9 клас. Задача 1

У дротяній моделі куба «входом» и «виходом» є вершини, розташовані по головній діагоналі (рис. 1, *а*). 1) У скільки разів зменшиться опір куба, якщо додатково впаяти в модель всі 16 діагоналей (і звичайні, й головні)? Всі проводи вкриті ізоляцією, так що в точках, де вони перетинаються, електричного контакту немає, товщина дротів підібрана так, що опори всіх відрізків однакові. 2) У скільки разів після цього може змінитися опір кола, якщо один з провідників перегорить? Розглянути всі можливі випадки.

Розв'язок

1. Опір вихідного кубу дорівнює $R_0 = \dfrac{5}{6}R$, де R — опір одного з відрізків (відома задача). Ускладнюючи схему (підключаючи додаткові елементи), ми насправді спрощуємо її. Коли усі вершини з'єднані один з одним, вони (за виключенням «входу» та «виходу») стають однаковими. Еквівалентна схема Супер Куба має вигляд, зображений на рисунку 1, *б*. Пунктиром позначені провідник, що з'єднують еквівалентні вершини (цими провідниками струм не тече).

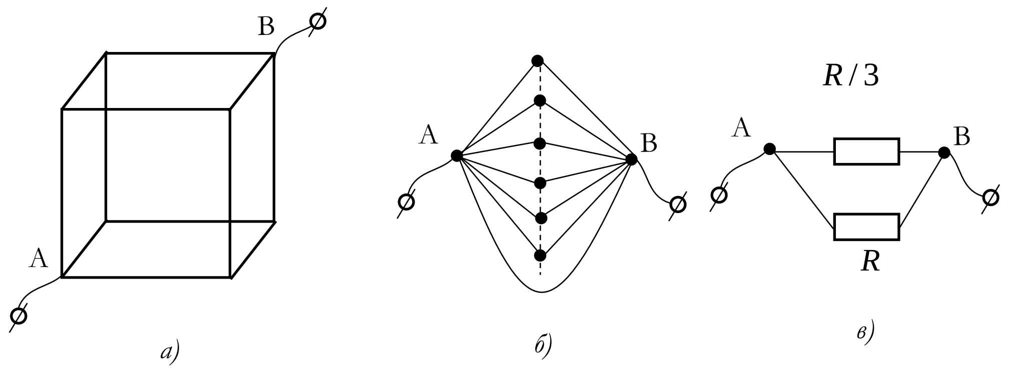


Рис. 1.

Зрозуміло, що в цій схемі можна з'єднати усі шість еквівалентних вершин (вузлів). При цьому ми отримуємо два опори, що ввімкнуті паралельно (рис. 1, *в*). Отже, загальний опір після додавання всіх діагоналей буде дорівнювати $R_1 = \dfrac{1}{4}R$. За рахунок додавання діагоналей опір зменшиться у $10/3$ разу.

2. Можливі три випадки перегоряння.

Випадок 1. Перегоряє один з дев'яти провідників, що з'єднує еквівалентні вершини. В цьому випадку опір кола не зміниться.

Випадок 2. Перегоряє провідник, що з'єднує «вхід» та «вихід» (точки A і B). У цьому випадку опір кола дорівнює $R_2 = \dfrac{1}{3}R$, тобто опір збільшується у $4/3$ разу.

Випадок 3. Перегоряє один з провідників, що з'єднує один з шести вузлів з «входом» або «виходом».

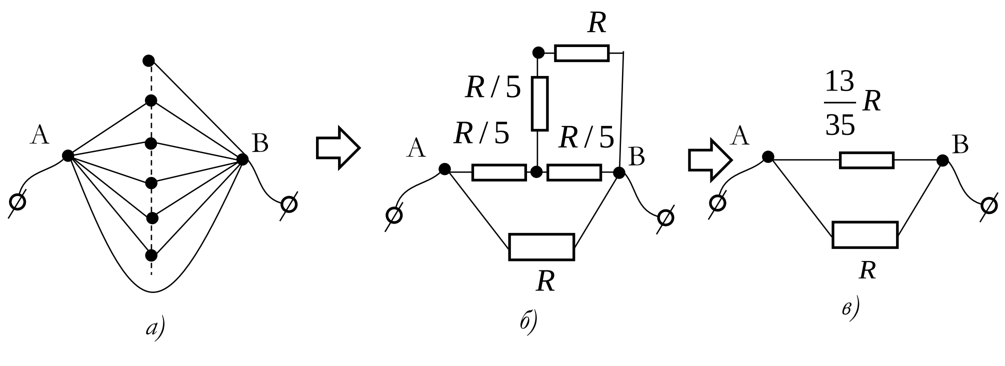


Рис. 2

Розрахунок опору в цьому випадку проілюстрований на рис. 2. Відповідь $R_2 = \dfrac{13}{48}R$. В цьому випадку опір зростає в 13/12 разу.

Відповідь: 1. Зменшиться в 10/3 разу. 2. Опір: а) залишається незмінним; б) збільшується в 4/3 разу; в) збільшиться в 13/12 разу.

9 класс. Задача 1

В проволочной модели куба «входом» и «выходом» являются вершины, расположенные по главной диагонали (рис. 1, *а*). 1) Во сколько раз уменьшится сопротивление куба, если дополнительно впаять в модель все 16 диагоналей (и обычные, и главные)? Все провода покрыты изоляцией, так что в точках их пересечения электрического контакта нет, толщина проводов подобрана так, что сопротивления всех отрезков одинаково. 2) Во сколько раз после этого может измениться сопротивление цепи, если один из проводников перегорит? Рассмотреть все возможные случаи.

Решение

1. Сопротивление исходного куба равно $R_0 = \frac{5}{6}R$, где R — сопротивление одного отрезка (известная задача). Усложняя схему (подключая дополнительные элементы), мы на самом деле упрощаем ее. Когда все вершины соединены друг с другом, они (за исключением «входа» и «выхода») становятся одинаковыми. Эквивалентная схема Супер Куба имеет вид, изображенный на рисунке 1, *б*. Пунктиром изображены проводники, которые соединяют эквивалентные вершины (по этим проводам ток не течет).

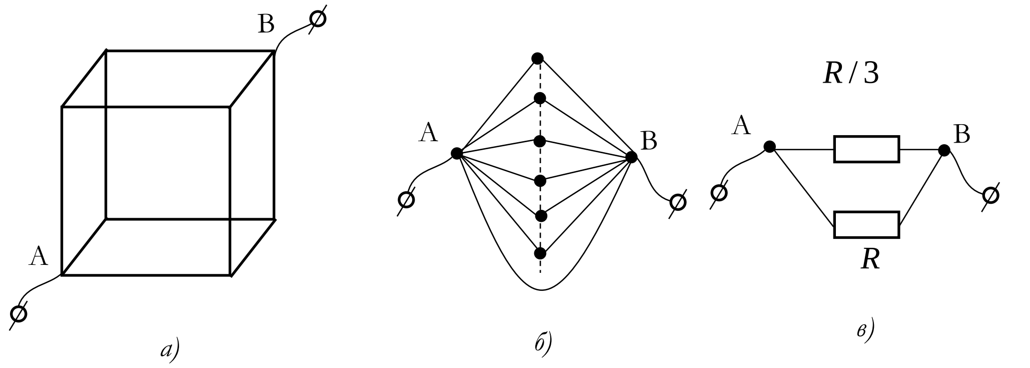


Рис. 1.

Понятно, что в этой схеме можно соединить все шесть эквивалентных вершин (узлов). При этом мы получаем два сопротивления, включенных параллельно (рис. 1, *в*). Следовательно, общее сопротивление после добавления всех диагоналей будет равным $R_1 = \frac{1}{4}R$. За счет добавления диагоналей сопротивление уменьшится в $10/3$ раза.

2. Возможны три случая перегорания.

Случай 1. Перегорает один из девяти проводников, соединяющий эквивалентные вершины. В этом случае сопротивление цепи не изменится.

Случай 2. Перегорает проводник, который соединяет «вход» и «выход» (точки А и В). В этом случае сопротивление цепи становится равным просто $R_2 = R/3$, т.е. сопротивление увеличивается в 4/3 раза.

Случай 3. Перегорает один из проводников, который соединяет один из шести узлов с «входом» или с «выходом».

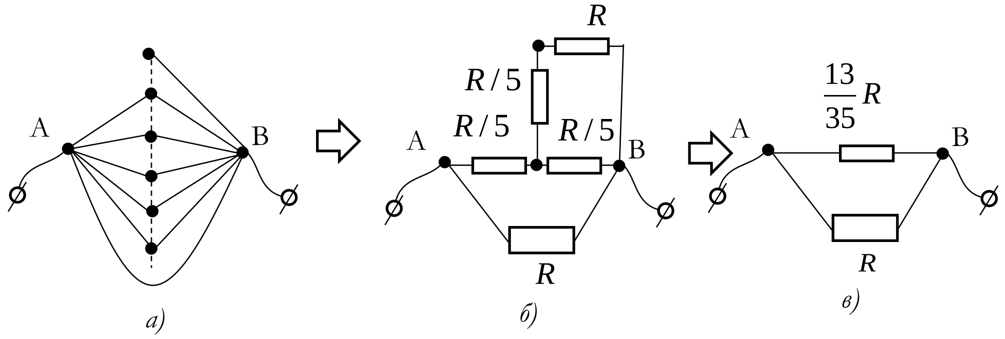


Рис. 2

Расчёт сопротивления в этом случае иллюстрирует рисунок 2. Ответ $R_2 = \frac{13}{48}R$. В этом случае сопротивление увеличивается в 13/12 раза.

Ответ: 1. Уменьшится в $10/3$ раза; 2. Сопротивление: а) остается неизменным; б) увеличивается в 4/3 раза; в) увеличивается в $13/12$ раза.

9 клас теоретичний тур 2019 р. м. Херсон
Задача 2

На рис. 2, *а* зображена конструкція, що називається «нюрнберзькі ножиці». Вона складається з легких стрижнів, які сполучені шарнірно. До нижнього вузла конструкції підвішений вантаж масою *m*. Система врівноважується трьома однаковими пружинами жорсткістю *k*, що сполучають сусідні вузли. Середня пружина лопається (рис. 2., *б*).

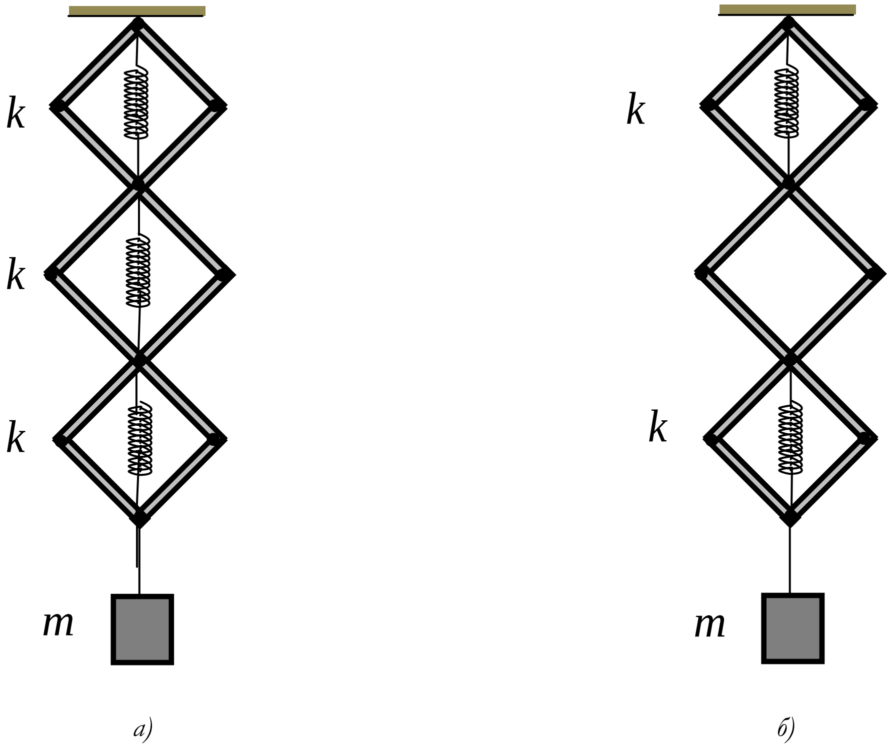


Рис. 2.

Визначити результуючу силу, яка буде діяти на вантаж відразу після розриву пружини.

Розв'язок.

1. Визначимо на скільки опуститься вантаж після прикріплення його до конструкції у випадку наявності трьох пружин.

Вісь OX спрямуємо донизу, а нуль координат відповідає початковому положенню вантажу.

1.1. При подовженні всієї конструкції на x, діагональ кожного ромба системи збільшується на $x/3$.

Отже, потенціальна енергія системи дорівнює

$$E_{p1} = -mgx + 3\frac{k}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2 = -mgx + \frac{k}{6}x^2 ,$$

Мінімум потенціальної енергії системи (положення равноваги) відповідає координаті (з розв’язування квадратичного рівняння по визначенню вершини параболи):

$$x_1 = \frac{3mg}{k}.$$

Отже, в координаті x_1 система перебуває у рівновазі до моменту лопання пружини посередині.

2. Виконаємо аналогічні розрахунки для випадку, коли працюють лише дві пружини. Для потенціальної енергії маємо

$$E_{p2} = -mgx + 2\frac{k}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2 = -mgx + \frac{k}{9}x^2 ,$$

Отже, новому положенню рівноваги відповідає відстань x_2

$$x_2 = \frac{9}{2}\frac{mg}{k}.$$

3. По відношенню до нового положення рівноваги

3.1) початкова координата тіла дорівнює $\Delta\ell = x_1 - x_2 = \frac{3}{2}\frac{mg}{k}$.

3.2) повна енергія тіла дорівнює $E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{k}{9}x^2$.

Вона така ж, як би це тіло було підвішене до пружини жорсткістю $k_{екв} = \frac{2k}{9}$. Врахувавши, що ця «еквівалентна» пружина розтягнута на $\Delta\ell = \frac{3}{2}\frac{mg}{k}$, для сили пружності отримаємо $F_1 = k_{екв}\Delta\ell = \frac{2k}{9}\frac{3mg}{2k} = \frac{mg}{3}$.

Отже, результуюча сила, що діє на вантаж зі сторони конструкції становить $F_1 = \frac{mg}{3}$.

Цілком зрозуміло, що рівнодійна сила (геометрична сума сили тяжіння і сили пружності, яка діє зі сторони «нюрнберзьких ножиць») дорівнює $F = \frac{2mg}{3}$.

Відповідь: $F_1 = \frac{mg}{3}$, $F = \frac{2mg}{3}$.

Задача №3

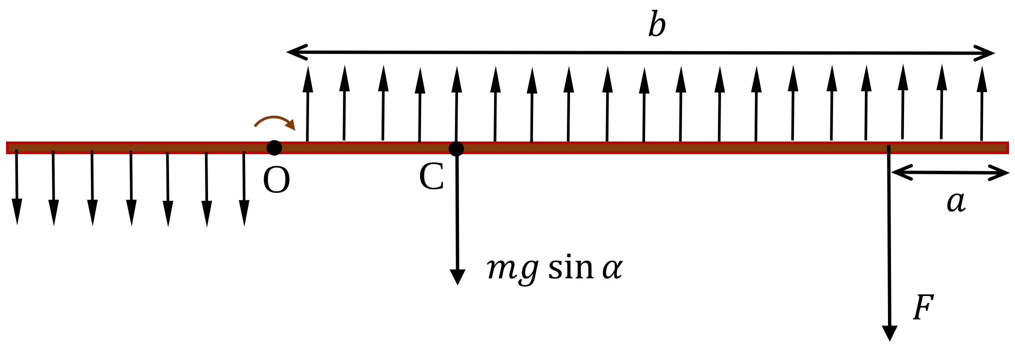
На похилій площині лежить однорідна тонка паличка з прямокутним перерізом. Паличка лежить горизонтально. Мураха прикладає силу перпендикулярно до палички та паралельно до площини схилу.

1) Знайти точку, в якій мураха повинна діяти на паличку, щоб зрушити її з мінімальною силою.

2) Знайти цю мінімальну силу.

Маса палички m, коефіцієнт тертя μ, кут нахилу площини α. Сила реакції опори на похилій площині $N = mg\cos\alpha$

Розв'язок. Інтуїтивно здається, що мураха має приложити силу до краю палички вниз. Доведемо це, припустивши, що силу F прикладено на деякій відстані a від кінця палички. Початкове зміщення палички можна уявити як поворот навколо миттєвої осі обертання. Оскільки у площині схилу на паличку діють проекція сил тяжіння $mg\sin\alpha$ і сила F перпендикулярно паличці, то з умови статичної рівноваги саме у цьому ж напрямку має діяти і сили тертя (інакше паличка матиме прискорення), що можливо тільки тоді, коли миттєва вісь обертання знаходиться на лінії палички. Максимальне значення сили тертя $\mu mg\cos\alpha$ більше за $mg\sin\alpha$, оскільки за умовою паличка лежить на поверхні. Тоді, якщо вісь обертання поза паличкою, то всі розподілені вздовж палички сили тертя діятимуть проти схилу і тоді $F = \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha$, але це внаслідок різних плечей сил можливо тільки коли силу F прикладено до центру мас. Висновок: миттєва вісь обертання проходить через паличку (точка О), сили тертя з двох сторін від неї діятимуть у різних напрямках (див. Рис.).



Сила тертя рівномірно розподілена вздовж палички. Отже, справа від точки О діє вгору вздовж схилу сила $\frac{b}{l}\mu mg\cos\alpha$, а зліва – вниз сила $\frac{l-b}{l}\mu mg\cos\alpha$, які можна вважати прикладеними до середин відповідних відрізків. Тоді

$$F = \frac{b}{l}\mu mg\cos\alpha - \frac{l-b}{l}\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha.$$

Щоб знайти як залежить відстань від краю палички до осі обертання b від відстані прикладання сили a запишемо умови моментів відносно точки, через яку проходить сила F:

$$\frac{b}{l}\mu mg\cos\alpha\left(\frac{b}{2}-a\right)=mg\sin\alpha\left(\frac{l}{2}-a\right)+\frac{l-b}{l}\mu mg\cos\alpha\left(\frac{l+b}{2}-a\right).$$

Введемо для зручності безрозмірні $x=a/l$, $y=b/l$, $k=\tan\alpha/\mu$ і перепишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}F=\mu mg\cos\alpha\,(2y-1-k),\\ y^2-2xy=(k+1)\left(\frac{1}{2}-x\right).\end{cases}$$

Виражаємо y з другого рівняння і підставляємо у перше.

$$F=\mu mg\cos\alpha\left(\sqrt{z^2+1-k^2}-z\right),$$

де $z=1+k-2x>0$. Якщо вираз для сили переписати у вигляді

$$F=\mu mg\cos\alpha\frac{1-k^2}{\sqrt{z^2+1-k^2}+z}$$

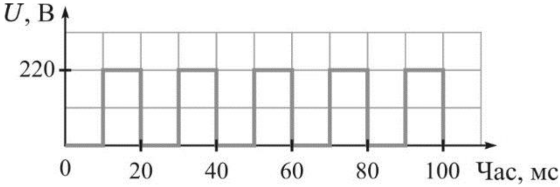
стає зрозумілим, що сила зменшується при збільшенні z, а, отже, при зменшенні x до 0. Тоді $x=0, y=\sqrt{2(1+k)}/2\,, z=1+k$

$$F_{min}=\mu mg\cos\alpha\left(\sqrt{2(1+k)}-(1+k)\right).$$

Якщо б паличка знаходилась на горизонтальній площині, $k=\tan\alpha/\mu=0$ і $F_{min}=\mu mg\left(\sqrt{2}-1\right)\approx 0{,}414\mu mg$, а відстань від краю до осі обертання була б $b=\frac{\sqrt{2}}{2}l\approx 0{,}707l$.

Задача 9_5

На електричній лампі розжарення зазначено «220 В, 60 Вт». Вольфрамова нитка розжарення лампи має діаметр 30 мкм. Уважайте, що питомий електричний опір вольфраму пропорційний його абсолютній температурі T, а втрати енергії нитки відбуваються тільки через випромінювання, при цьому потужність випромінювання з поверхні площею S становить $P=\sigma ST^4$, де коефіцієнт $\sigma=5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К^4). Довідкові дані щодо вольфраму: густина $19\cdot10^3$ кг/м^3, питома теплоємність 130 Дж/(кг·К), питомий опір $\rho_0=5{,}5\cdot10^{-8}$ Ом·м (за температури T_0=293К). Тепловим розширенням знехтувати, питому теплоємність уважайте незмінною; через те, що різні ділянки нитки затіняють одна одну, фактичне випромінювання відбувається тільки з половини поверхні. 1) Визначте довжину нитки розжарення та її робочу температуру. 2) Оцініть середню температуру нитки розжарення та потужність лампи, коли її приєднали до джерела пульсуючої напруги (графік залежності напруги від часу наведено на рис.3). 3) Оцініть різницю між максимальною та мінімальною температурами нитки розжарення, коли лампа працює від джерела пульсуючої напруги.



Розв'язання.

1) Площа поперечного перерізу нитки $s=\frac{\pi d^2}{4}$. У робочому режимі опір нитки

$$R_1=\frac{U^2}{P}=\rho\frac{L}{s}=\rho_0\frac{LT}{sT_0}.$$

Отже, $LT=\frac{sT_0U^2}{\rho_0 P}$. З іншого боку, зазначена на лампі потужність має збігатися з потужністю випромінювання з половини бокової поверхні нитки $S=\frac{\pi dL}{2}$, тобто $P=\frac{\sigma\cdot\pi dL\cdot T^4}{2}$. З отриманих рівнянь випливає, що:

$$T=\left(\frac{2\rho_0P^2}{\pi\sigma dsT_0U^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{2}{d}\left(\frac{\rho_0P^2}{\pi^2\sigma T_0U^2}\right)^{\frac{1}{3}}\cong 1950\ \text{К},$$

$$L = \pi d^3 \left(\frac{\pi^2 \sigma}{2P}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{T_0 U^2}{4\rho_0 P}\right)^{\frac{4}{3}} \cong 1{,}56 \text{ м.}$$

2) Очевидно, протягом часу 0,01 с температура T_1 нитки розжарення не встигає дуже суттєво змінитися. Ця температура залежить від *середньої* потужності струму

$$P_1 = \frac{U^2}{2R_1} = \frac{U^2 T_0 s}{2\rho_0 T_1 L}.$$

З енергетичного балансу

$$\frac{U^2 T_0 s}{2\rho_0 T_1 L} = \frac{\sigma \cdot \pi d L \cdot T_1^4}{2}$$

отримуємо

$$T_1^5 = \frac{U^2 T_0 s}{\pi \sigma d L^2 \rho_0 L} = \frac{U^2 T_0 d}{4\sigma L^2 \rho_0},$$

тобто T_1 ≅1690 К. Потужність $P_1 \cong 34{,}4$Вт.

Як і слід було очікувати, потужність лампи суттєво зменшилася.

3) Очевидно, за відсутності струму температура нитки дещо знижується, а потім знов підвищується. Оцінимо перепад температури ΔT між моментами закінчення «імпульсу» напруги (відповідає максимальній температурі) та початком наступного «імпульсу» (відповідає мінімальній температурі): $cm\Delta T = P_1 \tau$. Тут m= ρ*LS — маса нитки розжарення, ρ* - густина вольфраму 0,01 с — проміжок часу коли напруга відсутня. Звідси дістанемо

$$\Delta T = \frac{4P_1 \tau}{\pi c \rho^* d^2 L} \cong 110 \text{ К.}$$

Отже, можна вважати, що відхилення температури від середньої сягає ±55 К, що дійсно значно менше від отриманого значення температури. Проте таких відхилень досить, щоб виникало неприємне та стомлююче «підморгування» лампи.

Задача №4 . Швидкість течії річки шириною $l = 100$ м лінійно зростає від нульового значення біля берега до максимального $u = 2$ км/год посередині річки. Швидкість човна відносно води $\upsilon = 4$ км/год, а курс він тримає перпендикулярно до берега. На яку відстань течія знесе човен під час переправи?

Розв'язання:

Розглянемо рух човна відносно землі, розклавши його на взаємно перпендикулярні складові: рух вздовж осі X паралельно до берега та рух вздовж осі Y перпендикулярно до берега /рис. 1/.

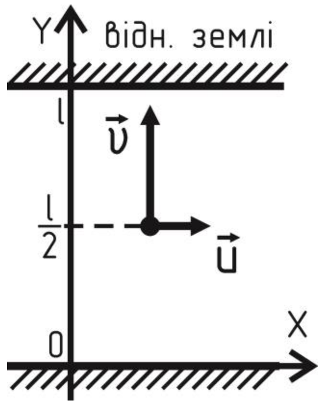


Рис. 1

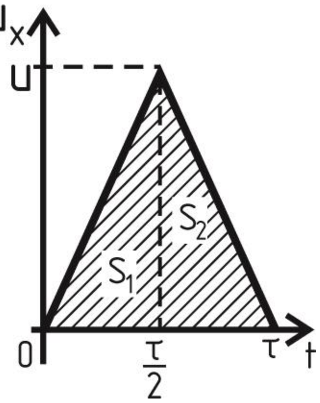


Рис.2

Вздовж осі Y човен рухається рівномірно прямолінійно зі швидкістю υ, бо швидкість течії має нульову проекцію на цю вісь і течія не впливає на рух човна у цьому напрямі:

$y(t) = \upsilon t$, (1) з-н руху човна по осі Y,

$\tau = \frac{l}{\upsilon}$. (2) час переправи човна через річку.

Вздовж осі X човен рухається прямолінійно, але нерівномірно, бо паралельно до берега його рух обумовлений лише течією ріки, а її швидкість лінійно залежить від координати човна по осі Y. Рівняння (1) відображає лінійну залежність координати човна по осі Y від часу, отже, швидкість човна по осі X також лінійно залежить від часу руху /рис. 2/. Використовуючи геометричний зміст шляху тіла, знаходимо відстань, на яку течія знесе човен під час переправи, як площу двох прямокутних трикутників

$$s = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\frac{u\tau}{2} + \frac{1}{2}\frac{u\tau}{2} = \frac{u\tau}{2} = \frac{ul}{2\upsilon} = \frac{2 \cdot 100}{2 \cdot 4} = 25\,\text{м}$$