# Sprawozdanie z listy 3


Jarosław Socha
268463


17 listopada 2023

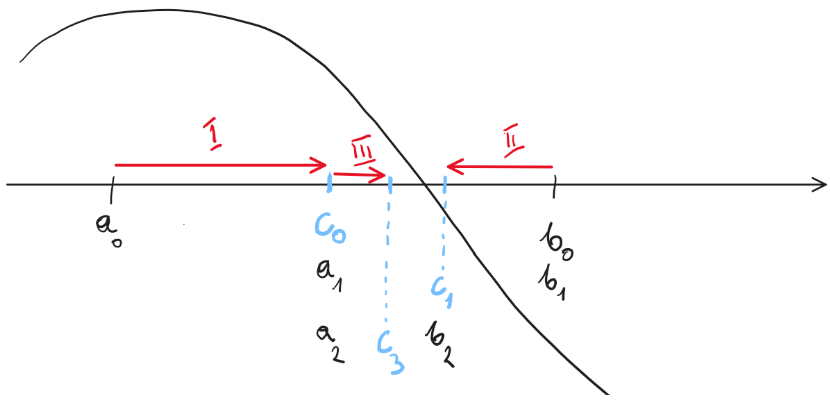
## 1 Metoda bisekcji

Metoda bisekcji to pierwsza z metod znajdywania miejsc zerowych funkcji. Polega ona na zawężaniu przedziału (dzieleniu na pół - stąd bisekcja), w którym znajduje się szukane miejsce zerowe.

### 1.1 Algorytm

Dane:

- $f$ - funkcja
- $a$, $b$ - liczby rzeczywiste
- $\delta$, $\epsilon$ - dokładności obliczeń




Rysunek 1: Graficzna iteracja metody bisekcji

Warunkiem zbieżności metody jest to, że funkcja na przedziale $[a, b]$ jest ciągła oraz $f(a)$ i $f(b)$ są różnych znaków. Następnie znajdujemy środek przedziału $c = a + \frac{a-b}{2}$. Jeśli $f(c)$ jest tego samego znaku co $f(a)$, to zawężamy przedział poszukiwań do $[c, b]$ (czyli $a := c$), w przeciwnym wypadku zawężamy do $[a, c]$ (czyli $b := c$). Dzięki temu przy każdej iteracji miejsce zerowe znajduje się w nowym przedziale, ponieważ jego krańce mają różne znaki. Powtarzamy tę procedurę, aż nie osiągniemy jednego z dwóch warunków wyjścia:

1. długość przedziału jest mniejsza niż $\delta$
2. wartość funkcji w c jest wystarczająco mała ($|f(c)| \leqslant \epsilon$)

### 1.2 Własności

Metoda ta jest globalnie zbieżna, o ile przedział spełnia założenia początkowe, to dojdziemy do miejsca zerowego. Niestety nie jest ona szybka, potrzeba wielu iteracji, by znaleźć się dostatecznie blisko miejsca zerowego (wykładnik $\alpha = 1$), stąd powstały następne metody.

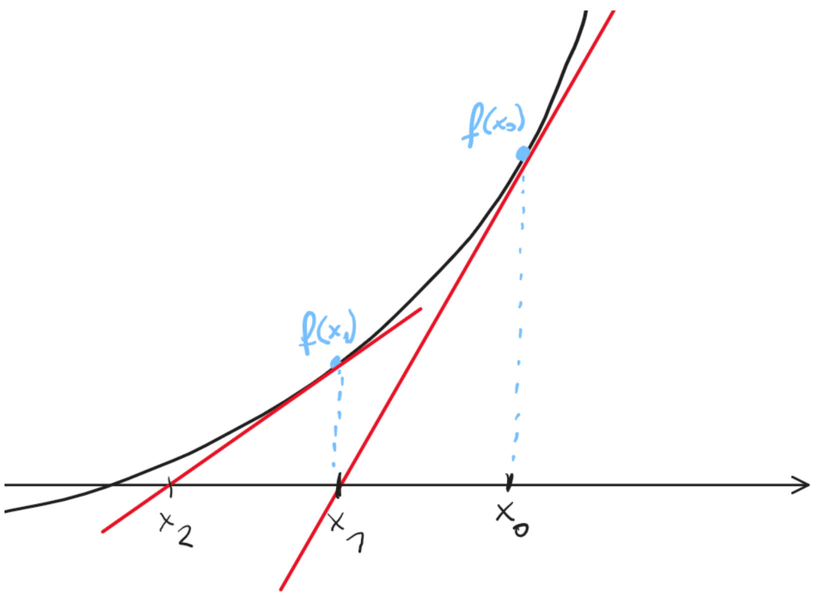
## 2 Metoda Newtona (metoda stycznych)

Metoda Newtona polega na przybliżaniu miejsca zerowego przy użyciu prostej stycznej do wykresu funkcji w punkcie.

### 2.1 Algorytm

Dane:

- $f$ - funkcja
- $pf$ - pochodna funkcji
- $x_0$ - punkt startowy iteracji
- $\delta$, $\epsilon$ - dokładności obliczeń
- $maxit$ - maksymalna dopuszczalna liczba iteracji




Rysunek 2: Graficzna iteracja metody Newtona

Tworzymy prostą styczną do wykresu funkcji w punkcie $f(x_0)$. Znajdujemy punkt przecięcia tej prostej z osią $y = 0$ ($x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{pf(x_0)}$, a następnie podstawiamy za $x_0$ ten właśnie punkt. W implementacji obliczamy punkt przecięcia przy pomocy wartości funkcji $f(x_0)$ i pochodnej w punkcie $pf(x_0)$. Następnie powtarzamy procedurę z nowym $x_0$ aż nie osiągniemy jednego z trzech warunków wyjścia:

1. odległość między nowym a poprzednim $x_0$ jest mniejsza od $\delta$
2. wartość funkcji w $x_0$ jest wystarczająco mała ($|f(x_0)| \leqslant \epsilon$)
3. osiągnięto maksymalną liczbę iteracji $maxit$

## 2.2 Własności

Metoda ta działa zdecydowanie szybciej niż metoda bisekcji (wykładnik $\alpha = 1$), aczkolwiek ma też pewne wady. Pierwszą z nich jest to, że potrzebujemy jawnego wzoru na pochodną funkcji, co nie zawsze jest proste czy nawet możliwe. Po drugie, metoda nie jest globalnie zbieżna, silnie zależy od początkowego przybliżenia $x_0$ i tego, jak pochodna zachowuje się w tej okolicy.

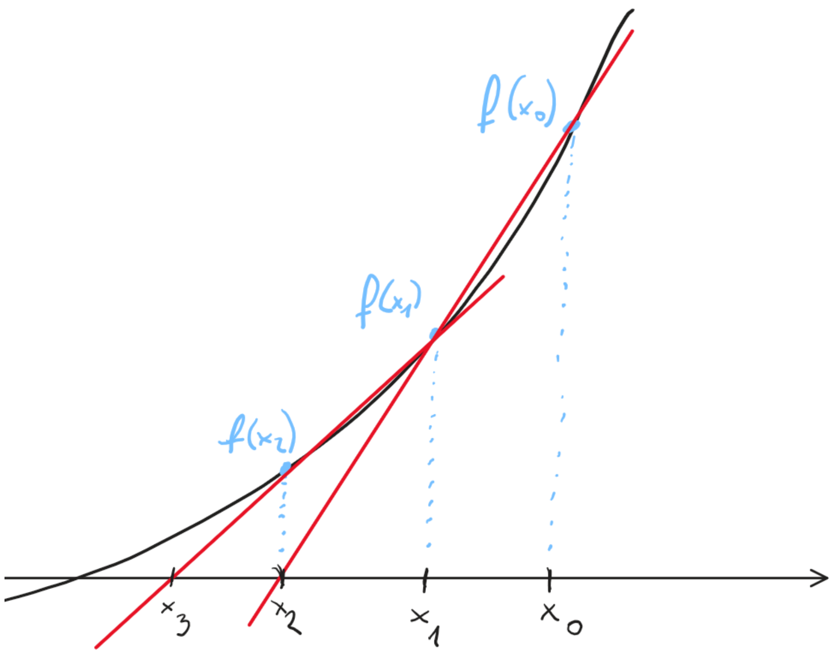
# 3 Metoda siecznych

Metoda siecznych jest bardzo podobna do metody Newtona, z tym że kolejne przybliżenia obliczamy za pomocą siecznej, której nachylenie liczymy dzięki ilorazowi różnicowemu, a nie stycznej jak poprzednio.

## 3.1 Algorytm

Dane:

- $f$ - funkcja
- $x_0$ - pierwszy punkt startowy iteracji
- $x_1$ - drugi punkt startowy iteracji, bliżej miejsca zerowego
- $\delta$, $\epsilon$ - dokładności obliczeń
- $maxit$ - maksymalna dopuszczalna liczba iteracji




Rysunek 3: Graficzna iteracja metody siecznych

Za pomocą dwóch punktów startowych $x_0$ i $x_1$ obliczamy iloraz różnicowy, który zostanie współczynnikiem kierunkowym siecznej. Znajdujemy punkt przecięcia tej prostej z osią $y = 0$ (punkt $x_2 = x_1 - f(x_1) * \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)}$), a następnie przypisujemy $x_0 := x_1$ i $x_1 := x_2$. Procedurę powtarzamy z nowymi wartościami, aż nie osiągniemy jednego z trzech warunków wyjścia:

1. odległość między $x_0$ a $x_1$ jest mniejsza od $\delta$
2. wartość funkcji w $x_1$ jest wystarczająco mała ($|f(x_1)| \leqslant \epsilon$)
3. osiągnięto maksymalną liczbę iteracji $maxit$

### 3.2 Własności

Metoda ta w przeciwieństwie do metody Newtona nie wymaga jawnego wzoru na pochodną, ale tracimy za to trochę na szybkości zbiegania (wykładnik $\alpha = \phi \approx 1.618$). Podobnie do metody Newtona nie jest ona globalnie zbieżna, zbieżność zależy od punktów początkowych $x_0$ i $x_1$.

## 4 Testy

### 4.1 $sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2$

Celem jest wyznaczyć rozwiązani $r$ równania $sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ powyższymi metodami dla danych argumentów. Zatem dla $f(x) = sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2$ otrzymujemy:

| Metoda | Argumenty | $\delta$, $\epsilon$ | $r$ | $f(r)$ | Iteracje | Błąd |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Bisekcji | $a = 1.5$, $b = 2$ | $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ | 1.93375397 | $-2.70 \cdot 10^{-7}$ | 15 | brak |
| Newtona | $x_0 = 1.5$ | $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ | 1.93375378 | $-2.24 \cdot 10^{-8}$ | 4 | brak |
| Siecznych | $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ | $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ | 1.93375364 | $1.57 \cdot 10^{-7}$ | 4 | brak |

Wszystkie metody zwróciły rozwiązania zgodne z zadaną precyzją, przy czym zgodnie z przewidywaniami metodzie bisekcji zajęło to najwięcej iteracji.

### 4.2 $3x = e^x$

Celem jest wyznaczyć punkt przecięcia $y = 3x$ i $y = e^x$ metodą bisekcji. Po narysowaniu obydwu funkcji widać, że będziemy szukać maksymalnie dwóch pierwiastków. Sprawdzamy wartość $f(x) = e^x - 3x$ dla kilku przykładowych punktów:

- $f(0) = 1 > 0$
- $f(1) \approx -0.28 < 0$
- $f(2) \approx 1.38 > 0$

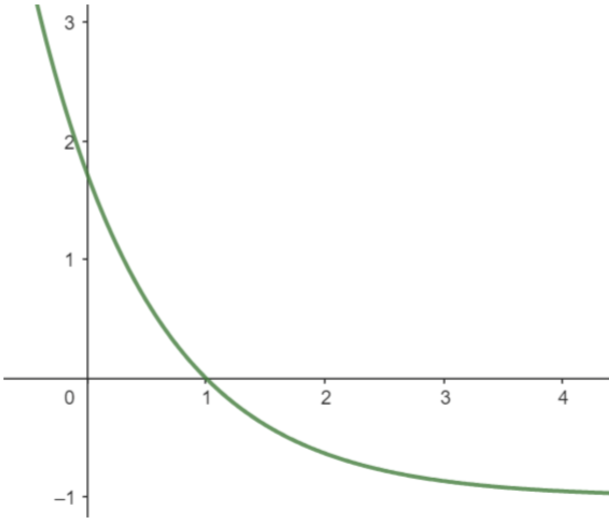
Otrzymujemy zatem dwa poprawne przedziały, $[0, 1]$ i $[1, 2]$, zbiegające do dwóch różnych miejsc zerowych. Wyniki:

| Przedział | $\delta$, $\epsilon$ | $r$ | $f(r)$ | Iteracje | Błąd |
|---|---|---|---|---|---|
| $[0, 1]$ | $10^{-4}$ | 0.6191 | $-9.07 \cdot 10^{-5}$ | 8 | brak |
| $[1, 2]$ | $10^{-4}$ | 1.5121 | $-7.62 \cdot 10^{-5}$ | 12 | brak |

Otrzymaliśmy rozwiązania zgodne z precyzją. Dotarcie do drugiego rozwiązania zajęło więcej zapewne dlatego, że funkcja na drugim przedziale przecina oś $y = 0$ pod większym kątem.

## 4.3 $e^{1-x} - 1$

Celem jest wyznaczyć miejsce zerowe $x_0$ funkcji $f(x) = e^{1-x} - 1$ wszystkimi trzema metodami. Narysujemy funkcję, by dobrać odpowiednie wartości początkowe:




Rysunek 4: $f(x) = e^{1-x} - 1$

Z rysunku wynika, że miejsce zerowe na pewno jest w przedziale $[0, 2]$, a od $x = 0$ aż do pierwiastka styczna będzie prowadzić coraz bliżej rozwiązania. Wyniki:

| Metoda | Argumenty | $\delta$, $\epsilon$ | $r$ | $f(r)$ | Iteracje | Błąd |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Bisekcji | $a = 0$, $b = 2$ | $10^{-5}$ | 1 | 0 | 0 | brak |
| Newtona | $x_0 = 0$ | $10^{-5}$ | 0.999998 | $1.56 \cdot 10^{-6}$ | 4 | brak |
| Siecznych | $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ | $10^{-5}$ | 0.9999998 | $1.87 \cdot 10^{-7}$ | 5 | brak |

Dotarliśmy do rozwiązania $r = 1$ z podaną precyzją. Dla metody bisekcji zbiegamy szybko, ponieważ rozwiązanie leży dokładnie w środku przedziału, ale gdy lekko zaburzymy przedział:

| Metoda | Argumenty | $\delta$, $\epsilon$ | $r$ | $f(r)$ | Iteracje | Błąd |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Bisekcji | $a = 0.5$, $b = 2$ | $10^{-5}$ | 0.999992 | $7.63 \cdot 10^{-6}$ | 15 | brak |

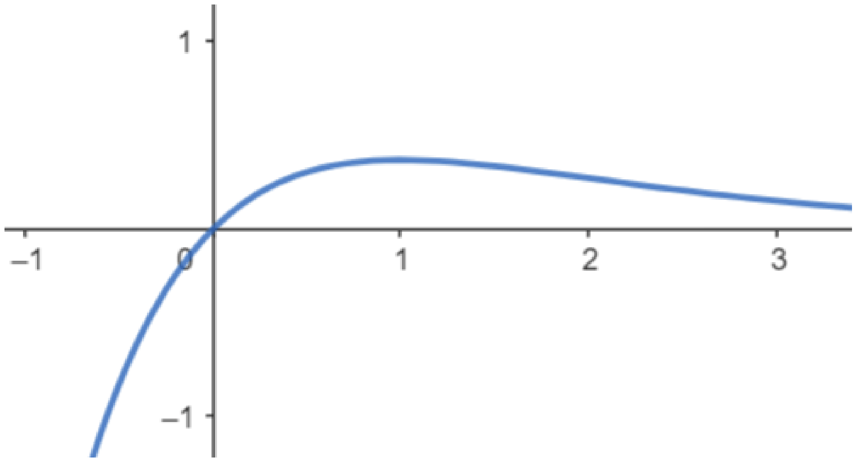
Otrzymamy większą liczbę iteracji od pozostałych metod, zgodnie z przewidywaniami.

Anomalie:
Teraz sprawdzimy wyniki metody Newtona dla $x_0 \in (1, \infty)$. Problemy będą tu wynikały z tego, gdzie będzie pierwsze przecięcie stycznej z $y = 0$. Jeśli przecięcie będzie poniżej $-708$ (wyznaczone eksperymentalnie), to wartość tej funkcji w takim punkcie wynosi nieskończoność, czyli liczba jest za duża dla Float64. Obliczając dla jakich punktów startowych wyjdziemy poza przedział ($x - \frac{f(x)}{pf(x)} < -708$) otrzymujemy, że stanie się tak dla $x_0 > 7.57$. Dla liczb poniżej tej wartosci, im bliżej niej się znajdziemy, tym więcej iteracji potrzebujemy aby uzyskać precyzję (bardzo duże nachylenie funkcji dla liczb ujemnych powoduje powolne zbieganie). Dla liczb powyżej 7.57 otrzymujemy NaN.

| Metoda | Argumenty | $\delta$, $\epsilon$ | $r$ | $f(r)$ | Iteracje | Błąd |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Newtona | $x_0 = 2$ | $10^{-5}$ | 0.99999 | $1.89 \cdot 10^{-8}$ | 5 | brak |
| Newtona | $x_0 = 4$ | $10^{-5}$ | 0.99999 | $4.72 \cdot 10^{-10}$ | 21 | brak |
| Newtona | $x_0 = 6$ | $10^{-5}$ | 0.99999 | $4.26 \cdot 10^{-8}$ | 147 | brak |
| Newtona | $x_0 = 7.57$ | $10^{-5}$ | 0.99999 | $2.71 \cdot 10^{-6}$ | 710 | brak |
| Newtona | $x_0 = 7.58$ | $10^{-5}$ | $NaN$ | $NaN$ | 1000 | nie osiągnięto wymaganej precyzji |
| Newtona | $x_0 = 10$ | $10^{-5}$ | $NaN$ | $NaN$ | 1000 | nie osiągnięto wymaganej precyzji |

## 4.4 $xe^{-x}$

Celem jest wyznaczyć miejsce zerowe $x_0$ funkcji $f(x) = xe^{-x}$ wszystkimi trzema metodami. Narysujemy funkcję, by dobrać odpowiednie wartości początkowe:




Rysunek 5: $f(x) = xe^{-x}$

Z rysunku wynika, że pierwiastek na pewno jest w przedziale $[-1, 1]$, a od $x = -1$ aż do pierwiastka styczna będzie prowadzić coraz bliżej rozwiązania. Wyniki:

| Metoda | Argumenty | $\delta$, $\epsilon$ | $r$ | $f(r)$ | Iteracje | Błąd |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Bisekcji | $a = -1$, $b = 1$ | $10^{-5}$ | 0 | 0 | 0 | brak |
| Newtona | $x_0 = -1$ | $10^{-5}$ | $-3.06 \cdot 10^{-7}$ | $-3.06 \cdot 10^{-7}$ | 5 | brak |
| Siecznych | $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{2}$ | $10^{-5}$ | $-1.22 \cdot 10^{-7}$ | $-1.22 \cdot 10^{-7}$ | 6 | brak |

Otrzymaliśmy rozwiązania zgodne z precyzją. Podobnie jak w poprzednim przykładzie metoda bisekcji szybko zbiegła przez symetrię przedziału wokół rozwiązania, ale gdy zaburzymy przedział:

| Metoda | Argumenty | $\delta$, $\epsilon$ | $r$ | $f(r)$ | Iteracje | Błąd |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Bisekcji | $a = -0.5$, $b = 1$ | $10^{-5}$ | $-7.63 \cdot 10^{-6}$ | $-7.63 \cdot 10^{-6}$ | 15 | brak |

Otrzymujemy przewidywaną liczbę iteracji. Podobieństwo miejsc zerowych do wartości funkcji wynika z tego, że pochodna w punkcie $x = 0$ dla $f(x)$ to 1.

Anomalie:
Dla $x_0 > 1$ metodą Newtona podążanie za styczną prowadzi nas do coraz większych wartości, które dążą do zera ale nigdy go nie osiągają, więc nie dostaniemy poprawnego pierwiastka. Za to dla $x_0 = 1$ pochodna jest równa zero, więc styczna nie przecina osi $y = 0$. W algorytmie dzielimy przez zero, więc otrzymujemy NaN.

| Metoda | Argumenty | $\delta$, $\epsilon$ | $r$ | $f(r)$ | Iteracje | Błąd |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Newtona | $x_0 = 1.2$ | $10^{-5}$ | 14.97 | $4.69 \cdot 10^{-6}$ | 8 | brak |
| Newtona | $x_0 = 2$ | $10^{-5}$ | 14.39 | $8.04 \cdot 10^{-6}$ | 10 | brak |
| Newtona | $x_0 = 3$ | $10^{-5}$ | 14.79 | $5.59 \cdot 10^{-6}$ | 10 | brak |
| Newtona | $x_0 = 1$ | $10^{-5}$ | $NaN$ | $NaN$ | 1000 | nie osiągnięto wymaganej precyzji |

Te same wartości dla $x_0 > 1$ oznaczają, że już dla wartości w okolicach 14 osiągana jest wystarczająca precyzja.