



Univerza v Mariboru

---

Fakulteta za naravoslovje  
in matematiko

# NUMERIČNO MODELIRANJE NELINEARNEGA VSILJENEGA NIHANJA

Diplomski seminar na bolonjskem študijskem programu 1. stopnje Fizika

Marko Petek

Mentor: doc. dr. Aleš Fajmut  
Somentor: dr. Igor Grešovnik

Maribor, 2013

PETEK, M.: Numerično modeliranje nelinearnega vsiljenega nihanja. Diplomski seminar, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za fiziko, 2013.

#### POVZETEK

V diplomskem seminarju obravnavamo resonančno krivuljo magnetnega nihala, ki je primer nelinearnega oscilatorja. Najprej predstavimo analitično rešljiv primer linearne oscilatorja in zatem numerično analiziramo oblike resonančnih krivulj magnetnega nihala. Ugotovimo, da se obnaša podobno, vendar ne enako, kot Duffingov oscilator s trdo vzmetjo. Resonančna krivulja se pri visokih amplitudah vsiljevanja nagne v desno in ima pri nekaterih vrednostih frekvenca vsiljevanja dve možni amplitudi. Numerično izračunano resonančno krivuljo magnetnega nihala primerjamo z eksperimentalno izmerjeno krivuljo, a ujemanje ni zadovoljivo. Eksperimentalnemu obnašanju se približamo, če v matematičnem modelu Hookovo vzmet zamenjamo s trdo vzmetjo. Orodje za numerično analizo nihal je avtorsko delo, zato na koncu predstavimo tudi uporabljene algoritme in preverimo njihovo natančnost ter zanesljivost.

Ključne besede: Nelinearni oscilator, Nelinearna resonanca, Duffingov oscilator.

#### ABSTRACT

The purpose of this BSc thesis is to study the resonance curve of a specific nonlinear oscillator (magnetic oscillator). First, the analytically solvable case of linear resonance is presented, then a numerical analysis of the resonance behaviour of the magnetic oscillator is performed. We find out, that its behaviour is similar, but not equal, to the Duffing oscillator with a hardening spring. At higher driving amplitudes the resonance curve tilts to the right and becomes multivalued. The numerically calculated resonance curve is compared to the experimentally measured curve. The agreement is unsatisfactory. We are able to achieve better agreement with experimental results if we consider a hardening spring instead of the Hookean spring in the mathematical model. Finally, the algorithms used in numerical analysis are presented. The numerical oscillator analysis tool is author's own work, therefore its accuracy and reliability are tested.

Key words: Nonlinear oscillator, Nonlinear resonance, Duffing oscillator.

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Linearni oscilator</b>	<b>4</b>
2.1	Resonančna krivulja . . . . .	4
2.2	Fazni premik . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Nelinearni oscilator</b>	<b>7</b>
3.1	Eksperiment . . . . .	9
3.2	Resonančna krivulja . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Algoritmi, uporabljeni pri analizi vsiljenega nihanja</b>	<b>14</b>
4.1	Reševalec diferencialnih enačb . . . . .	15
4.2	Zanesljivost reševalca diferencialnih enačb . . . . .	17
4.3	Iskanje amplitude vsiljenega nihanja . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Zaključek</b>	<b>21</b>

# 1 Uvod

Ob omembi vsiljenega nihanja najprej pomislimo na resonančno krivuljo - odvisnost amplitude nihanja od frekvence vsiljevanja. Dobro je znano, da nihalo niha z največjo amplitudo pri eni specifični frekvenci vsiljevanja (resonančni frekvenci) in da se ta frekvenca ne spreminja, če spreminjamo amplitudo vsiljevanja. Manj znana je omejitev, da to v splošnem velja le za nihala z linearno dinamiko, kjer odvisna spremenljivka povsod nastopa le v prvi potenci. Kakor hitro se v diferencialni enačbi, ki opisuje dinamiko nihala, pojavi nelinearni člen, postane resonančna frekvenca občutljiva na amplitudo vsiljevanja [1].

Nelinearna nihala niso redkost. Celo najprepoznavnejše, težno nihalo, se obnaša nelinearno. Zakaj je potem njihovo obnašanje manj znano? Nelinearne diferencialne enačbe ponavadi nimajo analitične rešitve, brez nje ali brez velike računske moči pa je analiza fizikalnih pojavov težavna. Zaradi tega so fiziki pred izumom računalnikov poskušali svoje teorije graditi na linearnih diferencialnih enačbah - in res, na njih temeljijo najuspešnejše teorije (elektrodinamika, kvantna mehanika). Druge, celo starejše teorije, ki se ukvarjajo s pojavi, bližjimi vsakdanjim izkušnjam (mekanika tekočin), so bile zaradi nelinearne dinamike manj uspešne [2].

V diplomskem seminarju pokažem, kako lahko z uporabo numeričnih metod reševanja navadnih diferencialnih enačb razširimo razumevanje vsiljenega nihanja nelinearnih oscilatorjev. Obnašanje specifičnega nelinearnega oscilatorja (magnetnega nihala) analiziram s programskim orodjem, napisanim v jeziku C#. Predstavim tudi pomembnejše algoritme, ki jih orodje uporablja, in preverim njihovo natančnost ter zanesljivost.

Obnašanje nelinearnih oscilatorjev je že v začetku dvajsetega stoletja raziskoval nemški inženir in raziskovalec Georg Duffing. Leta 1918 je na 134 straneh objavil monografijo *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre Technische Bedeutung* (Vsiljena nihanja s spremenljivo lastno frekvenco in njihova tehnična pomembnost). V monografiji je Duffing med drugim obravnaval neko nelinearno nihalo. Rešitev prostega (nevsiljenega) nihanja tega nihala mu je uspelo izraziti z eliptičnimi funkcijami, medtem ko se do rešitve vsiljenega nihanja ni mogel dokopati. Problema se je lotil tako, da je diferencialno enačbo nihala poenostavil v enačbo s kubičnim nelinearnim členom, ki danes nosi njegovo ime (Duffingova enačba). Na tak način mu je uspelo pokazati, da lahko omenjeno nihalo pri nekaterih frekvencah vsiljevanja niha z večimi amplitudami. Nekateri rezultate je potrdil tudi eksperimentalno [3, 4].

Diplomski seminar je sestavljen tako, da najprej v 2. poglavju preletim lastnosti linearnih oscilatorjev. Pri tem uporabljam knjigo *Mathematical Methods in the Physical Sciences* [5]. Odsek o nehomogenih diferencialnih enačbah II. reda s konstantnimi koeficienti najde bralec na strani 417. Zatem se v 3. poglavju lotim obravnave nelinearnega magnetnega nihala. Prve informacije o obnašanju nelinearnih oscilatorjev sem pridobil na spletu [2, 6]. Za preveritev pravilnosti informacij s spleta in za študij faktorja kvalitete sem uporabil knjigo *The Physics of Vibrations and Waves* [1]. Žal je poglavje o nelinearni resonanci relativno kratko. Za tovrstne namene je zagotovo boljša knjiga *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour* [4], a sem jo na žalost odkril zelo pozno.

Poleg popolnoma fizikalno orientiranih poglavij 2 in 3 velik del diplomskega seminarja zavzema poglavje 4 o algoritmih reševanja. Implementacijo algoritma Runge-Kutta 4 sem povzel po nazornem primeru na spletu [7]. Njegovo zanesljivost sem preveril tudi s pomočjo Richardsonove ekstrapolacije. Pri opisu Richardsonove ekstrapolacije sem si pomagal z mentorjevim dokumentom [8] in s knjigo *Applied Numerical Methods for En-*

*gineers and Scientists* [9]. Koda in njeni strukturni standardi temeljijo na mentorjevi raziskovalni knjižnici IGLib [10], za dostop do katere sem mu hvaležen. Za avtomatsko izrisovanje grafov je uporabljena knjižnica ZedGraph [11].

## 2 Linearni oscilator

Najpopularnejši predstavnik linearnih nihal je vzmetno nihalo. Vsiljeno nihanje vzmetnega nihala, ki mu gibanje vsiljuje periodična harmonična sila, opišemo z naslednjo diferencialno enačbo:

$$\ddot{x}(t) + 2b\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F_0 \sin(\omega_d t - \gamma) \quad , \quad (1)$$

kjer je  $\omega_d$  krožna frekvenca vsiljevanja,  $\gamma$  fazni premik vsiljevanja,  $F_0$  razmerje med amplitudo periodične sile in maso nihala,  $b$  razmerje med koeficientom linearne upora in maso nihala,  $\omega_0$  lastna frekvenca nihala,  $t$  čas (neodvisna spremenljivka), in  $x$  odmik od ravnovesne lege (odvisna spremenljivka). Splošna rešitev diferencialne enačbe (1) pri podkritičnem dušenju je funkcija [5]:

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-bt} & \left[ G \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - b^2} t\right) + H \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - b^2} t\right) \right] \\ & + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (2b\omega_d)^2}} \sin(\omega_d t - \gamma - \delta) \quad , \end{aligned} \quad (2)$$

kjer sta  $G$  in  $H$  konstanti, določeni z začetnimi pogoji,  $\delta$  pa fazni premik nihanja glede na vsiljevanje.

### 2.1 Resonančna krivulja

Oglejmo si lastnosti resonančne krivulje linearne vzmetnega nihala (enačba (1)). Resonančna krivulja je graf ustaljene amplitude nihanja v odvisnosti od frekvence vsiljevanja. Amplituda nihanja se ustali komaj po dolgem času, ko prvi (transientni) člen na desni strani rešitve (2) zamre. Resonančno krivuljo pri danih parametrih nihala ter vsiljevanja zato izrazimo z naslednjo funkcijo:

$$A(\omega_d) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (2b\omega_d)^2}} \quad , \quad (3)$$

ki predstavlja ustaljeno amplitudo rešitve nihala (2) (slika 1).

Odvisnost  $A(\omega_d)$  je prikazana na sliki 1 za različne vrednosti koeficientov dušenja. Kadar na vzmet delujemo s konstantno silo ( $\omega_d = 0$ ), je amplituda  $A$  neodvisna od koeficienta dušenja  $b$ :

$$A_0 = A(\omega_d = 0) = \frac{F_0}{\omega_0^2} \quad . \quad (4)$$

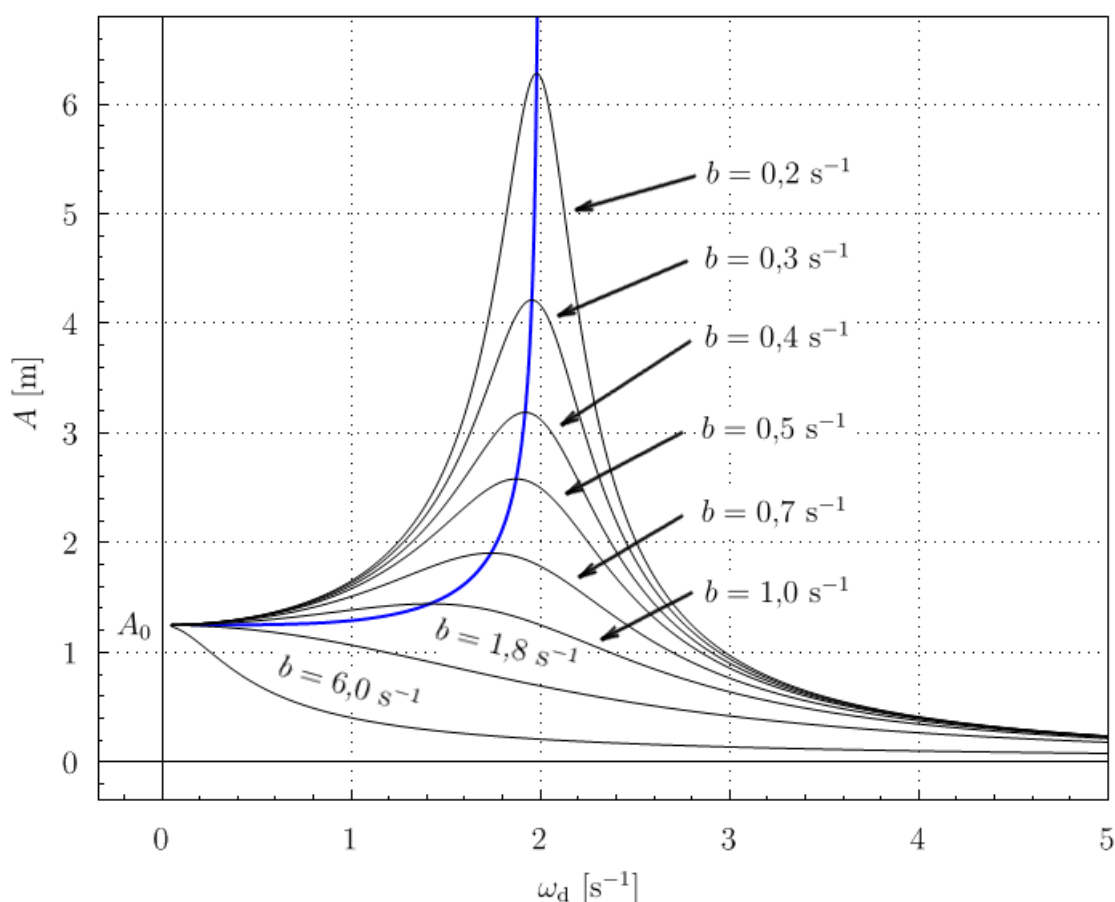
Če želimo rešitev pri konstantni sili dobiti preko enačbe (1), moramo nastaviti  $\gamma = \pi/2$ . Vzmet se po dolgem času v vseh primerih enako raztegne, zato se na levi strani grafa vse krivulje stikajo pri vrednosti  $A_0$  (amplitudi nihanja, ki ga vsiljujemo). Krivulje z nižjimi koeficienti dušenja imajo jasno izražen vrh. Ta se nahaja pri resonančni frekvenci

vsiljevanja [5]:

$$\omega_{\text{res}}^2 = \omega_0^2 - 2b^2 \quad , \quad (5)$$

ki je odvisna od koeficienta dušenja  $b$ , kar je na sliki 1 lepo vidno - z večanjem  $b$  se  $\omega_{\text{res}}$  manjša. Kadar je dušenje preveliko (ko desna stran enačbe (5) postane negativna:  $2b^2 \geq \omega_0^2$ ), resonančni vrh izgine. Lego vrha pri različnih vrednostih koeficienta dušenja na sliki 1 (vse do mejne vrednosti) prikazuje modra parametrična krivulja. Njena prva koordinata  $\omega_{\text{res}}$  je podana z enačbo (5), drugo koordinato  $A_{\text{res}}$  pa predstavlja amplituda pri  $\omega_{\text{res}}$ . Dobimo jo tako, da izraz za resonančno frekvenco (5) vstavimo v enačbo (3):

$$A_{\text{res}} = A(\omega_d = \omega_{\text{res}}) = \frac{F_0}{2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \quad . \quad (6)$$



Slika 1: Amplituda nihanja v odvisnosti od krožne frekvence vsiljevanja. S črno barvo je narisanih nekaj resonančnih krivulj (enačba (3)) pri različnih koeficientih dušenja. Modra krivulja prikazuje lego resonančnih vrhov pri različnih koeficientih dušenja  $b$ . Ostali parametri: lastna frekvenca  $\omega_0 = 2,0 \text{ s}^{-1}$ , amplituda vsiljevanja  $F_0 = 5,0 \text{ ms}^{-2}$ ,  $A_0 = 1,25 \text{ m}$ .

## 2.2 Fazni premik

Po dolgem času rešitev diferencialne enačbe (1) za vsiljevanjem zaostaja za fazo  $\delta$ , za katero velja [5, 12] (slika 2):

$$\tan \delta = \frac{2b\omega_d}{\omega_0^2 - \omega_d^2} \quad . \quad (7)$$

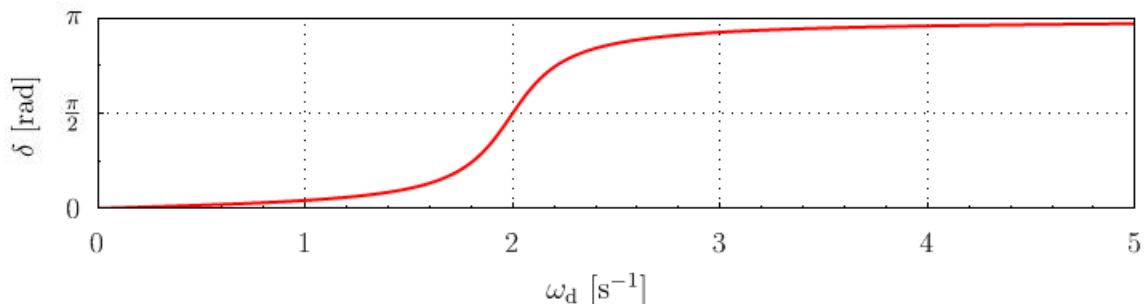
Fazni zaostanek enostavno opazimo, če na isti graf narišemo odmik od ravnovesne lege (enačba (2)) in vsiljevani pospešek  $F$  v odvisnosti od časa (slika 3):

$$F = F_0 \sin(\omega_d t - \gamma) \quad . \quad (8)$$

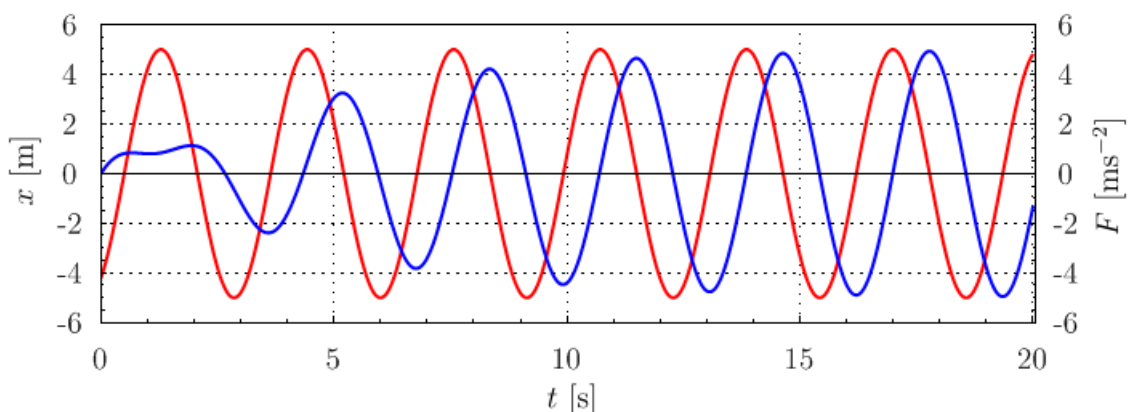
Pri računanju in risanju zaostanka  $\delta$  moramo biti previdni. Brez pomisleka iz enačbe (7) zaključimo:

$$\delta = \arctan\left(\frac{2b\omega_d}{\omega_0^2 - \omega_d^2}\right) \quad , \quad (9)$$

vendar ob standardni definiciji funkcije  $\arctan(y)$ , ki je v kalkulatorjih in računalnikih, to ni pravilno. Upoštevati moramo, da je  $\delta$  kot fazorja v kompleksni ravnini [5]. Števec  $2b\omega_d$  ulomka na desni strani enačbe (9) je imaginarna koordinata fazorja, medtem ko je imenovalc  $\omega_0^2 - \omega_d^2$  realna koordinata. Iz predznakov obeh koordinat lahko točno povemo, v katerem kvadrantu kompleksne ravnine se nahaja fazor. Po standardni definiciji ima funkcija  $\arctan$  zalogo vrednosti  $[-\pi/2, \pi/2]$ , kot je razvidno s slike 4a. Ta interval ne pokrije celotne enotske krožnice - funkcija  $\arctan$  bo dala pravilen rezultat samo, ko bo  $\alpha$  ležal v I. ali IV. kvadrantu.



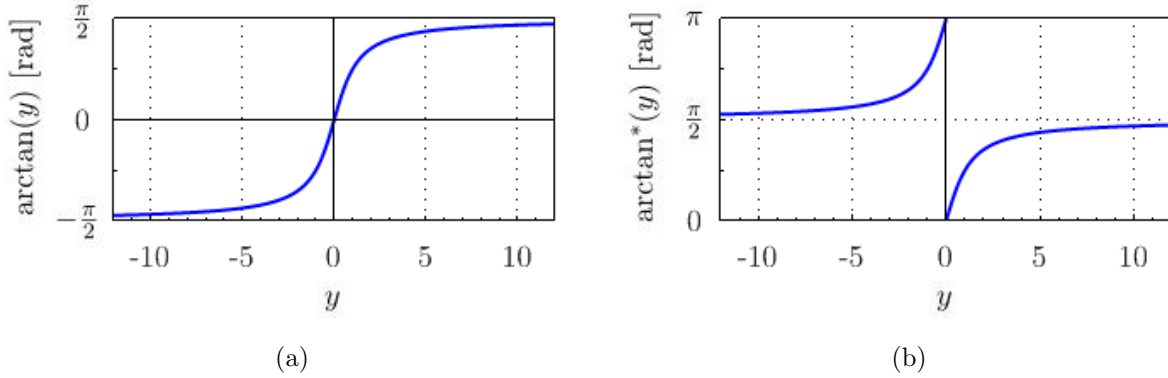
Slika 2: Fazni premik nihanja vzmetnega nihala v odvisnosti od krožne frekvence vsiljevanja. Pri nižjih frekvencah vsiljevanja nihalo dobro sledi vsiljevanju,  $\delta \rightarrow 0$ . Kadar frekvenco večamo proti neskončnosti, postane zaostanek največji možen,  $\delta \rightarrow \pi$ . Ko je frekvenca vsiljevanja enaka lastni frekvenci nihala, je zaostanek  $\delta = \pi/2$ . Ostali parametri:  $b = 0,2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 2,0 \text{ s}^{-1}$ .



Slika 3: Vzmetno nihalo: odmik od ravnovesne lege  $x$  in amplituda vsiljevanja  $F$  v odvisnosti od časa. Po dolgem času nihalo (modra krivulja, enačba (2)) zaostaja za vsiljevanjem (rdeča krivulja, enačba (8)). Leva ordinata pripada modri krivulji, desna pa rdeči. Začetna hitrost nihala je  $3,0 \text{ m/s}$ , začetni odmik je  $0 \text{ m}$ . To ustreza vrednostima  $G = 2,14 \text{ m}$  in  $H = 5,00 \text{ m}$  v enačbi (2). Ostali parametri:  $\omega_0 = 2,0 \text{ s}^{-1}$ ,  $b = 0,25 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_d = 2,0 \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma = 0$ ,  $F_0 = 5,0 \text{ ms}^{-2}$ .

Vemo, da je imenovallec  $\omega_0^2 - \omega_d^2$  v enačbi (9) lahko negativen. V tem primeru se bo fazor nahajal v II. ali III. kvadrantu, torej izven zaloge vrednosti standardne funkcije  $\arctan$ . Ker pa sta parametra v števcu enačbe (9), koeficient dušenja  $b$  in krožna frekvenca vsiljevanja  $\omega_d$ , nujno pozitivna, je števec lahko le pozitiven. Kot  $\delta$  se bo zato vedno nahajal le v I. in II. kvadrantu, med 0 in  $\pi$ . Za pravi izračun kota  $\delta$  moramo definicijo  $\arctan$  spremeniti tako, da bo podajala kote iz I. in II. kvadranta (slika 4b):

$$\arctan^*(y) = \begin{cases} \arctan(y) & \text{ko } y \geq 0, \\ \arctan(y) + \pi & \text{ko } y < 0. \end{cases} \quad (10)$$



Slika 4: a) Graf funkcije  $\arctan(y)$ . Zaloga vrednosti je interval  $[-\pi/2, \pi/2]$ . S to funkcijo dobimo ob neposredni uporabi v enačbi (9) napačne vrednosti faznega premika nihanja glede na vsiljevanje. b) Graf funkcije  $\arctan^*(y)$  z nestandardno zalogo vrednosti  $[0, \pi]$ . V  $y = 0$  velja desni krak.

Pravi izraz za fazni premik  $\delta$  torej uporablja funkcijo (10):

$$\delta = \arctan^* \left( \frac{2b\omega_d}{\omega_0^2 - \omega_d^2} \right) . \quad (11)$$

### 3 Nelinearni oscilator

Obnašanje vsiljenega nihanja nelinearnega oscilatorja bom predstavil na torzijskem nihalu s posebno vrsto vsiljevanja, ki ga bom imenoval kar magnetno nihalo. Nihalo z vztrajnostnim momentom  $J$  je sestavljeno iz viseče tuljave, pritrjene v bližini masnega središča tako, da se lahko vrti v horizontalni ravnini. V ravnovesju jo drži torzijska vzmet s torzijsko konstanto  $D$  (slika 5). Če takšno nihalo odmaknemo iz ravnovesne lege za kot  $\phi$  in pustimo, da zaniha, ugotovimo, da se obnaša povsem linearno. Nelinearnost povzroči odvisnost vsiljenega pospeška od zasuka.

Nihalo obdajata veliki Helmholtzovi tuljavi, ki v opazovalčevem sistemu mirujeta. Skoznju teče konstanten enosmerni električni tok tako, da je na sredini časovno neodvisno homogeno magnetno polje z gostoto  $\vec{B}$ . Skozi majhno tuljavo, ki je del nihala, teče izmenični tok  $I$  s krožno frekvenco  $\omega_d$  in amplitudo  $I_0$ :

$$I(t) = I_0 \sin(\omega_d t - \gamma) . \quad (12)$$

Krožna frekvenca  $\omega_d$  in amplituda  $I_0$  sta parametra, ki ju lahko spreminjamo. Tuljavo lahko zato poenostavljeno obravnavamo kot idealni magnetni dipol s časovno spreminja-

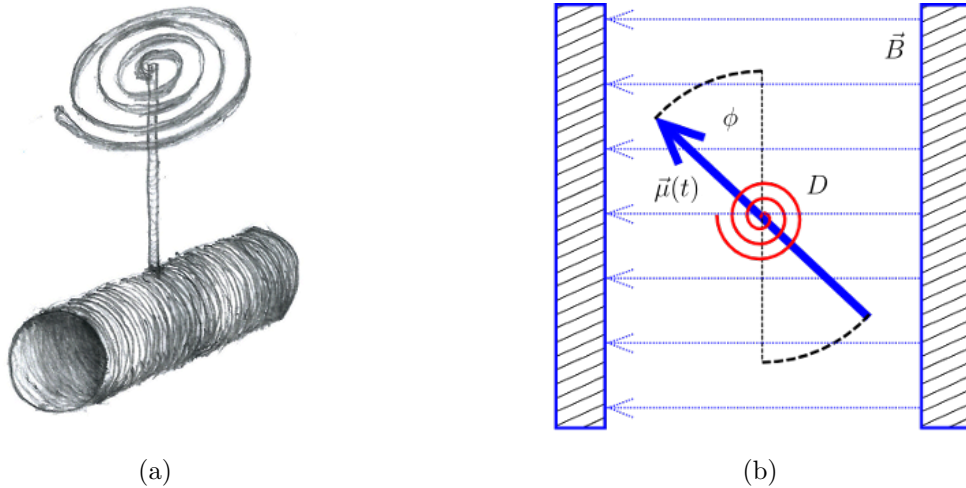


jočim se dipolnim momentom  $\vec{\mu}$ . Njegova velikost se spreminja kot:

$$\vec{\mu}(t) = NI(t)\vec{S} \quad , \quad (13)$$

kjer je  $N$  število navojev na tuljavi in  $\vec{S}$  vektor z velikostjo prečnega preseka tuljave usmerjen pravokotno na presek (vzdolž osi tuljave). Ker se magnetni dipol nahaja v zunanjem magnetnem polju, deluje nanj magnetni navor  $\vec{M}$ , ki skuša dipol poravnati z zunanjim poljem  $\vec{B}$  (slika 5b):

$$\vec{M}(t) = \vec{\mu}(t) \times \vec{B} \quad . \quad (14)$$



Slika 5: a) Poenostavljena skica torzijskega nihala. V resnici je nosilna palica na vrhu z ležajem vpeta na ploščo, ki miruje v opazovalčevem sistemu. Zunanji konec vzmeti je prav tako pritrjen. b) Tloris torzijskega nihala z vztrajnostnim momentom  $J$ , ki ga v ravnovesni legi  $\phi = 0$  drži torzijska vzmet s koeficientom  $D$ . Zasuk nihala  $\phi$  se s časom spreminja zaradi magnetnega navora, s katerim na magnetni dipolni moment  $\vec{\mu}$  deluje zunanje magnetno polje  $\vec{B}$ , ki ga ustvarita Helmholtzovi tuljavi.

Zapišimo gibalno enačbo za nihalo na sliki 5b:

$$J\ddot{\phi}(t) = -b\dot{\phi}(t) - D\phi(t) + NI_0SB \cos(\phi(t)) \sin(\omega_a t - \gamma) \quad . \quad (15)$$

$\phi$  je zasuk nihala iz ravnovesne lege. Prvi člen na desni strani enačbe (15) predstavlja dušenje ( $b$  je koeficient dušenja). Potrebujemo ga, da se pri resonančni frekvenci v nihalo ne naloži neomejena količina energije. Izberemo kar linearni zakon upora. Drugi člen predstavlja torzijsko vzmet in tretji vsiljevanje. Kot  $\phi$  je komplementaren kotu med dipolnim momentom  $\vec{\mu}$  in zunanjim magnetnim poljem  $\vec{B}$ , zato je  $\cos \phi$  v zadnjem členu pravilna izbira kotne odvisnosti navora.

Enačbo (15) preuredimo tako, da definiramo amplitudo vsiljenega navora  $M_0 = NI_0SB$ :

$$\ddot{\phi} + \frac{b}{J}\dot{\phi} + \frac{D}{J}\phi = \cos(\phi) \left[ \frac{M_0}{J} \sin(\omega_a t - \gamma) \right] \quad . \quad (16)$$

Linearnost enačbe (16) kvari  $\cos \phi$  na desni strani. Za majhne odmike od ravnovesne lege ( $\cos \phi \approx 1$ ) se bo nihalo obnašalo linearno, saj bo enačba (16) analogna diferencialni enačbi (1).

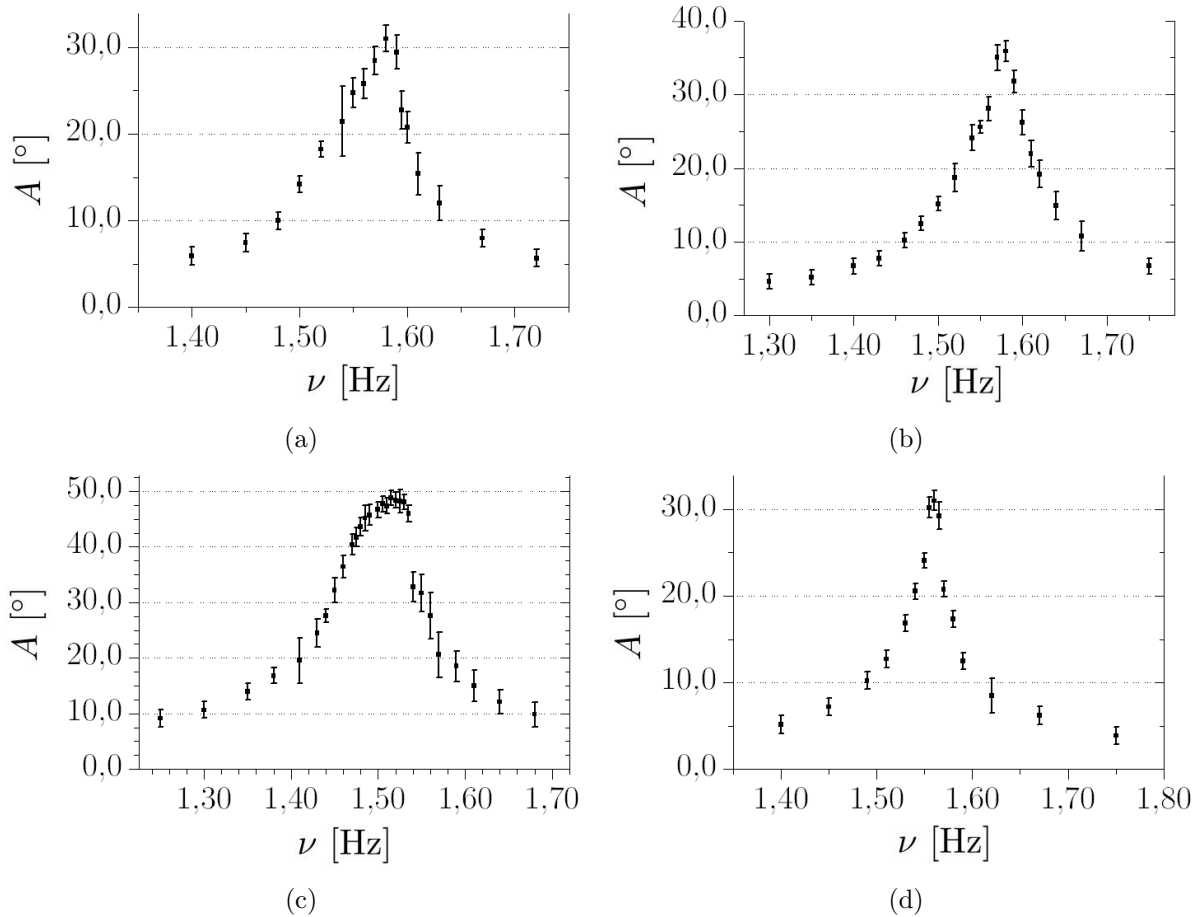
### 3.1 Eksperiment

Namen eksperimenta, ki sva ga izvedla s sošolcem [13], je bil izmeriti odvisnost faktorja kvalitete od geometrijskih lastnosti tuljav. Načrt eksperimenta sva izdelala na osnovi poznavanja le ene definicije faktorja kvalitete  $Q$ :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_d} \quad , \quad (17)$$

kjer je  $\omega_0$  je lastna frekvenca nihala,  $\Delta\omega_d$  je pasovna širina povprečne dostavljene moči [1], ki je približno enaka pasovni širini resonančne krivulje.

Velikodušen sošolec<sup>1</sup> je za naju navil tri skupine tuljav s tremi različnimi parametri - premerom, dolžino in številom navojev. Znotraj vsake skupine se je samo en parameter spreminjal od tuljave do tuljave. Prva skupina je torej imela spremenljiv premer, druga spremenljivo dolžino in tretja spremenljivo število navojev. Prvotni načrt je bil za vsako tuljavo izmeriti resonančno krivuljo (slika 6) in z nje odčitati podatke, potrebne za izračun  $Q$ . Tako bi vsaka skupina tuljav dala eno krivuljo odvisnosti  $Q$  od ustreznega spreminjajočega se parametra.



Slika 6: Eksperimentalno izmerjene amplitude  $A$  štirih tuljav z različnim številom navojev  $N$  v odvisnosti od frekvence vsiljevanja  $\nu$  [13]. a) Tuljava s 100 navoji. b) Tuljava s 150 navoji. c) Tuljava z 250 navoji. d) Tuljava s 300 navoji. Posamezne amplitude vsiljevanja in vztrajnostni momenti tuljav so neznani.

Pri merjenju so se pojavljale neprijetne težave. Resonančne krivulje so imele nepričako-

<sup>1</sup>Uroš Jagodič (Jagi)

vano obliko - ene so bile asimetrične, druge koničaste, nekatere celo oboje (slika 6). Poleg tega so se pri večkratnem merjenju pri istih parametrih vrednosti amplitud (posebej blizu vrha) spreminjale.

Definicija faktorja kvalitete (enačba (17)) velja le za linearna nihala. Meritve  $Q$  bi zato pri tem specifičnem nihalu bile smiselne samo za majhne odmike, kjer se nihalo obnaša približno linearno. Po definiciji, ki je ekvivalentna definiciji v enačbi (17), predstavlja  $Q$  razmerje med lastno frekvenco nihala  $\omega_0$  ter koeficientom linearnega dušenja  $b$  [1]:

$$Q = \frac{\omega_0}{2b} \quad . \quad (18)$$

Kvadrat lastne frekvence je odvisen od razmerja med torzijskim koeficientom vzmeti  $D$  in vztrajnostnim momentom nihala  $J$ :

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J} \quad . \quad (19)$$

Vzmet je bila pri vseh meritvah enaka. Lahko bi izmerila njen torzijski koeficient, vztrajnostni moment nihala pa v vsakem primeru izračunala. Tako bi se eksperiment zreduciral na merjenje koeficienta dušenja za vsako tuljavo in mogoče sploh ne bi vključeval vsiljenega nihanja.

### 3.2 Resonančna krivulja

Matematični model magnetnega nihala iz eksperimenta je preprost: Nihajočo tuljavo obravnavamo kot idealni magnetni dipol, za magnetno polje, v katerem se nahaja, pa predpostavimo, da je popolnoma homogeno. Kljub temu nam poleg ključnih lastnosti nelinearnega nihala (Duffingovega oscilatorja) model kaže tudi druge, le zanj specifične lastnosti. V nadaljevanju si bomo ogledali odvisnosti, ki sem jih izračunal z lastnoročno napisanim programom. Uporabljeni algoritmi bodo predstavljeni v naslednjem poglavju.

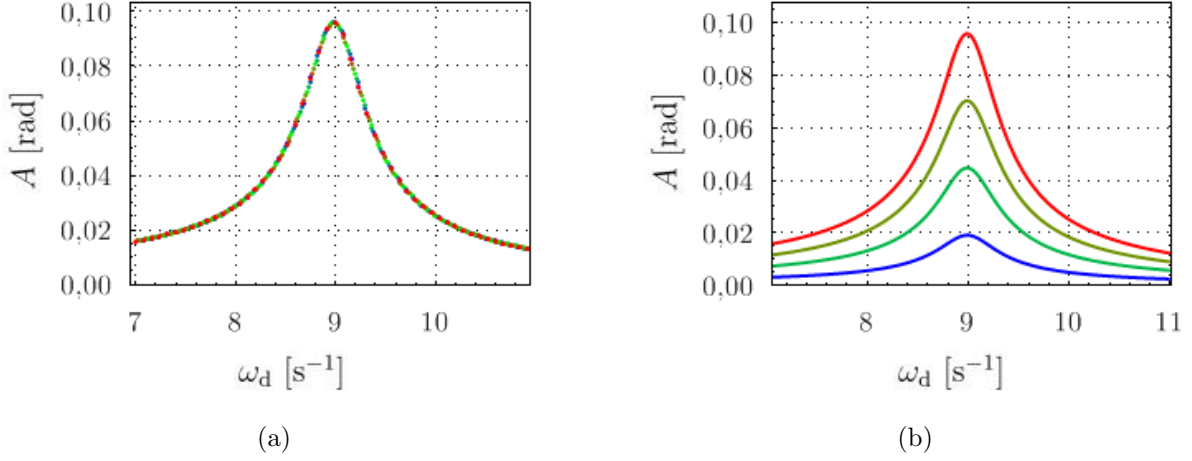
Pri majhnih amplitudah vzbujanja se magnetno nihalo obnaša približno linearno (slika 7). Resonančne krivulje za izračun faktorja kvalitete bi s sošolcem morala meriti v tem območju. Ker nisva vedela, da je faktor kvalitete definiran le za linearna nihala, sva se odločila, da bova merila pri srednjih amplitudah. S tem sva želela povečati natančnost odčitavanja amplitude.

Pri srednjih in višjih amplitudah vzbujanja postanejo krivulje koničaste. Pri enakih razmikih med vrednostmi  $M_0/J$  lezejo krivulje pri višjih amplitudah vzbujanja vedno tesneje skupaj (slika 8).

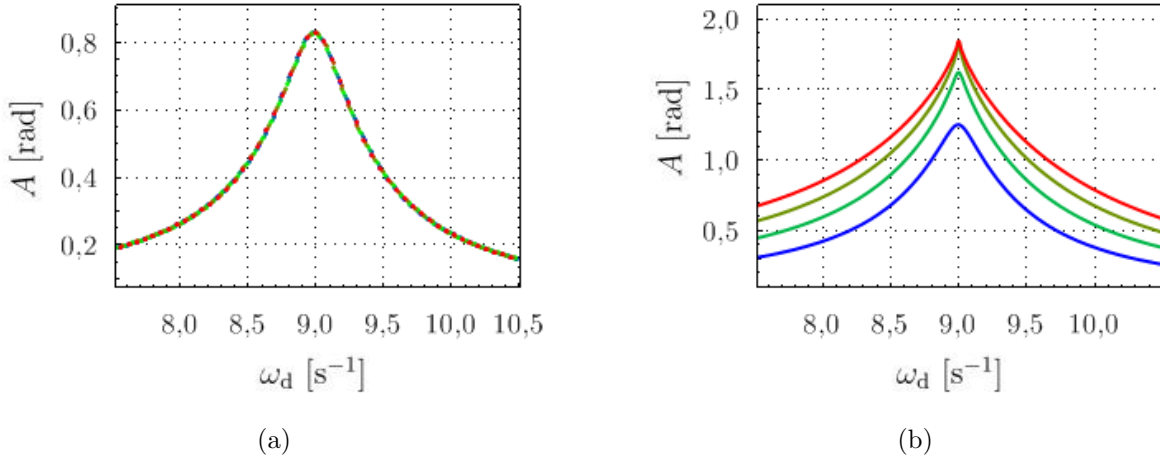
Iz primera Duffingovega oscilatorja, ki se od linearnega oscilatorja loči po nelinearni odvisnosti sile od odmika iz ravnovesne lege,  $F(x) = -\beta x - \alpha x^3$ , je znano [1, 4, 6], da mehka vzmet ( $\alpha < 0$ ) povzroči nagibanje resonančne krivulje v levo, trda vzmet ( $\alpha > 0$ ) pa nagibanje v desno (slika 9). Sila mehke vzmeti raste z raztezkom nelinearno tako, da se njen koeficient vzmeti zmanjšuje. Takšno vzmet je lažje raztegniti do večjih odmikov kot linearno (Hookovo) vzmet z enakim koeficientom vzmeti, kot ga ima mehka pri malih odkikih. Obratno velja za trdo vzmet.

Duffingovemu oscilatorju podobne lastnosti pokaže magnetno nihalo pri večjih amplitudah vzbujanja. Resonančne krivulje postanejo pri vrhu nezvezne, pri nekaterih vrednostih vsiljevanih frekvenc ima nihalo celo dve možni amplitudi (slika 10). Kadar se nahajamo v takem predelu resonančne krivulje, lahko nihalo, če ga rahlo zmotimo, preskoči iz ene

možne amplitude v drugo. Takemu preskoku se v angleščini reče „shock jump“ [1]. V tem predelu ne bomo našli obeh amplitud, če bomo točke resonančne krivulje iskali vedno pri istih začetnih pogojih (slika 10a). Jaz sem se do njiju dokopal tako, da sem spreminjal fazo funkcije vsiljevanja (slika 10b).



Slika 7: Resonančne krivulje pri majhnih amplitudah vzbujaanja, kjer se magnetno nihalo obnaša linearno. V obeh primerih:  $D/J = 81 \text{ s}^{-2}$ ,  $b/J = 0,58 \text{ s}^{-1}$ . a) Razmereje med amplitudo vsiljevanega navora in vztrajnostnim momentom  $M_0/J = 0,5 \text{ s}^{-2}$ . b)  $M_0/J$  od modre do rdeče krivulje:  $0,10 \text{ s}^{-2}$ ,  $0,23 \text{ s}^{-2}$ ,  $0,37 \text{ s}^{-2}$  in  $0,50 \text{ s}^{-2}$ . Resonančne krivulje so narisane za enakomerno razmaknjene  $M_0/J$ . Kot vidimo, so temu ustrezni tudi razmiki med resonančnimi vrhovi. Takšno obnašanje je značilno za linearna nihala (enačba (6)).



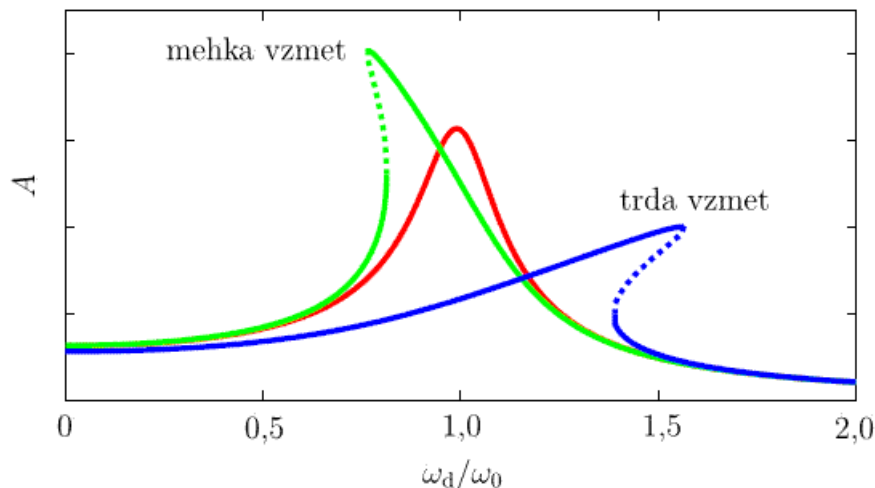
Slika 8: Resonančne krivulje magnetnega nihala pri srednjih amplitudah vsiljevanja. V obeh primerih:  $D/J = 81 \text{ s}^{-2}$ ,  $b/J = 0,58 \text{ s}^{-1}$ . a) Resonančna krivulja z vrednostjo vrha podobno eksperimentalni.  $M_0/J = 4,7 \text{ s}^{-2}$  b) Vidimo, da za enakomerne razmike  $M_0/J$  med posameznimi krivuljami razmiki med resonančnimi vrhi niso več enakomerni.  $M_0/J$  od modre do rdeče krivulje:  $8,0 \text{ s}^{-2}$ ,  $12,0 \text{ s}^{-2}$ ,  $16,0 \text{ s}^{-2}$  in  $20,0 \text{ s}^{-2}$ .

Za naše magnetno nihalo lahko sklepamo, da se bo obnašalo podobno kot Duffingov oscilator s trdo vzmetjo. Faktor  $\cos(\phi)$  na desni strani enačbe (16) pri velikih odmikih od ravnovesne lege  $\phi$  zmanjša vsiljevani pospešek. Učinek je podoben (vendar ne enak), kot če bi vzmet pri večjih odmikih postala močnejša (trša). Če enačbo (16) na obeh straneh

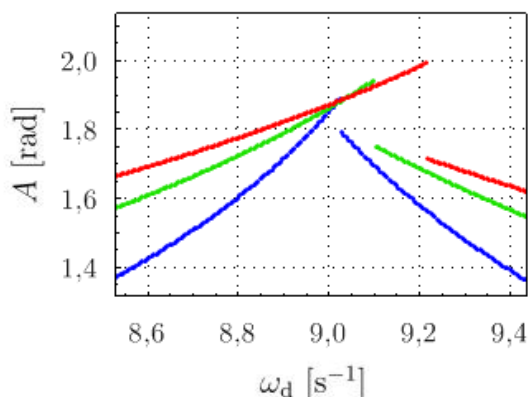
množimo z  $J/\cos(\phi)$ :

$$\left(\frac{J}{\cos(\phi)}\right)\ddot{\phi} + \left(\frac{b}{\cos(\phi)}\right)\dot{\phi} + \left(\frac{D}{\cos(\phi)}\right)\phi = M_0 \sin(\omega_d t - \gamma) \quad , \quad (20)$$

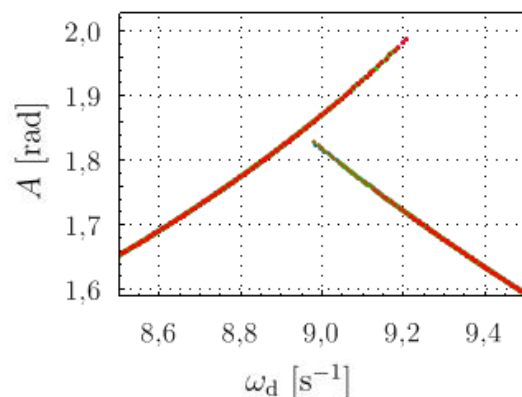
vidimo, da je učinek v resnici tak, kot da bi se pri večjih odmikih  $\phi$  simultano povečali torzijski koeficient, koeficient dušenja in vztrajnostni moment nihala.



Slika 9: Tri resonančne krivulje Duffingovega oscilatorja. Zelena predstavlja oscilator z mehko vzmetjo ( $\alpha < 0$ ), rdeča z navadno linearno vzmetjo ( $\alpha = 0$ ) in modra s trdo vzmetjo ( $\alpha > 0$ ). S črtkano črto so označeni nestabilni predeli resonančne krivulje, v katerih se amplituda ne ustali. (Slika povzeta po [6].)



(a)



(b)

Slika 10: Resonančne krivulje magnetnega nihala pri velikih amplitudah vsiljevanja. V obeh primerih:  $D/J = 81 \text{ s}^{-2}$ ,  $b/J = 0,58 \text{ s}^{-1}$ . a)  $M_0/J$  od modre do rdeče krivulje:  $30,0 \text{ s}^{-2}$ ,  $55,0 \text{ s}^{-2}$  in  $80,0 \text{ s}^{-2}$ . Pri desnih (spodnjih) krakih krivulj nekaj točk manjka, ker krivulj nisem fazno prečesal. Vidimo, da je pozicija resonančnega vrha odvisna od amplitude vsiljevanja. Linearna nihala nimajo te lastnosti. b) Fazno prečesani vrh rdeče krivulje s slike 10a. Tako najdemo tudi druge vrednosti amplitud.

Če numerično izračunane krivulje (slike 7, 8 in 10) primerjamo z izmerjenimi krivuljami (slika 6), opazimo, da se začnejo izmerjene krivulje že pri srednjih amplitudah nihanja rahlo nagibati v desno. Pri numerično izračunanih postane nagib opazen šele pri zelo velikih amplitudah vsiljevanja, ko se krivulja groteskno transformira v dve ravni črti.

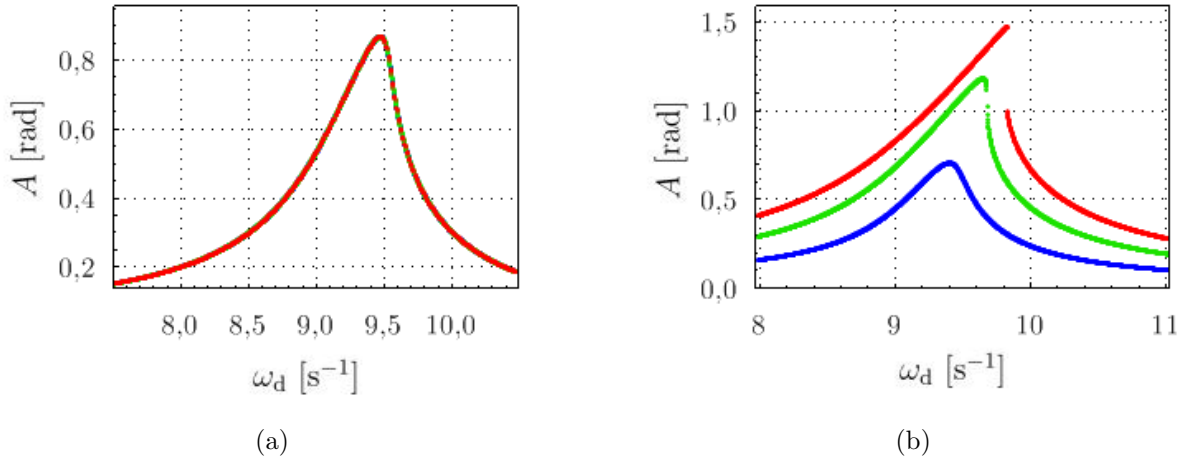
Pomislmo lahko na dve možnosti za odstopanje simulacije od eksperimenta:

1. Torzijska vzmet v eksperimentu ni bila idealna, ampak se je obnašala trdo, kar je prispevalo k nagibanju krivulje že pri nizkih vrednostih amplitude vsiljevanja.
2. Model ni dovolj natančen. Približek homogenega magnetnega polja in idealnega magnetnega dipola ni ustrezen.

Prvo možnost sem se odločil preveriti tako, da sem v matematičnem modelu Hookovo vzmet nadomestil s trdo vzmetjo. Enačbi (16) sem enostavno dodal kubični člen odvisnosti od zasuka:

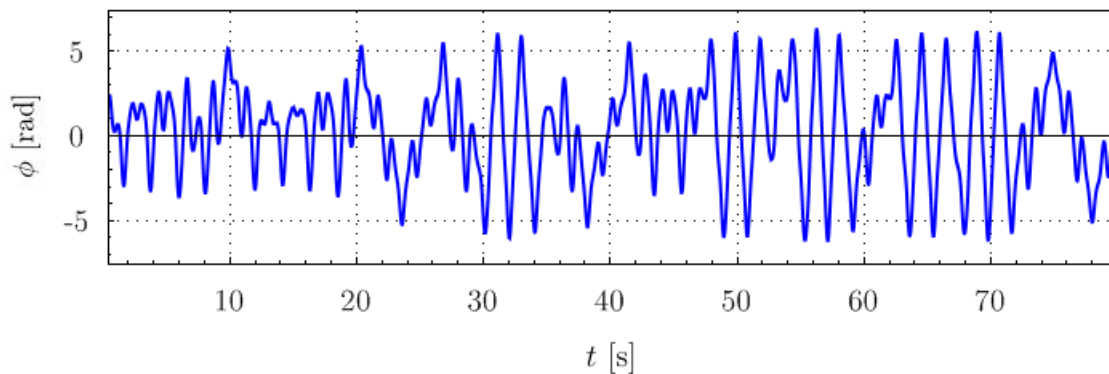
$$\ddot{\phi} + \frac{b}{J}\dot{\phi} + \frac{D}{J}\phi + \frac{\alpha}{J}\phi^3 = \cos(\phi) \left[ \frac{M_0}{J} \sin(\omega_d t - \gamma) \right] \quad . \quad (21)$$

$\alpha$  je koeficient nelinearnosti torzijske vzmeti. Za trdo vzmet je pozitiven. Na tak način sem se približal obliki eksperimentalnih krivulj pri srednji vrednosti amplitude vzbujanja (slika 11a). Skleпам, da se je vzmet, uporabljena pri eksperimentu, zares obnašala trdo.

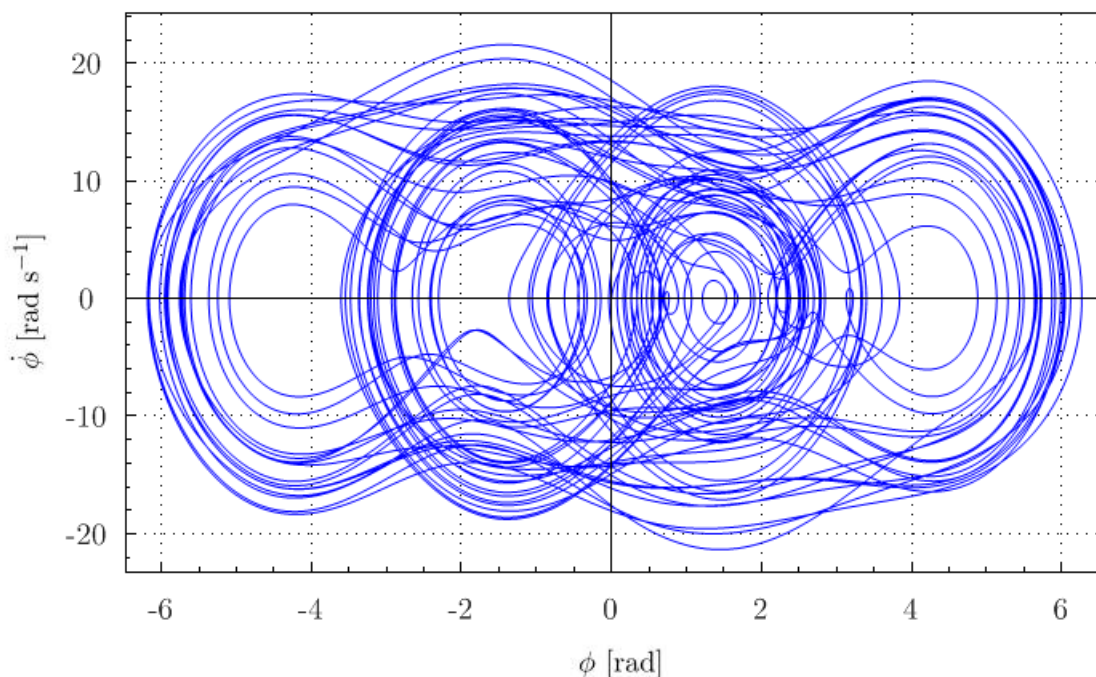


Slika 11: Resonančne krivulje magnetnega nihala s trdo vzmetjo pri velikih amplitudah vzbujanja. V obeh primerih:  $D/J = 86,0 \text{ s}^{-2}$ ,  $\alpha/J = 7,0 \text{ s}^{-2}$ ,  $b/J = 0,5 \text{ s}^{-1}$ . a) Resonančna krivulja z maksimumom amplitude podobnim eksperimentalni vrednosti.  $M_0/J = 4,5$ . b)  $M_0/J$  od modre do rdeče krivulje:  $3,5 \text{ s}^{-2}$ ,  $6,75 \text{ s}^{-2}$ ,  $10,0 \text{ s}^{-2}$ . Spreminjanje pozicije resonančnega vrha v odvisnosti od amplitude vsiljevanja je dosti bolj izrazito kot pri navadnem magnetnem nihalu.

Omenim lahko še, da magnetno nihalo, podobno kot Duffingov oscilator, pri zelo visoki amplitudi vzbujanja preide v kaotični režim. Pri nizkih amplitudah vzbujanja nihalo brez težav sledi vsiljevanju z isto krožno frekvenco, kot mu jo vsiljujemo ( $\omega_d$ ). Kadar amplitudo vsiljevanja počasi povečujemo, opazimo spreminjanje splošne oblike rešitve  $\phi(t)$ . Sprva ostaja periodična, le njena perioda postaja večja od periode vsiljevanja. Perioda nihanja seveda ne more biti poljubna. Nikakor ne bi imelo smisla, da nihalu gibanje vsiljujemo z neko frekvenco, le-to pa niha s čisto drugo nekorelirano frekvenco. Perioda narašča tako, da zavzema le celoštevilске večkratnike periode vsiljevanja. Takšno naraščanje periode nihanja je znak, da nihalo vse težje sledi vsiljevanju. Pri neki dovolj veliki vrednosti amplitude vsiljevanja periodičnost rešitve izgine. Nihalo ne more več slediti vsiljevanju, zato ga brez vsakega vzorca premetava. Nahajamo se v kaotičnem režimu (sliki 12 in 13).



Slika 12: Rešitev diferencialne enačbe nelinearnega torzijskega nihala pri zelo veliki amplitudi vsiljevanja. Periodičnost izgine, vstopili smo v kaotični režim.



Slika 13: Kaotični režim: graf kotne hitrosti v odvisnosti od zasuka  $\dot{\phi}(\phi)$  za nelinearno torzijsko nihalo pri zelo visoki amplitudi vsiljevanja. Graf očitno ni popolni fazni diagram ( $\dot{\phi}$  in  $\phi$  nista edini prostostni stopnji), ker se krivulja večkrat seka. Je le projekcija pravega 3D faznega diagrama v ravnino.

## 4 Algoritmi, uporabljeni pri analizi vsiljenega nihanja

Cilj tega diplomskega seminarja je bil raziskati obnašanje amplitude vsiljenega nihanja nelinearnega oscilatorja. Dela sem se lotil tako, da sem najprej sprogramiral splošni reševalec (solver) navadnih diferencialnih enačb, ki temelji na metodi Runge-Kutta 4. Njegovo zanesljivost sem preveril tako, da sem izračunano numerično rešitev vsiljenega nihanja vzmetnega nihala primerjal z analitično rešitvijo. Potem sem napisal metodo, ki iz numerične rešitve prebere amplitudo vsiljenega nihanja, in z njeno pomočjo narisal resonančno krivuljo.

## 4.1 Reševalec diferencialnih enačb

Reševalec diferencialnih enačb, ki sem ga napisal, temelji na metodi Runge-Kutta 4 (RK4). Algoritem RK4 je ponavadi podan v obliki za reševanje diferencialnih enačb I. reda. Navadne diferencialne enačbe višjega reda nato razstavimo v sistem sklopljenih diferencialnih enačb I. reda. Moj reševalec je napisan tako, da uporabnik samo poda celotno diferencialno enačbo ne glede na to, katerega reda je. Reševalec operira s celotno diferencialno enačbo in je ne razstavlja v sistem enačb I. reda.

Algoritem, ki sem ga povzel iz [7] in njegovo zanesljivost tudi preveril, bom opisal na primeru diferencialne enačbe II. reda. Uporabnik poda enačbo v takšni obliki, da je eksplicitno izražen najvišji odvod. Na primer, enačbo

$$\ddot{f}(t)\dot{f}(t) + p(t)\dot{f}^2(t) + q(t)f(t) = F(t) \quad , \quad (22)$$

kjer so  $p(t)$ ,  $q(t)$  in  $F(t)$  znane funkcije  $t$ , moramo zapisati v obliki:

$$\ddot{f}(t) = \frac{1}{\dot{f}(t)}(-p(t)\dot{f}^2(t) - q(t)f(t) + F(t)) \quad . \quad (23)$$

Podati moramo tudi toliko začetnih pogojev, da so na začetku nedvoumno določene vse količine, ki nastopajo v enačbi (22). Če npr. podamo vrednost neodvisne spremenljivke  $t$ , funkcije  $f(t)$  in prvega odvoda  $\dot{f}(t)$  v isti točki, lahko iz enačbe (23) izračunamo vrednost drugega odvoda v tej točki.

Reševalec iz koraka v korak računa nove približne vrednosti iskane funkcije  $f(t)$  in njenih odvodov  $\dot{f}(t)$ ,  $\ddot{f}(t)$ :

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t + h, \\ f(t) &\rightarrow f(t + h), \\ \dot{f}(t) &\rightarrow \dot{f}(t + h), \\ \ddot{f}(t) &\rightarrow \ddot{f}(t + h). \end{aligned} \quad (24)$$

v diskretni množici točk  $\{t[1], t[2], \dots, t[N - 1]\}$  ter jih zapiše v tabelo rešitev, ki jo lahko vidimo na vrhu slike 14. Velikost koraka metode označimo s črko  $h$ .

Postopna generacija skupka rešitev, ki ga predstavlja stolpec v tabeli rešitev na sliki 14, od dane diskretne vrednosti neodvisne spremenljivke v naslednjo v tabeli, je upodobljena na spodnjem delu slike 14, kjer so oštevilčena zaporedna dejanja v enem koraku. Metoda RK4 deluje tako, da se najprej s pomočjo odvoda trikrat linearno ekstrapolira trenutna funkcijska vrednost (okvirček levo spodaj na sliki 14), nato se za rešitev pri naslednjem koraku vzame posebno povprečje stare vrednosti in vseh treh ekstrapolacij (desno spodaj na sliki 14).

V našem primeru se v prvem in drugem dejanju na spodnjem delu slike 14 linearno ekstrapolirata vrednost funkcije in odvoda za polovico koraka metode  $h$  naprej:

$$f_1 = f_0 + \frac{h}{2}\dot{f}_0 \quad \text{dejanje (1)}, \quad (25)$$

$$\dot{f}_1 = \dot{f}_0 + \frac{h}{2}\ddot{f}_0 \quad \text{dejanje (2)}. \quad (26)$$



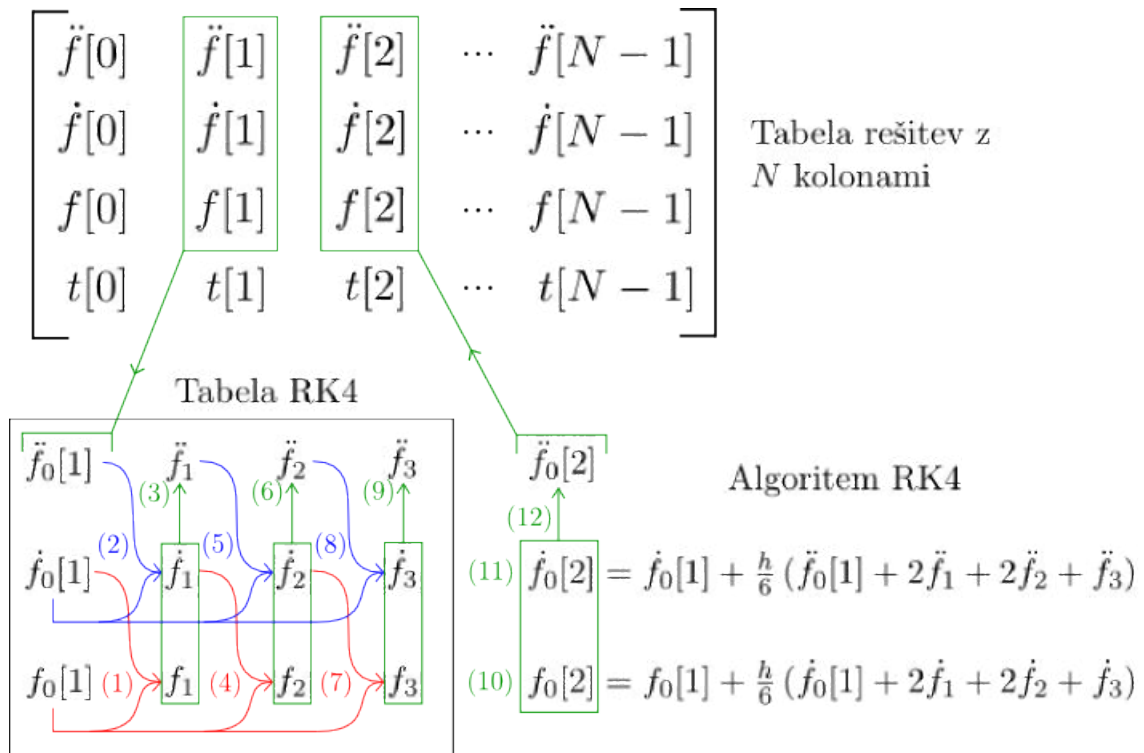
Vrednost najvišjega odvoda  $\ddot{f}_1$  se izračuna iz enačbe (23) tako, da se vanjo vstavijo ustrezne vrednosti  $t + h/2$ ,  $f_1$  in  $\dot{f}_1$  (dejanje (3)).

Potem se zgodi skoraj enaka, vendar izboljšana ekstrapolacija na polovico intervala. Tokrat se vzamejo nove vrednosti odvodov  $\dot{f}_1$  in  $\ddot{f}_1$ :

$$f_2 = f_0 + \frac{h}{2} \dot{f}_1 \quad \text{dejanje (4)}, \quad (27)$$

$$\dot{f}_2 = \dot{f}_0 + \frac{h}{2} \ddot{f}_1 \quad \text{dejanje (5)}. \quad (28)$$

Ne smemo spregledati, da še vedno ekstrapoliramo iz točke na začetku intervala (iz  $f_0$  v enačbi (27) in iz  $\dot{f}_0$  v enačbi (28)), ne iz polovičnih vrednosti ( $f_1$  in  $\dot{f}_1$ ). Ponovno se izračuna vrednost najvišjega odvoda  $\ddot{f}_2$  tako, da se vstavi vrednosti  $t + h/2$ ,  $f_2$  in  $\dot{f}_2$  v enačbo (23).



Slika 14: Shema poteka algoritma RK4 za navadno diferencialno enačbo II. reda. Rdeče, modre in zelene številke v oklepajih na spodnjem delu slike predstavljajo vrstni red dejanj.

Zadnja ekstrapolacija nas pripelje na konec intervala:

$$f_3 = f_0 + h \dot{f}_2 \quad \text{dejanje (7)}, \quad (29)$$

$$\dot{f}_3 = \dot{f}_0 + h \ddot{f}_2 \quad \text{dejanje (8)}. \quad (30)$$

Spet se na isti način izračuna še vrednost najvišjega odvoda  $\ddot{f}_3$  (dejanje (9)), tokrat se za vrednost neodvisne spremenljivke vstavi  $t + h$ .

Želene rešitev pri naslednjem koraku se nato s pomočjo ekstrapoliranih odvodov dobi tako, da se povpreči staro vrednost odvoda in vse tri ekstrapolacije, pri čemer dobita

ekstrapolaciji na sredini intervala večjo utež:

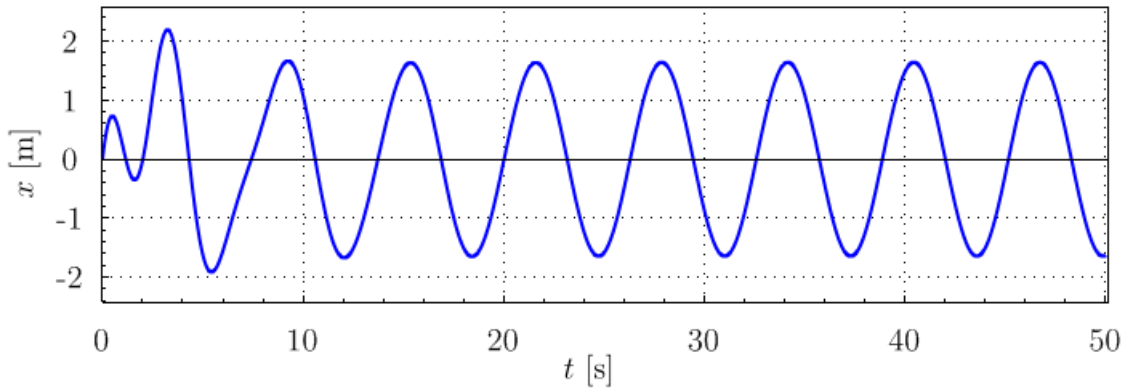
$$f(t+h) = f_0 + \frac{h}{6}(\dot{f}_0 + 2\dot{f}_1 + 2\dot{f}_2 + \dot{f}_3) \quad \text{dejanje (10)}, \quad (31)$$

$$\dot{f}(t+h) = \dot{f}_0 + \frac{h}{6}(\ddot{f}_0 + 2\ddot{f}_1 + 2\ddot{f}_2 + \ddot{f}_3) \quad \text{dejanje (11)}. \quad (32)$$

Na koncu se iz izračunanih vrednosti  $f(t+h)$  in  $\dot{f}(t+h)$  po enačbi (23) izračuna še najvišji odvod v naslednjem koraku (dejanje (12)).

## 4.2 Zanesljivost reševalca diferencialnih enačb

Zanesljivost reševalca RK4 sem preveril na dva načina: prvič na primeru vzmetnega nihala, ki je analitično rešljivo, in drugič s pomočjo Richardsonove ekstrapolacije. Rešitev odmika od ravnovesne lege v odvisnosti od časa za nihalo, na katerem sem opravil preizkusa, je narisana na sliki 15.



Slika 15: Analitična rešitev za nihanje vzmetnega nihala, ki ga opisuje enačba (1). Začetni pogoji:  $x_0 = 0$  m,  $v_0 = 3$  ms<sup>-1</sup>. Ostali parametri:  $\omega_0 = 2$  s<sup>-1</sup>,  $b = 0,25$  s<sup>-1</sup>,  $F = 5$  ms<sup>-2</sup>,  $\omega_d = 1$  s<sup>-1</sup>,  $\gamma = 1$ . Omenjeno nihalo ima ob danih parametrih dolgoročno amplitudo približno 1,6 m.

Ko diferencialno enačbo magnetnega nihala pretvorimo v brezdimenzijsko obliko, ugotovimo, da je fazni prostor tridimenzionalen. Fazni prostor s tremi prostostnimi stopnjami vsebuje vse možne trajektorije  $X[x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)]$ . Te se, kot je za fazni prostor značilno, ne sekajo - skozi vsako točko faznega prostora gre le ena trajektorija. Če se nihalo ob času  $t_1$  nahaja v točki faznega prostora  $X_1[x(t_1), \dot{x}(t_1), \ddot{x}(t_1)]$ , potem nam metoda Runge-Kutta  $n$ -tega reda s širino koraka  $h$  na naslednjem koraku vrne novo točko faznega prostora  $X_2[x(t_1+h), \dot{x}(t_1+h), \ddot{x}(t_1+h)]$ . Ta je enaka Taylorjevemu razvoju trajektorije, ki gre skozi prejšnjo točko  $X_1$  do (vključno) člena reda  $h^n$ . Zaradi nepopolnega ujemanja bo numerično izračunana trajektorija korak za korakom drsela v stran od prave.

Spremljajmo le koordinato  $x(t)$  numerično izračunane trajektorije, funkcijo imenujmo numerična rešitev  $R(t)$ . Lokalno odstopanje  $E_h$ :

$$E_h(t) = R(t) - x_P(t) \quad (33)$$

od prave rešitve  $x_P(t)$  pri nekem  $t$  lahko po razmišljanju v prejšnjem odstavku ocenimo

kot [9]:

$$E_h(t) = C(t)h^{n+1} + \mathcal{O}(h^{n+2}) \quad , \quad (34)$$

kjer je  $C(t)$  sorazmeren s številom korakov  $N(t)$ , ki smo jih naredili na poti do  $t$ , in prav tako odvisen od lastnosti funkcije  $x_P(t)$ :

$$C(t) \approx N(t)K \quad . \quad (35)$$

S konstanto  $K$  smo označili neko povprečno obnašanje funkcije  $x_P(t)$  na intervalu reševanja, oz. relativni koeficient povprečnega prirastka napake v enem koraku. Vrednost  $K = 1$  bi pomenila, da napaka na vsakem koraku v povprečju zraste točno za pričakovani  $h^{n+1}$ . Višji  $K$  torej predstavlja bolj neukrotljive funkcije in pomeni hitrejšo kopičenje napake.

Iz enačbe (34) je očitno, da je za čim manjše odstopanje zaželena izbira čim manjšega koraka metode. Kljub temu ni dobro, če je korak poljubno majhen. Pri premajhnem koraku začne prevladovati zaokrožitvena napaka, sorazmerno s številom korakov pa se večja tudi računski čas.

V prvem preizkusu delovanja implementacije RK4 sem izračunal razliko med numerično in analitično rešitvijo  $x(t)$  ter jo narisal na graf (slika 16).

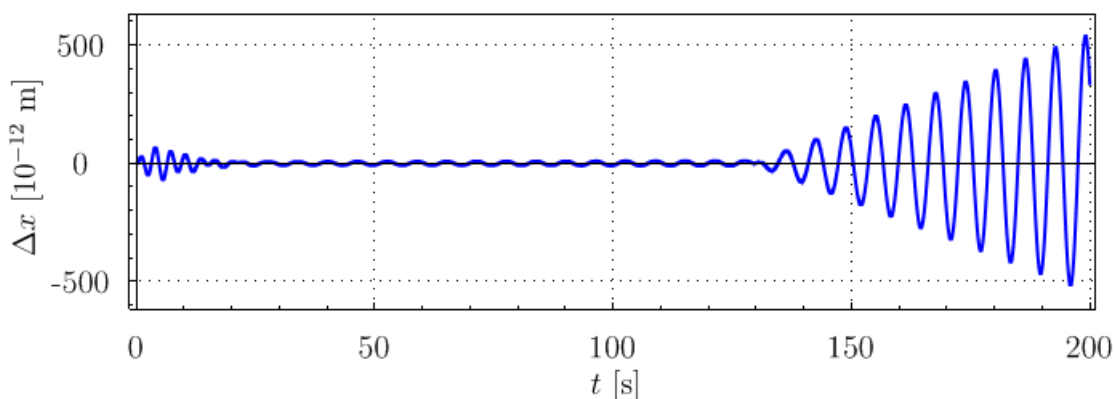
S slike 16 razberemo, da je akumulirana absolutna napaka po približno 67 000 korakih reda velikosti  $10^{-9}$  m. Če poskušamo oceniti red velikosti  $K$  s pomočjo enačbe (34) tako, da upoštevamo samo vodilni člen, lahko zapišemo:

$$E_h(t) \approx N(t)Kh^5 \quad . \quad (36)$$

Namesto vrednosti vstavimo v enačbo (36) le rede velikosti:

$$10^{-9} \text{ m} \sim 10^5 \cdot K \cdot 10^{-13} \text{ s}^5 \quad , \quad (37)$$

kar nam da oceno za relativni prirastek napake v enem koraku  $K \sim 0,1 \text{ m s}^{-5}$ . Ocena za  $K$  ne odstopa močno od 1 in je celo manjša od 1. Napaka raste malo počasneje, kot bi pričakovali, kar nam da zaupanje v implementacijo metode RK4. Glede njene pravilnosti bi morali biti zaskrbljeni, če bi bil  $K \gg 1$ .



Slika 16: Razlika med numerično in analitično rešitvijo za vzmetno nihalo, ki ga opisuje enačba (1). Velikost koraka metode  $h = 0,003$  s, enačbo rešujemo za  $t \in [0, 200]$  s, kar pomeni približno 67 000 korakov.

Kadar analitične rešitve ni na voljo, lahko napako ocenimo z Richardsonovo ekstrapolacijo [8, 9]. Ta temelji na primerjavi dveh numeričnih rešitev iste diferencialne enačbe, pri

čemer drugo rešitev izračunamo z večjo natančnostjo, to je pri manjšem koraku metode  $h$ . Najprej izračunamo rešitev na intervalu  $[t_z, t_k]$  pri širini koraka  $h_1$ . Zapišimo oceno za lokalno odstopanje pri nekem  $t$  iz omenjenega intervala:

$$E_{h_1}(t) \approx C(t)h_1^{n+1} \quad . \quad (38)$$

Nato rešitev ponovno izračunamo na istem intervalu, vendar ob manjšem koraku metode  $h_2$ , tako da je širina prvotnega koraka  $h_1$  celoštevilski večkratnik novega koraka  $h_2$ :

$$h_2 = \frac{h_1}{k} \quad , \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (39)$$

Za lokalno odstopanje nove rešitve velja:

$$E_{h_2}(t) \approx kC(t)h_2^{n+1} \quad , \quad (40)$$

kjer smo morali stari  $C(t)$  pomnožiti s  $k$ , saj je zdaj na poti do istega  $t$   $k$ -krat več korakov. Če za  $h_2$  v enačbi (40) vstavimo njegov pomen iz enačbe (39), dobimo:

$$E_{h_2}(t) \approx kC(t) \left( \frac{h_1}{k} \right)^{n+1} = \frac{1}{k^n} C(t)h_1^{n+1} \quad . \quad (41)$$

V  $C(t)h_1^{n+1}$  prepoznamo  $E_{h_1}(t)$  iz enačbe (38), zato lahko zapišemo:

$$E_{h_2}(t) \approx \frac{1}{k^n} E_{h_1}(t) \quad . \quad (42)$$

Tako smo se znebili neznanke  $C(t)$ . Nazadnje se moramo samo še spomniti osnovnih definicij lokalnih odstopanj  $E_{h_1}(t)$  in  $E_{h_2}(t)$  (enačba (33)):

$$E_{h_1}(t) = R_1(t) - x_P(t) \quad , \quad (43)$$

$$E_{h_2}(t) = R_2(t) - x_P(t) \quad . \quad (44)$$

Sedaj enačbi (43) in (44) odštejemo:

$$E_{h_1}(t) - E_{h_2}(t) = R_1(t) - R_2(t) \quad (45)$$

in se znebimo neznane prave rešitve  $x_P(t)$ . Enačba (45) nam pove, da je razlika lokalnih odstopanj (napak) dveh rešitev pri različnih širinah korakov kar enaka razliki ustreznih rešitev. Zdaj  $E_{h_2}(t)$  v enačbi (45) nadomestimo z desno stranjo enačbe (42):

$$\left( 1 - \frac{1}{k^n} \right) E_{h_1}(t) = R_1(t) - R_2(t) \quad (46)$$

in izrazimo  $E_{h_1}(t)$ :

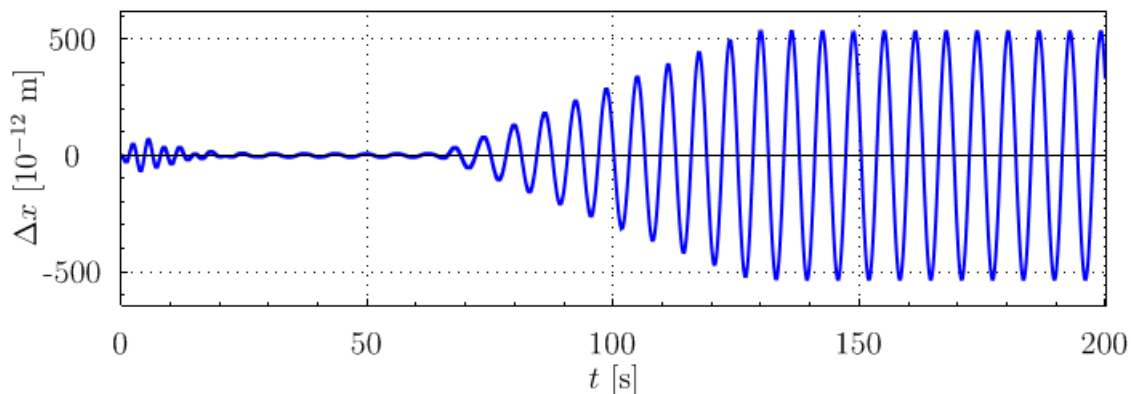
$$E_{h_1}(t) = \frac{R_1(t) - R_2(t)}{\left( 1 - \frac{1}{k^n} \right)} \quad . \quad (47)$$

Za metodo četrtega reda ( $n = 4$ ) ob izbiri  $k = 2$  velja:

$$E_{h_1}(t) = \frac{16}{15} (R_1(t) - R_2(t)) \quad . \quad (48)$$

Izračunali bomo torej dve rešitvi iste diferencialne enačbe z uporabo različnih širin koraka

in ju primerjali (slika 17). Ne smemo pozabiti, da numerične metode reševanja diferencialnih enačb vrnejo diskretno razporejene vrednosti  $R(t)$ . Če izberemo različni velikosti koraka, numerični rešitvi v splošnem ne bosta obstajali pri enakih  $t$ . Od izbire  $k$  bo odvisno, kako pogosto se bosta rešitvi prekrili. Ponavadi izberemo  $k = 2$ , tako da se rešitvi prekrijeta na vsakem drugem koraku  $h_2$  (oz. na vsakem koraku  $h_1$ ). Nujno moramo poskrbeti, da pri izračunu ocene napake  $E_{h_1}(t)$  po enačbi (48) primerjamo samo vrednosti  $R_1(t)$  in  $R_2(t)$  pri enakem  $t$ .



Slika 17: Napaka rešitve vzmetnega nihala s slike 15 ocenjena z Richardsonovo ekstrapolacijo pri velikosti koraka  $h_1 = 0,003$  s. Če to oceno napake primerjamo z dejanskim odstopanjem od pravih vrednosti na sliki 16, vidimo, da ocena dobro deluje.

### 4.3 Iskanje amplitude vsiljenega nihanja

Po izračunu rešitve diferencialne enačbe vsiljenega nihanja želimo napisati metodo, ki bo odčitala dolgoročno amplitudo. Če pogledamo tipično rešitev vsiljenega nihanja (slika 15), je za izračun amplitude nihanja najenostavneje primerjati vrednosti dveh sosednjih lokalnih maksimumov odmika: najdemo lokalni maksimum in njegovega prvega naslednjega soseda ter primerjamo razliko njunih vrednosti. Kadar se sosedna maksimuma razlikujeta manj od predpisane natančnosti  $\epsilon_x$ , razglasimo vrednost zadnjega maksimuma za amplitudo nihanja.

Algoritem bo zanesljivejši, če bomo v iskanje vključili več dodatnih pogojev, ki držijo, kadar se amplituda nihanja po dolgem času ustali. Razen pri nelinearnih nihalih na prehodu v kaos, kjer postane vsiljevana frekvenca večkratnik frekvence nihanja, nihalo po dolgem času zagotovo niha z vsiljeno frekvenco. Tako lahko med iskanjem dolgoročne amplitude preverjamo tudi, če se dolžina periode med dvema sosednjima maksimumoma ujema s periodo vsiljevanja do predpisane natančnosti  $\epsilon_t$ . S tem se poskušamo izogniti morebitni napačni identifikaciji amplitude v kakšnem posebnem primeru.

Pri nelinearnih oscilatorjih kljub periodičnemu vzburjanju amplituda včasih ne obstaja. Pri visokih amplitudah vzburjanja lahko nelinearno nihalo preide v kaotični režim. Takrat metoda za iskanje amplitude le-te ne bo našla. Tega se je dobro zavedati, da ob zatajitvi metode najprej narišemo rešitev in preverimo, ali se morda ne nahajamo v kaotičnem režimu in ne iščemo po nepotrebnem domnevne napake v implementaciji metode.

## 5 Zaključek

V diplomskem seminarju sem se ukvarjal predvsem z resonančnim obnašanjem nihal. Najprej sem pregledno opisal obnašanje linearnih oscilatorjev in se nato lotil obravnave specifičnega nelinearnega oscilatorja: magnetnega nihala. Tega sem primerjal z linearnim oscilatorjem in najbolj znanim predstavnikom nelinearnih oscilatorjev - Duffingovim nihalom. Magnetno nihalo si z Duffingovim deli dve lastnosti: nagibanje resonančne krivulje pri večjih amplitudah vzbujanja in posledično odvisnost lege resonančnega vrha od amplitude vzbujanja.

Pri obravnavi nelinearnih oscilatorjev sem enačbe nihanja reševal numerično. Numerične postopke sem pri tem dobro preveril, med drugim s primerjavo numeričnih rešitev za linearne oscilatorje z znanimi analitičnimi rešitvami.

Numerično izračunane resonančne krivulje magnetnega nihala sem primerjal tudi z eksperimentalnimi meritvami. Ujemanje ni bilo zadovoljivo. Simulirane resonančne krivulje so se začele nagibati v desno pri veliko večjih amplitudah vzbujanja kot izmerjene. Predlagam dva vzroka za slabo ujemanje numerično izračunanih resonančnih krivulj z izmerjenimi. Prvi možen vzrok je, da se je torzijska vzmet v eksperimentu obnašala trdo. Trda vzmet se pri majhnih raztezkih obnaša enako kot Hookova, vendar jo je do večjih raztezkov težje raztegniti kot Hookovo, ker ima v odvisnosti sile od raztezka poleg linearnega še kubični člen. Iz primera Duffingovega oscilatorja vemo, da se resonančna krivulja zaradi trde vzmeti nagne v desno - vrh se premakne proti višjim frekvencam vsiljevanja. Nagibanje resonančne krivulje zaradi trde vzmeti pa je izrazitejše kot nagibanje resonančne krivulje zaradi nelinearnega obnašanja magnetnega nihala. Tako je možno, da je k nagibanju resonančne krivulje že pri nižjih vrednostih amplitude vsiljevanja prispevalo trdo obnašanje torzijske vzmeti.

Drugi vzrok za slabo ujemanje numerično izračunanih resonančnih krivulj z izmerjenimi bi lahko bila nezadostnost matematičnega modela. Predpostavil sem namreč, da je magnetno polje Helmholtzove tuljave homogeno. Možnost veljavnosti prve domneve sem testiral tako, da sem v modelu namesto Hookove uporabil trdo vzmet. Oblika numerično izračunane resonančne krivulje se je po tej spremembi bolje ujemala z izmerjeno, kar kaže, da je domneva lahko pravilna.

V nadaljevanju bi bilo smiselno preizkusiti še drugo hipotezo. Približek homogenega magnetnega polja bi zamenjali z natančnim modelom krajevne odvisnosti gostote magnetnega polja Helmholtzove tuljave, nihajočo tuljavo pa bi, namesto z idealnim magnetnim dipolom, modelirali realno. Nihalo pri dovolj velikih amplitudah vsiljevanja vstopi v kaotični režim. Periodično nihanje in enolično določena amplituda nihanja tam seveda izgineta, vendar to odpre nove možnosti raziskovanja. Za začetek bi bilo dobro ugotoviti, pri katerih vrednostih parametrov se nihalo obnaša kaotično.

Ker sem numerično orodje za reševanje diferencialnih enačb napisal sam v jeziku C#, sem njegovo zanesljivost in natančnost tudi preveril. Koda in njeni strukturni standardi temeljijo na mentorjevi raziskovalni knjižnici IGLib [10], za dostop do katere sem mu hvaležen. Za avtomatsko izrisovanje grafov je uporabljena knjižnica ZedGraph [11].

## Literatura

- [1] H. J. Pain, *The Physics of Vibrations and Waves*, 5th ed. (John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1999).
- [2] F.-J. Elmer, *The Pendulum Lab: Nonlinear Dynamics*. Pridobljeno 24. 5. 2013 iz <http://www.elmer.unibas.ch/pendulum/nldyn.htm>.
- [3] G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre Technische Bedeutung*. (F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1918).
- [4] I. Kovačić in M. Brennan, *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour* (John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2011).
- [5] M. L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 3rd ed. (John Wiley & Sons, Inc., USA, 2006).
- [6] T. Kanamaru, *Duffing oscillator*. Pridobljeno 29. 7. 2013 iz [http://www.scholarpedia.org/article/Duffing\\_oscillator](http://www.scholarpedia.org/article/Duffing_oscillator).
- [7] Doswa.com, *Fourth Order Runge-Kutta Numerical Integration*. Pridobljeno 1. 7. 2013 iz <http://doswa.com/2009/01/02/fourth-order-runge-kutta-numerical-integration.html>.
- [8] I. Grešovnik, *Domača naloga 6: dušeno nihanje, Vaje iz predmeta Numerične metode v fiziki*. Pridobljeno 30. 8. 2013 iz [http://www2.arnes.si/~ljc3m2/igor/courses/numerical\\_methods\\_physics/doc/domaca\\_naloga\\_06\\_duseno\\_nihanje.pdf](http://www2.arnes.si/~ljc3m2/igor/courses/numerical_methods_physics/doc/domaca_naloga_06_duseno_nihanje.pdf).
- [9] S. S. Rao, *Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists* (Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002).
- [10] I. Grešovnik, *Investigative Generic Library (IGLib)*. Pridobljeno 29. 7. 2013 iz <http://www2.arnes.si/~ljc3m2/igor/iglib/>.
- [11] J. Champion, *Zedgraph: A flexible charting library for .NET*. Pridobljeno 24. 8. 2013 iz <http://www.codeproject.com/Articles/5431/A-flexible-charting-library-for-NET>.
- [12] J. Strnad, *Svet nihanj in valovanj* (DMFA-založništvo, Ljubljana, 2010).
- [13] J. Ornik in M. Petek, *Poročilo o samostojnem projektu pri predmetu fizikalni eksperimenti 3: Faktor kvalitete tuljav v odvisnosti od geometrijskih lastnosti tuljav*. Pridobljeno 1. 9. 2013 iz [www2.arnes.si/~ljc3m2/igor/software/thesis\\_petek/doc/projektna\\_naloga.pdf](http://www2.arnes.si/~ljc3m2/igor/software/thesis_petek/doc/projektna_naloga.pdf).