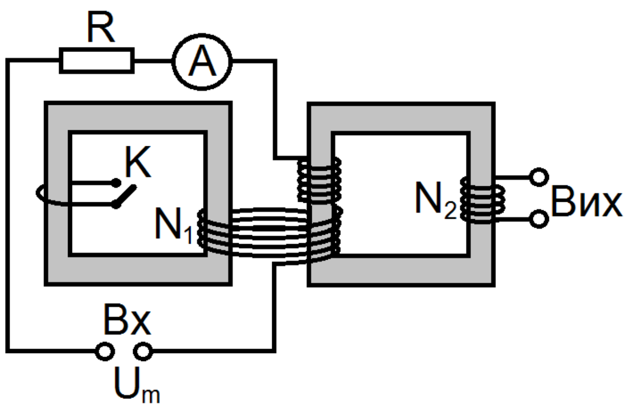
Задача 1 (11 клас)

Два однакових осердя виконані з матеріалу, який має велику магнітну проникність. Первинна обмотка має N витків, частина яких охоплює тільки одне осердя, а решта – обидва осердя (рис.1). Коло цієї обмотки містить активний опір R і живиться від джерела змінної напруги з амплітудою U_m. Коли ключ К (див. окремий виток на рис.1) розімкнутий, амплітуда струму в колі складає I_1, а коли замкнений – I_2. Знайдіть кількість витків N_1, що охоплюють обидва осердя. Знайдіть амплітуду напруги на вторинній обмотці з N_2 витками у двох випадках: коли ключ К розімкнений та коли він замкнений. У розв'язку не враховувати магнітні втрати та знехтувати активним опором усіх дротів.



Розв'язок

Нехай індуктивність одного витка, намотаного на одне осердя, дорівнює L. Індуктивність одного витка, намотаного на два осердя при розімкненому ключі К складає відповідно $2L$ (нагадаємо, що індуктивність – це коефіцієнт пропорційності між струмом і створеним ним магнітним потоком, $\Phi = LI$), тому повна індуктивність вхідного кола при розімкненому ключі К складає $(N - N_1)\cdot L + N_1 \cdot 2L = (N + N_1)\cdot L$. Якщо ключ К замкнений, завдяки явищу електромагнітної індукції ідеальний замкнений виток (за умовою він не має активного опору подібно до надпровідників) повністю скомпенсує будь-які спроби змінити магнітний потік в першому осерді, тобто перетворює це осердя на немагнітне середовище. Отже, при замкненому ключі, індуктивність кожного витку визначається лише одним осердям і складає L, а індуктивність первинної обмотки – $L \cdot N$.

Тоді можна записати систему двох рівнянь для амплітуд струмів при розімкненому та замкненому ключі К:

$$I_1 = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L\left(N + N_1\right)\right]^2}}, \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L N\right)^2}}. \quad (2)$$

Розв'язавши систему (1) та (2), знаходимо: $N_1 = N\left[\sqrt{\frac{\left(U_m/I_1\right)^2 - R^2}{\left(U_m/I_2\right)^2 - R^2}} - 1\right].$

Для ідеального трансформатора

$$U_{вих} = \frac{N_2}{N} U_L, \quad (3)$$

де U_L- падіння напруги на індуктивному опорі $X_L = \sqrt{\left(\frac{U_m}{I_2}\right)^2 - R^2}$ первинної обмотки.

В результаті, амплітуди напруги (3) на вторинній обмотці при розімкненому та замкненому ключі:

$$U_{m\_вих\_1,2} = \frac{N_2}{N} X_L I_{1,2} = I_{1,2} \cdot \frac{N_2}{N} \cdot \sqrt{\left(\frac{U_m}{I_2}\right)^2 - R^2}.$$

11 клас 2 задача.

Для маневрування космічної станції "Lunar Orbital Platform-Gateway", яку планується збудувати у білямісячному просторі у 20-х роках, на цій станції буде розміщено іонні ракетні двигуни, які забезпечуватимуть силу тяги 1.77 Н. Як робоче тіло у цих двигунах планується застосувати ксенон (маса атома складає приблизно $2.2*10^{-25}$ кг), однозарядні іони якого прискорюватимуться напругою у 140 В. Оцініть час, через який іони перестануть виходити з двигуна за рахунок зарядження станції, якщо вважати, що заходів для її електричної нейтралізації не застосовуватиметься. Для оцінок вважати, що характерний розмір станції складає 10 м. Елементарний заряд $1.6*10^{-19}$ Кл, електрична стала $8.85*10^{-12}$ Ф/м.

Розвя'зок

Виходячи з умови задачі про те, що потрібно <u>**ОЦІНИТИ**</u> час, будемо шукати модель явища за допомогою якою ми зможемо це зробити.

1. Сила тяги забезпечується за рахунок реактивної тяги, яка пов’язана з імпульсом, який надають іони ксенона, яки викидаються з сопла іонного двигуна з будь-якою швидкістю.
2. Для оцінки будемо вважати F сталою на вказаному проміжку часу.
3. Сила тяги F буде рівною зміні імпульсу за одиницю часу, тобто імпульсові іона P_i, що викидається з двигуна назовні, помноженому на кількість іонів N, яка викидатиметься за одиницю часу.
$$F = P_i N$$
4. Кількість іонів, яки викидаються з сопла буде залежить від потенціалу оболонки космічної станції, яку будемо вважати металевою кулею.
5. Виходячи з закону збереження електричного заряду, якщо космічну оболонку залишають позитивно заряджені частинки, а оболонка не заземлена, то вона буде заряджатися негативним зарядом.
6. Потенціал цього заряду буде зменшувати швидкість вилітаючих позитивних зарядів до нуля.
7. Імпульс іона відповідатиме кінетичній енергії, яку цей іон набуде після прискорення напругою U. Оскільки іони однозарядні, їхній електричний заряд дорівнюватиме елементарному (e). Маємо
$$\frac{P_i^2}{2M_i} = eU \text{ , тобто } P_i = \sqrt{2eM_iU}$$

де M_i – маса атома ксенону.

Електричний струм, що витікає з двигуна, дорівнюватиме зарядові одного іона, помноженому на кількість іонів N, яка викидатиметься за одиницю часу:
$$I = eN$$
Підставляємо сюди N
$$N = \frac{F}{P_i} = \frac{F}{\sqrt{2eM_iU}},$$
звідки
$$I = e\frac{F}{\sqrt{2eM_iU}} = F\sqrt{\frac{e}{2M_iU}}$$
Електричний заряд, який накопичуватиметься на станції за час t, дорівнюватиме:
$$Q = It = tF\sqrt{\frac{e}{2M_iU}}$$
Іони припинять покидати станцію, коли електричний потенціал на її поверхні $\varphi \geq U$. Потенціал металевої сферичної оболонки:
$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0},$$
де R_0 - характерний розмір станції. Звідси
$$Q = 4\pi\varepsilon_0 R_0 U .$$
Прирівнюючи два вирази для заряду станції, отримаємо:

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 R_0 U = tF\sqrt{\frac{e}{2M_i U}}\ .$$

Звідси час роботи двигунів:

$$t = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_0 U}{F}\sqrt{\frac{2M_i U}{e}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_0 U^{\frac{3}{2}}}{F}\sqrt{\frac{2M_i}{e}}$$

Підставивши числові значення, отримаємо $t \approx 1.7*10^{-9}c = 1.7нс$. Це верхня гранична межа часу, яка дуже маленька.

Це свідчить про те, що заходи з електричної нейтралізації при застосуванні іонних двигунів слід застосовувати обов'язково.

Задача №3 11 клас

Два точкових спостерігача прискорено рухаються у деякій інерційній системі відліку K вздовж прямої OX. Перший спостерігач, у супутній йому інерційній системі відліку K_1, має прискорення a_1, а другий – прискорення a_2 у системі відліку K_2, що є супутньою для другого спостерігача. У момент часу $t=0$ спостерігачі у системі відліку K мають нульову швидкість та знаходяться у точках $x_1(0)=c^2/a_1$ та $x_2(0)=c^2/a_2$ відповідно, де c – швидкість світла. Яке прискорення, в залежності від власних швидкостей, мають спостерігачі відносно K? Знайдіть як координати $x_1(t)$ та $x_2(t)$ залежать від часу в системі відліку K. Нехай $a_1>a_2$, перший спостерігач відправляє промінь світла в сторону другого, як тільки другий спостерігач приймає промінь, він миттєво відправляє його в протилежну сторону. Перший спостерігач за власним годинником визначає час τ, що пройшов між моментами випромінювання та реєстрацією ним світла. Надалі перший спостерігач визначає відстань L до другого як $L=c\tau/2$. Яку відстань виміряє перший спостерігач?

Розв'язок задачі №3 11 класу:

Очевидно, що прискорення першого спостерігача у системі відліку K не дорівнює a_1 – прискоренню у супутній системі відліку, хоча б тому що спостерігач зміг би досягти швидкостей більших за швидкість світла.

Запишемо вираз для приросту швидкості у супутній, для першого спостерігача, системі відліку K_1 (так як швидкість в цій системі нескінченно мала, то усіма релятивістськими ефектами всередині системи можна знехтувати):

$$dv_1' = a_1 dt'.$$

Перейдемо до системи відліку K. Для цього знайдемо приріст швидкості в системі K, який відповідає dv_1'. Для цього запишемо формулу додавання швидкостей:

$$v_1 + dv_1 = \frac{v_1 + dv_1'}{1 + \frac{v_1 dv_1'}{c^2}}.$$

Нехтуючи нескінченно малими другого і вищих порядків, отримаємо:

$$dv_1 = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) dv_1' = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) a_1 dt' = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a_1 dt.$$

У останньому переході ми використали формулу для релятивістського сповільнення часу

$$dt' = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Прискорення відносно нерухомої системи відліку

$$\frac{dv_1}{dt} = a_1 \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

можна було отримати, продиференціювавши закон додавання швидкостей за часом. Аналогічний вигляд має формула для другого прискорення.

Проінтегруємо отриманий вираз, розділивши змінні:

$$\int_0^{v_1} \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} dv_1 = \int_0^t a_1 dt \;\; \rightarrow \;\; \frac{v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = a_1 t \;\; \rightarrow \;\; v_1 = \frac{a_1 t}{\sqrt{1 + \frac{a_1^2 t^2}{c^2}}}.$$

Проінтегруємо ще раз, щоб отримати $x_1(t)$:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{a_1 t}{\sqrt{1 + \frac{a_1^2 t^2}{c^2}}} \;\; \rightarrow \;\; \int_{x_1(0)}^{x_1} dx_1 = \int_0^t \frac{a_1 t\, dt}{\sqrt{1 + \frac{a_1^2 t^2}{c^2}}} \;\; \rightarrow \;\; x_1 = \frac{c^2}{a_1}\sqrt{1 + \frac{a_1^2 t^2}{c^2}}.$$

Таким чином, маємо:

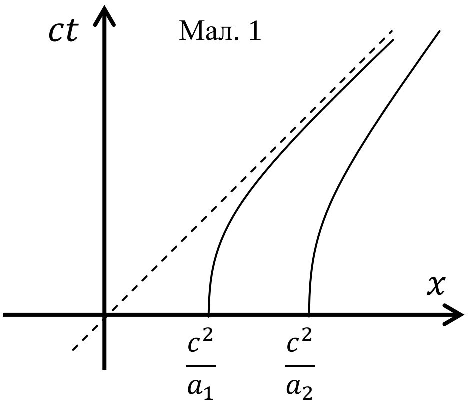
$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a_1, \qquad x_1 = \frac{c^2}{a_1}\sqrt{1 + \frac{a_1^2 t^2}{c^2}}.$$

Для другого спостерігача виразу будуть аналогічні:

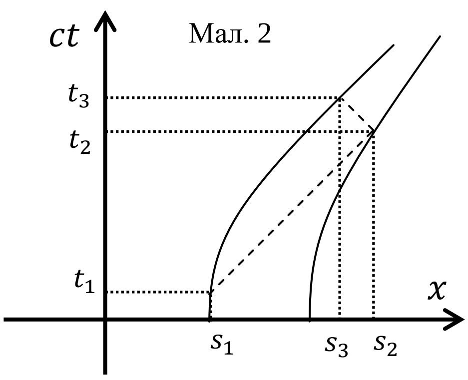
$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a_2, \qquad x_2 = \frac{c^2}{a_2}\sqrt{1 + \frac{a_2^2 t^2}{c^2}}.$$

Тепер розглянемо рух променя світла між спостерігачами у системі відліку K.

Для наочності, наприклад, можна побудувати залежність координати від часу (просторово – часову діаграму). Як можна побачити з формул для $x_1(t)$ та $x_2(t)$, отримані нами криві є гіперболами (мал. 1, зображені однорідними лініями). Пунктирними лініями зображені траєкторії променів світла (мал. 2).

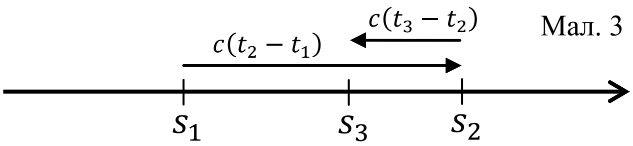


Мал. 1



Мал. 2

Нехай у системі відліку K промінь світла був випромінений першим спостерігачем у момент часу t_1 у точці з координатою $s_1 = x_1(t_1)$, прийнятий другим спостерігачем та відбитий у протилежному напрямку в момент часу t_2 в точці $s_2 = x_2(t_2)$, знов прийнятий першим спостерігачем у момент часу t_3 в точці $s_3 = x_1(t_3)$ (дивись мал. 2 або 3).



Мал. 3

Спочатку знайдемо залежність між проміжком часу τ за власним годинником першого спостерігача та моментами часу t_1 і t_3 у системі K. Для цього використаємо формулу для релятивістського сповільнення часу:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\,dt \quad \rightarrow \quad \tau = \int_{t_1}^{t_3} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\,dt = \int_{t_1}^{t_3} \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{a_1^2 t^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{c}{a_1} \ln \frac{a_1 t_3 + \sqrt{c^2 + a_1^2 t_3^2}}{a_1 t_1 + \sqrt{c^2 + a_1^2 t_1^2}}. \qquad (1)$$

Тепер, для наочності, використаємо малюнок 2 (або 3) та знайдемо кінематичні співвідношення:

$$s_2 - s_3 = c(t_3 - t_2),$$

$$s_2 - s_1 = c(t_2 - t_1).$$

З першого рівняння отримаємо:

$$\frac{c}{a_2}\sqrt{1 + \frac{a_2^2 t_2^2}{c^2}} + t_2 = t_3 + \frac{c}{a_1}\sqrt{1 + \frac{a_1^2 t_3^2}{c^2}}. \qquad (2)$$

Зазначимо, що останній вираз співпадає з чисельником логарифма. Аналогічно, отримаємо

$$\frac{c^2}{a_2}\sqrt{1 + \frac{a_2^2 t_2^2}{c^2}} - \frac{c^2}{a_1}\sqrt{1 + \frac{a_1^2 t_1^2}{c^2}} = \mathrm{c}(t_2 - t_1).$$

Або

$$\frac{c}{a_2}\sqrt{1 + \frac{a_2^2 t_2^2}{c^2}} - t_2 = \frac{c}{a_1}\sqrt{1 + \frac{a_1^2 t_1^2}{c^2}} - t_1.$$

Щоб отримати знаменник логарифма, помножимо і розділимо ліву і праву частину рівності на відповідні спряжені вирази:

$$t_1 + \frac{c}{a_1}\sqrt{1 + \frac{a_1^2 t_1^2}{c^2}} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \left(\frac{c}{a_2}\sqrt{1 + \frac{a_2^2 t_2^2}{c^2}} + t_2\right). \qquad (3)$$

Підставивши вирази 2 і 3 у формулу 1 для проміжку часу за власним годинником першого спостерігача, отримаємо остаточний вираз для τ:

$$\tau = \frac{c}{a_1}\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = 2\frac{c}{a_1}\ln\frac{a_1}{a_2}.$$

Можна бачити цікавий факт: відстань, виміряна першим спостерігачем до другого, не залежить від часу, а залежить тільки від прискорень спостерігачів. Це виконується лише за умови запропонованих початкових умов.

$$L = \frac{c^2}{a_1}\ln\frac{a_1}{a_2}.$$

Таку несподівану, на перший погляд, відповідь можна пояснити у системі відліку K тим, що на виміри відстані впливають декілька конкуруючих ефектів, які врівноважують один одного при правильно підібраних початкових умовах. Перший ефект: скорочення різниці координат спостерігачів з часом, так як швидкість першого завжди більше швидкості другого. Другий ефект: при великих швидкостях спостерігачів, світло витрачає все більший і більший час у системі K, щоб досягти другого спостерігача. Третій ефект: для спостерігачів власні часи τ_1 і τ_2 течуть повільніше ніж час t зі збільшенням швидкостей спостерігачів у системі відліку K.

Таким чином, можна говорити про коректний спосіб визначення відстані «радарним способом», так як отримана нами відповідь не залежить від часу і точки простору, у якій першим спостерігачем було випромінене світло. Це означає, що для всіх систем відліку, що рухаються з постійною швидкістю вздовж осі ОХ відносно системи К, виміряна відстань буде однаковою, тобто, інваріантом.

Задача.Для заселення планети радіусом R_0, що містить у надрах гамма-радіоактивний ізотоп, її поверхню вкрили еластичною та непроникною для радіації оболонкою, коефіцієнт поверхневого натягу якої σ. Через деякий час t_0 після цього жителі встановили, що оболонка відстала від твердої поверхні і роздувається під дією тиску випромінювання зсередини, який пов'язаний з густиною енергії випроміню-ванняформулою $p = \frac{1}{3}\epsilon$. Вважаючи, що надрапланети є прозорими для гамма-променів, знайдіть

(1) час t_0, якщо відомі маса планети M_0, масова частка радіоактивного ізотопу η, йогомасове число Z, енергіяE_0, що виділяється під час одного розпаду у вигляді гамма-променів.

(2) залежність радіусу від часута час існування оболонки, якщо вона руйнується при зростанні її площі поверхні вдвічі. В подальшому вважайте t_0 відомимі набагато меншим за період напіврозпаду ізотопу.

Одразу після початку роздування оболонки в момент часу t_0 почалася термінова евакуація жителів з планети. Один з жителів опинився в точці планети, діаметрально протилежній до космодрому. В його розпорядженні є мотоцикл, двигун якого здатний розвивати постійну швидкістьv.

(3) За якого значення v він встигне дістатися космодрому до руйнування оболонки?

(4) Наскільки відстане за час руху годинник мотоцикліста, побудований за принципом математичного маятника?

(5) Вкажіть 5 ознак, за якими жителі планети можутьвиявити розширенняоболонки?

Гамма-радіоактивним називають ізотоп, серед продуктів розпаду якого є фотони високої енергії.

Розв'язання:

1) Повна кількість радіоактивних ядер у надрах планети у початковий момент становить

$$N_0 = \frac{\eta\, M_0}{A m_a}, \tag{1}$$

де $m_a = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$кг – атомна одиниця маси. Тоді, за законом радіоактивного розпаду, кількість ядер, що розпалися від початку до моменту часу t, дорівнює

$$\Delta N(t) = N_0\left(1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}\right). \tag{2}$$

За умовою задачі, в момент часу t_0 гамма-випромінювання в об'ємі планети чинить тиск, який зрівноважує лапласівський тиск з боку оболонки:

$$p_{rad} = \frac{1}{3}\epsilon_{rad} = \frac{1}{3}\frac{\Delta N(t_0) E_0}{\frac{4}{3}\pi\, R_0^3} = p_L = \frac{2\sigma}{R_0}. \tag{3}$$

*Примітка.*У задачі вважається, що матеріал оболонки дуже швидко виходить з області пружних деформацій і майже увесь час зазнає незворотних непружних розтягів (т.зв. текучих деформацій), а тому може бути ефективно охарактеризований певним коефіцієнтом поверхневого натягу σ. При цьому його можна приписати як оболонці в цілому, так і кожній з двох її поверхонь (за аналогією з мильною бульбашкою). У першому випадку слід обчислювати лапласівський тиск, як у формулі (3), у другому випадку треба писати $p_L = \frac{4\sigma}{R_0}$. Головне розуміти, який конкретно коефіцієнт мається на увазі.

Тоді з рівняння (3) знайдемо шуканий момент часу t_0:

$$t_0 = -T_{1/2}\log_2\left(1 - \frac{8\pi R_0^2\sigma}{E_0 N_0}\right) = -T_{1/2}\log_2\left(1 - \frac{8\pi Z m_a R_0^2 \sigma}{\eta E_0 M_0}\right). \tag{4}$$

2)Запишемо аналог рівняння (3) для довільного моменту часу $t > t_0$, і поділимо його почленно на рівність (3):

$$\frac{1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}}{1 - 2^{-\frac{t_0}{T_{1/2}}}} = \left(\frac{R(t)}{R_0}\right)^2. \tag{5}$$

Беручи до уваги те, що часt_0 і час існування оболонки (який, як ми побачимо, за порядком величини порівнянний з t_0) набагато менші від періоду напіврозпаду ізотопу, показникову функцію можна наближено розкласти при малому значенні аргументу:

$$2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} = e^{-\frac{t}{T_{1/2}}\ln 2} \approx 1 - \frac{t}{T_{1/2}}\ln 2. \qquad (6)$$

Тоді ліва частина рівності (3) значно спроститься і закон зміни радіуса оболонки буде наступним:

$$R(t) = R_0\sqrt{t/t_0}, \quad t \geq t_0. \qquad (7)$$

Час руйнування t_1 знайдемо з умови того, що площа оболонки зросла вдвічі:

$$4\pi R^2(t_1) = 4\pi R_0^2 \frac{t_1}{t_0} = 2 \cdot 4\pi R_0^2, \quad \Rightarrow \quad t_1 = 2t_0. \qquad (8)$$

3) Відносно центра планети мотоцикліст перебуває на кутовій відстані $\Delta\varphi = \pi$ від космодрому. Її треба подолати за час, поки оболонка ще не зруйнувалася. За нескінченно малий час dt мотоцикліст пройде лінійну відстань $dl = v\,dt$, а відповідна кутова відстань становитиме

$$d\varphi = \frac{dl}{R(t)} = \frac{v\,dt}{R(t)}. \qquad (9)$$

Проінтегруємо обидві частини рівності від t_0 до деякого моменту часу t, знайдемо пройдену кутову відстань:

$$\Delta\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{v\,dt'}{R(t')} = \int_{t_0}^{t} \frac{v\sqrt{t_0}\,dt'}{R_0\sqrt{t'}} = 2\frac{vt_0}{R_0}\left(\sqrt{\frac{t}{t_0}} - 1\right). \qquad (10)$$

Мотоцикліст приїде до космодрому у момент часу, коли пройдена кутова відстань становить $\Delta\varphi = \pi$. Звідси знайдемо повний час руху:

$$t_k = t_0\left(1 + \frac{\pi R_0}{2vt_0}\right)^2. \qquad (11)$$

Мінімальну швидкість, необхідну для вчасної евакуації, знайдемо з умови того, що $t_k = t_1 = 2t_0$:

$$v_{min} = \frac{\pi}{2(\sqrt{2} - 1)}\frac{R_0}{t_0}. \qquad (12)$$

Мінімальну швидкість можна знайти безпосередньо інтегруючи рівність (9) від t_0 до $t_1 = 2t_0$ і вимагаючи, щоб повна пройдена кутова відстань була не меншою, ніж π. Але так чи інакше, вираз (11) для повного часу руху потрібен буде у подальших пунктах, тому він має бути знайдений в роботі. Бали за отримання виразу (11) враховуються при оцінюванні третього пункту задачі.

4) Власна система відліку мотоцикліста не є інерціальною, адже планета розширюється, а мотоцикліст здійснює обертальний рух відносно її центру. В неінерціальних системах відліку окрім реальних активних сил, які мають фізичну причину (гравітація, електромагнітні поля, сили реакції і тертя і т.д.), присутні ще й сили інерції. Вони є фіктивними, бо не мають фізичної причини і носія, а вводяться лише для того, щоб можна було записати другий закон Ньютона у такій же формі, як і в інерціальних системах відліку, тобто кожній зміні стану руху приписати дію певної сили.

Якби розширення не було (див. Рис. 1), то відцентрова сила інерції $\vec{F}_I$була б спрямована від центру планети (точки O), точно по радіусу кола. Вона відігравала б роль лише в балансі сил у нормальному напрямку: визначала б величину сили нормальної реакції$\vec{N}$, але не впливала б на дотичний рух. Тому за відсутності розширення рівномірний рух поверхнею планети не потребує сили тяги (за умови, що силами опору знехтували).

Якщо ж планета розширюється, то траєкторія руху мотоцикла вже не є колом, оскільки його відстань до центру постійно зростає (див. Рис. 2). Тому відцентрова сила інерції$\vec{F}_I$ напрямлена не від центру планети (точки O), а від центру кривини траєкторії (точки C), що зміщений від центру планети вперед по руху мотоцикла. Як наслідок, існує її проекція, напрямлена проти руху мотоцикла, яка мусить бути скомпенсована силою тяги, щоб забезпечити рівномірний рух. Інша компонента, напрямлена перпендикулярно до поверхні планети, разом із силою тяжіння$\vec{F}_g$ компенсується силою нормальної реакції$\vec{N}$.Окрім відцентрової сили інерції$\vec{F}_I$, є ще сила пов'язана з тим, що швидкість мотоцикліста u змінюється за абсолютним значенням, т.зв. поступальна сила інерції $\vec{F}_п$ (див. Рис.2). Ця сила також має проекції і в нормальному, і в тангенціальному напрямках (відносно поверхні планети).

Тангенціальна компонента компенсується силою тяги двигуна, а нормальна – силою нормальної реакції.

Обчислення сили тяги може бути здійснене шкільними методами лише у випадку, коли швидкість розширення планети набагато менша за швидкість руху тіла. Тоді кут відхилення відцентрової сили інерції від радіального напрямку малий і це дозволяє не знаходити точного рівняння траєкторії і положення центру її кривини. Також у цьому наближенні можна знехтувати поступальною силою інерції.

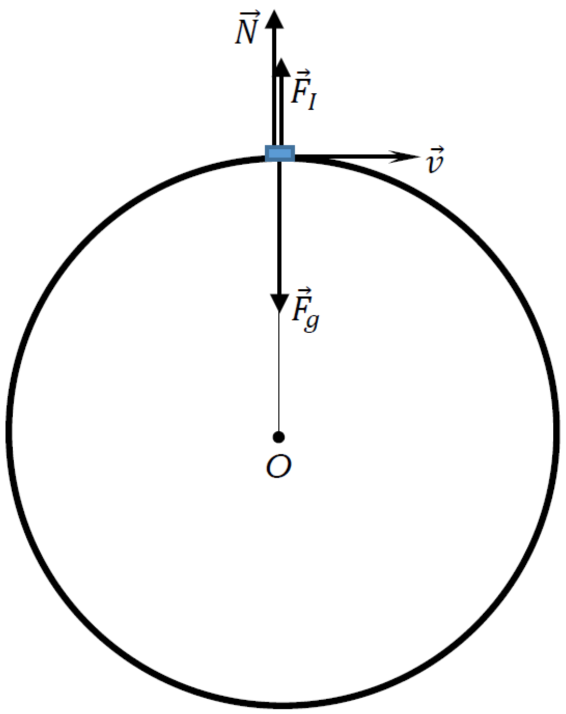


Рис. 1.

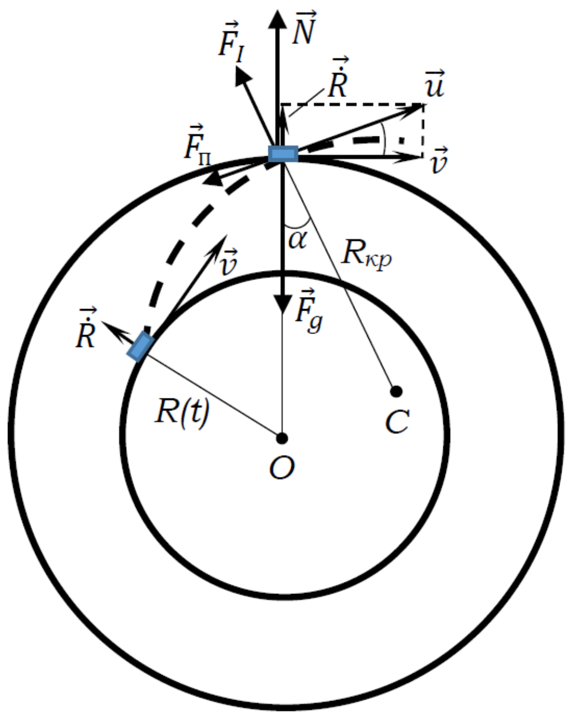


Рис. 2.

Відцентрова сила інерції має вигляд:

$$F_I = \frac{mu^2}{R_{\text{кр}}(t)} \approx \frac{mv^2}{R(t)}, \tag{13}$$

де в силу обговореного вище наближення радіус кривини траєкторії наближено можна вважати поточним радіусом планети. Тангенс малого кута відхилення напрямку сили інерції від радіуса можна знайти з подібного трикутника швидкостей:

$$\text{tg}\alpha \approx \alpha \approx \frac{\dot{R}(t)}{v}. \tag{14}$$

Тоді сила тяги, яка за модулем дорівнює проекції сили інерції проти напрямку руху, має вигляд:

$$F(t) \approx F_I \cdot \alpha = mv\frac{\dot{R}}{R}. \tag{15}$$

Незважаючи на всі наближення в розрахунках, кінцева відповідь (15) для сили тяги виявляється справедливою в загальному випадку, для довільної швидкості розширення (це може бути показано із закону зміни моменту імпульсу мотоцикла відносно центру планети або враховуючи обидві сили інерції і обчислюючи точно радіус кривини траєкторії). Але знаходження сили тяги є поза межами умови задачі, тому ці обчислення не обов’язкові. Бажано хоча б на якісному рівні зрозуміти, що рівномірний рух планетою, що розширюється, вимагає прикладання сили.

Тепер зупинимося на нормальній компоненті сили інерції. Вважаючи розширення набагато повільнішим за швидкість руху мотоцикліста, $\dot{R} \ll v$, можна вважати кут відхилення центру кривини траєкторії від центру планети малим і використати, що $\cos\alpha \approx 1$. Тоді складова сили інерції, перпендикулярна до поверхні, має вигляд:

$$F_{In} \approx \frac{mv^2}{R(t)} = \frac{mv^2\sqrt{t_0}}{R_0\sqrt{t}}. \tag{16}$$

Ця сила ефективно змінить значення прискорення вільного падіння. Окрім того, прискорення вільного падіння зменшиться ще й за рахунок зростання радіуса планети. Якщо взяти до уваги обидва ці ефекти, то отримаємо наступне значення прискорення вільного падіння, що відчуває мотоцикліст:

$$g_{\text{eff}}(t) = \frac{GM_0}{R^2(t)} - \frac{F_{In}}{m} = g_0\frac{t_0}{t} - \frac{v^2\sqrt{t_0}}{R_0\sqrt{t}}, \tag{17}$$

де $g_0 = \frac{GM_0}{R_0^2}$ – прискорення вільного падіння на планеті початкового радіусу і для нерухомого спостерігача.

Нехай тепер мотоцикліст використовує старомодний годинник на основі математичного маятника. Тобто час за його годинником пропорційний кількості коливань математичного маятника n, а коефіцієнт пропорційності– це період коливань маятника на звичайній планеті (оскільки годинник був відкалібрований ще до розширення):

$$\tau = T_0\, n, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}. \tag{18}$$

Насправді, прискорення вільного падіння зменшується за законом (17), тому період коливань постійно зростає:

$$T(t) = 2\pi\left(\frac{l}{g_{\text{eff}}(t)}\right)^{1/2} = \frac{T_0}{\left(\frac{t_0}{t} - \frac{v^2}{g_0R_0}\frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}}\right)^{1/2}}. \tag{19}$$

Тому за фізичний проміжок часу dt маятник зробить кількість коливань

$$dn = \frac{dt}{T(t)}. \tag{20}$$

Таким чином, проміжок власного часу, який мине, становить:

$$d\tau = T_0 dn = \frac{T_0}{T(t)}dt = \left(\frac{t_0}{t} - \frac{v^2}{g_0R_0}\frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}}\right)^{1/2} dt. \tag{21}$$

Щоб дізнатися, який час збіг по власному годиннику мотоцикліста, проінтегруємо рівняння (21) в межах від t_0 до t_k, заданого виразом (11):

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \int_{t_0}^{t_k}\left(\frac{t_0}{t} - \frac{v^2}{g_0R_0}\frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}}\right)^{1/2} dt = \left|\frac{t}{t_0} = x^2,\ dt = 2t_0\, xdx\right| = \\ &= 2t_0\int_1^{1+\frac{\pi R_0}{2vt_0}}\left(1 - \frac{v^2}{g_0R_0}x\right)^{1/2} dx \\ &= \frac{4t_0}{3}\frac{g_0R_0}{v^2}\left[\left(1 - \frac{v^2}{g_0R_0}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{v^2}{g_0R_0} - \frac{\pi v}{2g_0t_0}\right)^{3/2}\right].\end{aligned} \tag{22}$$

Якщо вважати вплив сил інерції нехтовно малим (це можна робити, коли швидкість мотоцикла v значно менша за першу космічну швидкість для планети $v_I = \sqrt{g_0R_0}$), то слід знехтувати під інтегралом доданком з v^2. Тоді вираз значно спроститься і ми матимемо для проміжку власного часу наступний вираз:

$$\Delta\tau = \int_{t_0}^{t_k}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/2} dt = 2t_0\int_1^{1+\frac{\pi R_0}{2vt_0}} dx = \frac{\pi R_0}{v}. \tag{23}$$

Годинник відстане відносно фізичного часу, вимірюваного космічним спостерігачем, на величину:

$$\delta t = (t_k - t_0) - \Delta\tau. \tag{24}$$

У загальному випадку сюди слід підставити вираз (22). Якщо сили інерції нехтовно малі у порівнянні з гравітаційними, час затримки обчислимо за виразом (23):

$$\delta t = \frac{\pi^2 R_0^2}{4v^2 t_0}.$$

Швидкість роздування можна охарактеризувати часом очікування t_0, чим він більший, тим повільніше роздувається оболонка. Якщо спрямувати $t_0 \to \infty$ (роздування відсутнє), то і відставання між годинниками ніякого не буде.

Оскільки при врахуванні сил інерції підінтегральний вираз у (22) лише зменшується, то власний час виміряний по годиннику мотоцикліста вийде ще меншим. Таким чином, сили інерції призводять до зростання відставання власного годинника від космічного часу.

5) Розширення можна ідентифікувати за наступними ознаками:

- безпосередньо за зміною відстані між віддаленими об'єктами (методами ехолокації, за розривами ліній електропередачі, розходженням рейок залізниці на стиках і т.п.);
- за зменшенням ваги тіл, вимірюваної пружинними вагами (чи іншими, що не використовують порівняння ваги з еталоном, тобто не шальковими терезами);
- за уповільненням ходу математичного маятника шляхом вимірювання його періоду коливань по пружинному, електронному, кварцовому чи атомному годиннику;
- за виникненням сил інерції, що протидіють будь-якому рухові (див. відповідь на 4 запитання), хоча ці сили досить слабкі, якщо розширення повільне;

Екзотичні методи:

- за зменшенням атмосферного тиску (та ж вага повітря розподіляється на більшу площу);
- за допомогою геологічної розвідки (визначення відстані до твердих порід планети методами ехолокації);
- за зміною висоти орбіт штучних супутників над поверхнею планети;
- за ефектом Допплера (наприклад, акустичним) при передачі звукових сигналів між віддаленими об’єктами;

-якщо в планети є природний супутник, то за зміною часу проходження його через тінь планети під час затемнення…

Тут вітається творчість учнів.

Розв'язок задачі 5 (11 клас)

Задача 5 (11 клас). Політ літака здійснюється невисоко над землею за нормальних умов. Палива в кількості 12000 кг вистачає на 200 хв. роботи двигуна, сила тяги якого 170 кН.

1. Визначте швидкість витоку газів з сопел двигуна в режимі польоту зі сталою швидкістю 900 км/год, якщо площа повітрозабірників (вхідних отворів реактивних двигунів для засмоктування повітря) складає S=1 м^2.
2. Як змінюється витрата палива в такому режимі польоту?

Розв'язок. Якщо не користуватись табличним значенням густини повітря при н.у. $\rho = 1{,}3$ кг/м^3, то його можна визначити із рівняння стану ідеального газу: $PV = (m/\mu)RT$, з якого густина $\rho = P\mu/RT \approx 1{,}29$ кг/м^3, (при атмосферному тиску P=10^5 Па; моль повітря - $\mu = 29$ г/моль; $R = 8{,}31$ Дж/град·моль; $T = 273$ К.
Витрати палива за час $t = 1$ с складуть m = 12000 кг **:** 12000 с = 1 кг/с.
Відстань, що долає літак за одну секунду – $L = 900$ км/год **:** 3600 с = 250 м.
Об'єм повітря, що прокачується за цей час $t = 1$ с через реактивні двигуни - $V = S \times L = 250$ м^3.
Маса цього повітря разом із паливом, що викидається за час $t = 1$ с :

$$M = \rho \cdot V + m = 1{,}29 \text{ кг/м}^3 \times 250 \text{ м}^3 + 1 \text{ кг} = 322{,}5 \text{ кг}.$$

При силі тяги двигунів F=170 кН швидкість вильоту газів складатиме (із закону збереження імпульсу): $u = F \cdot t / M$=527,1м/с.
Витрати палива зменшуватимуться через зменшення сили тяжіння та відповідної підйомної сили, що призводить до зменшення сили опору повітря, зокрема через зменшення кута атаки і т.ін.