# Sur le nombre de magmas de cardinal $n$

Matteo Wei

Juillet 2023

## 1 La formule de Cauchy-Frobenius-Burnside

**Définition.** Soit $G$ un groupe de neutre $e$ et $X$ un ensemble. Une *action de $G$ sur $X$* est une application $(g,x) \in G \times X \mapsto g.x \in X$ telle que :
- $\forall x \in X, e.x = x$.
- $\forall (g,h,x) \in G \times G \times X, g.(h.x) = (gh).x$.

On fixe pour la suite de cette partie $G$ un groupe fini, $X$ un ensemble fini, et $(g,x) \in G \times X \mapsto g.x \in X$ une action de $G$ sur $X$.

**Définition.** On note :
- Pour $x \in X$, $\omega_G(x) = \{g.x \mid g \in G\}$ l'*orbite* de $x$ sous l'action de $G$. Les orbites sous l'action de $G$ forment une partition de $X$.
- Pour $x \in X$, $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$ le *stabilisateur* de $x$ sous l'action de $G$. C'est un sous-groupe de $G$.
- Pour $g \in G$, $\mathrm{Fix}_X(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$ l'*ensemble des points fixés* par $g$.
- $N(G,X) = |\{\omega_G(x) \mid x \in X\}|$ le nombre d'orbites de $X$ sous l'action de $G$.

**Définition.** On dit que l'action de $G$ sur $X$ est *libre* si tous les stabilisateurs sont triviaux.

**Lemme.** *Soit $x \in X$. On a :*
$$|G| = |\omega_G(x)||G_x|.$$

*Démonstration.* Si $(g,h) \in G^2$, on a $g.x = h.x \Leftrightarrow h^{-1}g.x = x \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Leftrightarrow g \in hG_x$, et par liberté de l'action de Cayley, $|hG_x| = |G_x|$. On en déduit facilement le résultat voulu.

**Théorème** (formule de Cauchy-Frobenius-Burnside)**.** *On a :*
$$N(G,X) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_X(g)|.$$

*Démonstration.* Soit $x \in X$. On remarque qu'on a :
$$\sum_{y \in \omega_G(x)} \frac{1}{|\omega_G(x)|}.$$

On en déduit que
$$N(G,X) = \sum_{x \in X} \frac{1}{|\omega_G(x)|}.$$

Il vient alors, d'après le lemme 1,
$$\begin{aligned} N(G,X) &= \sum_{x \in X} \frac{|G_x|}{|G|} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{x \in X}\sum_{g \in G} \mathbb{1}_{g.x=x} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\sum_{x \in X} \mathbb{1}_{g.x=x} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_X(g)| \end{aligned}$$

ce qui conclut.

## 2 Dénombrement des magmas

On fixe pour toute la suite $n \in \mathbb{N}$.

**Définition.** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\mu(\sigma)_k$ le nombre de ses cycles de longueur $k$.

**Proposition.** *Il y a*

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{1 \leq k, l \leq n} \left( \sum_{d | k \vee l} d\mu(\sigma)_d \right)^{\mu(\sigma)_k \mu(\sigma)_l k \wedge l}$$

*magmas de cardinal $n$ à isomorphisme près.*

*Démonstration.* On se ramène bien entendu sur l'ensemble $E = [\![1, n]\!]$ ; si $*$ et $\star$ sont deux lois de compositions internes sur $E$, on a par définition

$$(E, *) \cong (E, \star) \Leftrightarrow \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n : \forall (x, y) \in E^2, x * y = \sigma(\sigma^{-1}(x) \star \sigma^{-1}(y)).$$

On pose donc naturellement, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\star \in E^{E^2}$,

$$\sigma.\star : (x, y) \in E^2 \mapsto \sigma(\sigma^{-1}(x) \star \sigma^{-1}(y)) \in E.$$

On vérifie que $(\sigma, \star) \in \mathfrak{S}_n \times E^{E^2} \mapsto \sigma.\star \in E^{E^2}$ définit bien une action de $\mathfrak{S}_n$ sur $E^{E^2}$ ; ce qu'on vient de voir montre que deux lois définissent des magmas isomorphes si, et seulement si, elles sont dans la même orbite pour cette action. Ainsi, on cherche à déterminer $N\left(\mathfrak{S}_n, E^{E^2}\right)$, or la formule de Cauchy-Frobenius-Burnside nous dit que :

$$N\left(\mathfrak{S}_n, E^{E^2}\right) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \mathrm{Fix}_{E^{E^2}}(\sigma) \right|.$$

On est donc ramené au calcul des cardinaux des ensembles des lois fixées par l'action de $\mathcal{S}_n$.
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Considérons une loi $\star$ fixée par $\sigma$. Cette condition se réécrit

$$\forall (x, y) \in E^2, \sigma(x) \star \sigma(y) = \sigma(x \star y).$$

On en déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sigma^k(x) \star \sigma^k(y) = \sigma^k(x \star y).$$

On est donc conduit à considérer les actions naturelles de $\langle \sigma \rangle$ sur $E^2$ et $E$. On fait deux observations :

— Choisir $x \star y$ détermine intégralement les valeurs de $\star$ sur $\omega_{\langle \sigma \rangle}(x, y)$.

— Pour que les choses bouclent correctement, il faut qu'on ait $|\omega_{\langle \sigma \rangle}(x \star y)| \mid |\omega_{\langle \sigma \rangle}(x, y)|$.

Et on remarque facilement que ces conditions suffise, c'est-à dire qu'en choisissant un élément vérifiant l'hypothèse de division des cardinaux pour chaque orbite pour l'action sur $E^2$, et en complétant correctement, on crée une loi fixée par $\sigma$.
Soit $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$. Il y a par définition $\mu(\sigma)_k$ orbites de cardinal $k$ pour l'action sur $E$, et $\mu(\sigma)_l$ de cardinal $l$. Il y a donc $\mu(\sigma)_k \mu(\sigma)_l kl$ couples de la forme $(x, y)$, avec $|\omega_{\langle \sigma \rangle}(x)| = k$ et $|\omega_{\langle \sigma \rangle}(y)| = l$ ; ces couples se répartissent sur des orbites de cardinal $k \vee l$ pour l'action sur $E^2$, et il y a donc $\mu(\sigma)_k \mu(\sigma)_l k \wedge l$ telles orbites.
Par ailleurs, d'après la deuxième condition proposée plus haut, on a pour chacune de ces orbites exactement

$$\sum_{d | k \vee l} d\mu(\sigma)_d$$

choix possibles d'un élément.
On déduit de tout cela

$$\left| \mathrm{Fix}_{E^{E^2}}(\sigma) \right| = \prod_{1 \leq k, l \leq n} \left( \sum_{d | k \vee l} d\mu(\sigma)_d \right)^{\mu(\sigma)_k \mu(\sigma)_l k \wedge l}$$

puis la formule voulue.

On peut en déduire une formule dépendant uniquement des $n$-uplets de la forme des $\mu(\sigma)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ :

**Corollaire 1.** *Il y a*

$$\sum_{\substack{\mu \in \mathbb{N}^n \\ \sum_{k=1}^{n} k\mu_k = n}} \frac{\prod_{1 \leq k, l \leq n} \left( \sum_{d | k \vee l} d\mu_d \right)^{\mu_k \mu_l k \wedge l}}{\prod_{k=1}^{n} k^{\mu_k} \mu_k!}$$

*magmas de cardinal $n$ à isomorphisme près.*

*Démonstration.* Il s'agit de la formule précédente, combinée au dénombrement des permutations admettant un type cyclique donné. Pour construire une permutation admettant, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\mu_k$ $k$-cycles :

- On choisit quels éléments mettre dans chaque cycle, ce qui revient à un calcul d'anagrammes : il y a $\dfrac{n!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k!^{\mu_k}}$ possibilités.
- On construit chacun des cycles à partir des éléments dedans : il y a $(k-1)!$ possibilités pour un cycle de longueur $k$, et donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (k-1)!^{\mu_k}$ possibilités au total.
- On constate qu'on construit une permutation donnée autant de fois qu'on peut permuter les cycles de même longueur entre eux, il faut donc diviser par $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mu_k!$.

Cela donne, au total,

$$\frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^{\mu_k} \mu_k!}$$

telles permutations, ce qui est bien le résultat voulu.

On en déduit aussi des expressions dépendant des types cycliques.

**Définition.** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note $\lambda(\sigma) = (\lambda(\sigma)_k)_{k=0}^{r(\sigma)}$ son type cyclique.

**Corollaire 2.** *Il y a*

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{1 \leq k, l \leq r(\sigma)} \left( \sum_{\substack{1 \leq d \leq r(\sigma) \\ \lambda(\sigma)_d | \lambda(\sigma)_k \vee \lambda(\sigma)_l}} \lambda(\sigma)_d \right)^{\lambda(\sigma)_k \wedge \lambda(\sigma)_l}$$

*magmas de cardinal $n$ à isomorphisme près.*

*Démonstration.* Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Remarquons que, si $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$, on a :

$$\sum_{\substack{1 \leq d \leq r(\sigma) \\ \lambda(\sigma)_d | k \vee l}} \lambda(\sigma)_d = \sum_{d | k \vee l} d\mu(\sigma)_d.$$

En effet, ces deux quantités sont le nombre d'éléments dans des cycles de longueurs divisant $k \vee l$. Par ailleurs, comme il y a $\mu(\sigma)_k$ cycles de longueur $k$, et $\mu(\sigma)_l$ de longueur $l$,

$$\left( \sum_{\substack{1 \leq d \leq r(\sigma) \\ \lambda(\sigma)_d | k \vee l}} \lambda(\sigma)_d \right)^{k \wedge l}$$

apparaît $\mu(\sigma)_k \mu(\sigma)_l$ fois dans le produit du corollaire 2, ce qui donne bien le résultat voulu.

L'expression correspondante à celle du corollaire 1, en fonction des partitions de $n$, est moins intéressante car elle nécessite quand même de compter les cycles d'une longueur donnée.