考研题目本

喵喵喵

2020 年 10 月 28 日

目录

1 微积分

1.1 一元函数微分

Example 1.1. 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0, f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{x^3\int_0^1 f(xt)dt}$

令 $x^2-t=u, xt=u$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{x^3\int_0^1 f(xt)dt} &= \lim_{x\to 0}\frac{-\int_{x^2}^0 f(u)du}{x^3\int_0^x f(u)\frac{du}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(u)du}{x^2\int_0^x f(u)du} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(u)du + x^2 f(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(u)du + xf(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4f'(x^2)}{3\frac{f(x)-f(0)}{x}+f'(x)} = 1
\end{aligned}$$

Example 1.2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$

利用泰勒展开，$\sqrt{1+x^2} = 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$, $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$,$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)} = -\frac{1}{12}$$

Example 1.3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n})$

因为 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = A$

Example 1.4. suppose $y_n = \left[\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n+1}}$. Compute $\lim_{n\to\infty} y_n$

$$
\begin{aligned}
\ln y_n &= \frac{1}{n+1}\ln\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{1}{n+1}\ln\frac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{n^n} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n}) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\right)
\end{aligned}
$$

Hence

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\right) \\
&= 1\cdot\int_0^1 \ln(1+x)dx = x\ln(1+x)|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx \\
&= \ln 2 - 1 + \ln 2 = \ln\frac{4}{e}
\end{aligned}
$$

Example 1.5. 已知 $x \to 0$ 时，$e^{-x^4} - \cos(\sqrt{2}x^2)$ 与 ax^n 是等价无穷小，试求 a, n

$$
\begin{aligned}
e^{-x^4} &= 1 - x^4 + \frac{x^8}{2} + o(x^8) \\
\cos(\sqrt{2}x^2) &= 1 - x^4 + \frac{x^8}{6} + o(x^8)
\end{aligned}
$$

Hence $a = \frac{1}{3}, n = 8$

Example 1.6. 设 $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x} - (\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$，且点 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，求 α, β

由极限存在可知，$\alpha = 1$，泰勒展开

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x} - (\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}(\sin x+\sin^2 x) - \frac{1}{8}(\sin x+\sin^2 x)^2 - (1+\beta\sin x) + o(\sin^2 x)}{\sin^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}-\beta)\sin x + \frac{3}{8}\sin^2 x}{\sin^2 x}
\end{aligned}
$$

故 $\beta = \frac{1}{2}$

Example 1.7. let $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n - 3x^{-n}}{x^n + x^{-n}}\sin\dfrac{1}{x}$

$$
f(x)=\begin{cases}
2\sin\frac{1}{x}^{x} & x<-1\\
-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x} & x=-1\\
-3\sin\frac{1}{x} & -1<x<0\\
-3\sin\frac{1}{x} & 0<x<1\\
-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x} & x=1\\
2\sin\frac{1}{x}^{x} & x>1
\end{cases}
$$

$x=0$ 是第二类间断点，$x=\pm 1$ 是第一类间断点

Example 1.8. 设 $f(1)=0, f'(1)=a$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x}$

由 $f(1)=0, f'(1)=a$ 可知，$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t)}{t}=a$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x}&=\frac{2f(e^{x^2})-f(1+\sin^2 x)}{-\frac{1}{2}x^2\left[\sqrt{1+2f(e^{x^2})}+\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}\right]}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x)-f(e^{x^2})}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right]\\
&=-a
\end{aligned}
$$

Example 1.9. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0, f''(0)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(x)dt}{x^\alpha-\sin x}=\beta(\beta\neq 0)$，求 α,β

因为 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0, f(0)=0, f'(0)=0$

因为 $\lim_{x\to 0^+}\int_0^x f(x)dt=0$，因此 $\lim_{x\to 0^+}x^\alpha-\sin x=0$，因此 $\alpha>0$

1. 若 $0<\alpha<1$
2. 若 $\alpha>1$
3. 若 $\alpha=1$

   $\beta=f''(0)$

Example 1.10. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f'(0)=1$，$f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$，求 $f(x)$

$f(0)=0$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{f(x)e^y+f(y)e^x-f(x)}{y}\\
&= \lim_{y\to 0}\left[f(x)\frac{e^y-1}{y}+e^x\frac{f(y)-f(0)}{y}\right]\\
&= f(x)+e^x f'(0)=f(x)+e^x
\end{aligned}
$$

即 $f'(x)-f(x)=e^x$, 因此 $f(x)=e^x(x+C)$, 又 $f(0)=0, C=0, f(x)=xe^x$

Example 1.11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x & x\le 0\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\end{cases}$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x}\left(\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\right)$$

而 $1\le\frac{\frac{1}{n}}{x}<\frac{n+1}{n}$，由夹逼准则得 $f'_+(0)=1$，因此 $f'(0)=1$

Example 1.12. 设 $f(x)$ 是可导的偶函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足

$$f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2)$$

求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程

由

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)-2x^2}{x^2}=0$$

得

$$f(0)-3f(1)=0\Rightarrow f(1)=0$$

变形

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-\frac{3f(1+\sin x^2)}{\sin x^2}\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}-2\right)=0$$

有 $f'(1)-3f'(1)-2=0\Rightarrow f'(1)=-1$

Example 1.13. 若 $y = f(x)$ 存在单值反函数，且 $y' \neq 0$，求 $\frac{d^2x}{dy^2}$

根据反函数的求导法则 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$，于是

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dx}{dy}$$

因为 $\frac{1}{y'}$ 是以 x 为变量的函数

Example 1.14. 设函数 $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0) = 1$，求 a

泰勒展开

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x - \frac{x}{1+ax^2} = \left(x - \frac{x^3}{3} + ...\right) - x(1 - ax^2 + ...) \\ &= (a - \frac{1}{3})x^3 + ... \end{aligned}$$

因此 $f'''(0)/3! = a - 1/3, a = 1/2$

Example 1.15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x) > 0$，证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$$

令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$F(a)F(b) = -\left[\int_a^b f(t)dt\right]^2 < 0$$

故由连续函数的零点定理知：在 (a,b) 内存在 ξ 使得 $F(\xi) = 0$，即 $\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx$

Example 1.16. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx = f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx$$

令 $F'(x) = g(x)\int_a^x f(x)dx - f(x)\int_x^b g(x)dx = (\int_a^x f(t)dt \int_b^x g(t)dt)'$，可取辅助函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt \int_x^b g(t)dt$。则 $F(a) = F(b) = 0$，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$

Example 1.17. 设实数 $a_1, ..., a_n$ 满足关系式 $a_1 - \frac{a_2}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1} = 0$，证明方程 $a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \cdots + a_n \cos(2n-1)x = 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一实根

令 $f(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x$, 但 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内不满足零点定理, 因此考虑 $f'(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x$, 则 $f(x)=a_1\cos x+\frac{a_2}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$, 则 $f(0)=f(\pi/2)=0$

Example 1.18. 试确定方程 $e^x=ax^2(a>0)$ 的根的个数，并指出每个根所在的范围

若直接令 $f(x)=e^x-ax^2$，$f'(x)$ 的符号不易判断。又 $x=0$ 不是方程的根，于是方程可化为等价方程 $\frac{e^x}{x^2}=a$

令 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}-a$, 由 $f'(x)=\frac{x-2}{x^3}e^x=0$ 得 $x=2$

Example 1.19. 已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，确定常数 k 的取值范围

令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}-k$，$x\in(0,1]$，则

$$f'(x)=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

因为 $x^2(1+x)\ln^2(1+x)>0$，因此只讨论 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$.

$$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$$
$$g''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2\ln(1+x)-2x}{1+x}$$

因此当 $x\in(0,1)$ 时，$g''(x)<0$，而 $g'(0)=0$，因此 $g(x)$ 递减

Example 1.20. 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$，证明存在 $\xi\in(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$

因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以在 $[0,2]$ 内必有最大值 M 和最小值 m，于是 $m\le f(0)\le M, m\le f(1)\le M, m\le f(2)\le M$，故

$$m\le\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$$

由介值定理，至少存在一点 $\eta\in[0,2]$ 使

$$f(\eta)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

因此 $f(\eta)=f(3)=1$，由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$

Example 1.21. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内具有二阶导数且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)}{\cos\pi x}=0, 2\int_{1/2}^{1}f(x)dx=f(2)$，证明存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f''(\xi)=0$

$f(0.5)=0$，因此

$$f'(0.5)=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)-f(0.5)}{x-0.5}=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)}{\cos\pi x}\frac{\cos\pi x}{x-0.5}=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)}{\cos\pi x}\lim_{x\to0.5}\frac{\cos\pi x}{x-0.5}=0$$

再由 $2\int_{0.5}^{2}f(x)dx=f(2)$，用积分中值定理 $\exists\xi_1\in[0.5,1]$ 使得 $2f(\xi_1)0.5=f(2)$，即 $f(\xi)=f(2)$，在 $[\xi_1,2]$ 上应用罗尔定理，$\exists\xi_2\in(\xi_1,2)$ 使 $f'(\xi_2)=0$

再在 $[0.5,\xi_2]$ 上对 $f'(x)$ 应用罗尔定理，知 $\exists\xi\in(0.5,\xi_2)$，使 $f''(\xi)=0$

Example 1.22. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx, k>1$$

证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ 使 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$

1. ξ 换为 x，$f'(x)=(1-x^{-1})f(x)$
2. 变形 $\frac{f'(x)}{f(x)}=1-x^{-1}$
3. 两边积分 $\ln f(x)=x-\ln x+\ln C$
4. 分离常数 $\ln\frac{xf(x)}{e^x}=\ln C$，即 $xe^{-x}f(x)=C$，可令辅助函数 $F(x)=xe^{-x}f(x)$

由积分中值定理，存在 $\xi_1\in[0,\frac{1}{k}]$ 使得 $f(1)=\xi_1e^{1-\xi_1}f(\xi_1)$，即 $1\times e^{-1}f(1)=\xi_1e^{-\xi_1}f(\xi_1)$。因此 $F(x)$ 满足在 $[\xi_1,1]$ 内的罗尔定理，因此存在 ξ 使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$

Example 1.23. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=\lambda$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)+f(\xi)=\lambda$

1. ξ 换为 x，$f'(x)+f(x)=\lambda$ 这是关于 $f(x)$ 的一阶线性微分方程
2. 解微分方程 $f(x)=e^{-x}(\lambda e^x+C)$
3. 分离常数 $[f(x)-\lambda]e^x=C$，可令辅助函数 $F(x)=[f(x)-\lambda]e^x$

$F(a)=F(b)=0$，因此存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $F'(\xi)=0$

Example 1.24. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi)$

可变形为

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\xi f'(\xi)$$

令 $F(x)=\ln x$，由柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\xi f'(\xi)$$

Example 1.25. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=0$，证明：在 $(-1,1)$ 内存在一点 ξ 使得 $f'''(\xi)=3$

泰勒展开 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3,\xi\in(0,x)$，则

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1),-1<\xi_1<0$$
$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2),0<\xi_2<1$$

两式相减得

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$$

由介值定理可证存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]$ 有 $f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$

Example 1.26. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，求证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$

根据拉格朗日中值定理至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

只要再证存在 $\eta\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$ 即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

只要用柯西中值定理

Example 1.27. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$，证明

1. 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=1-\xi$
2. 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$ 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(0)=-1,F(1)=1$

对 $[0,\xi],[\xi,1]$ 分别用拉格朗日中值定理，则

$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\frac{\xi}{1-\xi}=1$$

Example 1.28. 求证 $\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x},0<x<\frac{\pi}{2}$

$f(x)=\sin x\tan x-x^2$

$f'(x)=\sin x+\tan x\sec x-2x$

$f''(x)=\cos x+\sec^3 x+\tan^2 x\sec x-2$

$f'''(x)=-\sin x+5\sec^3 x\tan x+\tan^3 x\sec x=\sin x(5\sec^4 x-1)+\tan^3 x\sec x>0$

Example 1.29. 设 $a>0,b>0$，证明不等式

$$a\ln a+b\ln b\geq(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2]$$

令 $f(x)=x\ln x$，则 $f'(x)=\ln x+1,f''(x)=\frac{1}{x}>0$，即曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是凹的，故对任意 $a>0,b>0$，有

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geq f(\frac{a+b}{2})$$

代入得

$$\frac{a\ln a+b\ln b}{2}\geq\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}$$

Example 1.30. 证明：对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}\leq\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

由拉格朗日定理，存在 $\xi\in(n,n+1)$

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi}$$

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}$$

Example 1.31. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值等于 -1，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $f''(x)\geq 8$

存在 $a\in(0,1),f'(a)=0,f(a)=-1$，将 $f(x)$ 在 $x=a$ 泰勒展开

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2=-1+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2(\xi\in(a,x)\text{ or }(x,a))$$

令 $x=0,x=1$ 得

$$f(0)=0=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}a^2, 0<\xi_1<a$$
$$f(1)=0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-a)^2, a<\xi_2<1$$

若 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_1)>8$

若 $\frac{1}{2}<a<1$，则 $f''(\xi_2)>8$

Example 1.32. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，则当 $f''(x)>0$ 时

$$f(x)=f(0.5)+f'(0.5)(x-0.5)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-0.5)^2$$

积分

$$\begin{aligned}0&=f(0.5)+f'(0.5)\int_0^1(x-0.5)dx+\frac{f''(\xi)}{2}\int_0^{(}x-0.5)^2dx\\&=f(0.5)+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_0^1(x-0.5)^2dx\end{aligned}$$

因此 $f(0.5)<0$

Example 1.33. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 且 $f(0)=0$, 求 $\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x}&=\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\frac{1-\cos x}{\tan 2^x}\\&=f'(0)\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Example 1.34. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)\cdot f(b)>0, f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2})<0$，证明：对任意实数 k，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 \(f'(ξ)=kf(ξ))\

Example 1.35. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=1$, 证明：存在两点 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使

$$(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]=3e^{3\eta-\xi}$$

$$\begin{aligned}&(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]=3e^{3\eta-\xi}\\&\Leftrightarrow(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]e^{\xi}=3e^{3\eta}\\&\Leftrightarrow(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[e^xf(x)]'|_{x=\xi}=e^{3x}|_{x=\eta}\end{aligned}$$

令 $g(x)=e^{3x}$，则由拉格朗日中值定理

$$g'(\eta)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

即 $3e^{3\eta}=\dfrac{e^{3b}-e^{3a}}{b-a}$. 令 $f(x)=e^{x}f(x)$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{e^{b}f(b)-e^{a}f(a)}{b-a}=e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]=\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}$$

两边同乘 $e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b}$ 得

$$\frac{e^{3b}-e^{3a}}{b-a}=(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]$$

1.2 一元函数积分

Example 1.36. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{2^{x}\cdot 3^{x}}{9^{x}-4^{x}}dx$

$$\int\frac{2^{x}\cdot 3^{x}}{9^{x}-4^{x}}dx=\int\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{x}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}dx=\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int\frac{d\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x}\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\right]-1}$$
$$=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+1}\right|$$

Example 1.37. 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin x}}$

$$\int\frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin x}}=\int\frac{\cos x dx}{(1-\sin^{2}x)\sqrt{\sin x}}=2\int\frac{d(\sqrt{\sin x})}{1-(\sqrt{\sin x})^{4}}=2\int\frac{dt}{1-t^{4}}$$
$$\int\left(\frac{1}{1+t^{2}}+\frac{1}{1-t^{2}}\right)dt$$

Example 1.38. 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}=\int\frac{2d(\sqrt{x})}{\sqrt{4-x}}=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C$$

Example 1.39. 求 $\displaystyle\int\frac{1}{1+e^{x}}dx$

$$\int\frac{1}{1+e^{x}}dx=\int\frac{e^{x}}{e^{x}(1+e^{x})}dx=\int\left(\frac{1}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}+1}\right)de^{x}$$

Example 1.40. 求 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

令 $\sqrt{e^x-1}=t, x=\ln(1+t^2)$

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}} = 2\int \ln(1+t^2)dt$$

Example 1.41. 求 $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$

$$\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^4(1+x^2)}dx$$

Example 1.42. 求 $\int \frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2}dx$

$x^3-x^2+2x-2=(x^2+2)(x-1)$，令

$$\frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Example 1.43. 求 $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C$$

Example 1.44. 求 $I_n = \int \tan^n x dx$ 的递推公式

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)dx = \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2} \end{aligned}$$

Example 1.45. 求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

对于 $0 \le x \le 1$，有 $0 \le \frac{x^n}{1+x} \le x$，则

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

因此由夹逼定理，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$

Example 1.46. 求 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{1+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{1+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}) &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(\frac{1}{n})^2+1}+\cdots+\frac{1}{(\frac{n}{n})^2+1}\right]\cdot\frac{1}{n}\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Example 1.47. 证明下列不等式

$$\frac{\sqrt{\pi}}{80}\pi^2 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}dx < \frac{\pi^2}{32}$$

当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$0<x<\tan x<1$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{3/2}dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx$$

Example 1.48. 求 $\int_2^3 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2}dx$

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2}dx = \int_2^3 \frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{(x-1)^2}dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}2\cos tdt\\ = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^t}dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 t-1)dt &= -\cot t|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - t|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Example 1.49. 求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}dx$

令 $e^{-x}=\sin t$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\frac{\cos t}{\sin t}dt &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t}dt - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt\\ &= -\ln(\csc t+\cot t)|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Example 1.50. 求 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

令 $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}=t$，则 $\sin^2 u=\frac{x}{1+x}, x\cos^2 u=\sin^2 u, x=\tan^2 u$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} ud(\tan^2 u)=(u\cdot\tan^2 u)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}1\cdot\tan^2 udu\\ &=\pi-\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 u-1)du=\pi-\tan u\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{\pi}{3}\\ &=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\end{aligned}$$

Example 1.51. 求 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx$

令 $x=-t$，则 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{x}}dx$。因此

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}+\frac{\cos^2 x}{1+e^{x}}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+e^{-x}+1+e^{x}}{(1+e^{-x})(1+e^{x})}\right)\cos^2 xdx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 dx=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

Remark. 一般地，有如下结论：作变换 $x=a+b-t$

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-t)dt$$

从而 $I=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx$

Example 1.52. 求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)dx\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{1}{2}\sin 2x)dx=\frac{\pi-1}{4}\end{aligned}$$

Remark. 要求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x,\cos x)dx$，可作变换 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x,\sin x)dx$

Example 1.53. 求 $I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

令 $x=\pi-t$，则

$$I=\int_0^\pi \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-I$$

Remark. 一般地，$I=\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\int_0^\pi(\pi-t)f(\sin t)dt=\pi\int_0^\pi f(\sin t)dt-I$

Example 1.54. 求 $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx, a, b>0$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx, a, b>0 &= \int_0^1\left[\textstyle\int_a^b x^t dt\right]dx=\int_a^b\left[\int_0^1 x^t dx\right]dt\\ &=\ln\frac{b+1}{a+1}\end{aligned}$$

Example 1.55. 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，求 $\int_0^\pi f(x)dx$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)dx &= \int_0^\pi f(x)d(x-\pi)\\ &=(x-\pi)f(x)|_0^\pi-\int_0^\pi(x-\pi)f'(x)dx\\ &=-\int_0^\pi(x-\pi)\frac{\sin x}{\pi-x}dx=2\end{aligned}$$

Example 1.56. 证明 $\displaystyle\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x}=\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{x}$

$$\begin{aligned}\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x} &= \frac{1}{2}\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}\\ &=\frac{1}{2}\int_1^a f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

令 $t=\frac{a^2}{u}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t} &= \int_a^1 f(\frac{a^2}{u}+u)\frac{u}{a^2}\left(-\frac{a^2}{u^2}\right)du\\ &=\int_1^a f(u+\frac{a^2}{u})\frac{1}{u}du\end{aligned}$$

Example 1.57. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，又 $f(a)=f'(a)=0$，证明：

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-b)^2dx$$

利用分部积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b f(x)d(x-b)=-\int_a^b f'(x)(x-b)d(x-b)\\ &=-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)d(x-b)^2=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-b)^2dx\end{aligned}$$

Example 1.58. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数且 $f(a)=f(b)=0$,$M=\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$，证明 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{(b-a)^2}{12}M$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b f(x)d(x-a)=-\int_a^b f'(x)(x-a)d(x-b)\\ &=\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx+\int_a^b f'(x)(x-b)dx\\ &=\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx+\int_a^b (x-b)df(x)\\ &=\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx-\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

则

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx\right| &\le \frac{1}{2}M\int_a^b (x-a)(b-a)dx\\ &=\frac{1}{4}M\int_a^b (x-a)^2dx=\frac{(b-a)^3}{12}M\end{aligned}$$

Example 1.59. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格单调增，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)dx<2\int_a^b xf(x)dx$$

令 $F(x)=(a+x)\int_a^x f(t)dt-2\int_a^x tf(t)dt,(a<x\le b)$

Example 1.60. 求 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}dx \\ &= \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \ln\left[(x-\frac{1}{2}) + \sqrt{(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}}\right]\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Example 1.61. 求 $\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

$$\begin{aligned}\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx &= \int e^x(1+\sin x)\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int e^x d\tan\frac{x}{2} + \int e^x \tan\frac{x}{2}dx \\ &= e^x \tan\frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

Example 1.62. 设 $f(x)$ 为非负连续函数，当 $x \geq 0$ 时，有 $\int_0^x f(x)f(x-t)dt = e^{2x}-1$，求 $f(x)$

$f(x)\int)0^x f(u)du = e^{2x-1}$，令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$，则有 $F'(x)F(x) = e^{2x-1}, F(0)=0$，两边积分，得

$$\frac{1}{2}F^2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x + C$$

由 $F(0)=0$ 得，$C=-\frac{1}{2}$. 因此 $F^2(x) = e^{2x}-x-1$，故

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^{2x}-1}{\sqrt{e^{2x}-2x-1}}$$

Example 1.63. 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt (x>0)$，$g(x)$ 连续，且 $f(x)+f(\frac{1}{x}) = \int_0^1 g(xt)dt$，求 $g(x)$

$\int_0^1 g(xt)dt = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$，又

$$f(\frac{1}{x}) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t}dt = \int_0^x \frac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}(-\frac{1}{u^2})du = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)}du$$

因此 $f(x)+f(\frac{1}{x}) = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$，于是 $\int_0^x g(t)dt = x\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$，

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt + \ln x = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x$$

Example 1.64. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加, 证明: 对任意 $a,b>0$, 恒有

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)dx - a\int_0^a f(x)dx\right]$$

令 $F(x)=x\int_0^x f(t)dt$，则 $F'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)$

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b \left[\int_0^x f(t)dt + xf(x)\right]dx \\ &\leq \int_a^b [xf(x)+xf(x)]dx = 2\int_a^b xf(x)dx \end{aligned}$$

1.3 多元函数微积分学

Example 1.65. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$x^2y^2 \leq (\frac{x^2+y^2}{2})^2$，因而

$$0 \leq \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$$

Example 1.66. 讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 的存在性

当点 $P(x,y)$ 沿曲线 $x=ky^2$ 趋于点 $(0,0)$ 时

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{ky^4}{k^2y^4+y^4} = \frac{k}{k^2+1}$$

不是一个确定的常数，因此极限不存在

Example 1.67. 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处的连续性

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$0 \leq |f(x,y)| = \left|\frac{r^2\sin 4\theta}{4}\right| \leq \frac{r^2}{4}$$

因此连续

Example 1.68. 设 $z=(s\in y^3+x^3)(x+y^4)^{\frac{y}{x}+e^{y^3x^2}}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=\frac{\partial z(x,0)}{\partial x}\Big|_{x=1}=(x^4)'\Big|_{x=1}=4$$

Example 1.69. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f(0,0)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$, $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)=0$, 于是 $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$, 又 $f(0,0)=0$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处极限存在且连续, 又由 $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$, 得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x^2}=1,\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)}{y^2}=1$$

所以

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x^2}x=0$$

同理 $f'_y(0,0)=0$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在

因为

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}&=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}(\rho=\sqrt{x^2+y^2})\\&=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}=0\end{aligned}$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

Remark. 讨论二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的可微性，可从如下几个方面考虑

1. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的偏导数至少有一个不存在，则函数不可微
2. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不连续，则函数不可微
3. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，两个偏导数存在，则考虑

   $$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-[f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho},\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

   若极限为 0，则函数在 (x_0,y_0) 可微，否则不可微

Example 1.70. 设 $z=(\frac{y}{2})^{\frac{x}{y}}$，求 $dz\Big|_{(1,2)}$

取对数，有

$$\ln z=\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}\Rightarrow y\ln z=x(\ln y-\ln x)$$

Example 1.71. 设 $u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z}),u=f(s,t)$ 有二阶连续偏导数，求 $du,\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$

$$\begin{aligned}du&=f_1'd(\frac{x}{y})+f_2'd(\frac{y}{z})=f_1'\frac{ydx-xdy}{y^2}+f_2'\frac{zdy-ydz}{z^2}\\&=\frac{1}{y}f_1'dx+(-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2')dy-\frac{y}{z^2}f_2'dz\end{aligned}$$

Example 1.72. 已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某一函数 $f(x,y)$ 的全微分，求 a,b

由题意知，$\frac{\partial f}{\partial x}=axy^3-y^2\cos x,\frac{\partial f}{\partial y}=1+by\sin x+3x^2y^2$，从而有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3axy^2-2y\cos x,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=by\cos x+6xy^2$，显然 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 均连续，所以 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$，即 $by\cos x+6xy^2=3axy^2-2y\cos x$，因此 $a=2,b=-2$

Example 1.73. 设 $z=f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x,f(x,1)=0,\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\sin x$，求 $f(x,y)$

$f(x,y)=xy^2+\varphi(x)y+\psi(x)$，从 $\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\sin x$，即 $[2xy+\varphi(x)]\Big|_{y=0}=\sin x$，得 $\varphi(x)=\sin x$

Example 1.74. 设函数 $u=f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$，满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{3/2}$，求函数 f 的表达式

设 $t=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则 $x^2+y^2=e^{2t}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=f'(t)\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial u}{\partial y}=f'(t)\frac{y}{x^2+y^2}\\\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=f''(t)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(t)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=f''(t)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(t)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

代入得 $f''(t)=(x^2+y^2)^{5/2}=e^{5t}$，因此有

$$f(t)=\frac{1}{25}e^{5t}+C_1t+C_2$$

Example 1.75. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 1$，则

1. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点
2. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点
3. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点
4. 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

分子的极限为 0，从而有 $f(0,0) = 0$，且由极限的性质知，$\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 1+\alpha(x,y)$，这里 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \alpha(x,y) = 0$，因而 $f(x,y) = xy+(x^2+y^2)^2[1+\alpha(x,y)]$，在点 $(0,0)$ 的某充分小去心邻域内，取 $y = x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y) = x^2+4x^4[1+\alpha(x,x)] > 0 = f(0,0)$，在点 $(0,0)$ 的某充分小去心邻域内，取 $y = -x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y) = -x^2+4x^4[1+\alpha(x,-x)] < 0 = f(0,0)$，故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

Example 1.76. 讨论二元函数 $z = x^3+y^3-2(x^2+y^2)$ 的极值

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2-4x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2-4y = 0 \end{cases}$$

得驻点 $(0,0), (4/3,0), (0,4/3), (4/3,4/3)$. 进而

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x-4, B = \frac{\partial^2 z}{\partial xy} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y-4$$
$$AC-B^2 = 16+36xy-24(x+y)$$

在点 $(0,0)$ 时 $AC-B^2 > 0$ 且 $A < 0$ 有极大值

在点 $(4/3,4/3)$ 时 $AC-B^2 > 0$ 且 $A > 0$ 有极小值

Example 1.77. 求椭圆 $x^2+2xy+3y^2-8y = 0$ 与直线 $x+y = 8$ 之间的最短距离

椭圆上任意一点 $P(x,y)$ 到直线 $x+y = 8$ 的距离的平方为

$$d^2 = \frac{(x+y-8)^2}{2}$$

令 $F(x,y)=\dfrac{1}{2}(x+y-8)^2+\lambda(x^2+2xy+3y^2-8y)$ 则有方程组

$$\begin{cases} F_x'=x+y-8+(2\lambda x+2\lambda y)=0 \\ F_y'=x+y-8+\lambda(2x+6y-8)=0 \\ x^2+2xy+3y^2-8y=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=-2+2\sqrt{2} \\ y=2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x=-2-2\sqrt{2} \\ y=2 \end{cases}$$

且 $d_1=4\sqrt{2}-2, d_2=4\sqrt{2}+2$，所以所求最短距离为 $4\sqrt{2}-2$

Example 1.78. 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4, y\geq 0\}$ 上的最大值和最小值

解方程组

$$\begin{cases} f_x'=2x-2xy^2=0 \\ f_y'=4y-2x^2y=0 \end{cases}$$

得开区域内的可能极值点为 $(\pm\sqrt{2},1)$，其对应函数值为 $f(\pm\sqrt{2},1)=2$

当 $y=0$ 时，$f(x,y)=x^2$ 在 $-2\leq x\leq 2$ 上的最大值为 4，最小值为 0

当 $x^2+y^2=4, y>0, -2<x<2$ 时，构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4)$$

解方程组

$$\begin{cases} F_x'=2x-2xy^2+2\lambda x=0 \\ F_y'=4y-2x^2y+2\lambda y=0 \\ F_\lambda'=x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

得可能极值点:$(0,2), \left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$,其对应函数值为 $f(0,2)=8, f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4}$

因此 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 8，最小值 0

Example 1.79. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$，且

$$f(x,y)=1-x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$$

证明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取得极值，判断此极值是极大值还是极小值，并求出此极值

由 $f(x,y)=-(x-1)-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$，由全微分的定义得

$$f(1,0)=0, f'_x(1,0)=f'_y(1,0)=-1$$

计算得 $g'_x=f'_1\cdot e^{xy}y+f'_2\cdot 2x, g'_y=f'_1\cdot e^{xy}x+f'_2\cdot 2y$，有

$$g'_x(0,0)=0, g'_y(0,0)=0$$

再求二阶导数

$$g''_{xx}=(f''_{11}\cdot e^{xy}y+f''_{12}\cdot 2x)e^{xy}y+f'_1\cdot e^{xy}y^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}y+f''_{22}\cdot 2x)2x+2f'_2$$
$$g''_{xy}=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}y+f'_1\cdot(e^{xy}xy+e^{xy})+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2x$$
$$g''_{yy}=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}x+f'_1\cdot e^{xy}x^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2x+2f'_2$$

因此 $A=g''_{xx}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2, B=g''_{xy}(0,0)=f'_1(1,0)=-1, C=g''_{yy}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2$，进而 $AC-B^2>0$，因此 $g(0,0)=f(1,0)=0$ 是极大值

Example 1.80. 已知 x,y,z 为实数，且 $e^x+y^2+|z|=3$，求证 $e^xy^2|z|\le 1$

证明 *1* 。在 $e^x+y^2+|z|=3$ 约束条件下求函数 $u=e^xy^2|z|$ 的最值问题，转化为无条件极值 $u=e^xy^2(3-e^x-y^2)$

证明 2。可化为以下等价问题：已知 $X>0, Y\ge 0, Z\ge 0$，且 $X+Y+Z=3$，求 $XYZ\le 1$。因此用拉格朗日乘数法

Example 1.81. 设闭区域 $D: x^2+y^2\le y, x\ge 0$，$f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)dudv$$

求 $f(u,v)$

设 $\iint_D f(u,v)dudv=A$，在已知等式两边求区域 D 的二重积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\frac{8A}{\pi}\iint_D dxdy$$
$$A=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-A$$
$$2A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}rdr=\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$$

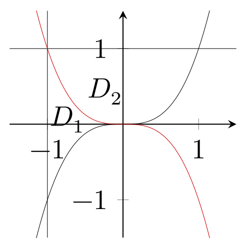
Example 1.82. 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$,$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，求 $\iint_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma$

由轮换对称性

$$
\begin{aligned}
&\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}d\sigma=\iint_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma \\
&=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}+\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\right] \\
&=\frac{a+b}{2}\iint_D d\sigma=\frac{a+b}{2}\pi
\end{aligned}
$$

Example 1.83. 计算二重积分 $I=\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$，其中积分区域 D 为 $y=x^3,y=1,x=-1$ 所围成的平面区域，f 连续

补充曲线 $y=-x^3$，拆分积分区域 D 分别关于 x,y 坐标轴对称



$$
\begin{aligned}
I&=\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2} \\
&=\iint_{D_1}[x+xyf(x^2+y^2)]dxdy+\iint_{D_2}x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy \\
&=\iint_{D_1}xdxdy=2\int_{-1}^{0}dx\int_{0}^{-x^3}xdy \\
&=-\frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

Example 1.84. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$，计算

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

由轮换对称性

$$
\begin{aligned}
&\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy \\
&= \frac{1}{2}\left[\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy + \iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy\right] \\
&= \frac{1}{2}\iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r\sin\pi r dr \\
&= -\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Example 1.85. 计算二重积分 $\iint_D |x^2+y^2-1|d\sigma$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

记 $D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1, (x,y) \in D\}, D_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 > 1, (x,y) \in D\}$，则

$$
\begin{aligned}
\iint_D |x^2+y^2-1|d\sigma &= -\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy + \iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy \\
&= -2\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy + \iint_D (x^2+y^2-1)dxdy
\end{aligned}
$$

Example 1.86. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx$，求 $F'(2)$

交换积分次序得

$$
F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx = \int_1^t [\int_1^x f(x)dy]dx = \int_1^t f(x)(x-1)dx
$$

因此 $F'(2) = f(2)(x-1) = f(2)$

Example 1.87. 计算二重积分 $\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$，其中 $D = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le \sec\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}$

直角坐标系下 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$

Example 1.88. 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y) = 0, f(x,1) = 0$，$\iint_D f(x,y)dxdy = a$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$，计算二重积分

$$
\iint_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy
$$

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy = \int_0^1 x(\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy)dx = \int_0^1 x(\int_0^1 ydf'_x(x,y))dx$$

$$\int_0^1 ydf'_x(x,y) = yf'_x(x,y)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'_x(x,y)dy = -\int_0^1 f'_x(x,y)dy$$

$$\int_0^1 x(\int_0^1 ydf'_x(x,y))dx = -\int_0^1 x(\int_0^1 f'_x(x,y)dy)dx = -\int_0^1(\int_0^1 xf'_x(x,y)dx)dy$$

$$\int_0^1 xf'_x(x,y)dx = \int_0^1 xdf(x,y) = xf(x,y)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x,y)dx = -\int_0^1 f(x,y)dx$$

$$\iint_D xyf''_{xy}dxdy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx = a$$

Example 1.89. 求积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right)dx$

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy\int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right)dx &= \int_0^1 dx f_0^x \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right)dy = \int_0^1 (e^{x^2} - \int_0^x e^{y^2}dy)dx \\ &= \int_0^1 e^{x^2}dx - \int_0^1(\int_0^x e^{y^2}dy)dx \\ &= \int_0^1 e^{x^2}dx - x\int_0^x e^{y^2}dy\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{x^2}\cdot xdx \\ &= \int_0^1 e^{x^2}dx - \int_0^1 e^{y^2}dy + \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{e-1}{2}\end{aligned}$$

Example 1.90. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2$$

令 $D=\{(x,y)\mid a\le x,y\le b\}$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge (b-a)^2 &= \int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(y)}dy\\ &= \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}dxdy\\ &= \frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]dxdy\\ &\ge \iint_D dxdy = (b-a)^2\end{aligned}$$

Example 1.91. 证明 $\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)^2 > \frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e})$

令 $D=\{(x,y)\mid 0\le x,y\le 1\}, D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)^2 &= \int_0^1 e^{-x^2}dx\int_0^1 e^{-y^2}dy = \iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy\\ &> \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 e^{-r^2}rdr = \frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e})\end{aligned}$$

Example 1.92. 设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $f''_{xx}=f''_{yy}$，又由 $f(x,2x)=x$,$f'_x(x,2x)=x^2$，试求二阶偏导数 $f''_{xx}(x,2x), f''_{xy}(x,2x)$

因为 $f'_x\cdot 1+f'_y\cdot 2=1$ 所以 $2f'_y=1-x^2$。又因为 $2(f''_{yx}\cdot 1+f''_{yy}\cdot 2)=-2x$，由条件知 $f'_x(x,2x)=x^2$，则 $f''_{xx}\cdot 1+f''_{xy}\cdot 2=2x$，解得 $f''_{xx}(x,2x)=-\frac{4}{3}x, f''_{xy}(x,2x)=\frac{5}{3}x$

Example 1.93. 设函数 $u=u(x,y)$ 由方程 $u=f(x,y,z,t), g(y,z,t)=0, h(z,t)=0$ 所确定，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$

由方程组

$$\begin{cases} f(x,y,z,t)-u=0\\ g(y,z,t)=0\\ h(z,t)=0\end{cases}$$

有

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=0\\ \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=0\end{cases}$$

解

1.4 无穷级数

Example 1.94. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ 的敛散性

由于

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\frac{1}{n^{3/2}}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，因此级数收敛

Example 1.95. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$ 的收敛性

由泰勒公式 $\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$，则 $\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n^2}$ 收敛

Example 1.96. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{n-\ln n})$ 的敛散性

$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{n-\ln n})=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n-\ln n}$，令 $f(x)=\frac{1}{x-\ln x}$，则 $f'(x)<0$ 且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

Example 1.97. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}$$

Example 1.98. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 收敛，$\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，因此发散

Example 1.99. 设 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{1}{n}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),n=1,2,...,$ 证明

1. $\lim a_n$ 存在
2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收敛

1. 显然 $a_n\geq 0$，$\{a_n\}$ 单调减少且有下界，因此 $\lim a_n$ 存在

2. 由于数列单调减少，所以有 $0 \le \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \le a_n - a_{n+1}$，而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$ 收敛

Example 1.100. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛

证明. 由已知正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，根据单调有界数列必有极限知，极限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在，记 $a = \lim_{n\to\infty} a_n$，则有 $a_n \ge a \ge 0$，若 $a = 0$，则交错级数收敛，矛盾，因此 $a > 0$

又由于 $\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n \le \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$，而 $\frac{1}{a+1} < 1$，几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a+1})^n$ 收敛，因此级数收敛 □

Example 1.101. 求下列数列的极限

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$

1. 考虑级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{n}\frac{n!}{n^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

因此级数收敛，因此 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$

Example 1.102. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}(x-1)^{2n}$ 的收敛域

令 $t = (x-1)^n$，考虑幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}t^n$

Example 1.103. 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x = -2$ 处条件收敛，则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x-a)^n$ 在 $x = \ln\frac{1}{2}$ 处

1. 绝对收敛

2. 条件收敛

3. 必发散

4. 敛散性由 a 决定

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 的收敛半径是 1，因此 $x=-2$ 是收敛区间的端点，因此 $a=-3$ 或-1，而 $a=-3$ 与条件收敛矛盾，因此 $a=-1$

Example 1.104. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$$

因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},-1<x<1$$

当 $x\neq 0$ 时

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=\frac{2}{x}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\left(\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\int_0^t\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad -1<x<1$$

当 $x=0$ 时,$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=2$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=\begin{cases}\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 2 & x=0\end{cases}$$

当 $x=\pm 1$ 时，原级数发散

当 $x=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=3$

因此收敛区间与收敛域均为 $-1<x<1$，和函数

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 3 & x=0\end{cases}$$

Example 1.105. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的收敛区间与收敛域，并求其和函数

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}}=\frac{1}{2}$$

因此收敛半径为 2，收敛域为 $[-2,2)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n-1}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=-\ln(1-\frac{x}{2}),-1\le\frac{x}{2}<1$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right) & x\in[-2,0)\cup(0,2)\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$$

Example 1.106. 设 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3,a_1=1,a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\ge 2)$，$S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数

1. 证明 $S''(x)-S(x)=0$
2. 求 $S(x)$ 的表达式

二阶常系数齐次线性微分方程 $S''(x)-S(x)=0$ 的特征方程 $\lambda^2-1=0$ 解得 $\lambda=\pm 1$，于是通解为

$$S(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

代入得 $S(x)=2e^x+e^{-x}$

Example 1.107. 设 $a_0=1,a_1=1,a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,3,\dots)$，$S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数

1. 证明幂级数的收敛半径不小于 1
2. 证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0(x\in(-1,1))$，并求 $S(x)$ 的表达式

1. 利用数学归纳法，$0\le a_n\le 1$，记 R 为幂级数的收敛半径，因为 $|a_nx^n|\le|x|^n$，且级数 $\sum_0^{\infty}x^n$ 绝对收敛，收敛半径为 $(-1,1)$，因此 $(-1,1)\subseteq(-R,R)$

Example 1.108. 求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ 的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e$$

Example 1.109. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-n+1}{2^n}$

令 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$, 因此 $S(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'' = \left(\frac{x}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$

Example 1.110. 将 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数

因为 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} (-1 < x < 1)$，有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2x} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} (-1 \le x < 1) \end{aligned}$$

Example 1.111. 已知 $\cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-1 < x < 1)$，求 a_n

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, -1 < x < 1 \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n!)}, -\infty < x < +\infty \\ -\frac{1}{(1+x)^2} &= \left(\frac{1}{1+x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n, -1 < x < 1 \end{aligned}$$

Example 1.112. 设 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则下列结论成立的是

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散
3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散

4. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

$\ln^2(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{n}$

Example 1.113. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛，则 $|n|n \le \frac{1}{2}(u_n^2 + \frac{1}{n^2})$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 收敛

Example 1.114. 设 $\{a_n\}$ 是单调增加且有界的正数列，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛

$$1-\frac{a_n}{a_{n+1}} \le \frac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_n)$$

Example 1.115. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$

令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}$

1.5 常微分方程与差分方程

Example 1.116. 求解下列初值问题

$$(x+y)dx + (y-x)dy = 0, y|_{x=1} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

令 $u = \frac{y}{x}$，分离变量得

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x}$$
$$|x|\sqrt{1+u^2} = Ce^{\arctan u}$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\arctan\frac{y}{x}}$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}e^{\arctan\frac{y}{x}+\frac{\pi}{4}}$$

Example 1.117. 求 $\frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{y-x}$ 的通解

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y-x}{1-y} = -\frac{1}{1-y}x + \frac{y}{1-y}$$

求解通解

$$x = (1-y)\ln|1-y| + C(1-y) + 1$$

Remark. 形如 $\frac{dy}{dx} = \frac{s(y)}{t(y)x+q(y)}$ 的微分方程，将 x 看作未知量

Example 1.118. 解微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x+1}{y+x+5}$

方程组

$$\begin{cases} y-x+1=0 \\ y+x+5=0 \end{cases}$$

有唯一解 $x=-2, y=-3$，令 $u=x+2, v=y+3$，则 $\frac{dv}{du} = \frac{v-u}{v+u}$，再令 $z=\frac{v}{u}$，有

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{z-1}{z+1}, -\frac{z+1}{z^2+1}dz = \frac{1}{u}du$$

因此

$$-\frac{1}{2}\ln(z^2+1) - \arctan z = \ln|u| + C$$

Remark. 对方程 $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+C_1}{a_2x+b_2y+C_2}\right)$

1. 若 $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = k$，则令 $z = a_2x + b_2y$，方程化为

$$\frac{dz}{dx} = b_2 f\left(\frac{kz+C_1}{z+C_2}\right) + a_2$$

2. 若 $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = k$，则方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+C_1=0 \\ a_2x+b_2y+C_2=0 \end{cases}$$

有唯一解 $x=\alpha, y=\beta$，令 $u=x-\alpha, v=y-\beta$，则

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{v}{u}}{a_2+b_2\frac{v}{u}}\right) = g\left(\frac{v}{u}\right), g(t) = f\left(\frac{a_1+b_1t}{a_2+b_2t}\right)$$

Example 1.119. 求 $y''+y=\sin x + x\cos 2x$ 的通解

特征方程的根为 $\lambda = \pm i$，$y''+y=4\sin x$ 的特解为 $y_1^* = -2x\cos x$，$y''+y=x\cos 2x$ 特解为 $y_2^* = -\frac{1}{3}x\cos x + \frac{4}{9}\sin 2x$

2 线性代数

2.1 行列式

Example 2.1. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 + a_1 x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \\ &= \cdots = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 + a_1 x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 + a_2 x + a_1 x^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + \cdots + a_1 x^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n + \cdots + a_1 x^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Example 2.2. 计算

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 & x \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 & x \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & y \\ a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ a & d & c & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = (x^2-y^2)(b^2-c^2)$$

Example 2.3. 已知 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 均为 n 阶矩阵，若 $|\mathbf{A}|=3, |\mathbf{B}|=2, \left|\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}\right|=2$，求 $\left|\mathbf{A}+\mathbf{B}^{-1}\right|$

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{A}+\mathbf{B}^{-1}\right| &= \left|\mathbf{E}\,\mathbf{A}+\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{E}\right| = \left|(\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{B})\,\mathbf{A}+\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A})\right| \\ &= \left|\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B}+\mathbf{A}^{-1})\,\mathbf{A}\right| = 3 \end{aligned}$$

Example 2.4. 已知 4 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 相似于 $\mathbf{B}, \mathbf{A}$ 的特征值为 2,3,4,5，$\mathbf{E}$ 为 4 阶单位矩阵，求 $|\mathbf{B}-\mathbf{E}|$

$\mathbf{A}=T\,\mathbf{B}\,T^{-1}=Q\,\mathbf{D}\,Q^{-1}$,$|\mathbf{B}-\mathbf{E}|=|TQ(\mathbf{D}-\mathbf{E})Q^{-1}T^{-1}|=24$

Example 2.5. 满足 $\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$ 的矩阵称为反对称矩阵，证明：若 $\mathbf{A}$ 是反对称矩阵，则 $|\mathbf{A}|=0$

设 $\mathbf{A}$ 的阶数为 $2k+1$, k 为正整数, $|\mathbf{A}|=\left|\mathbf{A}^T\right|=|-\mathbf{A}|=(-1)^{2k+1}|A|=-|A|$，得 $|\mathbf{A}|=0$

Example 2.6. 已知 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，满足 $\mathbf{A}\,\mathbf{B}=\mathbf{0}$，证明 $|\mathbf{A}|=0$

若 $|\mathbf{A}|\neq 0$，则 $\mathbf{A}$ 可逆，$\mathbf{B}=\mathbf{0}$，矛盾

Example 2.7. 已知 ξ 是 n 维向量，且 $\xi^T\xi=1$，若 $\mathbf{A}=\mathbf{E}-\xi\xi^T$，证明 $|\mathbf{A}|=0$

$$\mathbf{A}\,\xi=(\mathbf{E}-\xi\xi^T)\xi=\xi-\xi=\mathbf{0}$$

有特征值 0，从而齐次线性方程组 $\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有非零解，因此 $|\mathbf{A}|=0$

Example 2.8. 已知

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

1. 求 $A_{12}-A_{22}+A_{32}$
2. 求 $A_{31}+A_{32}+A_{33}$

1. $A_{12} - A_{22} + A_{32} = a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{33} = 0$

2. 由于代数余子式 A_{ij} 的值与元素 a_{ij} 的值无关，可构造一个新的行列式

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

因此 $A_{31} + A_{32} + A_{33} = -11$

Example 2.9. 若

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

求 $A_{31} + A_{32} + A_{33}$ 由

$$|\mathbf{B}_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0, |\mathbf{B}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

有

$$\begin{cases} 2A_{31} + 2A_{32} + 2A_{33} + A_{34} + A_{35} = 0 \\ A_{31} + A_{32} + A_{33} + 2A_{34} + 2A_{35} = 0 \end{cases}$$

因此 $A_{31} + A_{32} + A_{33} = 0$

Example 2.10. 若

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因 $|\mathbf{A}| = -4$,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\,\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 20 & -8 & 0 & 0 \\ -12 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

2.2 矩阵

Example 2.11. 已知 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$，证明 $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}$

有

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} - \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{E} = (\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{B} - \mathbf{E}) = \mathbf{E}$$

因此 $\mathbf{A} - \mathbf{E}$ 可逆，$(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{E}$，于是

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{B} - \mathbf{E}) = (\mathbf{B} - \mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E})$$

Example 2.12. 已知

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

求 $\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

那么

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 7\,\mathbf{A}$$

Remark. 一般情况下，若 $r(\mathbf{A}) = 1$，则 $\mathbf{A}$ 可分解为两个矩阵的乘积，有 $\mathbf{A}^2 = l\,\mathbf{A}$，从而

$$\mathbf{A}^n = l^{n-1}\,\mathbf{A}$$

例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$$

那么

$$\mathbf{A}^2 = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})^T(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^T = l\,\mathbf{A}$$

Example 2.13. 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2 + 2\,\mathbf{A} - 3\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$

1. 证明 $\mathbf{A}, \mathbf{A} + 2\,\mathbf{E}$ 可逆
2. 当 $\mathbf{A} \neq \mathbf{E}$ 时，判断 $\mathbf{A} + 3\,\mathbf{E}$ 是否可逆

1. $(\mathbf{A} + 3\,\mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{0}$，因为 $\mathbf{A} \neq \mathbf{E}$，则 $(\mathbf{A} + 3\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解，因此 $|\mathbf{A} + 3\,\mathbf{E}| = 0$，所以 $\mathbf{A} + 3\,\mathbf{E}$ 不可逆

Example 2.14. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 n 阶矩阵，如果 $\mathbf{E} + \mathbf{A}\,\mathbf{B}$ 可逆，证明矩阵 $\mathbf{E} + \mathbf{B}\,\mathbf{A}$ 可逆

如果 $\mathbf{E} + \mathbf{B}\,\mathbf{A}$ 不可逆，则 $|\mathbf{E} + \mathbf{B}\,\mathbf{A}| = 0$，那么齐次方程组 $(\mathbf{E} + \mathbf{B}\,\mathbf{A})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解

设 $\boldsymbol{\eta}$ 是非零解，则 $(\mathbf{E} + \mathbf{B}\,\mathbf{A})\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$,$\mathbf{B}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta} = -\boldsymbol{\eta}$。因为 $(\mathbf{E} + \mathbf{A}\,\mathbf{B})(\mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta} + \mathbf{A}(\mathbf{B}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}$，且 $\mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$，因此矛盾

Example 2.15. 计算

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{2000} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

是把第 2 行的 2 倍加到第 3 行

Example 2.16. 已知 a 是常数，且矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{bmatrix}$$

可经初等变换化为矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 求 a

2. 求满足 $\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{B}$ 的可逆矩阵

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$r(\mathbf{A}) = 2$，因此 $r(\mathbf{B}) = 2$，而 $|\mathbf{B}| = 2 - a$，因此 $a = 2$

$$\begin{bmatrix} A \mid B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

因此

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 - 6k_1 & 4 - 6k_1 & 4 - 6k_3 \\ -1 + 2k_1 & -1 + 2k_2 & -1 + 2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

Example 2.17. 1. 已知

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & a & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

且 $r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = 2$，求 a

2. 已知 $\mathbf{A}$ 是 2 阶非 0 矩阵且 $\mathbf{A}^5 = \mathbf{0}$，求 $r(\mathbf{A})$

1. $|\mathbf{B}| \neq 0$，因此 $r(\mathbf{A}) = 2, |\mathbf{A}| = 0$，而 $|\mathbf{A}| = 3(5-a) = 0$，因此 $a = 5$

2. $r(\mathbf{A}) \geq 1$，$|\mathbf{A}|^5 = 0$，因此 $|\mathbf{A}| = 0$，因此 $r(\mathbf{A}) = 1$

Example 2.18. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是 3 阶矩阵

1. 证明 $r(\mathbf{A}, \mathbf{A}\,\mathbf{B}) = r(\mathbf{A})$

2. 举例说明 $r(\mathbf{A}, \mathbf{B}\,\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$ 是错误的

1. 设 $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{C}$，对矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ 分别按列分块，记 $\mathbf{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3], \mathbf{C} = [\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3]$，记 $\mathbf{B} = [b_{ij}]$，那么由 $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{C}$，有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 & \boldsymbol{\gamma}_3\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases}\boldsymbol{\gamma}_1 = b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + b_{31}\boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\gamma}_2 = b_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + b_{32}\boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\gamma}_3 = b_{13}\boldsymbol{\alpha}_3 + b_{23}\boldsymbol{\alpha}_2 + b_{33}\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}$$

因此 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，因此

$$r(\mathbf{A}, \mathbf{A}\,\mathbf{B}) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = r(\mathbf{A})$$

2.
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Example 2.19. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $n \times s$ 矩阵，证明

$$r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$$

对于齐次方程组 1. $\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$2. $\mathbf{B}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组 2 的一个解，它也是方程组 1 的解，因此方程组 2 的解集是方程组 1 的解集的子集

又因 1 的解向量的秩为 $s - r(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$，2 的解向量的秩为 $s - r(\mathbf{B})$，因此

$$s - r(\mathbf{B}) \leq s - r(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$$

即 $r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{B})$

另一方面，$r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = r((\mathbf{A}\,\mathbf{B})^T) = r(\mathbf{B}^T\,\mathbf{A}^T) \leq r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A})$

Example 2.20. 若 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\mathbf{A}^2=\mathbf{E}$，证明

$$r(\mathbf{A}+\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-\mathbf{E})=n$$

$r(\mathbf{A}+\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-\mathbf{E})\le n+r((\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{A}+\mathbf{E}))$. $r(\mathbf{A}+\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-\mathbf{E})\ge r(\mathbf{A}+\mathbf{E}+\mathbf{E}-\mathbf{A})$

Example 2.21. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关

令

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&\dots&0&-1\\-1&0&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&1&0\\0&0&\dots&-1&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3&\dots&\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\dots&\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}\mathbf{A}$$

$|\mathbf{A}|=0$，因此线性相关

Example 2.22. 设 $\mathbf{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，若 $\mathbf{A}\,\mathbf{B}=\mathbf{E}$，证明 $\mathbf{B}$ 的列向量线性无关

$r(\mathbf{B})\le n$，又

$$r(\mathbf{B})\ge r(\mathbf{A}\,\mathbf{B})=n$$

Example 2.23. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1},\dots,a_{in}]^T(i=1,2,\dots,r,r<n)$ 是 n 维实向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，已知 $\boldsymbol{\beta}=[b_1,\dots,b_n]^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0\\\dots\\a_{r1}x_1+\dots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解向量，试判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\dots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. $\boldsymbol{\beta}$ 与每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都正交，$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}_i=0$。因此 $k\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}=0$. 因为 $\boldsymbol{\beta}\ne\mathbf{0}$，因此 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}\ne0$，因此 $k=0$. 因此线性无关