Trabajo 1

Alejandro García Montoro

20 de marzo de 2016

Generalización y visualización de datos

Ejercicio 1

Para la realización de este ejercicio se ha implementado la siguiente función, que genera una lista de `N` vectores, cada de los cuales contiene una muestra de tamaño `dim` de una distribución uniforme entre los valores especificados por el vector de dos elementos `rango`.

```
# Devuelve una lista de N vectores de dimensión dim con una muestra
# uniforme en el intervalo [rango[1], rango[2]]
simula_unif <- function(N, dim, rango){
    lapply(rep(dim, N), runif, min = rango[1], max = rango[2])
}
```

La implementación es sencilla: como `runif` —el generador aleatorio de muestras de una distribución uniforme— recibe el número de muestras que se desea generar, basta aplicar esta función al número `dim` tantas veces como se indique en `N`. Esto se consigue con la función `lapply`, que devuelve una lista del mismo tamaño que la lista que se le pasa como primer argumento, ejecutando entonces la función pasada como segundo argumento sobre cada uno de los valores de la lista.

Ejercicio 2

De forma análoga al ejercicio anterior, la siguiente función genera una lista de `N` vectores, cada uno de los cuales contiene una muestra de tamaño `dim` de una distribución gaussiana de media 0 y desviación típica correspondiente al elemento i-ésimo especificado en el vector `sigma`.

```
# Devuelve una lista de N vectores de dimensión dim con una muestra
# gaussiana de media cero y desviación sigma
simula_gauss <- function(N, dim, sigma){
    lapply(rep(dim, N), rnorm, mean = 0, sd = sigma)
}
```

La implementación es análoga a la anterior, cambiando la función `runif` por `rnorm`. En este caso, además, es necesario notar que el elemento i-ésimo del vector `sigma`, que tiene dimensión igual a `dim` —si no tiene la misma dimensión, se ciclará sobre él como es habitual en R—, indica la desviación que tendrá la muestra i-ésima de cada uno de los vectores devueltos.

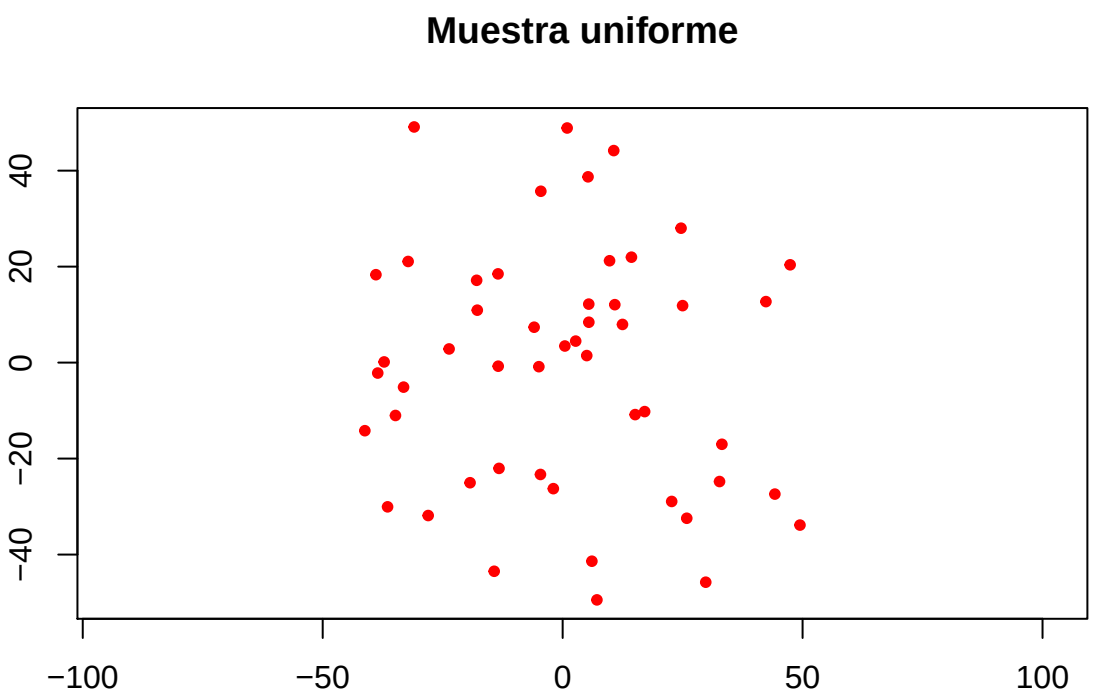
Ejercicio 3

Para la resolución de este ejercicio generamos primero los datos solicitados, usando la función anterior y tomando como `x` (resp. `y`) los primeros (resp. segundos) valores de cada vector generado:

```r
# Muestra uniforme de 50 puntos en el cuadrado [-50,50] x [-50,50]
datos_unif <- simula_unif(50, 2, c(-50,50))

# Guardamos las coordenadas en variables diferentes
unif.x <- unlist(lapply(datos_unif, '[[', 1))
unif.y <- unlist(lapply(datos_unif, '[[', 2))
```

Para el dibujo de la gráfica basta usar la función `plot`:

```r
plot(unif.x, unif.y, col = 'red', pch = 20, asp=1,
     main="Muestra uniforme", xlab="", ylab="")
```



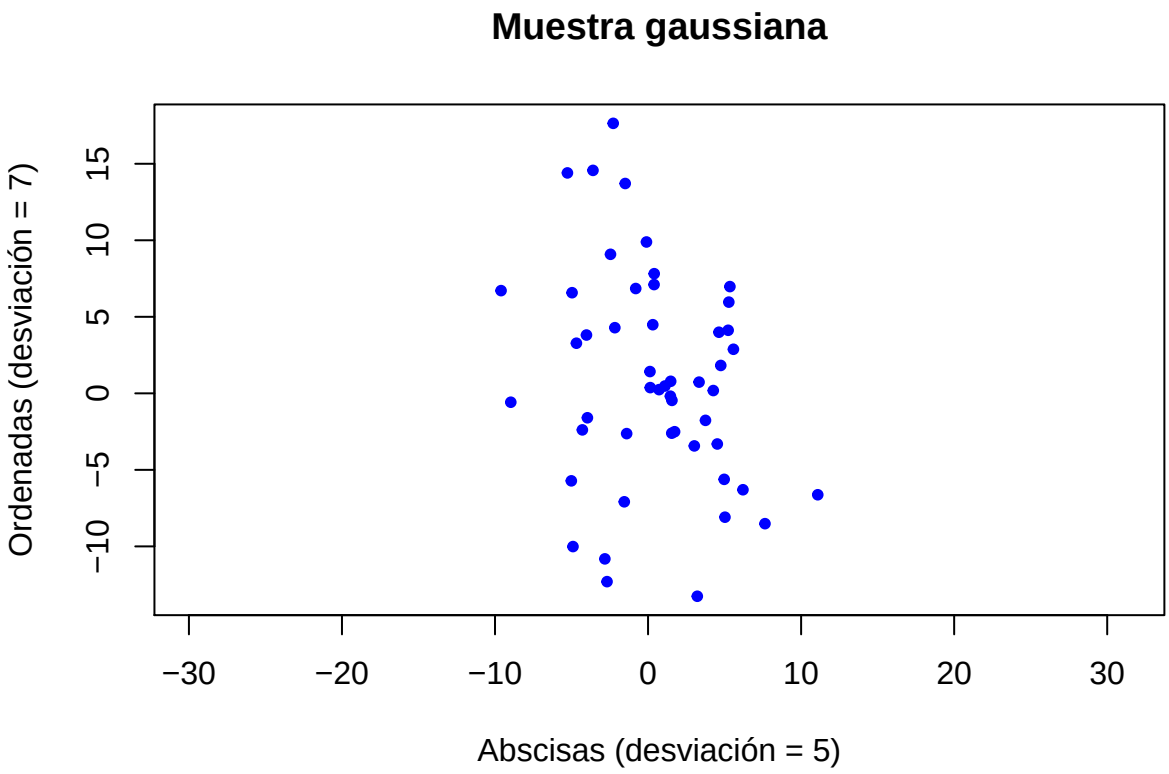
Ejercicio 4

Igual que antes, generamos primero los datos y guardamos en variables diferentes las ordenadas y las abscisas:

```r
# Muestra gaussiana de 50 puntos con media 0, desviación 5 en la
# abscisa y desviación 7 en la ordenada

# Guardamos las coordenadas en variables diferentes
datos_norm <- simula_gauss(50, 2, c(5,7))
norm.x <- unlist(lapply(datos_norm, '[[', 1))
norm.y <- unlist(lapply(datos_norm, '[[', 2))
```

Para la generación de la gráfica ejecutamos `plot` como antes:

```r
plot(norm.x, norm.y, col = 'blue', pch = 20, asp = 1,
     main="Muestra gaussiana", xlab="Abscisas (desviación = 5)", ylab="Ordenadas (desviación = 7)")
```



Ejercicio 5

Para la generación de una recta aleatoria se ha implementado la siguiente función:

```
# Genera los parámetros (a,b) de una recta aleatoria y = a*x + b que corta
# al cuadrado [intervalo[1], intervalo[2]] x [intervalo[1], intervalo[2]]
simula_recta <- function(intervalo){
    # Simulamos dos puntos dentro del cuadrado intervalo x intervalo
    punto1 <- runif(2, min=intervalo[1], max=intervalo[2])
    punto2 <- runif(2, min=intervalo[1], max=intervalo[2])

    # Generamos los parámetros que definen la recta
    a <- (punto2[2] - punto1[2]) / (punto2[1] - punto1[1])
    b <- -a * punto1[1] + punto1[2]

    # Devolvemos un vector concatenando ambos parámetros
    c(a,b)
}
```

Ejercicio 6

Para este ejercicio y el resto de la práctica vamos a crear una estructura abstracta que genera funciones etiquetadoras. Para ello definimos `generador_etiquetados`, una función que al ser llamada con otra función `f` como parámetro devuelve una función etiquetadora; es decir, una función que devuelve 1 o -1 según el signo que toma la función `f` al recibir los parámetros `x` e `y`:

```
# Devuelve una función etiquetadora basada en el signo que
# toma el parámetro f
generador_etiquetados <- function(f){
    function(x,y){
        sign(f(x,y))
    }
}
```

Resolver el ejercicio con la estructura anterior es ahora más sencillo: simplemente tenemos que definir la función $f(x, y) = y - ax - b$, donde a y b son los parámetros que definen la recta $y = ax + b$.

Por tanto, basta simular una recta haciendo uso de la función implementada anteriormente y definir la función f_1, que será la que pasaremos al generador de funciones etiquetadoras:

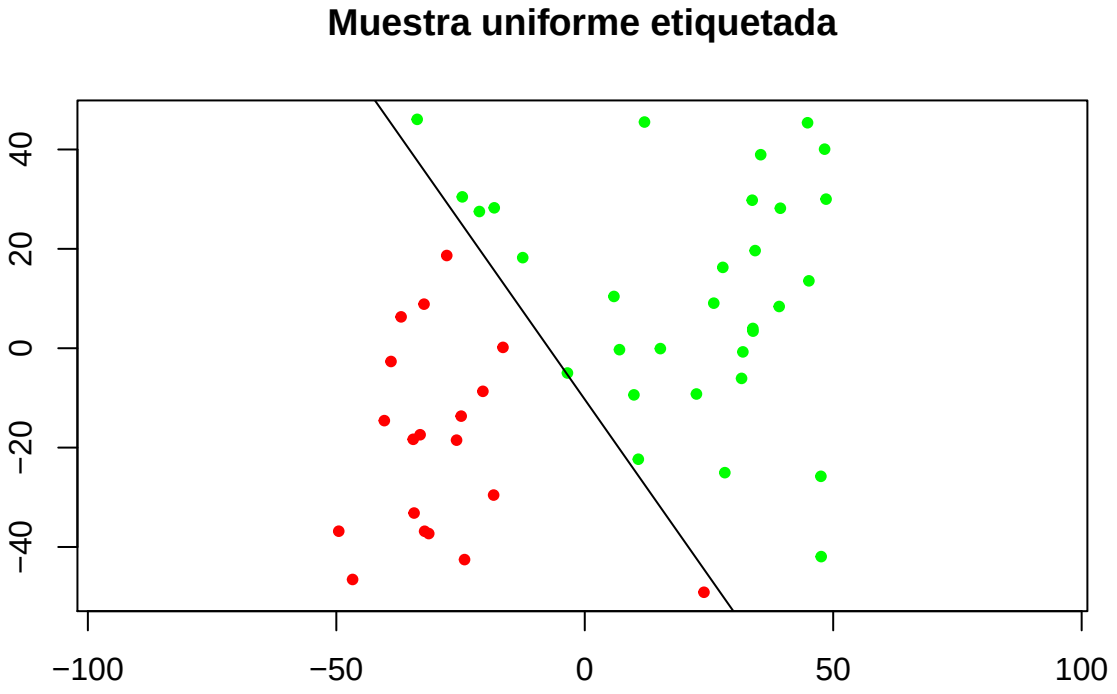
```
# Generamos recta aleatoria
recta <- simula_recta(c(-50,50))

# Definimos la función cuyo signo etiquetará los datos
f1 <- function(x,y){
    y - recta[1]*x - recta[2]
}

# Generamos función etiquetadora
etiquetado1 <- generador_etiquetados(f1)
```

Por último, generamos la gráfica solicitada simulando datos de una distribución uniforme: extraemos los datos de las ordenadas, los de las abscisas y generamos los etiquetados con la función `etiquetado1`:

```
# Generamos muestra uniforme aleatoria
datos_unif <- simula_unif(50, 2, c(-50,50))

# Guardamos las coordenadas en variables separadas
unif.x <- unlist(lapply(datos_unif, '[[', 1))
unif.y <- unlist(lapply(datos_unif, '[[', 2))

# Encapsulamos los datos y las etiquetas en un data frame
datos <- data.frame(X = unif.x, Y = unif.y, Etiqueta = etiquetado1(unif.x, unif.y))
```

Por último, generamos la gráfica con `plot`, asignando un color diferente según el etiquetado, y añadiendo la gráfica de la recta simulada:

```
# Definimos un vector de colores basado en las etiqueta
colores <- ifelse(datos$Etiqueta == 1, "green", "red")

# Generamos la gráfica
plot(datos$X, datos$Y, asp = 1, col = colores, pch = 20,
     main="Muestra uniforme etiquetada", xlab="", ylab="")

# Dibujamos la recta clasificadora
abline(rev(recta))
```



Ejercicio 7

Para realizar este ejercicio definimos las funciones f_2, f_3, f_4 y f_5 como sigue:

```
# Generación de funciones para etiquetar
f2 <- function(x,y){
    (x-10)**2 + (y-20)**2 - 400
}

f3 <- function(x,y){
    0.5*(x+10)**2 + (y-20)**2 - 400
}

f4 <- function(x,y){
    0.5*(x-10)**2 - (y+20)**2 - 400
}

f5 <- function(x,y){
    y - 20*x**2 - 5*x + 3
}
```

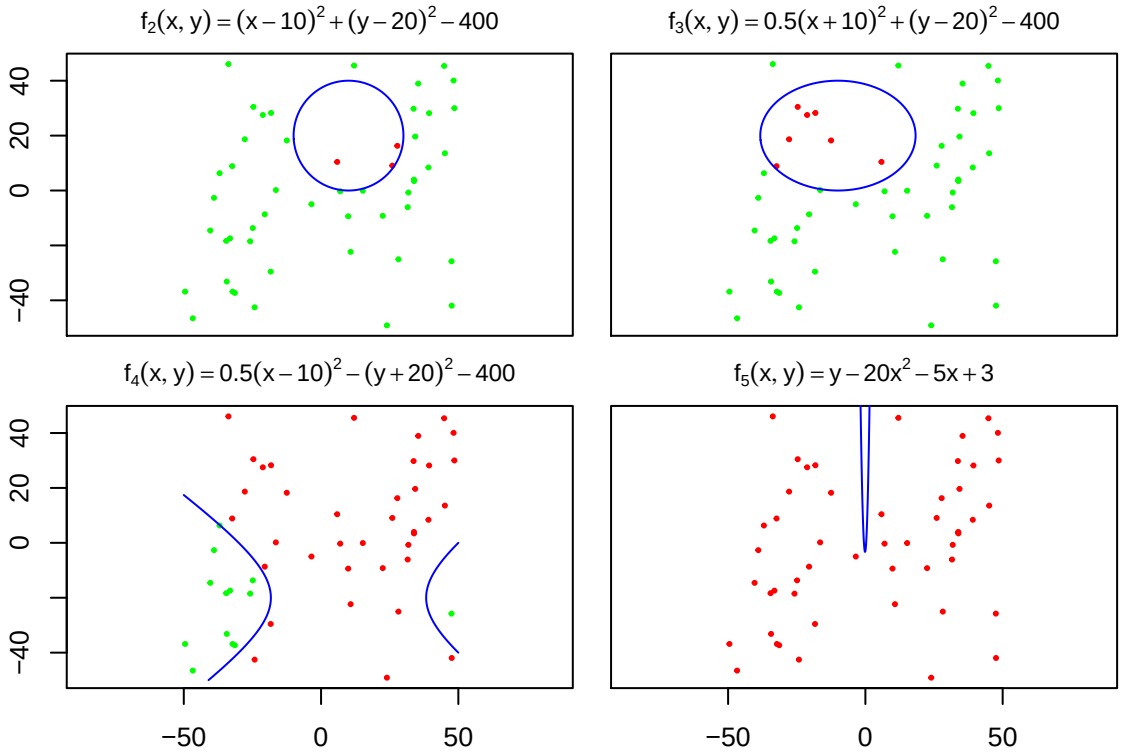
Vamos a definir ahora una función que encapsula el trabajo de etiquetar la muestra, dibujarla y añadir la gráfica de las funciones f_i. Dejamos además que se le pasen argumentos arbitrarios con los que llamar a la función plot, para poder manejar desde fuera las opciones del dibujado:

```
# Etiqueta la muestra (dat.x, dat.y) con la función f y genera el
# correspondiente gráfico
genera_grafico <- function(dat.x, dat.y, f, ...){
    # Etiqueta la muestra
    etiquetado <- generador_etiquetados(f)
```

```
    etiquetas <- etiquetado(dat.x, dat.y)

    # Genera vector de colores basado en las etiquetas
    colores <- ifelse(etiquetas == 1, "green", "red")

    # Dibujo de la muestra (pasamos los argumentos ... a plot)
    plot(dat.x, dat.y, asp = 1, col = colores, pch = 20, ...)

    # Dibujo de la gráfica de la función
    f.x <- seq(-50, 50, length=1000)
    f.y <- seq(-50, 50, length=1000)
    f.z <- outer(f.x, f.y, f)
    contour(f.x, f.y, f.z, levels=0, col = "blue", add=T, drawlabels=F)

    # Devolvemos las etiquetas, que las necesitaremos más adelante:
    return(etiquetas)
}
```

Generamos ahora un gráfico multiple con 4 plots. Para esto, definimos la estructura con `par()` y llamamos a la función anterior con los parámetros de cada plot:

```
# Definimos una rejilla 2x2 para los plots
prev_par <- par(no.readonly = T)

par(mfrow=c(2, 2), mar=c(0.1, 1.1, 2.1, 0.1), oma=2.5*c(1,1,1,1))

# Generamos los cuatro plots
etiquetas_2 <- genera_grafico(unif.x, unif.y, f2, cex=0.5, cex.main=0.9, xlab="", ylab="", xaxt="n",
                              main=expression(f[2](x,y) == (x-10)^2 + (y-20)^2 - 400))

etiquetas_3 <- genera_grafico(unif.x, unif.y, f3, cex=0.5, cex.main=0.9, xlab="", ylab="", xaxt="n", ya
                              main=expression(f[3](x,y) == 0.5(x+10)^2 + (y-20)^2 - 400))

etiquetas_4 <- genera_grafico(unif.x, unif.y, f4, cex=0.5, cex.main=0.9, xlab="", ylab="",
                              main=expression(f[4](x,y) == 0.5(x-10)^2 - (y+20)^2 - 400))

etiquetas_5 <- genera_grafico(unif.x, unif.y, f5, cex=0.5, cex.main=0.9, xlab="", ylab="", yaxt="n",
                              main=expression(f[5](x,y) == y - 20*x^2 - 5*x + 3))

mtext("Etiquetado de una muestra con diversas funciones", outer=TRUE, line=0.5)
```




```
# Dejamos los parámetros como estaban anteriormente
par(prev_par)
```

La forma de las regiones positiva y negativa depende, obviamente, de la función con la que se genera el etiquetado. f_2 divide la muestra con una circunferencia, f_3 con una elipse, f_4 con una hipérbola y f_5 con una parábola. Podemos notar, además, como la muestra considerada no da ninguna información con f_5, ya que la región verde se queda vacía; todas las muestras se etiquetan como rojas. En las demás pasa algo parecido, ya que una de las regiones es mucho más pequeña que la otra, con lo que la cantidad de muestras en la región menor dará poca información para el proceso de aprendizaje.

Ejercicio 8

Para realizar este ejercicio retomamos la variable `datos` definida en el ejercicio 6 y generamos ruido, tomando un 10% de las muestras positivas, otro 10% de las negativas y cambiándole el signo a ambas.

```
# Tomamos los indices de las etiquetas positivas y los de las etiquetas negativas.
indices_pos <- which(datos$Etiqueta %in% 1)
indices_neg <- which(datos$Etiqueta %in% -1)

# Tomamos una muestra del 10% de esos índices
cambiar_pos <- sample(indices_pos, round(0.1*length(indices_pos)))
cambiar_neg <- sample(indices_neg, round(0.1*length(indices_neg)))

# Los índices positivos los ponemos a -1 y los negativos a 1
datos$Etiqueta[cambiar_pos] <- -1
datos$Etiqueta[cambiar_neg] <- 1
```

Generamos ahora el gráfico con las etiquetas cambiadas. Retomamos además la variable `recta` definida en el ejercicio 6 y la dibujamos encima.

```
# Generamos vector de colores con las nuevas etiquetas
colores <- ifelse(datos$Etiqueta == 1, "green", "red")

# Dibujamos la muestra con los colores recién calculados y la recta del apartado 6
plot(datos$X, datos$Y, asp = 1, col = colores, pch = 20,
     main="Muestra uniforme con ruido", xlab="", ylab="")
abline(rev(recta), col="blue")
```

Generalizamos ahora la función `genera_grafico()` definida en el anterior apartado. Añadimos dos parámetros:

- `etiquetas`: Vector de etiquetas previamente calculado. Si no se pasa este parámetro, se generan con la f.
- `generarRuido`: Variable booleana que indica si se genera un 10% de ruido en las muestras tanto positivas como negativas.

El parámetro `generarRuido` lo necesitamos ahora para cambiar el 10% de las etiquetas en cada ejecución. El parámetro `etiquetas`, aunque ahora no lo usaremos, será necesario más adelante:

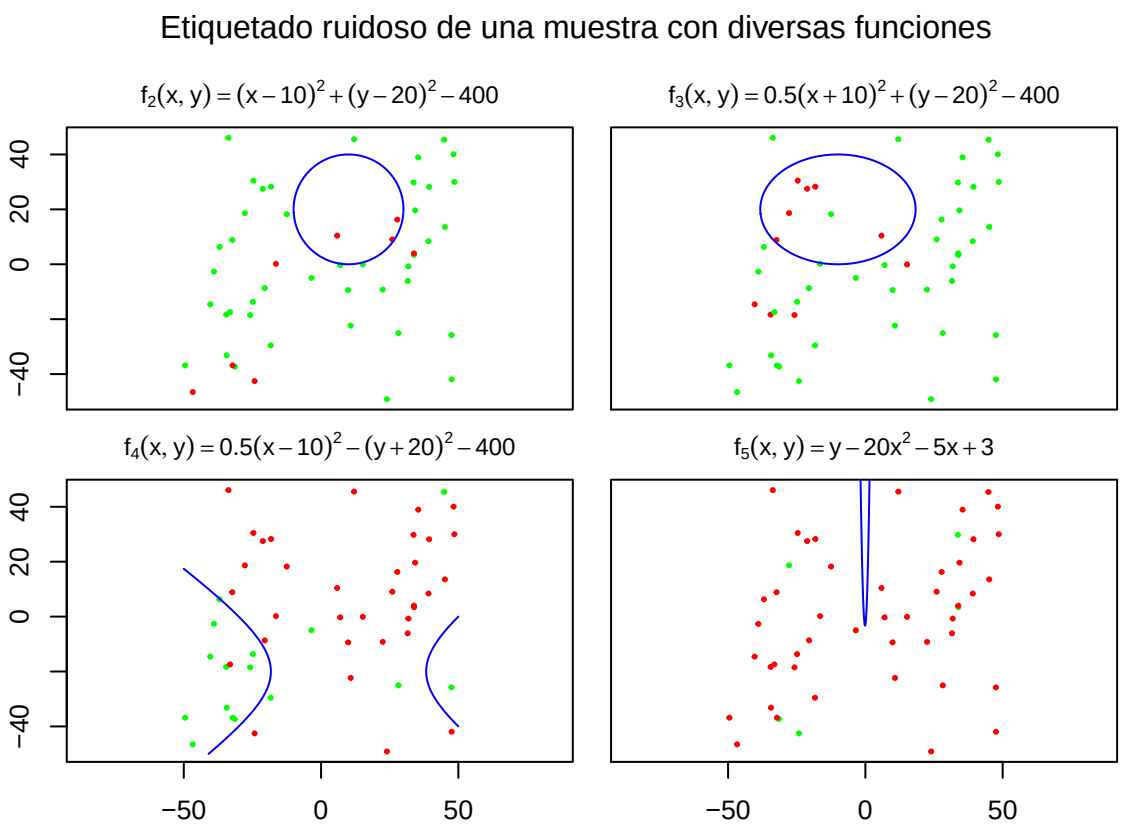
```
# Etiqueta la muestra (dat.x, dat.y) con la función f y genera el
# correspondiente gráfico
genera_grafico <- function(dat.x, dat.y, f, etiquetas, generarRuido = F, ...){
    # Si el parámetro etiquetas no se ha pasado, se generan con la f
    if(missing(etiquetas)){
        etiquetado <- generador_etiquetados(f)
        etiquetas <- etiquetado(dat.x, dat.y)
    }
```

```
    # Se genera ruido en el 10% de etiquetas positivas y negativas
    if(generarRuido){
        # Tomamos los indices de las etiquetas positivas y los de las etiquetas negativas.
        indices_pos <- which(etiquetas %in% 1)
        indices_neg <- which(etiquetas %in% -1)

        # Tomamos una muestra del 10% de esos índices
        cambiar_pos <- sample(indices_pos, round(0.1*length(indices_pos)))
        cambiar_neg <- sample(indices_neg, round(0.1*length(indices_neg)))

        # Los índices positivos los ponemos a -1 y los negativos a 1
        etiquetas[cambiar_pos] <- -1
        etiquetas[cambiar_neg] <- 1
    }

    # Genera vector de colores basado en las etiquetas
    colores <- ifelse(etiquetas == 1, "green", "red")

    # Dibujo de la muestra (pasamos los argumentos ... a plot)
    plot(dat.x, dat.y, asp = 1, col = colores, pch = 20, ...)

    # Dibujo de la gráfica de la función
    f.x <- seq(-50, 50, length=1000)
    f.y <- seq(-50, 50, length=1000)
    f.z <- outer(f.x, f.y, f)
    contour(f.x, f.y, f.z, levels=0, col = "blue", add=T, drawlabels=F)

    # Devolvemos las etiquetas, que las necesitaremos más adelante:
    return(etiquetas)
}
```

Generamos ahora los cuatro gráficos pedidos con las funciones f_i anteriores. Para ello le pasamos la muestra a la función `genera_grafico`, calculamos las etiquetas con cada función f_i y generamos un 10% de ruido en cada subconjunto de etiquetas:

```
prev_par <- par(no.readonly = T)

par(mfrow=c(2, 2), mar=c(0.1, 1.1, 2.1, 0.1), oma=2.5*c(1,1,1,1))

# Generamos los cuatro plots
etiquetas_ruido_2 <- genera_grafico(datos$X, datos$Y, f2, generarRuido = T, cex=0.5, cex.main=0.9,
                                    xlab="", ylab="", xaxt="n",
                                    main=expression(f[2](x,y) == (x-10)^2 + (y-20)^2 - 400))

etiquetas_ruido_3 <- genera_grafico(datos$X, datos$Y, f3, generarRuido = T, cex=0.5, cex.main=0.9,
                                    xlab="", ylab="", xaxt="n", yaxt="n",
                                    main=expression(f[3](x,y) == 0.5(x+10)^2 + (y-20)^2 - 400))

etiquetas_ruido_4 <- genera_grafico(datos$X, datos$Y, f4, generarRuido = T, cex=0.5, cex.main=0.9,
                                    xlab="", ylab="",
                                    main=expression(f[4](x,y) == 0.5(x-10)^2 - (y+20)^2 - 400))

etiquetas_ruido_5 <- genera_grafico(datos$X, datos$Y, f5, generarRuido = T, cex=0.5, cex.main=0.9,
```

```
                                    xlab="", ylab="", yaxt="n",
                                    main=expression(f[5](x,y) == y - 20*x^2 - 5*x + 3))

mtext("Etiquetado ruidoso de una muestra con diversas funciones", outer=TRUE, line=0.5)
```




```
# Dejamos los parámetros como estaban anteriormente
par(prev_par)
```

El comentario final del ejercicio 7 se refuerza ahora con estos resultados: al tener muestras con ruido, el etiquetado de estas funciones, con este número tan bajo de muestras, no aporta prácticamente información ninguna. Por ejemplo, en los dos primeros casos, el número de etiquetas dentro de la elipse es prácticamente igual al número de muestras mal etiquetas fuera de ella. Así, el proceso de aprendizaje será complicado. Por otro lado, en el último caso, la única información —errónea— que tendremos será la del ruido, ya que el etiquetado de la función que define una región tan pequeña es inútil para el aprendizaje.

Ajuste del algoritmo Perceptron

Ejercicio 1

La función implementada para el algoritmo Perceptron es la siguiente:

```
# Implementa el algoritmo Perceptron. Devuelve una lista con tres valores:
# Coefs: Pesos
# Recta: Recta solución
# Iter: Número de iteraciones que han sido necesarias
```

```r
ajusta_PLA <- function(datos, label, max_iter, vini){

    # Definimos w como el vector inicial. Si tiene una posición más que
    # el número de datos, lo dejamos como está; si no, añadimos un 0.
    w <- ifelse(length(vini) == ncol(datos) + 1, vini, c(vini, 0))

    # Variables usadas en el bucle
    changing <- T
    iteraciones <- 0

    # Añadimos una columna de unos a los datos
    datos <- cbind(datos, 1)

    # Bucle principal, del que salimos si no ha habido cambios tras una
    # pasada completa a los datos (solución encontrada) o si se ha llegado
    # al máximo de iteraciones permitidas (solución no encontrada)
    while(changing && iteraciones < max_iter){
        iteraciones <- iteraciones+1

        changing <- F

        # Bucle sobre toda la muestra
        for(index in seq(label)){
            dato <- datos[index,]
            etiq <- label[index]

            # Comportamiento principal: si la muestra está mal etiquetada,
            # recalcular el hiperplano para etiquetarla bien.
            if(sign(w %*% dato) != etiq) {
                w <- w + etiq*dato
                changing <- T
            }
        }
    }

    # Devolvemos los pesos, el vector (a,b), coeficientes que determinan la
    # recta y = ax + b y el número de iteraciones.
    return(list(Coefs = w, Recta = -c(w[1], w[3]) / w[2], Iter = iteraciones))
}
```

Esta función implementa el algoritmo tal y como lo vimos en clase. La función espera que se reciban los datos originales, sin la columna de unos necesaria para hacer el producto del bucle, así que antes del bucle se añade esta columna. Además, la función se puede llamar con vector inicial sin el b del final, en cuyo caso se añade $b = 0$.

En el bucle principal se encuentra el algoritmo: se itera sobre todos los datos ajustando el vector de pesos w en caso de que la etiqueta contemplada esté mal etiquetada. Cuando no haya cambios tras hacer una pasada completa a la muestra —en cuyo caso se ha conseguido la solución óptima— o se llegue al máximo número de iteraciones —en cuyo caso no se ha conseguido la solución óptima, bien porque los datos no sean linealmente separables o porque sean necesarias más iteraciones—, el algoritmo termina.

Se devuelve el vector de pesos y el número de iteraciones que han sido necesarias. Además, se devuelve la recta generada con los pesos; como el hiperplano considerado en todos los ejemplos posteriores es particularmente una recta, esto evita tener que hacer esta operación siempre que llamemos a la función y necesitemos la recta.

Ejercicio 2

La primera parte de este ejercicio consiste en llamar a la función anteriormente implementada con el vector inicial $(0, 0, 0)$ sobre los datos generados en el ejercicio 6 de la anterior sección.

Preparamos entonces los datos generados allí —`unif.x` y `unif.y`— en la forma admitida por la función:

```
# Damos forma de matriz a los datos y generamos el vector de etiquetas
datos.matriz <- matrix(c(unif.x, unif.y), ncol = 2)
datos.etiqueta <- etiquetado1(unif.x, unif.y)
```

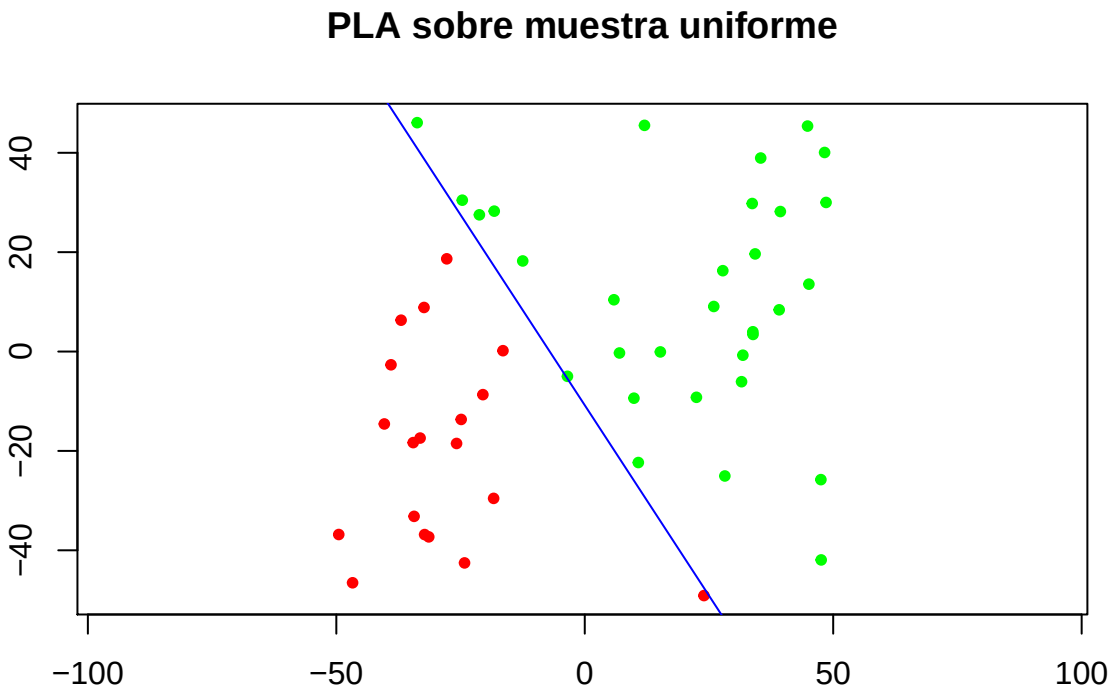
Ejecutamos la función implementada anteriormente sobre esos datos, con un número máximo de iteraciones muy alto para que encuentre la solución óptima —existe porque los datos son linealmente separables—:

```
# Ejecución del algoritmo
out_PLA  <- ajusta_PLA(datos.matriz, datos.etiqueta, 10000000, c(0,0))

# Guardamos la solución encontrada y el número de iteraciones:
solucion <- out_PLA$Recta
iteraciones <- out_PLA$Iter
```

En este caso, el número de iteraciones es de 179.

Podemos también ver la solución devuelta por el algoritmo junto con las muestras usadas; para ello generamos un gráfico como hemos hecho en ocasiones anteriores:

```
# Generamos el vector de colores basado en las etiquetas
colores <- ifelse(datos.etiqueta == 1, "green", "red")

# Generamos el gráfico de la muestra
plot(datos.matriz, asp = 1, col = colores, pch = 20,
     main="PLA sobre muestra uniforme", xlab="", ylab="")
# Añadimos la recta devuelta
abline(rev(solucion), col="blue")
```



Ahora hacemos una prueba con vectores iniciales aleatorios. Vamos a usar la función `lapply`, así que primero necesitamos encapsular los pasos que queremos dar en una función, que recibe como único parámetro el vector inicial con el que llamaremos al PLA:

```
# Encapsula ajusta_PLA para llamar a lapply
wrapper <- function(vector){
    datos <- ajusta_PLA(datos.matriz, datos.etiqueta, 10000000, vector)
    return(datos$Iter)
}
```

Ahora llamamos a esa función con 10 vectores aleatorios de 3 componentes dentro de un `lapply`. Esto nos devuelve una lista de iteraciones, así que lo convertimos en un vector y calculamos su media:

```
# Ejecutamos PLA 10 veces con vectores aleatorios en [0,1]
inicio_aleatorio <- lapply(simula_unif(10, 3, c(0,1)), wrapper)

# Calculamos media de iteraciones
media <- mean(unlist(inicio_aleatorio))
```

Como vemos, la media es de 171.5, algo menor que en el caso anterior. Así que en este caso y ante estos datos, parece más sensato llamar a esta función con vectores aleatorios.

Ejercicio 3

En este ejercicio analizamos cómo se comporta el algoritmo PLA con un número fijo de iteraciones ante datos no linealmente separables —reusamos los datos del ejercicio 8, cuyas etiquetas tenían un 10% de ruido en cada clase—.

Para realizar este experimento encapsulamos la tarea en la función `analisis_PLA`, cuya implementación es la siguiente:

```
# Analiza el algoritmo PLA ante un número fijo de iteraciones:
analisis_PLA <- function(max_iter, dat.x, dat.y, dat.etiquetas){

    # Damos forma a los datos para pasárselos a ajusta_PLA
    datos.matriz <- matrix(c(dat.x, dat.y), ncol = 2)

    # Llamamos a la función y guardamos la recta solución
    out_PLA <- ajusta_PLA(datos.matriz, dat.etiquetas, max_iter, c(0,0))
    recta <- out_PLA$Recta

    # Clasificamos con la función etiquetadora determinada por la recta
    nuevo_etiquetado <- generador_etiquetados(function(x, y){ y - recta[1]*x - recta[2] })
    nuevas_etiquetas <- nuevo_etiquetado(dat.x, dat.y)

    # Devolvemos el número de muestras mal etiquetadas:
    return(sum(nuevas_etiquetas != dat.etiquetas))
}
```

La función `analisis_PLA` llama al algoritmo PLA, etiqueta la muestra con la recta solución y devuelve el número de muestras mal etiquetadas.

Para llamarlo ejecutamos la función con `lapply` sobre un vector con el número de iteraciones: 10, 100 y 1000.

```
# Llamamos a la función con 10, 100 y 1000 iteraciones
iteraciones <- c(10, 100, 1000)
analisis <- lapply(iteraciones, analisis_PLA, datos$X, datos$Y, datos$Etiqueta)
```

La ejecución del anterior trozo de código nos da el siguiente resultado:

- Número de etiquetas diferentes con 10 iteraciones: 12
- Número de etiquetas diferentes con 100 iteraciones: 12
- Número de etiquetas diferentes con 1000 iteraciones: 7

Es claro ante esta salida que un número de iteraciones mayor no implica un número menor de errores. Si los datos no son linealmente separables, el algoritmo PLA está constantemente iterando, pero no se acerca a la mejor solución de forma iterativa. Nada nos asegura que el número de errores sea mejor tras un millón de iteraciones que tras una.

Ejercicio 4

Realizamos el mismo experimento que antes, esta vez sobre el etiquetado de la segunda función del ejercicio 7 de la sección anterior. Estos datos tampoco son linealmente separables, no ya porque se haya generado ruido, sino porque el etiquetado original no separaba linealmente las muestras.

De forma análoga al ejercicio anterior, ejecutamos la función `analisis_PLA` con el etiquetado guardado en `etiquetas_2`

```
# Llamamos a la función con 10, 100 y 1000 iteraciones
iteraciones <- c(10, 100, 1000)
analisis <- lapply(iteraciones, analisis_PLA, unif.x, unif.y, etiquetas_2)
```

La ejecución del anterior trozo de código nos da el siguiente resultado:

- Número de etiquetas diferentes con 10 iteraciones: 31
- Número de etiquetas diferentes con 100 iteraciones: 34
- Número de etiquetas diferentes con 1000 iteraciones: 34

Ante estos datos se refuerza el anterior comentario: nada pueda asegurar, ante datos no linealmente separables, que un número mayor de iteraciones produzca un mejor resultado.

Ejercicio 5

Modificamos ahora la función `ajusta_PLA` de manera que en cada iteración —esto es, tras cada pasada completa de los datos— se redibuje la gráfica con las muestras y la recta encontrada hasta ese momento. Para hacer esto basta llamar a `plot` y `abline` para generar el gráfico y llamar a `Sys.sleep()` para pausar la ejecución y poder ver la animación. La función modificada se queda como sigue:

```
# Implementa el algoritmo Perceptron. Devuelve una lista con tres valores:
# Coefs: Pesos
# Sol: Recta solución
# Iter: Número de iteraciones que han sido necesarias
ajusta_PLA_anim <- function(datos, label, max_iter, vini){
```

```
    # Definimos w como el vector inicial. Si tiene una posición más que
    # el número de datos, lo dejamos como está; si no, añadimos un 0.
    w <- ifelse(length(vini) == ncol(datos) + 1, vini, c(vini, 0))

    # Variables usadas en el bucle
    changing <- T
    iteraciones <- 0

    # Añadimos una columna de unos a los datos
    datos <- cbind(datos, 1)

    # Generamos el vector de colores basado en las etiquetas
    colores <- ifelse(label == 1, "green", "red")

    # Bucle principal, del que salimos si no ha habido cambios tras una
    # pasada completa a los datos (solución encontrada) o si se ha llegado
    # al máximo de iteraciones permitidas (solución no encontrada)
    while(changing && iteraciones < max_iter){
        iteraciones <- iteraciones+1

        changing <- F

        # Bucle sobre toda la muestra
        for(index in seq(label)){
            dato <- datos[index,]
            etiq <- label[index]

            # Comportamiento principal: si la muestra está mal etiquetada,
            # recalcular el hiperplano para etiquetarla bien.
            if(sign(w %*% dato) != etiq) {
                w <- w + etiq*dato
                changing <- T
            }
        }

        # Generamos la gráfica con la muestra coloreada
        plot(tail(datos,-1), asp = 1, col = colores, pch = 20,
             main=paste("Ajustando PLA con",max_iter,"iteraciones"), xlab="", ylab="")
        # Añadimos la recta actual
        abline(-c(w[3], w[1]) / w[2], col="blue")
        # Pausamos 0.1 segundos
        Sys.sleep(0.2)
    }

    # Redibujamos la recta con más grosor
    abline(-c(w[3], w[1]) / w[2], col="blue", lwd=2)
    # Pausamos 1 segundo
    Sys.sleep(1)

    # Devolvemos los pesos, el vector (a,b), coeficientes que determinan la
    # recta y = ax + b y el número de iteraciones.
    return(list(Coefs = w, Recta = -c(w[1], w[3]) / w[2], Iter = iteraciones))
}
```

Basta ahora ejecutar el siguiente código para ver las tres animaciones que se generan:

```
# Damos forma a los datos
datos.matriz <- matrix(c(datos$X, datos$Y), ncol = 2)

# Llamamos a la función con 10, 100 y 1000 iteraciones
for(max_iter in c(10,100,1000)){
    ajusta_PLA_anim(datos.matriz, datos$Etiqueta, max_iter, c(0,0))
}
```

Ejercicio 6

La modificación del algoritmo PLA es sencilla: tratamos ahora de quedarnos con la mejor solución. Basta ir almacenando la recta que menor etiquetas erróneas tenga, de manera que tras el número máximo de iteraciones, si no se ha encontrado la óptima, se devuelva la mejor de entre las analizadas. Esta modificación es, de hecho, el algoritmo *Pocket*. La función modificada es la siguiente:

```
# Implementa el algoritmo Perceptron. Devuelve una lista con tres valores:
# Coefs: Pesos
# Sol: Recta solución
# Iter: Número de iteraciones que han sido necesarias
ajusta_PLA_MOD <- function(datos, label, max_iter, vini){

    # Definimos w como el vector inicial. Si tiene una posición más que
    # el número de datos, lo dejamos como está; si no, añadimos un 0.
    w <- ifelse(length(vini) == ncol(datos) + 1, vini, c(vini, 0))

    # Variables usadas en el bucle
    changing <- T
    iteraciones <- 0

    # Añadimos una columna de unos a los datos
    datos <- cbind(datos, 1)

    # Inicializamos el número de errores al total de datos recibidos
    mejor_error <- length(datos[,1])

    # Bucle principal, del que salimos si no ha habido cambios tras una
    # pasada completa a los datos (solución encontrada) o si se ha llegado
    # al máximo de iteraciones permitidas (solución no encontrada)
    while(changing && iteraciones < max_iter){
        iteraciones <- iteraciones+1

        changing <- F

        # Bucle sobre toda la muestra
        for(index in seq(label)){
            dato <- datos[index,]
            etiq <- label[index]

            # Comportamiento principal: si la muestra está mal etiquetada,
            # recalcular el hiperplano para etiquetarla bien.
            if(sign(w %*% dato) != etiq) {
```

```
                w <- w + etiq*dato
                changing <- T
            }
        }

        # Definimos la recta generada por los pesos
        recta <- -c(w[1], w[3]) / w[2]

        # Etiquetamos la muestra con la nueva recta
        nuevo_etiquetado <- generador_etiquetados(function(x, y){ y - recta[1]*x - recta[2] })
        nuevas_etiquetas <- nuevo_etiquetado(datos[,1], datos[,2])

        # Calculamos el número de muestras mal etiquetadas con la recta actual
        error_actual <- sum(nuevas_etiquetas != label)

        # Si el error actual es mejor que el mejor encontrado hasta ahora, guardamos
        # los pesos actuales y actualizamos el mejor error
        if(error_actual < mejor_error){
            mejor_error <- error_actual
            mejor_solucion <- w
        }
    }

    # Actualizamos w con la mejor solución
    w <- mejor_solucion

    # Devolvemos los pesos, el vector (a,b), coeficientes que determinan la
    # recta y = ax + b y el número de iteraciones.
    return(list(Coefs = w, Recta = -c(w[1], w[3]) / w[2], Iter = iteraciones))
}
```

La única modificación se encuentra tras el bucle que recorre todas las muestras. Después de cada pasada se etiqueta la muestra con la recta encontrada en ese momento y se contabiliza el número de muestras mal etiquetadas. Si ese error es mejor que el mejor encontrado hasta el momento, se guarda la solución actual y se actualiza el error. La función devuelve entonces la mejor solución encontrada.

Para probar la modificación vamos a comparar el número de mejoras que se producen con la muestra uniforme y los etiquetados generados en el ejercicio 7 de la sección anterior. Para ello modificamos nuestra función de análisis para que el primer parámetro, `dat.etiquetas`, sea el vector de etiquetas y para que reciba la función con la que ajustar PLA: el parámetro `ajuste`. La función modificada queda así:

```
# Analiza el algoritmo PLA ante un número fijo de iteraciones:
analisis_PLA_MOD <- function(dat.etiquetas, ajuste, dat.x, dat.y){

    # Damos forma a los datos para pasárselos a ajusta_PLA
    datos.matriz <- matrix(c(dat.x, dat.y), ncol = 2)

    # Llamamos a la función y guardamos la recta solución
    out_PLA <- ajuste(datos.matriz, dat.etiquetas, 1000, c(0,0))
    recta <- out_PLA$Recta

    # Clasificamos con la función etiquetadora determinada por la recta
    nuevo_etiquetado <- generador_etiquetados(function(x, y){ y - recta[1]*x - recta[2] })
    nuevas_etiquetas <- nuevo_etiquetado(dat.x, dat.y)
```

```
    # Devolvemos el número de muestras mal etiquetadas:
    return(sum(nuevas_etiquetas != dat.etiquetas))
}
```

Llamamos ahora a esta función dos veces, una con la función `ajusta_PLA` y otra con `ajusta_PLA_MOD`, en ambos casos iterando sobre la lista de etiquetas generadas en el apartado 7:

```
# Lista de etiquetas del ejercicio 7 de la sección anterior
lista_etiquetas <- list(etiquetas_2, etiquetas_3, etiquetas_4, etiquetas_5)

# Generamos un vector con el número de muestras mal etiquetadas con ajusta_PLA
errores <- unlist(lapply(lista_etiquetas, analisis_PLA_MOD, ajusta_PLA, unif.x, unif.y))

# Generamos un vector con el número de muestras mal etiquetadas con ajusta_PLA_MOD
errores_MOD <- unlist(lapply(lista_etiquetas, analisis_PLA_MOD, ajusta_PLA_MOD, unif.x, unif.y))
```

El resultado devuelto por el anterior código se resume así:

- El algoritmo pocket tiene 31 muestras erróneas menos que el algoritmo PLA original con la función f_2.
- El algoritmo pocket tiene 36 muestras erróneas menos que el algoritmo PLA original con la función f_3.
- El algoritmo pocket tiene 33 muestras erróneas menos que el algoritmo PLA original con la función f_4.
- El algoritmo pocket tiene 41 muestras erróneas menos que el algoritmo PLA original con la función f_5.

Como vemos, la mejora con el algoritmo pocket es evidente.

Regresión lineal

Ejercicio 2

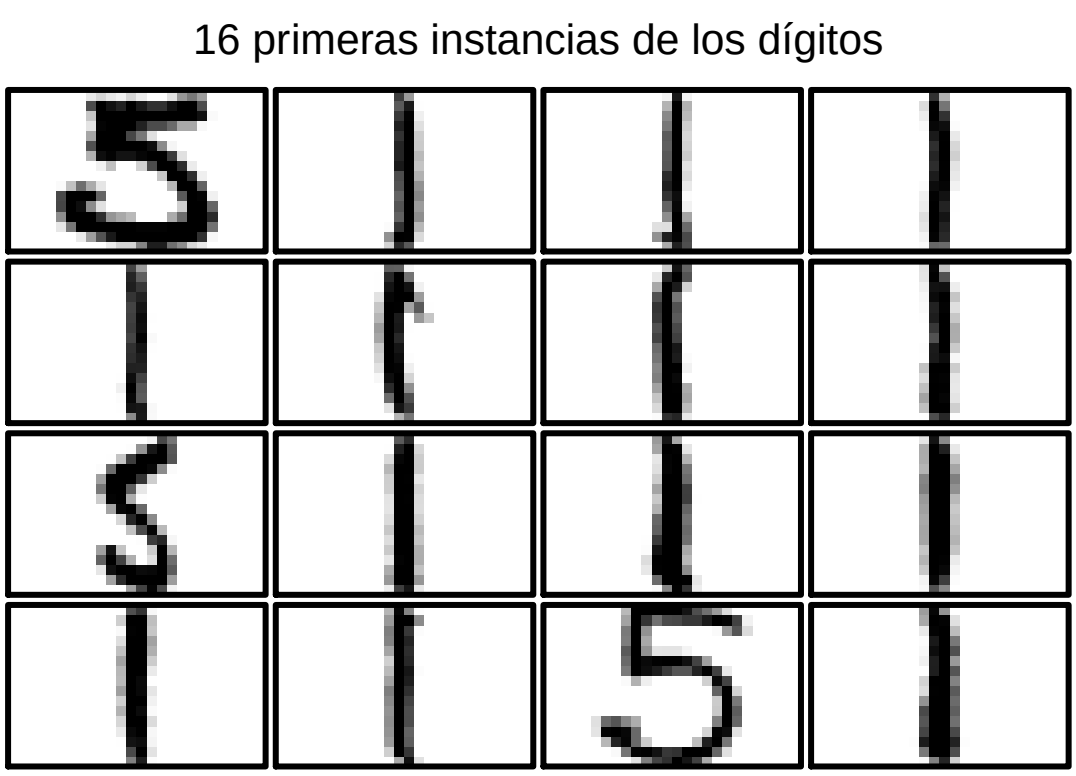
Cargamos los datos del fichero con `read.table()`. Así, tenemos en `digitos` una matriz cuyas filas son las instancias de los datos de entrenamiento. Cada fila tiene en su primera posición el dígito del que se trata, así que filtramos con ese dato y nos quedamos con los unos y los cincos:

```
# Leemos el fichero de entrenamiento
digitos <- read.table("datos/zip.train")

# Nos quedamos únicamente con los números 1 y 5
digitos <- digitos[ is.element(digitos[,1], c(1,5)), ]

# Guardamos en variables separadas los unos y los cincos
digitos.unos <- digitos[ digitos[,1] == 1, ]
digitos.cincos <- digitos[ digitos[,1] == 5, ]
```

Visualizamos ahora las primeras 16 instancias de estos digitos con el siguiente código:

```
# Guardamos los ajustes de par
prev_par <- par(no.readonly = T)

# Generamos una rejilla 4x4 y ajustamos márgenes
```

```r
par(mfrow = c(4, 4), mar = 0.2*c(1,1,1,1), oma = 3.5*c(1,1,1,1))

# Dibujamos los primeros 16 dígitos y desechamos la salida
. <- apply(digitos[1:16,], 1, function(digito) {
    # Matriz que define el número
    numero <- matrix(tail(digito, -1), nrow = 16)

    # Están tumbados, así que les damos la vuelta
    numero <- numero[, ncol(numero):1]

    # Generamos la imagen y ajustamos el grosor de la caja que los contiene
    image(numero, col = gray(seq(1,0,length=256)), xaxt="n", yaxt="n", pty="s", asp=1)
    box(lwd=3)
})

# Añadimos un título al gráfico
mtext("16 primeras instancias de los dígitos", outer=TRUE, line=1, cex=1.3)
```




```r
# Reiniciamos los ajustes de par a su estado original
par(prev_par)
```

Nótese que en el código de visualización es necesario invertir el orden de las columnas de la matriz para generar la imagen en la orientación adecuada. Además, al llamar a `image` se hace con una escala de grises invertida, para ver el número en positivo; es decir, visualizar el trazo de color negro.

Ejercicio 3

Para el cálculo de la intensidad media y la simetría se ha implementado la siguiente función, que recibe una instancia de los digitos como parámetro y calcula la intensidad media de los valores y la simetría, obteniendo la diferencia entre la matriz original y la que tiene sus columnas invertidas:

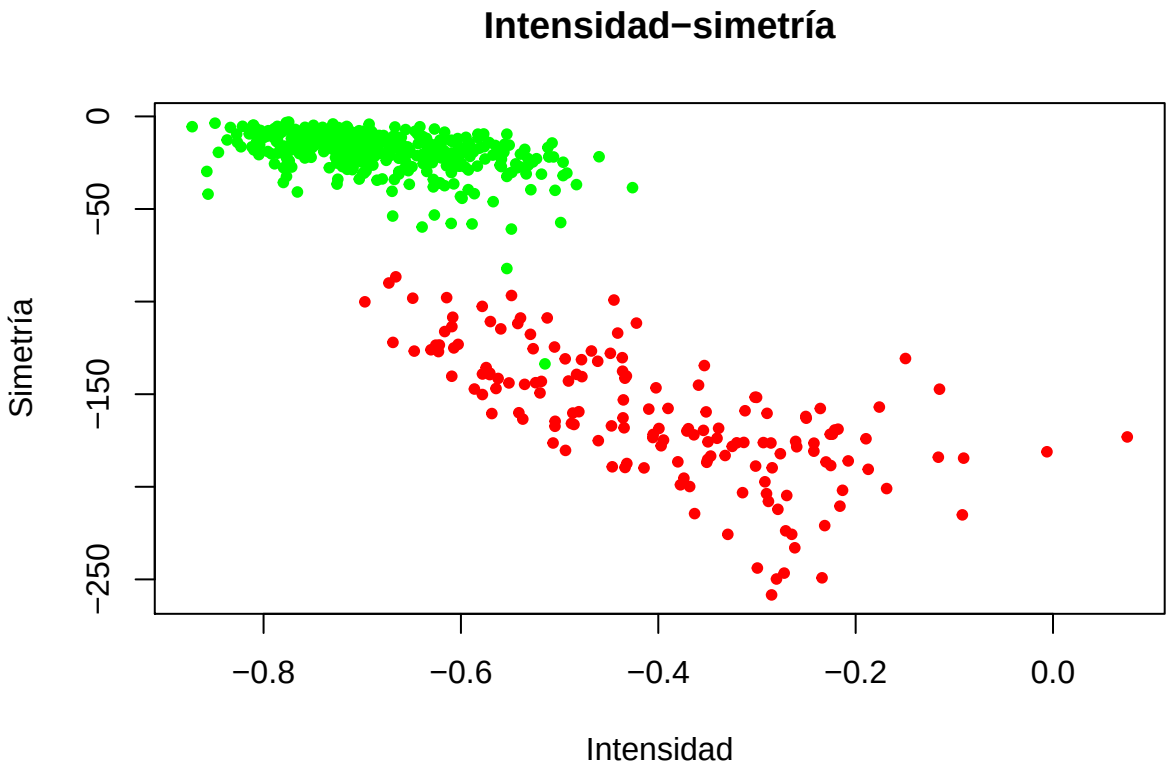
```
# A
analisis_digito <- function(digito){
    numero <- matrix(tail(digito, -1), nrow = 16)
    numero.inv <- numero[, ncol(numero):1]

    intensidad <- mean(digito)
    simetria <- -sum( abs(numero.inv - numero) )

    c(head(digito, 1), intensidad, simetria)
}
```

Esta función devuelve un vector concatenando la etiqueta del número, su intensidad media y su valor de simetría.

Ejercicio 4

Para generar una gráfica de la intensidad y la simetría de los dígitos aplicamos la función anteriormente implementada a cada fila de la matriz `digitos`. Para esto, usamos `apply` con el parámetro `margin = 1`:

```
# Analizamos las filas de la matriz dígitos
digitos.analisis <- t(apply(digitos, 1, analisis_digito))

# Generamos un vector de colores basado en las etiquetas
colores <- ifelse(digitos.analisis[, 1] == 1, "green", "red")

# Generamos la gráfica solicitada:
plot(digitos.analisis[, 2:3], col = colores, pch = 20,
     main="Intensidad-simetría", xlab="Intensidad", ylab="Simetría")
```



Ejercicio 5

La función `Regress_Lin` implementa el algoritmo de regresión visto en clase, usando la descomposición SVD para calcular la matriz $(X^tX)^{-1}$ con el producto $V(D^2)^\dagger V^t$, donde † indica la pseudo-inversa:

```
# Necesario para llamar a la función ginv, que calcula la pseudo-inversa
library(MASS)

# Calcula regresión lineal
Regress_Lin <- function(datos, label){
    # Añadimos una columna de 1 a los datos
    X <- cbind(datos, 1)
    Y <- label

    # Calculamos la descomposición de X
    SVD <- svd(X)
    D <- diag(SVD$d)
    U <- SVD$u
    V <- SVD$v

    # Calculamos la inversa de X^tX
    XtX_inv <- V %*% ginv(D ** 2) %*% t(V)
    X_pseudoinv <- XtX_inv %*% t(X)

    # Devolvemos la solución
    return(X_pseudoinv %*% Y)
}
```

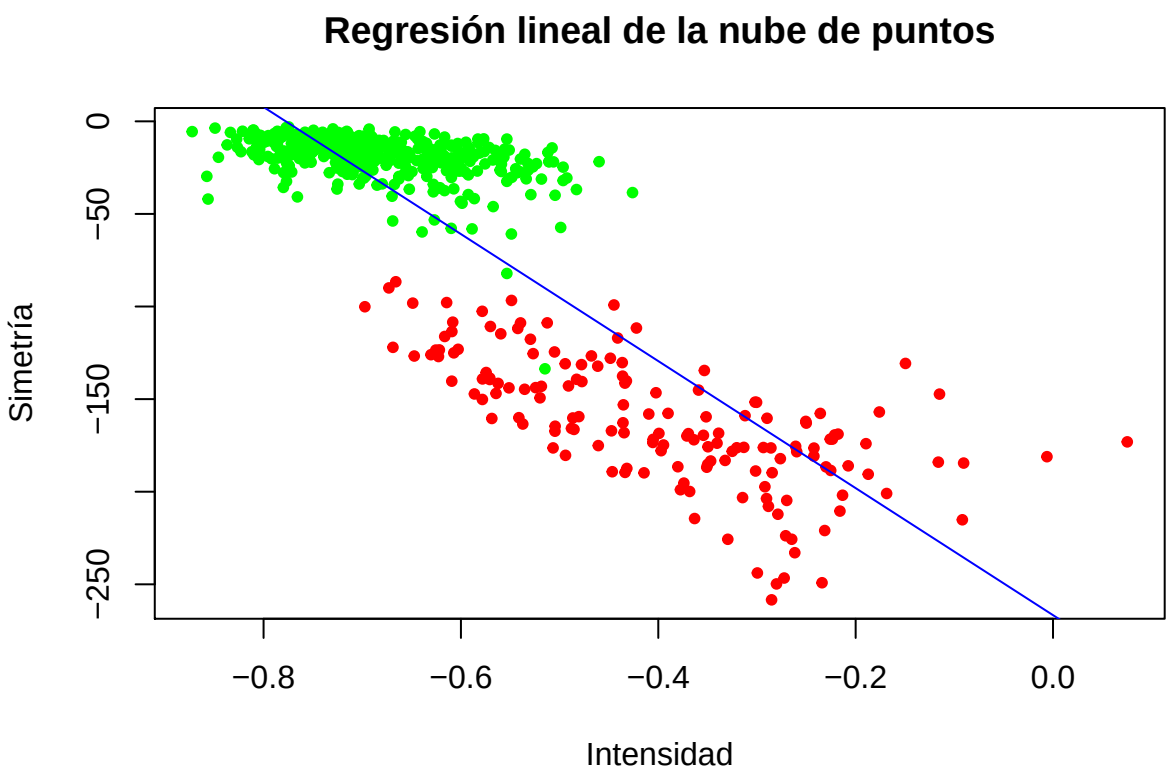
Hemos usado la librería `MASS`, incluida en la instalación estándar de R, para tener acceso a la función `ginv()`, que calcula la pseudo-inversa de una matriz.

Ejercicio 6

La interpretación del enunciado de este ejercicio puede ser ambigua, así que he resuelto los dos problemas que consigo entender.

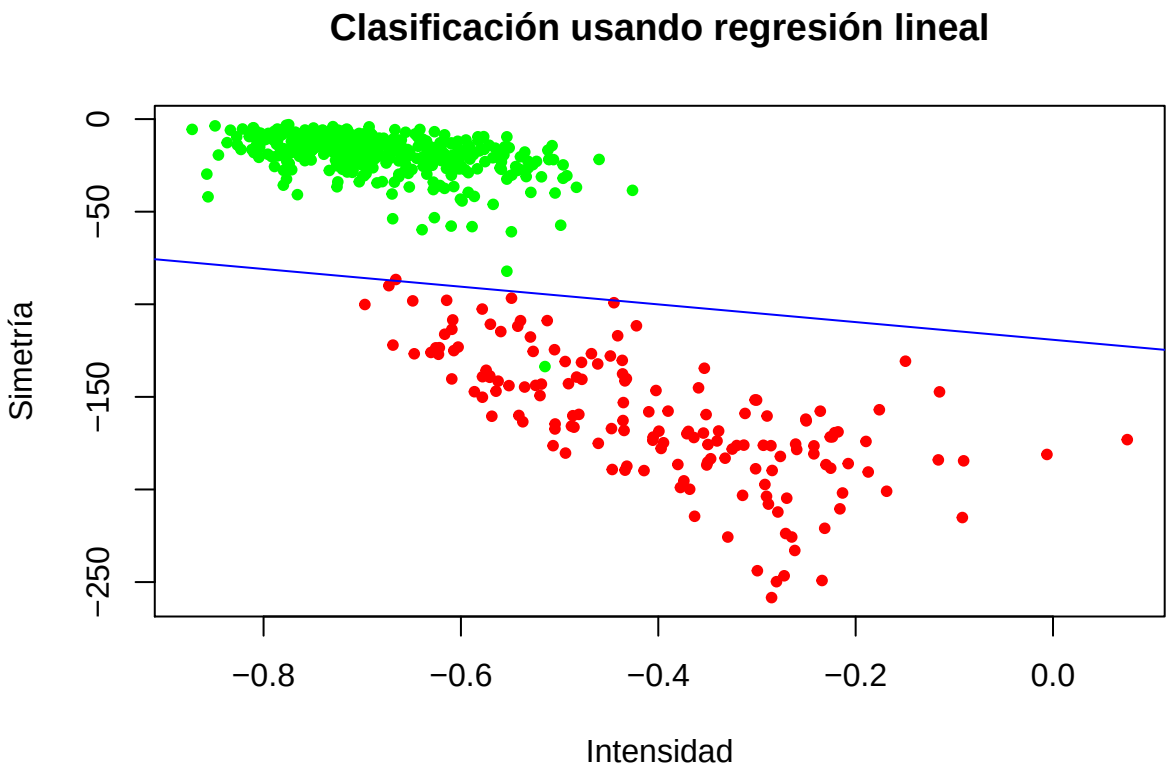
En primer lugar he hecho la regresión lineal de los datos; esto es, he encontrado la recta que mejor aproxima la nube de puntos vista anteriormente sin tener en cuenta su clasificación. Para esto he llamado a la función `Regress_lin` con los valores de `intensidad` y `simetría` como `datos` y `label`, respectivamente:

```
# Regresión lineal de la nube de puntos
digitos.regresion <- Regress_Lin(digitos.analisis[, 2], digitos.analisis[, 3])

# Generamos vector de colores basado en las etiquetas
colores <- ifelse(digitos.analisis[,1] == 1, "green", "red")

# Generamos el gráfico con los puntos y la recta encontrada
plot(digitos.analisis[,2:3], col = colores, pch=20,
     main="Regresión lineal de la nube de puntos", xlab="Intensidad", ylab="Simetría")
abline(rev(digitos.regresion), col="blue")
```



Además, he resuelto el problema de clasificación con la técnica de la regresión; esto es, he encontrado la recta que mejor divide la nube de puntos según su clasificación —etiquetando con 1 a los unos y con -1 a los cincos—. Para esto he llamado a la función `Regress_Lin` con los valores de `(intensidad,simetría)` y `etiquetas` como `datos` y `label`, respectivamente:

```r
# Clasificación de la nube de puntos usando regresión lineal
digitos.etiquetas_reg <- ifelse(digitos.analisis[, 1] == 1, 1, -1)
digitos.clasificacion <- Regress_Lin(digitos.analisis[, 2:3], digitos.etiquetas_reg)

# Generamos el gráfico con los puntos
plot(digitos.analisis[,2:3], col = colores, pch=20,
     main="Clasificación usando regresión lineal", xlab="Intensidad", ylab="Simetría")

# Calculamos la recta definida por los pesos encontrados en la regresión y la dibujamos:
d <- digitos.clasificacion
digitos.recta_clas <- -c(d[3], d[1]) / d[2]
abline(digitos.recta_clas, col="blue")
```



Ejercicio 7

Para la resolución de este ejercicio se han implementado las dos siguientes funciones, que hacen más cómodo el generar muestras y etiquetados aleatorios:

```r
# Genera una muestra uniforme 2D de tamaño tam sobre el cuadrado [-10,10]x[-10,10].
# Devuelve una matriz con las x en la primera columna y las y en la segunda
generar_muestra <- function(tam = 100){

    # Generamos la muestra uniforme
    datos.muestra <- simula_unif(N = tam, dim = 2, rango = c(-10, 10))

    # Tomamos las x y las y por separado
    datos.x <- unlist(lapply(datos.muestra, '[[', 1))
    datos.y <- unlist(lapply(datos.muestra, '[[', 2))
```

```
    # Devolvemos una matriz con las x en la primera columna y las y en la segunda
    return(matrix(c(datos.x, datos.y), ncol = 2))
}

# Genera un etiquetado aleatorio sobre una muestra en el cuadrado [-10,10]x[-10,10]
# Devuelve la función generada, la recta, las etiquetas y el etiquetador
generar_etiquetado <- function(muestra){

    # Generamos una recta aleatoria
    recta <- simula_recta(intervalo = c(-10, 10))

    # Definimos la función etiquetadora en base a esa reca
    f <- function(x,y){
        y - recta[1]*x - recta[2]
    }

    # Generamos el etiquetado
    etiquetador <- generador_etiquetados(f)
    etiquetas <- etiquetador(muestra[, 1], muestra[, 2])

    # Devolvemos la función generada, la recta, las etiquetas y el etiquetador
    return(list(Foo = f, Recta = recta, Etiquetas = etiquetas, Etiquetador = etiquetador))
}
```

Apartado a

En este apartado definimos una función que, ante una muestra de puntos la etiqueta de forma aleatoria, estima la recta que mejor aproxima esta clasificación y devuelve el porcentaje de error; esto es, el número de muestras mal clasificadas entre el total de las muestras:

```
# Mide el error dentro de la muestra con un etiquetado aleatorio
medir_Ein <- function(muestra){
    # Genera un etiquetado aleatorio de la muestra
    f.etiquetado <- generar_etiquetado(muestra)

    # Estima la recta que mejor aproxima la clasificación usando regresión
    regresion <- Regress_Lin(muestra, f.etiquetado$Etiquetas)
    g.recta <- -c(regresion[1], regresion[3]) / regresion[2]

    # Define la función clasificadora estimada
    g <- function(x,y){
        y - g.recta[1]*x - g.recta[2]
    }

    # Etiqueta la muestra con la función estimada
    g.etiquetador <- generador_etiquetados(g)
    g.etiquetas <- g.etiquetador(muestra[, 1], muestra[, 2])

    # Calcula el número de muestras mal etiquetadas
    E_in <- sum(g.etiquetas != f.etiquetado$Etiquetas)

    # Devuelve el porcentaje de error dentro de la muestra
```

```
    return(E_in / nrow(muestra))
}
```

Para hacer el experimento que se nos pide, basta entonces llamar a esta función 1000 veces con una muestra fija y tomar la media de errores devueltos. Todo esto lo hace el siguiente código, que se basa en la función `replicate` para hacer la medida 1000 veces:

```
# Generamos una muestra aleatoria de tamaño 100
reg.muestra <- generar_muestra(100)

# Definimos el número de repiticiones
num_rep <- 1000

# Repetimos el experimento num_rep veces y tomamos la media de los valores devueltos
E_in <- sum(replicate(num_rep, medir_Ein(reg.muestra))) / num_rep
```

De aquí obtenemos que el error medio dentro de la muestra tras 1000 repeticiones es de 5.624%, un valor bastante bueno. Esto se debe, principalmente, a que los datos no tienen ruido ninguno y son linealmente separables. La regresión, en este caso, parece una opción a tener en cuenta para el proceso de aprendizaje.

Apartado b

En este apartado, de nuevo, definimos una función que encapsula todo el trabajo: ante la muestra recibida se genera un etiquetado aleatorio f, se calcula la función g que mejor lo estima usando regresión, se genera una nueva muestra —esta vez de 1000 datos— y se etiqueta tanto con la función f como con la función g. Se devuelve entonces el porcentaje de errores en esta muestra de test:

```
# Mide el error fuera de la muestra con una muestra de test aleatoria
medir_Eout <- function(muestra){
    # Genera un etiquetado aleatorio de la muestra
    f.etiquetado <- generar_etiquetado(muestra)

    # Estima la recta que mejor aproxima la clasificación usando regresión
    regresion <- Regress_Lin(muestra, f.etiquetado$Etiquetas)
    g.recta <- -c(regresion[1], regresion[3]) / regresion[2]

    # Define la función clasificadora estimada
    g <- function(x,y){
        y - g.recta[1]*x - g.recta[2]
    }

    # Generamos una nueva muestra
    test.muestra <- generar_muestra(1000)

    # Generamos etiquetado con f de la nueva muestra
    test.etiquetas <- f.etiquetado$Etiquetador(test.muestra[, 1], test.muestra[, 2])

    # Generamos etiquetado con g de la nueva muestra
    g.etiquetador <- generador_etiquetados(g)
    g.etiquetas <- g.etiquetador(test.muestra[, 1], test.muestra[, 2])

    # Calcula el número de muestras mal etiquetadas
```

```
    E_out <- sum(g.etiquetas != test.etiquetas)

    # Devuelve el porcentaje de error fuera de la muestra
    return(E_out / nrow(test.muestra))
}
```

De forma análoga al anterior apartado, generamos una nueva muestra de 100 puntos y llamamos a la función anterior 1000 veces:

```
# Generamos una muestra aleatoria de tamaño 100
reg.muestra <- generar_muestra(100)

# Definimos el número de repiticiones
num_rep <- 1000

# Repetimos el experimento num_rep veces y tomamos la media de los valores devueltos
E_out <- sum(replicate(num_rep, medir_Eout(reg.muestra))) / num_rep
```

De aquí obtenemos que el error medio fuera de la muestra tras 1000 repeticiones es de 6.0069%, un valor muy bueno. Este valor es en realidad el que nos interesa, ya que el aprendizaje automático busca, ante todo, minimizar el error fuera de la muestra de entrenamiento. Un error medio de un 6.0069% nos permite afirmar que para este tipo de clasificación y con estos datos, la clasificación basada en la regresión lineal es una gran opción a tener en cuenta.

Apartado c

Para este ejercicio, de nuevo, encapsulamos el experimento en una función que recibe una muestra, genera un etiquetado aleatorio sobre ella, hace regresión lineal con esos datos y ejecuta PLA con vector inicial el vector de pesos devuelto por la regresión, además de repetirlo con vector inicial $(0, 0, 0)$; esta función, por último, devuelve el número de iteraciones que que ha realizado el algoritmo con cada vector inicial para llegar a la solución:

```
medir_iter_PLA <- function(muestra){
    # Generamos etiquetado con f
    f.etiquetado <- generar_etiquetado(muestra)

    # Estimamos g
    regresion <- Regress_Lin(muestra, f.etiquetado$Etiquetas)

    PLA_aleat <- ajusta_PLA(datos = muestra, label = f.etiquetado$Etiquetas,
                            max_iter = 1000, vini = regresion)
    PLA_ceros <- ajusta_PLA(datos = muestra, label = f.etiquetado$Etiquetas,
                            max_iter = 1000, vini = c(0,0,0))

    return(c(PLA_ceros$Iter, PLA_aleat$Iter))
}
```

Realizamos el experimento 1000 veces, y tomamos la media de cada una de las iteraciones devueltas por la función anterior, de manera que obtenemos en `num_iter.media` un vector cuya primera posición contiene la media de iteraciones usadas por PLA con vector inicial igual a $(0, 0, 0)$ y cuya segunda posición contiene la media de iteraciones tras realizar PLA con vector inicial el devuelto por la regresión lineal:

```
# Generamos una muestra aleatoria de tamaño 10
reg.muestra <- generar_muestra(10)

# Definimos el número de repiticiones
num_rep <- 1000

# Repetimos el experimento num_rep veces y tomamos la media de los valores devueltos
num_iter <- replicate(num_rep, medir_iter_PLA(reg.muestra))
num_iter.media <- apply(num_iter, 1, mean)
```

Los valores obtenidos son los siguientes:

- Número medio de iteraciones con vector inicial igual a $(0, 0, 0)$: 10.419.
- Número medio de iteraciones con vector inicial igual a la solución de la regresión lineal: 11.445.

De aquí podemos concluir que ejecutar regresión lineal parece ser una buena opción para generar un vector inicial para el Perceptron.

Ejercicio 8

En este último ejercicio, primero definimos la función que determinará el etiquetado:

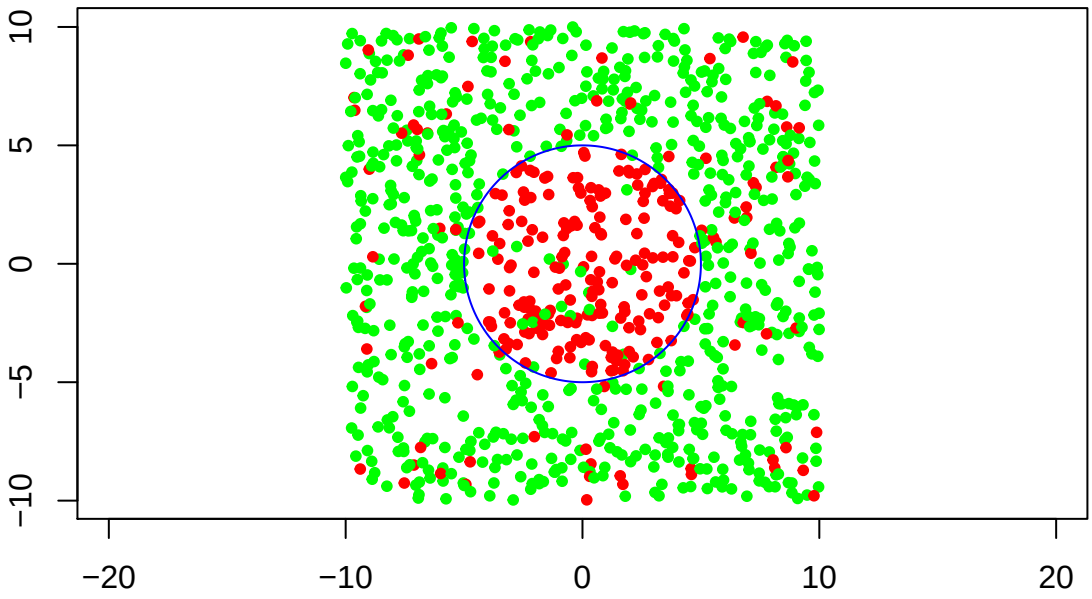
```
# Definimos la función f
f <- function(x1, x2){
    x1 ** 2 + x2 ** 2 - 25
}

# Definimos la función etiquetadora
f.etiquetado <- generador_etiquetados(f)
```

Generamos, además, la muestra, las etiquetas basadas en la función anterior y añadimos un 10% de ruido:

```
# Generación de la muestra
muestra <- generar_muestra(1000)

# Generamos las etiquetas de la muestra con f
f.etiquetas <- f.etiquetado(muestra[, 1], muestra[, 2])

# Añadimos un 10% de ruido a las etiquetas
ruido.indices <- sample(1000, 100)
f.etiquetas[ruido.indices] <- -f.etiquetas[ruido.indices]
```

Podemos visualizar ya el tipo de dato con el que estamos trabajando. Para esto, reutilizamos la función `genera_grafico()` que definimos anteriormente, pasándole esta vez como parámetro `etiquetas` las etiquetas con ruido que acabamos de definir; así, se usarán estas etiquetas y no se generan unas nuevas:

```
# Generamos gráfico y desechamos su salida, que es un vector igual a f.etiquetas
. <- genera_grafico(muestra[, 1], muestra[, 2], f, f.etiquetas,
                    main="Clasificación de la muestra", xlab="", ylab="")
```



Apartado a

En este apartado vamos a trabajar como en el ejercicio anterior: encapsulamos todo el trabajo en una función y la repetimos el número de veces necesario.

Así, definimos `medir_Ein`, una función en la que se mide el error dentro de la muestra con regresión lineal; para ello se genera una muestra de 1000 puntos, se etiqueta con la función etiquetadora que se recibe como parámetro, se genera un 10% de ruido y se hace regresión lineal con la muestra y estas etiquetas ruidosas. Por último, se compara el etiquetado que hace la regresión con la función original y se devuelve el porcentaje de error:

```
# Mide el error dentro de la muestra
medir_Ein <- function(etiquetado){
    # Genera una muestra de 1000 puntos
    muestra <- generar_muestra(1000)

    # Etiqueta con la función recibida
    etiquetas <- etiquetado(muestra[, 1], muestra[, 2])

    # Generamos ruido en 100 puntos de la muestra
    ruido.indices <- sample(1000, 100)
    etiquetas[ruido.indices] <- -etiquetas[ruido.indices]

    # Calculamos la recta determinada por la regresión lineal
    regresion <- Regress_Lin(muestra, etiquetas)
    g.recta <- -c(regresion[1], regresion[3]) / regresion[2]

    # Definimos la función etiquetadora de la regresión lineal
    g <- function(x,y){
        y - g.recta[1]*x - g.recta[2]
    }
```

```
    # Etiquetamos con la regresión
    g.etiquetador <- generador_etiquetados(g)
    g.etiquetas <- g.etiquetador(muestra[, 1], muestra[, 2])

    # Calculamos el número de muestras mal etiquetadas
    E_in <- sum(g.etiquetas != etiquetas)

    # Devolvemos el porcentaje de error
    return(E_in / nrow(muestra))
}
```

De nuevo, como en el ejercicio anterior, repetimos el experimento mil veces y obtenemos el porcentaje de error dentro de la muestra:

```
# Definimos el número de repiticiones
num_rep <- 1000

# Repetimos el experimento num_rep veces y tomamos la media de los valores devueltos
E_in <- sum(replicate(num_rep, medir_Ein(f.etiquetado))) / num_rep
```

De aquí obtenemos que el error medio dentro de la muestra tras 1000 repeticiones es de $E_{in} = 49.1992\ \%$. Este error tan alto no es sorprendente: estamos intentando clasificar con una recta unos datos que están clasificados con una circunferencia; no se puede esperar un error menor a no ser que hagamos, como hacemos en los siguientes apartados, una transformación no lineal de los datos.

Apartado b

Hacemos ahora la transformación no lineal de los datos de la que hablábamos en el anterior apartado. Para ello vamos a transformar los datos (x, y) en los datos (x, y, xy, x^2, y^2). La columna de unos se encarga `Regress_Lin()` de añadirla —aunque la añade como última componente del vector, esto no supone ningún problema con el enunciado del ejercicio: el orden en el vector transformado es irrelevante, siempre y cuando lo tengamos en cuenta después para interpretar los pesos—:

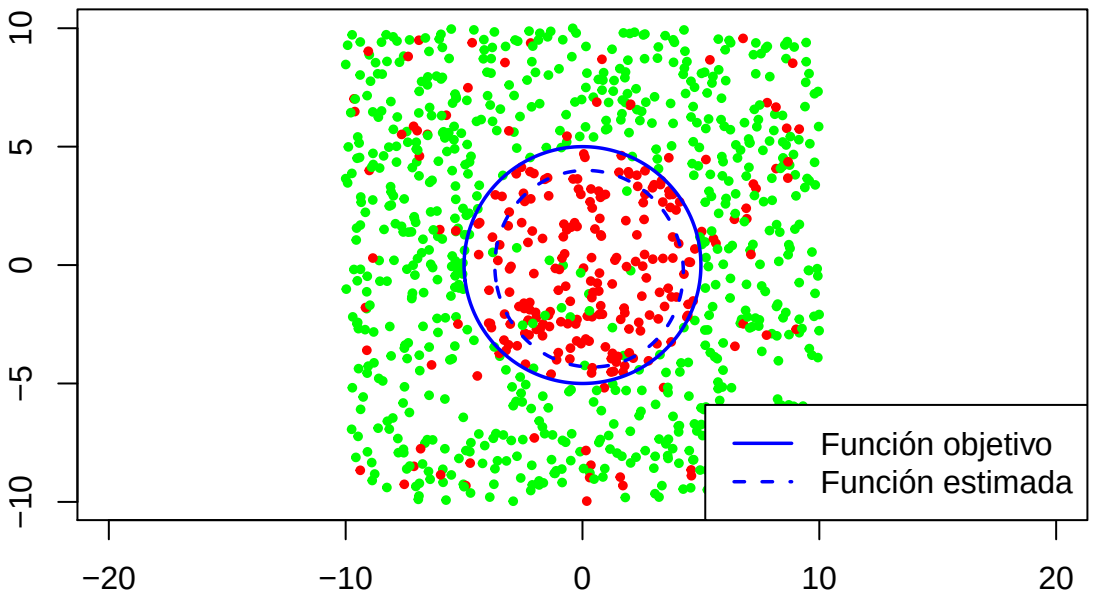
```
# Hacemos la transformación de los datos
m.x <- muestra[, 1]
m.y <- muestra[, 2]
muestra.trans <- cbind(m.x, m.y, m.x * m.y, m.x ** 2, m.y ** 2)

# Calculamos la regresión lineal con los datos transformados y las etiquetas ruidosas
w <- Regress_Lin(muestra.trans, f.etiquetas)
```

Podemos ahora dibujar el resultado, tomando la salida de la regresión lineal como los pesos w de la función $g(x, y)$ de la siguiente manera —hemos tenido en cuenta que `Regress_Lin` añade el 1 al final del vector, no al principio—:

$$g(x, y) = w_1 x + w_2 y + w_3 xy + w_4 x^2 + w_5 y^2 + w_6$$

```
# Definimos la función según los pesos devueltos por la regresión
g <- function(x, y){
    w[1]*x + w[2]*y + w[3]*x*y + w[4]*x*x + w[5]*y*y + w[6]
}
```

```r
# Generamos vector de colores basado en las etiquetas
colores <- ifelse(f.etiquetas == 1, "green", "red")

# Dibujamos la muestra original
plot(muestra, col = colores, pch=20, asp=1, cex=0.8,
     main="Estimación con datos transformados", xlab="", ylab="")

# Añadimos la gráfica de la función objetivo y la estimada
fg.x <- seq(-50, 50, length=1000)
fg.y <- seq(-50, 50, length=1000)
f.z <- outer(fg.x, fg.y, f)
g.z <- outer(fg.x, fg.y, g)

contour(fg.x, fg.y, f.z, levels=0, col = "blue",
        add=T, drawlabels=F, lwd=1.75)
contour(fg.x, fg.y, g.z, levels=0, col = "blue",
        add=T, drawlabels=F, lty=2, lwd=1.75)

# Añadimos leyenda de las funciones dibujadas.
legend("bottomright", c("Función objetivo", "Función estimada"),
       bg="white", col="blue", lty=c(1,2), lwd=1.75)
```



Volvemos a medir el error dentro de la muestra, esta vez con los datos transformados. Para ello redefinimos la función `medir_Ein`, que queda de la siguiente manera:

```r
# Mide el error dentro de la muestra
medir_Ein <- function(etiquetado){
    # Genera una muestra de 1000 puntos
    muestra <- generar_muestra(1000)

    # Etiquetas con la función recibida
    etiquetas <- etiquetado(muestra[, 1], muestra[, 2])
```

```
    # Transformamos los datos de la muestra generada
    m.x <- muestra[, 1]
    m.y <- muestra[, 2]
    muestra.trans <- cbind(m.x, m.y, m.x * m.y, m.x ** 2, m.y ** 2)

    # Generamos ruido en 100 puntos de la muestra
    ruido.indices <- sample(1000, 100)
    etiquetas[ruido.indices] <- -etiquetas[ruido.indices]

    # Calculamos los pesos con regresión lineal
    w <- Regress_Lin(muestra.trans, etiquetas)

    # Definimos la función etiquetadora con los pesos anteriores
    g <- function(x, y){
        w[1]*x + w[2]*y + w[3]*x*y + w[4]*x*x + w[5]*y*y + w[6]
    }

    # Etiquetamos con la regresión
    g.etiquetador <- generador_etiquetados(g)
    g.etiquetas <- g.etiquetador(muestra[, 1], muestra[, 2])

    # Calculamos el número de muestras mal etiquetadas
    E_in <- sum(g.etiquetas != etiquetas)

    # Devolvemos el porcentaje de error
    return(E_in / nrow(muestra))
}
```

De nuevo, como en el ejercicio anterior, repetimos el experimento mil veces y obtenemos el porcentaje de error dentro de la muestra tras transformar los datos:

```
g.etiquetado <- generador_etiquetados(g)

# Definimos el número de repiticiones
num_rep <- 1000

# Repetimos el experimento num_rep veces y tomamos la media de los valores devueltos
E_in <- sum(replicate(num_rep, medir_Ein(f.etiquetado))) / num_rep
```

De aquí obtenemos que el error medio dentro de la muestra con los datos transformados y tras 1000 repeticiones es de $E_{in} = 15.5889\%$. Este valor es muchísimo mejor que el anterior: tras transformar los datos, hemos conseguido que la regresión lineal sea una muy buena opción para el proceso de aprendizaje. Teniendo en cuenta que hay un 10% de ruido, un error dentro de la muestra del 15.5889% es excelente: la transformación de los datos ha valido la pena.

Apartado c

Por último, vamos a estudiar cómo se comporta este proceso fuera de la muestra, que es donde realmente nos interesa. Para ello encapsulamos de nuevo en una función el trabajo de medir el error fuera de la muestra.

Esta función recibe el etiquetado de la función objetivo f y el de la función estimada g que acabamos de calcular. Tras generar una nueva muestra de test, se etiqueta tanto con f como con g, contabilizando el número de muestras mal etiquetadas y devolviendo el porcentaje de estas:

```r
# Medimos el error fuera de la muestra
medir_Eout <- function(g.etiquetado, f.etiquetado){
    # Generamos una nueva muestra
    test.muestra <- generar_muestra(1000)

    # Generamos etiquetado con f de la nueva muestra
    test.etiquetas <- f.etiquetado(test.muestra[, 1], test.muestra[, 2])

    # Generamos etiquetado con g de la nueva muestra
    g.etiquetas <- g.etiquetado(test.muestra[, 1], test.muestra[, 2])

    # Calculamos el número de muestras mal etiquetadas
    E_out <- sum(g.etiquetas != test.etiquetas)

    # Devolvemos el porcentaje de error fuera de la muestra
    return(E_out / nrow(test.muestra))
}
```

Repetimos ahora el experimento 1000 veces, tomando la media de los errores fuera de la muestra devueltos por nuestra función de análisis:

```r
# Definimos el número de repiticiones
num_rep <- 1000

# Repetimos el experimento num_rep veces y tomamos la media de los valores devueltos
E_out <- sum(replicate(num_rep, medir_Eout(g.etiquetado, f.etiquetado))) / num_rep
```

De aquí obtenemos que el error medio fuera de la muestra tras 1000 repeticiones es de un 6.6231%. Este error es excelente, y nos da una idea del potencial que tienen las transformaciones no lineales ante datos que no son linealmente separables. El único problema de este proceso es, evidentemente, que en procesos reales de aprendizaje automática no conoceremos nunca la función objetivo; esto dificultará enormemente la elección precisa de la transformación que debemos hacer, elemento clave de todo este proceso.