考研题目本

喵喵喵

2020 年 11 月 4 日

目录

1 微积分

1.1 一元函数微分

Example 1.1. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，且 $a \neq 0$，则当 n 充分大时有

1. $|a_n| > \frac{|a|}{2}$
2. $|a_n| < \frac{|a|}{2}$
3. $a_n > a - \frac{1}{n}$
4. $a_n < a + \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| > 0$，则当 n 充分大时有

$$|a_n| > \frac{|a|}{2}$$

Example 1.2. 设对任意 x, 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ 且 $\lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)] = 0$, 则 $\sum_{x\to\infty} f(x)$

1. 存在且等于零
2. 存在但不一定为零
3. 一定不存在
4. 不一定存在

$\lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)] = 0$ 但是 $g(x), \varphi(x)$ 可能无极限，因此选 4

Example 1.3. 设 $a_n > 0$,$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的

1. 充分必要条件

2. 充分非必要条件

3. 必要非充分条件

4. 既非充分也非必要条件

因为有界必收敛,$\{S_n\}$ 有界当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Example 1.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x\ln(1+x)}$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}} - 1}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1+2\sin x}}{x} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - \frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{1} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Example 1.5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x) - x^2}$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x) - x^2} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x[\ln(1+x) - x][\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\sin x}]} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x[\ln(1+x) - x]} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x) - x} \\
&= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+x} - 1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Example 1.6. 极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n} + 2\sin\dfrac{2}{n}\cdots + n\sin\dfrac{n}{n})$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{n^2}(\sin\frac{1}{n} + \cdots + n\sin\frac{n}{n}) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} + \cdots + \frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right] \\
&= \int_0^1 x\sin x dx = -x\cos x\Big|_0^1 + \int_0^1 \cos x dx = \sin 1 - \cos 1
\end{aligned}
$$

Example 1.7. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 > 0$,$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

由于当 $x > 0$ 时，$e^x - 1 > x$，则由 $x_1 > 0$，知 $e^{x_2} = \frac{e^{x_1}-1}{x_1} > 1, x_2 > 0$。若 $x_k > 0$，则 $e^{x_{k+1} = \frac{e^{x_k}}{-} 1} x_k > 1$，知 $x_{k+1} > 0$，则数列 $\{x_n\}$ 下有界

$x_{n+1} = \ln \frac{e^{x_n}-1}{x_n}$,$x_{n+1} - x_n = \ln \frac{e^{x_n}-1}{x_n}$

令 $f(x) = xe^x - (e^x - 1), x \in [0, +\infty]$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x > 0, x \in (0, +\infty)$$

则 $f(x) > 0, xe^x > e^x - 1, x \in (0, +\infty)$

$$x_{n+1} - x_n = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}} < \ln 1 = 0$$

$\{x_n\}$ 单调递减，由单调有界准则知，数列 $\{x_n\}$ 收敛，令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则

$$ae^a = e^a - 1$$

$a = 0$

Example 1.8. 当 $x \to 0$ 时 $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 等价无穷小，秋 n 的值

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} \\
&= \frac{1 - \left\{ \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] \cdot \left[1 - \frac{4x^2}{2} + o(x^2)\right] \cdot \left[1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right] \cdot \right\}}{ax^n} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{7x^2 + o(x^2)}{ax^n}
\end{aligned}$$

Example 1.9. 函数 $f(x) = \frac{x - x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为

3 个

Example 1.10. 函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to -1} \frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1} = \infty$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

2

Example 1.11. 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0, f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{x^3\int_0^1 f(xt)dt}$

令 $x^2-t=u, xt=u$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{x^3\int_0^1 f(xt)dt} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\int_{x^2}^0 f(u)du}{x^3\int_0^x f(u)\frac{du}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} f(u)du}{x^2\int_0^x f(u)du} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(u)du + x^2f(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(u)du + xf(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4f'(x^2)}{3\frac{f(x)-f(0)}{x}+f'(x)} = 1
\end{aligned}$$

Example 1.12. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$

利用泰勒展开，$\sqrt{1+x^2} = 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$, $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$,$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$，因此

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)} = -\frac{1}{12}$$

Example 1.13. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \tan^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n})$

因为 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = A$

Example 1.14. suppose $y_n = \left[\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n+1}}$. Compute $\lim_{n\to\infty} y_n$

$$\ln y_n = \frac{1}{n+1}\ln\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{1}{n+1}\ln\frac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{n^n}$$
$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n}) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\right)$$

Hence

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\right)$$
$$= 1\cdot\int_0^1 \ln(1+x)dx = x\ln(1+x)|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$$
$$= \ln 2 - 1 + \ln 2 = \ln\frac{4}{e}$$

Example 1.15. 已知 $x\to 0$ 时，$e^{-x^4} - \cos(\sqrt{2}x^2)$ 与 ax^n 是等价无穷小，试求 a, n

$$e^{-x^4} = 1 - x^4 + \frac{x^8}{2} + o(x^8)$$
$$\cos(\sqrt{2}x^2) = 1 - x^4 + \frac{x^8}{6} + o(x^8)$$

Hence $a = \frac{1}{3}, n = 8$

Example 1.16. 设 $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x} - (\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$，且点 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，求 α, β

由极限存在可知，$\alpha = 1$，泰勒展开

$$\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x} - (\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}(\sin x+\sin^2 x) - \frac{1}{8}(\sin x+\sin^2 x)^2 - (1+\beta\sin x) + o(\sin^2 x)}{\sin^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}-\beta)\sin x + \frac{3}{8}\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

故 $\beta = \frac{1}{2}$

Example 1.17. let $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n - 3x^{-n}}{x^n + x^{-n}}\sin\dfrac{1}{x}$

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin\frac{1}{x}^{x} & x<-1 \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x} & x=-1 \\ -3\sin\frac{1}{x} & -1<x<0 \\ -3\sin\frac{1}{x} & 0<x<1 \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x} & x=1 \\ 2\sin\frac{1}{x}^{x} & x>1 \end{cases}$$

$x=0$ 是第二类间断点，$x=\pm 1$ 是第一类间断点

Example 1.18. 设 $f(1)=0, f'(1)=a$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x}$

由 $f(1)=0, f'(1)=a$ 可知，$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t)}{t}=a$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x} &= \frac{2f(e^{x^2})-f(1+\sin^2 x)}{-\frac{1}{2}x^2\left[\sqrt{1+2f(e^{x^2})}+\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}\right]} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x)-f(e^{x^2})}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right] \\ &= -a\end{aligned}$$

Example 1.19. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0, f''(0)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(x)dt}{x^\alpha-\sin x}=\beta(\beta\neq 0)$，求 α,β

因为 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0, f(0)=0, f'(0)=0$

因为 $\lim_{x\to 0^+}\int_0^x f(x)dt=0$，因此 $\lim_{x\to 0^+}x^\alpha-\sin x=0$，因此 $\alpha>0$

1. 若 $0<\alpha<1$
2. 若 $\alpha>1$
3. 若 $\alpha=1$

   $\beta=f''(0)$

Example 1.20. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f'(0)=1$，$f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$，求 $f(x)$

$f(0)=0$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{f(x)e^y+f(y)e^x-f(x)}{y}\\
&= \lim_{y\to 0}\left[f(x)\frac{e^y-1}{y}+e^x\frac{f(y)-f(0)}{y}\right]\\
&= f(x)+e^xf'(0)=f(x)+e^x
\end{aligned}$$

即 $f'(x)-f(x)=e^x$, 因此 $f(x)=e^x(x+C)$, 又 $f(0)=0, C=0, f(x)=xe^x$

Example 1.21. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x & x\le 0\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\end{cases}$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x}\left(\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\right)$$

而 $1\le\frac{\frac{1}{n}}{x}<\frac{n+1}{n}$，由夹逼准则得 $f'_+(0)=1$，因此 $f'(0)=1$

Example 1.22. 设 $f(x)$ 是可导的偶函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足

$$f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2)$$

求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程

由

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)-2x^2}{x^2}=0$$

得

$$f(0)-3f(1)=0\Rightarrow f(1)=0$$

变形

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-\frac{3f(1+\sin x^2)}{\sin x^2}\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}-2\right)=0$$

有 $f'(1)-3f'(1)-2=0\Rightarrow f'(1)=-1$

Example 1.23. 若 $y = f(x)$ 存在单值反函数，且 $y' \neq 0$，求 $\frac{d^2x}{dy^2}$

根据反函数的求导法则 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$，于是

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dx}{dy}$$

因为 $\frac{1}{y'}$ 是以 x 为变量的函数

Example 1.24. 设函数 $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0) = 1$，求 a

泰勒展开

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x - \frac{x}{1+ax^2} = \left(x - \frac{x^3}{3} + ...\right) - x(1 - ax^2 + ...) \\ &= (a - \frac{1}{3})x^3 + ... \end{aligned}$$

因此 $f'''(0)/3! = a - 1/3, a = 1/2$

Example 1.25. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x) > 0$，证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$$

令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$F(a)F(b) = -\left[\int_a^b f(t)dt\right]^2 < 0$$

故由连续函数的零点定理知：在 (a,b) 内存在 ξ 使得 $F(\xi) = 0$，即 $\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx$

Example 1.26. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx = f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx$$

令 $F'(x) = g(x)\int_a^x f(x)dx - f(x)\int_x^b g(x)dx = (\int_a^x f(t)dt \int_b^x g(t)dt)'$，可取辅助函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt \int_x^b g(t)dt$。则 $F(a) = F(b) = 0$，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$

Example 1.27. 设实数 $a_1, ..., a_n$ 满足关系式 $a_1 - \frac{a_2}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1} = 0$，证明方程 $a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \cdots + a_n \cos(2n-1)x = 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一实根

令 $f(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x$，但 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内不满足零点定理，因此考虑 $f'(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x$，则 $f(x)=a_1\cos x+\frac{a_2}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$，则 $f(0)=f(\pi/2)=0$

Example 1.28. 试确定方程 $e^x=ax^2(a>0)$ 的根的个数，并指出每个根所在的范围

若直接令 $f(x)=e^x-ax^2$，$f'(x)$ 的符号不易判断。又 $x=0$ 不是方程的根，于是方程可化为等价方程 $\frac{e^x}{x^2}=a$

令 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}-a$, 由 $f'(x)=\frac{x-2}{x^3}e^x=0$ 得 $x=2$

Example 1.29. 已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，确定常数 k 的取值范围

令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}-k$，$x\in(0,1]$，则

$$f'(x)=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

因为 $x^2(1+x)\ln^2(1+x)>0$，因此只讨论 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$.

$$\begin{aligned}
g'(x)&=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x\\
g''(x)&=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2\ln(1+x)-2x}{1+x}
\end{aligned}$$

因此当 $x\in(0,1)$ 时，$g''(x)<0$，而 $g'(0)=0$，因此 $g(x)$ 递减

Example 1.30. 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$，证明存在 $\xi\in(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$

因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以在 $[0,2]$ 内必有最大值 M 和最小值 m，于是 $m\le f(0)\le M, m\le f(1)\le M, m\le f(2)\le M$，故

$$m\le\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$$

由介值定理，至少存在一点 $\eta\in[0,2]$ 使

$$f(\eta)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

因此 $f(\eta)=f(3)=1$，由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$

Example 1.31. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,在 $(0,2)$ 内具有二阶导数且 $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}=0$, $2\int_{1/2}^{1}f(x)dx=f(2)$，证明存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f''(\xi)=0$

$f(0.5)=0$，因此

$$f'(0.5)=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)-f(0.5)}{x-0.5}=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)}{\cos\pi x}\frac{\cos\pi x}{x-0.5}=\lim_{x\to0.5}\frac{f(x)}{\cos\pi x}\lim_{x\to0.5}\frac{\cos\pi x}{x-0.5}=0$$

再由 $2\int_{0.5}^{2}f(x)dx=f(2)$，用积分中值定理 $\exists\xi_1\in[0.5,1]$ 使得 $2f(\xi_1)0.5=f(2)$，即 $f(\xi)=f(2)$，在 $[\xi_1,2]$ 上应用罗尔定理，$\exists\xi_2\in(\xi_1,2)$ 使 $f'(\xi_2)=0$

再在 $[0.5,\xi_2]$ 上对 $f'(x)$ 应用罗尔定理，知 $\exists\xi\in(0.5,\xi_2)$，使 $f''(\xi)=0$

Example 1.32. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx,k>1$$

证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ 使 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$

1. ξ 换为 x，$f'(x)=(1-x^{-1})f(x)$
2. 变形 $\frac{f'(x)}{f(x)}=1-x^{-1}$
3. 两边积分 $\ln f(x)=x-\ln x+\ln C$
4. 分离常数 $\ln\frac{xf(x)}{e^x}=\ln C$，即 $xe^{-x}f(x)=C$，可令辅助函数 $F(x)=xe^{-x}f(x)$

由积分中值定理，存在 $\xi_1\in[0,\frac{1}{k}]$ 使得 $f(1)=\xi_1e^{1-\xi_1}f(\xi_1)$，即 $1\times e^{-1}f(1)=\xi_1e^{-\xi_1}f(\xi_1)$。因此 $F(x)$ 满足在 $[\xi_1,1]$ 内的罗尔定理，因此存在 ξ 使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$

Example 1.33. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=\lambda$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)+f(\xi)=\lambda$

1. ξ 换为 x，$f'(x)+f(x)=\lambda$ 这是关于 $f(x)$ 的一阶线性微分方程
2. 解微分方程 $f(x)=e^{-x}(\lambda e^x+C)$
3. 分离常数 $[f(x)-\lambda]e^x=C$，可令辅助函数 $F(x)=[f(x)-\lambda]e^x$

$F(a)=F(b)=0$，因此存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $F'(\xi)=0$

Example 1.34. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 求证: 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(b)-f(a)=\xi \ln \frac{b}{a} f'(\xi)$

可变形为

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\xi f'(\xi)$$

令 $F(x)=\ln x$，由柯西中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\xi f'(\xi)$$

Example 1.35. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，证明：在 $(-1,1)$ 内存在一点 ξ 使得 $f'''(\xi)=3$

泰勒展开 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3, \xi \in (0,x)$，则

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1), -1<\xi_1<0$$
$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2), 0<\xi_2<1$$

两式相减得

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$$

由介值定理可证存在 $\xi \in [\xi_1,\xi_2]$ 有 $f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$

Example 1.36. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，求证存在 $\xi, \eta \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$

根据拉格朗日中值定理至少存在一个 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

只要再证存在 $\eta \in (a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$ 即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

只要用柯西中值定理

Example 1.37. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明

1. 存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $f(\xi)=1-\xi$
2. 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$ 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(0)=-1,F(1)=1$

对 $[0,\xi],[\xi,1]$ 分别用拉格朗日中值定理，则

$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\frac{\xi}{1-\xi}=1$$

Example 1.38. 求证 $\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x},0<x<\frac{\pi}{2}$

$f(x)=\sin x\tan x-x^2$

$f'(x)=\sin x+\tan x\sec x-2x$

$f''(x)=\cos x+\sec^3 x+\tan^2 x\sec x-2$

$f'''(x)=-\sin x+5\sec^3 x\tan x+\tan^3 x\sec x=\sin x(5\sec^4 x-1)+\tan^3 x\sec x>0$

Example 1.39. 设 $a>0,b>0$，证明不等式

$$a\ln a+b\ln b\geq(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2]$$

令 $f(x)=x\ln x$，则 $f'(x)=\ln x+1,f''(x)=\frac{1}{x}>0$，即曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是凹的，故对任意 $a>0,b>0$，有

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geq f(\frac{a+b}{2})$$

代入得

$$\frac{a\ln a+b\ln b}{2}\geq\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}$$

Example 1.40. 证明：对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}\leq\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

由拉格朗日定理，存在 $\xi\in(n,n+1)$

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi}$$

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}$$

Example 1.41. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值等于 -1，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $f''(x)\geq 8$

存在 $a\in(0,1),f'(a)=0,f(a)=-1$，将 $f(x)$ 在 $x=a$ 泰勒展开

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2=-1+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2(\xi\in(a,x)\text{ or }(x,a))$$

令 $x=0,x=1$ 得

$$f(0)=0=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}a^2,0<\xi_1<a$$
$$f(1)=0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-a)^2,a<\xi_2<1$$

若 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_1)>8$

若 $\frac{1}{2}<a<1$，则 $f''(\xi_2)>8$

Example 1.42. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，则当 $f''(x)>0$ 时

$$f(x)=f(0.5)+f'(0.5)(x-0.5)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-0.5)^2$$

积分

$$0=f(0.5)+f'(0.5)\int_0^1(x-0.5)dx+\frac{f''(\xi)}{2}\int_0^{(}x-0.5)^2dx$$
$$=f(0.5)+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_0^1(x-0.5)^2dx$$

因此 $f(0.5)<0$

Example 1.43. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 且 $f(0)=0$, 求 $\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\frac{1-\cos x}{\tan 2^x}$$
$$=f'(0)\cdot\frac{1}{2}$$

Example 1.44. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)\cdot f(b)>0,f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2})<0$，证明：对任意实数 k，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 \(f'(ξ)=kf(ξ))\

Example 1.45. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=1$, 证明：存在两点 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使

$$(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]=3e^{3\eta-\xi}$$

$$(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]=3e^{3\eta-\xi}$$
$$\Leftrightarrow(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[f(\xi)+f'(\xi)]e^{\xi}=3e^{3\eta}$$
$$\Leftrightarrow(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})[e^xf(x)]'|_{x=\xi}=e^{3x}|_{x=\eta}$$

令 $g(x)=e^{3x}$，则由拉格朗日中值定理

$$g'(\eta)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

即 $3e^{3\eta}=\dfrac{e^{3b}-e^{3a}}{b-a}$. 令 $f(x)=e^xf(x)$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{e^bf(b)-e^af(a)}{b-a}=e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]=\frac{e^b-e^a}{b-a}$$

两边同乘 $e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b}$ 得

$$\frac{e^{3b}-e^{3a}}{b-a}=(e^{2a}+e^{a+b}+e^{2b})e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]$$

1.2 一元函数积分

Example 1.46. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx$

$$\int\frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx=\int\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}dx=\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int\frac{d\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\right]-1}$$
$$=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x+1}\right|$$

Example 1.47. 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin x}}$

$$\int\frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin x}}=\int\frac{\cos xdx}{(1-\sin^2x)\sqrt{\sin x}}=2\int\frac{d(\sqrt{\sin x})}{1-(\sqrt{\sin x})^4}=2\int\frac{dt}{1-t^4}$$
$$\int\left(\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{1-t^2}\right)dt$$

Example 1.48. 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}=\int\frac{2d(\sqrt{x})}{\sqrt{4-x}}=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C$$

Example 1.49. 求 $\displaystyle\int\frac{1}{1+e^x}dx$

$$\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{e^x}{e^x(1+e^x)}dx=\int\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^x+1}\right)de^x$$

Example 1.50. 求 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

令 $\sqrt{e^x-1}=t, x=\ln(1+t^2)$

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}} = 2\int \ln(1+t^2)dt$$

Example 1.51. 求 $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$

$$\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^4(1+x^2)}dx$$

Example 1.52. 求 $\int \frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2}dx$

$x^3-x^2+2x-2=(x^2+2)(x-1)$，令

$$\frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Example 1.53. 求 $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C$$

Example 1.54. 求 $I_n = \int \tan^n x dx$ 的递推公式

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)dx = \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx \\
&= \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}
\end{aligned}$$

Example 1.55. 求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

对于 $0 \le x \le 1$，有 $0 \le \frac{x^n}{1+x} \le x$，则

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

因此由夹逼定理，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$

Example 1.56. 求 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{1+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{1+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}) &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(\frac{1}{n})^2+1}+\cdots+\frac{1}{(\frac{n}{n})^2+1}\right]\cdot\frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Example 1.57. 证明下列不等式

$$\frac{\sqrt{\pi}}{80}\pi^2 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}dx < \frac{\pi^2}{32}$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时，$0 < x < \tan x < 1$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{3/2}dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx$$

Example 1.58. 求 $\int_2^3 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2}dx$

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2}dx = \int_2^3 \frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{(x-1)^2}dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}2\cos t dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^t}dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2 t-1)dt = -\cot t|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - t|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Example 1.59. 求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}dx$

令 $e^{-x} = \sin t$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\frac{\cos t}{\sin t}dt &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}dt - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\ &= -\ln(\csc t+\cot t)|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Example 1.60. 求 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

令 $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} = t$，则 $\sin^2 u = \frac{x}{1+x}, x\cos^2 u = \sin^2 u, x = \tan^2 u$

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} ud(\tan^2 u) = (u\cdot\tan^2 u)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1\cdot\tan^2 udu \\
= \pi - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 u - 1)du = \pi - \tan u\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{\pi}{3} \\
= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Example 1.61. 求 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx$

令 $x = -t$，则 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{x}}dx$。因此

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} + \frac{\cos^2 x}{1+e^{x}}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+e^{-x}+1+e^{x}}{(1+e^{-x})(1+e^{x})}\right)\cos^2 xdx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Remark. 一般地，有如下结论：作变换 $x = a+b-t$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-t)dt$$

从而 $I = \frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx$

Example 1.62. 求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx$

令 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1}{2}\sin 2x)dx = \frac{\pi - 1}{4}
\end{aligned}
$$

Remark. 要求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x)dx$，可作变换 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x, \sin x)dx$

Example 1.63. 求 $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$

令 $x = \pi - t$，则

$$I = \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t} dt = \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt - I$$

Remark. 一般地，$I = \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t) dt = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - I$

Example 1.64. 求 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, a, b > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, a, b > 0 &= \int_0^1 \left[f_a^b x^t dt \right] dx = \int_a^b \left[\int_0^1 x^t dx \right] dt \\ &= \ln \frac{b+1}{a+1}\end{aligned}$$

Example 1.65. 设 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$，求 $\int_0^\pi f(x) dx$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x) dx &= \int_0^\pi f(x) d(x - \pi) \\ &= (x - \pi) f(x)|_0^\pi - \int_0^\pi (x - \pi) f'(x) dx \\ &= -\int_0^\pi (x - \pi) \frac{\sin x}{\pi - x} dx = 2\end{aligned}$$

Example 1.66. 证明 $\displaystyle\int_1^a f(x^2 + \frac{a^2}{x^2}) \frac{dx}{x} = \int_1^a f(x + \frac{a^2}{x}) \frac{dx}{x}$

$$\begin{aligned}\int_1^a f(x^2 + \frac{a^2}{x^2}) \frac{dx}{x} &= \frac{1}{2} \int_1^{a^2} f(t + \frac{a^2}{t}) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^a f(t + \frac{a^2}{t}) \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_a^{a^2} f(t + \frac{a^2}{t}) \frac{dt}{t}\end{aligned}$$

令 $t = \frac{a^2}{u}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_a^{a^2} f(t + \frac{a^2}{t}) \frac{dt}{t} &= \int_a^1 f(\frac{a^2}{u} + u) \frac{u}{a^2} \left(-\frac{a^2}{u^2} \right) du \\ &= \int_1^a f(u + \frac{a^2}{u}) \frac{1}{u} du\end{aligned}$$

Example 1.67. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，又 $f(a)=f'(a)=0$，证明:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-b)^2dx$$

利用分部积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx&=\int_a^b f(x)d(x-b)=-\int_a^b f'(x)(x-b)d(x-b)\\&=-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)d(x-b)^2=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-b)^2dx\end{aligned}$$

Example 1.68. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数且 $f(a)=f(b)=0,M=\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$，证明 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{(b-a)^2}{12}M$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx&=\int_a^b f(x)d(x-a)=-\int_a^b f'(x)(x-a)d(x-b)\\&=\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx+\int_a^b f'(x)(x-b)dx\\&=\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx+\int_a^b (x-b)df(x)\\&=\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx-\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

则

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx\right|&\leq\frac{1}{2}M\int_a^b(x-a)(b-a)dx\\&=\frac{1}{4}M\int_a^b(x-a)^2dx=\frac{(b-a)^3}{12}M\end{aligned}$$

Example 1.69. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格单调增，证明:

$$(a+b)\int_a^b f(x)dx<2\int_a^b xf(x)dx$$

令 $F(x)=(a+x)\int_a^x f(t)dt-2\int_a^x tf(t)dt,(a<x\leq b)$

Example 1.70. 求 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} dx$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} dx$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}} dx$$
$$= \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \ln\left[(x-\frac{1}{2}) + \sqrt{(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}}\right]\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}$$

Example 1.71. 求 $\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx$

$$\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx = \int e^x (1+\sin x) \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int e^x d\tan\frac{x}{2} + \int e^x \tan\frac{x}{2} dx$$
$$= e^x \tan\frac{x}{2} + C$$

Example 1.72. 设 $f(x)$ 为非负连续函数，当 $x \geq 0$ 时，有 $\int_0^x f(x)f(x-t)dt = e^{2x}-1$，求 $f(x)$

$f(x)\int)0^x f(u)du = e^{2x-1}$，令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$，则有 $F'(x)F(x) = e^{2x-1}, F(0) = 0$，两边积分，得

$$\frac{1}{2}F^2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x + C$$

由 $F(0) = 0$ 得，$C = -\frac{1}{2}$. 因此 $F^2(x) = e^{2x} - x - 1$，故

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^{2x}-1}{\sqrt{e^{2x}-2x-1}}$$

Example 1.73. 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt (x>0)$，$g(x)$ 连续，且 $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \int_0^1 g(xt)dt$，求 $g(x)$

$\int_0^1 g(xt)dt = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$，又

$$f(\frac{1}{x}) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t} dt = \int_0^x \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}(-\frac{1}{u^2})du = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)} du$$

因此 $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$，于是 $\int_0^x g(t)dt = x\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$,

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt + \ln x = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x$$

Example 1.74. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加, 证明: 对任意 $a,b>0$, 恒有

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)dx - a\int_0^a f(x)dx\right]$$

令 $F(x)=x\int_0^x f(t)dt$，则 $F'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)$

$$\begin{aligned}F(b)-F(a)&=\int_a^b F'(x)dx=\int_a^b\left[\int_0^x f(t)dt+xf(x)\right]dx\\&\leq\int_a^b[xf(x)+xf(x)]dx=2\int_a^b xf(x)dx\end{aligned}$$

Example 1.75. 求曲线 $y=e^{-x}\sin x(x\geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积

$$S=\int_0^{+\infty}e^{-x}|\sin x|dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}|\sin x|dx$$

k 为偶数时

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}|\sin x|dx=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin xdx=\frac{1}{2}e^{-k\pi}(1+e^{-\pi})$$

k 为奇数时

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}|\sin x|dx=\frac{1}{2}e^{-k\pi}(1+e^{-\pi})$$

Example 1.76. 设 $a_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx(n=0,1,2,\dots)$

1. 证明：数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$
2. 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}d(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{1}{3}x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx \\
&= \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx \\
&= \frac{n-1}{3}\left[\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\right] \\
&= \frac{n-1}{3}(a_{n-2}-a_n)
\end{aligned}$$

1.3 多元函数微积分学

Example 1.77. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$x^2y^2 \le (\frac{x^2+y^2}{2})^2$，因而

$$0 \le \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$$

Example 1.78. 讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 的存在性

当点 $P(x,y)$ 沿曲线 $x=ky^2$ 趋于点 $(0,0)$ 时

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{ky^4}{k^2y^4+y^4} = \frac{k}{k^2+1}$$

不是一个确定的常数，因此极限不存在

Example 1.79. 讨论函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\ne(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处的连续性

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$0 \le |f(x,y)| = \left|\frac{r^2\sin 4\theta}{4}\right| \le \frac{r^2}{4}$$

因此连续

Example 1.80. 设 $z=(s\in y^3+x^3)(x+y^4)^{\frac{y}{x}+e^{y^3x^2}}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=\frac{\partial z(x,0)}{\partial x}\Big|_{x=1}=(x^4)'\Big|_{x=1}=4$$

Example 1.81. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f(0,0)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$, $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)=0$, 于是 $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$, 又 $f(0,0)=0$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处极限存在且连续，又由 $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$, 得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x^2}=1,\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)}{y^2}=1$$

所以

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x^2}x=0$$

同理 $f_y'(0,0)=0$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在

因为

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y]}{\rho}&=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}(\rho=\sqrt{x^2+y^2})\\&=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}=0\end{aligned}$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

Remark. 讨论二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的可微性，可从如下几个方面考虑

1. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的偏导数至少有一个不存在，则函数不可微
2. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不连续，则函数不可微
3. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，两个偏导数存在，则考虑

   $$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-[f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho},\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

   若极限为 0，则函数在 (x_0,y_0) 可微，否则不可微

Example 1.82. 设 $z=(\frac{y}{2})^{\frac{x}{y}}$，求 $dz\Big|_{(1,2)}$

取对数，有

$$\ln z=\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}\Rightarrow y\ln z=x(\ln y-\ln x)$$

Example 1.83. 设 $u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z}),u=f(s,t)$ 有二阶连续偏导数，求 $du,\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$

$$\begin{aligned}du&=f_1'd(\frac{x}{y})+f_2'd(\frac{y}{z})=f_1'\frac{ydx-xdy}{y^2}+f_2'\frac{zdy-ydz}{z^2}\\&=\frac{1}{y}f_1'dx+(-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2')dy-\frac{y}{z^2}f_2'dz\end{aligned}$$

Example 1.84. 已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某一函数 $f(x,y)$ 的全微分，求 a,b

由题意知，$\frac{\partial f}{\partial x}=axy^3-y^2\cos x,\frac{\partial f}{\partial y}=1+by\sin x+3x^2y^2$，从而有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3axy^2-2y\cos x,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=by\cos x+6xy^2$，显然 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 均连续，所以 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$，即 $by\cos x+6xy^2=3axy^2-2y\cos x$，因此 $a=2,b=-2$

Example 1.85. 设 $z=f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x,f(x,1)=0,\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\sin x$，求 $f(x,y)$

$f(x,y)=xy^2+\varphi(x)y+\psi(x)$，从 $\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\sin x$，即 $[2xy+\varphi(x)]\Big|_{y=0}=\sin x$，得 $\varphi(x)=\sin x$

Example 1.86. 设函数 $u=f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$，满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{3/2}$，求函数 f 的表达式

设 $t=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则 $x^2+y^2=e^{2t}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=f'(t)\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial u}{\partial y}=f'(t)\frac{y}{x^2+y^2}\\\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=f''(t)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(t)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=f''(t)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(t)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

代入得 $f''(t)=(x^2+y^2)^{5/2}=e^{5t}$，因此有

$$f(t)=\frac{1}{25}e^{5t}+C_1t+C_2$$

Example 1.87. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 1$，则

1. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点
2. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点
3. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点
4. 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

分子的极限为 0，从而有 $f(0,0)=0$，且由极限的性质知，$\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 1+\alpha(x,y)$，这里 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \alpha(x,y)=0$，因而 $f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2[1+\alpha(x,y)]$，在点 $(0,0)$ 的某充分小去心邻域内，取 $y=x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y)=x^2+4x^4[1+\alpha(x,x)]>0=f(0,0)$，在点 $(0,0)$ 的某充分小去心邻域内，取 $y=-x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y)=-x^2+4x^4[1+\alpha(x,-x)]<0=f(0,0)$，故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

Example 1.88. 讨论二元函数 $z=x^3+y^3-2(x^2+y^2)$ 的极值

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2-4x=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2-4y=0 \end{cases}$$

得驻点 $(0,0),(4/3,0),(0,4/3),(4/3,4/3)$. 进而

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-4, B=\frac{\partial^2 z}{\partial xy}=0, C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y-4$$
$$AC-B^2=16+36xy-24(x+y)$$

在点 $(0,0)$ 时 $AC-B^2>0$ 且 $A<0$ 有极大值

在点 $(4/3,4/3)$ 时 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$ 有极小值

Example 1.89. 求椭圆 $x^2+2xy+3y^2-8y=0$ 与直线 $x+y=8$ 之间的最短距离

椭圆上任意一点 $P(x,y)$ 到直线 $x+y=8$ 的距离的平方为

$$d^2=\frac{(x+y-8)^2}{2}$$

令 $F(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-8)^2+\lambda(x^2+2xy+3y^2-8y)$ 则有方程组

$$\begin{cases} F'_x=x+y-8+(2\lambda x+2\lambda y)=0 \\ F'_y=x+y-8+\lambda(2x+6y-8)=0 \\ x^2+2xy+3y^2-8y=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=-2+2\sqrt{2} \\ y=2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x=-2-2\sqrt{2} \\ y=2 \end{cases}$$

且 $d_1=4\sqrt{2}-2, d_2=4\sqrt{2}+2$，所以所求最短距离为 $4\sqrt{2}-2$

Example 1.90. 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4, y\geq 0\}$ 上的最大值和最小值

解方程组

$$\begin{cases} f'_x=2x-2xy^2=0 \\ f'_y=4y-2x^2y=0 \end{cases}$$

得开区域内的可能极值点为 $(\pm\sqrt{2},1)$，其对应函数值为 $f(\pm\sqrt{2},1)=2$

当 $y=0$ 时，$f(x,y)=x^2$ 在 $-2\leq x\leq 2$ 上的最大值为 4，最小值为 0

当 $x^2+y^2=4, y>0, -2<x<2$ 时，构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4)$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x=2x-2xy^2+2\lambda x=0 \\ F'_y=4y-2x^2y+2\lambda y=0 \\ F'_\lambda=x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

得可能极值点:$(0,2), \left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$,其对应函数值为 $f(0,2)=8, f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4}$

因此 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 8，最小值 0

Example 1.91. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$，且

$$f(x,y)=1-x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$$

证明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取得极值，判断此极值是极大值还是极小值，并求出此极值

由 $f(x,y)=-(x-1)-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$，由全微分的定义得

$$f(1,0)=0, f'_x(1,0)=f'_y(1,0)=-1$$

计算得 $g'_x=f'_1\cdot e^{xy}y+f'_2\cdot 2x, g'_y=f'_1\cdot e^{xy}x+f'_2\cdot 2y$，有

$$g'_x(0,0)=0, g'_y(0,0)=0$$

再求二阶导数

$$\begin{aligned}
g''_{xx}&=(f''_{11}\cdot e^{xy}y+f''_{12}\cdot 2x)e^{xy}y+f'_1\cdot e^{xy}y^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}y+f''_{22}\cdot 2x)2x+2f'_2\\
g''_{xy}&=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}y+f'_1\cdot(e^{xy}xy+e^{xy})+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2x\\
g''_{yy}&=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}x+f'_1\cdot e^{xy}x^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2x+2f'_2
\end{aligned}$$

因此 $A=g''_{xx}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2, B=g''_{xy}(0,0)=f'_1(1,0)=-1, C=g''_{yy}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2$，进而 $AC-B^2>0$，因此 $g(0,0)=f(1,0)=0$ 是极大值

Example 1.92. 已知 x,y,z 为实数，且 $e^x+y^2+|z|=3$，求证 $e^xy^2|z|\le 1$

证明 1。在 $e^x+y^2+|z|=3$ 约束条件下求函数 $u=e^xy^2|z|$ 的最值问题，转化为无条件极值 $u=e^xy^2(3-e^x-y^2)$

证明 2。可化为以下等价问题：已知 $X>0, Y\ge 0, Z\ge 0$, 且 $X+Y+Z=3$，求 $XYZ\le 1$。因此用拉格朗日乘数法

Example 1.93. 设闭区域 $D: x^2+y^2\le y, x\ge 0$，$f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)dudv$$

求 $f(u,v)$

设 $\iint_D f(u,v)dudv=A$，在已知等式两边求区域 D 的二重积分

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy&=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\frac{8A}{\pi}\iint_D dxdy\\
A&=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-A\\
2A&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}rdr=\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})
\end{aligned}$$

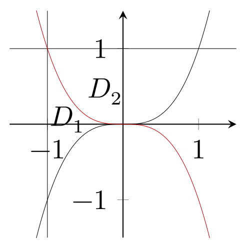
Example 1.94. 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$,$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，求 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma$

由轮换对称性

$$\begin{aligned}
&\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}d\sigma=\iint_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma\\
&=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}+\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\right]\\
&=\frac{a+b}{2}\iint_D d\sigma=\frac{a+b}{2}\pi
\end{aligned}$$

Example 1.95. 计算二重积分 $I=\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$，其中积分区域 D 为 $y=x^3, y=1, x=-1$ 所围成的平面区域，f 连续

补充曲线 $y=-x^3$，拆分积分区域 D 分别关于 x,y 坐标轴对称



$$\begin{aligned}
I&=\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}\\
&=\iint_{D_1}[x+xyf(x^2+y^2)]dxdy+\iint_{D_2}x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy\\
&=\iint_{D_1}xdxdy=2\int_{-1}^{0}dx\int_{0}^{-x^3}xdy\\
&=-\frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Example 1.96. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$，计算

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

由轮换对称性

$$
\begin{aligned}
&\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy\\
&=\frac{1}{2}\left[\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy+\iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy\right]\\
&=\frac{1}{2}\iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 r\sin\pi r dr\\
&=-\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Example 1.97. 计算二重积分 $\iint_D|x^2+y^2-1|d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$

记 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1,(x,y)\in D\},D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2>1,(x,y)\in D\}$，则

$$
\begin{aligned}
\iint_D|x^2+y^2-1|d\sigma&=-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy+\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy\\
&=-2\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy+\iint_D(x^2+y^2-1)dxdy
\end{aligned}
$$

Example 1.98. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，求 $F'(2)$

交换积分次序得

$$
F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t[\int_1^x f(x)dy]dx=\int_1^t f(x)(x-1)dx
$$

因此 $F'(2)=f(2)(x-1)=f(2)$

Example 1.99. 计算二重积分 $\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$,其中 $D=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$

直角坐标系下 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,0\le y\le x\}$

Example 1.100. 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $f(1,y)=0,f(x,1)=0$，$\iint_D f(x,y)dxdy=a$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，计算二重积分

$$
\iint_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy
$$

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy = \int_0^1 x(\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy)dx = \int_0^1 x(\int_0^1 ydf'_x(x,y))dx$$

$$\int_0^1 ydf'_x(x,y) = yf'_x(x,y)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'_x(x,y)dy = -\int_0^1 f'_x(x,y)dy$$

$$\int_0^1 x(\int_0^1 ydf'_x(x,y))dx = -\int_0^1 x(\int_0^1 f'_x(x,y)dy)dx = -\int_0^1(\int_0^1 xf'_x(x,y)dx)dy$$

$$\int_0^1 xf'_x(x,y)dx = \int_0^1 xdf(x,y) = xf(x,y)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x,y)dx = -\int_0^1 f(x,y)dx$$

$$\iint_D xyf''_{xy}dxdy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx = a$$

Example 1.101. 求积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right) dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dy\int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right) dx &= \int_0^1 dx f_0^x \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right) dy = \int_0^1 (e^{x^2} - \int_0^x e^{y^2}dy)dx \\
&= \int_0^1 e^{x^2}dx - \int_0^1(\int_0^x e^{y^2}dy)dx \\
&= \int_0^1 e^{x^2}dx - x\int_0^x e^{y^2}dy\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{x^2}\cdot xdx \\
&= \int_0^1 e^{x^2}dx - \int_0^1 e^{y^2}dy + \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 \\
&= \frac{e-1}{2}
\end{aligned}$$

Example 1.102. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2$$

令 $D=\{(x,y)\mid a\le x,y\le b\}$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\ge(b-a)^2 &= \int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(y)}dy\\ &=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}dxdy=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}dxdy\\ &=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]dxdy\\ &\ge\iint_D dxdy=(b-a)^2\end{aligned}$$

Example 1.103. 证明 $\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)^2>\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e})$

令 $D=\{(x,y)\mid 0\le x,y\le 1\}, D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)^2 &= \int_0^1 e^{-x^2}dx\int_0^1 e^{-y^2}dy=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy\\ &>\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e})\end{aligned}$$

Example 1.104. 设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $f''_{xx}=f''_{yy}$，又由 $f(x,2x)=x$,$f'_x(x,2x)=x^2$，试求二阶偏导数 $f''_{xx}(x,2x), f''_{xy}(x,2x)$

因为 $f'_x\cdot 1+f'_y\cdot 2=1$ 所以 $2f'_y=1-x^2$。又因为 $2(f''_{yx}\cdot 1+f''_{yy}\cdot 2)=-2x$，由条件知 $f'_x(x,2x)=x^2$，则 $f''_{xx}\cdot 1+f''_{xy}\cdot 2=2x$，解得 $f''_{xx}(x,2x)=-\frac{4}{3}x, f''_{xy}(x,2x)=\frac{5}{3}x$

Example 1.105. 设函数 $u=u(x,y)$ 由方程 $u=f(x,y,z,t), g(y,z,t)=0, h(z,t)=0$ 所确定，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$

由方程组

$$\begin{cases}f(x,y,z,t)-u=0\\ g(y,z,t)=0\\ h(z,t)=0\end{cases}$$

有

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=0\\ \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=0\end{cases}$$

解

1.4 无穷级数

Example 1.106. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ 的敛散性

由于

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\frac{1}{n^{3/2}}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，因此级数收敛

Example 1.107. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$ 的收敛性

由泰勒公式 $\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$，则 $\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n^2}$ 收敛

Example 1.108. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{n-\ln n})$ 的敛散性

$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{n-\ln n})=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n-\ln n}$，令 $f(x)=\frac{1}{x-\ln x}$，则 $f'(x)<0$ 且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

Example 1.109. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}$$

Example 1.110. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 收敛，$\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，因此发散

Example 1.111. 设 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{1}{n}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),n=1,2,...,$ 证明

1. $\lim a_n$ 存在
2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收敛

1. 显然 $a_n\geq 0$，$\{a_n\}$ 单调减少且有下界，因此 $\lim a_n$ 存在

2. 由于数列单调减少，所以有 $0 \le \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \le a_n - a_{n+1}$，而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$ 收敛

Example 1.112. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛

证明. 由已知正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，根据单调有界数列必有极限知，极限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在，记 $a = \lim_{n\to\infty} a_n$，则有 $a_n \ge a \ge 0$，若 $a = 0$，则交错级数收敛，矛盾，因此 $a > 0$

又由于 $\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n \le \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$，而 $\frac{1}{a+1} < 1$，几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a+1})^n$ 收敛，因此级数收敛 □

Example 1.113. 求下列数列的极限

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$

1. 考虑级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{n!}{n^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

因此级数收敛，因此 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Example 1.114. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{2^n}(x-1)^{2n}$ 的收敛域

令 $t = (x-1)^n$，考虑幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{2^n} t^n$

Example 1.115. 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x = -2$ 处条件收敛，则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x-a)^n$ 在 $x = \ln\frac{1}{2}$ 处

1. 绝对收敛

2. 条件收敛

3. 必发散

4. 敛散性由 a 决定

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 的收敛半径是 1，因此 $x=-2$ 是收敛区间的端点，因此 $a=-3$ 或-1，而 $a=-3$ 与条件收敛矛盾，因此 $a=-1$

Example 1.116. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$$

因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},-1<x<1$$

当 $x\neq 0$ 时

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=\frac{2}{x}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\left(\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\int_0^t\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad -1<x<1$$

当 $x=0$ 时,$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=2$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=\begin{cases}\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 2 & x=0\end{cases}$$

当 $x=\pm 1$ 时，原级数发散

当 $x=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=3$

因此收敛区间与收敛域均为 $-1<x<1$，和函数

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 3 & x=0\end{cases}$$

Example 1.117. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1}$ 的收敛区间与收敛域，并求其和函数

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

因此收敛半径为 2，收敛域为 $[-2, 2)$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^{n-1}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = -\ln(1-\frac{x}{2}), -1 \le \frac{x}{2} < 1$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1} = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right) & x \in [-2,0) \cup (0,2) \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

Example 1.118. 设 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \ge 2)$，$S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数

1. 证明 $S''(x) - S(x) = 0$
2. 求 $S(x)$ 的表达式

二阶常系数齐次线性微分方程 $S''(x) - S(x) = 0$ 的特征方程 $\lambda^2 - 1 = 0$ 解得 $\lambda = \pm 1$，于是通解为

$$S(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

代入得 $S(x) = 2e^x + e^{-x}$

Example 1.119. 设 $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1})(n = 1, 2, 3, \dots)$，$S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数

1. 证明幂级数的收敛半径不小于 1
2. 证明 $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0(x \in (-1,1))$，并求 $S(x)$ 的表达式

1. 利用数学归纳法，$0 \le a_n \le 1$，记 R 为幂级数的收敛半径，因为 $|a_n x^n| \le |x|^n$，且级数 $\sum_0^\infty x^n$ 绝对收敛，收敛半径为 $(-1,1)$，因此 $(-1,1) \subseteq (-R, R)$

Example 1.120. 求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ 的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e$$

Example 1.121. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-n+1}{2^n}$

令 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$, 因此 $S(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'' = \left(\frac{x}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$

Example 1.122. 将 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数

因为 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} (-1 < x < 1)$，有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2x} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} (-1 \le x < 1) \end{aligned}$$

Example 1.123. 已知 $\cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-1 < x < 1)$，求 a_n

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, -1 < x < 1$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n!)}, -\infty < x < +\infty$$

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n, -1 < x < 1$$

Example 1.124. 设 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则下列结论成立的是

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛

2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散

3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散

4. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

$\ln^2(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{n}$

Example 1.125. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛，则 $|n|n \le \frac{1}{2}(u_n^2+\frac{1}{n^2})$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 收敛

Example 1.126. 设 $\{a_n\}$ 是单调增加且有界的正数列,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛

$$1-\frac{a_n}{a_{n+1}} \le \frac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_n)$$

Example 1.127. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$

令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}$

1.5 常微分方程与差分方程

Example 1.128. 求解下列初值问题

$$(x+y)dx+(y-x)dy=0, y|_{x=1}=-1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

令 $u=\frac{y}{x}$，分离变量得

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}$$
$$|x|\sqrt{1+u^2}=Ce^{\arctan u}$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\arctan \frac{y}{x}}$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}e^{\arctan \frac{y}{x}+\frac{\pi}{4}}$$

Example 1.129. 求 $\frac{dy}{dx}=\frac{1-y}{y-x}$ 的通解

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y-x}{1-y}=-\frac{1}{1-y}x+\frac{y}{1-y}$$

求解通解

$$x=(1-y)\ln|1-y|+C(1-y)+1$$

Remark. 形如 $\frac{dy}{dx}=\frac{s(y)}{t(y)x+q(y)}$ 的微分方程，将 x 看作未知量

Example 1.130. 解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x+1}{y+x+5}$

方程组

$$\begin{cases}y-x+1=0\\ y+x+5=0\end{cases}$$

有唯一解 $x=-2,y=-3$，令 $u=x+2,v=y+3$，则 $\frac{dv}{du}=\frac{v-u}{v+u}$，再令 $z=\frac{v}{u}$，有

$$z+u\frac{dz}{du}=\frac{z-1}{z+1},-\frac{z+1}{z^2+1}dz=\frac{1}{u}du$$

因此

$$-\frac{1}{2}\ln(z^2+1)-\arctan z=\ln|u|+C$$

Remark. 对方程 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+C_1}{a_2x+b_2y+C_2}\right)$

1. 若 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$，则令 $z=a_2x+b_2y$，方程化为

$$\frac{dz}{dx}=b_2f\left(\frac{kz+C_1}{z+C_2}\right)+a_2$$

2. 若 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$，则方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+C_1=0\\ a_2x+b_2y+C_2=0\end{cases}$$

有唯一解 $x=\alpha,y=\beta$，令 $u=x-\alpha,v=y-\beta$，则

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{v}{u}}{a_2+b_2\frac{v}{u}}\right)=g\left(\frac{v}{u}\right),g(t)=f\left(\frac{a_1+b_1t}{a_2+b_2t}\right)$$

Example 1.131. 求 $y''+y=\sin x+x\cos 2x$ 的通解

特征方程的根为 $\lambda=\pm i$，$y''+y=4\sin x$ 的特解为 $y_1^*=-2x\cos x$，$y''+y=x\cos 2x$ 特解为 $y_2^*=-\frac{1}{3}x\cos x+\frac{4}{9}\sin 2x$

2 线性代数

2.1 行列式

Example 2.1. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 + a_1 x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \\ &= \cdots = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 + a_1 x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 + a_2 x + a_1 x^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + \cdots + a_1 x^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n + \cdots + a_1 x^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Example 2.2. 计算

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 & x \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 & x \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & y \\ a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ a & d & c & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = (x^2-y^2)(b^2-c^2)$$

Example 2.3. 已知 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 n 阶矩阵，若 $|\mathbf{A}| = 3, |\mathbf{B}| = 2, \left|\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}\right| = 2$，求 $\left|\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}\right|$

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}\right| &= \left|\mathbf{E}\,\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{E}\right| = \left|(\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{B})\,\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A})\right| \\ &= \left|\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1})\,\mathbf{A}\right| = 3 \end{aligned}$$

Example 2.4. 已知 4 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 相似于 $\mathbf{B}, \mathbf{A}$ 的特征值为 2,3,4,5，$\mathbf{E}$ 为 4 阶单位矩阵，求 $|\mathbf{B} - \mathbf{E}|$

$\mathbf{A} = T\,\mathbf{B}\,T^{-1} = Q\,\mathbf{D}\,Q^{-1}$,$|\mathbf{B} - \mathbf{E}| = |TQ(\mathbf{D} - \mathbf{E})Q^{-1}T^{-1}| = 24$

Example 2.5. 满足 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ 的矩阵称为反对称矩阵，证明：若 $\mathbf{A}$ 是反对称矩阵，则 $|\mathbf{A}| = 0$

设 $\mathbf{A}$ 的阶数为 $2k+1$, k 为正整数, $|\mathbf{A}| = \left|\mathbf{A}^T\right| = |-\mathbf{A}| = (-1)^{2k+1}|A| = -|A|$，得 $|\mathbf{A}| = 0$

Example 2.6. 已知 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，满足 $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{0}$，证明 $|\mathbf{A}| = 0$

若 $|\mathbf{A}| \neq 0$，则 $\mathbf{A}$ 可逆，$\mathbf{B} = \mathbf{0}$，矛盾

Example 2.7. 已知 ξ 是 n 维向量，且 $\xi^T\xi = 1$，若 $\mathbf{A} = \mathbf{E} - \xi\xi^T$，证明 $|\mathbf{A}| = 0$

$$\mathbf{A}\,\xi = (\mathbf{E} - \xi\xi^T)\xi = \xi - \xi = \mathbf{0}$$

有特征值 0，从而齐次线性方程组 $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解，因此 $|\mathbf{A}| = 0$

Example 2.8. 已知

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

1. 求 $A_{12} - A_{22} + A_{32}$
2. 求 $A_{31} + A_{32} + A_{33}$

1. $A_{12} - A_{22} + A_{32} = a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{33} = 0$

2. 由于代数余子式 A_{ij} 的值与元素 a_{ij} 的值无关，可构造一个新的行列式

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

因此 $A_{31} + A_{32} + A_{33} = -11$

Example 2.9. 若

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

求 $A_{31} + A_{32} + A_{33}$ 由

$$|\mathbf{B}_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0, |\mathbf{B}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

有

$$\begin{cases} 2A_{31} + 2A_{32} + 2A_{33} + A_{34} + A_{35} = 0 \\ A_{31} + A_{32} + A_{33} + 2A_{34} + 2A_{35} = 0 \end{cases}$$

因此 $A_{31} + A_{32} + A_{33} = 0$

Example 2.10. 若

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因 $|\mathbf{A}| = -4$,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$\mathbf{A}^{*} = |\mathbf{A}|\,\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 20 & -8 & 0 & 0 \\ -12 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

2.2 矩阵

Example 2.11. 已知 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$，证明 $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}$

有

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} - \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{E} = (\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{B} - \mathbf{E}) = \mathbf{E}$$

因此 $\mathbf{A} - \mathbf{E}$ 可逆，$(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{E}$，于是

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{B} - \mathbf{E}) = (\mathbf{B} - \mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E})$$

Example 2.12. 已知

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

求 $\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

那么

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 7\,\mathbf{A}$$

Remark. 一般情况下，若 $r(\mathbf{A}) = 1$，则 $\mathbf{A}$ 可分解为两个矩阵的乘积，有 $\mathbf{A}^2 = l\,\mathbf{A}$，从而

$$\mathbf{A}^n = l^{n-1}\,\mathbf{A}$$

例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$$

那么

$$\mathbf{A}^2 = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})^T(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^T = l\,\mathbf{A}$$

Example 2.13. 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2 + 2\,\mathbf{A} - 3\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$

1. 证明 $\mathbf{A}, \mathbf{A} + 2\,\mathbf{E}$ 可逆
2. 当 $\mathbf{A} \neq \mathbf{E}$ 时，判断 $\mathbf{A} + 3\,\mathbf{E}$ 是否可逆

1. $(\mathbf{A} + 3\,\mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{0}$，因为 $\mathbf{A} \neq \mathbf{E}$，则 $(\mathbf{A} + 3\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解，因此 $|\mathbf{A} + 3\,\mathbf{E}| = 0$，所以 $\mathbf{A} + 3\,\mathbf{E}$ 不可逆

Example 2.14. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 n 阶矩阵，如果 $\mathbf{E} + \mathbf{A}\,\mathbf{B}$ 可逆，证明矩阵 $\mathbf{E} + \mathbf{B}\,\mathbf{A}$ 可逆

如果 $\mathbf{E} + \mathbf{B}\,\mathbf{A}$ 不可逆，则 $|\mathbf{E} + \mathbf{B}\,\mathbf{A}| = 0$，那么齐次方程组 $(\mathbf{E} + \mathbf{B}\,\mathbf{A})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解

设 $\boldsymbol{\eta}$ 是非零解，则 $(\mathbf{E} + \mathbf{B}\,\mathbf{A})\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$,$\mathbf{B}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta} = -\boldsymbol{\eta}$。因为 $(\mathbf{E} + \mathbf{A}\,\mathbf{B})(\mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta} + \mathbf{A}(\mathbf{B}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}$，且 $\mathbf{A}\,\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$，因此矛盾

Example 2.15. 计算

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{2000} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

是把第 2 行的 2 倍加到第 3 行

Example 2.16. 已知 a 是常数，且矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{bmatrix}$$

可经初等变换化为矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 求 a

2. 求满足 $\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{B}$ 的可逆矩阵

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$r(\mathbf{A}) = 2$，因此 $r(\mathbf{B}) = 2$，而 $|\mathbf{B}| = 2 - a$，因此 $a = 2$

$$\begin{bmatrix} A \mid B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

因此

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 - 6k_1 & 4 - 6k_1 & 4 - 6k_3 \\ -1 + 2k_1 & -1 + 2k_2 & -1 + 2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

Example 2.17.

1. 已知

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & a & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

   且 $r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = 2$，求 a

2. 已知 $\mathbf{A}$ 是 2 阶非 0 矩阵且 $\mathbf{A}^5 = \mathbf{0}$，求 $r(\mathbf{A})$

1. $|\mathbf{B}| \neq 0$，因此 $r(\mathbf{A}) = 2, |\mathbf{A}| = 0$，而 $|\mathbf{A}| = 3(5-a) = 0$，因此 $a = 5$
2. $r(\mathbf{A}) \geq 1$，$|\mathbf{A}|^5 = 0$，因此 $|\mathbf{A}| = 0$，因此 $r(\mathbf{A}) = 1$

Example 2.18. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是 3 阶矩阵

1. 证明 $r(\mathbf{A}, \mathbf{A}\,\mathbf{B}) = r(\mathbf{A})$
2. 举例说明 $r(\mathbf{A}, \mathbf{B}\,\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$ 是错误的

1. 设 $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{C}$，对矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ 分别按列分块，记 $\mathbf{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3], \mathbf{C} = [\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3]$，记 $\mathbf{B} = [b_{ij}]$，那么由 $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{C}$，有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 & \boldsymbol{\gamma}_3 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_1 = b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + b_{31}\boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\gamma}_2 = b_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + b_{32}\boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\gamma}_3 = b_{13}\boldsymbol{\alpha}_3 + b_{23}\boldsymbol{\alpha}_2 + b_{33}\boldsymbol{\alpha}_3 \end{cases}$$

因此 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，因此

$$r(\mathbf{A}, \mathbf{A}\,\mathbf{B}) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = r(\mathbf{A})$$

2.
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Example 2.19. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $n \times s$ 矩阵，证明

$$r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$$

对于齐次方程组 1. $\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$2. $\mathbf{B}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组 2 的一个解，它也是方程组 1 的解，因此方程组 2 的解集是方程组 1 的解集的子集

又因 1 的解向量的秩为 $s - r(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$，2 的解向量的秩为 $s - r(\mathbf{B})$，因此

$$s - r(\mathbf{B}) \leq s - r(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$$

即 $r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{B})$

另一方面，$r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = r((\mathbf{A}\,\mathbf{B})^T) = r(\mathbf{B}^T\,\mathbf{A}^T) \leq r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A})$

Example 2.20. 若 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\mathbf{A}^2=\mathbf{E}$，证明

$$r(\mathbf{A}+\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-\mathbf{E})=n$$

$r(\mathbf{A}+\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-\mathbf{E})\leq n+r((\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{A}+\mathbf{E}))$. $r(\mathbf{A}+\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-\mathbf{E})\geq r(\mathbf{A}+\mathbf{E}+\mathbf{E}-\mathbf{A})$

Example 2.21. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关

令

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&\dots&0&-1\\-1&0&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&1&0\\0&0&\dots&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3&\dots&\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\dots&\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}\mathbf{A}$$

$|\mathbf{A}|=0$，因此线性相关

Example 2.22. 设 $\mathbf{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，若 $\mathbf{A}\,\mathbf{B}=\mathbf{E}$，证明 $\mathbf{B}$ 的列向量线性无关

$r(\mathbf{B})\leq n$，又

$$r(\mathbf{B})\geq r(\mathbf{A}\,\mathbf{B})=n$$

Example 2.23. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1},\dots,a_{in}]^T(i=1,2,\dots,r,r<n)$ 是 n 维实向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，已知 $\boldsymbol{\beta}=[b_1,\dots,b_n]^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0\\\dots\\a_{r1}x_1+\dots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解向量，试判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\dots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. $\boldsymbol{\beta}$ 与每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都正交，$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}_i=0$。因此 $k\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}=0$. 因为 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$，因此 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}\neq 0$，因此 $k=0$. 因此线性无关

Example 2.24. 设 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关，且与非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 正交，证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

令

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^T\end{bmatrix}$$

因此 $\mathbf{A}\,\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{A}\,\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$，因为 $r(\mathbf{A})=n-1$，因此 $\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系仅由 1 个解向量构成，因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

Example 2.25. 线性变换 $\mathbf{A}$ 的属于不同特征值的特征向量线性无关

设 $\mathbf{A}$ 的 k 个不同特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ 分别对应于特征向量 $\xi_1,\dots,\xi_k$，对 k 作数学归纳法

当 $k=1$ 时显然。设命题在 $k-1$ 个不同特征值的情况下成立

$$\begin{gathered}
l_1\xi_1+\dots+l_k\xi_k=0\\
l_1\,\mathbf{A}\,\xi_1+\dots+l_k\,\mathbf{A}\,\xi_k=0\\
l_1\lambda_1\xi_1+\dots+l_k\lambda_k\xi_k=0\\
l_2(\lambda_1-\lambda_2)\xi_2+\dots+l_k(\lambda_1-\lambda_k)\xi_k=0\\
l_2(\lambda_1-\lambda_2)=\dots=l_k(\lambda_1-\lambda_k)=0\\
l_2=\dots=l_k=0
\end{gathered}$$

因此 $l_1=0$，$\xi_1,\dots,\xi_k$ 线性无关

Example 2.26. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，证明 $r(\mathbf{A}+\mathbf{B})\le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$

设 $r(\mathbf{A})=r$,$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\mathbf{A}$ 的列向量的极大线性无关组，$r(\mathbf{B})=t$,$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\dots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 是 $\mathbf{B}$ 的列向量的极大线性无关组

于是 $\boldsymbol{\alpha}_k+\boldsymbol{\beta}_k$ 都被 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表示

Example 2.27. 已知向量组

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,4),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,a^2+3)^T\\
&\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a+3),\boldsymbol{\beta}_2=(0,2,1-a),\boldsymbol{\beta}_3=(1,3,a^2+3)^T
\end{aligned}$$

若两向量组等价，求 a 的值，并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

因为两个向量组等价，因此

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$$

$$
[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \mid \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & a^2+3 & a+3 & 1-a & a^2+3 \end{array}\right]
$$

$$
\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 & 1-a & a^2-1 \end{array}\right]
$$

当 $a \neq \pm 1$ 时，

$$
r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = 3
$$

对方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}_3$，有唯一解 $(1,-1,1)^T$ 当 $a = 1$ 时，

$$
r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = 2
$$

有通解 $(3,-2,0)^T + k(-2,1,1)^T$ 当 $a = -1$ 时

$$
r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = 2, r(balpha_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = 3
$$

2.3 线性方程组

Example 2.28. 设非齐次线性方程组 $\mathbf{A}_{m\times n}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$，则

1. 当 $r(\mathbf{A}) = m$ 时，方程有解
2. 当 $r(\mathbf{A}) = n$ 时，方程有唯一解
3. 当 $m = n$ 时，方程组有唯一解
4. 当 $r(\mathbf{A}) = r < n$ 时，方程组有无穷多解

$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解当且仅当 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A},\mathbf{b})$

Example 2.29. 设 $\mathbf{A}$ 是四阶矩阵，$r(\mathbf{A}) = 2$,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的三个线性无关解，其中

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 &= [-1,2,5,1]^T \\
\boldsymbol{\eta}_2 - 2\boldsymbol{\eta}_3 &= [2,1,3,-3]^T \\
3\boldsymbol{\eta}_1 + 5\boldsymbol{\eta}_2 &= [1,-2,1,-1]^T
\end{aligned}
$$

求方程组 $\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的通解

因为 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3)=-\mathbf{b}$，因此 $\boldsymbol{\eta}=-\boldsymbol{\eta}_2+2\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一个特解

$\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的两个通解为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}_1 &= \boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+2(\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3)\\
\boldsymbol{\xi}_2 &= 8(\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3)+5\boldsymbol{\eta}_3+3\boldsymbol{\eta}_1
\end{aligned}
$$

Example 2.30. 设 $\boldsymbol{\xi}=[a_1,\dots,a_n]^T,\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi}=1$，证明 $\left|\mathbf{E}-\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi}\right|=0$

构造齐次线性方程组

$$(\mathbf{E}-\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi})\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

有

$$(\mathbf{E}-\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$$

有非零解，因此

$$\left|\mathbf{E}-\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi}\right|\neq 0$$

Example 2.31. 设齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
(1+a)x_1+2x_2+\cdots+nx_n=0\\
x_1+(2+a)x_2+\cdots+nx_n=0\\
\vdots\\
x_1+2x_2+\cdots+(a_n+n)x_n=0
\end{cases}
$$

试问 a 为何值时，方程组有非零解

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1+a & 2 & \dots & n\\ 1 & 2+a & \dots & n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & \dots & n+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a & 2 & \dots & n\\ -a & a & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a & 0 & \dots & a\end{bmatrix}=\mathbf{B}
$$

当 $a=0$ 时，$r(\mathbf{A})=1<n$，方程组有非零解

当 $a \neq 0$ 时，对矩阵 $\mathbf{B}$ 继续初等行变换

$$\mathbf{B} \to \begin{bmatrix} 1+a & 2 & \dots & n \\ -a & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & 0 & \dots & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1+a & 2 & \dots & n \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} \frac{n(n+1)}{2}+a & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

当 $a = \frac{n(n+1)}{2}$ 时，$r(\mathbf{A}) = n-1$

Example 2.32. 设线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 x_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 x_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 x_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 x_4 = \boldsymbol{\beta}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}$ 均是四维列向量，有通解

$$k[-2,3,1,0]^T + [4,-1,0,3]^T$$

1. $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示
2. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示
3. 求线性方程组
$$[\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4] = \boldsymbol{\beta}$$
的通解

$$\boldsymbol{\beta} = (-2k+4)\boldsymbol{\alpha}_1 + (-1+3k)\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3 + 3\boldsymbol{\alpha}_4$$
$$4\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3 = 0$$

$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = 3, r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 2$，因此不能

$r(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = 3$，因此通解形式为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\eta}$ 因为

$$0(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}) + 4\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3 + 3\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\eta}_1 = [0,4,-1,0,3]^T$$
$$0(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}) - 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + 0\boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{0} \Rightarrow \xi = [0,-2,3,1,0]^T$$
$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3 + 0\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\eta}_2 = [1,-1,0,0,0]^T$$

因此有解

$$k_1\boldsymbol{\xi} + k_2(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) + \boldsymbol{\eta}_1$$

Example 2.33. 证明：若方程组

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n = 0 \end{cases}$$

有解，则方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + \cdots + a_{mm}x_m = 0 \end{cases}$$

和方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + \cdots + a_{mm}x_m = 0 \\ b_1x_1 + \cdots + b_mx_m = 0 \end{cases}$$

是同解方程组

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

则问题变为，已知 $\mathbf{A}\,\mathbf{y} = \mathbf{x}$，则方程组

$$\mathbf{A}^T\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{b}^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

同解。因为 $\mathbf{A}\,\mathbf{y} = \mathbf{x}$ 有解，因此 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{b})$，因此

$$r(\mathbf{A}^T) = r\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{b}^T \end{bmatrix}$$

因此它们基础解系的线性无关向量个数相同

Example 2.34. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\mathbf{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 则线性方程组 $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$

1. 当 $n>m$ 时仅有零解
2. 当 $n>m$ 时必有非零解
3. 当 $m>n$ 时仅有零解
4. 当 $m>n$ 时必有非零解

$r(\mathbf{A}\,\mathbf{B})\leq r(\mathbf{A})\leq n<m$

Example 2.35. 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵，且满足 $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$

1. 求 $\mathbf{A}$ 的特征值的取值范围
2. 证明 $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 是可逆矩阵

$$\lambda^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}^2\,\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}\,\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$$

因此 $\lambda=0,1$

$\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 的特征值的值为 $1,2$

Example 2.36.

1. 设 $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 是主对角元为 1 的上三角阵，且存在 $a_{ij}\neq 0(i<j)$，问 $\mathbf{A}$ 是否相似于对角阵，说明理由
2. 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$，但 $\mathbf{A}^k=\mathbf{0}(k\in\mathbb{N}^+)$，问 $\mathbf{A}$ 能否相似于对角阵

1. 不能, $|\lambda\,\mathbf{E}-\mathbf{A}|=(\lambda-1)^n$, 故 $\lambda=1$ 是 $\mathbf{A}$ 的 n 重特征值, 而 $r(\mathbf{E}-\mathbf{A})\geq 1$，因而对应于 $\lambda=1$ 的特征向量个数 $\leq n-1$
2. 不能, 若 $\mathbf{A}$ 有特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, 则 $\mathbf{A}^k$ 有特征值 $\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k$。又 $\mathbf{A}^k=\mathbf{0}$, 因此 $\lambda_1^k=\cdots=\lambda_n^k=0$，因此 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. 但 $\mathbf{A}\neq 0$，因此 $r(0\,\mathbf{E}-\mathbf{A})=r(\mathbf{A})\geq 1$，因此不能相似

Example 2.37. 设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$f(x)=x^3-2x+5, \mathbf{B}=f(\mathbf{A})$，问 $\mathbf{B}$ 能否相似于对角阵

$\mathbf{A}$ 是实对称矩阵, 因此 $f(\mathbf{A})$ 也是实对称矩阵，因此能对角化

$|\lambda\,\mathbf{E}-\mathbf{A}| = (\lambda+1)(\lambda-2)^2$

当 $\lambda_1 = -1$ 时，特征向量为 $\boldsymbol{\alpha} = [1,1,1]^T$

当 $\lambda_2 = 2$ 时，特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2 = [1,-1,0]^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = [1,0,-1]$

$\mathbf{B}$ 的特征值为 $f(\lambda) = 6, 9$，因此

$$\mathbf{P} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Example 2.38. 设 $\mathbf{A}$ 是三阶实对称矩阵，$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，对应于 $\lambda = -1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [0,1,1]^T$，求 $\mathbf{A}$

对应于 λ_2 的特征向量与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交，因此

$$x_2 + x_3 = 0$$

解得 $\boldsymbol{\alpha}_2 = [1,0,0]^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = [0,1,-1]^T$，因此有 $\mathbf{P} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]$ 使得

$$\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Example 2.39. 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

且已知 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$，求可逆阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{B}$

因为 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$，故有 $Tr(\mathbf{A}) = Tr(\mathbf{B}), |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$

$$\begin{cases} 1+4+a = 2+2+b \\ 6a-6 = 4b \end{cases}$$

2.4 二次型

Example 2.40. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\,\mathbf{y}$ 化成标准形 $f = 6y_1^2$，求参数 a

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

因此 $3a = 6, a = 2$

Example 2.41. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是两个 n 阶实对称矩阵，证明:

1. 若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同，则 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$

2. $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 合同的充分必要条件是 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 有相同的秩和正惯性指数

2. 设 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{\Lambda}$，则 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B} \simeq \mathbf{\Lambda}$，因此

$$\mathbf{C}_1^T \mathbf{A} \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_p & & \\ & -\mathbf{E}_{r-p} & \\ & & \mathbf{0}_{n-r} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_2^T \mathbf{B} \mathbf{C}_2$$

Example 2.42. 下列二次型中，与 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ 合同的是

1. $g = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$

2. $h = x_1^2 + 5x_2^5 + 4x_1x_2$

3. $w = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$

4. $r = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$

相同的秩和正惯性指数，因此

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2)^2 - 3x_2^2 \\ & g = (x_1 + x_2)^2 \\ & h = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \\ & w = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 \\ & r = (x_1 + 3x_2)^2 - 8x_2^2 \end{aligned}$$

Example 2.43. 判别二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. $\mathbf{A}$ 的顺序 y 主子式都大于 0
2. $\mathbf{A}$ 的全部特征值 >0
3. 正惯性指数为 n

Example 2.44. $\mathbf{A}$ 是 n 阶正定阵，$\mathbf{C}$ 是 $n \times m$ 矩阵，且 $r(\mathbf{C}) = m$，证明 $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ 也是正定阵

$\mathbf{C} = [\gamma_1, \dots, \gamma_m]$，则 $\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_m$ 线性无关，对任给 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_m]^T \neq \mathbf{0}$，有

$$\mathbf{C}\,\mathbf{x} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_m) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

而 $\mathbf{A}$ 是正定阵，故对任意的 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \neq \mathbf{0}$，有 $\mathbf{C}\,\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$，且恒有

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A}\,\mathbf{C})\,\mathbf{x} = (\mathbf{C}\,\mathbf{x})^T \mathbf{A} (\mathbf{C}\,\mathbf{x}) > 0$$

故 $\mathbf{C}^T \mathbf{A}\,\mathbf{C}$ 是正定矩阵

Example 2.45. 设 $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\,\mathbf{x}$，且 $|\mathbf{A}| = 0$

1. 证明存在 n 维列向量 $\mathbf{x}_0$ 使得 $f(\boldsymbol{\xi}_0) = 0$
2. 当

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 01 & 2 \end{bmatrix}$$

   时，求 $\boldsymbol{\xi}_0$ 使得 $f(\xi_0) = 0$

1. 因为 $|\mathbf{A}| = 0$，因此 $\mathbf{A}$ 有一个特征值为 0，设其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_0$

Example 2.46. 设 $\mathbf{A}$ 是三阶实对称矩阵, $\mathbf{E}$ 是 3 阶单位矩阵, 若 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = 2\,\mathbf{E}$, 且 $|\mathbf{A}| = 4$，求二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ 的规范形

设 $\mathbf{A}\,\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，则有 $(\lambda^2 + \lambda - 2)\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，因此特征值只能是 1 或-2，又因为 $|\mathbf{A}| = 4$，因此特征值为 $1, -2, -2$

3 概率论与数理统计

3.1 随机事件与概率

Example 3.1. 随机事件 A, B 满足 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$，$P(A \cup B) = 1$，则必有

1. $A \cup B = \Omega$
2. $AB = \emptyset$
3. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$
4. $P(A - B) = 0$

选 3

Example 3.2. 为从 2 个次品，8 个正品的 10 个产品中将 2 个次品挑出，随机地从中逐个测试，则不超过 4 次测试就把 2 个次品挑出的概率为

方法 1 。把 10 个产品随机排成一行，按先后次序逐个测试，总共有 10! 种排法，如要不超过 4 次测试就把 2 个次品挑出，就要求在前 4 个产品中有 2 个次品和 2 个正品，共有 $C_2^2 C_8^2 4!6!$，所以所求概率为

$$P = \frac{C_2^2 C_8^2 4!6!}{10!} = \frac{2}{15}$$

方法 2 。如果只考虑前 4 次测试，总的可能为 10 个产品中任选 4 个，有 A_{10}^4 种，前 4 次测试就包含 2 个次品的可能为 $C_2^2 C_8^2 4!$，所以所求概率为

$$P = \frac{C_2^2 C_8^2 4!}{A_{10}^4} = \frac{2}{15}$$

方法 3. 如果只考虑前 4 次测试而不计它们的先后次序，总的可能有 C_{10}^4 种选法，因此

$$P = \frac{C_2^2 C_8^2}{C_{10}^4} = \frac{2}{15}$$

方法 4 。如果只考虑 2 个次品在 10 次测试中的位置，总的可能为 C_{10}^2 种，现要求前 4 位中有两个次品，因此

$$P = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}$$

Example 3.3. 掷一枚硬币 $2n$ 次，出现正面向上次数多于反面向上次数的概率为

在 $2n$ 次中正面向上次数跟反面向上次数相等的概率为 $C_{2n}^{n}(\frac{1}{2})^{2n}$，因此概率为 $\frac{1}{2}[1-C_{2n}^{n}(\frac{1}{2})^{2n}]$

Example 3.4. 一条自动生产线连续生产 n 件产品不出故障的概率为 $\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, n = 0, 1, 2, \ldots$。假设产品的优质品率为 p，如果各件产品是否为优质品相互独立

1. 计算生产线在两次故障间共生产 k 件优质品的概率
2. 若已知在某两次故障间该生产线生产了 k 件优质品，求它共生产 m 件产品的概率

设事件 $B_k =$ 两次故障间共生产 k 件优质品，事件 $A_i =$ 两次故障间共生产 i 件产品，$A_0, A_1, \ldots$ 构成一完整事件组，且

$$P(A_i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, i = 0, 1, \ldots$$

当 $i < k$ 时，$P(B_k \mid A_i) = 0$

当 $i \geq k$ 时，在 i 个产品中有 k 个优质品，且各产品是否优质相互独立，因此 $P(B_k \mid A_i = C_i^k p^k (1-p)^{i-k})$

1. 应用全概率公式

$$\begin{aligned}
P(B_k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i)P(B_k \mid A_i) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(A_i)P(B_k \mid A_i) \\
&= \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}C_i^k p^k (1-p)^{1-k} = \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\frac{i!}{k!(i-k)!}p^k(1-p)^{i-k} \\
&= \frac{(\lambda p)^i}{k!}e^{-\lambda p}\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p)^{i-k})}{(i-k)!}e^{-\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

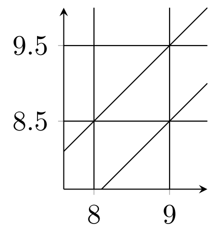
2. 当 $m < k$ 时，$P(A_m \mid B_k) = 0$

   当 $m \geq k$ 时，

$$\begin{aligned}
P(A_m \mid B_k) &= \frac{P(A_m)P(B_k \mid A_m)}{P(B_k)} = \frac{k!}{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\frac{m!}{k!(m-k)!}p^k(1-p)^{m-k} \\
&= \frac{(\lambda q)^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\lambda q}
\end{aligned}$$

Example 3.5. 甲在 8 点到 9 点，乙在 8 点半到 9 点半的各时刻等可能地、相互独立地去同一办公室，已知没人只在办公室停留半小时，则它们相遇的概率为

设甲乙到达的时刻分别为 $8 \le X \le 9, 8.5 \le Y \le 9.5$，相遇时必须



3.2 随机变量与其概率分布

Example 3.6. 设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，则成立 $P\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$ 的充要条件是

1. x_1 处连续
2. x_2 处连续
3. x_1, x_2 至少一处连续
4. x_1, x_2 都不连续

$P\{x_1 < X < x_2\} = P\{x_1 < X \le x_2\} - P\{X = x_2\} = F(x_2) - F(x_1) - P\{X = x_2\}$。$P\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$ 可知 $P\{X = x_2\} = 0$ 即 $F(x_2) - F(x_2 - 0) = 0$，$F(x)$ 在 x_2 处作连续，$F(x)$ 是右连续的，因此 x_2 处 $F(x)$ 连续

Example 3.7. 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,2^2), X_3 \sim N(5,3^2)$，$p_i = P\{-2 \le X_i \le 2\}$，则

1. $p_1 > p_2 > p_3$
2. $p_2 > p_1 > p_3$
3. $p_3 > p_1 > p_2$
4. $p_1 > p_3 > p_2$

$p_1 = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$, $p_2 = \Phi(\frac{2-0}{2}) - \Phi(\frac{-2-0}{2}) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$, $p_3 = \Phi(\frac{2-5}{3}) - \Phi(\frac{-2-5}{3}) = \Phi(-1) - \Phi(-\frac{7}{3})$，因此 $p_1 > p_2 > p_3$

Example 3.8. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = Ae^{-x^2+x}$，试求常数 A

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-x^2+x}dx = Ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{2})^2}dx \\ &= Ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = Ae^{1/4}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Example 3.9. 假设随机变量 X 服从指数分布，则随机变量 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数

1. 是连续函数
2. 至少有两个间断点
3. 是阶梯函数
4. 恰好有一个间断点

* 方法 1*。设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$。
当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = 0$
当 $0 \le y < 2$ 时

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{\min\{X, 2\} \le y\} \\ &= P\{X \le y\} = \int_{-\infty}^{y} \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda y} \end{aligned}$$

但 $y \ge 2$ 时，$F_Y(y) = 1$，因此

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & 0 \le y < 2 \\ 1 & y \ge 2 \end{cases}$$

因此间断点为 $y = 2$

方法 2. 指数分布 X 的分布函数必为连续函数，

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\min\{X, 2\} \le y\} = \begin{cases} F_X(y) & y < 2 \\ 1 & y \ge 2 \end{cases}$$

故有一个间断点

3.3 多维随机变量及其分布

Example 3.10. 设 (X, Y) 是二维随机变量，X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 \end{cases}$$

在给定 $X = x(0 < x < 1)$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3} & 0 < y < x \\ 0 \end{cases}$$

1. 求 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$
2. 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$
3. 求 $P\{X > 2Y\}$

注意条件概率是在 $X = x$ 的条件下给定的，因此在 $0 < x < 1$ 时

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3} & 0 < y < x \\ 0 \end{cases}$$

又 $\int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 1$

Example 3.11. 设随机变量 X, Y 相互独立，$X \sim B(1, 0.5), Y \sim U[0, 1]$，记 $Z = X + Y$，试求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\} \\ &= P\{X = 0, X + Y \le z\} + P\{X = 1, X + Y \le z\} \\ &= P\{X = 0, Y \le z\} + P\{X = 1, Y \le z - 1\} \\ &= \frac{1}{2} F_Y(z) + \frac{1}{2} F_Y(z - 1) \\ &= \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{z}{2} & 0 \le z \le 2 \\ 1 & 2 < z \end{cases} \end{aligned}$$

Example 3.12. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

令随机变量

$$Y = \begin{cases} 2 & X \leq 1 \\ X & 1 < X < 2 \\ 1 & 2 \leq X \end{cases}$$

1. 求 Y 的分布函数

2. 求概率 $P\{X \leq Y\}$

$1 \leq Y \leq 2$，因此
当 $y < 1$ 时，$F_Y(y) = 0$
当 $1 \leq y < 2$ 时，

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{Y < 1\} + P\{Y = 1\} + P\{1 < Y \leq y\} \\ &= 0 + P\{X \geq 2\} + P\{1 < X \leq y\} \\ &= \int_2^3 \frac{1}{9}x^2 dx + \int_1^y \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{y^3 + 18}{27} \end{aligned}$$

当 $2 \leq y$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{Y \leq 2\} = 1$

$$\begin{aligned} P\{X \leq Y\} &= P\{X = Y\} + P\{X < Y\} \\ &= P\{1 < X < 2\} + P\{X \leq 1\} \\ &= P\{X < 2\} = \int_0^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{8}{27} \end{aligned}$$

Example 3.13. 设 $(X, Y) \sim N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$，则 $P\{X < Y\} =$

$P\{X < Y\} = \iint_{x<y} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2e^2}[(x-\mu)^2 + (y-\mu)^2]} dxdy$

用极坐标

$$\begin{cases} x - \mu = \rho \cos\theta \\ y - \mu = \rho \sin\theta \end{cases}$$

则

$$P\{X<Y\} = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{-\rho^2}{2\sigma^2}}\rho d\rho = \frac{1}{2}$$

或由对称性得

Example 3.14. 设随机变量 X, Y 相互独立，服从同一参数为 λ 的泊松分布，试求：随机变量 $Z = X + Y$ 的分布律

$$\begin{aligned}
P\{Z=k\} = P\{X+Y=k\} = \sum_{i=0}^{k} P\{X=i, Y=k-i\} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}\frac{\lambda^{k-i}e^{-\lambda}}{(k-i)!} \\
= e^{-2\lambda}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^k}{i!(k-i)!} = e^{-2\lambda}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\frac{\lambda^k}{k!} \\
= e^{-2\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i = e^{-2\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}(1+1)^k \\
= \frac{(2\lambda)^k}{k!}e^{-2\lambda}, k = 0, 1, ...
\end{aligned}$$

Example 3.15. 设随机变量 X_i 的概率分布为

X_i	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$i = 1, 2$，且满足 $P\{X_1X_2 = 0\} = 1$，则 $P\{X_1 = X_2\} =$

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2	
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

Example 3.16. 设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 为二维随机变量 (X_1, X_2) 的边缘分布函数，且 X_1, X_2 相互独立，则

1. $2F_1(x) - F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数
2. $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数
3. $F_1(x) - \frac{1}{2}F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

4. $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

$F(x)$ 分布函数的充要条件是

1. 单调不减
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$
3. 右连续

3.4 随机变量的数字特征

Example 3.17. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，求 $E(X)$

* 方法 1*。$f(x)=F'(x)=0.3\varphi(x)+\frac{0.7}{2}\varphi(\frac{x-1}{2})$，其中 $\varphi(x)$ 为标准正态密度函数

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx+\frac{0.7}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-1}{2})dx\\&=0.3+0.7\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+1)\varphi(t)dt=0.7\end{aligned}$$

* 方法 2*。当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，其分布函数为 $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$，即有分布函数为 $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ 的随机变量，其数学期望是 μ，故 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$ 的数学期望为 0.7

Example 3.18. 已知 N 件产品中含有 M 件次品，从中任意一次取出 n 件 $(n\le N)$，设这 n 件产品中的次品件数为 X，试求 X 的数学期望 $E(X)$

将一次取出 n 件理解成一次一件地不放回地取 n 次令

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{第 } i \text{ 次取得次品}\\0 & \text{第 } i \text{ 次取得正品}\end{cases}\quad i=1,2,\dots,n$$

显然 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，第 i 次取得次品的概率，无论每次取后放回或不放回，均为 $\frac{M}{N}$，因此

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\frac{M}{N}$$

Example 3.19. 设随机变量 X, Y 独立同分布，已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $Z = \min(X, Y)$ 的数学期望 $E(Z)$

设 $\xi = \frac{X-\mu}{\sigma}, \eta = \frac{Y-\mu}{\sigma}$

$$Z = \min(X, Y) = \min(\sigma\xi + \mu, \sigma\eta + \mu) = \sigma\min(\xi, \eta) + \mu$$

$$\begin{aligned}
E[\min(\xi, \eta)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \min(x, y)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{x} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{-\infty}^{y} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= 2\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)e^{-x^2} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

因此

$$E(Z) = \sigma E[\min(\xi, \eta)] + \mu = \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

Example 3.20. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2}+Bx}, -\infty < x < +\infty$$

其中 A, B 为常数，已知 $E(X) = D(X)$，试求 $A, B, E(X)$

$f(x) = Ae^{\frac{B^2}{2}}e^{-\frac{(x-B)^2}{2}}$，该密度是正态分布 $N(B, 1)$ 的密度函数

又因为 $E(X) = D(X)$，因此 $B = 1$

Example 3.21. 将 n 只球相互独立地放入到 N 只盒子中，设每只球放入各个盒子是等可能的，求有球的盒子数 X 的数学期望 $E(X)$

设

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 只盒子有球} \\ 0 & \text{第 } i \text{ 只盒子无球} \end{cases}$$

显然 $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$

对第 i 只盒子而言，一只球放入的概率为 $\frac{1}{N}$，没放入的概率为 $(1 - \frac{1}{N})$，因此

$$P\{X_i = 0\} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$
$$P\{X_i = 1\} = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$
$$E(X_i) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

因此

$$E(X) = N\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]$$

Example 3.22. 设随机变量 X, Y 的联合分布在以点 $(0,1),(1,0),(1,1)$ 为顶点的三角形上服从均匀分布，试求随机变量 $U = X + Y$ 的方差

以 $f_U(u)$ 表示 $U = X + Y$ 的概率密度，当 $u < 1$ 或 $u > 2$ 时，显然 $f_U(u) = 0$, 设 $1 \le u \le 2$，当 $0 \le x \le 1$ 时且 $0 \le u - x \le 1$，$f(x, u-x) = 2$，因此

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-x)dx = \int_{u-1}^{1} 2dx = 2(2-u)$$

因此

$$\begin{aligned}
&E(X+Y) = E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_U(u) = 2\int_1^2 u(2-u)du = \frac{4}{3} \\
&E((X+Y)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)du = 2\int_1^2 u^2(2-u)du = \frac{11}{6} \\
&D(U) = \frac{11}{6} - \frac{16}{9} = \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

Example 3.23. 已知随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N\left(1, 0; 9, 16; -\frac{1}{2}\right)$，设 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$

1. 求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$
2. 求 X, Z 的相关系数 ρ_{XZ}
3. 问 X, Z 是否相互独立

$(X, Y) \sim N\left(1, 0; 9, 16; -\frac{1}{2}\right)$，所以 $X \sim N(1, 9), Y \sim N(0, 16), \rho_{XY} = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E(\frac{X}{+}\frac{Y}{3}) = \frac{1}{3} \\
D(Z) &= D(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}) = \frac{D(X)}{9} + \frac{D(Y)}{4} + 2Cov(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2}) \\
&= 1 + 4 + \frac{\rho_{XY}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 1 + 4 - 2 = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(X, Z) &= \frac{1}{3}Cov(X, X) + \frac{1}{2}Cov(X, Y) \\
&= \frac{1}{3}D(X) + \frac{1}{2}\frac{\rho_{XY}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 0
\end{aligned}$$

因为 (X,Y) 是正态分布，故 $(X, \frac{X}{3}+\frac{Y}{2})$ 也是正态分布且 $\rho_{XZ}=0$，因此独立

Example 3.24. 设随机变量 X,Y 的数学期望都是 2，方差分别为 1，4，相关系数 0.5，则根据切比雪夫不等式 $P\{|X-Y|\geq 6\}\leq$ ______

令 $Z=X-Y$, 则 $E(Z)=0, D(Z)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)=3$, 因此

$$P\{|X-Y|\geq 6\}=P\{|E-E(Z)|\geq 6\}\leq \frac{D(Z)}{6^2}=\frac{1}{12}$$

Example 3.25. 某种电子元件的寿命 $E\sim E(\lambda)$，现有 n 个该钟元件相互独立工作，已知其中至少有一个工作元件寿命超过平均寿命的概率为 $3e^{-1}-3e^{-2}+e^{-3}$，求 n

$EX=\frac{1}{\lambda}$，每个元件工作寿命不超过平均寿命的概率为 $P\{X\leq EX\}=P\{X\leq\frac{1}{\lambda}\}=1-e^{-1}$

Example 3.26. 游客乘电梯观光，电梯于每个整点的第 5，25，55 分钟从底层起行，假设一游客在早上 8 点的第 X 分钟到达底层候梯处，且 X 服从 $[0,60]$ 的均匀分布，求该乘客等候时间的数学期望

设游客等候时间为 Y，则

$$Y=\begin{cases} 5-X & 0\leq X\leq 5\\ 25-X & 5<X\leq 25\\ 55-X & 25<X\leq 55\\ 65-X & 55<X\leq 60\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} E(Y)=E[g(X)]&=\int_0^5(5-x)\frac{1}{60}dx+\int_5^{25}(25-x)\frac{1}{60}dx\\ &+\int_{25}^{55}(55-x)\frac{1}{60}dx+\int_{55}^{60}(65-x)\frac{1}{60}dx\\ &=\frac{35}{3}\end{aligned}$$

Example 3.27. 某线路有两个中间站，设两个中间站无故障的时间分别为 X_1,X_2，均服从指数分布，已知它们平均无故障工作时间为 1 和 0.5（千小时），求线路无故障工作时间的期望

$$
\begin{aligned}
& X_1 \sim E(1), X_2 \sim E(2) \\
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \min\{x_1, x_2\} f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_0^{+\infty} dx_1 \int_{x_1}^{+\infty} x_1 e^{-x_1} 2e^{-2x_2} dx_2 + + \int_0^{+\infty} dx_2 \int_{x_2}^{+\infty} x_2 e^{-x_1} 2e^{-2x_2} dx_1 \\
&= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

3.5 大数定律和中心极限定理

Example 3.28. 1. 某系统由 100 个部件组成，运行期间每个部件是否损坏是相对独立的，虽坏的概率均为 0.1，如果有 85 个以上的部件完好时系统才能正常工作，求系统正常工作的概率

2. 如果上述系统由 n 个部件组成，需 80% 以上的部件完好时系统才能正常工作，问 n 至少多大时才能使系统正常工作地概率不小于 0.95

设

$$
X_k = \begin{cases} 1 & \text{第 } k \text{ 个元件完好} \\ 0 & \text{第 } k \text{ 个元件损坏} \end{cases}, k = 1, 2, \dots, 100
$$

X 为系统正常运行时完好的元件数，$X \sim B(100, 0.9)$,$E(X) = 90, D(X) = 9$

根据中心极限定理，系统正常工作的概率为

$$
\begin{aligned}
P\{X > 85\} = 1 - P\{X \leq 85\} &= 1 - P\left\{\frac{X-90}{\sqrt{9}} \leq \frac{85-90}{\sqrt{9}}\right\} \\
&\approx 1 - \Phi(-\frac{5}{3}) = 0.9525
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{X > 0.8n\} &= 1 - P\{X \leq 0.8n\} \\
&= 1 - P\left\{\frac{X - 0.9n}{0.3\sqrt{n}} \leq \frac{0.8n - 0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right\} \\
&\approx 1 - \Phi(-\frac{\sqrt{n}}{3}) = \Phi(\frac{\sqrt{n}}{3})
\end{aligned}
$$

3.6 数理统计的基本概念

Remark. 如果总体 X 的分布为 $F(x)$，则样本 $X_1, \dots, X_n$ 的分布为

$$
F_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)
$$

如果总体 X 有概率密度 $f(x)$，则样本 $X_1, \dots, X_n$ 的概率密度为

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

如果总体 X 有概率分布 $P\{X = a_j\} = p_j$，则样本 $X_1, \dots, X_n$ 的概率分布为

$$P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}$$

Example 3.29. 设总体 $X \sim P(\lambda)$，则来自总体 X 的样本 $X_1, \dots, X_n$ 的样本均值 $\overline{X}$ 的分布律为

当 $X_1, \dots, X_n$ 独立同为 $P(\lambda)$ 分布时 $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X} \sim P(n\lambda)$，因此对于任意 $n > 2$，得 $n\overline{X}$ 的分布律

$$P\{n\overline{X} = k\} = \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}, \quad k = 01, 2, \dots$$

而 $P\{n\overline{X} = k\} = P\{\overline{X} = \frac{k}{n}\}$

Example 3.30. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的简单随机样本，$X = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$，则当 $a =$ ______, $b =$ ______ 时，统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为 ______

$$(X_1 - 2X_2) \sim N(0, 20), \quad (3X_3 - 4X_4) \sim N(0, 100)$$

且 $(X_1 - 2X_2), (3X_3 - 4X_4)$ 相互独立，标准化得

$$\frac{1}{\sqrt{20}}(X_1 - 2X_2) \sim N(0, 1), \quad \frac{1}{19}(3X_3 - 4X_4) \sim N(0, 1)$$

因此当 $a = \frac{1}{20}, b = \frac{1}{100}$ 时，服从 $\chi^2(2)$ 分布

Example 3.31. 设随机变量 $T \sim t(n)$，则 T^2 服从的分布及参数为

$X \sim N(0, 1), X^2 \sim \chi^2(1), T^2 \sim F(1, n)$

Example 3.32. 已知 X_1, X_2, X_3 相互独立且服从 $N(0, \sigma^2)$，证明 $\frac{2}{3}\frac{X_1 + X_2 + X_3}{|X_2 - X_3|}$ 服从 $t(1)$ 分布

记 $Y_1 = X_2 + X_3, Y_2 = X_2 - X_3$，则

$$\begin{aligned} Cov(Y_1, Y_2) &= E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) = E(X_2 + X_3)(X_2 - X_3) \\ &= EX_2^2 - EX_3^2 = \sigma^2 - \sigma^2 = 0 \end{aligned}$$

所以 Y_1, Y_2 独立，均服从 $N(0, 2\sigma^2)$，且与 X_1 独立

$$X_1 + X_2 + X_3 = X_1 + Y_1 \sim N(0, 3\sigma^2)$$

所以 $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{3}}(X_1+X_2+X_3) \sim N(0,1)$, $\left(\dfrac{X_2 - X_3}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$, 且 $X_1+X_2+X_3$ 与 $X_3 - X_3$ 相互独立,

Example 3.33. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，从该总体中抽取简单随机样本 $X_1, \dots, X_{2n}$，其样本均值为 $\overline{X} = \dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$，求统计量 $Y = \sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})$ 的数学期望

* 方法 1*。考虑 $(X_1+X_{n+1}), \dots, (X_n, X_{2n})$, 将其视为取自总体 $N(2\mu, 2\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本方差为 $\frac{1}{n-1}Y$，由于 $E(\frac{1}{n-1}Y) = 2\sigma^2$，因此 $E(Y) = 2(n-1)\sigma^2$

* 方法 2*。记 $\overline{X}' = \dfrac{1}{n}X_i, \overline{X}'' = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n+i}$ 有 $2\overline{X} = \overline{X}' + \overline{X}''$，因此

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E[\sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2] = E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - \overline{X}') + (X_{n+i} - \overline{X}'')\right]\right\} \\
&= E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - \overline{X}')^2 + 2(X_i - \overline{X}')(X_{n+i} - \overline{X}'') + (X_{n+i} - \overline{X}'')^2\right]\right\} \\
&= E[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}')^2] + 0 + E[\sum_{i=1}^{n}(X_{n+i} - \overline{X}'')^2] \\
&= (n-1)\sigma^2 + (n-1)\sigma^2 = 2(n-1)\sigma^2
\end{aligned}$$

Example 3.34. 设随机变量 $X_1, \dots, X_n$ 独立同分布且具有相同的分布密度，证明

$$P\{X_n > \max(X_1, \dots, X_{n-1})\} = \frac{1}{n}$$

设 $f(x), F(x)$ 分别表示 X_i 共同的概率密度和分布函数，则

$$\begin{aligned}
P\{X_n > \max(X_1, \dots, X_{n-1})\} &= P\{X_1 < X_n, \dots, X_{n-1} < X_n\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\cdots\int_{x_i < x_n}\prod_{i=1}^{n-1} f(x_i)dx_i\right] f(x_n)dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\prod_{i=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{x_n} f(x_i)dx_i\right] f(x_n)dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} F^{n-1}(x_n)f(x_n)dx_n = \frac{1}{n}F^n(x_n)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

3.7 参数估计

Example 3.35. 设 $X_1, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，已知 $X \sim P(\lambda)$，证明 $T = (1 - \frac{1}{n})^{n\overline{X}}$ 的数学期望是 $P\{X = 0\}$

$P\{X = 0\} = e^{-\lambda}, n\overline{X} \sim P(n\lambda)$, 故

$$\begin{aligned}
E(T) = E\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\overline{X}}\right] &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^i \frac{(n\lambda)^i e^{-n\lambda}}{i!} \\
&= e^{-n\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{[(n-1)\lambda]^i}{i!} \\
&= e^{-n\lambda}e^{(n-1)\lambda} = e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Example 3.36. 设 $X_1, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i = X_i - \overline{X}, i = 1, 2, \dots, n$ 求

1. Y_i 的方差 DY_i
2. $Cov(Y_1, Y_n)$
3. 当 $C(Y_1 + Y_n)^2$ 的数学期望为 σ^2 时的常数 C
4. $P\{Y_1 + Y_n \leq 0\}$

$$\begin{aligned}
Cov(Y_1, Y_n) &= EY_1Y_2 - EY_1 \cdot EY_n = EY_1Y_2 = E(X_1 - \overline{X})(X_n - \overline{X}) \\
&= E(X_1X_n) - E(X_1\overline{X}) - E(X_n\overline{X}) + E(\overline{X}^2) \\
&= EX_1EX_n - 2E(X_1\overline{X}) + D\overline{X} + (E\overline{X})^2 \\
&= 0 - 2\frac{1}{n}E(X_1^2 + \sum_{j=2}^{n}X_1X_j) + D(\overline{X}) + 0 \\
&= -\frac{2}{n}(\sigma^2 + 0) + \frac{1}{n}\sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 + Y_2 = X_1 + X_n - 2\overline{X} = \\
&= \frac{n-2}{n}X_1 - \frac{2}{n}\sum_{n=2}^{n-1}X_i + \frac{n-2}{n}X_n
\end{aligned}$$

服从正态分布，因此 $Y_1 + Y_2 \sim N(0, \cdot)$，因此 $P\{Y_1 + Y_2 \leq 0\} = 0.5$

Example 3.37. 设 $X_1, \dots, X_n$ 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 和 $T = \overline{X}^2 - \frac{1}{n}S^2$，求

1. 统计量 T 的数学期望
2. 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时的统计量 T 的方差

1. μ^2
2. $\overline{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$，因此 $n\overline{X} \sim \chi^2(1)$ 和 $(n-1)S^2 \sim t(n-1)$，注意到 $\overline{X}$ 与 S 相互独立，且 $D(\chi^2(n)) = 2n$

$$\begin{aligned}
D(T) &= D(\overline{X}^2 - \frac{1}{n}S^2) = D(\overline{X}^2) + \frac{1}{n^2}D(S^2) \\
&= \frac{1}{n^2}D(n\overline{X}^2) + \frac{1}{n^2}\frac{1}{(n-1)^2}D[(n-1)S^2] \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot 2 + \frac{1}{n^2(n-1)^2} \cdot 2(n-1) \\
&= \frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Example 3.38. 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0,1)$ 未知，以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本（样本容量为 n）中等于 i 的个数，试求 a_1, a_2, a_3 使统计量 $T = \sum_{i=1}^{3} a_i N_i$ 的数学期望为 θ，并求 T 的方差

记 $p_1 = 1-\theta, p_2 = \theta - \theta^2, p_3 = \theta^2$，则 $N_i \sim B(n, p_i)$，因此 $E(T) = \sum_{i=1}^{3} a_i n p_i = \theta$，因此 $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{n} = a_3$,$T = \frac{1}{n}(N_2 + N_3)$

显然 $N_2 + N_3$ 不独立，但 $N_1 + N_2 + N_3 = n$，因此 $T = \frac{1}{n}(n - N_1)$

Example 3.39. 设总体 X 的分布函数

$$F(x;\theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数且大于零，$X_1, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本

1. 求 EX 与 EX^2
2. 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$
3. 是否存在实数 a，使得对任何 $\epsilon > 0$ 都有 $\lim_{n\to\infty} P\{\left|\hat{\theta}_n - a\right| \geq \epsilon\} = 0$

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} \end{cases}$$

2. 设 $x_1, \dots, x_n$ 为样本观察值，似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} \frac{2^n x_1 \dots x_n}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} & x_1, \dots, x_n > 0 \\ 0 \end{cases}$$

当 $x_1, \dots, x_n > 0$ 时，$\ln L(\theta) = n\ln 2 + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ 令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 0$，有 $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

3. 根据辛钦大数定理，当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于 $EX_i^2 = \theta$，因此存在实数 $a = \theta$

4 附录

4.1 微积分

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Suppose we have two units $\vec{u} = (\cos x, \sin x), \vec{v} = (\cos y, \sin y)$, then

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos x\cos y + \sin x\sin y = \cos(x-y)$$

Hence by substitute $-y$ for y or $\frac{\pi}{2} - x$ for x, we have

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

let $x=y$, we have

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 - 1$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Hence we have

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$
$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$
$$\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x$$

点到直线的距离

设直线的方程为 $l: Ax+By+C=0, A, B \neq 0$, 点的坐标为 $P(x_0, y_0)$, 点 P 到 l 的距离为 d。在该直线上任取一点 $R(x,y)$，直线法向量为 $\vec{n}=(A,B)$，$\overrightarrow{PR}=(x-x_0, y-y_0)$，所欲求的 d 为 $\overrightarrow{PR}$ 在 $\vec{n}$ 上的投影，于是有

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|} = \frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

对于

$$y''+py'+qy=f(x)$$

1. 求特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根
   (a) 若特征方程有相异实根 λ_1, λ_2，通解为 $y_0(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$
   (b) 若特征方程有重根 λ, 则通解为 $y_0(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$
   (c) 若特征方程有共轭复根 $\alpha \pm i\beta(\beta \neq 0)$，则通解为
   $$y_0(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$
2. 根据非齐次项 $f(x)$ 的形式再求特解 $y^*(x)$

$f(x)$ 的类型	特解 $y^*(x)$ 的形式
$f(x)=P_n(x)$ 其中 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式	1. 0 不是特征方程的根，$y^*(x)=R_n(x)$，其中 $R_n(x)$ 为待定的 x 的 n 次多项式 2. 0 不是特征方程的但根，$y^*(x)=xR_n(x)$ 3. 0 不是特征方程重根，$y^*(x)=x^2R_n(x)$
$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$	1. ( ) 不是特征方程的根，$y^*(x)=e^{\alpha x}R_n(x)$，其中 $R_n(x)$ 为待定的 x 的 n 次多项式 2. α 是特征方程的单根，$y^*(x)=xe^{\alpha x}R_n(x)$ 3. α 是特征方程的重根，$y^*(x)=x^2e^{\alpha x}R_n(x)$
$f(x)=A_0\sin\beta x$ 或 $B_0\cos\beta x$	1. $i\beta$ 不是特征方程的根，$y^*(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$ 2. $i\beta$ 是特征方程的根，$y^*(x)=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ 其中 A,B 为待定系数

对 $y_t=f(t)$，n 阶差分

$$\Delta^k y_t=\Delta^{k-1}y_{t+1}-\Delta^{t-1}y_t=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}y_{t+k-i}$$

形如 $y_{t+1}-py_t=f(t)$ 的方程称为一阶常系数线性差分方程，其中 p 为非零系数，$f(t)$ 为已知函数。$y_{t+1}-py_t=0$ 称为它对应的常系数一阶线性齐次差分方程。

一阶常系数线性差分方程的通解为 $y_t=kp^t+y_t^*$，其中 y_t^* 为特解

若 $f(t)=(A_0t^n+\cdots+A_n)b^t$，则待定特解 y_t^* 具有下列形式

$$y_t^*=t^s(B_0t^n+\cdots+B_n)b^t$$

当 $p\neq b$ 时，$s=0$，当 $p=b$ 时，$s=1$

$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned}
I^2&=\iint e^{-(r^2)}r\,d\theta\,dr && (1)\\
&=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty}re^{-r^2}dr\right)d\theta && (2)\\
&=2\pi\int_0^{\infty}re^{-r^2}dr && (3)
\end{aligned}$$

4.2 线性代数

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

$$(k\,\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\,\mathbf{A}^{-1}, \left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$$

伴随矩阵的性质

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^* = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}(|\mathbf{A}| \neq 0) \\
&(\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^* \\
&(k\,\mathbf{A})^* = k^{n-1}\,\mathbf{A}^* \\
&\left|\mathbf{A}^*\right| = |\mathbf{A}|^{n-1}; (\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\,\mathbf{A}
\end{aligned}$$

$$(k\,\mathbf{A}) = \frac{1}{k}\,\mathbf{A}^{-1}$$

if A and B are square matrices s.t. $AB = I$, where I is the identity matrix, show that $BA = I$. See Proof

给定数域 K 上 $m \times n$ 矩阵 A 和 $n \times s$ 矩阵 B，则

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$$

相似的矩阵有相同的特征多项式

$$r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n & r(\mathbf{A}) = n \\ 1 & r(\mathbf{A}) = n-1 \\ 0 & r(\mathbf{A}) < n-1 \end{cases}$$

Proof

当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha} + 2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1} + \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n + \boldsymbol{\alpha}_1$ 当 $n = 2k$ 时线性相关，当 $n = 2k+1$ 时线性无关

设 $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}, \lambda_i(i = 1, 2, \dots, n)$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，则

1. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}$
2. $\prod_{i=1}^n \lambda_i = |\mathbf{A}|$

Theorem 4.1. 实对称矩阵的特征值全为实数

Theorem 4.2. 实对称矩阵的属于不同特征值对应的特征向量相互正交

Theorem 4.3. 实对称矩阵必相似于对角阵，即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$。且存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$

正交变换化二次型为标准型

1. 将二次型表示成矩阵形式 $f(x_1, \dots, x_)=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$
2. 求 $\mathbf{A}$ 的全部特征值
3. 求 $\mathbf{A}$ 的特征值对应的特征向量
4. 检查不同特征值对应的特征向量是否正交，将重特征值对应的特征向量用施密特正交化方法正交化
5. 将全部特征向量单位化，得 $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_n$
6. 构造正交矩阵 $\mathbf{Q} = [\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_n]$
7. 令 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$，则 $f = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

4.3 概率论

$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X, Y)$

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
2. $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$
3. $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$

切比雪夫不等式

$$P\{|X - E(x)| \geq \epsilon\} \leq \frac{D(x)}{\epsilon^2}$$

$D(\chi^2(n)) = 2n$