Ahojte,

držíte v rukách zbierku úloh a vzorových riešení Jarného Matboja 2024.
Jarný Matboj 2024 je matematická súťaž pre žiakov piateho až siedmeho ročníka základných škôl a prímy a sekundy osemročných gymnázií. Súťaž organizuje nezisková organizácia P-MAT, n. o. (organizátor korešpondenčných seminárov Pikomat, Pikofyz a Terabio).

Štvorčlenné tímy žiakov sú rozdelené do troch súťažných kategórií – 5, 6 a 7.
Súťaž prebieha 120 minút, počas ktorých sa súťažiaci snažia vyriešiť čo najviac úloh. Okrem toho dostanú za každú správne vyriešenú úlohu jeden ťah v strategickej hre. Konečné poradie tímov teda neovplyvňuje len počet vyriešených úloh, ale aj to, ako dobre sa im v tejto hre darilo.

Táto súťaž je zameraná na zlepšenie logického myslenia, matematického uvažovania a práce v tíme, no predovšetkým na možnosť objaviť radosť z matematiky. Vytvorili sme túto zbierku úloh, aby žiaci, ktorých úlohy zaujali, mali možnosť znova si ich prerieŠiť, poprípade si prečítali vzorové riešenia, z ktorých sa dá veľmi veľa naučiť, aj keď úlohu vyriešili správne. Taktiež môže slúžiť ako inšpirácia pre učiteľov na čerpanie netradičnejších úloh na hodiny matematiky.

Želáme Vám príjemné riešenie a veľa nových poznatkov!

Vaši organizátori

Úloha 01. *Ninka sa často zamýšľa nad všetkým možným, keď kráča domov. Pozerá sa pritom na električky, skúma zastávky a prechody pre chodcov, no niekedy jej spadne zrak aj dole na chodník. Na jednom takom chodníku zbadala kriedou napísané čísla: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Keďže toto bola jednoznačne najzaujímavejšia vec široko ďaleko, dlho sa zamýšľala práve nad týmito číslami. Okrem toho, že o nich premýšľala, rozhodla sa, že ich aj sčíta. Aký výsledok dostane?*

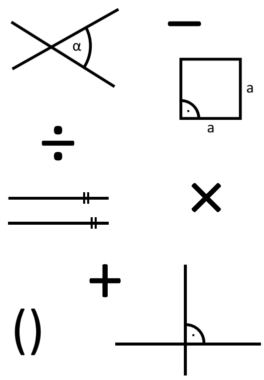
Výsledok: 376
Riešenie: Čísla z chodníka môžeme samozrejme aj ľahko sčítať jedno za druhým. Vieme si však ušetriť celkom veľa práce, ak si všimneme, že nejde o hocijaké čísla, ale o čísla z Fibonacciho postupnosti. Fibonacciho postupnosť sa začína 0 a 1 a ďalšie číslo vždy dostaneme súčtom predošlých dvoch. Tretie číslo teda bude 0 + 1 = 1, štvrté bude 1 + 1 = 2 a tak ďalej. Súčet zo zadania si teda vieme zjednodušiť napríklad nasledovne:

$(1 + 1) + 2 + (3 + 5) + 8 + (13 + 21) + 34 + (55 + 89) + 144 =$
$= (2 + 2) + (8 + 8) + (34 + 34) + (144 + 144) =$
$= 2 \cdot (2 + 8 + 34 + 144) =$
$= 2 \cdot 188 = 376$

Ninka tak dostane výsledok 376.

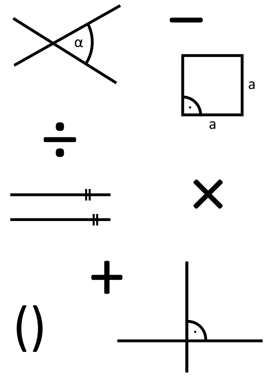
Úloha 02. *Osemsmerovka je hlavolam zložený z mriežky s písmenkami. Cieľom je nájsť slová ukryté v mriežke písmen. Slová pritom môžu byť vodorovne, zvislo alebo diagonálne. Hľadané slová sú uvedené vedľa mriežky. Po nájdení všetkých slov zostanú neškrtnuté písmená. Tie, keď prečítame zľava doprava, zhora nadol, dostaneme riešenie osemsmerovky.*
Kubo nakreslil jednu takú osemsmerovku, v ktorej sa slova neprekrývali. Nechcelo sa mu však vypísať slová, ktoré sa v nej dajú nájsť. Napravo od osemsmerovky preto napísal iba značky znamienok alebo nakreslil geometrické pojmy.
Koľko písmen v mriežke nie je súčasťou žiadneho pojmu nakresleného vedľa Kubovej osemsmerovky?

R	O	V	N	O	B	E	Ž	K	Y
I	Š	Z	D	E	L	E	N	O	D
E	T	Á	V	P	Á	M	K	T	O
S	V	T	U	P	L	R	E	R	L
E	O	V	N	T	Á	U	A	K	M
Ď	R	O	A	T	U	L	S	Í	E
J	E	R	D	R	Ž	H	N	Í	M
E	C	K	V	Á	M	U	O	P	A
L	C	Y	E	O	S	R	G	L	O
K	O	L	M	I	C	A	V	I	A



Výsledok: 45
Riešenie: Najprv pomenujme matematické pojmy: uhol, mínus, deleno, štvorec, rovnobežky, krát, plus, zátvorka, kolmica. Následne nájdime a vyznačme slová v osemsmerovke a spočítajme písmená, ktoré nie sú súčasťou žiadneho pojmu. Avšak môžeme sa vyhnúť hľadaniu slov v osemsmerovke. Máme 10 riadkov po 10 písmenách, teda celkovo v osemsmerovke je 100 písmen. Keďže zo zadania vieme, že písmena v Kubovej osemsmerovke sa neprekrývali, stačí nám spočítať, že sme použili 55 písmen. Na základe toho môžeme vydedukovať, že nepoužitých písmen bude 100 - 55 = 45.

R	O	V	N	O	B	E	Ž	K	Y
I	Š	Z	D	E	L	E	N	O	D
E	T	Á	V	R	Á	M	K	T	O
S	V	T	U	P	L	R	E	R	L
E	O	V	N	T	Á	U	A	K	M
Ď	R	O	A	T	U	L	S	Í	E
J	E	R	D	R	Ž	H	N	Í	M
E	C	K	V	Á	M	U	O	P	A
L	C	Y	E	O	S	R	G	L	O
K	O	L	M	I	C	A	V	I	A

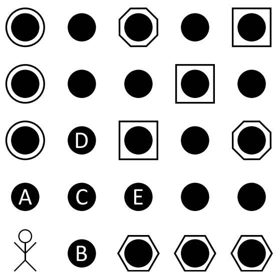


Úloha 03. *Anička zdedila po svojom starom otcovi hrubú knihu o ovocných stromoch. Strany tejto knihy sú očíslované číslami od 1 do 498. Aničku však viac ako ovocné stromy zaujíma matematika, a tak spočítala, koľkokrát sa v číslach strán nachádza cifra nula. Koľko cifier nula Anička napočítala?*

<u>Výsledok:</u> 89
<u>Riešenie:</u> V číslach od 1 do 498 sa cifra 0 môže nachádzať iba na mieste jednotiek alebo na mieste desiatok. Postupne spočítame počet výskytov nuly na týchto pozíciách.
Na mieste jednotiek sa cifra 0 vyskytuje v číslach 10, 20, 30, ..., 490. Tie majú taký tvar, že ak škrtneme nulu, tak dostaneme niektoré z čísel 1 až 49. Nula je tak na mieste jednotiek presne 49-krát.
Na mieste desiatok sa cifra 0 vyskytuje v číslach 100, 101, ..., 109, 200, 201, ..., 409. Ak nulu na mieste desiatok škrtneme v týchto číslach, tak dostaneme čísla od 10 do 49. Cifra 0 je preto na mieste desiatok 40-krát.
V celej knihe je tak cifra 0 použitá 49 + 40 = 89-krát.

Úloha 04. *Aktívny turista Jožko je na túre v monokultúrnom lese. V ňom je vysadených 25 stromov, ktoré presne tvoria mriežku 5 × 5. Keďže sa chce po lese poriadne porozhliadnuť, vytiahne svoju príručnú sekeru, vyrúbe jeden zo stromov v rohu tejto mriežky a postaví sa na peň, ktorý po tomto strome zostal. Koľko stromov odtiaľ uvidí? Poznámka: Jožko nevidí stromy, ktoré sú presne za inými stromami.*

<u>Výsledok:</u> 13
<u>Riešenie:</u> Jožko nevidí stromy, ktoré sú presne za inými stromami. To znamená, že ak na priamke danej Jožkovým pňom a iným stromom leží viacero stromov, Jožko uvidí len ten prvý z nich. Z obrázku teda vidíme, že strom A zakryje Jožkovi stromy vyznačené krúžkami, strom B mu zakryje stromy vyznačené štvorčekmi a strom C mu zakryje stromy vyznačené šesťuholníkmi. Nakoniec, stromy D a E mu zakryjú stromy vyznačené osemuholníkmi. Všetky nevyznačené stromy Jožko uvidí – tých je 13.



Úloha 05. *Kubo je od prírody romantik, a preto vie, čo sa patrí robiť na sviatok svätého Valentína. Chce Hanku obdarovať kyticou. Keďže je mu Hanka drahá, chce na kyticu minúť práve 50 eur. Vošiel teda do blízkeho kvetinárstva, kde predávajú len ruže po 3 eurách za kus a gerbery po 2 eurách za kus. Koľko rôznych kytíc môže Kubo pre Hanku kúpiť?*

Výsledok: 9
Riešenie: Najjednoduchší spôsob, ako môže Kubo kyticu vyskladať, je, že kúpi 25 gerber po 2 eurá. Jediná možnosť, ako môže do kytice zakomponovať aj nejaké ruže, je, že tri z týchto gerber nahradí dvoma ružami – cena zostane rovnaká, 50 eur. Keďže pôvodne je gerber 25, takýmto spôsobom ich môže odstrániť osemkrát, kedy mu po poslednom odstránení zostane 1 gerbera a 16 ruží. Vtedy už, ako vidíme, nemá aké gerbery ďalej nahrádzať. Dokopy teda môže vyskladať 1 + 8 = 9 rôznych kytíc.

Úloha 06. *Keď Marek v škole neposlúcha, núti ho pani učiteľka písať na tabuľu dookola tie isté výroky o tom, ako už bude poslúchať. Minule však počas hodiny občianskej náuky začal Marek písať dookola výroky úplne dobrovoľne, do vlastného zošita. Dokopy ich napísal presne 42. Boli to tieto:*
„Aspoň 2 z týchto výrokov sú pravdivé."
„Aspoň 3 z týchto výrokov sú pravdivé."
„Aspoň 4 z týchto výrokov sú pravdivé."
...
„Aspoň 43 z týchto výrokov je pravdivých."
Koľko z týchto výrokov je pravdivých?

Výsledok: 0
Riešenie: S istotou vieme povedať, že posledný výrok je nepravdivý – keďže všetkých výrokov je dohromady iba 42, nemôže ich byť pravdivých 43. Avšak, ak je tento štyridsiaty druhý výrok nepravdivý, znamená to, že nám ostáva len 41 ďalších výrokov, ktoré môžu byť pravdivé. To znamená, že aj štyridsiaty prvý výrok bude nepravdivý, lebo hovorí, že pravdivých ich je aspoň 42, čo už nie je dosiahnuteľné. Ak túto úvahu zopakujeme 42-krát, vždy pre nižšie a nižšie výroky, dospejeme k tomu, že aj prvý výrok musí byť nepravdivý. Teda pravdivých je 0 výrokov.

Úloha 07. *Nina s Maťkom sa stále v niečom predbiehajú. Minule sa predbiehali v tom, kto bude stáť v rade viacej vpredu. Dopadlo to tak, že za Ninou stálo v rade práve 16 ľudí, medzi ktorými bol aj Maťko. Pred Maťkom pre zmenu stálo presne 14 ľudí. Medzi Ninou a Maťkom stálo práve 7 ľudí. Koľko ľudí stálo v rade?*

Výsledok: 23
Riešenie: Keďže medzi Ninou a Maťkom stálo 7 ľudí, za Maťkom musí stáť ešte ďalších 16 - 7 - 1 = 8, aby ich za Ninou mohlo byť dokopy 16. Pred Ninou zasa musí byť ešte ďalších 14 - 7 - 1 = 6, aby ich pred Maťkom bolo dokopy 14. Dokopy teda rad odpredu vyzerá nasledovne: 6 ľudí, 1 Nina, 7 ľudí, 1 Maťko, 8 ľudí. Keď ich všetkých sčítame, dostávame 6 + 1 + 7 + 1 + 8 = 23 ľudí v rade.

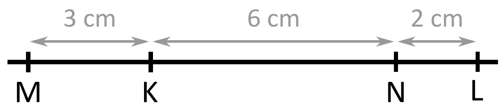
Úloha 08. *Stano sa rozhodol, že usporiada parádnu párty! Pre svojich pár parťákov podával párky z preparovaných párnokopytníkov. Tí mu na to povedali, že je teda riadne číslo...V tom okamihu sa Stano tuho zamyslel a zistil, že keby všetky tieto páry vynásobil, bolo by z toho riadne číslo! Pomôžte Stanovi ohľadom súčinu všetkých párnych čísel od 2 do 100. Koľkými nulami sa bude končiť tento súčin?*

Výsledok: 12

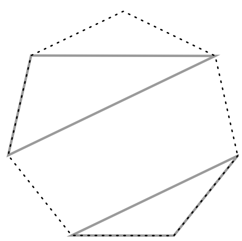
Riešenie: Nula na konci súčinu vznikne za každé číslo 10, ktorým sa dá výsledný súčin vydeliť. Vieme, že $10 = 2 \cdot 5$. Takže počet núl zodpovedá menšiemu z počtu dvojok, resp. pätiek, ktorými vieme výsledný súčin vydeliť. Dvojok je vo výslednom súčine veľmi veľa – násobíme 50 rôznych párnych čísel, takže dvojok máme určite viac ako 50. Viac nás teda obmedzuje počet pätiek. Párne násobky päťky od 2 do 100 sú len 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 a 100. Za každý z nich máme jednu nulu na konci. Všimnime si však, že medzi týmito číslami sú aj nejaké násobky 25, konkrétne 50 a 100. Tie preto prispievajú ďalšou nulou (v prípade 100 je to jasné hneď, v prípade 50 to vidno po vynásobení nejakým iným párnym číslom, napríklad číslom 2, kedy $2 \cdot 50 = 100$).
Zo spomenutých čísel tak 8 z nich prispieva do súčinu jednou nulou a 2 z nich prispievajú dvomi nulami. Spolu sa teda súčin končí $8 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 12$ nulami.

Úloha 09. *Laura sa ako každé správne dieťa rada hráva v kuchyni. Tento raz si zobrala fixky a začala si nimi čarbať na kredenc. Nakreslila naň 4 body: K, L, M a N. Keďže je zvedavým dieťaťom, hneď začala merať vzdialenosti medzi niektorými z týchto bodov a namerala nasledovné: |KL| = 8 cm, |KM| = 3 cm, |KN| = 6 cm, |LN| = 2 cm a |MN| = 9 cm. Potom jej však mama zhabala pravítko a poslala ju do izby, preto Laura nestihla zistiť, aká je vzdialenosť bodov L a M. Spočítajte to pre ňu!*

Výsledok: 11 cm
Riešenie: Pozrime sa pozorne na body K, N a L. Vzdialenosti medzi dvojicami týchto bodov sú 6 cm, 2 cm a 8 cm. Všimnime si, že tu neplatí trojuholníková nerovnosť a dve kratšie z týchto strán sa sčítajú presne do dĺžky tej tretej: 6 cm + 2 cm = 8 cm. To znamená, že 8-centimetrová úsečka KL sa skladá práve z 2-centimetrovej úsečky LN a 6-centimetrovej úsečky KN, teda všetky tri body K, L a N ležia na tej istej priamke. Rovnakým postupom si všimnime, že pre body K, N a M, ktorých vzdialenosti dvojíc bodov sú 3 cm, 6 cm a 9 cm tiež platí, že 3 cm + 6 cm = 9 cm. Teda aj tieto body ležia na jednej priamke. Z toho vyplýva, že na jednej priamke ležia všetky štyri body. Z toho, že N leží medzi K a L a K leží medzi M a N vieme usúdiť, že body na tejto priamke ležia v poradí M, K, N, L. Vzdialenosť |ML| potom vieme určiť napríklad sčítaním vzdialeností |MK| + |KL| = 3 cm + 8 cm = 11 cm.



Úloha 10. *Majo si upiekol svoju obľúbenú pizzu v tvare pravidelného 7-uholníka. Keď ju vytiahol z pece, rozhodol sa ju narezať. To spravil tak, že zobral dve trojice vrcholov tohto 7-uholníka a spravil rez nožom medzi všetkými troma bodmi v rámci jednej trojice. Vznikli mu tak 2 narezané trojuholníky – pre každú trojicu jeden. Majo je však pedant, a preto ich narezal tak, že tieto dva trojuholníky nemali ani jeden spoločný bod (teda zároveň žiaden spoločný vrchol). Koľkými spôsobmi mohol Majo narezať pizzu?*
Poznámka: Jeden taký spôsob narezania pizze môžeš vidieť na obrázku:



Výsledok: 84

<u>Riešenie:</u> Zo siedmich vrcholov 7-uholníka Majo použije iba 2 · 3 = 6 na vrcholy trojuholníkov. To znamená, že vždy jedným z vrcholov nebude prechádzať ani jeden trojuholník. Je 7 možností toho, ktorý bod to môže byť. Teraz ostáva určiť, koľkými spôsobmi vieme spojiť zvyšných 6 vrcholov do dvoch trojuholníkov podľa daných pravidiel. Predstavme si týchto 6 vrcholov 7-uholníka ako vrcholy nepravidelného 6-uholníka, do ktorého ideme narezať tie dva trojuholníky. Ak chceme dosiahnuť, aby trojuholníky nemali žiadne spoločné body, musíme oba vytvoriť pomocou trojice susediacich vrcholov tohto 6-uholníka. Tým, že budeme tieto trojice okolo 6-uholníka otáčať, vieme dostať 3 rôzne možnosti, ako takéto trojuholníky vieme vytvoriť.
Teda máme 7 možností na to, ktorý vrchol 7-uholníka vyberieme ako nepoužitý, a následne máme 3 možnosti, ako vieme zo zvyšných šiestich vrcholov narezať dva trojuholníky. To nám dáva dohromady 7 · 3 = 21 možností.

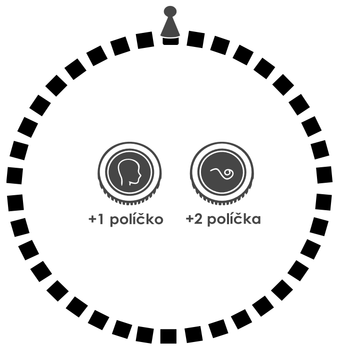
Úloha 11. *Skupina kamarátov sa hrá nasledovnú hru: sedia v kruhu a hovoria pravdivé tvrdenia, ktoré im práve napadnú. Jeden z nich počas tejto hry povedal vetu: „Žiadni dvaja z nás sa nenarodili v rovnaký deň v týždni.“ Koľko najviac kamarátov mohlo sedieť v krúžku?*

<u>Výsledok:</u> 7
<u>Riešenie:</u> Ak by bolo kamarátov 7, mohli by sa všetci narodiť v iný deň v týždni. Ak by sme pridali ôsmeho, nezostáva nám žiaden deň, v ktorý by sa mohol tento ôsmy narodiť, aby sa v ten deň už nenarodil iný kamarát. Teda najviac môže byť kamarátov 7.

Úloha 12. *Kai sa jedného dňa rozhodol šifrovať slova do palindrómov. Robí to tak, že slovo prekonvertuje do čísiel. Robí to takým spôsobom, že písmenu priradí jeho poradové číslo v abecede. Takže napríklad A je 1, B je 2, ..., Z je 26 (písmena s diakritikou píše ako variant bez nej). Následne z čísla, ktoré dostal, vyčiarkne všetky párne cifry. Chcel by po tom dostať číselný palindróm. No zistil, že to nefunguje pre všetky slová. Pre ktoré zo slov AUTO, REZEŇ, KARTA, OPICA, PIERKO dostane číselný palindróm?*
Poznámka: Palindróm je číslo, ktoré sa číta rovnako spredu ako odzadu. Napríklad číslo 12321 je palindróm.

<u>Výsledok:</u> REZEŇ, KARTA
<u>Riešenie:</u> Najprv si zopakujme, že párne cifry sú 0, 2, 4, 6 a 8.
No a teraz poďme šifrovať slova. Zo slova AUTO po nahradení písmen poradím, v akom sú v abecede (A je 1, U je 21, T je 20 a O je 15), dostávame číslo 1212015. Vyčiarknime parné cifry 2 a 0 – zostáva nám 1115, čo nie je palindróm. Rovnako upravíme ostatné slová:
REZEŇ → 18526514 → 1551
KARTA → 11118201 → 11111
OPICA → 1516931 → 151931
PIERKO → 1695181115 → 19511115
Palindrómy sme dostali len zo slov rezeň (1551) a karta (1111).

Úloha 13. *Mirko sa nerád hnevá. Preto, keď je osamelý, hrá sa sám so sebou hru človeče, nehnevaj sa. Jeho človeče pozostáva z 38 políčok usporiadaných do kruhu. Mirko na jedno z políčok postaví figúrku. Keďže nemá po ruke kocku, používa miesto toho mincu, a to nasledovným spôsobom: Vždy si hodí mincou a keď na minci padne znak, pohne figúrku o 2 políčka, inak pohne figúrku o 1 políčko. Po26 hodoch mincou sa Mirkovi stalo, že figúrka skončila presne na tom istom políčku, na ktorom začala. Koľkokrát Mirkovi padol na minci znak?*



<u>Výsledok:</u> 12

<u>Riešenie:</u> Ak by Mirkovi padali iba čísla (teda vždy sa hýbal o jedno políčko), dostal by sa na štartovné políčko za 38 ťahov. Ak by Mirko miesto dvoch čísel hodil jeden znak (teda by mu dokopy padlo 36 čísel a 1 znak), stále by sa dokopy pohol o 38 políčok, avšak tento raz by mu to zabralo len 37 ťahov. Všimnime si, že za každý znak, ktorým „nahradíme" dve čísla, sa zmenší počet potrebných ťahov o 1. Z pôvodných 38 ťahov potrebujeme zmenšiť počet ťahov na 26, teda o 38 - 26 = 12 ťahov. To znamená, že dokopy muselo Mirkovi padnúť 12 znakov.

Úloha 14. *Možno ste už videli alebo dopĺňali krížovku, v ktorej vyplňujete prázdne políčka písmenami, ktoré vytvárajú slová na základe nápovied vo vyznačených štvorčekoch. Niektoré krížovky používajú nadbytočné políčka ako pomôcky pri vypĺňovaní niektorých riadkov a stĺpcov. My sme pre vás pripravili matematickú krížovku – ako nápovedy sme napísali čísla. Vaším cieľom je doplniť cifry a znaky operácií (+, -, ·, :) do prázdnych políčok tak, aby sa výsledok výpočtu v riadku či stĺpci rovnal číslu v nápovednom štvorčeku. Vyplňte krížovku a následne získate výsledok tejto úlohy v hornom vyznačenom riadku.*
Poznámka: Do každého prázdneho políčka tabuľky treba doplniť buď práve jednu cifru (0 až 9), alebo práve znak operácie (+, -, ·, :).

<table>
<tr><td>pomôcka:
18 = 12 + 6</td><td>27621
||</td><td>780
||</td><td>0
||</td><td>25
||</td><td>7
||</td><td>18
||</td><td>202
||</td><td>11235
||</td></tr>
<tr><td>tajnička =</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>266 =</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>30 =</td><td></td><td></td><td></td><td>17 =
31
||</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9 =</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>18 =
7
||</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>18517 =</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>25 =</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<u>Výsledok:</u> 21122111

Riešenie: Krížovku vieme vyplniť po niekoľkých úvahách.
Hneď vieme doplniť čísla, ktoré nám ukazujú iba rovnosť dvoch čísiel:

pomôcka: 18 = 12 + 6	27621 ‖	780 ‖	0 ‖	25 ‖	7 ‖	18 ‖	202 ‖	11235 ‖
tajnička =	2			2				1
266 =	7			5				1
30 =	6			17 = 31 ‖				2
9 =	2			3	18 = 7 ‖			3
18517 =	1	8	5	1	7	25 =	2	5

Poďme použiť pomôcku „18 = 12 + 6“. Vieme, že na ňu potrebujeme 4 políčka, preto ju použijeme v šiestom stĺpci. Výraz 12 + 6 napíšeme v poradí so 6 na spodku, lebo ak by sme ho napísali v opačnom poradí (6 + 12), nevieme dať medzi 2 a 3 žiadne znamienko, ktoré by správne vyriešilo štvrtý riadok. Na druhej strane, ak tam bude 6, na konci štvrtého riadku vieme napísať 18 = 3 · 6.

pomôcka: 18 = 12 + 6	27621 ‖	780 ‖	0 ‖	25 ‖	7 ‖	18 ‖	202 ‖	11235 ‖
tajnička =	2			2		1		1
266 =	7			5		2		1
30 =	6			17 = 31 ‖		+		2
9 =	2			3	18 = 7 ‖	6	·	3
18517 =	1	8	5	1	7	25 =	2	5

Z momentálnej situácie vidíme, že 17 dostaneme sčítaním dvojciferného čísla končiaceho 2 a jednociferného čísla. To musí byť 5 + 12.

pomôcka: 18 = 12 + 6	27621 ‖	780 ‖	0 ‖	25 ‖	7 ‖	18 ‖	202 ‖	11235 ‖
tajnička =	2			2		1		1
266 =	7			5		2		1
30 =	6			17 = 31 ‖	5	+	1	2
9 =	2			3	18 = 7 ‖	6	·	3
18517 =	1	8	5	1	7	25 =	2	5

Výsledok 7 získame použitím čísla 5 jednoducho tým, že k nej pripočítame 2. No a vieme usúdiť, že 202 dostaneme ako súčin 101 a 2. Ak by sme tam skúšali zakomponovať ešte jedno znamienko, najväčší výsledok by mohol byť 9 · 1 · 2 = 18.

<table>
<tr><td>pomôcka:
18 = 12 + 6</td><td>27621
||</td><td>780
||</td><td>0
||</td><td>25
||</td><td>7
||</td><td>18
||</td><td>202
||</td><td>11235
||</td></tr>
<tr><td>tajnička =</td><td>2</td><td></td><td></td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>266 =</td><td>7</td><td></td><td></td><td>5</td><td>+</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>30 =</td><td>6</td><td></td><td></td><td>17 =
31
||</td><td>5</td><td>+</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>9 =</td><td>2</td><td></td><td></td><td>3</td><td>18 =
7
||</td><td>6</td><td>·</td><td>3</td></tr>
<tr><td>18517 =</td><td>1</td><td>8</td><td>5</td><td>1</td><td>7</td><td>25 =</td><td>2</td><td>5</td></tr>
</table>

Teraz potrebujeme 6 zväčšiť na 30, to urobíme tak, že ju prenásobíme 5. Následne vieme, že 9 dostaneme nejakou operáciou medzi dvojciferným a jednociferným číslom. Ak by to bolo sčítavanie, násobenie alebo odčítavanie dostaneme určite dvoj alebo trojciferný výsledok, čo nechceme. Zostáva nám teda možnosť deliť dvojciferné číslo trojkou, takže dostávame 27 : 3 = 9.

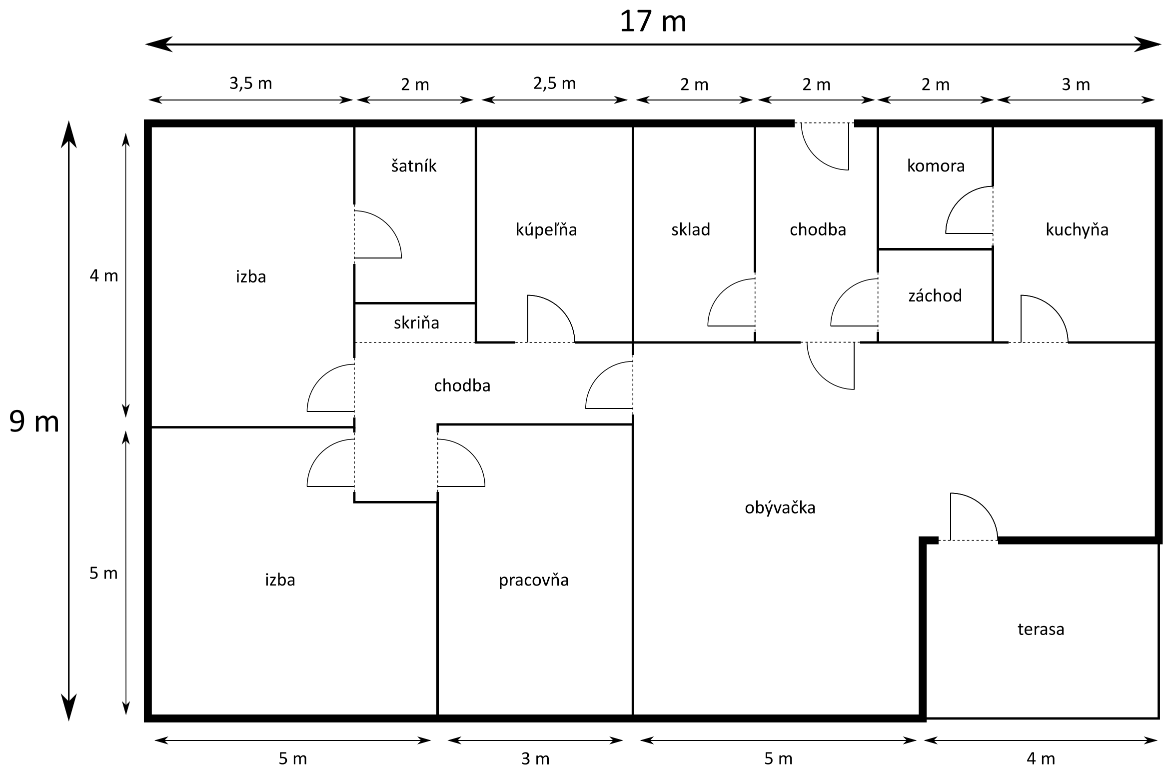
<table>
<tr><td>pomôcka:
18 = 12 + 6</td><td>27621
||</td><td>780
||</td><td>0
||</td><td>25
||</td><td>7
||</td><td>18
||</td><td>202
||</td><td>11235
||</td></tr>
<tr><td>tajnička =</td><td>2</td><td></td><td></td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>266 =</td><td>7</td><td></td><td></td><td>5</td><td>+</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>30 =</td><td>6</td><td>·</td><td>5</td><td>17 =
31
||</td><td>5</td><td>+</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>9 =</td><td>2</td><td>7</td><td>:</td><td>3</td><td>18 =
7
||</td><td>6</td><td>·</td><td>3</td></tr>
<tr><td>18517 =</td><td>1</td><td>8</td><td>5</td><td>1</td><td>7</td><td>25 =</td><td>2</td><td>5</td></tr>
</table>

Na záver robíme úvahy, že 78 musíme prenásobiť 10 (aby sme dostali 780). A keďže delenie má prednosť (5 : 5) musíme odčítať tento podiel odčítať od 1, aby sme dostali 0.

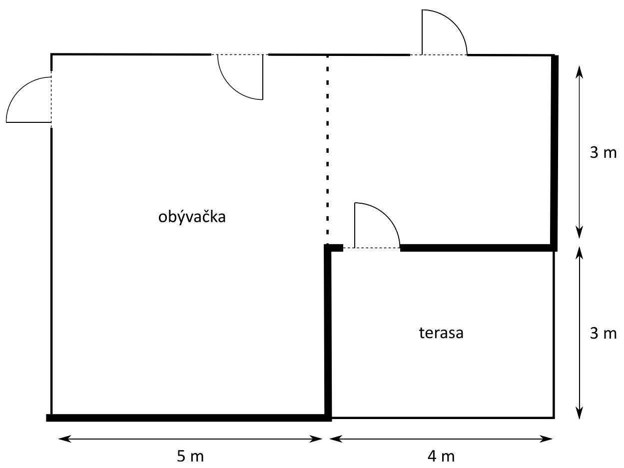
<table>
<tr><td>pomôcka:
18 = 12 + 6</td><td>27621
||</td><td>780
||</td><td>0
||</td><td>25
||</td><td>7
||</td><td>18
||</td><td>202
||</td><td>11235
||</td></tr>
<tr><td>tajnička =</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>266 =</td><td>7</td><td>0</td><td>-</td><td>5</td><td>+</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>30 =</td><td>6</td><td>·</td><td>5</td><td>17 =
31
||</td><td>5</td><td>+</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>9 =</td><td>2</td><td>7</td><td>:</td><td>3</td><td>18 =
7
||</td><td>6</td><td>·</td><td>3</td></tr>
<tr><td>18517 =</td><td>1</td><td>8</td><td>5</td><td>1</td><td>7</td><td>25 =</td><td>2</td><td>5</td></tr>
</table>

Dostávame tajničku 21122111.

Úloha 15. *Jurovi nevyšiel experiment s kyselinou a časť podlahy v pracovni má zničenú. Povedal si teda, že si v pracovni vymení parkety. Spotreboval na to presne 5 balení parkiet. Zistil, že menenie parkiet ho celkom baví. A keďže sa mu nepáčila podlaha ani v obývačke, rozhodol sa vymeniť parkety aj tam. Koľko balení parkiet bude Juro potrebovať v obývačke?*
Poznámka: Juro je fakt macher, preto vie vyplniť pracovňu aj obývačku parketami tak, že mu nezvýši žiaden odpad.



Výsledok: 14
Riešenie: Jurova pracovňa má plochu 3 m · 5 m = 15 m². Ak na jej vyparketovanie spotreboval 5 balení, znamená to, že jedno takéto balenie parkiet vystačí na (15 m²) : 5= 3 m².
Teraz už len potrebujeme zistiť, koľko m² má Jurova obývačka. Ak si ju rozdelíme na pravú a ľavú časť ako na obrázku, dostaneme dva obdĺžniky.



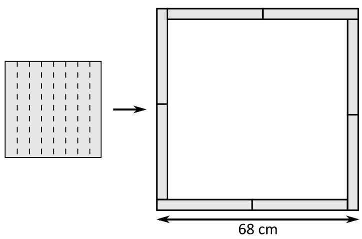
Ten pravý bude mať plochu 3 m · 4 m = 12 m² a ten ľavý bude mať plochu 5 m · 6 m = 30 m². Jurova obývačka má teda celkovú plochu 12 m² + 30 m² = 42 m². A keďže jedno balenie parkiet nám vystačí na 3 m², Juro bude na svoju obývačku potrebovať 42 m² : 3 m² = 14 balení parkiet.

Úloha 16. *Stano nevie zaokrúhľovať. Nedá sa nič robiť, musí si vymyslieť vlastný spôsob zaokrúhľovania na desiatky. Konkrétne si vezme číslo, škrtne všetky cifry okrem prvej zľava a výsledné číslo vynásobí ciferným súčtom pôvodného čísla (teda pred škrtnutím). Bol však upozornený, že takto len zriedkavo dostane rovnaký výsledok ako zaokrúhlením na desiatky. Pre ktoré najväčšie ešte nezaokrúhlené a nevyškrtané číslo dostane Stano rovnaký výsledok ako zaokrúhlením na desiatky?*

Výsledok: 91

Riešenie: Číslo zaokrúhlené na desiatky sa končí nulou, a teda je násobkom čísla 10. Vychádzajúc z toho, že násobok 10 je aj násobkom 5 a 2, môžeme to dosiahnuť týmito možnosťami:
možnosť A: prvá cifra bude 5 a ciferný súčet bude párny,
možnosť B: ciferný súčet bude násobok 10,
možnosť C: ciferný súčet bude násobok 5 a prvá cifra bude párna.
Ak by sme rovnaké výsledky mohli dostať len pre dvojciferné čísla, najväčšie dvojciferné číslo, pre ktoré to platí, by bolo 91. Vtedy totiž dostaneme číslo $9 \cdot (9 + 1) = 90$, čo je správny výsledok zaokrúhlenia čísla 91 na desiatky. Dvojciferné čísla s menšou cifrou na mieste desiatok sú menšie. Navyše, dvojciferné číslo nemôže mať ciferný súčet 20, lebo ak by aj malo na oboch miestach najväčšiu možnú cifru, jeho ciferný súčet by bol $9 + 9 = 18$.
Zhodou okolností, ak si rozoberieme možnosti A, B, C, vieme zistiť, že číslo, pre ktoré nastáva rovnosť výsledkov, môže byť len dvojciferné.
Predpokladajme, že by bolo trojciferné. V možnosti A, ak sa takéto číslo začína cifrou 5, tak najväčšie číslo, ktoré môžeme dostať Stanovým zaokrúhlením, je $5 \cdot (5 + 9 + 9) = 115$. No žiadne menšie trojciferné číslo ako 115 sa nezačína cifrou 5.
Pre špeciálne prípady v možnostiach B a C, ak je ciferný súčet 5 alebo 10, tak najväčšie číslo, ktoré môžeme dostať (ak by aj prvá cifra bola 9), je $9 \cdot 10 = 90$, čo nie je trojciferné číslo.
Zostávajúce prípady možnosti B a C, ak je ciferný súčet 15, 20 alebo 25 (viac nemôže byť, lebo najväčší možný ciferný súčet je $9 + 9 + 9 = 27$). Potom najväčšie číslo, ktoré vieme dostať Stanovým zaokrúhlením, je $9 \cdot 25 = 225$.
Lenže všetky čísla, ktoré majú prvú cifru párnu a sú menšie ako 225, majú ciferný súčet menší ako 15. Tie, ktoré ju nemajú párnu (teda 1), porušujú požiadavku možnosti C a zároveň ich ciferný súčet je menší ako 20 (lebo $1 + 9 + 9 = 19$). Takže medzi trojcifernými číslami nenájdeme žiadne vyhovujúce číslo. Podobne by sme uvažovali aj pri viacciferných číslach.
Správna odpoveď je tak dvojciferné číslo 91.

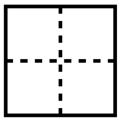
Úloha 17. *Miška doma našla štvorcový kus látky. Rozhodla sa ho rozstrihať na 8 rovnako širokých prúžkov. Tie potom uložila tak ako na obrázku. Vyznačená strana výsledného útvaru má dĺžku 68 cm. Aká bola dĺžka strany pôvodného štvorcového kusu látky?*



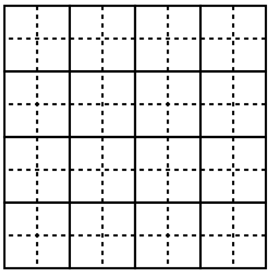
Výsledok: 32 cm

Riešenie: Každá strana výsledného útvaru je rovnako dlhá, ako 2 strany pôvodného štvorca a ešte jeden malý kúsok. Tento malý kúsok je veľký ako osmina strany pôvodného štvorca. Ak by strana výsledného útvaru bola osemkrát dlhšia, jej dĺžka by bola $8 \cdot 68$ cm = 544 cm. Zároveň o nej vieme povedať, že bude zložená z $8 \cdot 2 = 16$ pôvodných strán štvorca a z ôsmich osminových časti pôvodnej strany štvorca, čo je spolu jedna celá strana. Z toho vieme povedať, že osemkrát zväčšená strana pôvodného útvaru je zložená z 17 strán pôvodného štvorca. Preto ak 17 dĺžok strany štvorca meria 544 cm, tak jedna strana štvorca meria 544 cm : 17 = 32 cm.

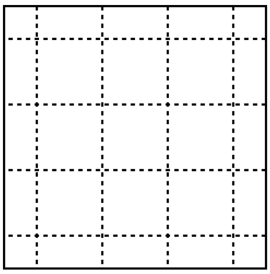
Úloha 18. *Kaja sa nedávno priučila umeniu origami. Od rána do večera skladá papier do komplikovaných obrazcov. Nedávno vystrihla z papiera štvorec so stranou dlhou 4 cm. Preložila ho na polovicu po dĺžke a následne na polovicu po šírke, čím získala štvorec 2 cm × 2 cm. Proces zopakovala, a tak jej vznikol štvorec so stranou dĺžky 1 cm. Tento štvorec potom rozstrihla po čiarkovanej čiare tak, ako je naznačené na obrázku. Na koľko samostatných kúskov sa papier rozpadne?*



Výsledok: 25
Riešenie: Keby sme po rozstrihnutí opäť rozložili papier, dostali by sme papier ako na tomto obrázku (čierne čiary zodpovedajú ohybom papiera a čiarkované čiary zodpovedajú miestam, kade viedol strih papierom):



Prípadne ak z obrázka zmažeme ohyby papiera:

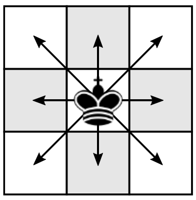


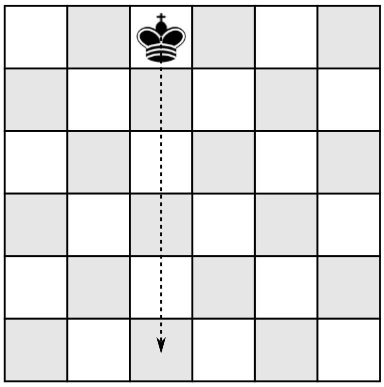
Na tomto obrázku ľahko spočítame, že papier sa rozpadne na 25 kúskov.
Poznámka: Týchto 25 kúskov zodpovedá 25 mrežovým bodom mriežky 4 × 4 (okolo každého z nich vznikol jeden kúsok).

Úloha 19. *Terka si na papier píše čísla. Začne trojciferným číslom. Každé ďalšie číslo, ktoré napíše, sa rovná súčinu cifier predošlého čísla. Takto pokračuje, až kým nenapíše nejaké jednociferné číslo. Takže napríklad ak začne číslom 428, tak postupne napíše čísla 428 → 64 → 24 → 8. Koľkými rôznymi trojcifernými číslami môže Terka začať, aby skončila číslom 9?*

Výsledok: 6
Riešenie: Najväčšie číslo, ktoré vie Terka dostať vynásobením cifier trojciferného čísla, je $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. Terka preto nikdy nenapíše číslo, ktoré by malo viac ako 3 cifry.
Na úlohu sa pozrime od konca, t.j. zistime, ktoré čísla mohli byť pred číslom 9. Z dvojciferných čísel to sú čísla 19, 33 a 91. Z trojciferných čísel zas čísla 119, 133, 191, 313, 331 a 911. Tým sme našli prvých 6 čísel, ktorými mohla Terka začať. Otázkou je, či Terka mohla začať nejakým iným číslom a dopracovať sa k niektorému z čísel 19, 33, 91, 119, 133, 191, 313, 331 a 911. Zdôvodníme, že k týmto číslam sa Terka nevedela dostať.
K tomu si všimnime zaujímavú vlastnosť - keďže ďalšie čísla vždy dostávame ako súčin cifier, tak vieme dostať iba číslo 0 a čísla, ktoré sú súčinom prvočísel 2, 3, 5 a 7 (ostatné cifry vieme napísať ako súčin týchto, s výnimkou jednotky, ktorá ale nič nerobí).
Overiť túto vlastnosť je pomerne jednoduché. Vezmeme si číslo a delíme ho postupne dvojkou, kým sa dá. Potom ho delíme trojkou, potom päťkou a napokon sedmičkou. Ak na konci dostaneme číslo 1, tak bola nádej, že toto číslo Terka mohla dostať. Ak jednotku nedostaneme, vieme s istotou povedať, že Terka toto číslo nemohla dostať.
Keď toto spravíme postupne s číslami 19, 33, 91, 119, 133, 191, 313, 331 a 911, tak postupne skončíme na číslach 19, 11, 13, 17, 19, 191, 313, 331, 911. Vďaka tomu vieme vyhlásiť, že žiadne z týchto čísel Terka po prvom násobení cifier nedostane.
Takže Terka mohla začať iba s číslami 119, 133, 191, 313, 331 a 911, čo je 6 čísel.

Úloha 20. *Teo sa hral s kráľom na šachovnici 6 × 6. Kráľ sa po šachovnici hýbe ako na obrázku vľavo. Teo už bol ale trochu znudený, a tak sa rozhodol urobiť z toho matematickú úlohu. Postavil teda kráľa na tretie políčko zľava v hornom riadku (viď obrázok) a rozhodol sa zistiť, koľkými spôsobmi sa vie dostať za 5 ťahov na políčko v spodnom riadku a rovnakom stĺpci ako na začiatku. Koľko takýchto navzájom rôznych ciest existuje?*





Výsledok: 51

Riešenie: Políčko, na ktoré sa má kráľ dostať, je o 5 políčok nižšie. Aby sa tam vôbec dostal, tak sa musí v každom ťahu pohnúť o 1 políčko smerom nadol. Kreslime si nasledovný diagram, ktorý zachytáva počet možností, ako sa na dané políčko vie kráľ dostať, ak sa bude pohybovať iba šikmo doľava dole, priamo dole alebo šikmo doprava dole (počet možností, ako sa môže kráľ dostať na príslušné políčko je súčtom možností, ako sa môže dostať na políčka, z ktorých sa môže dostať na toto políčko):

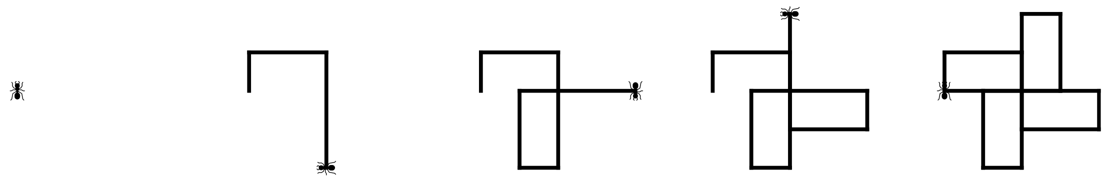
		♚			
	1	1	1		
1	2	3	2	1	
3	6	7	6	3	1
9	16	19	16	10	4
25	44	**51**	44	30	14

Z tohto vidíme, že na požadované políčko sa vie kráľ dostať 51 rôznymi spôsobmi.

Úloha 21. *Šimon nedávno objavil zdravý životný štýl! Keďže je však zaneprázdnený matematik, musí často posilňovať a pripravovať zdravú stravu úplne naraz. Raz sa počas prípravy svojho banánového smoothie zamyslel, koľko gramov jeho biceps zdvíha, keď svoj pohár s objemom 500 ml a hmotnosťou 80 g úplne celý naplní ošúpanými banánmi. O jednom banáne vie, že celý (aj so šupkou) váži 100 g, bez šupky má objem 100 ml a šupka tvorí štvrtinu celkovej hmotnosti banánu. Zistite pre Šimona, koľko gramov váži pohár takto naplnený ošúpanými banánmi.*

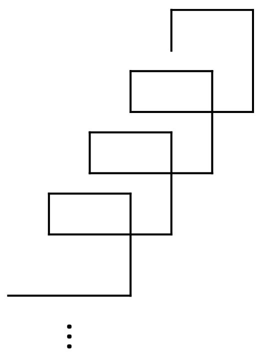
Výsledok: 455
Riešenie: Do 500-mililitrového pohára sa zmestí päť 100-mililitrových ošúpaných banánov. Vieme, že jeden takýto banán aj so šupkou váži 100 gramov. Keďže šupka tvorí štvrtinu hmotnosti banánu, znamená to, že šupka bude vážiť 100 g : 4 = 25 g. Teda jeden banán bez šupky bude vážiť 100 g - 25 g = 75 g. Päť ošúpaných banánov v pohári preto bude dokopy vážiť 5 · 75 g = 375 g. Nakoniec k tejto hmotnosti ešte pripočítame hmotnosť pohára a dostaneme, že celková hmotnosť je 375 g + 80 g = 455 g.

Úloha 22. *Péder pri poslednej prechádzke lesom objavil mravce, čo sa čudne pohybujú do zaujímavo pospájaných štvorcov a obdĺžnikov. Vždy prejdú pár krokov rovno a potom zabočia o 90° doprava. Nejaké mravce sa takto svojím pohybom zacyklia a po čase opakujú svoju predošlú cestu, iní sa pohybujú stale ďalej a ďalej od miesta, kde začali.*
Napríklad mravec Majko vždy robí 1, 2 a potom 3 kroky. To znamená, že jeho pohyb vyzerá nasledovne: jeden krok, otočka o 90° doprava, dva kroky, otočka o 90° doprava, tri kroky, otočka o 90° doprava, jeden krok, otočka o 90° doprava, dva kroky… Jeho pohyb môžeš vidieť aj na obrázku:

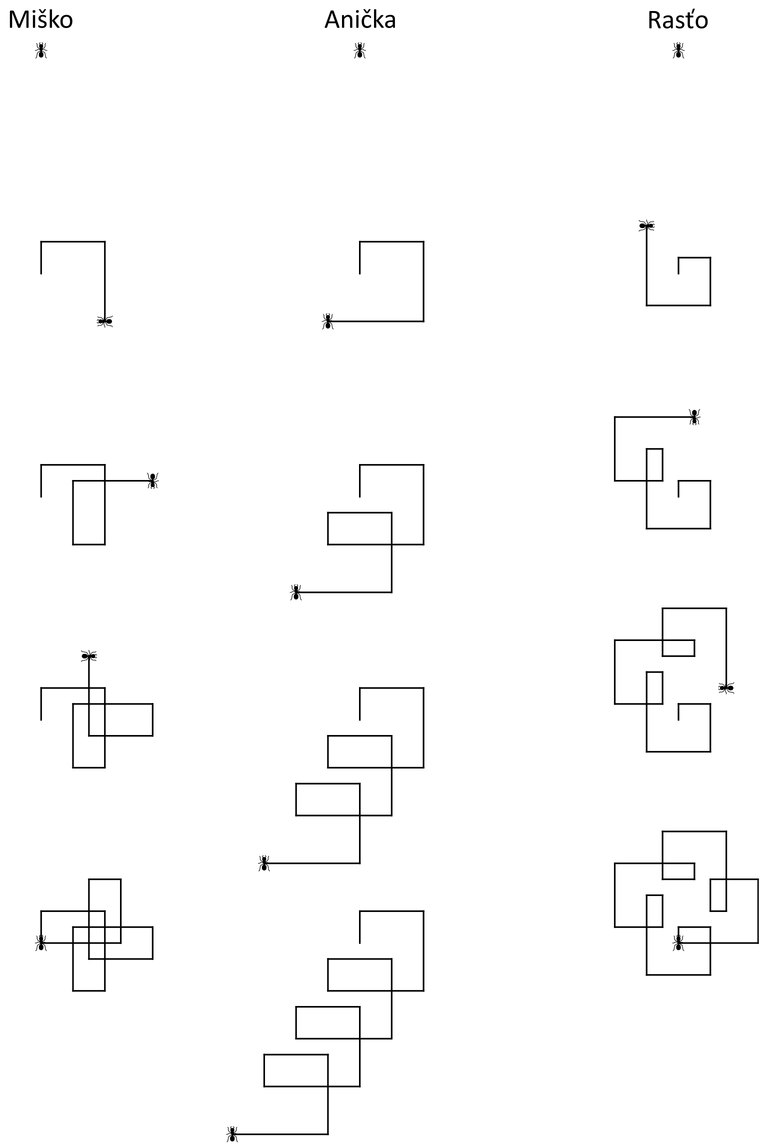


Mravec Miško sa pohybuje rovnako, akurát on robí 2, 4 a 5 krokov.
Mravec Anička opakuje po Miškovi a na koniec pridá ešte 6 krokov, takže jej postupnosť je 2, 4, 5, 6.
Napokon mravec Rasťo opakuje po Majkovi, ale robí toho ešte viac. Jeho postupnosť vyzerá 1, 2, 3, 4, 5.
Ktorý z mravcov sa bude pohybovať stále ďalej a ďalej od miesta, kde začal, a teda nebude po nejakom čase opakovať svoju predošlú trasu? Ukážte opravovateľovi aj náčrt trasy tohto mravca.

Výsledok: Anička



Riešenie: Útvary, ktoré takto nakreslíme sa nazývajú spirolaterála. Ako vidíme na obrázku, aj Miško aj Rasťo sa zacyklia na peknom obrazci, no Anička pôjde ďalej. Je to tak preto, že po prejdení svojej trasy sa Miško a Rasťo vrátia na miesto kde začali a budú otočení rovnakým smerom ako vtedy, keď začínali. No Anička bude po každom zopakovaní svojej postupnosti o 3 políčka nižšie, o 2 políčka vľavo a rovnako otočená ako na začiatku. Takže sa bude stále takto vzďaľovať donekonečna a po každom prejdení trasy bude nižšie a vľavo od miesta, kde začínala.



Úloha 23. *Anička má jednu (celkom príčetnú) geometrickú zábavku – hneď čo zbadá protiľahlé vrcholy nejakého mnohouholníka, nepriečí sa a nakreslí medzi ne uhlopriečku! To bolo radosti, keď doma na priečelí našla prečnievajúcu priečku v tvare 10-uholníka. Koľko uhlopriečok môže Anička narysovať v jednom 10-uholníku?*

Výsledok: 35
Riešenie: Z každého bodu 10-uholníka môže Anička narysovať 7 rôznych uhlopriečok – jednu do každého z ostatných bodov okrem tých dvoch susedných (kde by miesto narysovania uhlopriečky iba obtiahla stranu 10-uholníka). Každý z desiatich bodov 10-uholníka je teda koncovým bodom siedmich uhlopriečok, čo nám dohromady dáva $7 \cdot 10 = 70$ koncových bodov v uhlopriečkach. Avšak, každá uhlopriečka sa skladá z dvoch koncových bodov, teda uhlopriečok bude $70 : 2 = 35$.

Úloha 24. *Patrik k tohtoročným narodeninám dostal naozaj dychberúci darček – Magický naťahovací obdĺžnik! Ako správny vedec, s obdĺžnikom sa nehrá len tak, ale uskutočňuje na ňom napínavé experimenty. Po tom, čo si nasadil ochranné rukavice, okuliare i biely plášť a splnil všetky podmienky bezpečnej práce v laboratóriu, začal obdĺžnik naťahovať! Všimol si, že ak jeden z rozmerov obdĺžnika natiahol o 12 cm (a pritom zachoval všetky uhly pravé) celkový obvod tohto útvaru sa zdvojnásobil. Patrik nás však naťahuje a nechce nám prezradiť odpoveď... prídete na obvod pôvodného obdĺžnika aj vy?*

Výsledok: 24 cm
Riešenie: Keď Patrik natiahol jeden z rozmerov obdĺžnika o 12 cm, predĺžila sa dve jeho strany o 12 cm. Obvod obdĺžnika sa teda zväčšil o 2 · 12 cm = 24 cm.
Podľa zadania sa však týmto obvod obdĺžnika zdvojnásobil. To znamená, že pôvodný obvod obdĺžnika musí byť rovnaký ako obvod, o ktorý sa obdĺžnik po natiahnutí zväčšil. Keďže po natiahnutí sa obvod zväčšil o 24 cm, tak z toho dostávame, že aj pôvodný obvod musel byť 24 cm.

Úloha 25. *V starodávnom svete Sumerov boli Sumce vychýrená špecialita. Avšak, ako iste viete, v tom čase ľudia ešte nepoužívali desiatkovú sústavu. Preto aj ich mince vyzerali trochu inak ako tie naše. Konkrétne hodnoty, ktoré by ste mohli nájsť na sumerských minciach, boli napríklad 11, 13 a 17. Koľkými spôsobmi môže pomocou týchto mincí Anička zaplatiť sumu 56, ktorú stojí jeden pekný súmerný sumec?*

Výsledok: 2
Riešenie: Rozoberme možnosti podľa toho, koľko mincí v hodnote 17 Anička použije.
Ak Anička nepoužije žiadnu mincu v hodnote 17, tak jej zostane na zaplatenie ostatnými mincami suma 56. V závislosti od počtu použitých mincí v hodnote 13 jej potom zostanú na doplatenie nasledujúce sumy:
– ak použije 0 mincí v hodnote 13, tak zvyšných 56 - 0 · 13 = 56 nemá ako zaplatiť.
– ak použije 1 mincu v hodnote 13, tak zvyšných 56 - 1 · 13 = 43 nemá ako zaplatiť.
– ak použije 2 mince v hodnote 13, tak zvyšných 56 - 2 · 13 = 30 nemá ako zaplatiť.
– ak použije 3 mince v hodnote 13, tak zvyšných 56 - 3 · 13 = 17 nemá ako zaplatiť.
– ak použije 4 mincí v hodnote 13, tak zvyšné 56 - 4 · 13 = 4 nemá ako zaplatiť.
Takže Anička nemôže použiť 0 mincí v hodnote 17. Pokračujme prípadom, ak Anička použije 1 mincu v hodnote 17. Vtedy jej na doplatenie zostane suma 56 - 1 · 17 = 39:
– ak použije 0 mincí v hodnote 13, tak zvyšných 39 - 0 · 13 = 39 nemá ako zaplatiť.
– ak použije 1 mincu v hodnote 13, tak zvyšných 39 - 1 · 13 = 26 nemá ako zaplatiť.
– ak použije 2 mince v hodnote 13, tak zvyšných 39 - 2 · 13 = 13 nemá ako zaplatiť.
– ak použije 3 mince v hodnote 13, tak zvyšných 39 - 3 · 13 = 0 vie zaplatiť pomocou 0 mincí v hodnote 11.
Pokračujme prípadom, ak Anička použije 2 mince v hodnote 17. Na doplatenie jej zostane suma 56 - 2 · 17 = 22.
– ak použije 0 mincí v hodnote 13, tak zvyšných 22 - 0 · 13 = 22 vie zaplatiť dvomi mincami v hodnote 11.
– ak použije 1 mincu v hodnote 13, tak zvyšných 22 - 1 · 13 = 9 nemá ako zaplatiť.
Napokon nám zostáva prípad, že Anička použije 3 mince v hodnote 17. Na zvyšok jej zostane suma 56 - 3 · 17 = 5, ktorú ale nevie už nijako vyskladať.
Dokopy sme teda našli 2 spôsoby (17 + 13 + 13 + 13 a 17 + 17 + 11 + 11), ako vie Anička vyskladať sumu 56.

Úloha 26. *Peťo má doma masívny kalkulovátor. Kalkulovátor má na displeji štyri riadky. Do prvého riadku vždy naťukáme nejaké dvojciferné číslo. Následne kalkulovátor do druhého riadku vypíše číslo z prvého riadku s vymenenými ciframi (čiže ak je v prvom riadku 12, tak v druhom bude 21). V treťom riadku sa nachádza súčin čísel z prvého a druhého riadku a vo štvrtom riadku sa nachádza súčet čísel z prvého a druhého riadku. Kalkulovátor ale nanešťastie Peťovi padol, displej sa rozbil a dá sa prečítať len tretí riadok. Na ňom je číslo 1300. Aké číslo by Peťo videl v štvrtom riadku, ak by displej nebol pokazený?*

Výsledok: 77
Riešenie: Vrchné dve čísla sa nesmú končiť nulou, inak by jedno z nich muselo začínať nulou, respektíve byť jednociferné. No najväčší možný súčin jedno a dvojciferného čísla je $99 \cdot 9 = 891$. Potom, aby sme v súčine 1300 dostali na mieste jednotiek cifru 0, musia mať čísla v prvých dvoch riadkoch na mieste jednotiek cifru 5 a nejakú párnu cifru. Z toho už vieme, že na horných dvoch riadkoch bude jedna dvojíc 25 a 52, 45 a 54, 65 a 56 alebo 85 a 58. Keď každú dvojicu navzájom vynásobíme ($25 \cdot 52 = 1300$, $45 \cdot 54 = 2430$, $65 \cdot 56 = 3640$, $85 \cdot 58 = 4930$), zistíme, že súčin 1300 dostaneme násobením 25 a 52. Na spodnom riadku je súčet týchto dvoch čísiel, čiže číslo $52 + 25 = 77$.

Úloha 27. *Svetlana Štedrá dnes k meninám dostala balík sladkostí, ktorý obsahoval 60 cukríkov. Aby ukázala, aká Štedrá naozaj je, rozhodla sa, že ich všetky rozdá medzi svoje kamarátky a žiadny cukrík si nenechá. Svetlana by chcela, aby každá jej kamarátka dostala rovnaký počet cukríkov a aby jej žiadne cukríky nezvýšili. Ukázalo sa však, že Svetlane sa to nemôže podariť. Koľko najmenej kamarátok môže Svetlana mať?*

Výsledok: 7
Riešenie: Svetlana chce rozdeliť 60 cukríkov medzi svoje kamarátky tak, aby jej žiadne neostali. Ak sa jej to má podariť, počet jej kamarátok musí byť deliteľom čísla 60 (inak by ich nerozdelila bezo zvyšku). Zadanie nám však hovorí, že Svetlane sa to nemôže podariť. Najmenší možný počet jej kamarátok je preto najmenšie kladné celé číslo, ktoré nie je deliteľom čísla 60. Keď budeme deliť číslo 60 číslami od 1 vzostupne, dostaneme, že $60 : 1 = 60$, $60 : 2 = 30$, $60 : 3 = 20$, $60 : 4 = 15$, $60 : 5 = 12$, $60 : 6 = 10$. Pri ďalšom čísle zistíme, že delenie $60 : 7$ nemá celočíselný výsledok, a teda 7 je hľadaným číslom. Preto môže mať Svetlana najmenej 7 kamarátok.

Úloha 28. *Zajko Bojko má veľmi rád mrkvičky. Na svojom poli pestuje mrkvičky tvaru takého trojuholníka ABC, že dĺžky všetkých jeho strán sú vyjadrené v centimetroch celým číslom. Zároveň pre dĺžky strán trojuholníkových mrkvičiek v centimetroch platí, že dĺžka strany AB je jednociferné číslo, dĺžka strany BC je dvojciferné číslo a dĺžka strany CA je trojciferné číslo. Zajka Bojka, ktorý má rád mrkvičky s veľkým obvodom, by teraz zaujímalo, aký najväčší obvod v centimetroch môže takáto mrkvička mať. Pomôžte mu to vypočítať.*

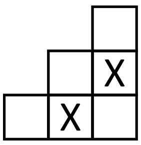
Výsledok: 215
Riešenie: Pre trojuholníkovú mrkvičku musí platiť trojuholníková nerovnosť, ktorá hovorí, že súčet dvoch najmenších strán trojuholníka je väčší, ako najdlhšia strana trojuholníka. Keďže najmenšie budú strany s jednocifernou a dvojcifernou dĺžkou, vieme pre trojuholník ABC zo zadania napísať túto nerovnosť ako $|AB| + |BC| > |CA|$. Keďže chceme, aby bol obvod čo najväčší, dosadíme za $|AB|$ a $|BC|$ najväčšie možné hodnoty, teda 9 cm a 99 cm. Dostávame, že $9 \text{ cm} + 99 \text{ cm} > |CA|$, teda $108 \text{ cm} > |CA|$. Najväčšia možná celočíselná hodnota pre $|CA|$, ktorá spĺňa túto nerovnosť, je 107 cm. Teda najväčší možný obvod Bojkovej mrkvičky je $|AB| + |BC| + |CA| = 9 \text{ cm} + 99 \text{ cm} + 107 \text{ cm} = 215 \text{ cm}$.

Úloha 29. *Popri tom, ako Kubko minule cestoval vlakom a hľadal svoje miesto na sedenie podľa čísla na svojej miestenke, všimol si, ako zaujímavo sú číslované miesta vo vlaku. Vo vozni, v ktorom bol, bolo 9 kupé a v každom z nich bolo 6 miest. Každé miesto bolo označené dvojciferným číslom, kde prvá cifra označovala poradové číslo kupé (od 1 do 9) a druhá cifra označovala poradové číslo miesta v rámci kupé (od 1 do 6). Takže napríklad v štvrtom kupé boli miesta s číslami 41, 42, 43, 44, 45 a 46. Keďže cesta bola Kubkovi dlhá, spočítal súčet čísel všetkých miest vo vozni. Aký súčet Kubko dostal?*

Výsledok: 2889
Riešenie: Skúsme si výpočet trošku uľahčiť. Rozdeľme si najprv všetky čísla na jednotky a desiatky – teda miesto súčtu čísel 11 + 12 + 13 +... budeme sčítavať 1 + 2 + 3 + ... a 10 + 10 + 10 + ...
Sčítajme najprv všetky jednotky. Keďže v každom kupé sú rovnaké čísla miest 1, 2, 3, 4, 5 a 6, v každom kupé bude súčet jednotiek rovnaký, konkrétne 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. Kupé však máme dohromady 9, súčet jednotiek vo všetkých kupé preto bude 9 · 21 = 189.
Teraz už len musíme vypočítať súčet všetkých desiatok. Vieme, že pre každé kupé to znamená 6 čísel – pre kupé 1 to je 6 čísel 10, pre kupé 2 to je 6 čísel 20, atď., až nakoniec, pre kupé 9 je to 6 čísel 90. Všimnime si však, že tieto čísla vieme medzi sebou veľmi pekne popárovať tak, aby nám ich súčet dal pekné číslo 100. Najprv sčítajme každé číslo 10 s každým číslom 90. Keďže počet oboch týchto čísel je 6, takýto výpočet vieme zapísať ako 6 · (10 + 90) = 6 · 100 = 600. Rovnako vieme postupovať aj pre dvojice čísel 20 a 80, 30 a 70, 40 a 60. Nakoniec nám ostane už len 6 čísel 50, ktorých súčet vyrátame jednoducho ako 6 · 50 = 300. Dokopy teda súčet desiatok bude 4 · 600 + 1 · 300 = 2400 + 300 = 2700. To už iba sčítame so súčtom všetkých jednotiek a dostaneme, že súčet čísel všetkých miest bol 2700 + 189 = 2889.

Úloha 30. *Pandu zaujali maľované krížovky. Nebol by to ale Panda, keby nad nimi nezačal rozmýšľať matematicky. Zobral si preto tabuľku 3 × 3 a začal vyfarbovať niektoré jej políčka. Takto zafarbil políčko vľavo hore. Vtom v jeho hlave skrsla otázka: Koľkými spôsobmi sa dajú vyfarbiť zvyšné políčka tejto tabuľky tak, aby žiadne dve vyfarbené políčka nemali spoločnú stranu?*
Poznámka: Medzi vyhovujúce vyfarbenia počítame aj možnosť, že Panda už žiadne ďalšie políčko nevyfarbí.

Výsledok: 21
Riešenie: Keďže Panda už vyfarbil políčko vľavo hore, nemôže už vyfarbiť žiadne s ním susediace políčko. Zostáva mu teda už len útvar na obrázku:



Všimnime si políčka označené písmenami X a rozoberme prípady podľa toho, koľko z nich je vyfarbených.
Ak sú vyfarbené obe, tak už žiadne ďalšie políčko nemôže byť vyfarbené. Všetky zostávajúce políčka susedia s niektorým políčkom označeným X. Týmto nachádzame prvú možnosť vyfarbenia.
Ak je vyfarbené len jedno z políčok označených X (napríklad to spodné), tak nám zostane na vyfarbenie už len jedno políčko (to vpravo hore) – ostatné buď susedia s vyznačeným políčkom s písmenom X, alebo je to priamo to druhé políčko s písmenom X, ktoré sme sa rozhodli nevyfarbiť. Na toto zostávajúce políčko máme dve možnosti – buď ho vyfarbíme, alebo nie. Pre každú voľbu políčka s X (ktoré sú dve) tak máme dve možnosti. Spolu ich je teda v tomto prípade 2 · 2 = 4.
Zostáva prípad, keď nevyfarbíme žiadne z políčok označených X. V tomto prípade nám zostanú štyri navzájom nesusediace políčka. Každé z nich je buď vyfarbené, alebo nevyfarbené a tieto možnosti sú navzájom nezávislé. Preto tu nachádzame 2 · 2 · 2 · 2 = 16 možností.
Spolu tak má Panda 1 + 4 + 16 = 21 možností.

Úloha 31. *Ninka prednedávnom objavila jeden známy slovenský hudobný hit. Všimla si, že sa obzvlášť hodí na cestu po schodoch. Keďže však sama býva len na ôsmom poschodí, počas tejto cesty si ho nemôže vypočuť celý... Rozhodla sa preto, že si cestu trochu predĺži. Svoju cestu začala na prízemí (0. poschodí) a pokračovala na 5. poschodie, potom späť na 3. poschodie, následne na 7., neskôr na 6. a až potom domov na 8. poschodie. Koľko poschodí počas tejto cesty nastúpala (smerom nahor)?*

Výsledok: 11
Riešenie: Zaujíma nás iba počet poschodí, ktoré Ninka nastúpala. Najprv stúpala z 0. poschodia na 5., počas čoho nastúpala 5 - 0 = 5 poschodí. Potom klesla na 3., odkiaľ stúpala na 7. poschodie, počas čoho nastúpala 7 - 3 = 4 poschodia. Odtiaľ klesla na 6. poschodie, odkiaľ stúpala na 8., počas čoho nastúpala 8 - 6 = 2 poschodia. Dokopy teda Ninka nastúpala 5 + 4 + 2 = 11 poschodí.

Úloha 32. *Nica má v nedeľu ráno vždy naponáhlo, chce stihnúť cestu do kostola aj nedeľný nákup, no vie, že potraviny zatvárajú už o dvanástej. Už vie, že cesta do kostola od bráničky jej domu trvá 5 minút. Cesta od bráničky do obchodu, ktorý má presne opačným smerom, jej pešo trvá 7 minút. Žiadnu z týchto vzdialeností nikdy nezmerala, vie však, že od dverí jej domu k bráničke pred domom je to 100 metrov a prejsť tento úsek jej trvá presne jednu minútu. Koľko metrov je v tom prípade vzdialený kostol od obchodu?*
Poznámka: Nica vždy kráča rovnako rýchlo.

Výsledok: 1200
Riešenie: Vieme, že kostol je od Nicinho domu presne opačným smerom ako potraviny. Ak to teda z jej domu do kostola trvá 5 minút a z jej domu do obchodu to trvá 7 minút, z kostola do obchodu to bude trvať 5 + 7 = 12 minút.
Vieme, že 100 metrov ku bráničke Nica prekráča za 1 minútu. Teda, keďže vždy kráča rovnako rýchlo, za každú 1 minútu jej chôdze Nica nachodí 100 metrov. Preto, ak bude od kostolu k obchodu kráčať 12 minút, prekráča pri tom $12 \cdot 100 = 1200$ metrov.

Úloha 33. *Kubo cestuje vlakom po mestách, ktorých vlakové stanice ležia na jednej priamke v poradí Matbojovo, Pikopretekovo, Pikomatovo, Pikofyzovo a Terabiovo. Matbojovo je od Pikopretekova vzdialené 5 km. Pikopretekovo od Pikomatova 6 km. Pikomatovo od Pikofyzova 7 km. No a Pikofyzovo od Terabiova 3 km. Kubko sa rozhodol, že vystúpiť z vlaku môže len vtedy, keď ním prejde nepárny počet kilometrov. Svoju cestu Kubo začína v Pikofyzove a chce sa dostať až do Matbojova, pričom na svojej ceste môže prestúpiť ľubovoľne veľakrát, a to na každej stanici (ak pritom splní svoju podmienku). Koľko najmenej kilometrov musí Kubko prejsť aby splnil, čo si zaumienil?*

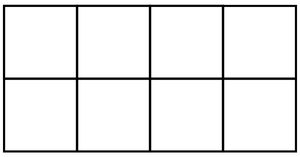
Výsledok: 18
Riešenie: Všimnime si, že najkratšou priamou cestou z Pikofyzova do Matbojova by Kubo prešiel 7 km + 6 km + 5 km = 18 km. Otázkou ostáva, či vie túto trasu prejsť tak, aby vždy vystúpil po nepárnom počte kilometrov. Odpoveď je, že sa mu to podarí, ak sa najprv odvezie do Pikomatova (7 km) a odtiaľ už priamo do Matbojova (6 km + 5 km = 11 km). Rovnako by sa mu to podarilo, ak by sa najprv odviezol až do Pikopretekova (7 km + 6 km = 13km) a odtiaľ do Matbojova (5 km). Tak ako tak, Kubko prejde najmenej 18 km.

Úloha 34. *Sedem súrodencov sa po náročnom dni vrátilo domov s hŕbou domácich úloh. Keďže sa chcú spolu ísť hrať čo najskôr, rozhodli sa, že si navzájom pomôžu a úlohy si rovnomerne prerozdelia. Anežka dostala 6 domácich úloh, Barborka 12, Cecil 7, Drahomíra 15, Emanuel 10 a Frederik len jednu. O počte Gabrielových domácich úloh vieme iba to, že ich je viac ako 20, ale menej ako 30. Koľko úloh musí mať Gabriel na to, aby sa im podarilo prerozdeliť všetky úlohy medzi súrodencov spravodlivo? Každé z detí počíta úlohy samostatne a vždy vypočíta úlohu celú.*

Výsledok: 26
Riešenie: Keďže chceme úlohy rozdeliť spravodlivo medzi 7 súrodencov, musí byť celkový počet úloh násobkom čísla 7. Spočítajme najprv, koľko domácich majú dohromady všetci okrem Gabriela: 6 + 12 + 7 + 15 + 10 + 1 = 51. Následne vieme, že Gabriel mal viac ako 20 úloh ale menej ako 30, čo znamená, že mal úloh najmenej 21 a najviac 29. Z toho vyplýva, že najmenší možný počet úloh všetkých súrodencov je 51 + 21 = 72, a najväčší možný je 51 + 29 = 80. Jediné číslo medzi 72 a 80, ktoré je násobkom čísla 7, je číslo 77, teda toľko mali úloh všetci súrodenci dohromady. Gabriel preto musel mať 77 - 51 = 26 úloh.

Úloha 35. *Saru nikdy nebavilo riešenie sudoku a vždy sa pri pohľade na hlavolam radšej zamerala na 9 menších štvorcov obtiahnutých hrubou líniou. Ako zručnú matematičku jej hneď napadlo mnoho ďalších možných prevedení tejto hry. Rozhodla sa preto, že zistí, koľko rôznych obdĺžnikov sa dá vytvoriť obťahovaním existujúcich čiar v tejto tabuľke. Ako však rýchlo zistila, obtiahnuť takto celú tabuľku by bolo náročné a zdĺhavé. Zamerala sa preto na jej menšiu verziu s rozmermi 2 × 4 štvorčeky. Najviac koľko obdĺžnikov dokážete nakresliť pomocou hrán tabuľky s rozmermi 2 × 4?*
Poznámka: Štvorec tiež pokladáme za obdĺžnik.

Výsledok: 30
Riešenie: Keďže smieme obťahovať len hrany tabuľky, každý obdĺžnik, ktorý vytvoríme, bude zlúčením niekoľkých štvorčekov tabuľky. Poďme teda postupne zistiť, koľko obdĺžnikov vieme dosiahnuť pomocou jedného štvorčeka a dvojíc, trojíc, atď. rôznych štvorčekov. Pritom sa budeme odvolávať na tabuľku 2 × 4 otočenú takým smerom ako na obrázku.



Keďže v tabuľke 2 × 4 máme 8 štvorčekov, obtiahnutím každého jedného z nich vieme vytvoriť 8 rôznych obdĺžnikov.
Dvojice štvorčekov nám budú tvoriť obdĺžniky 2 × 1. Ak ich budeme ukladať zvislým smerom, vieme ich vytvoriť 4 (priamo vedľa seba), ak ich budeme ukladať vodorovne, vieme ich vytvoriť 6. Pomocou dvojíc teda vieme vytvoriť 4 + 6 = 10 obdĺžnikov.
Trojice vieme ukladať iba vodorovne, vieme tak vytvoriť 4 rôzne obdĺžniky.
Štvorice vieme vytvárať dvomi rôznymi spôsobmi. Buď ako obdĺžniky 4 × 1, ktoré vieme uložiť vodorovne 2 rôzne, alebo ako obdĺžniky 2 × 2, ktoré vieme uložiť 3. Dokopy teda vieme štvoricami uložiť 5 rôznych obdĺžnikov.
Obdĺžnikové pätice nevieme vytvoriť žiadne.
Šestice budeme vytvárať ako obdĺžniky 2 × 3, ktoré vieme uložiť 2 rôzne.
Sedmice vytvoriť opäť nevieme.
A nakoniec, osmicu vieme vytvoriť jedným spôsobom, tým, že obtiahneme celú tabuľku dookola. Dokopy teda dostávame 8 + 10 + 4 + 5 + 2 + 1 = 30 rôznych obdĺžnikov.

Úloha 36. *Anička sa rozhodla si na staré kolená postaviť dom. Architektúru však nikdy neštudovala, takže bol jej projekt z veľkej časti založený na improvizácii. Jediné čo vedela je, že chce okolo svojej trojuholníkovej strechy presne obmotať šnúru vianočných svetielok dĺžky 7 metrov, ktorú má doma. Koľko rôznych trojuholníkov s celočíselnými dĺžkami strán spĺňa túto podmienku a má obvod 7 metrov?*

Výsledok: 2
Riešenie: Vieme, že v tomto trojuholníku musí platiť trojuholníková nerovnosť a + b > c, kde c je dĺžka najdlhšia strana v trojuholníku. Akú dĺžku však môže táto najdlhšia strana c vôbec mať? Nemôže mať dĺžku 4 m, lebo by potom súčet dĺžok zvyšných dvoch strán trojuholníka bol iba 7 m - 4 m = 3 m, čo je menej ako 4 m, a teda trojuholníková nerovnosť by neplatila. Z tohto istého dôvodu nemôže mať strana c ani dĺžky väčšie než 4 m.
Zároveň však nemôže mať strana c ani dĺžku 2 m či menšiu, lebo najväčší možný obvod trojuholníka s najdlhšou stranou 2 m je 2 m + 2 m + 2 m = 6 m. Aby sme dosiahli požadovaný obvod 7 m, museli by sme pridať stranu dĺžky aspoň 3 m, avšak potom by už strana s dĺžkou 2 m nebola najdlhšou stranou. Teda, jediná možná dĺžka, ktorú môže mať strana c, je 3 m. Súčet dĺžok zvyšných dvoch strán teda musí byť rovný 7 m - 3 m = 4 m. No, a máme len dve možnosti, ako rozložiť dĺžky týchto dvoch strán, aby mali súčet dĺžok 4 m. Buď to budú 2 m + 2 m, alebo 1 m + 3 m. Čiže, podľa podmienok môžeme vytvoriť len 2 rôzne trojuholníky – buď s dĺžkami strán 3 m, 3 m a 1 m, alebo 3 m, 2 m a 2 m.

Úloha 37. *V krajine Matbojovo jazdia dve autobusové linky – A a B. Obe linky jazdia v pravidelných intervaloch a obsluhujú aj zastávku „Námestie". Jazdia tak, že obe ráno o 6:00 odídu zo zastávky „Námestie" a prvýkrát sa opäť stretnú na zastávke „Námestie" až v čase 6:20. Dopravný podnik Matbojovo by však chcel zaviesť novú linku C, ktorá by tiež obsluhovala zastávku "Námestie", ktorá by ráno tiež odchádzala o 6:00. Ak bude linka C premávať každých 9 minút, kedy sa prvýkrát (po 6:00) stretnú všetky tri linky na zastávke „Námestie"?*

Výsledok: 9:00
Riešenie: Linky A a B sa stretávajú každých 20 minút na Námestí a linka C je na Námestí každých 9 minút. Inak povedané, linky A a B sa stretnú na Námestí, ak počet minút, koľko premávajú, je násobok 20. Podobne linka C dorazí na Námestie vtedy, keď počet minút, koľko premáva, je násobok 9. Aby sa stretli všetky tri naraz, musí byť počet minút, koľko premávajú, násobok aj 20 a aj 9. Tento počet nájdeme napríklad tak, že si budeme postupne vypisovať násobky 20 a zistíme, ktoré sú deliteľné 9:
20 : 9 = 2 so zvyškom 2 → nie je deliteľné 9
40 : 9 = 4 so zvyškom 4 → tiež nie je deliteľné 9
60 : 9 = 6 so zvyškom 6 → tiež nie je deliteľné 9
80 : 9 = 8 so zvyškom 8 → tiež nie je deliteľné 9
100 : 9 = 11 so zvyškom 1 → tiež nie je deliteľné 9
120 : 9 = 13 so zvyškom 3 → tiež nie je deliteľné 9
140 : 9 = 15 so zvyškom 5 → tiež nie je deliteľné 9
160 : 9 = 17 so zvyškom 7 → tiež nie je deliteľné 9
180 : 9 = 20 so zvyškom 0 → číslo 180 je deliteľné 9
Takže najmenšie kladné číslo, ktoré je násobkom 20 aj 9, je číslo 180. Všetky tri linky sa tak stretávajú po 180 minútach premávania, resp. po troch hodinách. Prvýkrát po 6:00 to teda bude o 9:00.

Úloha 38. *Róberta rada cestuje vlakom po Slovensku a často sa jej pri tom stáva, že sa jej vlak hýbe pomalšie ako by mal... inými slovami – mešká. Tento raz si však všimla, že podľa hodín na stanici ide vlak predsa úplne načas a pritom hodinky na jej ruke ukazujú, že už tu mal dávno byť. Zistila tak, že tento raz nie je chyba na strane vlaku, ale jej pokazené hodinky sa hýbu rýchlejšie, ako by mali.*
Raz, keď išla vlakom z Prievidze do Bratislavy, všimla si, že presné hodiny na stanici a aj jej hodinky ukazovali čas 12:00. V Partizánskom si na presných hodinách na stanici všimla čas 12:30, kým jej hodinky ukazovali čas 12:35. Potom Róberta zaspala a zobudila sa, keď jej hodinky ukazovali čas 14:13. Aký bol vtedy presný čas?

Výsledok: 13:54
Riešenie: Počas Róbertinej cesty z Prievidze do Partizánskeho ubehlo v skutočnosti 30 minút, kým na Róbertiných hodinkách ubehlo 35 minút. To znamená, že vždy, keď na Róbertiných hodinkách ubehne 7 minút, v skutočnosti ubehne iba 6 minút. V momente Róbertinho zobudenia sa ubehlo na jej hodinkách od odchodu z Prievidze $2 \cdot 60 + 13 = 133$ minút. Takže v skutočnosti ubehlo len $(133 : 7) \cdot 6 = 114$ minút. To znamená, že v skutočnosti bolo 13:54.

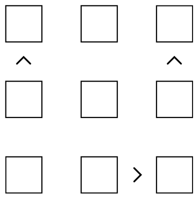
Úloha 39. *Paulínka doma maľovala steny na fialovo. Keď bolo vymaľované, stále jej ostala nejaké farba, a tak išla maľovať ďalšie steny. Konkrétne nafarbila na fialovo steny svojho obľúbeného kvádra. Aj potom jej však kváder prišiel nudne monotematický, preto ho rozrezala na 42 rovnakých malých kociek. Pri tom platilo, že každá zo strán pôvodného kvádra bola dlhšia ako stena malej kocky. Koľko stien týchto malých kociek je nafarbených na fialovo?*

Výsledok: 82
Riešenie: Dajme tomu, že malé kocky majú stranu dlhu 1 cm (je jedno, akú jednotku použijeme, môžu to byť centimetre, alebo aj čokoľvek iné). To znamená, že jedna z nich má objem 1 cm^3. Teda, ak Paulínka veľký kváder rozrezala na 42 takýchto kociek, objem veľkého kvádra bude 42 cm^3.
Aby sme však vyriešili úlohu, zaujímajú nás dĺžky strán tohto kvádra. Na začiatok vieme, že žiadna z týchto strán nemá dĺžku 1 cm – inak by neplatila podmienka, aby každá zo stien pôvodného kvádra bola dlhšia ako stena malej kocky. Teda, keď hľadáme dĺžky strán kvádra, hľadáme také tri čísla iné než 1, ktoré keď vzájomne vynásobíme, dostaneme číslo 42 (aby výsledný objem kvádra mohol byť 42 cm^3).
No, a keďže v prvočíselnom rozklade čísla 42 figurujú práve tri čísla ($42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$), existuje len jedna možnosť na trojicu čísel, ktoré spĺňajú túto podmienku. Dĺžky strán kvádra sú teda práve tieto tri prvočísla: 2 cm, 3 cm a 7 cm.
Zadanie sa nás pýta na počet zafarbených stien malých kociek. To budú logicky tie steny, ktoré sa nachádzali na povrchu pôvodné kvádra. Keďže sme sa rozhodli, že malá kocka má hranu dlhú 1 cm, jedna stena malej kocky má povrch 1 cm^2. Preto vieme otázku zo zadania prepísať ako: „Koľko cm^2 má povrch pôvodného kvádra?“
A to už vieme jednoducho zistiť, keďže poznáme všetky rozmery kvádra. Jeho povrch sa skladá z dvoch trojíc rovnakých obdĺžnikov, teda plocha tohto povrchu bude $2 \cdot 2\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} + 2 \cdot 3\text{ cm} \cdot 7\text{ cm} + 2 \cdot 7\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 12\text{ cm}^2 + 42\text{ cm}^2 + 28\text{ cm}^2 = 82\text{ cm}^2$. Zafarbených stien malých kociek bude preto 82.

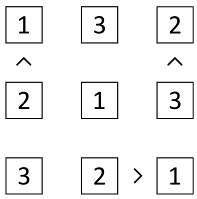
Úloha 40. *Štyria kamaráti chcú prejsť cez jaskyňu na druhú stranu hory. Majú však iba 1 baterku – do jaskyne sa nedá vstúpiť bez nej. Jaskyňa je úzka, a tak v nej môžu byť maximálne dvaja ľudia zároveň. Keď dvaja ľudia prechádzajú cez jaskyňu, vždy sa hýbu rýchlosťou pomalšieho. Časy na prejedenie jaskyňou sú postupne:*
Adam: 1 minúta
Beáta: 2 minúty
Cyril: 5 minút
Daniel: 8 minút
Cez jaskyňu prešli najrýchlejšie, ako sa dalo. Ako dlho im to trvalo?

Výsledok: 15 minút
Riešenie: Ukážeme, že najrýchlejší spôsob, ako to kamaráti vedia spraviť, trvá 15 minút.
Najprv ukážeme, že na menej ako 15 minút to nejde. Všimnime si, že vždy musia cez jaskyňu prejsť dvaja a potom sa jeden z nich musí vrátiť, aby priniesol baterku naspäť na opačnú stranu. Cez jaskyňu tak treba prejsť aspoň 5-krát. V aspoň z jednom z týchto presunov musí byť Daniel, ktorému to trvá 8 minút. Ideálne by bolo, aby s ním prešiel aj Cyril, ktorému to trvá 5 minút (aby Cyril nezdržoval ostatných) – v opačnom prípade by prechod trval isto aspoň 8 + 5 minút plus prechody ostatných, čo by bolo viac ako 15 minút. Avšak aby toto bolo efektívne, musí ich na druhej strane čakať niekto, kto je schopný rýchlo doniesť baterku na opačnú stranu jaskyne. Preto takýto pohyb dáva zmysel iba po tom, ako najprv Adam s Beátou prešli cez jaskyňu a jeden z nich sa vrátil naspäť s baterkou pre Cyrila s Danielom. Po prechode Cyrila s Danielom sa vráti s baterkou aj druhý z dvojice Adam a Beáta. Posledný prechod potom spravia spoločne Adam s Beátou.
Tým dostávame, že najrýchlejší je nasledovný postup:
1. Najprv jaskyňou prejdú Adam s Beátou (2 minúty)
2. Adam sa vráti späť (1 minúta)
3. Cyril s Danielom prejdú jaskyňou (8 minút)
4. Beáta sa vráti späť (2 minúty)
5. Adam s Beátou znova prejdú jaskyňou (2 minúty)
Spolu to teda bude skutočne trvať 2 + 1 + 8 + 2 + 2 = 15 minút.

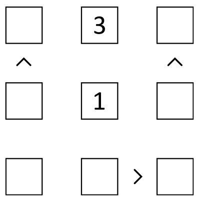
Úloha V1. *Kubo našiel na povale zvláštnu dosku, ktorú vidíš na obrázku. Dovtípil sa, že ju má vyplniť číslami 1, 2 a 3 tak, aby v každom riadku a každom stĺpci bolo každé číslo presne raz. Navyše majú medzi číslami v políčkach platiť nerovnosti naznačené (rôzne pootočenými) znamienkami „>“ medzi niektorými políčkami. Ako má Kubo vyplniť dosku?*



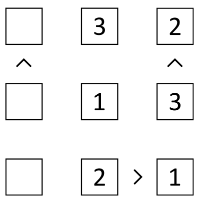
Výsledok:



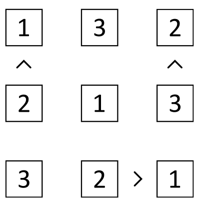
Riešenie: Pozrime sa na prvý riadok. Čísla na jeho krajoch sú od niečoho menšie. Takže ani jedno z nich nemôže byť číslo 3. To preto bude v strede prvého riadka. Podobne v druhom riadku máme na krajoch čísla, ktoré sú od niečoho väčšie, takže sa nemôžu rovnať 1. V strede druhého riadka tak bude číslo 1:



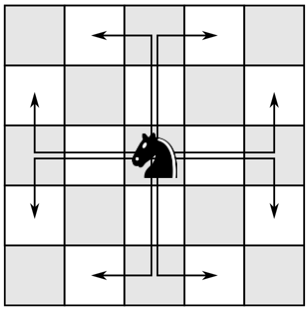
V druhom stĺpci už chýba iba číslo 2, takže bude v spodnom riadku. Od tejto dvojky je menšie iba číslo 1, ktoré bude napravo od dvojky. Zároveň v treťom stĺpci nám chýbajú už iba čísla 2 a 3. Tak ich doplníme tak, aby sedela nerovnosť medzi nimi:



Zostáva už len do každého riadka doplniť to číslo, ktoré v ňom chýba. Tým dostaneme nasledovné vyplnenie Kubovej dosky:



Úloha V2. *Miškovi moc nejde normálny šach, no rád sa zamýšľa nad jednotlivými figúrkami. Naposledy ho zaujal jazdec. I zobral si Miško hneď šachovnicu 3 × 3 a uvažoval, ako by tam toho jazdca vedel dať. Jazdec sa pohybuje vždy o dve políčka rovno, potom sa otočí o 90° buď doľava, alebo doprava a pohne sa o jedno políčko. Akoby do písmena L (viď obrázok). Koľko najviac jazdcov môže Miško umiestniť na šachovnicu 3 × 3 tak, že sa navzájom nebudú ohrozovať? Ak sa dve figúrky v šachu ohrozujú, znamená to, že sa navzájom vedia vyhodiť, čiže jedna z nich sa vie dostať na políčko, kde stojí tá druhá. Nezabudnite vysvetliť, prečo tam viac jazdcov už Miško uložiť nevie.*

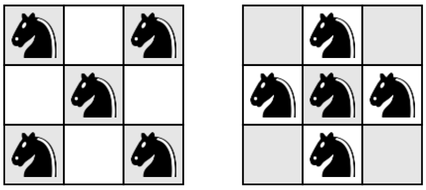


Výsledok: 5

Riešenie: Ak uložíme jazdca do stredu šachovnice, vieme s istotou povedať, že on nebude ohrozovať iného jazdca a ani žiadny iný jazdec nebude ohrozovať jazdca v strede. Čiže tento jazdec neovplyvňuje ostatných a pokojne ho tam dajme.

Ďalej si všimnime, že každé zo zvyšných políčok vie byť ohrozené najviac dvomi jazdcami a každý jazdec ohrozuje práve dve políčka.

Zoberme si prípad, že by sme na týchto ôsmich políčkach mali 5 jazdcov (spolu na šachovnici je teda 6 jazdcov). Nech dáme jedného z týchto jazdcov na ktorékoľvek z týchto políčok, vždy bude ohrozovať dve ďalšie políčka. Dokopy budú teda títo jazdci ohrozovať $5 \cdot 2 = 10$ políčok (keď niektoré políčko ohrozujú dvaja jazdci, počítame ho dvakrát). Lenže, každé voľné políčko vie byť ohrozované najviac 2 jazdcami, takže pre 3 voľné políčka (máme 5 jazdcov a 8 políčok, takže 3 políčka zostanú voľné) šachovnica ponúka len $3 \cdot 2 = 6$ políčok, ktoré môžu byť ohrozené. Tým sme sa dostali ku sporu. Pre 4 jazdcov (plus ten v strede) to však vychádza, keďže počet voľných políčok sa rovná počtu jazdcov. Takéto rozloženia, ktoré spolu obsahujú 5 jazdcov, sú dve:



Úloha V3. *Po objednaní dokonalej nehmotnej kladky™ z fyzikálneho obchodu prišiel Maťkovi potvrdzovací kód. Keďže to však nie je hocaký obchod, na bezpečnosti svojich transakcií si dávajú obzvlášť záležať. Overovací kód Maťkovej objednávky je 8-miestne číslo, ktorého súčet cifier je 14. Pre toto číslo platí, že neexistuje úsek zasebou-idúcich cifier, ktorý má súčet 3 (teda ani žiadna z cifier nie je 3) a zároveň sú všetky cifry väčšie ako 0. Do overovacej SMS má Maťko zadať toto 8-miestne číslo. Viete na základe týchto informácií toto 8-miestne číslo uhádnuť?*

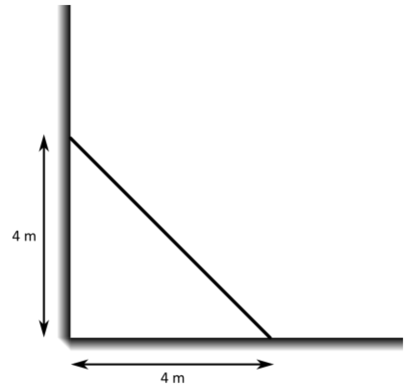
Výsledok: 11411411

Riešenie: Najprv si všimnime, že hľadané 8-miestne číslo musí obsahovať cifru 1. Ak by to tak totiž nebolo, museli by mať všetky cifry hodnotu aspoň 2, takže súčet cifier by bol aspoň $8 \cdot 2 = 16$. To je ale viac ako požadovaných 14. Takže hľadané číslo isto niekde obsahuje cifru 1.
Táto cifra 1 môže susediť s najviac jednou cifrou 1 (ak by susedila s dvomi, tak by spolu mali súčet 3 – to je však zakázané). Zároveň však nemôže susediť s cifrou 2 (spolu by mali zakázaný súčet 3) ani s cifrou 3 (ktorá je sama o sebe zakázaná). Vo výslednom čísle tak musia byť súvislé úseky najviac dvoch jednotiek obkolesené ciframi s hodnotou aspoň 4 (prípadne sú tieto jednotky na začiatku alebo konci výsledného čísla).
Niekde vo výslednom čísle je tak cifra 1 susediaca s cifrou aspoň 4. Zvyšných $8 - 2 = 6$ cifier má mať súčet najviac $14 - 5 = 9$. Zopakovaním argumentu z úvodu dostaneme do výsledného čísla ďalšiu cifru 1. Na zvyšných 5 cifier zostane súčet najviac 8, čo dá ďalšiu jednotku. Potom na zvyšné 4 cifry zostane súčet najviac 7, čo dá ešte jednu jednotku. Doteraz tak vo výslednom čísle musíme mať aspoň 4 jednotky a aspoň jednu cifru s hodnotou aspoň 4 (a zostávajú ešte 3 cifry so súčtom najviac 6). Pre každú z týchto cifier 1 platí to, že môže tvoriť súvislý úsek najviac dvoch jednotiek a potom musí byť obkolesená cifrou s hodnotou aspoň 4, alebo krajom výsledného čísla. Naše 4 jednotky tvoria isto aspoň dva takéto súvislé úseky jednotiek.
Ukážeme si, že musíme pridať ešte aspoň jednu cifru s hodnotou 4. Rozhodne totiž nemôže súčasne platiť, že oba súvislé úseky jednotiek sú na kraji výsledného čísla (medzi týmito súvislými úsekmi by boli 4 ďalšie cifry) a že oba súvislé úseky sú z niektorej strany obkolesené cifrou s hodnotou 4, o ktorej už vieme (medzi týmito súvislými úsekmi by bola iba 1 ďalšia cifra). Preto musíme pridať ďalšiu cifru s hodnotou aspoň 4. Na zvyšné 2 cifry zostane už len súčet najviac 2, takže to musia byť dve jednotky. Zároveň obe cifry s hodnotou aspoň 4 museli mať hodnotu presne 4.
Z toho už dostávame, že výsledné číslo musí obsahovať 6 jednotiek a 2 štvorky v tom jedinom poradí, ktoré je dovolené. To je poradie 11411411.

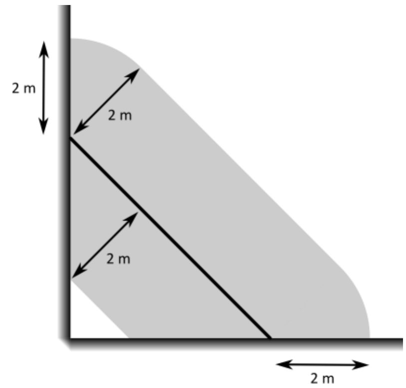
Úloha V4. *Sonička má 15 mentolových tričiek s vtákopyskom a 5 čiernych tričiek s vtákopyskom. Okrem toho nosí buď modré, hnedé, alebo šedé nohavice. Má ešte jednu zlatú mikinu a jednu tmavozelenú mikinu. Vždy si berie so sebou buď pingpongovú raketu, alebo biliardové tágo.*
Oblieka sa podľa nasledovných podmienok:
– zlatú mikinu má vtedy, keď má pri sebe pingpongovú raketu
– keď má na sebe čierne tričko s vtákopyskom, nosí tágo
– k čiernemu tričku s vtákopyskom nenosí modré nohavice
– šedé nohavice nosí len so zlatou mikinou
– Sonička nosí každý deň nové tričko, pričom čierne tričko nosí len v tie dni, ktoré dávajú po delení 4 zvyšok 2.
Akú farbu nohavíc mala Sonička v 18. deň?
Poznámka: Sonička nosí každý deň práve jedno tričko, jedny nohavice, jednu mikinu a jeden doplnok (buď raketu, alebo tágo).

Výsledok: hnedú
Riešenie: Sonička má 18. deň čierne tričko, pretože po vydelení čísla 18 číslom 4 dostávame podiel 4 a zvyšok 2. Vieme, že ak má čierne tričko s vtákopyskom, potom nemôže mať modré nohavice a musí mať so sebou tágo. Ak má tágo, nemôže mať pri sebe pingpongovú raketu. Ak však nemá pingpongovú raketu, nemôže mať zlatú mikinu. Ak nemôže mať zlatú mikinu, tak ani šedé nohavice. Takže Sonička nemôže mať ani šedé a ani modré nohavice, a preto bude mať v 18. deň hnedé nohavice.

Úloha V5. *Záhradník Adam má v rohu svojej záhrady trávnik, ktorý by chcel pokosiť. Využije na to svoju ovečku. V rohu záhrady pevne natiahol lano tak ako na obrázku. Na toto lano priviazal ovečku na lane, ktoré sa po tom prvom mohlo voľne pohybovať. Výsledkom bolo, že ovečka sa vedela dostať na všetky miesta, ktoré sú od prvého lana vzdialené 2 metre. Nakreslite celú plochu, ktorú vie ovečka spásť.*



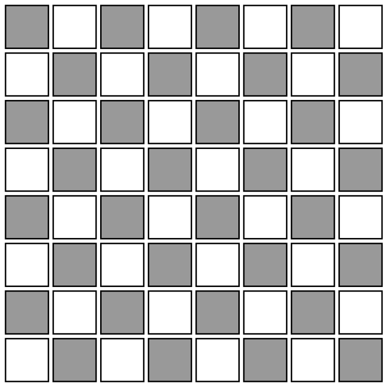
Výsledok:



Riešenie: Ovečka sa od lana nevzdiali na viac ako 2 metre. Oblasť spasenú ovečkou preto vieme nájsť tak, že v každom bode lana nakreslíme kruh so stredom v tomto bode a polomerom 2 metre. Potom vezmeme už len tú časť, ktorá je ešte stále v záhrade a budeme mať výslednú oblasť. Lenže nám sa nechce kresliť nekonečne veľa kruhov. A tak si celý proces vieme predstaviť aj jednoduchšie. Nakreslíme si jeden z kruhov a budeme ho posúvať po lane. Ak by kruh zanechával za sebou farbu, vyfarbil by všetky miesta, kam sa ovečka vie dostať (keby neexistovali steny v rohu záhrady).
Týmto postupom by sme po odstránení častí mimo záhrady vyfarbili oblasť na obrázku vyššie. V smere od lana k rohu preto ovečka spasie lichobežník s výškou 2 metre. Opačným smerom spasie obdĺžnik s výškou 2 metre a dve časti kruhu s polomerom 2 metre.

Úloha V6. *Žaba rád chodí k štvorcovému jazeru a skáče tam po štvorcových leknách, ktoré sú usporiadané do mriežky 8 × 8. Neskáče ale len tak náhodne, Žaba vždy skáče rovnobežne s brehom (čiže so stranou lekna, t.j. štvorca v mriežke). Okrem toho vždy strieda dĺžku skoku: najprv skáče o jedno lekná, potom o dve, o jedno, o dve... Začína na ľubovoľnom lekne. Je možné, aby sa po 10 skokoch ocitol opäť tam, kde začínal?*

Výsledok: nie
Riešenie: Ofarbime si jednotlivé lekná (políčka) tak ako na tomto obrázku:



Všimnime si, že farba lekna, na ktorom je Žaba, sa mení podľa istých pravidiel. Vždy, keď Žaba skočí o 1 políčko, tak sa zmení farba lekna, na ktorom stojí. Naopak, ak skočí o 2 políčka, tak sa nezmení farba políčka, na ktorom stojí. Medzi 10 skokmi je 5 takých, pri ktorých sa zmení farba lekna. Po týchto skokoch preto stojí Žaba na políčku inej farby, ako stál na začiatku. Preto rozhodne nemôže stáť na políčku, na ktorom začínal.

Iné riešenie:
Po 10 skokoch sa Žaba pohne o $5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 15$ políčok. Rozdeľme si skoky na dve skupiny – tie v smere doľava alebo doprava a tie v smere hore alebo dole. Keďže Žaba skákal o 15 políčok, čo je nepárne číslo, tak v jednej zo skupín musia byť skoky, ktorých súčet dĺžok je tiež nepárne číslo. Povedzme napríklad, že je to v skupine skokov doľava alebo doprava. Lenže na to, aby sa Žaba vrátil na políčko, z ktorého začal, tak sa musel pohnúť o rovnako veľa doľava ako doprava. Preto by musel byť súčet dĺžok skokov v tejto skupine párny. Keďže je ale nepárny, tak vieme, že Žaba sa nemohol vrátiť na lekno, kde začínal.