Aprendizaje automático
Cuestionario

Alejandro García Montoro
agarciamontoro@correo.ugr.es

27 de abril de 2016

1. Bonus

Ejercicio 1. *Resolver los siguientes problemas:*

1. *La distancia entre dos curvas en el plano está dada por el mínimo de la expresión $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ donde (x_1, y_1) está sobre una de las curvas y (x_2, y_2) está sobre la otra. Calcular la distancia entre la línea $x+y=4$ y la elipse $x^2+2y^2=1$.*

Solución. Lo primero que tenemos que notar es que el mínimo de $g(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ se alcanza en el mismo punto que el mínimo de $g^2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$. Tomando g^2 como función a minimizar y con las restricciones enunciadas, el lagrangiano con el que tenemos que trabajar es el siguiente:

$$\mathcal{L}(x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda, \mu) = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-\lambda(x_1+y_1-4)-\mu(x_2^2+2y_2^2-1)$$

Calculamos sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{L} = 2(x_1-x_2)-\lambda$$
$$\frac{\partial}{\partial y_1}\mathcal{L} = 2(y_1-y_2)-\lambda$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{L} = -2(x_1-x_2)-2\mu x_2$$
$$\frac{\partial}{\partial y_2}\mathcal{L} = -2(y_1-y_2)-4\mu y_2$$
$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\mathcal{L} = x_1+y_1-4$$
$$\frac{\partial}{\partial \mu}\mathcal{L} = x_2^2+2y_2^2-1$$

Igualando a cero las derivadas parciales anteriores y despejando los términos con λ o μ llegamos al sistema de ecuaciones siguiente, cuyas soluciones son los puntos críticos del lagrangiano $\mathcal{L}$; es decir, los candidatos a mínimo:

$$2(x_1 - x_2) = \lambda \tag{1}$$
$$2(y_1 - y_2) = \lambda \tag{2}$$
$$-2(x_1 - x_2) = -2\mu x_2 \tag{3}$$
$$-2(y_1 - y_2) = -4\mu y_2 \tag{4}$$
$$x_1 + y_1 = 4 \tag{5}$$
$$x_2^2 + 2y_2^2 = 1 \tag{6}$$

Si ahoar sumamos las ecuaciones 1 y 3 por un lado y la 2 y 4 por otro llegamos a las expresiones siguientes:

$$\lambda = -2\mu x_2 \tag{7}$$
$$\lambda = -4\mu y_2 \tag{8}$$

Igualando 7 y 8, y teniendo en cuenta que $\mu \neq 0$ —esto es evidente, ya que si lo fuera, por 3 y 4 tendríamos un punto de intersección entre ambas curvas, situación que no se da—, llegamos a

$$x_2 = 2y_2$$

Imponiendo 6 concluimos que

$$x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \tag{9}$$
$$y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \tag{10}$$

Igualando ahora 1 y 2 y sustituyendo los valores que acabamos de deducir tenemos el siguiente par de ecuaciones junto con 5:

$$x_1 - y_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} x_1 + y_1 = 4$$

de donde concluimos que

$$x_1 = 2 + \frac{1}{2\sqrt{6}} \tag{11}$$
$$y_1 = 2 - \frac{1}{2\sqrt{6}} \tag{12}$$

La distancia entre la recta y la elipse es, por tanto:

$$g(2 + \frac{1}{2\sqrt{6}}, 2 - \frac{1}{2\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = \sqrt{2}\left(2 - \frac{3}{2\sqrt{6}}\right) \approx 1{,}962402$$