Hess-Smith Panelverfahren

1 Grundlagen

Es soll ein Panelverfahren zur Berechnung von ebenen Potentialströmungen um geschlossene Körper mit Auftrieb implementiert werden (Lösung der Laplace-Gleichung). Dabei wird aus der Vielzahl möglicher Verfahren jenes mit einer über dem jeweiligen Panel konstanten Singularitätenbelegung gewählt, [2, 1].

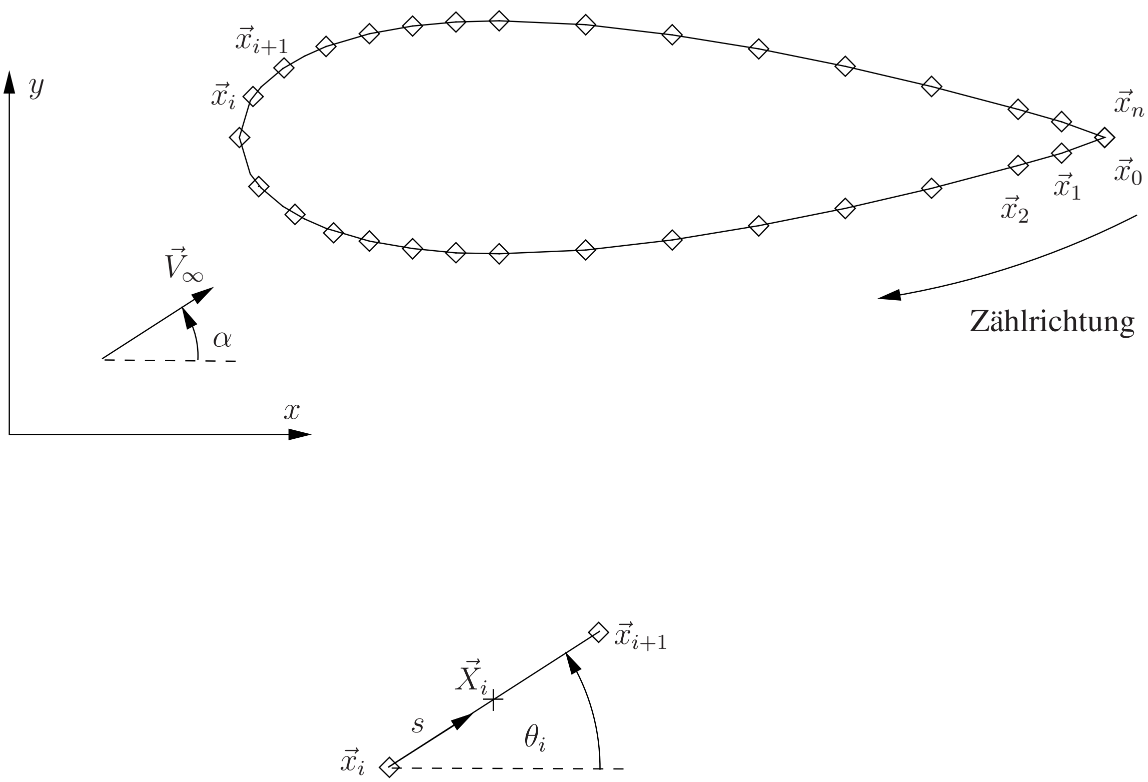

Abbildung 1: *Definition der Zählrichtung für Profilpunkte und Panels und der Winkel. Bei Verwendung der Profildatenbanken ist zu beachten, daß für einige der Profilfamilien (z.B.* NACA*) die Punkte in umgekehrtem Zählsinn vorliegen.*

Zuerst wird die Umfangkurve $\mathcal{C}$ des Profils durch $n+1$ Datenpunkte $\vec{x}_i = (x_i, y_i)$ dargestellt. Zwischen zwei benachbarten Punkten $\vec{x}_i,\ \vec{x}_{i+1}$ kann nun die Profilkontur durch die Verbindungsgerade, das Panel $\mathcal{C}_i$ angenähert werden. Jedes Panel ist nun beispielsweise mit einer noch unbestimmten konstanten Quelldichte q_i behaftet, die zum Geschwindigkeitspotential an einem Punkt $\vec{r}_i = \vec{x} - \vec{\hat{x}}_i(s)$ den Beitrag

$$\phi_i^{(q)} = \frac{q_i}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_i} ds \ln r_i \tag{1}$$

liefert. Das gesamte Geschwindigkeitspotential ergibt sich dann aus der Summe aller Panelbeiträge und dem Potential der Profilanströmung mit der Geschwindigkeit v_∞ unter dem Winkel α zu

$$\phi(\vec{x}) = V_\infty(\cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y) + \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i^{(q)}. \tag{2}$$

Für die Geschwindigkeit im Punkt $\vec{x}$ gilt

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}). \tag{3}$$

Die Strömung muß nun auf der Profilkontur die Gleitbedingung erfüllen. Da n freie Parameter q_i zur Verfügung stehen, lassen sich n Bedingungen aufstellen, um diese Randbedingung zu modellieren. Hier wird verlangt, daß die Normalkomponente des Geschwindigkeitsvektors $v_j^{(n)} = \vec{v}(\vec{X}_j)\cdot\vec{n}_j$ für alle Panel-Mittelpunkte

$$\vec{X}_j = \frac{1}{2}(\vec{x}_j + \vec{x}_{j+1}) \tag{4}$$

verschwindet. Dabei ist $\vec{n}_j$ der Normalvektor auf das Panel mit Index j. Daraus ergibt sich ein System von n Gleichungen

$$\sum_{j=0}^{n-1} M_{i,j}^{(q)} q_j = b_i \tag{5}$$

mit

$$M_{i,j}^{(q)} = \frac{1}{q_j}\vec{\nabla}\phi_j^{(q)}(\vec{X}_i)\cdot\vec{n}_i, \tag{6}$$

$$b_i = -V_\infty \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \vec{n}_i, \tag{7}$$

dessen Lösung die Quellstärken auf den Panels liefert.

Die reine Quellbelegung des Profils liefert aber noch keinen Auftrieb. Der Auftrieb kann erzeugt werden durch Hinzufügen einer einzigen konstanten Wirbelbelegung γ für alle Panels. Das Potential wird dadurch erweitert um Beiträge

$$\phi_i^{(w)} = \frac{\gamma}{2\pi}\int ds\ \theta_i, \tag{8}$$

wobei θ_i der Winkel ist, den $\vec{r}_i$ mit der x-Achse einschließt. Die Formulierung der Gleitbedingung bleibt erhalten, das Gleichungssystem ist aber entsprechend dem neu hinzukommenden Geschwindigkeitsbeitrag zu erweitern. Für die neue Unbekannte γ fehlt eine Gleichung. Diese ergibt sich aus der Kutta-Bedingung (keine Umströmung der Hinterkante des Profils). Aus vielen Möglichkeiten der Modellierung wählen wir hier die Bedingung

$$v_0^{(t)} = -v_{n-1}^{(t)}. \tag{9}$$

Das bedeutet, daß die Tangentialkomponenten des Geschwindigkeitsvektors

$$v_j^{(t)} = \vec{v}(X_j)\cdot\frac{\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j}{\mid \vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j \mid} \tag{10}$$

in den Mittelpunkten der Panels, die die Profilhinterkante bilden, vom Betrag gleich groß und gegenläufig gerichtet sein müssen.

2 Profildaten

Profildaten können z.B. von der sehr umfassenden Profildatensammlung der University of Illinois at Urbana-Champaign (UIUC Airfoil Coordinates Database) bezogen werden. Das Format der Profildateien ist dabei typischerweise, aber nicht zwingend:

n
x_0,y_0
x_1,y_1
$\ldots$
x_n,y_n

Dabei ist $n+1$ die Anzahl der Datenpunkte, die als Koordinatenpaare x_i, y_i gegeben sind. Die Ordnung der Profilpunkte ist im Gegenuhrzeigersinn.

Schreiben Sie eine Routine, die Profildaten einliest. Verwenden Sie diese Routine in einem Programm, das für ein gegebenes Profil folgende Größen bestimmt und ausgibt (auf Panelorientierung achten, z.B. mit “atan2”):

- Profilumfang $\quad U = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$,
- Panel-Mittelpunkte $\quad X_i = \frac{(x_{n-i} + x_{n-i-1})}{2}$, $\quad Y_i = \frac{(y_{n-i} + y_{n-i-1})}{2}$,
- Neigungswinkel der Panels $\quad \theta_i = \arctan\left(\frac{y_{n-i-1} - y_{n-i}}{x_{n-i-1} - x_{n-i}}\right)$,
- Panellänge $\quad l_i = \sqrt{(x_{n-i-1} - x_{n-i})^2 + (y_{n-i-1} - y_{n-i})^2}$.

Die o.a. Formeln gelten für jene Profildaten, bei denen die Angabe der Datenpunkte im Gegenuhrzeigersinn erfolgt, wie z.B. NACA, Eppler,… Output des Programmes soll eine Datei sein, die in Spalten folgende Daten enthält (pro Panel eine Zeile):

$X_i \quad Y_i \quad l_i \quad \theta_i$

Erstellen Sie z.B. mit matlab oder dem Programm gnuplot einige Plots von Profilen sowie der Panel-Parameter l_i, θ_i.

3 Systemmatrix

Schreiben Sie eine Routine, die die Systemmatrix zur Berechnung der Normalgeschwindigkeiten $v_i^{(n)}$ in den Panel-Mittelpunkten (X_i, Y_i) für eine stückweise konstante Quellbelegung der Panels bestimmt. Die Matrixelemente $M_{i,j}$ bestimmen sich folgendermaßen:

$$M_{i,j} = A_{i,j}^{(n)}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{11}$$

$$A_{i,j}^{(n)} = -\sin(\theta_i - \theta_j) I_{i,j} + \cos(\theta_i - \theta_j) J_{i,j} \tag{12}$$

$$I_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \ln\left[\frac{(l_j + 2\xi_{i,j})^2 + 4\eta_{i,j}^2}{(l_j - 2\xi_{i,j})^2 + 4\eta_{i,j}^2}\right] & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \tag{13}$$

$$J_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \arctan\left[\frac{l_j - 2\xi_{i,j}}{2\eta_{i,j}}\right] + \frac{1}{2\pi} \arctan\left[\frac{l_j + 2\xi_{i,j}}{2\eta_{i,j}}\right] & i \neq j \\ \frac{1}{2} & i = j \end{cases} \tag{14}$$

$$\xi_{i,j} = (X_i - X_j)\cos\theta_j + (Y_i - Y_j)\sin\theta_j \tag{15}$$

$$\eta_{i,j} = -(X_i - X_j)\sin\theta_j + (Y_i - Y_j)\cos\theta_j \tag{16}$$

Verwenden Sie diese Routine in einem Programm, das für einen Kreiszylinder mit 8 gleich langen Panels die Werte $M_{i,j}$ in Matrix-Form ausgibt.

4 Lösung des Gleichungssystems

Beim Source-Panel-Verfahren 0-ter Ordnung bestimmen sich die stückweise konstanten Quellstärken q_i aus dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{j=0}^{n-1} M_{i,j} q_j = b_i \tag{17}$$

mit den Inhomogenitäten

$$b_i = -V_\infty \sin(\alpha - \theta_i); \qquad i = 0, 1, \dots, n-1. \tag{18}$$

Dabei ist V_∞ die konstante Anströmgeschwindigkeit und α der Anstellwinkel des Profils.

Unter Verwendung des Programmes aus Aufgabe 3 soll nun ein Programm zur Bestimmung der Quellbelegung einer Profilumströmung entwickelt werden. Zur Lösung des Gleichungssystems soll ein (linearer) Gleichungslöser verwendet werden. Das Programm soll den Vektor der Quellbelegung und die Größe

$$\sum_{i=0}^{n-1} q_i l_i \tag{19}$$

ausgeben.

Wenden Sie das Programm auf einen Kreiszylinder mit 8 gleich großen Panels an.

5 Kreiszylinder

Schreiben Sie unter Zuhilfenahme der bisherigen Ergebnisse eine komplette Implementation eines Source-Panel-Verfahrens. Dazu ist die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit $v_i^{(t)}$ an den Aufpunkten der Panels folgendermaßen zu bestimmen:

$$v_i^{(t)} = \sum_{j=0}^{n-1} A_{i,j}^{(t)} q_j + V_\infty \cos(\alpha - \theta_i) \tag{20}$$

$$A_{i,j}^{(t)} = \cos(\theta_i - \theta_j) I_{i,j} + \sin(\theta_i - \theta_j) J_{i,j} \tag{21}$$

Das Programm soll neben der Geschwindigkeit auch den Druckbeiwert

$$c_{p_i} = 1 - \left(\frac{v_i^{(t)}}{V_\infty} \right)^2 \tag{22}$$

bestimmen und ausgeben.

Wenden Sie das Programm auf Kreiszylinder mit unterschiedlicher Anzahl von Panels an. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Resultat aus der Potentialtheorie

$$c_p(\phi) = 2\cos(2\phi) - 1. \tag{23}$$

6 Wirbelbelegung

Erweitern Sie das Programm aus 5 um eine konstante Wirbelbelegung γ auf allen Panels. Dadurch vergrößert sich die Dimension der Matrix $M_{i,j}$ von $n \times n$ auf $(n+1) \times (n+1)$. Die zusätzlichen Elemente sind

$$M_{i,n} = \sum_{j=0}^{n-1} A_{i,j}^{(t)}; \qquad i = 0, 1, \dots, n-1; \tag{24}$$

$$M_{n,j} = A_{0,j}^{(t)} + A_{n-1,j}^{(t)}; \qquad j = 0, 1, \dots, n-1; \tag{25}$$

$$M_{n,n} = -\sum_{j=0}^{n-1} \left[A_{0,j}^{(n)} + A_{n-1,j}^{(n)} \right]; \tag{26}$$

$$b_n = -V_\infty \left[\cos(\alpha - \theta_0) + \cos(\alpha - \theta_{n-1}) \right]; \tag{27}$$

$$q_n = \gamma. \tag{28}$$

Für die Berechnung von $v_i^{(t)}$ gilt nun

$$v_i^{(t)} = \sum_{j=0}^{n-1} A_{i,j}^{(t)} q_j - \gamma \sum_{j=0}^{n-1} A_{i,j}^{(n)} + V_\infty \cos(\alpha - \theta_i). \tag{29}$$

Zusätzlich zu c_{p_i}, $v_i^{(t)}$ und q_i soll auch $\gamma = q_n$ sowie der Auftriebsbeiwert c_a ausgegeben werden. Dabei kann c_a näherungsweise durch eine der beiden folgenden Formeln bestimmt werden:

$$c_a \approx \frac{2}{V_\infty t} \sum_{i=0}^{n-1} v_i^{(t)} l_i, \tag{30}$$

$$c_a \approx \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{v_i^{(t)}}{V_\infty} \right)^2 \cos(\alpha - \theta_i) l_i\,, \tag{31}$$

dabei bezeichnet t die Profiltiefe.

Bestimmen Sie Lösungen für die Umströmung eines rotierenden Zylinders mit verschiedenen Werten von α. Wenden Sie das Programm außerdem auf einige Profile aus der Profildatenbank (z.B. NACA 0012, verschiedene Panelverteilungen, ...) oder auf Joukowski- bzw. Kármán—Trefftz-Profile (Vergleich mit analytischen Ergebnissen möglich!) an. Versuchen Sie eine experimentelle *Abschätzung der Fehlerordnung* des Hess-Smith-Verfahrens z.B. durch Variation der Panelanzahl.

Modifizieren Sie das Programm derart, daß auch Geschwindigkeitsvektoren an beliebigen Punkten (x, y) im Strömungsfeld bestimmt werden können. Dazu sind folgende Änderungen bei den o.a. Gleichungen vorzunehmen: In den Gleichungen (15) und (16) sind die Koordinaten X_i und Y_i durch x und y zu ersetzen. Weiters ist in den Gleichungen (12), (21) und (29) für θ_i der Wert 0 einzusetzen. Die x-Komponente des Geschwindigkeitsvektors berechnet sich nach Gleichung (29), für die y-Komponente gilt

$$v_y(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1} A_{i,j}^{(n)} q_j + \gamma \sum_{j=0}^{n-1} A_{i,j}^{(t)} + V_\infty \sin\alpha. \tag{32}$$

Literatur

[1] Cebeci, T.: An Engineering Approach to the Calculation of Aerodynamic Flows. Springer, Berlin, (1999).

[2] Hess, J.L., Smith, A.M.O.: Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies. *in:* Progress in Aerospace Sciences, Vol.8, Pergamon Press, N.Y., (1966).