а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = E \vee A \vee A^2 \vee A^3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

б) $\bar{S} = T \,\&\, T^T$ - матр сильн связан

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в) обнуляем 1-ый столбец матр $\bar{S}$, получ матр $\bar{S}_1$

$\bar{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ первая компонента сильн связ $\{v_1\}$

Вычеркнем 2, 3, 4 столбцы => получим нулевую матрицу и 2-ую компоненту сильной связан $\{v_2, v_3, v_4\}$. Мы получили нулевую матр => других комп сильной связности нет.

г) Матрица контуров $K = \bar{S} \& A$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Следоват. дуги $\langle v_2, v_4 \rangle$, $\langle v_3, v_2 \rangle$, $\langle v_4, v_3 \rangle$ принадл какому-либо контуру исходного графа.

Найдем матр одностор связности по итерацион алгоритму Уоршалла

$k = 0$

$$T^{(0)} = E \vee A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$k = 1 \quad k-1 = 0$

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$k = 2 \qquad k-1 = 1$

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$k = 3 \qquad k-1 = 2$

$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$k = 4 \qquad k-1 = 3$

$$T^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T$$

№ 3

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{matrix} \\
A = & \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{matrix}
\end{array}
$$

1) ~~$W_0 : V_1$~~ $W_0(V_1)$ помеч вершину v_1 индексом 0

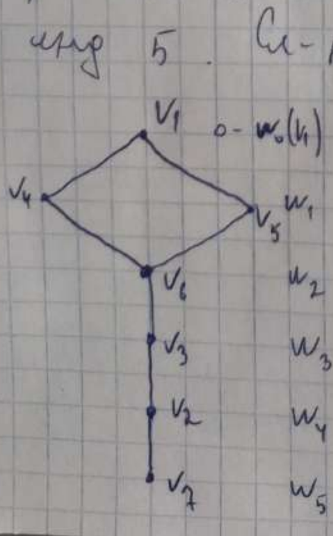
2) $\Gamma W_0(V_1) = \{V_4, V_5\}$ помеч индексом 1, они принадл. фронту волны первого уровня $W_1(V_1)$

3) Непомеч ранее верш. из множ $\Gamma W_1(V_1) = \Gamma\{V_4, V_5\} = \{\cancel{V_5}, V_6, \cancel{V_1}, \cancel{V_4}, V_6\} = \{V_6\}$, помеч. инд. 2, они принадл фронту волны 2-го уровня $W_2(V_1)$

4) Непомеч ранее верш из мн-ва $\Gamma W_2(V_1) = \Gamma\{V_6\} = \{V_3, \cancel{V_4}\} = \{V_3\}$ помеч индексом 3

5) $\Gamma W_3(V_1) = \Gamma\{V_3\} = \{\cancel{V_1}, V_2, \cancel{V_4}, \cancel{V_5}\} = \{V_2\}$ помеч инд 4

6) $\Gamma W_4(V_1) = \Gamma\{V_2\} = \{\cancel{V_1}, \cancel{V_3}, \cancel{V_4}, \cancel{V_6}, V_7\} = \{V_7\}$ помеч инд 5. Сл-но длина кратч пути из V_1 в $V_7 = 5$



1) V_7

2) $W_4(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_7 = \{V_2\} \cap \{V_2\}$

3) $W_3(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_2 = \{V_3\} \cap \{V_3, V_7\} = \{V_3\}$

4) $W_2(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_3 = \{V_6\} \cap \{V_2, V_6\} = \{V_6\}$

5) $W_1(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_6 = \{V_4, V_5\} \cap \{V_2, V_4, V_5, V_7\} = \{V_4, V_5\}$

$6)\ W_0(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_4 = \{V_1\} \cap \{V_1, V_2, V_3, V_5, V_6\} = \{V_1\}$

~~7)~~ $6.1)\ W_0(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_5 = \{V_1\} \cap \{V_1, V_3, V_4, V_7\} = \{V_1\}$

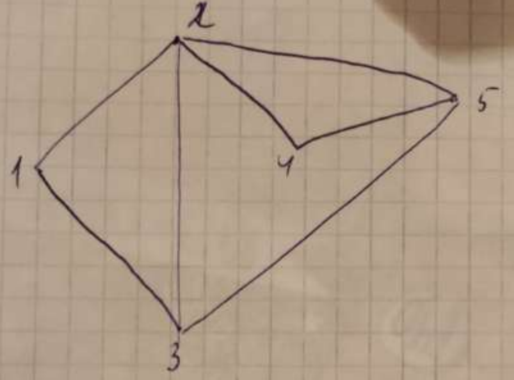
Кратчайших путей 2:

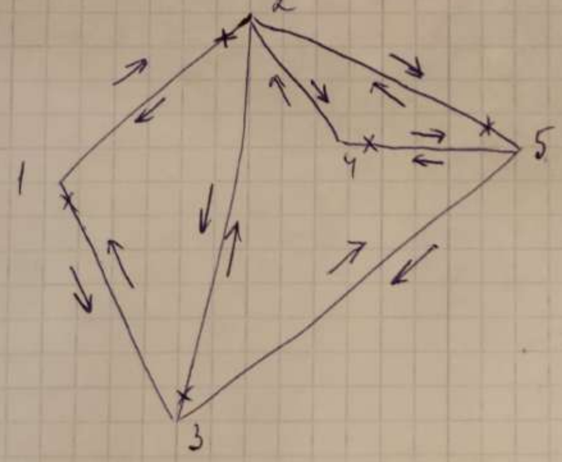
$V_1 - V_4 - V_6 - V_3 - V_2 - V_7$

$V_1 - V_5 - V_6 - V_3 - V_2 - V_7$

№ 2

Диёров Даврон М8О-107Б-22. вариант 10





1 - 2 - 5 - 4 - 2 - 3 - 1 - 2 - 5 - 3 - 5 - 2 - 1 - 3 - 2 - 4 - 5

КР №4

								$\lambda_i^{(0)}$	$\lambda_i^{(1)}$	$\lambda_i^{(2)}$	$\lambda_i^{(3)}$	$\lambda_i^{(4)}$	$\lambda_i^{(5)}$	$\lambda_i^{(6)}$	мин. путь в верш.
∞	6	3	∞	∞	∞	∞	∞	0	0	0	0	0	0	0	→ v_1
∞	∞	2	5	∞	3	∞	∞	∞	6	5	5	5	5	5	→ v_2
13	2	∞	∞	10	∞	7	∞	∞	3	3	3	3	3	3	→ v_3
∞	∞	∞	∞	7	∞	∞	3	∞	∞	11	10	10	10	10	→ v_4
∞	∞	∞	7	∞	∞	∞	3	∞	∞	13	12	12	11	11	→ v_5
∞	∞	∞	3	∞	∞	1	∞	∞	∞	9	8	8	8	8	→ v_6
∞	∞	∞	∞	2	1	∞	∞	∞	∞	10	10	9	9	9	→ v_7
∞	3	2	∞	∞	4	1	∞	∞	∞	∞	14	13	10	13	→ v_8

Находим мин. вершины:

1) $v_1 \to v_1$ (длина 0)

2) $v_1 \to v_2$ (длина 5)

~~$\lambda_1^{(0)} + C_{13} = \lambda_3^{(1)}$ (0 + 3 = 3)~~

$\lambda_3^{(1)} + C_{32} = \lambda_2^{(2)}$ (2 + 3 = 5) $v_1 - v_3 - v_2$

$\lambda_1^{(0)} + C_{13} = \lambda_3^{(1)}$ (0 + 3 = 3)

3) $v_1 \to v_3$ (длина 3)

$\lambda_1^{(0)} + C_{13} = \lambda_3^{(1)}$ (0+3=3) $v_1 - v_3$

4) $v_1 \to v_4$ (длина 10)

$\lambda_2^{(2)} + C_{24} = \lambda_4^{(3)}$ (5 + 5 = 10)

$\lambda_3^{(1)} + C_{32} = \lambda_2^{(2)}$ (2 + 3 = 5) $v_1 - v_3 - v_2 - v_4$

$\lambda_1^{(0)} + C_{13} = \lambda_3^{(1)}$ (0 + 3 = 3)

5) $v_1 - v_5$ (длина 11)

$\lambda_7^{(4)} + C_{75} = \lambda_5^{(5)}$ (2 + 9 = 11) $v_1 - v_3 - v_2 - v_6 - v_7 - v_5$

$\lambda_6^{(3)} + C_{67} = \lambda_7^{(4)}$ (8 + 1 = 9)

$\lambda_2^{(2)} + C_{26} = \lambda_6^{(3)}$ (5 + 3 = 8)

$\lambda_3^{(1)} + C_{32} = \lambda_2^{(2)}$ $(2+3=5)$

$\lambda_1^{(0)} + C_{13} = \lambda_3^{(1)}$ $(0+3=3)$

6) $V_1 - V_6$ (длина 8)

$\lambda_2^{(2)} + C_{26} = \lambda_6^{(3)}$ $(5+3=8)$ $V_1 - V_3 - V_2 - V_6$

$\lambda_3^{(1)} + C_{32} = \lambda_2^{(2)}$ $(2+3=5)$

$\lambda_1^{(0)} + C_{13} = \lambda_3^{(1)}$ $(0+3=3)$

7) $V_1 - V_7$ (длина 9)

$\lambda_6^{(3)} + C_{67} = \lambda_7^{(4)}$ $(8+1=9)$ $V_1 - V_3 - V_2 - V_6 - V_7$

$\lambda_2^{(2)} + C_{26} = \lambda_6^{(3)}$ $(5+3=8)$

$\lambda_3^{(1)} + C_{32} = \lambda_2^{(2)}$ $(2+3=5)$

$\lambda_1^{(0)} + C_{13} = \lambda_3^{(1)}$ $(0+3=3)$

8) $V_1 - V_8$

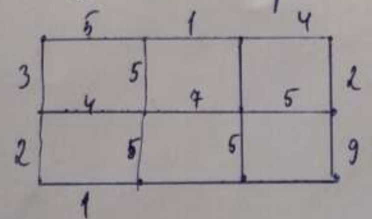
$\lambda_4^{(3)} + C_{48} = \lambda_8^{(4)}$ $(10+3=13)$

$\lambda_2^{(2)} + C_{24} = \lambda_4^{(3)}$ $(5+5=10)$ $V_1 - V_3 - V_2 - V_4 - V_8$

$\lambda_3^{(1)} + C_{32} = \lambda_2^{(2)}$ $(2+3=5)$

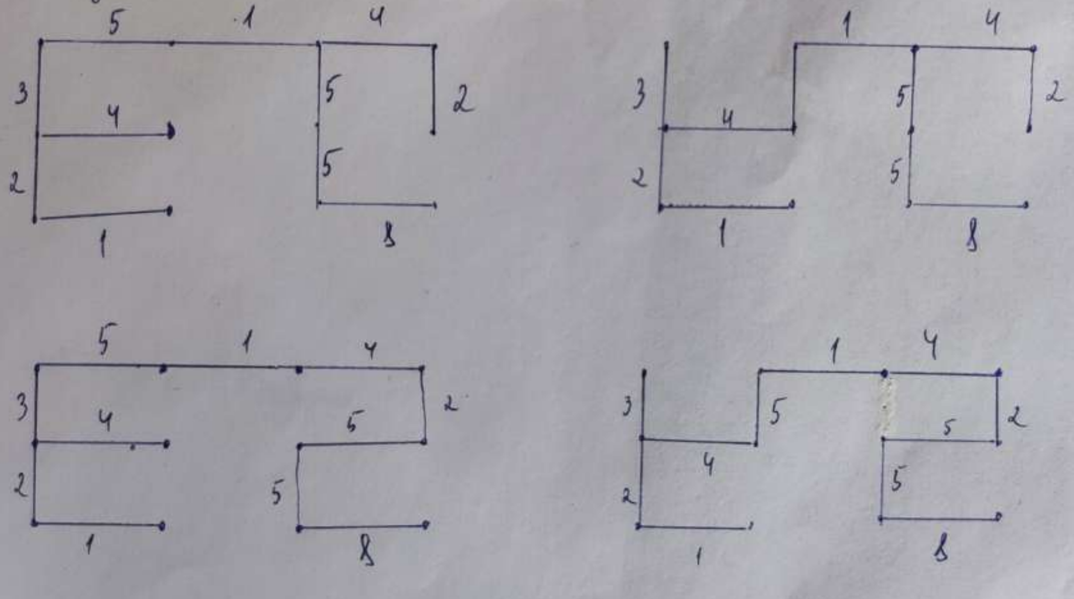
$\lambda_1^{(0)} + C_{13} = \lambda_3^{(1)}$ $(0+3=3)$

Курсовая работа № 5



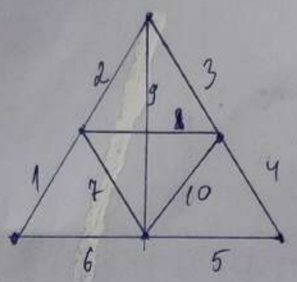
$L(D) = 40$

Возможные остовные деревья с мин суммой длин ребер - 40

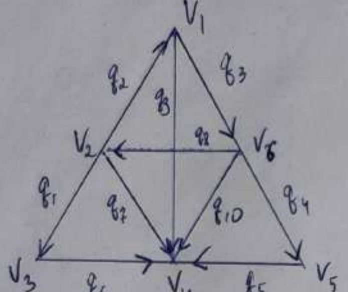


Минимальный вес остовного графа = 40

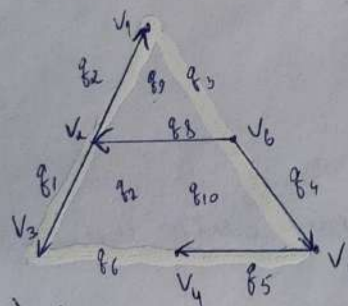
курс. работа №6, Очиров Д.Ч. 107Б-22. В-10



1) Зададим на графе произв. ориентацию:



2) Построим произв. остовное дерево D зад. графа:



3) Найдем базис циклов

$(D+q_3)$: φ_1: $V_1 - V_6 - V_2 - V_1 \Rightarrow c(\varphi_1) = (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)$

$(D+q_9)$: φ_2: $V_1 - V_4 - V_5 - V_6 - V_2 - V_1 \Rightarrow c(\varphi_2) = (0\ 1\ 0\ -1\ -1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)$

$(D+q_6)$; φ_3: $V_6 - V_5 - V_4 - V_3 - V_2 - V_6 \Rightarrow c(\varphi_3) = (-1\ 0\ 0\ 1\ 1\ -1\ 0\ -1\ 0\ 0)$

$(D+q_7)$: φ_4: $V_2 - V_4 - V_5 - V_6 - V_2 \Rightarrow c(\varphi_4) = (0\ 0\ 0\ -1\ -1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$

$(D+q_{10})$: φ_5; $V_6 - V_5 - V_4 - V_6 \Rightarrow c(\varphi_5) = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1)$

4) Цикломатич. матр. графа имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5) Выпишем зак. Кирхгофа для напряж:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} u_2 + u_3 + u_8 = 0 \\ u_2 - u_4 - u_5 + u_8 + u_9 = 0 \\ -u_1 + u_4 + u_5 - u_6 - u_8 = 0 \\ -u_4 - u_5 + u_7 + u_8 = 0 \\ u_4 + u_5 - u_{10} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_3 = -u_2 - u_8 \\ u_9 = -u_2 + u_4 + u_5 - u_8 \\ u_6 = -u_1 + u_4 + u_5 - u_8 \\ u_7 = u_4 + u_5 - u_8 \\ u_{10} = u_4 + u_5 \end{cases}$$

6) Выпишем зак. Кирхгофа для токов:

7) Выпиш. урав. Кирхгофа для токов. Найдем матр. инцид. В орграфа:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}
V_1	0	1	-1	0	0	0	0	0	-1	0
V_2	-1	-1	0	0	0	0	-1	1	0	0
V_3	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
V_4	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
V_5	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
V_6	0	0	1	-1	0	0	0	-1	0	-1

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9
\end{pmatrix}
= 0
$$

$$
\begin{cases}
I_2 - I_3 - I_9 = 0 \\
-I_1 - I_2 - I_7 + I_8 = 0 \\
I_1 - I_6 = 0 \\
I_5 + I_6 + I_7 + I_9 + I_{10} = 0 \\
I_4 - I_5 = 0 \\
\cancel{I_3 - I_4 - I_8 - I_{10} = 0}
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
I_2 - I_3 - I_9 = 0 \\
-I_1 - I_2 - I_7 + I_8 = 0 \\
I_1 - I_6 = 0 \\
I_5 + I_6 + I_2 + I_9 + I_{10} = 0 \\
I_4 - I_5 = 0
\end{cases}
$$

3) Подставим закон Ома.

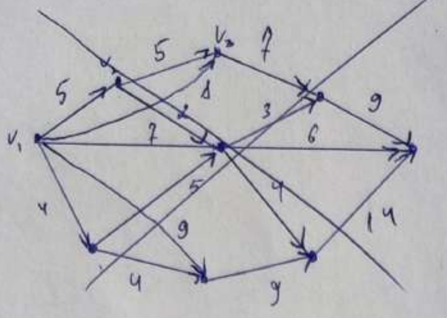
$$
\begin{cases}
E_1 = -I_1 R_1 - I_8 R_8 \\
0 = -I_9 R_9 - I_2 R_2 + I_4 R_4 + I_5 R_5 - I_8 R_8 \\
0 = -I_6 R_6 - I_1 R_1 + I_4 R_4 + I_5 R_5 - I_8 R_8 \\
0 = -I_7 R_7 + I_4 R_4 + I_5 R_5 - I_8 R_8 \\
E_2 = I_4 R_4 + I_5 R_5
\end{cases}
$$

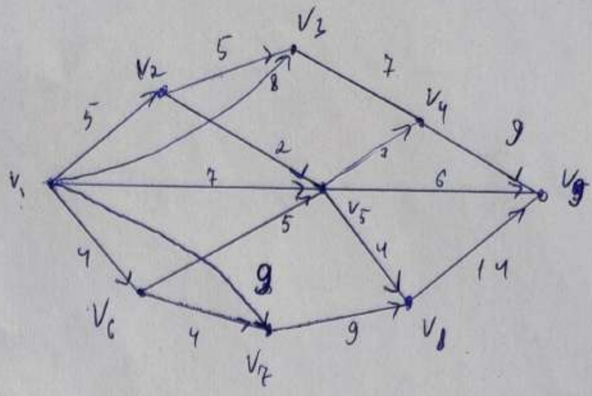
Ответ:

$$\begin{cases} -I_1 R_1 - I_8 R_8 = E_1 \\ -I_9 R_9 - I_2 R_2 + I_4 R_4 + I_5 R_5 - I_8 R_8 = 0 \\ -I_6 R_6 - I_1 R_1 + I_4 R_4 + I_5 R_5 - I_8 R_8 = 0 \\ -I_7 R_7 + I_4 R_4 + I_5 R_5 - I_8 R_8 = 0 \\ I_4 R_4 + I_5 R_5 = E_2 \\ I_2 - I_3 - I_9 = 0 \\ -I_1 - I_2 - I_7 + I_8 = 0 \\ I_1 - I_6 = 0 \\ I_5 + I_6 + I_7 + I_9 + I_{10} = 0 \\ I_4 - I_5 = 0 \end{cases}$$

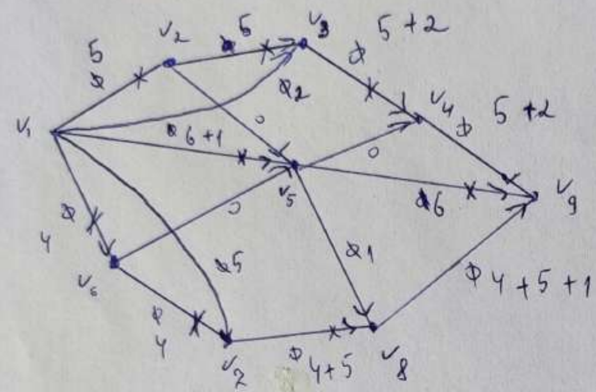
9. урав. и 9 неизвестных - токи $I_1, \dots, I_{10}$; э.д.с. E_1, E_2 и сопротивл. $R_1, R_2, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9$ известны

КП 7





1)



1) $V_1 - V_2 - V_3 - V_4 - V_9$

$\min\{5, 5, 7, 9\} = 5$

2) $V_1 - V_6 - V_7 - V_8 - V_9$

$\min\{4, 4, 9, 14\} = 4$, $\Phi_{пол} = 4+5 = 9$

3) $V_1 - V_5 - V_9$

$\min\{7, 6\} = 6$ $\Phi_{пол} = 4+5+6 = 15$

4) $V_1 - V_3 - V_4 - V_9$

$\min\{8, 7-5, 9-5\} = 2$ $\Phi_{пол} = 17$

5) $V_1 - V_7 - V_8 - V_9$

$\min\{9, 9-4, 14-4\} = 5$ $\Phi_{пол} = 22$

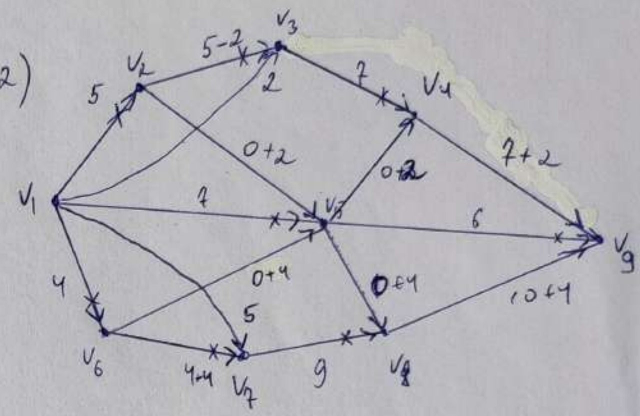
6) $V_1 - V_5 - V_8 - V_9$

$\min\{7-6, 4, 5\} = 1$ $\Phi_{пол} = 23$

Величина полного потока

$\Phi_{полн} = 23$

2)



1) $V_1 - V_3 - V_2 - V_5 - V_4 - V_9$

$\Delta_1 = \min\{8-2, 5, 2, 3, 9-7\} = 2$

2) $V_1 - V_7 - V_6 - V_5 - V_8 - V_9$

$\Delta_2 = \min\{9-5, 4, 5, 4, 14-10\} = 4$

$\Phi_{макс} = 23+2+4 = 29$

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) факультет “Информационные технологии и прикладная математика” кафедра “Математическая кибернетика”

КУРСОВАЯ РАБОТА

по курсу «Дискретная математика»

2-й семестр

Тема: Максимальное паросочетание.

Вариант 10

Студент: Диёров Давронхон Умид угли

Группа: М8О-107Б-22

Руководитель: Н.П. Яшина

Оценка: _______________

Дата: _______________

- Выбранный алгоритм — *нахождение максимального паросочетания*
- Необходимая теория:
  - Паросочетанием называется произвольное множество рёбер такое, что никакие два ребра не имеют общей вершины
  - Максимальным парсочетанием называется такое паросочетание M в графе G, которое не содержится ни в каком другом паросочетании этого графа, то есть к нему невозможно добавить ни одно ребро, которое бы являлось несмежным ко всем рёбрам паросочетания.
- Идея алгоритма:

Идея алгоритма Эдмондса (Jack Edmonds, 1965 г.) - в **сжатии цветков** (blossom shrinking). Сжатие цветка — это сжатие всего нечётного цикла в одну псевдо-вершину (соответственно, все рёбра, инцидентные вершинам этого цикла, становятся инцидентными псевдо-вершине). Алгоритм Эдмондса ищет в графе все цветки, сжимает их, после чего в графе не остаётся "плохих" циклов нечётной длины, и на таком графе (называемом "поверхностным" (surface) графом) уже можно искать увеличивающую цепь простым обходом в глубину/ширину. После нахождения увеличивающей цепи в поверхностном графе необходимо "развернуть" цветки, восстановив тем самым увеличивающую цепь в исходном графе. Если в графе G существовала увеличивающая цепь, то она существует и в графе $\overline{G}$, полученном после сжатия цветка, и наоборот.

- Описание алгоритма:

a) На ввод подаётся неориентированный граф
b) Найдём нечётный цикл (если такого в данном графе не существует то переходим к пункту 5).
c) Находим наименьшего общего предка.
d) Сожмём этот цикл.
e) Начнём обход в ширину. В процессе обхода в ширину будем строить дерево пути содержащее v, которое будет содержать вершину, которая является паросочетанием для v.

- Алгоритм:

Начнём обход в ширину. Находим увеличивающую цепь из свободной вершины root. В процессе обхода рассмотрим текущее ребро (v, to). У нас есть несколько вариантов:

a) Ребро несуществующее. Под этим мы подразумеваем, что v и to принадлежат одной сжатой псевдо-вершине, поэтому в текущем поверхностном графе этого ребра нет. Кроме этого случая, есть ещё один случай: когда ребро (v, to) уже принадлежит текущему паросочетанию; т.к. мы считаем, что вершина v является чётной вершиной, то проход по этому ребру означает в дереве путей подъём к предку вершины v, что недопустимо.

b) Ребро замыкает цикл нечётной длины, т.е. обнаруживается нечётный цикл. В этом случае нужно провести сжатие цветка:

   1) Для u и v находим наименьшего общего предка (НОП). НОП будет являться псевдо-вершиной
   2) Находим те ребра которые находятся в цикле, т.е Проходим от u, v до НОП. Нужно симитировать обход в глубину от псевдо-вершины. Тем самым мы избежим явного объединения списков смежности.
   3) Проставим предков для чётных вершин.

c) Если это «обычное» ребро, то мы делаем обход в ширину. Если мы в вершину to ещё не заходили, и она оказалась ненасыщенной, то мы нашли увеличивающую цепь, заканчивающуюся на вершине to, возвращаем её.

- Блок-схема:

Программа написана на языке C++ с использованием набора утилит Graphviz.

- Инструкция:

Запустить программу. Ввести граф в программе. Формат ввода: Сначала нужно ввести количество рёбер в графе. Далее ввести сами ребра u v, где u, v вершины графа. Выводом программы будет изображение под названием “graph.jpg”, где красные рёбра будут входить в максимальное паросочетание. Изображение будет находиться в той папке, где храниться программа.

- Асимптотическая сложность.

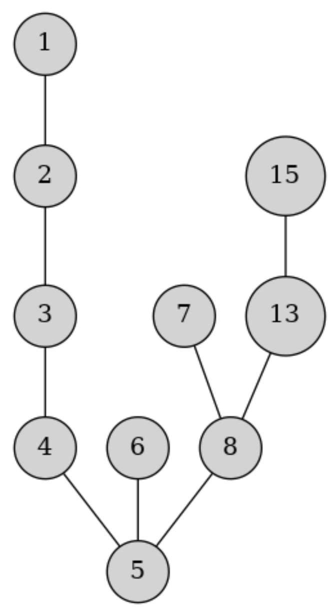
Всего имеется n итераций, на каждой из которых выполняется обход в ширину за $O(m)$, кроме того, могут происходить операции сжатия цветков — их может быть $O(n)$. Сжимаем цветок за O(n). Таким образом, общая асимптотика алгоритма составит $O(n \cdot (m + n^2)) = O(n^3)$.

- Тестовые примеры. Скриншоты программ:

Тест 1

Введём такой граф:
9
1 2
2 3
3 4
4 5
6 5
7 8
8 5
13 8
15 13

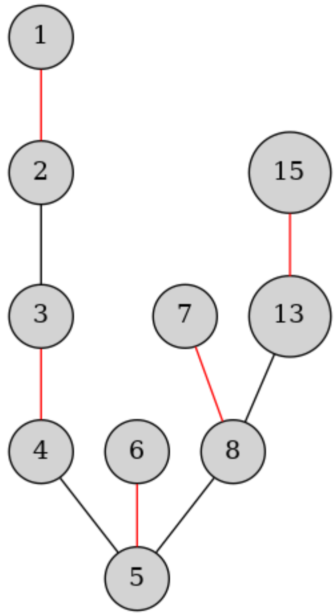
Изначально граф будет выглядеть так:



Найдём максимальное паросочетание вручную:
1. Начнём программу с вершины v_1. Она не в паросочетании, значит запускаем обход в ширину.
2. Перебираем все рёбра из вершины v_1.
Если обнаружили цикл нечётной длины, то сжимаем его
Если пришли в свободную вершину возвращаем значение и останавливаем обход
Если пришли в несвободную вершину, то добавить в очередь смежную ей в паросочетании
Если ничего из вышеперечисленного не произошло, то возвращаем значение -1

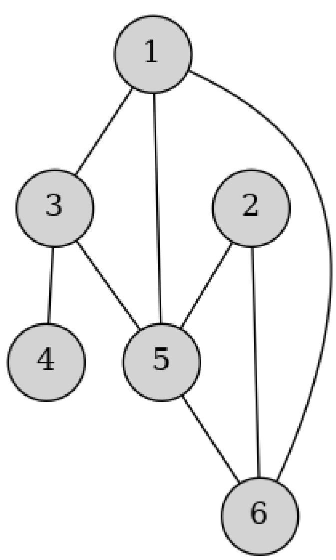
3. Проверяем не равно ли значение -1, если нет, то выполним чередование вдоль пути из v_1. Так как вершина v_2 свободная, то начнём чередование из вершины v_1 в вершину v_2. Итак, вершины v_1 и v_2 будут в паросочетнии.
4. Повторяем шаги 1-3 для каждой вершины.
5. Получаем массив match [2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, -1, -1, -1, -1, 15, 13], где i-элемент массива является v_i вершиной, которая имеет паросочетание с $match_i$ вершиной.

Выводом программы будет:

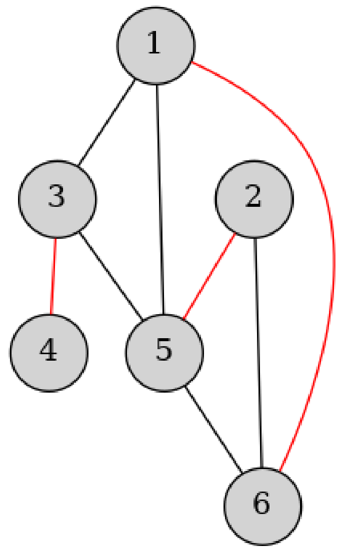


Тест 2
Ввод:

8
1 3
1 5
1 6
2 5
2 6
3 4
3 5
5 6

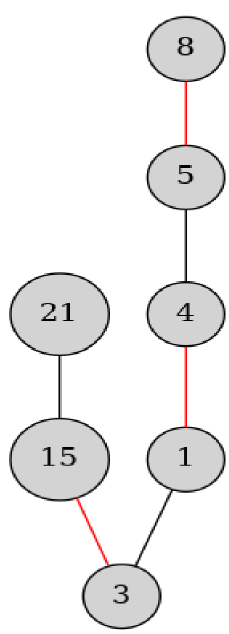


Вывод:

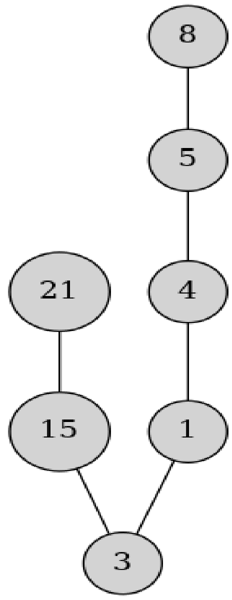


Тест 3

Ввод:
6
1 3
15 3
4 1
8 5
5 4
21 15



Вывод:



- Прикладная задача

Распределение аудиторий в учебном заведении. Студенты имеют определенный график занятий и должны быть распределены в соответствующих аудиториях. Необходимо назначить аудитории для каждого урока, учитывая ограничения пропускной способности (вершинами в графе являются учебные группы, которые имеют занятия в одно время, а ребра соединяют пары групп, которые имеют общие занятия). Максимальное паросочетание позволит определить оптимальное распределение аудиторий для студентов.