Ahojte,

držíte v rukách zbierku úloh a vzorových riešení Matboja 2025.
Matboj 2025 je matematická súťaž pre žiakov piateho až siedmeho ročníka základných škôl a prímy a sekundy osemročných gymnázií. Súťaž organizuje nezisková organizácia P-MAT, n. o. (organizátor korešpondenčných seminárov Pikomat, Pikofyz a Terabio).

Štvorčlenné tímy žiakov sú rozdelené do troch súťažných kategórií – 5, 6 a 7.
Súťaž prebieha 120 minút, počas ktorých sa súťažiaci snažia vyriešiť čo najviac úloh. Okrem toho dostanú za každú správne vyriešenú úlohu jeden ťah v strategickej hre. Konečné poradie tímov teda neovplyvňuje len počet vyriešených úloh, ale aj to, ako dobre sa im v tejto hre darilo.

Táto súťaž je zameraná na zlepšenie logického myslenia, matematického uvažovania a práce v tíme, no predovšetkým na možnosť objaviť radosť z matematiky. Vytvorili sme túto zbierku úloh, aby žiaci, ktorých úlohy zaujali, mali možnosť znova si ich preriešiť, poprípade si prečítali vzorové riešenia, z ktorých sa dá veľmi veľa naučiť, aj keď úlohu vyriešili správne. Taktiež môže slúžiť ako inšpirácia pre učiteľov na čerpanie netradičnejších úloh na hodiny matematiky.

Želáme Vám príjemné riešenie a veľa nových poznatkov!

Vaši organizátori

Úloha 01. *Dominika veľmi rada pečie. Z minula jej zostal ešte jeden kúsok koláča a včera upiekla ďalší koláč, ktorý rozdelila na 15 kúskov. Doma dnes na raňajky 5 kúskov zjedla a v škole rozdala 8 kúskov spolužiakom. Koľko kúskov koláča zostalo Dominike?*

Výsledok: 3
Riešenie: Pred raňajkami mala Dominika 1 + 15 = 16 kúskov koláča. Keď doma na raňajky zjedla 5 kúskov a v škole dala 8 kúskov spolužiakom, dokopy jej ubudlo 5 + 8 = 13 kúskov. Dominike teda zostali 16 - 13 = 3 kúsky koláča.

Úloha 02. *Patrik sa s kamarátmi hral hru: hodí dvoma kockami a oni si majú tipnúť súčet čísel, čo hodil. Avšak po chvíli ich to omrzelo, tak Patrikovi napadlo – čo tak použiť 20-stenné kocky? To sú také, čo majú na stenách čísla od 1 do 20. Koľko rôznych súčtov čísel, ktoré padnú na kockách, môže Patrik dostať, keď hodí dvomi takýmito 20-stennými kockami?*

Výsledok: 39
Riešenie: Pozrime sa na najmenší a najväčší súčet, čo môžeme dosiahnuť. Najmenej je to 2 (ako 1 + 1) a najviac 40 (ako 20 + 20). Čísel od 2 do 40 je práve 39, takže určite nevieme dosiahnuť viac súčtov, lebo to by sme museli prekročiť maximum alebo minimum, čo nemôžeme. Vieme však dostať všetky tieto súčty? Áno – čísla od 1 po 21 dostaneme napríklad keď na prvej kocke hodíme 1 a na druhej postupne 1 až 20, čísla od 21 po 40 dostaneme napríklad keď na jednej kocke hodíme 20 a na druhej postupne 1 až 20. Takže vieme dostať všetky súčty od 2 po 40, teda ich je 39 rôznych.

Úloha 03. *Mirko má rád dvojciferné čísla, ktorých cifra na mieste desiatok je o 2 väčšia ako cifra na mieste jednotiek. Pritom Anička má rada dvojciferné čísla, ktorých cifra na mieste desiatok je 2-krát väčšia ako cifra na mieste jednotiek. Ktoré dvojciferné číslo majú radi obaja?*

Výsledok: 42
Riešenie: Čísla, ktoré má Mirko rád, zistíme tak, že k cifre na mieste jednotiek pripočítame 2 a získame tak cifru na mieste desiatok. Napríklad 0 + 2 = 2, z čoho dostaneme číslo 20. Takto získame čísla, ktoré má Mirko rád: 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97. Podobne zo zadania vieme zistiť čísla, ktoré má rada Anička, a to sú 21, 42, 63, 84. Z toho vidíme, že jediné spoločné číslo je 42.
Poznámka: Mohli sme sa vyhnúť vypisovaniu čísel úvahou, že násobenie dvomi znamená, že sčítavame tie isté čísla, a teda na mieste jednotiek musí byť 2, lebo Mirko pripočíta 2.

Úloha 04. *Majo sa akurát hral so svojou novou drevenou kockou s hranou dĺžky 2 cm, keď v tom k nemu prišla Katka a nafarbila všetkých 12 hrán kocky na fialovo. Chvíľu sa spolu hrali s kockou, no spadla im na zem a rozbila sa na 8 menších kociek, pričom každá mala hranu dĺžky 1 cm. Koľko hrán na týchto menších kockách bolo teraz nafarbených na fialovo?*

Výsledok: 24
Riešenie: Na začiatku sme mali kocku s hranou 2 cm a tá sa rozbila na kocky s hranou 1 cm. To znamená že každá hrana sa rozdelila na dve polovice, teda na dve menšie hrany. Pôvodne sme mali nafarbených na fialovo 12 hrán, takže keď z každej hrany vzniknú dve menšie nafarbené hrany, bude ich $2 \cdot 12 = 24$.

Úloha 05. *Nicol už dlho v obchodoch hľadá dokonalý pohár na vodu. Chcela by, aby mal tvar kocky a bol fialový. Po dlhom, no neúspešnom hľadaní sa rozhodla, že kúpi priesvitný pohár tvaru kocky s veľmi tenkými stenami a doma ho nafarbí. Nicol si všimla, že keď do pohára naleje 50 cm³ vody, tak výška hladiny v pohári stúpne o 2 cm (ak sa tým voda nepreleje cez okraj). Spočítala si, že pri farbení minie 1 g farby na každý 1 cm² plochy. Koľko gramov fialovej farby Nicol spotrebuje na nafarbenie všetkých štyroch bočných stien pohára?*

Výsledok: 100
Riešenie: Keď do pohára Nicol naliala vodu, vytvorila v ňom kváder vody s objemom 50 cm³. Objem kvádra vieme získať vynásobením obsahu podstavy výškou. Vieme, že výška kvádra bola 2 cm, lebo o toľko stúpla hladina. Vieme teda nájsť obsah podstavy kvádra, ktorý je 50 cm³ : 2 cm = 25 cm². Podstava kvádra vody je vlastne aj podstava pohára, teda obsah podstavy pohára bude tiež 25 cm². Keďže je pohár tvaru kocky, všetky jeho steny majú rovnaký obsah ako podstava. Nicol chce nafarbiť 4 steny, ktoré majú dokopy obsah $4 \cdot 25 = 100$ cm³. Ak na každý 1 cm³ minie 1 g farby, na 100 cm³ minie 100 g farby.

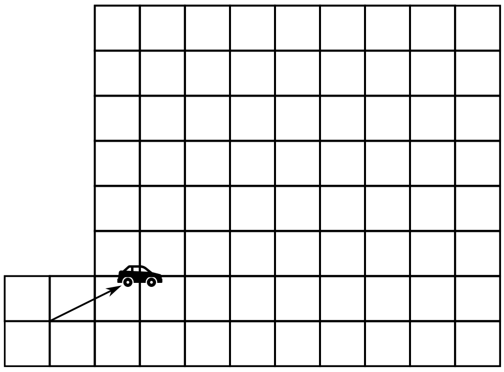
Úloha 06. *Lucka si kúpila mlynček na čísla. Mlynček funguje tak, že keď doň Lucka hodí dve celé čísla, mlynček každé z nich zmenší o 4 a takto zmenšené čísla spolu vynásobí. Výsledok potom vyjde z mlynčeka. Lucka raz do mlynčeka hodila dve celé čísla a na jej počudovanie z mlynčeka vyšlo jedno z vhodených čísel zmenšené o 4. Ktoré číslo určite bolo medzi číslami, ktoré Lucka hodila do mlynčeka?*

Výsledok: 5
Riešenie: Mlynček vhodené čísla najprv zmenšil o 4 a potom ich vynásobil, avšak z mlynčeka vyšlo jedno z pôvodných čísel zmenšené o 4. Súčin týchto dvoch zmenšených čísel je teda rovný jednému z nich. To je možné iba v prípade, ak je to druhé zmenšené číslo rovné 1. Keďže boli čísla zmenšené o 4, pred zmenšením to bolo číslo 5. Jedno z čísel, ktoré Lucka hodila do mlynčeka, teda určite bolo číslo 5.

Úloha 07. *Timko našiel v zásuvke 4 kartičky – zelenú, žltú, modrú a červenú. Na každej kartičke bola napísaná nejaká cifra rôzna od 0 (cifry sa mohli aj opakovať). Timko si všimol, že*
– súčin cifry na zelenej kartičke a cifry na žltej kartičke je rovný cifre na zelenej kartičke,
– súčin cifry na žltej kartičke a cifry na modrej kartičke je rovný cifre na červenej kartičke,
– súčin cifry na červenej kartičke a cifry na modrej kartičke je dvojciferné číslo zapísané cifrou na zelenej kartičke a cifrou na žltej kartičke, pričom cifra zo zelenej kartičky je na mieste desiatok.
Aké cifry boli na kartičkách?

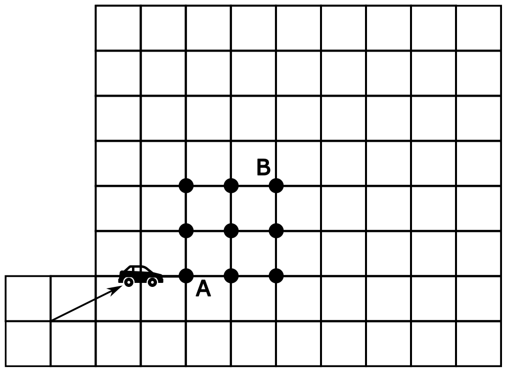
Výsledok: 1, 8, 9, 9
Riešenie: Pre jednoduchosť vysvetľovania budeme cifry nazývať podľa farby kartičiek – napríklad cifru na žltej kartičke budeme volať „žltá cifra“. Všimnime si, že súčin zelenej a žltej cifry je zelená cifra. Aby to platilo, žltá cifra musí byť 1.
Ak je súčin žltej a modrej cifry červená cifra a my vieme, že žltá cifra je 1, potom musí byť modrá cifra rovnaká ako červená cifra. Vieme, že súčin modrej a červenej cifry je dvojciferné číslo, ktoré má na mieste jednotiek žltú cifru, teda 1. Môžeme si skúsiť vypísať všetky súčiny dvoch tých istých cifier rôznych od 0. Zistíme, že 9 je jediná taká cifra, ktorá po vynásobení samou sebou bude dvojciferné číslo končiace sa jednotkou. Modrá a červená cifra sú teda 9. Keďže $9 \cdot 9 = 81$, zelená cifra je 8. Na kartičkách boli teda cifry 1, 8, 9, 9.

Úloha 08. *Zuzka šoféruje jedno z áut na dnešnom Rally. V tomto momente je na plániku na pozícii ako na obrázku. Na toto miesto sa dostala z miesta naznačeného na obrázku. Zuzka teraz spraví dva pohyby za sebou (oba za normálnu úlohu, nie vysvetľovaciu úlohu). Na koľkých rôznych miestach sa vie nachádzať po týchto dvoch pohnutiach?*



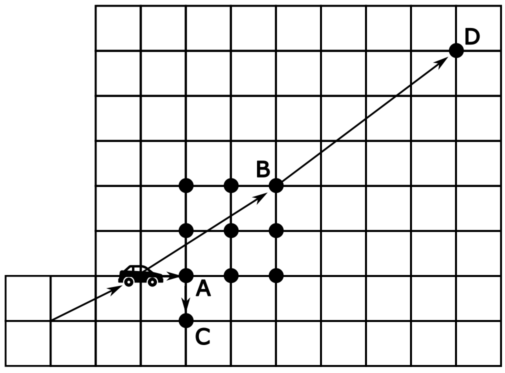
Výsledok: 49

Riešenie: Pozrime sa najprv, na ktorých miestach mohla Zuzka skončiť po prvom pohybe. Keďže aj vo vodorovnom aj v zvislom smere môže zmeniť svoj predošlý pohyb o 1 (alebo mínus 1), vznikne nám takýto štvorec možností:



Teraz by sme sa mohli rovnakým spôsobom zamerať na všetkých týchto 9 miest, zobrať ich za nové počiatočné miesta, pozrieť, kam sa z nich dá pohnúť a nakoniec len spočítať všetky finálne možnosti. Avšak vieme použiť aj menší trik.

Pozrime sa, kam by sa Zuzka dostala, keby čo najviac pridávala: teda pri oboch svojich pohyboch by k svojej rýchlosti v oboch smeroch pripočítavala 1. Potom by sa pri prvom pohybe pohla do bodu B, a pri druhom do bodu D (v obrázku nižšie). Teraz sa pozrime, kam by sa dostala, keby naopak od svojej rýchlosti v oboch smeroch vždy odpočítavala 1: potom by sa pri prvom pohybe pohla do bodu A a pri druhom do bodu C.



Keďže pri prvom prípade sme pri všetkých príležitostiach pripočítavali, vieme, že Zuzka nemohla skončiť vyššie ani viac napravo ako je bod D. Rovnako, pri druhej možnosti sme pri všetkých príležitostiach odpočítavali, teda Zuzka nemohla skončiť nižšie ani viac naľavo, ako je bod C. Z toho vyplýva, že možné miesta, kam sa mohla pohnúť nájdeme v štvorci ohraničenom bodmi C a D, ktoré sú jeho protiľahlými vrcholmi.
Všimneme si, že v tomto štvorci sa nachádza 7 miest na šírku aj na výšku, teda dokopy nám to dáva $7 \cdot 7 = 49$ možných miest.

Úloha 09. *Pizzéria pri Masívnom kaňone ponúka zákazníkom mať pizzu rozkrájanú na 8 alebo 10 častí. Leovi dnes už celkom vyhladlo, tak sa s niekoľkými kamarátmi dohodol, že po pretekoch sa pôjdu najesť do tejto pizzérie. Každý z nich si chce dať 2 kúsky pizze. Leo je však bystrý, a tak si všimol, že si nevedia navoliť počet pízz a ich rozkrájanie tak, aby každý mal presne dva kúsky a nič nezvýšilo. Taktiež si uvedomil, že ak by so sebou zobral o ľubovoľný počet kamarátov viac, už by to bolo možné. Koľko kamarátov (vrátane Lea) chcelo ísť do pizzérie?*

Výsledok: 11
Riešenie: Z pizze, ktorá je rozkrájaná na 8 kúskov, sa najedia $8 : 2 = 4$ ľudia. Z pizze, ktorá je rozkrájaná na 10 kúskov sa naje $10 : 2 = 5$ ľudí. Ak chceme, aby každý z kamarátov vrátane Lea dostal 2 kúsky a nič nezvýšilo, musí byť počet všetkých ľudí súčet niekoľkých čísel 4 a niekoľkých čísel 5. Vieme, že ak by Leo so sebou zobral aspoň o kamaráta navyše, už by sa to dalo. Musíme teda nájsť najväčší počet ľudí, ktorý sa nedá vyskladať ako súčet štvoriek a pätiek. Zároveň musí platiť, že akékoľvek väčšie číslo sa už vyskladať dá.
Ukážeme, že hľadaný počet ľudí je 11. Tento počet nevyskladáme – ak použijeme 0 pätiek, tak zvyšných $11 - 0 \cdot 5 = 11$ nie je násobok 4; ak použijeme 1 päťku, tak zvyšných $11 - 1 \cdot 5 = 6$ nie je násobok 4; ak použijeme 2 päťky, tak zvyšných $11 - 2 \cdot 5 = 1$ nie je násobok 4. Zároveň si vieme uvedomiť, že niekoľko najbližších čísel už vyskladáme:
$12 = 4 + 4 + 4$;
$13 = 5 + 4 + 4$;
$14 = 5 + 5 + 4$;
$15 = 5 + 5 + 5$.
Keď ku každej z týchto možností pridáme jednu štvorku, vyskladáme čísla od 16 do 19. Takýmto pridávaním štvoriek vyskladáme ľubovoľné väčšie čísla.
Dostali sme teda, že 11 nevyskladáme ako súčet štvoriek a pätiek, no ľubovoľné väčšie číslo už vyskladáme. Preto skutočne chcelo ísť do pizzérie 11 kamarátov.

Úloha 10. *Marcel znova zabudol kód od svojho mobilu. Pamätal si len, že to bolo šesťciferné číslo, pre ktoré platilo:*
– nezačínalo sa cifrou 0;
– prostredné dvojčíslie kódu bolo súčtom prvého a posledného dvojčíslia;
– prvé trojčíslie kódu bolo rovnaké ako posledné trojčíslie;
Ktoré všetky šesťciferné čísla môžu byť Marcelovým kódom od mobilu?

Výsledok: 101101, 202202, ..., 909909
Riešenie: Tretia podmienka hovorí, že Marcelov kód má tvar ABCABC, kde A, B a C sú príslušné cifry Marcelovho kódu. Druhá podmienka potom hovorí
$(10A + B) + (10B + C) = (10C + A)$,
čo sa dá upraviť do tvaru
$9A + 11B = 9C$.
Členy 9A a 9C sú násobkami čísla 9, takže aj člen 11B musí byť deliteľný číslom 9. Keďže 11 je prvočíslo rôzne od 9, tak to znamená, že B musí byť násobkom čísla 9. Keďže B je cifra, tak máme už len

dve možnosti: B = 0, B = 9. V druhom prípade sa predošlá rovnica upraví na 99 = 9(C - A), resp. 11 = C - A, čo sa nedá splniť pre žiadne cifry A, C. Preto B = 0.
V prípade B = 0 dostávame už len podmienku 9A = 9C, čiže A = C. Pre ľubovoľnú cifru N tak môže byť Marcelovým kódom číslo N0NN0N. Inými slovami, možné Marcelove kódy sú 101101, 202202, 303303, 404404, 505505, 606606, 707707, 808808 a 909909.

Úloha 11. *Stano sa rozhodol umyť 2 zaprášené autá, aby mali menší odpor vzduchu, a teda vedeli ísť rýchlejšie na najbližšom Rally. Tlačí ho čas a chce si vypočítať, koľko bude trvať umytie 2 áut. Posledný raz umyl jedno auto za 3 hodiny. Na pomoc si ešte zavolá Kaju a Alexa, ktorí umývajú rovnakou rýchlosťou ako Stano. Koľko hodín bude všetkým trom trvať umytie oboch áut?*

Výsledok: 2
Riešenie: Keď jednému trvá umytie auta 3 hodiny, tak 3 ľudom by trvalo umyť jedno auto 3 hodiny : 3 = 1 hodinu. Keďže pred Rally musia umyť 2 autá 3 ľudia, bude im to trvať 2 · 1 hodina = 2 hodiny.

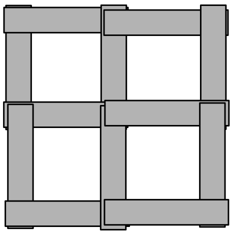
Úloha 12. *Kamaráti Radke pripravili úžasnú narodeninovú oslavu – okrem balónikov či koláčov na nej prirodzene nechýbala ani torta so sviečkami. Pri kupovaní sviečok na tortu však kamaráti nenašli čísla, ktoré by ukazovali Radkin vek, dali preto na tortu miesto toho čísla, ktoré ukázali Radkin dátum narodenia. Keď Radka sfukovala sviečky, zarazila sa: všimla si, že keď vynásobí čísla na torte (deň jej narodenia a číslo mesiaca, v ktorom sa narodila), dostane svoje obľúbené číslo! Ak je Radkine obľúbené číslo 144, v ktorých mesiacoch sa mohla narodiť?*

Výsledok: 6. , 8. , 9., 12. mesiac (jún, august, september, december)
Riešenie: Označme deň Radkinho narodenia D a mesiac, kedy sa narodila M. Nás zaujíma, aké hodnoty môže mať M.
Vieme, že 144 = D · M. To znamená, že môžeme skúšať deliť číslo 144 číslami mesiacov, a ako výsledok musíme dostať rozumné číslo D: keďže D má byť číslo dňa, musí to byť celé číslo a tiež nemôže byť väčšie ako počet dní v danom mesiaci.
Napríklad po delení 144 : 1 = 144 dostaneme D = 144, čo síce je celé číslo, ale január nemá 144 dní. Rovnakým spôsobom vylúčime aj február (2), marec (3) a apríl (4). Máj (5) vylúčime tiež, lebo 144 : 5 nám nedá celé číslo. Prvý mesiac, ktorý funguje, je tak jún (6), keďže 144 : 6 = 24, čo je v poriadku, keďže jún má viac ako 24 dní.
Takýmto spôsobom zistíme, že z nasledujúcich mesiacov budú fungovať aj august (8), september (9) a december (12), zatiaľ čo zvyšné mesiace nám nedajú celočíselný výsledok delenia. Radka sa teda mohla narodiť v mesiacoch s poradovými číslami 6, 8, 9 alebo 12.

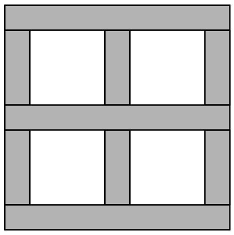
Úloha 13. *Stano sa strašne rád hrá s palindrómami. To sú také čísla, ktoré sú rovnaké, keď ich čítame spredu, ako keď ich čítame odzadu. Napríklad také číslo 12321 je päťciferný palindróm.*
Pri poslednej hre s palindrómami sa Stano zamyslel: Ktorý najmenší palindróm väčší ako 0 je súčasne násobkom čísel 1, 2, 3 a 4?

Výsledok: 252
Riešenie: Ak má číslo byť násobkom čísel 1, 2, 3 a 4, musí byť násobkom čísla 12. Môžeme si preto vypisovať násobky čísla 12, až kým nedostaneme nejaký palindróm. Takto si vypisujme čísla:
12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180, 192, 204, 216, 228, 240, 252, ...
Číslo 252 je prvý násobok 12, ktorý je súčasne palindróm, takže odpoveď na Stanovu otázku je číslo 252.

Úloha 14. *Ninka sa v škole často nudí, no baví ju vystrihovanie, preto si so sebou minule do školy priniesla nožničky. Zo svojho zošita nimi vystrihla 12 obdĺžnikov, ktoré mali šírku 1 centimeter a obsah 5 centimetrov štvorcových. Chvíľku nevedela, čo s nimi, no potom v taške našla lepidlo a tak ich zlepila tak, ako vidíš na obrázku. Aký je obsah útvaru, ktorý zlepila, v centimetroch štvorcových?*

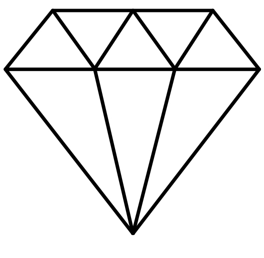


Výsledok: 45
Riešenie: Ak má jeden obdĺžnik obsah 5 cm² a šírku 1 cm, znamená to, že jeho dĺžka je 5 cm² : 1 cm = 5 cm. Keď už vieme rozmery všetkých obdĺžnikov na obrázku, stačí nám si útvar rozdeliť na viacero častí a zrátať plochu každej časti.



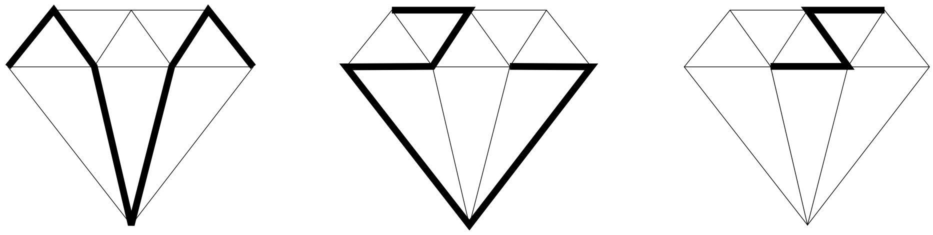
Na obrázku vidíme 3 vodorovné obdĺžnikové pásiky. Sú tvorené dvoma obdĺžnikmi s dĺžkou 5 cm, ktoré sa ale na jednom centimetri prekrývajú, preto dĺžka pásikov bude 9 cm. Ich šírka je 1 cm, preto obsah jedného z vodorovných pásikov je 9 cm · 1 cm = 9 cm². Obsah všetkých troch preto bude 3 · 9 cm² = 27 cm².
Ostáva nám zrátať obsah šiestich zvislých pásikov medzi tými vodorovnými. Každý z nich je tvorený jedným obdĺžnikom s dĺžkou 5 cm, avšak vidíme, že na oboch koncoch je tento obdĺžnik skrátený o 1 cm, teda dĺžka jedného zvislého pásika je 3 cm. Šírka tohto pásika je 1 cm, preto jeho obsah bude 1 cm · 3 cm = 3 cm². Zvislých pásikov je 6, ich celkový obsah preto bude 6 · 3 cm² = 18 cm².
Obsah celého útvaru teda bude 27 cm² + 18 cm² = 45 cm².

Úloha 15. *Miško by chcel Ninke vyrobiť diamantový prsteň. Diamant sa vyrába kreslením útvaru na obrázku. Miško chce, aby bol vyrobený diamant naozaj pekný, preto neprechádza ceruzkou po tej istej čiare dvakrát, no zároveň chce diamant nakresliť na čo najmenej ťahov (chce teda čo najmenej krát zdvihnúť ceruzku z papiera). Koľko najmenej ťahov musí Miško spraviť?*

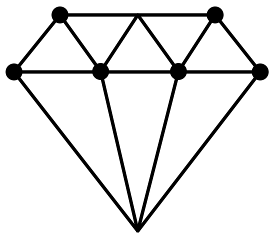


Výsledok: 3

Riešenie: Po chvíľke skúšania sa nám môže podariť nájsť nakreslenie diamantu na 3 ťahy. Napríklad takto:



Rozmyslime si, že na menej ťahov to nepôjde. Pozerajme sa na body, v ktorých sa stretávajú niektoré čiary. Ak v nejakom ťahu takýmto bodom len „prechádzame“, tak jednou čiarou doň vojdeme a druhou vyjdeme. Použijeme tým teda 2 čiary z tých, ktoré sa v tomto bode stretajú. Problém teda budeme mať v bodoch, v ktorých sa stretáva nepárny počet čiar. Aby sme ho vyriešili, tak v takomto bode musíme začať alebo skončiť nejaký ťah. Bodov, v ktorých sa stretáva nepárny počet čiar, je šesť – konkrétne tie vyznačené kruhom na tomto obrázku:

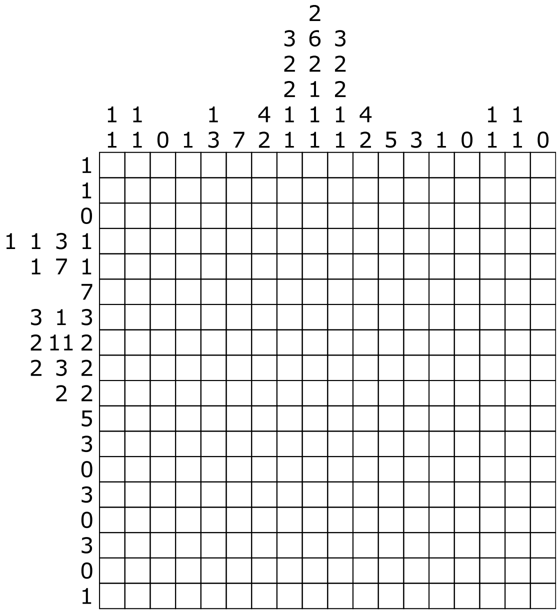


Musíme teda mať aspoň 6 začiatkov alebo koncov ťahov. Každý ťah použije dva z nich (každý ťah má svoj začiatok a koniec). Potrebujeme teda aspoň 6 : 2 = 3 ťahy.
Zdôvodnili sme teda, že potrebujeme aspoň 3 ťahy a že 3 ťahy stačia. Preto musí Miško spraviť najmenej 3 ťahy.

Úloha 16. *Janka sleduje semafor počas rannej dopravnej špičky. O 7:00 pri semafore nečaká žiadne auto a práve naskočila červená. K semaforu teraz prichádza auto každých 5 sekúnd. Každú minútu naskočí na chvíľku na semafore zelená, vďaka čomu sa kolóna zmenší o 10 áut. Takto pred semaforom vznikne zápcha. Po 8:00 sa však situácia zlepší a k semaforu prichádza auto už len každých 15 sekúnd. V akom čase sa rozpustí zápcha, čiže v akom čase sa prvýkrát znova stane, že pred semaforom nebude čakať žiadne auto?*

Výsledok: 8:20
Riešenie: Od 7:00 chodí k semaforu jedno auto za 5 sekúnd. Za jednu minútu k semaforu preto príde 60 : 5 = 12 áut. Avšak, na zelenú, ktorá tiež naskočí každú minútu, stihne prejsť iba 10 áut, čo znamená, že od 7:00 pribudnú pred semaforom každú minútu 12 - 10 = 2 autá. Za hodinu do 8:00 preto dokopy pribudne 60 · 2 = 120 áut, ktoré budú čakať pred semaforom. Od 8:00 však už auto príde len raz za 15 sekúnd, teda k semaforu za minútu pribudnú 60 : 15 = 4 autá. Keďže na zelenú ich stále stihne prejsť 10, každú minútu teraz spred semaforu odbudne 10 - 4 = 6 áut. Kým spred semaforu odbudne všetkých 120 áut, bude to teda trvať 120 : 6 = 20 minút. Pred semaforom teda najbližšie nebude auto o 8:20.

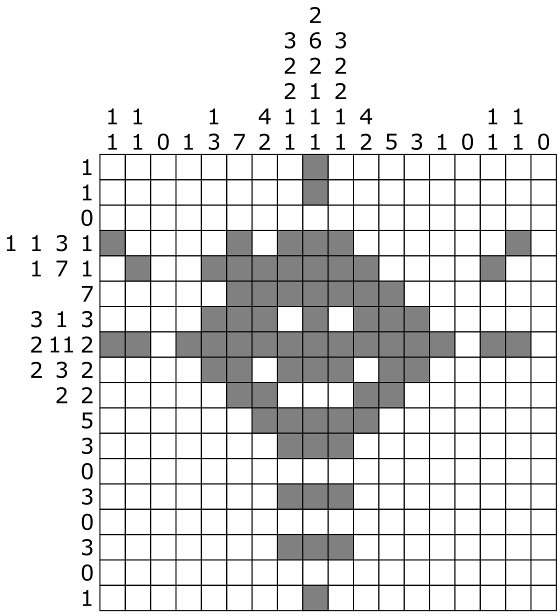
Úloha 17. *Kubko objavil na povale tabuľku ako na obrázku. Rýchlo sa dovtípil, že má vyfarbiť niektoré štvorčeky vnútri tabuľky. Má to spraviť tak, že čísla na začiatku riadku udávajú počty súvisle vyfarbených štvorčekov v danom riadku, pričom tieto skupiny musia byť v danom riadku v rovnakom poradí ako čísla. Medzi týmito súvisle vyfarbenými štvorčekmi má byť aspoň jeden nevyfarbený štvorček. Podobne to platí s číslami na začiatku stĺpcov. Kubko takto úspešne vyfarbil tabuľku. Koľko štvorčekov pri tom vyfarbil?*

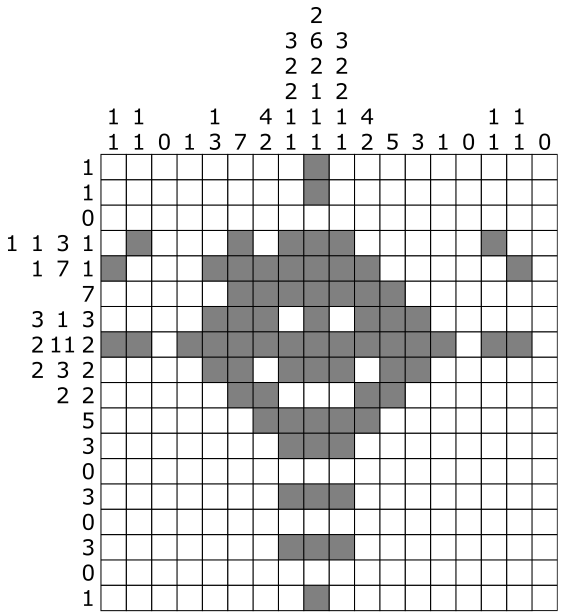


Výsledok: 72

Riešenie: Otázka sa nás pýta na počet štvorčekov bez ohľadu na ich polohu. Počty štvorčekov, ktoré sa majú zafarbiť, máme napísané na začiatku riadkov, resp. na začiatku stĺpcov. Takže nám stačí len sčítať všetky čísla na začiatku riadku (alebo na začiatku stĺpcov, keďže musíme dostať rovnaký výsledok). Po sčítaní čísel zistíme, že Kubko zafarbí 72 štvorčekov.

Poznámka: Štvorčeky sa dajú podľa pravidiel vyfarbiť dvomi spôsobmi:



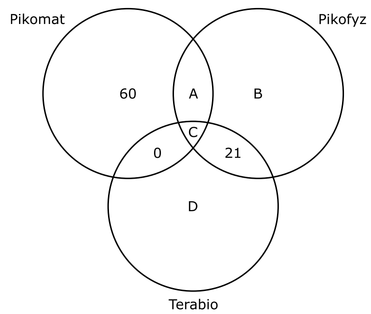


Úloha 18. *Maťko sa hrá so svojím obľúbeným nepárnym číslom. Jedného dňa si na papier napísal všetky kladné čísla, ktorými možno toto jeho obľúbené číslo vydeliť bezo zvyšku. Všetky čísla na papieri sčítal a dostal číslo 78. Ďalší deň sa pokúsil spraviť niečo podobné s dvojnásobkom svojho obľúbeného čísla. Aký súčet Maťko dostane, ak v tomto prípade sčíta všetky čísla na papieri?*

Výsledok: 234
Riešenie: Maťkovo obľúbené číslo je nepárne. Ak by ho vydelil nejakým párnym číslom, určite by dostal nejaký zvyšok. Všetky čísla na Maťkovom papieri z prvého dňa sú teda určite nepárne.
Teraz je kľúčové uvedomiť si nasledovnú vec: ak Maťkovo obľúbené číslo vynásobíme dvomi, tak na papier môžeme napísať aj dvojnásobky čísel, ktoré mal Maťko pôvodne na papieri. Pri príslušnom delení sa totiž tieto dvojky vykrátia a stále dostaneme podiel bezo zvyšku. Zároveň sa dá ľahko vidieť, že toto sú jediné čísla, ktoré pribudnú na Maťkovom papieri.
Preto každé z čísel na pôvodnom papieri, bude mať na druhom papieri svoj dvojnásobok. Pre každé z čísel na Maťkovom pôvodnom papieri tak do súčtu na druhom papier započítame nielen dané číslo, ale aj jeho dvojnásobok. Dokopy teda započítame jeho trojnásobok. Zopakovaním tejto úvahy pre všetky čísla na Maťkovom pôvodnom papieri sa dozvedáme, že súčet čísel musí byť trojnásobný oproti pôvodnému súčtu. Musí teda byť $3 \cdot 78 = 234$.
Poznámka: Súčet zo zadania sa dá aj dosiahnuť, a to napríklad pre číslo 45, kedy sú na papieri čísla 1, 3, 5, 9, 15 a 45.

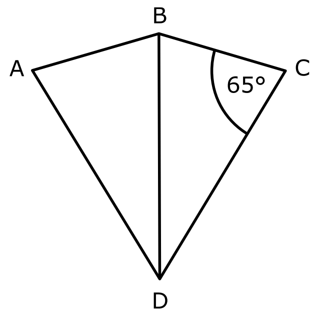
Úloha 19. *Túto sériu odovzdalo riešenia do seminárov Pikomatu, Pikofyzu a Terabia 142 žiakov, pričom každý žiak sa zapojil aspoň do jedného semináru. Túto sériu odovzdalo riešenia do Terabia 47 žiakov, do Pikofyzu 63 a do Pikomatu 80 žiakov. Žiakov, ktorí riešia aj Terabio aj Pikofyz, ale nie Pikomat, je 21. Neexistuje riešiteľ, ktorý by zároveň riešil Pikomat a Terabio, ale neriešil Pikofyz. Iba Pikomat rieši 60 žiakov. Koľko žiakov rieši Pikomat a Pikofyz, ale nerieši Terabio?*

Výsledok: 13
Riešenie: Schematicky si naznačme informácie zo zadania do nasledujúceho obrázku – každý kruh zodpovedá jednotlivým seminárom a v každej časti číslo (prípadne písmeno, ak danú informáciu nemáme) popisuje počet žiakov, ktorí riešia príslušnú kombináciu seminárov (napríklad číslo 60 zodpovedá tomu, že 60 riešiteľov rieši iba Pikomat; podobne písmeno C označuje, že všetky semináre rieši C žiakov):



Vieme, že Pikomat rieši 80 žiakov. Preto $80 = 60 + 0 + A + C$, odkiaľ $A + C = 20$. Taktiež vieme, že iba Pikofyz rieši 63 žiakov, čo v reči písmen znamená $A + B + C + 21 = 63$. Keďže vieme, že $A + C = 20$, tak z tohto dostávame $B = 63 - 21 - 20 = 22$. Takže iba Pikofyz rieši 22 riešiteľov.
Ďalej si uvedomme, že celkový počet riešiteľov (142) vieme dostať ako $142 = 60 + 0 + A + C + 22 + 21 + D$. Opäť využijeme, že $A + C = 20$, odkiaľ sa dozvieme, že $D = 142 - 60 - 22 - 21 - 20 = 19$. Takže iba Terabio rieši 19 riešiteľov.
Ďalší krok je určiť C. Vieme, že Terabio rieši spolu 47 žiakov, takže $47 = 0 + 19 + 21 + C$, takže $C = 7$. Všetky semináre teda rieši 7 žiakov. Napokon, z toho, že $A + C = 20$, sa dozvedáme $A = 20 - 7 = 13$. Takže počet riešiteľov, ktorí riešia Pikomat a Pikofyz, ale neriešia Terabio, je 13.

Úloha 20. *Miško si vyrobil šarkana zošitím dvoch zhodných rovnoramenných trojuholníkov, ako vidíš na obrázku. Odmeral, že veľkosť uhla BCD bola 65°. Aká je veľkosť uhla ACB v stupňoch?*

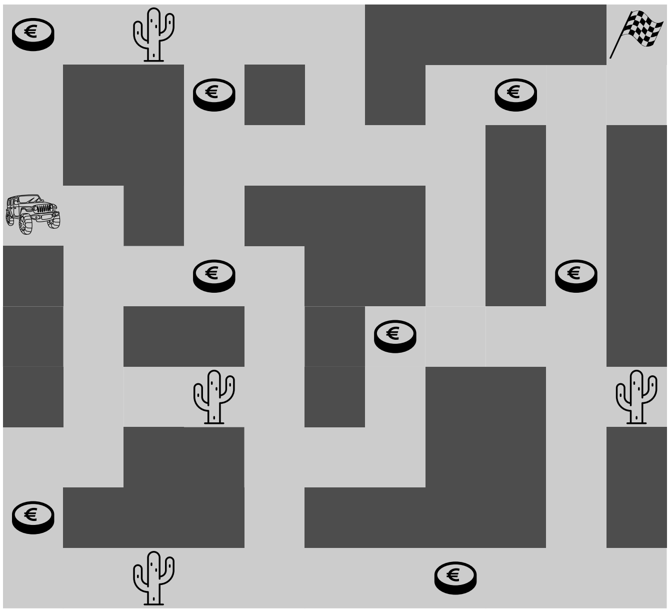


<u>Výsledok:</u> 25
<u>Riešenie:</u> Trojuholník BCD je rovnoramenný, takže uhly BCD a CBD majú rovnakú veľkosť 65°. Zostávajúci uhol BDC v trojuholníku BCD tak má veľkosť 180° - (65°+ 65°) = 50°. Zo zhodnosti trojuholníkov DBC a DAB môžeme povedať, že aj uhol ADB má veľkosť 50°.
Pozrime sa teraz na trojuholník ADC. Zo zadaných rovnoramenných trojuholníkov vieme, že |AD| = |BD| = |CD|, takže trojuholník ADC je rovnoramenný so základňou AC. Z predošlého odseku navyše vieme, že uhol ADC má rovnakú veľkosť ako súčet uhlov ADB a BDC, čiže 50° + 50° = 100°. Zvyšné uhly v trojuholníku ADC majú rovnakú veľkosť (180° - 100°) : 2 = 40°.
Napokon sa pozrime k vrcholu C. Pri ňom máme uhol BCD s veľkosťou 65° a uhol ACD s veľkosťou 40°. Preto má uhol ACB veľkosť 65° - 40° = 25°.

Úloha 21. *Palko si vytvára kartičky. Na kartičku vždy napíše dve čísla, jedno z každej strany kartičky. Robí to pritom tak, aby obe čísla na kartičke mali súčet 10. Palko si zobral 8 takýchto kartičiek a položil ich na stôl. Bolo na nich vidno čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8. Aký bol súčet čísel, ktoré na kartičkách nebolo vidno?*

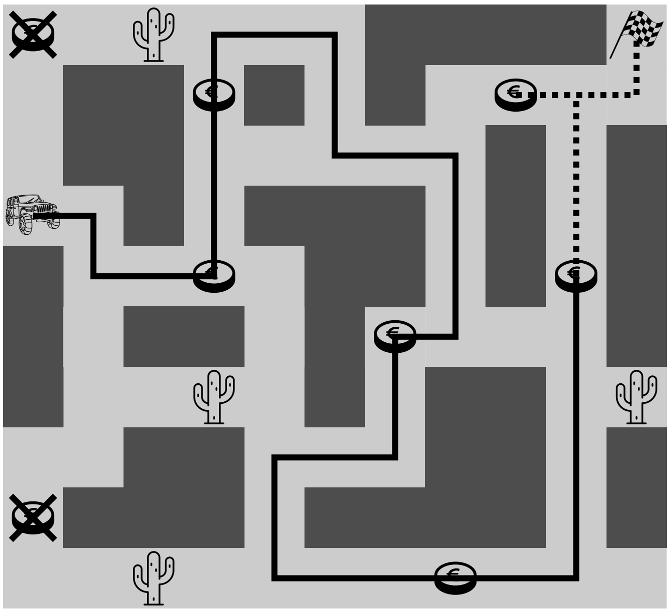
<u>Výsledok:</u> 44
<u>Riešenie:</u> Vieme, že súčet čísel na oboch stranách kartičky je 10. Na každej strane kartičky, ktorú nevidíme, je teda rozdiel čísla 10 od čísla na druhej strany kartičky. Dopočítame si postupne druhé strany kartičiek: 10 - 1 = 9, 10 - 2 = 8, 10 - 3, ... , 10 - 8 = 2. Súčet čísel, ktoré nevidíme, bude teda 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 44.

Úloha 22. *Poslednou dobou sa dal pretekár Kubo na zbieranie mincí. Ale taký pretekár nemá veľa času na rozdávanie, a tak sa snaží robiť všetko efektívne. Koľko najviac mincí vie pretekár Kubo zobrať, ak nemôže dvakrát prejsť cez to isté políčko a musí skončiť v cieli? Taktiež pretekár Kubo nesmie ísť cez políčko s kaktusom, pretože by doň nabúral... Pretekár Kubo začína na políčku auta a snaží sa skončiť na políčku s vlajkou cieľa ako na obrázku.*



Výsledok: 5

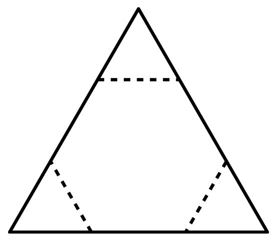
Riešenie: Cez prečiarknuté mince pretekár Kubo nemôže prejsť, lebo by nabúral do kaktusu. Do cieľa vedú iba dve cesty, ktoré sa spájajú v políčku (označené bodkovano) pred cieľom. Tým pádom pretekár nemôže zobrať mince na oboch cestách spojených v danom políčku, lebo by musel prejsť cez dané políčko dvakrát. Dokopy je mincí 8, cez 3 nemôže prejsť, teda správna odpoveď je 8 - 3 = 5 (trasu, ako by pretekár Kubo mohol ísť, vidíte na obrázku – najprv ide po plnej čiare a potom sa napojí na príslušnú bodkovanú).



Úloha 23. *Členovia pretekárskeho tímu Ambroseho si na narodeninovej oslave svojho člena Paľka všimli, že ani jeden z členov sa nenarodil v tom istom mesiaci. Koľko najviac narodeninových osláv môžu ešte tento rok chystať pre členov pretekárskeho tímu Ambroseho, ak Paľkovi už vystrojili oslavu?*

Výsledok: 11
Riešenie: Aby vystrojili čo najviac narodeninových osláv, tím musí mať čo najviac členov, teda každý člen sa musí narodiť v inom mesiaci. Teda tím Ambroseho môže mať najviac 12 členov. Keďže Paľkovi už vystrojili oslavu, tak najväčší počet osláv, ktoré môžu ešte vystrojiť, je 11.

Úloha 24. *Samko upiekol tortu tvaru rovnostranného trojuholníka. Potom z nej urezal niekoľko kúskov tvaru rovnostranného trojuholníka ako na obrázku. Dostal tým tortu tvaru pravidelného šesťuholníka. Keď ju zdobil po obvode, odmeral, že obvod tejto torty bol 48 cm. Aká bola dĺžka strany pôvodnej trojuholníkovej torty?*



Výsledok: 24 cm
Riešenie: Výsledný šesťuholník má všetky strany rovnakej dĺžky. Keďže má obvod 48 cm, tak každá zo strán šesťuholníka musí mať dĺžku 48 cm : 6 = 8 cm. Samko z torty odrezal rovnostranné trojuholníky. Vieme, že jedna z ich strán má dĺžku 8 cm, takže všetky tri strany musia mať dĺžku 8 cm. Potom však vidíme, že strana pôvodnej trojuholníkovej torty je tvorená tromi úsečkami s dĺžkou 8 cm. Takže strana pôvodnej torty musela byť dlhá 3 · 8 cm = 24 cm.

Úloha 25. *Renka sa kedysi dávnejšie dozvedela, koľko presne obyvateľov má jej rodné mesto – bolo to päťciferné číslo. Toto číslo si zapísala na tabuľu, lebo tušila, že sa jej niekedy zíde – a mala pravdu! Dnes toto číslo potrebovala na domácu úlohu, tak sa išla pozrieť na tabuľu, no sklamane zistila, že prvá a posledná cifra tohto čísla sa z tabule zotrela. Zostalo tam iba 969, teda cifra na mieste desaťtisícok a jednotiek chýbala. Renka si pamätá, že číslo bolo deliteľné číslom 18 bezo zvyšku. Na papier (odkiaľ sa to už snáď nezotrie) si napísala všetky cifry, ktoré pôvodne mohli byť na mieste desaťtisícok a vedľa toho všetky cifry, ktoré mohli pôvodne byť na mieste jednotiek. Aký je súčet cifier, ktoré Renka napísala na papier?*

Výsledok: 42
Riešenie: Na to, aby bolo číslo deliteľné 18, musí byť súčasne deliteľné 2 a 9. Aby bolo číslo deliteľné 9, musí byť súčet cifier deliteľný číslom 9. Na druhej strane, aby bolo číslo deliteľné 2, musí byť cifra na mieste jednotiek párna. Rozoberme teda možnosti podľa toho, aká párna cifra je na mieste jednotiek.
– Ak je na mieste jednotiek cifra 0, tak súčet cifier je zatiaľ 9 + 6 + 9 + 0 = 24. Pridaním cifry na mieste desaťtisícov vieme dostať ciferný súčet od 24 + 1 = 25 do 24 + 9 = 33. Jediný násobok 9 spomedzi týchto čísel, je 27, takže na mieste desaťtisícov musí byť cifra 27 - 24 = 3.
– Ak je na mieste jednotiek cifra 2, tak súčet cifier je zatiaľ 9 + 6 + 9 + 2 = 26. Pridaním cifry na mieste desaťtisícov vieme dostať ciferný súčet od 26 + 1 = 27 do 26 + 9 = 35. Jediný násobok 9 spomedzi týchto čísel, je 27, takže na mieste desaťtisícov musí byť cifra 27 - 26 = 1.

– Ak je na mieste jednotiek cifra 4, tak súčet cifier je zatiaľ 9 + 6 + 9 + 4 = 28. Pridaním cifry na mieste desaťtisícov vieme dostať ciferný súčet od 28 + 1 = 29 do 24 + 9 = 37. Jediný násobok 9 spomedzi týchto čísel, je 36, takže na mieste desaťtisícov musí byť cifra 36 - 28 = 8.
– Ak je na mieste jednotiek cifra 6, tak súčet cifier je zatiaľ 9 + 6 + 9 + 6 = 30. Pridaním cifry na mieste desaťtisícov vieme dostať ciferný súčet od 30 + 1 = 31 do 30 + 9 = 39. Jediný násobok 9 spomedzi týchto čísel, je 36, takže na mieste desaťtisícov musí byť cifra 36 - 30 = 6.
– Ak je na mieste jednotiek cifra 8, tak súčet cifier je zatiaľ 9 + 6 + 9 + 8 = 32. Pridaním cifry na mieste desaťtisícov vieme dostať ciferný súčet od 32 + 1 = 33 do 32 + 9 = 41. Jediný násobok 9 spomedzi týchto čísel, je 36, takže na mieste desaťtisícov musí byť cifra 36 - 32 = 4.
Renka si teda na papier napíše dvojice čísel (3, 0), (1, 2), (8, 4), (6, 6), (4, 8). Súčet čísel na papieri je tak 3 + 0 + 1 + 2 + 8 + 4 + 6 + 6 + 4 + 8 = 42.

Úloha 26. *Patrik sa hrá s kartičkami. Má 5 kartičiek, na ktorých má postupne napísané cifry 1, 2, 3, 4 a 5. Patrik z nich zložil číslo 12345 a nechal ho na stole. V tom mu do izby vošla mladšia sestra Ika a začala sa hrať s kartičkami. Najprv vymenila nejakú dvojicu susedných kartičiek. Následne vymenila inú dvojicu susediacich kartičiek. Napokon vymenila inú dvojicu susediacich kartičiek inú ako v predošlých výmenách. Takto dostala nejaké iné číslo. Aké najmenšie číslo takto mohla Ika vytvoriť?*

Výsledok: 12543
Riešenie: Aby sme dostali čo najmenšie číslo, musí mať výsledné číslo čo najmenšiu cifru v ráde desaťtisícov. Preto skúsme robiť výmeny tak, aby sme nechali cifru 1 na mieste desaťtisícov. Z rovnakého dôvodu sa pokúsme nepohnúť s cifrou 2 na mieste tisícov. Na zvyšných pozíciách nám zostanú už iba dve možnosti ako robiť výmeny:
345 → 354 → 534 → 543,
345 → 435 → 453 → 543.
V oboch prípadoch teda dostávame posledné trojčíslie 543. Najmenšie číslo, ktoré môže Ika vytvoriť, je preto číslo 12543.

Úloha 27. *Majo si jedného dňa povedal, že by si mal oddýchnuť od matematiky, a tak si začal kresliť. To by však nebol Majo, keby sa aj v jeho kreslení neobjavila matematika. Najprv si nakreslil úsečku AB dlhú 15 cm. Vyznačil na nej body C, D, E tak, že |AC| = 8 cm, |CD| = 4 cm, |DE| = 2 cm, |EB| = 1 cm. Potom nakreslil štvorce ACFG, CDHI, DEJK, EBLM tak, že bod I ležal na úsečke CF, bod K ležal na úsečke DH a bod M ležal na úsečke EJ. Zaujal ho útvar AGFIHKJMLB. Aký obvod má tento útvar?*

Výsledok: 46 cm
Riešenie: Po nakreslení obrázka si môžeme všimnúť, že vodorovné časti obvodu môžeme priradiť podľa veľkosti k úsečkám na úsečke AB – napríklad GF k AC, IH k CD atď. Z toho vyplýva, že súčet vodorovných častí úsečiek je dvojnásobkom dĺžky úsečky AB, čiže 2 · 15 cm = 30 cm.
Môžeme si tiež všimnúť, že niečo podobné platí aj pre zvislé časti. Ak by sme celý útvar „stlačili“ na úsečku AG, „pravé“ časti obvodu vytvoria úsečku s dĺžkou AG. To znamená, že súčet zvislých častí je dvojnásobok dĺžky úsečky AG, čiže 2 · 8 cm = 16 cm.
Obvod útvaru je teda 30 cm + 16 cm = 46 cm.

Úloha 28. *Ľubovi chutí čokoláda a mama mu na narodeniny dala 24 €. Ľubo sa rozhodol si za ne kúpiť čokoládu. V obchode mali 3 typy čokolád: čokoládu za 1 €, čokoládu za 3 € a čokoládu za 4 €. Vieme, že Ľubo minul všetky peniaze a že si z obchodu odniesol 12 čokolád. Z každého typu si pritom kúpil minimálne 1 čokoládu. Koľko čokolád za 1 € si mohol Ľubo kúpiť?*

Výsledok: 7
Riešenie: Ľubo kúpil minimálne 1 čokoládu každého typu. Tieto „povinné“ čokolády ho stáli spolu 1 € + 3 € + 4 € = 8 €. Zvyšných 24 € - 8 € = 16 € minul na 12 - 3 = 9 čokolád tak, že už nemal žiadne podmienky. Ak by boli všetky zvyšné čokolády za 1 €, tak by na ne minul 9 · 1 € = 9 €. Potrebujeme preto niektoré z týchto čokolád nahradiť za drahšie tak, aby Ľubo minul o 16 € - 9 € = 7 € viac.
Nahradením za čokoládu stojacu 4 € minie Ľubo o 4 € - 1 € = 3 € viac. Nahradením za trojeurovú čokoládu zas minie o 3 € - 1 € = 2 € viac. Ľubo tak vie zvyšovať množstvo minutých peňazí len o 2 € a 3 €. Avšak číslo 7 sa dá dostať ako súčet dvojok a trojok jediným spôsobom – ako 7 = 2 + 2 + 3. Preto nahradíme 3 čokolády za 1 € dvomi čokoládami za 3 € a jednou za 4 €.
Dokopy tak dostávame, že Ľubo kúpil 9 - 3 + 1 = 7 čokolád za 1 € (okrem toho kúpil 3 čokolády za 3 € a 2 čokolády za 4 €).

Úloha 29. *Každý deň presne o 12:00 vypláva z Rotterdamu parník do Miami a v tom istom okamihu aj druhý parník z Miami do Rotterdamu. Plavba medzi prístavmi trvá 60 hodín. Koľko lodí plávajúcich z Miami do Rotterdamu stretne parník, ktorý vypláva z Rotterdamu dnes o 12:00?*

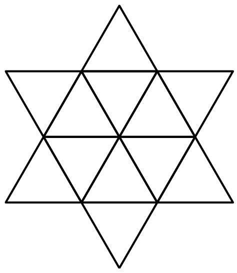
Výsledok: 5
Riešenie: Loď môže stretnúť iba lode plávajúce oproti nej. Cesta medzi prístavmi trvá 60 hodín, čo je presne 2 a pol dňa, alebo 24 + 24 + 12 hodín. Aj v Miami štartujú lode o 12:00 nášho času. V momente, kedy naša loď štartuje z Rotterdamu, sú na trase dve lode z Miami – jedna vyštartovala 24 hodín dozadu a druhá 48 hodín dozadu. Naša loď určite stretne tieto dve lode. Zároveň, v momente, kedy naša loď štartuje, z prístavu v Miami štartuje ďalšia loď, ktorú stretneme po ceste. To sú už tri lode. Po 24 hodinách plavby našej lode vyštartuje ďalšia loď z Miami, čo je štvrtá loď, ktorú stretneme. Po 48 hodinách štartuje piata, ktorú stretneme tiež. Potom nám plavba trvá už iba 12 hodín, takže stihneme prísť do Miami skôr, ako vyštartuje ďalšia loď. Dokopy teda stretneme 5 lodí.

Úloha 30. *Rodina Permonovcov má 6 detí: Andreja, Beátu, Cyrila, Danielu, Emila a Filoménu. Zhodou okolností sú ich výšky zoradené rovnako ako ich mená v abecede: Andrej je najnižší, Beáta vyššia, Cyril ešte vyšší, Daniela ešte vyššia. Emil ešte vyšší a napokon Filoména je najvyššia. Jedného dňa sa chceli postaviť do zástupu. Pritom sa chceli postaviť tak, aby ich výšky postupne rástli odpredu. To sa im ale nepodarilo, pretože presne jedno z detí stálo tesne pred dieťaťom, ktoré bolo od neho menšie. Koľkými spôsobmi sa mohli postaviť do zástupu?*
Poznámka: Napríklad zástup Beáta, Cyril, Emil, Andrej, Daniela, Filoména spĺňa ich požiadavky – všade výška detí narastá okrem dvojice Emil a Andrej, kde vyšší Emil stojí pred Andrejom.

Výsledok: 57
Riešenie: Pre jednoduchosť označujme deti podľa prvého písmena ich mena.
Rozoberme prípady podľa toho, ako vyzerá dvojica, pri ktorej došlo k poklesu. Touto dvojicou môže byť jedna z dvojíc FA, FB, FC, FD, FE, EA, EB, EC, ED, DA, DC, DB, CA, CB alebo BA. Pre zníženie množstva vypisovania si všimneme nasledovnú vlastnosť. Zoberme, že k poklesu nastalo medzi X a Y (X je vyšší). Potom ak je niekto vyšší ako X, tak musí byť za Y. Podobne ak je niekto nižší ako Y, tak musí byť pred X. Iba ľudia, ktorých výška je medzi Y a X môžu byť na ľubovoľnej strane od týchto dvoch. Ak teda nastal pokles pri dvojici XY, tak počet možností vyhovujúcich usporiadaní dostaneme tak, že vynásobíme toľko dvojok, ako je ľudí s výškou medzi Y a X (na príslušnej strane sa potom jednoznačne usporiadajú tak, aby splnili podmienky).

Pre dvojicu FA tak dostávame 2 · 2 · 2 · 2 = 16 možností, pre dvojice FB a EA máme 2 · 2 · 2 = 8 možností, pre dvojice FC, EB a DA máme 2 · 2 = 4 možnosti, pre dvojice FD, EC, DB a CA 2 možnosti a pre dvojice FE, ED, DC, CB a BA iba 1 možnosť.
Spolu sa teda vedia postaviť do zástupu 16 + 2 · 8 + 3 · 4 + 4 · 2 + 5 · 1 = 57 spôsobmi.

Úloha 31. *Matej sa unudene pozeral z okna počas hodiny geometrie a nevenoval pozornosť tomu, čo sa deje na tabuli. Pani učiteľka si ho všimla, pozrela naňho a s úsmevom ho vyvolala. „Matej, poď k tabuli a zisti, koľko trojuholníkov sa ukrýva na tomto obrázku.“ Matej sa zmätene pozrel na tabuľu, ale bol stratený. Pomôžte Matejovi zistiť, koľko trojuholníkov (ľubovoľnej veľkosti) sa nachádza na obrázku.*



Výsledok: 20
Riešenie: Počítajme trojuholníky podľa veľkosti. Najmenšie trojuholníky spočítame ľahko – je ich 12. Potom je na obrázku 6 trojuholníkov, ktoré sú dvakrát väčšie (počítajú sa ľahko – každý z nich obsahuje jeden z trojuholníkov, ktoré tvoria „cípy“ hviezdy). Napokon sú na obrázku ešte dva veľké trojuholníky, ktoré sú trikrát väčšie ako najmenší trojuholník (ich vrcholy sú v najkrajnejších vrcholoch „cípov“ hviezdy). Na obrázku je teda spolu 12 + 6 + 2 = 20 trojuholníkov.

Úloha 32. *Matúš a jeho starší brat Dávid majú narodeniny v ten istý deň. Matúš sa zamyslel nad tým, že Dávid mal v nejakom momente dvakrát toľko rokov, čo on. V ktorom roku to tak mohlo byť, ak sa Matúš narodil v roku 2006 a Dávid v roku 1999?*

Výsledok: 2013
Riešenie: Z rokov narodenia vieme, že Dávid je od Matúša o 7 rokov starší. To znamená, že v každom roku bude mať Dávid o 7 rokov viac ako Matúš. Dávid mal teda dvakrát toľko rokov, čo Matúš vtedy, keď mal Matúš 7. Teraz už iba dopočítame, že to bolo v roku 2006 + 7 = 2013.

Úloha 33. *Gregor má zvyk, že každý večer večeria presne o piatej. Zväčša je to preňho tak akurát skoro, dnes však čas večere nie a nie prísť. Hladný Gregor sa tak namosúrene pozrel na svoje ručičkové hodiny ukazujúce trištvrte na päť, až si všimol, že sa vôbec nehýbu! Pozrel sa teda na mobil a zistil, že v skutočnosti už je pol šiestej, teda večeru už mal mať dávno zjedenú! Predtým, ako sa na ňu konečne vrhol, však nastavil ručičkové hodiny na pol šiestej a odmeral uhol, ktorý zviera hodinová a minútová ručička. Koľko stupňov nameral?*

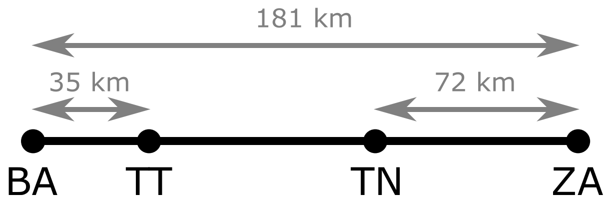
Výsledok: 15 (alebo 345)
Riešenie: Keďže je pol šiestej, znamená to, že minútová ručička ukazuje na 6. Hodinová ručička je zasa v polovici svojej cesty medzi 5 a 6. Uhol medzi ručičkami teda reprezentuje polovicu uhlu medzi 5 a 6. Keďže celý kruh má 360° a má na sebe 12 čísel, úsek medzi dvoma susednými číslami bude zodpovedať uhlu 360° : 12 = 30°. Polovica toho teda bude 30° : 2 = 15°. Gregor mohol tento uhol merať buď po smere, alebo proti smeru hodinových ručičiek, preto mohol namerať buď 15°, alebo 360° - 15° = 345°.

Úloha 34. *Keď sa Maťka pýtala Katky na jej obľúbené číslo, Katka zistila, že zabudla, ktoré to bolo! Pamätala si len, že bolo dvojciferné a že dávalo zvyšok 2 po delení 9 a zvyšok 3 po delení 10. Ktoré všetky čísla môžu byť Katkiným obľúbeným?*

Výsledok: 83
Riešenie: Čísla dávajú zvyšok 3 po delení desiatkou len vtedy, keď majú 3 na mieste jednotiek. Teda číslo bude v tvare X3. My však zároveň potrebujeme, aby číslo dávalo zvyšok 2 po delení 9, čo znamená, že musí byť o 2 väčšie ako nejaký násobok 9. Keďže obľúbené číslo sa má končiť číslom 3, znamená to, že hľadáme taký násobok čísla 9, ktorý sa končí číslom 3 - 2 = 1. Jediným takým dvojciferným násobkom je číslo 81, teda Katkine obľúbené číslo musí byť číslo 81 + 2 = 83.

Úloha 35. *Alica ide z Bratislavy autom do Žiliny. Na výjazde z Bratislavy si na dopravnej značke prečítala, že Trnava je od Bratislavy vzdialená 35 km a Žilina 181 km. Keď sa vracala, tak si na podobnej značke všimla, že Trenčín je od Žiliny vzdialený 72 km a Bratislava 181 km. Aká je vzdialenosť medzi Trnavou a Trenčínom?*

Výsledok: 74 km
Riešenie: Schematicky si zaznačme informácie zo zadania (namiesto názvov miest používame ich ŠPZ, t.j. Bratislava = BA, Trnava = TT, Trenčín = TN a Žilina = ZA):



Z toho vidíme, že cesta z Bratislavy do Žiliny je tvorená tromi úsekmi – z Bratislavy do Trnavy, z Trnavy do Trenčína a z Trenčína do Žiliny. Vieme dĺžku celej cesty a tiež dĺžku prvého a posledného úseku. Z toho dostaneme, že dĺžka prostredného úseku (na ktorý sa nás pýta zadanie) je 181 km - 35 km - 72 km = 74 km. Vzdialenosť medzi Trnavou a Trenčínom je teda 74 km.

Úloha 36. *Veronika doma kachličkuje miestnosť so záchodom. Je to miestnosť s podlahou tvaru štvorca s rozmermi 2 m × 2 m, pričom na jednej stene sú hneď na kraji dvere široké 50 cm. Veronika používa kachličky rozmerov 10 cm × 10 cm. Chce vykachličkovať podlahu a všetky steny do výšky 1 m (dvere samozrejme nekachličkuje). Koľko kachličiek Veronika potrebuje?*

Výsledok: 1150
Riešenie: Najprv sa zamyslime, či je možné vykachličkovať plochu celými kachličkami – a áno, je, keďže všetky rozmery sú násobkom 10 cm. To inými slovami napríklad znamená, že ak máme stranu podlahy dlhú 200 cm, zmestí sa na ňu rad 20 celých kachličiek.
Ak chceme vykachličkovať podlahu, musíme mať 20 takých radov 20 kachličiek, čo je spolu $20 \cdot 20 = 400$ kachličiek. Podobne vieme zistiť, že na jednu stenu, na ktorej nie sú dvere, treba 10 takýchto radov. Keďže také steny sú tri, potrebuje na ich vykachličkovanie $3 \cdot 10 \cdot 20 = 600$ kachličiek.
Zostáva nám stena, na ktorej sú dvere, ktoré ju zužujú na 150 cm. Na takúto stenu potrebujeme 10 radov po 15 kachličiek, teda $10 \cdot 15 = 150$.
Spolu Veronika potrebuje 400 + 600 + 150 = 1150 kachličiek.

Úloha 37. *Mirko zľavil zo svojich nárokov a už má rád dvojciferné čísla, ktorých cifra na mieste desiatok je aspoň o 2 väčšia ako cifra na mieste jednotiek. Koľko takých dvojciferných čísel existuje?*

Výsledok: 36
Riešenie: Vypisujme si vyhovujúce čísla podľa cifry na mieste desiatok. Pre jednotku nedostaneme žiadne vhodné dvojciferné číslo, pre zvyšné cifry potom dostávame:
– pre cifru 2 máme 1 možnosť – 20,
– pre cifru 3 máme 2 možnosti – 30, 31,
– pre cifru 4 máme 3 možnosti – 40, 41, 42,
– pre cifru 5 máme 4 možnosti – 50, 51, 52, 53,
– pre cifru 6 máme 5 možností – 60, 61, 62, 63, 64,
– pre cifru 7 máme 6 možností – 70, 71, 72, 73, 74, 75,
– pre cifru 8 máme 7 možností – 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86,
– pre cifru 9 máme 8 možností – 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97.
Spolu tak Mirko má rád 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 dvojciferných čísel.

Úloha 38. *Stano chcel piecť palacinky, no keďže na internáte nemá odmerku, ale iba váhu, musel improvizovať. Rozhodol sa, že množstvo mlieka odmeria približne pomocou váhy. Zobral si pohár, ktorý najprv doplna naplnil mliekom a potom ho aj s pohárom odvážil. Váha mu napísala 650 g. To sa mu zdalo priveľa, tak sa rozhodol, že dve pätiny mlieka odpije. Potom pohár s mliekom zase položil na váhu, ktorá mu napísala 450 g. Koľko gramov váži Stanov pohár?*

Výsledok: 150
Riešenie: Keď Stano odpil dve pätiny mlieka, číslo na váhe sa zmenšilo o 650 g - 450 g = 200 g. To znamená, že dve pätiny mlieka vážia 200 g a jedna pätina bude tým pádom vážiť 200 g : 2 = 100 g. Celé mlieko v pohári pred odpitím, teda päť pätín mlieka, bude teda vážiť 5 · 100 = 500 g. Keď hmotnosť celého mlieka pred odpitím odpočítame od čísla, ktoré váha napísala pri prvom vážení, dostaneme hmotnosť Stanovho pohára. Stanov pohár teda váži 650 g - 500 g = 150 g.

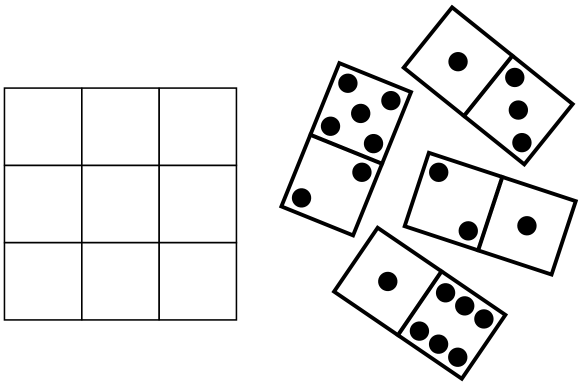
Úloha 39. *Nicol si v škole píše poznámky zásadne iba čiernym, zeleným a fialovým perom, preto v peračníku nosí iba perá týchto farieb. Vieme, že v peračníku sú všetky perá okrem 16 čierne, všetky perá okrem 10 sú zelené a všetky perá okrem 12 sú fialové. Koľko pier má Nicol v peračníku?*

Výsledok: 19
Riešenie: Všetkých pier, okrem tých čiernych, je 16. To inými slovami znamená, že zelených a fialových pier je spolu 16. Týmto sa dozvieme informácie:
zelené + fialové = 16,
čierne + fialové = 10,
čierne + zelené = 12.
Keď sčítame všetky tieto informácie, tak započítame každé pero dvakrát. Na druhej strane napočítame 16 + 10 + 12 = 38 pier. Keďže sme každé započítali dvakrát, tak pier v peračníku musí byť 38 : 2 = 19.
Poznámka: Ľahko dopočítame, že Nicol má v peračníku 19 - 16 = 3 čierne perá, 19 - 10 = 9 zelených pier a 19 - 12 = 7 fialových pier.

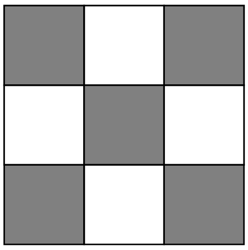
Úloha 40. *Bača z Matbojova nerád hovorí o počte svojich ovečiek. O tomto počte tak vždy rozpráva v hádankách. Včera povedal, že ovečiek má viac ako 90, no menej ako 150. Zároveň povedal, že počet ovečiek je také číslo, že ak sčítame súčet jeho cifier a potom aj výsledku sčítame počet cifier, tak dostaneme číslo 1. Paholok si potom zistil všetky možné počty Bačových oviec a všetky tieto počty sčítal. Aké číslo paholok dostal?*

Výsledok: 826
Riešenie: Zoberme si nejaké číslo od 90 do 150 a pozrime sa, čo s ním robí výpočet súčtu cifier. Pritom sčítavame najviac 3 cifry, takže rozhodne dostanem číslo, ktoré má buď 1, alebo 2 cifry (t.j. je isto menšie ako 100).
Hľadajme čísla, ktoré mohol paholok dostať po prvom výpočte súčtu cifier. To sú také jednociferné a dvojciferné čísla, ktorých súčet cifier je 1. Z jednociferných čísel je také číslo iba číslo 1. Z dvojciferných čísel jedine číslo 10.
Číslo, s ktorým začíname, tak musí mať súčet cifier rovný buď 1, alebo 10. Dvojciferné čísla od 90 do 99 majú súčet cifier isto aspoň 9. Takže vieme dostať iba súčet cifier 10, a to pre číslo 91.
Ďalej číslo 100 je jediné trojciferné číslo so súčtom cifier 1. Ostatné trojciferné čísla majú súčet cifier väčší ako 1. Na splnenie podmienky tak musia mať súčet cifier rovný 10. Pre čísla od 101 do 150 to splnia iba čísla, ktorých posledné dve cifry majú súčet 9. To sú čísla 109, 118, 127, 136 a 145.
Počet Bačových ovečiek je teda niektoré z čísel 91, 100, 109, 118, 127, 136, 145, ktorých súčet je $91 + 100 + 109 + 118 + 127 + 136 + 145 = 826$.

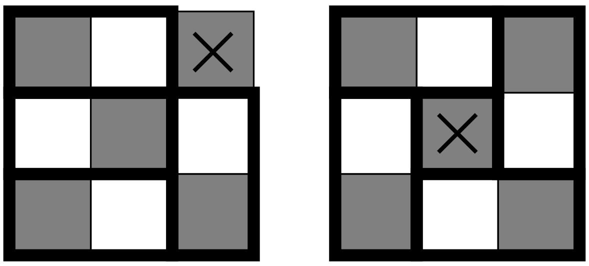
Úloha V1. *Panda sa niekedy v práci nudí. Našťastie, Logik mu na narodeniny daroval hru, s ktorou sa môže v práci zabávať. Hru tvorí tabuľka 3 × 3 a štyri dominá, ako vidíš na obrázku. Vždy si vezme domino kocku a zakryje ňou presne dve políčka tabuľky, ktoré ešte nie sú zakryté. Takto položí všetky štyri dominá s tým, že susediace dominá nemusia mať na sebe zhodné čísla. Jedno políčko potom zostane nezakryté. Pandu však aj táto hra čoskoro začne nudiť, lebo už zistil, ktoré všetky políčka môžu byť tým posledným, nezakrytým políčkom. Ktoré políčka to sú?*



Výsledok: stredné políčko a rohové políčka
Riešenie: Pri riešení tejto úlohy nám pomôže, ak si tabuľku šachovnicovo zafarbíme ako na obrázku.



Keď kdekoľvek na tabuľku položíme domino, vždy zakryje jedno biele a jedno čierne políčko. Všimnime si, že čiernych políčok je 5, zatiaľ čo biele sú len 4. Keď teda Panda uloží na tabuľku všetky 4 dominá, zakryje tým 4 čierne a 4 biele políčka. Zostávajúce nezakryté políčko teda musí byť čierne. Čierne políčka sa nachádzajú iba na rohoch a v strede.
Treba ešte overiť, či naozaj vieme položiť dominá na tabuľku tak, aby zostali tieto políčka nezakryté. Na obrázku vidíme, že pravé horné políčko môže zostať nezakryté. To znamená, že akékoľvek rohové políčko môže zostať nezakryté – tabuľku stačí otočiť. Na ďalšom obrázku vidíme, že aj stredové políčko môže zostať nezakryté.



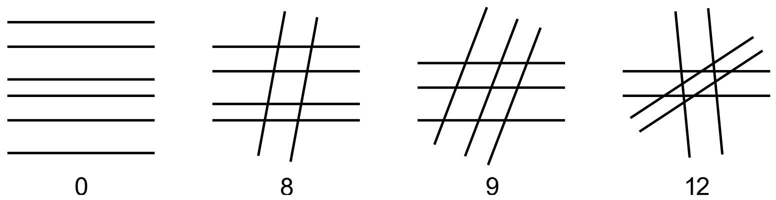
Teda platí, že všetky políčka, ktoré môžu zostať nezakryté, sú stredové políčko a rohové políčka.

Úloha V2. *Piati kamaráti sa rozprávajú o nejakom dvojcifernom čísle. Pritom o ňom rozprávajú tvrdenia:*
Andrea povedala: „Toto číslo má na mieste desiatok cifru 5.“
Beáta povedala: „Toto číslo je násobkom čísla 11.“
Cyprián povedal: „Toto číslo nie je násobkom čísla 5.“
Damián povedal: „Toto číslo je nepárne.“
Ela povedala: „Súčet cifier tohto čísla je 10.“
Ukázalo sa, že iba jeden z kamarátov vyslovil nepravdivé tvrdenie. O akom čísle sa kamaráti rozprávali? Nájdite všetky možnosti.

<u>Výsledok:</u> 55
<u>Riešenie:</u> Rozoberme prípady podľa toho, či Beáta hovorí pravdu.
Ak Beáta nehovorí pravdu, tak hľadané číslo nie je násobkom 11. To pre dvojciferné čísla znamená, že hľadané číslo nemá dve rovnaké cifry, čiže jeho cifry sú rôzne. Zároveň však majú mať pravdu všetci ostatní. Podľa Andrey teda má byť na mieste desiatok cifra 5, no potom má podľa Ely byť na mieste jednotiek cifry 10 - 5 = 5. Takže výsledné číslo je 55, čo je ale v spore s tým, že Beáta nehovorí pravdu. Preto Beáta určite hovorí pravdu. Príslušné dvojciferné číslo sa tak skladá z dvoch rovnakých cifier. Všimnime si, že v takomto prípade z Andreinho aj Elinho výroku vyplýva, že hľadané číslo je 55. Preto musia oba byť pravdivé. Ľahko skontrolujeme, že v prípade čísla 55 je Cyprián jediný, kto nehovorí pravdu. Preto jediné číslo, o ktorom sa mohli kamaráti rozprávať, je číslo 55.

Úloha V3. *Ninka si na papier nakreslila 6 rôznych priamok. Pri tom platilo, že každá priamka bola rovnobežná s nejakou inou priamkou. Navyše sa žiadne tri rôzne priamky nepretínali v spoločnom bode. Ninka spočítala počet priesečníkov týchto 6 priamok. Aké rôzne počty priesečníkov mohla dostať?*

<u>Výsledok:</u> 0 alebo 8 alebo 9 alebo 12
<u>Riešenie:</u> Každá priamka musí byť vo dvojici s nejakou inou rovnobežnou priamkou. Pre každý smer, ktorým ide nejaká skupina rovnobežných priamok tak musíme mať aspoň dve priamky. Podľa toho môžeme mať buď 1, alebo 2, alebo 3 skupiny navzájom rovnobežných priamok.
Ak je len jedna skupina navzájom rovnobežných priamok, tak majú 0 priesečníkov. Ak máme dve skupiny rovnobežných priamok, tak môžu obsahovať buď 2 a 4, alebo 3 a 3 priamky. V týchto prípadoch majú $2 \cdot 4 = 8$, resp. $3 \cdot 3 = 9$ priesečníkov. Napokon ak máme tri dvojice rovnobežných priamok, tak máme $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ priesečníkov.
Možné počty priesečníkov sú teda 0, 8, 9 alebo 12.

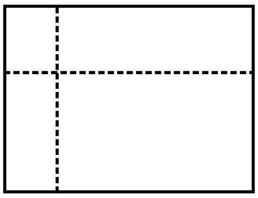


Úloha V4. *Na dnešnom Rally sa pretekajú 5 kamaráti, každý v aute inej farby – modrom, bielom, červenom, fialovom a zelenom. Hodinu pred koncom boli autá v nejakom poradí. Počas poslednej hodiny najprv modré auto naraz predbehlo 4 autá, potom červené auto naraz predbehlo 3 autá a nakoniec biele auto naraz predbehlo 2 autá. Ktoré auto skončilo predposledné, ak bolo hodinu pred koncom fialové auto druhé? Nájdite všetky možnosti.*

<u>Výsledok:</u> zelené alebo fialové

Riešenie: Skúsme si nazvať autá podľa prvého písmena ich farby – M, B, Č, F, Z. Ak modré auto predbehlo 4 autá, muselo byť pred predbiehaním posledné. Predbehnutím štyroch áut sa dostalo na prvé miesto, čím sa stalo fialové auto tretím. Napíšme si poradie áut spredu po tom, čo modré auto predbehlo 4 autá (s tým, že miesta, kde ešte nevieme, kto je, označíme prázdnym miestom): M _ F_ _ . Červené auto môže byť iba na predposlednom alebo poslednom mieste, lebo na druhom mieste by pred sebou nemalo 3 autá, ktoré má podľa zadania predbehnúť. Po tom, čo červené auto predbehne tri autá, sú dve možnosti poradia: Č M _ F _ alebo M Č _ F _. V oboch možnostiach sa fialové auto stalo predposledným a v oboch možnostiach môže byť biele auto iba na treťom alebo poslednom mieste. Zelené auto je na mieste, ktoré zostane voľné. Ak bolo biele auto posledné a predbehlo dve autá, fialové auto sa dostalo na posledné miesto a zelené auto sa dostalo na predposledné miesto. Ak bolo biele auto tretie a predbehlo dve autá, fialové auto zostalo na predposlednom mieste rovnako, ako pred predbiehaním bieleho auta. Predposledné teda mohlo skončiť iba zelené alebo fialové auto.

Úloha V5. *Alex si kúpil veľkú deku – teda, skôr veľký obdĺžnikový kus látky s obvodom 700 cm, z ktorej chce vyrobiť 4 menšie deky tvaru obdĺžnika. Na túto obdĺžnikovú látku by chcel nakresliť jednu zvislú a jednu vodorovnú úsečku, ktoré by rozdelili látku na štyri obdĺžniky (na obrázku sú úsečky naznačené čiarkovanou čiarou). Látku by potom rozstrihal po týchto úsečkách a každú zo štyroch diek by chcel po obvode obšiť. Nechce sa však upracovať, tak uvažuje, ako látku rozdeliť na 4 obdĺžniky tak, aby súčet ich obvodov bol čo najmenší. Aký najmenší a aký najväčší súčet obvodov štyroch diek v centimetroch môže Alex dostať?*



Výsledok: 1400 a 1400
Riešenie: Zvislá úsečka je rovnako dlhá ako zvislá strana obdĺžnikovej látky a vodorovná úsečka je rovnako dlhá ako vodorovná strana obdĺžnikovej látky. Keď Alex rozstrihne látku po týchto úsečkách, pridá tým do súčtu obvodov dĺžky týchto strán dvakrát. Každá strana pribudne dvakrát, lebo rozstrihnutie po úsečke spôsobí vznik dvoch nových strán – jedna patrí jednému a druhá druhému z obdĺžnikov, ktoré rozstrihnutím po jednej úsečke vznikajú. Keď Alex prestrihne látku aj po oboch úsečkách, dĺžky strán diek budú síce menšie ako dĺžky strán látky, ale keď ich sčítame, vidíme, že dokopy dávajú dve zvislé a dve vodorovné strany obdĺžnikovej látky. Vieme, že obvod obdĺžnika je rovný súčtu $2 \cdot a + 2 \cdot b$, kde a, b sú dĺžky strán obdĺžnika. Keďže Alexovi pribudli presne dve zvislé a dve vodorovné strany, pribudol mu jeden celý obvod obdĺžnika. Všimnime si, že nezáleží na tom, kde presne Alex látku rozstrihne – v súčte vždy pribudnú presne dve zvislé strany a dve vodorovné strany. Alex teda vždy dostane súčet obvodov 700 cm + 700 cm = 1400 cm.

Úloha V6. *Istá železničná spoločnosť má nové štvorvozňové vlakové súpravy bez lokomotívy. Chce do nich rozmiestniť 3 hasiace prístroje a to takým spôsobom, aby najdlhšia možná vzdialenosť z ktoréhokoľvek miesta vlaku k najbližšiemu hasiacemu prístroju bola čo najmenšia. Ak má jeden vozeň dĺžku 24 metrov, a teda celá súprava má dĺžku 96 metrov, koľko metrov od začiatku súpravy sa má uložiť prvý hasiaci prístroj?*

Výsledok: 16

<u>Riešenie:</u> Predstavme si reálnu situáciu (ktorá snáď nenastane), že nejaký požiarnik musí zobrať niektorý z hasiacich prístrojov a ísť hasiť k ohňu. Chceme, aby hasiace prístroje boli rozmiestnené rozumne – čo znamená, že každé potenciálne miesto vzniku ohňa bude od hasiaceho prístroja vzdialené najviac x metrov, kde x je číslo, ktoré hľadáme.
Preto sa na úlohu môžeme pozrieť nasledovne: predstavme si že od každého hasiaceho prístroja vyštartujú dvaja požiarnici, každý opačným smerom. Každý požiarnik sa pritom pohybuje rovnakou rýchlosťou. Potom sú relevantné nasledujúce situácie – keď niektorý požiarnik príde na začiatok/koniec vlaku a keď niektorý požiarnik stretne iného požiarnika. Rozmyslime si, že v optimálnom prípade všetky stretnutia a všetky prídenia na začiatok/koniec vlaku nastanú naraz. Ak by sa to nestalo, tak sa nejaká dvojica požiarnikov stretne (resp. niektorý požiarnik príde na začiatok/koniec vlaku) skôr ako nastanú zvyšné stretnutia. To však znamená, že hasiace prístroje, od ktorých vyštartovali, boli pri sebe zbytočne blízko, a tak chceme oddialiť. Takýmto presunom zabezpečíme, že takáto situácia nastane neskôr – to značí, že po posune sú hasiace prístroje umiestnené optimálnejšie. V optimálnom prípade tak budeme v situácii, že všetky stretnutia a všetky prídenia na začiatok/koniec vlaku nastanú naraz. To však znamená, že v optimálnom prípade musia byť hasiace prístroje rozmiestnené nasledovne: každý hasiaci prístroj musí mať okolo seba „ochrannú zónu“ v dĺžke x metrov do oboch smerov od daného hasiaceho prístroja. Navyše sa tieto ochranné zóny pre jednotlivé hasiace prístroje nesmú pretínať.

Každý z 3 hasiacich prístrojov teda má ochrannú zónu dlhú 2x. Pre celú dĺžku vlaku tak platí $3 \cdot 2x = 96$ m. Odtiaľ $x = 96$ m $: 6 = 16$ m. Takže prvý hasiaci prístroj musí byť vzdialený 16 m od začiatku súpravy.