『情報幾何学の基礎』（藤原彰夫）輪読会 5 章資料 by @herumi

1　復習

M を C^∞ 多様体, $\chi(M)$ を M のベクトル場全体とする.

多様体 M, N に対して $f : M \to N$ を考える。$f_* : TM \to TN$ を $X \in TM$, $g : N \to \mathbb{R}$ に対して

$$f_*(X)(g) := X(f^*g)$$

と定義する. f_* を df と書くこともある.

多様体 S と写像 $g : N \to S$ があると

$$TM \xrightarrow{f_*} TN \xrightarrow{g_*} TS$$

が誘導される.

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*.$$

$\mathbb{R}^n_+ := \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i > 0 \}$, $S_{n-1} := \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i > 0, \sum_i x_i = 1 \}$ とする.

S_{n-1} に $\mathbb{R}^n_+$ の相対位相を入れる（開集合が $U \cap \mathbb{R}^n_+$ の形）.

$$\varphi : S_{n-1} \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}_+$$

$T^{n-1} := \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i > 0, \sum_i x_i < 1 \}$ とすると $\varphi : S_{n-1} \to T^{n-1}$ は homeo.

n 行 l 列の行列 $Q = (Q_{ij})$, $Q_{ij} > 0$, $\sum_j Q_{ij} = 1$ をとる（$1 \le i \le n$, $1 \le j \le l$）. 縦に n 個, 横に l 個.

$$f : S_{n-1} \ni (x_i) \mapsto (\sum_i x_i Q_{ij}) \in S_{l-1}$$

とする.

$|x| := \sum_i x_i$ とすると

$$|f(x)| = \sum_j (\sum_i x_i Q_{ij}) = \sum_i x_i (\sum_j Q_{ij}) = \sum_i x_i = |x|.$$

特に $|x| = 1$ なら $|f(x)| = 1$ なので f を S_{n-1} に制限した写像 f について $f : S_{n-1} \to S_{l-1}$ が well-defined.

$h_n : \mathbb{R}^n_+ \to S_{n-1}$ を $h_n(x) := (1/|x|)x$ とする.

h_n を S_{n-1} に制限すると $h_n = id_{S_{n-1}}$.

また

$$f(h_n(x)) = f(x/|x|) = (1/|x|)f(x) = (1/|f(x)|)f(x) = h_l(f(x)).$$

つまり次が可換.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n_+ \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R}^l_+ \arrow[d, "h_l"] \\
S_{n-1} \arrow[r, "f"'] & S_{l-1}
\end{tikzcd}$$

補題 1. $g^{[n]} : TS_{n-1} \times TS_{n-1} \to \mathbb{R}$ について

$$g^{[n]}(X, Y) = g^{[l]}(f_* X, f_* Y) \quad \text{for } X, Y \in TS_{n-1}$$

が成り立つとする.

このとき $\overline{g}^{[n]} : T\mathbb{R}_+^n \times T\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ を

$$\overline{g}^{[n]}(\overline{X}, \overline{Y}) := g^{[n]}(h_{n*}\overline{X}, h_{n*}\overline{Y}) \quad \text{for } \overline{X}, \overline{Y} \in T\mathbb{R}_+^n$$

とすると $\overline{g}$ は g の拡張となっている.

（証明）

$\iota : S_{n-1} \to \mathbb{R}_+^n$ を inclusion とすると $x \in S_{n-1}$ について $h_n(\iota(x)) = x$. よって

$$\overline{g}^{[n]}(\iota_* X, \iota_* Y) = g^{[n]}(h_{n*}\iota_* X, h_{n*}\iota_* Y) = g^{[n]}(X, Y).$$

また

$$\begin{aligned}\overline{g}^{[l]}(f_*\overline{X}, f_*\overline{Y}) &= g^{[l]}(h_{l*}f_*\overline{X}, h_{l*}f_*\overline{Y}) = g^{[l]}(f_*h_{n*}\overline{X}, f_*h_{n*}\overline{Y}) \\ &= g^{[n]}(h_{n*}\overline{X}, h_{n*}\overline{Y}) = \overline{g}^{[n]}(\overline{X}, \overline{Y}).\end{aligned}$$