Симплекс Метод

10 декабря 2024 г.

Содержание

Глава 1. Линейное программирование

Задача линейного программирования (ЛП) состоит в том, что нам необходимо максимизировать или минимизировать некоторый линейный функционал на многомерном пространстве при заданных линейных ограничениях.

1.1 Линейный функционал

Линейный функционал еще называется линейной формой, 1-формой, ковектором и ковариантным вектором.

Линейный функционал это линейное отображение, действующее из векторного пространства над полем в это же поле.

В алгебре и геометрии обычно используют название линейная форма, потому что чаще идет речь о конечномерных векторных пространствах, а в функциональном анализе линейный функционал, потому что там часто отображение именно над множествами функций.

Рациональные или вещественные множества это примеры полей. Элементы поля называются скалярами.

Векторное пространство так же называется линейным пространством или линеалом. Векторное пространство задается над полем.

Погожев определял линеал как множество объектов произвольной природы для которых определены сложение и умножение на число. Никаких полей у нас не вводилось.

Отображение называется линейным когда оно удовлетворяет двум свойствам линейности:

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$
$$f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

1.2 Геометрическое представление задачи ЛП

Симплекс — это многомерное обобщение треугольника. Другое его название — n-мерный тетраэдр. Симплекс — это выпуклая оболочка $n+1$ точек афинного пространства размерности как минимум n, которые не лежат в подпространстве размерности $n-1$ (афинно независимы).

Вообще говоря каждое из линейных неравенств на переменные ограничивает полупространство в соответствующем линеале. В результате все неравенства ограничивают выпуклый многогранник.

Линейный функционал порождает гиперплоскость. Гиперплоскость это подпространство, размерность которого на 1 меньше исходного пространства.

Требуется найти такую гиперплоскость, чтобы значение функционала было максимальным (или минимальным) и чтобы гиперплоскость пересекала многогранник хотя бы в одной точке.

Гиперплоскость задается одним вектором и этим вектором будет вектор $n = \frac{c}{|c|}$. Это вектор самого быстрого изменения целевой функции и называется градиентом. Еще для задания гиперплоскости нужна координата или же точка.

1.3 Обозначения для математического представления

- Целевая функция (ЦФ) обозначается z.
- Вектор коэффициентов целевой функции будем обозначать через c.
- Вектор переменных x.
- Вектор переменных двойственной задачи y.

Вещи относящиеся к решению будем отмечать звездочкой:

- Оптимальное решение: x^*, y^*.
- Значение задачи: z^*, $\overline{z}^*$

Векторы у нас вертикальные, запись в строчку использует транспонирование.

1.4 Математическое описание задачи ЛП

Прямая задача максимизации в стандартной форме:

$$
\begin{aligned}
\max z = \max c^T x \\
Ax \le b \\
x \ge 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

У нас m ограничений и n переменных.

$$
\begin{aligned}
x &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \\
c &= (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T \\
b &= (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T \\
A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Другая раскрытая запись задачи ЛП для того чтобы думать:

$$
\max z = \max(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n)
$$
$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$
$$
(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \ge 0
$$

Глава 2. Двойственность

Если честно, я бы дал это в самом начале, как такой разгон перед симплексом. То есть если мы даем теорию ЛП, то и двойственность сразу надо, а потом уже алгоритмы решения.

2.1 Двойственная задача

В английском используются термины primal и dual. На русском будем говорить прямая и двойственная.

Двойственная задача для стандартной задачи максимизации (1):

$$\begin{aligned} \min \overline{z} &= \min b^T y \\ A^T y &\geq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

В двойственной задаче у нас наоборот m переменных и n ограничений

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Более раскрытая запись для того чтобы думать:

$$\min \overline{z} = \min(b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m)^T \geq 0$$

2.2 Теоремы двойственности

$$c^T x \leq b^T y$$

$$c^T x^* = b^T y^*$$

$x*$ называется оптимальным решением, а значение целевой функции при нем называется значением задачи.

Вообще говоря, приведение ограничений к равенствам дает нам задачу ЛП в канонической форме.

2.3 Двойственность задачи ЛП в общем, стандартном и каноническом виде

Прямая задача в общем виде:

$$\max z = \max c^T x$$
$$a_i x \le b_i, \quad i = \overline{1, m_1}$$
$$a_i x = b_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n_1}$$
$$x_j \in R, \quad j = \overline{n_1 + 1, n}$$

Двойственная к ней:

$$\min \overline{z} = \min b^T y$$
$$(a^j)^T y \ge c_j, \quad j = \overline{1, n_1}$$
$$(a^j)^T y = c_j, \quad j = \overline{n_1 + 1, n}$$
$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m_1}$$
$$y_i \in R, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}$$

Частный случай прямой задачи при котором она находится в стандартном виде означает что $m_1 = m$ и $n_1 = n$. При таких значениях все ограничения являются неравенствами и у всех переменных есть ограничение на знак.

$$\max z = \max c^T x$$
$$a_i x \le b_i, \quad i = \overline{1, m}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Двойственная задача к этой стандартной задаче будет тоже иметь все ограничения в виде неравенств и будет иметь ограничения на знак для переменных.

$$\min \overline{z} = \min b^T y$$
$$(a^j)^T y \geq c_j, \quad j = \overline{1,n}$$
$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}$$

Частный случай прямой задачи при котором она находится в каноническом виде означает что $m_1 = 0$ и $n_1 = n$. При таких значениях все ограничения являются равенствами и у всех переменных есть ограничение на знак.

$$\max z = \max c^T x$$
$$a_i x = b_i, \quad i = \overline{1,m}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$$

Двойственная задача к этой канонической задаче будет иметь все ограничения в виде неравенств и не будет иметь ограничений на знак для переменных.

$$\min \overline{z} = \min b^T y$$
$$(a^j)^T y \geq c_j, \quad j = \overline{1,n}$$
$$y_i \in R, \quad i = \overline{1,m}$$

2.4 Представление двойственной задачи. Оптимальное решение двойственной задачи.

Что такое вообще представление двойственной задачи. Типа математическое?

Оптимальное решение двойственной задачи это типа оно выводится з прямой безо всякого алгоритма? если так то было бы круто и если эта вся теория не зависит от симплекс метода то ее можно всю дать либо в самом начале перед симплекс методом, либо дать очень обзорно хоть вначале хоть в конце, раз у нас фокус то все таки на симплекс методе а не на ЛП в целом.

Я уверен ПМИшники про двойственность уже всё знают и нет особого смысла застревать на двойственноти. Но если тут есть какие нибудь супер важные доказательства то мб и стоит их показать, хоть и не подробно.

Посмотрим сколько будет получаться по симплексу, и если будем чувствовать что успеваем то добавим в рассказа и про двойственность.

Все равно странно что нас просят двойственность в симплекс методе.

Глава 3. Основы симплекс метода

Это метод решения задачи ЛП.

Он истекает из графического метода решения и из факта что оптимальное решение будет находиться в краевой точке множества которое задано нашими ограничениями. Краевая точка это .. И почему вообще так.

Симплекс метод - алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования путем перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве.

Сущность метода: построение базисных решений, на которых монотонно убывает линейный функционал до ситуации, когда выполняются необходимые условия локальной оптимальности.

В работе Канторовича 1939 впервые были изложены принципы отрасли которую потом назвали линейным программированием.

3.1 Принцип симплекс метода

Принцип симплекс метода состоит в том что мы выбираем одну вершину многогранника и перемещаемся по ребрам в другие вершины в сторону увеличения функционала.

Когда такой переход невозможен считается что оптимальное значение найдено.

Симплекс метода можно поделить на две основные фазы:

1. нахождение исходной вершины множества допустимых решений, 2. последовательный переход от одной вершины к другой, ведущий к оптимизации значения целевой функции.

Из за того что в некоторых случаях нахождение исходной вершины тривиально, симплекс метод бывает однофазным и двухфазным. То есть в тривиальном случае первую фазу опускаем. Тривиальным случаем может быть когда 0 - допустимое решение

3.2 Базисные решения

Что? Базисное решение это решение с которого мы начинаем наши расчеты.

Глава 4. Матричное представление симплекс таблиц

Симплекс таблица это способ записи решения симплекс метода. Или просто способ решения симплекс метода. К тому же еще и главный, наверное.

Стандартную задачу максимизации можно переписать в каноническом виде таким образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & -c^T & 0 \\ 0 & A & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad z \to \max$$

- $s \geq 0$ — новые переменные, дополняющие старые таким образом, что неравенство переходит в равенство.
- z — это переменная которую необходимо максимизировать, значение нашей целевой функции.

Более раскрытая форма для понимания:

$$\left(\begin{array}{c|cccc|cccc} 1 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} z \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Глава 5. Условия оптимальности и допустимости

Глава 6. Алгоритм решения с ограниченными переменными

Я не совсем понимаю что это значит То есть помимо исходной матрицы А у нас еще есть другие ограничения для каждой переменной?

На моей памяти мы обычно только относительно нуля огрвничиваем их, делаем не отрицательные или не положительные. Но если ограничения более разнообразные бывают и для этого сильно меняется математика и сообветственно алгоритм то плохо дело.