考研题目本

五狗砸

2020 年 9 月 26 日

目录

1 微积分

Example 1.1. 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0, f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{x^3\int_0^1 f(xt)dt}$

令 $x^2-t=u, xt=u$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{x^3\int_0^1 f(xt)dt} &= \lim_{x\to 0}\frac{-\int_{x^2}^0 f(u)du}{x^3\int_0^x f(u)\frac{du}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(u)du}{x^2\int_0^x f(u)du} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(u)du + x^2 f(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(u)du + xf(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4f'(x^2)}{3\frac{f(x)-f(0)}{x}+f'(x)} = 1
\end{aligned}
$$

Example 1.2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$

利用泰勒展开，$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$, $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$,$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$，因此

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)} = -\frac{1}{12}
$$

Example 1.3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n})$

因为 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n)=A$

Example 1.4. suppose $y_n=\left[\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n+1}}$. Compute $\lim_{n\to\infty} y_n$

$$
\begin{aligned}
\ln y_n &= \frac{1}{n+1}\ln\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{1}{n+1}\ln\frac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{n^n} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n}) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\right)
\end{aligned}
$$

Hence

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\right) \\
&= 1\cdot\int_0^1 \ln(1+x)dx = x\ln(1+x)|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx \\
&= \ln 2 - 1 + \ln 2 = \ln\frac{4}{e}
\end{aligned}$$

Example 1.5. 已知 $x\to 0$ 时，$e^{-x^4}-\cos(\sqrt{2}x^2)$ 与 ax^n 是等价无穷小，试求 a, n

$$\begin{aligned}
e^{-x^4} &= 1 - x^4 + \frac{x^8}{2} + o(x^8) \\
\cos(\sqrt{2}x^2) &= 1 - x^4 + \frac{x^8}{6} + o(x^8)
\end{aligned}$$

Hence $a=\frac{1}{3}, n=8$

Example 1.6. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$，且点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，求 α,β

由极限存在可知，$\alpha=1$，泰勒展开

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}(\sin x+\sin^2 x)-\frac{1}{8}(\sin x+\sin^2 x)^2-(1+\beta\sin x)+o(\sin^2 x)}{\sin^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}-\beta)\sin x+\frac{3}{8}\sin^2 x}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

故 $\beta=\frac{1}{2}$

Example 1.7. let $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n-3x^{-n}}{x^n+x^{-n}}\sin\dfrac{1}{x}$

$$f(x)=\begin{cases}
2\sin\frac{1}{x}^{x} & x<-1 \\
-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x} & x=-1 \\
-3\sin\frac{1}{x} & -1<x<0 \\
-3\sin\frac{1}{x} & 0<x<1 \\
-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x} & x=1 \\
2\sin\frac{1}{x}^{x} & x>1
\end{cases}$$

$x=0$ 是第二类间断点，$x=\pm1$ 是第一类间断点

Example 1.8. 设 $f(1)=0, f'(1)=a$,求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x}$

由 $f(1)=0, f'(1)=a$ 可知，$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(1+t)}{t}=$ a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x}&=\frac{2f(e^{x^2})-f(1+\sin^2 x)}{-\frac{1}{2}x^2\left[\sqrt{1+2f(e^{x^2})}+\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}\right]}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin^2 x)-f(e^{x^2})}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right]\\&=-a\end{aligned}$$

Example 1.9. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,$f''(0)\neq0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x f(x)dt}{x^\alpha-\sin x}=\beta(\beta\neq0)$，求 α,β

因为 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$,$f(0)=0, f'(0)=0$

因为 $\lim_{x\to0^+}\int_0^x f(x)dt=0$，因此 $\lim_{x\to0^+}x^\alpha-\sin x=0$，因此 $\alpha>0$

1. 若 $0<\alpha<1$
2. 若 $\alpha>1$
3. 若 $\alpha=1$

   $\beta=f''(0)$

Example 1.10. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f'(0)=1$，$f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$，求 $f(x)$

$f(0)=0$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{f(x)e^y+f(y)e^x-f(x)}{y} \\
&= \lim_{y\to 0}\left[f(x)\frac{e^y-1}{y}+e^x\frac{f(y)-f(0)}{y}\right] \\
&= f(x)+e^x f'(0) = f(x)+e^x
\end{aligned}$$

即 $f'(x)-f(x)=e^x$, 因此 $f(x)=e^x(x+C)$，又 $f(0)=0, C=0, f(x)=xe^x$

Example 1.11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\end{cases}$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x}\left(\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\right)$$

而 $1\le\frac{\frac{1}{n}}{x}<\frac{n+1}{n}$，由夹逼准则得 $f'_+(0)=1$，因此 $f'(0)=1$

Example 1.12. 设 $f(x)$ 是可导的偶函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足

$$f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2)$$

求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程

由

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)-2x^2}{x^2}=0$$

得

$$f(0)-3f(1)=0\Rightarrow f(1)=0$$

变形

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-\frac{3f(1+\sin x^2)}{\sin x^2}\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}-2\right)=0$$

有 $f'(1)-3f'(1)-2=0\Rightarrow f'(1)=-1$

Example 1.13. 若 $y=f(x)$ 存在单值反函数，且 $y'\neq 0$，求 $\frac{d^2x}{dy^2}$

根据反函数的求导法则 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$，于是

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dx}{dy}$$

因为 $\frac{1}{y'}$ 是以 x 为变量的函数

Example 1.14. 设函数 $f(x)=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，求 a

泰勒展开

$$f(x)=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}=\left(x-\frac{x^3}{3}+...\right)-x(1-ax^2+...)$$
$$=(a-\frac{1}{3})x^3+...$$

因此 $f'''(0)/3!=a-1/3,a=1/2$

Example 1.15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^\xi f(x)dx=\int_\xi^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$$

令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt-\int_x^b f(t)dt$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$F(a)F(b)=-\left[\int_a^b f(t)dt\right]^2<0$$

故由连续函数的零点定理知：在 (a,b) 内存在 ξ 使得 $F(\xi)=0$，即 $\int_a^\xi f(x)dx=\int_\xi^b f(x)dx$

Example 1.16. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx=f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx$$

令 $F'(x)=g(x)\int_a^x f(x)dx-f(x)\int_x^b g(x)dx=(\int_a^x f(t)dt\int_b^x g(t)dt)'$，可取辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt\int_x^b g(t)dt$。则 $F(a)=F(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$

Example 1.17. 设实数 $a_1,\dots,a_n$ 满足关系式 $a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$，证明方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内至少有一实根

令 $f(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x$，但 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内不满足零点定理，因此考虑 $f'(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x$，则 $f(x)=a_1\cos x+\frac{a_2}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$，则 $f(0)=f(\pi/2)=0$

Example 1.18. 试确定方程 $e^x=ax^2(a>0)$ 的根的个数，并指出每个根所在的范围

若直接令 $f(x)=e^x-ax^2$，$f'(x)$ 的符号不易判断。又 $x=0$ 不是方程的根，于是方程可化为等价方程 $\frac{e^x}{x^2}=a$

令 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}-a$, 由 $f'(x)=\frac{x-2}{x^3}e^x=0$ 得 $x=2$

Example 1.19. 已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，确定常数 k 的取值范围

令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}-k$，$x\in(0,1]$，则

$$f'(x)=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

因为 $x^2(1+x)\ln^2(1+x)>0$，因此只讨论 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$.

$$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$$
$$g''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2\ln(1+x)-2x}{1+x}$$

因此当 $x\in(0,1)$ 时，$g''(x)<0$，而 $g'(0)=0$，因此 $g(x)$ 递减

Example 1.20. 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$，证明存在 $\xi\in(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$

因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以在 $[0,2]$ 内必有最大值 M 和最小值 m，于是 $m\le f(0)\le M, m\le f(1)\le M, m\le f(2)\le M$，故

$$m\le\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$$

由介值定理，至少存在一点 $\eta\in[0,2]$ 使

$$f(\eta)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

因此 $f(\eta)=f(3)=1$，由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$

Example 1.21. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,在 $(0,2)$ 内具有二阶导数且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)}{\cos\pi x}=0, 2\int_{1/2}^{1}f(x)dx=f(2)$，证明存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f''(\xi)=0$

$f(0.5)=0$，因此

$$f'(0.5)=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)-f(0.5)}{x-0.5}=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)}{\cos\pi x}\frac{\cos\pi x}{x-0.5}=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)}{\cos\pi x}\lim_{x\to0.5}\frac{\cos\pi x}{x-0.5}=0$$

再由 $2\int_{0.5}^{2} f(x)dx = f(2)$，用积分中值定理 $\exists\xi_1 \in [0.5, 1]$ 使得 $2f(\xi_1)0.5 = f(2)$，即 $f(\xi) = f(2)$，在 $[\xi_1, 2]$ 上应用罗尔定理，$\exists\xi_2 \in (\xi_1, 2)$ 使 $f'(\xi_2) = 0$

再在 $[0.5, \xi_2]$ 上对 $f'(x)$ 应用罗尔定理，知 $\exists\xi \in (0.5, \xi_2)$，使 $f''(\xi) = 0$

Example 1.22. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，$(0, 1)$ 内可导，且

$$f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx, k > 1$$

证明：在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ 使 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$

1. ξ 换为 x，$f'(x) = (1 - x^{-1})f(x)$
2. 变形 $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - x^{-1}$
3. 两边积分 $\ln f(x) = x - \ln x + \ln C$
4. 分离常数 $\ln \frac{xf(x)}{e^x} = \ln C$，即 $xe^{-x}f(x) = C$，可令辅助函数 $F(x) = xe^{-x}f(x)$

由积分中值定理，存在 $\xi_1 \in [0, \frac{1}{k}]$ 使得 $f(1) = \xi_1 e^{1-\xi_1} f(\xi_1)$，即 $1 \times e^{-1}f(1) = \xi_1 e^{-\xi_1} f(\xi_1)$。因此 $F(x)$ 满足在 $[\xi_1, 1]$ 内的罗尔定理，因此存在 ξ 使得 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$

Example 1.23. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = \lambda$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) + f(\xi) = \lambda$

1. ξ 换为 x，$f'(x) + f(x) = \lambda$ 这是关于 $f(x)$ 的一阶线性微分方程
2. 解微分方程 $f(x) = e^{-x}(\lambda e^x + C)$
3. 分离常数 $[f(x) - \lambda]e^x = C$，可令辅助函数 $F(x) = [f(x) - \lambda]e^x$

$F(a) = F(b) = 0$，因此存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $F'(\xi) = 0$

Example 1.24. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(b) - f(a) = \xi \ln \frac{b}{a} f'(\xi)$

可变形为

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \xi f'(\xi)$$

令 $F(x) = \ln x$，由柯西中值定理，存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \xi f'(\xi)$$

Example 1.25. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$，证明：在 $(-1, 1)$ 内存在一点 ξ 使得 $f'''(\xi) = 3$

泰勒展开 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3,\xi\in(0,x)$，则

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1),-1<\xi_1<0$$
$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2),0<\xi_2<1$$

两式相减得

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$$

由介值定理可证存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]$ 有 $f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$

Example 1.26. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，求证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$

根据拉格朗日中值定理至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

只要再证存在 $\eta\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$ 即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

只要用柯西中值定理

Example 1.27. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$，证明

1. 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=1-\xi$
2. 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$ 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(0)=-1,F(1)=1$

对 $[0,\xi],[\xi,1]$ 分别用拉格朗日中值定理，则

$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\frac{\xi}{1-\xi}=1$$

Example 1.28. 求证 $\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x},0<x<\frac{\pi}{2}$

$f(x)=\sin x\tan x-x^2$

$f'(x)=\sin x+\tan x\sec x-2x$

$f''(x)=\cos x+\sec^3 x+\tan^2 x\sec x-2$

$f'''(x)=-\sin x+5\sec^3 x\tan x+\tan^3 x\sec x=\sin x(5\sec^4 x-1)+\tan^3 x\sec x>0$

Example 1.29. 设 $a>0,b>0$，证明不等式

$$a\ln a+b\ln b\geq(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2]$$

令 $f(x)=x\ln x$，则 $f'(x)=\ln x+1, f''(x)=\frac{1}{x}>0$，即曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是凹的，故对任意 $a>0,b>0$，有

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geq f(\frac{a+b}{2})$$

代入得

$$\frac{a\ln a+b\ln b}{2}\geq\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}$$

Example 1.30. 证明：对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}\leq\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

由拉格朗日定理，存在 $\xi\in(n,n+1)$

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi}$$

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}$$

Example 1.31. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值等于 -1，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $f''(x)\geq 8$

存在 $a\in(0,1), f'(a)=0, f(a)=-1$，将 $f(x)$ 在 $x=a$ 泰勒展开

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2=-1+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2(\xi\in(a,x)\text{ or }(x,a))$$

令 $x=0,x=1$ 得

$$f(0)=0=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}a^2,0<\xi_1<a$$

$$f(1)=0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-a)^2,a<\xi_2<1$$

若 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_1)>8$

若 $\frac{1}{2}<a<1$，则 $f''(\xi_2)>8$