matboj

10.11.2022

Vzorové riešenia

Kategórie 7, 8, 9, Sekunda, Tercia, Kvarta

p-mat

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

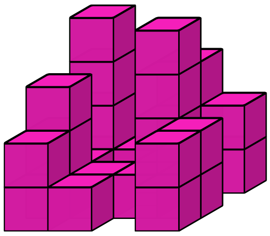
EURÓPSKA ÚNIA

Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

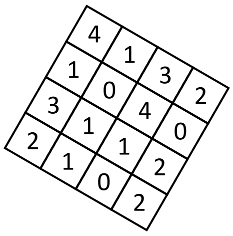
Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje.

Úloha 01. *Miško našiel doma veľa rovnakých kociek. Hneď sa s nimi začal hrať. Staval z nich stavby tak, aby každá kocka ležala buď na zemi, alebo celou stenou na niektorej inej kocke. Postavil tak stavbu na obrázku. Miško to spravil tak, aby z každého stĺpčeka kociek bolo vidieť aspoň časť kocky, ktorá je v ňom najvyššie. Koľko kociek Miško použil na túto stavbu?*



Výsledok: 27

Riešenie: Počty kociek na jednotlivých pozíciách si môžeme zakresliť do takejto schémy:



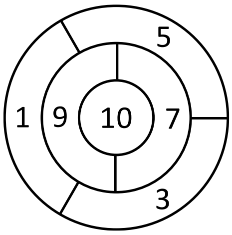
V tejto schéme sú zahrnuté všetky stĺpčeky, v ktorých vidíme najvrchnejšiu kocku (v niektorých prípadoch v danom stĺpčeku nie je žiadna kocka, teda ako by vidíme, že sa v tomto stĺpčeku nie je žiadna kocka). V tejto schéme sú preto podľa zadania zahrnuté všetky kocky, ktoré sa v stavbe nachádzajú. Miško tak použil 4 + 1 + 3 + 2 + 1 + 0 + 4 + 0 + 3 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 0 + 2 = 27 kociek.

Úloha 02. *Ferko, Kubko a Jožko išli na výlet. Kubko urobil 9 žemlí a Jožko 6. Ferko vybavoval iné veci. Žemle si na výlete rozdelili tak, že každý mal 5 žemlí. Po výlete Ferko zaplatil ostatným za žemle 4,50 €. Kubko a Jožko si ich spravodlivo rozdelili. Koľko eur dostal Kubko?*

Výsledok: 3,6

Riešenie: Ferko dostal od ostatných 5 žemlí. Za každú z nich zaplatil 4,50 € : 5 = 0,90 €. Kubko spravil o 9 - 5 = 4 žemle viac, ako zjedol. Preto dostal z Ferkových peňazí 4 · 0,90 € = 3,60 €.

Úloha 03. *Dvanásť kamarátov si vytvorilo terč na obrázku a šli doň hádzať šípky. Každý z nich hodil do terča 3 šípky a sčítal čísla napísané v oblastiach, ktoré trafil – toľko bodov získal. Všetci dvanásti trafili do terča všetkými tromi šípkami. Po odhádzaní si povedali svoje počty bodov, ktoré boli nasledovné: 17, 22, 14, 15, 13, 9, 18, 18, 11, 19, 13, 16. Koľkí z týchto dvanástich kamarátov zasiahli oblasť za 10 bodov?*

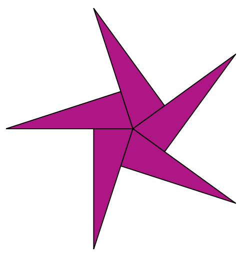


Výsledok: 5
Riešenie: Žiaden z kamarátov netrafil oblasť za 10 bodov trikrát, keďže nikto nezískal 30 bodov. Rovnako nikto nezasiahol túto oblasť dvakrát, lebo v takom prípade by získal 21, 23, 25, 27 alebo 29 bodov. Takže tí, ktorí trafili oblasť za 10 bodov, ju trafili presne raz.
Všimnime si, že na terči je 5 oblastí za nepárny počet bodov (1, 3, 5, 7 a 9) a iba 1 oblasť za párny počet bodov (10). Takže tí, ktorí trafili oblasť za 10 bodov, sa raz trafili do oblasti za párny počet bodov a dvakrát do oblasti za nepárny počet bodov. Spolu preto získali párny počet bodov. Všetci ostatní sa trikrát trafili do oblasti za nepárny počet bodov, a teda získali nepárny počet bodov.
To znamená, že tých, ktorí sa trafili do oblasti za 10 bodov, vieme identifikovať podľa toho, že získali párny počet bodov. Párny počet bodov získalo 5 kamarátov (získali postupne 22, 14, 18, 18 a 16 bodov). Oblasť za 10 bodov tak zasiahlo 5 kamarátov.

Úloha 04. *Na Marse sa konal snem mimozemšťanov. Stretli sa na ňom dva druhy mimozemšťanov – dvojrukí a trojrukí. Dvojrukí mimozemšťania vždy hovoria pravdu a trojrukí mimozemšťania vždy klamú. Na sneme sa 10 mimozemšťanov postavilo do kruhu a každý z nich povedal vetu „Mimozemšťan napravo odo mňa má 3 ruky.“ Koľko spolu rúk mali všetci mimozemšťania v tomto kruhu?*

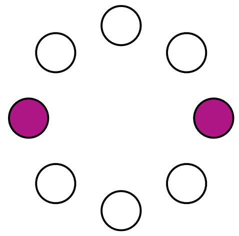
Výsledok: 25
Riešenie: Ak vetu „Mimozemšťan napravo odo mňa má 3 ruky,“ povie dvojruký mimozemšťan, tak je táto veta pravdivá. Takže napravo od každého dvojrukého mimozemšťana je trojruký mimozemšťan. Ak by však túto vetu povedal trojruký mimozemšťan, tak táto veta je nepravdivá. Čiže napravo od tohto mimozemšťana nie je mimozemšťan s 3 rukami, a teda tam musí byť dvojruký mimozemšťan. Napravo od každého trojrukého mimozemšťana je teda dvojruký mimozemšťan.
To znamená, že v kruhu sa striedajú dvojrukí a trojrukí mimozemšťania. Každý druh mimozemšťanov tak tvorí polovicu všetkých mimozemšťanov v kruhu. V kruhu je preto 10 : 2 = 5 dvojrukých a 5 trojrukých mimozemšťanov. Tí majú spolu 5 · 2 + 5 · 3 = 25 rúk.

Úloha 05. *Miška si vystrihla 5 rovnakých pravouhlých trojuholníkov. Zložila ich do hviezdy ako na obrázku – trojuholníky prikladala k sebe väčším ostrým uhlom. Koľko takýchto trojuholníkov by Miška potrebovala, ak by trojuholníky prikladala k sebe menším ostrým uhlom?*



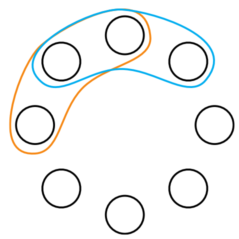
Výsledok: 20
Riešenie: Môžeme si všimnúť, že všetkých 5 trojuholníkov sa stretáva v jednom bode. Okolo tohto bodu musí byť súčet uhlov 360°. Veľkosť väčšieho ostrého uhla je teda 360° : 5 = 72°. Zároveň platí, že súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka je 180°. Keďže sú tieto trojuholníky pravouhlé, tak si už vieme jednoducho zrátať veľkosť menšieho ostrého uhla: 180° - 90° - 72° = 18°. Keby sme trojuholníky spájali menším ostrým uhlom, potrebovali by sme 360° : 18° = 20 trojuholníkov.

Úloha 06. *Adam si nakreslil 8 krúžkov umiestnených do kruhu. Teraz by do nich chcel vpísať čísla. Chce to spraviť tak, aby súčet čísel v každej trojici susediacich krúžkov bol 18. Aký bude súčet čísel v dvoch vyznačených fialových krúžkoch?*

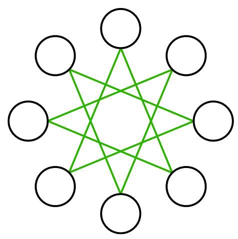


Výsledok: 12

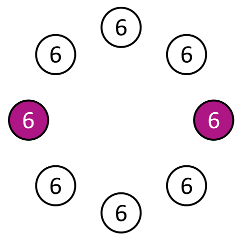
Riešenie: Pozrime sa na trojice krúžkov vyznačené na tomto obrázku:



Tieto dve trojice majú rovnaký súčet (konkrétne 18). Avšak majú dva krúžky spoločné. Preto musia byť čísla v krúžkoch, ktoré nemajú spoločné, rovnaké. Ak by sme takýto argument použili pre iné dve trojice v takejto polohe, dostali by sme opäť dvojicu krúžkov s rovnakým číslom. Po dostatočne veľa opakovaniach dospejeme k tomu, že každá dvojica krúžkov, ktoré sú na tomto obrázku spojené čiarou, musí obsahovať rovnaké číslo:



Lenže takto sa po zelených čiarach vieme dostať z každého krúžku na každý, t.j. čísla vo všetkých krúžkoch musia byť rovnaké. Súčet čísel v každej trojici susediacich krúžkov je však 18, a teda v každom krúžku musí byť číslo 18 : 3 = 6.



Súčet čísel vo vyznačených fialových krúžkoch je preto 6 + 6 = 12.

Úloha 07. *Nina veľmi rada pije kávu. Pije ju v kaviarni, kde jedna káva stojí 2 €. Tento obchod má ale vernostnú akciu. Vždy, keď zákazník dopije kávu, dostane jeden kupón. Za každých 5 kupónov dostane kávu zadarmo, ku ktorej taktiež dostane kupón. Nina tento rok na svoju záľubu minula už 290 € a všetky použité kupóny boli jej vlastné. Koľko najviac káv mohla Nina vypiť?*

Výsledok: 181
Riešenie: Vieme, že ak si Nina kúpi 5 káv za 10 €, jednu kávu dostane zadarmo. Za kávu sa jej jeden z piatich kupónov vráti a teda ďalšiu kávu zadarmo získa, ak si kúpi už len 4 kávy. Prvých 10 € teda minula na 6 káv. Zo zostávajúcich 290 € - 10 € = 280 € bude kupovať už po 5 káv za cenu štyroch, čo je 8 €. Vieme, že toto sa stane 280 € : 8 € = 35-krát. Teda Nina spolu vypila už tento rok 6 + 35 · 5 = 181 káv.

Úloha 08. *Šimon a Alex si dnes 10. novembra o 12:00 nastavili svoje ručičkové hodinky na správny čas. O niekoľko dní prišli na to, že Alexove hodinky idú mierne popredu – každú skutočnú hodinu sa posunú o sekundu dopredu. Šimonove hodinky sa zas oneskorujú – každú skutočnú hodinu sa oneskoria o jeden a pol sekundy. Šimon s Alexom sa hneď zamysleli: o koľko dní budú Šimonove a Alexove hodinky ukazovať rovnaký čas?*

Výsledok: 720
Riešenie: Každý deň sa posunú Alexove hodinky o 24 · 1 = 24 sekúnd dopredu, kým Šimonove hodinky sa posunú o 24 · 1,5 = 36 sekúnd dozadu. Každý deň sa tak zvýši rozdiel medzi Alexovými a Šimonovými hodinkami o 24 + 36 = 60 sekúnd, teda o presne 1 minútu. Hodinky majú ciferník s číslami od 1 do 12, takže Alexove a Šimonove hodinky budú ukazovať rovnaký čas najskôr vtedy, keď sa rozdiel medzi ich hodinkami zvýši na 12 hodín. Týchto 12 hodín obsahuje 12 · 60 = 720 minút. O toľko sa musí zvýšiť rozdiel medzi Alexovými a Šimonovými hodinkami. Keďže každý deň sa rozdiel medzi ich hodinkami zvýši o 1 minútu, tak dosiahnuť rozdiel 720 minút bude trvať 720 dní. Šimonove a Alexove hodinky preto budú ukazovať rovnaký čas o 720 dní (čiže skoro o dva roky).

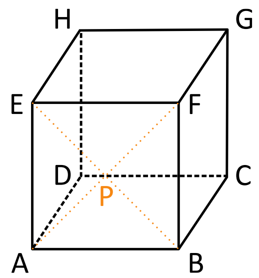
Úloha 09. *Ježibaba Gaja ovláda počasie. Každé ráno sa rozhodne, či bude jasno, alebo zamračené. Nedávno si našla novú zábavku. Chce, aby každý týždeň bola iná kombinácia, teda iné poradie či počet jasných a zamračených rán. Koľko týždňov jej bude trvať, kým sa jej minú všetky možnosti na rôzne kombinácie jasných a zamračených rán v sedemdňovom týždni?*

Výsledok: 128
Riešenie: Počas týždňa si ježibaba vyberá sedemkrát z dvoch možností – či bude zamračené, alebo jasno. Počet všetkých možností, ako sa môže rozhodnúť počas jedného dňa, je 2. To, ako sa rozhodla v tento jeden deň, nijak neovplyvňuje jej rozhodovanie v ďalšie dni, a teda počet rôznych kombinácií rán počas siedmich dní vypočítame ako 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 128. Bude jej preto trvať 128 týždňov, kým vyskúša všetky možnosti.

Úloha 10. *Katka si myslí, že pekné čísla sú len také, ktoré sa dajú napísať ako súčin dvoch rovnakých prirodzených čísel. Koľko je takýchto pekných čísel väčších ako 101 a menších ako 9999?*

Výsledok: 89
Riešenie: Namiesto hľadania pekných čísel v danom rozmedzí hľadajme, ktoré čísla môžeme vynásobiť samé sebou, aby sme dostali číslo väčšie ako 101 a menšie ako 9999. Pri tom si všimnime, že 10 · 10 = 100 a 11 · 11 = 121. Takže najmenšie prirodzené číslo, ktoré môžeme vynásobiť samé sebou a dostať číslo väčšie ako 101, je číslo 11. Podobne z opačnej strany. Platí 100 · 100 = 10000 a 99 · 99 = 9801, takže najväčšie číslo, ktoré môžeme vynásobiť samé sebou a dostať súčin menší ako 9999, je číslo 99.
Pekné čísla väčšie ako 101 a menšie ako 9999 sú teda 11 · 11, 12 · 12, ..., 98 · 98 a 99 · 99. Každé z čísel 11 až 99 určuje presne jedno pekné číslo. Týchto čísel od 11 po 99 je 99 - 10 = 89. Pekných čísel väčších ako 101 a menších ako 9999 je preto 89.

Úloha 11. *Laura si nakreslila kocku ABCDEFGH s hranou dlhou 12 cm. Priesečník jej stenových uhlopriečok AF a BE označila P. Potom na povrchu tejto kocky vyznačila fialovou všetky body, ktoré sú bližšie k bodu P ako k bodu A. Tým dostala na povrchu niekoľko fialových útvarov. Aký je súčet obsahov týchto fialových útvarov v centimetroch štvorcových?*

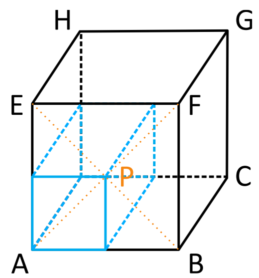


Výsledok: 684

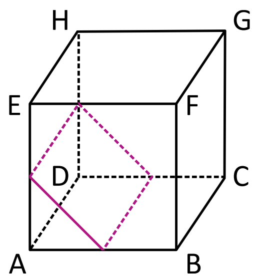
Riešenie: Skôr ako prejdeme k riešeniu úlohy, spravme niekoľko úvah. Predpokladajme, že máme v rovine nejaké body X a Y. Ako zistíme ktoré body v rovine sú bližšie k X a ktoré bližšie k Y? Zistiť, ktoré body sú rovnako vzdialené od X ako od Y je ľahké – je to os úsečky XY, teda priamka kolmá na úsečku XY prechádzajúca stredom úsečky XY (všetky body tejto priamky vytvoria s bodmi X a Y rovnoramenný trojuholník so základňou XY, takže budú rovnako vzdialené od X ako od Y). Ak sa od osi úsečky posunieme do polroviny obsahujúcej bod X, tak sa priblížime k bodu X a vzdialime od bodu Y, čiže budeme bližšie k bodu X. Os úsečky tak rozdeľuje rovinu na dve polroviny, v jednej sú body, ktoré sú bližšie k bodu X, v druhej body bližšie k bodu Y.

V trojrozmernom prípade to bude podobne. Akurát body, ktoré sú rovnako vzdialené od X ako od Y tvoria rovinu. Táto rovina rozdelí priestor na dve časti – v jednej budú body bližšie k bodu X, v druhej body bližšie k bodu Y.

Túto myšlienku aplikujeme v našej úlohe. Začnime tým, že nájdeme nejaké body, ktoré sú rovnako vzdialené od bodu A ako od bodu P. Takými bodmi sú napríklad stredy hrán AB a AE, ale aj DC a DH – vtedy sú totiž príslušné dĺžky rovnako dlhé hrany, resp. stenové uhlopriečky modrého kvádra (ktorého jedna dvojica protiľahlých stien sú štvorce) na tomto obrázku:



Spolu s každými dvomi bodmi sa v rovine vždy nachádza aj priamka, ktorá tieto dva body spája. Preto budú rovnako vzdialené od bodu A ako od bodu P aj fialové úsečky vyznačené na tomto obrázku:



Pri troche predstavivosti si môžeme všimnúť, že rovina, v ktorej ležia body rovnako vzdialené od bodov A a P, pretína kocku ABCDEFGH iba v obdĺžniku vyznačenom na predošlom obrázku. Všetky body „nad“ týmto obdĺžnikom ležia bližšie k bodu P a všetky body „pod“ týmto obdĺžnikom ležia bližšie k bodu A.

Fialová tak bude väčšina povrchu kocky ABCDEFGH okrem dvoch rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov na stenách ABFE a DCHG a dvoch obdĺžnikov na stenách ABCD a ADHE. Celá kocka má povrch $6 \cdot 12\ \text{cm} \cdot 12\ \text{cm} = 864\ \text{cm}^2$. Rovnoramenné trojuholníky, ktoré potrebujeme odčítať, majú obsah $6\ \text{cm} \cdot 6\ \text{cm} : 2 = 18\ \text{cm}^2$. Odčítavané obdĺžniky zas majú obsah $12\ \text{cm} \cdot 6\ \text{cm} = 72\ \text{cm}^2$. Súčet obsahov fialových častí je tak $864\ \text{cm}^2 - 18\ \text{cm}^2 - 18\ \text{cm}^2 - 72\ \text{cm}^2 - 72\ \text{cm}^2 = 684\ \text{cm}^2$.

Úloha 12. *Peťo položil na podlahu baktériu do bodu X. Tá sa ihneď rozdelila na 4 baktérie, ktoré sa vydali do 4 svetových strán. Po minúte prešla každá baktéria 1 mm svojím smerom. Tu sa každá z nich opäť rozdelila na 4, ktoré sa rozbehli na všetky svetové strany, aby po ďalšej minúte spravili to isté. Koľko baktérií bude v bode X po 6 minútach?*

Výsledok: 400

Riešenie: Predstavme si miesta, v ktorých sa nachádzajú baktérie, ako políčka veľkej šachovnice. Každú minútu sa každá baktéria rozdelí na 4 nové baktérie, ktoré prejdú do 4 susedných políčok. To nám dáva pomerne jednoduchý spôsob, ako počítať počet baktérií v danom políčku v danej minúte: pozrieme sa na počet baktérií v políčkach susediacich s týmto políčkom v predošlej minúte a každá baktéria prispeje jednou baktériou do počtu batérií v tomto políčku na konci tejto minúty. Prakticky tak budeme do políčok šachovnice písať čísla – počet baktérií v tomto políčku na konci príslušnej minúty. Šachovnicu pre nasledujúcu minútu potom dostaneme z tejto tak, že pre každé políčko sčítame čísla v štyroch susediacich políčkach.

Na začiatku, v nultej minúte, máme jednu baktériu vo fialovom políčku (zodpovedajúcemu bodu X). Hľadáme číslo, ktoré bude vo fialovom políčku po 6 opakovaniach postupu z predošlého odseku. Tak ho spravme (pre prehľadnosť nepíšme nuly do políčok, v ktorých nie sú žiadne baktérie). Dostaneme šachovnice ako na obrázku na ďalšej strane.

Počet baktérií vo fialovom políčku (resp. bode X) po 6 minútach je 400.

Poznámka: Vo výpočte v šiestej minúte sme nepotrebovali spočítať čísla vo všetkých políčkach, ale stačilo by spočítať iba číslo vo fialovom políčku. Podobne sme si mohli niektoré počítania ušetriť aj v predošlých minútach.

0. minúta

						1						

1. minúta

						1						
					1		1					
						1						

2. minúta

						1						
					2		2					
				1		4		1				
					2		2					
						1						

3. minúta

						1						
					3		3					
				3		9		3				
			1		9		9		1			
				3		9		3				
					3		3					
						1						

4. minúta

						1						
					4		4					
				6		16		6				
			4		24		24		4			
		1		16		36		16		1		
			4		24		24		4			
				6		16		6				
					4		4					
						1						

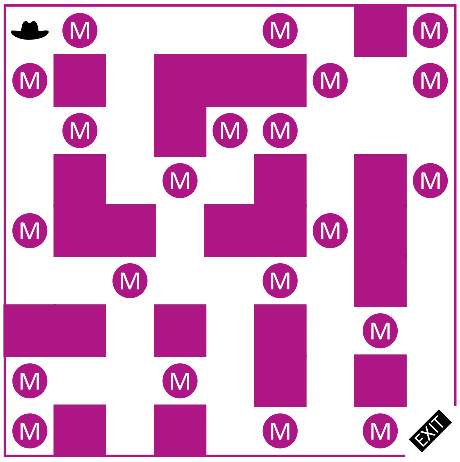
5. minúta

						1						
					5		5					
				10		25		10				
			10		50		50		10			
		5		50		100		50		5		
	1		25		100		100		25		1	
		5		50		100		50		5		
			10		50		50		10			
				10		25		10				
					5		5					
						1						

6. minúta

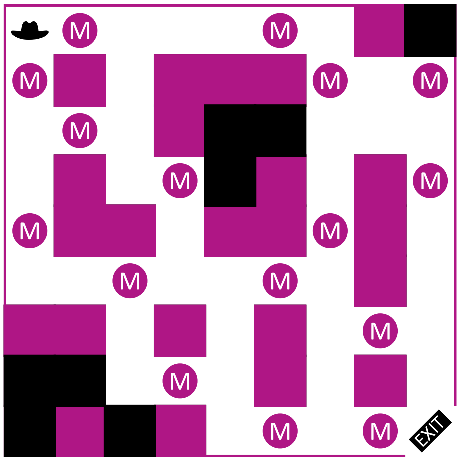
						1						
					6		6					
				15		36		15				
			20		90		90		20			
		15		120		225		120		15		
	6		90		300		300		90		6	
1		36		225		400		225		36		1
	6		90		300		300		90		6	
		15		120		225		120		15		
			20		90		90		20			
				15		36		15				
					6		6					
						1						

Úloha 13. *Indiana Jones sa ocitol v miestnosti s pokladom. Vyzerá tak ako na obrázku, pričom Indiana Jones sa nachádza v jej ľavom hornom rohu. Miestnosť je ale veľmi nestabilná a o chvíľu sa zrúti. Indiana Jones sa tak chce dostať k východu v pravom dolnom rohu najkratšou možnou cestou. Preto sa bude pohybovať iba doprava a nadol. Cestou bude zbierať matbojové dukáty. Koľko najviac matbojových dukátov môže Indiana pozbierať cestou k východu?*

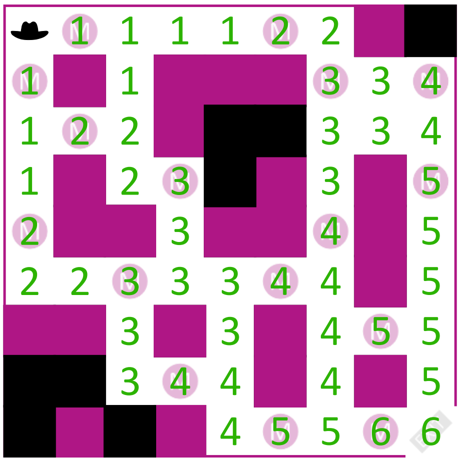


Výsledok: 6

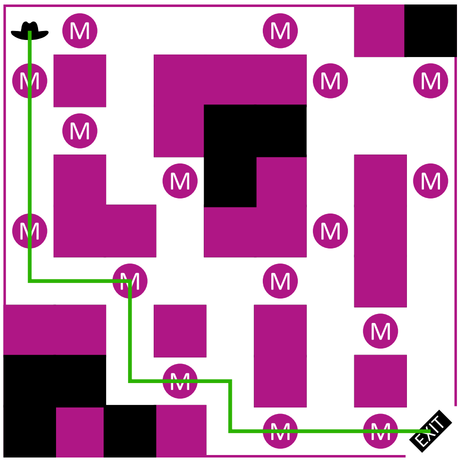
Riešenie: V miestnosti je niekoľko miest, do ktorých sa Indiana Jones nevie dostať pohybmi doprava a nadol. Taktiež sú v nej „políčka", z ktorých sa Indiana Jones už nevie dostať k východu. Preto si všetky takéto políčka začiernime a neuvažujme ich:



Ku každému políčku si vieme pripísať číslo, ktoré označuje, koľko najviac dukátov môže Indiana Jones pozbierať cestou na toto políčko. Spravíme to takto. Pôjdeme od ľavého rohu a na budeme na jednotlivé políčka písať čísla. Ak sa na nejaké políčko vieme dostať iba z jedného iného políčka, tak na toto políčko napíšeme číslo z toho políčka, z ktorého sa na toto políčko vieme dostať. Ak sa však dá na toto políčko dostať z viacerých políčok, tak na toto políčko napíšeme najväčšie z čísel z políčok, z ktorých sa dá na toto políčko dostať (Indiana Jones si cestou na toto políčko vyberie tú cestu, ktorou pozbiera viac dukátov). Okrem toho ak sa na políčku nachádza dukát, tak zvýšime číslo, ktoré máme napísať, o 1. Keď podľa týchto pravidiel vyplníme všetky políčka, dostaneme to, čo na tomto obrázku:



Z neho vidíme, že cestou k východu pozbiera Indiana Jones najviac 6 mincí, a to tým, že pôjde cez miestnosť takýmto spôsobom:



Úloha 14. *Partia kamarátov šla po škole na kofolu. Veľká kofola stojí 1,50 € a malá kofola 1,10 €. Kamaráti si objednali a zaplatili presne 14 €. Koľko nápojov si kamaráti objednali?*

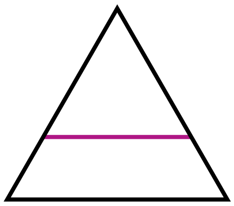
Výsledok: 12

Riešenie: Sledujme centy. Suma, ktorú kamaráti zaplatili, je v celých eurách. Všetky zaplatené centy sa tak musia sčítať na celé eurá. Aby sa tak stalo, musí byť počet malých kofôl násobkom 5 – ináč by sme nevedel pomocou veľkých kofôl nasčítať sumu na celé eurá. Rozoberme tak jednotlivé možnosti:
Ak si kamaráti objednali 0 malých kofôl, tak veľké kofoly stáli 14 €. Lenže 9 veľkých kofôl stojí iba $9 \cdot 1{,}50$ € = 13,50 € a 10 veľkých kofôl až $10 \cdot 1{,}50$ € = 15 €. Táto možnosť nevyhovuje.
Ak si kamaráti objednali 5 malých kofôl, tak za ne zaplatili $5 \cdot 1{,}10$ € = 5,50 €. Veľké kofoly teda stáli spolu 14 € - 5,50 € = 8,50 €. Avšak 5 veľkých kofôl stojí iba $5 \cdot 1{,}50$ € = 7,50 € a 6 veľkých kofôl stojí až $6 \cdot 1{,}50$ € = 9 €. Preto ani táto možnosť nevyhovuje.
Ak si kamaráti objednali 10 malých kofôl, tak za ne zaplatili $10 \cdot 1{,}10$ € = 11 €. Veľké kofoly stáli 14 € - 11 € = 3 €, čo zodpovedá presne 2 veľkým kofolám ($2 \cdot 1{,}50$ € = 3 €).
Ak by si kamaráti objednali 15 alebo viac malých kofôl, zaplatili by aspoň $15 \cdot 1{,}10$ € = 16,50 €, čo je viac ako 14 €.
Kamaráti si teda objednali 2 veľké a 10 malých kofôl, čo je spolu 2 + 10 = 12 nápojov.

Úloha 15. *Terka si začala na papier písať čísla. Na začiatok si na papier napísala číslo 19. Potom pridávala ďalšie čísla podľa nasledovných pravidiel:*
- Ak je posledné napísané číslo nepárne, tak ho Terka vynásobí tromi, pričíta jednotku a výsledok zapíše ako ďalšie číslo.
- Ak je posledné napísané číslo párne, tak ho Terka vydelí dvomi a výsledok zapíše ako ďalšie číslo. Po istom čase Terka na papier napíše prvýkrát číslo 1. Koľko čísel bude mať Terka v tom momente napísaných na papieri (vrátane čísel 19 a 1)?

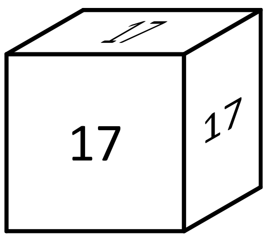
Výsledok: 21
Riešenie: Terka si na papier postupne napísala čísla 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2 a 1. To je spolu 21 čísel.

Úloha 16. *Paťo si nakreslil rovnostranný trojuholník so stranou dlhou 24 cm. Nakreslil doň aj úsečku ako na obrázku. Táto úsečka bola rovnobežná s jednou zo strán trojuholníka a rozdelila trojuholník na trojuholník a lichobežník s rovnakým obvodom. Aká bola dĺžka tejto úsečky v centimetroch?*



Výsledok: 18
Riešenie: Paťom nakreslená úsečka je rovnobežná so stranou rovnostranného trojuholníka. Menší trojuholník na obrázku je preto tiež rovnostranný.
Tento menší rovnostranný trojuholník má s lichobežníkom rovnaký obvod. Odpočítajme od obvodov oboch útvarov dĺžku úsečky, ktorú majú spoločnú. Strany, ktoré obom útvarom zostanú, musia mať rovnaký súčet dĺžok. Všetky úsečky, ktoré im zostali, už ale ležia na obvode veľkého rovnostranného trojuholníka. Takže obom útvarom museli zostať úsečky s celkovou dĺžkou rovnou polovici obvodu veľkého rovnostranného trojuholníka.
Veľký rovnostranný trojuholník má obvod 3 · 24 cm = 72 cm, takže každému útvaru zostali úsečky s celkovou dĺžkou 72 cm : 2 = 36 cm. V prípade menšieho rovnostranného trojuholníka to sú ale dve z jeho rovnako dlhých strán, takže každá zo strán tohto trojuholníka má dĺžku 36 cm : 2 = 18 cm. Avšak aj hľadaná úsečka je stranou tohto rovnostranného trojuholníka, takže Paťo nakreslil úsečku dlhú 18 cm.

Úloha 17. *Kubo na povale vyhrabal starú drevenú kocku a osem nálepiek s číslami 1 až 8. Celý natešený z tohto objavu nalepil nálepky na vrcholy kocky, na každý vrchol jednu. Potom pre všetky steny spočítal súčet čísel vo vrcholoch prislúchajúcich danej stene a tento súčet napísal na túto stenu. Niektoré zo súčtov vidíš na obrázku. Aký súčet je napísaný na spodnej stene kocky?*



<u>Výsledok:</u> 19
<u>Riešenie:</u> Súčet čísel na všetkých nálepkách je 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36. Všimnime si, že každá nálepka prispieva buď do súčtu na hornej stene, alebo na spodnej stene kocky. Vieme, že čísla prispievajúce do súčtu na hornej stene, majú súčet 17, takže na spodnej stene musí byť napísaný súčet 36 - 17 = 19.

Úloha 18. *Maťkove obľúbené dni sú také v ktorých je poradové číslo dňa v mesiaci násobkom poradového čísla mesiaca. Napríklad Maťko má rád Štedrý deň (24.12.), lebo 24 je násobkom 12. Koľko dní v roku sa Maťkovi páči?*

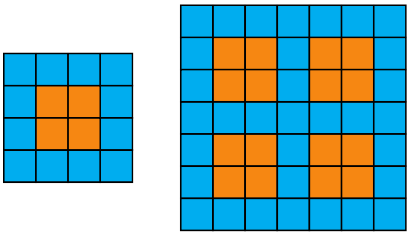
<u>Výsledok:</u> 90
<u>Riešenie:</u> V januári sa Maťkovi páči všetkých 31 dní, pretože všetky prirodzené čísla sú násobkom 1. Vo februári sa Maťkovi páčia všetky dni s párnym poradovým číslom, čiže 28 : 2 = 14 dní. (Môžeme si všimnúť, že počet dní, ktoré sa Maťkovi počas roka páčia, nezávisí od toho, či je rok priestupný.)
V marci všetky dni s poradovým číslom deliteľným 3, čiže 31 : 3 = 10 zvyšok 1, nás ale zaujíma iba koľko dní je deliteľných tromi a to je teda 10.
V apríli všetky dni s poradovým číslom deliteľným 4, čiže 30 : 4 = 7 zvyšok 2, čiže 7 dní.
V máji všetky dni s poradovým číslom deliteľným 5, čiže 31 : 5 = 6 zvyšok 1, čiže 6 dní.
V júni počet dní vypočítame ako 30 : 6 = 5, čiže 5 dní.
Pre júl platí 31 : 7 = 4 zv. 3, čiže 4 dni.
Pre august platí 31 : 8 = 3 zv. 7, čiže 3 dni.
Pre september platí 30 : 9 = 3 zv. 3, čiže 3 dni.
Pre október platí 31 : 10 = 3 zv. 1, čiže 3 dni.
Pre november platí 30 : 11 = 2 zv. 8, čiže 2 dni.
Pre december platí 31 : 12 = 2 zv. 7, čiže 2 dni.
Spolu je to 31 + 14 + 10 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 = 90 dní.

Úloha 19. *Filip sa hral s palindrómami. Našiel najmenšie také trojciferné číslo, ktoré nebolo palindrómom, ale dalo sa zapísať ako súčet dvoch dvojciferných palindrómov. Aké číslo Filip našiel?*

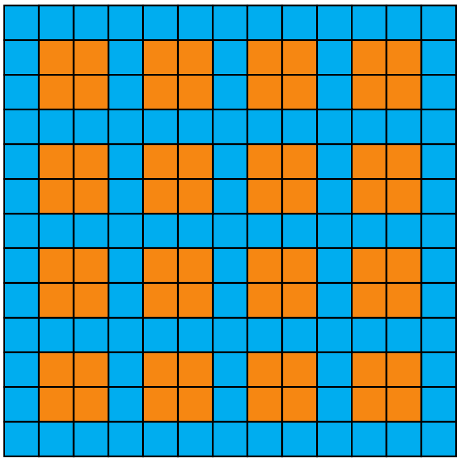
Poznámka: Palindróm je také číslo, ktoré je rovnaké, keď ho čítame odpredu aj odzadu. Napríklad číslo 12321 je päťciferný palindróm.

<u>Výsledok:</u> 110
<u>Riešenie:</u> Všetky dvojciferné palindrómy sú násobkami čísla 11, a teda aj súčet dvoch z nich musí byť násobkom čísla 11. Najmenší trojciferný násobok čísla 11 je číslo 110, ktoré vieme získať ako súčet dvoch dvojciferných palindrómov rovno viacerými spôsobmi (11 + 99, 22 + 88, ...). A keďže 110 nie je palindróm, Filip našiel práve číslo 110.

Úloha 20. *Adam vytvoril nový dizajn pre stenu z kachličiek vo svojej kúpeľni – takzvaný okienkový vzor. Okienkový vzor pre 1 okienko a pre 4 okienka vidíš na obrázku. V prvom prípade je použitých 12 modrých a 4 oranžové kachličky, v druhom prípade 33 modrých a 16 oranžových kachličiek. Koľko modrých kachličiek sa použije v okienkovom vzore pre 16 okienok?*

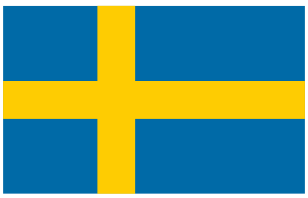


Výsledok: 105
Riešenie: Okienkový vzor pre 16 okienok bude vyzerať takto:



Počet modrých kachličiek môžeme rovno spočítať na obrázku. Počet modrých kachličiek by sme však vedeli spočítať aj bez nakreslenia si tohto obrázku. V okienkovom vzore pre 16 okienok tvoria kachličky „tabuľku" s 13 riadkami a 13 stĺpcami: $4 \cdot 2 = 8$ stĺpcov zodpovedá stĺpcom, v ktorých sa nachádzajú okienka, 3 stĺpce oddeľujú okienka a 2 stĺpce sú po krajoch. Podobne je to aj s riadkami. V okienkovom vzore pre 16 okienok je preto $13 \cdot 13 = 169$ kachličiek oboch farieb. Oranžové kachličky tvoria 16 okienok, pričom v každom okienku sú 4 oranžové kachličky. Všetkých oranžových kachličiek je teda $16 \cdot 4 = 64$.
To znamená, že v okienkovom vzore pre 16 okienok sa použije $169 - 64 = 105$ modrých kachličiek.

Úloha 21. *Keď Róberta išla na výmenný pobyt do Švédska, rozhodla sa nakresliť si ich vlajku. Jej výtvor vidíš na obrázku. Nakreslila ju tak, aby aj zvislý, aj vodorovný žltý pás mali šírku 2 cm. Po nakreslení Róberta zistila, že obsah celej vlajky je 160 cm² a že obsah modrých častí je 112 cm². Aký je obvod celej vlajky v centimetroch?*

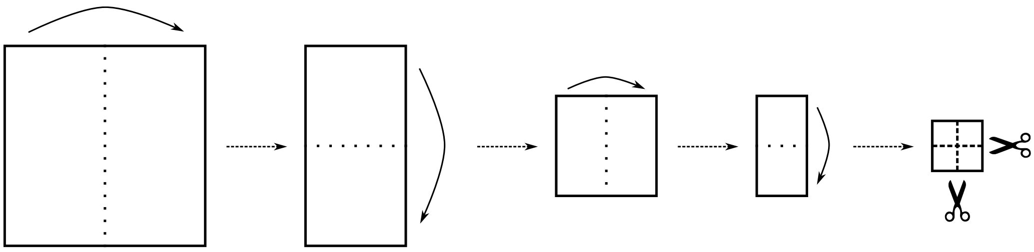


Výsledok: 52
Riešenie: Žlté pásy majú obsah $160\ cm^2 - 112\ cm^2 = 48\ cm^2$. Ak by sa tieto pásy neprekrývali, tvorili by dva žlté obdĺžniky. Ich spoločný obsah by bol väčší o obsah štvorčeka $2\ cm \times 2\ cm$, ktorý majú žlté pásy na švédskej vlajke spoločný. Žlté pásy ako dva oddelené obdĺžniky by tak mali spolu obsah $48\ cm^2 + 2\ cm \cdot 2\ cm = 52\ cm^2$.
Oba tieto žlté obdĺžniky majú jednu stranu dlhú 2 cm, takže keby sme jeden z nich otočili a priložili k tomu druhému, dostali by sme jeden veľký obdĺžnik s obsahom 52 cm² a jednou stranou dlhou 2 cm.

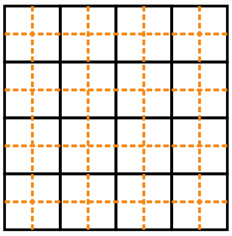
Druhá jeho strana je preto dlhá 52 cm² : 2 cm = 26 cm. To je preto súčet dĺžok tých strán žltých obdĺžnikov, ktoré nemajú dĺžku 2 cm.
Ako však vidieť z tohto obrázku, súčet dĺžok týchto dvoch strán sa rovná polovici obvodu celej švédskej vlajky:

Obvod celej švédskej vlajky je preto 2 · 26 cm = 52 cm.

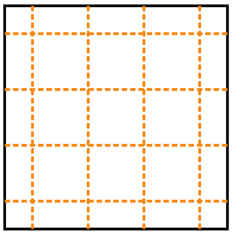
Úloha 22. *Jožko sa už pripravuje na Vianoce vystrihovaním ozdôb. Jeho výtvory však ani zďaleka nevyzerajú ako ozdoby. Dnes si zobral štvorcový papier a štyrikrát ho prehol ako na obrázku. Potom vzal nožnice a rozstrihol poskladaný papier podľa čiarkovaných čiar. Po rozprestrení papiera Jožko zistil, že dostal prekvapivo veľa kúskov papiera. Na koľko častí sa Jožkovi rozpadol papier?*



Výsledok: 25
Riešenie: Ak by Jožko poskladal papier, ale nerozstrihal ho, tak by na pôvodnom štvorcovom papieri tvorili ohyby papiera mriežku 4 × 4 štvorčeky. Každý zo štvorčekov tejto mriežky by bol rovnako veľký ako štvorček, ktorý napokon Jožko rozstrihol. Pri strihaní rozstrihol Jožko každý malý štvorček spomínanej mriežky dvomi strihmi. Strihy na tejto mriežke preto vyzerajú takto:



Alebo bez čiar naznačujúcich ohyby papiera:

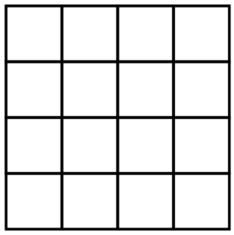


Tu už ľahko spočítame, že papier sa rozpadne na 25 častí.

Poznámka: Aby sme si zjednodušili záverečné počítanie všetkých kúskov, mohli sme si všimnúť, že každý kúsok, na ktorý sa Jožkov papier rozpadne, bude obsahovať presne 1 mrežový bod spomínanej mriežky 4 × 4.

Úloha 23. *Patrik je vášnivý šachista, ale aj matematik. Minule sa mu do rúk dostala šachovnica 4 × 4. Patrik hneď spočítal, koľko obdĺžnikov určujú čiary na tejto šachovnici. Koľko obdĺžnikov Patrik napočítal?*

Poznámka: Štvorce považujeme tiež za obdĺžniky.

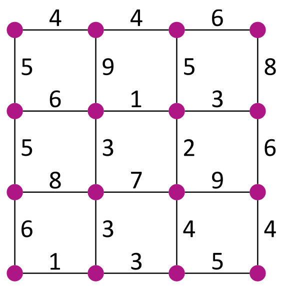


Výsledok: 100
Riešenie: Každý obdĺžnik, ktorý Patrik započíta, musí mať niekde svoje vrcholy. Počítajme obdĺžniky podľa toho, kde budú mať svoj ľavý horný vrchol. Ku každému priesečníku čiar na šachovnici si preto pripíšme, koľko obdĺžnikov má v tomto bode ľavý horný vrchol. Dostaneme niečo takéto:

16	12	8	4
12	9	6	3
8	6	4	2
4	3	2	1

Teraz už len stačí spočítať všetky napísané čísla. Dostávame, že Patrik napočítal 100 obdĺžnikov.

Úloha 24. *Kráľ Matbojova sa rozhodol postaviť nové cesty medzi mestami v kráľovstve. Kráľovi radcovia zistili, koľko matbojových dukátov by takéto cesty stáli. Vytvorili plánik ako na obrázku – krúžky zodpovedajú jednotlivým mestám, čiary zodpovedajú možným cestám a číslo nad čiarou zodpovedá cene za postavenie tejto cesty. Kráľ by chcel postaviť cesty tak, aby sa z každého mesta v kráľovstve dalo po nových cestách dostať do každého iného mesta. Koľko najmenej matbojových dukátov bude takáto výstavba stáť?*

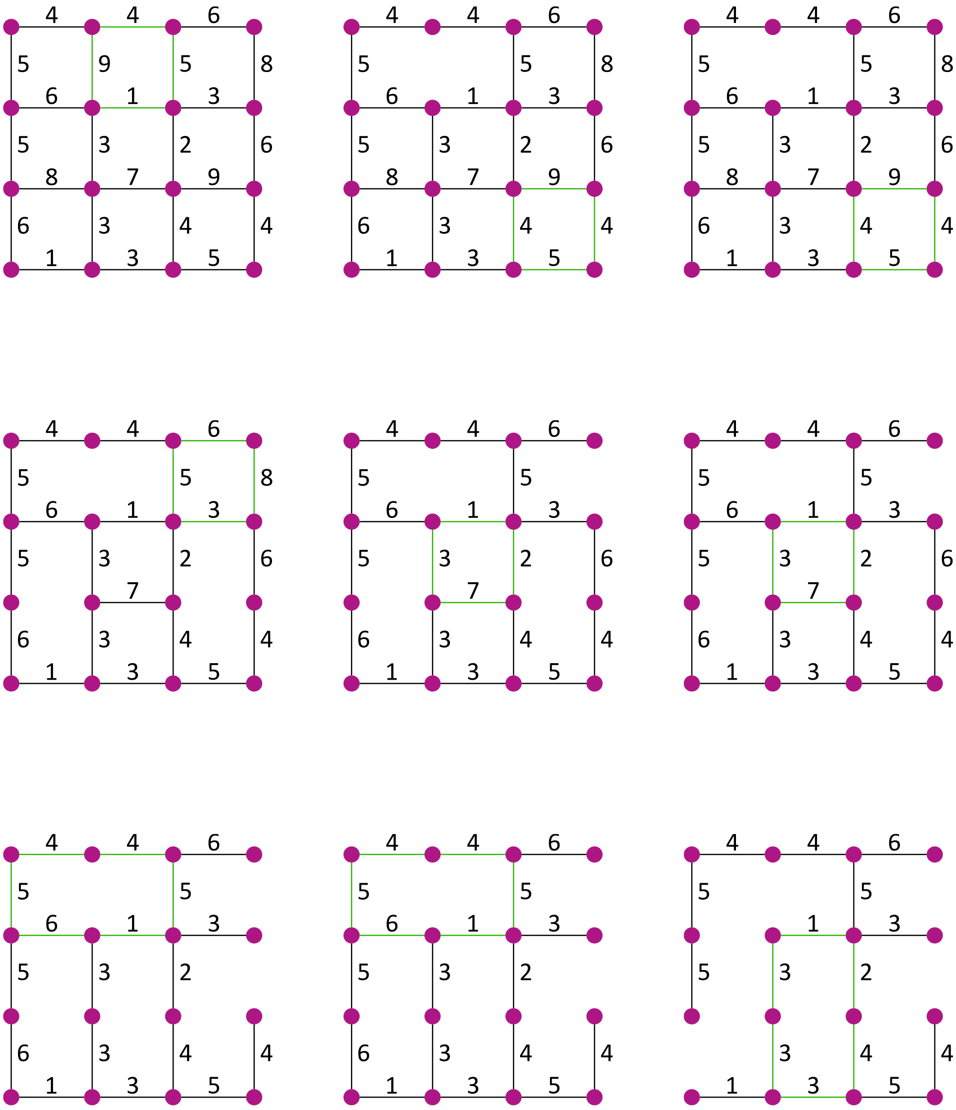


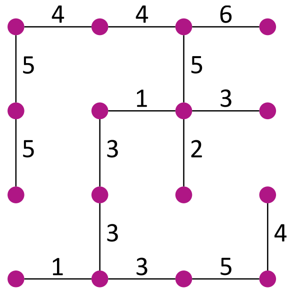
Výsledok: 54

Riešenie: Zamyslime sa, ako bude situácia vyzerať po postavení všetkých ciest. Určite sa nemôže stať, že by sme mohli vyjsť z nejakého mesta, prejsť po cestách a vrátiť sa do tohto mesta inou cestou. Prečo? Predpokladajme, že vieme spraviť takúto okružnú trasu. Z každého mesta sa vieme na konci dostať do každého iného mesta. To je ale rovnaké, ako povedať, že z každého mesta sa vieme dostať do jedného konkrétneho mesta. Napríklad toho, z ktorého sme začali našu okružnú trasu. Ak by sme nepostavili niektorú z ciest tejto okružnej trasy, tak by sme znížili cenu všetkých ciest. Zároveň by sme ale zachovali, že sa dá z každého mesta dostať do začiatku tejto okružnej trasy – z miest na okružnej trase sa vieme dostať do tohto mesta a z ostatných miest sme sa vedeli dostať buď do začiatku okružnej trasy, alebo do nejakého iného mesta na okružnej trase, z ktorého sa potom už vieme dostať do začiatku okružnej trasy. Takže odstránením okružnej cesty sme znížili cenu za výstavbu ciest – preto v prípade s minimálnou cenou nebudú žiadne okružné trasy.

Po vybudovaní ciest tak nebudeme mať medzi mestami žiadnu okružnú trasu. My chceme, aby bola celá výstavba ciest čo najlacnejšia. Preto musíme z každej okružnej trasy, ktorej zamedzíme nevybudovaním niektorej cesty na nej, nevybudovať čo najdrahšiu cestu. Stratégia hľadania ciest, ktoré nevybudujeme, tak bude nasledovná: vždy sa pozrieme na nejakú okružnú trasu a zmažeme z nej najdrahšiu cestu. Toto budeme opakovať, kým budú existovať nejaké okružné cesty.

Aplikácia tohto postupu bude vyzerať ako na obrázku – zelenou je vždy vyznačená okružná trasa, na ktorú sa pozeráme, a potom z nej zmažeme najdrahšiu cestu:





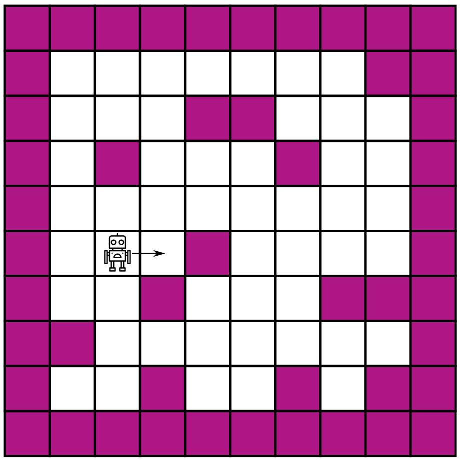
Po dostatočne veľa krokoch už neexistuje žiadna okružná cesta. Dostávame cesty, ktoré máme postaviť, aby bola celá výstavba čo najlacnejšia. V tomto najlacnejšom prípade treba na výstavbu ciest 54 matbojových dukátov.

Úloha 25. *Tete si naprogramovala robota. Tete ho položila na štvorčekovú sieť natočeného doprava. Tá pozostáva z bielych políčok, ktoré sú prázdne, a fialových políčok, na ktorých je prekážka. Robot sa po štvorčekovej sieti pohybuje podľa nasledovných pravidiel:*

- Ak je pred robotom prázdne políčko (biele), tak sa naň pohne.

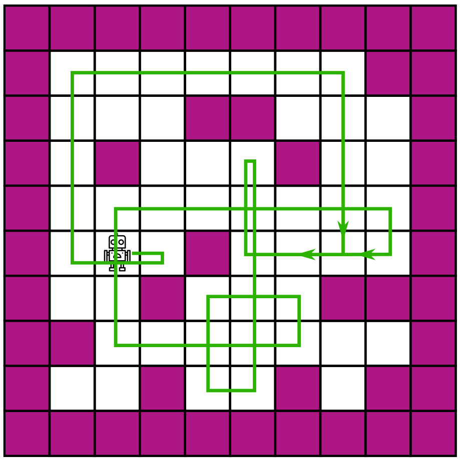
- Ak je pred robotom prekážka (fialové políčko), tak sa robot otočí doprava.

Tete spustila robota a pozorovala, ako sa pohyboval. Všimla si, že na niekoľko prázdnych políčok sa robot nikdy nedostane. Koľko takých políčok je na plániku?

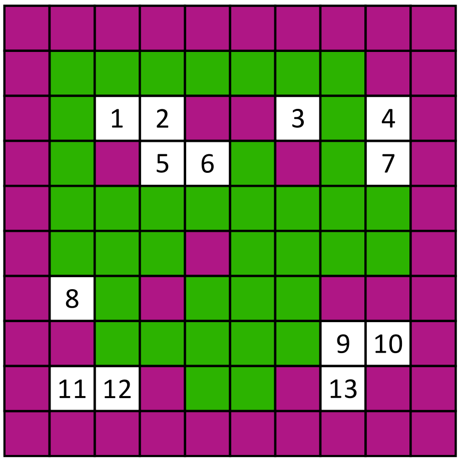


Výsledok: 13

Riešenie: Nakreslime si dráhu robota. Ak v nejakom momente robot opustí štvorček, na ktorom už bol, smerom, ktorým z neho už išiel, tak môžeme prestať kresliť. V tom momente sa už totiž zacyklí a nenavštívi žiadne nové políčko. Dráha robota tak bude vyzerať takto:



Zvýraznime si políčka, na ktorých robot v nejakom momente bol, a spočítajme zostávajúce biele políčka.



Takže robot sa nikdy nedostane na 13 bielych políčok.

Úloha 26. *Adam osolil polievku 10 g soli. Pre vedúcich to bolo málo, a tak si vedúci museli polievku ešte prisoliť. Druhý raz dal Adam do rovnakého množstva polievky 20 g soli. Aj tak to však bolo málo, ale vedúcim už stačilo na dosolenie polievky dvakrát menšie množstvo soli než minule. Koľko gramov soli mal dať Adam do polievky, aby si ju vedúci nemuseli prisoliť?*

Výsledok: 30

Riešenie: Vedúci si k 20 g soli v polievke museli pridať o polovicu menej, ako keď bolo v polievke 10 g soli. To znamená, že 20 g - 10 g = 10 g soli, ktoré pridal Adam do polievky pri druhom varení, bola polovica toho, čo si tam pridali vedúci predtým. Vedúci si do prvej polievky pridali 2 · 10 g = 20 g soli. Čiže dokonalo osolená polievka podľa vedúcich obsahuje soľ, ktorú tam dal Adam (10 g), a soľ, ktorú ostatní vedúci (20 g), čo je spolu 10 g + 20 g = 30 g.

Úloha 27. *Minulú nedeľu sa konal zraz ľudí narodených v novembri. Pri pohľade na počet ľudí, ktorí prišli, zahlásil hlavný organizátor túto vetu: „Aspoň traja z vás sa narodili v rovnaký deň novembra.“ Koľko najmenej ľudí prišlo na tento zraz?*

Výsledok: 61
Riešenie: Čo by sa muselo stať, aby bol výrok hlavného organizátora nepravdivý? V ľubovoľný deň novembra by sa mohli narodiť najviac dvaja z prítomných. November má 30 dní, teda najviac 60 ľudí mohlo byť na zraze tak, že by sa každý deň narodili najviac dvaja z prítomných, a teda by sa v žiaden deň nenarodili aspoň traja ľudia. Ak by ale prišlo čo i len 61 ľudí, tak už sa musia nájsť traja takí, ktorí sa narodili v rovnaký deň, takže muselo prísť najmenej 61 ľudí.

Úloha 28. *Majo, Maťo a Paťo boli na obede v reštaurácii. Keď doobedovali, priniesol im čašník účet na 27 €. Maťo však nemal pri sebe dostatok peňazí, aby zaplatil celú svoju časť. Preto Majo zaplatil za neho štvrtinu sumy, ktorú mal Maťo platiť. Tým pádom platili všetci rovnako. Koľko eur mal platiť Maťo?*

Výsledok: 12
Riešenie: Ak nakoniec platili všetci rovnako, tak to znamená, že každý z nich musel zaplatiť 27 € : 3 = 9 €. Teda aj Maťo platil 9 €. Ale vieme, že Majo platil za Maťa 1/4 sumy, ktorú mal Maťo zaplatiť. Takže tých 9 €, ktoré Maťo platil, sú iba 3/4 sumy, ktorú mal zaplatiť. Majo za neho ešte platil 1/4, čo je 9 € : 3 = 3 €. Celkovo mal teda Maťo platiť 9 € + 3 € = 12 €.

Úloha 29. *Štyria kamaráti išli na kúpalisko. Každý z nich dostal kľúč od jednej zo skriniek, kde si odložil veci. Keď kamaráti odchádzali z kúpaliska, pomiešali sa im kľúče, a tak si každý z nich zobral jeden z kľúčov a zamieril k svojej skrinke. Žiaden z kamarátov však nemal kľúč od svojej vlastnej skrinky. Koľkými spôsobmi si mohli zobrať kľúče, aby ani jeden z nich nemal svoj vlastný kľúč?*

Výsledok: 9
Riešenie: Očíslujme kamarátov a aj ich kľúče číslami 1, 2, 3 a 4. Rozoberme možné prípady podľa toho, aký kľúč zobral kamarát 1.
- Ak kamarát 1 zobral kľúč 2.
► Ak kamarát 2 zobral kľúč 1, tak kamarát 3 mohol zobrať iba kľúč 4 a kamarát 4 iba kľúč 3.
► Ak kamarát 2 zobral kľúč 3, tak kamarát 4 mohol zobrať iba kľúč 1 a kamarát 3 iba kľúč 4.
► Ak kamarát 2 zobral kľúč 4, tak kamarát 3 mohol zobrať iba kľúč 1 a kamarát 4 iba kľúč 3.
- Ak kamarát 1 zobral kľúč 3.
► Ak kamarát 3 zobral kľúč 1, tak kamarát 2 mohol zobrať iba kľúč 4 a kamarát 4 iba kľúč 2.
► Ak kamarát 3 zobral kľúč 2, tak kamarát 4 mohol zobrať iba kľúč 1 a kamarát 2 iba kľúč 4.
► Ak kamarát 3 zobral kľúč 4, tak kamarát 2 mohol zobrať iba kľúč 1 a kamarát 4 iba kľúč 2.
- Ak kamarát 1 zobral kľúč 4.
► Ak kamarát 4 zobral kľúč 1, tak kamarát 2 mohol zobrať iba kľúč 3 a kamarát 3 iba kľúč 2.
► Ak kamarát 4 zobral kľúč 2, tak kamarát 3 mohol zobrať iba kľúč 1 a kamarát 2 iba kľúč 3.
► Ak kamarát 4 zobral kľúč 3, tak kamarát 2 mohol zobrať iba kľúč 1 a kamarát 3 iba kľúč 2.
Všetky možnosti, ktoré sme dostali, sú zachytené v tejto tabuľke:

kamaráti	1	2	3	4
možnosť 1	2	1	4	3
možnosť 2	2	3	4	1
možnosť 3	2	4	1	3
možnosť 4	3	4	1	2
možnosť 5	3	4	2	1
možnosť 6	3	1	4	2
možnosť 7	4	3	2	1
možnosť 8	4	3	1	2
možnosť 9	4	1	2	3

Kamaráti si mohli zobrať kľúče 9 spôsobmi.

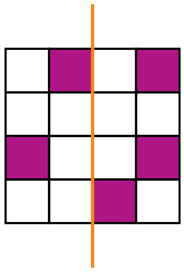
Úloha 30. *Poštár Pat má naozaj náramný svet. Dnes rozvážal poštu na ulici, kde na jednej strane boli domy s nepárnymi číslami 1, 3, 5, ... a na druhej strane domy s párnymi číslami 2, 4, 6, ... Na oboch stranách ulice je rovnako veľa domov. Pat si všimol, že súčet čísel domov na párnej strane je o 21 väčší ako súčet čísel domov na nepárnej strane. Koľko domov je na tejto ulici?*

Výsledok: 42
Riešenie: Zoberme si, že by sme najskôr mali prázdnu ulicu, teda súčty čísel domov na oboch stranách by boli rovnaké. Vieme, že na oboch stranách má byť rovnaký počet domov, a sú číslované postupne od 1. Môžeme preto akoby pridávať postupne domy po dvojiciach, vždy na každú stranu ulice jeden dom, pričom na nepárnu stranu pridáme dom s číslom o jeden menším ako na párnu stranu. Každou pridanou dvojicou domov sa teda zvýši súčet čísel domov na párnej strane o 1 viac, ako súčet čísel domov na nepárnej strane. My potrebujeme, aby bol súčet na párnej strane až o 21 väčší, teda potrebujeme pridať 21 dvojíc domov. Na ulici teda musí byť $21 \cdot 2 = 42$ domov.

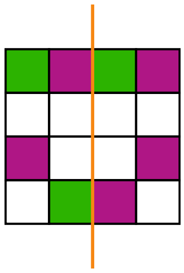
Úloha 31. *Jaro dostal balenie malých plastových figúrok zvieratiek. Zistil, že keď skúsi rozložiť zvieratká do 3 rovnako veľkých radov, 1 zvieratko mu zvýši. Keď to skúsi so 4 radmi, zostanú mu 2 zvieratká. Podobne s 5 radmi mu zostanú 3 zvieratká a so 6 radmi až 4 zvieratká. Koľko najmenej zvieratiek mal Jaro v balení?*

Výsledok: 58
Riešenie: Keby mal Jaro o 2 zvieratká viac, tak by mu vo všetkých prípadoch zostalo toľko zvieratiek, koľko mal radov. Takže by tieto zvieratká nazvyš vedel rozdeliť po jednom do všetkých radov a žiadne by mu nezvýšili. To znamená, že ak by mal Jaro o 2 zvieratká viac, vedel by ich rozdeliť do 3, 4, 5 a aj 6 radov. Počet zvieratiek tak musel byť násobkom týchto štyroch čísel. Najmenšie číslo, ktoré je násobkom 3, 4, 5 a 6, je číslo 60. Jaro mal preto v balení najmenej $60 - 2 = 58$ zvieratiek.

Úloha 32. *Maťko si nakreslil tabuľku 4 × 4 a niektoré jej políčka zafarbil nafialovo tak ako na obrázku. Chcel by zafarbiť niektoré políčka nafialovo tak, aby bola celá tabuľka súmerná podľa vyznačenej osi. Koľkými spôsobmi môže Maťko zafarbiť políčka?*



Výsledok: 16
Riešenie: Aby bola celá tabuľka osovo súmerná, musí Maťko zafarbiť zelenou vyznačené políčka na tomto obrázku:



V celej tabuľke zostane 8 nevyfarbených políčok – 4 na ľavej strane a 4 na pravej strane. Pre každé zo 4 políčok na ľavej strane sa môže Maťko rozhodnúť, či ho zafarbí. Pre každé z týchto políčok tak máme dve možnosti: buď bude zafarbené, alebo nebude zafarbené. Políčka na ľavej strane tak môže Maťko zafarbiť $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ spôsobmi. Keď si jeden z nich Maťko vyberie, tak políčka na pravej strane už musí zafarbiť tak, aby bola celá tabuľka osovo súmerná. Zafarbenie políčok na pravej strane preto bude už jednoznačné.
Takže Maťko môže zafarbiť políčka 16 spôsobmi.

Úloha 33. *Do 8.A chodí 25 žiakov. Niektorí z nich riešia Pikomat a niektorí z nich Pikofyz. Iba 3 žiaci neriešia žiadnu z týchto dvoch súťaží. Polovica všetkých žiakov, ktorí riešia Pikomat, rieši aj Pikofyz. Navyše, ak by dvaja žiaci, ktorí riešia iba Pikofyz, začali riešiť iba Pikomat, riešilo by obe súťaže rovnako veľa žiakov. Koľko žiakov rieši aj Pikomat, aj Pikofyz?*

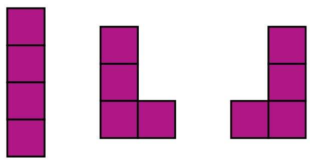
Výsledok: 6
Riešenie: Aspoň jednu súťaž rieši $25 - 3 = 22$ žiakov. Nejaký počet žiakov rieši aj Pikomat aj Pikofyz, ten si označme ako x. Vieme, že to je polovica počtu všetkých žiakov, ktorí riešia Pikomat, takže tých, ktorí riešia iba Pikomat, je tiež x. Posledná informácia, ktorú máme je, že ak by dvaja žiaci, ktorí riešia iba Pikofyz, začali riešiť iba Pikomat, tak by Pikomat a Pikofyz mali rovnako veľa riešiteľov. Z toho vieme, že iba Pikofyz rieši o 4 žiakov viac ako iba Pikomat, čiže iba Pikofyz rieši $x + 4$ žiakov. Vieme, že všetkých žiakov, ktorí niečo riešia, je 22. Tých vieme rozdeliť na tých, čo riešia iba Pikomat, tých čo riešia aj Pikomat aj Pikofyz a tých, čo riešia iba Pikofyz. To si teda môžeme zapísať ako: $x + x + (x + 4) = 22$, čiže $3 \cdot x = 18$, a preto $x = 6$. Aj Pikomat, aj Pikofyz rieši 6 žiakov z 8.A.

Úloha 34. *Minulý víkend sa po dlhej dobe stretli kamaráti Pat a Mat. Okrem iného Pat v nejakom momente poznamenal: „Ak vynásobím svoje obľúbené prirodzené číslo tvojím obľúbeným prirodzeným číslom, dostanem 49-krát väčšie číslo, ako keby som svoje obľúbené prirodzené číslo vydelil tvojím obľúbeným prirodzeným číslom." Aké je Matovo obľúbené prirodzené číslo?*

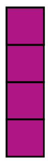
Výsledok: 7
Riešenie: Označme si Patovo obľúbené prirodzené číslo ako P a Matovo ako M. Informácie so zadania si môžeme zapísať ako: $P \cdot M = 49 \cdot (P : M)$. Po úpravách získame: $M \cdot M = 49$. Jediné prirodzené číslo, ktoré toto spĺňa, je číslo 7. Preto Matovo obľúbené prirodzené číslo je 7.

Úloha 35. *Andrej si zariaďuje svoj nový byt. Kúpil si doň 4 úplne rovnaké taburetky, ktoré vyzerali ako veľké kocky. Rozhodol sa, že ich v byte umiestni tak, aby všetky taburetky stáli na zemi, a aby sa každá taburetka dotýkala celou bočnou stenou nejakej inej taburetky. Pred umiestňovaním si ale zistil, akými spôsobmi ich môže uložiť. Všetky takéto spôsoby si nakreslil. Koľko rôznych spôsobov uloženia týchto 4 úplne rovnakých taburetiek existuje?*

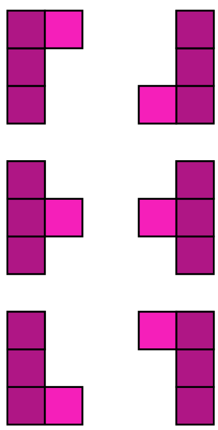
Poznámka: Uloženia taburetiek, z ktorých jedno vznikne otočením druhého, považujeme za rovnaké. Na obrázku sú nakreslené tri rôzne uloženia taburetiek.



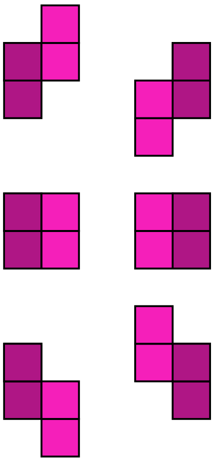
Výsledok: 7
Riešenie: Uloženia taburetiek si môžeme rozdeliť podľa toho, koľko najviac taburetiek je v jednom rade.
Prvá možnosť je, že budú všetky štyri taburetky v rade, taká možnosť je iba jedna:



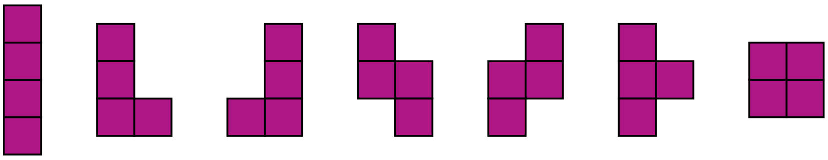
Ďalšia možnosť je, že budú v rade tri taburetky, a teda ešte k nim potrebujeme pridať štvrtú (na obrázkoch svetlejšou farbou). Tú vieme pridať k ľubovoľnej z týchto troch taburetiek buď zľava, alebo sprava, čo je $3 \cdot 2 = 6$ možností. Avšak každá z týchto možností má svoju dvojičku, ktorá je po otočení rovnaká. Takže rôzne možnosti sú iba 3:



Posledná možnosť je, že budú najviac dve taburetky v rade. Podobne ako predtým, ak už máme dve v rade, tak existuje 6 spôsobov, ktorými k nim vieme pridať zvyšné dve (na obrázku svetlejšou farbou) tak, aby sme nedostali nikde 3 v rade. Ale aj tu platí, že každá z týchto možností má svoju dvojičku, takže aj v tomto prípade máme 3 možnosti:



Najviac jedna taburetka v rade byť zjavne nemôže, keďže vždy musia byť aspoň 2 vedľa seba. Spolu teda máme 7 možných uložení taburetiek.



Úloha 36. *Tomáš má zvláštnu kalkulačku. Má na nej totiž len dve tlačidlá: „+ 2“ a „× 3“. Prvé z nich pričíta k číslu na displeji číslo 2 a výsledok vypíše na displej. Druhé z nich vynásobí číslo na displeji číslom 3 a výsledok vypíše na displej. Tomášovi teraz na displeji svieti číslo 1, no chcel by na displej dostať číslo 2022. Koľkými spôsobmi môže Tomáš postláčať tlačidlá, aby sa mu to podarilo?*

<u>Výsledok:</u> 0
<u>Riešenie:</u> Na začiatku má Tomáš na displeji číslo 1, čo je nepárne číslo. Keď k nepárnemu číslu pričítame párne číslo 2, dostaneme opäť nepárne číslo. Rovnako keď vynásobíme nepárne číslo nepárnym číslom 3, opäť dostaneme nepárne číslo. Z toho vyplýva, že akokoľvek bude Tomáš stláčať tlačidlá, vždy dostane na displeji nejaké nepárne číslo. Lenže chce dostať párne číslo 2022. To nikdy nedosiahne, takže Tomáš nemá žiadny spôsob, ako postláčať tlačidlá – číselne má 0 spôsobov.