Postgraduate Math

Qi'ao Chen

2020 年 8 月 29 日

目录

1 函数与极限

1.1 映射与函数

Proposition 1.1. *Suppose $f(x)$'s domain is $(-l,l)$, then there is odd function $f_o(x)$ and even function $f_e(x)$ on $(-l,l)$ s.t.*

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

证明.

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{x}$$

□

基本初等函数

- 幂函数：$y = x^{\mu}$ ($\mu \in \mathbb{R}$ is a constant)
- 指数函数：$y = a^x$ ($a > 0$ and $a \neq 1$)
- 对数函数：$y = \log_a x$ ($a > 0$ and $a \neq 1$)
- 三角函数：$y = \sin x, \cos x, \tan x$
- 反三角函数：$y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x$

1.2 数列的极限

Definition 1.2. suppose $\{x_n\}$ is a sequence, if there is a constant a for any positive ϵ, there is a positive integer N s..t if $n > N$, then

$$\left|x_n - a\right| < \epsilon$$

always holds, then a is called the limit of $\{x_n\}$, or $\{x_n\}$ converges to a, written as

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

or

$$x_n \to a(n \to \infty)$$

Theorem 1.3 (极限的唯一性)**.** 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一

证明. 假设同时有 $x_n \to a$ 及 $x_n \to b$, 且 $a < b$, 取 $\epsilon = \frac{b-a}{2}$, 因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 故存在正整数 N_1，当 $n > N_1$ 时,

$$|x_n - a| < \frac{b-a}{2} \tag{1.2.1}$$

同理有当 $n > N_2$ 时

$$|x_n - b| < \frac{b-a}{2} \tag{1.2.2}$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，由(1.2.1) 有 $x_n < \frac{a+b}{2}$，由 (1.2.2) 有 $x_n > \frac{a+b}{2}$，矛盾 □

Theorem 1.4 (收敛数列的有界性)**.** 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界

证明. 因为数列 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，对于 $\epsilon = 1$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时有

$$|x_n - a| < 1$$

于是当 $n > N$ 时

$$|x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

取 $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, 1 + |a|\}$，那么数列 $\{x_n\}$ 中的一切 x_n 都满足不等式

$$|x_n| \le M$$

□

Theorem 1.5 (收敛数列的保号性)**.** 如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 且 $a > 0$（或 $a < 0$），那么存在正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）

证明. Suppose $a > 0$, let $\epsilon = \frac{a}{2} > 0$, then there is N for $n > N$ s.t.

$$|x_n - a| < \frac{a}{2}$$

Hence

$$x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$$

□

Corollary 1.6. 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geq 0$（或 $x_n \leq 0$），且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，那么 $a \geq 0$（或 $a \leq 0$）

在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的 **子数列**

Theorem 1.7 (收敛数列与其子数列的关系)**.** 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a

证明. 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列

由于 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，故对任意 $\epsilon > 0$，存在正整数 N 当 $n > N$ 时，$\left|x_n - a\right| < \epsilon$

取 $K = N$，则当 $k > K$ 时，$n_k > n_K = n_N \geq N$，于是 $\left|x_{n_k} - a\right| < \epsilon$，因此 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ □

1.3 函数的极限

1.3.1 函数极限的定义

Definition 1.8. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A 对于任一给定的正数 ϵ 总存在正数 δ 使得当 x 满足不等式 $0 < \left|x - x_0\right| < \delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$\left|f(x) - A\right| < \epsilon$$

那么常数 A 就叫做 **函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{or} \quad f(x) \to A (\text{when } x \to x_0)$$

Proposition 1.9. $\lim_{x\to 1}(2x - 1) = 1$

证明. Since

$$\left|f(x) - A\right| = |2x - 2| = 2|x - 1|$$

for any $\epsilon > 0$, let $\delta = \epsilon/2$, then if

$$0 < |x - 1| < \delta$$

we have

$$\left|f(x)-1\right| = 2|x-1| < \epsilon$$

hence

$$\lim_{x\to 1}(2x-1) = 1$$

□

将 $0 < \left|x-x_0\right| < \delta$ 改为 $x_0-\delta < x < x_0$, 那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的 **左极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad \text{or} \quad f(x_0^-) = A$$

函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在的充分必要条件时左极限及右极限各自存在且相等

Definition 1.10. 设函数 $f(x)$ 当$|x|$ 大于某一正数时有定义，如果存在常数 A 对于任意给定的正数 ϵ 总存在正数 X 使得当 x 满足不等式$|x| > X$ 时，对应的函数值满足

$$\left|f(x)-A\right| < \epsilon$$

那么常数 A 就叫做 **函数** $f(x)$ **当** $x \to \infty$ **时的极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \text{or} \quad f(x) \to A(\text{when } x \to \infty)$$

1.3.2 函数极限的性质

Theorem 1.11 (函数极限的唯一性)**.** *如果* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *存在，那么这极限唯一*

证明. If $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ and $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, let $\epsilon = \frac{b-a}{2}$, there is δ_1 and δ_2 s.t. for $0 < \left|x-x_0\right| < \delta_1, \left|f(x)-a\right| < \frac{b-a}{2}$, and balabala... □

Theorem 1.12 (函数极限的局部有界性)**.** *如果* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$*，那么存在常数* $M > 0$ *和* $\delta > 0$ *使得当* $0 < \left|x-x_0\right| < \delta$ *时，有*$\left|f(x)\right| \le M$

证明. 取 $\epsilon = 1$, then there is δ for $0 < |x - x_0| < \delta$, we have

$$|f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |f(x) - A| + |A| < |A| + 1$$

记 $M = |A| + 1$ □

Theorem 1.13 (函数极限的局部保号性). 如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），那么存在常数 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）

1.4 无穷大与无穷小

Definition 1.14. 如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的极限为 0，那么称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小

Theorem 1.15. 在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$，其中 α 是无穷小

Definition 1.16. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义（或 $absx$ 大于某一正数时有定义），如果对于任一给定的正数 M，总存在正数 δ，如果 $0 < |x - x_0| < \delta$ 则 $|f(x)| > M$ 那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Theorem 1.17. 在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之亦然

1.5 极限运算法则

Theorem 1.18. 两个无穷小的和是无穷小

Theorem 1.19. 有界函数与无穷小的乘积是无穷小

Corollary 1.20. 常数与无穷小的乘积时无穷小

Corollary 1.21. 有限个无穷小的乘积是无穷小

Theorem 1.22. 如果 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，那么

1. $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$
2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$
3. 如果 $B \neq 0$，则
$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$$

Corollary 1.23. *If* $\lim f(x)$ *exists, and c is a constant, then*

$$\lim[cf(x)] = c \lim f(x)$$

Corollary 1.24. *if* $\lim f(x)$ *exists, and n is a positive integer, then*

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

Theorem 1.25. 设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，如果

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = B$$

那么

1. $lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$
2. $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$
3. 当 $y_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$ 且 $B \neq 0$ 时，$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$

Theorem 1.26. 如果 $\varphi(x) \geq \psi(x)$，而 $\lim \varphi(x) = A, \lim \psi(x) = B$，那么 $A \geq B$

Theorem 1.27 (复合函数的极限运算法则)**.** 设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$，$\lim_{u\to u_0} f(u) = A$，且存在 $\delta_0 > 0$，当 $x \in U^{\mathrm{O}}(x_0, \delta_0)$ 时，有 $g(x) \neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim_{u\to u_0} f(u) = A$$

1.6 极限存在准则两个重要极限

Proposition 1.28. 如果数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足

1. 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，当 $n > n_0$ 时，有

$$y_n \le x_n \le z_n$$

2. $\lim_{n\to\infty} y_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = a$
   那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

Proposition 1.29. *if*

1. *when* $x \in U^{\circ}(x_0, r)$ $(or |x| > M)$

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

2. $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} g(x) = A, \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} h(x) = A$
   那么 $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} x_n = A$

Proposition 1.30. 单调有界数列必有极限

Corollary 1.31. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$

证明. let $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$

$$\begin{aligned}
x_n &= (1+\frac{1}{n})^n \\
&= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \\
&\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \\
&\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})
\end{aligned}$$

□