第七章　级数

习题 7.1

1. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$.

(1) 写出该级数的前 5 项，并求该级数前 n 项的部分和 S_n;

(2) 根据级数收敛的定义判断该级数是否收敛？若收敛，求级数的和.

解: (1) 由定义容易求得该级数的前 5 项分别为 $\frac{1}{10}, \frac{1}{40}, \frac{1}{88}, \frac{1}{154}, \frac{1}{238}$

前 n 项部分和为:

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{(3\times 1-1)(3\times 1+2)} + \cdots + \frac{1}{(3\times n-1)(3\times n+2)} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right)
\end{aligned}
$$

即 $S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{6}$ ，因此该级数收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{6}$

2. 求 8 进制无限循环小数 $(24.076076076\cdots)_8$ 的值.

解:拆为整数和小数两部分.

$$
\begin{aligned}
&(24)_8 = 2\times 8 + 4 = 20 \\
&(0.076)_8 = \frac{1}{8^2}\times 7 + \frac{1}{8^3}\times 6 = \frac{31}{256}
\end{aligned}
$$

故有

$$
\begin{aligned}
(24.076076076\cdots)_8 &= 20 + \frac{31}{256}\left[1 + \frac{1}{512} + \left(\frac{1}{512}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{512}\right)^n + \cdots\right] \\
&= 20 + \frac{31}{256}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{512}} = \frac{10282}{511}
\end{aligned}
$$

3. 求下列级数的前 n 项的部分和，并根据级数敛散性的定义，判断级数是否收敛？若收敛，求该级数的和.

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(5) $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

解:

记 S_n 为下述各级数的前 n 项部分和

(1) 该级数的前 n 项部分和满足

$$(-1)S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^i=-\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{3}$$

因此 $S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$，因此原级数收敛，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{3}$

(2)$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ，因此有

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\&=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

$\lim_{n\to+\infty}S_n=1$ ，故原级数收敛，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=1$

(3) 由于求和数列可拆成 $(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$，因此原级数的前 n 项部分和为

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i+1}\right)\\&=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\\&=1+\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\end{aligned}$$

故有 $\lim_{n\to+\infty}S_n=1$ ，即原级数收敛，且 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=1$.

(4) 由于 $\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，因此原级数的前 n 项部分和为

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i+2}-\sqrt{i+1})-(\sqrt{i+1}-\sqrt{i}) \\
&= (\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\
&= (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1
\end{aligned}
$$

故有 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1-\sqrt{2}$，即原级数收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}$.

(5) 由于 $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\ln\dfrac{n^2-1}{n^2}=\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)-\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$. 故原级数的前 n 项部分和为

$$
\begin{aligned}
S_n &= \ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)-\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\ln 2$，即原级数收敛，且 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=-\ln 2$.

(6)

$$
S_n = \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n} \tag{1}
$$

$$
2S_n = 1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}} \tag{2}
$$

(2)-(1) 得

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n} \\
&= 1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n} \\
&= 3-\frac{2n+3}{2^n}
\end{aligned}
$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 3$ ，因此原级数收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n-1}{2^n} = 3.$

4. 证明：若级数 $\sum a_n$ 收敛，则级数 $\sum ka_n$ (k 为实常数) 也收敛；反之是否成立？

证明:记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i, T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} ka_i = k\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = kS_n$

由 $\sum a_n$ 收敛，可记 $\sum a_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = A$ ，故有 $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = kA$ ，故 $\sum ka_n$ 收敛.

反之，若 $\sum ka_n$ 收敛，则记 $\sum ka_n = B$ ，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = B$，即 $k \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = B$

$k \neq 0$ 时，$\sum a_n = \dfrac{B}{k}$ 收敛

$k = 0$ 时，$\sum a_n$ 发散时，$\sum ka_n = 0$ 也收敛.

故反之不成立.

5. 对于级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ ，下列陈述是否正确？为什么？

(1) 若 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 都发散，则：$\sum(a_n + b_n)$ 也发散;

(2) 若 $\sum a_n$ 收敛，$\sum b_n$ 发散，则：$\sum(a_n + b_n)$ 必发散.

解:(1) 不一定正确。例如 $a_n = \dfrac{1}{n}, b_n = -\dfrac{1}{n}$，此时 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 均发散，但 $\sum(a_n + b_n) = 0$ 收敛.

(2) 正确。采用反证法:

假设 $\sum(a_n + b_n)$ 收敛，由 $\sum a_n$ 收敛，得 $\sum(a_n + b_n) - a_n$ 收敛，即 $\sum b_n$ 收敛，与已知矛盾，故

$\sum(a_n + b_n)$ 发散.

6. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ 也收敛；反之成立吗？

若不成立，请举例说明，并给出在级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛的前提下，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛的充要条件.

证明:记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ ，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则可令 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = A$，故有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1} + a_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = A$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ 也收敛. 反之不成立，例如 $a_n = (-1)^n$ ，有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1} + a_{2n}) = 0$ ，但 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$

不收敛.

给出 $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛的前提下，$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛的充要条件为

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=0$$

证明如下：

(1) 充分性：

若 $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛，则可设 $\lim_{n\to+\infty}S_{2n}=A$ ，又 $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ ，即 $\lim_{n\to+\infty}a_{2n+1}=0$ ，因此有

$$\lim_{n\to+\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=A$$

故 $\lim_{n\to+\infty}S_n=A$ ，即 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

(2) 必要性：

若 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，则可设 $S_n=A$. 因此有

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^*,n>N\text{时},|S_n-A|<\frac{\varepsilon}{2},|S_{n-1}-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

故当 $n>N$ 时，满足

$$|a_n|=|S_n-S_{n-1}|=|(S_n-A)-(S_{n-1}-A)|\le|S_n-A|+|S_{n-1}-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

故 $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.

7. 利用柯西收敛准则判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2n^2+3}$.

解:以下均记 S_n 为原级数的前 n 项部分和

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, n > N$时$, \forall p > 0$ ，有

$$\begin{aligned}|S_{n+p} - S_n| &= \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right| \\ &< \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+p}\right| < \frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

取 $N = \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$ ，当 $n < N$ 时，$\dfrac{2}{n+1} < \varepsilon$，即

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

故由 Cauchy 收敛准则，有级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 收敛.

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, n > N$时$, \forall p > 0$ ，有

$$\begin{aligned}|S_{n+p} - S_n| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin k}{k^2}\right| < \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k-1)}\right| \\ &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right| \\ &\leq \frac{1}{n}\end{aligned}$$

取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ ，当 $n < N$ 时，$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ ，故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$ 收敛.

(3) 取 $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$，则 $\forall N \in N^*, \exists n_0 > N,$ 取$p_0 = n_0$ ，有

$$\left|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}\frac{1}{\sqrt{k^2+k}}\right| > \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{n_0+2} + \cdots + \frac{1}{n_0+n_0+1} > \frac{n_0}{2n_0+1} > \frac{1}{3}$$

因此由 Cauchy 收敛准则，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 发散.

(4) 取 $\varepsilon = \dfrac{1}{5}$，则 $\forall N \in N^*, \exists n_0 > N, \forall p > 0$ ，有

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{(-1)^k k^2}{2k^2+3}\right| > \frac{(n+p)^2}{2(n+p)^2+3} > \frac{n^2}{2n^2+3} > \frac{1}{5}$$

因此由 Cauchy 收敛准则，$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2n^2+3}$ 发散.

8. 试举例说明：若级数 $\sum a_n$ 对某固定的正整数 p 满足条件

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0.$$

此级数仍可能发散.

解: $a_n=(-1)^n$ ，当 $p=2$ 时，满足条件

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k=0$$

但此时 $\sum a_n$ 发散.

习题 7.2

9. 用比较判别法或极限判别法判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+n-4}$;

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin\frac{\pi}{n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$;

(5) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$;

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n\sin\frac{\pi}{4^n}$;

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$;

(8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(9) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left[\sqrt[n]{2}+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}-2\right]$;

(10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$.

解:

(1) 采用极限判别法，易知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+n-4}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\frac{1}{2}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+n-4}$ 收敛.

(2) 采用比较判别法，当 $n>3$ 时，$\dfrac{n+1}{3n-1}<\dfrac{1}{2}$，因此

$$\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n-1}\right)^n$ 收敛.

(3) 采用比较判别法，当 $n>2$ 时，满足 $\sin\dfrac{\pi}{n}<\dfrac{\pi}{n}$，故有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin\frac{\pi}{n}<\frac{\pi}{n^{\frac{3}{2}}}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\pi}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}$ 收敛.

(4) 采用极限判别法，易知原数列满足

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1}{\dfrac{1}{n}}=1$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$ 发散.

(5) 采用极限判别法，易知原数列满足

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+1}{n-1}}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n-1}=2$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，因此 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+1}{n-1}$ 收敛.

(6) 采用比较判别法，由 $\sin\dfrac{\pi}{4^n}<\dfrac{\pi}{4^n}$ 知

$$3^n\sin\frac{\pi}{4^n}<\pi\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\pi\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ 收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}3^n\sin\dfrac{\pi}{4^n}$ 收敛.

(7) 采用极限判别法，易知原数列满足

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\dfrac{1}{n}} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{\dfrac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{e\left[1-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}\right]}{\dfrac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{e\left[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\dfrac{1}{n}}\\
&= \lim_{x\to0^+} e\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\\
&= \frac{e}{2}
\end{aligned}$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ 发散.

(8) 采用比较判别法，由 $n<2^n$ 知 $\sqrt[n]{n}<2$ ，因此有

$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}>\frac{1}{2n}$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，故原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散.

(9) 采用极限判别法，易知原数列满足

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n]{2}=2^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{\ln 2}{n}}=1+\frac{\ln 2}{n}+\frac{(\ln 2)^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{1}{n}}=e^{-\dfrac{\ln 2}{n}}=1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{(\ln 2)^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

因此

$$\sqrt[n]{2}+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}-2=\frac{(\ln 2)^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

即该级数与 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 具有相同的敛散性，而级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，因此原级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left[\sqrt[n]{2}+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}-2\right]$ 收敛.

(10) 由于

$$\frac{1}{3^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln 3}}$$

且 $\ln 3 > 1$ ，因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$ 收敛.

10. 用比值判别法或根值判别法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$;

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{3^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \tan \frac{\pi}{3^n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{5^n - 3^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n n!}{n^n} (a > 0)$;

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$;

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$;

(8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)! \cdots n^3}$.

解:记下面各题的数列为 $\{a_n\}$

(1) 采用比值判别法，易知原数列满足

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 > 1$$

因此原级数发散.

(2) 采用比值判别法，易知原数列满足

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{2n+3}{2n+1} = \frac{1}{3} < 1$$

因此原级数收敛.

(3) 采用比较判别法和比值判别法，先将原数列放缩

$$n^2 \cdot \tan \frac{\pi}{3^n} = \frac{n^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3^n}}{\cos \frac{\pi}{3^n}} < \frac{n^2 \cdot \frac{\pi}{3^n}}{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot \frac{n^2}{3^n}$$

之后考虑级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n}$ 的敛散性，应用比值判别法，有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}<1$$

因此原级数收敛.

(4) 采用比值判别法，易知原数列满足

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}4\cdot\frac{5^n-3^n}{5^{n+1}-3^{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}4\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{5-3\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{4}{5}<1$$

因此原级数收敛.

(5) 采用比值判别法，易知原数列满足

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a}{e}$$

因此当 $a>e$ 时，原级数发散；当 $a<e$ 时，级数收敛.

当 $a=e$ 时，由 Stirling 公式知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{e^n\cdot n!}{n^n}}{\sqrt{2\pi n}}=1$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{2\pi n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$ 发散.

综上，当 $a\geq e$ 时，原级数发散，$0<a<e$ 时，原级数收敛.

(6) 采用根值判别法，易知原数列满足

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{2}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

因此原级数收敛.

(7) 采用极限判别法，易知原数列满足

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^n}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{x\to0^+}\frac{(1+x\ln x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\dfrac{\ln(1+x\ln x)}{x}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\dfrac{x\ln x}{x}}}{x}=1$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散.

(8) 先对原数列进行化简并放缩

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\cdot n^3}=\frac{(2n!!)^2}{(2n)!\cdot n^3}=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\cdot n^3}=\frac{2n}{n^3}\cdot\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}<\frac{2}{n^2}$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛，故原级数收敛.

11. 用适当的方法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{[4+(-1)^n]^n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{3}$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{2}{\ln n}\right)$;

(4) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln n)^p}$;

(5) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x}{\sqrt[3]{3+1}}\mathrm{d}x$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt[3]{x^3+1}\mathrm{d}x}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n(n!)^2}{n^n(2n)!!}$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}.(a>0)$

解:记下面各题的数列为 $\{a_n\}$

(1) 采用比较判别法和比值判别法，先将原数列放缩

$$\frac{n}{[4+(-1)^n]^n}<\frac{n}{3^n}$$

由比值判别法知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}$ 收敛，故原级数收敛.

(2) 采用比较判别法和比值判别法，先将原数列放缩

$$\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{3}<\frac{n}{3^n}\cdot\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2=\pi^2\frac{n^3}{3^{n+2}}$$

再应用比值判别法

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)^3}{n^3}=\frac{1}{3}<1$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\pi^2\frac{n^3}{3^{n+2}}$ 收敛，故原级数收敛.

(3) 易知 $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{2}{\ln n}\right)\ \frac{2}{n\ln n}$，由 Cauchy 积分判别法知,

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$$

因此原级数发散.

(4) 当 $p=-1$ 时，级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散;

当 $p=0$ 时，由 (3) 知级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散;

当 $p\neq-1$ 且 $p\neq 0$ 时，采用 Cauchy 积分判别法

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{p+1}}\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{p\ln^p x}\right)\Big|_2^{+\infty}$$

因此当 $p>0$ 时，原级数收敛，当 $p<0$ 时，原级数发散.

综上，当 $p\leq 0$ 时，原级数发散，当 $p>0$ 时，原级数收敛.

(5) 采用 Cauchy 积分判别法

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}\mathrm{d}x\xlongequal{\ln x=u}\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{u^p(\ln u)^q}\mathrm{d}u$$

下面讨论反常积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{1}{u^p(\ln u)^q}\mathrm{d}u$ 的敛散性：

$p>1, q\geq 0$ 时，成立

$$\frac{1}{u^p(\ln u)^q} < \frac{1}{u^p}$$

此时该反常积分收敛.

$p>1, q<0$ 时，有

$$\lim_{u\to+\infty} u^{\frac{p+1}{2}}\frac{\ln^{-q} u}{u^p} = \lim_{u\to+\infty}\frac{\ln^{-q} u}{u^{\frac{p-1}{2}}} = 0$$

此时该反常积分收敛.

$p=1$ 时，由例 7.2.16 知，$q>1$ 时，该反常积分收敛，$q\leq 1$ 时，该反常积分发散.

$p<1, q\leq 0$ 时，成立

$$\frac{1}{u^p(\ln u)^q} > \frac{1}{u^p}$$

此时该反常积分发散.

$p<1, q>0$ 时，有

$$\lim_{u\to+\infty} u^{\frac{p+1}{2}}\frac{1}{u^p\ln^q u} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^{\frac{1-p}{2}}}{\ln^q u} = +\infty$$

此时该反常积分发散.

综上所述，$p>1$ 或 $p=1, q>1$ 时级数收敛，$p=1, q\leq 1$ 或 $p<1$ 时级数发散.

(6) 应用比较判别法

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{n\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)}}{\dfrac{1}{n\ln n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}\\
&\xlongequal{\text{Stolz 定理}} \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}\right)-\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n+1}} = 1
\end{aligned}$$

由 (3) 知级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，因此原级数发散.

(7) 应用比较判别法

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}\mathrm{d}x}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+1}}}{-2\cdot\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}}=\frac{1}{2}$$

而级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数收敛.

(8) 应用比较判别法

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\int_0^n\sqrt[3]{x^3+1}\mathrm{d}x}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\int_0^n\sqrt[3]{x^3+1}\mathrm{d}x}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt[3]{n^3+1}}=2$$

而级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数收敛.

(9) 先对原数列进行化简

$$\frac{e^n(n!)^2}{n^n(2n)!!}=\frac{e^n n!}{2^n n^n}$$

由 Stirling 公式知

$$\frac{e^n n!}{2^n n^n}\sim\frac{1}{2^n}\sqrt{2\pi n}$$

因此原数列收敛.

(10) 由于

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{(2n)!!(2n-1)!!}{[(2n)!!]^2}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

因此可以得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!!}{2^{2n}(n!)^2}\sqrt{\pi n}\xlongequal{\text{Stirling 公式}}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n}\cdot 2\pi n\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}\cdot\pi n=1$$

因此易知 $\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p \sim \left[\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right]^p$

因此 $p>2$ 时级数收敛，$p\le 2$ 时级数发散.

(11) 当 $0<a<1$ 时

$$\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} < a^n$$

因此级数收敛.

当 $a>1$ 时

$$\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} < \frac{1}{a^{\frac{n^2-n}{2}}} < \frac{1}{a^n}(n\ge 2)$$

因此级数收敛.

综上，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}.(a>0)$ 收敛.

12. 利用级数收敛的必要条件证明下列等式

(1) $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n!}=0$;　　(2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

证明:

(1) 考虑级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{n!}$ ，应用比值判别法，有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{e^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e}{n+1}=0$$

因此级数收敛，由级数收敛的必要性知 $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n!}=0$.

(2) 考虑级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ ，应用比值判别法，有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(1+n)\left[\frac{n!}{(n+1)!}\right]^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e}{n+1}=0<1$$

因此级数收敛，由级数收敛的必要性知 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

13. 对收敛的正项级数 $\sum a_n$.

(1) 证明：当 $\alpha>0$ 时，级数 $\sum n^{-(\alpha+\frac{1}{2})}\sqrt{a_n}$ 也收敛;

(2) 当 $\alpha=0$ 时，上面级数是否收敛？若不收敛请举出反例.

解: (1) 证明：应用比较判别法，有

$$n^{-(\alpha+\frac{1}{2})}\sqrt{a_n}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}+a_n\right)$$

由 $\alpha>0$ 得，$2\alpha+1>1$ ，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2\alpha+1}}$ 收敛，故原级数收敛.

(2) 不一定收敛，如 $a_n=\frac{1}{n\ln^2 n}$，易知 $\sum a_n$ 收敛，但 $\sum n^{-(\alpha+\frac{1}{2})}\sqrt{a_n}=\sum\frac{1}{n\ln n}$ 发散.

14. 若 $a_n>0$ ，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$ ，试证：

(1) 当 $q>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛；　(2) 当 $0\leq q<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

证明:

(1) 由题意得，当 $q>1$ 时，$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^*,n>N$时, 有

$$\left|\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}-q\right|<\varepsilon$$

因此 $q-\varepsilon<\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}<q+\varepsilon$ ，故有

$$a_n<\frac{1}{n^{q-\varepsilon}}$$

由 ε 的任意性知，$a_n\leq\frac{1}{n^q}$ ，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

(2) 由 (1) 知，$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^*,n>N$时, 有

$$a_n>\frac{1}{n^{q+\varepsilon}}$$

由 ε 的任意性知，$a_n\geq\frac{1}{n^q}$ ，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

15. 设 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 为方程 $\tan x = x$ 的正根，且从小到大排列，试证：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_n^2}$ 收敛.

证明:由题意 $x_n \in \left(n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ ，因此有

$$\frac{1}{x_n^2} < \frac{1}{n^2\pi^2}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_n^2}$ 收敛.

16. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 严格单调递增，求证：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}\text{收敛} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\text{收敛.}$$

证明:

①充分性：记 $b_n = \dfrac{n}{a_1+\cdots+a_n}$ ，则有

$$b_{2n} = \frac{2n}{(a_1+\cdots+a_n)+(a_{n+1}+\cdots+a_{2n})} < \frac{2n}{na_n+na_1} < \frac{2}{a_n}$$

$$b_{2n+1} = \frac{2n+1}{a_1+\cdots+a_{2n+1}} < \frac{2n+1}{na_1+(n+1)a_n} < \frac{2n+1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n} = \frac{2}{a_n}$$

由 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛得 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛.

②必要性：易知

$$\frac{1}{a_n} < \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

因此当 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛.

习题 7.3

17. 判别下列级数是否收敛？若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n(\ln n)^2+1}$;

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)(a>0)$;

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n+2}$;

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2n+3}$;

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$;

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)$;

(8) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$;

解:

(1) 取绝对值后应用比较判别法

$$\left|\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n(\ln n)^2+1}\right|<\frac{1}{n(\ln n)^2}$$

由 11(4) 知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛，因此原级数绝对收敛.

(2) 首先判断 $|a_n|$ 的敛散性:

$$|a_n|=|\sqrt[n]{a}-1|=\left|e^{\frac{\ln a}{n}}-1\right|\sim\frac{\ln a}{n}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln a}{n}$ 发散，因此原级数不绝对收敛.

①$0<a<1$ 时，$a_n=|a_n|$ ，因此原级数发散.

②$a=1$ 时，$a_n=0$ 显然收敛.

③$a>1$ 时，$\sqrt[n]{a}-1$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}-1=0$ ，因此由 Leibniz 判别法知原级数收敛.

综上，$0<a<1$ 时级数发散，$a\geq 1$ 时级数条件收敛.

(3) $n\geq 2$ 时，$0<\frac{\pi}{n}\leq\frac{\pi}{2}$ ，因此 $\sin\frac{\pi}{n}$ 是递减数列，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$ ，由 Leibniz 判别法知级数收敛.

而由比较判别法知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{\pi}{n}=\pi$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi}{n}$ 发散.

综上，该级数条件收敛.

(4) 采用比较判别法

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+n^{-\frac{1}{2}}}{1+\frac{2}{n}}=1$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，因此原级数的绝对值发散.

又知数列 $\dfrac{\sqrt{n}+1}{n+2}$ 单调递减且有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}=0$$

故由 Leibniz 判别法知原级数条件收敛.

(5) 易知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+3}=\frac{1}{2}$$

因此不满足收敛的必要性，故原级数发散.

(6) 记 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 则有 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，因此当 $x>e$ 时 $f'(x)<0$ ，故当 $n\geq 3$ 时，数列 $\dfrac{\ln n}{n}$ 单调递减，且有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$$

因此由 Leibniz 判别法知原级数收敛.

由比较判别法知

$$\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$$

因此级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}$ 发散.

综上，原级数条件收敛.

(7) 记 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}-1$ ，则 $f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$ 因此当 $x>e$ 时 $f'(x)<0$ ，故当 $n\geq 3$ 时，数列 $\sqrt[n]{n}-1$ 单调递减，且有

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$$

因此由 Leibniz 判别法知原级数收敛.

而经过变形得

$$\sqrt[n]{n}-1=e^{\frac{\ln n}{n}}-1\sim\frac{\ln n}{n}$$

因此级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$ 发散.

综上，原级数条件收敛.

(8) 由 Stirling 公式知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2\pi n}=+\infty$$

因此原数列发散.

18. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 满足：$a_n\le b_n\le c_n(n\in N^+)$, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 均收敛，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛.

证明:由 $a_n\le b_n\le c_n(n\in N^+)$ 知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_n-a_n)$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(c_n-a_n)$ 均为正项级数，且

$$b_n-a_n\le c_n-a_n$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(c_n-a_n)$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_n-a_n)$ 也收敛.

故有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-a_n)+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$$

收敛.

综上，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛.

19. 讨论级数 $1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^\alpha}+\cdots$ 的敛散性.($\alpha\in\mathbb{R}$)

解:

①$\alpha>1$ 时

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^\alpha}$$

易知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^\alpha}$ 收敛.

因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

②$\alpha = 1$ 时

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

由 Leibniz 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

③$\alpha < 1$ 时

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\dfrac{1}{2n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^\alpha - (2n-1)}{(2n)^\alpha} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{(2n)^\alpha} = 1 - \lim_{n\to+\infty} (2n)^{1-\alpha} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n)^\alpha} = -\infty$$

综上，$\alpha = 1$ 时收敛，$\alpha \neq 1$ 时发散.

20. 若级数 $\sum a_n$ 收敛，数列 $\{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$ ，试问：级数 $\sum a_n b_n$ 是否收敛？若收敛，请证明你的结论；若发散，请举反例说明.

解: 不一定收敛，反例如下：

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

则有

$$a_n b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

显然发散.

21. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n (a_n > 0)$ 条件收敛，试问：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ 是否收敛？为什么？ (2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ 收敛吗？为什么？

解: 注意到

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$$

因此由级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n(a_n>0)$ 条件收敛可以得出级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散，因此可知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n}$ 均发散.

22. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有 2 阶连续导数，且 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a(a\geq 0)$ ，讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$ 的敛散性.

解:可以采用比较判别法判断 $\sum_{n=1}^{+\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 的敛散性，由 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=a$$

因此易知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 发散.

后者可通过 Leibniz 判别法来判断，由 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 知

$$f(0)=0,f'(0)=a$$

且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=ax+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$$

其中 ξ 是介于 0 和 x 之间的实数，因此有

$$f(\frac{1}{n})=\frac{a}{n}+\frac{f''(\xi)}{2n^2}$$

显然数列 $f(\dfrac{1}{n})$ 是单调递减的，因此由 Leibniz 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$ 收敛.

23. 设 $f(x)$ 为偶函数，且在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，$f(0)=1,f''(0)=2$. 试证：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(f(\dfrac{1}{n})-1\right)$ 绝对收敛.

证明:由 $f(x)$ 是偶函数知 $f'(x)$ 是奇函数，因此有 $f'(0)=0$ ，进一步地可以得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=1+x^2+o(x^2)$$

因此有

$$f(\frac{1}{n})-1=\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

故由比较判别法

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|f(\frac{1}{n})-1\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\left|\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right|}{\frac{1}{n^2}}=1$$

故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(f(\frac{1}{n})-1\right)$ 绝对收敛.

24. 设 $a_n>0$ ，且 $\{a_n\}$ 单调递减，$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 发散，试判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 的敛散性.

解: 由 $\{a_n\}$ 单调递减且 $a_n>0$ 可知 $\{a_n\}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 发散，因此 $\lim_{n\to+\infty}a_n\neq 0$，故可设

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=A(A>0)$$

则由根值判别法，

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{1+A}<1$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

25. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=e^x-1+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$.

试证：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 条件收敛.

证明:先将 $f(x)$ 化简以便后续求导

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^x - 1 + \int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{u=x-t} e^x - 1 + \int_x^0 (x-u)f(u)\mathrm{d}(x-u) \\
&= e^x - 1 + x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

之后可以很容易求出 $f(x)$ 的一阶和二阶导数:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^x + \int_0^x f(u)\mathrm{d}u + xf(x) - xf(x) \\
&= e^x + \int_0^x f(u)\mathrm{d}u \\
f''(x) &= e^x + f(x)
\end{aligned}
$$

因此 $f(0)=0, f'(0)=f''(0)=1$ ，故得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开式为

$$
f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)
$$

因此 $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ 单调递减且

$$
\lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n}) = 0
$$

由 Leibniz 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛.

由 $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ 知

$$
f(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}
$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(\frac{1}{n})$ 发散.

综上，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 条件收敛.

26. 设 $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ ，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛.

证明:使用积分判别法，易知原级数的敛散性与反常积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

的敛散性相同，因此只需判断该反常积分的敛散性.

记

$$I_1=\int_0^{1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

先考虑瑕积分 I_1 的敛散性.

$$|F(\eta)|=\left|\int_\eta^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right|=|2-2\sqrt{\eta}|\le 2$$

在 $\eta\in[0,1]$ 上恒成立，因此 $F(\eta)$ 在 $[0,1]$ 上有界.

$g(x)=\sin x$ 在 $[0,1]$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x=0$.

因此由 Dirichlet 判别法知瑕积分 $I_1=\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛.

在考虑无穷积分 I_2 的敛散性.

$$|F(A)|=\left|\int_1^A\sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos 1-\cos A|\le 2$$

在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，因此 $F(A)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界.

$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减且 $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x=0$.

因此由 Dirichlet 判别法知无穷积分 $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛.

综上，反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛.

27. 用阿贝尔或狄利克雷判别法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}(x>0)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}(0<x<2\pi,\alpha>0)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\sin n^2}{n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos^2 n}{n}$.

解:

(1)① $a=1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{2}$ ，由 Leibniz 判别法知显然收敛.

② $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，记 $f(x)=\frac{a^x}{a^x+1}(a>0,x\geq 1)$ ，因此有

$$f'(x)=\frac{a^x\ln a}{(a^x+1)^2}$$

故 $0<a<1$ 时 $f(x)$ 单调递减, $a>1$ 时 $f(x)$ 单调递增.

且有

$$0<\frac{x^n}{x^n+1}<1$$

因此数列 $\left\{\frac{x^n}{x^n+1}\right\}$ 单调有界.

且由 Leibniz 判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

因此由 Abel 判别法知原级数收敛.

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sin kx&=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)\\&=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}+\cdots+\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)\\&=\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}\end{aligned}$$

因此有 $\left|\sum\limits_{n=1}^{N}\sin nx\right|\leq\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ 即 $\sum\limits_{n=1}^{N}\sin nx$ 有界.

又 $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$

由 Dirichlet 判别法知原级数收敛.

(3) 由 (2) 可知

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin n\right| = \left|\frac{\cos\dfrac{1}{2}-\cos\dfrac{2n+1}{2}}{2\sin\dfrac{1}{2}}\right| \leq \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}$$

显然 $\sum\limits_{n=1}^{N}\sin n$ 有界.

又 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$

由 Dirichle 判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin n}{n}$ 收敛.

而

$$\frac{\sin n\sin n^2}{n} \leq \frac{\sin n}{n}$$

由比较判别法知原级数收敛.

(4) 先对原数列进行化简

$$(-1)^{n-1}\frac{\cos^2 n}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n} + (-1)^{n-1}\frac{\cos 2n}{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n} + \frac{\cos(2n+\pi n)}{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n} + \frac{\cos n(2+\pi)}{2n}$$

由 Leibniz 判别法显然可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}$ 收敛，下面判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos n(2+\pi)}{2n}$ 的敛散性.

与 (2) 同理可知

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}x - \sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

因此有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos k(2+\pi)\right| = \left|\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(2+\pi) - \sin\dfrac{2+\pi}{2}}{2\sin\dfrac{2+\pi}{2}}\right| \leq \frac{1}{\sin\dfrac{2+\pi}{2}}$$

故有数列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k(2+\pi)\right\}$ 有界.

又数列 $\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n}=0$

故由 Dirichle 判别法知原级数收敛.

28. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n^p}$ 收敛，证明：当 $q>p$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n^q}$ 收敛.

证明:易知

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^q}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}\cdot\frac{1}{n^{q-p}}$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{n^{q-p}}\right\}$ 单调递减且满足 $0<\dfrac{1}{n^{q-p}}\leq 1$ 即有界.

而数列 $\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^p}\right\}$ 收敛，因此由 Abel 判别法知原级数收敛.

29. 设 $a_n>0$ ，且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散，试判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ 的敛散性.

解:假设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ 收敛，则有 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_n+1}=0$ ，进一步地得到 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ ，因此有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{a_n}{a_n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n+1}=1$$

因此级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ 与级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 同敛散，故该级数发散.

故得出矛盾，假设不成立，因此级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ 发散.