

Симплекс Метод

11 декабря 2024 г.

Содержание

Глава 1. Линейное программирование	3
1.1. Линейный функционал	3
1.2. Геометрическое представление задачи ЛП	3
1.3. Обозначения для математического представления	4
1.4. Математическое описание задачи ЛП	5
Глава 2. Двойственность	6
2.1. Двойственная задача для стандартной задачи максимизации	6
2.2. Теоремы двойственности	7
2.3. Двойственность задачи ЛП в общем, стандартном и каноническом виде	7
2.4. Представление двойственной задачи. Оптимальное решение двойственной задачи.	8
Глава 3. Основы симплекс метода	10
3.1. Принцип симплекс метода	10
3.2. Симплекс таблицы	11
3.3. Допустимость	11
3.4. Симплекс алгоритм	11
Глава 4. Базисные решения	12
4.1. Определения	12
4.2. Объяснение	12
Глава 5. Матричное представление симплекс таблиц	14
5.1. Исходная таблица	14
5.2. Таблица с другим базисом	15
5.3. Базисные переменные	15
5.4. Таблица в развернутом виде	16
5.5. Верхняя строка таблицы	17
5.6. Условия оптимальности и допустимости	17
Глава 6. Источники	18

Глава 1. Линейное программирование

Задача линейного программирования (ЛП) состоит в том, что нам необходимо максимизировать или минимизировать некоторый линейный функционал на многомерном пространстве при заданных линейных ограничениях.

1.1 Линейный функционал

Линейный функционал еще называется линейной формой, 1-формой, ковектором и ковариантным вектором.

Линейный функционал это линейное отображение, действующее из векторного пространства над полем в это же поле.

В алгебре и геометрии обычно используют название линейная форма, потому что чаще идет речь о конечномерных векторных пространствах, а в функциональном анализе линейный функционал, потому что там часто отображение именно над множествами функций.

Рациональные или вещественные множества это примеры полей. Элементы поля называются скалярами.

Векторное пространство так же называется линейным пространством или линеалом. Векторное пространство задается над полем.

Погожев определял линеал как множество объектов произвольной природы для которых определены сложение и умножение на число. Никаких полей у нас не вводилось.

Отображение называется линейным когда оно удовлетворяет двум свойствам линейности:

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

1.2 Геометрическое представление задачи ЛП

Симплекс — это многомерное обобщение треугольника. Другое его название — n -мерный тетраэдр. Симплекс — это выпуклая оболочка $n + 1$ точек аффинного пространства размерности как минимум n , которые не лежат в подпространстве размерности $n - 1$ (аффинно независимы).

Вообще говоря каждое из линейных неравенств на переменные ограничивает полупространство в соответствующем линейном пространстве. В результате все неравенства ограничивают выпуклый многогранник.

Линейный функционал порождает гиперплоскость. Гиперплоскость это подпространство, размерность которого на 1 меньше исходного пространства.

Требуется найти такую гиперплоскость, чтобы значение функционала было максимальным (или минимальным) и чтобы гиперплоскость пересекала многогранник хотя бы в одной точке.

Гиперплоскость задается одним вектором и этим вектором будет вектор $n = \frac{c}{|c|}$. Это вектор самого быстрого изменения целевой функции и называется градиентом. Еще для задания гиперплоскости нужна координата или же точка.

1.3 Обозначения для математического представления

- Целевая функция (ЦФ) обозначается z .
- Вектор коэффициентов целевой функции будем обозначать через c .
- Вектор переменных x .
- Вектор переменных двойственной задачи y .

Вещи относящиеся к решению будем отмечать звездочкой:

- Оптимальное решение: x^*, y^* .
- Значение задачи: z^*, \bar{z}^*

Векторы у нас вертикальные, запись в строчку использует транспонирование.

1.4 Математическое описание задачи ЛП

Прямая задача максимизации в стандартной форме:

$$\begin{aligned}\max z &= \max c^T x \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0\end{aligned}\tag{1}$$

У нас m ограничений и n переменных.

$$\begin{aligned}x &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ c &= (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \\ b &= (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \\ A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Другая раскрытая запись задачи ЛП для того чтобы думать:

$$\begin{aligned}\max z &= \max(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n)^T &\geq 0\end{aligned}$$

Глава 2. Двойственность

Если честно, я бы дал это в самом начале, как такой разгон перед симплексом. То есть если мы даем теорию ЛП, то и двойственность сразу надо, а потом уже алгоритмы решения.

2.1 Двойственная задача для стандартной задачи максимизации

В английском используются термины *primal* и *dual*. На русском будем говорить прямая и двойственная.

Двойственная задача для стандартной задачи максимизации (1):

$$\begin{aligned}\min \bar{z} &= \min b^T y \\ A^T y &\geq c \\ y &\geq 0\end{aligned}$$

В двойственной задаче у нас наоборот m переменных и n ограничений

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$$
$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Более раскрытая запись для того чтобы думать:

$$\begin{aligned}\min \bar{z} &= \min(b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m) \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} &\geq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ (y_1, y_2, \dots, y_m)^T &\geq 0\end{aligned}$$

2.2 Теоремы двойственности

$$c^T x \leq b^T y$$

$$c^T x^* = b^T y^*$$

x^* называется оптимальным решением, а значение целевой функции при нем называется значением задачи.

2.3 Двойственность задачи ЛП в общем, стандартном и каноническом виде

Прямая задача максимизации в общем виде:

$$\max z = \max c^T x$$

$$a_i x \leq b_i, \quad i = \overline{1, m_1}$$

$$a_i x = b_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n_1}$$

$$x_j \in R, \quad j = \overline{n_1 + 1, n}$$

Двойственная к ней:

$$\min \bar{z} = \min b^T y$$

$$(a^j)^T y \geq c_j, \quad j = \overline{1, n_1}$$

$$(a^j)^T y = c_j, \quad j = \overline{n_1 + 1, n}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m_1}$$

$$y_i \in R, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}$$

Частный случай прямой задачи при котором она находится в стандартном виде означает что $m_1 = m$ и $n_1 = n$. При таких значениях все ограничения являются неравенствами и у всех переменных есть ограничение на знак.

$$\max z = \max c^T x$$

$$a_i x \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Двойственная задача к этой стандартной задаче будет тоже иметь все ограничения в виде неравенств и будет иметь ограничения на знак для переменных.

$$\begin{aligned}\min \bar{z} &= \min b^T y \\ (a^j)^T y &\geq c_j, \quad j = \overline{1, n} \\ y_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}\end{aligned}$$

Частный случай прямой задачи при котором она находится в каноническом виде означает что $m_1 = 0$ и $n_1 = n$. При таких значениях все ограничения являются равенствами и у всех переменных есть ограничение на знак.

$$\begin{aligned}\max z &= \max c^T x \\ a_i x &= b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}\end{aligned}$$

Двойственная задача к этой канонической задаче будет иметь все ограничения в виде неравенств и не будет иметь ограничений на знак для переменных.

$$\begin{aligned}\min \bar{z} &= \min b^T y \\ (a^j)^T y &\geq c_j, \quad j = \overline{1, n} \\ y_i &\in R, \quad i = \overline{1, m}\end{aligned}$$

2.4 Представление двойственной задачи. Оптимальное решение двойственной задачи.

Что такое вообще представление двойственной задачи. Типа математическое?

Оптимальное решение двойственной задачи это типа оно выводится з прямой безо всякого алгоритма? если так то было бы круто и если эта вся теория не зависит от симплекс метода то ее можно всю дать либо в самом начале перед симплекс методом, либо дать очень обзорно хоть вначале хоть в конце, раз у нас фокус то все таки на симплекс методе а не на ЛП в целом.

Я уверен ПМИшники про двойственность уже всё знают и нет особого смысла застревать на двойственности. Но если тут есть какие нибудь супер

важные доказательства то мб и стоит их показать, хоть и не подробно.

Посмотрим сколько будет получаться по симплексу, и если будем чувствовать что успеваем то добавим в рассказ и про двойственность.

Все равно странно что нас просят двойственность в симплекс методе.

Глава 3. Основы симплекс метода

Это метод решения задачи ЛП. Это численный метод решения задачи ЛП [Гейл].

Он истекает из графического метода решения и из факта что оптимальное решение будет находиться в краевой точке множества которое задано нашими ограничениями. Краевая точка это такая точка множества которая не принадлежит ни одному отрезку множества.

Граничная точка может лежать на ребре а краевые это только вершины.

Симплекс метод — алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования путем перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве.

Сущность метода: построение последовательности базисных решений, на которой монотонно убывает (возрастает) линейный функционал до ситуации, когда выполняются необходимые и достаточные условия локальной оптимальности [Википедия].

В работе Канторовича 1939 впервые были изложены принципы отрасли которую потом назвали линейным программированием.

3.1 Принцип симплекс метода

Принцип симплекс метода состоит в том что мы выбираем одну вершину многогранника и перемещаемся по ребрам в другие вершины в сторону увеличения функционала.

Когда такой переход невозможен считается что оптимальное значение найдено (либо его нет).

Симплекс метод можно поделить на две основные фазы:

1. Нахождение исходной вершины множества допустимых решений,
2. Последовательный переход от одной вершины к другой, ведущий к оптимизации значения целевой функции.

Из-за того что в некоторых случаях нахождение исходной вершины тривиально, симплекс метод бывает однофазным и двухфазным. То есть в три-

виальном случае первую фазу опускаем. Тривиальным случаем может быть когда 0 — допустимое решение

3.2 Симплекс таблицы

Симплексная таблица (СТ) - основной элемент вычислительной процедуры симплекс метода. Симплексная таблица представляет собой таблицу коэффициентов диагональной формы, построенной для канонической задачи максимизации [Кузютин]. Из-за того что она диагональная, она соответствует базисному решению рассматриваемой системы линейных уравнений.

3.3 Допустимость

Симплексная таблица называется прямо-допустимой если $b \geq 0$. Симплексная таблица называется двойственно допустимой если $c \geq 0$. Симплексная таблица называется оптимальной если она одновременно и прямо-допустимая и двойственно допустимая. Оптимальная СТ соответствует оптимальному базисному решению.

3.4 Симплекс алгоритм

Алгоритм начинается с прямо-допустимой симплексной таблицы.

1. На первом шаге мы выбираем ведущий столбец. Выбираем столбец с минимальным отрицательным c . Если таких нет, то оптимальное решение найдено.
2. На втором шаге выбираем ведущую строку из строк у которых элемент этого столбца положительный. Если положительных нет, задача ЛП не имеет оптимального решения. Выбираем строку с минимальным b/a .
3. На третьем шаге превращаем ведущий элемент в 1 и остальные элементы столбца в 0 эквивалентными преобразованиями. То есть мы проводим процедуру Гаусса по приведению таблицы к диагональному виду по новому базису.

Глава 4. Базисные решения

Нам нужно показать:

- Что такое базисное решение
- Как оно выводится, записывается и определяется математически
- Почему это именно вершины допустимого множества
- Как искать базисные решения
- Как искать именно допустимые базисные решения

4.1 Определения

Утверждение: Если у системы линейных уравнений существует решение, у нее существует и базисное решение.

Базисным решениям соответствуют крайние точки множества допустимых решений. Небазисные допустимые решения являются внутренними точками множества допустимых решений.

Утверждение: Если задача ЛП имеет допустимое решение, то она имеет и допустимое базисное решение.

Утверждение: Если задача ЛП имеет оптимальное решение, то она имеет и оптимальное базисное решение.

В силу этого утверждения симплекс метод оперирует только с базисными решениями.

4.2 Объяснение

Слабые переменные это s . Их количество равно количеству ограничений в случае перехода от стандартной задачи к канонической.

Удобно не забывать что мы работаем с пространством переменных x , и в него не входят s .

Добавлением слабой переменной к каждому неравенству при приведении стандартной задачи к канонической мы превращаем систему неравенств

в линейно независимую систему уравнений. С другой стороны, Гаусс нам тоже дает подмножество уравнений которые линейно независимы.

На каждом шаге мы разбиваем множество переменных на базисные и небазисные. Небазисных переменных у нас столько, сколько размерность подпространства решений. Имеется в виду опять подпространство исходного пространства переменных x , то есть без слабых переменных. А подпространство именно потому что в общей задаче могут быть уравнения.

Базисных переменных у нас соответственно столько, сколько у нас линейно независимых уравнений, и каждая базисная переменная соответствует отдельному линейно независимому уравнению.

Каждая слабая переменная пропорциональна расстоянию от решения до гиперплоскости соответствующего ограничения. Это означает, что приравнивание слабой переменной к нулю будет гарантировать что мы будем касаться этого ограничения. Приравнивание к нулю n (если размерность пространства решений равна n) таких переменных для линейно независимых ограничений гарантирует что мы будем в вершине множества допустимых решений.

Если же мы приравниваем к нулю одну из исходных переменных x , тогда слабая s в этом неравенстве должна быть положительной, что значит мы не касаемся соответствующего ограничения. Но не стоит забывать про ограничения на знак $x \geq 0$, которого мы как раз и касаемся в этом случае. (В случаях, когда исходное ограничение равенство, или когда коэффициент при переменной из x нулевой, у нас либо размерность меньше чем n , либо ограничения линейно зависимы, поэтому ничего не ломается, я думаю).

Таким образом при обнулении небазисных переменных мы всегда касаемся n (если размерность пространства решений n) линейно независимых ограничений и оказываемся в какой-нибудь вершине множества допустимых решений.

Глава 5. Матричное представление симплекс таблиц

Симплекс таблица это способ решения задачи ЛП и способ записи решения симплекс метода.

5.1 Исходная таблица

Стандартную задачу максимизации можно переписать в каноническом виде таким образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & -c^T & 0 \\ 0 & A & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (2)$$
$$z \rightarrow \max, \quad x \geq 0, \quad s \geq 0$$

Это и есть симплекс таблица в матричной форме.

- $s \geq 0$ — новые переменные, называемые слабыми, дополняющие старые таким образом, что неравенства переходят в равенства.
- z — это переменная которую необходимо максимизировать, значение нашей целевой функции.
- Еще в википедии есть что $b \geq 0$. Это как раз условие того что симплекс алгоритм должен начинаться с прямо-допустимой таблицы.

Более раскрытая форма для понимания:

$$\left(\begin{array}{c|cccc|cccc} 1 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} z \\ \hline x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \hline s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hline b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

5.2 Таблица с другим базисом

Пусть матрица B состоит из столбцов матрицы $\begin{bmatrix} A & | & E_m \end{bmatrix}$, соответствующих базисным переменным. Пусть также c_B это коэффициенты ЦФ, соответствующие этим переменным.

Тогда из исходной таблицы (2) можно получить таблицу для другого базиса:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_B^T B^{-1} A - c^T & c_B^T B^{-1} \\ 0 & B^{-1} A & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B^T B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{bmatrix} \quad (3)$$

5.3 Базисные переменные

Что вообще из себя представляет матрица $B^{-1}A$?

Пусть переменная x_j находится в базисе на месте i . Тогда столбец матрицы B с индексом i равен столбцу a^j :

$$B = \begin{bmatrix} B^1 & \dots & a^j & \dots & B^m \end{bmatrix}$$

$$B^i = a^j$$

Пусть матрица B^{-1} выглядит так:

$$B^{-1} = \{\hat{b}_{ij}\}_{i,j=1}^{m,m} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \dots & \hat{b}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}^1 & \hat{b}^2 & \dots & \hat{b}^m \end{bmatrix}$$

Матрица B^{-1} при умножении на столбец a^j превращает его в единичный. Единица в нем стоит на месте i :

$$B^{-1}a^j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\hat{b}_i a^j = 1, \quad i = j$$

$$\hat{b}_i a^j = 0, \quad i \neq j$$

Тогда $B^{-1}A$ можно записать так:

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 a^1 & \dots & \hat{b}_1 a^j & \dots & \hat{b}_1 a^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_i a^1 & \dots & \hat{b}_i a^j & \dots & \hat{b}_i a^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_m a^1 & \dots & \hat{b}_m a^j & \dots & \hat{b}_m a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 a^1 & \dots & 0 & \dots & \hat{b}_1 a^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_i a^1 & \dots & 1 & \dots & \hat{b}_i a^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_m a^1 & \dots & 0 & \dots & \hat{b}_m a^n \end{pmatrix}$$

Матрица B^{-1} при умножении на матрицу A превращает все столбцы соответствующие базисным переменным в единичные. Очевидно, то же самое будет происходить и для переменных s . Столбцы, которые не соответствуют базисным переменным будут иметь всякие разные числа.

Таким образом эта операция, то есть умножение на B^{-1} эквивалентна использованию метода Гаусса (или же эквивалентных преобразований) в симплекс алгоритме. А именно, она нам приводит матрицу $\begin{bmatrix} A & | & E_m \end{bmatrix}$ к трапецевидной (или диагональной) форме по базисным переменным.

5.4 Таблица в развернутом виде

Перепишем таблицу (3) в развернутом виде:

$$\hat{c}_B = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} c_B^T \hat{b}^1 & c_B^T \hat{b}^2 & \dots & c_B^T \hat{b}^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c_B^T B^{-1} a^1 - c_1 & \dots & c_B^T B^{-1} a^n - c_n & \hat{c}_{B1} & \dots & \hat{c}_{Bm} \\ 0 & \hat{b}_1 a^1 & \dots & \hat{b}_1 a^n & \hat{b}_{11} & \dots & \hat{b}_{1m} \\ 0 & \hat{b}_2 a^1 & \dots & \hat{b}_2 a^n & \hat{b}_{21} & \dots & \hat{b}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{b}_m a^1 & \dots & \hat{b}_m a^n & \hat{b}_{m1} & \dots & \hat{b}_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{c}_B b \\ \hat{b}_1 b \\ \hat{b}_2 b \\ \vdots \\ \hat{b}_m b \end{pmatrix} \quad (4)$$

5.5 Верхняя строка таблицы

Строка $\left(c_B^T B^{-1} a^1 - c_1 \quad \dots \quad c_B^T B^{-1} a^n - c_n \mid \hat{c}_{B1} \quad \dots \quad \hat{c}_{Bm} \right)$ будет иметь нули на позициях соответствующим базисным переменным.

Мы уже выяснили что $B^{-1} a^i$ превращает столбец в единичный если переменная x_i является базисной. Поэтому умножение этого произведения на c_B^T слева дает нам коэффициент ЦФ этой базисной переменной x_i , и дальнейшее вычитание опять этого коэффициента обнуляет соответствующий элемент в строке.

Для переменных s всё еще проще, оно аналогично только вместо матрицы A у нас матрица E_m , а изначальные коэффициенты уже равны нулю, поэтому вычитание опущено.

Таким образом, на каждом шаге m столбцов таблицы (4), соответствующие базисным переменным являются линейно независимыми единичными столбцами.

5.6 Условия оптимальности и допустимости

Когда в верхней строчке в таблице (4) нет отрицательных элементов, не считая элемента из правой части, оптимальное решение найдено, и записано в правой части уравнения.

Эта таблица прямо-допустима когда в правой части нет отрицательных элементов не считая первого.

Глава 6. Источники

1. Конспект-книжка Кузютина Дениса Вячеславовича
2. Гейл
3. Таха
4. Ашманов
5. Ху
6. Схрейвер
7. Васильев
8. Интернет