

Ahojte,

držíte v rukách Zbierku úloh Jarného Matboja v Trnave 2023 a ich vzorové riešenia. Jarný Matboj v Trnave je matematická súťaž pre žiakov piateho až ôsmeho ročníka základných škôl a prímý až terciu osemročných gymnázií. Súťaž organizuje P-MAT, n. o. (organizátor korešpondenčných seminárov Pikomat, Pikofyz a Terabio).

Štvorčlenné tímy žiakov sú rozdelené do štyroch súťažných kategórií – 5, 6, 7 a 8.

Súťaž prebieha 105 minút, počas ktorých sa súťažiaci snažia vyriešiť čo najviac úloh. Okrem toho dostanú za každú správne vyriešenú úlohu jeden ťah v strategickej hre. Konečné poradie tímov teda neovplyvňuje len počet vyriešených úloh, ale aj to, ako dobre sa im darilo v tejto hre.

Táto súťaž je zameraná na zlepšenie logického myslenia, matematického uvažovania a práce v tíme, no predovšetkým na možnosť objaviť radosť z matematiky. Vytvorili sme túto zbierku úloh, aby žiaci, ktorých úlohy zaujali, mali možnosť znova si ich preriešiť, poprípade si prečítali vzorové riešenia, z ktorých sa dá veľmi veľa naučiť, aj keď úlohu vyriešili správne. Taktiež môže slúžiť ako inšpirácia pre učiteľov na čerpanie netradičnejších úloh na hodiny matematiky.

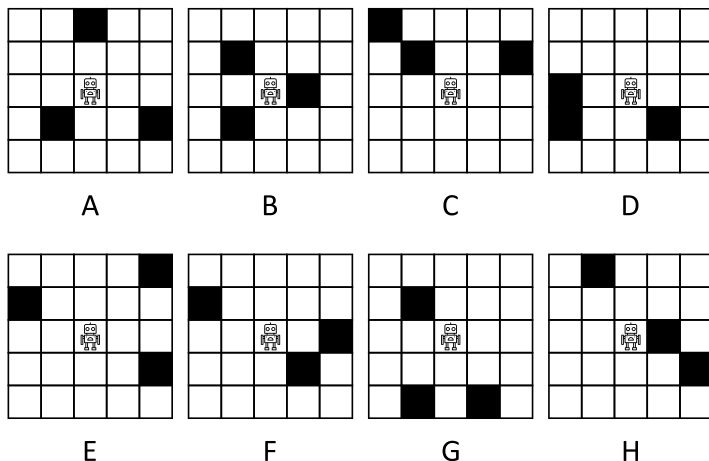
Želáme Vám príjemné riešenie a veľa nových poznatkov!

Vaši organizátori Jarného Matboja v Trnave 2023

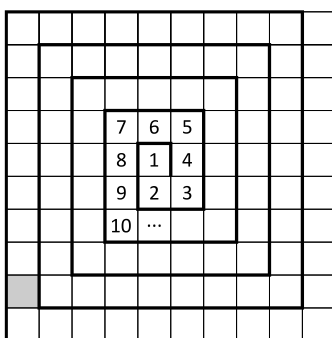
Úloha 01. Terka si postavila robota. Postavila ho na štvorčekovú sieť. Na niektoré políčka (na obrázkoch vyznačené čiernou) dá Terka prekážky. Potom bude Terka dávať robotovi niekoľko pokynov a sledovať, či robot narazí do nejakej prekážky. Pritom zistila, že:

- Ak nechá robota ísť o dve políčka nahor a o dve políčka doprava, tak robot cestou nenarazí do prekážky.
- Ak nechá robota ísť o dve políčka nadol, o dve políčka doľava a o dve políčka nahor, tak robot cestou nenarazí do prekážky.
- Ak nechá robota ísť o jedno políčko doprava, o jedno políčko nadol a opäť o jedno políčko doprava, tak robot cestou narazí do prekážky.

Na ktorých obrázkoch sú nakreslené štvorčekové siete, pre ktoré môžu nastať situácie vyššie?



Úloha 02. Zuzka si začala písať čísla do špirály. Prvých desať čísel napísala tak ako na obrázku. Aké číslo napíše Zuzka do šedého políčka?



Úloha 03. Šiesti kamaráti sa hrali piškvorky. Vždy sa nejako rozdelili na tri dvojice, v ktorých si zahrali piškvorky. V každej dvojici niekto vyhral a prehral alebo sa zápas skončil remízou. Kamaráti vytvorili tabuľku toho, ako sa im darilo – k víťazovi napísali V, k porazenému P a keď zápas skončil remízou, tak k obojmu napísali R. Po šiestich kolách vyzerala tabuľka ako na obrázku. Ako vyzerá Filipov riadok v tejto tabuľke?

	1	2	3	4	5	6
Andrea	V	P	R	V	R	P
Beáta	P	V	V	P	R	R
Cyril	R	P	V	V	R	P
Denis	R	V	R	P	R	V
Eva	P	R	P	P	R	V
Filip	?	?	?	?	?	?

Úloha 04. Partia dievčat bola včera vonku. Keď sa dnes Milena snažila rozpamätať, kto všetko tam bol, spomenula si len na Irenu, Simonu a Denisu. Na posledné dievča si nevedela spomenúť. Spomínala si však na nasledovné veci:

- toto dievča malo meno pozostávajúce zo štyroch písmen
- písmeno, ktoré sa v menách dievčat vyskytovalo najčastejšie, bola spoluhláska
- druhý najväčší počet výskytov nejakého písmena mali dve rôzne písmená

Ako sa volalo dievča, na ktoré si Milena nespomenula?

Poznámka: Ak sa v mene vyskytuje niektorá z dvojhlások ia, ie, iu, berieme ju v tejto úlohe ako dve samostatné písmená.

Úloha 05. Patrik si zobral niekoľko špajdlí a rozlomil ich na 6 kúskov dlhých postupne 2 cm, 3 cm, 4 cm, 6 cm, 9 cm, 10 cm. Z týchto kúskov by chcel poskladať dva trojuholníky. Na každý z nich použije tri kúsky. Koľkými spôsobmi môže Patrik poskladať trojuholníky?

Úloha 06. Tomáš si napísal bodkami oddelené čísla: 2 . 0 . 2 . 3 . 2 . 0 . 2 . 3 a teraz by chcel namiesto každej bodky napísať znamienko „+“, „-“, alebo „×“. Potom spočíta hodnotu tohto výrazu. Aká je najväčšia možná hodnota výsledného výrazu, ktorý môže Tomáš doplnením znamienok získať?

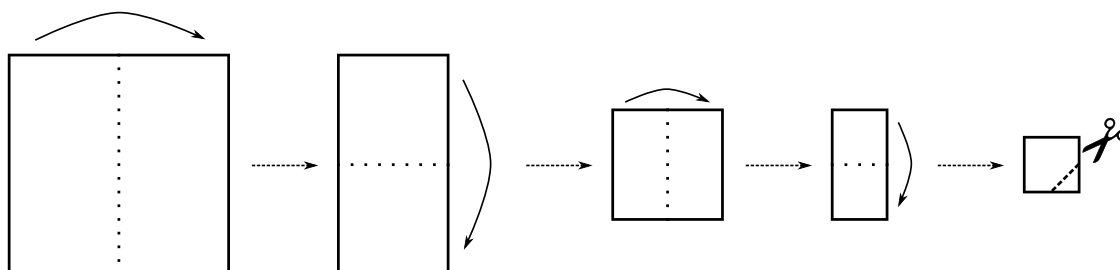
Úloha 07. Kubko má fialové a zelené dieliky stavebnice. Zelených dielikov má 100. Kubko má všetky dieliky rozdelené do troch krabíc. V každej krabici je toľko zelených dielikov, koľko je fialových dielikov vo zvyšných dvoch krabiciach dokopy. Koľko fialových dielikov má Kubko?

Úloha 08. Alicka si na tabuli vyznačila 6 bodov tak, aby žiadne tri neležali na spoločnej priamke. Potom spojila niektoré body úsečkami, tak aby sa žiadne dve úsečky nepretli (mohli mať spoločný koncový bod). Alicka zistila, že pospájala body tak, že už nevie pridať žiadnu úsečku tak, aby sa úsečky nepreťali. Koľko najviac úsečiek mohla Alicka nakresliť?

Úloha 09. Dano si vymyslel prenádherné čísla. Prirodzené číslo nazýva prenádherným, ak má ciferný súčet 25 a jeho dvojnásobok má ciferný súčet 32. Aké je najmenšie prenádherné číslo?

Úloha 10. Barbora vlastní ovocinársku firmu. Nadišiel čas, kedy treba pozbierať jablká zo sadu. V sade majú 200 jabloní s červenými jablkami, 60 jabloní so žltými jablkami a 150 jabloní so zelenými jablkami. Obráť jablň s červenými jablkami trvá 15 minút, obráť ostatné jablone trvá 20 minút. Vo firme by si chceli na tento zber najať brigádnikov. Každý brigádnik bude v jeden deň pracovať 8 hodín. Koľko najmenej brigádnikov si musí Barborkina firma najať, aby pozbierali všetky jablká za 3 dni?

Úloha 11. Jožko si vyrába ozdoby na okno. Zobral si na to štvorcový papier s hmotnosťou 40 g. Štyrikrát ho prehol na polovicu a ustrihol trojuholník ako na obrázku. Strihal pritom tak, že strih viedol od stredu jednej strany k stredu inej strany menšieho štvorca, ktorý dostal po prehnutí. Po odstrihnutí papier znova rozložil. Koľko gramov vážil papier bez odstrihnutej časti?



Úloha 12. Jožo má terasu v tvare obdĺžnika s rozmermi $12\text{ m} \times 16\text{ m}$. Chcel by ju vydláždiť nasledovne:

- Na okrajoch terasy by chcel použiť štvorcové dlaždice s rozmermi $1\text{ m} \times 1\text{ m}$.
- Zvyšok terasy by chcel vydláždiť dlaždicami s rozmermi $2\text{ m} \times 2\text{ m}$.

Koľko dlaždíc použije na vydláždenie celej terasy?

Úloha 13. Fedor si vytvoril 8 kartičiek. Na každej kartičke bolo jedno číslo, pričom na kartičkách boli všetky delitele čísla 30. Fedor sa rozhodol, že rozdelí kartičky na dve kôpky tak, aby boli súčty čísel na oboch kôpkach rovnaké. Koľkými spôsobmi to môže Fedor spraviť?

Úloha 14. Aký je najmenší násobok deviatky obsahujúci iba párne cifry väčší ako 0?

Úloha 15. Partia kamarátov šla na zmrzlinu. V zmrzlinárni predávajú dva typy zmrzlín – klasickú zmrzlinu a sorbet. Kopček klasickej zmrzliny stojí 0,70 € a kopček sorbetu stojí 1 €. Kamaráti si kúpili kopčeky a zaplatili za ne 10,90 €. Koľko kopčekov sorbetu si kúpili?

Úloha 16. Sebastián umiestnil figúrku šachového kráľa do stredu šachovnice 3×3 . Chcel by ním prejsť celú šachovnicu tak, aby každé políčko navštívil presne raz a nakoniec sa vrátil do políčka v strede. Koľkými spôsobmi to môže Sebastián spraviť?

Poznámka: Figúrka kráľa sa v každom ťahu pohnúť iba na políčko susediace stranou alebo vrcholom.

Úloha 17. V rade sú umiestnené 3 nádoby. V ľavej nádobe je 7 mincí, v strednej nádobe je 12 mincí a v pravej nádobe je 10 mincí. V každom kroku môže Aďa buď presunúť zo strednej nádoby jednu mincu do ktorejkoľvek krajnej nádoby, alebo zobrať jednu mincu z každej krajnej nádoby a pridať jednu mincu do strednej nádoby. Prestane vtedy, keď už nebude môcť vykonať žiadny krok. Koľko najviac takýchto krokov môže vykonať?

Úloha 18. Katka sa hrá s číslami. Zoberie si nejaké štvorciferné číslo a zistí, čomu sa rovná po zaokrúhlení na desiatky, stovky a tisícky. Katkine obľúbené čísla sú také čísla, že ak sčíta výsledok zaokrúhlenia na stovky sám so sebou dostane rovnaké číslo, ako keby sčítala výsledky zaokrúhlenia na desiatky a na tisícky. Koľko štvorciferných čísel je Katkiných obľúbených?

Úloha 19. Lucy sa v škole nudí, a tak sleduje dvoch mravcov, ktorý sa pohybujú po parapete za oknom. Oba mravce sa pohybujú po parapete od ľavého konca k pravému. Prvý mravec sa hýbe rýchlosťou 5 cm za sekundu a druhý rýchlosťou 4 cm za sekundu. Keď sa Lucy pozrela na mravce, bol prvý mravec o 20 cm pred druhým mravcom. O koľko centimetrov boli vzdialené mravce po 10 sekundách?

Úloha 20. Andrej sa rozhodol očíslovať všetky strany vo svojej obľúbenej knihe postupne 1, 2, 3, 4 a tak ďalej. Počas číslovania použil cifru 7 presne 14-krát. Koľko strán má Andrejova kniha?

Úloha 21. Adam, Barborka, Comp, Dominika, Erik, Filip, Gabo a Hanka sa hrajú hru. Na začiatku stoja všetci v tomto poradí v kruhu a hovoria čísla. Adam začína a povie číslo 1. Potom Barborka, stojaca po jeho pravici, povie číslo 2. Potom Comp, stojaci napravo od Barborky, povie 3 a tak ďalej. Vždy pokračuje hráč napravo od toho, kto hovoril číslo ako posledný. Ten, kto povie číslo, ktoré je násobkom 13, vystúpi z kruhu a ďalej už nehraje. Kto zostane v kruhu ako posledný?

Úloha 22. Lukáš si písal na papier čísla. Najprv napísal číslo 2 a potom číslo 1. Ďalej sa rozhodol, že každé ďalšie číslo bude súčtom predošlých dvoch čísel. Ďalšie čísla, ktoré Lukáš napísal, tak boli 3, 4, 7 a tak ďalej. Lukáš sa dozvedel, že nech bude akokoľvek dlho pokračovať v písaní týchto čísel, tak na mieste jednotiek sa nikdy nevyskytnú dve cifry. Ktoré dve cifry sa nikdy nevyskytnú na mieste jednotiek?

Úloha 23. Ákos cestoval z Komárna do Bratislavy cez Šamorín. V Komárne si všimol dopravnú značku, ktorá hovorila, že Šamorín je od Komárna vzdialený 84 a Bratislava 105 kilometrov. V istom momente počas svojej cesty si uvedomil, že vzdialenosť, ktorú musí prejsť do Šamorína, tvorí polovicu vzdialenosti, ktorú musí prejsť do Bratislavy. Koľko kilometrov bol v tomto momente vzdialený od Šamorína?

Úloha 24. Pat a Mat behajú medzi školou a obchodom, tam aj späť po tej istej ceste. Obaja naraz vyštartovali od školy a každý z nich si udržiaval svoju rýchlosť. Nakoniec obaja dobehli ku škole v rovnakom momente. V tomto momente mal Pat 14-krát zabehnuté k obchodu a späť, kým Mat len 9-krát. Koľkokrát sa počas behu Pat stretol s Matom (vrátane stretnutí na začiatku a na konci)?

Úloha 25. Majo si rád kreslí rovnoramenné trojuholníky. Tentoraz sa rozhodol pre tie s obvodom 25 cm, ktorých dĺžky strán sú vyjadrené v centimetroch celým číslom. Majo ale chce, aby každé dva trojuholníky, ktoré nakreslí, boli rôzne. Koľko trojuholníkov dokáže takto nakresliť?

Úloha 26. Samko pozeral americký seriál, keď si všimol, že Američania používajú iný formát dátumov ako my. Deň a mesiac píše naopak ako my. Takže dnešný dátum 29.3.2023 by napísali ako 3.29.2023. Samko bol z toho zmätený, lebo pri pohľade na dátum nie vždy vedel určiť, ktorý dátum sa tým myslí. Niekedy to však vedel – napríklad dnes, pretože žiadny mesiac nemá číslo 29, takže 29 musí byť číslo dňa. Koľko dní roka 2023 má taký dátum, že keď sa naň Samko pozrie, tak vie určiť, o ktorý dátum sa jedná bez ohľadu na to, či je napísaný v európskom alebo americkom formáte?

Úloha 27. Patrik je vášnivý šachista, ale aj matematik. Keď hral minule šach, tak mu napadla otázka. Koľko rôznych štvorcov (ľubovoľnej veľkosti) je určených čiarami oddeľujúcimi políčka šachovnice 8×8 ?

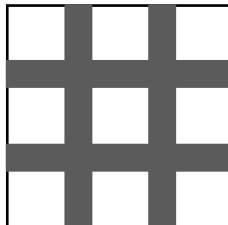
Úloha 28. Je rok 2023, čo Matejovi vnuкло otázku: „Najskôr v ktorom roku (po roku 2023) bude ciferný súčet roku znovu taký istý ako ciferný súčet roku 2023?“ Aká je odpoveď na Matejovu otázku?

Úloha 29. Laura si na papier ceruzkou nakreslila štvoruholník, päťuholník a šesťuholník. Nakreslila ich tak, že všetky tri mali spoločný vrchol. Navyše, každé dva útvary mali spoločnú jednu celú stranu vychádzajúcu z tohto vrcholu, každá dvojica útvarov inú. Laura vygumovala tieto tri spoločné strany, čím jej zostal iba mnohouholník. Koľko najviac strán mohol mať?

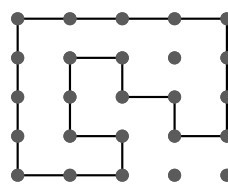
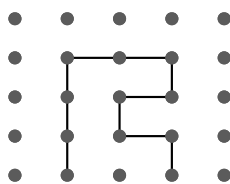
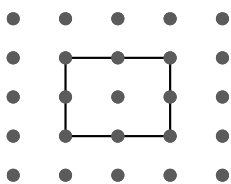
Úloha 30. Juro má 64 kartičiek pexesa. Každá z nich má z jednej strany obrázok a z druhej strany je prázdna. Každá kartička navyše tvorí s nejakou inou kartičkou pár. Juro rozložil tieto kartičky do štvorca 8×8 tak, aby každej kartičke bolo vidno len jej prázdnu stranu. Nevie však, ako vyzerajú opačné strany týchto kartičiek. Teraz by chcel Juro otočiť niekoľko kartičiek tak, aby bol medzi otočenými kartičkami aspoň jeden pár. Koľko najmenej kartičiek musí Juro otočiť, aby sa mu to určite podarilo?

Úloha 31. Lucy má 6 závaží s hmotnosťami postupne 10, 20, 30, 40, 50 a 60 gramov. Rozdelila ich do troch krabíc. Do prvej dala dve závažia, ktoré spolu vážili 90 gramov. Do druhej dala dve závažia, ktoré spolu vážili 80 gramov. Aké boli hmotnosti závaží, ktoré dala Lucy do tretej krabice?

Úloha 32. Róberta skúša nové maliarske techniky. Zobrala si štvorec papiera so stranou dlhou 40 cm. Chcela by vytvoriť akoby 9 čiernych políčok. Aby nezamaľovala nič iné, tak si zobrala niekoľko kúskov šedej lepiacej pásky širokej 5 cm a prelepila ním papier tak na obrázku. Potom zamaľovala celý obraz načierno, pričom minula 1600 gramov farby, a pásky strhla. Koľko gramov farby zostalo na papieri?



Úloha 33. Miška vyrába obrazce. Zobrala si dosku a zatĺkla do nej klince tak, aby tvorili obdĺžnikovú sieť. Potom omotávala šnúrkou okolo klinčov tak, aby žiadne dva klince neboli spojené šnúrkou viac ako raz. Takto spravila tri obrazce. Na prvý z nich použila 28 cm šnúrkou a na druhý 34 cm šnúrkou. Koľko centimetrov šnúrkou použila Miška na vytvorenie tretieho obrazcu?



Úloha 34. Braňo si všimol, že 1. január 2023 pripadol na nedeľu. Začal preto rozmýšľať, kedy sa takáto situácia bude opakovať. V ktorom najbližšom roku pripadne 1. január opäť na nedeľu?
Poznámka: Rok má 365 dní. Ale ak je číslo roku deliteľné 4, tak má 366 dní (tzv. priestupný rok).

Úloha 35. V krajine Matbojovo uctieujú tabuľku 2×2 . V každom políčku tejto tabuľky je napísané nejaké celé číslo. Táto tabuľka má takéto špeciálne vlastnosti:
Súčet čísel v prvom riadku je 18.
Súčet čísel v druhom riadku je 23.
Súčet čísel v prvom stĺpci je 9.
Aký je súčet čísel v druhom stĺpci?

Úloha 36. Majo si kúpil čarovnú mašinku. Mašinka si ukladá čísla do pamäte, a to nasledovne:

1) Majo do nej napíše číslo.

2) Mašinka vynásobí napísané číslo číslom, ktoré mala v pamäti.

3) Od výsledného čísla mašinka odčíta trojnásobok čísla, ktoré mala v pamäti.

4) Mašinka výsledkom nahradí číslo, ktoré mala v pamäti.

Na začiatku mala mašinka v pamäti číslo 17. Majo do nej napísal postupne čísla 1, 2, 3, ..., 100. Aké číslo je teraz v pamäti mašinky?

Úloha V1. Pokusného zajaca položili vedci na stôl tvaru kruhu. Ten si po ňom chvíľu pobehoval a po chvíli sa posadil do niektorého bodu kruhu. V tom momente zmerali vedci vzdialenosti zajaca od najbližšieho a najvzdialenejšieho okraja stola. Dostali vzdialenosti 56 cm a 72 cm. Aký je polomer kruhu tvoriaceho stôl?

Úloha V2. Fedor má rád čísla s veľkým ciferným súčtom. Minule našiel najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet bol 2023. Z koľkých cifier sa skladalo toto číslo?

Úloha V3. Na hodiny matematiky chodí 34 žiakov. Nedávno všetci písali písomku, z ktorej sa dalo získať 0 až 10 bodov. Keď učiteľ priniesol opravené písomky, tak zhodnotil: „Každý z vás získal celočíselný počet bodov, takže určite aspoň N z vás získalo rovnaký počet bodov.“ Pre ktoré najväčšie N mohol mať učiteľ určite pravdu bez ohľadu na to, ako dopadla písomka?

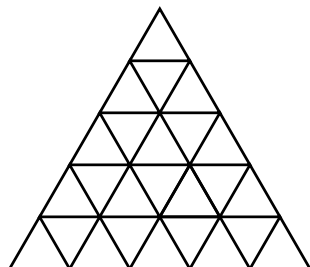
Úloha V4. Majo a Maťo bývajú na rovnakej izbe na internáte. Jeden z nich vždy hovorí pravdu a druhý z nich vždy klame. Jedného dňa sa však pohádali. Pritom medzi nimi zaznel takýto rozhovor:

Majo: „Číslo našej izby je násobkom čísla 2.“

Maťo: „Dokonca je číslo našej izby násobkom čísla 4.“

Ktorý z chlapcov hovorí pravdu a ktorý klame?

Úloha V5. Ad'ka si nakreslila rovnostranný trojuholník a rozdelila ho na niekoľko menších rovnostranných trojuholníkov tak ako na obrázku. Teraz chce povyfarbovať niektoré trojuholníky. Bude to robiť nasledovne: Vždy si vyberie ešte nevyfarbený trojuholník, ktorý stranou susedí s ešte dvomi nevyfarbenými trojuholníkmi. Ad'ka tento trojuholník spolu s jeho dvomi nevyfarbenými susedmi následne vyfarbí nejakou farbou. Toto bude Ad'ka opakovať, kým bude vedieť vyfarbovať trojuholníky spôsobom, ktorý si určila. Koľko najviac rôznych farieb môže Ad'ka použiť?



Úloha V6. Smrtka na pražskom orloji má rada dve veci: kolu a kosu. Napísala si preto úlohu na sčítanie ako na obrázku. Teraz by chcela nahradiť rovnaké písmená rovnakými ciframi tak, aby platila rovnosť a aby žiadne z čísel nezačínalo cifrou 0. Smrtke sa to podarilo. Akú hodnotu malo päťciferné číslo LASKA?

$$\begin{array}{r} \text{K O L A} \\ + \text{K O S A} \\ \hline \text{L A S K A} \end{array}$$