность символов $s_1,...,s_n$ вывести так, чтобы точка с координатами (x, y) была расположена (рис. 85):

а) по центру последовательности;

б) с левого края последовательности;

в) с правого края последовательности.

ТЕКСТ	ТЕКСТ	ТЕКСТ
(x, y)	(x, y)	(x, y)
а	*б*	*в*

Рис. 85

885. Пусть в двумерной декартовой системе координат задана плоская фигура и пусть (x, y)- координаты одной из ее точек. Рассмотрим, как изменятся эти координаты, если к фигуре применить одно из следующих преобразований: перенос вдоль осей координат, поворот вокруг начала координат, растяжение (сжатие) по осям координат.

1) Перенос на t_x единиц по оси OX и t_y единиц по оси OY:

$$(x, y) \to (x - t_x, y - t_y).$$

2) Растяжение (сжатие) по оси OX в s_x; раз и по оси OY в s_y раз:

$$(x, y) \to (s_x x,\ s_y y).$$

3) Поворот вокруг начала координат на угол t радиан:

$$(x, y) \to (x\cos t + y\sin t,\ \ -x\sin t + y\cos t).$$

Треугольник задан координатами вершин. Построить его, а затем перенести на десять единиц по оси OX и на пять единиц по оси OY.

886. Даны натуральные числа x_c, y_c, r и действительное число t. Построить правильный пятиугольник, вписанный в окружность с центром в точке (x_c, y_c) и радиусом r, после чего повернуть его относительно начала координат на угол t радиан (см. предыдущую задачу).

887. Даны натуральные числа x_c, y_c, r, s_x, s_y. Построить правильный шестиугольник с центром в точке (x_c, y_c) и стороной r, после чего растянуть (сжать) его по оси OX в s_x раз, а по оси OY- в s_y раз (см. задачу 885).

888. Построить фигуру, изображенную на рис. 86. В центре фигуры находится равносторонний треугольник с заданной стороной (см. задачу 885).

889. Выполнить задания а) - е) задачи 849, после чего применить к построенным фигурам следующие преобразования:

а) перенос по оси OX на 10 единиц в направлении, обратном направлению оси;

б) поворот относительно начала координат на угол $\pi/4$ радиан;

в) растяжение (сжатие) по оси OY в два раза (см. задачу 885).

890. Построить спираль, описанную в задаче 851, после чего применить к ней преобразования а) - в) предыдущей задачи.

891. Даны натуральные числа x_c, y_c, a, b и действительное t. Начертить эллипс с центром в точке (x_c, y_c), большой осью a, малой осью b, большая ось образует угол t радиан с положительной полуосью OX (рис. 87).

Воспользоваться следующим алгоритмом. Построить эллипс с центром в начале координат, с большой и малой осями, совпадающими с осями OX и OY системы координат (параметрические уравнения такого эллипса даны в задаче 849). После чего применить к эллипсу следующие преобразования: поворот на угол t радиан и перенос по оси OX на x_c единиц, по оси OY - на y_c единиц (см. задачу 885).

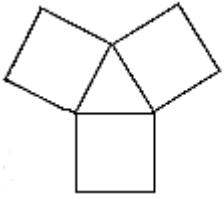


Рис. 86

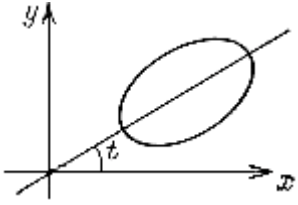


Рис. 87

892. Даны натуральные числа x_c, y_c, r и действительное число *t*. Начертить астроиду радиуса *r* с центром в точке (x_c, y_c), где одна из осей фигуры составляет угол *t* радиан с положительной полуосью *OX* (рис. 88). (см. задачи 849 и 885).

893. Один из возможных способов построения на экране букв произвольного размера был описан в задаче 131. Другой достаточно широко распространенный способ заключается в том, что буквы строятся из отдельных отрезков, размещаемых в соответствии с конфигурацией буквы в прямоугольнике определенного размера,

подобно тому, как это делается при написании цифр на электронных часах или индекса на почтовом конверте (рис. 89). Если предположить, что левый нижний угол прямоугольника совмещен с началом координат, то каждому отрезку можно поставить в соответствие координаты его концов. Так, букве Б, изображенной на рис. 90, соответствует последовательность координат (0, 0) - (0, 8), (0, 8) - (4, 8), (0, 4) - (4,4), (0,0) - (4,0), (4,4) - (4,0) - назовем ее векторным шаблоном буквы.

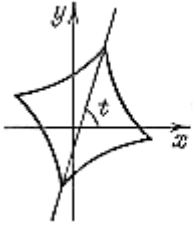


Рис. 88

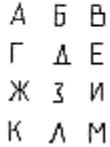


Рис. 89

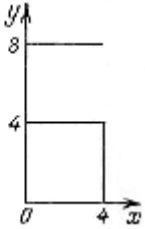
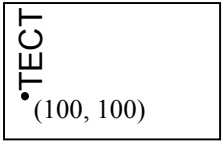


Рис. 90

Таким образом, последующая обрисовка буквы на экране сводится к построению отрезков, координаты концов которых определяются согласно векторному шаблону и с учетом позиции экрана, в которую должен быть помещен левый нижний угол соответствующего прямоугольника. (Перенос и другие преобразования фигур описаны в задаче 885).

Составить векторные шаблоны для всех букв алфавита и цифр и получить на экране слово ТЕСТ, расположенное, как показано на рис. 91, *а* и 91, *б*.

а



б

Рис. 91

894. Используя шаблоны, описанные в предыдущей задаче, выполнить подрисуночные подписи к графикам функций из задач 843-849.

895. Даны натуральные числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4$. Построить прямоугольник, левый верхний угол которого находится в точке (x_1, y_1), а правый нижний- в точке $(x_2,\ y_2)$, и прямоугольник, левый верхний угол которого находится в точке $(x_3,\ y_3)$, а правый нижний- в точке $(x_4,\ y_4)$. Определить, пересекаются ли эти прямоугольники. Если да, то закрасить их общую часть.

Для решения задачи воспользоваться следующим. Пусть

$$
\begin{aligned}
l &= \max(x_1, x_3),\\
r &= \min(x_2, x_4),\\
b &= \max(y_2, y_4),\\
t &= \min(y_1, y_3).
\end{aligned}
$$

Прямоугольники пересекаются, если $l < r$ и и $b < t$. Общей частью двух пересекающихся прямоугольников также является прямоугольник (предполагается, что стороны прямоугольников попарно параллельны). Левый верхний и правый нижний углы прямоугольника пересечения находятся в точках с координатами соответственно (l, t) и (r, b).

896. Два прямоугольника заданы координатами своих левого верхнего и правого нижнего углов. Верно ли, что прямоугольники пересекаются и что первый из них расположен левее и ниже, чем второй? Если да, то построить фигуру, показанную на рис. 92 (см. предыдущую задачу).

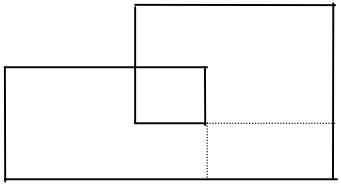


Рис. 92

897. Вопрос о том, пересекаются ли две (или более) плоские геометрические фигуры, отчасти может быть сведен к более простому вопросу о том, пересекаются ли прямоугольники, объемлющие эти фигуры. В случае, когда прямоугольники не пересекаются, не пересекаются и сами фигуры (рис. 93, *а*). Когда прямоугольники пересекаются (рис. 93, *б*), требуется дополнительный анализ.

Объемлющий прямоугольник строится следующим образом: прямоугольник должен полностью заключать в себе фигуру и иметь стороны, параллельные осям координат. При этом стремятся определить прямоугольник, имеющий наименьшую площадь. Такой прямоугольник легко построить для многих геометрических фигур, например для отрезка прямой, треугольника, окружности (рис. 93, *в)* и т. д. Более сложно строить объемлющие прямоугольники для дуг окружностей или других кривых.

а) Отрезок прямой задан координатами концов. Построить прямоугольник, объемлющий данный отрезок.

б) Окружность задана координатами центра и радиусом. Построить квадрат, объемлющий данную окружность.

в) Треугольник задан координатами вершин. Построить прямоугольник, объемлющий данный треугольник.

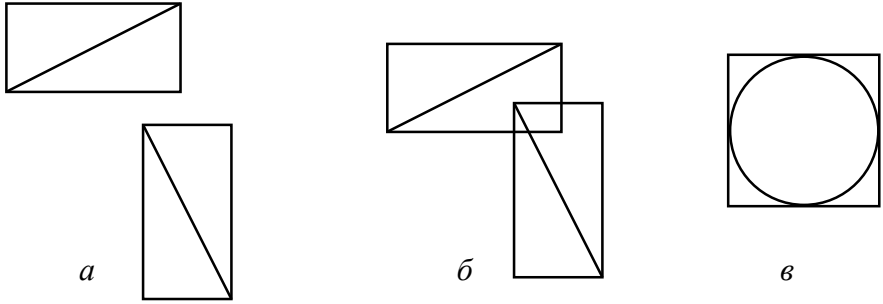


Рис. 93

898. Отрезок прямой задан координатами концов, окружность – координатами центра и радиусом, треугольник - координатами вершин. Построить заданные фигуры, а также прямоугольники, объемлющие каждую из фигур, и прямоугольник, объемлющий все три фигуры (рис. 94).

Воспользоваться тем, что левый верхний и правый нижний углы прямоугольника, объемлющего n фигур, имеют координаты соответственно (l, t) и (r, b), где

$$l = \min(l_1, ..., l_n),$$
$$r = \max(r_1, ..., r_n),$$
$$b = \min(b_1, ..., b_n),$$
$$t = \max(t_1, ..., t_n),$$

где (l_i, t_i), (r_i, b_i) - координаты левого верхнего и правого нижнего углов прямоугольника, объемлющего i-ю фигуру ($1 \le i \le n$).

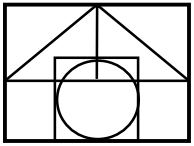


Рис. 94

899. Даны натуральные числа n, x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n. Построить точки с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) и прямоугольник, объемлющий все эти точки.

Воспользоваться тем, что левый верхний и правый нижний углы искомого прямоугольника имеют координаты (l, t) и (r, b), где

$$l = \min(x_1, x_2, ..., x_n),$$
$$r = \max(x_1, x_2, ..., x_n),$$
$$b = \min(y_1, y_2, ..., y_n),$$
$$t = \max(y_1, y_2, ..., y_n),$$

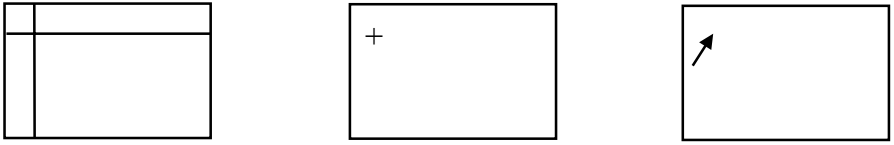
900. При работе с графическим изображением часто возникает необходимость выбрать одну или несколько точек экрана. Так, например, для того чтобы построить отрезок, следует задать два его конца, для построения окружности можно задать ее центр и любую точку на окружности и т. д. Для указывания требуемой точки обычно используют курсор. Курсор может иметь одну из следующих конфигураций:

а) Перекрестье (рис. 95, *а*). Указываемая точка - это точка пересечения двух прямых.

б) Крестик (рис. 95, *б*). Указываемая точка - это точка пересечения двух коротких отрезков.

в) Стрелка (рис.95, *в*). Указываемая точка - это точка, в которую помещается острие стрелки.

Построить курсоры а) - в), указывающие точку с координатами (100, 100).



а *б* *в*

Рис. 95

901. Изменение указываемой точки (см. задачу 900), или, иначе, управление курсором, может выполняться, например, с клавиатуры: нажатие клавиш управления курсором означает смену указываемой точки и вызывает соответствующее изменение формы или положения курсора. Для курсора-перекрестья изменение указываемой точки сопровождается перемещением горизонтальной или вертикальной прямой, образующей курсор, или обеих прямых одновременно. Изменение указываемой точки для курсора-крестика или курсора-стрелки сопровождается соответствующим перемещением курсора.

Реализовать процедуры для управления с клавиатуры курсором каждого из типов, описанных в предыдущей задаче.

902. Выбор нужной точки экрана обычно выполняется подводом курсора к этой точке и нажатием клавиши «ввод». Иногда бывает полезно видеть и предыдущую выбранную точку - последнюю точку, зафиксированную клавишей «ввод», и новую точку, на которую указывает курсор. Для этого используются метод резиновой нити и метод резинового прямоугольника.

а) В методе резиновой нити (рис. 96, *а*) один конец отрезка зафиксирован и указывает последнюю выбранную точку, второй конец перемещается в соответствии с изменением указываемой точки.

б) В методе резинового прямоугольника (рис. 96, *б*) один угол прямоугольника зафиксирован и указывает последнюю выбранную точку, а противолежащий угол перемещается в соответствии с изменением указываемой точки.

Реализовать метод резиновой нити и метод резинового прямоугольника.

Рис. 96

903. Построить треугольник по заданным вершинам. Точки экрана, являющиеся
вершинами треугольника, указываются с клавиатуры по методу резиновой нити (см. предыдущую задачу).

904. Построить окружность по двум заданным точкам: центру и одной из точек окружности. Обе точки указываются с клавиатуры по методу резинового прямоугольника (см. задачу 900).

905. Построить прямоугольник по двум заданным точкам: левому верхнему и правому нижнему углам. Обе точки указываются с клавиатуры (см. задачу 900).

906. Построить ломаную по заданным вершинам. Вершины указываются с клавиатуры (см. задачу 900).

907. Составить программу для управления размерами окружности и ее положением на экране. Исходная окружность имеет центр в точке (100, 100) и радиус $r = 20$. Управление выполняется клавишами:

« > » увеличивает радиус окружности на 5 точек;

« < » уменьшает радиус окружности на 5 точек;

клавиши управления курсором вызывают перемещение окружности в соответствующем направлении;

«ввод» завершает работу программы.

908. Составить программу для управления размерами прямоугольника и его положением на экране. Левый верхний угол исходного прямоугольника расположен в точке (50,50), правый нижний - в точке (100, 100). Управление выполняется клавишами:

« > » увеличивает ширину прямоугольника на 5 точек;

« < » уменьшает ширину прямоугольника на 5 точек;

« + » увеличивает высоту прямоугольника на 5 точек;

« - » уменьшает высоту прямоугольника на 5 точек;

клавиши управления курсором вызывают перемещение прямоугольника в соответствующем направлении;

«ввод» завершает работу программы.

909. Составить программу для произвольного рисования на экране. Рисунок - это след курсора, перемещаемого с помощью клавиш управления курсором. Должны обеспечиваться возможность стирания изображения и режим, в котором курсор не оставляет след.

910. Составить программу «электронный калейдоскоп». Построение калейдоскопа выполнять следующим образом. В центре экрана должен быть изображен правильный шестиугольник *ABCDEF*, вершины которого соединены с его центром *O* (рис. 97). Треугольник *FOA* должен быть рассечен несколькими прямыми, количество и расположение которых выбирается с помощью датчика случайных чисел. Каждая из полученных таким образом частей треугольника *FOA* должна быть закрашена цветом, номер которого также выбирается с помощью датчика случайных чисел. После этого изображение в каждом следующем треугольнике (при движении по или против часовой стрелки) должно быть получено симметричным отображением изображения, сформированного ранее в каждом предыдущем треугольнике, относительно их общей стороны: так, изображение в треугольнике *AOB* должно быть получено симметричным отображением изображения, сформированного в треугольнике

относительно стороны *OA*; изображение в треугольнике *BOC* должно быть получено симметричным отображением изображения, уже сформированного в треугольнике *AOB*, относительно стороны *OB* и т. д.

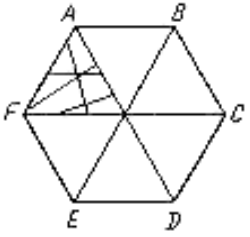


Рис. 97

§ 31. Звукогенерация*)

*) В задачах 913, 919, 923-925, 927, 930, 931 этого раздела предполагается, что компьютер (подобно школьному компьютеру «Ямаха») оснащен звукогенератором, имеющим три канала, каждым из которых можно управлять независимо.

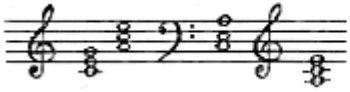
911. Воспроизвести до-мажорное трезвучие (до-ми-соль) последовательно, по одной ноте.

912. Воспроизвести:

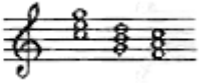
а) хроматическую гамму;

б) гамму указанной тональности.

913. Воспроизвести изображенные на рис. 98 аккорды (все ноты аккорда должны звучать одновременно).



а



б

Рис. 98

914. Составить игровую программу «музыкальная шкатулка». Программа должна воспроизводить одну из нескольких популярных мелодий по выбору играющего.

915. Составить программу для игры в музыкальную викторину. Программа должна последовательно воспроизводить несколько популярных мелодий, играющие - угадывать, какая мелодия была проиграна.

916. Составить игровую программу, которая воспроизводит три популярные мелодии, а затем одну из них наоборот: последняя нота мелодии звучит первой, первая - последней. Играющие должны

угадать, ноты какой мелодии были воспроизведены в обратном порядке.

917. Составить программу для воспроизведения мелодии, «сыгранной» на клавиатуре компьютера. Как и при игре на фортепианной клавиатуре, каждой клавише ставится в соответствие некоторая нота; длительность звучания ноты определяется длительностью нажатия клавиши.

918. Составить программу для запоминания и последующего воспроизведения мелодии, «сыгранной на фортепианной клавиатуре». Клавиатура изображается на экране (рис. 99.а). Вначале курсором указывается клавиша, а после этого - обозначение длительности (рис. 99, б).

а *б*

Рис. 99

919. Составить программу, которая строит с помощью датчика случайных чисел музыкальные интервалы (терцию, кварту, квинту и т. д.) и аккорды. Обучающийся должен определить, какой интервал или какое обращение трезвучия (тоническое трезвучие, секст-аккорд и т. п.) были воспроизведены.

920. Составить программу «музыкальный диктант». Программа должна воспроизвести мелодию, а обучающийся правильно повторить ее (см. задачу 917 или 918). Если диктант «написан правильно», может быть начато новое задание. В противном случае диктант выполняется еще раз.

921. Составить игровую программу, которая воспроизводит популярную мелодию с мелодическими изменениями, например, заменяя некоторые ноты другими нотами или паузами соответствующей длительности. Играющий должен угадать, какая мелодия была сыграна.

922. Составить программу транспонирования мелодии на указанное число полутонов вверх или вниз. Мелодия задается так же, как в задаче 917 или 918.

923. Составить программу «секвенсор», служащую для одновременного исполнения трех мелодий. Мелодии задаются так же, как в задаче 917 или 918, с тем отличием, что задание каждой следующей мелодии сопровождается воспроизведением всех мелодий, сыгранных ранее, т. е. задание второй мелодии выполняется при одновременном звучании первой мелодии, а задание третьей мелодии - при одновременном звучании первых двух мелодий. Последующее воспроизведение всех трех мелодий должно выполняться при нажатии клавиши, поставленной им в соответствие.

924. Музыкальный аккомпанемент может представлять собой последовательность аккордов. Для использования компьютера в качестве аккомпанирующего инструмента задать несколько аккордов и

сопоставить каждому аккорду одну из клавиш. Длительность звучания аккорда определяется длительностью нажатия клавиши.

В простейшем случае достаточно рассмотреть три аккоорда: тоническое трезвучие, доминантное трезвучие, субдоминантное трезвучие (пример см. на рис. 98, б).

925. Составить программу, исполняющую заданный аккомпанемент. Аккомпанемент должен состоять из баса и аккорда, звучащих по очереди (рис. 100, *а*). Другой вариант баса и аккорда начинает звучать (без изменения музыкального размера) после нажатия некоторой клавиши. В простейшем случае достаточно рассмотреть три варианта высоты ноты, звучащей в басу, и соответствующего ей аккорда: тоника, доминанта и субдоминанта. Доминанта звучит в сравнении с тоникой (рис. 98, *б)* на два с половиной тона ниже, субдоминанта - на три с половиной тона ниже.

Желательно предусмотреть регулировку темпа, изменение лада «мажор-минор», изменение размера (на рис. 100, *а* приведен аккомпанемент на четыре четверти, на рис. 100, *б* - на три четверти).

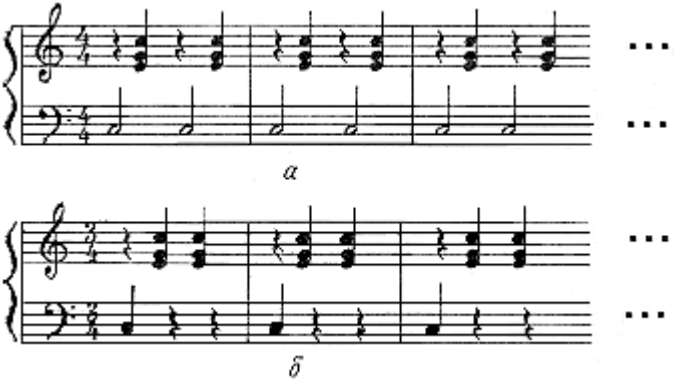


Рис. 100

926. Эта задача, как и две предыдущие, касается использования компьютера в качестве аккомпанирующего инструмента. Аккомпанемент состоит из баса и аккорда; при этом рассматриваются

три варианта басовой ноты и соответствующего ей аккорда (см. предыдущую задачу). Для исполнения аккомпанемента используются четыре клавиши: три из них - три варианта баса, четвертый - аккорд, вид которого определяется последней из предшествовавших нот. Длительность звучания определяется длительностью нажатия клавиши.

927. Составить программу - «композитор». Программа с помощью датчика случайных чисел выбирает 12 различных нот и длительность звучания каждой ноты. Полученная таким образом мелодия воспроизводится. Любая понравившаяся мелодия может быть запомнена для последующего воспроизведения.

928. Составить программу для управления тембром звучания. Управление тембром выполняется с помощью введения групп обертонов - звуковых колебаний, амплитуда которых меньше амплитуды основного тона, а частота в целое число раз больше

основной частоты. Обертоны следует получать с помощью датчика случайных величин.

929. Составить программу цветового сопровождения заданной мелодии (см. задачу 918). Соответствие цвета высоте звука выбирается по желанию составляющего программу или играющего.

930. Воспроизвести звуки, которыми могут сопровождаться игровые программы: мяуканье кошки, скрип двери, звук лопнувшего шара, свист летящей стрелы, звучание дождя, кряканье и т. л. Такие звуки рекомендуется получать, используя относительно высокие частоты периодических колебаний генератора огибающей - кросс-модуляцию (на школьном компьютере «Ямаха» они могут быть получены с помощью параметров *m* и *s* оператора PLAY) и генератор шума (оператор SOUND).

931. Составить программу, моделирующую эхо. Для этого воспроизвести одну и ту же мелодию по трем каналам одновременно.

Мелодия, звучащая по второму каналу, должна быть исполнена тише и с небольшим запаздыванием по сравнению с мелодией, звучащей по первому каналу. Мелодия, звучащая по третьему каналу, должна быть исполнена тише и с небольшим запаздыванием по сравнению с мелодией, звучащей по второму каналу.

932. Дан русский текст. Требуется воспроизвести его звуковыми сигналами азбуки Морзе. Предусмотреть возможность регулировки скорости воспроизведения.

§ 32. Графика и движение. Мультипликация

933. Изобразить на экране точку, пересекающую с постоянной скоростью экран справа налево параллельно его горизонтальной оси *).

*) В ряде следующих задач речь идет о движении точки. Вместо точки на экране можно использовать небольшой круг, прямоугольник или изображение предмета: волана для бадминтона, стрелы, самолета и т.д. Движение может сопровождаться звуком.

934. К условию предыдущей задачи добавляется следующее требование: как только точка доходит до левого края, в этот момент от правого края в строке, выбранной с помощью датчика случайных чисел, начинает свое движение другая точка и т. д. Цвет точки также может выбираться с помощью датчика случайных чисел.

935. Усложним условие предыдущей задачи: очередная точка начинает движение от правого края экрана несколько раньше, чем

предыдущая точка доходит до левого края. Попытаться добиться того, чтобы одновременно на экране двигались три, четыре точки.

936. Изобразить на экране точку, движущуюся по окружности с постоянной угловой скоростью.

937. Составить программу для управления скоростью движения точки по окружности (см. предыдущую задачу). Управление производится клавишами « > » (скорость несколько увеличивается) и « < » (скорость несколько уменьшается) *).

*) В те из следующих задач, в которых речь идет о вращении, аналогичным образом можно включить требование, чтобы была предоставлена возможность управления с клавиатуры скоростью вращения.

938. Изобразить на экране прямую, вращающуюся в плоскости экрана вокруг одной из своих точек. Задачу можно усложнить дополнительным требованием, чтобы цвет прямой изменялся при переходе от предыдущего положения к следующему.

939. Изобразить на экране отрезок, вращающийся в плоскости экрана вокруг

а) своей середины;

б) своего конца;

в) точки, делящей отрезок в отношении 1:3.

940. Усложним условие задачи 938: в плоскости экрана должны вращаться, каждая вокруг своей точки, две прямые.

941. В условие предыдущей задачи вносится дополнение: должна быть предоставлена возможность управления с клавиатуры расстоянием между центрами вращения.

942. Изобразить на экране две движущиеся точки, траектории которых являются концентрическими окружностями. Угловая скорость точки, движущейся по внутренней окружности, должна быть несколько меньше, чем угловая скорость точки, движущейся по внешней окружности (обе скорости - постоянные величины). При этом

а) обе точки вращаются в одном направлении (например, по часовой стрелке);

б) точки вращаются в противоположных направлениях.

943. Изобразить одновременное вращение двух стрелок - большой и малой, при котором одному полному обороту большой стрелки соответствует 1/12 оборота малой стрелки (как на циферблате часов). Стрелки можно для простоты заменить отрезками.

944. Изобразить на экране правильный треугольник, вращающийся в плоскости экрана вокруг своего центра.

945. Изобразить на экране разносторонний треугольник, вращающийся в плоскости экрана вокруг своего центра тяжести.

946. Изобразить на экране прямоугольник, вращающийся в плоскости экрана вокруг своего центра.

947. Изобразить на экране прямоугольник, вращающийся в плоскости экрана вокруг одной из своих вершин.

948. Условия задач 938, 939, 944 - 947 изменяются следующим образом: во время вращения прямой, отрезка или многоугольника центр вращения с постоянной скоростью перемещается от одного края экрана до другого параллельно горизонтальной оси экрана.

949. Условие этой задачи отличается от предыдущей тем, что требуется сохранять на экране все высвеченные положения геометрической фигуры. Задачу можно еще усложнить дополнительным требованием, чтобы цвет фигуры изменялся при переходе от предыдущего положения к следующему.

950. Изобразить движущуюся прямую, которая в каждый момент касается окружности данного радиуса, центр которой совпадает с центром экрана. Точка касания перемещается по окружности с постоянной угловой скоростью сама окружность невидима.

951. Круглое кольцо вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своего диаметра, расположенного параллельно горизонтальной оси экрана. Изобразить на экране процесс вращения. Считать, что в момент времени t кольцо выглядит для наблюдателя как эллипс, большая ось которого равна постоянной величине c, а малая равна $c|\cos wt|$, где w - угловая скорость вращения. В правой части рис.101 приведено несколько последовательных изображений кольца, возникающих через равные промежутки времени. В левой части рисунка кольцо изображено сбоку (этот вид не даётся на экране).

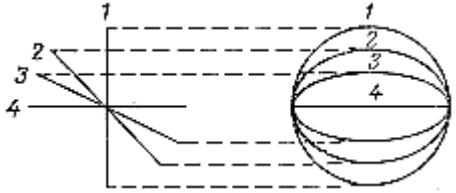


Рис. 101

952. Изобразить равнобедренный треугольник, вращающийся с постоянной угловой скоростью вокруг своей высоты, расположенной параллельно вертикальной оси экрана.

953. Изобразить на экране гармонические колебания точки вдоль некоторого горизонтального отрезка. Если длина отрезка равна *c*, то расстояние от точки до левого конца в момент времени *t* можно считать равным $c(1+\cos wt)/2$, где *w* некоторая постоянная. Предусмотреть возможность управления частотой колебаний с помощью клавиш « > » и « < », аналогично тому, как это описано в задаче 937 в отношении вращающейся точки. С помощью двух других клавиш можно управлять амплитудой, т. е. величиной *c*.

954. Изобразить точку, совершающую независимые гармонические колебания с частотой w_1 по горизонтали и с частотой w_2 по вертикали (амплитуда тех и других колебаний равна *a*). Считать,

что в момент времени t точка имеет координаты $x = a\cos w_1(t - t_1)$, $y = a\cos w_2(t - t_2)$; числа t_1 и t_2 даны. Предусмотреть возможность управления с клавиатуры значениями w_1 и w_2.

955. Изобразить на экране движение шара по биллиарду без луз (рис. 102).

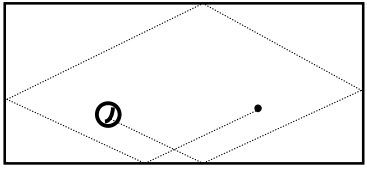


Рис. 102

956. В условие предыдущей задачи вносится дополнение: шар должен оставлять за собой светящийся след.

957. Изобразить на экране точку, пересекающую экран равноускоренно в вертикальном направлении.

958. Выполнить задачи 934, 935 применительно к равноускоренному движению.

959. Изобразить на экране приближающийся издали шар. По какому закону возрастает видимый диаметр шара с течением времени?

960. Согласно первому и второму закону Кеплера каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. В равные времена радиус- вектор планеты, проведенный от Солнца, заметает равные площади (рис. 103, *а*). Если ввести в плоскости орбиты полярные координаты так, как показано на рис. 103, *б* (Солнце выбирается в качестве полюса), то дифференциальным уравнением движения планеты будет

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{\rho^2},$$

где c - некоторая постоянная. С другой стороны, уравнение эллипса в этой системе координат будет

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

где p и e - неотрицательные постоянные, $e < 1$.

Получить на экране картину, дающую модель движения планеты вокруг Солнца (планета и Солнце изображаются светящимися точками: Солнце - неподвижной, а планета - подвижной). Для нахождения последовательностей $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \rho_0, \rho_1, \ldots$ значений угла φ и расстояния ρ через одинаковые промежутки времени, равные τ, можно воспользоваться методом Эйлера численного решения дифференциальных уравнений. Это позволит написать

$$\varphi_0 = 0,\ \rho_0 = \frac{p}{1+e},$$

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + \frac{c\tau}{\rho_{i-1}^2},\ \ \rho_i = \frac{p}{1 + e\cos\varphi_i},\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots$$

(здесь для простоты принято $\varphi_0 = 0$).

Значения c, τ, p, e следует подобрать так, чтобы картина на экране получилась достаточно выразительной (хотя, строго говоря, величины c, p и e не могут выбираться независимо друг от друга: они связаны соотношениями, вытекающими, в частности, из третьего закона Кеплера, до в данной графической задаче этим можно пренебречь). Для того чтобы представить себе форму эллипса в зависимости от p и e, рекомендуется рассмотреть случаи $\varphi_0 = 0, \pi/2, \pi$.

Рис. 103

961. Получить мультфильм «Круги на воде», используя семь концентрических окружностей. Центры окружностей должны быть совмещены с центром экрана, а радиусы изменяться от 40 до 82

пиксел, увеличиваясь на 7 пиксел с каждой следующей окружностью. Иллюзия движения должна создаваться последовательной сменой цветов всех окружностей, начиная с внутренней и кончая внешней. Процесс смены цветов следует повторить не менее десяти

962. Получить на экране слово ТЕСТ, составленное из крупных букв так, как описано в задаче 893, и обеспечить его перемещение по экрану:

а) по горизонтали от левого края экрана к правому краю;

б) по вертикали от верхнего края экрана к нижнему и обратно.

963. Аналогично предыдущей задаче получить на экране два слова ТЕСТ, движущиеся по экрану по одной горизонтальной прямой навстречу друг другу. Первое слово должно двигаться от левого края экрана к правому, второе - от правого края к левому. Движение должно выполняться до полного совмещения слов.

964. Получить на экране какую-либо фигуру, описанную в задаче 129 (рис. 11, *а* - 11, о), и «оживить» ее: пусть цыпленок (рис. 11, *а*) летает, из трубы домика (рис. 11,*б*) идет дым, грузовик (рис. 11, *в*) едет, елка (рис. 11, *г*) растет, шар (рис. 11, *д*) движется влево до соприкосновения со стенкой и обратно, треугольник (рис. 11, *е*) движется вниз до соприкосновения с нижней фигурой, рожица (рис. 11, *ж)* подмигивает, рыба (рис. 11, *з*) плывет, подводная лодка (рис. 11, *и*) поднимает и опускает перископ, сова (рис. 11, *к*) машет крыльями, стрелки будильника (рис. 11, *л*) и колесо (рис. 11, *н*) вращаются, велосипед (рис. 11, *м*) катится, телефонный диск (рис. 11, *о)* крутится.

965. Получить на экране изображение какой-либо фигуры, описанной в задаче 130, и обеспечить ее перемещение (шаблоны для построения фигур даны на рис. 12, *а* -12, *р*). Выбор направления перемещения и расстояния, на которое фигура должна перемещаться в данном направлении, выполнять:

а) с помощью датчика случайных чисел;

б) под управлением с клавиатуры - для этого должны использоваться клавиши «стрелка вверх», «стрелка вниз», «стрелка вправо» и «стрелка влево», вызывающие перемещение фигуры в соответствующем направлении на 5 пиксел.

966. Получить звуковой мультфильм «Танцующий НЛО». НЛО строить из отдельных символов так, как показано на рис. 104. Очередное положение НЛО на экране определять с помощью датчика случайных чисел. Результатом обращения к датчику должны быть номера строки и столбца экрана, с которыми следует совместить левый верхний угол прямоугольника размером 3×4 символа, объемлющего НЛО. Каждый раз, когда номер полученного таким образом столбца окажется кратным 12, НЛО должен издавать звуковой сигнал.

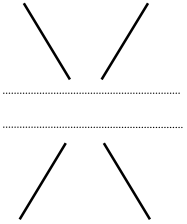


Рис. 104

967. В рисованных мультфильмах иллюзия движения создается последовательной сменой кадров, каждый из которых фиксирует очередное положение движущегося объекта.

Используя этот принцип, получить мультфильм, показывающий:

а) идущего человечка;

б) бегущего человечка;

в) человечка, выполняющего приседания;

г) человечка, выполняющего сигнализацию флажком.

Для построения отдельных кадров мультфильма воспользоваться фигурками, описанными в рассказе А. Конан Дойля «Пляшущие человечки». Некоторые из этих фигурок даны на рис. 105.

Рис. 105

968. Аналогично предыдущей задаче получить спортивный мультфильм:

а) о метании диска;

б) о беге с барьерами;

в) о подтягивании на перекладине;

г) о прыжках в длину;

д) о гребле;

е) о поднятии штанги,

ж) теннис.

Построение отдельных кадров выполнить на основе олимпийской символики.

969. Получить звуковой мультфильм «Человечек, танцующий под музыку». Танец может заключаться в выполнении самых простых движений, например, притоптывании ногой или приседании, в такт мелодии, воспроизводимой по звукогенератору.

970. Аналогично предыдущей задаче получить звуковой мультфильм «Человечек, играющий на гитаре». Игра на гитаре может изображаться, например с помощью перемещения правой руки по струнам гитары вверх и вниз. Мультфильм должен сопровождаться воспроизведением популярной мелодии.

971. Изобразить на экране доску Гальтона (см. задачу 751) с движущимися по ней шариками. Одновременно по доске должно двигаться несколько шариков. Закончившие движение шарики

остаются в нижней части доски. Использовать датчик случайных чисел для выбора пути шарика при прохождении через препятствие.

§ 33. Игры*)

*) Разработка и реализация игровых программ должна вестись и с учетом графических и звуковых возможностей, предоставляемых конкретным компьютером. При наличии алфавитно-цифрового дисплея игровые ситуации и ходы отображаются, как правило, с помощью чисел, букв и псевдографики. При наличии графического дисплея- иллюстрируются графически. Так, например, при игре в «Ним» (задача 1012) кучки спичек могут заменяться натуральными числами, если дисплей алфавитно-цифровой, или быть нарисованными, если дисплей графический. Игра «угадывание дробей» (задача 984) при работе на алфавитно-цифровом дисплее сводится к обмену текстовыми сообщениями: играющий вводит число, программа сообщает, верно ли указана дробь. При работе с графическим дисплеем оценка правильности введенной дроби может выполняться, например, с помощью стрелки, которая летит по направлению к аэростату и «прокалывает»

его, если дробь названа правильно, или пролетает мимо в противном случае. При наличии звукогенератора игры следует сопровождать характерными звуковыми сигналами. Так, например, в предыдущей игре такими сигналами могут быть свист летящей стрелки или звук лопнувшего аэростата.

Игровые программы, которые предлагается составить в этом разделе, можно условно разделить на три группы. В задачах с 972 по 996 рассматриваются программы, основное назначение которых- поддержка необходимой игровой обстановки. Играющему предлагается исходная ситуация, порождаемая, как правило, с помощью датчика случайных чисел, все его ходы контролируются: если ход сделан по правилам игры, ситуация изменяется (например, в задачах 972-975 смена игровой ситуации означает смену положений цветных шаров на игровой доске, а в задаче 983 - обмен местами

четырех или двух букв), в противном случае выдается соответствующее сообщение, ситуация остается неизменной. Программа также обязана отслеживать достижение целевой ситуации, например, угадано ли задуманное число (задача 986), расставлены ли требуемым образом буквы (задача 983), перемещены ли все диски (задача 978) и т. д.

Программы второй группы (задачи с 997 по 1006), так называемые обучающие программы, имеют целью закрепление у обучающегося тех или иных знаний или навыков. При написании программ важно правильно чередовать предполагаемые вопросы (один из возможных алгоритмов выбора вопросов дан в разделе «Случайные числа»), и своевременно повышать уровень их сложности. Например, в программе для обучения устному счету (задача 997) повышение уровня сложности предполагаемого задания может быть связано с переходом от арифметических действий над однозначными числами к действиям

над двух-, трех- и т. д. значными числами. В программе обучения работе с клавиатурой (задача 1000) - с переходом от отдельных букв и цифр к словам и фразам, а также с уменьшением времени, выделяемого для набора на клавиатуре того или иного слова и т. п.

Каждая из программ третьей группы (задачи 1007-1013) является равноправным партнером в той или иной игре, например, в шахматы, «ним», «100 спичек» и др. Помимо всех действий, выполняемых программами первой группы, эти программы должны делать игровые ходы.

972. «Семь лунок». Вдоль доски расположено 7 лунок, в которых лежат 3 черных и 3 белых шара так, как показано на рис. 106. Передвинуть черные шары на место белых, а белые - на место черных. Шар можно передвинуть либо в соседнюю с ним пустую лунку, либо в пустую лунку, находящуюся непосредственно за ближайшим шаром.

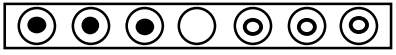


Рис. 106

Рис. 107

973. «Прыгающие шарики». Эта игра похожа на предыдущую. Исходная позиция - 8 лунок, в которых расставлены 4 черных и 3 белых шара (рис. 107). Поменять местами черные и белые шары. В отличие от предыдущей игры черные шары можно передвигать только вправо, а белые - только влево.

974. Вдоль доски расположены лунки и в каждой лунке лежит шар черного или белого цвета (пример приведен на рис. 108, *а*). Одним ходом разрешается менять местами два
любых шара. Добиться того, чтобы сначала шли белые шары, а за ними - черные (рис. рис. 108, *б*). Если общее число лунок равно n, то для решения задачи достаточно сделать не более $[n/2]$ ходов.

а *б*

Рис. 108

975. Пусть теперь, в отличие от предыдущей задачи, в каждой лунке лежит красный, белый или синий шар. Одним ходом разрешается менять местами два любых шара. Добиться того, чтобы все красные шары шли первыми, все синие - последними, а белые - посередине. Это вариант «задачи о голландском флаге» (поле голландского флага разделено на три полосы - синюю, белую, красную). Если число лунок равно n, то для решения задачи достаточно сделать не более n-1 хода.

976. Железнодорожный сортировочный узел устроен так, как показано на рис. 109. На правой стороне собрано некоторое число вагонов двух типов (на рис. 109 - черные и белые), обоих типов по n штук. Тупик может вмещать все $2n$ вагонов. Пользуясь тремя сортировочными операциями: И, ИЗ, МИМО, собрать вагоны на левой стороне так, чтобы типы чередовались. Для решения задачи достаточно $3n$-1 сортировочных операций.

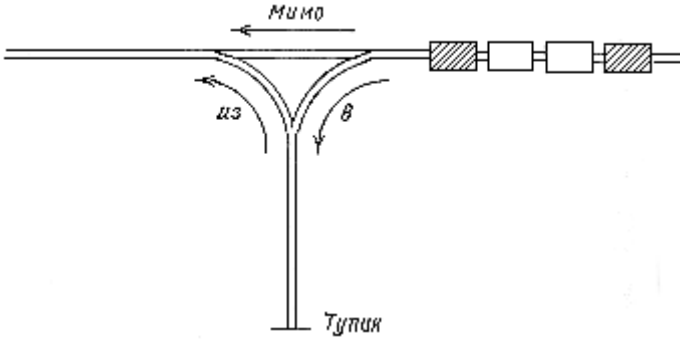


Рис. 109

977. «Расстановка мебели». Площадь разделена на шесть квадратов, пять из них заняты мебелью, шестая - свободна (рис.110). Переставить мебель так, чтобы шкаф и кресло поменялись местами, при этом никакие два предмета не могут стоять на одном квадрате.

978. «Ханойская башня». Доска имеет три колышка. На первом нанизано *m* дисков убывающего вверх диаметра (рис. 111). Расположить диски в том же порядке на другом колышке. Диски

можно перекладывать с колышка на колышек по одному. Класть больший диск на меньший не разрешается.

Стол	Стул	Шкаф
Стул		Кресло

Рис. 110

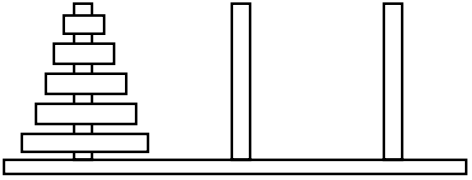


Рис. 111

979. «Пятнадцать». На квадратном поле размером 4×4 с помощью датчика случайных чисел расставлены 15 фишек с номерами от 1 до 15 (рис. 112, *а*). Имеется одна свободная позиция. Расставить фишки по возрастанию их номеров так, как показано на рис. 112, *б* или *в*. Передвигать фишки можно только на соседнюю свободную позицию.

1	13	12	2
11	7	6	10
9	3	5	15
	4	8	14

а

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

б

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

в

Рис. 112

980. «Расстановка 16 букв». В квадрате размером 4×4 клетки расставить 16 букв (четыре *a*, четыре *b*, четыре *c*, четыре *d*) так, чтобы в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду любая буква встречалась только один раз.

981. «Расстановка трех чисел». В каждой из 9 клеток квадрата размером 3×3 клетки поставить одно из чисел 1, 2, 3 так, чтобы сумма чисел, стоящих в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду, а также по любой диагонали равнялась 6.

982. «Расстановка девяти чисел». В квадрате размером 3×3 клетки расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы суммы чисел, стоящих в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду, а также на любой диагонали были равны.

983. «Вращающийся квадрат». Дан квадрат размером 4×4 клетки, в которых с помощью датчика случайных чисел расставлены буквы от *A* до *P* (рис. 113, *а*). Упорядочить буквы в квадрате по алфавиту (рис. 113, *б*). Квадрат имеет подквадраты, которые можно вращать по часовой стрелке на одну клетку. Подквадраты имеют размер 2×2 и указываются номером левой верхней клетки. Имеется операция, которая может быть выполнена только один раз: обмен местами двух букв.

A	C	P	B
E	G	M	O
N	D	I	F
K	L	H	J

а

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

б

Рис. 113

984. «Угадывание дробей». К канату прикреплены три аэростата (рис. 114). Если считать, что один конец каната имеет координату 0, а второй - координату 1, то координаты аэростатов задаются некоторыми числами из интервала (0, 1). Определить эти числа с погрешностью, не выводящей за пределы аэростата (см. примечание к § 33).

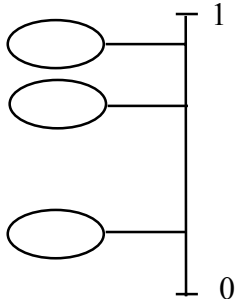


Рис. 114

985. «Зеленые шары». Дано поле с осями координат (рис. 115). По полю разбросаны небольшие круги. Указать набор функций, графики которых перечеркивают все круги.

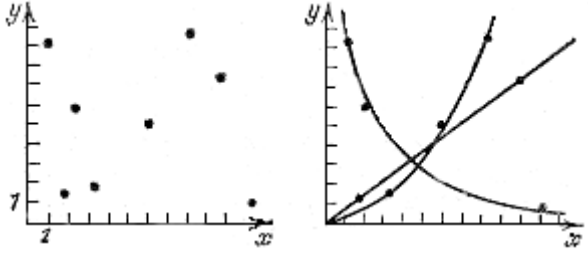


Рис. 115

986. «Угадай число». Программа с помощью датчика случайных чисел выбирает число в диапазоне от 0 до 9. Угадать это число за три попытки. После каждой попытки сообщается, больше или меньше названное число задуманного.

987. «Кости». Играющий называет любое число в диапазоне от 2 до 12 и ставку, которую он делает в этот ход. Программа с помощью датчика случайных чисел дважды выбирает числа от 1 до 6 («бросает кубик», на гранях которого цифры от 1 до 6). Если сумма выпавших цифр меньше 7 и играющий задумал число меньшее 7, он выигрывает сделанную ставку. Если сумма выпавших цифр больше 7 и играющий задумал число большее 7, он также выигрывает сделанную ставку. Если играющий угадал сумму цифр, он получает в четыре раза больше очков, чем сделанная ставка. Ставка проиграна, если не имеет место ни одна из описанных ситуаций. В начальный момент у играющего 100 очков.

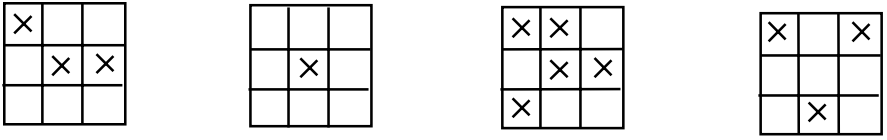
988. «Ипподром». Играющий выбирает одну из трех лошадей, состязающихся на бегах, и выигрывает, если его лошадь приходит первой. Скорость передвижения лошадей на разных этапах выбирается программой с помощью датчика случайных чисел.

989. Игра в слова. Программа выбирает слово и рисует на экране столько прочерков, сколько букв в этом слове. Отгадать, какое слово загадано программой. В каждый ход играющий указывает одну букву. Если названа буква, входящая в состав слова, она подставляется вместо соответствующего прочерка. В противном случае играющий теряет 1 очко. В начальный момент у играющего 15 очков.

990. «Коровы и быки». Программа выбирает с помощью датчика случайных чисел четырехзначное число с разными цифрами. Угадать это число. На каждом шаге играющий называет четырехзначное число, а программа сообщает, сколько цифр числа угадано (быки) и сколько цифр угадано и стоит на нужном месте

(коровы). Например, если программой загадано число 1294, а играющий назвал 1423, он получит ответ «1 корова, 3 быка».

991. «Жизнь». Игра моделирует жизнь поколений гипотетической колонии живых клеток, которые выживают, размножаются или погибают в соответствии со следующими правилами. Клетка выживает, если и только если она имеет двух или трёх соседей из восьми возможных (рис. 116, *а*). Если у клетки только один сосед или вовсе ни одного, она погибает в изоляции (рис. 116, *б*). Если клетка имеет четырех или более соседей, она погибает от перенаселения(рис. 116, *в*). В любой пустой позиции, у которой ровно три соседа, в следующем поколении появляется новая клетка (рис. 116, *г*).



а *б* *в* *г*

Рис.116

992. «Подбери ключи». Перед играющим четыре запертые двери. Открыть все двери, располагая десятью ключами, каждый из которых может открыть несколько дверей. Предоставляется 14 попыток.

993. Требуется ввести курсор в область экрана (небольшой круг), расположение которого неизвестно играющему. Передвижение курсора сопровождается звуковым сигналом: если курсор приближается к области, то звук становится выше; если удаляется - ниже.

994. «Морской бой». На поле 10×10 позиций стоят невидимые вражеские корабли: 4 корабля по 1 клетке, 3 корабля по 2 клетки, 2 корабля по 3 клетки, 1 корабль в 4 клетки (рис. 117). Необходимо поразить каждую из клеток кораблей. Позиции указываются русскими буквами от *А* до *К* (по строкам) и цифрами от 1 до 10 (по столбцам). Конфигурация и положение кораблей на поле выбираются с помощью

датчика случайных чисел. Если клетка корабля угадана играющим верно, она отмечается крестиком; в противном случае точкой.

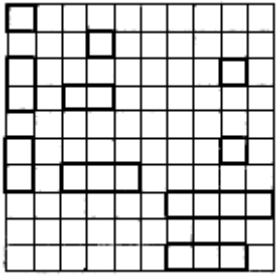


Рис. 117

995. «Мост». Дан мост с арками разной ширины (рис. 118), в нижней строке экрана расположен мяч, которым можно управлять: мяч можно перемещать по строке, останавливать в нужной позиции строки и катить к мосту. Очки начисляются, если мяч проходит через арку.

Рис. 118

996. «Сбей самолет». По экрану летят вражеские самолеты. Цель - сбить их. Пусковая установка находится в нижней строке экрана. Пусковую установку можно перемещать по строке вперед и назад.

997. Составить программу для обучения устному счету. На каждом шаге должны предлагаться числа и арифметические действия, которые следует выполнить над этими числами.

998. Составить программу для обучения переводу чисел из десятичной системы счисления в двоичную и обратно. Программа должна предлагать десятичное (двоичное) число, выбранное с помощью датчика случайных чисел, обучающийся -назвать это число в двоичной (десятичной) системе счисления.

999. Составить программу для обучения переводу чисел из двоичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатеричную и обратно (см. предыдущую задачу).

1000. Составить программу обучения работе с клавиатурой. Программа должна выдавать на экран буквы, цифры, слова и фразы, которые следует набрать на клавиатуре.

1001. Составить программу, помогающую в запоминании исторических дат. Программа должна предлагать вопросы, контролирующие знание дат исторических событий, например, «В каком году была Куликовская битва?» Если ответ правильный, должен быть предложен следующий вопрос. Если ответ не верен, программа подскажет правильный ответ, а позднее повторит этот же вопрос еще раз.

1002. Составить программу для заучивания слов иностранного языка. Программа должна предлагать слова из некоторого списка на одном языке, обучающийся - дать перевод этого слова на другой язык.

1003. Составить программу для изучения созвездий. Программа должна строить на экране изображение созвездия, обучающийся - назвать его.

1004. Составить программу для тренировки памяти. Программа должна высветить на экране несколько точек, играющий - указать, в каком порядке эти точки были высвечены. Координаты точек выбираются в программе с помощью датчика случайных чисел.

1005. Составить программу, помогающую в изучении колебаний математического маятника. Маятник должен двигаться на экране, совершая гармонические колебания, период которых выбран с помощью датчика случайных чисел. Играющий должен указать длину нити, на которой подвешен маятник. Ответ считается правильным, если ошибка не превышает 10%.

1006. Составить программу, помогающую в изучении движения тела, брошенного под углом к горизонту с некоторой начальной

скоростью. Играющий, зная расстояние от человека, бросающего камень, до лунки и ширину лунки, должен задать такие значения угла α и начальной скорости v, чтобы камень попал в лунку. На экране должны изображаться поверхность земли, лунка, камень и траектория полета камня. Расстояние от человека, бросающего камень, до лунки и ширину лунки следует выбирать с помощью датчика случайных чисел.

1007. Написать программу, играющую в «крестики - нолики».

1008. Написать шахматную программу, играющую за белых:

а) королем и ферзем против короля;

б) королем и двумя ладьями против короля.

1009. «100 спичек». Из кучки, первоначально содержащей 100 спичек, двое играющих поочередно берут по несколько спичек: не менее одной и не более десяти. Проигрывает взявший последнюю спичку.

1010. В условие предыдущей задачи вносится изменение: взявший последнюю спичку выигрывает.

1011. «Угадай число». Один из играющих задумывает число от 1 до 1000, другой пытается угадать его за десять вопросов вида: верно ли, что задуманное число больше такого-то числа. Написать программу, играющую за отгадчика.

1012. «Ним». Имеются три кучки спичек. Двое играющих по очереди делают ходы. Каждый ход заключается в том, что из одной какой-то кучки берется произвольное ненулевое число спичек. Выигрывает взявший последнюю спичку.

1013. «Цзяньшидзы». Имеются две кучки камней. Двое играющих по очереди делают ходы. Каждый ход может состоять в одном из двух:

1) берется произвольное ненулевое число камней из какой-то одной кучки;

2) берется одновременно по одинаковому ненулевому числу камней из обеих кучек.

Выигрывает взявший последний камень. Пара (a, b), где a и b - количество камней в кучках при $a < b$, является проигрышной, если число a оканчивается в «фибоначчиевой» системе (см. задачу 604) четным числом нулей, а число b получается из a приписыванием еще одного нуля в конце.

§ 34. Предметы и группы предметов с фиксированными свойствами

1014. *Магическим квадратом* порядка *n* называется квадратная таблица размера $n \times n$, составленная из чисел 1, 2, ..., n^2 так, что суммы по каждому столбцу, каждой строке и каждой из двух диагоналей равны между собой. Дана целочисленная квадратная матрица порядка 5; определить, является ли она магическим квадратом.

1015. *Латинским квадратом* порядка *n* называется квадратная таблица размера $n \times n$, каждая строка и каждый столбец которой содержит числа 1, 2, ..., *n*. Дана целочисленная квадратная матрица порядка 5; определить, является ли она латинским квадратом.

1016. Дана целочисленная матрица $\lfloor a_{ij} \rfloor_{i=1,\dots,n;\, j=1,\dots,m}$, каждый элемент которой равен 0, 1, 2 или 3. Определить количество четверок $a_{ij}, a_{i+1j}, a_{ij+1}, a_{i+1j+1}$, в каждой которых все элементы различны.

1017. Даны целые числа $a_1, ..., a_n$. Определить, является ли эта последовательность периодической (т.е. может ли она быть получена повторениями некоторой своей начальной части). Из всех периодов указать наименьший.

1018. Даны действительные числа $a_1, ..., a_n$. Найти самый длинный отрезок $a_p, a_{p+1}, ..., a_{p+m}$ данной последовательности, элементы которого удовлетворяют соотношениям $a_p < a_{p+1} > a_{p+2} < ... > a_{p+m}$.

1019. Даны целые числа $a_1, ..., a_n$. Является ли последовательность $a_1, ..., a_n$ перестановкой чисел 1, ..., n?

1020. Элемент матрицы называется седловой точкой, если он является одновременно наименьшим в своей строке и наибольшим в своем столбце. Дана действительная матрица размера 5×6. Выяснить, имеются ли седловые точки в этой матрице, и если имеются, то указать индексы одной из них.

1021. Известна игра на придумывание слов, состоящих из тех же букв, что и некоторое фиксированное слово - образец. Например, из слова ПАСКАЛЬ можно получить слова ЛАК, ЛАСКА, СКАЛА и т.д. Кратные вхождения некоторой буквы в получаемое слово допускаются, если эта буква с неменьшей кратностью входит в слово - образец. Пусть дана последовательность слов, разделенных пробелами. Приняв, что первое слово в последовательности есть образец, выбрать те из остальных членов последовательности, которые могут быть получены из образца по указанному выше правилу. Максимально возможную длину слова считать равной 15.

1022. На квадратном листе клетчатой бумаги размера 8×8 клеток нарисовано несколько прямоугольников, каждый прямоугольник состоит из клеток, различные прямоугольники не накладываются друг на друга и не соприкасаются (см. пример на рис. 119). Дана целочисленная квадратная матрица порядка 8, в которой

элемент равен 0, если соответствующая клетка принадлежит какому-либо прямоугольнику, и отличен от нуля в противном случае. Определить число прямоугольников.

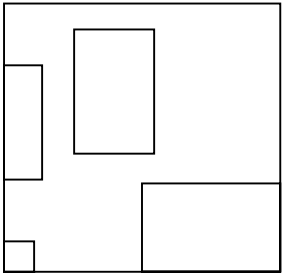


Рис. 119

1023. Дана целочисленная матрица $\lfloor a_{ij} \rfloor_{i=1,\dots,n;\, j=1,\dots,m}$.

Прямоугольником в этой матрице будем называть множество всех элементов a_{ij}, для которых выполнено $1 \le p \le i \le q \le n, 1 \le r \le j \le s \le m$, где p, q, r, s - натуральные числа, задающие прямоугольник. Площадью прямоугольника назовем число элементов в нем.

Среди прямоугольников матрицы, состоящих целиком из нулей, найти тот, который имеет наибольшую площадь.

1024. Дана целочисленная матрица размера $n \times m$, в которой имеются ровно два одинаковых элемента. Найти индексы этих элементов.

1025. Поле шахматной доски задается парой натуральных чисел: первое указывает номер вертикали при счете слева направо, второе - номер горизонтали при счете снизу вверх. Расстановка фигур задается таким образом, что вначале указываются поля, на которых стоят перечисленные белые фигуры, затем - поля, на которых стоят перечисленные черные фигуры.

а) На доске стоят два ферзя. Указать поля, на которые может пойти белый ферзь так, чтобы не попасть под удар черного ферзя.

б) У белых на доске остался только король, у черных - король, конь, слон. Охарактеризовать положение белых с помощью слов: мат, шах, пат, обыкновенная позиция.

1026. «Тестирование коллектива». Пусть целочисленная матрица размера $n \times m$ содержит информацию об учениках некоторого класса из n человек: j-я строка содержит информацию о i-м ученике. В первом столбце проставлен возраст в годах, во втором - рост в см, в третьем - успеваемость (округленный средний балл) и т.д. Ученик называется среднестатистическим по k-му параметру (уникальным по k-му параметру), если на нем достигается минимум (максимум) модуля разности среднего арифметического чисел из k-го столбца и значения k-го параметра этого ученика. Ученик называется самым уникальным (самым средним), если он уникален (является среднестатистическим) по самому большому количеству параметров. По матрице указанного вида определить номера учеников:

а) самых уникальных;

б) самых средних;

в) самых средних среди самых уникальных;

г) самых уникальных среди самых средних.

1027. Правильное скобочное выражение получается из некоторого математического выражения, содержащего круглые скобки, вычеркиванием всех знаков, кроме круглых скобок. Например, из выражения $a - b(c + 2(x + y(z + 1))) + a (c + x)$ получается правильное скобочное выражение ((( ))) ( ). Более точное описание множества правильных скобочных выражений:

1) ( ) - правильное скобочное выражение;

2) если P - правильное скобочное выражение, то (P) - правильное скобочное выражение;

3) если P и Q - правильные скобочные выражения, то PQ - правильное скобочное выражение.

Даны натуральное число n и последовательность символов $c_1, ..., c_{2n}$, каждый из которых - круглая скобка. Определить, является ли последовательность $c_1, ..., c_{2n}$ правильным скобочным выражением.

§ 35. Перебор и его сокращение

1028. Даны натуральные числа m, $a_1, ..., a_n$. В последовательности $a_1, ..., a_n$ выбрать подпоследовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}$ ($0 \le i_1 < i_2 <..< i_k \le n$) такую, что $a_{i_1} +...+ a_{i_k} = m$. Если такую подпоследовательность выбрать невозможно, то следует сообщить об этом.

При решении этой задачи полезно следующее соображение. Чтобы выбрать подпоследовательность из последовательности $a_1, ..., a_n$, нужно про каждый член $a_1, ..., a_n$, решить, принимается он в подпоследовательность или нет. Может возникнуть следующая ситуация: относительно членов $a_1, ..., a_i$ ($i < n$) приняты какие-то решения, после этого обнаружилось, что, как бы мы ни распоряжались остальными $n - i$ членами, нам все равно не удастся получить подпоследовательность, удовлетворяющую поставленному условию

(например, если сумма нескольких положительных чисел больше m, то невозможно добавить к ним ещё несколько положительных чисел так, чтобы сумма стала равна m). В этом случае можно сразу исключить из рассмотрения все подпоследовательности, первые члены которых выбраны из $a_1, ..., a_i$ в соответствии с принятыми решениями.

1029. Получить все расстановки 8 ладей на шахматной доске, при которых ни одна ладья не угрожает другой.

Здесь полезно соображение, аналогичное приведенному в предыдущей задаче. Если расставлены ладьи в i первых вертикалях ($i < 8$) обнаружилось, что i-я ладья угрожает ладье в какой-то вертикали с меньшим номером, то можно далее не заниматься теми расстановками ладей, которые предполагают то же самое расположение в первых вертикалях *).

*) Такого рода соображения оказываются полезными и при решении всех дальнейших задач этого параграфа.

1030. Дано натуральное число *m*. Получить *m* расстановок 8 ферзей на шахматной доске, при которых ни один из ферзей не угрожает другому. Если *m* больше, чем общее число таких расстановок, то следует получить все расстановки.

1031. Получить все перестановки элементов 1, ..., 6.

1032. Получить все сочетания из 10 элементов 1, ..., 10, по 4 элемента в каждом.

1033. Получить все размещения из 9 элементов 1, . . ., 9, по 5 элементов в каждом.

1034. Получить все полные перестановки 10 элементов 1, ..., 10 (перестановка $p_1, ..., p_n$ элементов 1, ..., *n* называется полной, если $p_i \neq i$ для $i = 1, ..., n$).

1035. Указать маршрут коня. Начинающийся на одном заданном поле шахматной доски и оканчивающийся на другом. Никакое поле не должно встречаться в маршруте дважды.

1036. Лабиринт может быть задан матрицей соединений, в которой для каждой пары комнат указано, соединены ли они коридором (см. задачу 626). Даны матрица соединений для лабиринта из n комнат и номера комнат i, j ($1 \le i \le n, 1 \le j \le n$). Построить путь из комнаты с номером i в комнату с номером j.

1037. Дана матрица соединений некоторой линии (см. задачу 626), содержащей 6 узлов. Выяснить, существует ли замкнутый путь, состоящий из некоторых звеньев линии, который проходит через каждый из 6 узлов ровно один раз. Если такой путь существует, то построить соответствующую ему последовательность номеров узлов. (Для линии, изображенной на рис. 33, последовательность узлов будет, например, 1, 2, 3, 4, 5, 6.)

1038. Имеется n городов. Некоторые из них соединены дорогами известной длины. Вся система дорог задана квадратной матрицей порядка n, элемент a_{ij} которой равен некоторому отрицательному числу, если город i не соединен напрямую дорогой с городом j и равен длине дороги в противном случае ($i, j = 1, ..., n$).

а) Для 1-го города найти кратчайшие маршруты в остальные города.

б) В предположении, что каждый город соединен напрямую дорогой с каждым, найти кратчайший маршрут, начинающийся в 1-м городе и проходящий через все остальные города.

1039. Найти такую расстановку пяти ферзей на шахматной доске, при которой каждое поле будет находиться под ударом одного из них.

1040. Найти такую расстановку двенадцати коней на шахматной доске, при которой каждое поле будет находиться под ударом одного из них.

1041. Найти такую расстановку восьми слонов на шахматной доске, при которой каждое поле будет находиться под ударом одного из них.

1042. В данной последовательности действительных чисел $a_1, ..., a_{20}$ выбрать возрастающую подпоследовательность наибольшей длины.

1043. Построить все правильные скобочные выражения (см. задачу 1027) длины 10, т.е. те, которые содержат по5 левых и по 5 правых круглых скобок.

1044. Имеется *n* предметов, веса которых равны $a_1, ..., a_n$. Разделить эти предметы на две группы так, чтобы общие веса двух

групп были максимально близки.

1045. Получить последовательность $a_1, ..., a_n$ цифр 0, 1, 2, в которой нет смежных одинаковых участков (например, последовательность 2, 0, 1, 1, ... не годится, так как рядом расположены два одинаковых члена 1; последовательность 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, так как рядом расположены два одинаковых участка 2, 1, 0, 1 и т.д.).

1046. «Задача о рюкзаке». Имеется *m* различных предметов, известны вес каждого предмета и его стоимость. Определить, какие предметы надо положить в рюкзак, чтобы общий вес не превышал заданной границы, а общая стоимость была максимальна. Решить эту задачу для *m* предметов, веса которых в килограммах равны $p_1, ..., p_m$, стоимости - $c_1, ..., c_m$. Вес рюкзака не должен превышать 50кг.

§ 36. Некоторые приемы программирования*)

*) Задачи этого раздела предназначены тем, кто хочет дополнительно овладеть некоторыми приемами, которые используются в современном программировании не менее широко, чем, скажем, вложенные циклы. Это приемы работы с развитыми информационными структурами: линейными списками и деревьями, а также приемы управления динамической памятью.

1047. При программировании практических задач часто приходится работать с различными списками. Примерами могут служить список учеников 9а класса, список учителей, преподающих литературу во всех 10-х классах школы, список участников спортивной игры и т. п. Каждый элемент списка содержит, как правило, несколько полей. Например, элементы списка выпускников школы могут включать имя и фамилию ученика, а также его средний балл по аттестату.

Представление списков в памяти ЭВМ может быть основано на последовательном и на связанном распределении памяти. При последовательном распределении элементы списка (будем также называть их узлами) размещаются последовательно, один за другим. При связанном распределении памяти местоположение каждого элемента заранее неизвестно - блок памяти, который отводится для размещения отдельного элемента, выделяется из одной большей области памяти по специальным алгоритмам (см. задачу 1052). Поэтому все узлы содержат по крайней мере одно дополнительное поле - поле связи со следующим (рис. 120, *а*) или предыдущим узлом (рис. 120, *б*) (см. также задачи 531 и 532).

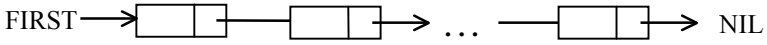
На рис.120 FIRST - это переменная, указывающая на первый узел в списке; LAST - переменная, указывающая на последний узел в списке; стрелки обозначают связи между узлами; NIL - значение поля

связи, говорящее о том, что данный узел не связан ни с каким другим узлом (является последним на рис. 120, *а* и первым на рис. 120, *б*).

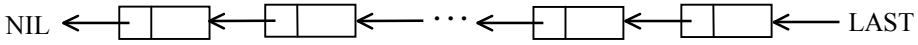
Связанное распределение памяти обеспечивает существенно более высокую гибкость при работе со списками, чем последовательное распределение, значительно упрощая включение нового узла в список и исключение из него.

Наиболее часто используются следующие виды связанного распределения памяти (далее, под термином *список* мы будем понимать конкретное представление соответствующей информационной структуры в памяти ЭВМ на основе связанного распределения памяти):

1) Односвязные списки, в которых каждый элемент содержит поле связи либо со следующим, либо с предыдущим элементом списка (рис. 120).



а



б

Рис. 120

2) Односвязные циклические списки, в которых последний элемент содержит поле связи с первым элементом (рис. 121) (см. задачу 545).

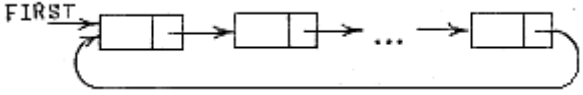


Рис. 121

3) Двусвязные списки, в которых каждый элемент содержит поле связи со следующим элементом и с предыдущим (рис. 122) (см. задачу 533).

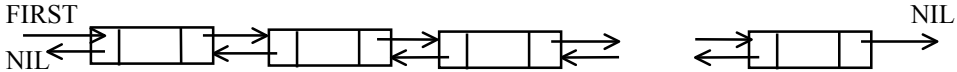


Рис. 122

При работе с линейными списками требуется, как правило, выполнять следующие операции [34]:

1) Получить доступ к *k*-му узлу списка, чтобы проанализировать и/или изменить содержимое его полей.

2) Включить новый узел непосредственно перед *k*-м узлом.

3) Исключить *k*-й узел.

4) Объединить два (или более) списка в один список.

5) Разбить список на два (или более) списка.

6) Сделать копию списка.

7) Определить число узлов в списке.

8) Выполнить сортировку узлов списка по значениям некоторых полей.

9) Найти в списке узел с заданным значением некоторого поля.

Составить процедуры, реализующие перечисленные выше операции 1) - 9) для работы с односвязными, односвязными циклическими и двусвязными списками.

1048. Одним из наиболее часто встречающихся видов списка является стек-список, в котором все включения и исключения элементов делаются только на одном его конце -вершине стека (рис. 123). Механизм функционирования стека хорошо отражен в другом его названии - список типа «LIFO» (last in first out) - «последним вошел - первым вышел»).

При работе со стеком предполагаются две операции: занесение очередного элемента в вершину стека и удаление элемента, находящегося в вершине стека. Тем самым операция удаления элемента из стека может быть применена только к элементу, помещенному в стек самым последним. И, следовательно, любой элемент не может быть удален из стека раньше, чем будут удалены все элементы, помещенные в стек после него.

Составить процедуры, реализующие операции занесения элемента в стек и удаления элемента из его вершины.

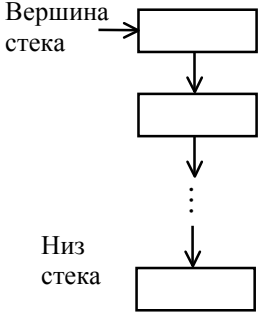


Рис. 123

1049. Еще один из наиболее важных видов структур, встречающихся в программировании, представляют собой деревья. Формально дерево (рис. 124) определяется как конечное множество T, состоящее из одного или более узлов таких, что

1) имеется один узел, называемый корнем дерева;

2) остальные узлы (исключая корень) содержатся в $m > 0$ попарно непересекающихся множествах $T_1, ..., T_m$, каждое из которых в свою очередь является деревом; деревья $T_1, ..., T_m$ называются поддеревьями данного корня [34].

Деревья, как правило, дают хорошее представление о структурных отношениях между элементами данных. Так, например, на рис. 125 показано дерево, представляющее формулу $(AB + CD)/BC$.

Здесь ветвь, отходящая от вершины влево, представляет числитель дроби, а ветвь, отходящая вправо, - ее знаменатель и т.д.

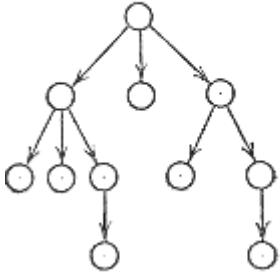


Рис. 124

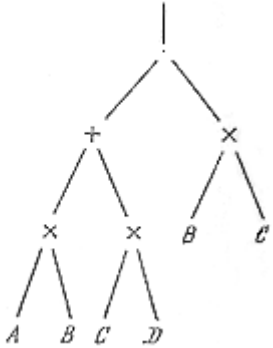


Рис. 125

Ещё один пример-фрагмент дерева (рис. 126), показывающего возможные ходы при игре в восемь (эта игра аналогична игре в пятнадцать); исходная и целевая позиции приведены соответственно на рис. 127, *а* и 127, *б* [41].

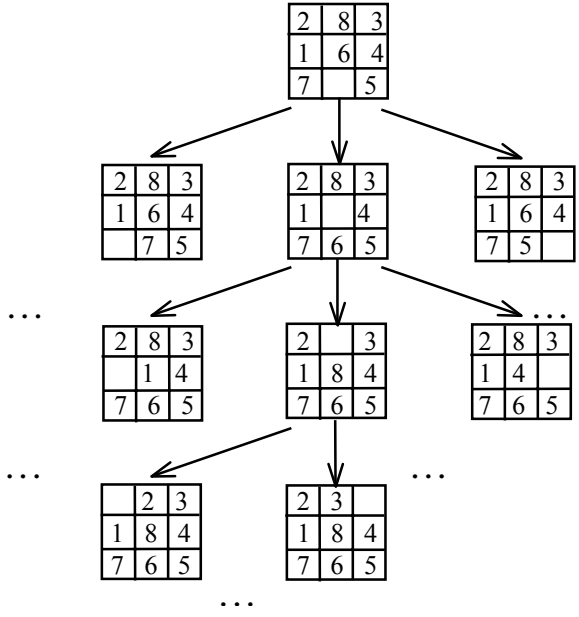


Рис. 126

Далее будем рассматривать только бинарные деревья. Бинарное дерево определяется как конечное множество узлов, которое либо пусто, либо состоит из корня и двух бинарных деревьев (рис. 128).

2	8	3
1	6	4
7		5

а

1	2	3
8		4
7	6	5

б

Рис. 127

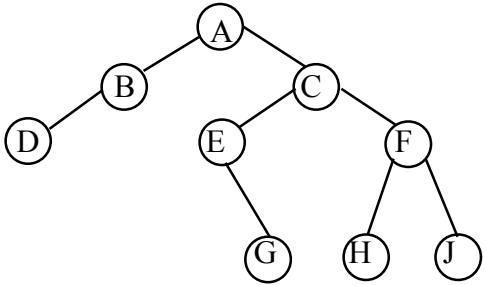


Рис. 128

При работе с древовидными структурами наиболее часто приходится решать задачу обхода дерева - такого последовательного прохождения по узлам дерева, когда каждый узел встречается ровно один раз. Для обхода бинарного дерева можно воспользоваться одним из трех способов: можно проходить узлы в префиксном порядке, в инфиксном порядке и в суффиксном порядке.

Префиксный порядок обхода дерева определяется в виде списка проходимых узлов следующим образом. Если дерево не пусто, префиксный порядок - это

корень дерева;

узлы левого поддерева в префиксном порядке;

узлы правого поддерева в префиксном порядке.

Инфиксный порядок обхода дерева определяется следующим образом. Если дерево пусто, список узлов пуст. Если дерево не пусто, инфиксный порядок - это

узлы левого поддерева в инфиксном порядке;

корень дерева;

узлы правого поддерева в инфиксном порядке.

Суффиксный порядок обхода дерева определяется следующим образом. Если дерево пусто, список узлов пуст. Если дерево не пусто, суффиксный порядок - это

узлы левого поддерева в суффиксном порядке;

узлы правого поддерева в суффиксном порядке;

корень дерева.

Составить процедуры обхода заданного бинарного дерева в префиксном, инфиксном и суффиксном порядке.

1050. Составить процедуру подсчета числа узлов заданного бинарного дерева.

1051. Листом дерева называется вершина, не являющаяся корнем никакого поддерева. Составить процедуру подсчета числа листьев заданного бинарного дерева.

1052. Алгоритмами динамического распределения памяти называют алгоритмы, позволяющие выделять и освобождать различные по размеру блоки памяти, беря их из одной большой области памяти. (Здесь и далее используются термины *блок* и *область*, обозначающие совокупность смежных ячеек памяти.)

Будем считать, что вся имеющаяся свободная память представлена в виде списка свободных блоков. В начальный момент в списке только один блок, содержащий всю свободную память. Каждый блок содержит заголовок с размерами блока и указателем на следующий блок. Выделение свободной памяти по запросу часто выполняется либо по методу «наиболее подходящего», либо по методу «первого подходящего».

Метод «наиболее подходящего» заключается в том, что среди всех блоков, имеющих размер, не меньший требуемого, выбирается блок с наименьшим размером. Метод «первого подходящего» заключается в том, что выделению подлежит первый в порядке просмотра элементов списка блок, размер которого не меньше требуемого.

Если блок, выбранный по одному из двух указанных методов имеет размер, превышающий указанный при запросе, он расщепляется

на два: первый блок имеет требуемый размер и предоставляется в ответ на запрос, второй блок - остаток - остается в списке свободной памяти. При освобождении блока смежные блоки склеиваются.

Реализовать процедуру для выделения блока свободной памяти заданного размера (результатом работы процедуры должна быть -1, если блок такого размера выделен быть не может) и процедуру для освобождения - повторного включения в список свободной памяти блока, выделенного ранее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов С. А. Математические построения и программирование. - М.: Наука, 1978.

2. Абрамов С. А. Элементы программирования. - М.: Наука, 1982.

3. Абрамов С. А., Антипов И. Н. Основы программирования на алголе. - М.: Наука, 1980.

4. Абрамов С. А., Зима Е. В. Начала программирования на языке Паскаль. -М.: Наука, 1987.

5. Агафонов В. Н., Поттосин И. В., Бежанова Л. М. , Сабельфельд В. К. Сборник упражнений по программированию на языке ПАСКАЛЬ. - Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1985.

6. Антипов И. Н. , Бальцюк Н. Б. , Щенников В. В. Сборник задач и упражнений по программированию на АЛГОЛе - 60.- М.: Изд. МГПИ им. В. И. Ленина, 1974.

7. Балуев А. Н., Даугавет В. А., Шидловская Н. А. Сборник упражнений по АЛГОЛ-60. - М.: Наука, 1976.
8. Бауэр Ф. Л., Гнац Р., Хилл У. Информатика. Задачи и решения. - М.: Мир, 1978.
9. Баяковский Ю. М., Вьюкова Н. И. , Галатенко В. А., Ходулев А. Б. Конспект курса программирования для учащихся 9-10 классов математической школы. - М.: Изд-во ИПМ АН СССР им. М. В. Келдыша, 1985.
10. Бронштейн И. Н., Семендяев К.А.Справочник по математике.- М.: Наука, 1986.
11. Брудно А. .Л., Каплан Л. И. Олимпиады по программированию для школьников. -М.: Наука, 1985.
12. Бутумо И. Д. , Самочадин А. В., Усанова Д. В. Программирование на алгоритмическом языке ПАСКАЛЬ для микро ЭВМ. - Л. : Изд-во Ленинградск. ун-та, 1985.

13. Бухтияров А. М., Фролов Г. Д. Сборник задач по программированию на алгоритмических языках. - М.: Наука, 1974.
14. Ван Тассел Д. Стиль, разработка, эффективность, отладка и испытание программ. -М.: Мир, 1981.
15. Вирт Н. Систематическое программирование, введение. - М. : Мир, 1977.
16. В и р т Н . Алгоритмы + структуры данных = программы. - М . : Мир, 1985.
17. Гарднер М. Математические новеллы. - М.: Мир, 1974.
18. Гиглавый А. В., Гнездилова Г. Г., Гуткин М.Л., Программирование на языке бейсик для школьной ЭВМ.- М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1986.
19. Гиглавый А. В., Гнездилова Г. Г., Гуткин М.Л. Дополнительные возможности языка бейсик для школьной ЭВМ.- М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1986.

20. Говоров В. М., Дыбов П. Т., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф. Сборник конкурсных задач по математике.-М.: Наука, 1983.
21. Грогоно П. Программирование на языке Паскаль. - М.: Наука, 1982.
22. Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов. - М.: Высшая школа, 1983.
23. Гутер Р. С. , Минаева С. С. , Резниковский П. Т. Задачник-практикум по программированию и вычислительной математике. - М. : Наука, 1973.
24. Дейкстра Э. Дисциплина программирования. - М.: Мир, 1978.
25. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики.-М.: Наука, 1970.
26. Доморяд А. П. Математические игры и развлечения.- М.: Физматгиз, 1961.
27. Дрейфус М., Ганглоф К. Практика программирования на фортране. Упражнения с комментариями. - М.: Мир, 1978.

28. Зверкина Т. С. , Кольцова Л. А. , Красовская И. А., Осипов Ю. В., Сельская Н. С. Ветвящиеся и циклические алгоритмы. - М.: Изд-во МИСИ, 1985.
29. Зверкина Т. С. , Кольцова Л. А. , Красовская И. А., Осипов Ю. В., Сельская Н. С. Индексированные переменные в фортране - М.: Изд-во МИСИ, 1985.
30. Игнатов Е. И. В царстве смекалки. - М.: Наука, 1981.
31. Йенсен К., Вирт Н., Паскаль. Руководство для пользователя и описание языка. - М.: Финансы и статистика, 1982.
32. Касьянов В. Н., Сабельфельд В. К. Сборник заданий практикуму на ЭВМ - М.: Наука, 1986.
33. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. - М.: Мир, 1965.
34. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1. Основные алгоритмы.- М.: Мир, 1976.

35. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы. - М. : Мир, 1977.
36. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3. Сортировка и поиск. - М.: Мир, 1978.
37. Лавров С. С. Универсальный язык программирования . - М. : Наука, 1972.
38. Ламуатье Ж.-П. Упражнения по программированию на Фортране IV. - Мир, 1978. 39. Мак-Кракен Дж. Программирование на АЛГОЛе - М. : Мир, 1964.
40. Малоземов В. Н., Певный А. Б. Рекуррентные вычисления. - Л: Изд-во Ленинградск. ун-та, 1976.
41. Нильсон Н. Искусственный интеллект. Методы поиска решения. - Мир, 1973.

42. Пантаева Е. В., Прохорова Т. В. РЕДАКТОР- язык для редактирования текстов // Обработка символьной информации. Вып. 3. - М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1976.- С.69-78.
43. Пильщиков В. Н. Упражнения по языку Паскаль. - М.: Изд-во МГУ, 1986.
44. Поляк Т. Б. Занимательные задачи. - М.: Учпедгиз, 1948.
45. Пулькин С. П. Вычислительная математика. - М.: Просвещение, 1974.
46. Румшинский Л. 3. Вычислительный лабораторный практикум. - М.: Физматгиз, 1963.
47. Соболь И. М. Метод Монте-Карло.- М.: Наука, 1972.
48. Трифонов Н. П. Сборник упражнений по алголу. - М.: Наука, 1978.
49. Трифонов Н. П., Пасхин Е. Н. Практикум работы на ЭВМ.- М.: Наука, 1982.
50. Хинчин А. Я. Цепные дроби. - М.: Наука, 1978.

51. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. - М.: Наука, 1981.
52. Энджел Й. Практическое введение в машинную графику. - М.: Радио и связь, 1984.
53. Hearn D., Bal M. P. Computer Graphics. - New Jersey, Englewood Clifs: Prentis-Hall, 1986.
54. Hopgood F. R. A., Duce D. A., Gallop J. R., Sutcliffe D. C. Introduction to the graphical kernel system ‘6.K.S.’ - Academic Press, 1983.
55. Introduction to MSX-Basic. - Sony Corporation, 1984.
56. Lee J. D. Beech G., Lee T. D. Computer programs that work! - Sigma Technical Press, 1979.
57. Sproull R. F., Sutherland W. R., Ullner M.K. device-independent graphics with exampls from IBM personal computers. - McGraw-Hill Book Company, 1985.