Санкт–Петербургский государственный университет

Храмцов Андрей Игоревич
Радькова Ирина Тимофеевна

Симплекс Метод

Санкт-Петербург
2024 г.

Содержание

Глава 1. Линейное программирование

Задача линейного программирования (ЛП) состоит в том, что нам необходимо максимизировать или минимизировать некоторый линейный функционал на многомерном пространстве при заданных линейных ограничениях.

1.1 Линейный функционал

Линейный функционал еще называется линейной формой, 1-формой, ковектором и ковариантным вектором.

Линейный функционал это линейное отображение, действующее из векторного пространства над полем в это же поле.

В алгебре и геометрии обычно используют название линейная форма, потому что чаще идет речь о конечномерных векторных пространствах, а в функциональном анализе линейный функционал, потому что там часто отображение именно над множествами функций.

Рациональные или вещественные множества это примеры полей. Элементы поля называются скалярами.

Векторное пространство так же называется линейным пространством или линеалом. Векторное пространство задается над полем.

Погожев определял линеал как множество объектов произвольной природы для которых определены сложение и умножение на число. Никаких полей у нас не вводилось.

Отображение называется линейным когда оно удовлетворяет двум свойствам линейности:

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

1.2 Геометрическое представление задачи ЛП

Симплекс — это многомерное обобщение треугольника. Другое его название — n-мерный тетраэдр. Симплекс — это выпуклая оболочка $n+1$ точек афинного пространства размерности как минимум n, которые не лежат в подпространстве размерности $n-1$ (афинно независимы).

Вообще говоря каждое из линейных неравенств на переменные ограничивает полупространство в соответствующем линеале. В результате все неравенства ограничивают выпуклый многогранник.

Линейный функционал порождает гиперплоскость. Гиперплоскость это подпространство, размерность которого на 1 меньше исходного пространства.

Требуется найти такую гиперплоскость, чтобы значение функционала было максимальным (или минимальным) и чтобы гиперплоскость пересекала многогранник хотя бы в одной точке.

Уравнение гиперплоскости можно записать так:

$$\{x|nx = \bar{x}\}$$

где n это нормаль гиперплоскости, а $\bar{x}$ это точка через которую проходит гиперплоскость.

Уравнение полупространства можно записать так:

$$\{x|nx \geq \bar{x}\}$$

Таким образом каждое ограничение порождает гиперплоскость.

Вектор самого быстрого изменения целевой функции и называется градиентом:

$$n = \frac{c}{|c|}$$

Этот вектор тоже может задать гиперплоскость проходящую через какую-нибудь точку. Другими словами, он задает совокупность, или семейство гиперплоскостей.

Опорной гиперплоскостью выпуклого множества называется такая гиперплоскость которая содержит по крайней мере одну точку этого множества и все точки данного множества расположены в одном из полупространств, порождаемых гиперплоскостью.

1.3 Обозначения для математического представления

- Целевая функция (ЦФ) обозначается z.
- Вектор коэффициентов целевой функции будем обозначать через c.
- Вектор переменных x.
- Вектор переменных двойственной задачи y.
- слабые переменные s.

Вещи относящиеся к решению будем отмечать звездочкой:

- Оптимальное решение: x^*, y^*.
- Значение задачи: z^*, $\overline{z}^*$

Векторы у нас вертикальные, запись в строчку использует транспонирование.

1.4 Математическое описание задачи ЛП

Прямая задача максимизации в стандартной форме:

$$\begin{aligned} \max z = \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

У нас m ограничений и n переменных.

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \\ c &= (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T \\ b &= (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T \\ A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Мы в основном предполагаем что система совместна и неизбыточна. Система избыточна если можно представить хотя бы одно из ее уравнений (неравенств) в виде линейной комбинации остальных.

Более развернутая форма:

$$\max z = \max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \geq 0$$

Глава 2. Двойственность

2.1 Двойственная задача для стандартной задачи максимизации

В английском используются термины primal и dual. На русском будем говорить прямая и двойственная.

Двойственная задача для стандартной задачи максимизации (1):

$$\begin{aligned} \min \overline{z} &= \min b^T y \\ A^T y &\geq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

В двойственной задаче у нас наоборот m переменных и n ограничений

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Более развернутая запись:

$$\min \overline{z} = \min(b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m)^T \geq 0$$

2.2 Теоремы двойственности

Теорема о слабой двойственности:

$$c^T x \leq b^T y$$

Теорема о сильной двойственности говорит что если одна задача имеет решение то и вторая имеет решение и эти решения такие:

$$c^T x^* = b^T y^*$$

$x*$ называется оптимальным решением, а значение целевой функции при нем называется значением задачи.

2.3 Двойственность задачи ЛП в общем, стандартном и каноническом виде

Прямая задача максимизации в общем виде:

$$\begin{gathered}\max z = \max c^T x \\ a_i x \le b_i, \quad i = \overline{1, m_1} \\ a_i x = b_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m} \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n_1} \\ x_j \in R, \quad j = \overline{n_1 + 1, n}\end{gathered}$$

Двойственная к ней:

$$\begin{gathered}\min \overline{z} = \min b^T y \\ (a^j)^T y \ge c_j, \quad j = \overline{1, n_1} \\ (a^j)^T y = c_j, \quad j = \overline{n_1 + 1, n} \\ y_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m_1} \\ y_i \in R, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}\end{gathered}$$

Частный случай прямой задачи при котором она находится в стандартном виде означает что $m_1 = m$ и $n_1 = n$. При таких значениях все ограничения являются неравенствами и у всех переменных есть ограничение на знак.

$$\begin{gathered}\max z = \max c^T x \\ a_i x \le b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}\end{gathered}$$

Двойственная задача к этой стандартной задаче будет тоже иметь все ограничения в виде неравенств и будет иметь ограничения на знак для переменных.

$$\min \overline{z} = \min b^T y$$

$$(a^j)^T y \geq c_j, \quad j = \overline{1, n}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$$

Частный случай прямой задачи при котором она находится в каноническом виде означает что $m_1 = 0$ и $n_1 = n$. При таких значениях все ограничения являются равенствами и у всех переменных есть ограничение на знак.

$$\max z = \max c^T x$$

$$a_i x = b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Двойственная задача к этой канонической задаче будет иметь все ограничения в виде неравенств и не будет иметь ограничений на знак для переменных.

$$\min \overline{z} = \min b^T y$$

$$(a^j)^T y \geq c_j, \quad j = \overline{1, n}$$

$$y_i \in R, \quad i = \overline{1, m}$$

Глава 3. Базисные решения

Нас интересует отыскание неотрицательных решений системы линейных неравенств.

Можно показать что крайние точки выпуклого множества решений соответствуют так называемым базисным решениям. (Они так называются потому что любую точку выпуклого множества можно представить в виде линейной комбинации его крайних точек.)

3.1 Базисное решение СЛАУ

Пусть

$$
\begin{gathered}
Ax = b \\
A = \begin{bmatrix} B & \big| & N \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}
\end{gathered} \tag{2}
$$

B — невырожденная квадратная матрица.

Если положить

$$
\begin{gathered}
x_B = B^{-1}b, \quad x_N = 0 \\
x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}
\end{gathered}
$$

то получим решение системы (2), называемое базисным решением. Компоненты вектора x_B называются базисными переменными, а компоненты вектора x_N называются небазисными переменными.

Столбцы матрицы B называются базисными векторами, а ее m независимых столбцов образуют базис.

С другой стороны, если у нас есть решение x, то оно называется базисным, если вектор-столбцы, соответствующие ненулевым компонентам x, линейно независимы. (Вектор столбцы из матрицы A.)

3.2 Неравенства

Идея базисных решений оказывается полезной применительно для линейных неравенств. Можно превратить их в равенства, добавив слабые переменные, а можно рассмотреть непосредственно сами неравенства.

$$Ax \geq b, \quad x \geq 0$$

Таким образом, в системе имеется $m+n$ неравенств. Если система совместна, она определяет непустое выпуклое множество.

Базисным допустимым решением является крайняя точка выпуклого множества, в которой по крайней мере n неравенств выполняются как равенства. Поскольку оно допустимое, оно удовлетворяет и остальным m неравенствам.

3.3 Определения

Когда одна из базисных переменных равняется нулю, базисное решение называется вырожденным, и это соответствует ситуации когда в точке пересекается более чем n гиперплоскостей.

Поиск базисного решения это лишь поиск линейно независимой системы из m столбцов матрицы A.

Утверждение: Если у системы линейных уравнений существует решение, у нее существует и базисное решение.

Утверждение: Если задача ЛП имеет допустимое решение, то она имеет и допустимое базисное решение.

Утверждение: Если задача ЛП имеет оптимальное решение, то она имеет и оптимальное базисное решение.

В силу этого утверждения симплекс метод оперирует только с базисными решениями.

Небазисные допустимые решения являются внутренними точками множества допустимых решений.

3.4 Геометрическая интерпретация слабых переменных

Слабые переменные это s. Их количество равно m в случае перехода от стандартной задачи к канонической.

Добавлением слабой переменной к каждому неравенству $a_i x \leq b_i$ мы превращаем систему неравенств в линейно независимую систему уравнений

$$Ax + s = b$$

На каждом шаге мы разбиваем множество переменных $\begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix}$ на базисные x_B и небазисные x_N. Небазисных переменных у нас n (размерность пространства решений). Базисных переменных у нас соответственно m.

Каждая слабая переменная s_i пропорциональна расстоянию от решения x до гиперплоскости, порождаемой соответствующим ограничением $a_i x \leq b_i$. Приравнивание слабой переменной к нулю означает выполнение равенства, или, что то же самое, что x лежит в гиперплоскости этого ограничения.

Приравнивание к нулю n таких переменных s_i для их линейно независимых гиперплоскостей означает что x лежит во всех этих гиперплоскостях одновременно. А пересечение n гиперплоскостей, вообще говоря, дает нам конкретную точку в пространстве. Если эта точка допустимая, то она соответствует вершине выпуклого множества решений, и соответствует базисному решению.

Если же мы приравниваем к нулю одну из переменных x_i, тогда хотя бы одна слабая s_j должна быть положительной, что значит x не лежит в гиперплоскости, порожденной ограничением $a_j x \leq b_j$. В этом случае x вместо этого лежит в гиперплоскости, порожденной ограничением $x_i \geq 0$.

То есть в любом случае если мы обнуляем n переменных из s и x, точка будет лежать в n гиерплоскостях. А если при этом точка еще и допустимая, то она является вершиной множества.

Глава 4. Основы симплекс метода

Это метод решения задачи ЛП. Это численный метод решения задачи ЛП [Гейл].

Он истекает из графического метода решения и из факта что оптимальное решение будет находиться в краевой точке множества которое задано нашими ограничениями. Краевая точка это такая точка множества которая не принадлежит ни одному отрезку множества.

Граничная точка может лежать на ребре а краевые это только вершины.

Симплекс метод — алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования путем перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве.

Сущность метода: построение последовательности базисных решений, на которой монотонно убывает (возрастает) линейный функционал до ситуации, когда выполняются необходимые и достаточные условия локальной оптимальности [Википедия].

В работе Канторовича 1939 впервые были изложены принципы отрасли которую потом назвали линейным программированием.

4.1 Принцип симплекс метода

Принцип симплекс метода состоит в том что мы выбираем одну вершину многогранника и перемещаемся по ребрам в другие вершины в сторону увеличения функционала.

Когда такой переход невозможен считается что оптимальное значение найдено (либо его нет).

Симплекс метод можно поделить на две основные фазы:

1. Нахождение исходной вершины множества допустимых решений,

2. Последовательный переход от одной вершины к другой, ведущий к оптимизации значения целевой функции.

Из-за того что в некоторых случаях нахождение исходной вершины тривиально, симплекс метод бывает однофазным и двухфазным. То есть в тривиальном случае первую фазу опускаем. Тривиальным случаем может быть когда 0 — допустимое решение

4.2 Симплекс таблицы

Симплексная таблица (СТ) - основной элемент вычислительной процедуры симплекс метода. Симплексная таблица представляет собой таблицу коэффициентов диагональной формы, построенной для канонической задачи максимизации [Кузютин]. Из-за того что она диагональная, она соответствует базисному решению рассматриваемой системы линейных уравнений.

4.3 Допустимость

Симплексная таблица называется прямо-допустимой если $b \geq 0$. Симплексная таблица называется двойственно допустимой если $c \geq 0$. Симплексная таблица называется оптимальной если она одновременно и прямо-допустимая и двойственно допустимая. Оптимальная СТ соответствует оптимальному базисному решению.

4.4 Симплекс алгоритм

Алгоритм начинается с прямо-допустимой симплексной таблицы.

1. На первом шаге мы выбираем ведущий столбец. Выбираем столбец с минимальным отрицательным c. Если таких нет, то оптимальное решение найдено.

2. На втором шаге выбираем ведущую строку из строк у которых элемент этого столбца положительный. Если положительных нет, задача ЛП не омеет оптимального решения. Выбираем строку с минимальным b/a.

3. На третьем шаге превращаем ведущий элемент в 1 и остальные элементы столбца в 0 эквивалентными преобразованиями. То есть мы проводим процедуру Гаусса по приведению таблицы к диагональному виду по новому базису.

Вообще говоря, выбор переменной с самой отрицательной c не гарантирует нам самую быструю сходимость и можно подобрать пример для которого алгоритм будет так обходить все вершины [Ху].

Глава 5. Матричное представление симплекс таблиц

Симплекс таблица — это способ решения задачи ЛП и способ записи решения симплекс метода.

Обычный симплекс алгоритм не очень хорошо будет работать на компьютере, потому что при выполнении Гаусса для переходов к разным базисам туда-сюда на одной и той же таблице будет накапливаться ошибка вычисления (из за того как работают опервции с плавающей точкой). Можно показать что нам не обязательно вычислять таблицу последовательно и мы можем перейти от исходной таблице к таблице с любым другим базисов за один шаг.

5.1 Исходная таблица

Стандартную задачу максимизации можно переписать в каноническом виде таким образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & -c^T & 0 \\ 0 & A & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$z \to \max, \quad x \geq 0, \quad s \geq 0$$

Это и есть симплекс таблица в матричной форме.

- $s \geq 0$ — новые переменные, называющиеся слабыми, дополняющие старые таким образом, что неравенства переходят в равенства.
- z — это переменная которую необходимо максимизировать, значение нашей целевой функции.
- Еще в википедии есть что $b \geq 0$. Это как раз условие того что симплекс алгоритм должен начинаться с прямо-допустимой таблицы.

Более раскрытая форма для понимания:

$$
\left(\begin{array}{c|cccc|cccc}
1 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
z \\ \hline x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \hline s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c}
0 \\ \hline b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m
\end{array}\right)
$$

5.2 Таблица с другим базисом

Пусть матрица B состоит из столбцов матрицы $\left[\begin{array}{c|c} A & E_m \end{array}\right]$, соответствующих базисным переменным. Пусть также c_B это коэффициенты ЦФ, соответствующие этим переменным.

Тогда из исходной таблицы (3) можно получить таблицу для другого базиса:

$$
\begin{bmatrix}
1 & c_B^T B^{-1} A - c^T & c_B^T B^{-1} \\
0 & B^{-1} A & B^{-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} z \\ x \\ s \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} c_B^T B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{bmatrix}
\tag{4}
$$

Этот переход эквивалентен умножению (3) слева на

$$
\begin{bmatrix}
1 & c_B^T B^{-1} \\
0 & B^{-1}
\end{bmatrix}
$$

5.3 Базисные переменные

Что вообще из себя представляет матрица $B^{-1}A$?

Пусть переменная x_j находится в базисе на месте i. Тогда столбец матрицы B с индексом i равен столбцу a^j:

$$B = \begin{bmatrix} B^1 & \dots & a^j & \dots & B^m \end{bmatrix}$$
$$B^i = a^j$$

Пусть матрица B^{-1} выглядит так:

$$B^{-1} = \{\hat{b}_{ij}\}_{i,j=1}^{m,m} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \dots & \hat{b}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}^1 & \hat{b}^2 & \dots & \hat{b}^m \end{bmatrix}$$

Матрица B^{-1} при умножении на столбец a^j превращает его в единичный. Единица в нем стоит на месте i:

$$B^{-1}a^j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\hat{b}_i a^j = 1, \quad i = j$$
$$\hat{b}_i a^j = 0, \quad i \neq j$$

Тогда $B^{-1}A$ можно записать так:

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 a^1 & \dots & \hat{b}_1 a^j & \dots & \hat{b}_1 a^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_i a^1 & \dots & \hat{b}_i a^j & \dots & \hat{b}_i a^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_m a^1 & \dots & \hat{b}_m a^j & \dots & \hat{b}_m a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 a^1 & \dots & 0 & \dots & \hat{b}_1 a^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_i a^1 & \dots & 1 & \dots & \hat{b}_i a^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_m a^1 & \dots & 0 & \dots & \hat{b}_m a^n \end{pmatrix}$$

Матрица B^{-1} при умножении на матрицу A превращает все столбцы соответствующие базисным переменным в единичные. Очевидно, то же самое будет происходить и для переменных s. Столбцы, которые не соответствуют базисным переменным будут иметь всякие разные числа.

Таким образом эта операция, то есть умножение на B^{-1} эквивалентна использованию метода Гаусса (или же эквивалентных преобразований) в симплекс алгоритме. А именно, она нам приводит матрицу $\left[\begin{array}{c|c} A & E_m \end{array}\right]$ к трапецевидной (или диагональной) форме по базисным переменным.

5.4 Таблица в развернутом виде

Перепишем таблицу (4) в развернутом виде:

$$\hat{c}_B = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} c_B^T \hat{b}^1 & c_B^T \hat{b}^2 & \dots & c_B^T \hat{b}^m \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & c_B^T B^{-1} a^1 - c_1 & \dots & c_B^T B^{-1} a^n - c_n & \hat{c}_{B1} & \dots & \hat{c}_{Bm} \\ \hline 0 & \hat{b}_1 a^1 & \dots & \hat{b}_1 a^n & \hat{b}_{11} & \dots & \hat{b}_{1m} \\ 0 & \hat{b}_2 a^1 & \dots & \hat{b}_2 a^n & \hat{b}_{21} & \dots & \hat{b}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{b}_m a^1 & \dots & \hat{b}_m a^n & \hat{b}_{m1} & \dots & \hat{b}_{mm} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} z \\ \hline x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \hline s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \hat{c}_B b \\ \hline \hat{b}_1 b \\ \hat{b}_2 b \\ \vdots \\ \hat{b}_m b \end{array}\right) \tag{5}$$

5.5 Верхняя строка таблицы

Строка $\left(\begin{array}{ccc|ccc} c_B^T B^{-1} a^1 - c_1 & \dots & c_B^T B^{-1} a^n - c_n & \hat{c}_{B1} & \dots & \hat{c}_{Bm} \end{array}\right)$ будет иметь нули на позициях соответствующим базисным переменным.

Мы уже выяснили что $B^{-1} a^i$ превращает столбец в единичный если переменная x_i является базисной. Поэтому умножение этого произведения на c_B^T слева дает нам коэффициент ЦФ этой базисной переменной x_i, и дальнейшее вычитание опять этого коэффициента обнуляет соответствующий элемент в строке.

Для переменных s всё еще проще, оно аналогично, только вместо матрицы A у нас матрица E_m, а изначальные коэффициенты уже равны нулю, поэтому вычитание опущено.

Таким образом, на каждом шаге m столбцов таблицы (5), соответствующие базисным переменным являются линейно независимыми единичными столбцами.

5.6 Условия оптимальности и допустимости

Когда в верхней строчке в таблице (5) нет отрицательных элементов, оптимальное решение найдено и записано в правой части уравнения. Если отрицательные элементы есть то ищем среди них минимальный и соответствующая переменная x_i из небазисных будет вводимой:

$$\min_i (c_B^T B^{-1} a^i - c_i) \tag{6}$$

Чтобы выбрать какую переменную убрать из базиса, мы выбираем элемент среди базисных. Если x_i это вводимая переменная, то исключаемой будет x_j та у которой

$$\min_j \frac{\hat{b}_j b}{\hat{b}_j a^i} \tag{7}$$

Для переменных s эти выражения аналогично составляются.

5.7 Модифицированный симплекс метод

Алгоритм с матричной формой записи, называется модифицированным симплекс алгоритмом:

1. Строим исходную таблицу (3).
2. Строим матрицу столбцов текущих базисных переменных B и находим обратную к ней B^{-1}.
3. С помощью B^{-1} получаем текущую таблицу (4).
4. Проверяем условия оптимальности (6) и допустимости (7), находим новый базис и возвращаемся к шагу 2.

Можно оптимизировать этот алгоритм, если не пересчитывать на каждом шаге обратную матрицу заново, ведь в исходной меняется лишь один столбец. Если $B = LU$, то $B^{-1} = U^{-1}L^{-1}$. При обновлении базиса матрицы L и U обновляются напрямую с помощью Forrest−Tomlin и Bartels−Golub методов.

Но если никогда не пересчитывать обратную матрицу с нуля, то будет накапливаться вычислительная ошибка. Мы можем отслеживать как эта ошибка накапливается, наблюдая за элементами, которые мы знаем что должны равняться нулю. Когда они становятся больше некоторого заданного ε, мы пересчитываем L и U и B^{-1} с нуля, заново строя матрицу B.

5.8 Решение двойственной задачи

Пусть B составлена по оптимальному базису.

Тогда решение двойственной задачи равно:

$$y* = c_B^T B^{-1}$$

Глава 6. Алгоритм решения с ограниченными переменными

Это когда $x \geq l$ вместо $x \geq 0$ или $x \geq l$.

Если ограничение снизу то получается простая замена переменых.

Если ограничение сверху, то замена переменных не сработает. Можно конечно расширить матрицу ограничений и включить их туда, но можно поступить умнее.

Мы можем проверять эти ограничения на шаге проверки допустимости (7).

Добавляются еще две проверки, и переменная вводится в решение бла бла бла...

Глава 7. Пример

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 42 \\ 33 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \max z &= \max c^T x \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Глава 8. Источники

1. Ху
2. Таха
3. Гейл
4. Ашманов