

Ahojte,

držíte v rukách zbierku úloh a vzorových riešení Jarného Matboja 2024.

Jarný Matboj 2024 je matematická súťaž pre žiakov piateho až siedmeho ročníka základných škôl a prímy a sekundy osemročných gymnázií. Súťaž organizuje nezisková organizácia P-MAT, n. o. (organizátor korešpondenčných seminárov Pikomat, Pikofyz a Terabio).

Štvorčlenné tímy žiakov sú rozdelené do troch súťažných kategórií – 5, 6 a 7.

Súťaž prebieha 120 minút, počas ktorých sa súťažiaci snažia vyriešiť čo najviac úloh. Okrem toho dostanú za každú správne vyriešenú úlohu jeden ľah v strategickej hre. Konečné poradie tímov teda neovplyvňuje len počet vyriešených úloh, ale aj to, ako dobre sa im v tejto hre darilo.

Táto súťaž je zameraná na zlepšenie logického myslenia, matematického uvažovania a práce v tíme, no predovšetkým na možnosť objaviť radosť z matematiky. Vytvorili sme túto zbierku úloh, aby žiaci, ktorých úlohy zaujali, mali možnosť znova si ich preriešiť, poprípade si prečítali vzorové riešenia, z ktorých sa dá veľmi veľa naučiť, aj keď úlohu vyriešili správne. Taktiež môže slúžiť ako inšpirácia pre učiteľov na čerpanie netradičnejších úloh na hodiny matematiky.

Želáme Vám príjemné riešenie a veľa nových poznatkov!

Vaši organizátori

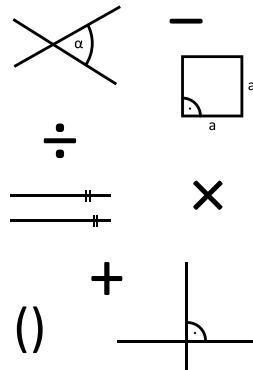


**Úloha 01.** Osemšmerovka je hlavolam zložený z mriežky s písmenkami. Cieľom je nájsť slová ukryté v mriežke písmen. Slová pritom môžu byť vodorovne, zvislo alebo diagonálne. Hľadané slová sú uvedené vedľa mriežky. Po nájdení všetkých slov zostanú neškrtnuté písmená. Tie, keď prečítame zľava doprava, zhora nadol, dostaneme riešenie osemšmerovky.

Kubo nakreslil jednu takú osemšmerovku, v ktorej sa slova neprekryvali. Nechcelo sa mu však vypísat' slová, ktoré sa v nej dajú nájsť. Napravo od osemšmerovky preto napísal iba značky znamienok alebo nakreslil geometrické pojmy.

Koľko písmen v mriežke nie je súčasťou žiadneho pojmu nakresleného vedľa Kubovej osemšmerovky?

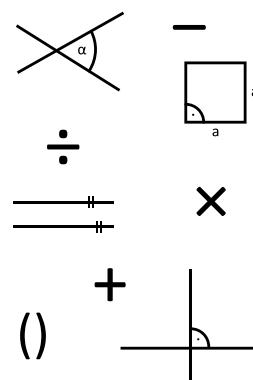
R	O	V	N	O	B	E	Ž	K	Y
I	Š	Z	D	E	L	E	N	O	D
E	T	Á	V	P	Á	M	K	T	O
S	V	T	U	P	L	R	E	R	L
E	O	V	N	T	Á	U	A	K	M
Ď	R	O	A	T	U	L	S	Í	E
J	E	R	D	R	Ž	H	N	Í	M
E	C	K	V	Á	M	U	O	P	A
L	C	Y	E	O	S	R	G	L	O
K	O	L	M	I	C	A	V	I	A



Výsledok: 45

Riešenie: Najprv pomenujme matematické pojmy: uhol, mínus, deleno, štvorec, rovnobežky, krát, plus, zátvorka, kolmica. Následne nájdime a vyznačme slová v osemšmerovke a spočítajme písmená, ktoré nie sú súčasťou žiadneho pojmu. Avšak môžeme sa vyhnúť hľadaniu slov v osemšmerovke. Máme 10 riadkov po 10 písmenach, teda celkovo v osemšmerovke je 100 písmen. Keďže zo zadania vieme, že písmena v Kubovej osemšmerovke sa neprekryvali, stačí nám spočítať, že sme použili 55 písmen. Na základe toho môžeme vydedukovať, že nepoužitých písmen bude  $100 - 55 = 45$ .

R	O	V	N	O	B	E	Ž	K	Y
I	Š	Z	D	E	L	E	N	O	D
E	T	Á	V	R	Á	M	K	T	O
S	V	T	U	P	L	R	E	R	L
E	O	V	N	T	Á	U	A	K	M
Ď	R	O	A	T	U	L	S	Í	E
J	E	R	D	R	Ž	H	N	Í	M
E	C	K	V	Á	M	U	O	P	A
L	C	Y	E	O	S	R	G	L	O
K	O	L	M	I	C	A	V	I	A



**Úloha 02.** Rastko objednával pizzu a všimol si, že ponúkajú aj jednu extra štipľavú. Ako správny gurmán a odvážlivec si povedal, že to isto musí skúsiť. Netrúfal si ju však zjest' úplne sám. Zavolal si teda na pomoc Simu, ktorá sa s radosťou ponúkla, že zje aj 2/3 pizze. Noro je o niečo rozumnejší a dá si len 2/15 pizze. Mišo, Majko, Martin a Anička chcú len ochutnať, a tak si dajú 2/35, 2/63, 2/99 a 2/143 pizze. Julka sa bojí najviac, zoberie si len kúsok o veľkosti 2/195 pizze. Akú časť z pizze zjedia Rastovi kamaráti? Odovzdajte zlomok v základnom tvare.

Výsledok: 14/15

Riešenie: Jednotlivé zlomky v zadaní by sme mohli jeden po druhom postupne sčítať. Ak budeme zlomky sčítavať od prvého, tak to pôjde prekvapivo jednoducho. Ukážeme si však trochu rýchlejší spôsob, ktorý odhaľuje, prečo to pôjde tak ľahko.

Všimnime si, že zlomky v zadaní vieme napísať ako rozdiely dvoch zlomkov takýmto spôsobom:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

$$\frac{2}{63} = \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$$

$$\frac{2}{99} = \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$$

$$\frac{2}{143} = \frac{1}{11} - \frac{1}{13}$$

$$\frac{2}{195} = \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$$

Týmto sa sčítavanie značne zjednoduší, lebo preusporiadáním členov dostávame rovnosť:

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) + (\frac{1}{7} - \frac{1}{9}) + (\frac{1}{9} - \frac{1}{11}) + (\frac{1}{11} - \frac{1}{13}) + (\frac{1}{13} - \frac{1}{15}) =$$

$$= \frac{1}{1} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{7} - \frac{1}{7}) + (\frac{1}{9} - \frac{1}{9}) + (\frac{1}{11} - \frac{1}{11}) + (\frac{1}{13} - \frac{1}{13}) - \frac{1}{15}$$

Rasťovi preto zostane  $1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$  pizze.

---

**Úloha 03.** Anička zdedia po svojom starom otcovi hrubú knihu o ovocných stromoch. Strany tejto knihy sú očíslované číslami od 1 do 498. Aničku však viac ako ovocné stromy zaujíma matematika, a tak spočítala, kol'kokrát sa v číslach strán nachádza cifra nula. Kol'ko cifier nula Anička napočítala?

Výsledok: 89

Riešenie: V číslach od 1 do 498 sa cifra 0 môže nachádzať iba na mieste jednotiek alebo na mieste desiatok. Postupne spočítame počet výskytov nuly na týchto pozíciách.

Na mieste jednotiek sa cifra 0 vyskytuje v číslach 10, 20, 30, ..., 490. Tie majú taký tvar, že ak škrtneme nulu, tak dostaneme niektoré z čísel 1 až 49. Nula je tak na mieste jednotiek presne 49-krát.

Na mieste desiatok sa cifra 0 vyskytuje v číslach 100, 101, ..., 109, 200, 201, ..., 209. Ak nulu na mieste desiatok škrtneme v týchto číslach, tak dostaneme čísla od 10 do 49. Cifra 0 je preto na mieste desiatok 40-krát.

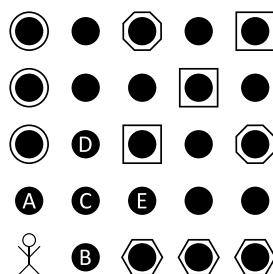
V celej knihe je tak cifra 0 použitá  $49 + 40 = 89$ -krát.

---

**Úloha 04.** Aktívny turista Jožko je na túre v monokultúrnom lese. V ňom je vysadených 25 stromov, ktoré presne tvoria mriežku  $5 \times 5$ . Kedže sa chce po lese poriadne porozhliadnuť, vytiahne svoju príručnú sekuru, vyrúbe jeden zo stromov v rohu tejto mriežky a postaví sa na peň, ktorý po tomto strome zostal. Kol'ko stromov odtiaľ uvidí? Poznámka: Jožko nevidí stromy, ktoré sú presne za inými stromami.

Výsledok: 13

Riešenie: Jožko nevidí stromy, ktoré sú presne za inými stromami. To znamená, že ak na priamke danej Jožkovým pňom a iným stromom leží viacero stromov, Jožko uvidí len ten prvý z nich. Z obrázku teda vidíme, že strom A zakryje Jožkovi stromy vyznačené krúžkami, strom B mu zakryje stromy vyznačené štvorčekmi a strom C mu zakryje stromy vyznačené šestuholníkmi. Nakoniec, stromy D a E mu zakryjú stromy vyznačené osemuholníkmi. Všetky nevyznačené stromy Jožko uvidí – tých je 13.



---

**Úloha 05.** Kubo je od prírody romantik, a preto vie, čo sa patrí robiť na sviatok svätého Valentína. Chce Hanku obdarovať kyticou. Kedže je mu Hanka drahá, chce na kyticu minúť práve 50 eur. Vošiel teda do blízkeho kvetinárstva, kde predávajú len ruže po 3 eurách za kus a gerbery po 2 eurách za kus. Koľko rôznych kytic môže Kubo pre Hanku kúpiť?

Výsledok: 9

Riešenie: Najjednoduchší spôsob, ako môže Kubo kyticu vyskladať, je, že kúpi 25 gerber po 2 eurá. Jediná možnosť, ako môže do kytice zakomponovať aj nejaké ruže, je, že tri z týchto gerber nahradí dvoma ružami – cena zostane rovnaká, 50 eur. Kedže pôvodne je gerber 25, takýmto spôsobom ich môže odstrániť osemkrát, kedy mu po poslednom odstránení zostane 1 gerbera a 16 ruží. Vtedy už, ako vidíme, nemá aké gerbery ďalej nahradzať. Dokopy teda môže vyskladať  $1 + 8 = 9$  rôznych kytic.

---

**Úloha 06.** Keď Marek v škole neposlúcha, núti ho paní učiteľka písat na tabuľu dookola tie isté výroky o tom, ako už bude poslúchať. Minule však počas hodiny občianskej náuky začal Marek písat dookola výroky úplne dobrovoľne, do vlastného zošita. Dokopy ich napísal presne 42. Boli to tieto:

„Aspoň 2 z týchto výrokov sú pravdivé.“

„Aspoň 3 z týchto výrokov sú pravdivé.“

„Aspoň 4 z týchto výrokov sú pravdivé.“

...

„Aspoň 43 z týchto výrokov je pravdivých.“

Koľko z týchto výrokov je pravdivých?

Výsledok: 0

Riešenie: S istotou vieme povedať, že posledný výrok je nepravdivý – keďže všetkých výrokov je dohromady iba 42, nemôže ich byť pravdivých 43. Avšak, ak je tento štyridsiaty druhý výrok nepravdivý, znamená to, že nám ostáva len 41 ďalších výrokov, ktoré môžu byť pravdivé. To znamená, že aj štyridsiaty prvý výrok bude nepravdivý, lebo hovorí, že pravdivých ich je aspoň 42, čo už nie je dosiahnuteľné. Ak túto úvahu zopakujeme 42-krát, vždy pre nižšie a nižšie výroky, dospejeme k tomu, že aj prvý výrok musí byť nepravdivý. Teda pravdivých je 0 výrokov.

---

**Úloha 07.** Nina s Maťkom sa stále v niečom predbiehajú. Minule sa predbiehali v tom, kto bude stáť v rade viacej vpred. Dopadlo to tak, že za Ninou stálo v rade práve 16 ľudí, medzi ktorými bol aj Maťko. Pred Maťkom pre zmenu stálo presne 14 ľudí. Medzi Ninou a Maťkom stálo práve 7 ľudí. Koľko ľudí stálo v rade?

Výsledok: 23

Riešenie: Kedže medzi Ninou a Maťkom stálo 7 ľudí, za Maťkom musí stáť ešte ďalších  $16 - 7 - 1 = 8$ , aby ich za Ninou mohlo byť dokopy 16. Pred Ninou zasa musí byť ešte ďalších  $14 - 7 - 1 = 6$ , aby ich pred Maťkom bolo dokopy 14. Dokopy teda rad odpredu vyzerá nasledovne: 6 ľudí, 1 Nina, 7 ľudí, 1 Maťko, 8 ľudí. Keď ich všetkých sčítame, dostávame  $6 + 1 + 7 + 1 + 8 = 23$  ľudí v rade.

---

**Úloha 08.** Stano sa rozhodol, že usporiada parádnú pártu! Pre svojich párov partákov podával párky z prepravaných párnokopytníkov. Tí mu na to povedali, že je teda riadne číslo... V tom okamihu sa Stano tuho zamyslel a zistil, že keby všetky tieto páry vynásobil, bolo by z toho riadne číslo! Pomôžte Stanovi ohľadom súčinu všetkých párnych čísel od 2 do 100. Koľkými nulami sa bude končiť tento súčin?

Výsledok: 12

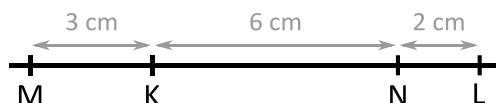
Riešenie: Nula na konci súčinu vznikne za každé číslo 10, ktorým sa dá výsledný súčin vydeliť. Vieme, že  $10 = 2 \cdot 5$ . Takže počet núl zodpovedá menšiemu z počtu dvojok, resp. päťiek, ktorými vieme výsledný súčin vydeliť. Dvojok je vo výslednom súčine veľmi veľa – násobíme 50 rôznych párných čísel, takže dvojok máme určite viac ako 50. Viac nás teda obmedzuje počet päťiek. Párne násobky päťky od 2 do 100 sú len 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 a 100. Za každý z nich máme jednu nulu na konci. Všimnime si však, že medzi týmito číslami sú aj nejaké násobky 25, konkrétnie 50 a 100. Tie preto prispievajú ďalšou nulou (v prípade 100 je to jasné hned, v prípade 50 to vidno po vynásobení nejakým iným párnym číslom, napríklad číslom 2, kedy  $2 \cdot 50 = 100$ ).

Zo spomenutých čísel tak 8 z nich prispieva do súčinu jednou nulou a 2 z nich prispievajú dvomi nulami. Spolu sa teda súčin končí  $8 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 12$  nulami.

**Úloha 09.** Laura sa ako každé správne dieťa rada hráva v kuchyni. Tento raz si zobraťa fixky a začala si nimi čarbať na kredenc. Nakreslila naň 4 body: K, L, M a N. Keďže je zvedavým dieťaťom, hned' začala merať vzdialenosť medzi niektorými z týchto bodov a namerala nasledovné:  $|KL| = 8 \text{ cm}$ ,  $|KM| = 3 \text{ cm}$ ,  $|KN| = 6 \text{ cm}$ ,  $|LN| = 2 \text{ cm}$  a  $|MN| = 9 \text{ cm}$ . Potom jej však mama zhabala pravítko a poslala ju do izby, preto Laura nestihla zistíť, aká je vzdialenosť bodov L a M. Spočítajte to pre ňu!

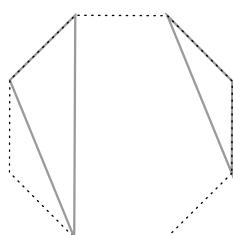
Výsledok: 11 cm

Riešenie: Pozrime sa pozorne na body K, N a L. Vzdialosti medzi dvojicami týchto bodov sú 6 cm, 2 cm a 8 cm. Všimnime si, že tu neplatí trojuholníková nerovnosť a dve kratšie z týchto strán sa sčítajú presne do dĺžky tej tretej:  $6 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$ . To znamená, že 8-centimetrová úsečka KL sa skladá práve z 2-centimetrovej úsečky LN a 6-centimetrovej úsečky KN, teda všetky tri body K, L a N ležia na tej istej priamke. Rovnakým postupom si všimnime, že pre body K, N a M, ktorých vzdialenosť dvojíc bodov sú 3 cm, 6 cm a 9 cm tiež platí, že  $3 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$ . Teda aj tieto body ležia na jednej priamke. Z toho vyplýva, že na jednej priamke ležia všetky štyri body. Z toho, že N leží medzi K a L a K leží medzi M a N vieme usúdiť, že body na tejto priamke ležia v poradí M, K, N, L. Vzdialenosť  $|ML|$  potom vieme určiť napríklad sčítaním vzdialostí  $|MK| + |KL| = 3 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 11 \text{ cm}$ .



**Úloha 10.** Majo si upiekol svoju oblúbenú pizzu v tvare pravidelného 8-uholníka. Keď ju vytiahol z pece, rozhodol sa ju narezat. To spravil tak, že zobrať dve trojice vrcholov tohto 8-uholníka a spravil rez nožom medzi všetkými troma bodmi v rámci jednej trojice. Vznikli mu tak 2 narezané trojuholníky – pre každú trojicu jeden. Majo je však pedant, a preto ich narezal tak, že tieto dva trojuholníky nemali ani jeden spoločný bod (teda zároveň žiadnen spoločný vrchol). Kol'kými spôsobmi mohol Majo narezat pizzu?

Poznámka: Jeden taký spôsob narezania pizze môžeš vidieť na obrázku:



Výsledok: 84

Riešenie: Z ôsmich vrcholov 8-uholníka použije Majo iba  $2 \cdot 3 = 6$  na vrcholy trojuholníkov. To znamená, že mu vždy ostanú dva vrcholy, ktorími nebude prechádzať ani jeden trojuholník. Podľme zistiť, koľko existuje možností na kombináciu dvoch nepoužitých vrcholov.

Ak si označíme vrcholy A, B, C, ..., H, vieme, že vrchol A môže byť v dvojici so 7 vrcholmi – AB, AC, ..., AH. Vrchol B môže byť v dvojici so 6 vrcholmi inými ako A (vrchol A nás už nezaujíma, lebo kombináciu vrcholov AB už máme): BC, BD, ..., BH. Vrchol C môže byť takto v kombinácii s 5 vrcholmi inými ako A a B, vrchol D so 4 vrcholmi, vrchol E s 3, vrchol F s 2, vrchol G s 1 a nakoniec vrchol H s 0 (lebo všetky kombinácie AH, BH, ..., GH sme už započítali). Dokopy teda dostávame, že dvojicu nepoužitých vrcholov môžeme vybrať  $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 28$  rôznymi spôsobmi.

Ostáva určiť, koľkimi spôsobmi vieme zo zvyšných 6 bodov narezať dva trojuholníky tak, aby nemali spoločný bod. Predstavme si týchto 6 vrcholov 8-uholníka ako vrcholy nepravidelného 6-uholníka, do ktorého ideme narezať tie dva trojuholníky. Ak chceme dosiahnuť, aby trojuholníky nemali žiadne spoločné body, musíme oba vytvoriť pomocou trojice susediacich vrcholov tohto 6-uholníka. Tým, že budeme tieto trojice okolo 6-uholníka otáčať, vieme dostať 3 rôzne možnosti, ako takéto trojuholníky vieme vytvoriť.

Teda máme 28 rôznych možností na to, ako vybrať, ktoré 2 z ôsmich vrcholov nepoužijeme, a následne máme 3 možnosti na to, ako vieme zo zvyšných šiestich vrcholov narezať dva trojuholníky. To nám dáva dohromady  $28 \cdot 3 = 84$  možností.

---

**Úloha 11.** Skupina kamarátov sa hrá nasledovnú hru: sedia v kruhu a hovoria pravdivé tvrdenia, ktoré im práve napadnú. Jeden z nich počas tejto hry povedal vetu: „Žiadni dvaja z nás sa nenašli v rovnaký deň v týždni.“ Koľko najviac kamarátov mohlo sedieť v krúžku?

Výsledok: 7

Riešenie: Ak by bolo kamarátov 7, mohli by sa všetci narodiť v iný deň v týždni. Ak by sme pridali ôsmeho, nezostáva nám žiadnen deň, v ktorý by sa mohol tento ôsmy narodiť, aby sa v ten deň už nenašli iný kamarát. Teda najviac môže byť kamarátov 7.

---

**Úloha 12.** Kai sa jedného dňa rozhodol šifrovať slova do palindrómov. Robí to tak, že slovo prekonverte do čísel. Robí to takým spôsobom, že písmenu pripradí jeho poradové číslo v abecede. Takže napríklad A je 1, B je 2, ..., Z je 26 (písmena s diakritikou píše ako variant bez nej). Následne z čísla, ktoré dostal, vyčiarkne všetky párne cifry. Chcel by po tom dostať číselný palindróm. No zistil, že to nefunguje pre všetky slová. Pre ktoré zo slov AUTO, REZEN, KARTA, OPICA, PIERKO dostane číselný palindróm?

Poznámka: Palindróm je číslo, ktoré sa číta rovnako spredu ako od zadu. Napríklad číslo 12321 je palindróm.

Výsledok: REZEN, KARTA

Riešenie: Najprv si zopakujme, že párne cifry sú 0, 2, 4, 6 a 8.

No a teraz podľme šifrovať slova. Zo slova AUTO po nahradení písmen poradím, v akom sú v abecede (A je 1, U je 21, T je 20 a O je 15) dostávame číslo 1212015. Vyčiarknime parné cifry 2 a 0 – zostáva nám 1115, čo nie je palindróm. Rovnako upravíme ostatné slová:

REZEN → 18526514 → 1551

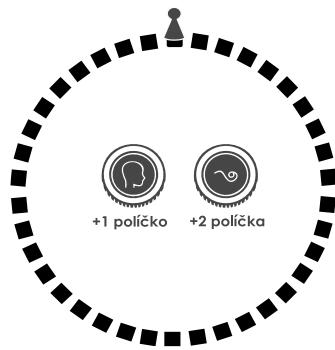
KARTA → 11118201 → 11111

OPICA → 1516931 → 151931

PIERKO → 1695181115 → 19511115

Palindrómy sme dostali len zo slov rezeň (1551) a karta (1111).

**Úloha 13.** Mirko sa nerád hnevá. Preto, keď je osamelý, hrá sa sám so sebou hru človeče, nehnevaj sa. Jeho človeče pozostáva z 38 poličok usporiadaných do kruhu. Mirko na jedno z poličok postaví figúrku. Kedže nemá po ruke kocku, používa miesto toho mincu, a to nasledovným spôsobom: Vždy si hodí mincou a keď na minci padne znak, pohne figúrku o 2 polička, inak pohne figúrku o 1 poličko. Po 26 hodoch mincou sa Mirkovi stalo, že figúrka skončila presne na tom istom poličku, na ktorom začala. Koľkokrát Mirkovi padol na minci znak?



Výsledok: 12

Riešenie: Ak by Mirkovi padali iba čísla (teda vždy sa hýbal o jedno poličko), dostał by sa na štartovné poličko za 38 ťahov. Ak by Mirko miesto dvoch čísel hodil jeden znak (teda by mu dokopy padlo 36 čísel a 1 znak), stále by sa dokopy pohol o 38 poličok, avšak tento raz by mu to zabralo len 37 ťahov. Všimnime si, že za každý znak, ktorým „nahradíme“ dve čísla, sa zmenší počet potrebných ťahov o 1. Z pôvodných 38 ťahov potrebujeme zmenšiť počet ťahov na 26, teda o  $38 - 26 = 12$  ťahov. To znamená, že dokopy muselo Mirkovi padnúť 12 znakov.

**Úloha 14.** Možno ste už videli alebo dopĺňali krížovku, v ktorej vyplňujete prázdné polička písmenami, ktoré vytvárajú slová na základe nápoved vo vyznačených štvorčekoch. Niektoré krížovky používajú nadbytočné polička ako pomôcky pri vyplňovaní niektorých riadkov a stĺpcov. My sme pre vás pripravili matematickú krížovku – ako nápovedy sme napísali čísla. Vaším cieľom je doplniť cifry a znaky operácií (+, -, :, :) do prázdnych poličiek tak, aby sa výsledok výpočtu v riadku či stĺpci rovnal číslu v nápovednom štvorčeku. Vyplňte krížovku a následne získate výsledok tejto úlohy v hornom vyznačenom riadku.  
Poznámka: Do každého prázdnego polička tabuľky treba doplniť buď práve jednu cifru (0 až 9), alebo práve znak operácie (+, -, :, :).

pomôcka: $18 = 12 + 6$	27621	780	0	25	7	18	202	11235
tajnička =								
266 =								
30 =				17 =				
9 =				31 	18 =			
18517 =					7 		25 =	

Výsledok: 21122111

Riešenie: Krížovku vieme vyplniť po niekoľkých úvahách.

Hned' vieme doplniť čísla, ktoré nám ukazujú iba rovnosť dvoch čísel:

pomôcka: $18 = 12 + 6$	27621 	780 	0 	25 	7 	18 	202 	11235 
tajnička =	2			2				1
266 =	7			5				1
30 =	6				17 = 31 			2
9 =	2			3		18 = 7 		3
18517 =	1	8	5	1	7	25 =	2	5

Podľme použiť pomôcku „ $18 = 12 + 6$ “. Vieme, že na ňu potrebujeme 4 políčka, preto ju použijeme v šiestom stĺpci. Výraz  $12 + 6$  napišeme v poradí so 6 na spodku, lebo ak by sme ho napísali v opačnom poradí ( $6 + 12$ ), nevieme dať medzi 2 a 3 žiadne znamienko, ktoré by správne vyriešilo štvrtý riadok. Na druhej strane, ak tam bude 6, na konci štvrtého riadku vieme napísat  $18 = 3 \cdot 6$ .

pomôcka: $18 = 12 + 6$	27621 	780 	0 	25 	7 	18 	202 	11235 
tajnička =	2			2		1		1
266 =	7			5		2		1
30 =	6				17 = 31 		+	2
9 =	2			3		18 = 7 	6	· 3
18517 =	1	8	5	1	7	25 =	2	5

Z momentálnej situácie vidíme, že 17 dostaneme sčítaním dvojciferného čísla končiaceho 2 a jednociferného čísla. To musí byť  $5 + 12$ .

pomôcka: $18 = 12 + 6$	27621 	780 	0 	25 	7 	18 	202 	11235 
tajnička =	2			2		1		1
266 =	7			5		2		1
30 =	6				17 = 31 	5	+	1 2
9 =	2			3		18 = 7 	6	· 3
18517 =	1	8	5	1	7	25 =	2	5

Výsledok 7 získame použitím čísla 5 jednoducho tým, že k nej pripočítame 2. No a vieme usúdiť, že 202 dostaneme ako súčin 101 a 2. Ak by sme tam skúšali zakomponovať ešte jedno znamienko, najväčší výsledok by mohol byť  $9 \cdot 1 \cdot 2 = 18$ .

pomôcka: $18 = 12 + 6$	27621	780	0	25	7	18	202	11235
tajnička =	2			2	2	1	1	1
266 =	7			5	+	2	0	1
30 =	6			$\begin{array}{l} 17 = \\ \hline 31 \\    \end{array}$	5	+	1	2
9 =	2			3	$\begin{array}{l} 18 = \\ \hline 7 \\    \end{array}$	6	·	3
18517 =	1	8	5	1	7	25 =	2	5

Teraz potrebujeme 6 zväčšiť na 30, to urobíme tak, že ju prenásobíme 5. Následne vieme, že 9 dostaneme nejakou operáciou medzi dvojciferným a jednociferným číslom. Ak by to bolo sčítavanie, násobenie alebo odčítavanie dostaneme určite dvoj alebo trojciferný výsledok, čo nechceme. Zostáva nám teda možnosť deliť dvojciferné číslo trojkou, takže dostávame  $27 : 3 = 9$ .

pomôcka: $18 = 12 + 6$	27621	780	0	25	7	18	202	11235
tajnička =	2			2	2	1	1	1
266 =	7			5	+	2	0	1
30 =	6	·	5	$\begin{array}{l} 17 = \\ \hline 31 \\    \end{array}$	5	+	1	2
9 =	2	7	:	3	$\begin{array}{l} 18 = \\ \hline 7 \\    \end{array}$	6	·	3
18517 =	1	8	5	1	7	25 =	2	5

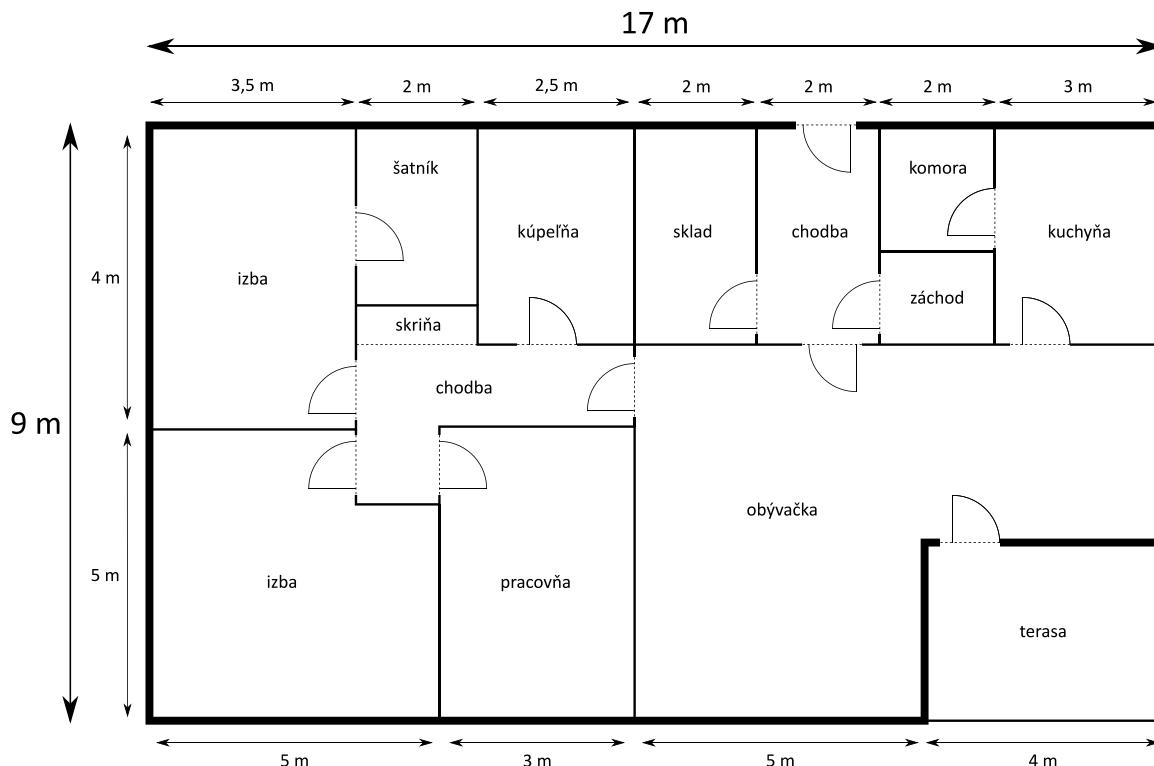
Na záver robíme úvahy, že 78 musíme prenásobiť 10 (aby sme dostali 780). A keďže delenie má prednosť (5 : 5) musíme odčítať tento podiel odčítať od 1, aby sme dostali 0.

pomôcka: $18 = 12 + 6$	27621	780	0	25	7	18	202	11235
tajnička =	2	1	1	2	2	1	1	1
266 =	7	0	-	5	+	2	0	1
30 =	6	·	5	$\begin{array}{l} 17 = \\ \hline 31 \\    \end{array}$	5	+	1	2
9 =	2	7	:	3	$\begin{array}{l} 18 = \\ \hline 7 \\    \end{array}$	6	·	3
18517 =	1	8	5	1	7	25 =	2	5

Dostávame tajničku 21122111.

**Úloha 15.** Jurovi nevyšiel experiment s kyselinou a časť podlahy v pracovni má zničenú. Povedal si teda, že si v pracovni vymení parkety. Spotreboval na to presne 5 balení parkiet. Zistil, že menenie parkiet ho celkom baví. A keďže sa mu nepáčila podlaha ani v obývačke, rozhodol sa vymeniť parkety aj tam. Koľko balení parkiet bude Juro potrebovať v obývačke?

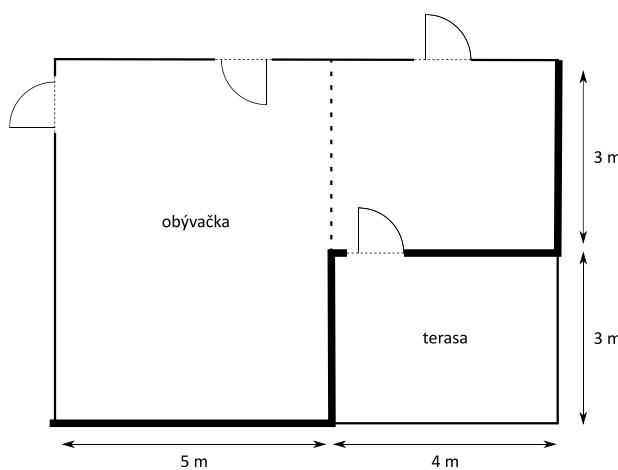
Poznámka: Juro je fakt macher, preto vie vyplniť pracovňu aj obývačku parketami tak, že mu nezvýši žiadnen odpad.



**Výsledok:** 14

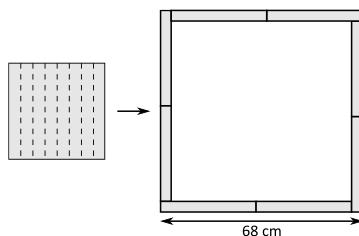
**Riešenie:** Jurova pracovňa má plochu  $3 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 15 \text{ m}^2$ . Ak na jej vyparketovanie spotreboval 5 balení, znamená to, že jedno takéto balenie parkiet vystačí na  $(15 \text{ m}^2) : 5 = 3 \text{ m}^2$ .

Teraz už len potrebujeme zistiť, koľko  $\text{m}^2$  má Jurova obývačka. Ak si ju rozdelíme na pravú a ľavú časť ako na obrázku, dostaneme dva obdĺžniky.



Ten pravý bude mať plochu  $3 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 12 \text{ m}^2$  a ten ľavý bude mať plochu  $5 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 30 \text{ m}^2$ . Jurova obývačka má teda celkovú plochu  $12 \text{ m}^2 + 30 \text{ m}^2 = 42 \text{ m}^2$ . A keďže jedno balenie parkiet nám vystačí na  $3 \text{ m}^2$ , Juro bude na svoju obývačku potrebovať  $42 \text{ m}^2 : 3 \text{ m}^2 = 14$  balení parkiet.

**Úloha 16.** Miška doma našla štvorcový kus látky. Rozhodla sa ho rozstrihať na 8 rovnako širokých prúžkov. Tie potom uložila tak ako na obrázku. Vyznačená strana výsledného útvaru má dĺžku 68 cm. Aká bola dĺžka strany pôvodného štvorcového kusu látky?



Výsledok: 32 cm

Riešenie: Každá strana výsledného útvaru je rovnako dlhá, ako 2 strany pôvodného štvorca a ešte jeden malý kúsok. Tento malý kúsok je veľký ako osmina strany pôvodného štvorca. Ak by strana výsledného útvaru bola osemkrát dlhšia, jej dĺžka by bola  $8 \cdot 68 \text{ cm} = 544 \text{ cm}$ . Zároveň o nej vieme povedať, že bude zložená z  $8 \cdot 2 = 16$  pôvodných strán štvorca a z ôsmich osminových častí pôvodnej strany štvorca, čo je spolu jedna celá strana. Z toho vieme povedať, že osemkrát zväčšená strana pôvodného útvaru je zložená z 17 strán pôvodného štvorca. Preto ak 17 dĺžok strany štvorca meria 544 cm, tak jedna strana štvorca meria  $544 \text{ cm} : 17 = 32 \text{ cm}$ .

**Úloha 17.** Stano nemá rád desatinné čísla, no na jeho smolu ešte nevie zaokrúhľovať. To ho však nezastaví, a tak si vymyslel vlastný spôsob výroby celých čísel z desatinných. Desatinné číslo vždy prenásobí desiatimi, stomi, tisícimi alebo vyššou mocninou desiatky (číslo, čo vyzerá ako jednotka a za ňou niekoľko núl) takou, že potom už číslo nebude desatinné, no bude najmenšie možné. Čiže napríklad 3,14 prenásobí presne stomi, no 5,2 len desiatimi.

Takúto výrobu celého čísla z desatinného Stano považuje za peknú, ak súčet cifier pôvodného desatinného čísla sa rovná mocnine desiatky, ktorou násobíme. Pre aké najväčšie desatinné číslo menšie ako 10 vieme spraviť peknú výrobu?

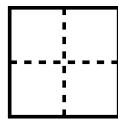
Výsledok: 9,1

Riešenie: Zo zadania vieme, že hľadané číslo má ciferný súčet 10, 100 alebo väčšiu mocninu desiatky. Hľadáme číslo menšie ako 10. To znamená, že pred desatinou čiarkou má iba jednu cifru.

Ak by sme v peknej výrobe násobili 10, tak tých 10 musí byť súčet jednej cifry pred a jednej za desatinou čiarkou. Najväčší taký súčet bude 9,1, lebo na mieste jednotiek chceme mať čo najväčšiu cifru, čo je 9. Ak by sme chceli násobiť 100, musel by byť 100 súčet jednej cifry pred a dvoch cifier za desatinou čiarkou. Z nich ale dostaneme ciferný súčet najviac  $9 + 9 + 9 = 27$ . Ešte horšie to bude, ak budeme chcieť násobiť 1000 či ešte viac cifernými číslami, lebo ciferný súčet bude veľmi malé číslo v porovnaní s príslušnou mocninou desiatky.

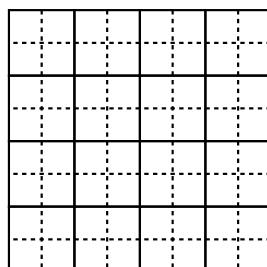
Teraz vieme, že číslo musí mať ciferný súčet 10. Ak chceme, aby bolo čo najväčšie, musí na mieste jednotiek byť cifra 9 a potom na mieste desatín musí byť cifra 1. Najväčšie číslo menšie ako 10, pre ktoré ide urobiť peknú výrobu, je číslo 9,1.

**Úloha 18.** Kaja sa nedávno priučila umenie origami. Od rána do večera skladá papier do komplikovaných obrazcov. Nedávno vystrihla z papiera štvorec so stranou dĺžou 4 cm. Preložila ho na polovicu po dĺžke a následne na polovicu po šírke, čím získala štvorec  $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$ . Proces zopakovala, a tak jej vznikol štvorec so stranou dĺžky 1 cm. Tento štvorec potom rozstrihla po čiarkovanej čiare tak, ako je naznačené na obrázku. Na koľko samostatných kúskov sa papier rozpadne?

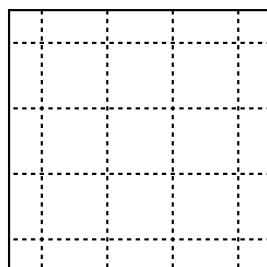


Výsledok: 25

Riešenie: Keby sme po rozstrihnutí opäť rozložili papier, dostali by sme papier ako na tomto obrázku (čierne čiary zodpovedajú ohybom papiera a čiarkované čiary zodpovedajú miestam, kde viedol strih papierom):



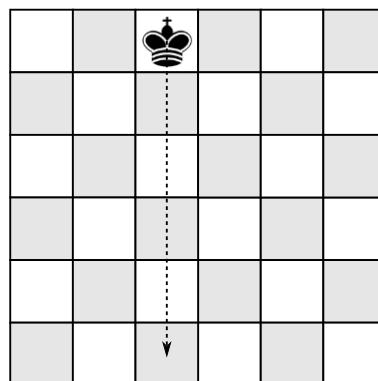
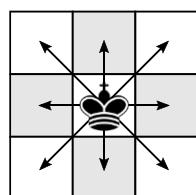
Prípadne ak z obrázka zmažeme ohyby papiera:



Na tomto obrázku ľahko spočítame, že papier sa rozpadne na 25 kúskov.

*Poznámka: Týchto 25 kúskov zodpovedá 25 mrežovým bodom mriežky  $4 \times 4$  (okolo každého z nich vznikol jeden kúsok).*

**Úloha 19.** Teo sa hral s kráľom na šachovnici  $6 \times 6$ . Kráľ sa po šachovnici hýbe ako na obrázku vľavo. Teo už bol ale trochu znudený, a tak sa rozhodol urobiť z toho matematickú úlohu. Postavil teda kráľa na tretie poličko zľava v hornom riadku (vid' obrázok) a rozhodol sa zistiť, kol'kými spôsobmi sa vie dostať za 5 ťahov na poličko v spodnom riadku a rovnakom stĺpci ako na začiatku. Koľko takýchto navzájom rôznych ciest existuje?



Výsledok: 51

Riešenie: Políčko, na ktoré sa má kráľ dostať, je o 5 políčok nižšie. Aby sa tam vôbec dostał, tak sa musí v každom ťahu pohnúť o 1 políčko smerom nadol. Kreslime si nasledovný diagram, ktorý zachytáva počet možností, ako sa na dané políčko vie kráľ dostať, ak sa bude pohybovať iba šikmo doľava dole, priamo dole alebo šikmo doprava dole (počet možností, ako sa môže kráľ dostať na príslušné políčko je súčtom možností, ako sa môže dostať na políčka, z ktorých sa môže dostať na toto políčko):

					
	1	1	1		
1	2	3	2	1	
3	6	7	6	3	1
9	16	19	16	10	4
25	44	51	44	30	14

Z tohto vidíme, že na požadované políčko sa vie kráľ dostať 51 rôznymi spôsobmi.

**Úloha 20.** Terka si na papier píše čísla. Začne trojciferným číslom. Každé ďalšie číslo, ktoré napíše, sa rovná súčinu cifier predošlého čísla. Tako pokračuje, až kým nenapíše nejaké jednociferné číslo. Takže napríklad ak začne číslom 428, tak postupne napíše čísla  $428 \rightarrow 64 \rightarrow 24 \rightarrow 8$ . Koľkými rôznymi trojcifernými číslami môže Terka začať, aby skončila číslom 5?

Výsledok: 33

Riešenie: Najväčšie číslo, ktoré vie Terka dostať vynásobením cifier trojciferného čísla, je  $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ . Terka preto nikdy nenapíše číslo, ktoré by malo viac ako 3 cifry.

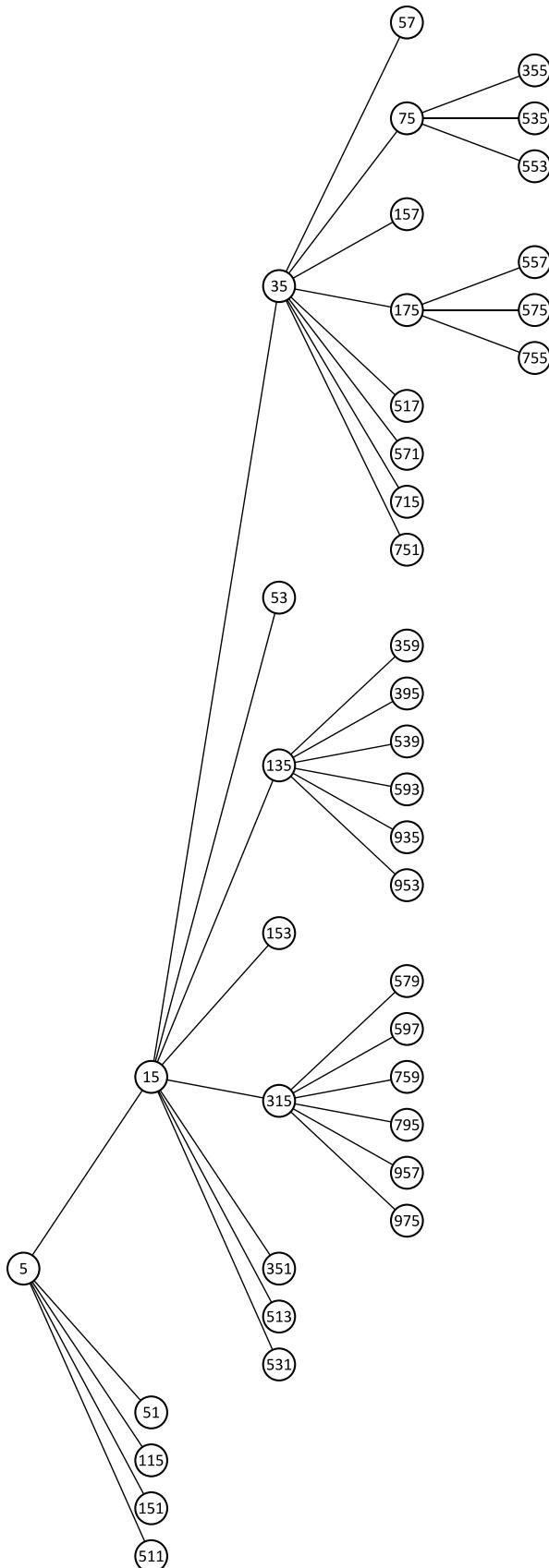
Na úlohu sa pozrime od konca, t.j. zistime, ktoré čísla mohli byť pred číslom 5. Z dvojciferných čísel to sú čísla 15 a 51. Z trojciferných čísel zas čísla 115, 151 a 511. Tým sme našli prvé 3 čísla, ktorými mohla Terka začať. Otázkou je, či Terka mohla začať nejakým iným číslom a dopracovať sa k niektorému z čísel 15, 51, 115, 151 a 511.

K tomu si všimnime zaujímavú vlastnosť – keďže ďalšie čísla vždy dostávame ako súčin cifier, tak vieme dostať iba číslo 0 a čísla, ktoré v prvočíselnom rozklade obsahujú iba prvočísla 2, 3, 5 a 7 (ostatné cifry vieme napísať ako súčin týchto, s výnimkou jednotky, ktorá ale nič nerobí).

Overiť túto vlastnosť je pomerne jednoduché. Vezmeme si číslo a delíme ho postupne dvojkou, ktorú sa dá. Potom ho delíme trojkou, potom pätkou a napokon sedmičkou. Ak na konci dosteneme číslo 1, tak bola nádej, že toto číslo Terka mohla dostať. Ak jednotku nedostaneme, vieme s istotou povedať, že Terka toto číslo nemohla dostať.

Ked' toto spravíme postupne s číslami 15, 51, 115, 151 a 511, tak postupne skončíme na číslach 1, 17, 23, 151, 73. Čísla 51, 115, 151 a 511 preto nedostaneme. S číslom 15 však musíme pokračovať ďalej. Vedeli sme ho dostať z čísel 35, 53, 135, 153, 315, 351, 513 a 531.

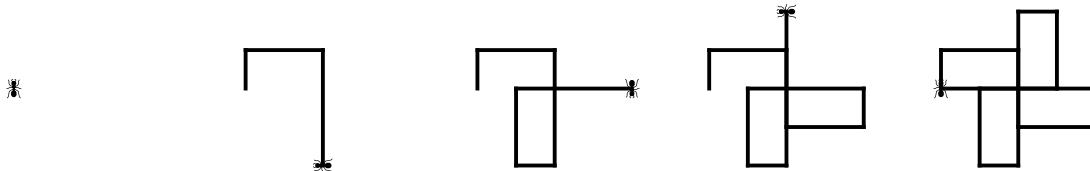
Ked' budeme pokračovať týmto spôsobom, postupne nakreslíme takúto schému (z čísel spojených čiarou je to ľavé získané vynásobením cifier toho pravého):



Teraz zostáva už len spočítať, koľko trojciferných čísel tu máme napísaných. Vo vzostupnom poradí to sú 115, 135, 151, 153, 157, 175, 315, 351, 355, 359, 395, 511, 513, 517, 531, 535, 539, 553, 557, 571, 575, 579, 593, 597, 715, 751, 755, 759, 795, 935, 953, 957, 975. Spolu ich je 33.

**Úloha 21.** Péder pri poslednej prechádzke lesom objavil mravce, čo sa čudne pohybujú do zaujímavo pospájaných štvorcov a obdlžníkov. Vždy prejdú pári krokov rovno a potom zabočia o  $90^\circ$  doprava. Nejaké mravce sa takto svojím pohybom zacyklia a po čase opakujú svoju predošlú cestu, iní sa pohybujú stále ďalej a ďalej od miesta, kde začali.

Napríklad mravec Majko vždy robí 1, 2 a potom 3 kroky. To znamená, že jeho pohyb vyzerá nasledovne: jeden krok, otočka o  $90^\circ$  doprava, dva kroky, otočka o  $90^\circ$  doprava, tri kroky, otočka o  $90^\circ$  doprava, jeden krok, otočka o  $90^\circ$  doprava, dva kroky... Jeho pohyb môžeš vidieť aj na obrázku:

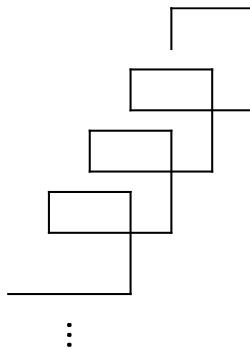


Mravec Miško sa pohybuje rovnako, akurát on robí 2, 4 a 5 krokov.

Mravec Anička opakuje po Miškovi a na koniec pridá ešte 6 krokov, takže jej postupnosť je 2, 4, 5, 6. Napokon mravec Rastko opakuje po Majkovi, ale robí toho ešte viac. Jeho postupnosť vyzerá 1, 2, 3, 4, 5.

Ktorý z mravcov sa bude pohybovať stále ďalej a ďalej od miesta, kde začal, a teda nebude po nejakom čase opakovať svoju predošlú trasu? Ukážte opravovateľovi aj náčrt trasy tohto mravca.

Výsledok: Anička



Riešenie: Útvary, ktoré takto nakreslíme sa nazývajú spirolaterála. Ako vidíme na obrázku, aj Miško aj Rastko sa zacyklia na peknom obrazci, no Anička pôjde ďalej. Je to tak preto, že po prejdení svojej trasy sa Miško a Rastko vrátia na miesto kde začali a budú otočení rovnakým smerom ako vtedy, keď začínali. No Anička bude po každom zopakovaní svojej postupnosti o 3 polička nižšie, o 2 polička vľavo a rovnako otočená ako na začiatku. Takže sa bude stále takto vzdialovať donekonečna a po každom prejdení trasy bude nižšie a vľavo od miesta, kde začínala.

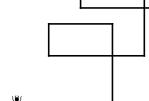
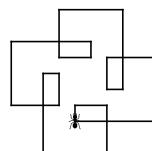
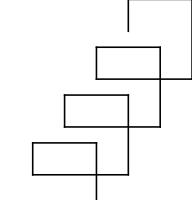
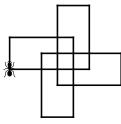
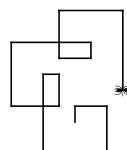
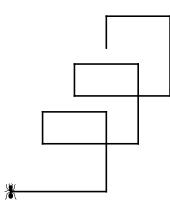
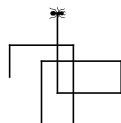
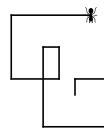
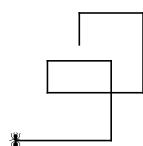
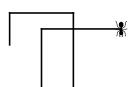
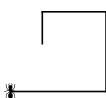
Miško



Anička



Rastú



**Úloha 22.** Šimon nedávno objavil zdravý životný štýl! Keďže je však zaneprázdnenej matematik, musí často posilňovať a pripravovať zdravú stravu úplne naraz. Raz sa počas prípravy svojho banánového smoothie zamyslel, koľko gramov jeho biceps zdvíha, keď svoj pohár s objemom  $500 \text{ cm}^3$  a hmotnosťou  $80 \text{ g}$  úplne celý naplní ošúpanými banánmi. O jednom banáne vie, že celý (aj so šupkou) váži  $0,0001 \text{ t}$ , bez šupky má objem  $100 \text{ ml}$  a šupka tvorí štvrtinu celkovej hmotnosti banánu. Zistite pre Šimona, koľko kilogramov váži takto naplnený ošúpanými banánmi.

Výsledok: 0,455

Riešenie: Keďže  $1 \text{ cm}^3$  má ten istý objem ako  $1 \text{ ml}$ , objem pohára je  $500 \text{ ml}$ . To znamená, že sa do tohto pohára zmestí päť 100-mililitrových ošúpaných banánov. Vieme, že jeden takýto banán aj so šupkou váži  $0,0001 \text{ t}$ , čo je  $0,1 \text{ kg}$ . Keďže šupka tvorí štvrtinu hmotnosti banánu, bez šupky bude jeden banán vážiť iba tri štvrtiny pôvodnej hmotnosti, čo je  $3 \cdot 0,1 \text{ kg} : 4 = 0,075 \text{ kg}$ . Päť ošúpaných banánov v pohári teda bude dokopy vážiť  $5 \cdot 0,075 \text{ kg} = 0,375 \text{ kg}$ . Nakoniec k tejto hmotnosti ešte pripočítame hmotnosť pohára (ktorá je  $80 \text{ g} = 0,08 \text{ kg}$ ) a dostaneme, že celková hmotnosť je  $0,375 \text{ kg} + 0,08 \text{ kg} = 0,455 \text{ kg}$ .

---

**Úloha 23.** Anička má jednu (celkom príčetnú) geometrickú zábavku – hned’ čo zbadá protiľahlé vrcholy nejakého mnohouholníka, neprieči sa a nakreslí medzi ne uhlopriečku! To bolo radostí, keď doma na priečeli našla prečnievajúcu priečku v tvare 10-uholníka. Koľko uhlopriečok môže Anička narysovať v jednom 10-uholníku?

Výsledok: 35

Riešenie: Z každého bodu 10-uholníka môže Anička narysovať 7 rôznych uhlopriečok – jednu do každého z ostatných bodov okrem tých dvoch susedných (kde by miesto narysovania uhlopriečky iba obtiahla stranu 10-uholníka). Každý z desiatich bodov 10-uholníka je teda koncovým bodom siedmich uhlopriečok, čo nám dohromady dáva  $7 \cdot 10 = 70$  koncových bodov v uhlopriečkach. Avšak, každá uhlopriečka sa skladá z dvoch koncových bodov, teda uhlopriečok bude  $70 : 2 = 35$ .

---

**Úloha 24.** Patrik k tohtoročným narodeninám dostal naozaj dychberúci darček – Magický naťahovací obdĺžnik! Ako správny vedec, s obdĺžnikom sa nehrá len tak, ale uskutočňuje na ňom napínavé experimenty. Po tom, čo si nasadil ochranné rukavice, okuliare i biely plášť a splnil všetky podmienky bezpečnej práce v laboratóriu, začal obdĺžnik naťahovať! Všimol si, že ak jeden z rozmerov obdĺžnika natiahol o 12 cm (a pritom zachoval všetky uhly pravé) celkový obvod tohto útvaru sa zdvojnásobil. Patrik nás však naťahuje a nechce nám prezradíť odpoved’... príde na obvod pôvodného obdĺžnika aj vy?

Výsledok: 24 cm

Riešenie: Keď Patrik natiahol jeden z rozmerov obdĺžnika o 12 cm, predĺžila sa dve jeho strany o 12 cm. Obvod obdĺžnika sa teda zväčšil o  $2 \cdot 12 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$ .

Podľa zadania sa však týmto obvod obdĺžnika zdvojnásobil. To znamená, že pôvodný obvod obdĺžnika musí byť rovnaký ako obvod, o ktorý sa obdĺžnik po natiahnutí zväčší. Keďže po natiahnutí sa obvod zväčšíl o 24 cm, tak z toho dostávame, že aj pôvodný obvod musel byť 24 cm.

---

**Úloha 25.** V starodávnom svete Sumerov boli Sumce vychýrená špecialita. Avšak, ako iste viete, v tom čase ľudia ešte nepoužívali desiatkovú sústavu. Preto aj ich mince vyzerali trochu inak ako tie naše. Konkrétnie hodnoty, ktoré by ste mohli nájsť na sumerských minciach, boli napríklad 11, 13 a 17. Koľkými spôsobmi môže pomocou týchto mincí Anička zaplatiť sumu 56, ktorú stojí jeden pekný súmerný sumec?

Výsledok: 2

Riešenie: Rozoberme možnosti podľa toho, koľko mincí v hodnote 17 Anička použije.

Ak Anička nepoužije žiadnu mincu v hodnote 17, tak jej zostane na zaplatenie ostatnými mincami suma 56. V závislosti od počtu použitých mincív hodnote 13 jej potom zostanú na doplatenie nasledujúce sumy:

- ak použije 0 mincív hodnote 13, tak zvyšných  $56 - 0 \cdot 13 = 56$  nemá ako zaplatiť.
- ak použije 1 mincu v hodnote 13, tak zvyšných  $56 - 1 \cdot 13 = 43$  nemá ako zaplatiť.
- ak použije 2 mince v hodnote 13, tak zvyšných  $56 - 2 \cdot 13 = 30$  nemá ako zaplatiť.
- ak použije 3 mince v hodnote 13, tak zvyšných  $56 - 3 \cdot 13 = 17$  nemá ako zaplatiť.
- ak použije 4 mincív hodnote 13, tak zvyšné  $56 - 4 \cdot 13 = 4$  nemá ako zaplatiť.

Takže Anička nemôže použiť 0 mincív v hodnote 17. Pokračujme prípadom, ak Anička použije 1 mincu v hodnote 17. Vtedy jej na doplatenie zostane suma  $56 - 1 \cdot 17 = 39$ :

- ak použije 0 mincív v hodnote 13, tak zvyšných  $39 - 0 \cdot 13 = 39$  nemá ako zaplatiť.
- ak použije 1 mincu v hodnote 13, tak zvyšných  $39 - 1 \cdot 13 = 26$  nemá ako zaplatiť.
- ak použije 2 mince v hodnote 13, tak zvyšných  $39 - 2 \cdot 13 = 13$  nemá ako zaplatiť.
- ak použije 3 mince v hodnote 13, tak zvyšných  $39 - 3 \cdot 13 = 0$  vie zaplatiť pomocou 0 mincív v hodnote 11.

Pokračujme prípadom, ak Anička použije 2 mince v hodnote 17. Na doplatenie jej zostane suma  $56 - 2 \cdot 17 = 22$ .

- ak použije 0 mincín v hodnote 13, tak zvyšných  $22 - 0 \cdot 13 = 22$  vie zaplatiť dvomi mincami v hodnote 11.
- ak použije 1 mincu v hodnote 13, tak zvyšných  $22 - 1 \cdot 13 = 9$  nemá ako zaplatiť.

Napokon nám zostáva prípad, že Anička použije 3 mince v hodnote 17. Na zvyšok jej zostane suma  $56 - 3 \cdot 17 = 5$ , ktorú ale nevie už nijako vyskladať.

Dokopy sme teda našli 2 spôsoby ( $17 + 13 + 13 + 13$  a  $17 + 17 + 11 + 11$ ), ako vie Anička vyskladať sumu 56.

---

**Úloha 26.** Peťo má doma masívny kalkulovátor. Kalkulovátor má na displeji štyri riadky. Do prvého riadku vždy naťukáme nejaké dvojciferné číslo. Následne kalkulovátor do druhého riadku vypíše číslo z prvého riadku s vymenenými ciframi (čiže ak je v prvom riadku 12, tak v druhom bude 21). V treťom riadku sa nachádza súčin čísel z prvého a druhého riadku a vo štvrtom riadku sa nachádza súčet čísel z prvého a druhého riadku. Kalkulovátor ale nanešťastie Peťovi padol, displej sa rozbil a dá sa prečítať len tretí riadok. Na ňom je číslo 1300. Aké číslo by Peťo videl v štvrtom riadku, ak by displej neboli pokazený?

Výsledok: 77

Riešenie: Vrchné dve čísla sa nesmú končiť nulou, inak by jedno z nich muselo začínať nulou, respektívne byť jednociferné. No najväčší možný súčin jedno a dvojciferného čísla je  $99 \cdot 9 = 891$ . Potom, aby sme v súčine 1300 dostali na mieste jednotiek cifru 0, musia mať čísla v prvých dvoch riadkoch na mieste jednotiek cifru 5 a nejakú párnú cifru. Z toho už vieme, že na horných dvoch riadkoch bude jedna dvojic 25 a 52, 45 a 54, 65 a 56 alebo 85 a 58. Keď každú dvojicu navzájom vynásobíme ( $25 \cdot 52 = 1300$ ,  $45 \cdot 54 = 2430$ ,  $65 \cdot 56 = 3640$ ,  $85 \cdot 58 = 4930$ ), zistíme, že súčin 1300 dostaneme násobením 25 a 52. Na spodnom riadku je súčet týchto dvoch čísel, čiže číslo  $52 + 25 = 77$ .

---

**Úloha 27.** Svetlana Štedrá dnes k meninám dostala balík sladkostí, ktorý obsahoval 60 cukríkov. Aby ukázala, aká Štedrá naozaj je, rozhodla sa, že ich všetky rozdá medzi svoje kamarátky a žiadny cukrík si nenechá. Svetlana by chcela, aby každá jej kamarátka dostala rovnaký počet cukríkov a aby jej žiadne cukríky nezvýšili. Ukázalo sa však, že Svetlane sa to nemôže podarí. Kolko najmenej kamarátok môže Svetlana mať?

Výsledok: 7

Riešenie: Svetlana chce rozdeliť 60 cukríkov medzi svoje kamarátky tak, aby jej žiadne neostali. Ak sa jej to má podať, počet jej kamarátok musí byť deliteľom čísla 60 (inak by ich nerozdelila bez zvyšku). Zadanie nám však hovorí, že Svetlane sa to nemôže podať. Najmenší možný počet jej kamarátok je preto najmenšie kladné celé číslo, ktoré nie je deliteľom čísla 60. Keď budeme deliť číslo 60 číslami od 1 vzostupne, dostaneme, že  $60 : 1 = 60$ ,  $60 : 2 = 30$ ,  $60 : 3 = 20$ ,  $60 : 4 = 15$ ,  $60 : 5 = 12$ ,  $60 : 6 = 10$ . Pri ďalšom číslе zistíme, že delenie  $60 : 7$  nemá celočíselný výsledok, a teda 7 je hľadaným číslom. Preto môže mať Svetlana najmenej 7 kamarátok.

---

**Úloha 28.** Zajko Bojko má veľmi rád mrkvičky. Na svojom poli pestuje mrkvičky tvaru takého trojuholníka ABC, že dĺžky všetkých jeho strán sú vyjadrené v centimetroch celým číslom. Zároveň pre dĺžky strán trojuholníkových mrkvičiek v centimetroch platí, že dĺžka strany AB je jednociferné číslo, dĺžka strany BC je dvojciferné číslo a dĺžka strany CA je trojciferné číslo. Zajka Bojka, ktorý má rád mrkvičky s veľkým obvodom, by teraz zaujímalo, aký najväčší obvod v centimetroch môže takáto mrkvička mať. Pomôžte mu to vypočítať.

Výsledok: 215

Riešenie: Pre trojuholníkovú mrkvičku musí platiť trojuholníková nerovnosť, ktorá hovorí, že súčet dvoch najmenších strán trojuholníka je väčší, ako najdlhšia strana trojuholníka. Keďže najmenšie budú strany s jednociernou a dvojciernou dĺžkou, vieme pre trojuholník ABC zo zadania napísať túto nerovnosť ako  $|AB| + |BC| > |CA|$ . Keďže chceme, aby bol obvod čo najväčší, dosadíme za  $|AB|$  a  $|BC|$  najväčšie možné hodnoty, teda 9 cm a 99 cm. Dostávame, že  $9\text{ cm} + 99\text{ cm} > |CA|$ , teda  $108\text{ cm} > |CA|$ . Najväčšia možná celočíselná hodnota pre  $|CA|$ , ktorá spĺňa túto nerovnosť, je 107 cm. Teda najväčší možný obvod Bojkovej mrkvičky je  $|AB| + |BC| + |CA| = 9\text{ cm} + 99\text{ cm} + 107\text{ cm} = 215\text{ cm}$ .

**Úloha 29.** Popri tom, ako Kubko minule cestoval vlakom a hľadal svoje miesto na sedenie podľa čísla na svojej miestenke, všimol si, ako zaujímavo sú číslované miesta vo vlaku. Vo vozni, v ktorom bol, bolo 9 kupé a v každom z nich bolo 6 miest. Každé miesto bolo označené dvojciferným číslom, kde prvá cifra označovala poradové číslo kupé (od 1 do 9) a druhá cifra označovala poradové číslo miesta v rámci kupé (od 1 do 6). Takže napríklad v štvrtom kupé boli miesta s číslami 41, 42, 43, 44, 45 a 46. Keďže cesta bola Kubkovi dlhá, spočítal súčet čísel všetkých miest vo vozni. Aký súčet Kubko dostal?

Výsledok: 2889

Riešenie: Skúsme si výpočet trošku uľahčiť. Rozdeľme si najprv všetky čísla na jednotky a desiatky – teda miesto súčtu čísel  $11 + 12 + 13 + \dots$  budeme sčítavať  $1 + 2 + 3 + \dots$  a  $10 + 10 + 10 + \dots$

Sčítajme najprv všetky jednotky. Keďže v každom kupé sú rovnaké čísla miest 1, 2, 3, 4, 5 a 6, v každom kupé bude súčet jednotiek rovnaký, konkrétnie  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ . Kupé však máme dohromady 9, súčet jednotiek vo všetkých kupé preto bude  $9 \cdot 21 = 189$ .

Teraz už len musíme vypočítať súčet všetkých desiatok. Vieme, že pre každé kupé to znamená 6 čísel – pre kupé 1 to je 6 čísel 10, pre kupé 2 to je 6 čísel 20, atď., až nakoniec, pre kupé 9 je to 6 čísel 90. Všimnime si však, že tieto čísla vieme medzi sebou veľmi pekne popárovať tak, aby nám ich súčet dal pekné číslo 100. Najprv sčítajme každé číslo 10 s každým číslom 90. Keďže počet oboch týchto čísel je 6, takýto výpočet vieme zapísť ako  $6 \cdot (10 + 90) = 6 \cdot 100 = 600$ . Rovnako vieme postupovať aj pre dvojice čísel 20 a 80, 30 a 70, 40 a 60. Nakoniec nám ostane už len 6 čísel 50, ktorých súčet vyráťame jednoducho ako  $6 \cdot 50 = 300$ . Dokopy teda súčet desiatok bude  $4 \cdot 600 + 1 \cdot 300 = 2400 + 300 = 2700$ . To už iba sčítame so súčtom všetkých jednotiek a dostaneme, že súčet čísel všetkých miest bol  $2700 + 189 = 2889$ .

**Úloha 30.** Pandu zaujali maľované križovky. Nebol by to ale Panda, keby nad nimi nezačal rozmyšľať matematicky. Zobral si preto tabuľku  $3 \times 3$  a začal vyfarbovať niektoré jej políčka. Vtom v jeho hlave skrsla otázka: Koľkými spôsobmi sa dajú vyfarbiť políčka tejto tabuľky tak, aby žiadne dve vyfarbené políčka nemali spoločnú stranu?

*Poznámka:* Medzi výhovujúce vyfarbenia počítame aj možnosť, že Panda nevyfarbil žiadne políčko.

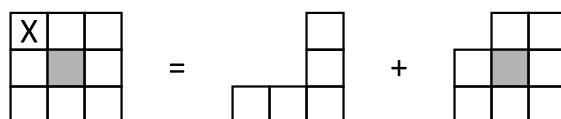
Výsledok: 63

Riešenie: Počet možností budeme hľadať nasledovným spôsobom: Vyberieme si niektoré políčko tabuľky. To má dve možnosti – buď je vyfarbené, alebo nie je. Takto rozdelíme skúšanie na dva prípady, ktoré osobitne musíme preskúmať.

Vyberme si na začiatok napríklad prostredné políčko tabuľky. Ak je zafarbené, tak žiadne s ním susediace políčko nemôže byť zafarbené, čím nám zostanú na zafarbenie len 4 rohové políčka. Ak však nie je zafarbené, tak ešte musíme riešiť zvyšných 8 políčok. Schematicky (políčko, na základe ktorého rozdeľujeme prípady, je označené písmenom X):

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline X & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

Štyri rohové políčka spolu už nesusedia, a tak sa neovplyvňujú. Každé z nich môže byť buď vyfarbené, alebo nevyfarbené. Máme tak  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$  možností pre ne. Ale pre zostávajúcich 8 políčok musíme použiť predošlú stratégiu. Tak si vyberme napríklad niektoré rohové políčko. Schematicky sa nám to rozdelí na tieto dva prípady:



Tu si vieme trochu pomôcť tým, že si všimneme nasledovnú vec – je jedno že zostávajúce políčka sú takto „zatočené“. Dostávame totiž rovnaký počet prípadov, ako keby bol rovnaký počet políčok v jednom rade vedľa seba. Ak teda teraz budeme robiť podobný rozbor, ako doteraz, tak si všimneme nasledovné:

$$\begin{array}{c} X \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \square \quad \square \quad \square \quad \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} \square \quad \square \quad \square \quad \square \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} X \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \square \quad \square \quad \square \quad \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} \square \quad \square \quad \square \quad \square \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} X \quad \square \quad \square \quad \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \square \quad \square \quad \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} \square \quad \square \quad \square \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} X \quad \square \quad \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \square \quad \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} \square \quad \square \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} X \quad \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \hline \end{array}$$

Kedže pre jedno políčko máme len 2 možnosti a pre dve políčka máme 3 možnosti, tak späťne ľahko dopočítame, že pre tri políčka máme 5 možností, pre štyri políčka 8 možností, pre päť políčok 13 možností, pre šesť políčok 21 možností a pre sedem políčok 34 možností.

Z nás toho najviac zaujíma päť políčok a sedem políčok. Pripočítajme tieto možnosti k 16 možnostiam, ktoré sme našli už skôr. Spolu tak má Panda  $34 + 13 + 16 = 63$  možností.

**Úloha 31.** Ninka prednedávnom objavila jeden známy slovenský hudobný hit. Všimla si, že sa obzvlášť hodí na cestu po schodoch. Kedže však sama býva len na ôsmom poschodí, počas tejto cesty si ho nemôže vypočuť celý... Rozhodla sa preto, že si cestu trochu predĺži. Svoju cestu začala na prízemí (0. poschodí) a pokračovala na 5. poschodie, potom späť na 3. poschodie, následne na 7., neskôr na 6. a až potom domov na 8. poschodie. Kolko poschodí počas tejto cesty nastúpala (smerom nahor)?

Výsledok: 11

Riešenie: Zaujíma nás iba počet poschodí, ktoré Ninka nastúpala. Najprv stúpala z 0. poschodia na 5., počas čoho nastúpala  $5 - 0 = 5$  poschodí. Potom klesla na 3., odkiaľ stúpala na 7. poschodie, počas čoho nastúpala  $7 - 3 = 4$  poschodia. Odtiaľ klesla na 6. poschodie, odkiaľ stúpala na 8., počas čoho nastúpala  $8 - 6 = 2$  poschodia. Dokopy teda Ninka nastúpala  $5 + 4 + 2 = 11$  poschodí.

**Úloha 32.** Nica má v nedeľu ráno vždy naponáhlo, chce stihnuť cestu do kostola aj nedeľný nákup, no vie, že potraviny zatvárajú už o dvanástej. Už vie, že cesta do kostola od bráničky jej domu trvá 5 minút. Cesta od bráničky do obchodu, ktorý má presne opačným smerom, jej pešo trvá 7 minút. Žiadnu z týchto vzdialenosí nikdy nezmerala, vie však, že od dverí jej domu k bráničke pred domom je to 100 metrov a prejšť tento úsek jej trvá presne jednu minútu. Kolko metrov je v tom prípade vzdialenosí kostol od obchodu?

Poznámka: Nica vždy kráča rovnako rýchlo.

Výsledok: 1200

Riešenie: Vieme, že kostol je od Nicinho domu presne opačným smerom ako potraviny. Ak to teda z jej domu do kostola trvá 5 minút a z jej domu do obchodu to trvá 7 minút, z kostola do obchodu to bude trvať  $5 + 7 = 12$  minút.

Vieme, že 100 metrov ku bráničke Nica prekráča za 1 minútu. Teda, keďže vždy kráča rovnako rýchlo, za každú 1 minútu jej chôdze Nica nachodí 100 metrov. Preto, ak bude od kostolu k obchodu kráčať 12 minút, prekráča pri tom  $12 \cdot 100 = 1200$  metrov.

---

**Úloha 33.** Kubo cestuje vlakom po mestách, ktorých vlakové stanice ležia na jednej priamke v poradí Matbojovo, Pikopretekovo, Pikomatovo, Pikofyzovo a Terabiovo. Matbojovo je od Pikopretekova vzdialenosť 5 km. Pikopretekovo od Pikomatova 6 km. Pikomatovo od Pikofyzova 7 km. No a Pikofyzovo od Terabiova 3 km. Kubko sa rozhodol, že vystúpiť z vlaku môže len vtedy, keď ním prejde nepárny počet kilometrov. Svoju cestu Kubo začína v Pikofyzove a chce sa dostať až do Matbojova, pričom na svojej ceste môže prestúpiť lubovoľne veľakrát, a to na každej stanici (ak pritom splní svoju podmienku). Koľko najmenej kilometrov musí Kubko prejsť aby splnil, čo si zaumienil?

Výsledok: 18

Riešenie: Všimnime si, že najkratšou priamou cestou z Pikofyzova do Matbojova by Kubo prešiel 7 km + 6 km + 5 km = 18 km. Otázka ostáva, či vie túto trasu prejsť tak, aby vždy vystúpil po nepárnom počte kilometrov. Odpoved' je, že sa mu to podarí, ak sa najprv odvezie do Pikomatova (7 km) a odtiaľ už priamo do Matbojova (6 km + 5 km = 11 km). Rovnako by sa mu to podarilo, ak by sa najprv odviezol až do Pikopretekova (7 km + 6 km = 13km) a odtiaľ do Matbojova (5 km). Tak ako tak, Kubko prejde najmenej 18 km.

---

**Úloha 34.** Sedem súrodencov sa po náročnom dni vrátilo domov s hŕbou domácich úloh. Kedže sa chcú spolu ísť hrať čo najskôr, rozhodli sa, že si navzájom pomôžu a úlohy si rovnomerne prerozdelia. Anežka dostala 6 domácich úloh, Barborka 12, Cecil 7, Drahomíra 15, Emanuel 10 a Frederik len jednu. O počte Gabrielových domácich úloh vieme iba to, že ich je viac ako 20, ale menej ako 30. Koľko úloh musí mať Gabriel na to, aby sa im podarilo prerozdeliť všetky úlohy medzi súrodencov spravodlivo? Každé z detí počíta úlohy samostatne a vždy vypočítá úlohu celú.

Výsledok: 26

Riešenie: Kedže chceme úlohy rozdeliť spravodlivo medzi 7 súrodencov, musí byť celkový počet úloh násobkom čísla 7. Spočítajme najprv, koľko domácich majú dohromady všetci okrem Gabriela:  $6 + 12 + 7 + 15 + 10 + 1 = 51$ . Následne vieme, že Gabriel mal viac ako 20 úloh ale menej ako 30, čo znamená, že mal úloh najmenej 21 a najviac 29. Z toho vyplýva, že najmenší možný počet úloh všetkých súrodencov je  $51 + 21 = 72$ , a najväčší možný je  $51 + 29 = 80$ . Jediné číslo medzi 72 a 80, ktoré je násobkom čísla 7, je číslo 77, teda toľko mali úloh všetci súrodenci dohromady. Gabriel preto musel mať  $77 - 51 = 26$  úloh.

---

**Úloha 35.** Anička sa rozhodla si na staré kolená postaviť dom. Architektúru však nikdy neštudovala, takže bol jej projekt z veľkej časti založený na improvizácii. Jediné čo vedela je, že chce okolo svojej trojuholníkovej strechy presne obmotať šnúru vianočných svetielok dĺžky 7 metrov, ktorú má doma. Koľko rôznych trojuholníkov s celočíselnými dĺžkami strán spĺňa túto podmienku a má obvod 7 metrov?

Výsledok: 2

**Riešenie:** Vieme, že v tomto trojuholníku musí platiť trojuholníková nerovnosť  $a + b > c$ , kde  $c$  je dĺžka najdlhšia strana v trojuholníku. Akú dĺžku však môže táto najdlhšia strana  $c$  vôbec mať? Nemôže mať dĺžku 4 m, lebo by potom súčet dĺžok zvyšných dvoch strán trojuholníka bol iba  $7\text{ m} - 4\text{ m} = 3\text{ m}$ , čo je menej ako 4 m, a teda trojuholníková nerovnosť by neplatila. Z tohto istého dôvodu nemôže mať strana  $c$  ani dĺžky väčšie než 4 m.

Zároveň však nemôže mať strana  $c$  ani dĺžku 2 m či menšiu, lebo najväčší možný obvod trojuholníka s najdlhšou stranou 2 m je  $2\text{ m} + 2\text{ m} + 2\text{ m} = 6\text{ m}$ . Aby sme dosiahli požadovaný obvod 7 m, museli by sme pridať stranu dĺžky aspoň 3 m, avšak potom by už strana s dĺžkou 2 m nebola najdlhšou stranou. Teda, jediná možná dĺžka, ktorú môže mať strana  $c$ , je 3 m. Súčet dĺžok zvyšných dvoch strán teda musí byť rovný  $7\text{ m} - 3\text{ m} = 4\text{ m}$ . No, a máme len dve možnosti, ako rozložiť dĺžky týchto dvoch strán, aby mali súčet dĺžok 4 m. Budťo budú  $2\text{ m} + 2\text{ m}$ , alebo  $1\text{ m} + 3\text{ m}$ . Čiže, podľa podmienok môžeme vytvoriť len 2 rôzne trojuholníky – budťo s dĺžkami strán 3 m, 3 m a 1 m, alebo 3 m, 2 m a 2 m.

---

**Úloha 36.** V krajinе Matbojovo jazdia dve autobusové linky – a A a B. Obe linky jazdia v pravidelných intervaloch a obsluhujú aj zastávku „Námestie“. Dopravný podnik Matbojovo by však chcel zaviesť novú linku C, ktorá by tiež obsluhovala zastávku „Námestie“. Rozmýšľajú však, v akom intervale by mala premávať. Pritom si všimli, že ak všetky tri linky naraz odídu zo zastávky „Námestie“ o 6:00, tak:

- Ak bude linka C premávať každých 12 minút, tak sa všetky linky opäť stretnú na zastávke „Námestie“ o 8:00.
- Ak bude linka C premávať každých 16 minút, tak sa všetky linky opäť stretnú na zastávke „Námestie“ o 7:20.
- Ak bude linka C premávať každých 20 minút, tak sa všetky linky opäť stretnú na zastávke „Námestie“ o 6:40.
- Ak bude linka C premávať každých 25 minút, tak sa všetky linky opäť stretnú na zastávke „Námestie“ o 9:20.

V akom čase (po 6:00) sa prvýkrát stretnú na zastávke „Námestie“ linky A a B?

**Výsledok:** 6:40

**Riešenie:** Predstavme si štvrtú linku D, ktorá chodí na Námestie iba vtedy, keď by spolu prišli na Námestie linky A a B. Môžeme to urobiť, lebo nás nezaujíma, ako chodia na námestie linky A a B samostatne, ale iba to, kedy tam sú obe naraz. Potom riešime úlohu, kedy prvýkrát príde linka D na Námestie.

Vety o tom, v akých intervaloch bude linka C premávať a kedy sa stretne s linkou D, vieme prepísat:

- Ak bude linka C premávať v násobkoch 12 minút, tak sa obe linky opäť stretnú na zastávke „Námestie“ po 120 minútach.
- Ak bude linka C premávať v násobkoch 16 minút, tak sa obe linky opäť stretnú na zastávke „Námestie“ po 80 minútach.
- Ak bude linka C premávať v násobkoch 20 minút, tak sa obe linky opäť stretnú na zastávke „Námestie“ po 40 minútach.
- Ak bude linka C premávať v násobkoch 25 minút, tak sa obe linky opäť stretnú na zastávke „Námestie“ po 200 minútach.

Linka D sa opäť stretne s linkou C, keď doba premávania liniek bude spoločný násobok intervalov príchodu na Námestie. Preto hľadáme taký interval premávania linky D, ktorý bude mať s intervalmi premávania linky C najväčší spoločný násobok dobu, za ktorú sa opäť stretne.

Pre prvú možnosť je interval 40 minút. Totiž, keď rozložíme spoločný násobok (120) musí obsahovať všetky prvočísla prvočíselného rozkladu čísel, z ktorých je utvorený. Pokiaľ sa nejaké prvočíslo v rozklade bude viackrát opakuje, musí sa opakovať rovnaký počet krát aj v rozklade jedného z čísel. Teda ak je prvočíselný rozklad  $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$  a jedno z čísel, z ktorých je utvorený, je číslo 12 s rozkladom  $2 \cdot 2 \cdot 3$ , tak druhé číslo musí mať v rozklade  $2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$ .

Rovnaký postup by sme aplikovali aj pre ostatné tri možnosti, kde výsledné intervale sú 5;  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  a  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ . Aby platila prvá možnosť, dané číslo musí byť aspoň 40, no zároveň toto číslo je násobok aj ostatných troch možností. Taktiež, aby mohla platiť tretia možnosť musí to byť najviac 40. Interval 40 minút je teda jediný možný interval pre linku D. Preto sa linky A a B stretávajú na Námestie každých 40 minút, a teda prvýkrát od 6:00 prídu na Námestie naraz o 6:40.

---

**Úloha 37.** Saru nikdy nebavilo riešenie sudoku a vždy sa pri pohľade na hľavolam radšej zamerala na 9 menších štvorcov obtiahnutých hrubou líniou. Ako zručnú matematicku jej hned' napadlo mnoho ďalších možných prevedení tejto hry. Rozhodla sa preto, že zistí koľko rôznych obdlížnikov sa dá vytvoriť obťahovaním existujúcich čiar v tejto tabuľke. Ako však rýchlo zistila, obtiahnuť takto celú tabuľku by bolo náročné a zdľavé. Zamerala sa preto na jej menšiu verziu s rozmermi  $2 \times 8$  štvorčekov. Najviac koľko obdlížnikov dokážete nakresliť pomocou hrán tabuľky s rozmermi  $2 \times 8$ ?

Poznámka: Štvorec tiež pokladáme za obdlížnik.

Výsledok: 108

Riešenie: Vyriešme najprv o trochu jednoduchšiu úlohu, kde budeme hľadať obdlížniky v tabuľke  $1 \times 8$ . Tie vieme klasifikovať podľa počtu štvorčekov, z ktorých sa skladajú. Konkrétnie:

Z 1 štvorčeka sa skladá 8 obdlížnikov.

Z 2 štvorčekov sa skladá 7 obdlížnikov.

Z 3 štvorčekov sa skladá 6 obdlížnikov.

Z 4 štvorčekov sa skladá 5 obdlížnikov.

Z 5 štvorčekov sa skladajú 4 obdlížniky.

Z 6 štvorčekov sa skladajú 3 obdlížniky.

Z 7 štvorčekov sa skladajú 2 obdlížniky.

Z 8 štvorčekov sa skladá 1 obdlížnik.

V tabuľke  $1 \times 8$  tak máme spolu  $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$  obdlížnikov.

Teraz sa pozrieme na to, ako nám táto informácia pomáha pre obdlížniky v tabuľke  $2 \times 8$ . Každý obdlížnik v tejto tabuľke patrí do jednej z týchto troch skupín:

1) obdlížniky, ktoré sú všetky len v prvom riadku

2) obdlížniky, ktoré sú všetky len v druhom riadku

3) obdlížniky, ktoré sú aj v prvom, aj v druhom riadku

Obdlížnikov v skupine 1) je rovnako veľa ako obdlížnikov v tabuľke  $1 \times 8$ , keďže samotný prvý riadok je iba tabuľka  $1 \times 8$ . Týchto obdlížnikov je tak 36. Podobne aj v skupine 2) je 36 obdlížnikov. Dokonca aj v skupine 3) je 36 obdlížnikov – totiž ak sme si vybrali, že výška obdlížnika bude 2, tak vieme spojiť riadky, v ktorých sa tento obdlížnik nachádza, do jedného. A potom riešime rovnakú úlohu ako v prípade 1) alebo 2).

Dokopy tak dostávame, že všetkých možností pre obdlížniky je  $36 + 36 + 36 = 108$ .

---

**Úloha 38.** Róberta rada cestuje vlakom po Slovensku a často sa jej pri tom stáva, že sa jej vlak hýbe pomalšie ako by mal... inými slovami – mešká. Tento raz si však všimla, že podľa hodín na stanici ide vlak predsa úplne načas a pritom hodinky na jej ruke ukazujú, že už tu mal dávno byť. Zistila tak, že tento raz nie je chyba na strane vlaku, ale jej pokazené hodinky sa hýbu rýchlejšie, ako by mali.

Raz, keď išla vlakom z Prievidze do Bratislavu, všimla si, že presné hodiny na stanici a aj jej hodinky ukazovali čas 12:00. V Partizánskom si na presných hodinách na stanici všimla čas 12:30, kým jej hodinky ukazovali čas 12:35. Potom Róberta zaspala a zbudila sa, keď jej hodinky ukazovali čas 14:13. Aký bol vtedy presný čas?

Výsledok: 13:54

Riešenie: Počas Róbertinej cesty z Prievidze do Partizánskeho ubehlo v skutočnosti 30 minút, kým na Róbertiných hodinkách ubehlo 35 minút. To znamená, že vždy, keď na Róbertiných hodinkách ubehne 7 minút, v skutočnosti ubehne iba 6 minút. V momente Róbertinho zobudenia sa ubehlo na jej hodinkách od odchodu z Prievidze  $2 \cdot 60 + 13 = 133$  minút. Takže v skutočnosti ubehlo len  $(133 : 7) \cdot 6 = 114$  minút. To znamená, že v skutočnosti bolo 13:54.

---

**Úloha 39.** Paulínska doma maľovala steny na fialovo. Keď bolo vymaľované, stále jej ostala nejaké farba, a tak išla maľovať ďalšie steny. Konkrétnie nafarbila na fialovo steny svojho oblúbeného kvádra. Aj potom jej však kváder prišiel nudne monotematický, preto ho rozrezala na 42 rovnakých malých kociek. Pri tom platilo, že každá zo strán pôvodného kvádra bola dlhšia ako stena malej kocky. Koľko stien týchto malých kociek je nafarbených na fialovo?

Výsledok: 82

Riešenie: Dajme tomu, že malé kocky majú stranu dlhu 1 cm (je jedno, akú jednotku použijeme, môžu to byť centimetre, alebo aj čokoľvek iné). To znamená, že jedna z nich má objem  $1 \text{ cm}^3$ . Teda, ak Paulínska veľký kváder rozrezala na 42 takýchto kociek, objem veľkého kvádra bude  $42 \text{ cm}^3$ .

Aby sme však vyriešili úlohu, zaujímajú nás dĺžky strán tohto kvádra. Na začiatok vieme, že žiadna z týchto strán nemá dĺžku 1 cm – inak by neplatila podmienka, aby každá zo stien pôvodného kvádra bola dlhšia ako stena malej kocky. Teda, keď hľadáme dĺžky strán kvádra, hľadáme také tri čísla iné než 1, ktoré keď vzájomne vynásobíme, dostaneme číslo 42 (aby výsledný objem kvádra mohol byť  $42 \text{ cm}^3$ ).

No, a keďže v prvej časti rozklade čísla 42 figurujú práve tri čísla ( $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ ), existuje len jedna možnosť na trojicu čísel, ktoré spĺňajú túto podmienku. Dĺžky strán kvádra sú teda práve tieto tri prvočísla: 2 cm, 3 cm a 7 cm.

Zadanie sa nás pýta na počet zafarbených stien malých kociek. To budú logicky tie steny, ktoré sa nachádzali na povrchu pôvodného kvádra. Keďže sme sa rozhodli, že malá kocka má hranu dlhú 1 cm, jedna stena malej kocky má povrch  $1 \text{ cm}^2$ . Preto vieme otázku zo zadania prepísat ako: „Koľko  $\text{cm}^2$  má povrch pôvodného kvádra?“

A to už vieme jednoducho zistiť, keďže poznáme všetky rozmerov kvádra. Jeho povrch sa skladá z dvoch trojíc rovnakých obdlžníkov, teda plocha tohto povrchu bude  $2 \cdot 2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} + 2 \cdot 3 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} + 2 \cdot 7 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2 + 42 \text{ cm}^2 + 28 \text{ cm}^2 = 82 \text{ cm}^2$ . Zafarbených stien malých kociek bude preto 82.

---

**Úloha 40.** Štyria kamaráti chcú prejsť cez jaskyňu na druhú stranu hory. Majú však iba 1 baterku – do jaskyne sa nedá vstúpiť bez nej. Jaskyňa je úzka, a tak v nej môžu byť maximálne dvaja ľudia zároveň. Keď dvaja ľudia prechádzajú cez jaskyňu, vždy sa hýbu rýchlosťou pomalšieho. Časy na prejedenie jaskyňou sú postupne:

Adam: 1 minúta

Beáta: 2 minúty

Cyril: 5 minút

Daniel: 8 minút

Cez jaskyňu prešli najrýchlejšie, ako sa dalo. Ako dlho im to trvalo?

Výsledok: 15 minút

Riešenie: Ukážeme, že najrýchlejší spôsob, ako to kamaráti vedia spraviť, trvá 15 minút.

Najprv ukážeme, že na menej ako 15 minút to nejde. Všimnime si, že vždy musia cez jaskyňu prejsť dva ľudia a potom sa jeden z nich musí vrátiť, aby priniesol baterku naspať na opačnú stranu. Cez jaskyňu tak treba prejsť aspoň 5-krát. V aspoň z jednom z týchto presunov musí byť Daniel, ktorému to trvá 8 minút. Ideálne by bolo, aby s ním prešiel aj Cyril, ktorému to trvá 5 minút (aby Cyril nezdržoval ostatných) – v opačnom prípade by prechod trval isto aspoň 8 + 5 minút plus prechody ostatných, čo

by bolo viac ako 15 minút. Avšak aby toto bolo efektívne, musí ich na druhej strane čakať niekto, kto je schopný rýchlo doniesť baterku na opačnú stranu jaskyne. Preto takýto pohyb dáva zmysel iba po tom, ako najprv Adam s Beátou prešli cez jaskyňu a jeden z nich sa vrátil naspať s baterkou pre Cyrila s Danielom. Po prechode Cyrila s Danielom sa vráti s baterkou aj druhý z dvojice Adam a Beáta. Posledný prechod potom spravia spoločne Adam s Beátou.

Tým dostávame, že najrýchlejší je nasledovný postup:

1. Najprv jaskyňou prejdú Adam s Beátou (2 minúty)
2. Adam sa vráti späť (1 minúta)
3. Cyril s Danielom prejdú jaskyňou (8 minút)
4. Beáta sa vráti späť (2 minúty)
5. Adam s Beátou znova prejdú jaskyňou (2 minúty)

Spolu to teda bude skutočne trvať  $2 + 1 + 8 + 2 + 2 = 15$  minút.

**Úloha V1.** Kubo našiel na povale zvláštnu dosku, ktorú vidíš na obrázku. Dovtípil sa, že ju má vyplniť číslami 1, 2 a 3 tak, aby v každom riadku a každom stĺpci bolo každé číslo presne raz. Navyše majú medzi číslami v políčkach platíť nerovnosti naznačené (rôzne pootočenými) znamienkami „>“ medzi niektorými políčkami. Ako má Kubo vyplniť dosku?

^		^
		>

Výsledok:

1	3	2
^		^
2	1	3
	3	2
	>	1

Riešenie: Pozrime sa na prvý riadok. Čísla na jeho krajoch sú od niečoho menšie. Takže ani jedno z nich nemôže byť číslo 3. To preto bude v strede prvého riadka. Podobne v druhom riadku máme na krajoch čísla, ktoré sú od niečoho väčšie, takže sa nemôžu rovnať 1. V strede druhého riadka tak bude číslo 1:

	3	
^		^
	1	
		>

V druhom stĺpci už chýba iba číslo 2, takže bude v spodnom riadku. Od tejto dvojky je menšie iba číslo 1, ktoré bude napravo od dvojky. Zároveň v treťom stĺpci nám chýbajú už iba čísla 2 a 3. Tak ich doplníme tak, aby sedela nerovnosť medzi nimi:

	3	2
^		^
	1	3
	2	>
	1	

Zostáva už len do každého riadka doplniť to číslo, ktoré v ňom chýba. Tým dostaneme nasledovné vyplnenie Kubovej dosky:

1	3	2
^		^
2	1	3
	3	2
	>	1

**Úloha V2.** Po objednaní dokonalej nehmotnej kladky™ z fyzikálneho obchodu prišiel Matkovi potvrzovací kód. Kedže to však nie je hocaký obchod, na bezpečnosti svojich transakcií si dávajú obzvlášť záležať. Overovací kód Matkovej objednávky je 8-miestne číslo, ktorého súčet cifier je 14. Pre toto číslo platí, že neexistuje úsek zasebou-idúcich cifier, ktorý má súčet 3 (teda ani žiadna z cifier nie je 3) a zároveň sú všetky cifry väčšie ako 0. Do overovacej SMS má Matko zadať toto 8-miestne číslo. Viete na základe týchto informácií toto 8-miestne číslo uhádnuť?

**Výsledok:** 11411411

**Riešenie:** Najprv si všimnime, že hľadané 8-miestne číslo musí obsahovať cifru 1. Ak by to tak totiž nebolo, museli by mať všetky cifry hodnotu aspoň 2, takže súčet cifier by bol aspoň  $8 \cdot 2 = 16$ . To je ale viac ako požadovaných 14. Takže hľadané číslo isto niekde obsahuje cifru 1.

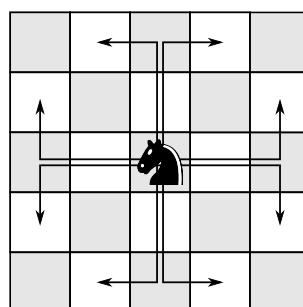
Táto cifra 1 môže susediť s najviac jednou cifrou 1 (ak by susedila s dvomi, tak by spolu mali súčet 3 – to je však zakázané). Zároveň však nemôže susediť s cifrou 2 (spolu by mali zakázaný súčet 3) ani s cifrou 3 (ktorá je sama o sebe zakázaná). Vo výslednom čísle tak musia byť súvislé úseky najviac dvoch jednotiek obkolesené ciframi s hodnotou aspoň 4 (prípadne sú tieto jednotky na začiatku alebo konci výsledného čísla).

Niekde vo výslednom čísle je tak cifra 1 susediaca s cifrou aspoň 4. Zvyšných  $8 - 2 = 6$  cifier má mať súčet najviac  $14 - 5 = 9$ . Zopakováním argumentu z úvodu dostaneme do výsledného čísla ďalšiu cifru 1. Na zvyšných 5 cifier zostane súčet najviac 8, čo dá ďalšiu jednotku. Potom na zvyšné 4 cifry zostane súčet najviac 7, čo dá ešte jednu jednotku. Doteraz tak vo výslednom čísle musíme mať aspoň 4 jednotky a aspoň jednu cifru s hodnotou aspoň 4 (a zostávajú ešte 3 cifry so súčtom najviac 6). Pre každú z týchto cifier 1 platí to, že môže tvoriť súvislý úsek najviac dvoch jednotiek a potom musí byť obkolesená cifrou s hodnotou aspoň 4, alebo krajom výsledného čísla. Naše 4 jednotky tvoria isto aspoň dva takéto súvislé úseky jednotiek.

Ukážeme si, že musíme pridať ešte aspoň jednu cifru s hodnotou 4. Rozhodne totiž nemôže súčasne platiť, že oba súvislé úseky jednotiek sú na kraji výsledného čísla (medzi týmito súvislými úsekmi by boli 4 ďalšie cifry) a že oba súvislé úseky sú z niekorej strany obkolesené cifrou s hodnotou 4, o ktorej už vieme (medzi týmito súvislými úsekmi by bola iba 1 ďalšia cifra). Preto musíme pridať ďalšiu cifru s hodnotou aspoň 4. Na zvyšné 2 cifry zostane už len súčet najviac 2, takže to musia byť dve jednotky. Zároveň obe cifry s hodnotou aspoň 4 museli mať hodnotu presne 4.

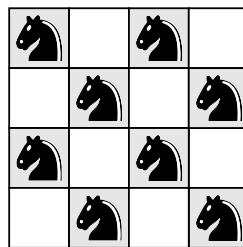
Z toho už dostávame, že výsledné číslo musí obsahovať 6 jednotiek a 2 štvorky v tom jedinom poradí, ktoré je dovolené. To je poradie 11411411.

**Úloha V3.** Miškovi moc nejde normálny šach, no rád sa zamýšľa nad jednotlivými figúrkami. Naposledy ho zaujal jazdec. I zobrať si Miško hneď šachovnicu  $4 \times 4$  a uvažoval, ako by tam toho jazdca vedel dať. Jazdec sa pohybuje vždy o dve polička rovno, potom sa otočí o  $90^\circ$  buď doľava, alebo doprava a pohne sa o jedno poličko. Akoby do písmena L (vid' obrázok). Koľko najviac jazdcov môže Miško umiestniť na šachovnicu  $4 \times 4$  tak, že sa navzájom nebudú ohrozovať? Ak sa dve figúrky v šachu ohrozujú, znamená to, že sa navzájom vedia vyhodiť, čiže jedna z nich sa vie dostať na poličko, kde stojí tá druhá. Nezabudnite vysvetliť, prečo tam viac jazdcov už Miško uložiť nevie.



Výsledok: 8

Riešenie: Po chvíľke hrania sa nájdeme takéto rozloženie 8 jazdcov:



V tomto rozložení sa žiadna dvojica jazdcov vzájomne neohrozuje – každý jazdec totiž ohrozuje iba svetlé políčka, no všetci jazdci sú na tmavých políčkach.

Zostáva nám už len zdôvodniť, prečo viac jazdcov už nepoložíme. Rozdeľme si políčka na 8 dvojíc tak ako na tomto obrázku (dvojica je tvorená políčkami s rovnakými číslami):

1	5	7	3
8	3	1	5
6	2	4	7
4	8	6	2

Každá dvojica políčok má tú vlastnosť, že v nej môže byť najviac jeden jazdec – inak by sa jazdci na políčkach v rámci dvojice navzájom ohrozovali. Preto nevieme umiestniť viac ako 8 jazdcov.

Dokopy tak vieme, že Miško môže na šachovnicu umiestniť najviac 8 jazdcov.

---

**Úloha V4.** Sonička má 15 mentolových tričiek s vtákopyskom a 5 čiernych tričiek s vtákopyskom. Okrem toho nosí buď modré, hnedé, alebo šedé nohavice. Má ešte jednu zlatú mikinu a jednu tmavozelenú mikinu. Vždy si berie so sebou buď pingpongovú raketu, alebo biliardové tágo.

Oblieka sa podľa nasledovných podmienok:

- zlatú mikinu má vtedy, keď má pri sebe pingpongovú raketu
- keď má na sebe čierne tričko s vtákopyskom, nosí tágo
- k čierнемu tričku s vtákopyskom nenosí modré nohavice
- šedé nohavice nosí len so zlatou mikinou
- Sonička nosí každý deň nové tričko, pričom čierne tričko nosí len v tie dni, ktoré dávajú po delení 4 zvyšok 2.

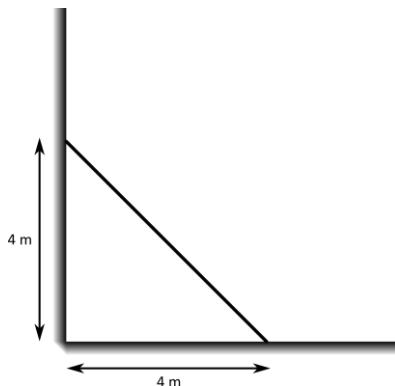
Akú farbu nohavíc mala Sonička v 18. deň?

Poznámka: Sonička nosí každý deň práve jedno tričko, jedny nohavice, jednu mikinu a jeden doplnok (buď raketu, alebo tágo).

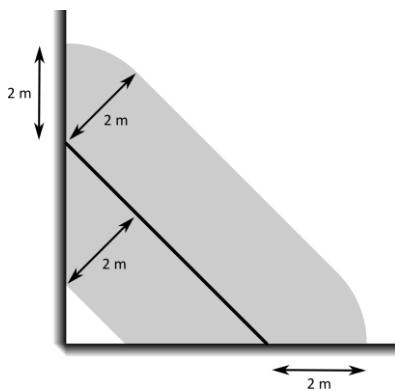
Výsledok: hnedú

Riešenie: Sonička má 18. deň čierne tričko, pretože po vydelení čísla 18 číslom 4 dostávame podiel 4 a zvyšok 2. Vieme, že ak má čierne tričko s vtákopyskom, potom nemôže mať modré nohavice a musí mať so sebou tágo. Ak má tágo, nemôže mať pri sebe pingpongovú raketu. Ak však nemá pingpongovú raketu, nemôže mať zlatú mikinu. Ak nemôže mať zlatú mikinu, tak ani šedé nohavice. Takže Sonička nemôže mať ani šedé a ani modré nohavice, a preto bude mať v 18. deň hnedé nohavice.

**Úloha V5.** Záhradník Adam má v rohu svojej záhrady trávnik, ktorý by chcel pokosiť. Využije na to svoju ovečku. V rohu záhrady pevne natiahol lano tak ako na obrázku. Na toto lano priviazał ovečku na lane, ktoré sa po tom prvom mohlo voľne pohybovať. Výsledkom bolo, že ovečka sa vedela dostať na všetky miesta, ktoré sú od prvého lana vzdialé 2 metre. Nakreslite celú plochu, ktorú vie ovečka spásť.



Výsledok:



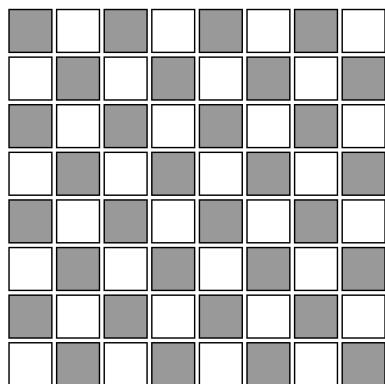
**Riešenie:** Ovečka sa od lana nevzdiali na viac ako 2 metre. Oblast spasenú ovečkou preto vieme nájsť tak, že v každom bode lana nakreslíme kruh so stredom v tomto bode a polomerom 2 metre. Potom vezmeme už len tú časť, ktorá je ešte stále v záhrade a budeme mať výslednú oblasť. Lenže nám sa nechce kresliť nekonečne veľa kruhov. A tak si celý proces vieme predstaviť aj jednoduchšie. Nakreslíme si jeden z kruhov a budeme ho posúvať po lane. Ak by kruh zanechával za sebou farbu, vyfarbil by všetky miesta, kam sa ovečka vie dostať (keby neexistovali steny v rohu záhrady).

Týmto postupom by sme po odstránení časti mimo záhrady vyfarbili oblasť na obrázku vyššie. V smere od lana k rohu preto ovečka spasie lichobežník s výškou 2 metre. Opačným smerom spasie obdĺžnik s výškou 2 metre a dve časti kruhu s polomerom 2 metre.

**Úloha V6.** Žaba rád chodí k štvorcovému jazeru a skáče tam po štvorcových leknách, ktoré sú usporiadané do mriežky  $8 \times 8$ . Neskáče ale len tak náhodne, Žaba vždy skáče rovnobežne s brehom (čiže so stranou lekna, t.j. štvorca v mriežke). Okrem toho vždy strieda dĺžku skoku: najprv skáče o jedno lekno, potom o dve, o jedno, o dve... Začína na ľubovoľnom lekne. Je možné, aby sa po 10 skokoch ocitol opäť tam, kde začína?

Výsledok: nie

**Riešenie:** Ofarbime si jednotlivé lekná (políčka) tak ako na tomto obrázku:



Všimnime si, že farba lekna, na ktorom je Žaba, sa mení podľa istých pravidiel. Vždy, keď Žaba skočí o 1 políčko, tak sa zmení farba lekna, na ktorom stojí. Naopak, ak skočí o 2 políčka, tak sa nezmení farba políčka, na ktorom stojí. Medzi 10 skokmi je 5 takých, pri ktorých sa zmení farba lekna. Po týchto skokoch preto stojí Žaba na políčku inej farby, ako stál na začiatku. Preto rozhodne nemôže stať na políčku, na ktorom začína.

**Iné riešenie:**

Po 10 skokoch sa Žaba pohne o  $5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 15$  políčok. Rozdeľme si skoky na dve skupiny – tie v smere doľava alebo doprava a tie v smere hore alebo dole. Keďže Žaba skákal o 15 políčok, čo je nepárne číslo, tak v jednej zo skupín musia byť skoky, ktorých súčet dĺžok je tiež nepárne číslo. Povedzme napríklad, že je to v skupine skokov doľava alebo doprava. Lenže na to, aby sa Žaba vrátil na políčko, z ktorého začal, tak sa musel pohnúť o rovnako veľa doľava ako doprava. Preto by musel byť súčet dĺžok skokov v tejto skupine párnny. Keďže je ale nepárny, tak vieme, že Žaba sa nemohol vrátiť na lekno, kde začína.

