Subject: 403616204 تمرین نگاشت ۵ علیرضا عزیزی
Date

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

اثبات کنید $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$

$f = x \quad [-\pi, \pi] \longrightarrow$ تابع زوج و متناوب با دوره 2π

فوریه :

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

چون تابع زوج است $\Leftarrow a_0 = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{nx\sin(nx) + \cos(nx)}{n^2} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{2(\sin(n\pi) - \pi n \cos(n\pi))}{n^2}$$

$$= \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

Subject:
Date

قضیه پارسوال:

اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$

آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$

بنابراین، براساس پارسوال:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^2}{n^2}\left[(-1)^{n+1}\right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow$$ همگراست

برای اثبات $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ ، با توجه به اسلایدهای درس (اول)

7/12

$$1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \dots \geq 1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right)} + \dots$$

$$\geq 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

P4PCO