Темная ~~энергия~~ материи

Фриц Цвикки был первым, кто указал на существование темной материи, исходя из анализа результатов проведенных им наблюдений по изучению динамики кластера галактик Комы - это скопление (кластер) галактик, содержащее около тысячи галактик. Цвикки использовал теорему вириала для оценки суммарной массы скопления галактик. Для систем подобных Солнечной системе, в которых планеты вращаются по круговым орбитам вокруг Солнца, теорема вириала утверждает, что кинетическая энергия планет определяется потенциальной энергией гравитационного взаимодействия. Для более общего случая системы частиц, размеры которой ограничены некоторым взаимодействием, теорема вириала связывает между собой усредненную по времени полную кинетическую энергию системы с усредненной по времени потенциальной энергией системы.

В 1933, основываясь на наблюдении скорости галактик на перефирии (крае) Кома-кластера галлактик, Цвикки пришел к выводу что полная масса кластера галактик превышает массу его видимой части (т.е. галактик). Учет гравитационного притяжения наблюдаемой материи (галактик) оказался недосточен для объяснения скорости галактик на перефирии кластера. Это означало что в кластере содержится еще некоторая невидимая материя, учет гравитации которой объясняет значения наблюдаемых скоростей. Эта невидимая материя и есть Темная Материя. В дальнейшем будем считать что масса каждой галлактики есть сумма масс видимой материи и Темной Матери, которые движутся совместно. Темная Материя взаимодействует с видимой материей только посредством гравитационного взаимодействия.

A. Кластер Галактик

Будем полагать что кластер галактик состоит из большого числа N галактик и Темной Материи, распределенных однородно (равномерно) внутри сферы радиуса R и полная масса (галактики и Темная Материя) кластера равна m.

A.1	Предполагая непрерывное распределение материи в кластере, найти полную потенциальную гравитационную энергию системы. Ответ выразить в терминах M и R.	1.0 pt.

Вследствие космологического расширения объекты будут удаляться от наблюдателя на Земле со скоростью, зависящей от расстояния между наблюдателем и объектом. Измеряемая наблюдателем на Земле частота света, который излучается атомом водорода на СуперНовой звезде типа IA в i-ом кластере галактик, равна f_i для $i = 1,\ldots,N$. Если бы этот же атом водорода излучал свет на Земле, то измеренная тем же наблюдателем частота излучения была бы равна f_0.

A.2	Определить среднюю скорость V_{cr} удаления от Земли всего кластера галактик. Ответ выразите в терминах f_i, f_0 и N. Полагайте скорость движения галактик в кластере очень малой по сравнению со скоростью света c.	0.5 pt.

A.3	Предполагая что скорость галактики относительно центра кластера галактик изотропна (не зависит от направления движения галактики по относительно центра кластера), найдите среднеквадратичную скорость σ_v галактики по отношению к центру кластера. Ответ выразите в терминах N, f_i и f_0. С поолученнного результата определите среднюю кинетическую энергию галактики относительно центра кластера. Ответ выразите в терминах σ_v и m.	1.5 pt.

Для определения полной массы кластера можно использовать теорему вириала, согласно которой для консервативной системы частиц,

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

где $\langle K \rangle_t$ есть усредненная по времени полая кинетическая энергия, $\langle U \rangle_t$ - усредненная по времени полная потенциальная энергия, и γ есть некоторая константа

Эта теорема может быть выведена в предположении что для состемы частиц, размеры которой ограничены вследствияе взаимодействия между частицами, величины положения и импудьса каждой из частиц есть конечные величины и следующая величина

$$\Gamma = \sum_i \vec{p_i} \cdot \vec{r_i}$$

также конечна.

A.4	Используя то, что усреднение по достаточно большому периоду времени обращает в ноль величину $d\Gamma/dt$, т.е. $\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$, определите константу γ в записанном выше выражении для теоремы вириала для случая гравитационного взаимодействия между частицами, из которых состоит система.	1.7 pt.
A.5	На основани полученного в предыдущем пункте результата найдите полную массу Темной Материи в кластере в терминах N, m, R и σ_v. Считайте что среднеквадратичная скорость Темной Материи совпадает со среднеквадратичной скоростью галактик в кластере.	0.5 pt.

B. Темная Материя в галлактике

Темная материя также существует внутри и вне галлактик. Рассмотрим сферическую галлактику видимого радиуса R_g (это приблизительное растояние для которого еще видимо достаточно большое число звезд галлактики; однако отметим что очень небольшое число звезд все еще может быть распределено в областях за пределами R_g). Будем рассматривать звезды в галлактиках как точечные объекты (частицы) средней массы m_s. Звезды распределены однородно (равномерно), плотность числа звезд в единице объема галлактики равна n. Также предположим что звезды движутся по круговых орбитах.

B.1	Предполагая что галлактика состоит только из звезд, найдите скорость звезды $v(r)$ как функцию расстояния звезды до центра галактики и изобразите графически эту зависимость $v(r)$ для $r < R_g$ и $r \geq R_g$.	0.8 pt.

На существование темной материи указывает форма так называемых кривых вращения галлактик -- графическая зависимость $v(r)$, получаемая из наблюдений. На графике ниже изображена характерная кривая вращения галактик. Для простоты предпологайте что $v(r)$ есть линейная функция для $r \leq R$ и постояннна для $r > R$ и равна v_0.

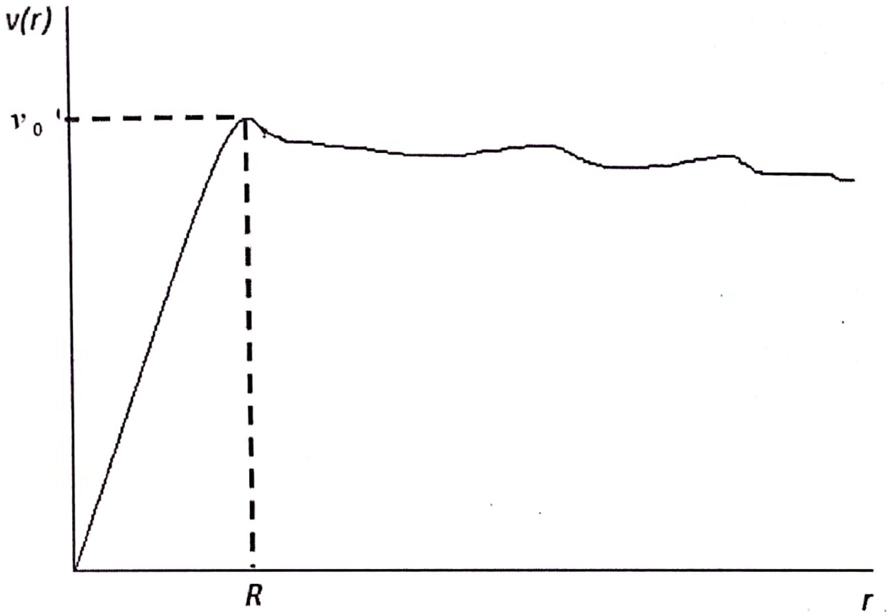


Fig. 1 Типичная кривая вращения галактики.

B.2	Найдите полную массу m_r части галактики, находящейся в пределах ее видимого радиуса R_g Ответ запишите в терминах v_0 и R_g.	0.5 pt.

Различие между графикам B.2 и графиком полученным в B.1 указывает на существование Темной Материи.

B.3	Определите массовую плотность темной материи как функцию r, R и v_0, для $r < R_g$ и $r \geq R_g$.	1.5 pt.

C. Межзведный газ и Темная Материя

Теперь рассмотрим молодую галактику, в которой доминируют межзвездный газ и Темная Материя (массой звезд пренебрегаем). Предполагаем что межзвездный газ состоит из одинаковых частиц массы m_p. Плотность числа частиц $n(r)$ и температура $T(r)$ газа зависят от расстояния r к центру галлактики. Несмотря на то что множество физических процессов происходящих в межзвездном газе, все же можно считать что газ находится в гидростатическом равновесии вследствие баланса между его давлением и галактическим гравитационным притяжением.

C.1	Найдите градиент давления газа dP/dr в терминах $m'(r)$, r и $n(r)$. Здесь, $m'(r)$ есть полная масса газа и Темной Материи, содержащихся внутри сферы радиуса r от центра галактики.	0.5 pt.

Задача1: Супутник *(1.0 point)* Супутник на сонячних батареях запускається з Землі з початковою швидкістю v_0 на еліптичну геліоцентричну орбіту з наміром зібрати якомога більше сонячної енергії. Кут запуску може бути обрано довільним.

1. *(0.1 point)* Яка мімімальна необхідна швидкість запуску v_m, для досягнення будь-якої геліоцентричної орбіти?

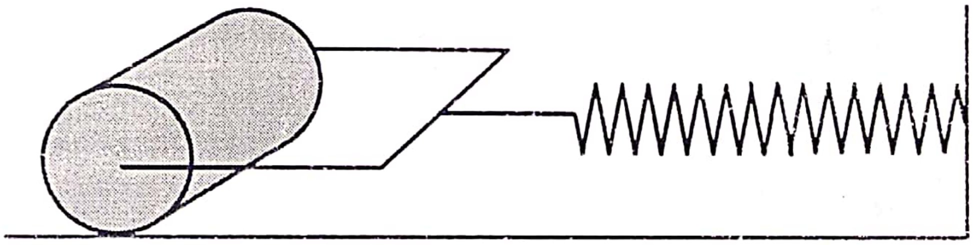
2. *(0.2 point)* Яка швидкість супутника одразу після виходу з гравітаційного поля Землі?

3. *(0.3 point)* Знайдіть величину усередненого сонячного опромінення супутника ~~крізь~~ через його головну напіввісь a, момент кількості руху J, орбітальний період T і масу m.

4. *(0.4 point)* Яка максимальна середня опромінованість можлива для супутника і який має бути для нього кут запуску по відношенню до напрямку руху Землі?

Маса Сонця – $M_{\odot}$, орбітальний радіус Землі – $R_{\oplus}$, прискорення вільного падіння на Землі – g, радіус Землі – $r_{\oplus}$ а яскравість Сонця – $L_{\odot}$.

1. **Задача 2:Ролик** *(2 point)*



Ролик являє собою твердий однорідний циліндр з масою M та радіусом r; він знаходиться у спокої на горизонтальному столі та прикріплений до стіни за допомогою спіральної пружини з коефіцієнтом пружності k (див. рисунок). Пружину можна вважати безмасовою та ідеальною, тобто закон Гука лишається дієсним для деформацій будь-якої величини.

(a) *(0.3 point)* Для початку припустимо, що тертя між столом і роликом відсутнє. Ролик зміщують і відпускають; знайдіть період коливань T_0.

(b) *(0.3 point)* З цього моменту коефіцієнт тертя між роликом і столом μ більше не ігнорується. Ролик зміщують і він починає розгойдуватись. Для маленьких амплітуд коливань ковзання між роликом і столом відсутнє. Знайдіть новий період коливань T_r.

(c) *(0.4 point)* Якщо початкова амплітуда коливань (яка вимірюється як деформація пружини x) більше деякого критичного значення A_*, амплітуда коливань починає зменшуватись у часі. Виразіть A_* через k, M, r, прискорення вільного падіння g і μ.

(d) *(0.5 point)* Припускаючи, що початкова амплітуда A_0 набагато більша ніж A_*, яка максимальна кутова швидкість циліндра за час $0 \leq t \leq T/2$, де t – час, що пройшов з моменту коли ролика відпустили?

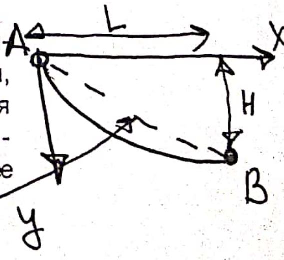
(e) *(0.5 point)* Припускаючи, що $A_0 \gg A_*$, зобразіть графічно приблизну залежність εr і a від часу; тут ε і a кутове і лінійне прискорення ролика відповідно.

2. Задача 3: Рух в B (3 бали) Частинки з масами m та зарядами q запускаються з початку координат зі швідкістю v паралельно осі x. В x = l знаходиться екран.
   (a) (0.5 point) Перша частинка запускаєтьс коли присутнє електричне поле, паралельне осі x, а магнітне поле відсутнє. Якою має бути напруженість електричного поля щоб частинка ніколи не дісталася екрану?
   (b) (0.5 point) Після того електрине поле вимикають і вмикають однорідне магнітне поле у області l > x > 0, направлене вздовж осі z, і запускається друга частинка. Знаючи, що швидкості частинки достатньо в точності для того щоб досягти екрана, намалюйте траекторію і знайдіть індукцію магнітного поля B.
   (c) (0.5 point) Нарешті вмикається електричне поле у площині x,y, тоді як B лишається незмінним. Третя частинка запускається з початку координат також паралельно осі x але, можливо, з іншою швидкістю. Частинка продовжує рух без відхилень. Крім того час, витрачений на на шлях до екрана, такий самий як і для другої частинки. Знайдіть напруженість електричного поля E.
   (d) (1.5 point) Цей пункт не пов'язаний з попередніми. Розглянемо тепер випадок слабо неоднорідного магнітного поля : кривизна магнітних ліній набагато менше кривизни траекторії руху частинки. Виявляється, що в цьому випадку так званий адіабатичний інваріант частинки у магнітному полі зберігається: магнітний потік, що опиняється всередині спіральної траекторії частинки лишається з великою ймовірністю постійним при русі вздовж траекторії.

Розглянемо дуже спрощену модель взаємодії частинок сонячного вітру зм агнітним полем Землі. Індукція магнітного поля Землі вздовж її магнітної осі може бути записана як $B(z) = B_E(R_E/z)^3$, де $B_E = 3.12 \times 10^{-5}$T T – магнітна індукція на поверхні Землі на магнітному полюсі, $R_E = 6370$ км – радіус Землі, і z вимірюється від центру Землі. Електрон з зарядом $-e = -1.60 \times 10^{-19}$ Кл і масою $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ кг наближається до землі зі швидкістю $u_0 = 500$ км/с і попадає у магнітне поле Землі точно на її осі на відстані $R_0 = 5R_E$ під кутом α до осі і починає падіння до Землі по спіралі.

Якщо кут α дуже великий, частинка буде відбита магнітним полем, що збільшується при наближенні до Землі. Знайдіть умови для α при яких частинка досягне поверхні Землі. Ви можете знехтувати гравітаційними та релятивістськими ефектами.

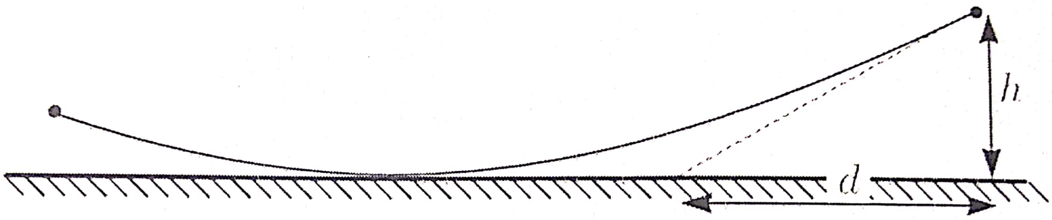
Задача 4: Брахистохрона (4.0 бали) Рассмотрим точки A и B, разделённые высотой H в вертикальном направлении и расстоянием L в горизонтальном направлении, расположенные в гравитационном поле g как показано на рисунке внизу. Точечная масса может скользить вдоль рельсы фиксированной формы без трения (включая 90°-градусные повороты) из A в B. Брахистохрона – это кривая, минимизирующая общее время пути.



(a) (0.5 point) Вычислите общее время пути для траектории с "максимальной скоростью" и "кратчайшего пути". Найдите отношение $\frac{L}{H}$, для которого они равны.

(b) (0.5 point) Согласно принципу Ферма, свет путешествует из одной точки в другую по самой быстрой траектории. Предположим, что в некоторой среде свет может перемещаться из A в B по брахистохроне, изображённой на рисунке выше. Найдите коэффициент преломления $n = n(x, y)$ для этой среды как функцию от координат x в y, если $n(L, H) = 1$.

(c) (0.5 point) Покажите, что путь луча света, путешествующего по среде с переменным показателем преломления $n(x, y) \equiv n(y)$, удовлетворяет дифференцальному уравнению $\frac{dy}{dx} = \sqrt{C \cdot n(y)^2 - 1}$, где C – константа, определяемая граничными условиями.



(d) *(1.0 point)* Полученное дифференциальное уравнение может объяснять миражи, которые возникают, когда коэффициент преломления увеличивается с высотой. Рассмотрим луч света, приходящий с неба, который дотрагивается поверхности земли ($y = 0$) и попадает в глаз наблюдателя на высоте h (для этого пункта выберем противоположное направление оси y – снизу наверх. Полагая, что коэффициент преломления меняется как $n(y) = n_0(1 + \alpha y)$, где n_0 и α – константы, найдите выражение для кажущегося расстояния d, из которого луч света как бы излучается.

(e) *(1.5 point)* Решая уравнения, выведенные в частях ii) и iii), можно показать, что брахистохрона является на самом деле участком циклоиды. Циклоида – это кривая, которую проводит фиксированная точка на ободе круглого колеса, вращающегося по прямой без скольжения. Для частного случая $\frac{L}{H} = \frac{\pi}{2}$ найдите минимальное время пути $t_{\min}$ между A и B.