Inhomogeneous vs homogeneous coordinates

- 为什么要引入齐次坐标?
  - 齐次坐标能够用来**明确区分向量和点**，同时也更易于进行仿射（线性）几何变换——F.S.Hill，JR
- 对于一个向量 v 以及基底 oabc，可以找到一组坐标 (v_1, v_2, v_3)，使得 $v = v_1 a + v_2 b + v_3 c$
- 对于一个点 p，可以找到一组坐标 (p_1, p_2, p_3)，使得 $p - o = p_1 a + p_2 b + p_3 c$
  - 由此可以看出，在坐标系中表示一个点 p，实际上用这个点的位置和原点的位置的**位移**，也即向量“$p - o$”来表示这个点的位置
    - $p : p = o + p_1 a + p_2 b + p_3 c$
    - $v : v = v_1 a + v_2 b + v_3 c$
      - 上面是坐标系中表示点和向量的形式，虽然我们都是采用代数分量的形式表达向量和点，但是表达一个点比表达一个向量需要额外的信息
        - 例如，一个代数分量 $(3, 4, 2)$，谁知道它是向量还是点?
  - 因此，我们增加一个维度来区分向量和点
    - 令 $(x, y, z, 1)$ 表示点，$(x, y, z, 0)$ 表示向量

- 对于**平行线在无穷远处会相交**的问题
  - 
- 在欧几里得空间（笛卡尔空间）里，描述 2D/3D 几何物体是很理想的，但是 (∞, ∞) 的点在欧几里得空间里是没有意义的，因此，欧几里得空间中无法描述“平行线在无穷远处会相交于一点”这个问题
  - August Ferdinand Möbius 提出了齐次坐标，解决这个问题
    - 齐次坐标用 N+1 个分量来描述 N 维坐标
    - 笛卡尔坐标 (m, n) 和齐次坐标 (x, y, w) 之间有如下的转换关系
      - $m = \frac{x}{w}$；$n = \frac{y}{w}$
    - 实际上，齐次坐标并不具有唯一性，比如笛卡尔坐标 $(1, 2)$ 可以表示为齐次坐标 $(1, 2, 1)$，也可以表示为 $(2, 4, 2)$；因此，齐次坐标真正具有意义的是 x、y 与 w 的比值
    - 当笛卡尔坐标 (x, y)（对应齐次坐标 $(x, y, 1)$）移动至无穷远处时，分量 x 和 y 不断增加，逼近 ∞，此时 w 作为分母则不断减小，直至趋近于 0

- 因此，(∞, ∞) 对应的齐次坐标就是 $(x, y, 0)$；这样就可以有意义地描述一个点 (x, y) 移动至无穷远这一过程了

> 证明：两个平行线可以相交
> 在笛卡尔坐标系中，对于如下两个直线方程
> $$
> \left{
> \begin{aligned}
> Ax+By+C=0\
> Ax+By+D=0
> \end{aligned}
> \right.

> 如果$C \neq D$，则方程组无解；如果$C = D$，则这两条线就是同一条线了 > 在齐次坐标中，方

\left{
\begin{aligned}
A \frac{x}{w}+B \frac{y}{w}+C=0\
A \frac{x}{w}+B \frac{y}{w}+D=0
\end{aligned}
\right.
\Rightarrow
\left{
\begin{aligned}
Ax+Bx+Cw=0\
Ax+Bx+Dw=0
\end{aligned}
\right.

> 现在就可以在$C \neq D$的情况下，得到一组解$(x, y, 0)$，因此两条不重合的平行线可以相交于投