Problema 1. Simulación numérica de flujo incompresible utilizando las ecuaciones de Navier-Stokes

En el modelado de flujo (turbulento o no turbulento –laminar) las ecuaciones gobernantes, en este caso las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuaciones 4.59, 4.60, 4.61, pag. 145), son solucionadas utilizando métodos numéricos, [1] pp. 144-150.

> 1. En [1], se enuncia un algoritmo de relajación explícito para hallar la velocidad del fluido en cada punto (centro de la malla)(ecuaciones 4.63, 4.64 pag. 146. Sin embargo, el algoritmo de relajación presentado considera una sola dimensión $u(x, y)$, la velocidad en la Figura 4.11 pag. 146. Para familiarizarse con aspectos como la implementación de la solución, variación de parámetros y entender cómo se ve reflejada la discretización de un medio continuo en un algoritmo que itera sobre elementos discretos, como primer objetivo se sugiere realizar una simulación contemplando la dimensión v, la vorticidad, que sería la dimensión vertical y también está representada en dos dimensiones, $v(x, y)$.
> 2. El segundo objetivo es realizar la simulación obteniendo la solución implícita para hallar la velocidad del fluido en cada punto central de la malla. Esto implica obtener un sistema de ecuaciones lineales, donde cada incógnita será la aproximación de dicha velocidad, que luego actúa como una corrección residual de la iteración siguiente. Para la solución del sistema de ecuaciones lineales en cada iteración de la corrección residual, se sugiere utilizar al menos tres métodos vistos en clase y realizar la respectiva discusión.
> 3. Para utilizar métodos de solución de ecuaciones lineales, se sugiere utilizar el número de Reynolds (Re) para caracterizar el movimiento del fluido y verificar que la contribución del componente no lineal es muy pequeño y se puede despreciar, es decir considerar cero; dado que las ecuaciones de Navier-Stokes son no lineales (ecuaciones 4.60, 4.61 Pag. 145), al considerar interacción en el plano de velocidad ($z = 0$ por conveniencia) entre la dimensión y (hileras) y la dimensión x (columnas).

Ecuaciones de Naiver-Sotkes

Usaremos la notacion de la Referencia [1] en el Capitulo **4.6 Hydrodynamics - 4.6.1 Navier-Stokes Equation** para el desarrollo del tema.

Tenemos la siguiente notacion: ν es la viscosidad del fluido,
P es la presion del fluido,
ρ es la densidad del fluido, y
T es la temperatura.
$P(\rho, T, x)$ se conoce como la Ecuacion de Estado del Fluido y debe conocerse antes de intentar solucionar las ecuaciones de Naiver Stokes.

La forma explicita, para el calculo de la velocidad v, de las ecuaciones de Naiver Stokes es:

> 1. $$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \sum_{j=x}^{z} v_j \frac{\partial v_x}{\partial x_j} = \nu \sum_{j=x}^{z} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

> 2. $$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \sum_{j=x}^{z} v_j \frac{\partial v_y}{\partial x_j} = \nu \sum_{j=x}^{z} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}$$

> 3. $$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \sum_{j=x}^{z} v_j \frac{\partial v_z}{\partial x_j} = \nu \sum_{j=x}^{z} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$

Por simplicidad, vamos a suponer que la presion P es independiente de la densidad ρ y de la temperatura T y que estamos en estado estacionario, es decir la velocidad v es independiente del tiempo t, es decir:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$$

Ademas, si el canal por donde corre el fluido (z) es amplio, podemos ignorar la dependecia de la velocidad (v) y el eje z, teniendo que resolver tres ecuaciones en derivadas parciales:

> 4. $$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

> 5. $$\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

6. $$\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)=v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}$$

El algoritmo de solucion de las ecuaciones de Naiver-Stokes usa sobrerrelajacion y divide el medio en una malla rectangular con espaciado h en ambos sentidos (coordenadas x y y):

En general tenemos:

$$x = ih, \quad i = 0, \ldots, N_x; \quad y = jh, \quad j = 0, \ldots, N_y$$

En la seccion anterior teniamos dx y dy la equivalencia es $dx = hx$ y $dy = hy$.

Tambien se asume que $\nu = 1\ m^2/s$ y $\rho = 1kg/m^3$

Las derivadas parciales pueden escribirse como diferencias finitas:

7.1. $$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2h_x}.$$

7.2. $$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{i,j} \approx \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h_y}.$$

7.3. $$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{i,j} \approx \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_x^2}.$$

7.4. $$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2v_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}.$$

La velocidad v tiene dos direcciones x y y, puesto que hemos asumido independencia con la direccion z. La velocidad en cada direccion puede representarse como el movimiento en un plano con coordenadas i, j, por tanto usaremos un superindice para indicar la direccion y subindices para indicar las coordenadas de posicion.

Usando las ecuaciones de diferencias finitas y de las condiciones del problema conocemos que $h_x = 1$ y $h_y = 1$, tenemos la discretizacion de las ecuaciones:

> 8. $v^x_{i,j} = \frac{1}{4}\Big(v^x_{i+1,j} + v^x_{i-1,j} + v^x_{i,j+1} + v^x_{i,j-1} - \frac{h}{2}v^x_{i,j}\left[v^x_{i+1,j} - v^x_{i-1,j}\right] - \frac{h}{2}v^y_{i,j}\left[v^x_{i,j+1}\right.$

Para usar sobrerrelajacion actualizamos el valor calculado

> 9. $$v^x_{i,j} = v^x_{i,j} + \omega r_{i,j}$$

donde ω es el parametro de sobrerrelacion y $r_{i,j} = v^{x(new)}_{i,j} - v^{x(old)}_{i,j}$

> 10. $$r_{i,j} = \frac{1}{4}\Big(v^x_{i+1,j} + v^x_{i-1,j} + v^x_{i,j+1} + v^x_{i,j-1} - \frac{h}{2}v^x_{i,j}\left[v^x_{i+1,j} - v^x_{i-1,j}\right] - \frac{h}{2}v^y_{i,j}\left[v^x_{i,j+1}\right. \\ - v^x_{i,j}$$

Bibliografia

Repaso

> a. Ecuaciones de Navier Stokes https://www.youtube.com/watch?v=vo8p_3oQkw4

> b. Ecuaciones Diferenciales https://www.youtube.com/watch?v=q3PKNySW6LQ&list=PL9SnRnlzoyX0RE6_wcrTKaWj8cmQb3uO6

Referencias

[1] Landau, R. and Paez M. Computational problems for physics: with guided solutions using Python. CRC Press, 2018

[2] Yoo, T. Insight into images: principles and practice for segmentation, registration and imagen analysis. AK Peters Limited, 2004

[3] Versteeg, H. K. and Malalasekera, W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics. Pearson Education Limited, 2007

[4] Kincaid D., Cheney W. Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing. American Mathematical Society; 3rd Revised edition (2002)