

## TEMA 1: INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

### 1.1. ¿Qué se entiende por Investigación Operativa?

Quizás la mejor manera de introducir el concepto de Investigación Operativa sea dando un ejemplo del tipo de problemas de los que se ocupa.

Supongamos que tenemos que instalar un nuevo sistema informático a lo largo de las cinco próximas semanas en una empresa de Barcelona. Nuestro jefe ha decidido que volemos los lunes a Barcelona y que regresemos los miércoles. Un billete de ida y vuelta normal vale 400 euros, pero podemos conseguir un descuento del 20 % si las fechas del billete incluyen un fin de semana. El billete sencillo vale 300 euros. Debido a la disponibilidad de billetes solamente podemos optar por una de las tres opciones siguientes:

1. Comprar cinco billetes normales Valencia-Barcelona-Valencia (2000 euros).
2. Comprar un billete sencillo Valencia-Barcelona, cuatro Barcelona-Valencia-Barcelona, incluyendo los fines de semana y uno Barcelona-Valencia (1880 euros).
3. Comprar un billete Valencia-Barcelona-Valencia que incluye el lunes de la primera semana y el miércoles de la última y cuatro Barcelona-Valencia-Barcelona que abarquen los fines de semana para cubrir el resto de períodos (1600 euros).

Tenemos por tanto que tomar una decisión basándonos en algún criterio objetivo, como por ejemplo, elegir la alternativa más económica, lo cual nos llevaría a optar por la tercera de las combinaciones.

Este ejemplo proporciona las componentes principales de un modelo de investigación operativa: las alternativas, las restricciones y un criterio objetivo para elegir la mejor opción. Generalmente las **alternativas** del problema adoptan la forma de **variables** desconocidas. Después estas variables

se utilizan para construir en forma de **funciones matemáticas** tanto las **restricciones** como la **función objetivo**. El resultado final es un **modelo matemático** que relaciona las variables, las restricciones y la función objetivo. La **solución del modelo** consiste en dar el valor de las variables de la decisión que **optimizan (maximizan o minimizan)** el valor de la función objetivo a la vez que satisfacen el conjunto de restricciones. La solución resultante se suele denominar **solución posible óptima**.

Resumiendo, un modelo matemático típico de Investigación Operativa se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar o Minimizar} & \text{Función Objetivo} \\ \text{Sujeto a:} & \text{Restricciones} \end{array}$$

Aunque, debido a la gran variedad de problemas de los que se ocupa, resulta difícil dar una definición única de Investigación Operativa, podemos decir que:

*“Es una disciplina caracterizada por enfocar, desde el punto de vista científico, problemas, de naturaleza muy distinta, en los que es necesario planificar la toma de decisiones”,*

o, como la define la Sociedad de Investigación Operativa inglesa:

*“La Investigación Operativa es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a los problemas complejos que surgen en la dirección y gestión de grandes sistemas de hombres, máquinas, materiales y dinero, en cualquier campo, industria, economía, defensa, comercio, administración, etc. La principal característica de este enfoque consiste en construir un modelo científico-matemático del sistema, con el cual se pueden predecir, y comparar, los resultados de diversas estrategias y decisiones, incorporando medidas de azar y riesgo. El objetivo es ayudar a los dirigentes (responsables) a determinar científicamente sus políticas de actuación”.*

## 1.2. Orígenes Históricos

A pesar de que las raíces de la Investigación Operativa se remontan a las civilizaciones más antiguas, ésta no fue reconocida como una nueva área de la investigación científica hasta la Segunda Guerra Mundial. Desde entonces, ha sufrido un desarrollo espectacular que todavía no ha terminado, y que, a

excepción de la revolución en el campo de la informática, no admite comparaciones. Puede decirse que sus métodos han provocado un cambio radical en la forma de abordar los problemas de decisión. Tal es así, que hoy en día, se utilizan en prácticamente cualquier área de aplicación imaginable. La revista *Interfaces* publicada por el Institute of Management Science es una excelente fuente de consulta de aplicaciones interesantes de IO.

La necesidad de desarrollar una disciplina como lo que hoy en día es la Investigación Operativa puede decirse que surge a raíz de la Primera Revolución Industrial. En el momento en que la mano de obra comienza a ser sustituida por las máquinas y los sistemas de comunicación y transporte comienzan a desarrollarse, las compañías inician un proceso de expansión que aumenta considerablemente la complejidad de su administración. Hasta este momento el “propietario” era el responsable de administrar la empresa, sin embargo a partir de ahora necesita dividir su trabajo en distintas áreas, como por ejemplo: producción, finanzas, personal, marketing e investigación y desarrollo, y confiar su gestión a diferentes administradores. Evidentemente cada uno de ellos tiene un objetivo diferente que cumplir y en ocasiones los objetivos pueden ser contrapuestos.

El responsable de producción querrá minimizar los costes de producción; en marketing se perseguirá maximizar el volumen de ventas; en finanzas se intentará minimizar el capital necesario para mantener el negocio, y el jefe de personal será el responsable de mantener la moral de los trabajadores alta a la vez que se eleva el índice de productividad. Establecer la política adecuada que responda a los intereses generales de la compañía y no a los de una parte solamente será por tanto la responsabilidad de la ejecutiva. Es así como surge la necesidad de recurrir a consultores externos que ayuden a tomar las decisiones adecuadas. Estos consultores acabarán saliendo del colectivo de científicos dedicados a la Investigación Operativa.

Pero ¿cómo y cuándo se forma este colectivo?

A principios de la Segunda Guerra Mundial surgió la necesidad urgente de asignar recursos escasos a las distintas operaciones militares, así como a las actividades dentro de cada operación, de la forma más efectiva posible. Éste fue el motivo por el cuál las administraciones militares, americana e inglesa, hicieron un llamamiento a un gran número de científicos de la época, con la finalidad de que aplicaran el método científico a éste, y a otros problemas

de estrategia y táctica. Los primeros equipos de investigadores operativos trabajaron en la integración del radar como soporte en las tareas de defensa aérea. El resultado de sus esfuerzos contribuyó sin duda alguna a la victoria aérea de los ingleses en los combates contra los alemanes.

Estimulados por el evidente éxito de la investigación operativa en el entorno militar, los industriales comenzaron a interesarse en esta nueva disciplina de la ciencia. Pronto, se descubrió que la naturaleza de los problemas en estas áreas era similar a la de los enfrentados en el área militar. A comienzos de los años 50, en Gran Bretaña, la IO ya se había introducido por completo en la industria, el comercio, y el gobierno, y en Estados Unidos, estaba en proceso de hacerlo. Su desarrollo desde entonces ha sido imparable, gracias a dos factores cruciales, por un lado, los grandes progresos realizados en el desarrollo de las técnicas propias del área, y por otro, la aparición y desarrollo de los ordenadores, que hicieron posible aplicar estas técnicas a problemas cada vez más complejos.

### **1.3. Modelos y Técnicas de Investigación Operativa**

A continuación presentamos algunos de los ya considerados **problemas prototipo** en el campo de la IO:

1. **Problemas de Asignación y Distribución de Recursos.** Se trata de asignar recursos escasos a una serie de tareas para realizar de la mejor manera posible una serie de trabajos.

Por ejemplo, problemas de mezclas de productos (elaboración de dietas), problemas de inversiones, distribución de materiales, etc...

2. **Problemas de Inventarios.** Son aquellos en los que se desea establecer el nivel de inventario que debe mantenerse en una empresa. Se incluyen aquí los problemas relacionados con la gestión de embalses.

3. **Problemas de Mantenimiento, Reemplazamiento y Fiabilidad.** El objetivo aquí es el mantenimiento de los equipos industriales, militares, e incluso sociológicos. Estos equipos suelen deteriorarse con el

tiempo, esto implica tomar decisiones sobre si interesa o no reemplazar determinadas piezas del equipo, y de hacerlo, decidir en qué momento.

4. **Problemas de Colas.** Este tipo de problemas surge cuando una serie de ítems acceden a un sistema en demanda de un servicio. El objetivo es diseñar el centro de servicio para optimizar criterios como, minimizar el tiempo de espera, minimizar costes, etc.
5. **Problemas de Rutas de Vehículos.** El problema clásico de rutas de vehículos consiste en diseñar un conjunto de rutas de mínimo coste para un conjunto de vehículos, que deben servir un determinado producto a un conjunto de clientes, cuyas demandas y localizaciones son conocidas.
6. **Problemas de Secuenciación de Actividades.** Se trata de decidir en qué orden deben realizarse un conjunto de tareas en un conjunto de máquinas, teniendo en cuenta que dichas tareas suelen estar sujetas a relaciones de precedencia.

La clasificación que hemos establecido no es única, y ni tan siquiera incluye todos los tipos de problemas de los que se encarga la Investigación Operativa, sin embargo, creemos que es suficiente para dar una idea de la problemática general a la que nos enfrentamos.

El objetivo en todos estos problemas es, como ya hemos dicho, la búsqueda de la optimalidad. Esta búsqueda ha conducido al desarrollo de una gran variedad de métodos de solución, diseñados teniendo en cuenta las propiedades matemáticas del modelo planteado para representar el problema. Podría decirse que la mayoría de las técnicas de Investigación Operativa tienen en común su carácter algorítmico ya que tratan de resolver el problema iterativamente creando en cada iteración soluciones cada vez más cerca de la solución óptima.

Cuando la dificultad del problema impide diseñar un método eficiente (efectivo y rápido) para encontrar la solución óptima se puede abordar el problema diseñando un algoritmo de naturaleza heurística que encuentre en tiempo razonable una buena solución para el problema.

Entre las técnicas de IO más desarrolladas encontramos la **Programación Lineal** que se ocupa de los modelos en los que tanto la función objetivo

como las restricciones son lineales y las variables continuas. Al estudio de la PL dedicaremos una parte importante de la asignatura.

El desarrollo de otro tipo de métodos han dado lugar a la **Programación No Lineal**, a la **Programación Lineal Entera**, a la **Programación Dinámica**, a los **Flujos en Redes** o a la **Programación Multiobjetivo**, por citar algunos.

Cualquiera de estas técnicas requiere ser programada y aplicada utilizando un ordenador, de ahí el papel fundamental que pueden jugar los informáticos como miembros de los equipos de Investigación Operativa.

## 1.4. Metodología de la Investigación Operativa

Llevar a cabo un estudio de Investigación Operativa suele ser por lo general un trabajo de equipo en el que tanto los especialistas (matemáticos, ingenieros, informáticos, economistas...) como el cliente (persona o entidad a la que le ha surgido el problema) trabajan en colaboración.

Independientemente de la naturaleza de la aplicación, en cualquier proyecto de Investigación Operativa cabe distinguir una serie de etapas comunes que lo identifican como tal.

### Etapas de un Proyecto de Investigación Operativa

1. Formulación del problema
2. Construcción de un modelo matemático que lo represente
3. Obtención de una solución
4. Verificación del modelo y de la solución, y
5. Puesta en práctica y mantenimiento de la solución.

Debemos destacar que aunque las fases del proyecto suelen iniciarse en el orden que acabamos de establecer normalmente no se terminan en el mismo orden. De hecho, la interacción entre ellas hace que cada fase se revise y actualice continuamente hasta que se da por finalizado el proyecto.

Nos gustaría hacer notar que la tercera parte es la única puramente matemática ya que es a la hora de obtener la solución del problema cuando se

aplican las técnicas y teorías matemáticas adecuadas. Llevar a cabo con éxito el resto de etapas es más un arte que una teoría y solo la experiencia nos enseñará cómo deben realizarse.

#### 1.4.1. Formulación del Problema

Ésta es quizás la fase más delicada del proceso ya que supone establecer una definición clara y precisa del problema al que nos enfrentamos. En esta etapa del estudio juega un papel fundamental el cliente que nos ha planteado el problema. En general, suelen ser necesarias varias reuniones en las que poco a poco podamos ir definiendo claramente cuáles son las alternativas de decisión (variables), el objetivo que nos permite valorar las distintas alternativas, y las restricciones o limitaciones a las que nos enfrentamos.

La formulación inicial del problema debe revisarse continuamente a la vista de los resultados obtenidos en el resto de las etapas. No podemos perder de vista el hecho de que un problema mal definido puede conducir a una solución absurda echando así por la borda todo el trabajo realizado.

#### 1.4.2. Modelización

En esta etapa hemos de construir un modelo matemático que represente la esencia del problema definido en la etapa anterior. Este modelo será un conjunto de ecuaciones y expresiones matemáticas relacionadas entre sí.

Las distintas alternativas, aspectos susceptibles de cambio del problema, se modelizarán utilizando **variables**,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la forma de medir la calidad de una u otra alternativa será una función de esas variables, la **función objetivo**, y las limitaciones que impiden que las variables tomen cualquier valor se modelizarán utilizando desigualdades y ecuaciones, las **restricciones**.

#### 1.4.3. Obtención de una Solución

Si el modelo resultante responde a uno de los modelos típicos de IO y sus dimensiones lo permiten podremos obtener la solución utilizando el algoritmo apropiado. En otro caso podremos acudir a la simulación o la aplicación de técnicas heurísticas. El resultado de esta fase debe ser un conjunto de valores

para las variables que proporcionen, si es posible, el mejor valor de la función objetivo o, en caso de haber aplicado un algoritmo heurístico, una solución aceptable para el cliente.

No podemos perder de vista que nuestro modelo no deja de ser una simplificación de la realidad. Esto hace que muchos de los datos utilizados para construirlo sean estimaciones de los verdaderos parámetros, por lo que conviene llevar a cabo un **análisis de sensibilidad** que nos permita valorar cómo afecta a la solución óptima pequeños cambios en dichos valores.

#### **1.4.4. Verificación del Modelo y de la Solución**

En esta fase se verifica si el modelo propuesto hace lo que se supone que debe hacer, es decir, ¿el modelo proporciona una predicción razonable del comportamiento del sistema que se está estudiando? Para ello podemos plantearnos algunas preguntas ¿tiene sentido la solución? ¿los resultados son aceptables? para contestar a estas preguntas podemos comprobar utilizando datos históricos si la solución proporcionada por el modelo hubiese sido la correcta.

#### **1.4.5. Puesta en Práctica**

En esta fase el equipo de Investigación Operativa debe encargarse de formar al personal responsable de aplicar el modelo de manera que sean capaces de traducir los resultados del modelo en instrucciones de operación. Es decir, el equipo de IO debe asegurarse de que el modelo se utiliza apropiadamente para tomar las decisiones en los problemas que motivaron su creación.

### **1.5. Bibliografía**

- Hillier, F.S. y Lieberman, G.J. (2001). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. Séptima Edición. McGraw-Hill Interamericana.
- Maroto, C., Alcaraz, J. y Ruiz, R. (2002). *Investigación Operativa. Modelos y Técnicas de Optimización..* Servicio de Publicaciones. Universidad Politécnica de Valencia.
- Taha, H.A. (1998). *Investigación de Operaciones. Una Introducción*. Prentice Hall, Méjico.