

Aprendizaje automático

Cuestionario 1

Alejandro García Montoro
agarciamontoro@correo.ugr.es

27 de abril de 2016

1. Bonus

Ejercicio 1. Resolver los siguientes problemas:

1. La distancia entre dos curvas en el plano está dada por el mínimo de la expresión $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ donde (x_1, y_1) está sobre una de las curvas y (x_2, y_2) está sobre la otra. Calcular la distancia entre la línea $x + y = 4$ y la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$.

Solución. Lo primero que tenemos que notar es que el mínimo de $g(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ se alcanza en el mismo punto que el mínimo de $g^2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Tomando g^2 como función a minimizar y con las restricciones enunciadas, el lagrangiano con el que tenemos que trabajar es el siguiente:

$$\mathcal{L}(x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda, \mu) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \lambda(x_1 + y_1 - 4) - \mu(x_2^2 + 2y_2^2 - 1)$$

Calculamos sus derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{L} &= 2(x_1 - x_2) - \lambda \\ \frac{\partial}{\partial y_1} \mathcal{L} &= 2(y_1 - y_2) - \lambda \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \mathcal{L} &= -2(x_1 - x_2) - 2\mu x_2 \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \mathcal{L} &= -2(y_1 - y_2) - 4\mu y_2 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L} &= x_1 + y_1 - 4 \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \mathcal{L} &= x_2^2 + 2y_2^2 - 1\end{aligned}$$

Igualando a cero las derivadas parciales anteriores y despejando los términos con λ o μ llegamos al sistema de ecuaciones siguiente, cuyas soluciones son los puntos críticos del lagrangiano \mathcal{L} ; es decir, los candidatos a mínimo:

$$2(x_1 - x_2) = \lambda \quad (1)$$

$$2(y_1 - y_2) = \lambda \quad (2)$$

$$-2(x_1 - x_2) = -2\mu x_2 \quad (3)$$

$$-2(y_1 - y_2) = -4\mu y_2 \quad (4)$$

$$x_1 + y_1 = 4 \quad (5)$$

$$x_2^2 + 2y_2^2 = 1 \quad (6)$$

Si ahora sumamos las ecuaciones 1 y 3 por un lado y la 2 y 4 por otro llegamos a las expresiones siguientes:

$$\lambda = -2\mu x_2 \quad (7)$$

$$\lambda = -4\mu y_2 \quad (8)$$

Igualando 7 y 8, y teniendo en cuenta que $\mu \neq 0$ —esto es evidente, ya que si lo fuera, por 3 y 4 tendríamos un punto de intersección entre ambas curvas, situación que no se da—, llegamos a

$$x_2 = 2y_2$$

Imponiendo 6 concluimos que

$$x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (9)$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (10)$$

Igualando ahora 1 y 2 y sustituyendo los valores que acabamos de deducir tenemos el siguiente par de ecuaciones junto con 5:

$$x_1 - y_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + y_1 = 4$$

de donde concluimos que

$$x_1 = 2 + \frac{1}{2\sqrt{6}} \quad (11)$$

$$y_1 = 2 - \frac{1}{2\sqrt{6}} \quad (12)$$

La distancia entre la recta y la elipse es, por tanto:

$$g\left(2 + \frac{1}{2\sqrt{6}}, 2 - \frac{1}{2\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \sqrt{2} \left(2 - \frac{3}{2\sqrt{6}}\right) \approx 1,962402$$