考研题目本

喵喵喵

2020 年 10 月 21 日

目录

1 微积分

1.1 一元函数微分

Example 1.1. 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0, f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{x^3\int_0^1 f(xt)dt}$

令 $x^2-t=u, xt=u$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{x^3\int_0^1 f(xt)dt} &= \lim_{x\to 0}\frac{-\int_{x^2}^0 f(u)du}{x^3\int_0^x f(u)\frac{du}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(u)du}{x^2\int_0^x f(u)du} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(u)du + x^2 f(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(u)du + xf(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4f'(x^2)}{3\frac{f(x)-f(0)}{x}+f'(x)} = 1
\end{aligned}$$

Example 1.2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$

利用泰勒展开，$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$, $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$,$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)} = -\frac{1}{12}$$

Example 1.3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n})$

因为 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n)=A$

Example 1.4. suppose $y_n=\left[\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n+1}}$. Compute $\lim_{n\to\infty} y_n$

$$\begin{aligned}
\ln y_n &= \frac{1}{n+1}\ln\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{1}{n+1}\ln\frac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{n^n} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n}) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\right)
\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\right)\\
&= 1\cdot\int_0^1 \ln(1+x)dx = x\ln(1+x)|_0^1 - \int_0^1\frac{x}{1+x}dx\\
&= \ln 2 - 1 + \ln 2 = \ln\frac{4}{e}
\end{aligned}$$

Example 1.5. 已知 $x\to 0$ 时，$e^{-x^4}-\cos(\sqrt{2}x^2)$ 与 ax^n 是等价无穷小，试求 a,n

$$\begin{aligned}
e^{-x^4} &= 1-x^4+\frac{x^8}{2}+o(x^8)\\
\cos(\sqrt{2}x^2) &= 1-x^4+\frac{x^8}{6}+o(x^8)
\end{aligned}$$

Hence $a=\frac{1}{3}, n=8$

Example 1.6. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$，且点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，求 α,β

由极限存在可知，$\alpha=1$，泰勒展开

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}(\sin x+\sin^2 x)-\frac{1}{8}(\sin x+\sin^2 x)^2-(1+\beta\sin x)+o(\sin^2 x)}{\sin^2}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{(\frac{1}{2}-\beta)\sin x+\frac{3}{8}\sin^2 x}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

故 $\beta=\frac{1}{2}$

Example 1.7. let $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n-3x^{-n}}{x^n+x^{-n}}\sin\dfrac{1}{x}$

$$f(x)=\begin{cases}
2\sin\frac{1}{x}^{x} & x<-1\\
-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x} & x=-1\\
-3\sin\frac{1}{x} & -1<x<0\\
-3\sin\frac{1}{x} & 0<x<1\\
-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x} & x=1\\
2\sin\frac{1}{x}^{x} & x>1
\end{cases}$$

$x=0$ 是第二类间断点，$x=\pm 1$ 是第一类间断点

Example 1.8. 设 $f(1)=0, f'(1)=a$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x}$

由 $f(1)=0, f'(1)=a$ 可知，$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t)}{t}=a$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x} &= \frac{2f(e^{x^2})-f(1+\sin^2 x)}{-\frac{1}{2}x^2\left[\sqrt{1+2f(e^{x^2})}+\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}\right]} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x)-f(e^{x^2})}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right] \\
&= -a
\end{aligned}
$$

Example 1.9. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,$f''(0)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(x)dt}{x^\alpha-\sin x}=\beta(\beta\neq 0)$，求 α,β

因为 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,$f(0)=0, f'(0)=0$

因为 $\lim_{x\to 0^+}\int_0^x f(x)dt=0$，因此 $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha-\sin x=0$，因此 $\alpha>0$

1. 若 $0<\alpha<1$
2. 若 $\alpha>1$
3. 若 $\alpha=1$

   $\beta=f''(0)$

Example 1.10. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f'(0)=1$，$f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$，求 $f(x)$

$f(0)=0$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x)e^y+f(y)e^x-f(x)}{y}\\ &= \lim_{y\to 0}\left[f(x)\frac{e^y-1}{y}+e^x\frac{f(y)-f(0)}{y}\right]\\ &= f(x)+e^xf'(0)=f(x)+e^x\end{aligned}$$

即 $f'(x)-f(x)=e^x$，因此 $f(x)=e^x(x+C)$，又 $f(0)=0, C=0, f(x)=xe^x$

Example 1.11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x & x\le 0\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\end{cases}$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x}\left(\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\right)$$

而 $1\le\frac{\frac{1}{n}}{x}<\frac{n+1}{n}$，由夹逼准则得 $f'_+(0)=1$，因此 $f'(0)=1$

Example 1.12. 设 $f(x)$ 是可导的偶函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足

$$f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2)$$

求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程

由

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)-2x^2}{x^2}=0$$

得

$$f(0)-3f(1)=0\Rightarrow f(1)=0$$

变形

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-\frac{3f(1+\sin x^2)}{\sin x^2}\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}-2\right)=0$$

有 $f'(1)-3f'(1)-2=0\Rightarrow f'(1)=-1$

Example 1.13. 若 $y=f(x)$ 存在单值反函数，且 $y'\neq 0$，求 $\frac{d^2x}{dy^2}$

根据反函数的求导法则 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$，于是

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dx}{dy}$$

因为 $\frac{1}{y'}$ 是以 x 为变量的函数

Example 1.14. 设函数 $f(x)=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，求 a

泰勒展开

$$\begin{aligned}f(x)&=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}=\left(x-\frac{x^3}{3}+\dots\right)-x(1-ax^2+\dots)\\&=(a-\frac{1}{3})x^3+\dots\end{aligned}$$

因此 $f'''(0)/3!=a-1/3, a=1/2$

Example 1.15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^\xi f(x)dx=\int_\xi^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$$

令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt-\int_x^b f(t)dt$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$F(a)F(b)=-\left[\int_a^b f(t)dt\right]^2<0$$

故由连续函数的零点定理知:在 (a,b) 内存在 ξ 使得 $F(\xi)=0$, 即 $\int_a^\xi f(x)dx=\int_\xi^b f(x)dx$

Example 1.16. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx=f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx$$

令 $F'(x)=g(x)\int_a^x f(x)dx-f(x)\int_x^b g(x)dx=(\int_a^x f(t)dt\int_b^x g(t)dt)'$, 可取辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt\int_x^b g(t)dt$。则 $F(a)=F(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$

Example 1.17. 设实数 $a_1,\dots,a_n$ 满足关系式 $a_1-\frac{a_2}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$, 证明方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\dots+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内至少有一实根

令 $f(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\dots+a_n\cos(2n-1)x$，但 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内不满足零点定理，因此考虑 $f'(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\dots+a_n\cos(2n-1)x$，则 $f(x)=a_1\cos x+\frac{a_2}{3}\sin 3x+\dots+\frac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$，则 $f(0)=f(\pi/2)=0$

Example 1.18. 试确定方程 $e^x=ax^2(a>0)$ 的根的个数，并指出每个根所在的范围

若直接令 $f(x) = e^x - ax^2$，$f'(x)$ 的符号不易判断。又 $x = 0$ 不是方程的根，于是方程可化为等价方程 $\frac{e^x}{x^2} = a$

令 $f(x) = \frac{e^x}{x^2} - a$, 由 $f'(x) = \frac{x-2}{x^3}e^x = 0$ 得 $x = 2$

Example 1.19. 已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，确定常数 k 的取值范围

令 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} - k$，$x \in (0,1]$，则

$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

因为 $x^2(1+x)\ln^2(1+x) > 0$，因此只讨论 $g(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x \\ g''(x) &= \frac{2\ln(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x} - 2 = \frac{2\ln(1+x) - 2x}{1+x} \end{aligned}$$

因此当 $x \in (0,1)$ 时，$g''(x) < 0$，而 $g'(0) = 0$，因此 $g(x)$ 递减

Example 1.20. 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3, f(3) = 1$，证明存在 $\xi \in (0,3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$

因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以在 $[0,2]$ 内必有最大值 M 和最小值 m，于是 $m \le f(0) \le M, m \le f(1) \le M, m \le f(2) \le M$，故

$$m \le \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \le M$$

由介值定理，至少存在一点 $\eta \in [0,2]$ 使

$$f(\eta) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} = 1$$

因此 $f(\eta) = f(3) = 1$，由罗尔定理知，必存在 $\xi \in (\eta, 3) \subset (0,3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$

Example 1.21. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,在 $(0,2)$ 内具有二阶导数且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\cos\pi x} = 0$, $2\int_{1/2}^{1} f(x)dx = f(2)$，证明存在 $\xi \in (0,2)$ 使得 $f''(\xi) = 0$

$f(0.5) = 0$，因此

$$f'(0.5) = \lim_{x\to 0.5} \frac{f(x) - f(0.5)}{x - 0.5} = \lim_{x\to 0.5} \frac{f(x)}{\cos\pi x}\frac{\cos\pi x}{x - 0.5} = \lim_{x\to 0.5} \frac{f(x)}{\cos\pi x} \lim_{x\to 0.5} \frac{\cos\pi x}{x - 0.5} = 0$$

再由 $2\int_{0.5}^{2} f(x)dx = f(2)$，用积分中值定理 $\exists\xi_1 \in [0.5, 1]$ 使得 $2f(\xi_1)0.5 = f(2)$，即 $f(\xi) = f(2)$，在 $[\xi_1, 2]$ 上应用罗尔定理，$\exists\xi_2 \in (\xi_1, 2)$ 使 $f'(\xi_2) = 0$

再在 $[0.5, \xi_2]$ 上对 $f'(x)$ 应用罗尔定理，知 $\exists\xi \in (0.5, \xi_2)$，使 $f''(\xi) = 0$

Example 1.22. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，$(0, 1)$ 内可导，且

$$f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx, k > 1$$

证明：在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ 使 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$

1. ξ 换为 x，$f'(x) = (1 - x^{-1})f(x)$
2. 变形 $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - x^{-1}$
3. 两边积分 $\ln f(x) = x - \ln x + \ln C$
4. 分离常数 $\ln \frac{xf(x)}{e^x} = \ln C$，即 $xe^{-x}f(x) = C$，可令辅助函数 $F(x) = xe^{-x}f(x)$

由积分中值定理，存在 $\xi_1 \in [0, \frac{1}{k}]$ 使得 $f(1) = \xi_1 e^{1-\xi_1} f(\xi_1)$，即 $1 \times e^{-1}f(1) = \xi_1 e^{-\xi_1} f(\xi_1)$。因此 $F(x)$ 满足在 $[\xi_1, 1]$ 内的罗尔定理，因此存在 ξ 使得 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$

Example 1.23. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = \lambda$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) + f(\xi) = \lambda$

1. ξ 换为 x，$f'(x) + f(x) = \lambda$ 这是关于 $f(x)$ 的一阶线性微分方程
2. 解微分方程 $f(x) = e^{-x}(\lambda e^x + C)$
3. 分离常数 $[f(x) - \lambda]e^x = C$，可令辅助函数 $F(x) = [f(x) - \lambda]e^x$

$F(a) = F(b) = 0$，因此存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $F'(\xi) = 0$

Example 1.24. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(b) - f(a) = \xi \ln \frac{b}{a} f'(\xi)$

可变形为

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \xi f'(\xi)$$

令 $F(x) = \ln x$，由柯西中值定理，存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \xi f'(\xi)$$

Example 1.25. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$，证明：在 $(-1, 1)$ 内存在一点 ξ 使得 $f'''(\xi) = 3$

泰勒展开 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3,\xi\in(0,x)$，则

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1),-1<\xi_1<0$$
$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2),0<\xi_2<1$$

两式相减得

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$$

由介值定理可证存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]$ 有 $f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$

Example 1.26. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，求证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$

根据拉格朗日中值定理至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

只要再证存在 $\eta\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$ 即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

只要用柯西中值定理

Example 1.27. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$，证明

1. 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=1-\xi$
2. 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$ 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(0)=-1,F(1)=1$

对 $[0,\xi],[\xi,1]$ 分别用拉格朗日中值定理，则

$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\frac{\xi}{1-\xi}=1$$

Example 1.28. 求证 $\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x},0<x<\frac{\pi}{2}$

$f(x)=\sin x\tan x-x^2$

$f'(x)=\sin x+\tan x\sec x-2x$

$f''(x)=\cos x+\sec^3 x+\tan^2 x\sec x-2$

$f'''(x)=-\sin x+5\sec^3 x\tan x+\tan^3 x\sec x=\sin x(5\sec^4 x-1)+\tan^3 x\sec x>0$

Example 1.29. 设 $a>0,b>0$，证明不等式

$$a\ln a+b\ln b\geq(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2]$$

令 $f(x)=x\ln x$，则 $f'(x)=\ln x+1,f''(x)=\frac{1}{x}>0$，即曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是凹的，故对任意 $a>0,b>0$，有

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geq f(\frac{a+b}{2})$$

代入得

$$\frac{a\ln a+b\ln b}{2}\geq\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}$$

Example 1.30. 证明：对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}\leq\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

由拉格朗日定理，存在 $\xi\in(n,n+1)$

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi}$$
$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}$$

Example 1.31. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值等于 -1，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $f''(x)\geq 8$

存在 $a\in(0,1),f'(a)=0,f(a)=-1$，将 $f(x)$ 在 $x=a$ 泰勒展开

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2=-1+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2(\xi\in(a,x)\text{ or }(x,a))$$

令 $x=0,x=1$ 得

$$f(0)=0=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}a^2,0<\xi_1<a$$
$$f(1)=0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-a)^2,a<\xi_2<1$$

若 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_1)>8$

若 $\frac{1}{2}<a<1$，则 $f''(\xi_2)>8$

Example 1.32. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，则当 $f''(x)>0$ 时

$$f(x)=f(0.5)+f'(0.5)(x-0.5)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-0.5)^2$$

积分

$$
\begin{aligned}
0 &= f(0.5)+f'(0.5)\int_0^1(x-0.5)dx+\frac{f''(\xi)}{2}\int_0^(x-0.5)^2dx \\
&= f(0.5)+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_0^1(x-0.5)^2dx
\end{aligned}
$$

因此 $f(0.5)<0$

Example 1.33. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 且 $f(0)=0$, 求 $\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\frac{1-\cos x}{\tan 2^x} \\
&= f'(0)\cdot\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Example 1.34. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)\cdot f(b)>0, f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2})<0$, 证明: 对任意实数 k, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 \(f′(ξ)=kf(ξ))\

Example 1.35. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=1$, 证明：存在两点 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使

$$
(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]=3e^{3\eta-\xi}
$$

$$
\begin{aligned}
&(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]=3e^{3\eta-\xi} \\
&\Leftrightarrow (e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]e^{\xi}=3e^{3\eta} \\
&\Leftrightarrow (e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[e^x f(x)]'|_{x=\xi}=e^{3x}|_{x=\eta}
\end{aligned}
$$

令 $g(x)=e^{3x}$，则由拉格朗日中值定理

$$
g'(\eta)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}
$$

即 $3e^{3\eta}=\dfrac{e^{3b}-e^{3a}}{b-a}$. 令 $f(x)=e^x f(x)$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$
\frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]=\frac{e^b-e^a}{b-a}
$$

两边同乘 $e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b}$ 得

$$
\frac{e^{3b}-e^{3a}}{b-a}=(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]
$$

1.2 一元函数积分

Example 1.36. 求不定积分 $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx$

$$\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1} dx = \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} \int \frac{d\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\right] - 1}$$
$$= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1} \right|$$

Example 1.37. 求 $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin x}}$

$$\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin x}} = \int \frac{\cos x dx}{(1 - \sin^2 x)\sqrt{\sin x}} = 2\int \frac{d(\sqrt{\sin x})}{1 - (\sqrt{\sin x})^4} = 2\int \frac{dt}{1 - t^4}$$
$$\int \left(\frac{1}{1 + t^2} + \frac{1}{1 - t^2} \right) dt$$

Example 1.38. 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4 - x)}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4 - x)}} = \int \frac{2d(\sqrt{x})}{\sqrt{4 - x}} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C$$

Example 1.39. 求 $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx = \int \frac{e^x}{e^x(1 + e^x)} dx = \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x + 1} \right) de^x$$

Example 1.40. 求 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

令 $\sqrt{e^x - 1} = t, x = \ln(1 + t^2)$

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\int \ln(1 + t^2) dt$$

Example 1.41. 求 $\int \frac{dx}{x^4(1 + x^2)}$

$$\int \frac{dx}{x^4(1 + x^2)} = \int \frac{1 + x^2 - x^2}{x^4(1 + x^2)} dx$$

Example 1.42. 求 $\int \frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2}dx$

$x^3-x^2+2x-2=(x^2+2)(x-1)$，令

$$\frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Example 1.43. 求 $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\int \frac{dx}{\cos^2 x}-\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$$

Example 1.44. 求 $I_n=\int \tan^n xdx$ 的递推公式

$$\begin{aligned}I_n&=\int \tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)dx=\int \tan^{n-2}x\sec^2 xdx-\int \tan^{n-2}xdx\\&=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}\end{aligned}$$

Example 1.45. 求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

对于 $0\le x\le 1$，有 $0\le \frac{x^n}{1+x}\le x$，则

$$0\le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx\le \int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$$

因此由夹逼定理，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=0$

Example 1.46. 求 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{1+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{1+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(\frac{1}{n})^2+1}+\cdots+\frac{1}{(\frac{n}{n})^2+1}\right]\cdot\frac{1}{n}\\&=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Example 1.47. 证明下列不等式

$$\frac{\sqrt{\pi}}{80}\pi^2<\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}dx<\frac{\pi^2}{32}$$

当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$0<x<\tan x<1$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{3/2}dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx$$

Example 1.48. 求 $\int_2^3 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2}dx$

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2}dx = \int_2^3 \frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{(x-1)^2}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t} 2\cos t dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2 t - 1)dt = -\cot t|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - t|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

Example 1.49. 求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}dx$

令 $e^{-x} = \sin t$，则

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \frac{\cos t}{\sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} dt - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$$
$$= -\ln(\csc t + \cot t)|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Example 1.50. 求 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

令 $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} = t$，则 $\sin^2 u = \frac{x}{1+x}, x\cos^2 u = \sin^2 u, x = \tan^2 u$

$$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} u d(\tan^2 u) = (u \cdot \tan^2 u)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 \cdot \tan^2 u du$$
$$= \pi - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 u - 1)du = \pi - \tan u\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

Example 1.51. 求 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx$

令 $x = -t$，则 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{x}}dx$。因此

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} + \frac{\cos^2 x}{1+e^{x}}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+e^{-x}+1+e^{x}}{(1+e^{-x})(1+e^{x})}\right)\cos^2 x dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

Remark. 一般地，有如下结论：作变换 $x=a+b-t$

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-t)dt$$

从而 $I=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx$

Example 1.52. 求 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{1}{2}\sin 2x)dx=\frac{\pi-1}{4}\end{aligned}$$

Remark. 要求 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x,\cos x)dx$，可作变换 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x,\sin x)dx$

Example 1.53. 求 $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

令 $x=\pi-t$，则

$$I=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-I$$

Remark. 一般地，$I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)dt-I$

Example 1.54. 求 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx, a, b>0$

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx, a, b>0&=\int_0^1\left[f_a^b x^t dt\right]dx=\int_a^b\left[\int_0^1 x^t dx\right]dt\\&=\ln\frac{b+1}{a+1}\end{aligned}$$

Example 1.55. 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}dt$，求 $\int_0^{\pi}f(x)dx$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)dx &= \int_0^\pi f(x)d(x-\pi)\\ &= (x-\pi)f(x)|_0^\pi - \int_0^\pi (x-\pi)f'(x)dx\\ &= -\int_0^\pi (x-\pi)\frac{\sin x}{\pi - x}dx = 2\end{aligned}$$

Example 1.56. 证明 $\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x} = \int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{x}$

$$\begin{aligned}\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x} &= \frac{1}{2}\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}\\ &= \frac{1}{2}\int_1^{a} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

令 $t = \frac{a^2}{u}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t} &= \int_a^1 f(\frac{a^2}{u}+u)\frac{u}{a^2}\left(-\frac{a^2}{u^2}\right)du\\ &= \int_1^a f(u+\frac{a^2}{u})\frac{1}{u}du\end{aligned}$$

Example 1.57. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，又 $f(a)=f'(a)=0$，证明：

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-b)^2dx$$

利用分部积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)d(x-b) &= -\int_a^b f'(x)(x-b)d(x-b)\\ = -\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)d(x-b)^2 &= \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-b)^2dx\end{aligned}$$

Example 1.58. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数且 $f(a)=f(b)=0, M = \max_{[a,b]}|f''(x)|$，证明 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{12}M$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b f(x)d(x-a) = -\int_a^b f'(x)(x-a)d(x-b) \\ &= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx + \int_a^b f'(x)(x-b)dx \\ &= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx + \int_a^b (x-b)df(x) \\ &= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx - \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

则

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx\right| &\le \frac{1}{2}M\int_a^b (x-a)(b-a)dx \\ &= \frac{1}{4}M\int_a^b (x-a)^2dx = \frac{(b-a)^3}{12}M\end{aligned}$$

Example 1.59. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格单调增，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)dx < 2\int_a^b xf(x)dx$$

令 $F(x) = (a+x)\int_a^x f(t)dt - 2\int_a^x tf(t)dt, (a < x \le b)$

Example 1.60. 求 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}dx \\ &= \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \ln\left[(x-\frac{1}{2}) + \sqrt{(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}}\right]\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Example 1.61. 求 $\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

$$\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int e^x(1+\sin x)\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int e^x d\tan\frac{x}{2} + \int e^x \tan\frac{x}{2}dx$$
$$= e^x \tan\frac{x}{2} + C$$

Example 1.62. 设 $f(x)$ 为非负连续函数，当 $x \geq 0$ 时，有 $\int_0^x f(x)f(x-t)dt = e^{2x}-1$，求 $f(x)$

$f(x)\int)0^x f(u)du = e^{2x-1}$，令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$，则有 $F'(x)F(x) = e^{2x-1}, F(0)=0$，两边积分，得

$$\frac{1}{2}F^2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x + C$$

由 $F(0)=0$ 得，$C=-\frac{1}{2}$. 因此 $F^2(x) = e^{2x}-x-1$，故

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^{2x}-1}{\sqrt{e^{2x}-2x-1}}$$

Example 1.63. 设 $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt(x>0)$，$g(x)$ 连续，且 $f(x)+f(\frac{1}{x}) = \int_0^1 g(xt)dt$，求 $g(x)$

$\int_0^1 g(xt)dt = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$，又

$$f(\frac{1}{x}) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t}dt = \int_0^x \frac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}(-\frac{1}{u^2})du = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)}du$$

因此 $f(x)+f(\frac{1}{x}) = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$，于是 $\int_0^x g(t)dt = x\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$，

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt + \ln x = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x$$

Example 1.64. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加，证明：对任意 $a,b>0$，恒有

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)dx - a\int_0^a f(x)dx\right]$$

令 $F(x) = x\int_0^x f(t)dt$，则 $F'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x)$

$$F(b)-F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b \left[\int_0^x f(t)dt + xf(x)\right]dx$$
$$\leq \int_a^b [xf(x)+xf(x)]dx = 2\int_a^b xf(x)dx$$

1.3 多元函数微积分学

Example 1.65. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$x^2y^2 \le (\frac{x^2+y^2}{2})^2$，因而

$$0 \le \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$$

Example 1.66. 讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 的存在性

当点 $P(x,y)$ 沿曲线 $x=ky^2$ 趋于点 $(0,0)$ 时

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{ky^4}{k^2y^4+y^4} = \frac{k}{k^2+1}$$

不是一个确定的常数，因此极限不存在

Example 1.67. 讨论函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处的连续性

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$0 \le |f(x,y)| = \left|\frac{r^2\sin 4\theta}{4}\right| \le \frac{r^2}{4}$$

因此连续

Example 1.68. 设 $z=(s\in y^3+x^3)(x+y^4)^{\frac{y}{x}+e^{y^3x^2}}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)} = \frac{\partial z(x,0)}{\partial x}\Big|_{x=1} = (x^4)'\Big|_{x=1} = 4$$

Example 1.69. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f(0,0)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0$，于是 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$，又 $f(0,0)=0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处极限存在且连续，又由 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x^2}=1, \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y^2}=1$$

所以

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x^2}x=0$$

同理 $f'_y(0,0)=0$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在

因为

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}&=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}(\rho=\sqrt{x^2+y^2})\\&=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}=0\end{aligned}$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

Remark. 讨论二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的可微性，可从如下几个方面考虑

1. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的偏导数至少有一个不存在，则函数不可微
2. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不连续，则函数不可微
3. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，两个偏导数存在，则考虑

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho},\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

若极限为 0，则函数在 (x_0,y_0) 可微，否则不可微

Example 1.70. 设 $z=(\frac{y}{2})^{\frac{x}{y}}$，求 $dz\Big|_{(1,2)}$

取对数，有

$$\ln z=\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}\Rightarrow y\ln z=x(\ln y-\ln x)$$

Example 1.71. 设 $u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z}),u=f(s,t)$ 有二阶连续偏导数，求 $du,\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$

$$\begin{aligned}du&=f'_1d(\frac{x}{y})+f'_2d(\frac{y}{z})=f'_1\frac{ydx-xdy}{y^2}+f'_2\frac{zdy-ydz}{z^2}\\&=\frac{1}{y}f'_1dx+(-\frac{x}{y^2}f'_1+\frac{1}{z}f'_2)dy-\frac{y}{z^2}f'_2dz\end{aligned}$$

Example 1.72. 已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某一函数 $f(x,y)$ 的全微分，求 a,b

由题意知，$\frac{\partial f}{\partial x}=axy^3-y^2\cos x,\frac{\partial f}{\partial y}=1+by\sin x+3x^2y^2$，从而有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3axy^2-2y\cos x,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=by\cos x+6xy^2$，显然 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 均连续，所以 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$，即 $by\cos x+6xy^2=3axy^2-2y\cos x$，因此 $a=2,b=-2$

Example 1.73. 设 $z=f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x, f(x,1)=0, \frac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\sin x$，求 $f(x,y)$

$f(x,y)=xy^2+\varphi(x)y+\psi(x)$，从 $\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\sin x$，即 $[2xy+\varphi(x)]\Big|_{y=0}=\sin x$，得 $\varphi(x)=\sin x$

Example 1.74. 设函数 $u=f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$，满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{3/2}$，求函数 f 的表达式

设 $t=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则 $x^2+y^2=e^{2t}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(t)\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y}=f'(t)\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(t)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(t)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(t)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(t)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

代入得 $f''(t)=(x^2+y^2)^{5/2}=e^{5t}$，因此有

$$f(t)=\frac{1}{25}e^{5t}+C_1t+C_2$$

Example 1.75. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则

1. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点
2. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点
3. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点
4. 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

分子的极限为 0，从而有 $f(0,0)=0$，且由极限的性质知, $\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1+\alpha(x,y)$，这里 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\alpha(x,y)=0$，因而 $f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2[1+\alpha(x,y)]$，在点 $(0,0)$ 的某充分小去心邻域内，取 $y=x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y)=x^2+4x^4[1+\alpha(x,x)]>0=f(0,0)$，在点 $(0,0)$ 的某充分小去心邻域内，取 $y=-x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y)=-x^2+4x^4[1+\alpha(x,-x)]<0=f(0,0)$，故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

Example 1.76. 讨论二元函数 $z=x^3+y^3-2(x^2+y^2)$ 的极值

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 4x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

得驻点 $(0,0), (4/3,0), (0,4/3), (4/3,4/3)$. 进而

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 4, B = \frac{\partial^2 z}{\partial xy} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y - 4$$

$$AC - B^2 = 16 + 36xy - 24(x + y)$$

在点 $(0,0)$ 时 $AC - B^2 > 0$ 且 $A < 0$ 有极大值

在点 $(4/3,4/3)$ 时 $AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$ 有极小值

Example 1.77. 求椭圆 $x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y = 0$ 与直线 $x + y = 8$ 之间的最短距离

椭圆上任意一点 $P(x,y)$ 到直线 $x + y = 8$ 的距离的平方为

$$d^2 = \frac{(x + y - 8)^2}{2}$$

令 $F(x,y) = \frac{1}{2}(x + y - 8)^2 + \lambda(x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y)$ 则有方程组

$$\begin{cases} F'_x = x + y - 8 + (2\lambda x + 2\lambda y) = 0 \\ F'_y = x + y - 8 + \lambda(2x + 6y - 8) = 0 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x = -2 - 2\sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

且 $d_1 = 4\sqrt{2} - 2, d_2 = 4\sqrt{2} + 2$，所以所求最短距离为 $4\sqrt{2} - 2$

Example 1.78. 求函数 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值

解方程组

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 2xy^2 = 0 \\ f'_y = 4y - 2x^2y = 0 \end{cases}$$

得开区域内的可能极值点为 $(\pm\sqrt{2}, 1)$，其对应函数值为 $f(\pm\sqrt{2}, 1) = 2$

当 $y=0$ 时，$f(x,y)=x^2$ 在 $-2\le x\le 2$ 上的最大值为 4，最小值为 0

当 $x^2+y^2=4, y>0, -2<x<2$ 时，构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4)$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x=2x-2xy^2+2\lambda x=0 \\ F'_y=4y-2x^2y+2\lambda y=0 \\ F'_\lambda=x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

得可能极值点:$(0,2),\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$,其对应函数值为 $f(0,2)=8, f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4}$

因此 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 8，最小值 0

Example 1.79. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$，且

$$f(x,y)=1-x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$$

证明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取得极值，判断此极值是极大值还是极小值，并求出此极值

由 $f(x,y)=-(x-1)-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$，由全微分的定义得

$$f(1,0)=0, f'_x(1,0)=f'_y(1,0)=-1$$

计算得 $g'_x=f'_1\cdot e^{xy}y+f'_2\cdot 2x, g'_y=f'_1\cdot e^{xy}x+f'_2\cdot 2y$，有

$$g'_x(0,0)=0, g'_y(0,0)=0$$

再求二阶导数

$$g''_{xx}=(f''_{11}\cdot e^{xy}y+f''_{12}\cdot 2x)e^{xy}y+f'_1\cdot e^{xy}y^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}y+f''_{22}\cdot 2x)2x+2f'_2$$
$$g''_{xy}=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}y+f'_1\cdot(e^{xy}xy+e^{xy})+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2x$$
$$g''_{yy}=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}x+f'_1\cdot e^{xy}x^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2x+2f'_2$$

因此 $A=g''_{xx}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2, B=g''_{xy}(0,0)=f'_1(1,0)=-1, C=g''_{yy}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2$，进而 $AC-B^2>0$，因此 $g(0,0)=f(1,0)=0$ 是极大值

Example 1.80. 已知 x, y, z 为实数，且 $e^x + y^2 + |z| = 3$，求证 $e^x y^2 |z| \le 1$

证明 1 。在 $e^x + y^2 + |z| = 3$ 约束条件下求函数 $u = e^x y^2 |z|$ 的最值问题，转化为无条件极值 $u = e^x y^2 (3 - e^x - y^2)$

证明 2 。可化为以下等价问题：已知 $X > 0, Y \ge 0, Z \ge 0$, 且 $X+Y+Z = 3$，求 $XYZ \le 1$。因此用拉格朗日乘数法

Example 1.81. 设闭区域 $D: x^2 + y^2 \le y, x \ge 0$，$f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，且

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(u,v) dudv$$

求 $f(u,v)$

设 $\iint_D f(u,v)dudv = A$，在已知等式两边求区域 D 的二重积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy - \frac{8A}{\pi} \iint_D dxdy$$
$$A = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy - A$$
$$2A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\theta} \sqrt{1-r^2}rdr = \frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$$

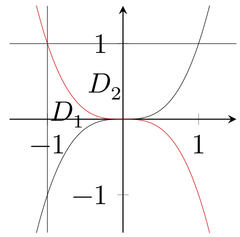
Example 1.82. 设区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$,$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a, b 为常数，求 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma$

由轮换对称性

$$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma = \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma$$
$$= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} + \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \right]$$
$$= \frac{a+b}{2} \iint_D d\sigma = \frac{a+b}{2}\pi$$

Example 1.83. 计算二重积分 $I = \iint_D x[1 + yf(x^2 + y^2)]dxdy$，其中积分区域 D 为 $y = x^3, y = 1, x = -1$ 所围成的平面区域，f 连续

补充曲线 $y = -x^3$，拆分积分区域 D 分别关于 x, y 坐标轴对称



$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} \\
&= \iint_{D_1} [x + xyf(x^2+y^2)]dxdy + \iint_{D_2} x[1 + yf(x^2+y^2)]dxdy \\
&= \iint_{D_1} xdxdy = 2\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{-x^3} xdy \\
&= -\frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

Example 1.84. 设平面区域 $D = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$，计算

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

由轮换对称性

$$
\begin{aligned}
&\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy \\
&= \frac{1}{2}\left[\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy + \iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy\right] \\
&= \frac{1}{2}\iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r\sin\pi r dr \\
&= -\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Example 1.85. 计算二重积分 $\iint_D |x^2+y^2-1|d\sigma$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

记 $D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1, (x,y) \in D\}, D_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 > 1, (x,y) \in D\}$，则

$$\begin{aligned}\iint_D |x^2+y^2-1|d\sigma &= -\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy + \iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy \\ &= -2\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy + \iint_D (x^2+y^2-1)dxdy\end{aligned}$$

Example 1.86. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，求 $F'(2)$

交换积分次序得

$$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t[\int_1^x f(x)dy]dx=\int_1^t f(x)(x-1)dx$$

因此 $F'(2)=f(2)(x-1)=f(2)$

Example 1.87. 计算二重积分 $\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$,其中 $D=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le\sec\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$

直角坐标系下 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$

Example 1.88. 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0$，$\iint_D f(x,y)dxdy=a$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$$

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy=\int_0^1 x(\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy)dx=\int_0^1 x(\int_0^1 ydf'_x(x,y))dx$$

$$\int_0^1 ydf'_x(x,y)=yf'_x(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)dy=-\int_0^1 f'_x(x,y)dy$$

$$\int_0^1 x(\int_0^1 ydf'_x(x,y))dx=-\int_0^1 x(\int_0^1 f'_x(x,y)dy)dx=-\int_0^1(\int_0^1 xf'_x(x,y)dx)dy$$

$$\int_0^1 xf'_x(x,y)dx=\int_0^1 xdf(x,y)=xf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)dx=-\int_0^1 f(x,y)dx$$

$$\iint_D xyf''_{xy}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=a$$

Example 1.89. 求积分 $\int_0^1 dy\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dx$

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dx &= \int_0^1 dx f_0^x\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dy=\int_0^1(e^{x^2}-\int_0^x e^{y^2}dy)dx\\ &= \int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1(\int_0^x e^{y^2}dy)dx\\ &= \int_0^1 e^{x^2}dx - x\int_0^x e^{y^2}dy\Big|_0^1+\int_0^1 e^{x^2}\cdot xdx\\ &= \int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 e^{y^2}dy+\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1\\ &= \frac{e-1}{2}\end{aligned}$$

Example 1.90. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\geq(b-a)^2$$

令 $D=\{(x,y)\mid a\leq x,y\leq b\}$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\geq(b-a)^2 &= \int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(y)}dy\\ &= \iint_D\frac{f(x)}{f(y)}dxdy=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}dxdy\\ &= \frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]dxdy\\ &\geq \iint_D dxdy=(b-a)^2\end{aligned}$$

Example 1.91. 证明 $\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)^2>\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e})$

令 $D=\{(x,y)\mid 0\leq x,y\leq 1\}, D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}$

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)^2 &= \int_0^1 e^{-x^2}dx\int_0^1 e^{-y^2}dy=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy\\ &> \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e})\end{aligned}$$

Example 1.92. 设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $f''_{xx}=f''_{yy}$，又由 $f(x,2x)=x$,$f'_x(x,2x)=x^2$，试求二阶偏导数 $f''_{xx}(x,2x), f''_{xy}(x,2x)$

因为 $f_x' \cdot 1 + f_y' \cdot 2 = 1$ 所以 $2f_y' = 1 - x^2$。又因为 $2(f_{yx}'' \cdot 1 + f_{yy}'' \cdot 2) = -2x$，由条件知 $f_x'(x, 2x) = x^2$，则 $f_{xx}'' \cdot 1 + f_{xy}'' \cdot 2 = 2x$，解得 $f_{xx}''(x, 2x) = -\frac{4}{3}x, f_{xy}''(x, 2x) = \frac{5}{3}x$

Example 1.93. 设函数 $u = u(x, y)$ 由方程 $u = f(x, y, z, t), g(y, z, t) = 0, h(z, t) = 0$ 所确定，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$

由方程组

$$\begin{cases} f(x, y, z, t) - u = 0 \\ g(y, z, t) = 0 \\ h(z, t) = 0 \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

解

1.4 无穷级数

Example 1.94. 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ 的敛散性

由于

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx < \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \frac{1}{n^{3/2}}$$

而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，因此级数收敛

Example 1.95. 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$ 的收敛性

由泰勒公式 $\ln \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$，则 $\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$，而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^2}$ 收敛

Example 1.96. 判定级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi + \frac{1}{n - \ln n})$ 的敛散性

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi + \frac{1}{n - \ln n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n - \ln n}$，令 $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$，则 $f'(x) < 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Example 1.97. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}$$

Example 1.98. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 收敛，$\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，因此发散

Example 1.99. 设 $a_1=2, a_{n+1}=\frac{1}{n}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right), n=1,2,...,$ 证明

1. $\lim a_n$ 存在
2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收敛

1. 显然 $a_n\geq 0$，$\{a_n\}$ 单调减少且有下界，因此 $\lim a_n$ 存在
2. 由于数列单调减少，所以有 $0\leq\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\leq a_n-a_{n+1}$，

   而 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 收敛

Example 1.100. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 发散，试问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛

证明. 由已知正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，根据单调有界数列必有极限知，极限 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在，记 $a=\lim_{n\to\infty}a_n$，则有 $a_n\geq a\geq 0$，若 $a=0$，则交错级数收敛，矛盾，因此 $a>0$

又由于 $\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n\leq\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$，而 $\frac{1}{a+1}<1$，几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a+1})^n$ 收敛，因此级数收敛 □

Example 1.101. 求下列数列的极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$

1. 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{n}\frac{n!}{n^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1$$

因此级数收敛，因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

Example 1.102. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}(x-1)^{2n}$ 的收敛域

令 $t=(x-1)^n$，考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}t^n$

Example 1.103. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n$ 在 $x=\ln\frac{1}{2}$ 处

1. 绝对收敛
2. 条件收敛
3. 必发散
4. 敛散性由 a 决定

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 的收敛半径是 1，因此 $x=-2$ 是收敛区间的端点，因此 $a=-3$ 或-1，而 $a=-3$ 与条件收敛矛盾，因此 $a=-1$

Example 1.104. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$$

因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},-1<x<1$$

当 $x\neq 0$ 时

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=\frac{2}{x}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$
$$\left(\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$
$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\int_0^t\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad -1<x<1$$

当 $x=0$ 时,$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=2$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=\begin{cases}\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 2 & x=0\end{cases}$$

当 $x=\pm1$ 时，原级数发散

当 $x=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=3$

因此收敛区间与收敛域均为 $-1<x<1$，和函数

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 3 & x=0\end{cases}$$

Example 1.105. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的收敛区间与收敛域，并求其和函数

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}}=\frac{1}{2}$$

因此收敛半径为 2，收敛域为 $[-2,2)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n-1}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=-\ln(1-\frac{x}{2}),-1\leq\frac{x}{2}<1$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right) & x\in[-2,0)\cup(0,2)\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$$

Example 1.106. 设 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3,a_1=1,a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geq2)$，$S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数

1. 证明 $S''(x)-S(x)=0$
2. 求 $S(x)$ 的表达式

二阶常系数齐次线性微分方程 $S''(x)-S(x)=0$ 的特征方程 $\lambda^2-1=0$ 解得 $\lambda=\pm1$，于是通解为

$$S(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

代入得 $S(x)=2e^x+e^{-x}$

Example 1.107. 设 $a_0=1,a_1=1$,$a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,3,\dots)$，$S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数

1. 证明幂级数的收敛半径不小于 1
2. 证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0(x\in(-1,1))$，并求 $S(x)$ 的表达式

1. 利用数学归纳法,$0\le a_n\le 1$,记 R 为幂级数的收敛半径,因为 $|a_nx^n|\le |x|^n$，且级数 $\sum_0^\infty x^n$ 绝对收敛，收敛半径为 $(-1,1)$，因此 $(-1,1)\subseteq(-R,R)$

Example 1.108. 求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}$ 的和

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2e$$

Example 1.109. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2-n+1}{2^n}$

令 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$, 因此 $S(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)''=\left(\frac{x}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}$

Example 1.110. 将 $f(x)=\text{arctan}\,\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}(-1<x<1)$，有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=\frac{\pi}{4}+\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2x}dx\\&=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(-1\le x<1)\end{aligned}$$

Example 1.111. 已知 $\cos 2x-\dfrac{1}{(1+x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n(-1<x<1)$，求 a_n

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,-1<x<1$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n!)},-\infty<x<+\infty$$

$$-\frac{1}{(1+x)^2}=\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n,-1<x<1$$

Example 1.112. 设 $u_n = (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则下列结论成立的是

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

   $\ln^2(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{n}$

Example 1.113. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛，则 $|n|n \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + \frac{1}{n^2})$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 收敛

Example 1.114. 设 $\{a_n\}$ 是单调增加且有界的正数列，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛

$$1-\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_n)$$

Example 1.115. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$

令 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}$

1.5 常微分方程与差分方程

Example 1.116. 求解下列初值问题

$$(x+y)dx + (y-x)dy = 0, y|_{x=1} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

令 $u=\frac{y}{x}$，分离变量得

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}$$
$$|x|\sqrt{1+u^2}=Ce^{\arctan u}$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\arctan\frac{y}{x}}$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}e^{\arctan\frac{y}{x}+\frac{\pi}{4}}$$

Example 1.117. 求 $\frac{dy}{dx}=\frac{1-y}{y-x}$ 的通解

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y-x}{1-y}=-\frac{1}{1-y}x+\frac{y}{1-y}$$

求解通解

$$x=(1-y)\ln|1-y|+C(1-y)+1$$

Remark. 形如 $\frac{dy}{dx}=\frac{s(y)}{t(y)x+q(y)}$ 的微分方程，将 x 看作未知量

Example 1.118. 解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x+1}{y+x+5}$

方程组

$$\begin{cases} y-x+1=0 \\ y+x+5=0 \end{cases}$$

有唯一解 $x=-2,y=-3$，令 $u=x+2,v=y+3$，则 $\frac{dv}{du}=\frac{v-u}{v+u}$，再令 $z=\frac{v}{u}$，有

$$z+u\frac{dz}{du}=\frac{z-1}{z+1},-\frac{z+1}{z^2+1}dz=\frac{1}{u}du$$

因此

$$-\frac{1}{2}\ln(z^2+1)-\arctan z=\ln|u|+C$$

Remark. 对方程 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+C_1}{a_2x+b_2y+C_2}\right)$

1. 若 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$，则令 $z=a_2x+b_2y$，方程化为

$$\frac{dz}{dx}=b_2f\left(\frac{kz+C_1}{z+C_2}\right)+a_2$$

2. 若 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$，则方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+C_1=0 \\ a_2x+b_2y+C_2=0 \end{cases}$$

有唯一解 $x=\alpha, y=\beta$，令 $u=x-\alpha, v=y-\beta$，则

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{v}{u}}{a_2+b_2\frac{v}{u}}\right)=g\left(\frac{v}{u}\right), g(t)=f\left(\frac{a_1+b_1t}{a_2+b_2t}\right)$$

Example 1.119. 求 $y''+y=\sin x+x\cos 2x$ 的通解

特征方程的根为 $\lambda=\pm i$，$y''+y=4\sin x$ 的特解为 $y_1^*=-2x\cos x$，$y''+y=x\cos 2x$ 特解为 $y_2^*=-\frac{1}{3}x\cos x+\frac{4}{9}\sin 2x$

2 线性代数

2.1 行列式

Example 2.1. 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 + a_1 x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 + a_1 x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 + a_2 x + a_1 x^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + \cdots + a_1 x^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n + \cdots + a_1 x^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

Example 2.2. 计算

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 & x \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 & x \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & y \\ a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ a & d & c & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = (x^2 - y^2)(b^2 - c^2)$$

Example 2.3. 已知 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 n 阶矩阵，若 $|\mathbf{A}| = 3, |\mathbf{B}| = 2, \left|\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}\right| = 2$，求 $\left|\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}\right|$

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}\right| &= \left|\mathbf{E}\,\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{E}\right| = \left|(\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{B})\,\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A})\right| \\ &= \left|\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1})\,\mathbf{A}\right| = 3 \end{aligned}$$

Example 2.4. 已知 4 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 相似于 $\mathbf{B}, \mathbf{A}$ 的特征值为 2,3,4,5，$\mathbf{E}$ 为 4 阶单位矩阵，求 $|\mathbf{B} - \mathbf{E}|$

$\mathbf{A} = T\,\mathbf{B}\,T^{-1} = Q\,\mathbf{D}\,Q^{-1}$,$|\mathbf{B} - \mathbf{E}| = |TQ(\mathbf{D} - \mathbf{E})Q^{-1}T^{-1}| = 24$

Example 2.5. 满足 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ 的矩阵称为反对称矩阵，证明：若 $\mathbf{A}$ 是反对称矩阵，则 $|\mathbf{A}| = 0$

设 $\mathbf{A}$ 的阶数为 $2k+1$, k 为正整数, $|\mathbf{A}| = \left|\mathbf{A}^T\right| = |-\mathbf{A}| = (-1)^{2k+1}|A| = -|A|$，得 $|\mathbf{A}| = 0$

Example 2.6. 已知 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，满足 $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{0}$，证明 $|\mathbf{A}| = 0$

若 $|\mathbf{A}| \neq 0$，则 $\mathbf{A}$ 可逆，$\mathbf{B} = \mathbf{0}$，矛盾

Example 2.7. 已知 ξ 是 n 维向量，且 $\xi^T\xi = 1$, 若 $\mathbf{A} = \mathbf{E} - \xi\xi^T$, 证明 $|\mathbf{A}| = 0$

$$\mathbf{A}\,\xi = (\mathbf{E} - \xi\xi^T)\xi = \xi - \xi = \mathbf{0}$$

有特征值 0，从而齐次线性方程组 $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解，因此 $|\mathbf{A}| = 0$

Example 2.8. 已知

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

1. 求 $A_{12} - A_{22} + A_{32}$
2. 求 $A_{31} + A_{32} + A_{33}$

1. $A_{12} - A_{22} + A_{32} = a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{33} = 0$
2. 由于代数余子式 A_{ij} 的值与元素 a_{ij} 的值无关，可构造一个新的行列式

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

因此 $A_{31} + A_{32} + A_{33} = -11$

Example 2.9. 若

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

求 $A_{31}+A_{32}+A_{33}$ 由

$$|\mathbf{B}_1| = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0\end{vmatrix} = 0, |\mathbf{B}_2| = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0\end{vmatrix} = 0$$

有

$$\begin{cases}2A_{31}+2A_{32}+2A_{33}+A_{34}+A_{35}=0\\ A_{31}+A_{32}+A_{33}+2A_{34}+2A_{35}=0\end{cases}$$

因此 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=0$

Example 2.10. 若

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因 $|\mathbf{A}| = -4$,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}-5 & 2 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因此

$$\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\,\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}20 & -8 & 0 & 0\\ -12 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

2.2 矩阵

Example 2.11. 已知 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{A}+\mathbf{B}$，证明 $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}$

有

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B}-\mathbf{A}-\mathbf{B}+\mathbf{E} = (\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{B}-\mathbf{E}) = \mathbf{E}$$

因此 $\mathbf{A}-\mathbf{E}$ 可逆，$(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1} = \mathbf{B}-\mathbf{E}$，于是

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{B}-\mathbf{E}) = (\mathbf{B}-\mathbf{E})(\mathbf{A}-\mathbf{E})$$

Example 2.12. 已知

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 6 & 3 & -3\\ -4 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

求 $\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

那么

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\end{bmatrix}=7\,\mathbf{A}$$

Remark. 一般情况下，若 $r(\mathbf{A})=1$，则 $\mathbf{A}$ 可分解为两个矩阵的乘积，有 $\mathbf{A}^2=l\,\mathbf{A}$，从而

$$\mathbf{A}^n=l^{n-1}\,\mathbf{A}$$

例如

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$$

那么

$$\mathbf{A}^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})^T(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^T=l\,\mathbf{A}$$

Example 2.13. 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2+2\,\mathbf{A}-3\,\mathbf{E}=\mathbf{0}$

1. 证明 $\mathbf{A},\mathbf{A}+2\,\mathbf{E}$ 可逆
2. 当 $\mathbf{A}\neq\mathbf{E}$ 时，判断 $\mathbf{A}+3\,\mathbf{E}$ 是否可逆

1. $(\mathbf{A}+3\,\mathbf{E})(\mathbf{A}-\mathbf{E})=\mathbf{0}$，因为 $\mathbf{A}\neq\mathbf{E}$，则 $(\mathbf{A}+3\,\mathbf{E})\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有非零解，因此 $|\mathbf{A}+3\,\mathbf{E}|=0$，所以 $\mathbf{A}+3\,\mathbf{E}$ 不可逆

Example 2.14. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为 n 阶矩阵，如果 $\mathbf{E}+\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ 可逆，证明矩阵 $\mathbf{E}+\mathbf{B}\,\mathbf{A}$ 可逆

如果 $\mathbf{E}+\mathbf{B}\,\mathbf{A}$ 不可逆, 则 $|\mathbf{E}+\mathbf{B}\,\mathbf{A}|=0$, 那么齐次方程组 $(\mathbf{E}+\mathbf{B}\,\mathbf{A})\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有非零解

设 $\boldsymbol{\eta}$ 是非零解，则 $(\mathbf{E}+\mathbf{B}\,\mathbf{A})\boldsymbol{\eta}=\mathbf{0}$,$\mathbf{B}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta}=-\boldsymbol{\eta}$。因为 $(\mathbf{E}+\mathbf{A}\,\mathbf{B})(\mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta})=\mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta}+\mathbf{A}(\mathbf{B}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta})=\mathbf{0}$，且 $\mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta}\neq\mathbf{0}$，因此矛盾

Example 2.15. 计算

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}^{2000}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

是把第 2 行的 2 倍加到第 3 行

Example 2.16. 已知 a 是常数，且矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & a\\1 & 3 & 0\\2 & 7 & -a\end{bmatrix}$$

可经初等变换化为矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & a & 2\\0 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

1. 求 a
2. 求满足 $\mathbf{A}\,\mathbf{P}=\mathbf{B}$ 的可逆矩阵

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\1 & 3 & 0\\2 & 7 & -a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\1 & 3 & 0\\3 & 9 & 0\end{vmatrix}=0$$

$r(\mathbf{A})=2$，因此 $r(\mathbf{B})=2$，而 $|\mathbf{B}|=2-a$，因此 $a=2$

$$\left[A\ \middle|\ B\right]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2\\1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1\\2 & 7 & -2 & -1 & -1 & -1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4\\0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

因此

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}3-6k_1 & 4-6k_1 & 4-6k_3\\-1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3\\k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}$$

Example 2.17. 1. 已知

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&5\\2&a&7\\1&3&2\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&4\\0&2&-1\\-3&0&5\end{bmatrix}$$

且 $r(\mathbf{A}\,\mathbf{B})=2$，求 a

2. 已知 $\mathbf{A}$ 是 2 阶非 0 矩阵且 $\mathbf{A}^5=\mathbf{0}$，求 $r(\mathbf{A})$

1. $|\mathbf{B}|\neq 0$，因此 $r(\mathbf{A})=2,|\mathbf{A}|=0$，而 $|\mathbf{A}|=3(5-a)=0$，因此 $a=5$
2. $r(\mathbf{A})\geq 1$，$|\mathbf{A}|^5=0$，因此 $|\mathbf{A}|=0$，因此 $r(\mathbf{A})=1$

Example 2.18. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 是 3 阶矩阵

1. 证明 $r(\mathbf{A},\mathbf{A}\,\mathbf{B})=r(\mathbf{A})$
2. 举例说明 $r(\mathbf{A},\mathbf{B}\,\mathbf{A})=r(\mathbf{A})$ 是错误的

1. 设 $\mathbf{A}\,\mathbf{B}=\mathbf{C}$，对矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{C}$ 分别按列分块，记 $\mathbf{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3],\mathbf{C}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3]$，记 $\mathbf{B}=[b_{ij}]$，那么由 $\mathbf{A}\,\mathbf{B}=\mathbf{C}$，有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1&\boldsymbol{\gamma}_2&\boldsymbol{\gamma}_3\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases}\boldsymbol{\gamma}_1=b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{31}\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\gamma}_2=b_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{32}\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\gamma}_3=b_{13}\boldsymbol{\alpha}_3+b_{23}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{33}\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}$$

因此 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，因此

$$r(\mathbf{A},\mathbf{A}\,\mathbf{B})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\mathbf{A})$$

2.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Example 2.19. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵，证明

$$r(\mathbf{A}\,\mathbf{B})\leq \min\{r(\mathbf{A}),r(\mathbf{B})\}$$

对于齐次方程组 1. $\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$2. $\mathbf{B}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组 2 的一个解，它也是方程组 1 的解，因此方程组 2 的解集是方程组 1 的解集的子集

又因 1 的解向量的秩为 $s - r(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$，2 的解向量的秩为 $s - r(\mathbf{B})$，因此

$$s - r(\mathbf{B}) \leq s - r(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$$

即 $r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{B})$

另一方面，$r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = r((\mathbf{A}\,\mathbf{B})^T) = r(\mathbf{B}^T\,\mathbf{A}^T) \leq r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A})$

Example 2.20. 若 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$，证明

$$r(\mathbf{A}+\mathbf{E}) + r(\mathbf{A}-\mathbf{E}) = n$$

$r(\mathbf{A}+\mathbf{E}) + r(\mathbf{A}-\mathbf{E}) \leq n + r((\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{A}+\mathbf{E}))$. $r(\mathbf{A}+\mathbf{E}) + r(\mathbf{A}-\mathbf{E}) \geq r(\mathbf{A}+\mathbf{E}+\mathbf{E}-\mathbf{A})$

Example 2.21. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n - \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 & \dots & \boldsymbol{\alpha}_n - \boldsymbol{\alpha}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \dots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

$|\mathbf{A}| = 0$，因此线性相关

Example 2.22. 设 $\mathbf{A}$ 是 $n \times m$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $m \times n$ 矩阵，其中 $n < m$，若 $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{E}$，证明 $\mathbf{B}$ 的列向量线性无关

$r(\mathbf{B}) \leq n$，又

$$r(\mathbf{B}) \geq r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = n$$

Example 2.23. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i = [a_{i1}, \dots, a_{in}]^T (i = 1, 2, \dots, r, r < n)$ 是 n 维实向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，已知 $\boldsymbol{\beta} = [b_1, \dots, b_n]^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

的非零解向量，试判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\dots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. $\boldsymbol{\beta}$ 与每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都正交，$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}_i=0$。因此 $k\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}=0$. 因为 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$，因此 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}\neq 0$，因此 $k=0$. 因此线性无关

Example 2.24. 设 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关，且与非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 正交，证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

令

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^T\end{bmatrix}$$

因此 $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$，因为 $r(\mathbf{A})=n-1$，因此 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系仅由 1 个解向量构成，因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

Example 2.25. 线性变换 $\mathbf{A}$ 的属于不同特征值的特征向量线性无关

设 $\mathbf{A}$ 的 k 个不同特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ 分别对应于特征向量 $\xi_1,\dots,\xi_k$，对 k 作数学归纳法

当 $k=1$ 时显然。设命题在 $k-1$ 个不同特征值的情况下成立

$$\begin{gathered}
l_1\xi_1+\dots+l_k\xi_k=0\\
l_1\mathbf{A}\xi_1+\dots+l_k\mathbf{A}\xi_k=0\\
l_1\lambda_1\xi_1+\dots+l_k\lambda_k\xi_k=0\\
l_2(\lambda_1-\lambda_2)\xi_2+\dots+l_k(\lambda_1-\lambda_k)\xi_k=0\\
l_2(\lambda_1-\lambda_2)=\dots=l_k(\lambda_1-\lambda_k)=0\\
l_2=\dots=l_k=0
\end{gathered}$$

因此 $l_1=0$，$\xi_1,\dots,\xi_k$ 线性无关

Example 2.26. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，证明 $r(\mathbf{A}+\mathbf{B})\leq r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$

设 $r(\mathbf{A})=r$,$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\mathbf{A}$ 的列向量的极大线性无关组，$r(\mathbf{B})=t$,$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\dots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 是 $\mathbf{B}$ 的列向量的极大线性无关组

于是 $\boldsymbol{\alpha}_k+\boldsymbol{\beta}_k$ 都被 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表示

2.3 线性方程组

Example 2.27. 设非齐次线性方程组 $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}=\mathbf{b}$，则

1. 当 $r(\mathbf{A})=m$ 时，方程有解

2. 当 $r(\mathbf{A})=n$ 时，方程有唯一解
3. 当 $m=n$ 时，方程组有唯一解
4. 当 $r(\mathbf{A})=r<n$ 时，方程组有无穷多解

$\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解当且仅当 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A},\mathbf{b})$

Example 2.28. 设 $\mathbf{A}$ 是四阶矩阵，$r(\mathbf{A})=2$,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的三个线性无关解，其中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=[-1,2,5,1]^T\\&\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3=[2,1,3,-3]^T\\&3\boldsymbol{\eta}_1+5\boldsymbol{\eta}_2=[1,-2,1,-1]^T\end{aligned}$$

求方程组 $\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的通解

因为 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3)=-\mathbf{b}$，因此 $\boldsymbol{\eta}=-\boldsymbol{\eta}_2+2\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一个特解

$\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的两个通解为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+2(\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3)\\&\boldsymbol{\xi}_2=8(\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3)+5\boldsymbol{\eta}_3+3\boldsymbol{\eta}_1\end{aligned}$$

Example 2.29. 设 $\boldsymbol{\xi}=[a_1,\dots,a_n]^T,\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi}=1$，证明 $\left|\mathbf{E}-\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi}\right|=0$

构造齐次线性方程组

$$(\mathbf{E}-\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi})\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

有

$$(\mathbf{E}-\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$$

有非零解，因此

$$\left|\mathbf{E}-\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi}\right|\neq 0$$

Example 2.30. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+2x_2+\cdots+nx_n=0\\x_1+(2+a)x_2+\cdots+nx_n=0\\\vdots\\x_1+2x_2+\cdots+(a_n+n)x_n=0\end{cases}$$

试问 a 为何值时，方程组有非零解

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+a & 2 & \dots & n \\ 1 & 2+a & \dots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n+a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1+a & 2 & \dots & n \\ -a & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & 0 & \dots & a \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

当 $a = 0$ 时，$r(\mathbf{A}) = 1 < n$，方程组有非零解

当 $a \neq 0$ 时，对矩阵 $\mathbf{B}$ 继续初等行变换

$$\mathbf{B} \to \begin{bmatrix} 1+a & 2 & \dots & n \\ -a & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & 0 & \dots & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1+a & 2 & \dots & n \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} \frac{n(n+1)}{2}+a & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

当 $a = \frac{n(n+1)}{2}$ 时，$r(\mathbf{A}) = n - 1$

Example 2.31. 设线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 x_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 x_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 x_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 x_4 = \boldsymbol{\beta}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}$ 均是四维列向量，有通解

$$k[-2, 3, 1, 0]^T + [4, -1, 0, 3]^T$$

1. $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示
2. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示
3. 求线性方程组
$$[\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4] = \boldsymbol{\beta}$$
的通解

$$\boldsymbol{\beta} = (-2k+4)\boldsymbol{\alpha}_1 + (-1+3k)\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3 + 3\boldsymbol{\alpha}_4$$
$$4\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3 = 0$$

$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = 3, r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 2$ ，因此不能

$r(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = 3$，因此通解形式为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\eta}$ 因为

$$0(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}) + 4\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3 + 3\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\eta}_1 = [0, 4, -1, 0, 3]^T$$
$$0(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}) - 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + 0\boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{0} \Rightarrow \xi = [0, -2, 3, 1, 0]^T$$
$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3 + 0\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\eta}_2 = [1, -1, 0, 0, 0]^T$$

因此有解

$$k_1\boldsymbol{\xi} + k_2(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) + \boldsymbol{\eta}_1$$

Example 2.32. 证明：若方程组

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n = 0 \end{cases}$$

有解，则方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + \cdots + a_{mm}x_m = 0 \end{cases}$$

和方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + \cdots + a_{mm}x_m = 0 \\ b_1x_1 + \cdots + b_mx_m = 0 \end{cases}$$

是同解方程组

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

则问题变为，已知 $\mathbf{A}\,\mathbf{y} = \mathbf{x}$，则方程组

$$\mathbf{A}^T\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{b}^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

同解。因为 $\mathbf{A}\,\mathbf{y}=\mathbf{x}$ 有解，因此 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A},\mathbf{b})$，因此

$$r(\mathbf{A}^T)=r\begin{bmatrix}\mathbf{A}^T\\ \mathbf{b}^T\end{bmatrix}$$

因此它们基础解系的线性无关向量个数相同

Example 2.33. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\mathbf{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 则线性方程组 $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$

1. 当 $n>m$ 时仅有零解
2. 当 $n>m$ 时必有非零解
3. 当 $m>n$ 时仅有零解
4. 当 $m>n$ 时必有非零解

$r(\mathbf{A}\,\mathbf{B})\le r(\mathbf{A})\le n<m$

Example 2.34. 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵，且满足 $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$

1. 求 $\mathbf{A}$ 的特征值的取值范围
2. 证明 $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 是可逆矩阵

$$\lambda^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}^2\,\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}\,\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$$

因此 $\lambda=0,1$

$\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 的特征值的值为 $1,2$

Example 2.35. 1. 设 $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 是主对角元为 1 的上三角阵，且存在 $a_{ij}\ne 0(i<j)$，问 $\mathbf{A}$ 是否相似于对角阵，说明理由

2. 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}\ne\mathbf{0}$，但 $\mathbf{A}^k=\mathbf{0}(k\in\mathbb{N}^+)$，问 $\mathbf{A}$ 能否相似于对角阵

1. 不能, $|\lambda\,\mathbf{E}-\mathbf{A}|=(\lambda-1)^n$, 故 $\lambda=1$ 是 $\mathbf{A}$ 的 n 重特征值, 而 $r(\mathbf{E}-\mathbf{A})\ge 1$，因而对应于 $\lambda=1$ 的特征向量个数 $\le n-1$
2. 不能，若 $\mathbf{A}$ 有特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$，则 $\mathbf{A}^k$ 有特征值 $\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k$。又 $\mathbf{A}^k=\mathbf{0}$，因此 $\lambda_1^k=\cdots=\lambda_n^k=0$，因此 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. 但 $\mathbf{A}\ne 0$，因此 $r(0\,\mathbf{E}-\mathbf{A})=r(\mathbf{A})\ge 1$，因此不能相似

Example 2.36. 设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$f(x)=x^3-2x+5, \mathbf{B}=f(\mathbf{A})$，问 $\mathbf{B}$ 能否相似于对角阵

$\mathbf{A}$ 是实对称矩阵, 因此 $f(\mathbf{A})$ 也是实对称矩阵，因此能对角化
$|\lambda\,\mathbf{E}-\mathbf{A}|=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$
当 $\lambda_1=-1$ 时，特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=[1,1,1]^T$
当 $\lambda_2=2$ 时，特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,-1,0]^T,\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,-1]$
$\mathbf{B}$ 的特征值为 $f(\lambda)=6,9$，因此

$$\mathbf{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix},\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

Example 2.37. 设 $\mathbf{A}$ 是三阶实对称矩阵，$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，对应于 $\lambda=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=[0,1,1]^T$，求 $\mathbf{A}$

对应于 λ_2 的特征向量与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交，因此

$$x_2+x_3=0$$

解得 $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,0]^T,\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,-1]^T$，因此有 $\mathbf{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 使得

$$\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Example 2.38. 设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{bmatrix}$$

且已知 $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$，求可逆阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}=\mathbf{B}$

因为 $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$，故有 $Tr(\mathbf{A})=Tr(\mathbf{B}),|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|$

$$\begin{cases}1+4+a=2+2+b\\6a-6=4b\end{cases}$$

2.4 二次型

Example 2.39. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Q}\,\mathbf{y}$ 化成标准形 $f=6y_1^2$，求参数 a

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

因此 $3a = 6, a = 2$

Example 2.40. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是两个 n 阶实对称矩阵，证明：

1. 若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同，则 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$
2. $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 合同的充分必要条件是 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 有相同的秩和正惯性指数
2. 设 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{\Lambda}$，则 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B} \simeq \mathbf{\Lambda}$，因此

$$\mathbf{C}_1^T \mathbf{A} \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_p & & \\ & -\mathbf{E}_{r-p} & \\ & & \mathbf{0}_{n-r} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_2^T \mathbf{B} \mathbf{C}_2$$

Example 2.41. 下列二次型中，与 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ 合同的是

1. $g = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$
2. $h = x_1^2 + 5x_2^5 + 4x_1x_2$
3. $w = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$
4. $r = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$

相同的秩和正惯性指数，因此

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2)^2 - 3x_2^2 \\ &g = (x_1 + x_2)^2 \\ &h = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \\ &w = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 \\ &r = (x_1 + 3x_2)^2 - 8x_2^2 \end{aligned}$$

Example 2.42. 判别二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. **A** 的顺序 y 主子式都大于 0
2. **A** 的全部特征值 >0
3. 正惯性指数为 n

Example 2.43. **A** 是 n 阶正定阵，**C** 是 $n \times m$ 矩阵，且 $r(\mathbf{C}) = m$，证明 $\mathbf{C}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{C}$ 也是正定阵

$\mathbf{C} = [\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_m]$，则 $\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_m$ 线性无关，对任给 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_m]^T \neq \mathbf{0}$，有

$$\mathbf{C}\,\mathbf{x} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_m)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

而 **A** 是正定阵，故对任意的 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \neq \mathbf{0}$，有 $\mathbf{C}\,\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$，且恒有

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{C}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{C})\,\mathbf{x} = (\mathbf{C}\,\mathbf{x})^T\,\mathbf{A}(\mathbf{C}\,\mathbf{x}) > 0$$

故 $\mathbf{C}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{C}$ 是正定矩阵

Example 2.44. 设 $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}$，且 $|\mathbf{A}| = 0$

1. 证明存在 n 维列向量 $\mathbf{x}_0$ 使得 $f(\boldsymbol{\xi}_0) = 0$
2. 当
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 01 & 2 \end{bmatrix}$$
时，求 $\boldsymbol{\xi}_0$ 使得 $f(\xi_0) = 0$

1. 因为 $|\mathbf{A}| = 0$，因此 **A** 有一个特征值为 0，设其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_0$

3 概率论与数理统计

3.1 随机事件与概率

Example 3.1. 随机事件 A, B 满足 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$，$P(A \cup B) = 1$，则必有

1. $A \cup B = \Omega$
2. $AB = \emptyset$
3. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$
4. $P(A - B) = 0$

选 3

Example 3.2. 为从 2 个次品，8 个正品的 10 个产品中将 2 个次品挑出，随机地从中逐个测试，则不超过 4 次测试就把 2 个次品挑出的概率为

方法 1。把 10 个产品随机排成一行，按先后次序逐个测试，总共有 10! 种排法，如要不超过 4 次测试就把 2 个次品挑出，就要求在前 4 个产品中有 2 个次品和 2 个正品，共有 $C_2^2C_8^2 4!6!$，所以所求概率为

$$P = \frac{C_2^2C_8^2 4!6!}{10!} = \frac{2}{15}$$

方法 2。如果只考虑前 4 次测试，总的可能为 10 个产品中任选 4 个，有 A_{10}^4 种，前 4 次测试就包含 2 个次品的可能为 $C_2^2C_8^2 4!$，所以所求概率为

$$P = \frac{C_2^2C_8^2 4!}{A_{10}^4} = \frac{2}{15}$$

方法 3. 如果只考虑前 4 次测试而不计它们的先后次序，总的可能有 C_{10}^4 种选法，因此

$$P = \frac{C_2^2C_8^2}{C_{10}^4} = \frac{2}{15}$$

方法 4。如果只考虑 2 个次品在 10 次测试中的位置，总的可能为 C_{10}^2 种，现要求前 4 位中有两个次品，因此

$$P = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}$$

Example 3.3. 掷一枚硬币 $2n$ 次，出现正面向上次数多于反面向上次数的概率为

在 $2n$ 次中正面向上次数跟反面向上次数相等的概率为 $C_{2n}^n(\frac{1}{2})^{2n}$，因此概率为 $\frac{1}{2}[1 - C_{2n}^n(\frac{1}{2})^{2n}]$

Example 3.4. 一条自动生产线连续生产 n 件产品不出故障的概率为 $\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, n = 0, 1, 2, ...$。假设产品的优质品率为 p，如果各件产品是否为优质品相互独立

1. 计算生产线在两次故障间共生产 k 件优质品的概率
2. 若已知在某两次故障间该生产线生产了 k 件优质品，求它共生产 m 件产品的概率

设事件 $B_k =$ 两次故障间共生产 k 件优质品，事件 $A_i =$ 两次故障间共生产 i 件产品，$A_0, A_1, ...$ 构成一完整事件组，且

$$P(A_i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, i = 0, 1, ...$$

当 $i < k$ 时，$P(B_k \mid A_i) = 0$

当 $i \geq k$ 时，在 i 个产品中有 k 个优质品，且各产品是否优质相互独立，因此 $P(B_k \mid A_i = C_i^k p^k (1-p)^{i-k})$

1. 应用全概率公式

$$\begin{aligned}
P(B_k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i) P(B_k \mid A_i) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(A_i) P(B_k \mid A_i) \\
&= \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} C_i^k p^k (1-p)^{1-k} = \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k} \\
&= \frac{(\lambda p)^i}{k!} e^{-\lambda p} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p)^{i-k})}{(i-k)!} e^{-\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

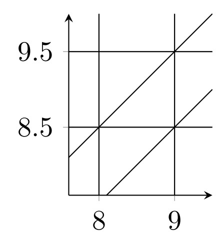
2. 当 $m < k$ 时，$P(A_m \mid B_k) = 0$

   当 $m \geq k$ 时，

$$\begin{aligned}
P(A_m \mid B_k) &= \frac{P(A_m) P(B_k \mid A_m)}{P(B_k)} = \frac{k!}{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \frac{m!}{k!(m-k)!} p^k (1-p)^{m-k} \\
&= \frac{(\lambda q)^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda q}
\end{aligned}$$

Example 3.5. 甲在 8 点到 9 点，乙在 8 点半到 9 点半的各时刻等可能地、相互独立地去同一办公室，已知没人只在办公室停留半小时，则它们相遇的概率为

设甲乙到达的时刻分别为 $8 \leq X \leq 9, 8.5 \leq Y \leq 9.5$，相遇时必须



3.2 随机变量与其概率分布

Example 3.6. 设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，则成立 $P\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$ 的充要条件是

1. x_1 处连续
2. x_2 处连续

3. x_1, x_2 至少一处连续
4. x_1, x_2 都不连续

$P\{x_1 < X < x_2\} = P\{x_1 < X \leq x_2\} - P\{X = x_2\} = F(x_2) - F(x_1) - P\{X = x_2\}$。$P\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$ 可知 $P\{X = x_2\} = 0$ 即 $F(x_2) - F(x_2 - 0) = 0$，$F(x)$ 在 x_2 处作连续，$F(x)$ 是右连续的，因此 x_2 处 $F(x)$ 连续

Example 3.7. 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,2^2), X_3 \sim N(5,3^2)$，$p_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\}$，则

1. $p_1 > p_2 > p_3$
2. $p_2 > p_1 > p_3$
3. $p_3 > p_1 > p_2$
4. $p_1 > p_3 > p_2$

$p_1 = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$, $p_2 = \Phi(\frac{2-0}{2}) - \Phi(\frac{-2-0}{2}) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$, $p_3 = \Phi(\frac{2-5}{3}) - \Phi(\frac{-2-5}{3}) = \Phi(-1) - \Phi(-\frac{7}{3})$，因此 $p_1 > p_2 > p_3$

Example 3.8. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = Ae^{-x^2+x}$，试求常数 A

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-x^2+x}dx = Ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{2})^2}dx \\ &= Ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = Ae^{1/4}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Example 3.9. 假设随机变量 X 服从指数分布，则随机变量 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数

1. 是连续函数
2. 至少有两个间断点
3. 是阶梯函数
4. 恰好有一个间断点

方法 1。设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$。

当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = 0$

当 $0 \leq y < 2$ 时

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{\min\{X, 2\} \leq y\} \\ &= P\{X \leq y\} = \int_{-\infty}^{y} \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda y}\end{aligned}$$

但 $y \geq 2$ 时，$F_Y(y) = 1$，因此

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & 0 \leq y < 2 \\ 1 & y \geq 2 \end{cases}$$

因此间断点为 $y = 2$

方法 2. 指数分布 X 的分布函数必为连续函数，

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\min\{X, 2\} \leq y\} = \begin{cases} F_X(y) & y < 2 \\ 1 & y \geq 2 \end{cases}$$

故有一个间断点

3.3 多维随机变量及其分布

Example 3.10. 设 (X, Y) 是二维随机变量，X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 \end{cases}$$

在给定 $X = x(0 < x < 1)$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3} & 0 < y < x \\ 0 \end{cases}$$

1. 求 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$
2. 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$
3. 求 $P\{X > 2Y\}$

注意条件概率是在 $X = x$ 的条件下给定的，因此在 $0 < x < 1$ 时

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3} & 0 < y < x \\ 0 \end{cases}$$

又 $\int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 1$

Example 3.11. 设随机变量 X, Y 相互独立，$X \sim B(1, 0.5), Y \sim U[0, 1]$，记 $Z = X + Y$，试求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = P\{X+Y \le z\} \\
&= P\{X=0, X+Y \le z\} + P\{X=1, X+Y \le z\} \\
&= P\{X=0, Y \le z\} + P\{X=1, Y \le z-1\} \\
&= \frac{1}{2}F_Y(z) + \frac{1}{2}F_Y(z-1) \\
&= \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{z}{2} & 0 \le z \le 2 \\ 1 & 2 < z \end{cases}
\end{aligned}
$$

Example 3.12. 设随机变量 X 的概率密度为

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

令随机变量

$$
Y = \begin{cases} 2 & X \le 1 \\ X & 1 < X < 2 \\ 1 & 2 \le X \end{cases}
$$

1. 求 Y 的分布函数
2. 求概率 $P\{X \le Y\}$

   $1 \le Y \le 2$，因此

   当 $y < 1$ 时，$F_Y(y) = 0$

   当 $1 \le y < 2$ 时，

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{Y < 1\} + P\{Y = 1\} + P\{1 < Y \le y\} \\
&= 0 + P\{X \ge 2\} + P\{1 < X \le y\} \\
&= \int_2^3 \frac{1}{9}x^2 dx + \int_1^y \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{y^3+18}{27}
\end{aligned}
$$

   当 $2 \le y$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{Y \le 2\} = 1$

$$\begin{aligned}P\{X \leq Y\} &= P\{X = Y\} + P\{X < Y\} \\ &= P\{1 < X < 2\} + P\{X \leq 1\} \\ &= P\{X < 2\} = \int_0^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{8}{27}\end{aligned}$$

Example 3.13. 设 $(X, Y) \sim N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$，则 $P\{X < Y\} =$

$P\{X < Y\} = \iint_{x<y} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2e^2}[(x-\mu)^2+(y-\mu)^2]} dxdy$

用极坐标

$$\begin{cases} x - \mu = \rho\cos\theta \\ y - \mu = \rho\sin\theta \end{cases}$$

则

$$P\{X < Y\} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{-\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho = \frac{1}{2}$$

或由对称性得

Example 3.14. 设随机变量 X, Y 相互独立，服从同一参数为 λ 的泊松分布，试求：随机变量 $Z = X + Y$ 的分布律

$$\begin{aligned}P\{Z = k\} = P\{X + Y = k\} &= \sum_{i=0}^{k} P\{X = i, Y = k - i\} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \frac{\lambda^{k-i} e^{-\lambda}}{(k-i)!} \\ &= e^{-2\lambda} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^k}{i!(k-i)!} = e^{-2\lambda} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-2\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i = e^{-2\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} (1+1)^k \\ &= \frac{(2\lambda)^k}{k!} e^{-2\lambda}, k = 0, 1, ...\end{aligned}$$

Example 3.15. 设随机变量 X_i 的概率分布为

X_i	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$i = 1, 2$，且满足 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$，则 $P\{X_1 = X_2\} =$

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2	
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

Example 3.16. 设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 为二维随机变量 (X_1, X_2) 的边缘分布函数，且 X_1, X_2 相互独立，则

1. $2F_1(x) - F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数
2. $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数
3. $F_1(x) - \frac{1}{2}F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数
4. $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

$F(x)$ 分布函数的充要条件是

1. 单调不减
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$
3. 右连续

3.4 随机变量的数字特征

Example 3.17. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，求 $E(X)$

方法 1。$f(x) = F'(x) = 0.3\varphi(x) + \frac{0.7}{2}\varphi(\frac{x-1}{2})$，其中 $\varphi(x)$ 为标准正态密度函数

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0.3\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx + \frac{0.7}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(\frac{x-1}{2})dx \\ &= 0.3 + 0.7\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+1)\varphi(t)dt = 0.7 \end{aligned}$$

方法 2。当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时，其分布函数为 $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$，即有分布函数为 $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ 的随机变量，其数学期望是 μ ，故 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$ 的数学期望为 0.7

Example 3.18. 已知 N 件产品中含有 M 件次品，从中任意一次取出 n 件 $(n \le N)$，设这 n 件产品中的次品件数为 X，试求 X 的数学期望 $E(X)$

将一次取出 n 件理解成一次一件地不放回地取 n 次令

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 次取得次品} \\ 0 & \text{第 } i \text{ 次取得正品} \end{cases} i = 1, 2, \dots, n$$

显然 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$，第 i 次取得次品的概率，无论每次取后放回或不放回，均为 $\frac{M}{N}$，因此

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\frac{M}{N}$$

Example 3.19. 设随机变量 X, Y 独立同分布，已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $Z = \min(X, Y)$ 的数学期望 $E(Z)$

设 $\xi = \frac{X-\mu}{\sigma}, \eta = \frac{Y-\mu}{\sigma}$

$$Z = \min(X, Y) = \min(\sigma\xi + \mu, \sigma\eta + \mu) = \sigma \min(\xi, \eta) + \mu$$

$$\begin{aligned} E[\min(\xi, \eta)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \min(x, y) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{x} ye^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \int_{-\infty}^{y} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 2\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)e^{-x^2} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

因此

$$E(Z) = \sigma E[\min(\xi, \eta)] + \mu = \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

Example 3.20. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2}+Bx}, -\infty < x < +\infty$$

其中 A, B 为常数，已知 $E(X) = D(X)$，试求 $A, B, E(X)$

$f(x) = Ae^{\frac{B^2}{2}} e^{-\frac{(x-B)^2}{2}}$，该密度是正态分布 $N(B, 1)$ 的密度函数

又因为 $E(X) = D(X)$，因此 $B = 1$

Example 3.21. 将 n 只球相互独立地放入到 N 只盒子中，设每只球放入各个盒子是等可能的，求有球的盒子数 X 的数学期望 $E(X)$

设

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 只盒子有球} \\ 0 & \text{第 } i \text{ 只盒子无球} \end{cases}$$

显然 $X=\sum_{i=1}^{N} X_i$

对第 i 只盒子而言，一只球放入的概率为 $\frac{1}{N}$，没放入的概率为 $(1-\frac{1}{N})$，因此

$$
\begin{aligned}
P\{X_i=0\} &= \left(1-\frac{1}{N}\right)^n \\
P\{X_i=1\} &= 1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n \\
E(X_i) &= 1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n
\end{aligned}
$$

因此

$$
E(X)=N\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]
$$

Example 3.22. 设随机变量 X,Y 的联合分布在以点 $(0,1),(1,0),(1,1)$ 为顶点的三角形上服从均匀分布，试求随机变量 $U=X+Y$ 的方差

以 $f_U(u)$ 表示 $U=X+Y$ 的概率密度，当 $u<1$ 或 $u>2$ 时，显然 $f_U(u)=0$, 设 $1\le u\le 2$，当 $0\le x\le 1$ 时且 $0\le u-x\le 1$，$f(x,u-x)=2$，因此

$$
f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)dx=\int_{u-1}^{1} 2dx=2(2-u)
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&E(X+Y)=E(U)=\int_{-\infty}^{+\infty} uf_U(u)=2\int_1^2 u(2-u)du=\frac{4}{3} \\
&E((X+Y)^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)du=2\int_1^2 u^2(2-u)du=\frac{11}{6} \\
&D(U)=\frac{11}{6}-\frac{16}{9}=\frac{1}{18}
\end{aligned}
$$

Example 3.23. 已知随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N\left(1,0;9,16;-\frac{1}{2}\right)$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$

1. 求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$
2. 求 X,Z 的相关系数 ρ_{XZ}
3. 问 X,Z 是否相互独立

$(X,Y)\sim N\left(1,0;9,16;-\frac{1}{2}\right)$，所以 $X\sim N(1,9),Y\sim N(0,16),\rho_{XY}=$

$-\frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= E(\frac{X}{+}\frac{Y}{3}) = \frac{1}{3} \\
D(Z) &= D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}) = \frac{D(X)}{9}+\frac{D(Y)}{4}+2Cov(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}) \\
&= 1+4+\frac{\rho_{XY}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = 1+4-2=3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Z) &= \frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y) \\
&= \frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = 0
\end{aligned}
$$

因为 (X,Y) 是正态分布，故 $(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})$ 也是正态分布且 $\rho_{XZ}=0$，因此独立

Example 3.24. 设随机变量 X,Y 的数学期望都是 2，方差分别为 1，4，相关系数 0.5，则根据切比雪夫不等式 $P\{|X-Y|\geq 6\}\leq$ _____

令 $Z=X-Y$, 则 $E(Z)=0, D(Z)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)=3$, 因此

$$
P\{|X-Y|\geq 6\} = P\{|E-E(Z)|\geq 6\} \leq \frac{D(Z)}{6^2} = \frac{1}{12}
$$

Example 3.25. 某种电子元件的寿命 $E\sim E(\lambda)$，现有 n 个该钟元件相互独立工作，已知其中至少有一个工作元件寿命超过平均寿命的概率为 $3e^{-1}-3e^{-2}+e^{-3}$，求 n

$EX=\frac{1}{\lambda}$，每个元件工作寿命不超过平均寿命的概率为 $P\{X\leq EX\}=P\{X\leq\frac{1}{\lambda}\}=1-e^{-1}$

Example 3.26. 游客乘电梯观光，电梯于每个整点的第 5，25，55 分钟从底层起行，假设一游客在早上 8 点的第 X 分钟到达底层候梯处，且 X 服从 $[0,60]$ 的均匀分布，求该乘客等候时间的数学期望

设游客等候时间为 Y，则

$$
Y=\begin{cases}
5-X & 0\leq X\leq 5 \\
25-X & 5<X\leq 25 \\
55-X & 25<X\leq 55 \\
65-X & 55<X\leq 60
\end{cases}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
E(Y) = E[g(X)] &= \int_0^5 (5-x)\frac{1}{60}dx + \int_5^{25}(25-x)\frac{1}{60}dx \\
&+ \int_{25}^{55}(55-x)\frac{1}{60}dx + \int_{55}^{60}(65-x)\frac{1}{60}dx \\
&= \frac{35}{3}
\end{aligned}
$$

Example 3.27. 某线路有两个中间站，设两个中间站无故障的时间分别为 X_1, X_2，均服从指数分布，已知它们平均无故障工作时间为 1 和 0.5（千小时），求线路无故障工作时间的期望

$X_1 \sim E(1), X_2 \sim E(2)$

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \min\{x_1, x_2\} f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_0^{+\infty} dx_1 \int_{x_1}^{+\infty} x_1 e^{-x_1} 2e^{-2x_2} dx_2 + + \int_0^{+\infty} dx_2 \int_{x_2}^{+\infty} x_2 e^{-x_1} 2e^{-2x_2} dx_1 \\
&= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

3.5 大数定律和中心极限定理

Example 3.28. 1. 某系统由 100 个部件组成，运行期间每个部件是否损坏是相对独立的，虽坏的概率均为 0.1，如果有 85 个以上的部件完好时系统才能正常工作，求系统正常工作的概率

2. 如果上述系统由 n 个部件组成，需 80% 以上的部件完好时系统才能正常工作，问 n 至少多大时才能使系统正常工作地概率不小于 0.95

设

$$
X_k = \begin{cases} 1 & \text{第 } k \text{ 个元件完好} \\ 0 & \text{第 } k \text{ 个元件损坏} \end{cases}, k = 1, 2, \dots, 100
$$

X 为系统正常运行时完好的元件数，$X \sim B(100, 0.9)$,$E(X) = 90, D(X) = 9$

根据中心极限定理，系统正常工作的概率为

$$
\begin{aligned}
P\{X > 85\} = 1 - P\{X \le 85\} &= 1 - P\left\{\frac{X-90}{\sqrt{9}} \le \frac{85-90}{\sqrt{9}}\right\} \\
&\approx 1 - \Phi(-\frac{5}{3}) = 0.9525
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}P\{X > 0.8n\} &= 1 - P\{X \le 0.8n\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{X - 0.9n}{0.3\sqrt{n}} \le \frac{0.8n - 0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right\} \\ &\approx 1 - \Phi(-\frac{\sqrt{n}}{3}) = \Phi(\frac{\sqrt{n}}{3})\end{aligned}$$

3.6 数理统计的基本概念

Remark. 如果总体 X 的分布为 $F(x)$，则样本 $X_1, \dots, X_n$ 的分布为

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$$

如果总体 X 有概率密度 $f(x)$，则样本 $X_1, \dots, X_n$ 的概率密度为

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

如果总体 X 有概率分布 $P\{X = a_j\} = p_j$，则样本 $X_1, \dots, X_n$ 的概率分布为

$$P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}$$

Example 3.29. 设总体 $X \sim P(\lambda)$，则来自总体 X 的样本 $X_1, \dots, X_n$ 的样本均值 $\overline{X}$ 的分布律为

当 $X_1, \dots, X_n$ 独立同为 $P(\lambda)$ 分布时 $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X} \sim P(n\lambda)$，因此对于任意 $n > 2$，得 $n\overline{X}$ 的分布律

$$P\{n\overline{X} = k\} = \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}, \quad k = 01, 2, \dots$$

而 $P\{n\overline{X} = k\} = P\{\overline{X} = \frac{k}{n}\}$

Example 3.30. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的简单随机样本，$X = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$，则当 $a =$ ______, $b =$ ______ 时，统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为 ______

$$(X_1 - 2X_2) \sim N(0, 20), \quad (3X_3 - 4X_4) \sim N(0, 100)$$

且 $(X_1 - 2X_2), (3X_3 - 4X_4)$ 相互独立，标准化得

$$\frac{1}{\sqrt{20}}(X_1 - 2X_2) \sim N(0, 1), \quad \frac{1}{19}(3X_3 - 4X_4) \sim N(0, 1)$$

因此当 $a = \frac{1}{20}, b = \frac{1}{100}$ 时，服从 $\chi^2(2)$ 分布

Example 3.31. 设随机变量 $T \sim t(n)$，则 T^2 服从的分布及参数为

$X \sim N(0,1), X^2 \sim \chi^2(1), T^2 \sim F(1,n)$

Example 3.32. 已知 X_1, X_2, X_3 相互独立且服从 $N(0,\sigma^2)$，证明 $\dfrac{2}{3}\dfrac{X_1+X_2+X_3}{|X_2-X_3|}$ 服从 $t(1)$ 分布

记 $Y_1 = X_2 + X_3, Y_2 = X_2 - X_3$，则

$$\begin{aligned} Cov(Y_1,Y_2) &= E(Y_1Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) = E(X_2+X_3)(X_2-X_3) \\ &= EX_2^2 - EX_3^2 = \sigma^2 - \sigma^2 = 0 \end{aligned}$$

所以 Y_1, Y_2 独立，均服从 $N(0,2\sigma^2)$，且与 X_1 独立

$$X_1 + X_2 + X_3 = X_1 + Y_1 \sim N(0, 3\sigma^2)$$

所以 $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{3}}(X_1+X_2+X_3) \sim N(0,1)$, $\left(\dfrac{X_2-X_3}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$, 且 $X_1+X_2+X_3$ 与 X_3-X_3 相互独立,

Example 3.33. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从该总体中抽取简单随机样本 $X_1, \dots, X_{2n}$，其样本均值为 $\overline{X} = \dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$，求统计量 $Y = \sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})$ 的数学期望

方法 1。考虑 $(X_1+X_{n+1}), \dots, (X_n, X_{2n})$, 将其视为取自总体 $N(2\mu, 2\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本方差为 $\frac{1}{n-1}Y$，由于 $E(\frac{1}{n-1}Y) = 2\sigma^2$，因此 $E(Y) = 2(n-1)\sigma^2$

方法 2。记 $\overline{X}' = \dfrac{1}{n}X_i, \overline{X}'' = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n+i}$ 有 $2\overline{X} = \overline{X}' + \overline{X}''$，因此

$$\begin{aligned} E(Y) = E[\sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2] &= E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - \overline{X}') + (X_{n+i} - \overline{X}'')\right]\right\} \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - \overline{X}')^2 + 2(X_i - \overline{X}')(X_{n+i} - \overline{X}'') + (X_{n+i} - \overline{X}'')^2\right]\right\} \\ &= E[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}')^2] + 0 + E[\sum_{i=1}^{n}(X_{n+i} - \overline{X}'')^2] \\ &= (n-1)\sigma^2 + (n-1)\sigma^2 = 2(n-1)\sigma^2 \end{aligned}$$

Example 3.34. 设随机变量 $X_1, \dots, X_n$ 独立同分布且具有相同的分布密度，证明

$$P\{X_n > \max(X_1, \dots, X_{n-1})\} = \frac{1}{n}$$

设 $f(x), F(x)$ 分别表示 X_i 共同的概率密度和分布函数，则

$$
\begin{aligned}
P\{X_n > \max(X_1, \ldots, X_{n-1})\} &= P\{X_1 < X_n, \ldots, X_{n-1} < X_n\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int \cdots \int_{x_i < x_n} \prod_{i=1}^{n-1} f(x_i) dx_i \right] f(x_n) dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{i=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{x_n} f(x_i) dx_i \right] f(x_n) dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} F^{n-1}(x_n) f(x_n) dx_n = \frac{1}{n} F^n(x_n) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

3.7 参数估计

Example 3.35. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，已知 $X \sim P(\lambda)$，证明 $T = (1 - \frac{1}{n})^{n\overline{X}}$ 的数学期望是 $P\{X = 0\}$

$P\{X = 0\} = e^{-\lambda}, n\overline{X} \sim P(n\lambda)$, 故

$$
\begin{aligned}
E(T) = E\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\overline{X}} \right] &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i \frac{(n\lambda)^i e^{-n\lambda}}{i!} \\
&= e^{-n\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{[(n-1)\lambda]}{ii!} \\
&= e^{-n\lambda} e^{(n-1)\lambda} = e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Example 3.36. 设 $X_1, \ldots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i = X_i - \overline{X}, i = 1, 2, \ldots, n$ 求

1. Y_i 的方差 DY_i
2. $Cov(Y_1, Y_n)$
3. 当 $C(Y_1 + Y_n)^2$ 的数学期望为 σ^2 时的常数 C
4. $P\{Y_1 + Y_n \leq 0\}$

$$
\begin{aligned}
Cov(Y_1, Y_n) &= EY_1Y_2 - EY_1 \cdot EY_n = EY_1Y_2 = E(X_1 - \overline{X})(X_n - \overline{X}) \\
&= E(X_1X_n) - E(X_1\overline{X}) - E(X_n\overline{X}) + E(\overline{X}^2) \\
&= EX_1EX_n - 2E(X_1\overline{X}) + D\overline{X} + (E\overline{X})^2 \\
&= 0 - 2\frac{1}{n}E(X_1^2 + \sum_{j=2}^{n} X_1X_j) + D(\overline{X}) + 0 \\
&= -\frac{2}{n}(\sigma^2 + 0) + \frac{1}{n}\sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_1 + Y_2 = X_1 + X_n - 2\overline{X} = \\
&= \frac{n-2}{n}X_1 - \frac{2}{n}\sum_{n=2}^{n-1} X_i + \frac{n-2}{n}X_n
\end{aligned}
$$

服从正态分布，因此 $Y_1 + Y_2 \sim N(0, \cdot)$，因此 $P\{Y_1 + Y_2 \leq 0\} = 0.5$

Example 3.37. 设 $X_1, \dots, X_n$ 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 和 $T = \overline{X}^2 - \frac{1}{n}S^2$，求

1. 统计量 T 的数学期望
2. 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时的统计量 T 的方差

1. μ^2
2. $\overline{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$，因此 $n\overline{X} \sim \chi^2(1)$ 和 $(n-1)S^2 \sim t(n-1)$，注意到 $\overline{X}$ 与 S 相互独立，且 $D(\chi^2(n)) = 2n$

$$
\begin{aligned}
D(T) &= D(\overline{X}^2 - \frac{1}{n}S^2) = D(\overline{X}^2) + \frac{1}{n^2}D(S^2) \\
&= \frac{1}{n^2}D(n\overline{X}^2) + \frac{1}{n^2}\frac{1}{(n-1)^2}D[(n-1)S^2] \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot 2 + \frac{1}{n^2(n-1)^2} \cdot 2(n-1) \\
&= \frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}
$$

Example 3.38. 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta - \theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0,1)$ 未知，以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本（样本容量为 n）中等于 i 的个数，试求 a_1, a_2, a_3 使统计量 $T = \sum_{i=1}^{3} a_i N_i$ 的数学期望为 θ，并求 T 的方差

记 $p_1 = 1-\theta, p_2 = \theta-\theta^2, p_3 = \theta^2$，则 $N_i \sim B(n, p_i)$，因此 $E(T) = \sum_{i=1}^{3} a_i n p_i = \theta$，因此 $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{n} = a_3$,$T = \frac{1}{n}(N_2 + N_3)$

显然 $N_2 + N_3$ 不独立，但 $N_1 + N_2 + N_3 = n$，因此 $T = \frac{1}{n}(n - N_1)$

Example 3.39. 设总体 X 的分布函数

$$F(x;\theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数且大于零，$X_1, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本

1. 求 EX 与 EX^2
2. 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$
3. 是否存在实数 a，使得对任何 $\epsilon > 0$ 都有 $\lim_{n\to\infty} P\{\left|\hat{\theta}_n - a\right| \geq \epsilon\} = 0$

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} \end{cases}$$

2. 设 $x_1, \ldots, x_n$ 为样本观察值，似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} \frac{2^n x_1 \ldots x_n}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} & x_1, \ldots, x_n > 0 \\ 0 \end{cases}$$

当 $x_1, \ldots, x_n > 0$ 时，$\ln L(\theta) = n \ln 2 + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ 令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$，有 $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

3. 根据辛钦大数定理，当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于 $EX_i^2 = \theta$，因此存在实数 $a = \theta$

4 附录

4.1 微积分

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Suppose we have two units $\vec{u} = (\cos x, \sin x), \vec{v} = (\cos y, \sin y)$, then

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos x\cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y)$$

Hence by substitute $-y$ for y or $\frac{\pi}{2} - x$ for x, we have

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y\\ \sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y\\ \sin(x-y) &= \sin x\cos y - \cos x\sin y\end{aligned}$$

let $x = y$, we have

$$\begin{gathered}\sin 2x = 2\sin x\cos x\\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 - 1\\ \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{gathered}$$

Hence we have

$$\begin{gathered}\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}\\ \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}\\ \tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\end{gathered}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x$$

点到直线的距离

设直线的方程为 $l: Ax+By+C=0, A, B \neq 0$, 点的坐标为 $P(x_0, y_0)$, 点 P 到 l 的距离为 d。在该直线上任取一点 $R(x, y)$, 直线法向量为 $\overrightarrow{n} = (A, B)$,

$\overrightarrow{PR}=(x-x_0,y-y_0)$，所欲求的 d 为 $\overrightarrow{PR}$ 在 $\vec{n}$ 上的投影，于是有

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|}=\frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

对于

$$y''+py'+qy=f(x)$$

1. 求特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根
   (a) 若特征方程有相异实根 λ_1,λ_2，通解为 $y_0(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$
   (b) 若特征方程有重根 λ，则通解为 $y_0(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$
   (c) 若特征方程有共轭复根 $\alpha\pm i\beta(\beta\neq 0)$，则通解为

$$y_0(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

2. 根据非齐次项 $f(x)$ 的形式再求特解 $y^*(x)$

$f(x)$ 的类型	特解 $y^*(x)$ 的形式
$f(x)=P_n(x)$ 其中 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式	1. 0 不是特征方程的根，$y^*(x)=R_n(x)$，其中 $R_n(x)$ 为待定的 x 的 n 次多项式 2. 0 不是特征方程的但根，$y^*(x)=xR_n(x)$ 3. 0 不是特征方程重根，$y^*(x)=x^2R_n(x)$
$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$	1. ，$y^*(x)=e^{\alpha x}R_n(x)$，其中 $R_n(x)$ 为待定的 x 的 n 次多项式 2. α 是特征方程的单根，$y^*(x)=xe^{\alpha x}R_n(x)$ 3. α 是特征方程的重根，$y^*(x)=x^2e^{\alpha x}R_n(x)$
$f(x)=A_0\sin\beta x$ 或 $B_0\cos\beta x$	1. $i\beta$ 不是特征方程的根，$y^*(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$ 2. $i\beta$ 是特征方程的根，$y^*(x)=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ 其中 A,B 为待定系数

对 $y_t=f(t)$，n 阶差分

$$\Delta^k y_t=\Delta^{k-1}y_{t+1}-\Delta^{t-1}y_t=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}y_{t+k-i}$$

形如 $y_{t+1}-py_t=f(t)$ 的方程称为一阶常系数线性差分方程，其中 p 为非零系数，$f(t)$ 为已知函数。$y_{t+1}-py_t=0$ 称为它对应的常系数一阶线性齐次差分方程。

一阶常系数线性差分方程的通解为 $y_t=kp^t+y_t^*$，其中 y_t^* 为特解

若 $f(t)=(A_0t^n+\cdots+A_n)b^t$，则待定特解 y_t^* 具有下列形式

$$y_t^* = t^s(B_0t^n+\cdots+B_n)b^t$$

当 $p\neq b$ 时，$s=0$，当 $p=b$ 时，$s=1$

$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

$$I^2 = \iint e^{-(r^2)} r\, d\theta\, dr \tag{4.1.1}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} re^{-r^2}dr\right)d\theta \tag{4.1.2}$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2}dr \tag{4.1.3}$$

4.2 线性代数

$$\begin{vmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{A}\\ \mathbf{B} & *\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \mathbf{A}\\ \mathbf{B} & \mathbf{0}\end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$$

$$(k\,\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{k}\,\mathbf{A}^{-1}, \left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$$

伴随矩阵的性质

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^* = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}(|\mathbf{A}|\neq 0)\\
&(\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*\\
&(k\,\mathbf{A})^* = k^{n-1}\,\mathbf{A}^*\\
&\left|\mathbf{A}^*\right| = |\mathbf{A}|^{n-1}; (\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\,\mathbf{A}
\end{aligned}$$

$$(k\,\mathbf{A}) = \frac{1}{k}\,\mathbf{A}^{-1}$$

if A and B are square matrices s.t. $AB=I$, where I is the identity matrix, show that $BA=I$. See Proof

给定数域 K 上 $m\times n$ 矩阵 A 和 $n\times s$ 矩阵 B，则

$$r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$$

相似的矩阵有相同的特征多项式

$$r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n & r(\mathbf{A}) = n \\ 1 & r(\mathbf{A}) = n-1 \\ 0 & r(\mathbf{A}) < n-1 \end{cases}$$

Proof

当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha} + 2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1} + \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n + \boldsymbol{\alpha}_1$ 当 $n = 2k$ 时线性相关，当 $n = 2k + 1$ 时线性无关

设 $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}, \lambda_i(i = 1, 2, \dots, n)$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，则

1. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}$
2. $\prod_{i=1}^n \lambda_i = |\mathbf{A}|$

Theorem 4.1. 实对称矩阵的特征值全为实数

Theorem 4.2. 实对称矩阵的属于不同特征值对应的特征向量相互正交

Theorem 4.3. 实对称矩阵必相似于对角阵，即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$。且存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$

正交变换化二次型为标准型

1. 将二次型表示成矩阵形式 $f(x_1, \dots, x_)= \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$
2. 求 $\mathbf{A}$ 的全部特征值
3. 求 $\mathbf{A}$ 的特征值对应的特征向量
4. 检查不同特征值对应的特征向量是否正交，将重特征值对应的特征向量用施密特正交化方法正交化
5. 将全部特征向量单位化，得 $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_n$
6. 构造正交矩阵 $\mathbf{Q} = [\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_n]$
7. 令 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$，则 $f = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

4.3 概率论

$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X, Y)$

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
2. $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$
3. $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$

切比雪夫不等式

$$P\{|X - E(x)| \geq \epsilon\} \leq \frac{D(x)}{\epsilon^2}$$

$D(\chi^2(n)) = 2n$