Sprawozdanie z listy 4

Jarosław Socha
268463

2 grudnia 2023

1 Obliczanie ilorazów różnicowych

Celem algorytmu jest obliczenie ilorazów różnicowych $f[x_0]$, $f[x_0, x_1]$, ... , $f[x_0, ..., x_n]$.

1.1 Algorytm

Dane:

- x - wektor długości $n + 1$ zawierający węzły x_0,...,x_n
- f - wektor długości $n + 1$ zawierający wartości funkcji w węzłach x

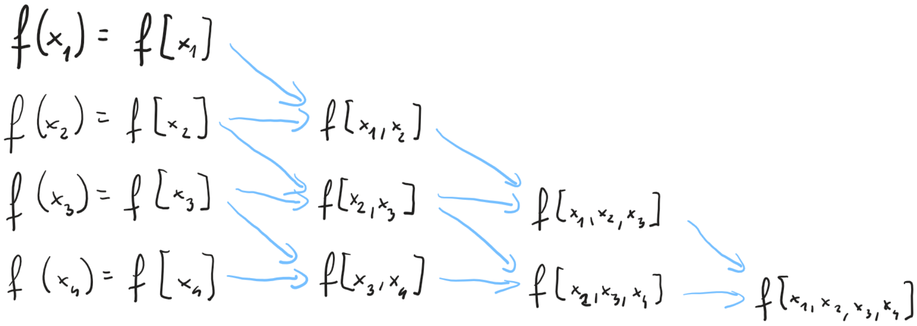
Wyniki:

- fx - wektor długości $n + 1$ zawierający obliczone ilorazy różnicowe $[f[x_0], f[x_0, x_1], ..., f[x_0, ..., x_n]]$

Do obliczenia kolejnych ilorazów różnicowych wykorzystamy własność rekurencyjną:

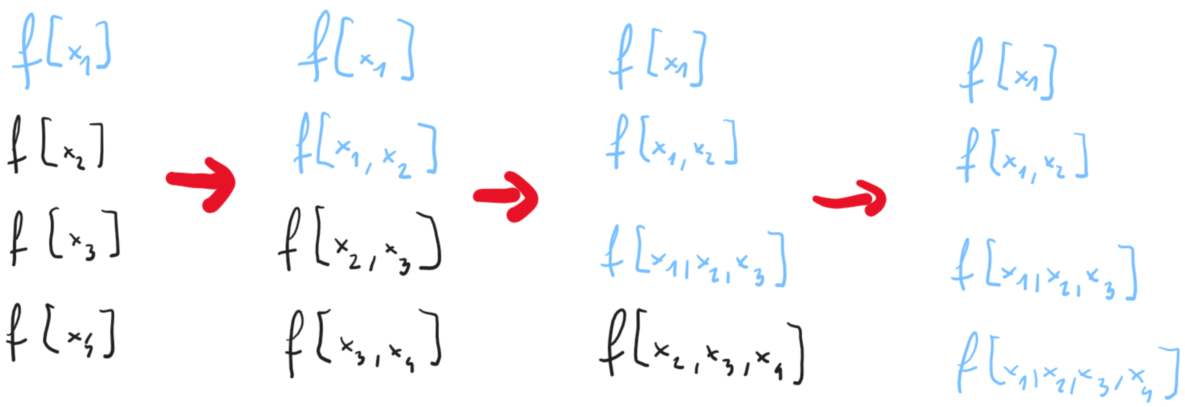
$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f[x_1, ..., x_n] - f[x_0, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Algorytm będzie działał zgodnie z rysunkiem:



Rysunek 1: Graficzna reprezentacja wyznaczania ilorazów rekurencyjnie

Iterujemy przez wektor początkowy n razy. W każdej iteracji (przyjmijmy, że k to numer iteracji) przeglądamy $n-k$ ostatnich wierszy od końca i obliczamy dla nich ilorazy różnicowe. Zauważmy, że przykładowo dla pierwszej iteracji wartości $f[n]$ potrzebujemy jedynie przy obliczaniu $f[n-1,n]$, a więc możemy ją nadpisać nowo otrzymaną wartością. Dzięki temu do obliczeń wystarczy jednowymiarowa tablica.



Rysunek 2: Wizualizacja użycia jednej tablicy. Wartości niebieskie to te, które mają się znaleźć w tablicy końcowej

Pseudokod metody:

$fx := f$
for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**
  for $i \leftarrow n$ **downto** k **do**
    $fx[i+1] := \frac{fx[i+1]-fx[i]}{x[i+1]-x[i+1-k]}$
  end for
end for

1.2 Własności

Obliczone ilorazy pozwalają na interpolację funkcji wielomianem, oraz pozwalają obejść problem źle uwarunkowanej macierzy Vandermonde'a, która pojawia się przy klasycznej interpolacji funkcji wielomianem. Ze względu na dwie pętle złożoność to $O(n^2)$.

2 Wartość wielomianu interpolacyjnego w punkcie

Algorytm oblicza wartość wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera.

2.1 Algorytm

Dane:

- x - wektor długości $n+1$ zawierający węzły x_0,...,x_n
- fx - wektor długości $n+1$ zawierający obliczone ilorazy różnicowe $[f[x_0], f[x_0, x_1], ..., f[x_0, ..., x_n]]$
- t - punkt

Wynik:

- nt - wartość funkcji w punkcie t

Wartość wielomianu w punkcie t można zapisać jako:

$$w(t) = fx[1] + (t - x_1) \cdot (fx[2] + (t - x_2) \cdot (... \cdot (fx[n] \cdot (t - x_n) \cdot (fx[n+1]))...))$$

W procedurze obliczamy tę wartość od środka. Zaczynamy od $nt := fx[n+1]$. Dla każdego i od n do 1, nadpisujemy $nt := fx[i] + (t - x_i) \cdot nt$. Po całej iteracji nt będzie wartością wielomianu interpolacyjnego w punkcie t.

2.2 Własności

Ze względu na jedną pętlę złożoność algorytmu to $O(n)$.

3 Postać naturalna wielomianu

Algorytm wyznacza współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci naturalnej.

3.1 Algorytm

Dane:

- x - wektor długości $n+1$ zawierający węzły x_0,...,x_n
- fx - wektor długości $n+1$ zawierający obliczone ilorazy różnicowe $[f[x_0], f[x_0, x_1], ..., f[x_0, ..., x_n]]$

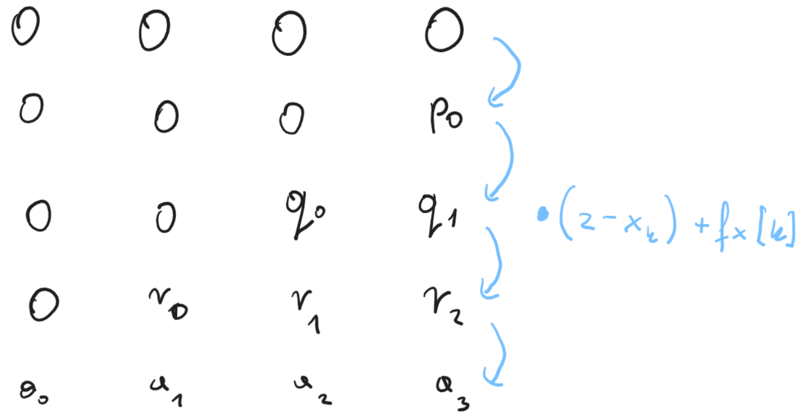
Wyniki:

- a - wektor długości $n+1$ zawierający współczynniki wielomianu w postaci naturalnej $[a_0, ..., a_n]$

Posłużymy się tutaj, podobnie jak w poprzednim algorytmie, metodą Hornera, tym razem jednak nie obliczamy wartości w punkcie, a dążymy do pełnej postaci wielomianu. W tym celu wymnożymy formułę

$$w(z) = fx[1] + (z - x_1) \cdot (fx[2] + (z - x_2) \cdot (... \cdot (fx[n] \cdot (z - x_n) \cdot (fx[n+1]))...))$$

do postaci naturalnej. Niech wielomian będzie reprezentowany tablicą współczynników a, czyli zaczynamy od $a = [fx[n+1]]$. Następnie iterujemy, dla każdego k od n do 1 mnożymy wielomian a przez $(z - x[i])$, po czym dodajemy $fx[i]$. Mnożenie wykonujemy poprzez dodanie do tabeli z przodu nowego miejsca, a następnie od każdej komórki odejmujemy jej następnika pomnożonego przez $x[k]$. Implementacyjnie zaczynamy od tablicy zer wielkości $n+1$, a k jest wskaźnikiem na współczynnik przy najniższej potędze obecnego wielomianu.



Rysunek 3: Przykładowy przebieg algorytmu. W kolejnych wierszach są kolejne postacie wielomianu

Pseudokod:

$a = [0] \cdot (n+1)$
for $k \leftarrow n$ **downto** 1 **do**
  for $i \leftarrow k$ **to** n **do**
    $a[i] := a[i] - x[k] \cdot a[i+1]$
  end for
  $a[k] := a[k] + fx[k]$
end for

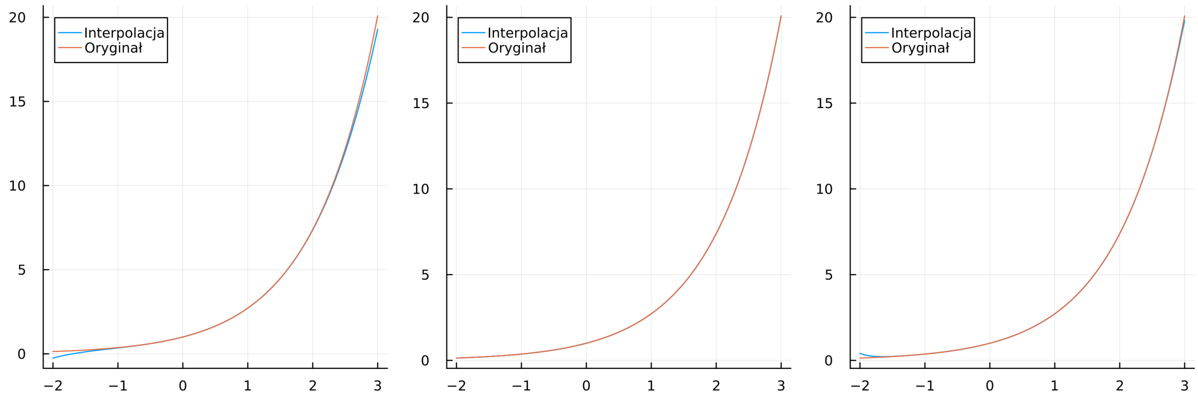
3.2 Własności

Iterujemy $n+1$ razy, a w każdej iteracji przechodzimy przez dotychczasowy wielomian. Oznacza to, że wykonujemy $\frac{n(n+1)}{2}$ operacji, więc złożoność to $O(n^2)$.

4 Testy

4.1 e^x (Zadanie 5a)

Interpolujemy funkcję e^x na przedziale $[0, 1]$ wielomianem o stopniu odpowiednio 5,10 i 15. Węzły są w równych odległościach od siebie.

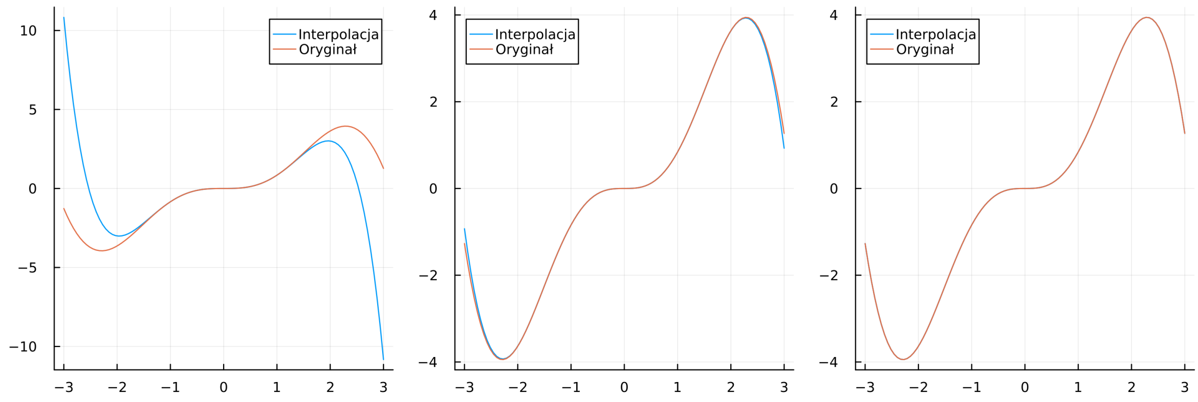


Rysunek 4: Funkcja oryginalna i wielomian interpolacyjny o stopniu odpowiednio 5,10 i 15

Jak widać, już dla przybliżeń wielomianem o niskim stopniu mamy bardzo bliski wynik (wykresy się pokrywają).

4.2 $x^2sin(x)$ (Zadanie 5b)

Interpolujemy funkcję $x^2sin(x)$ na przedziale $[-1, 1]$ wielomianem o stopniu odpowiednio 5,10 i 15. Węzły są w równych odległościach od siebie.

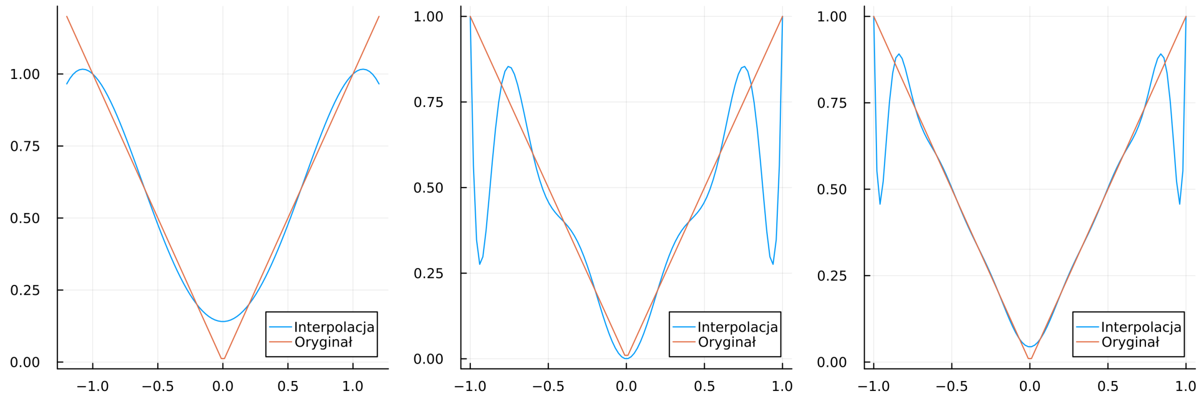


Rysunek 5: Funkcja oryginalna i wielomian interpolacyjny o stopniu odpowiednio 5,10 i 15

Tutaj także funkcja jest dobrze przybliżona na przedziale. Wraz ze zwiększaniem stpnia wielomianu powiększa się przedział, na którym wielomian dobrze przybliża funkcję.

4.3 $|x|$ (Zadanie 6a)

Interpolujemy funkcję $|x|$ na przedziale $[-1, 1]$ wielomianem o stopniu odpowiednio 5,10 i 15. Węzły są w równych odległościach od siebie.

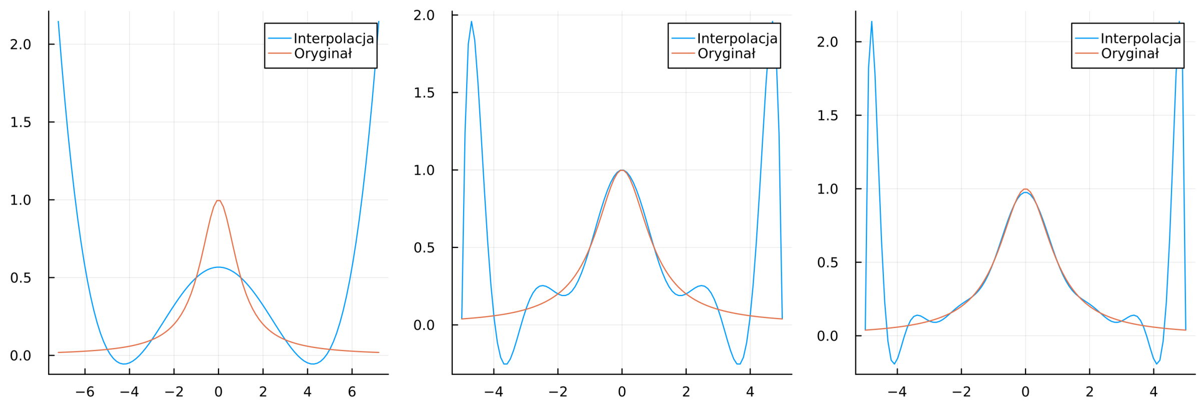


Rysunek 6: Funkcja oryginalna i wielomian interpolacyjny o stopniu odpowiednio 5,10 i 15

Funkcja $|x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie 0, więc nie jesteśmy w stanie jej dobrze przybliżyć wielomianem, który jest funkcją różniczkowalną w każdym punkcie. Jedyne co możemy zrobić to zwiększać stopień wielomianu interpolacyjnego, co powoli przybliży nas do odzwierciedlenia nagłej zmiany pochodnej funkcji wokół punktu 0. Dodatkowo, na samym przedziale przy jego krańcach powstają artefakty, wartości silnie odbiegają od poprawnych (różnica około 0.5 dla $x = 0.9$), choć w węzłach interpolacyjnych przyjmują poprawne wartości. Takie powiększenie błędu wraz ze zwiększeniem stopnia wielomianu, zwłaszcza przy końcach przedziału, nazywane jest zjawiskiem Rungego. Dodatkowym czynnikiem powstania tego zjawiska jest równomierne rozłożenie węzłów interpolacyjnych.

4.4 $\frac{1}{1+x^2}$ (Zadanie 6b)

Interpolujemy funkcję $\frac{1}{1+x^2}$ na przedziale $[-5, 5]$ wielomianem o stopniu odpowiednio 5,10 i 15. Węzły są w równych odległościach od siebie.



Rysunek 7: Funkcja oryginalna i wielomian interpolacyjny o stopniu odpowiednio 5,10 i 15

Tutaj także możemy zauważyć efekt Rungego, nie jest on jednak powodowany tym, że funkcja nie ma ciągłej pochodnej, a tym, że węzły do interpolacji były w jednakowych odstępach od siebie.