Ahojte,

držíte v rukách Zbierku úloh Jarného Matboja v Trnave 2023 a ich vzorové riešenia. Jarný Matboj v Trnave je matematická súťaž pre žiakov piateho až ôsmeho ročníka základných škôl a prímy až tercie osemročných gymnázií. Súťaž organizuje P-MAT, n. o. (organizátor korešpondenčných seminárov Pikomat, Pikofyz a Terabio).

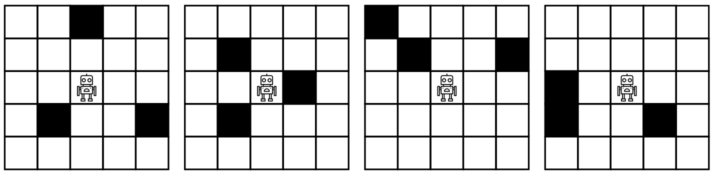
Štvorčlenné tímy žiakov sú rozdelené do štyroch súťažných kategórií – 5, 6, 7 a 8.
Súťaž prebieha 105 minút, počas ktorých sa súťažiaci snažia vyriešiť čo najviac úloh. Okrem toho dostanú za každú správne vyriešenú úlohu jeden ťah v strategickej hre. Konečné poradie tímov teda neovplyvňuje len počet vyriešených úloh, ale aj to, ako dobre sa im darilo v tejto hre.

Táto súťaž je zameraná na zlepšenie logického myslenia, matematického uvažovania a práce v tíme, no predovšetkým na možnosť objaviť radosť z matematiky. Vytvorili sme túto zbierku úloh, aby žiaci, ktorých úlohy zaujali, mali možnosť znova si ich prepriešiť, poprípade si prečítali vzorové riešenia, z ktorých sa dá veľmi veľa naučiť, aj keď úlohu vyriešili správne. Taktiež môže slúžiť ako inšpirácia pre učiteľov na čerpanie netradičnejších úloh na hodiny matematiky.

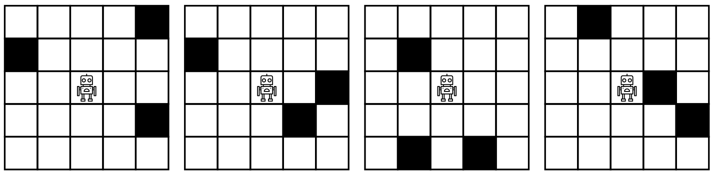
Želáme Vám príjemné riešenie a veľa nových poznatkov!

Vaši organizátori Jarného Matboja v Trnave 2023

Úloha 01. *Terka si postavila robota. Postavila ho na štvorčekovú sieť. Na niektoré políčka (na obrázkoch vyznačené čiernou) dá Terka prekážky. Potom bude Terka dávať robotovi niekoľko pokynov a sledovať, či robot narazí do nejakej prekážky. Pritom zistila, že:*
- Ak nechá robota ísť o dve políčka nahor a o dve políčka doprava, tak robot cestou nenarazí do prekážky.
- Ak nechá robota ísť o dve políčka nadol, o dve políčka doľava a o dve políčka nahor, tak robot cestou nenarazí do prekážky.
- Ak nechá robota ísť o jedno políčko doprava, o jedno políčko nadol a opäť o jedno políčko doprava, tak robot cestou narazí do prekážky.
Na ktorých obrázkoch sú nakreslené štvorčekové siete, pre ktoré môžu nastať situácie vyššie?

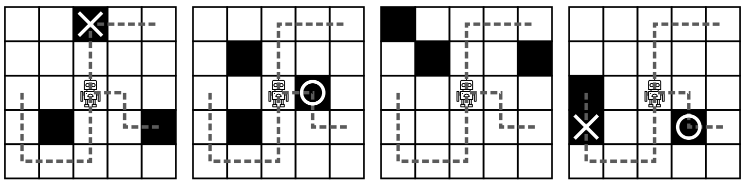


A B C D

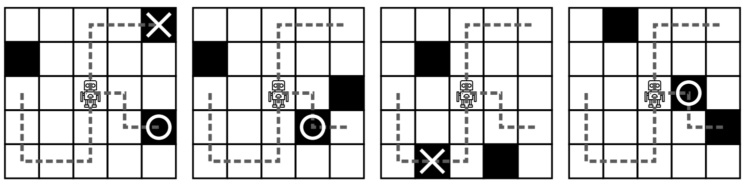


E F G H

Výsledok: B, F, H
Riešenie: Nakreslime si do všetkých obrázkov príslušné trasy robota:



A B C D



E F G H

Pri trasách, ktoré začínajú pohybom nahor alebo nadol, nemá robot naraziť do žiadnej prekážky. Ak narazil do prekážky, tak je táto prekážka naznačený krížikom (ak sú ich je po trase viacero, tak vyznačujeme len prvú). Pri trase začínajúcej pohybom má robot naraziť do prekážky. Označme túto prekážku krúžkom.
Podmienky, ktoré majú nastať, sú splnené na tých obrázkoch, kde je krúžok a nie je žiadny krížik. To sa stalo iba na obrázkoch B, F a H.

Úloha 02. *Šiesti kamaráti sa hrali piškvorky. Vždy sa nejako rozdelili na tri dvojice, v ktorých si zahrali piškvorky. V každej dvojici niekto vyhral a prehral alebo sa zápas skončil remízou. Kamaráti vytvorili tabuľku toho, ako sa im darilo – k víťazovi napísali V, k porazenému P a keď zápas skončil remízou, tak k obom napísali R. Po šiestich kolách vyzerala tabuľka ako na obrázku. Ako vyzerá Filipov riadok v tejto tabuľke?*

	1	2	3	4	5	6
Andrea	V	P	R	V	R	P
Beáta	P	V	V	P	R	R
Cyril	R	P	V	V	R	P
Denis	R	V	R	P	R	V
Eva	P	R	P	P	R	V
Filip	?	?	?	?	?	?

<u>Výsledok:</u> VRPVRR
<u>Riešenie:</u> Vieme určite, že v každom kole musí byť rovnako veľa výhier ako prehier, keďže každý, kto vyhral, musel vyhrať proti niekomu, kto prehral. Takisto vieme, že remíz musí byť párny počet, lebo ak nastala remíza, musela nastať medzi dvomi hráčmi. O prvom kole vieme, že nastali dve výhry, jedna prehra a dve remízy. Vďaka predchádzajúcim dvom pravidlám vieme povedať, že Filip musel vyhrať (máme o jednu prehru viac, ako máme výhier, a remíz máme párny počet, takže tie sú v poriadku). Takto pokračujeme aj pre ostatné kolá a dostaneme sa k výsledku VRPVRR.

Úloha 03. *Partia dievčat bola včera vonku. Keď sa dnes Milena snažila rozpamätať, kto všetko tam bol, spomenula si len na Irenu, Simonu a Denisu. Na posledné dievča si nevedela spomenúť. Spomínala si však na nasledovné veci:*
- toto dievča malo meno pozostávajúce zo štyroch písmen
- písmeno, ktoré sa v menách dievčat vyskytovalo najčastejšie, bola spoluhláska
- druhý najväčší počet výskytov nejakého písmena mali dve rôzne písmená
Ako sa volalo dievča, na ktoré si Milena nespomenula?
Poznámka: Ak sa v mene vyskytuje niektorá z dvojhlások ia, ie, iu, berieme ju v tejto úlohe ako dve samostatné písmená.

<u>Výsledok:</u> Nina
<u>Riešenie:</u> V menách dievčat sa najčastejšie vyskytujú písmená A (4-krát), E (3-krát), I (4-krát) a N (4-krát). Ostatné písmená sa vyskytujú najviac dvakrát. Meno poslednej kamarátky je dievčenské, takže veľmi pravdepodobne končí písmenom A. To bude už 5 výskytov samohlásky A. Avšak najčastejšie vyskytujúce sa písmeno má byť spoluhláska, takže budeme musieť použiť dvakrát písmeno N. Posledné písmeno mena zistíme z poslednej podmienky v zadaní. Druhý najväčší počet výskytov bude mať A a nejaké ďalšie písmeno. Jediné ďalšie písmeno, ktoré vie dosiahnuť 5 výskytov, je písmeno I.
V mene poslednej kamarátky tak sú dve písmená N, písmeno I a písmeno A. Z toho už jednoznačne vyskladáme meno Nina.

Úloha 04. *Patrik si zobral niekoľko špajdlí a rozlomil ich na 6 kúskov dlhých postupne 2 cm, 3 cm, 4 cm, 6 cm, 9 cm, 10 cm. Z týchto kúskov by chcel poskladať dva trojuholníky. Na každý z nich použije tri kúsky. Koľkými spôsobmi môže Patrik poskladať trojuholníky?*

Výsledok: 2
Riešenie: V trojuholníkoch platí tzv. trojuholníková nerovnosť – súčet dĺžok dvoch kratších strán je väčší ako dĺžka tej najdlhšej.
Začnime trojuholníkom, v ktorom je špajdľa s dĺžkou 10 cm. Súčet zvyšných dvoch špajdlí musí byť väčší ako 10 cm. Musí v ňom preto byť aj špajdľa s dĺžkou 9 cm, lebo inak by bol najväčší možný súčet zvyšných dvoch špajdlí len 6 cm + 4 cm = 10 cm.
Teraz sa pozrime na špajdľu s dĺžkou 6 cm. Nemôže byť v trojuholníku s dvojicou špajdlí, ktoré majú 2 cm a 3 cm, ani s dvojicou 2 cm a 4 cm. To znamená, že pre 6 cm dlhú špajdľu existujú 2 možnosti: buď bude s dvojicou 9 cm, 10 cm, alebo s dvojicou 3 cm a 4 cm.
1. možnosť: trojuholník so stranami dlhými 6 cm, 9 cm, 10 cm a trojuholník so stranami dlhými 2 cm, 3 cm, 4 cm – môžeme si všimnúť, že v oboch platí trojuholníková nerovnosť.
2. možnosť: trojuholník so stranami dlhými 3 cm, 4 cm, 6 cm a trojuholník so stranami dlhými 2 cm, 9 cm, 10 cm – v oboch platí trojuholníková nerovnosť.
Existujú 2 možnosti.

Úloha 05. *Tomáš si napísal bodkami oddelené čísla: 2 . 0 . 2 . 3 . 2 . 0 . 2 . 3 a teraz by chcel namiesto každej bodky napísať znamienko „+“, „-“, alebo „×“. Potom spočíta hodnotu tohto výrazu. Aká je najväčšia možná hodnota výsledného výrazu, ktorý môže Tomáš doplnením znamienok získať?*

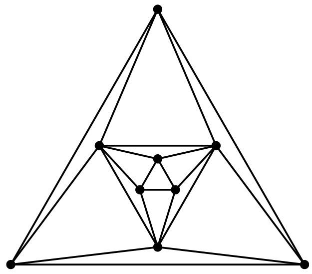
Výsledok: 20
Riešenie: Ide nám o najväčšiu hodnotu, takže znamienko „-“ nebudeme chcieť použiť vôbec a najviac budeme chcieť použiť „×“. Problém nám ale robia nuly, keďže čokoľvek vynásobené nulou je nula. To vieme vyriešiť tak, že ich „obalíme“ znamienkami „+“. Dostávame tento výraz:
$2 + 0 + 2 \times 3 \times 2 + 0 + 2 \times 3 = 20$, čiže 20 je najväčšia hodnotu ktorú môže Tomáš získať.

Úloha 06. *Kubko má fialové a zelené dieliky stavebnice. Zelených dielikov má 100. Kubko má všetky dieliky rozdelené do troch krabíc. V každej krabici je toľko zelených dielikov, koľko je fialových dielikov vo zvyšných dvoch krabiciach dokopy. Koľko fialových dielikov má Kubko?*

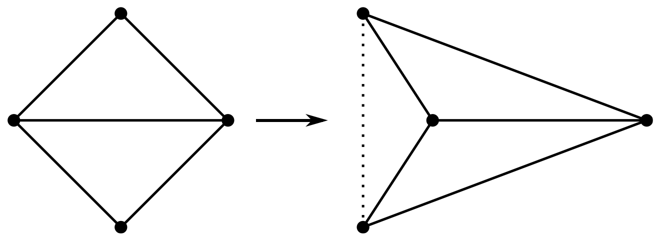
Výsledok: 50
Riešenie: Zamyslime sa, čo nám hovorí veta „V každej krabici je toľko zelených dielikov, koľko je fialových dielikov vo zvyšných dvoch krabiciach dokopy.“ Každý fialový dielik sa v tejto vete týka zelených dielikov v ostatných dvoch krabiciach. Inými slovami, keby sme teraz pridali fialový dielik do prvej krabice, museli by sme pridať zelený dielik do druhej a tretej krabice. Za každý fialový dielik sú tak vo zvyšných krabiciach dva zelené dieliky. Fialových dielikov je preto 100 : 2 = 50.

Úloha 07. *Alicka si na tabuli vyznačila 9 bodov tak, aby žiadne tri neležali na spoločnej priamke. Potom spojila niektoré body úsečkami, tak aby sa žiadne dve úsečky nepretli (mohli mať spoločný koncový bod). Alicka zistila, že pospájala body tak, že už nevie pridať žiadnu úsečku tak, aby sa úsečky nepreťali. Koľko najviac úsečiek mohla Alicka nakresliť?*

Výsledok: 21
Riešenie: Po chvíľke kreslenia môžeme nájsť napríklad takýto obrázok, v ktorom Alicka nakreslí 21 úsečiek:

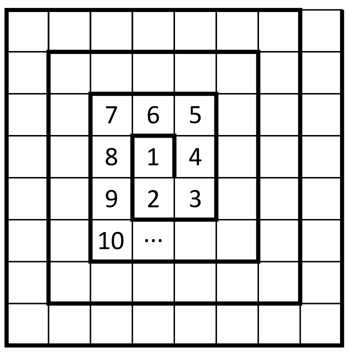


Rozmyslíme si, že viac ich nakresliť nemohla. Na konci musí byť každý ohraničený útvar na Alickinom obrázku trojuholník. Ak by to tak totiž nebolo, tak by niektorý z nich bol aspoň štvoruholník a niektoré dva jeho vrcholy (ktoré na obvode nejdú po sebe) by sme vedeli spojiť úsečkou. Takže by Alicka vedela pridať ďalšiu úsečku, čo však podľa zadania nemôže.
Rovnakú vec si rozmyslime aj o obvode útvaru. Teda že obvod celého obrázku musí byť trojuholník. Ak by to nebol trojuholník. tak môžeme zobrať dva body, ktoré nejdú na obvode po sebe. Tieto pravdepodobne nevieme spojiť úsečkou, ale keď poposúvame všetky ostatné body nejakým smerom, tak vieme nepokaziť ostatné úsečky, ale naše dva vybrané body budeme vedieť spojiť úsečkou. Príklad takéhoto postupu je pre 4 body nakreslený na tomto obrázku:

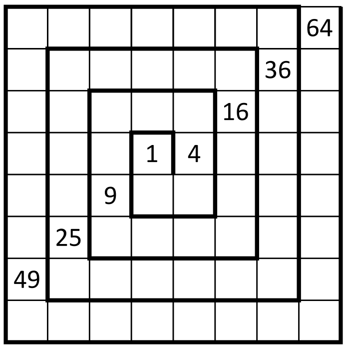


V optimálnom prípade tak budú trojuholníkmi obvod celého útvaru a aj všetky vnútorné útvary. Na našom úvodom obrázku je takáto situácia. Preto mohla Alicka nakresliť najviac 21 úsečiek.

Úloha 08. *Zuzka si začala písať čísla do špirály. Prvých desať čísel napísala tak ako na obrázku. Potom sa Zuzka pozrela na štvorček, ktorý sa nachádza o desať políčok naľavo a desať políčok dole od políčka s číslom 1. Aké číslo je napísané v tomto políčku?*



Výsledok: 441
Riešenie: Všimnime si políčka s číslami na tomto obrázku:



Vždy, keď niektoré z nich napíšeme, tak v tom momente máme číslami vyplnený nejaký štvorec. Tieto čísla sú počtami políčok v tomto štvorci. Smerom doľava dole od čísla 1 idú postupne počty políčok štvorcov, ktorých strana je dlhá nepárny počet políčok. V políčku o desať políčok doľava a dole od políčka s číslom 1 tak bude počet políčok štvorca, ktorého počet políčok pri strane bude jedenástym nepárnym číslom, teda číslom 21. V tomto políčku tak bude číslo 21 · 21 = 441.

Úloha 09. *Dano si vymyslel prenádherné čísla. Prirodzené číslo nazýva prenádherným, ak má ciferný súčet 25 a jeho dvojnásobok má ciferný súčet 32. Aké je najmenšie prenádherné číslo?*

Výsledok: 3499
Riešenie: Pozrime sa na to, čo robia jednotlivé cifry s ciferným súčtom, keď ich násobíme dvomi. Pri cifrách 0, 1, 2, 3 a 4 nedochádza k prechodu cez desiatku, takže do ciferného súčtu dvojnásobku prispievajú svojím vlastným dvojnásobkom. Pri cifrách 5, 6, 7, 8 a 9 však k prechodu cez desiatku dochádza. Tieto cifry tak neprispievajú do výsledného ciferného súčtu svojím dvojnásobkom. Vzniknutá desiatka prispieva do ciferného súčtu len číslom 1, čo znižuje tento ciferný súčet o 10 - 1 = 9. Cifry 5, 6, 7, 8 a 9 tak prispievajú do ciferného súčtu svojím dvojnásobkom zmenšeným o 9.
Pri všetkom tomto nemáme žiadne problémy s ďalšími prechodmi cez desiatku. Vždy prenášame najviac jednu desiatku. Tá nevie spôsobiť ďalší prechod cez desiatku, pretože dvojnásobok žiadnej cifry nebude nikdy končiť cifrou 9.
Z tohto všetkého vyplýva, čo robí násobenie čísla dvomi s ciferným súčtom: ciferný súčet sa zdvojnásobí a následne zmenší o 9 za každú cifru zo skupiny cifier 5, 6, 7, 8 a 9. Čo to znamená pre prenádherné číslo? Keďže 2 · 25 - 32 = 18, tak v prenádhernom čísle musia byť 18 : 9 = 2 cifry zo skupiny 5, 6, 7, 8 a 9, zvyšné cifry musia byť zo skupiny 0, 1, 2, 3 a 4. Chceme dostať čo najmenšie číslo s týmito vlastnosťami a ciferným súčtom 25. Preto používajme od miesta jednotiek čo najväčšie cifry, ako môžeme. Začneme ciframi 9 a 9. Potom už nemôžeme používať cifry 5, 6, 7, 8 a 9. Do ciferného súčtu 25 potrebujeme ešte cifry so súčtom 25 - 9 - 9 = 7, takže použime cifry 4 a 3.
Dostávame, že najmenšie prenádherné číslo je číslo 3499.

Úloha 10. *Barbora vlastní ovocinársku firmu. Nadišiel čas, kedy treba pozbierať jablká zo sadu. V sade majú 200 jabloní s červenými jablkami, 60 jabloní so žltými jablkami a 150 jabloní so zelenými jablkami. Obrať jabloň s červenými jablkami trvá 15 minút, obrať ostatné jablone trvá 20 minút. Vo firme by si chceli na tento zber najať brigádnikov. Každý brigádnik bude v jeden deň pracovať 8 hodín. Koľko najmenej brigádnikov si musí Barborkina firma najať, aby pozbierali všetky jablká za 3 dni?*

Výsledok: 5
Riešenie: Obratie jabloní s červenými jablkami bude trvať 200 · 15 = 3000 minút, obratie jabloní so žltými jablkami 60 · 20 = 1200 minút a obratie jabloní so zelenými jablkami zas 150 · 20 = 3000 minút. Spolu tak potrebujú brigádnici vykonať 3000 + 1200 + 3000 = 7200 minút práce, čo predstavuje 7200 : 60 = 120 hodín. Každý brigádnik zvládne za 3 dni odpracovať 3 · 8 = 24 hodín práce, takže firma si musí najať najmenej 120 : 24 = 5 brigádnikov.

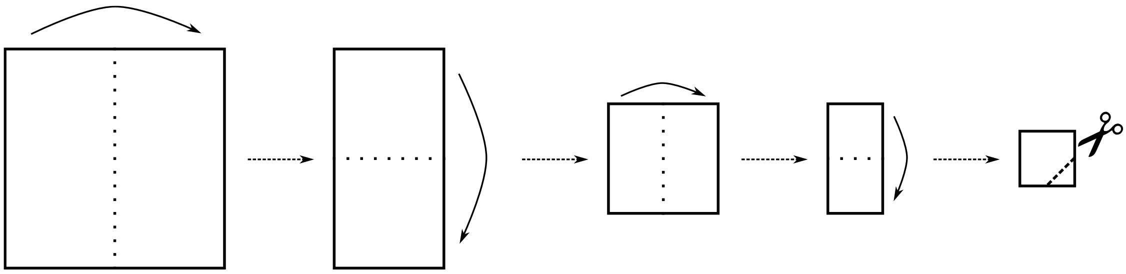
Úloha 11. *Jožo má terasu v tvare obdĺžnika s rozmermi 12 m × 16 m. Chcel by ju vydláždiť nasledovne:*
- Na okrajoch terasy by chcel použiť štvorcové dlaždice s rozmermi 1 m × 1 m.
- Zvyšok terasy by chcel vydláždiť dlaždicami s rozmermi 2 m × 2 m.
Koľko dlaždíc použije na vydláždenie celej terasy?

Výsledok: 87
Riešenie: Vyriešme najprv dlaždice na okraji. Pri okraji strany dlhej 12 m ich bude 12 a pri okraji strany dlhej 16 m ich bude 16. No keby sme sčítali tento počet dlaždíc pre každú stranu, zarátali by sme každú dlaždicu v rohu dvakrát. Preto potom musíme od počtu dlaždíc odčítať 4, jeden za každú dlaždicu v rohu. Spolu sa tak na okraji použije 12 + 16 + 12 + 16 - 4 = 52 dlaždíc.
Pozrime sa teraz na zvyšné dlaždice. Zostáva nám vydláždiť už len obdĺžnik so stranami dlhými 12 m - 1 m - 1 m = 10 m a 16 m - 1 m - 1 m = 14 m. Keďže používame dlaždice s rozmermi 2 m × 2 m, budú tieto dlaždice tvoriť 14 m : 2 m = 7 radov po 10 m : 2 m = 5 dlaždíc. Týchto dlaždíc sa tak použije 7 · 5 = 35.
Spolu sa na vydláždenie celej terasy použije 52 + 35 = 87 dlaždíc.

Úloha 12. *Fedor si vytvoril 8 kartičiek. Na každej kartičke bolo jedno číslo, pričom na kartičkách boli všetky delitele čísla 30. Fedor sa rozhodol, že rozdelí kartičky na dve kôpky tak, aby boli súčty čísel na oboch kôpkach rovnaké. Koľkými spôsobmi to môže Fedor spraviť?*

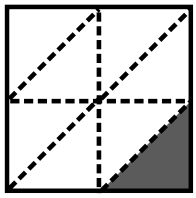
Výsledok: 3
Riešenie: Číslo 30 má týchto osem deliteľov: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 a 30. Ich súčet je 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 + 30 = 72. Aby Fedor dostal dve kôpky s rovnakým súčtom, musí byť súčet čísel na každej kôpke 72 : 2 = 36. Z toho vidíme, že je málo možností, ktoré kartičky môžu byť na kôpke s číslom 30. Ľahko vyskúšame, že súčet 36 vieme dostať iba týmito tromi spôsobmi: 30 + 6, 30 + 5 + 1 a 30 + 3 + 2 + 1. Vo všetkých prípadoch budú na druhej kôpke zvyšné kartičky. Fedor tak má 3 spôsoby, ako rozdeliť kartičky na dve kôpky.

Úloha 13. *Jožko si vyrába ozdoby na okno. Zobral si na to štvorcový papier. Štyrikrát ho prehol na polovicu a ustrihol trojuholník ako na obrázku. Strihal pritom tak, že strih viedol od stredu jednej strany k stredu inej strany menšieho štvorca, ktorý dostal po prehnutí. Po odstrihnutí papier znova rozložil. Ako veľkú časť obsahu pôvodného štvorca tvoril útvar, ktorý Jožkovi zostal? Výsledok odovzdaj ako zlomok v základnom tvare.*



<u>Výsledok:</u> 7/8
<u>Riešenie:</u> Po poskladaní sú všetky vrstvy papiera rovnaké. So všetkými vrstvami sa tak stane rovnaká vec. Preto môžeme zabudnúť na to, že sa papier vôbec skladal. Stačí teda riešiť úlohu, kde Jožko ustrihol trojuholník zo štvorca.

Všimnime si, že papier vieme rozdeliť na 8 trojuholníkov rovnakých ako ten, ktorý Jožko ustrihol:



Jeden z týchto trojuholníkov Jožko odstrihol a zvyšných 7 zostalo súčasťou papiera, takže obsah výsledného papiera tvorí 7/8 obsahu pôvodného štvorcového papiera.

Úloha 14. *Aký je najmenší násobok deviatky obsahujúci iba párne cifry väčší ako 0?*

<u>Výsledok:</u> 288
<u>Riešenie:</u> Aby bolo číslo násobkom deviatky, musí platiť, že ciferný súčet toho čísla je násobkom deviatky.

V našom hľadanom čísle sú len párne cifry, a teda aj ciferný súčet je určite párny. Okrem nuly, najmenší možný párny násobok deviatky je 18. Preto hľadáme číslo s ciferným súčtom 18 (väčší ciferný súčet, napr. 36, by znamenal, že hľadané číslo musí byť aspoň 9999, zatiaľ čo pri cifernom súčte 18 môže byť hľadané číslo aj dvoj- alebo trojciferné).

Naše hľadané číslo však nie je dvojciferné, lebo jediné dvojciferné číslo s ciferným súčtom 18 je 99, ktoré nemá párne cifry. Skúsme sa teda pozrieť na trojciferné čísla. Najmenšia možná cifra na mieste stoviek je 2. Zvyšné dve cifry musia mať súčet 16, na čo je jediná vyhovujúca možnosť 8 + 8.

Hľadané číslo je 288.

Úloha 15. *Partia kamarátov šla na zmrzlinu. V zmrlinárni predávajú dva typy zmrzlín – klasickú zmrzlinu a sorbet. Kopček klasickej zmrzliny stojí 0,70 € a kopček sorbetu stojí 1 €. Kamaráti si kúpili kopčeky a zaplatili za ne 10,90 €. Koľko kopčekov sorbetu si kúpili?*

<u>Výsledok:</u> 6
<u>Riešenie:</u> Môžeme si všimnúť, že výsledná cena nie je celé číslo. Keďže cena sorbetu je celé číslo, desatinnú časť ceny spôsobila klasická zmrzlina. Tá však stojí 0,70 €. Keď si vypíšeme zopár násobkov 0,7, prídeme na to, že najmenší násobok končiaci deviatkou je 0,7 € · 7= 4,9 €. Ďalší násobok končiaci deviatkou je až 0,7 € · 17 = 11,9 €, čo je príliš veľa.

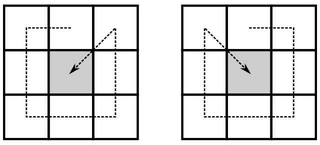
To znamená, že klasických kopčekov je 7 a stáli 4,90 €. Aby celková cena bola 10,90 €, cena sorbetu je 10,9 € - 4,9 € = 6 €, a teda si kúpili 6 kopčekov sorbetu.

Úloha 16. *Sebastián umiestnil figúrku šachového kráľa do stredu šachovnice 3 × 3. Chcel by ním prejsť celú šachovnicu tak, aby každé políčko navštívil presne raz a nakoniec sa vrátil do políčka v strede. Koľkými spôsobmi to môže Sebastián spraviť?*
Poznámka: Figúrka kráľa sa v každom ťahu pohnúť iba na políčko susediace stranou alebo vrcholom.

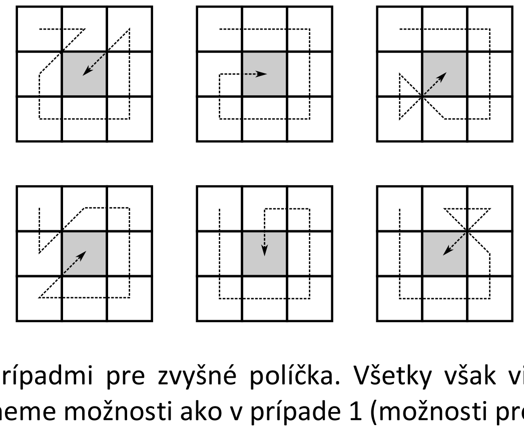
<u>Výsledok:</u> 32
<u>Riešenie:</u> Označme si jednotlivé políčka číslami ako na obrázku:

A	B	C
H		D
G	F	E

Rozlíšme prípady podľa toho, na ktoré políčko sa Sebastián pohne s kráľom. Začnime tým, ktorý sa ukáže byť jednoduchší.
Prípad 1: Pohne sa na políčko B.
Z políčka B sa môže pohnúť na políčka A, C, D a H. Ak by sa však pohol na políčko D, tak by už nevedel prejsť všetky políčka – ak by sa totiž z políčka D pohol na políčko C, musel by ísť do stredu, a ak by sa pohol na niektoré z políčok E alebo F, tak už by nikdy neprišiel do políčka C. Podobne sa Sebastián nemôže pohnúť ani na políčko H.
Musí sa teda pohnúť na niektoré z políčok A alebo C. Povedzme, že sa pohne na políčko A. Odtiaľ jednoznačne pokračuje na políčko H. Tu má opäť dve možnosti – políčka F a G. Na políčko F sa však nemôže pohnúť z rovnakého dôvodu ako v predošlom odseku. Takže bude pokračovať na políčko G. Rovnakými argumentami prídeme na to, že musí pokračovať cez políčka F, E, D, C a do stredu. Ak by sa z políčka B pohol na políčko C, dostávame podobnú možnosť. Spolu tak máme tieto 2 možností:



Prípad 2: Pohne sa na políčko A.
Povedzme, že sa Sebastián ďalej pohne na políčko B (prípad s políčkom H sa vyrieši rovnako). Z neho môže pokračovať na políčka C a H. Ak by sa pohol na políčko H, tak úvahami z prvého prípadu prídeme na to, že musí pokračovať políčkami G, F, E, D, C a do stredu. Situácia je mierne komplikovanejšia, ako sa pohne na políčko C. Vtedy dostávame dve možnosti: D, E, F, G, H a do stredu, ale taktiež D, E, F, H, G (pri pohybe z políčka F už nevieme použiť myšlienku z predošlého odseku). Ak započítame možnosti, ak by sa Sebastián pohol z políčka A na políčko H, tak dostávame týchto 6 možností:



Mohli by sme pokračovať prípadmi pre zvyšné políčka. Všetky však vieme popísať týmito dvomi. Pre políčka B, D, F a H dostaneme možnosti ako v prípade 1 (možnosti pre políčka D, F a H dostaneme otočením tých pre políčko B), čiže dostávame 4 · 2 = 8 možností. Pre políčka A, C, E a G sú možnosti rovnakého typu ako v prípade 2, takže máme 4 · 6 = 24 možností.
Všetkých možností, ako môže Sebastián prejsť po šachovnici je teda 8 + 24 = 32.

Úloha 17. *V rade sú umiestnené 3 nádoby. V ľavej nádobe je 7 mincí, v strednej nádobe je 12 mincí a v pravej nádobe je 10 mincí. V každom kroku môže Aďa buď presunúť zo strednej nádoby jednu mincu do ktorejkoľvek krajnej nádoby, alebo zobrať jednu mincu z každej krajnej nádoby a pridať jednu mincu do strednej nádoby. Prestane vtedy, keď už nebude môcť vykonať žiadny krok. Koľko najviac takýchto krokov môže vykonať?*

Výsledok: 68
Riešenie: Všimnime si, že zobratie jednej mince z každej krajnej nádoby a pridanie jednej mince do strednej nádoby nám zmenší počet mincí o 1. Na to, aby sme mohli vykonať túto akciu, potrebujeme, aby boli spolu vo všetkých nádobách aspoň 2 mince. Preto môžeme vykonať najviac $7 + 12 + 10 - 1 = 28$ týchto krokov. Premiestnenie mince zo strednej nádoby do krajnej nádoby vieme tiež vykonať len obmedzene veľa krát. Vieme to vykonať toľkokrát, koľkokrát máme mincu v strednej nádobe. Tá tam je buď na začiatku, alebo ju tam dostaneme pomocou nahradenia jednej mince v každej krajnej nádobe mincou v strednej nádobe. Tento krok tak vieme vykonať najviac $12 + 28 = 40$-krát. To znamená, že Aďa môže vykonať najviac $28 + 40 = 68$ krokov.
Ostáva ukázať, že vieme vykonať 68 krokov. Na to premiestnime najprv 12 mincí zo strednej nádoby do ľavej nádoby. Teraz vykonajme 18-krát dvojicu krokov nahradenie jednej mince z každej krajnej nádoby mincou v strednej nádobe a premiestnenie mince zo strednej nádoby do pravej nádoby. Každá takáto dvojica znížila počet mincí v ľavej nádobe o 1. Podobne vykonajme 10-krát dvojicu krokov nahradenie jednej mince z každej krajnej nádoby mincou v strednej nádobe a premiestnenie mince zo strednej nádoby do ľavej nádoby. Týmto zmenšíme počet mincí v pravej nádobe o 10. Na konci tak zostala len 1 minca v ľavej nádobe. Použili sme $12 + 2 \cdot 18 + 2 \cdot 10 = 68$ krokov, takže 68 krokov je skutočne najväčším možným počtom krokov.

Úloha 18. *Katka sa hrá s číslami. Zoberie si nejaké štvorciferné číslo a zistí, čomu sa rovná po zaokrúhlení na desiatky, stovky a tisícky. Katkine obľúbené čísla sú také čísla, že výsledok zaokrúhlenia na stovky je aritmetickým priemerom výsledkov zaokrúhlenia na desiatky a na tisícky. Koľko štvorciferných čísel je Katkiných obľúbených?*

Výsledok: 90
Riešenie: Podmienku na čísla si prepíšme na nasledujúci tvar: Súčet výsledku zaokrúhlenia na desiatky a výsledku zaokrúhlenia na tisícky je súčtom výsledku zaokrúhlenia na stovky so sebou samým.
Číslo zaokrúhlené na stovky má na mieste jednotiek aj na mieste desiatok nulu. Takže aj súčet takéhoto čísla so sebou samým bude končiť dvomi nulami. Toto má byť zároveň súčet čísla zaokrúhleného na desiatky a čísla zaokrúhleného na tisícky. Číslo zaokrúhlené na tisícky má na mieste desiatok nulu, ale číslo zaokrúhlené na desiatky tam môže mať aj inú cifru. Ale súčet týchto dvoch čísel má na mieste desiatok nulu, takže aj číslo zaokrúhlené na desiatky ju tam muselo mať. To dáva len tieto možnosti pre posledné dvojčíslie čísla, ktoré Katka zaokrúhľovala: 95, 96, 97, 98, 99, 00, 01, 02, 03 a 04.
Takéto číslo sa na desiatky zaokrúhli rovnako ako na stovky. Má platiť, že súčet čísla zaokrúhleného na tisícky a čísla zaokrúhleného na desiatky je rovnaký, ako súčet čísla zaokrúhleného na stovky so sebou samým. Lenže jeden zo sčítancov v prvom súčte (číslo zaokrúhlené na desiatky) je rovnaký ako jeden zo sčítancov v druhom súčte (číslo zaokrúhlené na stovky). Preto sa musia rovnať aj druhé sčítance na oboch stranách, čiže hľadáme čísla, ktoré sa zaokrúhlia rovnako na stovky ako na tisícky. Po zaokrúhlení na stovky sa tak musí na mieste stoviek objaviť cifra 0, čo obmedzuje posledné trojčíslia na 995, 996, 997, 998, 999, 000, 001, 002, 003 a 004.
Pre ľubovoľnú prvú cifru štvorciferného čísla môžeme použiť všetkých desať trojčíslí (napr. pre cifru 4 máme vyhovujúce čísla 4000, 4001, 4002, 4003, 4995, 4996, 4997, 4998 a 4999). Takže všetkých štvorciferných čísel s hľadanými vlastnosťami, a teda Katkiných obľúbených čísel je $9 \cdot 10 = 90$.

Úloha 19. *Andrej sa rozhodol očíslovať všetky strany vo svojej obľúbenej knihe postupne 1, 2, 3, 4 a tak ďalej. Počas číslovania použil cifru 7 presne 14-krát. Koľko strán má Andrejova kniha?*

<u>Výsledok:</u> 76
<u>Riešenie:</u> Od 1 po 69 sa cifra 7 vyskytne v každej desiatke čísel práve raz, čo nám dáva prvých sedem cifier 7. Zostáva už iba ďalších sedem cifier 7, ktoré využijeme postupne na čísla 70, 71, ..., 76 (na číslo 77 by sme použili ďalšie cifry 7, takže viac strán v knihe byť nemôže). Týchto 76 bude teda počet strán v Andrejovej knihe.

Úloha 20. *Adam, Barborka, Comp, Dominika, Erik, Filip, Gabo a Hanka sa hrajú hru. Na začiatku stoja všetci v tomto poradí v kruhu a hovoria čísla. Adam začína a povie číslo 1. Potom Barborka, stojaca po jeho pravici, povie číslo 2. Potom Comp, stojaci napravo od Barborky, povie 3 a tak ďalej. Vždy pokračuje hráč napravo od toho, kto hovoril číslo ako posledný. Ten, kto povie číslo, ktoré je násobkom 13, vystúpi z kruhu a ďalej už nehrá. Kto zostane v kruhu ako posledný?*

<u>Výsledok:</u> Gabo
<u>Riešenie:</u> Zapisujme si do takejto tabuľky, kto povie aké číslo:

Adam	1	9	17	24	31	37	43	48	53	57	61	$\boxed{65}$											
Barborka	2	10	18	25	32	38	44	49	54	58	62	66	69	72	75	$\boxed{78}$							
Comp	3	11	19	$\boxed{26}$																			
Dominika	4	12	20	27	33	$\boxed{39}$																	
Erik	5	$\boxed{13}$																					
Filip	6	14	21	28	34	40	45	50	55	59	63	67	70	73	76	79	81	83	85	87	89	$\boxed{91}$	
Gabo	7	15	22	29	35	41	46	51	56	60	64	68	71	74	77	80	82	84	86	88	90	92	93
Hanka	8	16	23	30	36	42	47	$\boxed{52}$															

Z tabuľky vidíme, ako z kruhu vystupujú postupne Erik, Comp, Dominika, Hanka, Adam, Barborka a napokon Filip. To znamená, že v kruhu zostane posledný Gabo.

Úloha 21. *Je tesne po 12:00. Lucy sa v škole nudí, a tak len sleduje hodinky. Všimla si, že hodinová a minútová ručička zvierajú uhol 15°. Lucy zaujíma, aký uhol budú zvierať o 10 minút. Aký uhol budú zvierať?*

<u>Výsledok:</u> 70°
<u>Riešenie:</u> O 12:00 sa ručičky prekrývajú, ale minútová ručička ide rýchlejšie. V momente z úlohy tak je minútová ručička o 15° pred hodinovou. Minútová ručička za hodinu opíše uhol 360°, takže za 10 minút opíše 360° : 6 = 60°. Podobne hodinová ručička opíše uhol 360° za dvanásť hodín. Čiže za hodinu opíše uhol 360° : 12 = 30° a za 10 minút uhol 30° : 6 = 5°. Za 10 minút tak minútová ručička „ujde“ hodinovej ručičke o 60° - 5° = 55°. Pôvodne bola pred hodinovou ručičkou o 15°, takže po desiatich minútach s ňou bude zvierať uhol 15° + 55° = 70°.

Úloha 22. *Ákos cestoval z Komárna do Bratislavy cez Šamorín. V Komárne si všimol dopravnú značku, ktorá hovorila, že Šamorín je od Komárna vzdialený 84 a Bratislava 105 kilometrov. V istom momente počas svojej cesty si uvedomil, že vzdialenosť, ktorú musí prejsť do Šamorína, tvorí polovicu vzdialenosti, ktorú musí prejsť do Bratislavy. Koľko kilometrov bol v tomto momente vzdialený od Šamorína?*

Výsledok: 21
Riešenie: Tým, že poznáme vzdialenosť z Komárna do Šamorína a vzdialenosť z Komárna do Bratislavy (a vieme, že do Bratislavy sa ide cez Šamorín), vieme si vypočítať vzdialenosť medzi Šamorínom a Bratislavou. Tá je 105 km - 84 km = 21 km. Ákos si v nejakom bode cesty uvedomil, že vzdialenosť, ktorú musí prejsť do Šamorína je polovicou zo vzdialenosti, ktorú musí prejsť do Bratislavy. To znamená, že je Ákos je od Šamorína vzdialený toľko, čo Šamorín od Bratislavy, a teda 21 km.

Úloha 23. *Pat a Mat behajú medzi školou a obchodom, tam aj späť po tej istej ceste. Obaja naraz vyštartovali od školy a každý z nich si udržiaval svoju rýchlosť. Nakoniec obaja dobehli ku škole v rovnakom momente. V tomto momente mal Pat 14-krát zabehnuté k obchodu a späť, kým Mat len 9-krát. Koľkokrát sa počas behu Pat stretol s Matom (vrátane stretnutí na začiatku a na konci)?*

Výsledok: 28
Riešenie: Keďže čísla 9 a 14 nemajú žiadneho spoločného deliteľa, nestretli sa Pat a Mat ani pri škole a ani pri obchode (okrem stretnutia na začiatku a na konci). Pat bežal rýchlejšie, a tak vždy, keď prebehol medzi školou a obchodom, stretol počas toho Mata presne raz. To platí aj na začiatku a konci, pretože vtedy sa stretli pri škole. Pat prebehol medzi školou a obchodom $2 \cdot 14 = 28$-krát, a tak sa s Matom stretol 28-krát.

Úloha 24. *Majo si rád kreslí rovnoramenné trojuholníky. Tentoraz sa rozhodol pre tie s obvodom 25 cm, ktorých dĺžky strán sú vyjadrené v centimetroch celým číslom. Majo ale chce, aby každé dva trojuholníky, ktoré nakreslí, boli rôzne. Koľko trojuholníkov dokáže takto nakresliť?*

Výsledok: 6
Riešenie: Rovnoramenný trojuholník sa skladá z dvoch ramien (strán rovnakej dĺžky) a základne. Najdlhšia možná dĺžka ramena je 12 cm (12 cm + 12 cm + 1 cm = 25 cm). Najkratšia možná dĺžka ramena je 7 cm (7 cm + 7 cm + 11 cm = 25 cm). Prečo to je tak? Keby bolo rameno kratšie ako 7 cm, neplatila by trojuholníková nerovnosť, lebo už pri 6 cm dlhom ramene je súčet dĺžok dvoch ramien kratší ako základňa.
Výsledných možností je teda 6 a vyzerajú takto:
12 cm + 12 cm + 1 cm
11 cm + 11 cm + 3 cm
10 cm + 10 cm + 5 cm
9 cm + 9 cm + 7 cm
8 cm + 8 cm + 9 cm
7 cm + 7 cm + 11 cm

Úloha 25. *Samko pozeral americký seriál, keď si všimol, že Američania používajú iný formát dátumov ako my. Deň a mesiac píšu naopak ako my. Takže dnešný dátum 29.3.2023 by napísali ako 3.29.2023. Samko bol z toho zmätený, lebo pri pohľade na dátum nie vždy vedel určiť, ktorý dátum sa tým myslí. Niekedy to však vedel – napríklad dnes, pretože žiadny mesiac nemá číslo 29, takže 29 musí byť číslo dňa. Koľko dní roka 2023 má taký dátum, že keď sa naň Samko pozrie, tak vie určiť, o ktorý dátum sa jedná bez ohľadu na to, či je napísaný v európskom alebo americkom formáte?*

Výsledok: 233

Riešenie: Spočítajme počet tých dní, kedy zo zápisu nevieme určiť dátum. Na to musí byť číslo dňa aj číslo mesiaca medzi 1 a 12 (ak je totiž číslo dňa aspoň 13, tak vieme povedať, že to je číslo dňa). Ak sú tieto dve čísla rôzne, tak nevieme určiť, o ktorý dátum sa jedná. Ale ak sú rovnaké, tak to určiť vieme, lebo takýto dátum má v oboch formátoch rovnaký zápis.

Dvojíc čísel medzi 1 a 12 je $12 \cdot 12 = 144$. Ak z nich vyhodíme dvojice rovnakých čísel (t.j. dátumy 1.1., 2.2., ..., 12.12.), ktorých je 12, dostaneme $144 - 12 = 132$ dní, počas ktorých Samko nevie zistiť, aký je dátum. Keďže rok 2023 má 365 dní, tak Samko vie určiť dátum počas $365 - 132 = 233$ dní roka 2023.

Úloha 26. *Patrik je vášnivý šachista, ale aj matematik. Keď hral minule šach, tak mu napadla otázka. Koľko rôznych štvorcov (ľubovoľnej veľkosti) je určených čiarami oddeľujúcimi políčka šachovnice 8 × 8?*

Výsledok: 204

Riešenie: Štvorce, ktoré Patrik započíta, môžu mať ľubovoľnú z týchto veľkostí: 1 × 1, 2 × 2, 3 × 3, ..., 8 × 8. Postupne spočítame počty štvorcov jednotlivých veľkostí.

Štvorcov veľkosti 1 × 1 je toľko, koľko políčok šachovnice, čiže $8 \cdot 8 = 64$. Pri počítaní štvorcov 2 × 2 si všímajme, kde všade môže byť ľavý horný štvorček tohto štvorca 2 × 2. Nemôže byť v poslednom riadku ani poslednom stĺpci. Inak ale môže byť kdekoľvek, čiže v ľavej hornej časti 7 × 7 celej šachovnice. Preto je štvorcov veľkosti 2 × 2 toľko, koľko políčok v tejto časti šachovnice, teda $7 \cdot 7 = 49$.

Podobne sa môžeme pozrieť na štvorce 3 × 3, ktoré nemôžu mať ľavý horný štvorček v posledných dvoch riadkoch a posledných dvoch stĺpcoch. Bude teda na jednom z $6 \cdot 6 = 36$ políčok ľavej hornej časti 6 × 6 celej šachovnice. Takto pokračujme aj pre väčšie štvorce.

Na záver dostaneme pre štvorce 7 × 7 iba $2 \cdot 2 = 4$ možnosti zodpovedajúce ľavej hornej 2 × 2 časti celej šachovnice a pre štvorce 8 × 8 iba jedinú možnosť, keďže ľavá horná 1 × 1 časť obsahuje iba jedno políčko.

Všetkých štvorcov je preto:

$8 \cdot 8 + 7 \cdot 7 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204.$

Úloha 27. *Lukáš si napísal na papier stĺpec čísel. Najprv napísal číslo 2 a pod neho číslo 1. Ďalej do tohto stĺpca písal čísla tak, aby každé číslo bolo súčtom dvoch čísel napísaných nad ním. Pod číslami 2 a 1 tak Lukáš pokračoval číslami 3, 4, 7 a tak ďalej. Potom Lukáš vytvoril druhý stĺpec – vedľa každého čísla z prvého stĺpca napísal zvyšok tohto čísla po delení 5 do druhého stĺpca. Aký bol súčet prvých 2023 čísel v druhom stĺpci?*

Výsledok: 5056

Riešenie: Vypíšme si prvé čísla v druhom stĺpci:

2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, ...

Vidíme, že v druhom stĺpci sa stále budú opakovať čísla 2, 1, 3, 4. Prečo to tak bude? Každé číslo závisí len od predošlých dvoch (lebo zvyšok v tomto riadku dostaneme tak, že sčítame zvyšky z dvoch predošlých riadkov a vezmeme zvyšok výsledku po delení 5). Takže v momente, keď sa zopakuje nejaká dvojica po sebe idúcich čísel, tak sa celá postupnosť zacyklí.

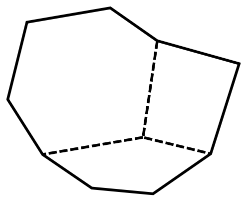
V druhom stĺpci tak bude $2020 : 4 = 505$ štvoríc 2, 1, 3, 4 so súčtom $2 + 1 + 3 + 4 = 10$. Okrem toho tam budú čísla 2, 1 a 3. Súčet všetkých čísel v druhom stĺpci preto bude $505 \cdot 10 + 2 + 1 + 3 = 5056$.

Úloha 28. *Je rok 2023, čo Matejovi vnuklo otázku: „Najskôr v ktorom roku (po roku 2023) bude ciferný súčet roku znovu taký istý ako ciferný súčet roku 2023?“ Aká je odpoveď na Matejovu otázku?*

Výsledok: 2032
Riešenie: Roky 2024 až 2029 určite nebudú mať rovnaký ciferný súčet ako rok 2023 – majú totiž rovnaké prvé tri cifry, no poslednú cifru majú väčšiu. Ďalší kandidáti na odpoveď sú tak medzi rokmi 2030 až 2039. Keďže rok 2023 má ciferný súčet 2 + 0 + 2 + 3 = 7, tak spomedzi rokov začínajúcich ciframi 2, 0 a 3 vyhovuje jedine ten, ktorý končí cifrou 7 - 2 - 0 - 3 = 2. Odpoveď na Matejovu otázku je preto rok 2032.

Úloha 29. *Laura si na papier ceruzkou nakreslila štvoruholník, päťuholník a šesťuholník. Nakreslila ich tak, že všetky tri mali spoločný vrchol. Navyše, každé dva útvary mali spoločnú jednu celú stranu vychádzajúcu z tohto vrcholu, každá dvojica útvarov inú. Laura vygumovala tieto tri spoločné strany, čím jej zostal iba mnohouholník. Koľko najviac strán mohol mať?*

Výsledok: 9
Riešenie: Najviac strán dostaneme, ak bude každá nezmazaná strana menších mnohouholníkov aj stranou výsledného mnohouholníka. Strán tak bude najviac (4 - 2) + (5 - 2) + (6 - 2) = 9. Ľahko nájdeme príklad situácie, kedy dostaneme 9-uholník, takže Laura dostala mnohouholník s najviac 9 stranami:



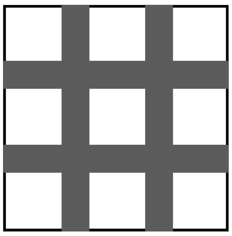
Úloha 30. *Juro má 64 kartičiek pexesa. Každá z nich má z jednej strany obrázok a z druhej strany je prázdna. Každá kartička navyše tvorí s nejakou inou kartičkou pár. Juro rozložil tieto kartičky do štvorca 8 × 8 tak, aby každej kartičke bolo vidno len jej prázdnu stranu. Nevie však, ako vyzerajú opačné strany týchto kartičiek. Teraz by chcel Juro otočiť niekoľko kartičiek tak, aby bol medzi otočenými kartičkami aspoň jeden pár. Koľko najmenej kartičiek musí Juro otočiť, aby sa mu to určite podarilo?*

Výsledok: 33
Riešenie: Jurove kartičky tvoria 64 : 2 = 32 párov. Ak by Juro otočil 32 kartičiek, mohlo by sa mu stať, že z každého páru otočil len jednu kartičku. Keď však otočí 33 kartičiek, tak už bude medzi otočenými kartičkami určite aspoň jeden pár. Juro teda musí otočiť najmenej 33 kartičiek.

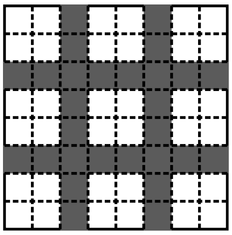
Úloha 31. *Lucy má 6 závaží s hmotnosťami postupne 10, 20, 30, 40, 50 a 60 gramov. Rozdelila ich do troch krabíc. Do prvej dala dve závažia, ktoré spolu vážili 90 gramov. Do druhej dala dve závažia, ktoré spolu vážili 80 gramov. Aké boli hmotnosti závaží, ktoré dala Lucy do tretej krabice?*

Výsledok: 10 a 30 gramov
Riešenie: Môžeme si všimnúť, že súčet hmotností všetkých závaží je:
10 g + 20 g + 30 g + 40 g + 50 g + 60 g = 210 g.
Keďže každé závažie je v nejakej krabici práve raz, aj súčet hmotností v troch krabiciach musí byť 210 g. To znamená, že hmotnosť závaží v tretej krabici je 210 g - 90 g - 80 g = 40 g. Zároveň vieme, že v tretej krabici sú dve závažia. Jediná možnosť, ako dostať dvoma závažiami súčet 40 g, je 10 g + 30 g.
Spravme si aj skúšku správnosti – nájdime takú možnosť, ktorá vyhovuje zadaniu:
Prvá krabica: 40 g + 50 g = 90 g
Druhá krabica: 20 g + 60 g = 80 g
Tretia krabica: 10 g + 30 g = 40 g
Hmotnosti závaží, ktoré dala Lucy do tretej krabice, boli 10 a 30 gramov.

Úloha 32. *Róberta skúša nové maliarske techniky. Zobrala si štvorec papiera so stranou dlhou 40 cm. Chcela by vytvoriť akoby 9 čiernych políčok. Aby nezamaľovala nič iné, tak si zobrala niekoľko kúskov šedej lepiacej pásky širokej 5 cm a prelepila ním papier tak na obrázku. Potom zamaľovala celý obraz načierno a pásky strhla. Aký je obsah časti papiera zafarbenej načierno?*



Výsledok: 900 cm²
Riešenie: Rozdeľme si celý veľký štvorec na menšie štvorčeky s veľkosťou 5 cm × 5 cm. Bez ohľadu na to, ako Róberta umiestnila pásky, môžeme si povedať, že zakrývajú presne jeden riadok alebo stĺpec týchto štvorčekov (ak to tak nie je, tak ich môžeme posunúť a nezmeníme celkovú veľkosť nezalepenej časti). Po nakreslení štvorčekov dostaneme takýto obrázok:



Časť, ktorá zostane začiernená aj po strhnutí pásky, je tvorená $9 \cdot 4 = 36$ štvorčekmi 5 cm × 5 cm. Spolu majú obsah $36 \cdot 5$ cm $\cdot$ 5 cm = 900 cm².

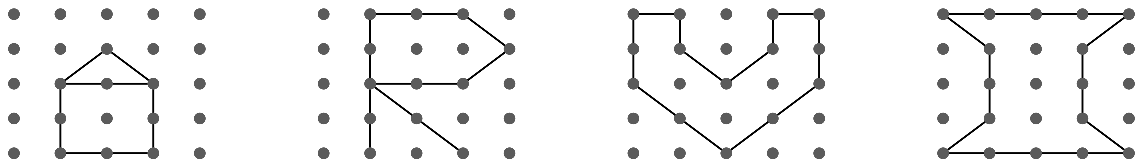
Úloha 33. *Braňo si všimol, že 1. január 2023 pripadol na nedeľu. Začal preto rozmýšľať, kedy sa takáto situácia bude opakovať. V ktorom najbližšom roku pripadne 1. január opäť na nedeľu?*
Poznámka: Rok má 365 dní. Ale ak je číslo roku deliteľné 4, tak má 366 dní (tzv. priestupný rok).

Výsledok: 2034
Riešenie: Pozrime sa, o koľko sa medziročne posúva deň, na ktorý pripadne 1. január. Keďže $365 = 52 \cdot 7 + 1$, tak sa 1. január každý rok posunie o 1 deň v týždni. Nesmieme ale zabudnúť uvažovať priestupné roky. Uvedomme si, že v priestupnom roku sa deň navyše pridáva až na konci februára, a tak sa zväčšenie počtu dní prejaví jedným dňom navyše až na začiatku roka po priestupnom roku. Teraz môžeme ísť zisťovať, na aké dni bude 1.január pripadať. V roku 2024 pripadne na pondelok. V roku 2025, rok po priestupnom roku, pripadne na stredu. V roku 2026 pripadne na štvrtok. V roku 2027 pripadne na piatok. V roku 2028 pripadne na sobotu. V roku 2029, rok po priestupnom roku, pripadne na pondelok. V roku 2030 pripadne na utorok. V roku 2031 pripadne na stredu. V roku 2032 pripadne na štvrtok. V roku 2033, rok po priestupnom roku, pripadne na sobotu. Napokon v roku 2034 pripadne na nedeľu.
Takže najbližší rok, v ktorom 1. január pripadne na nedeľu, je rok 2034.

Úloha 34. *V krajine Matbojovo uctievajú tabuľku 2 × 2. V každom políčku tejto tabuľky je napísané nejaké celé číslo. Táto tabuľka má takéto špeciálne vlastnosti:*
Súčet čísel v prvom riadku je 18.
Súčet čísel v druhom riadku je 23.
Súčet čísel v prvom stĺpci je 9.
Aký je súčet čísel v druhom stĺpci?

Výsledok: 32
Riešenie: Súčet všetkých štyroch čísel v tabuľke vieme vyjadriť dvomi spôsobmi. Na jednej strane ho môžeme vyjadriť ako súčet čísel v prvom a v druhom riadku. Takže súčet všetkých čísel v tabuľke je 18 + 23 = 41. Na druhej strane ho môžeme vyjadriť ako súčet čísel v prvom a druhom stĺpci. Z toho dostaneme, že súčet čísel v druhom stĺpci musí byť 41 - 9 = 32.

Úloha 35. *Miška vyrába obrazce. Zobrala si dosku a zatĺkla do nej klince tak, aby tvorili obdĺžnikovú sieť. Potom omotávala šnúrku okolo klincov tak, aby žiadne dva klince neboli spojené šnúrkou viac ako raz. Takto spravila štyri obrazce. Na prvý z nich použila 38 cm šnúrky, na druhý 48 cm šnúrky a na tretí 56 cm šnúrky. Koľko centimetrov šnúrky použila Miška na vytvorenie štvrtého obrazcu?*



Výsledok: 64
Riešenie: Vypíšme si ku každému obrazcu, koľko vodorovných, koľko zvislých úsekov a koľko šikmých úsekov (uhlopriečky obdĺžnika sú rovnako dlhé, takže je jedno, ako je šikmý) sa v ňom nachádza:
Prvý obrazec: 4 vodorovné, 4 zvislé a 2 šikmé úseky, spolu 38 cm.
Druhý obrazec: 4 vodorovné, 4 zvislé a 4 šikmé úseky, spolu 48 cm.
Tretí obrazec: 2 vodorovné, 6 zvislých a 6 šikmých úsekov, spolu 56 cm.
Z porovnania prvého a druhého obrazca vidíme, že pridaním dvoch šikmých úsekov sa dĺžka šnúrky zvýši o 48 cm - 38 cm = 10 cm. Jeden šikmý úsek tak má dĺžku 10 cm : 2 = 5 cm. Odstráňme tieto úseky z jednotlivých obrazcov a zapíšme si nové dĺžky:
Prvý obrazec: 4 vodorovné a 4 zvislé úseky, spolu 28 cm.
Druhý obrazec: 4 vodorovné a 4 zvislé úseky, spolu 28 cm.
Tretí obrazec: 2 vodorovné a 6 zvislých úsekov, spolu 26 cm.
Z ktoréhokoľvek z prvých dvoch obrazcov vidíme, že 1 vodorovný a 1 zvislý úsek majú spolu dĺžku 28 cm : 4 = 7 cm. Keď dve takéto dvojice úsekov zmažeme z tretieho obrazca, zostanú na ňom už len 4 zvislé úseky s celkovou dĺžkou 26 cm - 2 · 7 cm = 12 cm. Takže jeden zvislý úsek má dĺžku 12 cm : 4 = 3 cm, z čoho dopočítame, že vodorovný úsek má dĺžku 7 cm - 3 cm = 4 cm.
Štvrtý obrazec sa skladá z 8 vodorovných, 4 zvislých a 4 šikmých úsekov. Preto naň Miška použije 8 · 4 cm + 4 · 3 cm + 4 · 5 cm = 64 cm šnúrky.

Úloha 36. *Majo si kúpil čarovnú mašinku. Mašinka si ukladá čísla do pamäte, a to nasledovne:*
1) Majo do nej napíše číslo.
2) Mašinka vynásobí napísané číslo číslom, ktoré mala v pamäti.
3) Od výsledného čísla mašinka odčíta trojnásobok čísla, ktoré mala v pamäti.
4) Mašinka výsledkom nahradí číslo, ktoré mala v pamäti.
Na začiatku mala mašinka v pamäti číslo 17. Majo do nej napísal postupne čísla 1, 2, 3, ..., 100. Aké číslo je teraz v pamäti mašinky?

Výsledok: 0
Riešenie: Všimnime si, čo sa stane, keď Majo do mašinky napíše číslo 3:
1) Majo do mašinky napíše číslo 3.
2) Mašinka vynásobí číslo, ktoré mala v pamäti, číslom 3.
3) Mašinka zmenší toto číslo (trojnásobok čísla v pamäti) o trojnásobok čísla, ktoré mala v pamäti.
4) Mašinka si tak do pamäte zapíše číslo 0.
Keď Majo napíše do mašinky nejaké číslo v momente, keď má mašinka v pamäti číslo 0, stane sa toto:
1) Majo do mašinky napíše nejaké číslo.
2) Mašinka vynásobí číslo, ktoré do nej Majo napíše, číslom 0 – tým vždy dostane číslo 0.
3) Mašinka zmenší toto číslo (0) o trojnásobok čísla 0 – čím opäť dostane len číslo 0.
4) Mašinka si do pamäti uloží číslo 0.
Preto keď má mašinka v pamäti číslo 0, bude je mať v pamäti aj naďalej a to bez ohľadu na to, aké číslo do nej Majo napíše. Číslo 0 sa v pamäti objaví po tom, ako do mašinky Majo napíše číslo 3. A tak musí byť v pamäti mašinky číslo 0 aj po tom, ako Majo do mašinky napíše všetky zvyšné čísla od 4 po 100.

Úloha V1. *Fedor má rád čísla s veľkým ciferným súčtom. Minule našiel najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet bol 2023. Z koľkých cifier sa skladalo toto číslo?*

Výsledok: 225

Riešenie: Potrebujeme nájsť najmenšie číslo s daným ciferným súčtom. Na to potrebujeme „spotrebovať" čo najviac čo najväčších cifier na posledných cifrách čísla, teda na miestach jednotiek, desiatok atď. Fedorovo číslo tak dostaneme nasledovne: Od miesta jednotiek píšeme cifry 9, kým môžeme. Keď už nemôžeme písať cifry 9, tak napíšeme ako prvú cifru takú cifru, aby bol ciferný súčet 2023.

Keďže 2023 : 9 = 224, zvyšok 7, tak Fedorovo číslo bude začínať cifrou 7, za ktorou bude nasledovať 224 cifier 9. Celé číslo tak bude mať 1 + 224 = 225 cifier.

Úloha V2. *Na hodiny matematiky chodí 34 žiakov. Nedávno všetci písali písomku, z ktorej sa dalo získať 0 až 10 bodov. Keď učiteľ priniesol opravené písomky, tak zhodnotil: „Každý z vás získal celočíselný počet bodov, takže určite aspoň N z vás získalo rovnaký počet bodov." Pre ktoré najväčšie N mohol mať učiteľ určite pravdu bez ohľadu na to, ako dopadla písomka?*

Výsledok: 4

Riešenie: Ukážeme, že najväčšie možné N je 4.

Z písomky sa dalo získať 11 rôznych počtov bodov. Ak by každý možný počet bodov získali najviac 3 žiaci, tak by ich v triede mohlo byť najviac 11 · 3 = 33 žiakov. Lenže v triede ich je 34, takže táto situácia nemohla nastať, čiže nejaký počet bodov získali aspoň 4 žiaci. Preto je N aspoň 4.

Na druhej strane sa mohlo stať napríklad to, že 4 žiaci získali 10 bodov a každý iný počet bodov dosiahli traja žiaci. Preto učiteľ nemohol povedať svoju vetu pre N aspoň 5. Takže N je najviac 4.

Skombinovaním predošlých dvoch odsekov dostávame, že N je aspoň 4 a najviac 4, a teda N musí byť 4.

Úloha V3. *Pokusného zajaca položili vedci na stôl tvaru rovnostranného trojuholníka. Ten si po ňom chvíľu pobehoval a po chvíli sa posadil do niektorého bodu trojuholníka. V tom momente zmerali vedci vzdialenosti zajaca od jednotlivých hrán stola. Dostali vzdialenosti 25 cm, 37 cm, 58 cm. Aká je výška rovnostranného trojuholníka tvoriaceho stôl?*

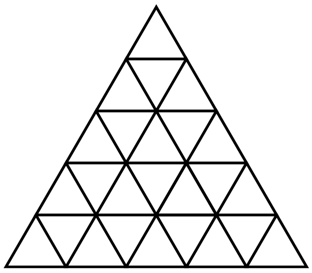
Výsledok: 120 cm

Riešenie: Rozdeľme si trojuholník na tri menšie trojuholníky tým, že si nakreslíme úsečky spájajúce vrcholy trojuholníka s miestom, na ktorom stojí zajac. Pomocou nich vyjadríme obsah veľkého trojuholníka – obsah veľkého trojuholníka je súčtom obsahov týchto troch menších trojuholníkov. O obsahoch týchto trojuholníkov totiž vieme povedať. O každom trojuholníku vieme dĺžku jeho výšky. Táto výška je výškou na stranu s takou dĺžkou, ako je dĺžka strany rovnostranného trojuholníka – označme ju a. Obsahy malých trojuholníkov sú preto a · 25 cm / 2, a · 37 cm / 2, a · 58 cm / 2. Čiže súčet ich obsahov je a · (25 cm + 37 cm + 58 cm) / 2 = a · 120 cm / 2. Toto je tiež obsah celého rovnostranného trojuholníka. Vzťah na jeho výpočet má rovnaký tvar, ako sme dostali, akurát na mieste neznámej výšky sme dostali dĺžku 120 cm. Z toho už vieme konštatovať, že výška rovnostranného trojuholníka tvoriaceho stôl je 120 cm.

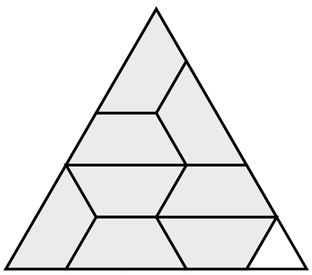
Úloha V4. *Majo a Maťo bývajú na rovnakej izbe na internáte. Jeden z nich vždy hovorí pravdu a druhý z nich vždy klame. Jedného dňa sa však pohádali. Pritom medzi nimi zaznel takýto rozhovor:*
Majo: „Číslo našej izby je deliteľné číslom 2."
Maťo: „Dokonca je číslo našej izby deliteľné číslom 4."
Ktorý z chlapcov hovorí pravdu a ktorý klame?

Výsledok: Majo hovorí pravdu, Maťo klame
Riešenie: Ak by Maťo hovoril pravdu, tak by číslo ich izby bolo deliteľné číslom 4. Lenže čísla deliteľné číslom 4 sú deliteľné aj číslom 2, takže v takom prípade by hovoril pravdu aj Majo. To ale podľa zadania nastať nemôže. Preto musí Maťo klamať, a teda Majo hovoriť pravdu (čo sa ľahko dosiahne napríklad tým, že číslo ich izby je 2).

Úloha V5. *Aďka si nakreslila rovnostranný trojuholník a rozdelila ho na niekoľko menších rovnostranných trojuholníkov tak ako na obrázku. Teraz chce povyfarbovať niektoré trojuholníky. Bude to robiť nasledovne: Vždy si vyberie ešte nevyfarbený trojuholník, ktorý stranou susedí s ešte dvomi nevyfarbenými trojuholníkmi. Aďka tento trojuholník spolu s jeho dvomi nevyfarbenými susedmi následne vyfarbí nejakou farbou. Toto bude Aďka opakovať, kým bude vedieť vyfarbovať trojuholníky spôsobom, ktorý si určila. Koľko najviac rôznych farieb môže Aďka použiť?*



Výsledok: 8
Riešenie: Po chvíli skúšania môžeme nájsť napríklad takýto spôsob vyfarbenia trojuholníkov (trojuholníky rovnakej farby sú spojené do jedného útvaru):



Pri tom Aďka použila 8 farieb. Prečo ich nemohla použiť viac? Všetkých trojuholníkov je 25 a každou farbou vyfarbí Aďka 3 trojuholníky. Ak by použila aspoň 9 farieb, musela by vyfarbiť $9 \cdot 3 = 27$ trojuholníkov. To ale nie je možné, lebo trojuholníkov je len 25. Preto Aďka použila najviac 8 rôznych farieb.

Úloha V6. *Smrtka na pražskom orloji má rada dve veci: kolu a kosu. Napísala si preto úlohu na sčítanie ako na obrázku. Teraz by chcela nahradiť rovnaké písmená rovnakými ciframi tak, aby platila rovnosť a aby žiadne z čísel nezačínalo cifrou 0. Smrtke sa to podarilo. Akú hodnotu malo päťciferné číslo LASKA?*

$$\begin{array}{r} \mathrm{KOLA} \\ +\,\mathrm{KOSA} \\ \hline \mathrm{LASKA} \end{array}$$

Výsledok: 10450

Riešenie: Na mieste jednotiek má platiť, že súčet A + A sa končí cifrou A. Ľahko si všimneme, že jediná cifra, ktorá toto spĺňa, je cifra 0. Preto A = 0:

$$\begin{array}{r} \mathrm{KOL}0 \\ +\,\mathrm{KOS}0 \\ \hline \mathrm{L}0\mathrm{SK}0 \end{array}$$

Pozrime sa teraz na cifru L. Je to prvá cifra päťciferného čísla, ktoré je súčtom dvoch štvorciferných čísel. Najväčší možný súčet dvoch štvorciferných čísel je 9999 + 9999 = 19998. Aby bolo číslo LASKA päťciferné, tak musí mať hodnotu aspoň 10000. Takže hodnota čísla LASKA je medzi 10000 a 19998, čiže L musí byť 1:

$$\begin{array}{r} \mathrm{KO}10 \\ +\,\mathrm{KOS}0 \\ \hline 10\mathrm{SK}0 \end{array}$$

Teraz sa pozrime na cifru K. Je to prvá cifra čísel KOLA a KOSA. Ich súčet, ako už vieme, je určite medzi 10000 a 10999. Preto musí byť K = 5 (ak by bolo menšie, tak by súčet KOLA + KOSA bol najviac 4999 + 4999 = 9998, čo je menej ako 10000, a ak by K bolo väčšie, tak by tento súčet bol aspoň 6000 + 6000 = 12000, čo je viac ako 10999):

$$\begin{array}{r} 5\mathrm{O}10 \\ +\,5\mathrm{OS}0 \\ \hline 10\mathrm{S}50 \end{array}$$

Na mieste desiatok teraz máme súčet 1 + S = 5, odkiaľ dostávame, že S = 4. Už ani nemusíme dopočítavať, ale ľahko dopočítame, že O = 2 (nemôžeme mať O = 7, lebo neprenášame desiatku):

$$\begin{array}{r} 5210 \\ +\,5240 \\ \hline 10450 \end{array}$$

Číslo LASKA má hodnotu 10450.