

考研题目本

喵喵喵

2020 年 10 月 19 日

目录

1	微积分	2
1.1	一元函数微分	2
1.2	一元函数积分	12
1.3	多元函数微积分学	19
1.4	无穷级数	28
1.5	常微分方程与差分方程	33
2	线性代数	35
2.1	行列式	35
2.2	矩阵	38
2.3	线性方程组	43
2.4	二次型	48
3	概率论与数理统计	50
3.1	随机事件与概率	50
3.2	随机变量与其概率分布	52
3.3	多维随机变量及其分布	54

1 微积分

1.1 一元函数微分

Example 1.1. 设 $f'(x)$ 连续, $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(x^2 - t) dt}{x^3 \int_0^1 f(xt) dt}$

令 $x^2 - t = u, xt = u$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(x^2 - t) dt}{x^3 \int_0^1 f(xt) dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\int_{x^2}^0 f(u) du}{x^3 \int_0^x f(u) \frac{du}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(u) du}{x^2 \int_0^x f(u) du} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xf(x^2)}{2x \int_0^x f(u) du + x^2 f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x^2)}{2 \int_0^x f(u) du + xf(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xf'(x^2)}{3f(x) + xf'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f'(x^2)}{3 \frac{f(x) - f(0)}{x} + f'(x)} = 1 \end{aligned}$$

Example 1.2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}$

利用泰勒展开, $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{8} + o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{12}$$

Example 1.3. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n})$

因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$

Example 1.4. suppose $y_n = \left[\frac{(2n)!}{n!n^n} \right]^{\frac{1}{n+1}}$. Compute $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

$$\begin{aligned} \ln y_n &= \frac{1}{n+1} \ln \frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{1}{n+1} \ln \frac{(2n)(2n-1) \dots (n+1)}{n^n} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n}) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n}) \right) \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right) \\ &= 1 \cdot \int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\ &= \ln 2 - 1 + \ln 2 = \ln \frac{4}{e}\end{aligned}$$

Example 1.5. 已知 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{-x^4} - \cos(\sqrt{2}x^2)$ 与 ax^n 是等价无穷小, 试求 a, n

$$\begin{aligned}e^{-x^4} &= 1 - x^4 + \frac{x^8}{2} + o(x^8) \\ \cos(\sqrt{2}x^2) &= 1 - x^4 + \frac{x^8}{6} + o(x^8)\end{aligned}$$

Hence $a = \frac{1}{3}, n = 8$

Example 1.6. 设 $f(x) = \frac{\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)}{\sin^2 x}$, 且点 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 求 α, β

由极限存在可知, $\alpha = 1$, 泰勒展开

$$\begin{aligned}& \frac{\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}(\sin x + \sin^2 x) - \frac{1}{8}(\sin x + \sin^2 x)^2 - (1 + \beta \sin x) + o(\sin^2 x)}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{2} - \beta) \sin x + \frac{3}{8} \sin^2 x}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

故 $\beta = \frac{1}{2}$

Example 1.7. let $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^n - 3x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \sin \frac{1}{x}$

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin \frac{1}{x} & x < -1 \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{x} & x = -1 \\ -3 \sin \frac{1}{x} & -1 < x < 0 \\ -3 \sin \frac{1}{x} & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{x} & x = 1 \\ 2 \sin \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$

$x = 0$ 是第二类间断点, $x = \pm 1$ 是第一类间断点

Example 1.8. 设 $f(1) = 0, f'(1) = a$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})} - \sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln \cos x}$

由 $f(1) = 0, f'(1) = a$ 可知, $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t)}{t} =$
 a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})} - \sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln \cos x} &= \frac{2f(e^{x^2}) - f(1+\sin^2 x)}{-\frac{1}{2}x^2 \left[\sqrt{1+2f(e^{x^2})} + \sqrt{1+f(1+\sin^2 x)} \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\sin^2 x) - f(e^{x^2})}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(1+\sin^2 x) - f(1)}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{f(e^{x^2}) - f(1)}{e^{x^2} - 1} \cdot \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right] \\ &= -a \end{aligned}$$

Example 1.9. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f''(0) \neq$

$0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(x) dt}{x^\alpha - \sin x} = \beta (\beta \neq 0),$ 求 α, β

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f(0) = 0, f'(0) = 0$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x f(x) dt = 0$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha - \sin x = 0$, 因此 $\alpha > 0$

1. 若 $0 < \alpha < 1$

2. 若 $\alpha > 1$

3. 若 $\alpha = 1$

$\beta = f''(0)$

Example 1.10. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且 $f'(0) = 1, f(x+y) =$
 $f(x)e^y + f(y)e^x$, 求 $f(x)$

$f(0) = 0$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x)e^y + f(y)e^x - f(x)}{y} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \left[f(x) \frac{e^y - 1}{y} + e^x \frac{f(y) - f(0)}{y} \right] \\
&= f(x) + e^x f'(0) = f(x) + e^x
\end{aligned}$$

即 $f'(x) - f(x) = e^x$, 因此 $f(x) = e^x(x+C)$, 又 $f(0) = 0, C = 0, f(x) = xe^x$

Example 1.11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{n}}{x} \left(\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \right)$$

而 $1 \leq \frac{1}{x} < \frac{n+1}{n}$, 由夹逼准则得 $f'_+(0) = 1$, 因此 $f'(0) = 1$

Example 1.12. 设 $f(x)$ 是可导的偶函数, 它在 $x = 0$ 的某邻域内满足

$$f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin x^2) = 2x^2 + o(x^2)$$

求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程

由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin x^2) - 2x^2}{x^2} = 0$$

得

$$f(0) - 3f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$$

变形

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2} - 1} \cdot \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - \frac{3f(1 + \sin x^2)}{\sin x^2} \cdot \frac{\sin x^2}{x^2} - 2 \right) = 0$$

有 $f'(1) - 3f'(1) - 2 = 0 \Rightarrow f'(1) = -1$

Example 1.13. 若 $y = f(x)$ 存在单值反函数, 且 $y' \neq 0$, 求 $\frac{d^2x}{dy^2}$

根据反函数的求导法则 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$, 于是

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dy} \right) \frac{dx}{dy}$$

因为 $\frac{1}{y'}$ 是以 x 为变量的函数

Example 1.14. 设函数 $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$, 且 $f'''(0) = 1$, 求 a 泰勒展开

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x - \frac{x}{1+ax^2} = \left(x - \frac{x^3}{3} + \dots \right) - x(1 - ax^2 + \dots) \\ &= (a - \frac{1}{3})x^3 + \dots \end{aligned}$$

因此 $f'''(0)/3! = a - 1/3, a = 1/2$

Example 1.15. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) > 0$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)dx$$

令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且

$$F(a)F(b) = - \left[\int_a^b f(t)dt \right]^2 < 0$$

故由连续函数的零点定理知: 在 (a, b) 内存在 ξ 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx$

Example 1.16. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$g(\xi) \int_a^\xi f(x)dx = f(\xi) \int_\xi^b g(x)dx$$

令 $F'(x) = g(x) \int_a^x f(x)dx - f(x) \int_x^b g(x)dx = (\int_a^x f(t)dt \int_b^x g(t)dt)'$, 可取辅助函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt \int_x^b g(t)dt$. 则 $F(a) = F(b) = 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$

Example 1.17. 设实数 a_1, \dots, a_n 满足关系式 $a_1 - \frac{a_2}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_n}{2n-1} = 0$, 证明方程 $a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \dots + a_n \cos(2n-1)x = 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一实根

令 $f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \dots + a_n \cos(2n-1)x$, 但 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 内不满足零点定理, 因此考虑 $f'(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \dots + a_n \cos(2n-1)x$, 则 $f(x) = a_1 \cos x + \frac{a_2}{3} \sin 3x + \dots + \frac{a_n}{2n-1} \sin(2n-1)x$, 则 $f(0) = f(\pi/2) = 0$

Example 1.18. 试确定方程 $e^x = ax^2 (a > 0)$ 的根的个数, 并指出每个根所在的范围

若直接令 $f(x) = e^x - ax^2$, $f'(x)$ 的符号不易判断。又 $x = 0$ 不是方程的根, 于是方程可化为等价方程 $\frac{e^x}{x^2} = a$

令 $f(x) = \frac{e^x}{x^2} - a$, 由 $f'(x) = \frac{x-2}{x^3}e^x = 0$ 得 $x = 2$

Example 1.19. 已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = k$ 在区间 $(0, 1)$ 内有实根, 确定常数 k 的取值范围

令 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} - k$, $x \in (0, 1]$, 则

$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

因为 $x^2(1+x)\ln^2(1+x) > 0$, 因此只讨论 $g(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$.

$$g'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x$$

$$g''(x) = \frac{2\ln(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x} - 2 = \frac{2\ln(1+x) - 2x}{1+x}$$

因此当 $x \in (0, 1)$ 时, $g''(x) < 0$, 而 $g'(0) = 0$, 因此 $g(x)$ 递减

Example 1.20. 设 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3, f(3) = 1$, 证明存在 $\xi \in (0, 3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$

因为 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 所以在 $[0, 2]$ 内必有最大值 M 和最小值 m , 于是 $m \leq f(0) \leq M, m \leq f(1) \leq M, m \leq f(2) \leq M$, 故

$$m \leq \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \leq M$$

由介值定理, 至少存在一点 $\eta \in [0, 2]$ 使

$$f(\eta) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} = 1$$

因此 $f(\eta) = f(3) = 1$, 由罗尔定理知, 必存在 $\xi \in (\eta, 3) \subset (0, 3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$

Example 1.21. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内具有二阶导数且 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\cos \pi x} = 0, 2 \int_{1/2}^1 f(x)dx = f(2)$, 证明存在 $\xi \in (0, 2)$ 使得 $f''(\xi) = 0$

$f(0.5) = 0$, 因此

$$f'(0.5) = \lim_{x \rightarrow 0.5} \frac{f(x) - f(0.5)}{x - 0.5} = \lim_{x \rightarrow 0.5} \frac{f(x)}{\cos \pi x} \frac{\cos \pi x}{x - 0.5} = \lim_{x \rightarrow 0.5} \frac{f(x)}{\cos \pi x} \lim_{x \rightarrow 0.5} \frac{\cos \pi x}{x - 0.5} = 0$$

再由 $2 \int_{0.5}^2 f(x) dx = f(2)$, 用积分中值定理 $\exists \xi_1 \in [0.5, 1]$ 使得 $2f(\xi_1)0.5 = f(2)$, 即 $f(\xi) = f(2)$, 在 $[\xi_1, 2]$ 上应用罗尔定理, $\exists \xi_2 \in (\xi_1, 2)$ 使 $f'(\xi_2) = 0$
再在 $[0.5, \xi_2]$ 上对 $f'(x)$ 应用罗尔定理, 知 $\exists \xi \in (0.5, \xi_2)$, 使 $f''(\xi) = 0$

Example 1.22. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, 且

$$f(1) = k \int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x) dx, k > 1$$

证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ 使 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$

1. ξ 换为 x , $f'(x) = (1 - x^{-1})f(x)$
2. 变形 $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - x^{-1}$
3. 两边积分 $\ln f(x) = x - \ln x + \ln C$
4. 分离常数 $\ln \frac{x f(x)}{e^x} = \ln C$, 即 $x e^{-x} f(x) = C$, 可令辅助函数 $F(x) = x e^{-x} f(x)$

由积分中值定理, 存在 $\xi_1 \in [0, \frac{1}{k}]$ 使得 $f(1) = \xi_1 e^{1-\xi_1} f(\xi_1)$, 即 $1 \times e^{-1} f(1) = \xi_1 e^{-\xi_1} f(\xi_1)$ 。因此 $F(x)$ 满足在 $[\xi_1, 1]$ 内的罗尔定理, 因此存在 ξ 使得 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$

Example 1.23. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = \lambda$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) + f(\xi) = \lambda$

1. ξ 换为 x , $f'(x) + f(x) = \lambda$ 这是关于 $f(x)$ 的一阶线性微分方程
2. 解微分方程 $f(x) = e^{-x}(\lambda e^x + C)$
3. 分离常数 $[f(x) - \lambda]e^x = C$, 可令辅助函数 $F(x) = [f(x) - \lambda]e^x$
 $F(a) = F(b) = 0$, 因此存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $F'(\xi) = 0$

Example 1.24. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(b) - f(a) = \xi \ln \frac{b}{a} f'(\xi)$

可变形为

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \xi f'(\xi)$$

令 $F(x) = \ln x$, 由柯西中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \xi f'(\xi)$$

Example 1.25. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$, 证明: 在 $(-1, 1)$ 内存在一点 ξ 使得 $f'''(\xi) = 3$

泰勒展开 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3, \xi \in (0, x)$, 则

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1), -1 < \xi_1 < 0$$

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2), 0 < \xi_2 < 1$$

两式相减得

$$\frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = 3$$

由介值定理可证存在 $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ 有 $f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = 3$

Example 1.26. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $0 < a < b$, 求证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$

根据拉格朗日中值定理至少存在一个 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

只要再证存在 $\eta \in (a, b)$ 使得 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\eta)}{2\eta}(a + b)$ 即

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

只要用柯西中值定理

Example 1.27. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明

1. 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$
2. 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0, 1)$ 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$

令 $F(x) = f(x) - 1 + x$, 则 $F(0) = -1, F(1) = 1$

对 $[0, \xi], [\xi, 1]$ 分别用拉格朗日中值定理, 则

$$f'(\eta)f'(\zeta) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{1 - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{1 - \xi}{\xi} \frac{\xi}{1 - \xi} = 1$$

Example 1.28. 求证 $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \sin x \tan x - x^2$$

$$f'(x) = \sin x + \tan x \sec x - 2x$$

$$f''(x) = \cos x + \sec^3 x + \tan^2 x \sec x - 2$$

$$f'''(x) = -\sin x + 5 \sec^3 x \tan x + \tan^3 x \sec x = \sin x(5 \sec^4 x - 1) + \tan^3 x \sec x > 0$$

Example 1.29. 设 $a > 0, b > 0$, 证明不等式

$$a \ln a + b \ln b \geq (a+b)[\ln(a+b) - \ln 2]$$

令 $f(x) = x \ln x$, 则 $f'(x) = \ln x + 1, f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, 即曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 是凹的, 故对任意 $a > 0, b > 0$, 有

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

代入得

$$\frac{a \ln a + b \ln b}{2} \geq \frac{a+b}{2} \ln \frac{a+b}{2}$$

Example 1.30. 证明: 对任意正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

由拉格朗日定理, 存在 $\xi \in (n, n+1)$

$$\begin{aligned} \ln(1 + \frac{1}{n}) &= \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi} \\ \frac{1}{n+1} &< \frac{1}{\xi} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Example 1.31. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值等于 -1 , 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$ 使 $f''(\xi) \geq 8$

存在 $a \in (0, 1), f'(a) = 0, f(a) = -1$, 将 $f(x)$ 在 $x = a$ 泰勒展开

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2 = -1 + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2 (\xi \in (a, x) \text{ or } (x, a))$$

令 $x = 0, x = 1$ 得

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &= -1 + \frac{f''(\xi_1)}{2}a^2, 0 < \xi_1 < a \\ f(1) = 0 &= -1 + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-a)^2, a < \xi_2 < 1 \end{aligned}$$

若 $0 < a < \frac{1}{2}$, 则 $f''(\xi_1) > 8$

若 $\frac{1}{2} < a < 1$, 则 $f''(\xi_2) > 8$

Example 1.32. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 则当 $f''(x) > 0$ 时

$$f(x) = f(0.5) + f'(0.5)(x-0.5) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-0.5)^2$$

积分

$$\begin{aligned} 0 &= f(0.5) + f'(0.5) \int_0^1 (x-0.5)dx + \frac{f''(\xi)}{2} \int_0^1 (x-0.5)^2 dx \\ &= f(0.5) + \frac{1}{2} f''(\xi) \int_0^1 (x-0.5)^2 dx \end{aligned}$$

因此 $f(0.5) < 0$

Example 1.33. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 且 $f(0)=0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\cos x) - f(0)}{1-\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{\tan^2 x} \\ &= f'(0) \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Example 1.34. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) \cdot f(b) > 0$, $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0$, 证明: 对任意实数 k , 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $(f'(\xi) - kf(\xi)) = 0$

Example 1.35. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 1$, 证明: 存在两点 $\xi, \eta \in (a, b)$ 使

$$(e^{2a} + e^{a+b} + e^{2b})[f(\xi) + f'(\xi)] = 3e^{3\eta-\xi}$$

$$\begin{aligned} (e^{2a} + e^{a+b} + e^{2b})[f(\xi) + f'(\xi)] &= 3e^{3\eta-\xi} \\ \Leftrightarrow (e^{2a} + e^{a+b} + e^{2b})[f(\xi) + f'(\xi)]e^\xi &= 3e^{3\eta} \\ \Leftrightarrow (e^{2a} + e^{a+b} + e^{2b})[e^x f(x)]'|_{x=\xi} &= e^{3x}|_{x=\eta} \end{aligned}$$

令 $g(x) = e^{3x}$, 则由拉格朗日中值定理

$$g'(\eta) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

即 $3e^{3\eta} = \frac{e^{3b} - e^{3a}}{b - a}$. 令 $f(x) = e^x f(x)$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b - a} = e^\xi [f(\xi) + f'(\xi)] = \frac{e^b - e^a}{b - a}$$

两边同乘 $e^{2a} + e^{a+b} + e^{2b}$ 得

$$\frac{e^{3b} - e^{3a}}{b - a} = (e^{2a} + e^{a+b} + e^{2b})e^\xi [f(\xi) + f'(\xi)]$$

1.2 一元函数积分

Example 1.36. 求不定积分 $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx &= \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1} dx = \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} \int \frac{d\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\right] - 1} \\ &= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1} \right| \end{aligned}$$

Example 1.37. 求 $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin x}}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin x}} &= \int \frac{\cos x dx}{(1 - \sin^2 x) \sqrt{\sin x}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{\sin x})}{1 - (\sqrt{\sin x})^4} = 2 \int \frac{dt}{1 - t^4} \\ &= \int \left(\frac{1}{1 + t^2} + \frac{1}{1 - t^2} \right) dt \end{aligned}$$

Example 1.38. 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = \int \frac{2d(\sqrt{x})}{\sqrt{4-x}} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C$$

Example 1.39. 求 $\int \frac{1}{1+e^x} dx$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{e^x}{e^x(1+e^x)} dx = \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x+1} \right) de^x$$

Example 1.40. 求 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}} dx$

$$\text{令 } \sqrt{e^x-1} = t, x = \ln(1+t^2)$$

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}} = 2 \int \ln(1+t^2) dt$$

Example 1.41. 求 $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$

$$\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^4(1+x^2)} dx$$

Example 1.42. 求 $\int \frac{3x^2 - x + 4}{x^3 - x^2 + 2x - 2} dx$
 $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x^2 + 2)(x - 1)$, 令

$$\frac{3x^2 - x + 4}{x^3 - x^2 + 2x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2}$$

Example 1.43. 求 $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C$$

Example 1.44. 求 $I_n = \int \tan^n x dx$ 的递推公式

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2} \end{aligned}$$

Example 1.45. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

对于 $0 \leq x \leq 1$, 有 $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x$, 则

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

因此由夹逼定理, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$

Example 1.46. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(\frac{1}{n})^2 + 1} + \cdots + \frac{1}{(\frac{n}{n})^2 + 1} \right] \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Example 1.47. 证明下列不等式

$$\frac{\sqrt{\pi}}{80} \pi^2 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sqrt{\tan x} dx < \frac{\pi^2}{32}$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $0 < x < \tan x < 1$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{3/2} dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sqrt{\tan x} dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx$$

Example 1.48. 求 $\int_2^3 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2} dx$

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2} dx &= \int_2^3 \frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{(x-1)^2} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t} 2\cos t dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2 t - 1) dt = -\cot t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Example 1.49. 求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx$

令 $e^{-x} = \sin t$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \frac{\cos t}{\sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} dt - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\ &= -\ln(\csc t + \cot t) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Example 1.50. 求 $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$

令 $\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} = t$, 则 $\sin^2 u = \frac{x}{1+x}$, $x \cos^2 u = \sin^2 u$, $x = \tan^2 u$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} u d(\tan^2 u) = (u \cdot \tan^2 u) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 \cdot \tan^2 u du \\ &= \pi - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 u - 1) du = \pi - \tan u \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\end{aligned}$$

Example 1.51. 求 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx$

令 $x = -t$, 则 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} dx$ 。因此

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} + \frac{\cos^2 x}{1+e^x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+e^{-x}+1+e^x}{(1+e^{-x})(1+e^x)} \right) \cos^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Remark. 一般地, 有如下结论: 作变换 $x = a + b - t$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a + b - t)dt$$

从而 $I = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x) + f(a + b - x)]dx$

Example 1.52. 求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$

令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1}{2} \sin 2x) dx = \frac{\pi - 1}{4} \end{aligned}$$

Remark. 要求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x) dx$, 可作变换 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则 $I =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x, \sin x) dx$$

Example 1.53. 求 $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

令 $x = \pi - t$, 则

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - I$$

Remark. 一般地, $I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - I$

Example 1.54. 求 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, a, b > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, a, b > 0 &= \int_0^1 [f_a^b x^t dt] dx = \int_a^b \left[\int_0^1 x^t dx \right] dt \\ &= \ln \frac{b+1}{a+1} \end{aligned}$$

Example 1.55. 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 求 $\int_0^{\pi} f(x) dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x)dx &= \int_0^\pi f(x)d(x-\pi) \\
&= (x-\pi)f(x)|_0^\pi - \int_0^\pi (x-\pi)f'(x)dx \\
&= -\int_0^\pi (x-\pi)\frac{\sin x}{\pi-x}dx = 2
\end{aligned}$$

Example 1.56. 证明 $\int_1^a f(x^2 + \frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x} = \int_1^a f(x + \frac{a^2}{x})\frac{dx}{x}$

$$\begin{aligned}
\int_1^a f(x^2 + \frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x} &= \frac{1}{2} \int_1^{a^2} f(t + \frac{a^2}{t})\frac{dt}{t} \\
&= \frac{1}{2} \int_1^a f(t + \frac{a^2}{t})\frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_a^{a^2} f(t + \frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

令 $t = \frac{a^2}{u}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_a^{a^2} f(t + \frac{a^2}{t})\frac{dt}{t} &= \int_a^1 f(\frac{a^2}{u} + u)\frac{u}{a^2} \left(-\frac{a^2}{u^2}\right) du \\
&= \int_1^a f(u + \frac{a^2}{u})\frac{1}{u} du
\end{aligned}$$

Example 1.57. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶连续导数, 又 $f(a) = f'(a) = 0$, 证明:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)(x-b)^2 dx$$

利用分部积分

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b f(x)d(x-b) = -\int_a^b f'(x)(x-b)d(x-b) \\
&= -\frac{1}{2} \int_a^b f'(x)d(x-b)^2 = \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)(x-b)^2 dx
\end{aligned}$$

Example 1.58. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶连续导数且 $f(a) = f(b) = 0, M = \max_{[a,b]} |f''(x)|$, 证明 $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{12} M$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b f(x)d(x-a) = -\int_a^b f'(x)(x-a)d(x-b) \\
&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx + \int_a^b f'(x)(x-b)dx \\
&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx + \int_a^b (x-b)df(x) \\
&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx - \int_a^b f(x)dx
\end{aligned}$$

则

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$$

因此

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)dx \right| &\leq \frac{1}{2}M \int_a^b (x-a)(b-a)dx \\
&= \frac{1}{4}M \int_a^b (x-a)^2dx = \frac{(b-a)^3}{12}M
\end{aligned}$$

Example 1.59. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且严格单调增, 证明:

$$(a+b) \int_a^b f(x)dx < 2 \int_a^b xf(x)dx$$

$$\text{令 } F(x) = (a+x) \int_a^x f(t)dt - 2 \int_a^x tf(t)dt, (a < x \leq b)$$

Example 1.60. 求 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}}dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}}dx \\
&= \arcsin(2x-1) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \ln \left[(x-\frac{1}{2}) + \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} \right] \Big|_1^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Example 1.61. 求 $\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

$$\begin{aligned}\int e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx &= \int e^x (1 + \sin x) \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int e^x d \tan \frac{x}{2} + \int e^x \tan \frac{x}{2} dx \\ &= e^x \tan \frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

Example 1.62. 设 $f(x)$ 为非负连续函数, 当 $x \geq 0$ 时, 有 $\int_0^x f(x)f(x-t)dt = e^{2x} - 1$, 求 $f(x)$

$f(x) \int_0^x f(u)du = e^{2x-1}$, 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则有 $F'(x)F(x) = e^{2x-1}$, $F(0) = 0$, 两边积分, 得

$$\frac{1}{2}F^2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x + C$$

由 $F(0) = 0$ 得, $C = -\frac{1}{2}$. 因此 $F^2(x) = e^{2x} - x - 1$, 故

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{\sqrt{e^{2x} - 2x - 1}}$$

Example 1.63. 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt (x > 0)$, $g(x)$ 连续, 且 $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \int_0^1 g(xt)dt$, 求 $g(x)$

$$\int_0^1 g(xt)dt = \frac{1}{x} \int_0^x g(t)dt, \text{ 又}$$

$$f(\frac{1}{x}) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t} dt = \int_0^x \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}} (-\frac{1}{u^2}) du = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)} du$$

因此 $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$, 于是 $\int_0^x g(t)dt = x \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$,

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt + \ln x = \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x$$

Example 1.64. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且单调增加, 证明: 对任意 $a, b > 0$, 恒有

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{1}{2} \left[b \int_0^b f(x)dx - a \int_0^a f(x)dx \right]$$

令 $F(x) = x \int_0^x f(t)dt$, 则 $F'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x)$

$$\begin{aligned}F(b) - F(a) &= \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b \left[\int_0^x f(t)dt + xf(x) \right] dx \\ &\leq \int_a^b [xf(x) + xf(x)]dx = 2 \int_a^b xf(x)dx\end{aligned}$$

1.3 多元函数微积分学

Example 1.65. 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$x^2 y^2 \leq (\frac{x^2 + y^2}{2})^2$, 因而

$$0 \leq \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{4} \sqrt{x^2 + y^2}$$

Example 1.66. 讨论极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ 的存在性

当点 $P(x, y)$ 沿曲线 $x = ky^2$ 趋于点 $(0, 0)$ 时

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{ky^4}{k^2 y^4 + y^4} = \frac{k}{k^2 + 1}$$

不是一个确定的常数, 因此极限不存在

Example 1.67. 讨论函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 处的连续性

令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

$$0 \leq |f(x, y)| = \left| \frac{r^2 \sin 4\theta}{4} \right| \leq \frac{r^2}{4}$$

因此连续

Example 1.68. 设 $z = (s \in y^3 + x^3)(x + y^4)^{\frac{y}{x} + e^{y^3 x^2}}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0)} = \frac{\partial z(x, 0)}{\partial x} \Big|_{x=1} = (x^4)' \Big|_{x=1} = 4$$

Example 1.69. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 且 $f(0, 0) = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} = 1$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处

由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} = 1$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) = 0$, 于是 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$, 又

$f(0, 0) = 0$, 所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处极限存在且连续, 又由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} = 1$, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0)}{x^2} = 1, \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y)}{y^2} = 1$$

所以

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0)}{x^2} x = 0$$

同理 $f'_y(0,0) = 0$, 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在

因为

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - [f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{aligned}$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

Remark. 讨论二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的可微性, 可从如下几个方面考虑

1. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的偏导数至少有一个不存在, 则函数不可微
2. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 不连续, 则函数不可微
3. 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续, 两个偏导数存在, 则考虑

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - [f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\rho}, \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

若极限为 0, 则函数在 (x_0, y_0) 可微, 否则不可微

Example 1.70. 设 $z = (\frac{y}{x})^{\frac{x}{y}}$, 求 $dz|_{(1,2)}$

取对数, 有

$$\ln z = \frac{x}{y} \ln \frac{y}{x} \Rightarrow y \ln z = x(\ln y - \ln x)$$

Example 1.71. 设 $u = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$, $u = f(s, t)$ 有二阶连续偏导数, 求 $du, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$

$$\begin{aligned} du &= f'_1 d(\frac{x}{y}) + f'_2 d(\frac{y}{z}) = f'_1 \frac{ydx - xdy}{y^2} + f'_2 \frac{zdy - ydz}{z^2} \\ &= \frac{1}{y} f'_1 dx + (-\frac{x}{y^2} f'_1 + \frac{1}{z} f'_2) dy - \frac{y}{z^2} f'_2 dz \end{aligned}$$

Example 1.72. 已知 $(axy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2)dy$ 为某一函数 $f(x,y)$ 的全微分, 求 a, b

由题意知, $\frac{\partial f}{\partial x} = axy^3 - y^2 \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + by \sin x + 3x^2 y^2$, 从而有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3axy^2 - 2y \cos x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = by \cos x + 6xy^2$, 显然 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 均连续, 所以 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, 即 $by \cos x + 6xy^2 = 3axy^2 - 2y \cos x$, 因此 $a = 2, b = -2$

Example 1.73. 设 $z = f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$, $f(x, 1) = 0$, $\frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} = \sin x$, 求 $f(x, y)$

$f(x, y) = xy^2 + \varphi(x)y + \psi(x)$, 从 $\frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} = \sin x$, 即 $[2xy + \varphi(x)]\Big|_{y=0} = \sin x$, 得 $\varphi(x) = \sin x$

Example 1.74. 设函数 $u = f(\ln \sqrt{x^2 + y^2})$, 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{3/2}$, 求函数 f 的表达式

设 $t = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $x^2 + y^2 = e^{2t}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= f'(t) \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f'(t) \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''(t) \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + f'(t) \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f''(t) \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} + f'(t) \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

代入得 $f''(t) = (x^2 + y^2)^{5/2} = e^{5t}$, 因此有

$$f(t) = \frac{1}{25}e^{5t} + C_1 t + C_2$$

Example 1.75. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$, 则

1. 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点
2. 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点
3. 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点
4. 根据所给条件无法判断点 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点

分子的极限为 0, 从而有 $f(0, 0) = 0$, 且由极限的性质知, $\frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + \alpha(x, y)$, 这里 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \alpha(x, y) = 0$, 因而 $f(x, y) = xy + (x^2 + y^2)^2[1 + \alpha(x, y)]$,

在点 $(0, 0)$ 的某充分小去心邻域内, 取 $y = x$ 且 $|x|$ 充分小时, $f(x, y) = x^2 + 4x^4[1 + \alpha(x, x)] > 0 = f(0, 0)$, 在点 $(0, 0)$ 的某充分小去心邻域内, 取 $y = -x$ 且 $|x|$ 充分小时, $f(x, y) = -x^2 + 4x^4[1 + \alpha(x, -x)] < 0 = f(0, 0)$, 故点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点

Example 1.76. 讨论二元函数 $z = x^3 + y^3 - 2(x^2 + y^2)$ 的极值

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 4x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

得驻点 $(0, 0), (4/3, 0), (0, 4/3), (4/3, 4/3)$. 进而

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 4, B = \frac{\partial^2 z}{\partial xy} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y - 4$$

$$AC - B^2 = 16 + 36xy - 24(x + y)$$

在点 $(0, 0)$ 时 $AC - B^2 > 0$ 且 $A < 0$ 有极大值

在点 $(4/3, 4/3)$ 时 $AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$ 有极小值

Example 1.77. 求椭圆 $x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y = 0$ 与直线 $x + y = 8$ 之间的最短距离

椭圆上任意一点 $P(x, y)$ 到直线 $x + y = 8$ 的距离的平方为

$$d^2 = \frac{(x + y - 8)^2}{2}$$

令 $F(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - 8)^2 + \lambda(x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y)$ 则有方程组

$$\begin{cases} F'_x = x + y - 8 + (2\lambda x + 2\lambda y) = 0 \\ F'_y = x + y - 8 + \lambda(2x + 6y - 8) = 0 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x = -2 - 2\sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

且 $d_1 = 4\sqrt{2} - 2, d_2 = 4\sqrt{2} + 2$, 所以所求最短距离为 $4\sqrt{2} - 2$

Example 1.78. 求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值

解方程组

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 2xy^2 = 0 \\ f'_y = 4y - 2x^2y = 0 \end{cases}$$

得开区域内的可能极值点为 $(\pm\sqrt{2}, 1)$, 其对应函数值为 $f(\pm\sqrt{2}, 1) = 2$

当 $y = 0$ 时, $f(x, y) = x^2$ 在 $-2 \leq x \leq 2$ 上的最大值为 4, 最小值为 0

当 $x^2 + y^2 = 4, y > 0, -2 < x < 2$ 时, 构造拉格朗日函数

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x = 2x - 2xy^2 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = 4y - 2x^2y + 2\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

得可能极值点: $(0, 2), \left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, 其对应函数值为 $f(0, 2) = 8, f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{7}{4}$

因此 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值为 8, 最小值 0

Example 1.79. 设 $f(x, y)$ 有二阶连续偏导数, $g(x, y) = f(e^{xy}, x^2 + y^2)$, 且

$$f(x, y) = 1 - x - y + o(\sqrt{(x-1)^2 + y^2})$$

证明 $g(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 取得极值, 判断此极值是极大值还是极小值, 并求出此极值

由 $f(x, y) = -(x-1) - y + o(\sqrt{(x-1)^2 + y^2})$, 由全微分的定义得

$$f(1, 0) = 0, f'_x(1, 0) = f'_y(1, 0) = -1$$

计算得 $g'_x = f'_1 \cdot e^{xy}y + f'_2 \cdot 2x, g'_y = f'_1 \cdot e^{xy}x + f'_2 \cdot 2y$, 有

$$g'_x(0, 0) = 0, g'_y(0, 0) = 0$$

再求二阶导数

$$\begin{aligned} g''_{xx} &= (f''_{11} \cdot e^{xy}y + f''_{12} \cdot 2x)e^{xy}y + f'_1 \cdot e^{xy}y^2 + (f''_{21} \cdot e^{xy}y + f''_{22} \cdot 2x)2x + 2f'_2 \\ g''_{xy} &= (f''_{11} \cdot e^{xy}x + f''_{12} \cdot 2y)e^{xy}y + f'_1 \cdot (e^{xy}xy + e^{xy}) + (f''_{21} \cdot e^{xy}x + f''_{22} \cdot 2y)2x \\ g''_{yy} &= (f''_{11} \cdot e^{xy}x + f''_{12} \cdot 2y)e^{xy}x + f'_1 \cdot e^{xy}x^2 + (f''_{21} \cdot e^{xy}x + f''_{22} \cdot 2y)2x + 2f'_2 \end{aligned}$$

因此 $A = g''_{xx}(0, 0) = 2f'_2(1, 0) = -2, B = g''_{xy}(0, 0) = f'_1(1, 0) = -1, C = g''_{yy}(0, 0) = 2f'_2(1, 0) = -2$, 进而 $AC - B^2 > 0$, 因此 $g(0, 0) = f(1, 0) = 0$ 是极大值

Example 1.80. 已知 x, y, z 为实数, 且 $e^x + y^2 + |z| = 3$, 求证 $e^x y^2 |z| \leq 1$

证明 1。在 $e^x + y^2 + |z| = 3$ 约束条件下求函数 $u = e^x y^2 |z|$ 的最值问题, 转化为无条件极值 $u = e^x y^2 (3 - e^x - y^2)$

证明 2。可化为以下等价问题: 已知 $X > 0, Y \geq 0, Z \geq 0$, 且 $X + Y + Z = 3$, 求 $XYZ \leq 1$ 。因此用拉格朗日乘数法

Example 1.81. 设闭区域 $D: x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0$, $f(x, y)$ 为 D 上的连续函数, 且

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(u, v) du dv$$

求 $f(u, v)$

设 $\iint_D f(u, v) du dv = A$, 在已知等式两边求区域 D 的二重积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy - \frac{8A}{\pi} \iint_D dx dy$$

$$A = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy - A$$

$$2A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1 - r^2} r dr = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$$

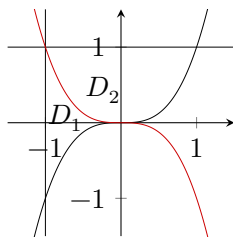
Example 1.82. 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数, 求 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma$

由轮换对称性

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma &= \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} + \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \right] \\ &= \frac{a+b}{2} \iint_D d\sigma = \frac{a+b}{2} \pi \end{aligned}$$

Example 1.83. 计算二重积分 $I = \iint_D x[1 + yf(x^2 + y^2)] dx dy$, 其中积分区域 D 为 $y = x^3, y = 1, x = -1$ 所围成的平面区域, f 连续

补充曲线 $y = -x^3$, 拆分积分区域 D 分别关于 x, y 坐标轴对称



$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} \\
 &= \iint_{D_1} [x + xyf(x^2 + y^2)] dx dy + \iint_{D_2} x[1 + yf(x^2 + y^2)] dx dy \\
 &= \iint_{D_1} x dx dy = 2 \int_{-1}^0 dx \int_0^{-x^3} x dy \\
 &= -\frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

Example 1.84. 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$$

由轮换对称性

$$\begin{aligned}
 &\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \left[\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy + \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy \right] \\
 &= \frac{1}{2} \iint_D \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r \sin \pi r dr \\
 &= -\frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Example 1.85. 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

记 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, (x, y) \in D\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1, (x, y) \in D\}$, 则

$$\begin{aligned}
\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma &= - \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) dx dy \\
&= -2 \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) dx dy + \iint_D (x^2 + y^2 - 1) dx dy
\end{aligned}$$

Example 1.86. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 求 $F'(2)$
 交换积分次序得

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx = \int_1^t \left[\int_1^x f(x) dy \right] dx = \int_1^t f(x)(x-1) dx$$

因此 $F'(2) = f(2)(2-1) = f(2)$

Example 1.87. 计算二重积分 $\iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1-r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$, 其中 $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$

直角坐标系下 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

Example 1.88. 已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0$, $\iint_D f(x, y) dx dy = a$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算二重积分

$$\begin{aligned}
&\iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy \\
&\iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 x \left(\int_0^1 y f''_{xy}(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\int_0^1 y df'_x(x, y) \right) dx \\
&\int_0^1 y df'_x(x, y) = y f'_x(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'_x(x, y) dy = - \int_0^1 f'_x(x, y) dy \\
&\int_0^1 x \left(\int_0^1 y df'_x(x, y) \right) dx = - \int_0^1 x \left(\int_0^1 f'_x(x, y) dy \right) dx = - \int_0^1 \left(\int_0^1 x f'_x(x, y) dx \right) dy \\
&\int_0^1 x f'_x(x, y) dx = \int_0^1 x df(x, y) = x f(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x, y) dx = - \int_0^1 f(x, y) dx \\
&\iint_D xy f''_{xy} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = a
\end{aligned}$$

Example 1.89. 求积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx &= \int_0^1 dx f_0^x \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dy = \int_0^1 (e^{x^2} - \int_0^x e^{y^2} dy) dx \\
&= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 \left(\int_0^x e^{y^2} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 e^{x^2} dx - x \int_0^x e^{y^2} dy \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{x^2} \cdot x dx \\
&= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{y^2} dy + \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 \\
&= \frac{e-1}{2}
\end{aligned}$$

Example 1.90. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 证明

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$$

令 $D = \{(x, y) \mid a \leq x, y \leq b\}$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx &\geq (b-a)^2 = \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(y)} dy \\
&= \iint_D \frac{f(x)}{f(y)} dxdy = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)} dxdy \\
&= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right] dxdy \\
&\geq \iint_D dxdy = (b-a)^2
\end{aligned}$$

Example 1.91. 证明 $\left(\int_0^1 e^{-x^2} dx \right)^2 > \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$

令 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$, $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_0^1 e^{-x^2} dx \int_0^1 e^{-y^2} dy = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy \\
&> \iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e} \right)
\end{aligned}$$

Example 1.92. 设函数 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $f''_{xx} = f''_{yy}$, 又由 $f(x, 2x) = x$, $f'_x(x, 2x) = x^2$, 试求二阶偏导数 $f''_{xx}(x, 2x)$, $f''_{xy}(x, 2x)$

因为 $f'_x \cdot 1 + f'_y \cdot 2 = 1$ 所以 $2f'_y = 1 - x^2$ 。又因为 $2(f''_{yx} \cdot 1 + f''_{yy} \cdot 2) = -2x$, 由条件知 $f'_x(x, 2x) = x^2$, 则 $f''_{xx} \cdot 1 + f''_{xy} \cdot 2 = 2x$, 解得 $f''_{xx}(x, 2x) = -\frac{4}{3}x$, $f''_{xy}(x, 2x) = \frac{5}{3}x$

Example 1.93. 设函数 $u = u(x, y)$ 由方程 $u = f(x, y, z, t), g(y, z, t) = 0, h(z, t) = 0$ 所确定, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$

由方程组

$$\begin{cases} f(x, y, z, t) - u = 0 \\ g(y, z, t) = 0 \\ h(z, t) = 0 \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

解

1.4 无穷级数

Example 1.94. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ 的敛散性

由于

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx < \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \frac{1}{n^{3/2}}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛, 因此级数收敛

Example 1.95. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$ 的收敛性

由泰勒公式 $\ln \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, 则 $\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛

Example 1.96. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi + \frac{1}{n - \ln n})$ 的敛散性

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi + \frac{1}{n - \ln n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n - \ln n}$, 令 $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$, 则 $f'(x) < 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Example 1.97. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ 的敛散性

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n[\sqrt{n} - (-1)^n]}{n - 1} = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n - 1} - \frac{1}{n - 1}$$

Example 1.98. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\alpha}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 收敛, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 因此发散

Example 1.99. 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{n} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), n = 1, 2, \dots$, 证明

1. $\lim a_n$ 存在

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛

1. 显然 $a_n \geq 0$, $\{a_n\}$ 单调减少且有下界, 因此 $\lim a_n$ 存在

2. 由于数列单调减少, 所以有 $0 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leq a_n - a_{n+1}$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 收敛

Example 1.100. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 试问级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n$ 是否收敛

证明. 由已知正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 根据单调有界数列必有极限知, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 记 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, 则有 $a_n \geq a \geq 0$, 若 $a = 0$, 则交错级数收敛, 矛盾, 因此 $a > 0$

又由于 $\left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n \leq \left(\frac{1}{a + 1} \right)^n$, 而 $\frac{1}{a + 1} < 1$, 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a + 1} \right)^n$ 收敛, 因此级数收敛 \square

Example 1.101. 求下列数列的极限

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$

1. 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^n \frac{n!}{n^n}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

因此级数收敛, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Example 1.102. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} (x-1)^{2n}$ 的收敛域

令 $t = (x-1)^n$, 考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} t^n$

Example 1.103. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x = -2$ 处条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-a)^n$ 在 $x = \ln \frac{1}{2}$ 处

1. 绝对收敛
2. 条件收敛
3. 必发散

4. 敛散性由 a 决定

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 的收敛半径是 1, 因此 $x = -2$ 是收敛区间的端点,

因此 $a = -3$ 或 -1 , 而 $a = -3$ 与条件收敛矛盾, 因此 $a = -1$

Example 1.104. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n + 1} x^{2n}$$

因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) x^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right)' = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}, -1 < x < 1$$

当 $x \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n + 1} x^{2n} &= \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n + 1} x^{2n+1} \\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n + 1} x^{2n+1} \right)' &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1 - x^2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n + 1} x^{2n+1} &= \int_0^x \frac{1}{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

当 $x = 0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} = 2$, 所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

当 $x = \pm 1$ 时, 原级数发散

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} = 3$$

因此收敛区间与收敛域均为 $-1 < x < 1$, 和函数

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 3 & x = 0 \end{cases}$$

Example 1.105. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1}$ 的收敛区间与收敛域, 并求其和函数

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

因此收敛半径为 2, 收敛域为 $[-2, 2)$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n-1} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right), -1 \leq \frac{x}{2} < 1$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1} = \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) & x \in [-2, 0) \cup (0, 2) \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

Example 1.106. 设 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n =$

$0 (n \geq 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数

1. 证明 $S''(x) - S(x) = 0$

2. 求 $S(x)$ 的表达式

二阶常系数齐次线性微分方程 $S''(x) - S(x) = 0$ 的特征方程 $\lambda^2 - 1 = 0$ 解得 $\lambda = \pm 1$, 于是通解为

$$S(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

代入得 $S(x) = 2e^x + e^{-x}$

Example 1.107. 设 $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1}) (n = 1, 2, 3, \dots)$,

$S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数

1. 证明幂级数的收敛半径不小于 1
2. 证明 $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0 (x \in (-1, 1))$, 并求 $S(x)$ 的表达式
1. 利用数学归纳法, $0 \leq a_n \leq 1$, 记 R 为幂级数的收敛半径, 因为 $|a_n x^n| \leq |x|^n$, 且级数 $\sum_0^{\infty} x^n$ 绝对收敛, 收敛半径为 $(-1, 1)$, 因此 $(-1, 1) \subseteq (-R, R)$

Example 1.108. 求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ 的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e$$

Example 1.109. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - n + 1}{2^n}$

$$\text{令 } S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \text{ 因此 } S(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} x^n)'' = \left(\frac{x}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Example 1.110. 将 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数

$$\text{因为 } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} (-1 < x < 1), \text{ 有}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} (-1 \leq x < 1) \end{aligned}$$

Example 1.111. 已知 $\cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-1 < x < 1)$, 求 a_n

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, -1 < x < 1 \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n!)}, -\infty < x < +\infty \\ -\frac{1}{(1+x)^2} &= \left(\frac{1}{1+x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n, -1 < x < 1 \end{aligned}$$

Example 1.112. 设 $u_n = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 则下列结论成立的是

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛
 2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散
 3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散
 4. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛
- $\ln^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}$

Example 1.113. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 则 $|n|n \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + \frac{1}{n^2})$, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 收敛

Example 1.114. 设 $\{a_n\}$ 是单调增加且有界的正数列, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛

$$1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{a_1}(a_{n+1} - a_n)$$

Example 1.115. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$

$$\text{令 } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}$$

1.5 常微分方程与差分方程

Example 1.116. 求解下列初值问题

$$(x+y)dx + (y-x)dy = 0, y|_{x=1} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 分离变量得

$$\begin{aligned}\frac{1-u}{1+u^2}du &= \frac{dx}{x} \\ |x|\sqrt{1+u^2} &= Ce^{\arctan u} \\ \sqrt{x^2+y^2} &= Ce^{\arctan \frac{y}{x}} \\ \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{2}e^{\arctan \frac{y}{x} + \frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

Example 1.117. 求 $\frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{y-x}$ 的通解

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y-x}{1-y} = -\frac{1}{1-y}x + \frac{y}{1-y}$$

求解通解

$$x = (1-y) \ln|1-y| + C(1-y) + 1$$

Remark. 形如 $\frac{dy}{dx} = \frac{s(y)}{t(y)x+q(y)}$ 的微分方程, 将 x 看作未知量

Example 1.118. 解微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y+x+5}$
方程组

$$\begin{cases} y-x+1=0 \\ y+x+5=0 \end{cases}$$

有唯一解 $x = -2, y = -3$, 令 $u = x+2, v = y+3$, 则 $\frac{dv}{du} = \frac{v-u}{v+u}$, 再令 $z = \frac{v}{u}$, 有

$$z+u \frac{dz}{du} = \frac{z-1}{z+1}, -\frac{z+1}{z^2+1}dz = \frac{1}{u}du$$

因此

$$-\frac{1}{2} \ln(z^2+1) - \arctan z = \ln|u| + C$$

Remark. 对方程 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+C_1}{a_2x+b_2y+C_2}\right)$

1. 若 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, 则令 $z = a_2x + b_2y$, 方程化为

$$\frac{dz}{dx} = b_2 f\left(\frac{kz+C_1}{z+C_2}\right) + a_2$$

2. 若 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, 则方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + C_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

有唯一解 $x = \alpha, y = \beta$, 令 $u = x - \alpha, v = y - \beta$, 则

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{v}{u}}{a_2 + b_2 \frac{v}{u}}\right) = g\left(\frac{v}{u}\right), g(t) = f\left(\frac{a_1 + b_1 t}{a_2 + b_2 t}\right)$$

Example 1.119. 求 $y'' + y = \sin x + x \cos 2x$ 的通解

特征方程的根为 $\lambda = \pm i$, $y'' + y = 4 \sin x$ 的特解为 $y_1^* = -2x \cos x$,
 $y'' + y = x \cos 2x$ 特解为 $y_2^* = -\frac{1}{3}x \cos x + \frac{4}{9} \sin 2x$

2 线性代数

2.1 行列式

Example 2.1. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 + a_1x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \\
&= \cdots = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 + a_1x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 + a_2x + a_1x^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + \cdots + a_1x^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n + \cdots + a_1x^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= a_1x^{n-1} + \cdots + a_n
\end{aligned}$$

Example 2.2. 计算

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 & x \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 & x \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & y \\ a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ a & d & c & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = (x^2 - y^2)(b^2 - c^2)$$

Example 2.3. 已知 \mathbf{A}, \mathbf{B} 均为 n 阶矩阵, 若 $|\mathbf{A}| = 3, |\mathbf{B}| = 2, |\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}| = 2$, 求 $|\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}|$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}| &= |\mathbf{E}\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}| = |(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})| \\
&= |\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1})\mathbf{A}| = 3
\end{aligned}$$

Example 2.4. 已知 4 阶矩阵 \mathbf{A} 相似于 \mathbf{B} , \mathbf{A} 的特征值为 2,3,4,5, \mathbf{E} 为 4 阶单位矩阵, 求 $|\mathbf{B} - \mathbf{E}|$

$$\mathbf{A} = T \mathbf{B} T^{-1} = Q \mathbf{D} Q^{-1}, |\mathbf{B} - \mathbf{E}| = |TQ(\mathbf{D} - \mathbf{E})Q^{-1}T^{-1}| = 24$$

Example 2.5. 满足 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ 的矩阵称为反对称矩阵, 证明: 若 \mathbf{A} 是反对称矩阵, 则 $|\mathbf{A}| = 0$

设 \mathbf{A} 的阶数为 $2k+1$, k 为正整数, $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T| = |-\mathbf{A}| = (-1)^{2k+1}|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}|$, 得 $|\mathbf{A}| = 0$

Example 2.6. 已知 \mathbf{A}, \mathbf{B} 都是 n 阶非零矩阵, 满足 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{0}$, 证明 $|\mathbf{A}| = 0$

若 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 则 \mathbf{A} 可逆, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, 矛盾

Example 2.7. 已知 ξ 是 n 维向量, 且 $\xi^T \xi = 1$, 若 $\mathbf{A} = \mathbf{E} - \xi \xi^T$, 证明 $|\mathbf{A}| = 0$

$$\mathbf{A}\xi = (\mathbf{E} - \xi \xi^T)\xi = \xi - \xi = \mathbf{0}$$

有特征值 0, 从而齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解, 因此 $|\mathbf{A}| = 0$

Example 2.8. 已知

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

1. 求 $A_{12} - A_{22} + A_{32}$
2. 求 $A_{31} + A_{32} + A_{33}$
1. $A_{12} - A_{22} + A_{32} = a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{33} = 0$
2. 由于代数余子式 A_{ij} 的值与元素 a_{ij} 的值无关, 可构造一个新的行列式

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

$$\text{因此 } A_{31} + A_{32} + A_{33} = -11$$

Example 2.9. 若

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

求 $A_{31} + A_{32} + A_{33}$ 由

$$|\mathbf{B}_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0, |\mathbf{B}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

有

$$\begin{cases} 2A_{31} + 2A_{32} + 2A_{33} + A_{34} + A_{35} = 0 \\ A_{31} + A_{32} + A_{33} + 2A_{34} + 2A_{35} = 0 \end{cases}$$

因此 $A_{31} + A_{32} + A_{33} = 0$

Example 2.10. 若

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因 $|\mathbf{A}| = -4$,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 20 & -8 & 0 & 0 \\ -12 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

2.2 矩阵

Example 2.11. 已知 \mathbf{A}, \mathbf{B} 都是 n 阶矩阵, 且 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, 证明 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}$ 有

$$\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{E} = (\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{B} - \mathbf{E}) = \mathbf{E}$$

因此 $\mathbf{A} - \mathbf{E}$ 可逆, $(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{E}$, 于是

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{B} - \mathbf{E}) = (\mathbf{B} - \mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E})$$

Example 2.12. 已知

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

求 \mathbf{A}^n

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

那么

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 7 \mathbf{A}$$

Remark. 一般情况下, 若 $r(\mathbf{A}) = 1$, 则 \mathbf{A} 可分解为两个矩阵的乘积, 有 $\mathbf{A}^2 = l \mathbf{A}$, 从而

$$\mathbf{A}^n = l^{n-1} \mathbf{A}$$

例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^T$$

那么

$$\mathbf{A}^2 = (\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta})^T (\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^T) = \boldsymbol{\alpha} (\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\beta}^T = l \mathbf{A}$$

Example 2.13. 设 n 阶矩阵 \mathbf{A} 满足 $\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} - 3\mathbf{E} = \mathbf{0}$

1. 证明 $\mathbf{A}, \mathbf{A} + 2\mathbf{E}$ 可逆
2. 当 $\mathbf{A} \neq \mathbf{E}$ 时, 判断 $\mathbf{A} + 3\mathbf{E}$ 是否可逆
 1. $(\mathbf{A} + 3\mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{0}$, 因为 $\mathbf{A} \neq \mathbf{E}$, 则 $(\mathbf{A} + 3\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解, 因此 $|\mathbf{A} + 3\mathbf{E}| = 0$, 所以 $\mathbf{A} + 3\mathbf{E}$ 不可逆

Example 2.14. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶矩阵, 如果 $\mathbf{E} + \mathbf{A}\mathbf{B}$ 可逆, 证明矩阵 $\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{A}$ 可逆

如果 $\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{A}$ 不可逆, 则 $|\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{A}| = 0$, 那么齐次方程组 $(\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解

设 $\boldsymbol{\eta}$ 是非零解, 则 $(\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{A})\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}, \mathbf{B}\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = -\boldsymbol{\eta}$. 因为 $(\mathbf{E} + \mathbf{A}\mathbf{B})(\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}$, 且 $\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$, 因此矛盾

Example 2.15. 计算

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{2000} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

是把第 2 行的 2 倍加到第 3 行

Example 2.16. 已知 a 是常数, 且矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{bmatrix}$$

可经初等变换化为矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 求 a
2. 求满足 $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$ 的可逆矩阵

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$r(\mathbf{A}) = 2$, 因此 $r(\mathbf{B}) = 2$, 而 $|\mathbf{B}| = 2 - a$, 因此 $a = 2$

$$\left[A \mid B \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

因此

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 - 6k_1 & 4 - 6k_1 & 4 - 6k_3 \\ -1 + 2k_1 & -1 + 2k_2 & -1 + 2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

Example 2.17. 1. 已知

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & a & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

且 $r(\mathbf{AB}) = 2$, 求 a

2. 已知 \mathbf{A} 是 2 阶非 0 矩阵且 $\mathbf{A}^5 = \mathbf{0}$, 求 $r(\mathbf{A})$
1. $|\mathbf{B}| \neq 0$, 因此 $r(\mathbf{A}) = 2, |\mathbf{A}| = 0$, 而 $|\mathbf{A}| = 3(5 - a) = 0$, 因此 $a = 5$
2. $r(\mathbf{A}) \geq 1, |\mathbf{A}|^5 = 0$, 因此 $|\mathbf{A}| = 0$, 因此 $r(\mathbf{A}) = 1$

Example 2.18. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 是 3 阶矩阵

1. 证明 $r(\mathbf{A}, \mathbf{AB}) = r(\mathbf{A})$
2. 举例说明 $r(\mathbf{A}, \mathbf{BA}) = r(\mathbf{A})$ 是错误的
1. 设 $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, 对矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{C} 分别按列分块, 记 $\mathbf{A} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], \mathbf{C} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$, 记 $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, 那么由 $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, 有

$$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3]$$

即

$$\begin{cases} \gamma_1 = b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + b_{31}\alpha_3 \\ \gamma_2 = b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + b_{32}\alpha_3 \\ \gamma_3 = b_{13}\alpha_1 + b_{23}\alpha_2 + b_{33}\alpha_3 \end{cases}$$

因此 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 因此

$$r(\mathbf{A}, \mathbf{AB}) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\mathbf{A})$$

2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Example 2.19. 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{B} 是 $n \times s$ 矩阵, 证明

$$r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$$

对于齐次方程组 1. $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 若 α 是方程组 2 的一个解, 它也是方程组 1 的解, 因此方程组 2 的解集是方程组 1 的解集的子集

又因 1 的解向量的秩为 $s - r(\mathbf{A}\mathbf{B})$, 2 的解向量的秩为 $s - r(\mathbf{B})$, 因此

$$s - r(\mathbf{B}) \leq s - r(\mathbf{A}\mathbf{B})$$

即 $r(\mathbf{A}\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{B})$

另一方面, $r(\mathbf{A}\mathbf{B}) = r((\mathbf{A}\mathbf{B})^T) = r(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T) \leq r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A})$

Example 2.20. 若 \mathbf{A} 为 n 阶矩阵, 且 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$, 证明

$$r(\mathbf{A} + \mathbf{E}) + r(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = n$$

$$r(\mathbf{A} + \mathbf{E}) + r(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \leq n + r((\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{A} + \mathbf{E})). \quad r(\mathbf{A} + \mathbf{E}) + r(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \geq r(\mathbf{A} + \mathbf{E} + \mathbf{E} - \mathbf{A})$$

Example 2.21. 已知 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 证明 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \dots, \alpha_n - \alpha_1$ 线性相关

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\alpha_1 - \alpha_2 \quad \alpha_2 - \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_n - \alpha_1] = [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n] \mathbf{A}$$

$|\mathbf{A}| = 0$, 因此线性相关

Example 2.22. 设 \mathbf{A} 是 $n \times m$ 矩阵, \mathbf{B} 是 $m \times n$ 矩阵, 其中 $n < m$, 若 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}$, 证明 \mathbf{B} 的列向量线性无关

$r(\mathbf{B}) \leq n$, 又

$$r(\mathbf{B}) \geq r(\mathbf{A}\mathbf{B}) = n$$

Example 2.23. 设 $\alpha_i = [a_{i1}, \dots, a_{in}]^T (i = 1, 2, \dots, r, r < n)$ 是 n 维实向量, 且 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 已知 $\beta = [b_1, \dots, b_n]^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

的非零解向量, 试判断向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta$ 的线性相关性

设 $k_1\alpha_1 + \dots + k_r\alpha_r + k\beta = \mathbf{0}$. β 与每个 α_i 都正交, $\beta^T\alpha_i = 0$. 因此 $k\beta^T\beta = 0$. 因为 $\beta \neq \mathbf{0}$, 因此 $\beta^T\beta \neq 0$, 因此 $k = 0$. 因此线性无关

Example 2.24. 设 n 维列向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性无关, 且与非零向量 β_1, β_2 正交, 证明 β_1, β_2 线性相关

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T \end{bmatrix}$$

因此 $\mathbf{A}\beta_1 = \mathbf{A}\beta_2 = \mathbf{0}$, 因为 $r(\mathbf{A}) = n - 1$, 因此 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系仅由 1 个解向量构成, 因此 β_1, β_2 线性相关

Example 2.25. 线性变换 \mathbf{A} 的属于不同特征值的特征向量线性无关

设 \mathbf{A} 的 k 个不同特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 分别对应于特征向量 ξ_1, \dots, ξ_k , 对 k 作数学归纳法

当 $k = 1$ 时显然. 设命题在 $k - 1$ 个不同特征值的情况下成立

$$\begin{aligned} l_1\xi_1 + \dots + l_k\xi_k &= \mathbf{0} \\ l_1\mathbf{A}\xi_1 + \dots + l_k\mathbf{A}\xi_k &= \mathbf{0} \\ l_1\lambda_1\xi_1 + \dots + l_k\lambda_k\xi_k &= \mathbf{0} \\ l_2(\lambda_1 - \lambda_2)\xi_2 + \dots + l_k(\lambda_1 - \lambda_k)\xi_k &= \mathbf{0} \\ l_2(\lambda_1 - \lambda_2) &= \dots = l_k(\lambda_1 - \lambda_k) = 0 \\ l_2 &= \dots = l_k = 0 \end{aligned}$$

因此 $l_1 = 0$, ξ_1, \dots, ξ_k 线性无关

Example 2.26. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 都是 $m \times n$ 矩阵, 证明 $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$

设 $r(\mathbf{A}) = r, \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 \mathbf{A} 的列向量的极大线性无关组, $r(\mathbf{B}) = t, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_t}$ 是 \mathbf{B} 的列向量的极大线性无关组

于是 $\alpha_k + \beta_k$ 都被 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}, \beta_{j_1}, \beta_{j_t}$ 线性表示

2.3 线性方程组

Example 2.27. 设非齐次线性方程组 $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, 则

1. 当 $r(\mathbf{A}) = m$ 时, 方程有解

2. 当 $r(\mathbf{A}) = n$ 时, 方程有唯一解
3. 当 $m = n$ 时, 方程组有唯一解
4. 当 $r(\mathbf{A}) = r < n$ 时, 方程组有无穷多解

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解当且仅当 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

Example 2.28. 设 \mathbf{A} 是四阶矩阵, $r(\mathbf{A}) = 2, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的三个线性无关解, 其中

$$\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 = [-1, 2, 5, 1]^T$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 - 2\boldsymbol{\eta}_3 = [2, 1, 3, -3]^T$$

$$3\boldsymbol{\eta}_1 + 5\boldsymbol{\eta}_2 = [1, -2, 1, -1]^T$$

求方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的通解

因为 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}_2 - 2\boldsymbol{\eta}_3) = -\mathbf{b}$, 因此 $\boldsymbol{\eta} = -\boldsymbol{\eta}_2 + 2\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一个特解
 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的两个通解为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 + 2(\boldsymbol{\eta}_2 - 2\boldsymbol{\eta}_3)$$

$$\boldsymbol{\xi}_2 = 8(\boldsymbol{\eta}_2 - 2\boldsymbol{\eta}_3) + 5\boldsymbol{\eta}_3 + 3\boldsymbol{\eta}_1$$

Example 2.29. 设 $\boldsymbol{\xi} = [a_1, \dots, a_n]^T, \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} = 1$, 证明 $|\mathbf{E} - \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}| = 0$

构造齐次线性方程组

$$(\mathbf{E} - \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

有

$$(\mathbf{E} - \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$$

有非零解, 因此

$$|\mathbf{E} - \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}| \neq 0$$

Example 2.30. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0 \\ x_1 + (2+a)x_2 + \dots + nx_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + \dots + (a_n + n)x_n = 0 \end{cases}$$

试问 a 为何值时, 方程组有非零解

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+a & 2 & \dots & n \\ 1 & 2+a & \dots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n+a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 2 & \dots & n \\ -a & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & 0 & \dots & a \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

当 $a = 0$ 时, $r(\mathbf{A}) = 1 < n$, 方程组有非零解

当 $a \neq 0$ 时, 对矩阵 \mathbf{B} 继续初等行变换

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 2 & \dots & n \\ -a & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & 0 & \dots & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 2 & \dots & n \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{n(n+1)}{2} + a & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当 $a = \frac{n(n+1)}{2}$ 时, $r(\mathbf{A}) = n - 1$

Example 2.31. 设线性方程组

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \beta$$

其中 α_i, β 均是四维列向量, 有通解

$$k[-2, 3, 1, 0]^T + [4, -1, 0, 3]^T$$

1. β 能否由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示
2. α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示
3. 求线性方程组

$$[\alpha_1 + \beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \beta$$

的通解

$$\beta = (-2k + 4)\alpha_1 + (-1 + 3k)\alpha_2 + k\alpha_3 + 3\alpha_4$$

$$4\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$

$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3, r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, 因此不能

$r(\alpha_1 + \beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, 因此通解形式为 $k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \eta$ 因为

$$0(\alpha_1 + \beta) + 4\alpha_1 - \alpha_2 + 0\alpha_3 + 3\alpha_4 = \beta \Rightarrow \eta_1 = [0, 4, -1, 0, 3]^T$$

$$0(\alpha_1 + \beta) - 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 0\alpha_4 = \mathbf{0} \Rightarrow \xi = [0, -2, 3, 1, 0]^T$$

$$(\alpha_1 + \beta) - \alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 = \beta \Rightarrow \eta_2 = [1, -1, 0, 0, 0]^T$$

因此有解

$$k_1 \xi + k_2 (\eta_2 - \eta_1) + \eta_1$$

Example 2.32. 证明: 若方程组

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n = 0 \end{cases}$$

有解, 则方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + \cdots + a_{mn}x_m = 0 \end{cases}$$

和方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + \cdots + a_{mn}x_m = 0 \\ b_1x_1 + \cdots + b_mx_m = 0 \end{cases}$$

是同解方程组

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

则问题变为, 已知 $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}$, 则方程组

$$\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{b}^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

同解。因为 $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}$ 有解, 因此 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, 因此

$$r(\mathbf{A}^T) = r \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{b}^T \end{bmatrix}$$

因此它们基础解系的线性无关向量个数相同

Example 2.33. 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{B} 是 $n \times m$ 矩阵, 则线性方程组 $(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

1. 当 $n > m$ 时仅有零解
 2. 当 $n > m$ 时必有非零解
 3. 当 $m > n$ 时仅有零解
 4. 当 $m > n$ 时必有非零解
- $$r(\mathbf{A}\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) \leq n < m$$

Example 2.34. 设 \mathbf{A} 是 n 阶矩阵, 且满足 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$

1. 求 \mathbf{A} 的特征值的取值范围
2. 证明 $\mathbf{E} + \mathbf{A}$ 是可逆矩阵

$$\lambda^2 \alpha = \mathbf{A}^2 \alpha = \mathbf{A} \alpha = \lambda \alpha$$

因此 $\lambda = 0, 1$

$\mathbf{E} + \mathbf{A}$ 的特征值的值为 1, 2

Example 2.35. 1. 设 $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ 是主对角元为 1 的上三角阵, 且存在

$a_{ij} \neq 0 (i < j)$, 问 \mathbf{A} 是否相似于对角阵, 说明理由

2. 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, 但 $\mathbf{A}^k = \mathbf{0} (k \in \mathbb{N}^+)$, 问 \mathbf{A} 能否相似于对角阵
1. 不能, $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = (\lambda - 1)^n$, 故 $\lambda = 1$ 是 \mathbf{A} 的 n 重特征值, 而 $r(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \geq 1$, 因而对对应于 $\lambda = 1$ 的特征向量个数 $\leq n - 1$
2. 不能, 若 \mathbf{A} 有特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则 \mathbf{A}^k 有特征值 $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ 。又 $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$, 因此 $\lambda_1^k = \dots = \lambda_n^k = 0$, 因此 $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ 。但 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, 因此 $r(0 \mathbf{E} - \mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) \geq 1$, 因此不能相似

Example 2.36. 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$f(x) = x^3 - 2x + 5$, $\mathbf{B} = f(\mathbf{A})$, 问 \mathbf{B} 能否相似于对角阵

\mathbf{A} 是实对称矩阵, 因此 $f(\mathbf{A})$ 也是实对称矩阵, 因此能对角化

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$$

当 $\lambda_1 = -1$ 时, 特征向量为 $\alpha = [1, 1, 1]^T$

当 $\lambda_2 = 2$ 时, 特征向量为 $\alpha_2 = [1, -1, 0]^T, \alpha_3 = [1, 0, -1]^T$

\mathbf{B} 的特征值为 $f(\lambda) = 6, 9$, 因此

$$\mathbf{P} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Example 2.37. 设 \mathbf{A} 是三阶实对称矩阵, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 是 \mathbf{A} 的特征值, 对应于 $\lambda = -1$ 的特征向量为 $\alpha_1 = [0, 1, 1]^T$, 求 \mathbf{A}

对应于 λ_2 的特征向量与 α_1 正交, 因此

$$x_2 + x_3 = 0$$

解得 $\alpha_2 = [1, 0, 0]^T, \alpha_3 = [0, 1, -1]^T$, 因此有 $\mathbf{P} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 使得

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Example 2.38. 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

且已知 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, 求可逆阵 \mathbf{P} 使得 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{B}$

因为 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, 故有 $Tr(\mathbf{A}) = Tr(\mathbf{B}), |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$

$$\begin{cases} 1 + 4 + a = 2 + 2 + b \\ 6a - 6 = 4b \end{cases}$$

2.4 二次型

Example 2.39. 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 化成标准形 $f = 6y_1^2$, 求参数 a

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

因此 $3a = 6, a = 2$

Example 2.40. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 是两个 n 阶实对称矩阵, 证明:

1. 若 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 合同, 则 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$
2. \mathbf{A}, \mathbf{B} 合同的充分必要条件是 \mathbf{A}, \mathbf{B} 有相同的秩和正惯性指数
2. 设 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{\Lambda}$, 则 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B} \simeq \mathbf{\Lambda}$, 因此

$$\mathbf{C}_1^T \mathbf{A} \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_p & & \\ & -\mathbf{E}_{r-p} & \\ & & \mathbf{0}_{n-r} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_2^T \mathbf{B} \mathbf{C}_2$$

Example 2.41. 下列二次型中, 与 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ 合同的是

1. $g = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$
2. $h = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2$
3. $w = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$
4. $r = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$

相同的秩和正惯性指数, 因此

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2)^2 - 3x_2^2$$

$$g = (x_1 + x_2)^2$$

$$h = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2$$

$$w = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{2}x_2^2$$

$$r = (x_1 + 3x_2)^2 - 8x_2^2$$

Example 2.42. 判别二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. \mathbf{A} 的顺序 y 主子式都大于 0
2. \mathbf{A} 的全部特征值 > 0
3. 正惯性指数为 n

Example 2.43. \mathbf{A} 是 n 阶正定阵, \mathbf{C} 是 $n \times m$ 矩阵, 且 $r(\mathbf{C}) = m$, 证明 $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ 也是正定阵

$\mathbf{C} = [\gamma_1, \dots, \gamma_m]$, 则 $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ 线性无关, 对任给 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_m]^T \neq \mathbf{0}$, 有

$$\mathbf{C} \mathbf{x} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

而 \mathbf{A} 是正定阵, 故对任意的 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \neq \mathbf{0}$, 有 $\mathbf{C} \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 且恒有

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{x} = (\mathbf{C} \mathbf{x})^T \mathbf{A} (\mathbf{C} \mathbf{x}) > 0$$

故 $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ 是正定矩阵

Example 2.44. 设 $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 且 $|\mathbf{A}| = 0$

1. 证明存在 n 维列向量 \mathbf{x}_0 使得 $f(\xi_0) = 0$
2. 当

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

时, 求 ξ_0 使得 $f(\xi_0) = 0$

1. 因为 $|\mathbf{A}| = 0$, 因此 \mathbf{A} 有一个特征值为 0, 设其对应的特征向量为 ξ_0

3 概率论与数理统计

3.1 随机事件与概率

Example 3.1. 随机事件 A, B 满足 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = 1$, 则必有

1. $A \cup B = \Omega$
2. $AB = \emptyset$
3. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$
4. $P(A - B) = 0$

选 3

Example 3.2. 为从 2 个次品, 8 个正品的 10 个产品中将 2 个次品挑出, 随机地从中逐个测试, 则不超过 4 次测试就把 2 个次品挑出的概率为

方法 1. 把 10 个产品随机排成一行, 按先后次序逐个测试, 总共有 $10!$ 种排法, 如要不超过 4 次测试就把 2 个次品挑出, 就要求在前 4 个产品中有 2 个次品和 2 个正品, 共有 $C_2^2 C_8^2 4! 6!$, 所以所求概率为

$$P = \frac{C_2^2 C_8^2 4! 6!}{10!} = \frac{2}{15}$$

方法 2. 如果只考虑前 4 次测试, 总的可能为 10 个产品中任选 4 个, 有 A_{10}^4 种, 前 4 次测试就包含 2 个次品的可能为 $C_2^2 C_8^2 4!$, 所以所求概率为

$$P = \frac{C_2^2 C_8^2 4!}{A_{10}^4} = \frac{2}{15}$$

方法 3. 如果只考虑前 4 次测试而不计它们的先后次序, 总的可能有 C_{10}^4 种选法, 因此

$$P = \frac{C_2^2 C_8^2}{C_{10}^4} = \frac{2}{15}$$

方法 4. 如果只考虑 2 个次品在 10 次测试中的位置, 总的可能为 C_{10}^2 种, 现要求前 4 位中有两个次品, 因此

$$P = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}$$

Example 3.3. 掷一枚硬币 $2n$ 次, 出现正面向上次数多于反面向上次数的概率为

在 $2n$ 次中正面向上次数跟反面向上次数相等的概率为 $C_{2n}^n (\frac{1}{2})^{2n}$, 因此概率为 $\frac{1}{2}[1 - C_{2n}^n (\frac{1}{2})^{2n}]$

Example 3.4. 一条自动生产线连续生产 n 件产品不出故障的概率为 $\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 。假设产品的优质品率为 p , 如果各件产品是否为优质品相互独立

1. 计算生产线在两次故障间共生产 k 件优质品的概率
2. 若已知在某两次故障间该生产线生产了 k 件优质品, 求它共生产 m 件产品的概率

设事件 B_k = 两次故障间共生产 k 件优质品, 事件 A_i = 两次故障间共生产 i 件产品, A_0, A_1, \dots 构成一完整事件组, 且

$$P(A_i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, i = 0, 1, \dots$$

当 $i < k$ 时, $P(B_k | A_i) = 0$

当 $i \geq k$ 时, 在 i 个产品中有 k 个优质品, 且各产品是否优质相互独立, 因此 $P(B_k | A_i) = C_i^k p^k (1-p)^{i-k}$

1. 应用全概率公式

$$\begin{aligned} P(B_k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i) P(B_k | A_i) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(A_i) P(B_k | A_i) \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} C_i^k p^k (1-p)^{i-k} = \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p)^{i-k})}{(i-k)!} e^{-\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

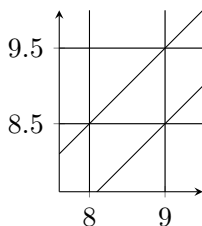
2. 当 $m < k$ 时, $P(A_m | B_k) = 0$

当 $m \geq k$ 时,

$$\begin{aligned} P(A_m | B_k) &= \frac{P(A_m) P(B_k | A_m)}{P(B_k)} = \frac{k!}{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \frac{m!}{k!(m-k)!} p^k (1-p)^{m-k} \\ &= \frac{(\lambda q)^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda q} \end{aligned}$$

Example 3.5. 甲在 8 点到 9 点, 乙在 8 点半到 9 点半的各时刻等可能地、相互独立地去同一办公室, 已知没人只在办公室停留半小时, 则它们相遇的概率为

设甲乙到达的时刻分别为 $8 \leq X \leq 9, 8.5 \leq Y \leq 9.5$, 相遇时必须



3.2 随机变量与其概率分布

Example 3.6. 设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数, 则成立 $P\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$ 的充要条件是

1. x_1 处连续
2. x_2 处连续

3. x_1, x_2 至少一处连续

4. x_1, x_2 都不连续

$P\{x_1 < X < x_2\} = P\{x_1 < X \leq x_2\} - P\{X = x_2\} = F(x_2) - F(x_1) - P\{X = x_2\}$ 。 $P\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$ 可知 $P\{X = x_2\} = 0$ 即 $F(x_2) - F(x_2 - 0) = 0$, $F(x)$ 在 x_2 处作连续, $F(x)$ 是右连续的, 因此 x_2 处 $F(x)$ 连续

Example 3.7. 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2)$, $p_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\}$, 则

1. $p_1 > p_2 > p_3$

2. $p_2 > p_1 > p_3$

3. $p_3 > p_1 > p_2$

4. $p_1 > p_3 > p_2$

$p_1 = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1, p_2 = \Phi(\frac{2-0}{2}) - \Phi(\frac{-2-0}{2}) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1, p_3 = \Phi(\frac{2-5}{3}) - \Phi(\frac{-2-5}{3}) = \Phi(-1) - \Phi(-\frac{7}{3})$, 因此 $p_1 > p_2 > p_3$

Example 3.8. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = Ae^{-x^2+x}$, 试求常数 A

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-x^2+x} dx = Ae^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{2})^2} dx \\ &= Ae^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = Ae^{1/4} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Example 3.9. 假设随机变量 X 服从指数分布, 则随机变量 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数

1. 是连续函数

2. 至少有两个间断点

3. 是阶梯函数

4. 恰好有一个间断点

方法 1. 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$ 。

当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$

当 $0 \leq y < 2$ 时

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{\min\{X, 2\} \leq y\} \\ &= P\{X \leq y\} = \int_{-\infty}^y \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda y} \end{aligned}$$

但 $y \geq 2$ 时, $F_Y(y) = 1$, 因此

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & 0 \leq y < 2 \\ 1 & y \geq 2 \end{cases}$$

因此间断点为 $y = 2$

方法 2. 指数分布 X 的分布函数必为连续函数,

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\min\{X, 2\} \leq y\} = \begin{cases} F_X(y) & y < 2 \\ 1 & y \geq 2 \end{cases}$$

故有一个间断点

3.3 多维随机变量及其分布

Example 3.10. 设 (X, Y) 是二维随机变量, X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

在给定 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3} & 0 < y < x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

1. 求 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$
2. 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$
3. 求 $P\{X > 2Y\}$

注意条件概率是在 $X = x$ 的条件下给定的, 因此在 $0 < x < 1$ 时

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3} & 0 < y < x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

又 $\int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 1$

Example 3.11. 设随机变量 X, Y 相互独立, $X \sim B(1, 0.5), Y \sim U[0, 1]$, 记 $Z = X + Y$, 试求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\} \\
&= P\{X = 0, X + Y \leq z\} + P\{X = 1, X + Y \leq z\} \\
&= P\{X = 0, Y \leq z\} + P\{X = 1, Y \leq z - 1\} \\
&= \frac{1}{2}F_Y(z) + \frac{1}{2}F_Y(z - 1) \\
&= \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{z}{2} & 0 \leq z \leq 2 \\ 1 & 2 < z \end{cases}
\end{aligned}$$

Example 3.12. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

令随机变量

$$Y = \begin{cases} 2 & X \leq 1 \\ X & 1 < X < 2 \\ 1 & 2 \leq X \end{cases}$$

1. 求 Y 的分布函数

2. 求概率 $P\{X \leq Y\}$

$1 \leq Y \leq 2$, 因此

当 $y < 1$ 时, $F_Y(y) = 0$

当 $1 \leq y < 2$ 时,

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{Y < 1\} + P\{Y = 1\} + P\{1 < Y \leq y\} \\
&= 0 + P\{X \geq 2\} + P\{1 < X \leq y\} \\
&= \int_2^3 \frac{1}{9}x^2 dx + \int_1^y \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{y^3 + 18}{27}
\end{aligned}$$

当 $2 \leq y$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{Y \leq 2\} = 1$

$$\begin{aligned}
P\{X \leq Y\} &= P\{X = Y\} + P\{X < Y\} \\
&= P\{1 < X < 2\} + P\{X \leq 1\} \\
&= P\{X < 2\} = \int_0^2 \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{8}{27}
\end{aligned}$$

Example 3.13. 设 $(X, Y) \sim N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $P\{X < Y\} =$

$$P\{X < Y\} = \iint_{x < y} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2 + (y-\mu)^2]} dx dy$$

用极坐标

$$\begin{cases} x - \mu = \rho \cos \theta \\ y - \mu = \rho \sin \theta \end{cases}$$

则

$$P\{X < Y\} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho = \frac{1}{2}$$

或由对称性得

Example 3.14. 设随机变量 X, Y 相互独立, 服从同一参数为 λ 的泊松分布, 试求: 随机变量 $Z = X + Y$ 的分布律

$$\begin{aligned}
P\{Z = k\} &= P\{X + Y = k\} = \sum_{i=0}^k P\{X = i, Y = k - i\} = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \frac{\lambda^{k-i} e^{-\lambda}}{(k-i)!} \\
&= e^{-2\lambda} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^k}{i!(k-i)!} = e^{-2\lambda} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-2\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i = e^{-2\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} (1+1)^k \\
&= \frac{(2\lambda)^k}{k!} e^{-2\lambda}, k = 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

Example 3.15. 设随机变量 X_i 的概率分布为

X_i	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$i = 1, 2$, 且满足 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$, 则 $P\{X_1 = X_2\} =$

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2	
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

Example 3.16.