考研题目本

五狗砸

2020 年 9 月 29 日

目录

1 微积分

1.1 一元函数微分

Example 1.1. 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0, f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{x^3\int_0^1 f(xt)dt}$

令 $x^2-t=u, xt=u$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{x^3\int_0^1 f(xt)dt} &= \lim_{x\to 0}\frac{-\int_{x^2}^0 f(u)du}{x^3\int_0^x f(u)\frac{du}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(u)du}{x^2\int_0^x f(u)du} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(u)du + x^2 f(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(u)du + xf(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4f'(x^2)}{3\frac{f(x)-f(0)}{x}+f'(x)} = 1
\end{aligned}$$

Example 1.2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$

利用泰勒展开，$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$, $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$,$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)} = -\frac{1}{12}$$

Example 1.3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n})$

因为 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n)=A$

Example 1.4. suppose $y_n=\left[\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n+1}}$. Compute $\lim_{n\to\infty} y_n$

$$\begin{aligned}
\ln y_n &= \frac{1}{n+1}\ln\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{1}{n+1}\ln\frac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{n^n} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n}) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\right)
\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\right)\\ &= 1\cdot\int_0^1 \ln(1+x)dx = x\ln(1+x)|_0^1 - \int_0^1\frac{x}{1+x}dx\\ &= \ln 2 - 1 + \ln 2 = \ln\frac{4}{e}\end{aligned}$$

Example 1.5. 已知 $x\to 0$ 时，$e^{-x^4}-\cos(\sqrt{2}x^2)$ 与 ax^n 是等价无穷小，试求 a,n

$$\begin{aligned}e^{-x^4} &= 1-x^4+\frac{x^8}{2}+o(x^8)\\ \cos(\sqrt{2}x^2) &= 1-x^4+\frac{x^8}{6}+o(x^8)\end{aligned}$$

Hence $a=\frac{1}{3}, n=8$

Example 1.6. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$，且点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，求 α,β

由极限存在可知，$\alpha=1$，泰勒展开

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}(\sin x+\sin^2 x)-\frac{1}{8}(\sin x+\sin^2 x)^2-(1+\beta\sin x)+o(\sin^2 x)}{\sin^2}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}-\beta)\sin x+\frac{3}{8}\sin^2 x}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

故 $\beta=\frac{1}{2}$

Example 1.7. let $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n-3x^{-n}}{x^n+x^{-n}}\sin\dfrac{1}{x}$

$$f(x)=\begin{cases}2\sin\frac{1}{x}^{x} & x<-1\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x} & x=-1\\ -3\sin\frac{1}{x} & -1<x<0\\ -3\sin\frac{1}{x} & 0<x<1\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x} & x=1\\ 2\sin\frac{1}{x}^{x} & x>1\end{cases}$$

$x=0$ 是第二类间断点，$x=\pm 1$ 是第一类间断点

Example 1.8. 设 $f(1)=0, f'(1)=a$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x}$

由 $f(1)=0, f'(1)=a$ 可知，$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t)}{t}=a$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x} &= \frac{2f(e^{x^2})-f(1+\sin^2 x)}{-\frac{1}{2}x^2\left[\sqrt{1+2f(e^{x^2})}+\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}\right]} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x)-f(e^{x^2})}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right] \\
&= -a
\end{aligned}
$$

Example 1.9. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,$f''(0)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(x)dt}{x^\alpha-\sin x}=\beta(\beta\neq 0)$，求 α,β

因为 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,$f(0)=0, f'(0)=0$

因为 $\lim_{x\to 0^+}\int_0^x f(x)dt=0$，因此 $\lim_{x\to 0^+}x^\alpha-\sin x=0$，因此 $\alpha>0$

1. 若 $0<\alpha<1$
2. 若 $\alpha>1$
3. 若 $\alpha=1$

   $\beta=f''(0)$

Example 1.10. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f'(0)=1$，$f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$，求 $f(x)$

$f(0)=0$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{f(x)e^y+f(y)e^x-f(x)}{y} \\
&= \lim_{y\to 0}\left[f(x)\frac{e^y-1}{y}+e^x\frac{f(y)-f(0)}{y}\right] \\
&= f(x)+e^x f'(0)=f(x)+e^x
\end{aligned}
$$

即 $f'(x)-f(x)=e^x$, 因此 $f(x)=e^x(x+C)$，又 $f(0)=0, C=0, f(x)=xe^x$

Example 1.11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\end{cases}$

$$
f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x}\left(\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\right)
$$

而 $1\le\frac{\frac{1}{n}}{x}<\frac{n+1}{n}$，由夹逼准则得 $f'_+(0)=1$，因此 $f'(0)=1$

Example 1.12. 设 $f(x)$ 是可导的偶函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足

$$
f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2)
$$

求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程

由

$$
\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)-2x^2}{x^2}=0
$$

得

$$
f(0)-3f(1)=0\Rightarrow f(1)=0
$$

变形

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-\frac{3f(1+\sin x^2)}{\sin x^2}\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}-2\right)=0
$$

有 $f'(1)-3f'(1)-2=0\Rightarrow f'(1)=-1$

Example 1.13. 若 $y=f(x)$ 存在单值反函数，且 $y'\neq 0$，求 $\frac{d^2x}{dy^2}$

根据反函数的求导法则 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$，于是

$$
\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dx}{dy}
$$

因为 $\frac{1}{y'}$ 是以 x 为变量的函数

Example 1.14. 设函数 $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0) = 1$，求 a

泰勒展开

$$f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2} = \left(x - \frac{x^3}{3} + ...\right) - x(1 - ax^2 + ...)$$
$$= (a - \frac{1}{3})x^3 + ...$$

因此 $f'''(0)/3! = a - 1/3, a = 1/2$

Example 1.15. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) > 0$，证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$$

令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt$，则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且

$$F(a)F(b) = -\left[\int_a^b f(t)dt\right]^2 < 0$$

故由连续函数的零点定理知：在 (a, b) 内存在 ξ 使得 $F(\xi) = 0$，即 $\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx$

Example 1.16. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx = f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx$$

令 $F'(x) = g(x)\int_a^x f(x)dx - f(x)\int_x^b g(x)dx = (\int_a^x f(t)dt \int_b^x g(t)dt)'$，可取辅助函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt \int_x^b g(t)dt$。则 $F(a) = F(b) = 0$，则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$

Example 1.17. 设实数 $a_1, \dots, a_n$ 满足关系式 $a_1 - \frac{a_2}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1} = 0$，证明方程 $a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \dots + a_n \cos(2n-1)x = 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一实根

令 $f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \dots + a_n \cos(2n-1)x$，但 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 内不满足零点定理，因此考虑 $f'(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \dots + a_n \cos(2n-1)x$，则 $f(x) = a_1 \cos x + \frac{a_2}{3}\sin 3x + \dots + \frac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$，则 $f(0) = f(\pi/2) = 0$

Example 1.18. 试确定方程 $e^x = ax^2 (a > 0)$ 的根的个数，并指出每个根所在的范围

若直接令 $f(x)=e^x-ax^2$，$f'(x)$ 的符号不易判断。又 $x=0$ 不是方程的根，于是方程可化为等价方程 $\frac{e^x}{x^2}=a$

令 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}-a$, 由 $f'(x)=\frac{x-2}{x^3}e^x=0$ 得 $x=2$

Example 1.19. 已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，确定常数 k 的取值范围

令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}-k$，$x\in(0,1]$，则

$$f'(x)=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

因为 $x^2(1+x)\ln^2(1+x)>0$，因此只讨论 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$.

$$\begin{aligned} g'(x)&=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x \\ g''(x)&=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2\ln(1+x)-2x}{1+x} \end{aligned}$$

因此当 $x\in(0,1)$ 时，$g''(x)<0$，而 $g'(0)=0$，因此 $g(x)$ 递减

Example 1.20. 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$，证明存在 $\xi\in(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$

因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以在 $[0,2]$ 内必有最大值 M 和最小值 m，于是 $m\le f(0)\le M, m\le f(1)\le M, m\le f(2)\le M$，故

$$m\le\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$$

由介值定理，至少存在一点 $\eta\in[0,2]$ 使

$$f(\eta)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

因此 $f(\eta)=f(3)=1$，由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$

Example 1.21. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内具有二阶导数且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)}{\cos\pi x}=0$, $2\int_{1/2}^{1}f(x)dx=f(2)$，证明存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f''(\xi)=0$

$f(0.5)=0$，因此

$$f'(0.5)=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)-f(0.5)}{x-0.5}=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)}{\cos\pi x}\frac{\cos\pi x}{x-0.5}=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)}{\cos\pi x}\lim_{x\to0.5}\frac{\cos\pi x}{x-0.5}=0$$

再由 $2\int_{0.5}^{2} f(x)dx = f(2)$，用积分中值定理 $\exists\xi_1 \in [0.5,1]$ 使得 $2f(\xi_1)0.5 = f(2)$，即 $f(\xi) = f(2)$，在 $[\xi_1, 2]$ 上应用罗尔定理，$\exists\xi_2 \in (\xi_1, 2)$ 使 $f'(\xi_2) = 0$

再在 $[0.5, \xi_2]$ 上对 $f'(x)$ 应用罗尔定理，知 $\exists\xi \in (0.5, \xi_2)$，使 $f''(\xi) = 0$

Example 1.22. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且

$$f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx, k > 1$$

证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ 使 $f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$

1. ξ 换为 x，$f'(x) = (1-x^{-1})f(x)$
2. 变形 $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - x^{-1}$
3. 两边积分 $\ln f(x) = x - \ln x + \ln C$
4. 分离常数 $\ln\frac{xf(x)}{e^x} = \ln C$，即 $xe^{-x}f(x) = C$，可令辅助函数 $F(x) = xe^{-x}f(x)$

由积分中值定理，存在 $\xi_1 \in [0, \frac{1}{k}]$ 使得 $f(1) = \xi_1 e^{1-\xi_1} f(\xi_1)$，即 $1 \times e^{-1}f(1) = \xi_1 e^{-\xi_1} f(\xi_1)$。因此 $F(x)$ 满足在 $[\xi_1, 1]$ 内的罗尔定理，因此存在 ξ 使得 $f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$

Example 1.23. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = \lambda$, 证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) + f(\xi) = \lambda$

1. ξ 换为 x，$f'(x) + f(x) = \lambda$ 这是关于 $f(x)$ 的一阶线性微分方程
2. 解微分方程 $f(x) = e^{-x}(\lambda e^x + C)$
3. 分离常数 $[f(x) - \lambda]e^x = C$，可令辅助函数 $F(x) = [f(x) - \lambda]e^x$

$F(a) = F(b) = 0$，因此存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $F'(\xi) = 0$

Example 1.24. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 求证: 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(b) - f(a) = \xi \ln\frac{b}{a} f'(\xi)$

可变形为

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \xi f'(\xi)$$

令 $F(x) = \ln x$，由柯西中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \xi f'(\xi)$$

Example 1.25. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$，证明：在 $(-1,1)$ 内存在一点 ξ 使得 $f'''(\xi) = 3$

泰勒展开 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3,\xi\in(0,x)$，则

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1),-1<\xi_1<0$$
$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2),0<\xi_2<1$$

两式相减得
$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$$
由介值定理可证存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]$ 有 $f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$

Example 1.26. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，求证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$

根据拉格朗日中值定理至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使得
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
只要再证存在 $\eta\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$ 即
$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$
只要用柯西中值定理

Example 1.27. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$，证明

1. 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=1-\xi$
2. 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$ 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(0)=-1,F(1)=1$

对 $[0,\xi],[\xi,1]$ 分别用拉格朗日中值定理，则
$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\frac{\xi}{1-\xi}=1$$

Example 1.28. 求证 $\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x},0<x<\frac{\pi}{2}$

$f(x)=\sin x\tan x-x^2$

$f'(x)=\sin x+\tan x\sec x-2x$

$f''(x)=\cos x+\sec^3 x+\tan^2 x\sec x-2$

$f'''(x)=-\sin x+5\sec^3 x\tan x+\tan^3 x\sec x=\sin x(5\sec^4 x-1)+\tan^3 x\sec x>0$

Example 1.29. 设 $a>0,b>0$，证明不等式

$$a\ln a+b\ln b\geq (a+b)[\ln(a+b)-\ln 2]$$

令 $f(x)=x\ln x$，则 $f'(x)=\ln x+1, f''(x)=\frac{1}{x}>0$，即曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是凹的，故对任意 $a>0,b>0$，有

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geq f(\frac{a+b}{2})$$

代入得

$$\frac{a\ln a+b\ln b}{2}\geq \frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}$$

Example 1.30. 证明：对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}\leq \ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

由拉格朗日定理，存在 $\xi\in(n,n+1)$

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi}$$

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}$$

Example 1.31. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值等于 -1，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $f''(x)\geq 8$

存在 $a\in(0,1), f'(a)=0, f(a)=-1$，将 $f(x)$ 在 $x=a$ 泰勒展开

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2=-1+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2(\xi\in(a,x)\text{ or }(x,a))$$

令 $x=0,x=1$ 得

$$f(0)=0=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}a^2, 0<\xi_1<a$$

$$f(1)=0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-a)^2, a<\xi_2<1$$

若 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_1)>8$

若 $\frac{1}{2}<a<1$，则 $f''(\xi_2)>8$

Example 1.32. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，则当 $f''(x)>0$ 时

$$f(x)=f(0.5)+f'(0.5)(x-0.5)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-0.5)^2$$

积分

$$
\begin{aligned}
0 &= f(0.5)+f'(0.5)\int_0^1 (x-0.5)dx+\frac{f''(\xi)}{2}\int_0^(x-0.5)^2dx \\
&= f(0.5)+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_0^1 (x-0.5)^2dx
\end{aligned}
$$

因此 $f(0.5)<0$

Example 1.33. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 且 $f(0)=0$, 求 $\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\frac{1-\cos x}{\tan 2^x} \\
&= f'(0)\cdot\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Example 1.34. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)\cdot f(b)>0, f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2})<0$, 证明: 对任意实数 k, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 \(f′(ξ)=kf(ξ))\

Example 1.35. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=1$, 证明：存在两点 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使

$$
(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]=3e^{3\eta-\xi}
$$

$$
\begin{aligned}
&(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]=3e^{3\eta-\xi} \\
&\Leftrightarrow (e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]e^{\xi}=3e^{3\eta} \\
&\Leftrightarrow (e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[e^x f(x)]'|_{x=\xi}=e^{3x}|_{x=\eta}
\end{aligned}
$$

令 $g(x)=e^{3x}$，则由拉格朗日中值定理

$$
g'(\eta)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}
$$

即 $3e^{3\eta}=\dfrac{e^{3b}-e^{3a}}{b-a}$. 令 $f(x)=e^x f(x)$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$
\frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]=\frac{e^b-e^a}{b-a}
$$

两边同乘 $e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b}$ 得

$$
\frac{e^{3b}-e^{3a}}{b-a}=(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]
$$

1.2 一元函数积分

Example 1.36. 求不定积分 $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx$

$$\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1} dx = \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} \int \frac{d\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\right] - 1}$$
$$= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1} \right|$$

Example 1.37. 求 $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin x}}$

$$\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin x}} = \int \frac{\cos x dx}{(1 - \sin^2 x)\sqrt{\sin x}} = 2\int \frac{d(\sqrt{\sin x})}{1 - (\sqrt{\sin x})^4} = 2\int \frac{dt}{1 - t^4}$$
$$\int \left(\frac{1}{1 + t^2} + \frac{1}{1 - t^2} \right) dt$$

Example 1.38. 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4 - x)}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4 - x)}} = \int \frac{2d(\sqrt{x})}{\sqrt{4 - x}} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C$$

Example 1.39. 求 $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx = \int \frac{e^x}{e^x(1 + e^x)} dx = \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x + 1} \right) de^x$$

Example 1.40. 求 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

令 $\sqrt{e^x - 1} = t, x = \ln(1 + t^2)$

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\int \ln(1 + t^2) dt$$

Example 1.41. 求 $\int \frac{dx}{x^4(1 + x^2)}$

$$\int \frac{dx}{x^4(1 + x^2)} = \int \frac{1 + x^2 - x^2}{x^4(1 + x^2)} dx$$

Example 1.42. 求 $\int \frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2}dx$
$x^3-x^2+2x-2=(x^2+2)(x-1)$，令

$$\frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Example 1.43. 求 $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\int \frac{dx}{\cos^2 x}-\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$$

Example 1.44. 求 $I_n=\int \tan^n x dx$ 的递推公式

$$\begin{aligned}I_n &= \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x-1)dx=\int \tan^{n-2} x\sec^2 x dx-\int \tan^{n-2} x dx\\ &= \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x-I_{n-2}\end{aligned}$$

Example 1.45. 求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$
对于 $0\le x\le 1$，有 $0\le \frac{x^n}{1+x}\le x$，则

$$0\le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx\le \int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$$

因此由夹逼定理，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=0$

Example 1.46. 求 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{1+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{1+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}) &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(\frac{1}{n})^2+1}+\cdots+\frac{1}{(\frac{n}{n})^2+1}\right]\cdot\frac{1}{n}\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Example 1.47. 证明下列不等式

$$\frac{\sqrt{\pi}}{80}\pi^2<\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}dx<\frac{\pi^2}{32}$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时，$0 < x < \tan x < 1$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{3/2}dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx$$

Example 1.48. 求 $\int_2^3 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2}dx$

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2}dx &= \int_2^3 \frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{(x-1)^2}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}2\cos tdt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^t}dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2 t - 1)dt = -\cot t|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - t|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Example 1.49. 求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}dx$

令 $e^{-x} = \sin t$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \frac{\cos t}{\sin t}dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}dt - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin tdt \\ &= -\ln(\csc t + \cot t)|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Example 1.50. 求 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

令 $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} = t$，则 $\sin^2 u = \frac{x}{1+x}, x\cos^2 u = \sin^2 u, x = \tan^2 u$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} ud(\tan^2 u) = (u \cdot \tan^2 u)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 \cdot \tan^2 udu \\ &= \pi - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 u - 1)du = \pi - \tan u\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\end{aligned}$$

Example 1.51. 求 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx$

令 $x=-t$，则 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^x}dx$。因此

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}+\frac{\cos^2 x}{1+e^x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+e^{-x}+1+e^x}{(1+e^{-x})(1+e^x)}\right)\cos^2 xdx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 dx=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

Remark. 一般地，有如下结论：作变换 $x=a+b-t$

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-t)dt$$

从而 $I=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx$

Example 1.52. 求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{1}{2}\sin 2x)dx=\frac{\pi-1}{4}$$

Remark. 要求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x,\cos x)dx$，可作变换 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x,\sin x)dx$

Example 1.53. 求 $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

令 $x=\pi-t$，则

$$I=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-I$$

Remark. 一般地，$I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)dt-I$

Example 1.54. 求 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx,a,b>0$

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx,a,b>0=\int_0^1\left[f_a^b x^t dt\right]dx=\int_a^b\left[\int_0^1 x^t dx\right]dt$$
$$=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

Example 1.55. 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}dt$，求 $\int_0^\pi f(x)dx$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)dx &= \int_0^\pi f(x)d(x-\pi)\\ &= (x-\pi)f(x)|_0^\pi - \int_0^\pi (x-\pi)f'(x)dx\\ &= -\int_0^\pi (x-\pi)\frac{\sin x}{\pi - x}dx = 2\end{aligned}$$

Example 1.56. 证明 $\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x} = \int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{x}$

$$\begin{aligned}\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x} &= \frac{1}{2}\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}\\ &= \frac{1}{2}\int_1^a f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

令 $t=\frac{a^2}{u}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t} &= \int_a^1 f(\frac{a^2}{u}+u)\frac{u}{a^2}\left(-\frac{a^2}{u^2}\right)du\\ &= \int_1^a f(u+\frac{a^2}{u})\frac{1}{u}du\end{aligned}$$

Example 1.57. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，又 $f(a)=f'(a)=0$，证明:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-b)^2dx$$

利用分部积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)d(x-b) &= -\int_a^b f'(x)(x-b)d(x-b)\\ &= -\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)d(x-b)^2 = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-b)^2dx\end{aligned}$$

Example 1.58. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数且 $f(a)=f(b)=0, M=\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$，证明 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{12}M$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b f(x)d(x-a) = -\int_a^b f'(x)(x-a)d(x-b)\\&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx + \int_a^b f'(x)(x-b)dx\\&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx + \int_a^b (x-b)df(x)\\&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx - \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

则

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx\right| &\le \frac{1}{2}M\int_a^b (x-a)(b-a)dx\\&= \frac{1}{4}M\int_a^b (x-a)^2dx = \frac{(b-a)^3}{12}M\end{aligned}$$

Example 1.59. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格单调增，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)dx < 2\int_a^b xf(x)dx$$

令 $F(x) = (a+x)\int_a^x f(t)dt - 2\int_a^x tf(t)dt, (a < x \le b)$

Example 1.60. 求 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}dx\\&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}dx\\&= \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \ln\left[(x-\frac{1}{2}) + \sqrt{(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}}\right]\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Example 1.61. 求 $\displaystyle\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

$$\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int e^x(1+\sin x)\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int e^x d\tan\frac{x}{2} + \int e^x \tan\frac{x}{2}dx$$
$$= e^x \tan\frac{x}{2} + C$$

Example 1.62. 设 $f(x)$ 为非负连续函数，当 $x \geq 0$ 时，有 $\int_0^x f(x)f(x-t)dt = e^{2x} - 1$，求 $f(x)$

$f(x)\int)0^x f(u)du = e^{2x-1}$，令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$，则有 $F'(x)F(x) = e^{2x-1}, F(0) = 0$，两边积分，得

$$\frac{1}{2}F^2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x + C$$

由 $F(0) = 0$ 得，$C = -\frac{1}{2}$. 因此 $F^2(x) = e^{2x} - x - 1$，故

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^{2x}-1}{\sqrt{e^{2x}-2x-1}}$$

Example 1.63. 设 $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt(x>0)$，$g(x)$ 连续，且 $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \int_0^1 g(xt)dt$，求 $g(x)$

$\int_0^1 g(xt)dt = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$，又

$$f(\frac{1}{x}) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t}dt = \int_0^x \frac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}(-\frac{1}{u^2})du = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)}du$$

因此 $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$，于是 $\int_0^x g(t)dt = x\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$，

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt + \ln x = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x$$

Example 1.64. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且单调增加，证明：对任意 $a, b > 0$，恒有

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)dx - a\int_0^a f(x)dx\right]$$

令 $F(x) = x\int_0^x f(t)dt$，则 $F'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x)$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b \left[\int_0^x f(t)dt + xf(x)\right]dx$$
$$\leq \int_a^b [xf(x) + xf(x)]dx = 2\int_a^b xf(x)dx$$

1.3 多元函数微积分学