



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

BACHELORARBEIT

Implementation eines Hess-Smith Panelverfahrens in Python

ausgeführt am Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Braun

durch

Leon Schwarzäugl

Gumpendorfer Straße 137,
1060 Wien

28. Juli 2022

Unterschrift StudentIn

Zusammenfassung

Im Zuge der vorliegenden Arbeit wurde ein Panelverfahrens nach Hess-Smith zur Berechnung von ebenen Potentialströmungen um geschlossene Körper implementiert und auf verschiedene Probleme angewandt. Dazu wurde die Programmiersprache Python verwendet.

Zunächst wurde eine Klasse für Panele und ihre Eigenschaften entworfen. Im Zuge dessen wurde eine Routine entwickelt, die jene Parameter in eine .csv-Datei ausgibt. Danach wurde eine Klasse für Tragflächenprofile sowie Methoden zur Berechnung der ihnen zugehörigen Systemparameter implementiert. Mit den somit berechneten Systemparametern kann das sich ergebende lineare Gleichungssystem für die Quellstärken gelöst werden; im Anschluss wurden aus den ermittelten Quellstärken die Tangentialgeschwindigkeiten und Druckbeiwerte an den jeweiligen Paneelen, sowie unter Hinzunahme einer Wirbelbewegung der Auftriebsbeiwert für das Gesamtsystem ermittelt. Abschließend wurde eine Routine für die Ermittlung der Tangentialgeschwindigkeiten an beliebigen Punkten auf der Oberfläche des Profils entwickelt.

Die fertige Implementation wurde zunächst verwendet, um für die Panele verschiedener Tragflächenprofile Graphen zu Geometrien und Parametern zu gewinnen. Anschließend wurde anhand eines Kreiszylinders mit 8 Paneelen gleicher Seitenlänge der Vektor der Quellbewegung, sowie die Tangentialgeschwindigkeiten und Druckbeiwerte an den Panelmittelpunkten ermittelt sowie die Ergebnisse für den Druckbeiwert mit dem theoretischen Ergebnis aus der Potentialtheorie verglichen. Dabei wurde eine gute Übereinstimmung ermittelt. Abschließend wurde das oben genannte System um eine Wirbelbewegung erweitert und der Auftriebsbeiwert unter verschiedenen Anstellwinkeln des Profils bei konstantem Angriffswinkel berechnet.

Letztlich wurde die Implementierung auf Joukowski-Profilen angewandt und eine experimentelle Abschätzung der Fehlerordnung des Hess-Smith-Verfahrens durchgeführt.

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	1
1.1	Zielsetzung	1
1.2	Methodik	1
2	Grundlagen	3
2.1	Hess-Smith-Panelverfahren	3
2.1.1	Berücksichtigung einer Wirbelbewegung	5
2.1.2	Berechnung der Systemmatrix	7
3	Bericht der Arbeit	9
3.1	Vorbereitung der Daten	9
3.2	Untersuchungen am Kreiszylinder	11
3.2.1	Achtseitiger Kreiszylinder	12
3.2.2	Untersuchungen an variierenden Kreiszylindern	12
3.3	Untersuchungen an ausgewählten Profilen	12
3.3.1	NACA0012-Profil	12
3.3.2	Joukowsky 12%-Profil	12
3.3.3	Fehlerabschätzung des Hess-Smith-Verfahrens	12
	Literatur	i
	Anhang A: Lednicer- und Selig-Format	ii
	Anhang B: Beispielausgabe der Methode <code>.write_panels()</code>	iii
	Anhang C: Codeausschnitte	iv

1 Aufgabenstellung

Die Berechnung der aerodynamischen Eigenschaften eines Tragflächenprofils.

1.1 Zielsetzung

Es sollen folgende Punkte implementiert werden:

- Eine Klasse für Panele und die sie definierenden Eigenschaften: Mittelpunkte auf der x - und y -Achse, Neigungswinkel θ_i und Länge l_i . Jedes Panel enthält ebenfalls Möglichkeiten zur Speicherung der zugehörigen Quellstärken q_i , Tangentialgeschwindigkeiten $v_i^{(t)}$ und Druckbeiwerten c_{p_i}
- Eine Klasse für Trägerprofile, ihre Umfänge U und Tiefe t sowie mathematisch relevante Systemparameter ξ_{ij} , η_{ij} , I_{ij} , J_{ij} , $A_{ij}^{(n)}$, $A_{ij}^{(t)}$, M_{ij} .
- Eine Methode zur Lösung des linearen Gleichungssystems $M\vec{q} = \vec{b}$ für den Vektor der Quellbewegung unter einer konstanten Anströmgeschwindigkeit V_∞ und einem Anstellwinkel des Profils α , sowie der Berechnung der daraus resultierenden Tangentialgeschwindigkeiten und Druckbeiwerte.

Weiters soll mittels der Implementation eine Untersuchung der Abweichung der ermittelten Druckbeiwerte von den aus der Potentialtheorie berechneten Werten für einen achtseitigen Kreiszylinder erfolgen.

1.2 Methodik

Zur Lösung der Aufgabenstellung wurde die Programmiersprache Python verwendet. Für die Lösung der linearen Gleichungssysteme wird `linalg.solve`¹ aus der Python-Bibliothek NumPy verwendet.

Sämtliche Graphen wurden mithilfe der Python-Bibliothek Matplotlib erstellt. [5]

¹`linalg.solve` verwendet die LAPACK routine `_gesv` als Solver [3]

2 Grundlagen

2.1 Hess-Smith-Panelverfahren

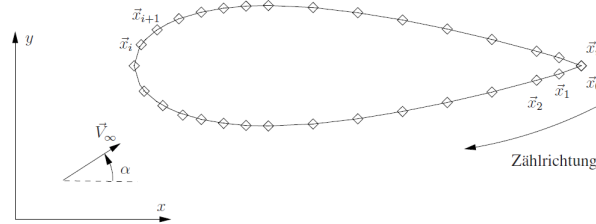


Abbildung 2.1: Zur Definition der Zählrichtung der Panels sowie der Anströmgeschwindigkeit und deren Winkel

Das Hess-Smith-Panelverfahren ist ein Verfahren zur Berechnung von ebenen Potentialströmungen um geschlossene Körper mit Auftrieb. Ein kontinuierlicher zweidimensionaler Körper mit der Umfangkurve \mathcal{C} wird dabei zunächst durch $n+1$ diskrete Datenpunkte $\vec{x}_i = (x_i, y_i)$ dargestellt. Die Zählrichtung dieser Punkte sei als im Uhrzeigersinn festgelegt (siehe Abb. 2.1). Für das Profil gilt somit die Periodizität $\vec{x}_n = \vec{x}_0$.

Die Kontur des Profils wird nun durch eine endliche Anzahl Verbindungsgeraden zwischen zwei benachbarten Punkten \vec{x}_i, \vec{x}_{i+1} , den Panels \mathcal{C}_i (Abb. 2.2) angenähert. Dabei wird jedes Panel durch die folgenden Parameter charakterisiert:

- Den Mittelpunkten auf beiden Achsen:

$$X_i = \frac{x_{n-i} + x_{n-i-1}}{2}, \quad Y_i = \frac{y_{n-i} + y_{n-i-1}}{2}, \quad (2.1)$$

- seinem Neigungswinkel:

$$\theta_i = \left(\frac{y_{n-i-1} - y_{n-i}}{x_{n-i-1} - x_{n-i}} \right), \quad (2.2)$$

- und seiner Länge:

$$l_i = \sqrt{(x_{n-i-1} - x_{n-i})^2 + (y_{n-i-1} - y_{n-i})^2}. \quad (2.3)$$

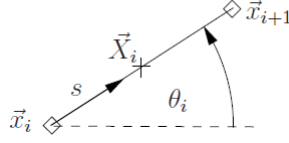


Abbildung 2.2: Zur Definition eines Panels

Im Hess-Smith-Panelverfahren sei nun jedes dieser Panels mit einer vorerst unbestimmten, konstanten Quelldichte q_i behaftet, welche an einem Punkt $\vec{r}_i = \vec{x} - \hat{x}_i(s)$ zum Geschwindigkeitspotential den Beitrag

$$\phi_i^{(q)} = \frac{q_i}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_i} ds \ln r_i \quad (2.4)$$

liefert. s ist dabei die Koordinate der Bogenlänge, welche das gesamte Profil parametrisiert.

Ebenso liefert die Profilanströmung mit der konstanten Geschwindigkeit V_∞ unter dem Winkel α ein Potential

$$\phi_\infty = V_\infty (\cos \alpha x + \sin \alpha y). \quad (2.5)$$

Aus der Summe über alle Panelbeiträge aus (2.4) und (2.5) ergibt sich das Gesamtgeschwindigkeitspotential zu

$$\phi(\vec{x}) = V_\infty (\cos \alpha x + \sin \alpha y) + \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i^{(q)}. \quad (2.6)$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit im Punkte \vec{x}

$$\vec{v}(\vec{x}) = \nabla \phi(\vec{x}). \quad (2.7)$$

Auf der Oberfläche des Profils muss die Strömung die Gleitbedingung erfüllen; damit lassen sich n Gleichungen aufstellen, um diese Bedingung zu modellieren. Wir verlangen, dass die Normalkomponente des Geschwindigkeitsvektors,

$$v_j^{(n)} = \vec{v}(\vec{X}_j) \cdot \vec{n}_j, \quad (2.8)$$

verschwindet. Dabei ist \vec{n}_j der Normalvektor auf das Panel \mathcal{C}_j .

Wir erhalten in 0. Ordnung ein System von n Gleichungen

$$\sum_{j=0}^{n-1} M_{ij}^{(q)} q_j = b_i, \quad (2.9)$$

mit

$$M_{ij}^{(q)} = \frac{1}{q_j} \nabla \phi_j^{(q)}(\vec{X}) \cdot \vec{n}_i, \quad (2.10)$$

$$b_i = -V_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \cdot \vec{n}_i, \quad (2.11)$$

aus dessen Lösung wir die Quellstärken q_i für jedes Panel ermitteln können. Damit kann nun der Tangentialkomponenten des Geschwindigkeitsvektors

$$v_j^{(t)} = \vec{v}(X_j) \cdot \frac{\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j}{|\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j|}, \quad (2.12)$$

bestimmt werden.

Aus der Bernoulli-Gleichung

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = p + \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (2.13)$$

definieren wir den Druckbeiwert als das Verhältnis zwischen der Druckdifferenz zwischen der Profilanströmung und dem dynamischen Druck

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}. \quad (2.14)$$

Daraus können wir den Druckbeiwert

$$c_{p_j} = 1 - \left(\frac{v_j^{(t)}}{V_\infty} \right)^2 \quad (2.15)$$

am Mittelpunkt des Panels \mathcal{C}_j bestimmen.

2.1.1 Berücksichtigung einer Wirbelbewegung

Wollen wir den Auftrieb berücksichtigen, so reicht die reine Quellbelegung des Profils noch nicht aus.

Im Hess-Smith Verfahren nehmen wir für das gesamte Profil eine einzige konstante Wirbelbelegung γ für alle Panels an. Damit wird das Potential (2.6) erweitert um Beiträge

$$\phi_i^{(w)} = \frac{\gamma}{2\pi} \int ds \theta_i, \quad (2.16)$$

zu

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= V_\infty (\cos \alpha x + \sin \alpha y) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\phi_i^{(q)} + \phi_i^{(w)} \right) \\ &= V_\infty (\cos \alpha x + \sin \alpha y) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\mathcal{C}_i} \left(\frac{q_i}{2\pi} \ln r_i - \frac{\gamma}{2\pi} \theta_i \right) ds \end{aligned} \quad (2.17)$$

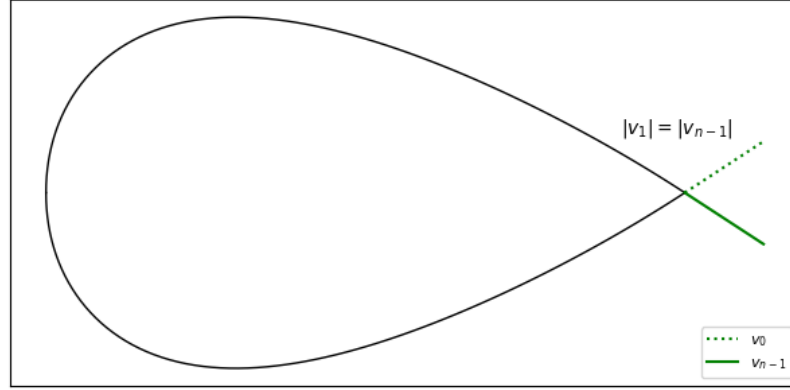


Abbildung 2.3: Zur Kutta-Bedingung am Beispiel eines NACA0012-Profiles - am Punkt der Hinterkante sind die Tangentialgeschwindigkeiten genau entgegengerichtet

Die Gleitbedingung bleibt erhalten, allerdings muss das Gleichungssystem aber entsprechend dem hinzugekommenen Geschwindigkeitsbeitrag erweitert werden. Für die neue Unbekannte γ fehlt also eine Gleichung. Diese ergibt sich aus der Kutta-Bedingung, welche besagt, dass es an der Hinterkante des Profils keine Umströmung gibt.

Zur Modellierung der Kutta-Bedingung wählen wir

$$v_0^{(t)} = -v_n^{(t)}. \quad (2.18)$$

Daraus folgt, dass die Tangentialkomponenten des Geschwindigkeitsvektors in den Mittelpunkten der Panels, welche die Profilhinterkante bilden, vom Betrag gleich groß und gegenläufig gerichtet sein muss (siehe Abb. 2.3).

Nach Lösung des erhaltenen linearen Gleichungssystems mit $q_n = \gamma$ können wir nun den Auftriebsbeiwert c_a ermitteln. Dieser ergibt sich mit t , der Profiltiefe und l_i , der Länge des Panels \mathcal{C}_i , approximiert in folgender Form:

$$c_a \approx \frac{2}{V_{\infty t}} \sum_{i=0}^{n-1} v_i^{(t)} l_i. \quad (2.19)$$

Für eine analytische Berechnung des Auftriebsbeiwerts müssen wir nun noch die Systemmatrix bestimmen, welche das lineare Gleichungssystem ((2.9)) definiert. [4] [2] [1]

2.1.2 Berechnung der Systemmatrix

Die Systemmatrix zur Berechnung der Normalgeschwindigkeiten $v_i^{(n)}$ in den Panelmittelpunkten für eine stückweise konstante Quellenbewegung der Panels ergibt sich aus der Gleitbedingung. Wenden wir diese direkt auf 2.6 an, muss ein kompliziertes Integral gelöst werden. Dieses kann theoretisch direkt mit Computermethoden gelöst werden, für den Berechnungsaufwand ist es allerdings gerade bei Profilen mit einer hohen Anzahl an Panels günstiger, dieses analytisch zu berechnen.

Für die Systemmatrix und ihre Parameter gelten:

$$M_{ij} = A_{ij}^{(n)}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1; \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.20)$$

mit der Einflussmatrix der Quellbelegung

$$A_{ij}^{(n)} = -\sin(\theta_i - \theta_j)I_{ij} + \cos(\theta_i - \theta_j)J_{ij} \quad (2.21)$$

sowie das geometrische Integral der Normalgeschwindigkeit

$$I_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \ln \left[\frac{(l_j + 2\xi_{ij})^2 + 4\eta_{ij}^2}{(l_j - 2\xi_{ij})^2 + 4\eta_{ij}^2} \right] & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \quad (2.22)$$

und dem geometrischen Integral der Tangentialgeschwindigkeit

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \arctan \left[\frac{l_j - 2\xi_{ij}}{2\eta_{ij}} \right] + \frac{1}{2\pi} \arctan \left[\frac{l_j + 2\xi_{ij}}{2\eta_{ij}} \right] & i \neq j \\ \frac{1}{2} & i = j \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\xi_{ij} = (X_i - X_j) \cos \theta_j + (Y_i - Y_j) \sin \theta_j \quad (2.24)$$

$$\eta_{ij} = -(X_i - X_j) \sin \theta_j + (Y_i - Y_j) \cos \theta_j \quad (2.25)$$

Mit der Systemmatrix und den Inhomogenitäten b_i können wir nun das lineare Gleichungssystem aus (2.9) berechnen.

Für die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit erhalten wir dann den Ausdruck

$$v_i^{(t)} = \sum_{j=0}^{n-1} A_{ij}^{(t)} q_j + V_\infty \cos(\alpha - \theta_i), \quad (2.26)$$

mit der Einflussmatrix der Wirbelbelegung

$$A_{ij}^{(t)} = \cos(\theta_i - \theta_j)I_{ij} + \sin(\theta_i - \theta_j)J_{ij}. \quad (2.27)$$

Diese Systemmatrix berücksichtigt allerdings noch keine Wirbelbelegungen. Im

Falle einer konstanten Wirbelbelegung γ auf allen Panels erweitert sich die Dimension von M_{ij} von $n \times n$ auf $(n+1) \times (n+1)$. Dadurch müssen folgende zusätzliche Elemente bestimmt werden:

$$M_{in} = \sum_{j=0}^{n-1} A_{ij}^{(t)}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1; \quad (2.28)$$

$$M_{nj} = A_{0j}^{(t)} + A_{n-1,j}^{(t)}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1; \quad (2.29)$$

$$M_{n,n} = - \sum_{j=0}^{n-1} \left[A_{0,j}^{(n)} + A_{n-1,j}^{(n)} \right]; \quad (2.30)$$

$$b_n = -V_\infty [\cos(\alpha - \theta_0) + \cos(\alpha - \theta_{n-1})]; \quad (2.31)$$

Gleichung (2.26) erweitert sich damit zu

$$v_i^{(t)} = \sum_{j=0}^{n-1} A_{ij}^{(t)} q_j - \gamma \sum_{j=0}^{n-1} A_{i,j}^{(n)} + V_\infty \cos(\alpha - \theta_i). \quad (2.32)$$

3 Bericht der Arbeit

Im Folgenden werden die wesentlichen Erkenntnisse der Arbeit präsentiert.

3.1 Vorbereitung der Daten

Die Daten der Profile wurden der UIUC Airfoil Data Site¹ entnommen. Die Daten lagen dabei überwiegend im Selig- oder Lednicer-Format vor.²

Im Lednicer-Format wird in der ersten Zeile die Bezeichnung des Profils angegeben. In der zweiten Zeile wird die Anzahl der Koordinatenpaare der Ober- und Unterseite angegeben. Ab der dritten Zeile werden die Koordinaten der Panelenden (x_i, y_i) von $x = 0$ bis $x = 1$ für die Oberseite des Profils angegeben. Danach folgt eine Leerzeile. Danach werden die Koordinaten der Panelenden (x_i, y_i) von $x = 0$ bis $x = 1$ für die Unterseite des Profils angegeben.

Im Selig-Format wird in der ersten Zeile die Bezeichnung des Profils angegeben. Ab der zweiten Zeile werden die Koordinaten der Panelenden (x_i, y_i) im Gegenurszeigersinn, beginnend bei $x = 1$ angegeben.

Es wurde eine Routine geschrieben, welche Daten im Lednicer-Format in das Selig-Format überführt. Dies wurde bewerkstelligt, indem die Koordinatenpaare der Oberseite invertiert wurden. Anschließend wurden aus den Daten die Header-Zeilen entfernt.

Unter Verwendung der Methode `.write_file()` wurde für sämtliche Profile eine .csv-Datei mit den Werten X_i, Y_i, θ_i, l_i pro Panel erstellt (eine Beispieldatei ist in Anhang A: Lednicer- und Selig-Format gezeigt). Ebenso wurde für jedes in der UIUC-Datenbank befindliche Trägerprofil ein Graph erzeugt, welcher zum einen die Geometrie des Profils, sowie auch die Neigungswinkel und Längen der einzelnen Panels darstellt. Zur einfacheren Betrachtung sind die Graphen der Neigungswinkel und Panellängen in die beiden Seiten des Profils aufgeteilt.

Ein solcher Graph ist in Abbildung 3.1 an einem NACA-0012-Profil gezeigt. Die Symmetrie des Profils spiegelt sich in der gewählten Darstellung der Neigungswinkel und Panellängen gut wieder.

¹https://m-selig.ae.illinois.edu/ads/coord_database.html

²Eine Gegenüberstellung der beiden Formate ist in Anhang A: Lednicer- und Selig-Format zu finden.

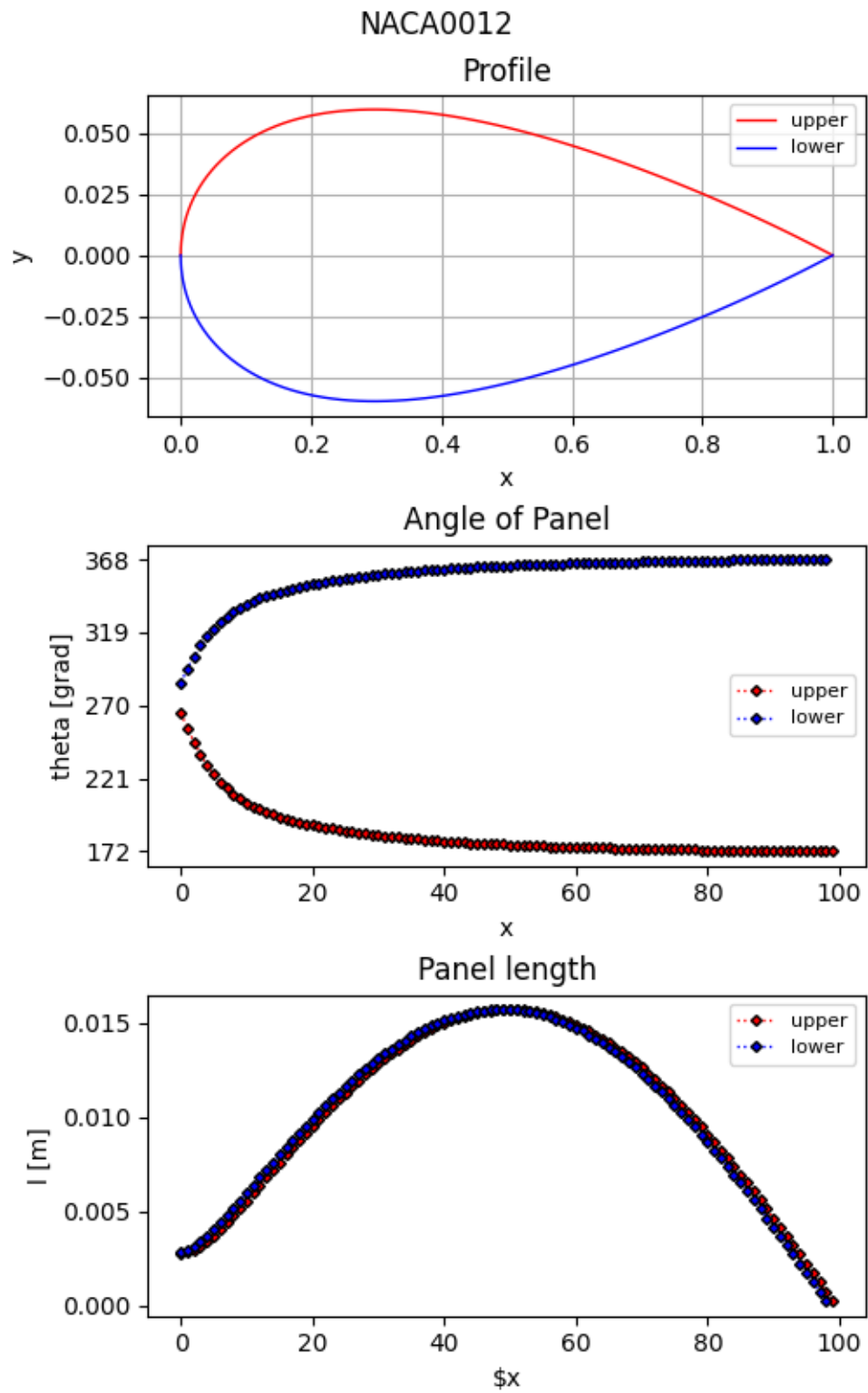


Abbildung 3.1: NACA-0012-Profil

X_i	Y_i	θ_i	l_i
0.8	-0.35	67.5	0.77
0.35	-0.85	22.5	0.77
-0.35	-0.85	337.5	0.77
-0.85	-0.35	292.5	0.77
-0.85	0.35	247.5	0.77
-0.35	0.85	202.5	0.77
0.35	0.85	157.5	0.77
0.85	0.35	112.5	0.77

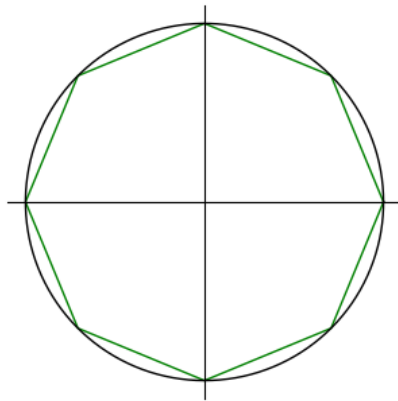


Abbildung 3.2: Achtseitiger Cylinder als Approximation eines Kreiszylinders sowie zugehörige Panelparameter

3.2 Untersuchungen am Kreiszylinder

Als nächstes wurden Untersuchung an Kreiszylindern vorgenommen, da bei diesen die Aufteilung in Panele relativ leicht zu implementieren ist. Zur Generierung eines Kreiszylinders mit n gleich großen Seiten wurde die Funktion `make_cylinder(r, n)` verwendet (siehe Anhang C: Codeausschnitte).

3.2.1 Achtseitiger Kreiszylinder

Berechnung der Systemmatrix

Für den in 3.2 gezeigten Kreiszylinder wurde die Systemmatrix zu folgenden Werten berechnet:

$$M_{i,j} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.056 & 0.064 & 0.065 & 0.065 & 0.065 & 0.064 & 0.056 \\ 0.056 & 0.5 & 0.056 & 0.064 & 0.065 & 0.065 & 0.065 & 0.064 \\ 0.064 & 0.056 & 0.5 & 0.056 & 0.064 & 0.065 & 0.065 & 0.065 \\ 0.065 & 0.064 & 0.056 & 0.5 & 0.056 & 0.064 & 0.065 & 0.065 \\ 0.065 & 0.065 & 0.064 & 0.056 & 0.5 & 0.056 & 0.064 & 0.065 \\ 0.065 & 0.065 & 0.065 & 0.064 & 0.056 & 0.5 & 0.056 & 0.064 \\ 0.064 & 0.065 & 0.065 & 0.065 & 0.064 & 0.056 & 0.5 & 0.056 \\ 0.056 & 0.064 & 0.065 & 0.065 & 0.065 & 0.064 & 0.056 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Lösung des wirbellosen Gleichungssystems

3.2.2 Untersuchungen an variierenden Kreiszylindern

Variation der Panelanzahl

Rotation des Zylinders

3.3 Untersuchungen an ausgewählten Profilen

3.3.1 NACA0012-Profil

3.3.2 Joukowsky 12%-Profil

3.3.3 Fehlerabschätzung des Hess-Smith-Verfahrens

Literatur

- [1] J.J. Alonso. *Hess-Smith Panel Method*. 2005. URL: http://aero-comlab.stanford.edu/aa200b/lect_notes/lect3-4.pdf (besucht am 28.07.2022).
- [2] T. Cebeci. *An Engineering Approach to the Calculation of Aerodynamic Flows*. 1. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 1999. ISBN: 978-3-540-66181-8.
- [3] Charles R. Harris u. a. „Array programming with NumPy“. In: *Nature* 585.7825 (Sep. 2020), S. 357–362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2. URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [4] J.L. Hess und A.M.O. Smith. „Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies“. In: *Progress in Aerospace Sciences* 8 (1966), S. 117–137.
- [5] J. D. Hunter. „Matplotlib: A 2D graphics environment“. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.

Anhang A: Lednicer- und Selig-Format

Es folgt eine Gegenüberstellung des Selig-Formats (links) mit dem Lednicer-Format (rechts) am Beispiel des NACA M13-Profiles.

NACA M13 AIRFOIL	NACA M13 AIRFOIL
17 17	17 17
1.00000000 0.00440000	0.000000 0.000000
0.95000000 0.01056000	0.012500 0.012780
0.90000000 0.01642000	0.025000 0.019370
0.80000000 0.02924000	0.050000 0.029640
0.70000000 0.04186000	0.075000 0.037910
0.60000000 0.05378000	0.100000 0.044680
0.50000000 0.06360000	0.150000 0.055420
0.40000000 0.06942000	0.200000 0.062760
0.30000000 0.07014000	0.300000 0.070140
0.20000000 0.06276000	0.400000 0.069420
0.15000000 0.05542000	0.500000 0.063600
0.10000000 0.04468000	0.600000 0.053780
0.07500000 0.03791000	0.700000 0.041860
0.05000000 0.02964000	0.800000 0.029240
0.02500000 0.01937000	0.900000 0.016420
0.01250000 0.01278000	0.950000 0.010560
0.00000000 0.00000000	1.000000 0.004400
0.00000000 0.00000000	
0.01250000 -0.00812000	0.000000 0.000000
0.02500000 -0.00813000	0.012500 -0.008120
0.05000000 -0.00791000	0.025000 -0.008130
0.07500000 -0.00439000	0.050000 -0.007910
0.10000000 -0.00222000	0.075000 -0.004390
0.15000000 0.00192000	0.100000 -0.002220
0.20000000 0.00506000	0.150000 0.001920
0.30000000 0.00804000	0.200000 0.005060
0.40000000 0.00772000	0.300000 0.008040
0.50000000 0.00550000	0.400000 0.007720
0.60000000 0.00228000	0.500000 0.005500
0.70000000 -0.00064000	0.600000 0.002280
0.80000000 -0.00226000	0.700000 -0.000640
0.90000000 -0.00228000	0.800000 -0.002260
0.95000000 -0.00144000	0.900000 -0.002280
1.00000000 0.00000000	0.950000 -0.001440
	1.000000 0.000000

Anhang B: Beispielausgabe der Methode `.write_panels()`

Hier ist die Ausgabe der ersten 30 Zeilen der AirfoilProfile-Methode `.write_panels()` gezeigt, am Beispiel des NASA: HSNLF(1)-0213 Profils gezeigt.

```
X_i,Y_i,theta_i,l_i
0.9950043,-0.0009728,0.06055800732379477,0.010009748628212382
0.9850132,-0.0016043,0.06568588453475652,0.010012392145736168
0.97752025,-0.0021092000000000003,0.07047228200753602,0.005007529407801845
0.96253695000000001,-0.00330425,0.08141266954462605,0.025054484997700546
0.937568,-0.00552425,0.09593394112296426,0.02508172911124744
0.92258845,-0.0069828,0.10270780128934252,0.005019149972854041
0.910107,-0.0083076,0.10650475541673622,0.020084001420035736
0.8876414,-0.010771800000000002,0.11144687148830609,0.025116819156891672
0.8626817,-0.01365475,0.11853981264059243,0.025134786388787998
0.8377253,-0.01677495,0.13021388185551733,0.025167464110831598
0.82275295,-0.018755849999999998,0.13816384340639531,0.00503831234641125
0.81027805,-0.02055885,0.1448782150472314,0.020170819682402617
0.79032025,-0.0235841,0.15598759087809566,0.02020137326445906
0.77784795,-0.02556705,0.16438466111254837,0.005056667726873056
0.76288615,-0.0283095,0.184653165616612,0.02536632781405301
0.73795785,-0.03345505,0.22232106375561403,0.025550337335150823
0.7130314,-0.0387352,0.19509280338564264,0.025413502189190737
0.6905846,-0.0425474,0.13433154712117715,0.02014367279519793
0.6781074,-0.04417745,0.11216297598033555,0.005023767722536545
0.6631284,-0.0456803,0.09755918696978584,0.025085082682741986
0.63815875,-0.0478474,0.0755680809368733,0.02504497608084302
0.61318205,-0.0495071,0.05712775250964519,0.025020717455141107
0.58819985,-0.05077395,0.04420261223196785,0.025008928130969513
0.56321345,-0.05173975,0.03306342585001139,0.025001964705598602
0.53822330000000001,-0.05243635,0.02267137098916197,0.024998424208137613
0.51322960000000001,-0.0528728,0.012249641308583322,0.024997275443535843
0.48823320000000003,-0.0531112,0.006824603815373697,0.0249979821409649
0.4632347,-0.053202650000000004,0.0004920078324255504,0.02499960302584824
0.43823365000000003,-0.053107600000000005,6.275090293523316,0.025003319219855574
```

Anhang C: Codeausschnitte

Hier sind ausgewählte Codeausschnitte gezeigt, welche zur Lösung der Problemstellungen geschrieben wurden.

Die Klasse Panel

Die Klasse Panel modelliert die Panels \mathcal{C}_i eines gegebenen Profils. Gespeichert werden neben den charakteristischen Parametern X_i, Y_i, θ_i, l_i auch der Normalwinkel des Panels δ_i , welcher aus dem Profil herauszeigt. Ebenso wird die Panelposition als Ober- oder Unterseite bestimmt (für einige besondere Profile ist auch ein Wert "vertical" für komplett senkrechte Panele möglich). Ebenso gespeichert wird die Quellbelegung q_i , die Tangentialgeschwindigkeit $v_i^{(t)}$ unter gegebenen Anströmwinkel α und -geschwindigkeit V_∞ , und der resultierende Druckbeiwert c_{p_i} .

class Panel:

```
def __init__(self, xa, ya, xb, yb):
    self.xa, self.ya = xa, ya # panel starting-point
    self.xb, self.yb = xb, yb # panel ending-point

    self.xm = (xa + xb) / 2 # center of panel on x axis
    self.ym = (ya + yb) / 2 # center of panel on y axis
    # panel length
    self.length = np.sqrt((xb - xa) ** 2 + (yb - ya) ** 2)

    self.theta = atan2(yb - ya, xb - xa) # angle of panel
    # if angle is negative, add 2pi to only have positive angles for
    # plotting
    if self.theta < 0:
        self.theta += 2 * np.pi

    # normal angle of panel
    self.delta = self.theta - np.pi / 2
    if self.delta < 0:
        self.delta += 2 * np.pi
    if self.delta > 2 * np.pi:
        self.delta -= 2 * np.pi

    # panel location (used for plotting)
    if np.pi / 2 < self.theta < 3 * np.pi / 2:
        self.loc = 'upper' # upper surface
```

```

elif self.theta == np.pi / 2 or self.theta == 3 * np.pi / 2:
    self.loc = 'vertical'
else:
    self.loc = 'lower' # lower surface

self.q = None # source strength
self.vt = None # tangential velocity
self.cp = None # pressure coefficient

```

Die Klasse AirfoilProfile

Die Klasse AirfoilProfile modelliert ein gegebenes Profil. Sie speichert neben wählbaren Namen und der ihr zugewiesenen Panele auch die Profiltiefe t und sämtliche Systemparameter ξ_{ij} , η_{ij} , I_{ij} , J_{ij} , $A_{ij}^{(n)}$, $A_{ij}^{(t)}$, M_{ij} .

Durch einen Aufruf der Methode `.solve(V, a)` mit gegebenen α und V_∞ werden für alle zugeordneten Panele die Quellstärken, Tangentialgeschwindigkeiten und Druckbeiwerte berechnet (und in den jeweiligen Klassenvariablen abgespeichert). Dabei wird ebenfalls die Genauigkeit der Approximation $\sum q_i l_i$ berechnet. Die Methode kann mit dem Schlüsselwortargument `vortex=True` aufgerufen werden, wodurch ebenfalls der Auftriebsbeiwert c_a , sowie die Wirbelbewegung γ berechnet werden. Die Methode `.write_panels()` erzeugt eine `.csv`-Datei, welche für jedes Panel die Werte X_i, Y_i, θ_i, l_i in eine Zeile schreibt (siehe Anhang A: Lednicer- und Selig-Format).

Die Methode `.compute_free_vt(x, y, V, a)` ermöglicht die Berechnung der Tangentialgeschwindigkeiten an jedem Punkt (x_i, y_i) des Profils. Diese werden als Tupel von der Methode zurückgegeben.

```

class AirfoilProfile :
    def __init__(self, panels, name, vortex=True):
        self.panels = panels
        self.name = name
        self.len = len(self.panels)
        self.vortex = vortex

        self.U = sum([panel.length for panel in self.panels])
        self.xi = compute_xi(self.len, self.panels)
        self.eta = compute_eta(self.len, self.panels)
        self.I = compute_I(self.len, self.xi, self.eta, self.panels)
        self.J = compute_J(self.len, self.xi, self.eta, self.panels)
        self.An = compute_An(self.len, self.I, self.J, self.panels)
        self.At = compute_At(self.len, self.I, self.J, self.panels)

```

```

self.M = system_matrix(self.An, self.At, self.vortex)

self.x = [panel.xa for panel in self.panels]
self.y = [panel.ya for panel in self.panels]
self.t = abs(max(self.x) - min(self.x))
self.coords = [(panel.xa, panel.ya, panel.xb, panel.yb) for panel in
                self.panels]
self.lower = [panel for panel in self.panels if panel.loc == "lower"]
self.upper = [panel for panel in self.panels if panel.loc == "upper"]

self.ca = None
self.accuracy = None
self.gamma = None

def solve( self , V=1, a=np.radians(4.0)):
    b = compute_inhomogeneity(self.panels, self.vortex, V, a)
    qs = np.linalg.solve( self.M, b)

    for i, panel in enumerate(self.panels):
        panel.q = qs[i]
    if self.vortex:
        self.gamma = qs[-1]

    if self.vortex:
        vt = []
        for i in range(self.len):
            vt.append(
                sum([self.At[i][j] * self.panels[j].q for j in range(self.
                    len)]) - self.gamma * sum(
                    [ self.An[i][j] for j in range(self.len)]) + V * np.cos
                    (
                        a - self.panels[i].theta))
        else:
            vt = []
            for i in range(self.len):
                vt.append(
                    sum([self.At[i][j] * self.panels[j].q for j in range(self.
                        len)]) + V * np.cos(
                            a - self.panels[i].theta))
    for i, panel in enumerate(self.panels):

```



```

    panel.vt = vt[i]

    for panel in self.panels:
        panel.cp = 1 - (panel.vt / V) ** 2

    self.ca = - 2 / (V * self.t) * sum([panel.vt * panel.length for panel
        in self.panels])
    self.accuracy = sum([panel.q * panel.length for panel in self.panels])

def write_panels(self):
    header = ["X_i", "Y_i", "theta_i", "l_i"]
    with open("data/vals/" + self.name + "_vals.csv", "w+", encoding='
        UTF8', newline="") as file:
        writer = csv.writer(file)
        writer.writerow(header)
        #file.write(f"Circumference: {self.U} \n")
        #file.write(f"X_i, Y_i, theta_i, l_i\n")
        for panel in self.panels:
            #file.write(f"{panel.xm}, {panel.ym}, {panel.theta}, {panel.
                length} \n")
            writer.writerow([panel.xm, panel.ym, panel.theta, panel.length
                ])

def compute_free_vt(self, x, y, V=1, a=np.radians(4.0)):
    eta = compute_eta_free(len(x), self.len, self.panels, x, y)
    xi = compute_xi_free(len(x), self.len, self.panels, x, y)
    I = compute_I_free(len(x), self.len, xi, eta, self.panels)
    J = compute_J_free(len(x), self.len, xi, eta, self.panels)
    An = compute_An_free(len(x), self.len, I, J, self.panels)
    At = compute_At_free(len(x), self.len, I, J, self.panels)

    vtx = np.empty(len(x))
    vty = np.empty(len(x))
    for i in range(len(x)):
        vtx[i] = sum([At[i][j] * self.panels[j].q for j in range(self.len)
            ]) - self.gamma * sum(
            [An[i][j] for j in range(self.len)]) + V * np.cos(a)

        vty[i] = sum([An[i][j] * self.panels[j].q for j in range(self.len)
            ]) + self.gamma * sum(

```

```
[At[i][j] for j in range(self.len)]) + V * np.sin(a)
```

```
return vtx, vty
```

make_cylinder(r,n)

Diese Funktion wurde verwendet, um die x - und y -Koordinaten eines Kreiszylinder mit Radius r und n gleich langen Panels zu generieren.

```
def cylinder(r=1, n=8):
    # generate a cylinder with n equidistant panels
    a = np.linspace(0, 360, num=n+1, endpoint=True) / 180 * np.pi

    x = r * np.cos(a)
    y = r * np.sin(a)

    return x, y
```