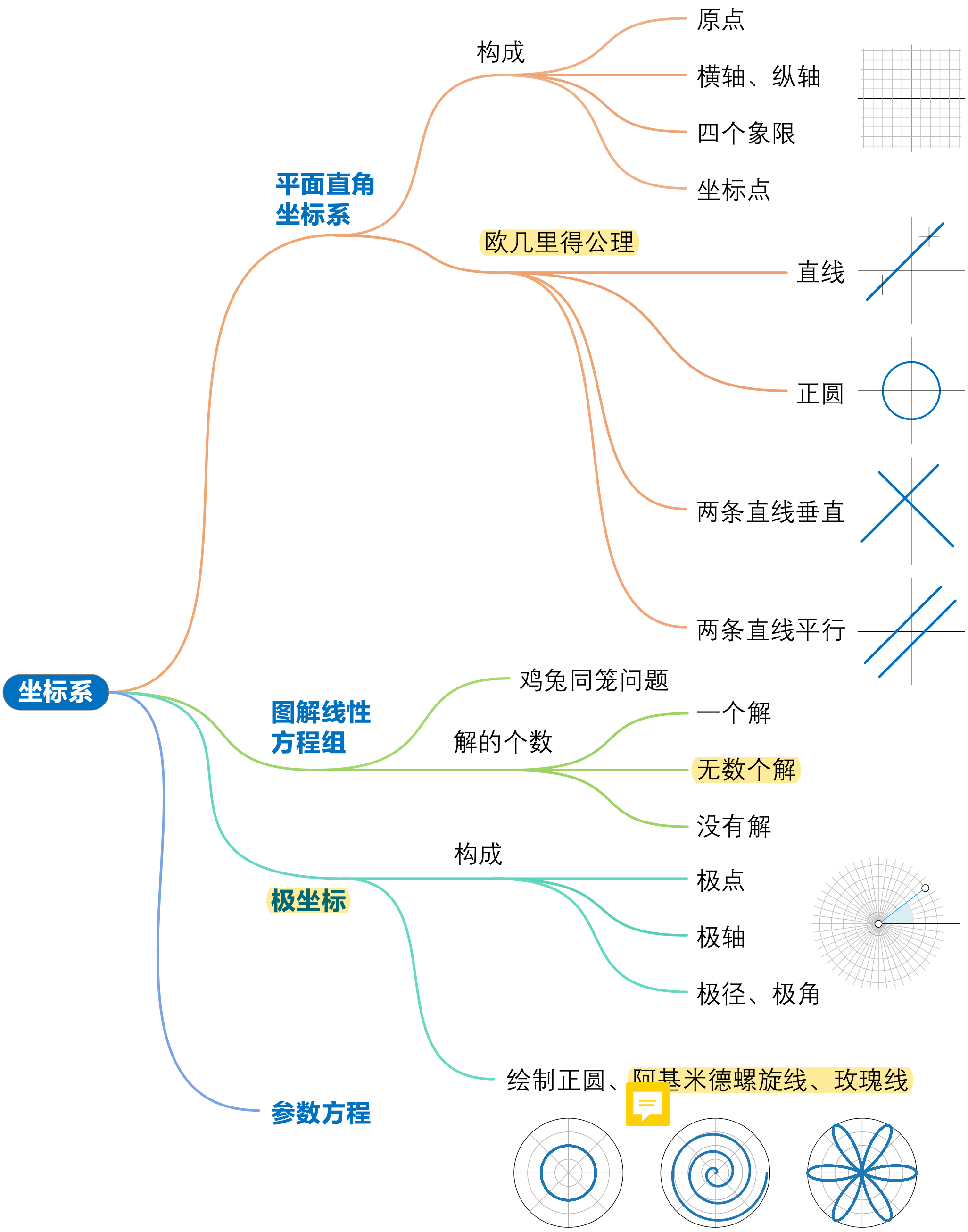
Cartesian Coordinate System

5 笛卡尔坐标系

几何代数一相逢，便胜却人间无数

> 我思，故我在。
>
> ***I think, therefore I am.***
>
> ***Cogito ergo sum.***
>
> —— 勒内·笛卡尔 (René Descartes) | 法国哲学家、数学家、物理学家 | 1596 ~ 1650

- `Axes3D.plot_surface()` 绘制三维曲面
- `matplotlib.pyplot.axhline()` 绘制水平线
- `matplotlib.pyplot.axvline()` 绘制竖直线
- `matplotlib.pyplot.plot()` 绘制线图
- `matplotlib.pyplot.scatter()` 绘制散点图
- `matplotlib.pyplot.text()` 在图片上打印文字
- `numpy.meshgrid()` 生成网格数据
- `plot_parametric()` 绘制二维参数方程
- `plot3d_parametric_line()` 绘制三维参数方程
- `seaborn.pairplot()` 成对散点图
- `seaborn.scatterplot()` 绘制散点图
- `sympy.is_decreasing()` 判断符号函数的单调性


坐标系
平面直角坐标系
构成
原点
横轴、纵轴
四个象限
坐标点
欧几里得公理
直线
正圆
两条直线垂直
两条直线平行
图解线性方程组
鸡兔同笼问题
解的个数
一个解
无数个解
没有解
极坐标
构成
极点
极轴
极径、极角
绘制正圆、阿基米德螺旋线、玫瑰线
参数方程

5.1 笛卡尔：我思故我在

笛卡尔 (René Descartes) 在《方法论》(*Discourse on the Method*) 中写道："在我认为，任何事情都值得怀疑，但是这个正在思考的个体——我——一定存在。这样，我便得到第一条真理——我思故我在。"

勒内·笛卡尔 (René Descartes)
法国哲学家、数学家和科学家 | 1596年 ~ 1650年
解析几何之父

这一天，房间昏暗，笛卡尔躺在床上、百无聊赖，可能在思考"存在"的问题。一只不速之客闯入他的视野，笛卡尔把目光投向房顶，发现一只苍蝇飞来飞去、嘤嘤作响。

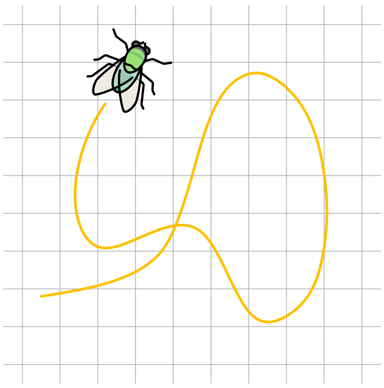


图 1. 笛卡尔眼中的苍蝇飞行

突然之间，一个念头在这个天才的大脑中闪过——要是在屋顶画上方格，我就可以追踪苍蝇的轨迹！

这个开创性的发明像一抹耀眼的光束，瞬间洒满整个屋顶，照亮昏暗房间。它随即射入人类思想的夜空，改变了数学发展的路径。笛卡尔坐标系让几何和代数这两条平行线交织在一起，再也没有分开。

几何形体就像是暗夜中大海上游弋的航船。坐标系就是灯塔，就是指引方位的北斗。代数式每个符号原本瘦骨嶙峋、死气沉沉。坐标系让它们血肉丰满、生龙活虎。

毫不夸张地说，没有笛卡尔坐标系，就不会有函数，更不会有微积分。

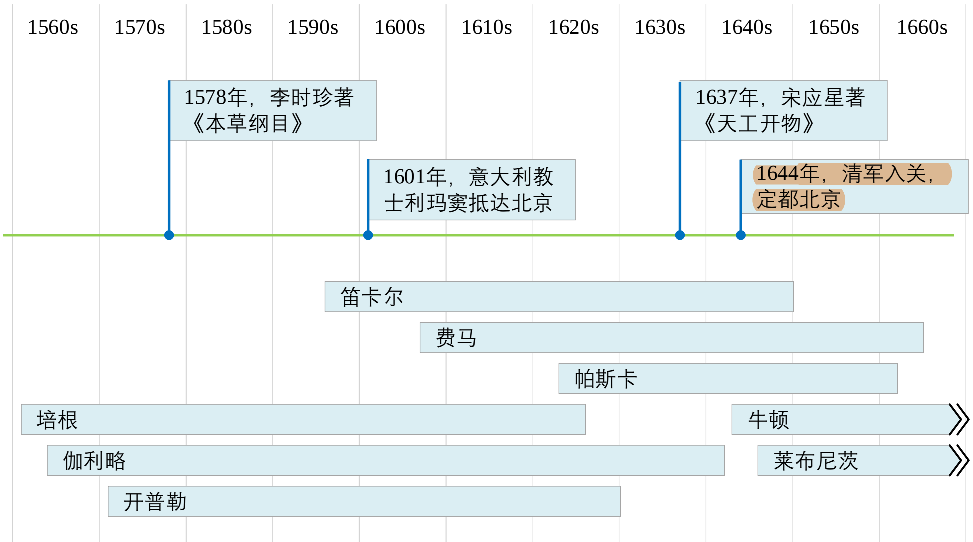


图 2. 笛卡尔时代时间轴

5.2 坐标系：代数可视化，几何参数化

平面直角坐标系

在平面上，**笛卡尔坐标系** (Cartesian coordinate system) 也叫平面直角坐标系。平面直角坐标系是两个相交于**原点** (origin) 相互垂直的实数轴。数学中，平面直角坐标系常记做 $\mathbb{R}^2$。

如图 3 所示，平面直角坐标系是“横平竖直”的方格。**横轴** (horizontal number line) 常被称作 x 轴 (x-axis)，**纵轴** (vertical number line) 常被称作 y 轴 (y-axis)。

⚠ 注意，本书也常用 x_1 表示横轴，用 x_2 表示纵轴。

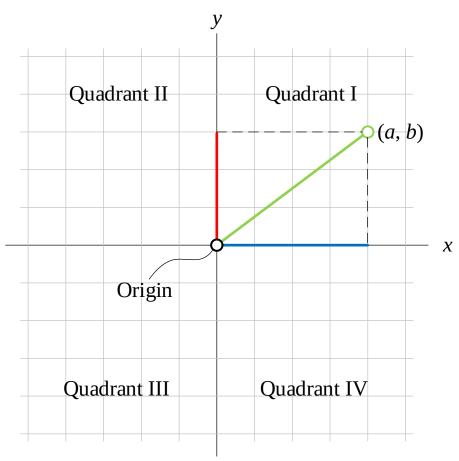


图 3. 笛卡尔坐标系

如图 3 所示，横纵轴将 xy 平面 (xy-plane) 分成四个**象限** (quadrants)。象限通常以**罗马数字** (Roman numeral) **逆时针方向** (counter-clockwise) 编号。

注意，象限不包括坐标轴。

平面上的每个点都可以表示为坐标 (a, b)。a 和 b 两个值分别为**横坐标** (x-coordinate) 和**纵坐标** (y-coordinate)。图 4 所示为平面直角坐标系中 6 个点对应的坐标，请大家自己标出每个点所在象限或横纵轴。

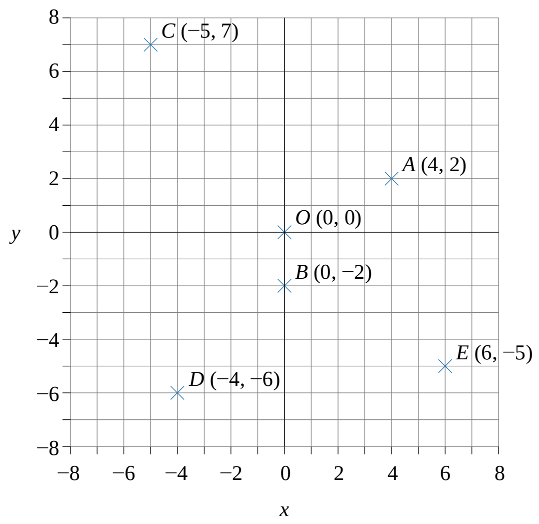


图 4. 平面直角坐标系中 6 个点的位置

代码文件 `Bk3_Ch5_01.py` 绘制图 4 所示平面直角坐标系网格和其中 6 个点，并打印坐标值。

欧几里得的五个公理

有了直角坐标系，欧几里得提出的五个公理就可以很容易被量化，如图 5 和图 6 所示。下面，我们展开讲解。

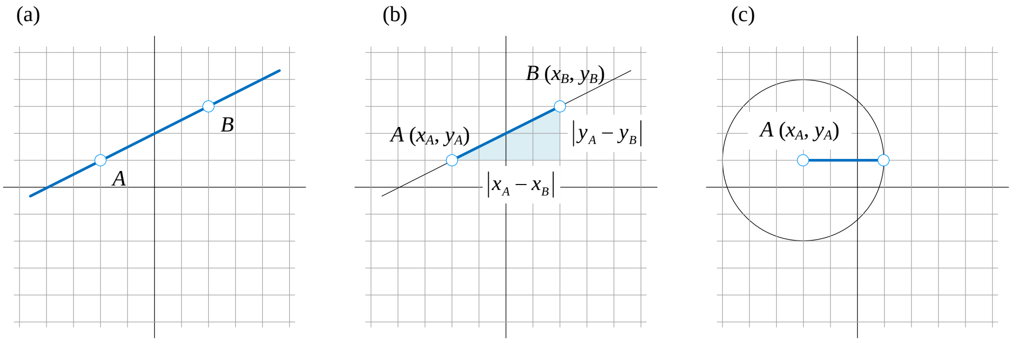


图 5. 在平面直角坐标系中展示直线、线段长度和圆

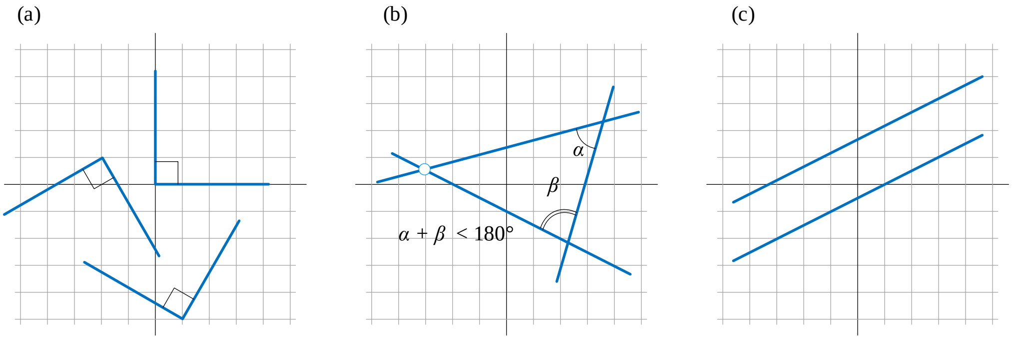


图 6. 在平面直角坐标系中展示直角、相交和平行

直线

如图 5 所示，平面直角坐标系中，任意两点可以画一条直线，这条直线一般对应代数中的二元一次方程：

$$ax + by + c = 0 \tag{1}$$

使用矩阵乘法，(1) 可以写成：

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c = 0 \tag{2}$$

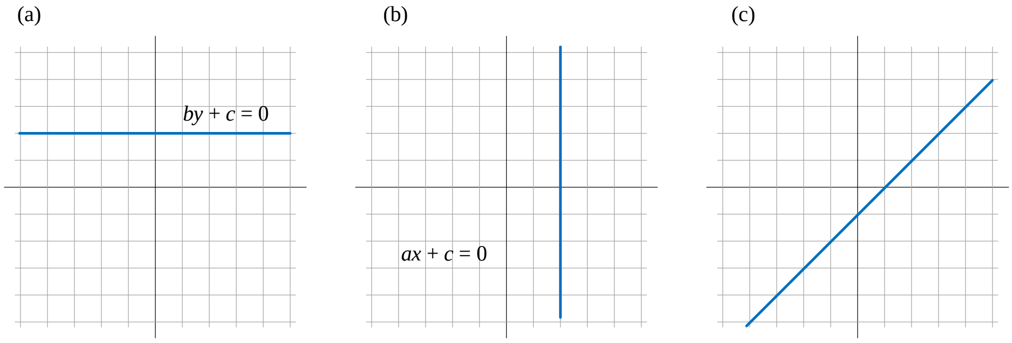


图 7. 平面直角坐标系中三类直线

如图 7 (a) 所示，特别地，当 $a = 0$ 时，直线平行于横轴：

$$by + c = 0 \tag{3}$$

如图 7 (b) 所示，当 $b = 0$ 时，直线平行于纵轴：

$$ax + c = 0 \tag{4}$$

如图 7 (c) 所示，如果 a、b 均不为 0，(1) 可以写成：

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \tag{5}$$

当 x 为自变量、y 为因变量时，(5) 实际上就变成了一元一次函数。其中，$-a/b$ 为直线**斜率** (slope)，$-c/b$ 为**纵轴截距** (y-intercept)。

本书第 11 章将专门介绍一元一次函数图像。

两点距离

如图 5 (b) 所示，A (x_A, y_A) 和 B (x_B, y_B) 两点之间直线的距离可以用勾股定理获得：

$$AB = \sqrt{\left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2} \tag{6}$$

正圆

如图 5 (c) 所示，以 A (x_A, y_A) 点为圆心，r 为半径画一个圆。圆上任意一点 (x, y) 到 A (x_A, y_A) 点的距离为 r，据此可以构造等式：

$$\sqrt{\left(x - x_A\right)^2 + \left(y - y_A\right)^2} = r \tag{7}$$

(7) 两边平方得到图 5 (c) 所示圆的解析式：

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2 \tag{8}$$

使用矩阵乘法，(8) 可以写成：

$$\begin{bmatrix} x - x_A & y - y_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{bmatrix} - r^2 = 0 \tag{9}$$

特别地，当圆心为原点 (0, 0)，半径 $r = 1$ 时，圆为**单位圆** (unit circle)，对应的解析式为：

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{10}$$

使用矩阵乘法，(10) 可以写成：

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0 \tag{11}$$

有了平面直角坐标系，单位圆和各种三角函数之间联系就很容易可视化，具体如图 8 所示。

请大家特别注意 θ 为 $\pi/2$ (90°) 的倍数时，即 $\theta = \pi k/2$ (k 为整数)，有些三角函数值为无穷，即没有定义。比如 $\theta = 0$ (0°) 时，点 A 在横轴正半轴上，图 8 中 csc() 和 cot() 均为无穷。又如 $\theta = \pi/2$ (90°) 时，点 A 在纵轴正半轴上，图 8 中 sec(θ) 和 tan(θ) 均为无穷。图 9 所示为平面直角坐标系中，角度、弧度和常用三角函数的正负关系。

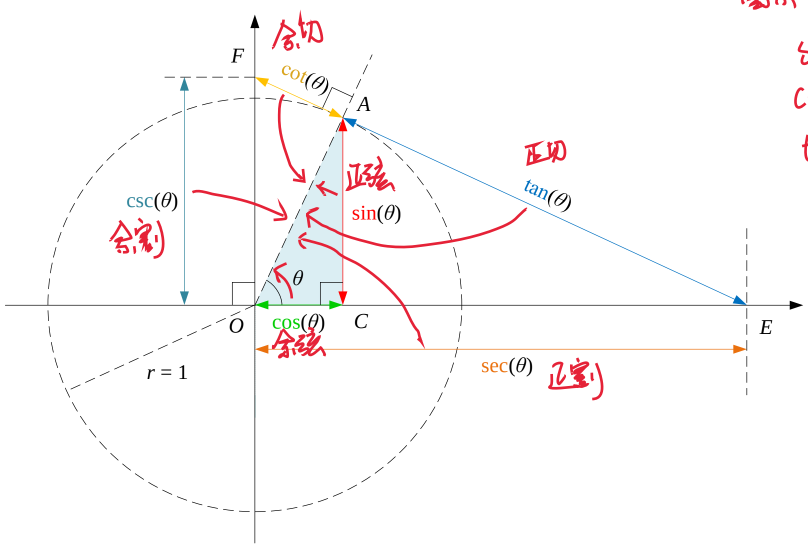
当 θ 连续变化时，几个三角函数值也会跟着连续变化，在平面直角坐标系中，我们可以画出三角函数图像。本书第 11 章将介绍常见三角函数的图像。

图示六种三角函数：

sin 正弦 csc 余割

cos 余弦 sec 正割

tan 正切 cot 余切



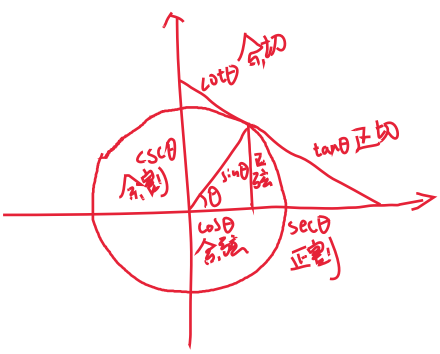


图 8. 三角函数和单位圆的关系

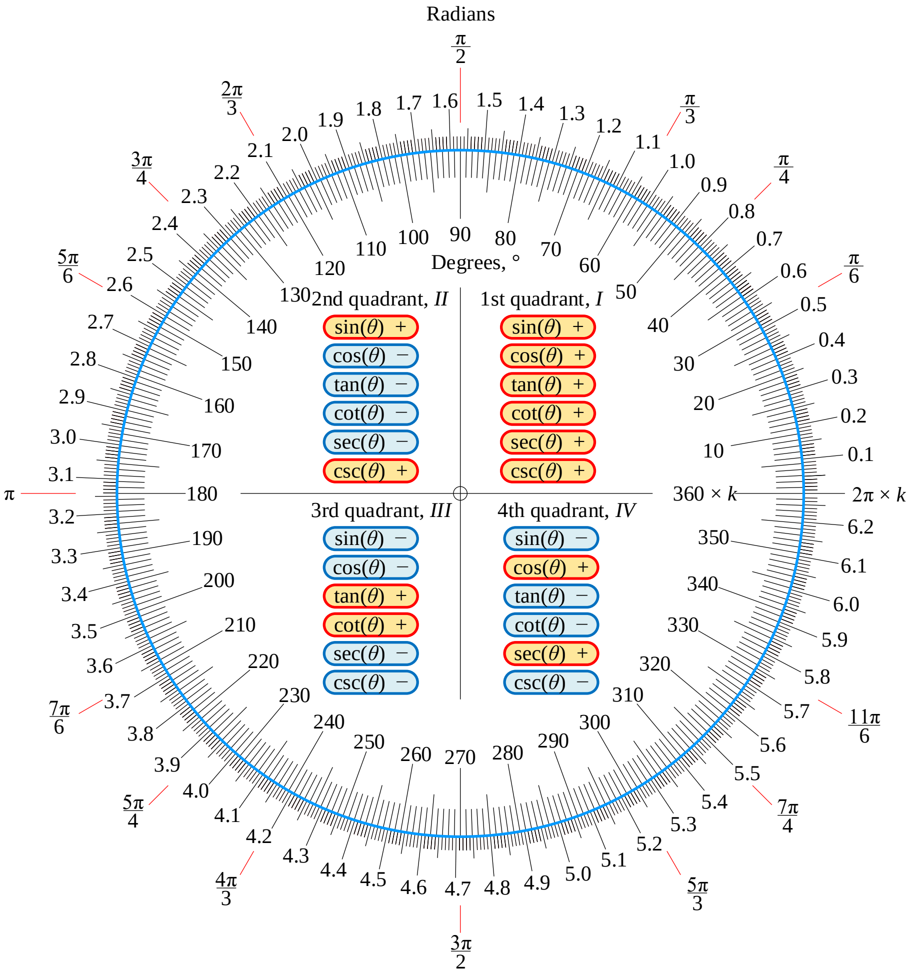


图 9. 平面直角坐标系中，角度、弧度和常用三角函数的正负关系

垂直

平面直角坐标系中，判断垂直变得更加简单。

给定 $ax + by + c = 0$ 和 $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ 两条直线，两者垂直时满足如下条件：

$$a\alpha + b\beta = 0 \tag{12}$$

如果系数 a、b、α、β 均不为 0 时，两条直线若垂直，则两条直线斜率相乘为−1，即，

$$\frac{a}{b}\frac{\alpha}{\beta} = -1 \tag{13}$$

图 10 (a) 所示为两条垂直线，它们分别代表 $y = 0.5x + 2$ 和 $y = -2x - 1$ 这两个一次函数。显然两个一次函数斜率相乘为 $-1 = 0.5\times(-2)$。

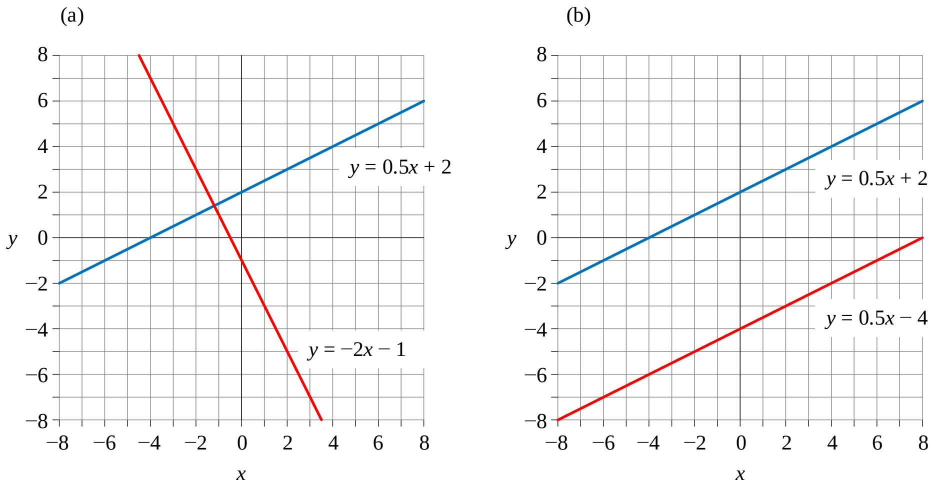


图 10. 两条垂直直线和两条平行线

平行

类似地，如果 $ax + by + c = 0$ 和 $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ 两条直线平行，系数满足：

$$a\beta - b\alpha = 0 \tag{14}$$

如果系数 a、b、α、β 均不为 0 时，两条直线若平行或重合，则两个斜率相同，即，

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{15}$$

图 10 (b) 所示为两条平行线。图 11 分别展示的是两条水平线和两条竖直线。两条水平线可以视作常数函数，而两条竖直线则不是函数。

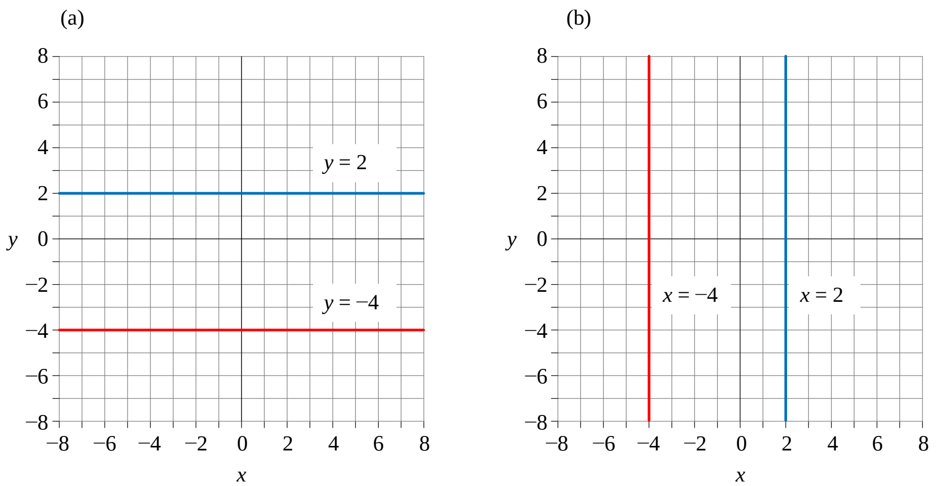


图 11. 两条水平线和两条竖直线

表 1 总结有关坐标系的常用英文表达。

表 1. 有关坐标系的常用英文表达

数学或中文表达	英文表达
(a,b)	The point *a*, *b*
$P(a,b)$	The point capital *P* with coordinates *a* and *b*
$P(4,3)$	The *x*-coordinate of point *P* is 4; and the *y*-coordinate of point *P* is 3. The coordinates of point *P* are (4, 3). 4 is the *x*-coordinate and 3 is the *y*-coordinate *P* is 4 units to the right of and 3 units above the origin.
第一象限	First quadrant
y 轴正方向	Positive direction of the *y*-axis
y 轴负方向	Negative direction of the *y*-axis
x 轴正方向	Positive direction of the *x*-axis
x 轴负方向	Negative direction of the *x*-axis
关于 *x* 轴对称	To be symmetric about the *x*-axis
关于 *y* 轴对称	To be symmetric about the *y*-axis
关于原点对称	To be symmetric about the origin

代码文件 `Bk3_Ch5_02.py` 来绘制图 10 和图 11。

5.3 图解“鸡兔同笼”问题

图解法

有了平面直角坐标系，我们就可以图解本书第 4 章提到的鸡兔同笼问题。

首先构造二元一次方程组，这次用 x_1 代表鸡，x_2 代表兔。

鸡、兔共有 35 个头，对应如下等式：

$$x_1 + x_2 = 35 \tag{16}$$

有 94 只足，对应等式：

$$2x_1 + 4x_2 = 94 \tag{17}$$

联立两个等式，得到方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 35 \\ 2x_1 + 4x_2 = 94 \end{cases} \tag{18}$$

用图解法，(16) 和 (17) 分别代表平面直角坐标系的两条直线，如图 12。两条直线的交点就是 (23, 12)。也就是，笼子里有 23 只鸡，12 只兔。

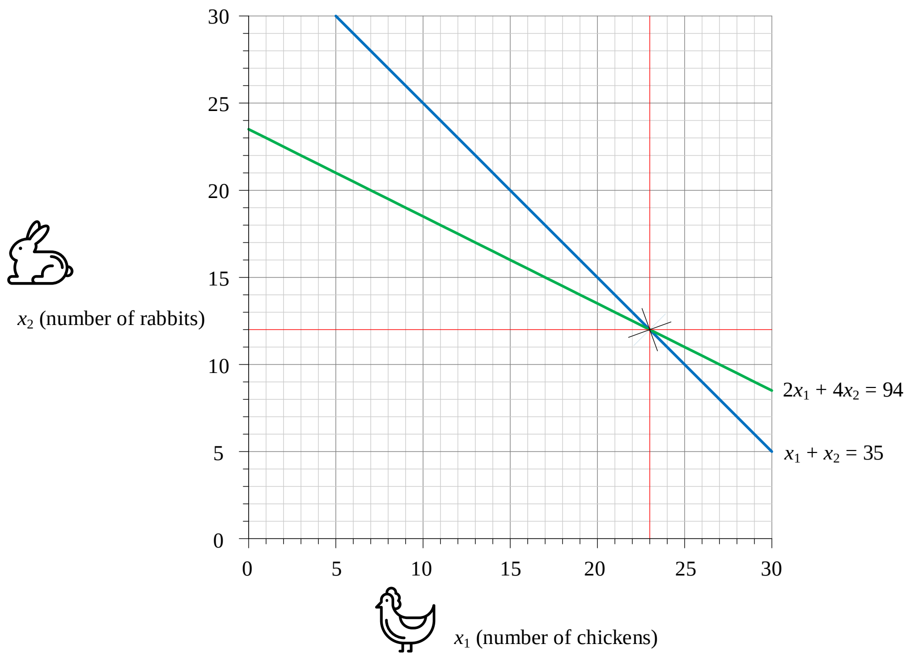


图 12. 鸡兔同笼问题方程组对应的图像

限制条件

实际上，图 12 两条直线并不能准确表达鸡兔同笼问题的全部条件。

鸡兔同笼问题还隐含着限制条件——x_1 和 x_2 均为非负整数。也就是说，鸡、兔的个数必须是 0 或正整数，不能是小数，更不能是负数。

有了这个条件作为限制，我们便可以获得如图 13 这幅图像。可以看到，方程对应的图像不再是连续的直线，而是一个个点。图 13 的网格交点对应整数坐标点，可以看到所有的 × 点都在网格交点处。

图 13 中所有的点被限制在第一象限 (包含坐标轴)，这个区域对应不等式组：

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{19}$$

不等式区域是下一章要探讨的话题。

从另外一个角度来看，图 13 中 × 和 × 两组点对应的横、纵轴坐标值分别构成**等差数列** (arithmetic progression)。

等差数列是指从第二项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数的一种数列。

注意，数列也可以看做是定义域不连续的特殊函数。

本书第 14 章将讲解数列相关内容。

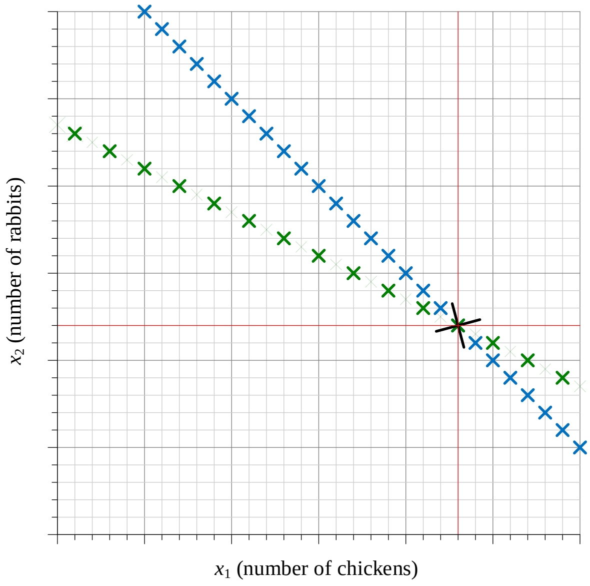


图 13. 鸡兔同笼问题方程组对应的非负整数图像

二元一次方程组解的个数

两个二元一次方程构成的方程组可以有一个解、无数解或者没有解。

有了图像，这一点就很好理解了。图 14 (a) 给出的两条直线相交于一点，也就是二元一次方程组有一个解。

图 14 (b) 给出的两条直线相重合，也就是二元一次方程组无数解。

图 14 (c) 给出的两条直线平行，也就是二元一次方程组没有解。

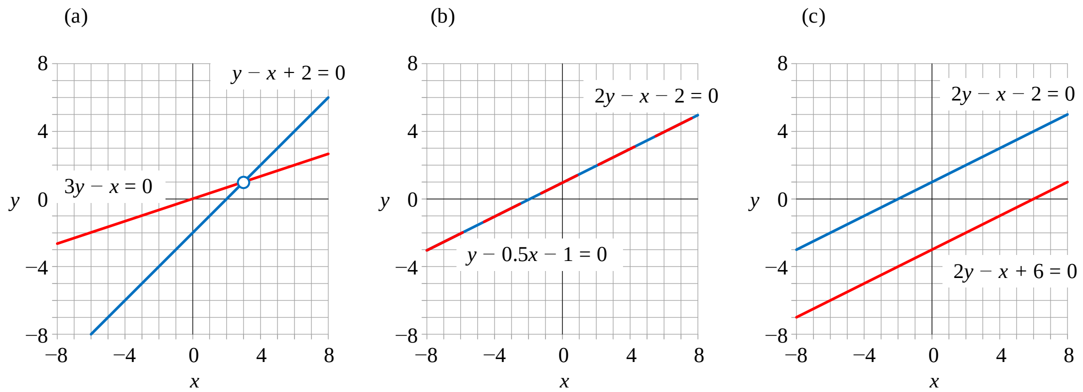


图 14. 两个二元一次方程组有一个解、无数解、没有解

代码文件 Bk3_Ch5_03.py 绘制图 12。代码并没有直接计算出方程组的解，这个任务交给本书线性代数相关内容来解决。

我们在 Bk3_Ch5_03.py 基础上，用 Streamlit 制作了绘制平面直线的 App，通过调整参数，请大家观察直线位置变化。请参考代码文件 Streamlit_Bk3_Ch5_03.py。

5.4 极坐标：距离和夹角

极坐标系 (polar coordinate system) 也是常用坐标系。如图 15 左图所示，平面直角坐标系中，位置由横轴、纵轴坐标值确定。而极坐标中，位置由一段距离 r 和一个夹角 θ 来确定。

如图 15 右图所示，O 是极坐标的**极点** (pole)，从 O 向右引一条射线作为**极轴** (polar axis)，规定逆时针角度为正。这样，平面上任意一点 P 的位置可以由线段 OP 的长度 r 和极轴到 OP 的角度 θ 来确定。(r, θ) 就是 P 点的极坐标。

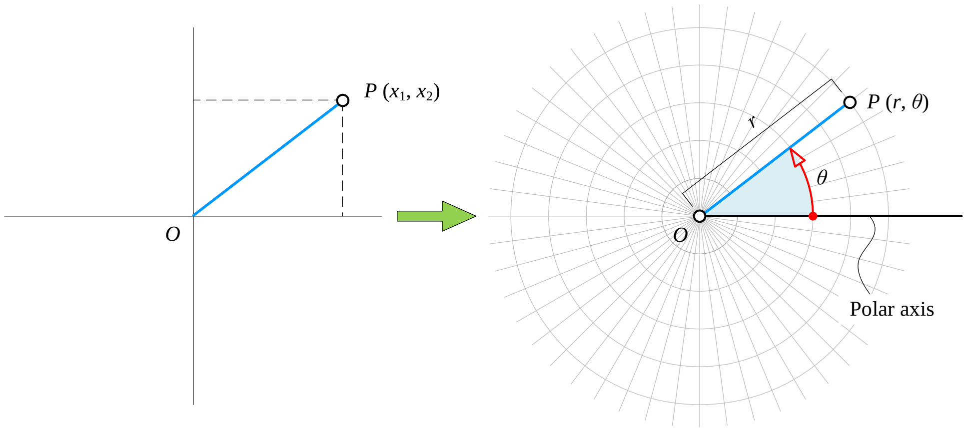


图 15. 从平面直角坐标系到极坐标系

一般，r 称为**极径** (radial coordinate 或 radial distance)，θ 称为**极角** (angular coordinate 或 polar angle 或 azimuth)。

平面上，极坐标 (r, θ) 可以转化为直角坐标系坐标 (x_1, x_2)：

$$\begin{cases} x_1 = r \cdot \cos\theta \\ x_2 = r \cdot \sin\theta \end{cases} \tag{20}$$

平面极坐标让一些曲线可视化变得非常容易。图 16 (a) 所示为极坐标中绘制的正圆，图 16 (b) 所示为阿基米德螺旋线 (Archimedean spiral)，图 16 (c) 为玫瑰线。

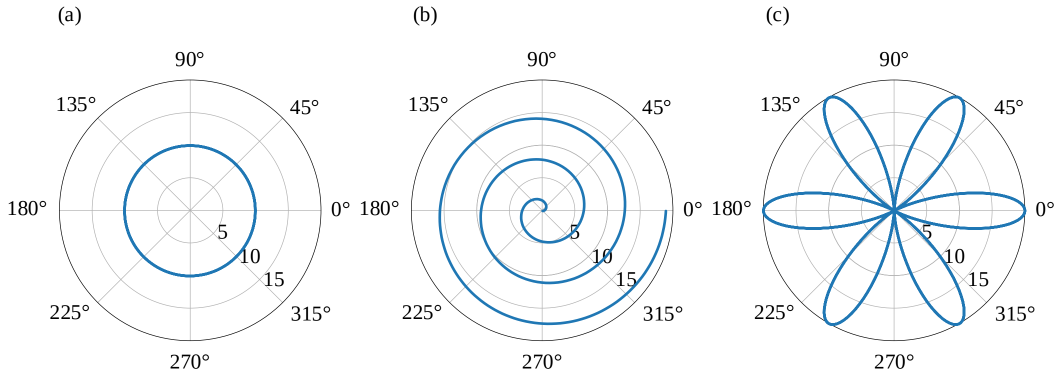


图 16. 平面极坐标中可视化三个曲线

代码文件 Bk3_Ch5_04.py 绘制图 16 三幅图像。

5.5 参数方程：引入一个参数

在平面直角坐标系中，如果曲线上任意一点坐标 x、y 都是某个参数 (比如 t) 的函数。对于参数任何取值，方程组确定的点 (x_1, x_2) 都在这条曲线上，那么这个方程就叫做曲线的**参数方程** (parametric equation)，比如下例：

$$\begin{cases} x_1 = f(t) \\ x_2 = g(t) \end{cases} \tag{21}$$

图 17 所示为用参数方程法绘制的单位圆，对应的参数方程为：

$$\begin{cases} x_1 = \cos(t) \\ x_2 = \sin(t) \end{cases} \tag{22}$$

其中，t 为参数，取值范围为 $[0, 2\pi]$。

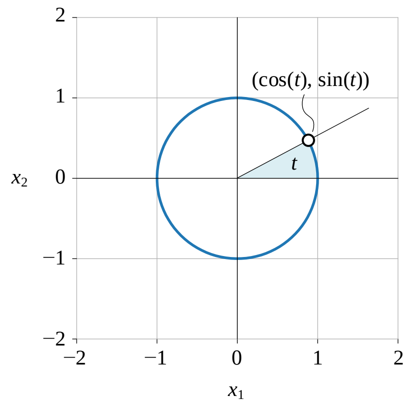


图 17. 参数方程绘制正圆

代码文件 Bk3_Ch5_05.py 可以绘制图 17。

我们也可以采用 sympy 工具包中的 plot_parametric() 函数绘制二维参数方程，代码文件 Bk3_Ch5_06.py 便是通过 t = symbols('t') 先定义符号变量 t。然后，利用 plot_parametric() 函数绘制单位圆。

5.6 坐标系必须是“横平竖直的方格”？

本章最后聊一下“坐标系”的内涵。

广义来说，坐标系就是一个定位系统。比如，地球表面可以用经纬度来唯一确定一点，显然经纬度网格不是横平竖直，它更像本章讲到的极坐标。

具体到某一个建筑内的位置时，我们在经纬度基础上加入楼层数这个定位参数。而航空、航天器定位时，会考虑海拔。

现在人类还是生存在地球“表面”。假想在不远的未来，人类可以大规模地在地下、海洋下方，甚至天空中生活，这时人们可能要自然而然地在经纬度基础上再加一个定位值，比如距离地心距离或海拔。三座城市很可能经纬度几乎一致，却分别位于地表、地下和半空中。

坐标系的定义满足实际需求，根据约定俗成怎么方便怎么来。

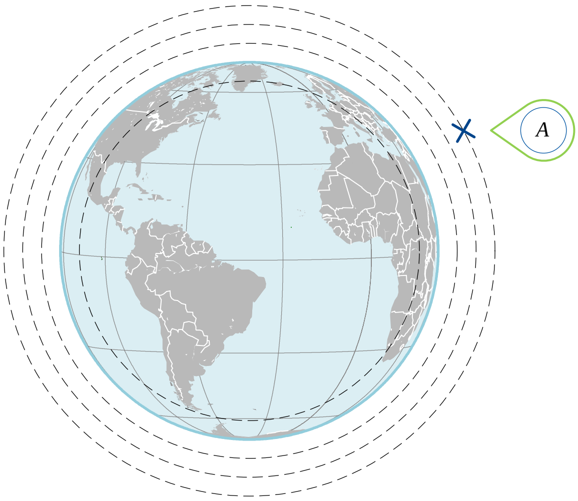


图 18. 经纬度加海拔定位

笛卡尔坐标系是数学中定位平面一点最常用的坐标系。本章给出的直角坐标系都是横平竖直的“方格”，这是因为它们的横纵坐标轴垂直，且尺度完全一致。很多情况，直角坐标系的横纵坐标轴的数值尺度不同，这样我们便获得“长方格”的直角坐标系。

如图 19 所示，横平竖直的方格，经过竖直或水平方向拉伸，得到两个不同长方格。大家会发现，当图像较复杂时，为了突出其细节，本书中很多图像并不绘制网格，而只提供坐标轴上的刻度线和对应刻度值。必要时，在竖直或水平轴具体位置加**参考线** (reference line)。

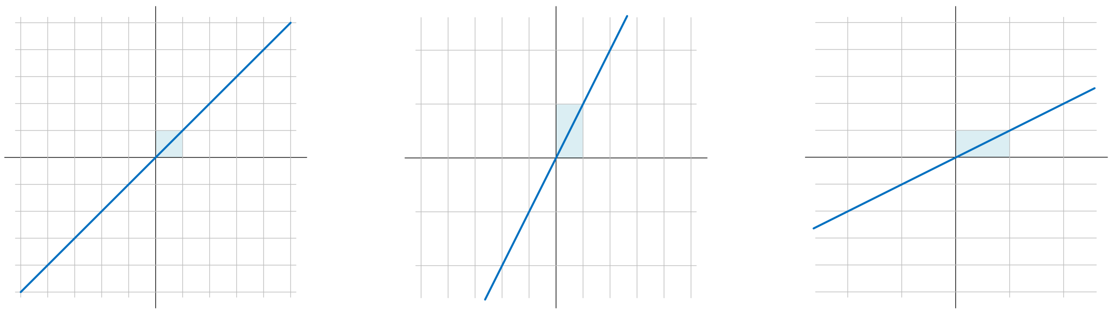


图 19. 直角坐标系，方格到长方

图 19 中三个直角坐标系中方格的大小还是分别保持一致。有些应用场合，一幅图像中方格形状还可能不一致。如图 20 右图所示，图像的纵轴为**对数坐标刻度** (logarithmic scale)，这时坐标系方格大小就不再一致。

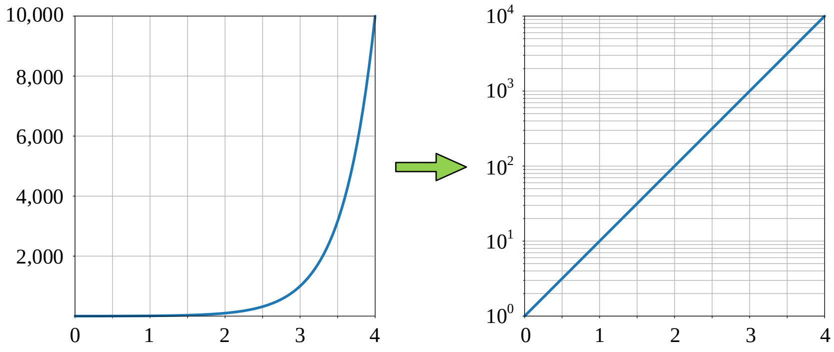


图 20. 直角坐标系到纵轴为对数刻度

再退一步，不管怎么说，图 20 的刻度线还是“横平竖直”。有些时候，“横平竖直”这个限制也可以被打破。图 21 中 (a)、(b) 和 (c) 三幅图坐标网格还是横平竖直。而剩下 6 幅图网格则千奇百怪，对应独特的旋转、伸缩等等几何操作。

即便如此，图 21 中 9 幅图都可以准确定位点 A 和点 O 的位置关系。大家可能已经发现，概括来说，图 21 中每幅图各自的网格都是全等的平行四边形。

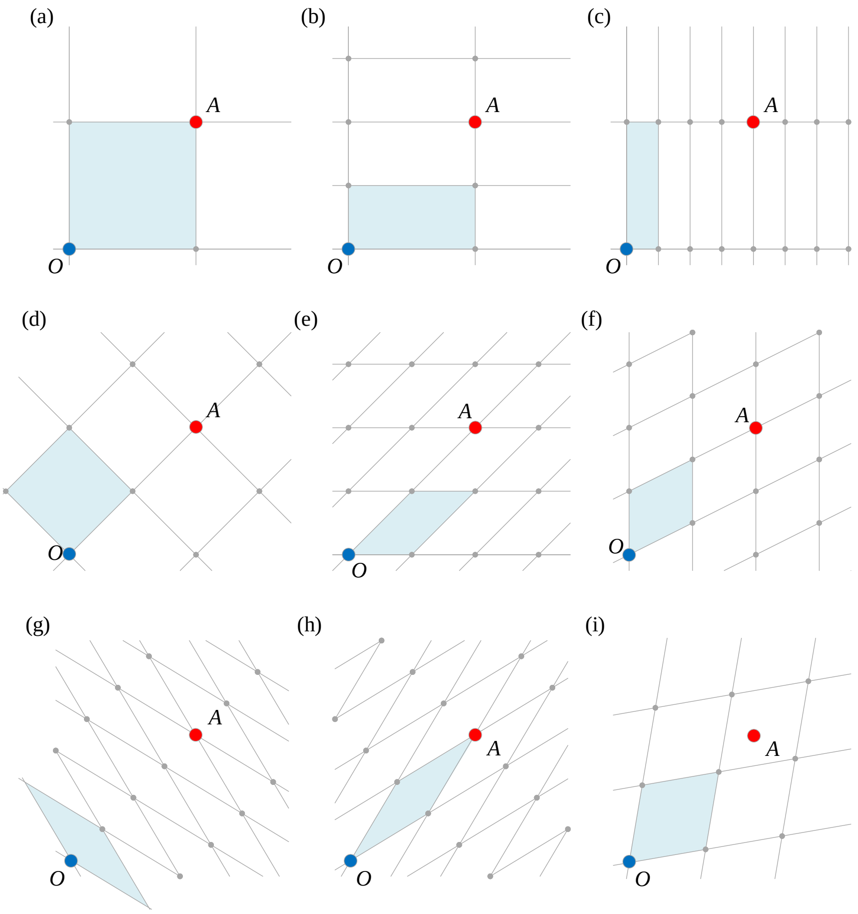


图 21. 不同形状平行四边形网格表达点 A 和点 O 关系

本节展示的各种坐标系都束缚在同一个平面内。这个平面最根本的坐标系就是笛卡尔直角坐标系 $\mathbb{R}^2$，而各种坐标系似乎都和笛卡尔坐标系 $\mathbb{R}^2$ 存在某种量化联系。目前我们介绍的数学工具还不足够解析这些量化联系，本系列丛书会讲解更多数学工具，慢慢给大家揭开不同坐标系和笛卡尔直角坐标系的关系。

笛卡尔的坐标系像极了太极八卦。

太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦。坐标系的原点就是太极的极，两极阴阳为数轴负和正。横轴 x 和纵轴 y 张成平面 $\mathbb{R}^2$，并将其分成为四个象限。

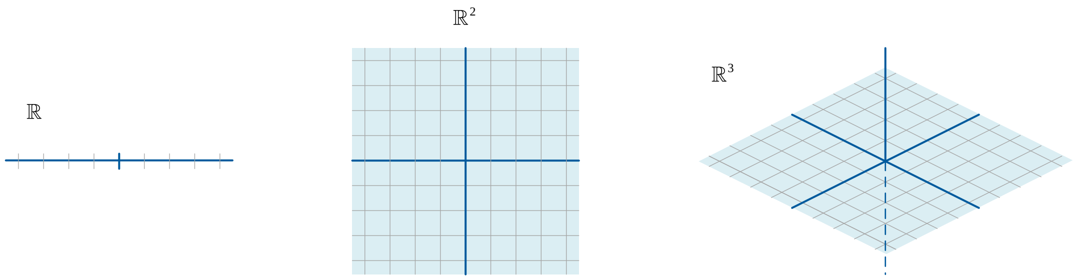


图 22. 数轴、平面直角坐标系、三维直角坐标系

垂直于 $\mathbb{R}^2$ 平面再升起一个 z 轴，便生成一个三维空间 $\mathbb{R}^3$。x、y 和 z 轴将三维空间割裂成八个区块。这是下一章要介绍的内容。

坐标系看似有界，但又无界。正所谓大方无隅，大器免成，大音希声，大象无形。

笛卡尔坐标系包罗万象，本章之后的所有数学知识和工具都包含在笛卡尔坐标系这个“大象”之中。