matboj

17.02.2022

Vzorové riešenia

Kategórie 7, 8, 9, Sekunda, Tercia, Kvarta

p-mat

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje.

Úloha 01. *Viki sa chystá upiecť koláč. Podľa receptu by doň malo ísť 200 g hladkej múky a nezaškodí, ak jej bude o niečo viac. Zistila však, že nemá čím odmerať týchto 200 g. Vygooglila si, že polievková lyžica hladkej múky váži 8 až 10 gramov. Koľko polievkových lyžíc hladkej múky musí Viki nasypať do misky, aby v nej bolo určite aspoň 200 g hladkej múky?*

Výsledok: 25
Riešenie: Aby mala Viki istotu, že naváži aspoň 200 g múky, musí predpokladať najhoršiu možnosť. Teda, že polievková lyžica múky váži 8 gramov. Vtedy bude potrebovať nasypať do misky 200 g : 8 g = 25 lyžíc múky.

Úloha 02. *Terka si píše na papier čísla. Začala tým, že si napísala číslo 2022. Ďalej bude za toto číslo písať čísla, a to nasledovne:*
- Ak je posledné napísané číslo párne, tak ho vydelí dvomi a výsledok napíše ako ďalšie číslo.
- Ak je posledné napísané číslo nepárne, tak ho zmenší o jedna a výsledok napíše ako ďalšie číslo. Koľko čísel bude napísaných na papieri po tom, čo naň Terka napíše číslo 1?

Výsledok: 18
Riešenie: Vypíšme si čísla, ako budú napísané na Terkinom papieri:
2022 → 1011 → 1010 → 505 → 504 → 252 → 126 → 63 →
→ 62 → 31 → 30 → 15 → 14 → 7 → 6 → 3 → 2 → 1
Po napísaní čísla 1 tak bude na papieri 18 čísel.

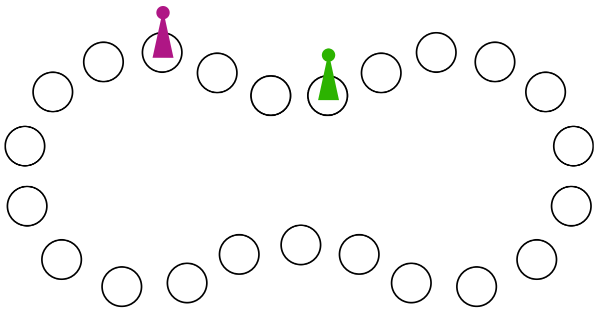
Úloha 03. *Maťo dostal pred Vianocami adventný kalendár, na ktorom sú okienka s číslami od 1 do 24. Namiesto klasického otvárania od 1 po 24 sa rozhodol otvárať ich inak – v ľubovoľnom poradí. Dal si ale podmienku: keď otvorí okienko s nejakým číslom, rozdiel žiadnych dvoch otvorených okienok nemôže byť násobkom čísla 13. Koľko najviac okienok Maťo otvorí tak, aby dodržal svoju podmienku?*

Výsledok: 13
Riešenie: Pozerajme sa na zvyšky čísel od 1 do 24 po delení 13. Ak majú dve čísla rovnaký zvyšok po delení 13, tak ich rozdiel je deliteľný číslom 13. Každé číslo totiž vieme zapísať ako násobok 13 plus zvyšok po delení 13. Keď budeme odčítavať dve čísla s rovnakým zvyškom, tak sa ich zvyšky odčítajú a akoby sme odčitovali iba tie ich časti, ktoré sú násobkom 13. A rozdiel dvoch násobkov 13 je opäť násobok 13. Maťo preto mohol pre každý zvyšok po delení 13 otvoriť najviac jedno okienko, ktorého číslo má tento zvyšok. To mohol docieliť napríklad otvorením okienok s číslami 1 až 13. Takže mohol otvoriť najviac 13 okienok.

Úloha 04. *Braňo sa nudil na hodine matematiky a tak si začal písať štvorciferné čísla. Písal a písal, až ich napísal všetky. Koľko z čísel, ktoré Braňo napísal, malo ciferný súčet 4?*

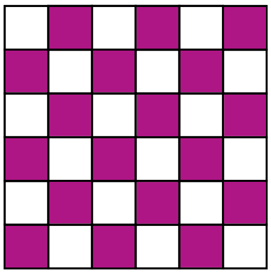
Výsledok: 20
Riešenie: Vypíšme si čísla s ciferným súčtom 4 podľa toho, akú cifru majú na mieste tisícok. Ak je na mieste tisícok cifra 1, tak máme desať možností:
1300, 1210, 1201, 1120, 1111, 1102, 1030, 1021, 1012 a 1003
Ak je na mieste tisícok cifra 2, tak máme šesť možností:
2200, 2110, 2101, 2020, 2011 a 2002
Ak je na mieste stoviek cifra 3, tak máme tri možnosti:
3100, 3010 a 3001
Napokon, ak je na mieste tisícok cifra 4, tak máme jedinú možnosť:
4000
Ak by bola cifra na mieste tisícok väčšia ako 4, tak by aj ciferný súčet bol väčší ako 4.
Spolu preto existuje 10 + 6 + 3 + 1 = 20 štvorciferných čísel s ciferným súčtom 4. Čiže Braňo vypísal 20 čísel s ciferným súčtom 4.

Úloha 05. *Anička s Beátkou sa hrajú hru na plániku s 23 políčkami na obrázku. Anička si naň položila fialovú figúrku a Beátka zelenú figúrku. Vždy, keď Anička tleskne, posunú fialovú figúrku o dve políčka proti smeru hodinových ručičiek a súčasne zelenú figúrku o jedno políčko v smere hodinových ručičiek. Po koľkých Aničkiných tlesknutiach budú obe figúrky na rovnakom políčku?*



Výsledok: 22
Riešenie: Situácia sa nezmení, ak budeme posúvať vždy iba fialovú figúrku o 3 políčka proti smeru hodinových ručičiek a zelená figúrka bude stáť na mieste. Vieme si to totiž predstaviť tak, že okrem pôvodných ťahov každú figúrku posunieme ešte o políčko proti smeru hodinových ručičiek.
Pozrime sa na situáciu akoby o jedno tlesknutie dozadu pred pôvodným rozložením. Vtedy je fialová figúrka na rovnakom mieste ako zelená figúrka. Na zodpovedanie pôvodnej otázky sa zíde zistiť, po koľkých tlesknutiach od tohto momentu sa fialová figúrka vráti na svoje pôvodné miesto. Hýbe sa vždy o 3 políčka, no plánik pozostáva z 23 políčok. Figúrka sa vráti na pôvodné miesto ak prejde počet políčok, ktorý je násobkom 23. Najmenší násobok 23, ktorý je zároveň násobkom 3, je $23 \cdot 3 = 69$. Fialová figúrka sa tak vráti na pôvodné miesto po 23 tlesknutiach.
Situácia, že sa fialová figúrka potrebovala vrátiť na pôvodné miesto, nastala pred jedným tlesknutím, takže obe figúrky budú na rovnakom políčku po 23 - 1 = 22 tlesknutiach.

Úloha 06. *Barborku prestal baviť klasický šach. Tak si nakreslila novú šachovnicu 6 × 6 s bielymi a fialovými políčkami tak ako na obrázku. Koľko sa na obrázku nachádza štvorcov ľubovoľnej veľkosti, ktoré vo svojom vnútri majú viac fialových políčok ako bielych políčok?*

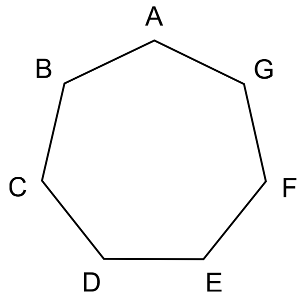


Výsledok: 28
Riešenie: Štvorce 2 × 2, 4 × 4 a 6 × 6 obsahujú rovnaký počet bielych a fialových políčok. Preto aby mohol nejaký štvorec obsahovať viac fialových políčok, musí to byť štvorec 1 × 1, 3 × 3 alebo 5 × 5. Štvorec 1 × 1, ktorý obsahuje viac fialových políčok, je v skutočnosti fialové políčko. Tých je 18. Štvorec 3 × 3 s viac fialovými políčkami obsahuje 5 fialových políčok. Takéto štvorce sa striedajú so štvorcami 3 × 3 so 4 fialovými políčkami. Vyhovujúce 3 × 3 štvorce tak tvoria polovicu zo všetkých 3 × 3 štvorcov. Všetkých 3 × 3 štvorcov je 16, takže takých s viac fialovými políčkami je 16 : 2 = 8. Podobne tvoria vyhovujúce 5 × 5 štvorce polovicu zo všetkých 5 × 5 štvorcov, ktoré sú 4. Vyhovujúce 5 × 5 štvorce sú preto 4 : 2 = 2.
Štvorcov s viac fialovými políčkami ako bielymi je teda 18 + 8 + 2 = 28.

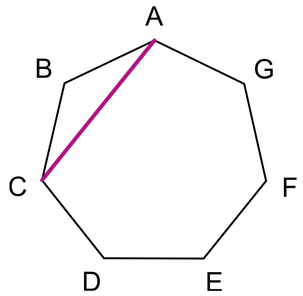
Úloha 07. *Šimon a Barborka sa hrajú. Do nepriehľadného vrecúška dali 100 papierikov s číslami 1 až 100. Každý z nich si potajomky vybral jeden z papierikov a potom sa udial takýto rozhovor:*
Barborka: „Neviem určiť, kto z nás dvoch si vytiahol menšie číslo.“
Šimon: „Vďaka za informáciu. Vďaka nej teraz už viem určiť, kto z nás si vytiahol menšie číslo.“
Barborka: „To fakt? A je tvoje vytiahnuté číslo párne?“
Šimon: „Presne tak.“
Barborka: „Tak to keď sčítame naše čísla, dostaneme súčet 84.“
Aké číslo si vytiahla Barborka?

Výsledok: 82
Riešenie: Prvá Barborkina veta hovorí, že ona nemá číslo 1 alebo 100. Inak by totiž vedela, kto má menšie číslo. Túto informáciu dostal Šimon a keďže jemu už pomohla rozhodnúť, kto má menšie číslo, tak musí mať niektoré z čísel 2 alebo 99. Následná Barborkina otázka a Šimonova odpoveď rozhodne, že to je číslo 2. Keďže Barborka nám na konci povie, že súčet jej a Šimonovho čísla je 84, tak Barborka si vytiahla číslo 84 - 2 = 82.

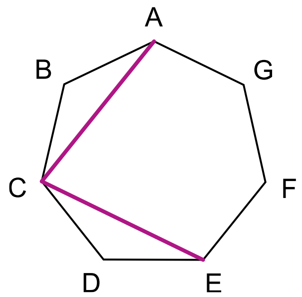
Úloha 08. *Majo má na papieri nakreslený pravidelný sedemuholník ABCDEFG s vyznačenými stranami. Do vrcholu A postaví mravca so štetcom. Mravec sa začne prechádzať – prejde po nejakej ešte nevyznačenej uhlopriečke a vyznačí ju. Pritom ale nesmie prejsť cez inú vyznačenú uhlopriečku. Po konci mravcovho prechádzania sa Majo rozstrihá útvar na papieri po vyznačených čiarach. Majo chce, aby sa po takomto rozstrihaní sedemuholník rozpadol na samé trojuholníky. Koľkými spôsobmi sa môže mravec poprechádzať, aby to mohol Majo spraviť?*



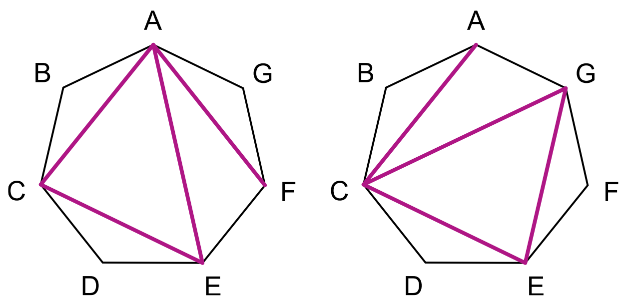
Výsledok: 10
Riešenie: Z vrcholu *A* môže ísť mravec do niektorého z vrcholov *C*, *D*, *E* alebo *F*.
Ak pôjde do vrcholu *C*, tak máme takúto situáciu:



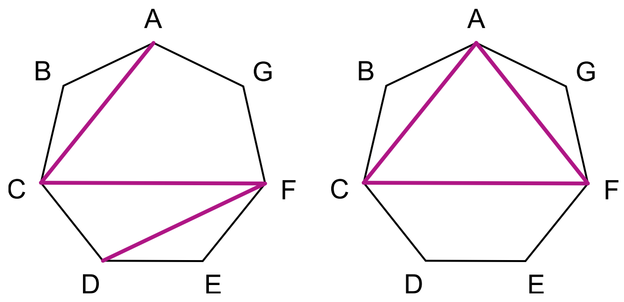
Mravec môže pokračovať do vrcholov *E*, *F* alebo *G*.
Ak si vyberie vrchol *E*, tak sme v takejto situácii:



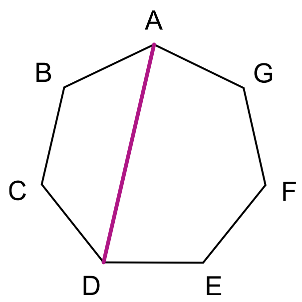
Ďalej môže mravec pokračovať do vrcholu *A* alebo *G*. Ak si vyberie vrchol *A*, tak sa potom vyberie do vrcholu *F*, kde skončí. Rovnako ak si vyberie vrchol *G*, tak sa potom vyberie do vrcholu *C*, kde skončí. V oboch prípadoch naozaj dostaneme po rozstrihaní samé trojuholníky:



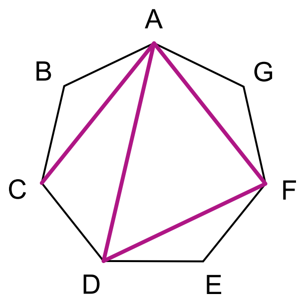
Podobnú situáciu dostaneme, ak by si mravec namiesto vrcholu *E* vybral vrchol *G*. Ak by si mravec vybral namiesto vrcholu *E* vrchol *F*, tak by z neho mohol pokračovať buď do vrcholu *D*, alebo *A*, kde by skončil:



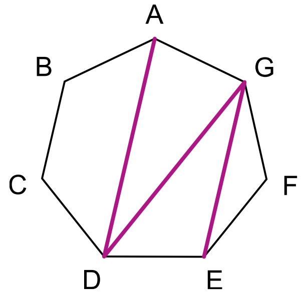
V oboch prípadoch ale v tomto vrchole skončí a nevzniknú samé trojuholníky. V tomto prípade tak nemáme žiadny spôsob, ako môže mravec prejsť.
V prípade, že mravcov prvý vrchol bol *C*, sme tak dostali 4 možnosti, ako mohol mravec prejsť. Podobne dostaneme 4 možnosti aj ak by mravcov prvý vrchol bol vrchol *F* – celá situácia by bola totiž osovo súmerná. Zostávajú možnosti, že si mravec na úvod vybral vrchol *D* alebo *E*. Opäť sú tieto situácie osovo súmerné, a tak sa zaoberajme len jednou.
Ak si mravec vybral vrchol *D*, tak sme v takejto situácii:



Mravec môže pokračovať do vrcholov *B*, *F* alebo *G*. Ak by pokračoval do vrcholu B, tak by už skončil. Preto bude pokračovať do niektorého zo zvyšných vrcholov.
Nech mravec pokračuje do vrcholu *F*. Potom musí pokračovať do vrcholu *A* a odtiaľ dokončiť svoju prechádzku cestou do vrcholu *C*. Toto je ďalším riešením:



Ak by mravec šiel do vrcholu *G* namiesto vrcholu *F*, tak by sa potom presunul už len do *E*, kde by skončil bez toho, aby sme dostali ďalšie riešenie:

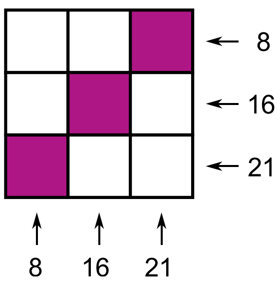


V prípade, že mravec na úvod z vrcholu *A* do vrcholu *D*, tak máme jeden spôsob, ako mohol mravec prejsť po uhlopriečkach. Podobne máme jeden spôsob, aj ak by šiel do vrcholu *E*.
Spolu tak dostávame 4 + 4 + 1 + 1 = 10 spôsobov, ako mohol mravec prejsť po uhlopriečkach sedemuholníka.

Úloha 09. *Kika má záhradu tvaru obdĺžnika. Vie ju rozdeliť na tri rovnaké obdĺžnikové záhony tak ako na obrázku. Na oplotenie každého zo záhonov by Kika potrebovala 30 m pletiva. Koľko metrov pletiva by Kika potrebovala na oplotenie celej záhrady?*

Výsledok: 50
Riešenie: Z obrázka vidno, že dlhšia strana obdĺžnikových záhonov musí byť dvakrát dlhšia ako kratšia strana záhonov. Obe dlhšie strany záhonov tak vieme rozdeliť na dve časti s rovnakou dĺžkou ako dĺžka kratšej strany. Do obvodu záhona tak prispieva 1 + 2 + 1 + 2 = 6 častí dlhých ako kratšia strana. Kratšia strana obdĺžnikového záhona má preto dĺžku 30 m : 6 = 5 m, a tak má dlhšia strana dĺžku 2 · 5 = 10 m. Dlhšia strana celej Kikinej záhrady je preto dlhá 5 m + 10 m = 15 m a kratšia strana je dlhá 10 m. Na oplotenie celej záhrady tak Kika potrebuje 15 m + 10 m + 15 m + 10 m = 50 m pletiva.

Úloha 10. *Panda si nakreslil tabuľku 3 × 3, do ktorej začal písať čísla. Chce do každého políčka napísať jedno z čísel 1 až 9 a každé použiť iba raz. Navyše má špeciálne požiadavky:*
- Súčet čísel v prvom riadku a taktiež súčet čísel v prvom stĺpci má byť 8.
- Súčet čísel v druhom riadku a taktiež súčet čísel v druhom stĺpci má byť 16.
- Súčet čísel v treťom riadku a taktiež súčet čísel v treťom stĺpci má byť 21.
Keď sa to Pandovi podarí, vypočíta súčin čísel na uhlopriečke tvorenej fialovými štvorčekmi. Aký súčin Panda dostane?



Výsledok: 120

Riešenie: Súčet 8 sa dá dostať iba dvomi spôsobmi: $8 = 1 + 2 + 5$ a $8 = 1 + 3 + 4$. V ľavom hornom rohu tak bude číslo 1 a obe tieto kombinácie čísel musíme použiť. Číslo 21 sa dá dostať tromi spôsobmi: $21 = 9 + 8 + 4$, $21 = 9 + 7 + 5$ a $21 = 8 + 7 + 6$. Do tretieho riadku či stĺpca ale musia zasahovať kombinácie čísel $1 + 2 + 5$ a $1 + 3 + 4$ z prvého riadka a stĺpca. To vylučuje možnosť $21 = 8 + 7 + 6$, lebo žiadne z týchto čísel sa v kombináciách prvého riadka a stĺpca nenachádza. Musia sa tak použiť kombinácie $21 = 9 + 8 + 4$ a $21 = 9 + 7 + 5$, v pravom dolnom rohu tak bude číslo 9. Jediné číslo, ktoré sme nepoužili, je číslo 6, ktoré dáme do stredu tabuľky. Celé vyplnenie tak bude vyzerať takto:

1	2	5	← 8
3	6	7	← 16
4	8	9	← 21
↑ 8	↑ 16	↑ 21	

Súčin čísel na uhlopriečke tvorenej fialovými štvorčekmi bude $4 \cdot 6 \cdot 5 = 120$.

Úloha 11. *Samko zabudol svoje heslo od mobilu. Zase. Vie, že je to také trojciferné číslo, ktoré je 19-krát väčšie ako jeho ciferný súčet. Koľko trojciferných čísel môže byť heslom od Samkovho mobilu?*

Výsledok: 11

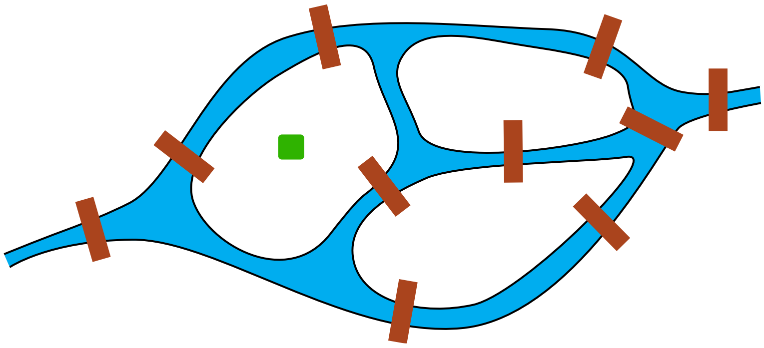
Riešenie: Samkovo heslo označme ako ABC, kde A, B a C sú jednotlivé cifry a A je rôzne od nuly. Potom platí $ABC = 100 \cdot A + 10 \cdot B + 1 \cdot C$. Zo zadania vieme, že toto číslo sa má rovnať 19-násobku svojho ciferného súčtu. Túto podmienku vieme zapísať ako $100 \cdot A + 10 \cdot B + C = 19 \cdot (A + B + C)$. To vieme upraviť na tvar $81 \cdot A = 9 \cdot B + 18 \cdot C$. Po vydelení deviatimi máme: $9 \cdot A = B + 2 \cdot C$.

Rozoberme prípady podľa toho, čomu sa rovná A. A je rôzne od nuly, takže prvá možnosť je $A = 1$. Tu dostávame 5 možností, konkrétne dvojica (B, C) je jedna z možností (9, 0), (7, 1), (5, 2), (3, 3) a (1, 4), čo zodpovedá číslam 190, 171, 152, 133 a 114. V prípade $A = 2$ dostaneme podobným spôsobom opäť 5 možností, konkrétne 285, 266, 247, 228 a 209. Pre $A = 3$ dostaneme už len jedinú možnosť, a to číslo 399.

Pre väčšie hodnoty A už žiadne vyhovujúce číslo nenájdeme. To preto, lebo pravá strana vzťahu $9 \cdot A = B + 2 \cdot C$ má hodnotu najviac 27 (keďže B a C sú cifry).

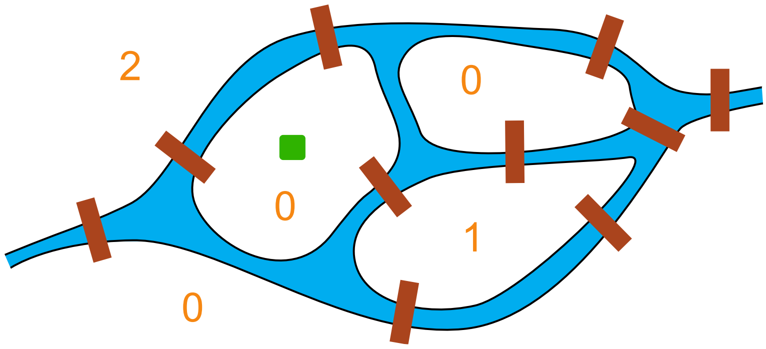
Spolu sme tak dostali $5 + 5 + 1 = 11$ trojciferných čísel, ktoré môžu byť heslom od Samkovho mobilu.

Úloha 12. *Leonard sa vyskytol v meste s riekou. Rieka v tomto meste vytvára niekoľko ostrovov, ktoré sú medzi sebou a s brehmi rieky poprepájané mostami. Leonard našiel plán mostov v tomto meste. Zistil, že sa nachádza na zelenom štvorčeku. Chcel by sa poprechádzať po mostoch tak, že prejde presne po 4 (nie nutne rôznych) mostoch a vráti sa naspäť do zeleného štvorca. Koľkými spôsobmi sa môže Leonard poprechádzať po mostoch?*

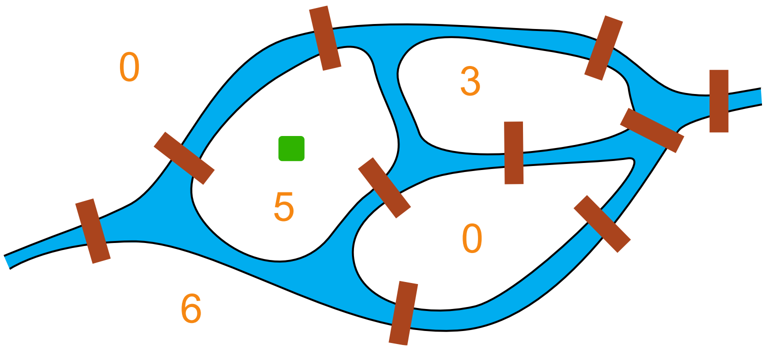


Výsledok: 70

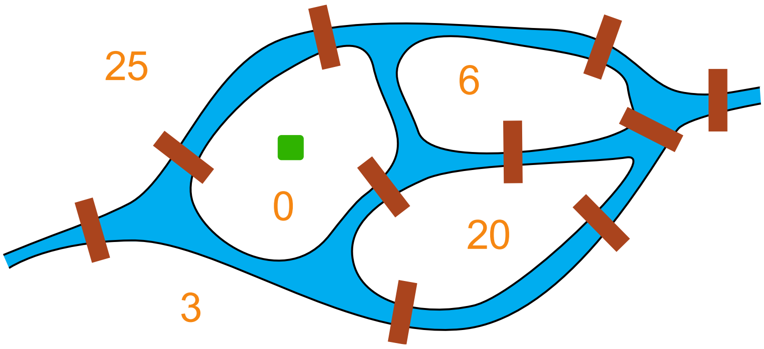
Riešenie: Aj časti brehu nazývajme ostrovmi. Ku každému ostrovu si napíšeme niekoľko čísel. Najprv si napíšme, koľkými spôsobmi sa na daný ostrov vieme dostať tak, že prejdeme jedným mostom. To spočítame ľahko tým, že spočítame, koľko mostov vedie z ostrova so zeleným štvorčekom na daný ostrov. Dostaneme takýto obrázok:



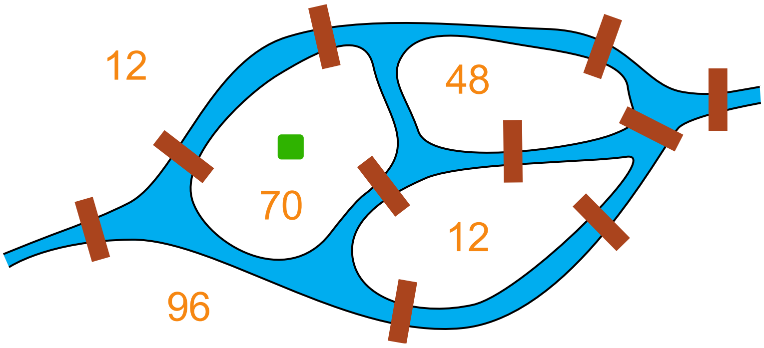
Ďalej pre každý ostrov spočítajme, koľkými spôsobmi sa naň vieme dostať použitím dvoch mostov. Pre daný ostrov to spočítame tak, že sčítame čísla na ostrovoch, na ktorých končia mosty z daného ostrova. Ak sú medzi nejakými ostrovmi dva mosty, tak príslušné číslo započítame dvakrát. Týmto naozaj počítame počet prechádzok po presne dvoch mostoch. To preto, lebo za každý most vedúci na daný ostrov spočítame počet prechádzok, v ktorých je tento most posledným použitým a predtým sme použili nejaký jeden iný most. Takýmto spôsobom dostaneme pre každý ostrov nové číslo, ktorým prepíšme číslo z predošlého obrázka:



Teraz zopakujeme predošlý krok a dostaneme pre každý ostrov počet prechádzok po troch mostoch končiacich na danom ostrove. Opäť teda pre daný ostrov spočítajme čísla na opačných stranách každého mostu, ktorý z neho vedie. Pre každý most tým počítame prechádzky po troch mostoch, kde je daný most použitý ako posledný a predtým sme použili nejaké dva mosty. Znova dostaneme pre každý ostrov nejaké číslo, ktorým prepíšeme to z predošlého kroku:



Zostáva už len raz zopakovať ten istý postup, teraz by to stačilo už len pre ostrov so zeleným štvorčekom. Dostaneme takýto obrázok:



Z neho už vidíme, že Leonard sa môže prejsť po mostoch 70 spôsobmi.

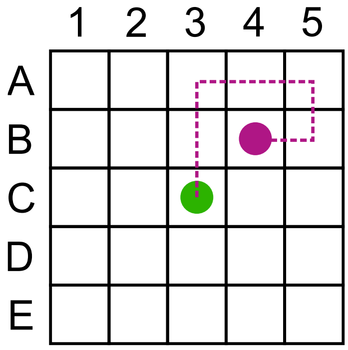
Úloha 13. *Samo sa hrá s hracími kockami. Hracia kocka má na svojich stenách 1 až 6 bodiek, každý počet raz. Samo by chcel zlepiť dve kocky stenami tak, aby na viditeľných stenách bolo čo najmenej bodiek. Koľko bodiek bude vidno na kockách, keď sa mu to podarí?*

Výsledok: 30
Riešenie: Dve kocky majú na svojich stenách spolu $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 2 \cdot 21 = 42$ bodiek. Aby bolo vidno čo najmenej bodiek, musí Samo zlepiť steny, kde je bodiek najviac, teda steny so šiestimi bodkami. Takúto stenu zakryje na oboch kockách. Po zlepení tak bude na kockách vidno $42 - 6 - 6 = 30$ bodiek.

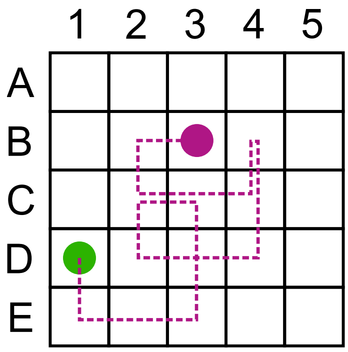
Úloha 14. *Sedem žiakov si na hodine telesnej výchovy meralo svoju výšku. Zistili, že sa vedia postaviť do radu od najmenšieho po najväčšieho tak, že ich výšky budú v tomto rade narastať vždy o rovnakú dĺžku. Andrej je najvyšší a má výšku 196 cm. Na druhej strane najnižší je Gabo s výškou 154 cm. Koľko centimetrov meria Boris, ktorý je druhý najvyšší?*

Výsledok: 189
Riešenie: Výška žiakov v rade narastie 6-krát. Pritom musí narásť dokopy o 196 cm - 154 cm = 42 cm. Pri každom náraste tak výška narastie o 42 cm : 6 = 7 cm. Boris je o týchto 7 cm nižší ako najvyšší Andrej, takže Boris má výšku 196 cm - 7 cm = 189 cm.

Úloha 15. *Kubo vyhrabal na povale svojho robota. Keď ho postaví na štvorčekovú sieť, tak mu vie dávať pokyny, ako sa má pohnúť, a to nasledovne:*
Ak mu Kubo dá pokyn H – robot sa posunie o jedno políčko hore.
Ak mu Kubo dá pokyn D – robot sa posunie o jedno políčko dole.
Ak mu Kubo dá pokyn P – robot sa posunie o jedno políčko doprava.
Ak mu Kubo dá pokyn L – robot sa posunie o jedno políčko doľava.
Teda ak by Kubo postavil robota na zelený krúžok na políčku C3 a zadal mu pokyny HHPPDL, tak by sa robot pohol ako na obrázku a skončil by na fialovom krúžku na políčku B4. Na ktorom políčku by robot skončil, keby ho Kubo postavil na políčko D1 a dá mu pokyny DPPHHLDPPHHDLLHP?



Výsledok: B3
Riešenie: Nakreslime si dráhu, po ktorej robot prejde:



Z toho ľahko prečítame, že Kubov robot skončí na políčku B3.

Úloha 16. *Tomáš si vypísal všetky zlomky (nie nutne v základnom tvare) také, že čitateľ a menovateľ boli prirodzenými číslami so súčtom 10. Potom si na papier napísal súčet každej dvojice rôznych zlomkov a zakrúžkoval výsledky, ktoré boli celým číslom. Koľko rôznych čísel Tomáš zakrúžkoval?*

Výsledok: 4
Riešenie: Zlomky, ktoré si Tomáš vypísal, sú 9/1, 8/2, 7/3, 6/4, 5/5, 4/6, 3/7, 2/8 a 1/9. V základnom tvare majú hodnotu 9, 4, 7/3, 3/2, 1, 2/3, 3/7, 1/4 a 1/9. Keď k celému číslu pripočítame zlomok, ktorý nie je celým číslom, tak dostaneme zlomok, ktorý nie je celým číslom. Z čísel 9, 4 a 1 tak vieme dostať celé čísla iba ako súčty čísel z týchto troch. Tým dostaneme súčty 9 + 4 = 13, 9 + 1 = 10 a 4 + 1 = 5. Z podobných dôvodov nedostaneme celé číslo, keď sčítame dva zlomky s rôznymi menovateľmi – po prenásobení každého z nich niektorým menovateľom budeme sčítavať celé číslo a zlomok, ktorý nie je celým číslom, a tak nedostaneme súčet, ktorý bude celým číslom. Jediný kandidát na vyhovujúci súčet spomedzi zvyšných zlomkov je tak 7/3 + 2/3 = 9/3 = 3, ktorý je celým číslom.
Tomáš teda dostal 4 rôzne celočíselné výsledky (3, 5, 10 a 13).

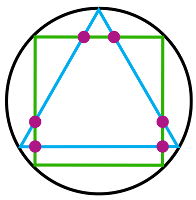
Úloha 17. *Roman si obľúbil isté trojciferné číslo. Samo o sebe nie je až tak zaujímavé. Tak si Roman napísal na papier tri čísla. Jedno z nich bolo jeho obľúbené číslo. Ďalej Roman napísal svoje obľúbené číslo zaokrúhlené na desiatky. Napokon napísal svoje obľúbené číslo zaokrúhlené na stovky. Všetky tri čísla na papieri sčítal a dostal tak číslo 2022. Akú hodnotu má Romanovo obľúbené číslo?*

Výsledok: 662
Riešenie: Sčítavanie našich troch čísel so súčtom 2022 vieme zapísať pod seba ako na obrázku:

$$\begin{array}{cccc} & \square & \square & \square \\ + & \square & \square & 0 \\ + & \square & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}$$

V prvom riadku je Romanovo číslo a v ďalších dvoch sú výsledky jednotlivých zaokrúhlení. Hneď vidíme, že cifra na mieste jednotiek v Romanovom čísle musí byť 2. Ďalej vieme povedať, že cifra na mieste stoviek je 6 – ak by tam bola cifra 7 (alebo väčšia), tak by bol súčet aspoň $3 \cdot 700 = 2100$; ak by tam bola cifra 5 (alebo menšia), tak ani po zaokrúhleniach všetkých troch čísel nahor na 600 nedostaneme číslo väčšie ako $3 \cdot 600 = 1800$. Ak by sa pri zaokrúhľovaní na stovky nezvýšila cifra na mieste stoviek, tak by neznáme desiatky mali vytvoriť súčet $2022 - 602 - 600 - 600 = 220$. To dve rovnaké dvojciferné čísla určite nedokážu. Preto pri zaokrúhľovaní na stovky budeme zvyšovať cifru na mieste stoviek v treťom čísle, teda po zaokrúhlení dostaneme číslo 700. Cifry na mieste desiatok teraz musia vytvoriť súčet $2022 - 602 - 600 - 700 = 120$. To ľahko zariadime tým, že na mieste desiatok v Romanovom čísle bude cifra 6. Romanovo číslo je preto 662.

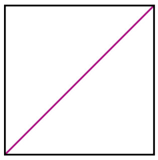
Úloha 18. *Paťo si nakreslil kružnicu a vpísal do nej rovnostranný trojuholník a štvorec tak, že nemali žiadny spoločný vrchol. Dopadlo to tak ako na obrázku – trojuholník a štvorec sa pretli v 6 rôznych bodoch. Potom Paťo nakreslil druhú kružnicu a vpísal do nej pravidelný päťuholník a pravidelný sedemuholník tak, že nemali žiadny spoločný vrchol. V koľkých rôznych bodoch sa tieto dva útvary pretli?*



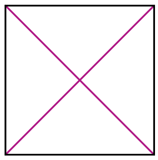
Výsledok: 10
Riešenie: Vrcholy päťuholníka rozdelia kružnicu na 5 rovnako veľkých oblúkov. Podobne aj vrcholy sedemuholníka rozdelia kružnicu na 7 rovnako veľkých oblúkov. Tieto budú ale menšie ako oblúky, na ktoré rozdelí kružnicu päťuholník. Všimnime si, že na každom oblúku vytvorenom päťuholníkom musí byť aspoň jeden vrchol sedemuholníka. V opačnom prípade by jeden oblúk sedemuholníka obsahoval tento oblúk päťuholníka, čiže by bol väčší, čo nemôže.
Pre každý oblúk päťuholníka máme stranu tvorenú koncami tohto oblúka. Tým, že na tomto oblúku sa nachádza nejaký vrchol sedemuholníka, tak strana tvorená koncami oblúka pretne strany sedemuholníka v presne dvoch bodoch. Toto bude platiť pre každú stranu päťuholníka, takže päťuholník a sedemuholník sa pretnú v $2 \cdot 5 = 10$ bodoch.

Úloha 19. *Ester vie perfektne kresliť a vyfarbovať. Nakreslila si štvorec s uhlopriečkou dlhou 12 cm. Teraz by si chcela pripraviť dosť farby na jeho vyfarbenie. Na aký obsah štvorca v centimetroch štvorcových potrebuje pripraviť farbu?*

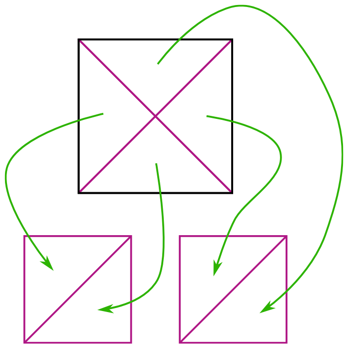
Výsledok: 72
Riešenie: Nakreslime si obrázok štvorca a vyznačme mu uhlopriečku:



Uhlopriečka ho rozdelila na dva trojuholníky. Každý z nich vieme rozdeliť na dva menšie:



Takto získame 4 pravouhlé trojuholníčky, ktoré vieme premiestniť a dostať dva menšie štvorce:

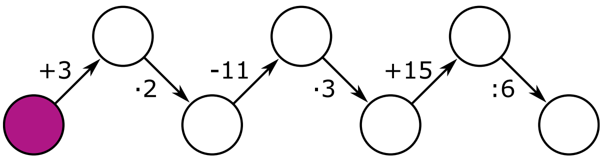


Dostali sme tak dva štvorce so stranou dlhou 6 cm. Obsah každého z nich je 6 cm · 6 cm = 36 cm². Dva štvorce majú obsah 2 · 36 cm² = 72 cm². Obsah pôvodného štvorca je preto 72 cm².

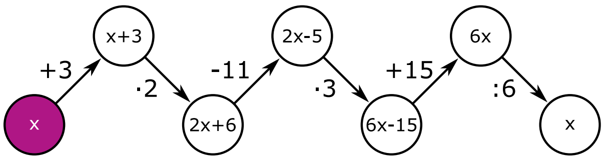
Úloha 20. *Na párty sa stretlo niekoľko ľudí. Niektorí z nich vedeli jazdiť na bicykli a niektorí vedeli šoférovať auto. Auto vedelo šoférovať 30 ľudí na párty. Ľudia, ktorí vedeli šoférovať auto, sa vedeli rozdeliť do pätíc tak, aby v každej pätici boli štyria ľudia, ktorí vedia jazdiť na bicykli. Ľudia, ktorí vedeli jazdiť na bicykli, sa zas vedeli rozdeliť do šestíc tak, aby v každej bol iba jeden človek, ktorý vie šoférovať auto. Koľko ľudí na párty vie jazdiť na bicykli?*

Výsledok: 144
Riešenie: 30 ľudí, ktorí vedeli šoférovať, sa vedelo rozdeliť na pätice tak, aby v každej boli štyria, ktorí vedia jazdiť na bicykli. Týchto pätíc je 30 : 5 = 6, takže 4 · 6 = 24 ľudí vie šoférovať auto a aj jazdiť na bicykli. Ľudia, ktorí vedia jazdiť na bicykli sa zas vedeli rozdeliť do šestíc, aby v každej bol presne 1 z tých 24, ktorí vedia aj šoférovať. V týchto šesticiach je preto presne 6 · 24 = 144 ľudí. To znamená, že na párty vie 144 ľudí jazdiť na bicykli.

Úloha 21. *Miška sa pred písomkou rozhodla precvičiť si počtové operácie. Na internete našla cvičenie ako na obrázku. Do fialového políčka napíše nejaké číslo. Potom s číslami vykonáva operácie naznačené pri šípke. Miška toto spravila s číslom 17 a zostala prekvapená, že na konci dostala opäť rovnaké číslo, teda číslo 17. Pre koľko dvojciferných čísel by mohla na konci dostať rovnaké číslo ako to, s ktorým začala?*



Výsledok: 90
Riešenie: Po troche skúšania prídeme na to, že nám to vychádza pre ľubovoľné číslo. Namiesto čísla 17 si zvoľme nejaké číslo x. V Miškinom cvičení sa x bude meniť takto:

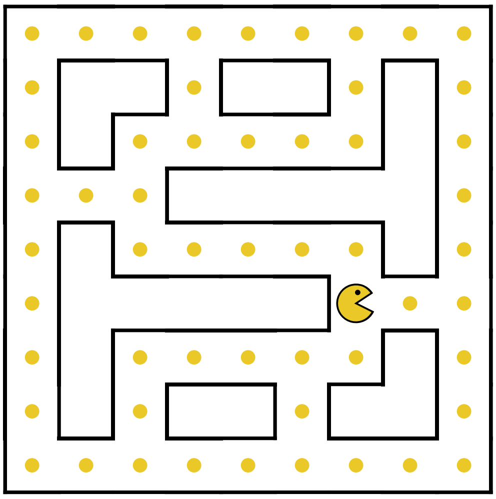


Tým sme práve ukázali, že pre ľubovoľné číslo skončíme s rovnakým číslom, ako sme začali. Nech teda Miška začne s akýmkoľvek číslom, na konci jej vždy vyjde číslo, s ktorým začala. Všetkých dvojciferných čísel je 90, takže Miške sa to stane pre 90 dvojciferných čísel.

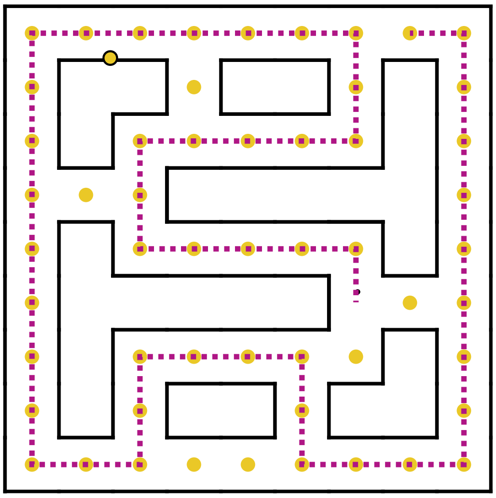
Úloha 22. *Isto poznáš ten pocit, chce sa ti napísať všetky čísla od 1 do 9999. Pritom ti určite napadne zistiť, koľkokrát napíšeš cifru 1. Koľkokrát ju teda napíšeš?*

Výsledok: 4000
Riešenie: Spočítajme, koľkokrát sa cifra 1 nachádza na jednotlivých pozíciách. Na mieste tisícok sa nachádza 1000-krát – v číslach 1000 až 1999. Všimnime si, že to môžeme formulovať aj tak, že ak vyškrtneme túto jednotku, tak nám zostanú trojčíslia 000 až 999. Pritom nám nevadí, že napríklad 000 nie je trojciferné číslo, lebo keď vrátime naspäť vyškrtnutú jednotku, tak dostaneme nejaké číslo medzi 1 a 9999. Toto vieme využiť pre cifru 1 na zvyšných pozíciách. Pre cifru 1 na mieste stoviek dostaneme opäť 1000 možností, lebo ak túto jednotku vyškrtneme, tak zvyšné cifry môžu tvoriť trojčíslia od 000 po 999. Rovnako aj pre cifru 1 na mieste desiatok aj jednotiek. Všetkých cifier 1 preto bude $4 \cdot 1000 = 4000$.

Úloha 23. *Pacman sa opäť raz ocitol v rovnomennej hre. Je na plániku, ktorý vidíš na obrázku. Vydá sa po plániku a vždy, keď príde k žltej bobuľke, tak ju zje. Pacman by chcel prejsť po plániku tak, aby zjedol čo najviac bobuliek. V momente, keď ale príde na miesto, kde bola bobuľka, no už ju zjedol, tak sa zastaví. Rovnako sa zastaví, aj keď sa vráti na miesto, kde začínal. Koľko najviac žltých bobuliek môže Pacman zjesť?*



Výsledok: 48
Riešenie: Ak prejde Pacman po plániku tak ako na nasledujúcom obrázku, zje 48 bobuliek:



Potrebujeme zdôvodniť, že viac bobuliek Pacman zjesť nemohol. Všimnime si, že z každej križovatky vedú 3 cesty. Keď nejakou križovatkou Pacman prejde, tak zostane nejaká cesta, ktorou z danej križovatky nešiel. Tou už nikdy v budúcnosti neprejde. Toto platí pre všetky križovatky okrem tej, pri ktorej sa Pacman zastaví.

Preto ak má Pacman zjesť čo najviac bobuliek, tak potrebuje neprejsť takéto cesty s čo najmenej bobuľkami. Skoro všetky križovatky majú aspoň jednu cestu takú, na ktorej je medzi križovatkami len jedna bobuľka. Toto sú cesty, ktoré chce Pacman neprejsť. Okrem toho sú už len dve križovatky – taká, pri ktorej Pacman skončil na obrázku vyššie, a križovatka presne na opačnej strane plánika. Z nich vedie jedna cesta taká, že má dve bobuľky medzi križovatkami, takže Pacman chce ideálne neprejsť túto cestu. Keďže má možnosť z jednej križovatky prejsť v podstate všetky tri cesty (jednu z ciest takejto križovatky prejde úplne na konci), tak je ideálne, ak pre jednu z týchto dvoch križovatiek neprejde cestu s dvomi bobuľkami a pre druhú križovatku prejde všetky cesty.

Keď všetky tieto pozorovania poskladáme, zistíme, že pre Pacmana je najlepšie prejsť po plániku ako na obrázku vyššie. Takže Pacman zje najviac 48 žltých bobuliek.

Úloha 24. *Lukáš našiel všetky štvorciferné palindrómy, ktoré sú deliteľné 56. Aký je ich súčet?*

Poznámka: Palindróm je číslo, ktoré sa číta rovnako spredu aj odzadu. Napríklad číslo 12321 je palindróm.

Výsledok: 14784
Riešenie: Aby bolo číslo deliteľné 56, musí byť súčasne deliteľné číslami 7 a 8. Štvorciferný palindróm vieme zapísať ako číslo ABBA, kde A a B sú cifry. To vieme rozpísať na ABBA = 1001 · A + 110 · B. Všimnime si, že číslo 1001 je deliteľné 7, takže na to, aby bolo číslo ABBA deliteľné siedmimi, musí byť číslo 110 · B deliteľné 7. Keďže však číslo 110 nie je deliteľné 7, tak musí byť B deliteľné 7. To dáva pre cifru B dve možnosti – buď B = 0, alebo B = 7.
Ak B = 0, tak číslo ABBA má hodnotu 1001 · A. Keďže 1001 je nepárne číslo, tak na zabezpečenie deliteľnosti 8 musí byť A deliteľné 8. Lenže A je cifra, takže A = 0 alebo A = 8. V prvom prípade je ABBA = 0, čo nie je štvorciferné číslo. V druhom prípade už dostávame jedno z riešení ABBA = 8008.
Ak B = 7, tak číslo ABBA má tvar A77A. Podmienka deliteľnosti 8 hovorí, že posledné trojčíslie, teda trojčíslie 77A musí byť deliteľné 8, čo dáva jedinú možnosť A = 6. Dostávame tým druhé riešenie ABBA = 6776.
Tým sme prebrali všetky možnosti, takže Lukáš našiel palindrómy 6776 a 8008. Ich súčet je 6776 + 8008 = 14784.

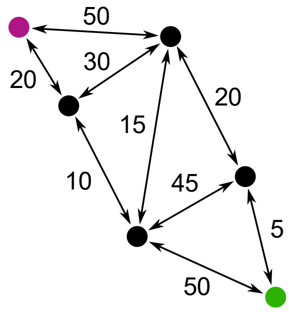
Úloha 25. *V obchode s televízormi predávali televízor za 1600 €. Nikto ho ale nechcel kúpiť, a tak ho zlacnili o štvrtinu. Na tom ale nezarábali, a tak jeho cenu zvýšili o štvrtinu novej ceny. Koľko eur stojí televízor teraz?*

Výsledok: 1500
Riešenie: Pri zľave zlacnel o štvrtinu, čiže zlacnel o 1600 € : 4 = 400 €. Po zľave teda stál 1600 € - 400 € = 1200 €. Potom zdražel o štvrtinu, čiže o 1200 € : 4 = 300 €. Teraz preto stojí 1200 € + 300 € = 1500 €.

Úloha 26. *Paťo si zobral dve kocky so stranou dlhou 2 cm a zlepil ich do väčšieho kvádra. Rozhodol sa všetky hrany tohto kvádra pogumovať, aby neboli moc ostré. Na pogumovanie 1 cm hrany potrebuje použiť 1 gram gumy. Koľko gramov gumy Paťo použije na to, aby pogumoval všetky hrany tohto kvádra?*

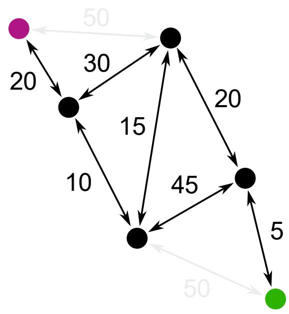
Výsledok: 32
Riešenie: Keďže na jeden centimeter hrany potrebuje Paťo 1 g gumy, na celú dvojcentimetrovú hranu potrebuje 2 g gumy, na štvorcentimetrovú 4 g gumy. Paťov kváder má 12 hrán. Z toho 4 sú štvorcentimetrové a ostatných osem je dvojcentimetrových. Celkovo tak bude Paťo potrebovať 4 · 4 g + 8 · 2 g = 32 g gumy.

Úloha 27. *V krajine Matbojovo premávajú medzi niektorými mestami obojsmerné vlakové linky. Použitie každej linky je spoplatnené nejakou sumou v eurách. Schému liniek spolu s cenou lístka v eurách vidíš na obrázku. Erik by sa rád dostal zo zeleného mesta do fialového mesta. Koľko najmenej eur zaplatí za túto cestu?*

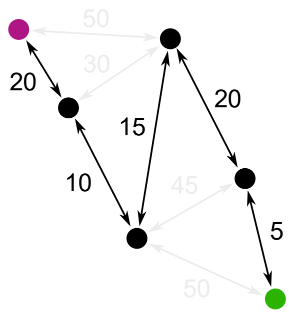


Výsledok: 70

Riešenie: Ak by sme potrebovali prejsť niektorou linkou, ktorá stojí 50 €, vedeli by sme ju obísť po iných linkách a zaplatiť rovnako. Tieto linky tam preto akoby nemusia byť. Z obrázka ich preto vyhoďme:



Niečo podobné môžeme spraviť aj s linkami, ktoré stoja 45 € a 30 €. Vieme ich za lacnejšie obísť po iných linkách. Aj tieto dve linky preto vyhoďme z obrázka:



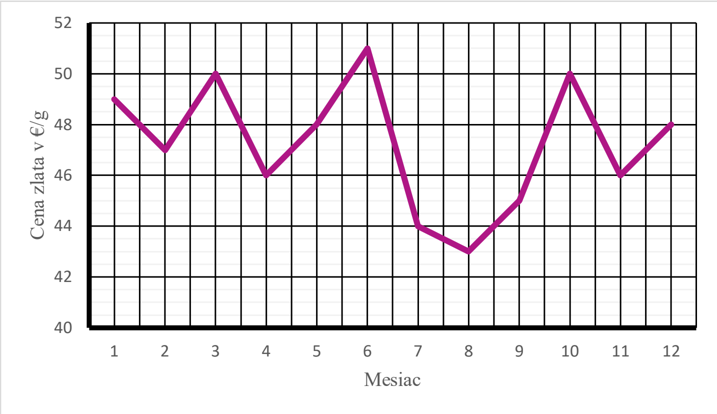
Zostala nám už len jedna možnosť, ako prejsť zo zeleného do fialového mesta. Stáť nás to bude 5 € + 20 € + 15 € + 10 € + 20 € = 70 €.

Úloha 28. *Fedor sa hrá s číslami a počíta súčin cifier každého čísla. Minule našiel najväčšie šesťciferné číslo, ktoré má súčin cifier 100. Ktoré číslo Fedor našiel?*

Výsledok: 554111

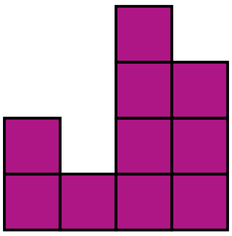
Riešenie: Aby sme našli najväčšie také číslo, tak od prvej cifry píšme čo najväčšie cifry, aby výsledný súčin cifier mohol byť 100. Najväčšia cifra, ktorá delí 100, je cifra 5. Napíšme ju ako prvú. Zvyšné cifry musia mať súčin 100 : 5 = 20. Opäť je najväčšia cifra, ktorá delí 20, cifra 5, a tak ju napíšme ako druhú. Zvyšné cifry potrebujú mať súčin 20 : 5 = 4. Napíšme preto ako ďalšiu cifru 4 a zvyšné cifry doplňme jednotkami. Dostávame tak, že najväčšie šesťciferné číslo so súčinom cifier 100, je číslo 554111.

Úloha 29. *Graf na obrázku ukazuje, ako sa v priebehu jednotlivých mesiacov roka vyvíjala cena zlata za jeden gram v eurách. Matúš na základe tohto grafu povedal niekoľko tvrdení:*
1) Cena zlata sa medzimesačne prepadla trikrát v priebehu tohto roka.
10) Zlato malo najvyššiu cenu v máji.
100) Vo februári bolo zlato lacnejšie ako v decembri.
1000) Priemerná cena jedného gramu zlata za tento rok bola väčšia ako 49 €.
10000) Rozdiel medzi najvyššou a najnižšou cenou za gram zlata v priebehu tohto roka bol 8 €.
Aký je súčet čísel tvrdení, ktoré Matúš povedal správne?



Výsledok: 10100
Riešenie: Postupne prejdime jednotlivé tvrdenia:
1) Toto tvrdenie je nepravdivé. Cena zlata sa totiž medzimesačne prepadla až 5-krát, a to z januára na február, z marca na apríl, z júna na júl, z júla na august a z októbra na november.
10) Aj toto tvrdenie je nepravdivé. Najvyššiu cenu malo zlato v júni, kedy malo cenu 51 € za gram.
100) Toto tvrdenie je pravdivé. Cena zlata vo februári bola 47 € a v decembri 48 € za gram zlata.
1000) Toto tvrdenie je opäť nepravdivé. Ľahko totiž spočítame priemernú cenu zlata ako (49 € + 47 € + 50 € + 46 € + 48 € + 51 € + 44 € + 43 € + 45 € + 50 € + 46 € + 48 €) : 12 = 567 € : 12 = 47,25 €. To je menej ako 49 €.
10000) Toto tvrdenie je pravdivé. Najvyššia cena bola v júni 51 € za gram a najnižšia bola v auguste 43 € za gram zlata. Rozdiel medzi nimi je skutočne 51 € - 43 € = 8 €.
Iba dve tvrdenia sú pravdivé a súčet ich čísel je 100 + 10000 = 10100.

Úloha 30. *Filip si kúpil veľa rovnakých kociek a začal z nich stavať stavby. Postavil si nejakú stavbu, v ktorej každá kocka stála na zemi alebo na nejakej inej kocke. Túto stavbu odfotil spredu a zhora. Napodiv vyzerala stavba z oboch pohľadov tak ako na obrázku. Filip sa potom rozhodol doplniť celú stavbu na kocku 4 × 4 × 4. Koľko najviac kociek môže potrebovať na doplnenie?*



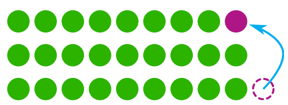
Výsledok: 48
Riešenie: Kocka 4 × 4 × 4 obsahuje 4 · 4 · 4 = 64 kociek. Aby sme spočítali, koľko najviac kociek treba na doplnenie, potrebujeme spočítať, koľko najmenej kociek je v celej stavbe. Umiestnime najprv kocky na zem tak, aby sme zhora videli požadovaný tvar. Na to použijeme 2 + 1 + 4 + 3 = 10 kociek. Na niektoré ešte potrebujeme pridať kocky tak, aby sme požadovaný tvar videli aj spredu. V najspodnejšej vrstve už máme po jednej kocke, takže pritom potrebujeme navýšiť počet kociek iba o 1 + 0 + 3 + 2 = 6. Spolu tak je v stavbe najmenej 10 + 6 = 16 kociek. Na doplnenie do kocky 4 × 4 × 4 preto Filip potrebuje najviac 64 - 16 = 48 kociek.

Úloha 31. *Kamarátky Danka a Ninka sa narodili obe v roku 2010. Danka si všimla, že keď vymení čísla označujúce deň a mesiac dátumu svojich narodenín, tak dostane dátum narodenia Ninky. V koľkých rôznych dňoch roku 2010 sa mohla narodiť Ninka?*

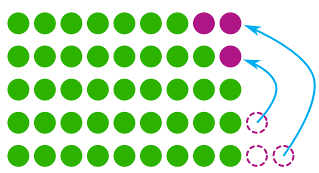
Výsledok: 144
Riešenie: Dankin a Ninkin dátum narodenia majú navzájom vymenené čísla označujúce deň a mesiac narodenia. To je možné, iba ak sú obe tieto čísla niektoré z čísel 1 až 12 – každé z nich totiž aspoň raz vystupuje ako číslo mesiaca. Ninka sa preto narodila v prvých 12 dňoch niektorého z 12 mesiacov, takže sa mohla narodiť v 12 · 12 = 144 rôznych dňoch.

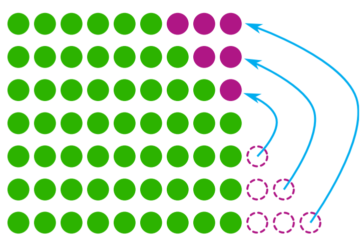
Úloha 32. *Jožko má doma veľa plastových vojačikov. Vie z nich poskladať zaujímavé formácie. Vie ich postaviť do 2 radov tak, že v prvom rade bude o vojačika menej ako v druhom rade. Vie ich tiež postaviť do 3 radov tak, že v prvom rade bude o vojačika menej ako v druhom rade, kde bude o vojačika menej ako v treťom rade. Podobne to vie spraviť aj s 5 a 7 radmi – počty vojačikov sa budú po jednom zväčšovať od prvého radu po posledný. Koľko najmenej vojačikov môže mať Jožko?*

Výsledok: 105
Riešenie: Pozrime sa na rozostavenia s 3, 5 a 7 radmi. Rozostavenie do 3 radov ľahko upravíme tak, aby v každom rade bolo rovnako veľa vojačikov – stačí presunúť jedného vojačika z posledného radu do prvého:



Počet vojačikov preto musí byť násobkom 3. Niečo podobné platí aj v prípade 5 a 7 radov – vieme presunúť vojačikov zo zadnejších radov do prednejších a dostať tak rovnaký počet vojačikov v každom rade:





Počet vojačikov tak musí byť aj násobkom 5, aj násobkom 7.
Počet vojačikov preto musí byť násobkom $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. So 105 vojačikmi navyše vieme splniť aj podmienku s 2 radmi – v prvom rade bude 52 a v druhom 53 vojačikov. Jožko má tak najmenej 105 vojačikov.

Úloha 33. *Milan dostal na narodeniny čokoládu. Tá pozostávala z 36 tabličiek, ktoré boli usporiadané do štvorcovej mriežky 6 × 6. Bolo ich ale potrebné rozlámať. Tak sa Milan začal hrať s čokoládou, začal ju lámať. Zakaždým zobral nejaký kúsok, ktorý ešte držal pokope, a rozlomil ho pozdĺž nejakej čiary pôvodnej štvorcovej mriežky. Koľko najmenej rozlomení bude Milan potrebovať na rozlámanie čokolády na jednotlivé tabličky?*

Výsledok: 35
Riešenie: Vždy, keď Milan rozlomí nejaký kúsok čokolády, vzniknú z neho dva celistvé kúsky. Každé rozlomenie teda zväčšuje počet celistvých kúskov o 1. Na začiatku má Milan 1 kúsok a na konci ich potrebuje 36. Bude preto potrebovať $36 - 1 = 35$ rozlomení, a to bez ohľadu na to, ako bude kúsky lámať.

Úloha 34. *Lukáš si vymyslel priemerné čísla. Priemerné číslo je také trojciferné číslo, ktorého cifra na mieste desiatok sa rovná priemeru cifier na mieste jednotiek a stoviek. Napríklad číslo 159 je priemerné, pretože (1 + 9) : 2 = 5. Lukáš si na papier vypísal všetky priemerné čísla. Koľko čísel si Lukáš vypísal? Poznámka: Trojciferné číslo nemôže mať na mieste stoviek cifru 0.*

Výsledok: 45
Riešenie: Ak si zvolíme cifry priemerného čísla na miestach stoviek a jednotiek, vieme dopočítať cifru na mieste jednotiek. Aby to bolo možné, musí byť súčet cifry na mieste stoviek a cifry na mieste jednotiek párny. Navyše keďže priemer dvoch čísel leží niekde medzi číslami, ktoré priemerujeme, tak takto vždy dostaneme nejakú cifru.
Stačí preto zistiť počet trojciferných čísel, ktorých súčet cifry na mieste stoviek a cifry na mieste jednotiek je párny. Ak je cifra na mieste stoviek nepárna (1, 3, 5, 7 alebo 9), tak potrebujeme, aby cifra na mieste jednotiek bola tiež nepárna (1, 3, 5, 7 alebo 9). Na to máme $5 \cdot 5 = 25$ možností. Ak je cifra na mieste stoviek párna (2, 4, 6 alebo 8), tak cifra na mieste jednotiek musí tiež byť párna (0, 2, 4, 6 alebo 8). V tomto prípade máme $4 \cdot 5 = 20$ možností.
Spolu tak existuje $25 + 20 = 45$ priemerných čísel.

Úloha 35. *Miro si napísal číslo väčšie ako 100 a menšie ako 200. Povedal nám o ňom len to, že je deliteľné presne tromi z týchto šiestich čísel: 3, 12, 20, 25, 30, 60. Aké číslo si Miro napísal?*

Výsledok: 150
Riešenie: Štyri z čísel 3, 12, 20, 25, 30 a 60 sú deliteľné číslom 2. Hľadané Mirovo číslo musí byť deliteľné aspoň jedným z nich, takže musí byť aj deliteľné číslom 2. Podobne je Mirovo číslo deliteľné číslom 3, keďže spomedzi čísel 3, 12, 20, 25, 30 a 60 sú štyri deliteľné číslom 3. Rovnako je Mirovo číslo deliteľné aj číslom 5. Mirovo číslo je preto deliteľné číslom $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Spomedzi čísel, o ktorých nám Miro povedal, je tak deliteľné 3 a 30.
Zisťujme, ktoré z čísel bude tretím číslom, ktorým je Mirovo číslo deliteľné. Ak by to bolo niektoré z čísel 12, 20 a 60, tak by Mirovo číslo bolo deliteľné číslom 4. To by však spôsobilo, že by bolo deliteľné aj zvyšnými z čísel 12, 20 a 60. Mirovo číslo preto nebude deliteľné žiadnym z nich, a tak bude deliteľné 25.
To znamená, že Mirovo číslo musí byť násobkom 150. Medzi číslami 100 a 200 je len jedno také číslo – 150 – ktoré tým pádom musí byť číslom, ktoré si Miro napísal.

Úloha 36. *Ubytovňa v Tatrách ponúka ubytovanie v mnohých izbách pre 5 a pre 7 ľudí. Do tejto ubytovne prišla partia turistov, ktorí sa chceli ubytovať. V hoteli ich však nedokázali rozdeliť do izieb tak, aby boli všetky izby, v ktorých bude niekto z nich, úplne obsadené. Koľko najviac turistov mohlo prísť?*

Výsledok: 23
Riešenie: Značme si do tabuľky, koľko ľudí vieme ubytovať. Ak nepoužijeme žiadnu 7-miestnu izbu, tak môžeme ubytovať 5, 10, 15, 20, 25, ... ľudí:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35

Ak použijeme jednu 7-miestnu izbu, tak vieme ubytovať 7, 12, 17, 22, 27, ... ľudí:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35

Ak použijeme dve 7-miestne izby, tak vieme ubytovať 14, 19, 24, 29, ... ľudí:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35

Ak použijeme tri 7-miestne izby, tak ubytujeme 21, 26, 31, ... ľudí:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35

Ak použijeme štyri 7-miestne izby, podarí sa nám ubytovať 28, 33, 38, ... ľudí:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35

Vidíme, že máme celý riadok taký, že daný počet osôb vieme ubytovať. Potom vieme ubytovať aj ľubovoľný väčší počet ľudí – stačí pridávať 5-miestne izby.
Napokon už ľahko prečítame, že najvyšší počet osôb, ktoré nedokážeme ubytovať, je 23.