考研题目本

五狗砸

2020 年 10 月 8 日

目录

1 微积分

1.1 一元函数微分

Example 1.1. 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0, f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{x^3\int_0^1 f(xt)dt}$

令 $x^2-t=u, xt=u$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{x^3\int_0^1 f(xt)dt} &= \lim_{x\to 0}\frac{-\int_{x^2}^0 f(u)du}{x^3\int_0^x f(u)\frac{du}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(u)du}{x^2\int_0^x f(u)du}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(u)du + x^2 f(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(u)du + xf(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4f'(x^2)}{3\frac{f(x)-f(0)}{x}+f'(x)} = 1
\end{aligned}$$

Example 1.2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$

利用泰勒展开，$\sqrt{1+x^2} = 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$, $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$,$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)} = -\frac{1}{12}$$

Example 1.3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})$

因为 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = A$

Example 1.4. suppose $y_n = \left[\frac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n+1}}$. Compute $\lim_{n\to\infty} y_n$

$$\begin{aligned}
\ln y_n &= \frac{1}{n+1}\ln\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{1}{n+1}\ln\frac{(2n)(2n-1)\ldots(n+1)}{n^n}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^n \ln(1+\frac{k}{n}) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(1+\frac{k}{n})\right)
\end{aligned}$$

Hence

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n})\right) \\
&= 1\cdot\int_0^1 \ln(1+x)dx = x\ln(1+x)|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx \\
&= \ln 2 - 1 + \ln 2 = \ln\frac{4}{e}
\end{aligned}
$$

Example 1.5. 已知 $x\to 0$ 时，$e^{-x^4}-\cos(\sqrt{2}x^2)$ 与 ax^n 是等价无穷小，试求 a,n

$$
\begin{aligned}
e^{-x^4} &= 1 - x^4 + \frac{x^8}{2} + o(x^8) \\
\cos(\sqrt{2}x^2) &= 1 - x^4 + \frac{x^8}{6} + o(x^8)
\end{aligned}
$$

Hence $a=\frac{1}{3}, n=8$

Example 1.6. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$，且点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，求 α,β

由极限存在可知，$\alpha=1$，泰勒展开

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}(\sin x+\sin^2 x)-\frac{1}{8}(\sin x+\sin^2 x)^2-(1+\beta\sin x)+o(\sin^2 x)}{\sin^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}-\beta)\sin x+\frac{3}{8}\sin^2 x}{\sin^2 x}
\end{aligned}
$$

故 $\beta=\frac{1}{2}$

Example 1.7. let $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n-3x^{-n}}{x^n+x^{-n}}\sin\dfrac{1}{x}$

$$
f(x)=\begin{cases}
2\sin\frac{1}{x}^{x} & x<-1 \\
-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x} & x=-1 \\
-3\sin\frac{1}{x} & -1<x<0 \\
-3\sin\frac{1}{x} & 0<x<1 \\
-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x} & x=1 \\
2\sin\frac{1}{x}^{x} & x>1
\end{cases}
$$

$x=0$ 是第二类间断点，$x=\pm1$ 是第一类间断点

Example 1.8. 设 $f(1)=0, f'(1)=a$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x}$

由 $f(1)=0, f'(1)=a$ 可知，$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t)}{t}=a$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x} &= \frac{2f(e^{x^2})-f(1+\sin^2 x)}{-\frac{1}{2}x^2\left[\sqrt{1+2f(e^{x^2})}+\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}\right]} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x)-f(e^{x^2})}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right] \\
&= -a
\end{aligned}
$$

Example 1.9. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,$f''(0)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(x)dt}{x^\alpha-\sin x}=\beta(\beta\neq 0)$，求 α,β

因为 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,$f(0)=0, f'(0)=0$

因为 $\lim_{x\to 0^+}\int_0^x f(x)dt=0$，因此 $\lim_{x\to 0^+}x^\alpha-\sin x=0$，因此 $\alpha>0$

1. 若 $0<\alpha<1$
2. 若 $\alpha>1$
3. 若 $\alpha=1$

   $\beta=f''(0)$

Example 1.10. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f'(0)=1$，$f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$，求 $f(x)$

$f(0)=0$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{f(x)e^y+f(y)e^x-f(x)}{y} \\
&= \lim_{y\to 0}\left[f(x)\frac{e^y-1}{y}+e^x\frac{f(y)-f(0)}{y}\right] \\
&= f(x)+e^x f'(0) = f(x)+e^x
\end{aligned}
$$

即 $f'(x)-f(x)=e^x$，因此 $f(x)=e^x(x+C)$，又 $f(0)=0, C=0, f(x)=xe^x$

Example 1.11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\end{cases}$

$$
f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x}\left(\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\right)
$$

而 $1\le\frac{\frac{1}{n}}{x}<\frac{n+1}{n}$，由夹逼准则得 $f'_+(0)=1$，因此 $f'(0)=1$

Example 1.12. 设 $f(x)$ 是可导的偶函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足

$$
f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2)
$$

求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程

由

$$
\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)-2x^2}{x^2}=0
$$

得

$$
f(0)-3f(1)=0\Rightarrow f(1)=0
$$

变形

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-\frac{3f(1+\sin x^2)}{\sin x^2}\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}-2\right)=0
$$

有 $f'(1)-3f'(1)-2=0\Rightarrow f'(1)=-1$

Example 1.13. 若 $y=f(x)$ 存在单值反函数，且 $y'\ne 0$，求 $\frac{d^2x}{dy^2}$

根据反函数的求导法则 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$，于是

$$
\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dx}{dy}
$$

因为 $\frac{1}{y'}$ 是以 x 为变量的函数

Example 1.14. 设函数 $f(x)=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，求 a

泰勒展开

$$f(x)=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}=\left(x-\frac{x^3}{3}+\dots\right)-x(1-ax^2+\dots)$$
$$=(a-\frac{1}{3})x^3+\dots$$

因此 $f'''(0)/3!=a-1/3, a=1/2$

Example 1.15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^\xi f(x)dx=\int_\xi^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$$

令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt-\int_x^b f(t)dt$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$F(a)F(b)=-\left[\int_a^b f(t)dt\right]^2<0$$

故由连续函数的零点定理知：在 (a,b) 内存在 ξ 使得 $F(\xi)=0$，即 $\int_a^\xi f(x)dx=\int_\xi^b f(x)dx$

Example 1.16. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx=f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx$$

令 $F'(x)=g(x)\int_a^x f(x)dx-f(x)\int_x^b g(x)dx=(\int_a^x f(t)dt\int_b^x g(t)dt)'$，可取辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt\int_x^b g(t)dt$。则 $F(a)=F(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$

Example 1.17. 设实数 $a_1,\dots,a_n$ 满足关系式 $a_1-\frac{a_2}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$，证明方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\dots+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内至少有一实根

令 $f(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\dots+a_n\cos(2n-1)x$，但 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内不满足零点定理，因此考虑 $f'(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\dots+a_n\cos(2n-1)x$，则 $f(x)=a_1\cos x+\frac{a_2}{3}\sin 3x+\dots+\frac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$，则 $f(0)=f(\pi/2)=0$

Example 1.18. 试确定方程 $e^x=ax^2(a>0)$ 的根的个数，并指出每个根所在的范围

若直接令 $f(x)=e^x-ax^2$，$f'(x)$ 的符号不易判断。又 $x=0$ 不是方程的根，于是方程可化为等价方程 $\frac{e^x}{x^2}=a$

令 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}-a$, 由 $f'(x)=\frac{x-2}{x^3}e^x=0$ 得 $x=2$

Example 1.19. 已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，确定常数 k 的取值范围

令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}-k$，$x\in(0,1]$，则

$$f'(x)=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

因为 $x^2(1+x)\ln^2(1+x)>0$，因此只讨论 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$.

$$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$$
$$g''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2\ln(1+x)-2x}{1+x}$$

因此当 $x\in(0,1)$ 时，$g''(x)<0$，而 $g'(0)=0$，因此 $g(x)$ 递减

Example 1.20. 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$，证明存在 $\xi\in(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$

因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以在 $[0,2]$ 内必有最大值 M 和最小值 m，于是 $m\le f(0)\le M, m\le f(1)\le M, m\le f(2)\le M$，故

$$m\le\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$$

由介值定理，至少存在一点 $\eta\in[0,2]$ 使

$$f(\eta)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

因此 $f(\eta)=f(3)=1$，由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$

Example 1.21. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,在 $(0,2)$ 内具有二阶导数且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}=0, 2\int_{1/2}^{1}f(x)dx=f(2)$，证明存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f''(\xi)=0$

$f(0.5)=0$，因此

$$f'(0.5)=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)-f(0.5)}{x-0.5}=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)}{\cos\pi x}\frac{\cos\pi x}{x-0.5}=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)}{\cos\pi x}\lim_{x\to0.5}\frac{\cos\pi x}{x-0.5}=0$$

再由 $2\int_{0.5}^{2} f(x)dx = f(2)$，用积分中值定理 $\exists\xi_1 \in [0.5, 1]$ 使得 $2f(\xi_1)0.5 = f(2)$，即 $f(\xi) = f(2)$，在 $[\xi_1, 2]$ 上应用罗尔定理，$\exists\xi_2 \in (\xi_1, 2)$ 使 $f'(\xi_2) = 0$

再在 $[0.5, \xi_2]$ 上对 $f'(x)$ 应用罗尔定理，知 $\exists\xi \in (0.5, \xi_2)$，使 $f''(\xi) = 0$

Example 1.22. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，$(0, 1)$ 内可导，且

$$f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx, k > 1$$

证明：在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ 使 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$

1. ξ 换为 x，$f'(x) = (1 - x^{-1})f(x)$
2. 变形 $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - x^{-1}$
3. 两边积分 $\ln f(x) = x - \ln x + \ln C$
4. 分离常数 $\ln \frac{xf(x)}{e^x} = \ln C$，即 $xe^{-x}f(x) = C$，可令辅助函数 $F(x) = xe^{-x}f(x)$

由积分中值定理，存在 $\xi_1 \in [0, \frac{1}{k}]$ 使得 $f(1) = \xi_1 e^{1-\xi_1}f(\xi_1)$，即 $1 \times e^{-1}f(1) = \xi_1 e^{-\xi_1}f(\xi_1)$。因此 $F(x)$ 满足在 $[\xi_1, 1]$ 内的罗尔定理，因此存在 ξ 使得 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$

Example 1.23. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = \lambda$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) + f(\xi) = \lambda$

1. ξ 换为 x，$f'(x) + f(x) = \lambda$ 这是关于 $f(x)$ 的一阶线性微分方程
2. 解微分方程 $f(x) = e^{-x}(\lambda e^x + C)$
3. 分离常数 $[f(x) - \lambda]e^x = C$，可令辅助函数 $F(x) = [f(x) - \lambda]e^x$

$F(a) = F(b) = 0$，因此存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $F'(\xi) = 0$

Example 1.24. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(b) - f(a) = \xi \ln \frac{b}{a} f'(\xi)$

可变形为

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \xi f'(\xi)$$

令 $F(x) = \ln x$，由柯西中值定理，存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \xi f'(\xi)$$

Example 1.25. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$，证明：在 $(-1, 1)$ 内存在一点 ξ 使得 $f'''(\xi) = 3$

泰勒展开 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3,\xi\in(0,x)$，则

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1),-1<\xi_1<0$$
$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2),0<\xi_2<1$$

两式相减得

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$$

由介值定理可证存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]$ 有 $f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$

Example 1.26. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，求证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$

根据拉格朗日中值定理至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

只要再证存在 $\eta\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$ 即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

只要用柯西中值定理

Example 1.27. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$，证明

1. 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=1-\xi$
2. 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$ 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(0)=-1,F(1)=1$

对 $[0,\xi],[\xi,1]$ 分别用拉格朗日中值定理，则

$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\frac{\xi}{1-\xi}=1$$

Example 1.28. 求证 $\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x},0<x<\frac{\pi}{2}$

$f(x)=\sin x\tan x-x^2$

$f'(x)=\sin x+\tan x\sec x-2x$

$f''(x)=\cos x+\sec^3 x+\tan^2 x\sec x-2$

$f'''(x)=-\sin x+5\sec^3 x\tan x+\tan^3 x\sec x=\sin x(5\sec^4 x-1)+\tan^3 x\sec x>0$

Example 1.29. 设 $a > 0, b > 0$，证明不等式

$$a \ln a + b \ln b \geq (a+b)[\ln(a+b) - \ln 2]$$

令 $f(x) = x \ln x$，则 $f'(x) = \ln x + 1, f''(x) = \frac{1}{x} > 0$，即曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 是凹的，故对任意 $a > 0, b > 0$，有

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq f(\frac{a+b}{2})$$

代入得

$$\frac{a \ln a + b \ln b}{2} \geq \frac{a+b}{2} \ln \frac{a+b}{2}$$

Example 1.30. 证明：对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

由拉格朗日定理，存在 $\xi \in (n, n+1)$

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi}$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{n}$$

Example 1.31. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0) = f(1) = 0$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值等于 -1，证明：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ 使 $f''(x) \geq 8$

存在 $a \in (0,1), f'(a) = 0, f(a) = -1$，将 $f(x)$ 在 $x = a$ 泰勒展开

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2 = -1 + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2 (\xi \in (a,x) \text{ or } (x,a))$$

令 $x = 0, x = 1$ 得

$$f(0) = 0 = -1 + \frac{f''(\xi_1)}{2}a^2, 0 < \xi_1 < a$$

$$f(1) = 0 = -1 + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-a)^2, a < \xi_2 < 1$$

若 $0 < a < \frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_1) > 8$

若 $\frac{1}{2} < a < 1$，则 $f''(\xi_2) > 8$

Example 1.32. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$，则当 $f''(x) > 0$ 时

$$f(x) = f(0.5) + f'(0.5)(x-0.5) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-0.5)^2$$

积分

$$\begin{aligned}0&=f(0.5)+f'(0.5)\int_0^1(x-0.5)dx+\frac{f''(\xi)}{2}\int_0^{(}x-0.5)^2dx\\&=f(0.5)+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_0^1(x-0.5)^2dx\end{aligned}$$

因此 $f(0.5)<0$

Example 1.33. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 且 $f(0)=0$, 求 $\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\frac{1-\cos x}{\tan 2^x}\\&=f'(0)\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Example 1.34. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)\cdot f(b)>0, f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2})<0$, 证明: 对任意实数 k, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 \(f′(ξ)=kf(ξ))\

Example 1.35. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=1$, 证明：存在两点 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使

$$(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]=3e^{3\eta-\xi}$$

$$\begin{aligned}&(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]=3e^{3\eta-\xi}\\&\Leftrightarrow(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]e^{\xi}=3e^{3\eta}\\&\Leftrightarrow(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[e^xf(x)]'|_{x=\xi}=e^{3x}|_{x=\eta}\end{aligned}$$

令 $g(x)=e^{3x}$，则由拉格朗日中值定理

$$g'(\eta)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

即 $3e^{3\eta}=\dfrac{e^{3b}-e^{3a}}{b-a}$. 令 $f(x)=e^xf(x)$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{e^bf(b)-e^af(a)}{b-a}=e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]=\frac{e^b-e^a}{b-a}$$

两边同乘 $e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b}$ 得

$$\frac{e^{3b}-e^{3a}}{b-a}=(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]$$

1.2 一元函数积分

Example 1.36. 求不定积分 $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx$

$$\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1} dx = \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} \int \frac{d\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\right] - 1}$$
$$= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1} \right|$$

Example 1.37. 求 $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin x}}$

$$\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin x}} = \int \frac{\cos x dx}{(1 - \sin^2 x)\sqrt{\sin x}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{\sin x})}{1 - (\sqrt{\sin x})^4} = 2 \int \frac{dt}{1 - t^4}$$
$$\int \left(\frac{1}{1 + t^2} + \frac{1}{1 - t^2} \right) dt$$

Example 1.38. 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4 - x)}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4 - x)}} = \int \frac{2d(\sqrt{x})}{\sqrt{4 - x}} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C$$

Example 1.39. 求 $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx = \int \frac{e^x}{e^x(1 + e^x)} dx = \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x + 1} \right) de^x$$

Example 1.40. 求 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

令 $\sqrt{e^x - 1} = t, x = \ln(1 + t^2)$

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} = 2 \int \ln(1 + t^2) dt$$

Example 1.41. 求 $\int \frac{dx}{x^4(1 + x^2)}$

$$\int \frac{dx}{x^4(1 + x^2)} = \int \frac{1 + x^2 - x^2}{x^4(1 + x^2)} dx$$

Example 1.42. 求 $\int \frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2}dx$

$x^3-x^2+2x-2=(x^2+2)(x-1)$，令

$$\frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Example 1.43. 求 $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\int \frac{dx}{\cos^2 x}-\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$$

Example 1.44. 求 $I_n=\int \tan^n x dx$ 的递推公式

$$I_n=\int \tan^{n-2} x(\sec^2 x-1)dx=\int \tan^{n-2} x\sec^2 x dx-\int \tan^{n-2} x dx$$
$$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x-I_{n-2}$$

Example 1.45. 求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

对于 $0\le x\le 1$，有 $0\le \frac{x^n}{1+x}\le x$，则

$$0\le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx\le \int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$$

因此由夹逼定理，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=0$

Example 1.46. 求 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{1+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})$

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{1+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(\frac{1}{n})^2+1}+\cdots+\frac{1}{(\frac{n}{n})^2+1}\right]\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

Example 1.47. 证明下列不等式

$$\frac{\sqrt{\pi}}{80}\pi^2<\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}dx<\frac{\pi^2}{32}$$

当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$0<x<\tan x<1$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{3/2}dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx$$

Example 1.48. 求 $\int_2^3 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2}dx$

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2}dx = \int_2^3 \frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{(x-1)^2}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t} 2\cos t dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2 t - 1)dt = -\cot t|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - t|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

Example 1.49. 求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}dx$

令 $e^{-x} = \sin t$，则

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \frac{\cos t}{\sin t}dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}dt - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$$

$$= -\ln(\csc t + \cot t)|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Example 1.50. 求 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

令 $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} = t$，则 $\sin^2 u = \frac{x}{1+x}, x\cos^2 u = \sin^2 u, x = \tan^2 u$

$$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} ud(\tan^2 u) = (u\cdot\tan^2 u)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1\cdot\tan^2 u du$$

$$= \pi - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 u - 1)du = \pi - \tan u\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

Example 1.51. 求 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx$

令 $x = -t$，则 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}dx$。因此

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} + \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+e^{-x}+1+e^x}{(1+e^{-x})(1+e^x)}\right)\cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

Remark. 一般地，有如下结论：作变换 $x = a + b - t$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-t)dt$$

从而 $I = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x) + f(a+b-x)]dx$

Example 1.52. 求 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx$

令 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1}{2}\sin 2x)dx = \frac{\pi - 1}{4}$$

Remark. 要求 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x)dx$，可作变换 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x, \sin x)dx$

Example 1.53. 求 $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}dx$

令 $x = \pi - t$，则

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1 + \cos^2 t}dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}dt - I$$

Remark. 一般地，$I = \int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t)dt = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t)dt - I$

Example 1.54. 求 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx, a, b > 0$

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx, a, b > 0 = \int_0^1 \left[f_a^b x^t dt \right] dx = \int_a^b \left[\int_0^1 x^t dx \right] dt$$
$$= \ln \frac{b+1}{a+1}$$

Example 1.55. 设 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}dt$，求 $\int_0^{\pi} f(x)dx$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)dx &= \int_0^{\pi} f(x)d(x-\pi) \\ &= (x-\pi)f(x)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(x-\pi)f'(x)dx \\ &= -\int_0^{\pi}(x-\pi)\frac{\sin x}{\pi - x}dx = 2\end{aligned}$$

Example 1.56. 证明 $\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x} = \int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{x}$

$$\begin{aligned}\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x} &= \frac{1}{2}\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{a} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

令 $t = \frac{a^2}{u}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t} &= \int_a^{1} f(\frac{a^2}{u}+u)\frac{u}{a^2}\left(-\frac{a^2}{u^2}\right)du \\ &= \int_1^{a} f(u+\frac{a^2}{u})\frac{1}{u}du\end{aligned}$$

Example 1.57. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，又 $f(a)=f'(a)=0$，证明：

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-b)^2dx$$

利用分部积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b f(x)d(x-b) = -\int_a^b f'(x)(x-b)d(x-b) \\ &= -\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)d(x-b)^2 = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-b)^2dx\end{aligned}$$

Example 1.58. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数且 $f(a)=f(b)=0, M = \max_{[a,b]}|f''(x)|$，证明 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)^2}{12}M$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b f(x)d(x-a) = -\int_a^b f'(x)(x-a)d(x-b) \\
&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx + \int_a^b f'(x)(x-b)dx \\
&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx + \int_a^b (x-b)df(x) \\
&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx - \int_a^b f(x)dx
\end{aligned}$$

则

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$$

因此

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)dx\right| &\le \frac{1}{2}M\int_a^b (x-a)(b-a)dx \\
&= \frac{1}{4}M\int_a^b (x-a)^2dx = \frac{(b-a)^3}{12}M
\end{aligned}$$

Example 1.59. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格单调增，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)dx < 2\int_a^b xf(x)dx$$

令 $F(x) = (a+x)\int_a^x f(t)dt - 2\int_a^x tf(t)dt, (a < x \le b)$

Example 1.60. 求 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}dx \\
&= \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \ln\left[(x-\frac{1}{2}) + \sqrt{(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}}\right]\Big|_1^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Example 1.61. 求 $\displaystyle\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

$$\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int e^x(1+\sin x)\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int e^x d\tan\frac{x}{2} + \int e^x \tan\frac{x}{2}dx$$
$$= e^x \tan\frac{x}{2} + C$$

Example 1.62. 设 $f(x)$ 为非负连续函数，当 $x \geq 0$ 时，有 $\int_0^x f(x)f(x-t)dt = e^{2x}-1$，求 $f(x)$

$f(x)\int)0^x f(u)du = e^{2x-1}$，令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$，则有 $F'(x)F(x) = e^{2x-1}, F(0)=0$，两边积分，得

$$\frac{1}{2}F^2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x + C$$

由 $F(0)=0$ 得，$C = -\frac{1}{2}$. 因此 $F^2(x) = e^{2x} - x - 1$，故

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^{2x}-1}{\sqrt{e^{2x}-2x-1}}$$

Example 1.63. 设 $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt (x>0)$，$g(x)$ 连续，且 $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \int_0^1 g(xt)dt$，求 $g(x)$

$\int_0^1 g(xt)dt = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$，又

$$f(\frac{1}{x}) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t}dt = \int_0^x \frac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}(-\frac{1}{u^2})du = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)}du$$

因此 $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$，于是 $\int_0^x g(t)dt = x\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$，

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt + \ln x = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x$$

Example 1.64. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加，证明：对任意 $a, b > 0$，恒有

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)dx - a\int_0^a f(x)dx\right]$$

令 $F(x) = x\int_0^x f(t)dt$，则 $F'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x)$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b \left[\int_0^x f(t)dt + xf(x)\right]dx$$
$$\leq \int_a^b [xf(x) + xf(x)]dx = 2\int_a^b xf(x)dx$$

1.3 多元函数微积分学

Example 1.65. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$x^2y^2 \le (\frac{x^2+y^2}{2})^2$，因而

$$0 \le \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$$

Example 1.66. 讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 的存在性

当点 $P(x,y)$ 沿曲线 $x=ky^2$ 趋于点 $(0,0)$ 时

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{ky^4}{k^2y^4+y^4} = \frac{k}{k^2+1}$$

不是一个确定的常数，因此极限不存在

Example 1.67. 讨论函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\ne(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处的连续性

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$0 \le |f(x,y)| = \left|\frac{r^2\sin 4\theta}{4}\right| \le \frac{r^2}{4}$$

因此连续

Example 1.68. 设 $z=(s\in y^3+x^3)(x+y^4)^{\frac{y}{x}+e^{y^3x^2}}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)} = \frac{\partial z(x,0)}{\partial x}\Big|_{x=1} = (x^4)'\Big|_{x=1} = 4$$

Example 1.69. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f(0,0)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0$, 于是 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$, 又 $f(0,0)=0$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处极限存在且连续, 又由 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$, 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x^2}=1, \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y^2}=1$$

所以

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x^2}x=0$$

同理 $f'_y(0,0)=0$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在

因为

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}&=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}(\rho=\sqrt{x^2+y^2})\\&=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}=0\end{aligned}$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

Remark. 讨论二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的可微性，可从如下几个方面考虑

1. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的偏导数至少有一个不存在，则函数不可微
2. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不连续，则函数不可微
3. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，两个偏导数存在，则考虑

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho},\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

若极限为 0，则函数在 (x_0,y_0) 可微，否则不可微

Example 1.70. 设 $z=(\frac{y}{2})^{\frac{x}{y}}$，求 $dz\Big|_{(1,2)}$

取对数，有

$$\ln z=\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}\Rightarrow y\ln z=x(\ln y-\ln x)$$

Example 1.71. 设 $u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z}),u=f(s,t)$ 有二阶连续偏导数，求 $du,\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$

$$\begin{aligned}du&=f'_1d(\frac{x}{y})+f'_2d(\frac{y}{z})=f'_1\frac{ydx-xdy}{y^2}+f'_2\frac{zdy-ydz}{z^2}\\&=\frac{1}{y}f'_1dx+(-\frac{x}{y^2}f'_1+\frac{1}{z}f'_2)dy-\frac{y}{z^2}f'_2dz\end{aligned}$$

Example 1.72. 已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某一函数 $f(x,y)$ 的全微分，求 a,b

由题意知，$\frac{\partial f}{\partial x}=axy^3-y^2\cos x,\frac{\partial f}{\partial y}=1+by\sin x+3x^2y^2$，从而有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3axy^2-2y\cos x,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=by\cos x+6xy^2$，显然 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 均连续，所以 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$，即 $by\cos x+6xy^2=3axy^2-2y\cos x$，因此 $a=2,b=-2$

Example 1.73. 设 $z=f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x, f(x,1)=0, \frac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\sin x$，求 $f(x,y)$

$f(x,y)=xy^2+\varphi(x)y+\psi(x)$，从 $\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\sin x$，即 $[2xy+\varphi(x)]\Big|_{y=0}=\sin x$，得 $\varphi(x)=\sin x$

Example 1.74. 设函数 $u=f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$，满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{3/2}$，求函数 f 的表达式

设 $t=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则 $x^2+y^2=e^{2t}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(t)\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y}=f'(t)\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(t)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(t)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(t)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(t)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

代入得 $f''(t)=(x^2+y^2)^{5/2}=e^{5t}$，因此有

$$f(t)=\frac{1}{25}e^{5t}+C_1t+C_2$$

Example 1.75. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则

1. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点
2. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点
3. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点
4. 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

分子的极限为 0，从而有 $f(0,0)=0$，且由极限的性质知, $\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1+\alpha(x,y)$，这里 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\alpha(x,y)=0$，因而 $f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2[1+\alpha(x,y)]$，在点 $(0,0)$ 的某充分小去心邻域内，取 $y=x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y)=x^2+4x^4[1+\alpha(x,x)]>0=f(0,0)$，在点 $(0,0)$ 的某充分小去心邻域内，取 $y=-x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y)=-x^2+4x^4[1+\alpha(x,-x)]<0=f(0,0)$，故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

Example 1.76. 讨论二元函数 $z=x^3+y^3-2(x^2+y^2)$ 的极值

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 4x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

得驻点 $(0,0),(4/3,0),(0,4/3),(4/3,4/3)$. 进而

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 4, B = \frac{\partial^2 z}{\partial xy} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y - 4$$

$$AC - B^2 = 16 + 36xy - 24(x+y)$$

在点 $(0,0)$ 时 $AC - B^2 > 0$ 且 $A < 0$ 有极大值

在点 $(4/3,4/3)$ 时 $AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$ 有极小值

Example 1.77. 求椭圆 $x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y = 0$ 与直线 $x + y = 8$ 之间的最短距离

椭圆上任意一点 $P(x,y)$ 到直线 $x + y = 8$ 的距离的平方为

$$d^2 = \frac{(x+y-8)^2}{2}$$

令 $F(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-8)^2 + \lambda(x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y)$ 则有方程组

$$\begin{cases} F'_x = x + y - 8 + (2\lambda x + 2\lambda y) = 0 \\ F'_y = x + y - 8 + \lambda(2x + 6y - 8) = 0 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x = -2 - 2\sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

且 $d_1 = 4\sqrt{2} - 2, d_2 = 4\sqrt{2} + 2$，所以所求最短距离为 $4\sqrt{2} - 2$

Example 1.78. 求函数 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值

解方程组

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 2xy^2 = 0 \\ f'_y = 4y - 2x^2y = 0 \end{cases}$$

得开区域内的可能极值点为 $(\pm\sqrt{2},1)$，其对应函数值为 $f(\pm\sqrt{2},1) = 2$

当 $y=0$ 时，$f(x,y)=x^2$ 在 $-2\le x\le 2$ 上的最大值为 4，最小值为 0

当 $x^2+y^2=4, y>0, -2<x<2$ 时，构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4)$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x=2x-2xy^2+2\lambda x=0 \\ F'_y=4y-2x^2y+2\lambda y=0 \\ F'_\lambda=x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

得可能极值点:$(0,2),\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$,其对应函数值为 $f(0,2)=8, f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4}$

因此 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 8，最小值 0

Example 1.79. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$，且

$$f(x,y)=1-x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$$

证明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取得极值，判断此极值是极大值还是极小值，并求出此极值

由 $f(x,y)=-(x-1)-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$，由全微分的定义得

$$f(1,0)=0, f'_x(1,0)=f'_y(1,0)=-1$$

计算得 $g'_x=f'_1\cdot e^{xy}y+f'_2\cdot 2x, g'_y=f'_1\cdot e^{xy}x+f'_2\cdot 2y$，有

$$g'_x(0,0)=0, g'_y(0,0)=0$$

再求二阶导数

$$g''_{xx}=(f''_{11}\cdot e^{xy}y+f''_{12}\cdot 2x)e^{xy}y+f'_1\cdot e^{xy}y^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}y+f''_{22}\cdot 2x)2x+2f'_2$$
$$g''_{xy}=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}y+f'_1\cdot(e^{xy}xy+e^{xy})+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2x$$
$$g''_{yy}=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}x+f'_1\cdot e^{xy}x^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2x+2f'_2$$

因此 $A=g''_{xx}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2, B=g''_{xy}(0,0)=f'_1(1,0)=-1, C=g''_{yy}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2$，进而 $AC-B^2>0$，因此 $g(0,0)=f(1,0)=0$ 是极大值

Example 1.80. 已知 x, y, z 为实数，且 $e^x + y^2 + |z| = 3$，求证 $e^x y^2 |z| \le 1$

证明 1 。在 $e^x + y^2 + |z| = 3$ 约束条件下求函数 $u = e^x y^2 |z|$ 的最值问题，转化为无条件极值 $u = e^x y^2(3 - e^x - y^2)$

证明 2 。可化为以下等价问题：已知 $X > 0, Y \ge 0, Z \ge 0$，且 $X+Y+Z = 3$，求 $XYZ \le 1$。因此用拉格朗日乘数法

Example 1.81. 设闭区域 $D : x^2 + y^2 \le y, x \ge 0$，$f(x, y)$ 为 D 上的连续函数，且

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(u, v) du dv$$

求 $f(u, v)$

设 $\iint_D f(u, v) du dv = A$，在已知等式两边求区域 D 的二重积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy - \frac{8A}{\pi} \iint_D dx dy$$

$$A = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy - A$$

$$2A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\theta} \sqrt{1 - r^2} r dr = \frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$$

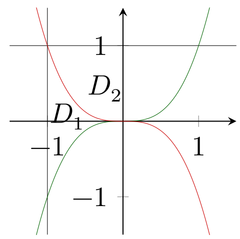
Example 1.82. 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$,$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a, b 为常数，求 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma$

由轮换对称性

$$\begin{aligned}
&\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma = \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} + \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \right] \\
&= \frac{a+b}{2} \iint_D d\sigma = \frac{a+b}{2} \pi
\end{aligned}$$

Example 1.83. 计算二重积分 $I = \iint_D x[1 + y f(x^2 + y^2)] dx dy$，其中积分区域 D 为 $y = x^3, y = 1, x = -1$ 所围成的平面区域，f 连续

补充曲线 $y = -x^3$，拆分积分区域 D 分别关于 x, y 坐标轴对称



$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} \\
&= \iint_{D_1} [x + xyf(x^2+y^2)]dxdy + \iint_{D_2} x[1 + yf(x^2+y^2)]dxdy \\
&= \iint_{D_1} xdxdy = 2\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{-x^3} xdy \\
&= -\frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

Example 1.84. 设平面区域 $D = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$，计算

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

由轮换对称性

$$
\begin{aligned}
&\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy \\
&= \frac{1}{2}\left[\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy + \iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy\right] \\
&= \frac{1}{2}\iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r\sin\pi r dr \\
&= -\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Example 1.85. 计算二重积分 $\iint_D |x^2+y^2-1| d\sigma$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

记 $D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1, (x,y) \in D\}, D_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 > 1, (x,y) \in D\}$，则

$$\begin{aligned}\iint_D |x^2+y^2-1|d\sigma &= -\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy + \iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy \\ &= -2\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy + \iint_D (x^2+y^2-1)dxdy\end{aligned}$$

Example 1.86. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx$，求 $F'(2)$

交换积分次序得

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx = \int_1^t [\int_1^x f(x)dy]dx = \int_1^t f(x)(x-1)dx$$

因此 $F'(2) = f(2)(x-1) = f(2)$

Example 1.87. 计算二重积分 $\iint_D r^2 \sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$,其中 $D = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le \sec\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}$

直角坐标系下 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$

Example 1.88. 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0$，$\iint_D f(x,y)dxdy = a$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$，计算二重积分

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$$

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy = \int_0^1 x(\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy)dx = \int_0^1 x(\int_0^1 ydf'_x(x,y))dx$$

$$\int_0^1 ydf'_x(x,y) = yf'_x(x,y)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'_x(x,y)dy = -\int_0^1 f'_x(x,y)dy$$

$$\int_0^1 x(\int_0^1 ydf'_x(x,y))dx = -\int_0^1 x(\int_0^1 f'_x(x,y)dy)dx = -\int_0^1(\int_0^1 xf'_x(x,y)dx)dy$$

$$\int_0^1 xf'_x(x,y)dx = \int_0^1 xdf(x,y) = xf(x,y)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x,y)dx = -\int_0^1 f(x,y)dx$$

$$\iint_D xyf''_{xy}dxdy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx = a$$

Example 1.89. 求积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right)dx$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx &= \int_0^1 dx f_0^x \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dy = \int_0^1 (e^{x^2} - \int_0^x e^{y^2} dy) dx \\
&= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 (\int_0^x e^{y^2} dy) dx \\
&= \int_0^1 e^{x^2} dx - x \int_0^x e^{y^2} dy \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{x^2} \cdot x dx \\
&= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{y^2} dy + \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 \\
&= \frac{e-1}{2}
\end{aligned}
$$