

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА Булевы функции и элементы теории графов методические указания и контрольные задания Авторы:  
Рабкин Е.Л., Фарфоровская Ю.Б. / СПбГУТ. – СПб  
Получено с [www.vizo.ru](http://www.vizo.ru)

**МИНИСТЕРСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ПО СВЯЗИ И ИНФОРМАТИЗАЦИИ**  
-----  
**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ  
им.проф. М.А. БОНЧ-БРУЕВИЧА**

---

**ФАКУЛЬТЕТ ВЕЧЕРНЕГО И ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ**

***Е.Л Рабкин, Ю.Б. Фарфоровская***

# **ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА**

**БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ  
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ**

**Рабкин Е.Л., Фарфоровская Ю.Б. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА** Булевы функции и  
элементы теории графов методические указания и контрольные задания / СПбГУТ. – СПб

© Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им.  
проф. М.А. Бонч-Бруевича, 2000

**Редакторы:**

---

**ЛР № от**

**Подписано к печати**

**Объем Тираж Зак.**

---

**РИО СПбГУТ. 191186, СПб, наб. р. Мойки, 61**

**Отпеч. множ. т., ст «Факультет ДВО», 191186, СПб, н.р. Мойки, 61.**

|  |    |
|--|----|
| Введение.....  | 4  |
| ЛОГИЧЕСКИЕ (БУЛЕВЫ) ФУНКЦИИ .....  | 5  |
| 1. Основные логические функции.....  | 5  |
| 2. Свойства конъюнкции, дизъюнкции и отрицания .....   | 9  |
| 3. ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ.....   | 11 |
| 4. Представление логических функций в виде СДНФ (СКНФ).....  | 13 |
| 5. Нахождение сокращенной ДНФ по таблице истинности (карты Карно) .....  | 14 |
| 6. Полиномы Жегалкина .....  | 16 |
| 7. Суперпозиция функций. Замыкание набора функций.Замкнутые классы функций.<br>Полные наборы. Базисы.....  | 17 |
| 8. Некоторые приложения теории булевых функций .....   | 20 |
| 8.1. Функциональные элементы и схемы .....   | 20 |
| 8.2. Решение логических задач с помощью теории булевых функций .....   | 22 |
| ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ.....  | 24 |
| 9. Общие понятия теории графов.....  | 24 |
| 10. Эйлеровы и полуэйлеровы графы .....  | 25 |
| 11. Матрицы и графы. Нахождение путей и сечений с помощью структурной матрицы.....   | 29 |
| 12. Сети, потоки в сетях. Теорема Форда – Фалкерсона .....   | 30 |
| $\tau \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow s$ ..... | 32 |
| 13. Раскраска графа .....  | 33 |
| 14. Деревья и их простейшие свойства .....   | 36 |
| 15. Решение типовых задач .....  | 36 |
| 16. Индивидуальные задания .....   | 44 |
| 17. Дополнительные задачи.....   | 52 |
| 18. Вопросы для самопроверки .....   | 55 |
| ЛИТЕРАТУРА .....   | 55 |

## Введение

Для успешного выполнения контрольной работы студент должен самостоятельно изучить соответствующий теоретический материал и ознакомиться с решением типовых примеров, приведенных в настоящем издании. Контрольная работа по дискретной математике составлена так, что если студент выполняет ее САМОСТОЯТЕЛЬНО, то подготовка его к зачету займет очень небольшое время. Заметим также, что задачи по дискретной математике НЕ ТРЕБУЮТ предварительных дополнительных знаний и, как нам кажется, любой здравомыслящий человек, претендующий на получение высшего технического образования, должен суметь выполнить эту работу (и это не должно занять у него много времени). Кроме того, современная жизнь абсолютно немыслима без компьютеров, а в основе ЛЮБОГО вычислительного устройства лежат знания именно дискретной математики, (которая является наукой 20-го века, и без ее развития были бы немыслимы успехи технического прогресса). Поэтому освоение ЭЛЕМЕНТАРНЫХ знаний в области дискретной математики расширит кругозор студента, позволит ему в какой-то степени понимать работу вычислительных устройств и лучше ориентироваться в современном мире. Заметим также, что в классический курс дискретной математики входят также такие разделы, как кодирование (необходимое для безошибочной передачи информации на расстояние, именно с помощью кодирования работают Интернет и электронная почта) и теория алгоритмов (в данном издании отсутствуют). Контрольная работа составлена по двум темам: “Булевы функции” и “Элементы теории графов”. Последняя тема важна тем, что *сеть связи (телефонной)* обычно изображается и изучается как сетевой граф.

Естественно, что изложенный ниже *теоретический* материал несколько шире, чем нужно для решения *типовых* задач, так как он содержит некоторые *дополнительные* сведения, необходимые для понимания сути предмета и успешной сдачи зачета.

При возникновении затруднений при решении задач студент может обратиться (устно или письменно) за консультацией на кафедру высшей математики: 193262 СПб, пр. Большевиков, 22.

Студент должен выполнить контрольную работу по варианту, совпадающему с последней цифрой номера его зачётной книжки (см. таблицу). Получив прорецензированную работу, необходимо в кратчайший срок исправить в ней все отмеченные ошибки и недочёты. Если работа не зачтена, то в этой же тетради должны быть заново решены задачи, указанные рецензентом. Тетрадь высылается в университет для повторного рецензирования. Контрольные работы предъявляются преподавателю на зачете вместе с настоящими “Методическими указаниями”.

| Вариант | Выполняемые задачи |    |    |    |    |    |    |    |
|---------|--------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| 1       | 1                  | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 | 71 |
| 2       | 2                  | 12 | 22 | 32 | 42 | 52 | 62 | 72 |
| 3       | 3                  | 13 | 23 | 33 | 43 | 53 | 63 | 73 |
| 4       | 4                  | 14 | 24 | 34 | 44 | 54 | 64 | 74 |
| 5       | 5                  | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 |
| 6       | 6                  | 16 | 26 | 36 | 46 | 56 | 66 | 76 |
| 7       | 7                  | 17 | 27 | 37 | 47 | 57 | 67 | 77 |
| 8       | 8                  | 18 | 28 | 38 | 48 | 58 | 68 | 78 |
| 9       | 9                  | 19 | 29 | 39 | 49 | 59 | 69 | 79 |
| 0       | 10                 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |

## ЛОГИЧЕСКИЕ (БУЛЕВЫ) ФУНКЦИИ

### 1. Основные логические функции

Обозначим через  $E = \{0, 1\}$  – множество, состоящее из двух чисел. Числа **0** и **1** являются основными в дискретной математике. Часто они интерпретируются как “ложь” ( $\text{л} = \{0\}$ ) и как “истина” ( $\text{и} = \{1\}$ ). Декартово произведение  $E * E * E * \dots * E = E^n$  является множеством упорядоченных наборов, состоящих из  $n$  чисел (нулей и единиц). Как известно,  $E^n$  содержит  $2^n$  элементов (упорядоченных наборов). Само множество  $E^n$  можно естественным образом упорядочить, для чего достаточно считать каждый набор двоичным разложением целого числа  $k$  ( $0 \leq k \leq 2^n - 1$ ), записанного с помощью  $n$  знаков. Упорядочение наборов проводится по числу  $k$ .

Например, при  $n = 3$  множество  $E^3$  может быть упорядочено следующим образом.

|   |     |
|---|-----|
| 0 | 000 |
| 1 | 001 |
| 2 | 010 |
| 3 | 011 |
| 4 | 100 |
| 5 | 101 |
| 6 | 110 |
| 7 | 111 |

Такое упорядочение еще называют “скользящей единицей”.

Этот естественный порядок элементов  $E^n$  является самым распространенным, но, как будет видно в разд. 5, иногда удобен другой способ упорядочения.

**Логической (булевой) функцией (или просто функцией)  $n$  переменных  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется такая функция, у которой все переменные и сама функция могут принимать только два значения: 0 и 1.**

Переменные, которые могут принимать только два значения **0** и **1** называются *логическими* переменными (или просто переменными). Заметим, что логическая переменная  $x$  может подразумевать под числом **0** некоторое высказывание, которое ложно, и под числом **1** высказывание, которое истинно. Например, высказывание “Волга впадает в Каспийское море” является истинным и, значит, с точки зрения дискретной математики принимает значение **1**, а высказывание “в неделе 8 дней” является ложным, и переменная, которая заменяет это высказывание, принимает значение **0**. Имеется много высказываний, которые либо истинны, либо ложны, но о которых мы не знаем, что имеет место на самом деле. Например, высказывание “студент Петров (имеется в виду конкретный человек) имеет дома компьютер”. Такого рода высказывания требуют проверки (конечно, если нам важен этот факт). Поэтому считаем, что переменная, заменяющая это высказывание может принимать значение **0** или **1**.

Из определения логической функции следует, что функция  $n$  переменных – это отображение  $E^n$  в  $E$ , которое можно задать непосредственно таблицей, называемой *таблицей истинности* данной функции. Например, функция трех переменных  $f(x, y, z)$  может определяться следующей таблицей истинности.

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x,y,z)$ |
|-----|-----|-----|------------|
| 0   | 0   | 0   | 1          |
| 0   | 0   | 1   | 0          |
| 0   | 1   | 0   | 1          |
| 0   | 1   | 1   | 1          |
| 1   | 0   | 0   | 0          |
| 1   | 0   | 1   | 1          |
| 1   | 1   | 0   | 0          |
| 1   | 1   | 1   | 0          |

Это означает, что  $f(0,0,0) = 1$ ,  $f(0,0,1) = 0$ ,  $f(0,1,0) = 1$  и т. д.

**Две функции равны, если совпадают их таблицы истинности (на объединенном наборе переменных).**

При таком задании наборы  $E^n$  всегда упорядочены естественным образом, это позволяет определять функцию только последним столбцом (который иногда для экономии места записывается в строчку). Например, в нашем примере функцию  $f(x,y,z)$  можно задать так:  $f = (10110100)$ , это означает, что последний столбец таблицы истинности

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что все функции  $n$  переменных также можно перенумеровать по принципу “скользящей единицы”. Теоретически число таких функций –  $2^{2^n}$  но некоторые из них являются по существу функциями меньшего числа переменных, а две – вообще константами. Если фактически функция не зависит от некоторой переменной, то такую переменную называют *фиктивной*.

Теперь можно описать основные функции дискретной математики.

*Функции одной переменной*  $y=f(x)$ . Перенумеруем эти функции (их 4) естественным образом и расположим в виде таблицы:

| $x$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| 0   | 0     | 0     | 1     | 1     |
| 1   | 0     | 1     | 0     | 1     |

Видно, что  $f_0(x) = 0$ , а  $f_3(x) = 1$ , т. е. эти две функции не зависят от  $x$ ,  $f_1(x) = x$ , т. е. она не меняет аргумента. Функция  $f_2(x)$  действительно содержательная функция. Она принимает значения,

противоположные значениям аргумента, обозначается  $f_2(x) = \bar{x}$  и называется отрицанием (применяют еще обозначение  $\neg x$  (читается “не  $x$ ”)).

Функции двух переменных  $z = f(x, y)$ .

Число этих функций равно  $2^4 = 16$ . Перенумеруем и расположим их тоже в естественном порядке.

| $x$ | $y$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | $f_{13}$ | $f_{14}$ | $f_{15}$ |
|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0   | 0   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        |
| 0   | 1   | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0        | 0        | 1        | 1        | 1        | 1        |
| 1   | 0   | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1        | 1        | 0        | 0        | 1        | 1        |
| 1   | 1   | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0        | 1        | 0        | 1        | 0        | 1        |

Рассмотрим более подробно эти функции. Две из них  $f_0 = 0$  и  $f_{15} = 1$  являются константами. Функции

$$f_3 = x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_{12} = \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_5 = y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f_{10} = \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

являются по существу функциями одной переменной.

Наиболее важные функции двух переменных имеют специальные названия и обозначения. Заметим, что эти обозначения не всегда общеприняты.

Перечислим 7 важнейших функций:

1) конъюнкция (функция И)

$$f_1(x, y) = xy = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что конъюнкция – это фактически обычное *умножение* (нулей и единиц). Иногда эту функцию обозначают  $x \& y$  или  $x \wedge y$ ;

2) дизъюнкция (функция или)

$$f_7(x, y) = x \vee y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

3) импликация (следование)

$$f_{13}(x, y) = x \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Иногда импликацию обозначают  $x \supset y$  или  $x \rightarrow \square y$  (читается “из  $x$  следует  $y$ ”).

Это очень важная функция, особенно в логике. Ее можно рассматривать следующим образом: если  $x = 0$  (т. е.  $x$  “ложно”), то из этого факта можно вывести и “ложь”, и “истину” (и это будет правильно), если  $y = 1$  (т. е.  $y$  “истинно”), то истина выводится и из “лжи” и из “истины”, и это тоже правильно. Только вывод “из истины ложь” является неверным. Заметим, что *любая* теорема *всегда* фактически содержит эту логическую функцию;

4) сложение по модулю 2 (здесь и далее, если не оговорено противное, знаком “+” мы будем обозначать такое сложение):

$$f_6(x, y) = x + y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

5) эквивалентность или подобие

$$f_9 = x^y = x \sim y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{x + y}.$$

Эта  $f_9 = 1$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ . Заметим, что будем применять оба обозначения:  $x^y$  (в основном при изучении функций) и  $x \sim y$  (когда речь будет идти о логических операциях);

6) штрих Шеффера

$$f_{14}(x, y) = x | y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Иногда эту функцию называют “не и” (так как она равна отрицанию конъюнкции);

7) стрелка Пирса (иногда эту функцию называют штрих Лукасевича)

$$f_8(x, y) = x \downarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Эта функция является отрицанием дизъюнкции и поэтому иногда ее называют “не или”.

Заметим, что свойства последних двух функций (как будет видно далее) похожи между собой и, может быть, поэтому в литературе их часто путают (т. е. называют  $f_8$  штрихом Шеффера, а  $f_{14}$  – стрелкой Пирса).

Три оставшиеся функции, ( $f_2$ ,  $f_4$  и  $f_{11}$ ) особого значения в дискретной математике не имеют.

Заметим, что часто будут рассматриваться функции от функций, т. е. *суперпозиции* перечисленных выше функций. При этом последовательность действий указывается (как обычно) скобками. Исключение составляет конъюнкция (которая на самом деле является обычным умножением в двоичной системе). Поэтому конъюнкция совершается первой даже если отсутствуют скобки. Например, запись  $x \vee y \vee z$  означает  $(xy) \vee (yz)$ .

Из перечисленных функций особую роль играют три функции, а именно конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, поэтому рассмотрим более подробно их свойства.

## 2. Свойства конъюнкции, дизъюнкции и отрицания

Особая роль двух функций (из этих трех) определяется тем обстоятельством, что определение этих функций легко может быть перенесено на любое число переменных:

**Конъюнкцией  $n$  переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$  называется функция, которая принимает значение 1, если и только если все переменные равны 1 (и, значит, равна 0, если хотя бы одна из этих переменных равна 0).**

**Дизъюнкцией  $n$  переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_n$  называется такая функция, которая равна 0 если и только если все переменные равны 0 (и, значит, равна 1 тогда и только тогда, когда хотя бы одна переменная равна 1).**

Из этих определений видно, что конъюнкция и дизъюнкция *коммутативны*, т. е. обе функции не зависят от порядка переменных.

Будем обозначать через  $\overline{f}$  ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) новую функцию, которая на наборе переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  принимает значение, противоположное  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Заметим, что в перечисленных далее свойствах в роли  $x, y, z$  *может выступать* любая логическая функция. Все свойства легко могут быть доказаны из приведенных выше определений этих функций.

### 1. Универсальные границы:

$$x \vee 1 = 1; \quad x \vee 0 = x; \quad x 1 = x; \quad x 0 = 0.$$

$$x \vee \overline{x} = 1; \quad x \overline{x} = 0; \quad x x = x; \quad x \vee x = x; \quad \overline{\overline{x}} = x; \quad \overline{0} = 1; \quad \overline{1} = 0.$$

### 2. Ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции:

$$x(yz) = (xy)z; \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z.$$

Это свойство означает, что в конъюнкции или дизъюнкции нескольких переменных можно как угодно расставлять скобки (а значит, можно вообще их не ставить).

### 3. Поглощение (“целое поглощает часть”):

$$x \vee xy = x(1 \vee y) = x.$$

4. Два распределительных закона:

$$x(y \vee z) = x y \vee x z; x \vee (y z) = (x \vee y)(x \vee z),$$

оба свойства могут быть доказаны простым рассуждением (например, если  $x = 0$ , тогда по свойству 1 справа выражение равно 0 и слева тоже 0, если  $x = 1$ , то справа стоит  $y \vee z$  и слева будет то же самое).

5. Правила де Моргана:

$$\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}; \quad \overline{x \vee y} = \overline{x} \overline{y},$$

оба эти правила обобщаются на любое число переменных:

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_n} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n}; \quad \overline{x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \dots \cdot \overline{x_n}.$$

6. Правило Блейка:

Пусть  $K_1$  и  $K_2$  – какие-то логические функции, тогда

$$x K_1 \vee \overline{x} K_2 = x K_1 \vee \overline{x} K_2 \vee K_1 K_2,$$

что легко доказывается *справа налево*:

$$x K_1 \vee \overline{x} K_2 \vee K_1 K_2 = x K_1 \vee \overline{x} K_2 \vee K_1 K_2 (x \vee \overline{x}) = x K_1 \vee \overline{x} K_2 \vee K_1 K_2 x \vee K_1 K_2 \overline{x} = \\ = x K_1 \vee \overline{x} K_2 \text{ (последнее равенство следует из свойства поглощения).}$$

Следствием правила Блейка являются два правила обобщенного поглощения:

$$x K \vee \overline{x} K = K; \quad x y K \vee \overline{x} y K \vee \overline{x} \overline{y} K \vee x \overline{y} K = K.$$

Заметим, что правила Блейка и следствия из него часто используются для упрощения дизъюнкции (см. разд. 5)

*Замечание.* Конъюнкция, дизъюнкция, отрицание были определены для объектов, принимающих лишь два значения **0** и **1**. Однако бывают случаи, когда можно ввести такие операции для некоторых других объектов (эти операции также называют иногда конъюнкцией, дизъюнкцией и отрицанием), для которых также выполнены свойства 1–6. В этом случае говорят, что на этих объектах введена *булева алгебра*.

Например, пусть  $\Omega$  – некоторое множество точек (или элементарных событий в теории вероятности),  $\mathfrak{R}$  – множество подмножеств из  $\Omega$ . Если  $A, B$  принадлежат  $\mathfrak{R}$ , то можно ввести *сумму* множеств (дизъюнкцию)  $A+B = A \vee B$  (равную объединению точек из  $A$  и  $B$ ), произведение множеств

(конъюнкцию)  $AB = \overline{A} \wedge B$  (равное набору точек, входящих и в  $A$ , и в  $B$  одновременно) и дополнение  $\overline{A}$

(отрицание  $A$ ), т. е.  $\overline{A}$  – множество точек из  $\Omega$ , не входящих в  $A$ . Тогда для этих операций (и это легко проверить) будут выполнены свойства 1–6. Таким образом, множество всех подмножеств из  $\Omega$  является *булевой алгеброй*

### 3. ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ

*Простой конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).*

Например,  $xy\bar{z}$  является простой конъюнкцией,

*Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция простых конъюнкций.*

Например, выражение  $xy \vee \bar{y}z$  является ДНФ.

*Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется такая дизъюнктивная нормальная форма, у которой в каждую конъюнкцию входят все переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания), причем в одном и том же порядке.*

Например, выражение  $xy\bar{z}$  является ДНФ, но не СДНФ. Выражение  $xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz$  является СДНФ.

Аналогичные определения (с заменой конъюнкции на дизъюнкцию и наоборот) верны для КНФ и СКНФ. Приведем точные формулировки.

*Простой дизъюнкцией называется дизъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная входит не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).* Например, выражение

$x \vee \bar{y} \vee z$  – простая дизъюнкция,

*Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция простых дизъюнкций*

$(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee z)(y \vee \bar{z})$  (например выражение – КНФ).

*Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется такая КНФ, у которой в каждую простую дизъюнкцию входят все переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания), причем в одинаковом порядке.*

$$(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee z)(y \vee \bar{z})$$

Например, выражение является СКНФ.

Приведем алгоритмы переходов от одной формы к другой. Естественно, что в конкретных случаях (при определенном творческом подходе) применение алгоритмов бывает более трудоемким, чем простые преобразования, использующие конкретный вид данной формы:

а) переход от ДНФ к КНФ

Алгоритм этого перехода следующий: ставим над ДНФ два отрицания и с помощью правил де Моргана (не трогая верхнее отрицание) приводим отрицание ДНФ снова к ДНФ. При этом приходится раскрывать скобки с использованием правила поглощения (или правила Блейка). Отрицание (верхнее) полученной ДНФ (снова по правилу де Моргана) сразу дает нам КНФ:

$$xy\bar{y}z = \overline{\overline{xy\bar{y}z}} = \overline{\overline{xy} \cdot \overline{\bar{y}z}} = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y})(y \vee z)} = \overline{\bar{y} \vee \bar{x}z} = y \cdot (\bar{\bar{x}z}) = y \cdot (x \vee \bar{z}).$$

Заметим, что КНФ можно получить и из первоначального выражения, если вынести  $y$  за скобки;

б) переход от КНФ к ДНФ

Этот переход осуществляется простым раскрытием скобок (при этом опять-таки используется правило поглощения)

$$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z}) = (\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = \bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}.$$

Таким образом, получили ДНФ.

Обратный переход (от СДНФ к ДНФ) связан с проблемой минимизации ДНФ. Подробнее об этом будет рассказано в разд. 5, здесь же мы покажем, как упростить ДНФ (или СДНФ) по правилу Блейка. Такая ДНФ называется *сокращенной* ДНФ;

в) сокращение ДНФ (или СДНФ) по правилу Блейка

Применение этого правила состоит из двух частей:

- если среди дизъюнктивных слагаемых в ДНФ имеются слагаемые  $xK_1 \vee \bar{x}K_2$ , то ко всей дизъюнкции добавляем слагаемое  $K_1K_2$ . Пропускаем эту операцию несколько раз (можно последовательно, можно одновременно) для всех возможных пар слагаемых, а затем, применяем обычное поглощение;
- если добавляемое слагаемое уже содержалось в ДНФ, то его можно отбросить совсем, например,  $xy \vee \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{z} = xy \vee \bar{x}\bar{z}$

или

$$x\bar{y}z \vee xyz \vee y\bar{z} \vee x\bar{y} = x\bar{y}z \vee xyz \vee y\bar{z} \vee x\bar{y} \vee xz = y\bar{z} \vee x\bar{y} \vee xz = y\bar{z} \vee x\bar{y} \vee xz \vee x\bar{z} \vee x = x \vee y\bar{z}.$$

Разумеется, сокращенная ДНФ не определяется единственным образом, но все они содержат одинаковое число букв (например, имеется ДНФ  $A = xy \vee y\bar{z} \vee \bar{y}z$ , после применения к ней правила Блейка можно прийти к ДНФ, равносильной данной):

$$A = xy \vee \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee xz = \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee xz.$$

в) переход от ДНФ к СДНФ

Если в какой-то простой конъюнкции недостает переменной, например,  $z$ , вставляем в нее выражение  $z \vee \bar{z} = 1$ , после чего раскрываем скобки (при этом повторяющиеся дизъюнктивные слагаемые не пишем). Например:

$$x \vee \bar{y}\bar{z} = x(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x})\bar{y}\bar{z} = xyz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = xyz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \quad (\text{в последнем равенстве из двух одинаковых слагаемых оставлено одно}), \text{ т. е. из ДНФ получили СДНФ.}$$

г) переход от КНФ к СКНФ

Этот переход осуществляется способом, аналогичным предыдущему: если в простой дизъюнкции не хватает какой-то переменной (например,  $z$ , то добавляем в нее выражение  $z \cdot \bar{z} = 0$  (это не меняет самой дизъюнкции), после чего раскрываем скобки с использованием распределительного закона):

$$(x \vee y)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = (x \vee y \vee z\bar{z})(x \vee y \vee \bar{z}) = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Таким образом, из КНФ получена СКНФ.

Заметим, что минимальную или сокращенную КНФ обычно получают из соответствующей ДНФ.

#### 4. Представление логических функций в виде СДНФ (СКНФ)

Будем использовать логическую функцию “эквивалентность”, записанную в виде  $x^y$ . Напомним, что  $0^0 = 1$ ;  $0^1 = 0$ ;  $1^0 = 0$ ;  $1^1 = 1$ . Таким образом,  $x^y = 1$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ .

**Лемма.** Любая логическая функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  может быть представлена в виде дизъюнкции  $2^n$  дизъюнктивных слагаемых, причем дизъюнкция берется по всевозможным наборам из  $E^n$ . Этот факт будем записывать следующим образом:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vee x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (*)$$

где дизъюнкция проводится по всевозможным наборам  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  из  $E^n$ .

Доказательство леммы.

а) Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ . Тогда слева в формуле (\*) стоит 1. Докажем, что и справа в этом случае стоит 1, для чего достаточно указать одно дизъюнктивное слагаемое, равное 1. Но среди всех наборов  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  имеется набор  $s_1 = x_1, s_2 = x_2, \dots, s_n = x_n$ . Очевидно, что для этого набора слагаемое

$$x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \text{ равно } 1 \text{ (так как и } x_1^{\sigma_1} = 1, x_2^{\sigma_2} = 1, \dots, x_n^{\sigma_n} = 1 \text{ и } f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1).$$

б) Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Предположим, что справа стоит не ноль, а единица, тогда какое-то слагаемое тоже должно равняться 1, т. е. для некоторого набора

$$x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$$

Это означает (по свойствам конъюнкции), что  $x_1^{\sigma_1} = 1, x_2^{\sigma_2} = 1, \dots, x_n^{\sigma_n} = 1$ , откуда следует, что  $x_1 = \sigma_1, x_2 = \sigma_2, \dots, x_n = \sigma_n$ , но в этом случае  $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  и, значит, справа нет слагаемого, равного 1, т. е. в этом случае и справа и слева в формуле (\*) стоит 0. Лемма доказана.

**Теорема.** Если булева функция не равна тождественному нулю, то ее можно представить в виде СДНФ по ее таблице истинности следующим образом: берем только те наборы переменных  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , для которых  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ , и составляем простую конъюнкцию для этого набора так: если  $x_i = 0$ , то берем в этой конъюнкции  $\bar{x}_i$ , если  $x_i = 1$ , то берем  $x_i$ . Составляя дизъюнкцию этих простых конъюнкций, приходим к СДНФ.

**Доказательство.** Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  не равна тождественному нулю, тогда в дизъюнкции можно не записывать слагаемые, равные нулю, а из формулы (\*) следует следующее представление для данной функции

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}. \quad (**)$$

Запись означает, что дизъюнкция берется по всем наборам  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , для которых  $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$ .

Так как  $x_1^{\sigma_1} = x_1$  (если  $\sigma_1=1$ ) и  $x_1^{\sigma_1} = \bar{x}_1$  (если  $\sigma_1=0$ ), из формулы (\*\*) следует утверждение теоремы.

**Следствие.** Любую логическую (булеву) функцию можно выразить через три логические функции: конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

Из предыдущей теоремы видно, что следствие верно для любой функции, не равной тождественному нулю. Однако если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , то ее также можно выразить через конъюнкцию,

дизъюнкцию и отрицание, например, так:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \bar{x}_1$ , и, несмотря на то, что последнее выражение не является простой конъюнкцией (и, значит, не является СДНФ), тем не менее тождественный ноль также выражен через нужные три функции.

Набор функций, через которые можно выразить любые другие функции, называется *полным набором* (более точные формулировки даны в разд. 7). Таким образом, конъюнкция, дизъюнкция и отрицание являются *полным набором*.

По аналогии с представлением любой функции (не равной тождественному нулю) в виде СДНФ можно функцию (не равную тождественной 1) представить в виде СКНФ: *простая дизъюнкция* *составляется для тех наборов переменных*  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , *для которых*  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , *причем если*  $x_i = 1$ , *то в этой дизъюнкции берем*  $\bar{x}_i$ , *если же*  $x_i = 0$ , *то берем*  $x_i$ .

**Пример.** Составить для импликации и сложения по модулю 2 СДНФ и СКНФ.

| $x$ | $y$ | $x \rightarrow y$ | $x + y$ |
|-----|-----|-------------------|---------|
| 0   | 0   | 1                 | 0       |
| 0   | 1   | 1                 | 1       |
| 1   | 0   | 0                 | 1       |
| 1   | 1   | 1                 | 0       |

Тогда СДНФ для этих функций:

$$x \Rightarrow y = \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} y \vee x y; \quad x + y = x \bar{y} \vee \bar{x} y.$$

СКНФ для этих функций:

$$x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y; \quad x + y = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y}).$$

## 5. Нахождение сокращенной ДНФ по таблице истинности (карты Карно)

Доказано, что любую функцию (кроме тождественного нуля) можно представить в виде СДНФ. На практике часто бывает удобно получить (вместо СДНФ) как можно более “короткую” ДНФ. Словам “короткая ДНФ” можно придать разный смысл, а именно:

ДНФ называется *минимальной*, если она содержит наименьшее число букв (разумеется, среди всех ДНФ ей равносильных); ДНФ называется *кратчайшей*, если она содержит минимальное число знаков дизъюнкции  $\vee$ ; *тупиковой*, если уничтожение одной или нескольких букв в ней приводит к неравной ДНФ и *сокращенной* ДНФ, если ее упрощение проведено с помощью правила Блейка.

На практике наиболее важной представляется нахождение минимальной ДНФ, но алгоритм ее нахождения по существу является вариантом перебора всех равносильных ДНФ. Алгоритмически проще всего находить сокращенную ДНФ (эти алгоритмы были даны в разд. 3). Заметим, что если функция  $n$  переменных задана своей таблицей истинности, то правило Блейка имеет простой геометрический смысл. Именно, если все возможные наборы переменных представить себе как вершины  $n$ -мерного куба со стороной равной 1 (всего вершин будет  $2^n$ ) в декартовой системе координат, то надо отметить те вершины, на которых значение функции равно 1, и если какие-то из этих единиц лежат на “прямой”, “плоскости” или “гиперплоскости” в  $n$ -мерном пространстве, то в сокращенную ДНФ будут входить “уравнения” этих прямых или гиперплоскостей по известному правилу: если в это уравнение входило составной частью  $x = 0$ , то в сокращенную ДНФ входит  $\bar{x}$ , если  $x = 1$ , то просто  $x$ . Разумеется, геометрически все это изобразить можно только при  $n = 2, 3$ .

Карты Карно позволяют эти геометрические идеи использовать при  $n = 3, 4, 5$ , для функций, заданных своей таблицей истинности. При больших  $n$  карты Карно практически не используются. Рассмотрим отдельно (и более подробно) случаи  $n = 3, 4$ .

Составляем таблицу истинности для данной конкретной функции  $n = 3$  в виде таблицы, приведенной в примере 5.1. (Заметим, что для  $x_1$  и  $x_2$  естественный порядок набора переменных здесь нарушен. Это сделано для того, чтобы при переходе от данного к следующему набору переменных в этом наборе менялась только одна цифра). Прямая содержит 2 вершины, плоскость – 4, гиперплоскости – 8, 16 и т. д. вершин, поэтому объединять можно 2 рядом стоящие единицы или 4, 8, 16 и т. д. Карты Карно соединяются “по кругу”, т. е. наборы (10) и (00) считаются рядом стоящими.

**Пример 5.1.** Пусть задана функция:

|              |     |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|
| $x_3/x_1x_2$ | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
| 0            | 0   | 1   | 1   | 1   |
| 1            | 0   | 1   | 1   | 1   |

Видно, ее СДНФ содержит (по числу 1) 6 дизъюнктивных слагаемых, но ее сокращенная ДНФ содержит (после объединения единиц) всего 2 буквы

$$f = x_1 \vee x_2$$

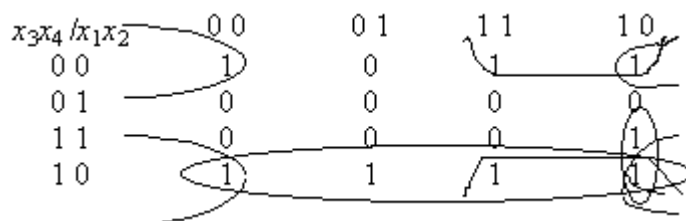
**Пример 5.2.** Следующий пример показывает, “как соединять единицы по кругу”.

|              |     |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|
| $x_3/x_1x_2$ | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
| 0            | 1   | 0   | 0   | 1   |
| 1            | 1   | 0   | 1   | 1   |

Здесь сокращенная ДНФ содержит 2 слагаемых (СДНФ содержала бы 5):

$$f = x_1 x_3 \vee \bar{x}_2.$$

**Пример 5.3.** Пример показывает использование карт Карно при  $n = 4$ .



Здесь сокращенная ДНФ содержит 4 слагаемых (СДНФ содержит 8):  
 $f = \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3.$

При  $n = 5$  использование карт Карно является несколько более сложным и здесь не приводится.

## 6. Полиномы Жегалкина

Полиномом (многочленом) Жегалкина от  $n$  переменных называется функция

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_1 x_2 + \dots + \alpha_{n+C}^2 x_{n-1} x_n + \dots + \alpha_{2n-1} x_1 x_2 \dots x_n$$

Всего здесь  $2^n$  слагаемых. Напомним, что  $+$  сейчас означает сложение по модулю 2, коэффициенты  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1}$  являются константами (равными нулю или единице).

**Теорема.** Любая функция  $n$  переменных может быть представлена полиномом Жегалкина и это представление единственно.

**Доказательство.** Любая функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет свою таблицу истинности. Запишем сначала данную функцию в виде полинома Жегалкина с неопределенными коэффициентами. Затем по очереди подставляем всевозможные наборы переменных и находим коэффициенты. Легко видеть, что за каждую подстановку находим только один коэффициент. Так как число наборов равно числу коэффициентов (и равно  $2^n$ ), отсюда следует утверждение теоремы.

Доказательство этой теоремы показывает, как по таблице истинности построить полином Жегалкина.

Имеется 2-й способ нахождения полинома Жегалкина для функций, заданных в виде ДНФ. Этот способ основан на том, что  $x+1 = \bar{x}$ . Если функция задана в виде ДНФ, то сначала убираем дизъюнкцию, используя при этом правило де Моргана, а все отрицания заменяем прибавлением единицы. После этого раскрываем скобки по обычным правилам, при этом учитываем, что четное число одинаковых слагаемых равно нулю (так как  $x+x=0$ ), а нечетное число одинаковых слагаемых равно одному такому слагаемому.

**Пример.**



$$f(x, y, z) = xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z = \overline{\overline{xy} \cdot \overline{\bar{x}\bar{y}} \cdot \overline{\bar{y}z}} = (xy + 1)((x + 1)(y + 1) + 1)((y + 1)z + 1) + 1 = (xy + 1)(xy + x + y)(yz + z + 1) + 1 = (x + y)(yz + z + 1) + 1 = xyz + yz + xz + yz + x + y + 1 = xyz + xz + x + y + 1.$$

Последнее выражение и есть полином Жегалкина данной функции.

Функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *линейной*, если ее полином Жегалкина содержит только первые степени слагаемых. Более точно функция называется линейной, если ее можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

Класс линейных функций часто обозначают через  $L$ . (Заметим, что число линейных функций  $n$  переменных равно  $2^{n+1}$ ).

**Замечание.** Если  $n \geq 2$  то линейная функция в таблице истинности может содержать только четное число единиц. Действительно, если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ , то легко видеть что такая функция в таблице истинности содержит одинаковое число нулей и единиц а именно  $2^n/2$  единиц и нулей, т. е. число

$$f_1 = \bar{f} = f + 1.$$

это четно при  $n \geq 2$ . Столько же нулей и единиц имеет функция  $\bar{f}$ . Добавление же фиктивной переменной приводит к увеличению числа единиц (и нулей) в два раза. Разумеется, нелинейная функция может иметь в таблице истинности как четное, так и нечетное число единиц.

## 7. Суперпозиция функций. Замыкание набора функций. Замкнутые классы функций. Полные наборы. Базисы

Пусть имеется некоторый набор  $K$ , состоящий из конечного числа булевых функций. Суперпозицией функций из этого набора называются новые функции, полученные с помощью конечного числа применения двух операций;

можно переименовать любую переменную, входящую в функцию из  $K$ ;

вместо любой переменной можно поставить функцию из набора  $K$  или уже образованную ранее суперпозицию.

Суперпозицию еще иначе называют сложной функцией.

**Пример 7.1.** Если дана одна функция  $x|y$  (штрих Шеффера), то ее суперпозициями, в частности, будут следующие функции  $x/x$ ,  $x/(x/y)$ ,  $x/(y/z)$  и т. д.

*Замыканием* набора функций из  $K$  называется множество всех суперпозиций. Класс функций  $K$  называется *замкнутым*, если его замыкание совпадает с ним самим.

Набор функций называется *полным*, если его замыкание совпадает со всеми логическими функциями. Иначе говоря, полный набор – это множество таких функций, через которые можно выразить все остальные булевы функции.

*Неизбыточный полный набор функций называется базисом* (“неизбыточный” означает, что если какую-то функцию удалить из набора, то этот набор перестанет быть полным).

**Пример 7.2.** Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание являются полным набором (в этом убедились в разд. 5), но не являются базисом, так как это набор избыточен, поскольку с помощью правил де Моргана можно удалить конъюнкцию или дизъюнкцию. Любую функцию можно представить в виде полинома Жегалкина (разд. 6). Ясно, что функции конъюнкция, сложение по модулю 2 и константы 0 и 1 являются полным набором, но эти четыре функции также не являются базисом, поскольку  $1+1=0$ , и поэтому константу 0 можно исключить из полного набора (для построения полиномов Жегалкина константа 0 необходима, поскольку выражение “ $1+1$ ” не является полиномом Жегалкина).

Легко видеть, что одним из способов проверки полноты какого-то набора  $K$  является проверка того, что через функции из этого набора выражаются функции другого полного набора (можно проверить, что через функции из  $K$  можно выразить конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание).

Существуют такие функции, что одна такая функция сама является базисом (здесь достаточно проверить только полноту, избыточность очевидна). Такие функции называются шепферовскими функциями. Это название связано с тем, что штрих Шеффера является базисом. Напомним, что штрих Шеффера определяется следующей таблицей истинности:

$$x|y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{x \cdot y} \quad (\text{«не И»}).$$

Так как очевидно  $x|x = \bar{x}$ , т. е. отрицание является суперпозицией штриха Шеффера, а

$$x \vee y = \overline{x|y} = (x|y)|(x|y),$$

дизъюнкция тогда, штрих Шеффера сам является базисом. Аналогично, стрелка Пирса является шепферовской функцией (студенты могут проверить это сами). Для функций 3-х или более переменных шепферовских функций очень много (конечно, выражение других булевых функций через шепферовскую функцию большого числа переменных сложно, поэтому в технике они редко используются).

Заметим, что вычислительное устройство чаще всего базируется на полном наборе функций (часто на базисах). Если в основе устройства лежат конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, то для этих устройств важна проблема минимизации ДНФ; если в основе устройства лежат другие функции, то полезно уметь алгоритмически минимизировать выражения через эти функции.

Перейдем теперь к выяснению полноты конкретных наборов функций. Для этого перечислим 5 важнейших классов функций:

- $T_0$  – это набор всех тех логических функций, которые на нулевом наборе принимают значение 0 ( $T_0$  – это класс функций, *сохраняющих 0*);
- $T_1$  – это набор всех логических функций, которые на единичном наборе принимают значение 1 ( $T_1$  – это класс функций, *сохраняющих единицу*) (заметим, что число функций от  $n$  переменных принадлежащих классам  $T_0$  и  $T_1$  равно  $2^{2^{n-1}}$ );
- $L$  – класс *линейных* функций т. е. функций, для которых полином Жегалкина содержит только первые степени переменных;
- $M$  – класс *монотонных* функций. Опишем класс этих функций более подробно. Пусть имеются 2 набора из  $n$  переменных:  $\sigma_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$s_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $s_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Будем говорить, что набор  $s_1$  меньше набора  $s_2$  ( $s_1 \leq s_2$ ), если все  $x_i \leq y_i$ . Очевидно, что не все наборы из  $n$  переменных сравнимы между собой (например, при  $n = 2$  наборы  $(0,1)$  и  $(1,0)$  не сравнимы между собой). Функция от  $n$  переменных называется *монотонной*, если на меньшем наборе она принимает меньшее или равное значение. Разумеется, эти неравенства должны проверяться только на сравнимых наборах. Понятно, что несравнимые наборы – это те, в которых есть некоторые координаты типа  $(0,1)$  в одном наборе и  $(1,0)$  в другом на соответствующих местах (в дискретной математике монотонные функции это только как бы “монотонно возрастающие функции”, “монотонно убывающие” функции здесь не рассматриваются).

**Пример.** В нижеследующей таблице функции  $f_1, f_2$  являются монотонными функциями, а функции  $f_3, f_4$  – нет.

| x | y | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
|---|---|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 0 | 1 | 0     | 1     | 1     | 0     |
| 1 | 0 | 0     | 0     | 0     | 1     |
| 1 | 1 | 1     | 1     | 1     | 1     |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Естественный порядок переменных обеспечивает тот факт, что если какой-то набор меньше другого набора, то он обязательно расположен в таблице истинности *выше* “большого” набора. Поэтому *если в таблице истинности (при естественном порядке набора переменных) вверху стоят нули, а затем единицы, то эта функция точно является монотонной*. Однако возможны инверсии, т. е. единица стоит до каких-то нулей, но функция является все равно монотонной (в этом случае наборы, соответствующие “верхней” единице и “нижнему” нулю должны быть *несравнимы*; можно проверить, что функция, задаваемая таблицей истинности *при естественном порядке набора переменных* (00010101), является монотонной);

- Класс  $S$  – класс *самодвойственных* функций. Функция  $n$  переменных называется самодвойственной, если на противоположных наборах она принимает противоположные значения, т. е. самодвойственная функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  удовлетворяет условию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

Например, функции  $f_1, f_2$  – являются самодвойственными, а функции  $f_3, f_4$  – не являются. Нетрудно устанавливается следующий факт.

**Теорема.** Классы функций  $T_0, T_1, L, M, S$  замкнуты.

Это утверждение следует непосредственно из определения самих этих классов, а также из определения замкнутости.

В теории булевых функций очень большое значение имеет следующая теорема Поста.

**Теорема Поста.** Для того чтобы некоторый набор функций  $K$  был полным, необходимо и достаточно, чтобы в него входили функции, не принадлежащие каждому из классов  $T_0, T_1, L, M, S$ .

Заметим, что необходимость этого утверждения очевидна, так как если бы все функции из набора  $K$  входили в один из перечисленных классов, то и все суперпозиции, а значит, и замыкание набора входило бы в этот класс и класс  $K$  не мог быть полным.

Достаточность этого утверждения доказывается довольно сложно, поэтому здесь не приводится.

Из этой теоремы следует довольно простой способ выяснения полноты некоторого набора функций. Для каждой из этих функций выясняется принадлежность к перечисленным выше классам. Результаты заносятся в так называемую *таблицу Поста* (в нашем примере эта таблица составлена для 4-х функций, причем знаком “+” отмечается принадлежность функции соответствующему классу, знак “–” означает, что функция в него не входит).

| $f$   | $T_0$ | $T_1$ | $L$ | $M$ | $S$ |
|-------|-------|-------|-----|-----|-----|
| $f_1$ | +     | –     | +   | –   | –   |
| $f_2$ | +     | –     | –   | –   | +   |
| $f_3$ | –     | +     | –   | –   | –   |
| $f_4$ | +     | +     | –   | +   | –   |

В соответствии с теоремой Поста набор функций будет полным тогда и только тогда, когда в каждом столбце таблицы Поста имеется хотя бы один минус. Таким образом, из приведенной таблицы следует, что данные 4 функции образуют полный набор, но эти функции не являются базисом. Из этих

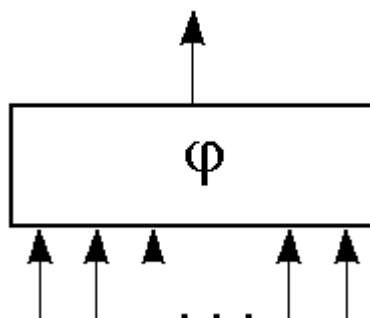
Непосредственно из таблицы Поста следует, что число базисных функций не может быть больше 5. Нетрудно доказать, что на самом деле это число меньше или равно 4.

## 8. Некоторые приложения теории булевых функций

Материал этого раздела не используется в контрольной работе, но используется в тестах, предлагаемых студентам для сдачи зачета. Примеры такого рода приведены в разд. 17 “Дополнительные задачи”.

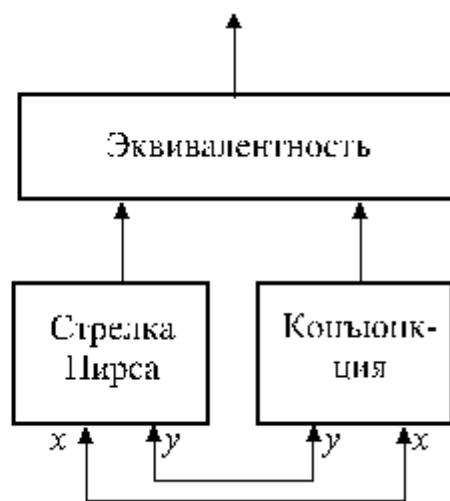
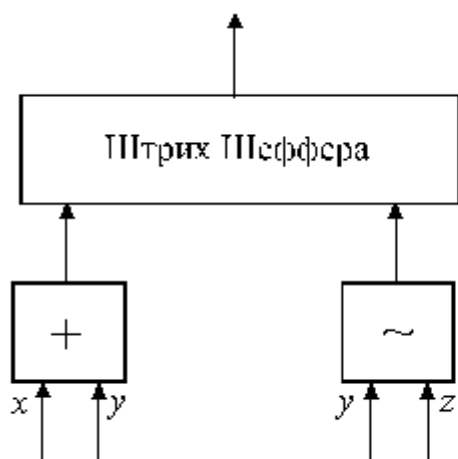
### 8.1. Функциональные элементы и схемы

Пусть имеется некоторое устройство, внутренняя структура которого нас не интересует, а известно лишь, что оно имеет  $n$  упорядоченных входов (занумерованных числами от 1 до  $n$ ) и один “выход”. На каждый из входов может подаваться один из двух сигналов: **0** или **1** (“отсутствие тока” или “наличие его”) и при каждом наборе сигналов на входе возникает один из двух сигналов **0** или **1** на выходе. Такое устройство называется *функциональным элементом* (ФЭ). ФЭ, соответствующий функции  $j$  от нескольких переменных, может быть изображен следующим образом:



Ясно, что каждому ФЭ соответствует некоторая булева функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Некоторые входы могут быть фиктивными (т. е. при любом наборе сигналов на остальных входах сигнал на выходе не зависит от сигнала на этом входе, и соответствующая булева функция зависит от меньшего числа переменных). Если имеется несколько ФЭ, то из них можно получать новые сложные ФЭ (например, один из входов ФЭ можно соединить с выходом другого. В этом случае полученное соединение соответствует суперпозиции двух функций. Можно также соединять некоторые входы, что означает отождествление некоторых переменных).

Следующие соединения, очевидно, являются логическими функциями:  $(x + y) \mid (y \sim z)$  и  $(x / y) \sim (x \times y)$ .



Более точно: будем называть соединение нескольких ФЭ *схемой*, если выполнены следующие естественные требования:

а) всякий ФЭ является схемой;

б) если  $S_0$  – схема и два ее входа соединены вместе, то получившаяся в результате конструкция  $S$  также является схемой;

в) если  $S_1$  и  $S_2$  – схемы, то схемой будет также конструкция  $S$ , полученная соединением какого-либо входа  $S_1$  с выходом  $S_2$ ;

г) всякая схема может быть построена из ФЭ за конечное число шагов при помощи конструкций, описанных в б, в.

Ясно, что не всякое соединение ФЭ является схемой.

*Соединение  $S$  конечного числа функциональных элементов является схемой тогда и только тогда, когда выполнены 3 условия:*

*среди ФЭ есть один и только один свободный выход (т.е. выход, не соединенный ни с каким входом);*

*каждый вход любого ФЭ может быть соединен не более чем с одним выходом другого ФЭ;*

*в соединении  $S$  нет циклов (т.е. нет такого упорядоченного набора ФЭ, когда вход следующего соединен с выходом предыдущего и вход первого соединен с выходом последнего. Цикл в соединении иначе называют обратной связью).*

Теперь посмотрим, как на языке схем перефразируется задача о полноте системы функций. Пусть имеется некоторый набор функциональных элементов  $j_1, j_2, \dots, j_n$  (точнее, типов ФЭ, т. е. считаем, что имеется неограниченное число элементов, реализующих каждую из функций  $j_k$ ). Спрашивается, при каких условиях любую булеву функцию можно реализовать при помощи схемы, состоящей из данных ФЭ. Из предыдущего ясно что ответ на этот вопрос дается теоремой Поста.

*Замечание.* Ясно, что при реализации описанных выше устройств необходимо учитывать, что для работы конкретных ФЭ требуется некоторое время, что влияет на фактор полноты ФЭ. Подробнее об этом можно узнать в [3].

Заметим, что на практике часто используются функции “конъюнкция” и “дизъюнкция”. Для них часто схемы изображаются несколько иначе. Дадим более точное определение. *Релейно-контактной схемой* или РКС будем называть некоторое соединение, состоящее из следующих элементов:

*переключателей* (это могут быть как механические устройства, так и лампы, электромагнитные реле и т. д.) Каждый переключатель может принимать значение **1** (через него пройдет ток) или **0** (через него ток не проходит). Будем считать, что любой переключатель соответствует либо логической переменной  $x$ , либо  $\bar{x}$ ;

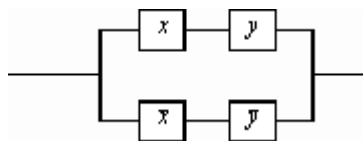
*проводников*, могущих соединять переключатели либо последовательно, либо параллельно (это соответствует замене ФЭ, определяющих конъюнкцию или дизъюнкцию);

*входа и выхода* из системы (вход и выход называются полюсами системы).

Иначе РКС называют *переключательной схемой* (*П-схемой*).

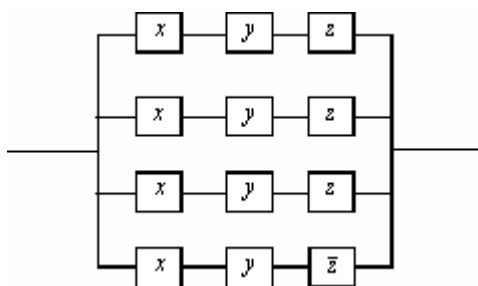
Будем говорить, что конкретная РКС принимает значение **1** при данных значениях переключателей, если через нее проходит ток, в противном случае мы считаем, что она принимает значение **0**.

Две РКС считаются *равносильными*, если они принимают одинаковые значения при одних и тех же значениях переключателей.

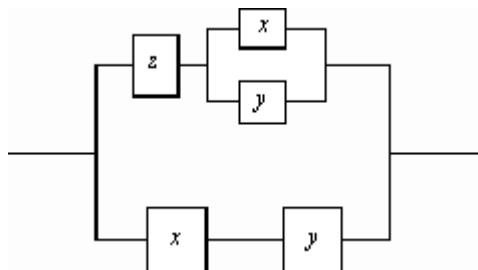


Очевидно, что любая суперпозиция функций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания может быть изображена в виде РКС. Например, функции  $f(x, y) = xy \vee \bar{x}\bar{y}$  соответствует следующая РКС.

Следующая РКС соответствует функции  $L = xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$  (в ней 12 переключателей).



После сокращения СДНФ по правилу Блейка можно получить равносильную формулу:  $L = xz \vee yz \vee x\bar{y}$ , для которой РКС будет иметь 6 переключателей. Если ставить целью уменьшение числа переключателей, то последнее выражение можно преобразовать к виду  $L = (x \vee y)z \vee xy$  (РКС будет иметь 5 переключателей).



## 8.2. Решение логических задач с помощью теории булевых функций

Суть применения методов теории булевых функций к решению логических задач состоит в том, что, имея конкретные условия логической задачи, стараются записать их в виде логической функции. При этом учитывается, что каждое высказывание может быть либо истинным, либо ложным и, значит, его можно обозначить логической переменной. В дальнейшем путем равносильных преобразований упрощают полученную формулу, что, как правило, приводит к ответу на все вопросы задачи, но иногда все-таки требуется применять логические рассуждения.

Покажем на ряде конкретных примеров, как использовать возможности теории булевых функций для решения элементарных логических задач.

**Пример 1.** Пытаясь вспомнить победителей прошлогоднего турнира, 5 бывших зрителей турнира заявили:

- 1) Антон был вторым, а Борис пятым.
- 2) Виктор был вторым, а Денис третьим.

3) Григорий был первым, а Борис третьим.

4) Антон был третьим, а Евгений шестым.

5) Виктор был третьим, а Евгений четвертым.

Впоследствии выяснилось, что каждый мог ошибиться, не более чем в одном высказывании. Каково было истинное распределение мест в турнире?

*Решение.* Будем обозначать высказывания зрителей  $X_k$ , где  $X$  – первая буква имени участника турнира, а  $k$  – номер места, которое он занял в турнире. В высказываниях зрителей одно высказывание может быть ложным, поэтому будут истинными дизъюнкции этих высказываний  $A_2 \vee B_5, B_2 \vee D_3, \Gamma_1 \vee B_3, A_3 \vee E_6, B_3 \vee E_4$ . Но тогда истинной будет конъюнкция:  $K = (A_2 \vee B_5)(B_2 \vee D_3)(\Gamma_1 \vee B_3)(A_3 \vee E_6)(B_3 \vee E_4) = 1$ .

Учитывая, что  $X_k X_n = 0$  при  $k \neq n$  и  $X_k Y_k = 0$  при  $X \neq Y$ , получаем путем последовательного раскрытия скобок в  $K$ :

$$\begin{aligned} K &= (A_2 D_3 \vee B_5 B_2 \vee B_5 D_3)(\Gamma_1 A_3 \vee \Gamma_1 E_6 \vee B_3 E_6)(B_3 \vee E_4) = \\ &= (A_2 D_3 \Gamma_1 E_6 \vee B_5 B_2 \Gamma_1 A_3 \vee B_5 B_2 \Gamma_1 E_6 \vee B_5 D_3 \Gamma_1 E_6)(B_3 \vee E_4) = A_3 B_5 B_2 \Gamma_1 E_4 = 1 \end{aligned}$$

Полученное соотношение дает распределение первых 5 мест и автоматически получаем, что Денис был шестым т. е.  $D_6 = 1$ .

**Пример 2.** По подозрению в совершении преступления задержали Брауна, Джонса и Смита. Вот что они показали:

Браун: Я совершил это. Джонс не виноват.

Джонс: Браун не виноват. Преступление совершил Смит.

Смит: Я не виноват. Виновен Браун.

В процессе следствия выяснилось, что у одного из них оба утверждения ложны, у другого одно ложно, одно истинно, а у третьего оба истинны, а также, что преступник только один. Требуется определить имя преступника, кто из них говорил правду, а кто нет.

*Решение.* Обозначим буквами  $B, D, C$  высказывания: виноват Браун, виноват Джонс, виноват Смит соответственно. Тогда утверждения, высказанные задержанными, можно записать в виде конъюнкций

$\overline{BD}, \overline{BC}, \overline{BC}$ , из которых по условию задачи, две ложны, а одна истинна. Истинной будет формула  $K = \overline{BD} \vee \overline{BC} \vee \overline{BC} = 1$ , но из этой формулы решение получится только дополнительным рассуждением: пусть  $B = 1$ , тогда по условию  $C = 0$  и  $D = 0$ . Но тогда из трех конъюнкций, составляющих  $K$  две будут верны:  $\overline{BD}, \overline{BC}$ , а это противоречит условию. Значит  $B = 0$ . Видно, что  $C = 1$  удовлетворяет условию задачи, и это решение единственно, так как если предположить, что  $D = 1$ , то это будет означать, что  $\overline{BC} \vee \overline{BC} = 1$ , а значит, что либо  $B$ , либо  $C$  равно 1, но это противоречит тому, что преступник только один.

Таким образом, преступник – Смит, оба его высказывания ложны, у Брауна одно высказывание ложно, одно нет, а Джонс сказал правду.

Все эти рассуждения используются не только для решения логических задач (которые действительно приходится решать следователям), но и для составления игровых программ (компьютерная игра ШЕРЛОК, содержащая больше 60 тыс. логических задач, составлена с использованием тех же самых конъюнкций, дизъюнкций и отрицаний).



## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Приведенный ниже материал далеко не исчерпывает разнообразные разделы общей теории графов, содержит некоторые факты из общей теории, (которые за неимением времени можно даже опускать), а основное внимание уделяется приложениям к теории сетей связи. На взгляд авторов центральной частью раздела является нахождение путей и сечений (разрезов) методами булевой алгебры и теорема Форда–Фалкерсона. Именно из этих разделов и предлагаются индивидуальные задания.

### 9. Общие понятия теории графов

*Графом называется набор точек (эти точки называются вершинами), некоторые из которых являются смежными (или соседними). Считается, что смежные вершины соединены между собой ребрами (или дугами).*

Таким образом, ребро определяется парой вершин. Два ребра, у которых есть общая вершина, также называются смежными (или соседними).

Граф называется *ориентированным (или орграфом)*, если некоторые ребра имеют *направление*. Это означает, что в орграфе некоторая вершина может быть соединена с другой вершиной, а обратного соединения нет. Геометрически граф часто изображают точками плоскости, причем соседние вершины соединены дугами (для орграфа некоторые дуги имеют направление, что обычно отмечают стрелкой).

Помимо этого, в теории графов рассматриваются также *мультиграфы* – это такие графы, в которых могут быть *петли* (т. е. некоторая вершина соединена сама с собой ребром) или некоторые пары вершины могут быть соединены между собой несколькими ребрами.

*Маршрут* в графе – это последовательность соседних (смежных) вершин. Ясно, что можно определить маршрут и как последовательность смежных ребер (в этом случае ребра приобретают *направление*). Заметим, что в маршруте могут повторяться вершины, но не ребра. Маршрут называется *циклом*, если в нем первая вершина совпадает с последней.

*Путь* в графе (иногда говорят простой путь) – это маршрут без повторения вершин (а значит, и ребер).

*Контур* – это цикл без повторения вершин, за исключением первой вершины, совпадающей с последней.

Последовательности вершин (рис. 1): 1–2–3–4–2–5 не простой путь, а маршрут; последовательности 1–2–3–4–7–5 и 1–2–5 – простые пути; 1–2–3–4–2–5–6–1 – это цикл (но не контур); 1–2–5–6–1 – это контур.

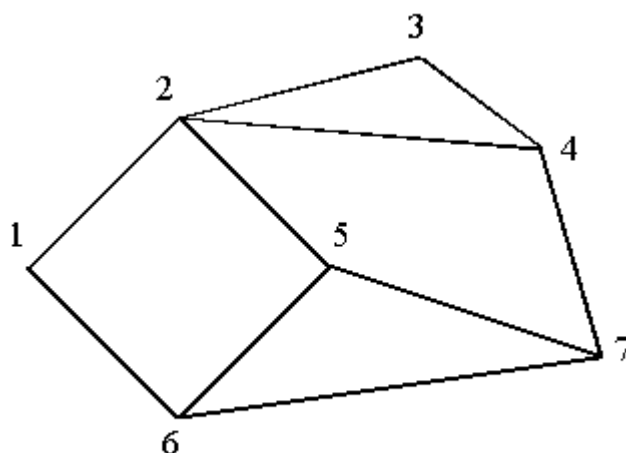


Рис. 1

Если имеется некоторый маршрут из вершины  $t$  в вершину  $s$ , заданный в виде последовательности ребер, которые в этом случае приобрели направление, и если в этот маршрут входит ребро, соединяющее



вершины  $(i, j)$ , то это ребро по отношению к вершине  $i$  называют иногда *прямой дугой*, а по отношению к вершине  $j$  – *обратной дугой* (или обратным ребром).

**Граф называется связным, если любые две его вершины можно соединить маршрутом (или путем).** На рис. 1 изображен связный граф.

Ребро, при удалении которого граф перестает быть связным, иногда называют *мостом* или *перешейком*.

Следующее определение имеет смысл только для графов или мультиграфов без петель (но не для орграфов).

*Степень* вершины – это число ребер, входящих в эту вершину. Вершина называется *висячей*, если ее степень равна единице.

**Лемма 1.** Если степень всех вершин в графе больше или равна двум, то граф обязательно содержит контур.

*Доказательство.* Действительно, выйдя из некоторой вершины и войдя в другую, всегда можно выйти из нее по другому ребру, так как степень вершины больше или равна двум. Выйти из вершины по новому ребру невозможно только в том случае, если эта вершина уже встречалась, а это означает, что можно выделить контур из вершин этого графа.

## 10. Эйлеровы и полуэйлеровы графы

Именно с задач, поставленных и решенных в этом разделе, началась теория графов. Философ Иммануил Кант, гуляя по городу Кенигсбергу (сейчас этот город называется Калининград), поставил задачу (1736), известную в математике как *задача о семи кенигсбергских мостах*: можно ли пройти по всем этим мостам и при этом вернуться в исходную точку так, чтобы по каждому мосту пройти только один раз. Наш петербургский знаменитый математик швейцарского происхождения Леонард Эйлер блестяще решил эту задачу. На рис. 2 изображена схема семи мостов Кенигсберга (заметим, что сейчас осталось только два из них), а также мультиграф, соответствующий этой схеме (при построении графа считалось, что каждый берег реки и острова – это вершины графа, а мосты – его ребра; видно, что в данном случае у нас получился мультиграф без петель).

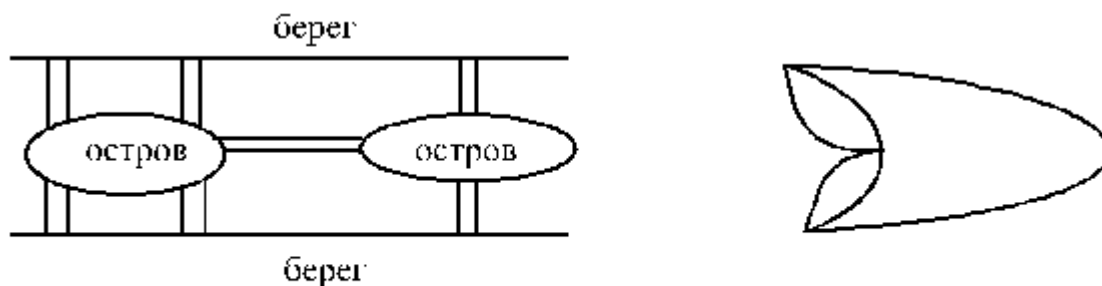


Рис. 2

В соответствии с поставленной Кантом (и решенной Эйлером) задачей можно дать следующие определения:

Граф (или мультиграф без петель) называется *эйлеровым*, если существует *цикл без повторения ребер* (такой цикл называют *эйлеровым*), обходящий все вершины графа. Граф называется *полуэйлеровым*, если существует *маршрут без повторения ребер* (эйлеров путь), обходящий все ребра графа ровно один раз. На рис. 3 изображены: а – эйлеров граф, б – полуэйлеров граф и в – граф, не являющийся ни эйлеровым, ни полуэйлеровым (люди старшего поколения знают, что в школах раньше было много загадок типа “можно ли нарисовать данную фигуру не отрывая ручку от бумаги”, что и соответствует эйлерову или полуэйлерову графу).

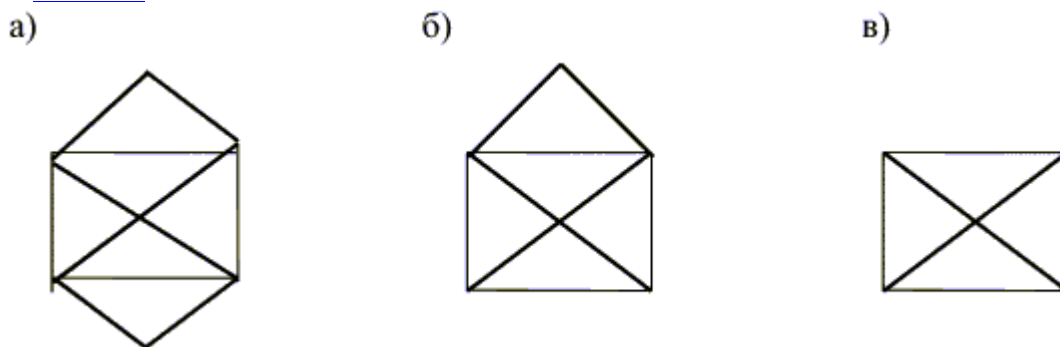


Рис. 3

**Теорема (Эйлер).** Для того чтобы данный связный граф (не орграф, но, возможно, мультиграф без петель) был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы степени всех вершин были четными. Данный связный граф будет полужэйлеровым тогда и только тогда, когда степени двух вершин будут нечетными, а степени остальных вершин – четными.

Доказательство этой теоремы начнем с так называемой леммы о рукопожатиях. Название этой леммы связано с тем, что эта лемма отвечает на следующий вопрос: У Вас собрались гости. Некоторые из них здороваются друг с другом посредством рукопожатий. Какими свойствами обладает число таких людей? Ответ дается следующей достаточно простой леммой.

**Лемма о рукопожатиях.** Число вершин в графе (или мультиграфе без петель), имеющих нечетную степень, четно.

**Доказательство леммы.** Заметим, что сумма степеней всех вершин в графе (или мультиграфе без петель) должна быть четной. Это следует из того, что если взять вершины, вообще не связанные друг с другом, то сумма степеней этих вершин равна нулю. Прибавляя любое ребро, которое связывает две вершины, увеличиваем сумму всех степеней на 2 единицы. Таким образом, сумма всех степеней вершин четна. Удаляя из этой суммы степени четных вершин, получим, что сумма степеней нечетных вершин, должна быть четной. Это значит, что само число таких вершин должно быть четным. Лемма доказана.

С точки зрения задачи о рукопожатиях это означает, что число гостей, которые поздоровались за руку нечетное число раз, должно быть четным. Перейдем к доказательству теоремы Эйлера.

а) Пусть граф является эйлеровым. Тогда в нем имеется эйлеров цикл, который должен прийти в вершину по одному ребру и покинуть его по другому, так как каждое ребро должно использоваться только один раз (т. е. каждый “заход” в вершину и “выход” из нее дает 2 степени вершины). Таким образом, сумма степеней всех вершин должна быть четной (и равна удвоенному числу “заходов” в эту вершину при обходе эйлерова цикла).

б) Пусть в данном связном графе (или мультиграфе без петель) степень любой вершины четна (т. е. степень больше или равна 2, так как нулевая степень приводит к несвязному графу). Докажем, что в нем имеется эйлеров цикл. Доказательство проведем индукцией по числу вершин. В случае, когда в связном графе всего 2 вершины и обе они имеют четную степень (в этом случае имеем мультиграф, один из которых изображен на рис. 4), ясно, что в этом случае имеется эйлеров цикл (при любой четной степени этих двух вершин).

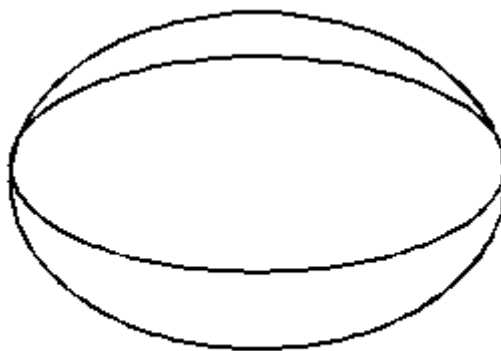


Рис. 4

Предположим, что наше утверждение верно для всех связных графов, число вершин в которых строго меньше  $n$ , и докажем его для графа, имеющего  $n$  вершин.

Заметим, что по лемме 1 в этом графе есть контур (степень всех вершин больше или равна 2). Если этот контур содержит все ребра, то этот контур сам является эйлеровым циклом (а граф эйлеровым). Удалим все эти ребра из графа и те вершины, которые после удаления ребер стали иметь нулевую степень. Тогда получим новый граф (который может быть несвязным), но в этом новом графе все вершины обязательно имеют *четную* степень (так как при удалении ребер контура степень каждой вершины, входящей в этот контур, уменьшается на 2). Новый граф распадается на “компоненты связности”, каждая из которых должна иметь общую вершину с удаленным контуром (иначе первоначальный граф не был бы связным), степени всех вершин каждой компоненты связности четны и число вершин в ней строго меньше  $n$ , т. е. по индукционному предположению эта компонента имеет эйлеров цикл. Теперь можем построить эйлеров цикл в данном графе следующим образом. Обходим последовательно ребра удаленного контура. Если мы пришли в вершину, общую для контура и какой-то компоненты связности, то обходим по эйлерову циклу эту компоненту, возвращаемся при этом в вершину контура и идем по этому контуру дальше. Тем самым все ребра будут пройдены и каждое только один раз (все это схематично изображено на рис. 5: сначала начинаем обходить контур ABCDEA. Пройдя ребро AB, проходим “верхний” граф, затем возвращаемся в т. В и далее идем по ребру AC, обходим “правый” граф и т. д.). Утверждение Б доказано.

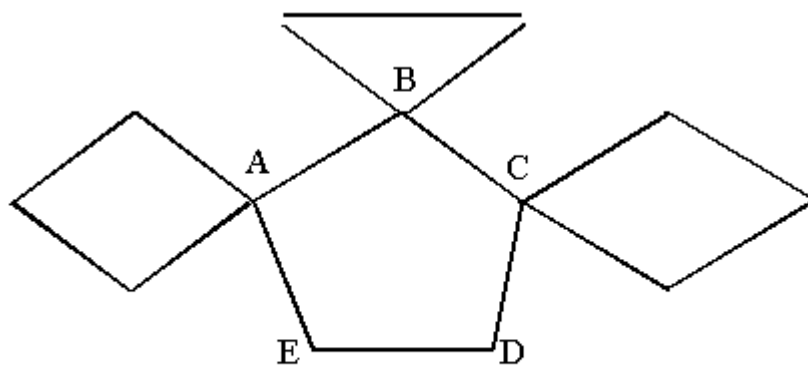


Рис. 5

в) Пусть теперь граф полуэйлеров. Это значит, что он имеет эйлеров путь, начинающийся в одной вершине и заканчивающийся в другой. Видно, что обе эти вершины должны иметь нечетную степень, а степень остальных четная.

г) Обратно. Пусть в связном графе вершины  $k$  и  $p$  имеют нечетную степень, а остальные вершины – четную. Тогда возможны 2 случая: эти вершины связаны ребром или не связаны. В первом случае удалим это ребро, а во втором добавим. В обоих случаях степень всех вершин станет четной. Заметим, что в случае удаления ребра, новый граф может стать несвязным и иметь 2 компоненты связности (в этом случае удаляемое ребро было мостом), каждая из которых или весь новый граф имеет эйлеров цикл. Теперь если новый граф имеет эйлеров цикл, то начнем (и закончим его) в вершине с нечетной степенью и далее

добавим ребро или удалим его. В обоих случаях получим эйлеров путь. Если новый граф имеет 2 компоненты связности, то, пройдя одну из них по эйлерову циклу, начиная и заканчивая в вершине (которая в первоначальном графе имела нечетную степень), затем добавим удаленное ребро (мост), пройдем его, попадем в другую вершину, которая ранее имела нечетную степень, и пройдем вторую компоненту связности по эйлерову циклу. Во всех разобранных случаях получим эйлеров путь, который начался в одной из вершин с нечетной степенью и закончился в другой. Теорема доказана.

Заметим, что все 4 вершины мультиграфа (рис. 2), соответствующего мостам Кенигсберга, имеют степень 3. Поэтому эйлеров цикл или путь невозможен.

**Примечание.** Если граф (или мультиграф без петель) содержит  $2k$  вершин нечетной степени, то его можно разбить на  $k$  полуэйлеровых графов (т. е. нарисовать  $k$  росчерками пера). Доказательство аналогично доказательству теоремы Эйлера.

Имеется простой алгоритм (так называемый *алгоритм Флери*) для нахождения эйлерова цикла (конечно, если этот цикл существует), который состоит в следующем: *начинаем с любой вершины и “стираем” пройденные ребра. При этом по мосту (перешейку) проходим только, если нет других возможностей.*

Очевидно, что для того чтобы построить эйлеров путь достаточно использовать алгоритм Флери, который надо начать с вершины, имеющей нечетную степень.

Рассмотрим некоторые приложения теоремы Эйлера, которые в основном связаны с так называемой *задачей китайского почтальона*.

Пусть имеется некоторый граф (связный), ребрам которого приписаны некоторые числа, называемые *веса* ребер (часто, но не всегда!, в приложениях вес ребра – это его длина). Требуется найти такой цикл, при котором каждое ребро проходится *по крайней мере один раз* и суммарный вес всех ребер, вошедших в цикл, минимален. Заметим, что если граф является эйлеровым, то любой эйлеров цикл решает поставленную задачу (для эйлерова графа веса роли не играют).

Эта задача имеет много приложений, например, поливка улиц одной машиной (здесь ребра графа – дороги, а перекрестки – вершины; веса – это длины дорог), а также сбор мусора, доставка почты или даже наилучший маршрут для осмотра музея или уборка помещений и коридоров в больших учреждениях.

Заметим, что имеется алгоритм решения задачи китайского почтальона, но он требует достаточно длительного описания.

Кратко рассмотрим проблему, связанную с возможным обходом всех вершин в графе: *существует ли в данном (связном) графе цикл (или маршрут), обходящий каждую вершину (кроме первой) только один раз*. Если такой цикл (маршрут) существует (в этом случае такой цикл будет контуром, а маршрут – путем), то граф называется *гамильтоновым* (*полугамильтоновым*), и соответствующий цикл (путь) также называют *гамильтоновым циклом* (*путем*).

На рис. 6 изображены гамильтонов, полугамильтонов и не гамильтонов графы.

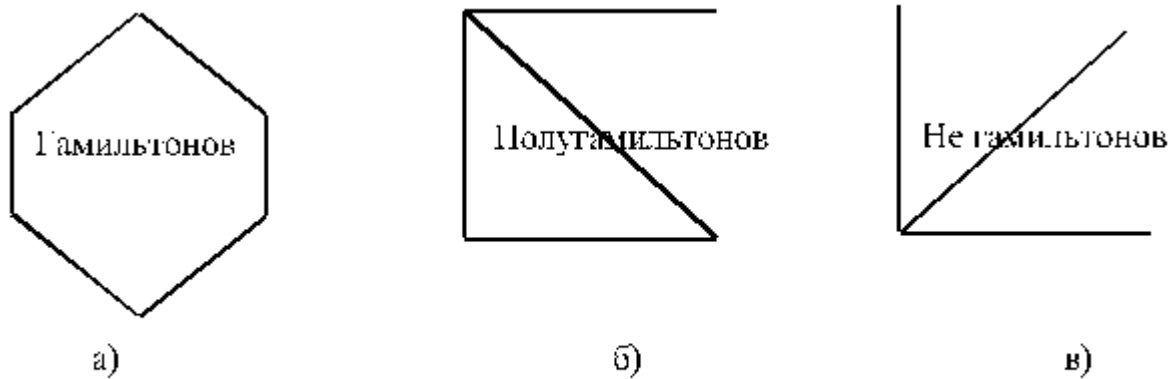


Рис. 6

Несмотря на сходство постановки задач для гамильтоновых графов с эйлеровыми, “хорошего” решения для гамильтоновых графов нет. Вообще, о гамильтоновых графах известно очень мало. В основном – это теоремы типа “если в графе достаточное число ребер, то он гамильтонов”. Ясно, что теоремы такого типа не могут дать *критерия* гамильтонова графа, (рис. 6,а), поскольку в графах такого типа вершин может быть очень много, а ребер сравнительно мало).

Приведем без доказательства самую известную теорему.

**Теорема** (Дирак, 1952). Если в связном графе с  $n$  вершинами (при  $n \geq 3$ ) степени всех вершин больше или равны  $n/2$ , то граф гамильтонов.

## 11. Матрицы и графы. Нахождение путей и сечений с помощью структурной матрицы

Трудно переоценить роль матриц в теории графов (в частности, матрицы полезны, чтобы данный граф более “легко” воспринимался компьютером). Перечислим наиболее известные матрицы.

1. **Матрица смежности.** Это квадратная матрица порядка  $n$  ( $n$  – число вершин), в которой нули стоят по главной диагонали (если в графе нет петель, а если петли есть в вершине  $k$  (и число этих петель равно  $p$ ), то на главной диагонали в строчке с номером  $k$  стоит число  $p$ ). Если вершина  $i$  связана с вершиной  $j$  одним ребром, то элемент матрицы смежности  $a_{ij}$  равен 1, если эти вершины связаны  $s$  ребрами, то  $a_{ij} = s$ . Аналогичным образом строятся матрицы смежности для орграфов и для мультиграфов.

Легко видеть, что матрица  $B = A^2 = AA$  составлена из целых чисел  $b_{ij}$ , которые равны числу путей длины 2, соединяющих вершины  $i$  и  $j$ . Понятно, что  $A^3$  составлена из чисел, равных числу путей длины 3 (т. е. путей из 3-х ребер) из вершины  $i$  в вершину  $j$  и т. д.

2. **Матрица инциденций** – это матрица размера  $n \times m$ , где  $n$  – число вершин, а  $m$  – число ребер графа, при этом ее элементы  $k_{ij}$  равны 1, если вершина с номером  $i$  является для ребра с номером  $j$  начальной или конечной (если ребро неориентировано) и начальной для ориентированных ребер. Заметим, что матрица инциденций сравнительно редко используется, так как в современных условиях (где число ребер часто очень велико) она имеет слишком большое число столбцов.
3. **Структурная матрица.** Именно эта матрица имеет особое значение в теории сетей связи. Структурная матрица – это символьная матрица порядка  $n$ . Она составляется следующим образом: на главной диагонали стоит 1, т. е.  $a_{ii} = 1$ , остальные элементы – это символьные обозначения ребер (если вершины  $i$  и  $j$  не соединены ребром, то  $a_{ij} = 0$ ). При этом, если при  $i < j$  вершины  $i$  и  $j$  соединены ребром  $a$ , то элемент  $s_{ij} = a$ , при  $i > j$  – это отрицание  $a$ , которое обычно отмечается чертой сверху. Если связи вершины  $i$  с вершиной  $j$  нет, то соответствующий элемент равен 0, структурная матрица может составляться и для орграфа и для мультиграфа без петель (здесь если два ребра  $a$  и  $b$  соединяют две вершины, то соответствующий элемент при  $i < j$  равен  $a \vee b$ , а при  $i > j$  этот элемент равен  $\bar{a} \vee \bar{b}$ ).

Отметим, что в учебных целях, когда действия с матрицами осуществляются студентами “вручную” (число вершин в графе невелико), можно обозначать ребра латинскими буквами без индексов  $a, b, c$  и т. д., но при использовании компьютера гораздо удобнее обозначать ребра  $a(i, j)$ , если это ребро соединяет вершины  $i$  и  $j$  при  $i < j$  и с чертой сверху, если  $i > j$ .

**Теорема.** Для того чтобы найти все пути (простые) из вершины  $i$  в вершину  $j$  достаточно раскрыть минор  $M(j, i)$  структурной матрицы методами булевой алгебры. При этом раскрытие минора производится обычными действиями с определителями, но при этом сложение заменяется дизъюнкцией, умножение – конъюнкцией, знаки умножения на числа не используются.

Подробно доказывать эту теорему не будем, но отметим, что определитель равен сумме (в данном случае дизъюнкции) элементов, взятых по одному из каждой строчки и каждого столбца с определенным знаком. В нашем случае знаки не присутствуют, а значит, любой член раскрытия определителя всей структурной матрицы  $S$  соответствует циклу в графе. Если же брать минор  $M(j, i)$ , то его раскрытие соответствует тем членам определителя, в которых имелся элемент  $s(j, i)$ , но без самого этого элемента (таким образом, индексы  $i$  и  $j$  встречаются вместо двух только один раз). Это и означает, что получаем маршрут от вершины с номером  $i$  к вершине с номером  $j$ .

Понятно, что раскрытие минора методами булевой алгебры предусматривает, что верны следующие соотношения:  $1 \vee a = 1$ ,  $\overline{a}a = 0$  (это свойство нужно, для того чтобы не проходить по одному ребру дважды в противоположных направлениях), а также используется правило простого поглощения ( $x \vee xy = x$ ). Видно, что если не использовать правило поглощения, то получим все маршруты (без повторения ребер), связывающие вершины  $i$  и  $j$ .

**Примечание.** 1. Если граф не ориентирован, то миноры  $M(j, i)$  и  $M(i, j)$  совпадают.

2. После получения ответа, черточки над обозначениями ребер (т. е. отрицания) можно убрать (на самом деле “черта” над ребром означает, что ребро проходится от вершины с большим номером к вершине с меньшим номером). Затем рекомендуется записать каждый путь по порядку прохождения ребер (в этом случае удобны обозначения ребер с индексами вершин).

*Сечением (разрезом)* между вершинами  $i$  и  $j$  называется избыточный набор ребер, при удалении которых из графа теряется связь между данными вершинами (не существует пути из вершины  $i$  в вершину  $j$ ). Заметим, что сечений между данными вершинами может быть много, и они могут содержать разное количество ребер.

Слово “избыточный” означает, что если любое ребро из сечения снова вернуть в граф, то связь восстановится.

Естественно, что если известны все пути из вершины  $i$  в вершину  $j$ , причем эти пути заданы в виде ДНФ, т. е. дизъюнктивной нормальной формы (а именно такой вид получается после раскрытия соответствующего минора структурной матрицы), то все сечения между этими вершинами можно получить отрицанием этих путей (по правилу де Моргана конъюнкцию заменить на дизъюнкцию и наоборот), затем полученное выражение снова привести к ДНФ, используя раскрытие скобок по обычным правилам, при этом правило поглощения обеспечит избыточность набора ребер в каждом сечении. Ясно, что знаки отрицания (черточки над символами ребер) можно опустить. Пример на эту тему приведен в разд. 15 (примеры решения типовых задач).

## 12. Сети, потоки в сетях. Теорема Форда – Фалкерсона

*Сетью называется связный граф (обычно, не орграф и не мультиграф), в котором заданы “пропускные способности” ребер, т. е. числа  $q_{ij}$ .* Это числа большие или равные нулю, причем  $q_{ij} = 0$  тогда и только тогда, когда нет ребра, соединяющего вершины  $i$  и  $j$ . Таким образом, можно считать, что пропускные способности ребер заданы для любой пары вершин. В дискретной математике пропускные способности ребер, как и все возникающие константы, считаются целыми числами (или рациональными, что одно и то же, так как рациональные числа отличаются от целых только единицами измерения). Заметим, что сети имеют огромные приложения, в частности, “сети планирования” (имеется в виду планирование производства некоторых новых, достаточно сложных изделий), где “пропускные способности” ребер – это время, за которое нужно из нескольких узлов изделия (вершин графа) получить другой (более сложный)



узел. Сетевое планирование здесь не исследуется, так как гораздо больший интерес представляет *сеть связи*, где пропускные способности ребер – это обычно “количество одновременных разговоров”, которые могут происходить между телефонными узлами (вершинами графа).

*Потоком в сети между вершиной  $t$  (источником) и  $s$  (стоком) называется набор чисел  $c_{ij}$ , (т. е. количество условного “груза”, перевозимого из вершины с номером  $i$  в вершину с номером  $j$ ), удовлетворяющих четырем условиям:*

- 1) числа  $c_{ij} \leq 0$ , причем если  $c_{ij} > 0$ , то  $c_{ji} = 0$  (нет встречных перевозок);
- 2) числа  $c_{ij} \leq q_{ij}$  (соответствующих пропускных способностей ребер);
- 3) если вершина с номером  $i$  – промежуточная (не совпадает с источником и стоком), то

$$\sum_j c_{ij} = \sum_k c_{ki},$$

т. е. количество “груза”, вывозимого из вершины  $i$ , равно количеству “груза”, ввозимого в эту вершину;

- 4) количество “груза”, вывозимого из источника  $t$ , должно быть равно количеству груза, ввозимого в сток  $s$ :

$$\sum_j c_{tj} = \sum_i c_{is} = A.$$

Число  $A$  называется *величиной* данного потока или просто *потоком* между  $t$  и  $s$ .

Для дальнейшего нам нужно следующее определение:

*Пусть имеется некоторое сечение между вершинами  $t$  и  $s$ . Тогда величиной сечения называется сумма пропускных способностей ребер, входящих в это сечение. Сечение называется минимальным (максимальным), если его величина минимальна (максимальна).*

*Теорема Форда – Фалкерсона (1955). Максимальный поток между вершинами  $t$  и  $s$  равен величине минимального сечения между этими вершинами.*

Доказательство этой теоремы является *конструктивным* (т. е. показывает, как найти нужный максимальный поток), поэтому приводится ниже.

1. Докажем сначала, что *любой* поток между вершинами  $t$  и  $s$  меньше или равен величине *любого* сечения. Пусть дан некоторый поток и некоторое сечение. Величина данного потока складывается из величин “грузов”, перевозимых по всем возможным *путям* из вершины  $t$  в  $s$ . Каждый такой путь обязан иметь общее ребро с данным сечением. Так как по каждому ребру сечения суммарно нельзя перевести “груза” больше, чем его пропускная способность, поэтому сумма всех грузов меньше или равна, сумме всех пропускных способностей ребер данного сечения. Утверждение доказано.

Отсюда следует, что *любой* поток меньше или равен величине минимального сечения, а значит и максимальный поток меньше или равен величине минимального сечения.

2. Докажем теперь обратное неравенство. Пусть имеется некоторый поток  $c_{ij}$  (какой-то поток всегда существует, например, нулевой, когда все  $c_{ij} = 0$ ). Будем помечать вершины графа, причем считаем, что все помеченные вершины образуют множество  $Y$ . Пометки вершин производятся от источника. Каждая пометка вершины (если эта вершина может быть помечена) состоит из двух чисел: первое – это “+” или “-” номер вершины (из  $Y$ ), с которой связана новая помечаемая вершина, и второе – (обязательно должно быть положительным) – это фактически та добавка к потоку, которая может быть дополнительно “довезена” в эту вершину из источника по сравнению с исходным потоком.

Более точно, множество помеченных вершин  $Y$  образуется следующим образом:

источник  $t$  принадлежит  $Y$  и его пометка  $(0, \infty)$ ; второе число, условно говоря, равно бесконечности – что для дискретной математики означает, что это настолько большое число, как нам понадобится;

если вершина  $i$  принадлежит  $Y$  и  $c_{ij} < q_{ij}$  (дуга  $(i, j)$  – *прямая и ненасыщенная*), то вершина  $j$  также принадлежит  $Y$  и пометка вершины  $j$  равна  $(+i, \delta_j)$ , где  $\delta_j > 0$  равно  $\delta_j = \min \{\delta_i, q_{ij} - c_{ij}\}$ . Заметим, что здесь число  $\delta_i$  – это второе число уже помеченной вершины  $i$ , а знак  $+$  перед номером  $i$  означает, что дуга, связывающая вершины  $(i, j)$  является прямой (и ненасыщенной);

если вершина  $k$  принадлежит  $Y$  и  $c_{jk} > 0$  (*обратная дуга*), то вершина с номером  $j$  также должна принадлежать  $Y$  и ее пометка равна  $(-k, \delta_j)$ , где знак минус означает, что вершина  $j$  связана с уже помеченной вершиной  $k$  *обратной дугой*,  $\delta_j = \min \{\delta_k, q_{jk} + c_{jk}\}$ , причем очевидно, что  $\delta_j$  также строго больше нуля. Таким образом, построение множества  $Y$  является *индуктивным*, т. е. новая вершина добавляется в  $Y$ , если она связана с некоторой вершиной *уже входящей* в  $Y$  либо прямой ненасыщенной дугой, либо обратной дугой.

После того как построение множества  $Y$  закончено (к нему нельзя добавить новых вершин), возможны 2 случая.

1. Сток (т. е. вершина с номером  $s$ ) не входит в множество вершин  $Y$ . Тогда обозначим множество вершин, не входящих в  $Y$  через  $Z$ . Наш граф по условию является связным, поэтому из  $Y$ , в  $Z$  идут некоторые ребра. По правилам построения  $Y$  все эти ребра являются прямыми насыщенными дугами (рис. 7).

Ребра, идущие из множества  $Y$  в  $Z$ , образуют сечение между вершинами  $t$  и  $s$ . Видно также, что сумма пропускных способностей ребер этого сечения (а все эти ребра являются прямыми, насыщенными) равна потоку из  $t$  в  $s$ . Значит, данный поток является максимальным (так как он равен величине некоторого сечения), а данное сечение является минимальным.

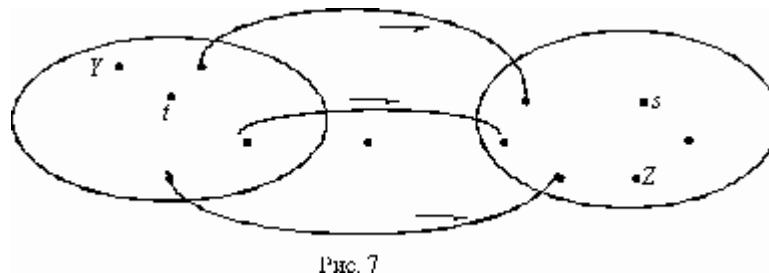


Рис. 7

2. Вершина  $s$  также входит в  $Y$ , и пусть второе число ее пометки  $\delta_s > 0$ . Тогда, очевидно, что между вершинами  $t$  и  $s$  существует *цепь* (состоящая из направленных ребер – прямых и обратных дуг), соединяющая эти вершины

Схематично это представлено на рис. 8.

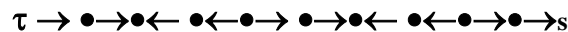


Рис. 8

Заметим, что дуга, выходящая из источника, и дуга, входящая в сток, должны быть обязательно прямыми. Прибавим  $\delta_s$  к  $c_{ij}$  для прямых дуг этой цепи (по построению видно, что полученное число будет меньше или равно  $q_{ij}$ ) и вычтем это  $\delta_s$  из  $c_{ij}$  для обратных дуг (может получиться отрицательное число, но оно обязательно будет по абсолютной величине меньше  $q_{ij}$ , так как по построению  $\delta_s \leq c_{ij} + q_{ij}$ , а это означает, что обратная дуга меняет направление, становится прямой дугой и его “нагрузка” будет равна

модулю числа  $|c_{ij} - \delta_s| \leq q_{ij}$ ). Тогда новые числа для дуг, входящих в нашу цепь, а также “старые”  $c_{ij}$  для всех дуг, не входящих в нашу цепь, образуют новый поток из вершины  $t$  в вершину  $s$  (легко проверить простым рассуждением, что для новых чисел выполняются условия (1)–(4)). Кроме того, величина нового



потока по сравнению со старым увеличилась на  $\delta_s > 0$ . Для нового потока снова проведем ту же процедуру и т. д.

Так как каждый раз величина потока увеличивается, по крайней мере, на 1 (пропускные способности ребер являются целыми числами), а величина максимального потока ограничена (величиной минимального сечения), то эта процедура не может продолжаться бесконечно и, значит, на каком-то шаге получим поток, для которого вершина  $s$  не входит в  $Y$ , т. е. поток является максимальным и величина его равна величине минимального сечения. Теорема доказана.

Рассуждение теоремы Форда – Фалкерсона фактически является алгоритмом нахождения максимального потока между двумя вершинами (или доказательством того, что этот поток является максимальным). Подробный пример на эту тему приведен в разд. 15 “Решение типовых задач”.

*Примечание.* Если в данном графе с пропускными способностями ребер (т. е. *сети*) имеется несколько источников и несколько стоков, то описанный выше алгоритм можно применить следующим образом. Вводим новый источник и новый сток, причем новый источник соединяем ребрами со всеми источниками, а новый сток – со всеми стоками, при этом пропускные способности новых ребер считаем сколь угодно большими числами, так что эти дуги в любом возможном потоке были бы ненасыщенными (напомним, что ребра, идущие из источника и ребра, идущие в сток всегда являются *прямыми дугами*). После этого для нового графа решаем задачу о максимальном потоке (из *одного* нового источника в *один* новый сток). Решив ее, *стираем* все введенные ребра и вершины.

Рассмотрим еще некоторые вопросы (достаточно общего характера) из теории графов. Заметим, что в следующих разделах мы приводим только самые простые доказательства, а основные доказательства приведены в книге Р. Уилсона [6].

### 13. Раскраска графа

Раскрашивать можно как ребра графа, так и вершины. Коснемся сначала задачи о раскраске вершин, при этом считаем, что граф не ориентирован и не является мультиграфом.

*Задача.* Раскрасить вершины графа так, чтобы любые две смежные вершины были раскрашены в *разные* цвета, при этом число использованных цветов должно быть *наименьшим*. Это число называется *хроматическим* (цветным) *числом* графа, будем его обозначать  $\alpha = \alpha(G)$  (если  $G$  – данный граф). Если число  $k \geq \alpha$ , то граф называется *k-раскрашиваемым*.

Функцией Гранди называется функция на вершинах графа, отображающая вершины в множество  $\{1, 2, \dots, a\}$ , причем если вершина  $x_i$  окрашена в цвет с номером  $k$ , то функция Гранди  $h(x_i) = k$ .

Ясно, что для данного графа хроматическое число является единственным, но функций Гранди может быть очень много. Естественно, что найти хотя бы одну функцию Гранди – это значит, найти одну из возможных “наилучших” раскрасок (таких раскрасок может быть много).

Заметим, что если данный граф является *полным*, т. е. *любые две вершины являются смежными*, то хроматическое число такого графа равно  $n$ , где  $n$  – число вершин.

Для дальнейшего понадобится следующее определение.

Набор вершин графа называется *максимальной независимой системой* (МНС), если любые две вершины из этого набора не являются смежными и нельзя включить в этот набор *другую* вершину, чтобы это условие сохранилось. Заметим, что нахождение МНС в графе достаточно просто: берем произвольную вершину, затем находим *любую* вершину, не смежную с ней, затем находим вершину, не смежную с отобранными вершинами и т. д. Естественно, что МНС в данном графе может быть много и они могут содержать разное число вершин.

Перейдем к описанию алгоритма нахождения наилучшей раскраски вершин графа. Пусть имеем граф  $G$ , найдем в нем какую-либо МНС, которую обозначим  $S_1$ , и все вершины, входящие в эту МНС, окрасим в цвет № 1. Далее, удалим из данного графа все вершины, входящие в эту МНС (вместе с ребрами), и для нового графа снова найдем МНС, которую обозначим  $S_2$ . Эти новые вершины окрасим в цвет № 2,

затем удалим эти вершины из графа вместе с соответствующими ребрами и снова находим МНС, которую окрасим в цвет № 3, и т. д. Можно доказать, что *при любом способе осуществления этой процедуры придем к наилучшей раскраске и найдем некоторую функцию Гранди и хроматическое число данного графа.*

*Пример.* У графа (рис. 9) имеется 3 максимально независимых систем вершин:  $\{5\}$ ,  $\{1,3\}$  и  $\{2,4\}$ . Ясно, что при любой процедуре нахождения хроматического числа в этом графе, получим число 3.

**Теорема.** Если максимальная степень вершин в графе равна  $p$ , то хроматическое число этого графа не превосходит  $p + 1$ . При этом хроматическое число графа равно  $p + 1$  только в двух случаях: во-первых, если граф является полным и, во-вторых, если  $p = 2$  и при этом данный граф содержит *контур* нечетной длины (такой граф изображен на рис. 10, максимальная степень его вершин – 2, а хроматическое число – 3). Во всех остальных случаях хроматическое число графа не превосходит максимальной степени вершин.

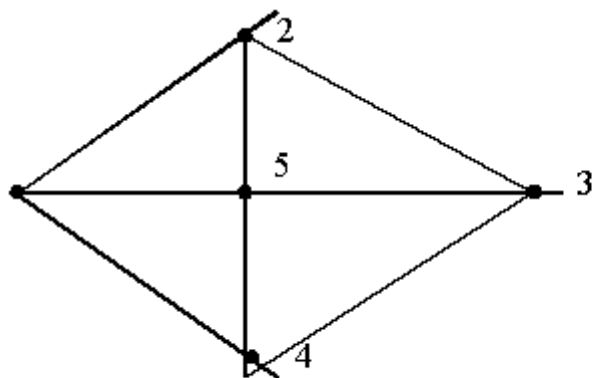


Рис. 9

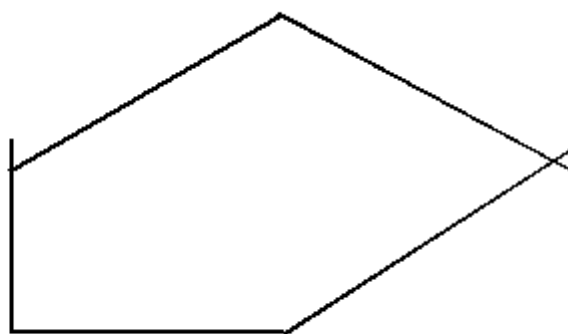


Рис. 10

**Примечание.** Оценка хроматического числа, даваемого этой теоремой, является достаточно грубой. Особенно наглядно это выглядит на примере *дерева* (разд. 14), для которого степень вершин может быть как угодно велика, а хроматическое число равно 2.

Рассматриваемые вопросы связаны с известной *проблемой четырех красок*. Для того чтобы ее сформулировать, нам понадобятся еще несколько определений.

Граф называется *плоским*, если он нарисован на плоскости, причем любые 2 ребра могут пересекаться только в вершине.

Графы называются *изоморфными*, если существует такая нумерация вершин в этих графах, что они имеют одну и ту же матрицу смежности (фактически изоморфные графы – это одинаковые графы, которые отличаются только другим *изображением*).

Граф называется *планарным*, если он изоморфен плоскому графу. Таким образом, планарный граф *можно* изобразить на плоскости как *плоский*. На рис. 11 изображены 2 изоморфных (одинаковых) графа, причем первый из них планарный, а второй является плоским.

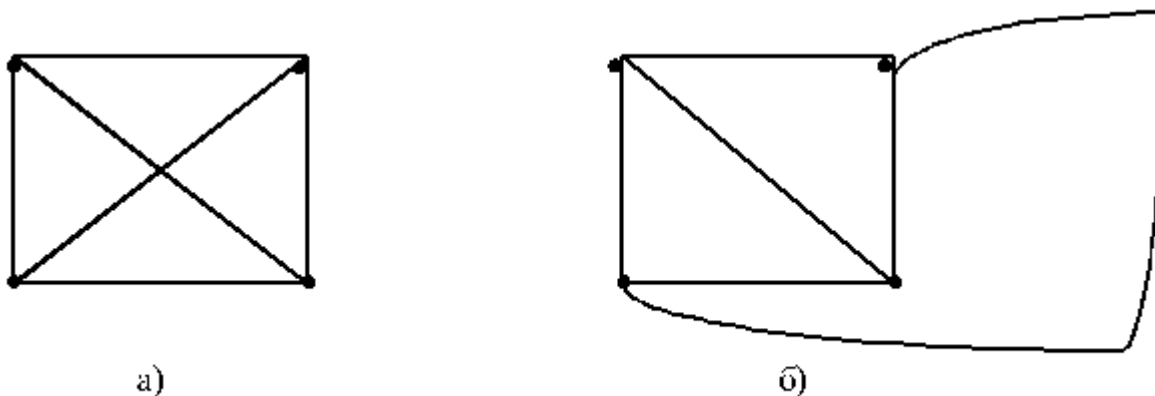


Рис. 11

Можно доказать (это не совсем простая теорема), что хроматическое число планарных графов меньше или равно 5. Однако Августом де Морганом (1850) была выдвинута гипотеза о том, что хроматическое число *планарных* графов меньше или равно 4. Этой проблеме было посвящено огромное число математических работ. В конце концов, удалось свести эту проблему к исследованию верности этой гипотезы для достаточно большого числа типов графов ( $\approx 30$  тыс.), что и было сделано с помощью компьютеров (1976). Гипотеза о четырех красках оказалась справедливой, а сама проблема перешла в задачу об *упрощении* доказательства гипотезы о четырех красках.

Отметим самую известную *интерпретацию* проблемы о четырех красках. Пусть имеется географическая карта. Можно ли, используя только 4 краски, изобразить эту карту так, чтобы соседние страны (имеющие общую границу) были окрашены в разный цвет? Понятно, что в соответствующем графе вершинами являются страны, а смежными вершинами являются *соседние* страны. Ясно, что полученный граф является планарным, и после 1976 г. ответ на этот вопрос является положительным.

Заметим, что в теории графов ставится часто вопрос о *реберной* раскраске графов. Какое *минимальное* число цветов (это число иногда называют *реберно-хроматическим*) нужно, чтобы раскрасить ребра графа так, что любые 2 смежных ребра (т. е. 2 ребра, имеющих общую вершину) были бы окрашены в разный цвет? Для реберно-хроматического числа графа справедлива гораздо более точная оценка, чем для просто хроматического числа, а именно, верна следующая, в какой-то степени удивительная, теорема.

**Теорема Визинга.** Если в графе максимальная степень вершин равна  $p$ , то реберно-хроматическое число равно либо  $p$ , либо  $p + 1$ .

Заметим, что до сих пор нет “хороших” критериев для графов, когда же именно реберно-хроматическое число равно  $p$ , а когда  $p + 1$ .

Очевидно, что простейший алгоритм нахождения реберно-хроматического числа (и соответствующей раскраски ребер) состоит в следующем: по данному графу строим так называемый *двойственный* граф: ребра графа соответствуют вершинам нового (двойственного) графа, причем, если 2 ребра имеют общую вершину, то они являются смежными и в двойственном графе соединены ребром. После этого раскрашиваем наилучшим образом *вершины* двойственного графа и, переходя к “старому” графу, получаем (одну из возможных) наилучших реберных раскрасок графов.

В заключение отметим, что реберная раскраска часто применяется при конструировании различных устройств, где провода, соединяющиеся в одной вершине, должны (для удобства) иметь разные цвета.

#### 14. Деревья и их простейшие свойства

*Деревом* называется связный граф без контуров (а значит, и без циклов). Граф (несвязный), состоящий из нескольких деревьев иногда называют *лесом*.

Напомним, что вершина в графе называется *висячей*, если ее степень равна единице. Дерево должно обязательно иметь висячую вершину, так как если бы степень всех вершин в дереве была бы больше или равна 2, то по самой первой лемме граф должен иметь цикл, что противоречит определению дерева.

Докажем сейчас следующую достаточно важную теорему.

**Теорема.** Если граф  $G$  является деревом, то число его ребер ( $m$ ) и число его вершин ( $n$ ) связаны соотношением  $m = n - 1$ .

*Доказательство* этой теоремы проведем по индукции по числу вершин. Если данный граф содержит всего 2 вершины, то в нем только 1 ребро, и нужное соотношение выполнено. Пусть наше утверждение выполнено для любого дерева, число вершин которого строго меньше  $n$ . Докажем его для дерева  $G$ , содержащего  $n$  вершин. Возьмем висячую вершину дерева  $G$  и удалим ее из графа (вместе с единственным ребром, выходящим из этой вершины). Тогда новый граф также является деревом: новый граф не содержит контуров (циклов), он остается связным. (Если бы новый граф оказался несвязным, то какие-то две вершины графа  $G$  были бы связаны между собой через удаленную (висячую) вершину. В этом случае степень этой висячей вершины была бы больше или равна 2, что невозможно). Таким образом, новый граф является деревом, и по индукционному предположению для него число ребер меньше числа вершин на единицу. Так как число вершин и число ребер нового графа отличается от числа вершин и ребер “старого” графа  $G$  на единицу, то для графа  $G$  также выполнено то же самое соотношение. Таким образом, индукция проведена, и теорема доказана.

На самом деле верно и обратное утверждение, которое является частью более общей теоремы, отражающей простейшие свойства дерева.

**Теорема.** Следующие 4 условия равносильны:

- граф  $G$  является деревом;
- число ребер ( $m$ ) и число вершин в графе ( $n$ ) связаны соотношением  $m = n - 1$ ;
- любые две вершины в графе могут быть связаны (простым) путем, и этот путь единствен;
- граф  $G$  связан и не содержит контуров.

Заметим, что генеалогическое дерево (в котором вершины графа – это некоторый человек и его прямые предки, а смежные вершины – это люди, связанные родством: мать и ее ребенок или отец и его ребенок) деревом в смысле теории графов не является (так как оно обязательно должно содержать циклы: некоторые предки данного человека должны иметь общего предка).

Однако игры с *полной информацией* (т. е. игры, не имеющие вероятностного характера: шахматы, шашки, уголки и т. д.) могут быть изображены в виде дерева. Именно поэтому такого типа игры допускают возможность применения компьютеров даже для решения теоретических вопросов этих игр.

#### 15. Решение типовых задач

В задачах 1–10, а) требуется, используя правила де Моргана, привести к ДНФ выражение, содержащее конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, и затем сократить ДНФ, если это возможно. Для этих задач есть точный алгоритм решения: “понижение” отрицания по правилам де Моргана до тех пор пока они не окажутся над одной переменной. После этого раскрываем скобки (используя естественные свойства конъюнкции, дизъюнкции и отрицаний, а также поглощение) и затем сокращаем ДНФ по правилу Блейка.

Заметим, что часто в примерах приходится раскрывать скобки вида  $(x \vee y \vee z) (x \vee u)$ . Здесь необходимо учитывать, что дизъюнктивные слагаемые, содержащие  $x$ , поглощаются слагаемым  $x$ , поэтому после раскрытия скобок получится выражение  $x \vee yu \vee zu$ .

**Пример 1.** Привести выражение  $L = \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee x\bar{y}} \cdot \overline{\bar{x} \bar{y} \vee \bar{y} \bar{z}}$  к ДНФ, а затем сократить ее (если это возможно).

**Решение.** “Понижаем” отрицания по правилу де Моргана. Получаем  $L = xy \vee x\bar{y}(x \vee y)(y \vee z) = xy \vee x\bar{y}(y \vee xz) = xy \vee x\bar{y}z$ . По правилу Блейка (имеются дизъюнктивные слагаемые, содержащие  $y$  и  $\bar{y}$ ) к последнему выражению можно добавить слагаемое  $xz$ , которое поглотит второе слагаемое в  $L$ .

**Ответ:**  $L = xy \vee xz$

В задачах 1–10, 6) надо просто применять правило Блейка, а затем уже правило поглощения

Теорию, применяемую к задачам 11–20, подробно обсуждали в разд. 3, 6, поэтому ограничимся решением примеров.

**Пример 2а.** Дана ДНФ  $L = \bar{x}\bar{y} \vee xy\bar{z}$ . Требуется для этой функции найти полином Жегалкина и перейти от ДНФ к КНФ, а затем и к СКНФ. Сначала найдем полином Жегалкина (вторым способом). Для этого ставим двойное отрицание и по правилам де Моргана “убираем” дизъюнкцию, потом “убираем” отрицания по правилу  $x + 1 = \bar{x}$ . После этого раскрываем скобки, учитывая при этом, что четное число слагаемых (по модулю 2) равно 0, а нечетное – одному такому слагаемому. Тогда

$$\begin{aligned} L &= \overline{\bar{x}\bar{y} \cdot xy\bar{z}} = ((x+1)(y+1)+1)(xy(z+1)+1)+1 = (xy+x+y+1+1)(xyz+xy+1)+1 = \\ &= (xy+x+y)(xyz+xy+1)+1 = xyz + xyz + xyz + xy+xy+ xy+ xy + \\ &\quad + x+ y+1 = xyz+x+y+1. \end{aligned}$$

Последнее выражение и является полиномом Жегалкина.

Для того чтобы перейти к КНФ для выражения  $L$  (в соответствии с разд. 3) ставим над  $L$  два отрицания и, оставляя временно верхнее отрицание без изменения, приводим оставшееся выражение к ДНФ. Затем по правилу де Моргана получаем КНФ. Таким образом, можем получить

$$L = \overline{\bar{x}\bar{y} \cdot xy\bar{z}} = \overline{(x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)} = \overline{x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee xz \vee yz}.$$

Далее по правилу Блейка можем из последнего выражения исключить  $yz$ , тогда получим:

$$L = \overline{x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee xz} = \overline{(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{z})}. \quad \text{Это и есть КНФ.}$$

Чтобы из последнего выражения получить СКНФ, нужно в первой и второй дизъюнкции добавить  $z\bar{z}$ , а в третьей –  $y\bar{y}$ . Затем воспользуемся распределительным законом:

$$\begin{aligned} L &= (\bar{x} \vee y \vee z\bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z\bar{z})(\bar{x} \vee y\bar{y} \vee \bar{z}) = \\ &= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}). \end{aligned}$$

Последнее выражение и есть СКНФ.

**Пример 2,б.** Пусть имеется выражение  $L = (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$ . Требуется записать  $L$  в виде ДНФ, а затем перейти к СДНФ.

Ясно, что ДНФ можно получить простым раскрытием скобок. В обеих скобках есть  $\bar{y}$ , которое поглощает слагаемые, содержащие  $\bar{y}$ , поэтому  $L = \bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}$ . Это и есть ДНФ. Для того чтобы получить СДНФ,  $\bar{y}$  умножаем на  $(x \vee \bar{x})(z \vee \bar{z})$ , а  $\bar{x}\bar{z}$  умножаем на  $(y \vee \bar{y})$  и раскрываем скобки. Тогда

$$L = (x \vee \bar{x})\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}(y \vee \bar{y})\bar{z} = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

С самого начала надо позаботиться о правильном порядке переменных, что требуется для СДНФ, но последнее выражение еще не является СДНФ, так как содержит два одинаковых слагаемых. После уничтожения одного из них получим окончательный ответ:

Разберем пример решения задач типа 21–30.

**Пример 3.** Пусть требуется для функции

$$f(x, y, z) = (x \sim z) / ((x y) \sim (y z)):$$

- а) составить таблицу истинности;
- б) написать для неё СДНФ или СКНФ (если это возможно);
- в) сократить СДНФ по карте Карно;
- г) найти по таблице истинности полином Жегалкина.

*Решение:*

а) в таблицу истинности данной функции полезно включить таблицы истинности промежуточных функций:

| $x y z$ | $x \sim z$ | $x y$ | $y z$ | $(x y) \sim (y z)$ | $(x \sim z) / ((x y) \sim (y z))$ |
|---------|------------|-------|-------|--------------------|-----------------------------------|
| 000     | 1          | 0     | 0     | 1                  | 0                                 |
| 001     | 0          | 0     | 0     | 1                  | 1                                 |
| 010     | 1          | 0     | 0     | 1                  | 0                                 |
| 011     | 0          | 0     | 1     | 0                  | 1                                 |
| 100     | 0          | 0     | 0     | 1                  | 1                                 |
| 101     | 1          | 0     | 0     | 1                  | 0                                 |
| 110     | 0          | 1     | 0     | 0                  | 1                                 |
| 111     | 1          | 1     | 1     | 1                  | 0                                 |

б) составить СДНФ и СКНФ по полученной таблице. В соответствии с теорией разд. 4 СДНФ составляется по единицам таблицы истинности, причем если  $f(x, y, z) = 1$ , то если  $x = 0$ , в соответствующей конъюнкции СДНФ берется  $\bar{x}$ , а если  $x = 1$  в СДНФ берется  $x$ . Аналогично поступают и с другими переменными, поэтому СДНФ для данной функции имеет вид:

$$\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}.$$

СКНФ составляется по нулям таблицы истинности, т. е. если

$f(x, y, z) = 0$  и  $x = 0$ , то в соответствующей дизъюнкции берётся  $x$ , а если  $x = 1$ , то  $\bar{x}$ . Таким образом, СКНФ для данной функции имеет вид:

$$f(x, y, z) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Заметим, что по определению СДНФ и СКНФ, переменные (в каждой конъюнкции и дизъюнкции соответственно) должны следовать в одинаковом порядке;

в) составим полином Жегалкина по таблице истинности. Напишем его сначала с неопределёнными коэффициентами:

$$f(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 xy + \alpha_5 xz + \alpha_6 yz + \alpha_7 xyz.$$

Подставим в него по очереди все 8 наборов переменных и найдём коэффициенты полинома Жегалкина.

- $x = 0, y = 0, z = 0: \alpha_0 = 0;$
- $x = 0, y = 0, z = 1: \alpha_3 = 1;$
- $x = 0, y = 1, z = 0: \alpha_2 = 0;$
- $x = 0, y = 1, z = 1: \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6 = 1, \alpha_6 = 0;$
- $x = 1, y = 0, z = 0: \alpha_1 = 1;$
- $x = 1, y = 0, z = 1: \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = 0, \alpha_5 = 0;$
- $x = 1, y = 1, z = 0: \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 1, \alpha_4 = 0;$
- $x = 1, y = 1, z = 1: \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 0.$

Так как  $\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$ , тогда  $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_7 = 0$ , откуда  $\alpha_7 = 0$ , и полином Жегалкина для данной функции имеет вид:  $f(x, y, z) = x + z$  (для данной функции  $y$  является фиктивной переменной);

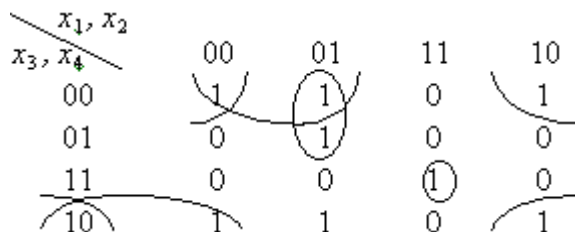
г) составим теперь для данной функции карту Карно и сократим её. Сначала составим таблицу:

|     |   | $xy$ |    |    |    |
|-----|---|------|----|----|----|
|     |   | 00   | 01 | 11 | 10 |
| $z$ | 0 | 0    | 0  | 1  | 1  |
|     | 1 | 1    | 1  | 0  | 0  |

Откуда  $f(x, y, z) = x\bar{z} \vee \bar{x}z$ . Опять оказалось, что  $y$  – фиктивная переменная.

В задачах 31–40 требуется по карте Карно для функции 4 переменных составить сокращённую ДНФ. Надо иметь в виду, что карты Карно соединяются по кругу. Число единиц, которые можно объединять, равно 2, 4, 8, ... (прямая, плоскость и т. д.)

**Пример 4.**



Получаем всего 4 объединения, т. е. 4 конъюнкции в ДНФ:  $f = (x_1, x_2, x_3, x_4)$   
 $= \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 x_4$ .

Заметим, что при правильно составленном объединении единиц правило Блейка может привести только к ДНФ с тем же числом символов переменных (в нашем примере их 11).

В задачах 41–50 требуется в данных наборах из 4 или 5 функций найти базисы и полные наборы функций (полные наборы – это наборы функций, содержащих базис).

**Пример 5.** Пусть имеется набор функций: 1)  $f_1(x, y, z) = (x y) \downarrow (y \sim z)$ ,

2)  $f_2(x, y) = x + y x$ , 3)  $f_3(x, y, z) = x \sim (y z)$ , 4)  $f_4(x, y) = x + \bar{y}$ , 5)  $f_5(x, y, z) = x y \vee z$

Составляем таблицу истинности для каждой из этих 5 функций (для  $f_2$  и  $f_4$  таблицу можно составить отдельно).

| $x, y, z$ | $xy$ | $y \sim z$ | $f_1 = (xy) \downarrow (y \sim z)$ | $yz$ | $f_3 = x \sim yz$ | $f_5 = x y \vee z$ |
|-----------|------|------------|------------------------------------|------|-------------------|--------------------|
| 000       | 0    | 1          | 0                                  | 0    | 1                 | 1                  |
| 001       | 0    | 0          | 1                                  | 0    | 1                 | 0                  |
| 010       | 0    | 0          | 1                                  | 0    | 1                 | 1                  |
| 011       | 0    | 1          | 0                                  | 1    | 0                 | 0                  |
| 100       | 0    | 1          | 0                                  | 0    | 0                 | 1                  |
| 101       | 0    | 0          | 1                                  | 0    | 0                 | 0                  |
| 110       | 1    | 0          | 0                                  | 0    | 0                 | 1                  |
| 111       | 1    | 1          | 0                                  | 1    | 1                 | 1                  |

Отсюда очевидно, что  $f_1(x, y, z) \in T_0$  (принадлежит  $T_0$ ) и  $f_1 \notin T_1, f_1 \notin M, S$  (т. е. не принадлежит  $T_1, M, S$ ), аналогично  $f_3 \notin T_0, M, S$  и  $f_3 \in T_1$ . Функция  $f_5 \in T_1$  и  $f_5 \notin T_0, M, S$ . Осталось проверить линейность этих функций.

$$f_3 = x \sim (y z) = \overline{x + (yz)} = x + yz + 1 \text{ – нелинейна;}$$

$$f_5 = x y \vee z = \overline{\overline{xy} \cdot \bar{z}} = (x y + 1) z + 1 = x y z + z + 1 \text{ – нелинейна.}$$



Для  $f_1$  требуется проверка нелинейности. Составим полином Жегалкина для  $f_1$ :

$P = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 xy + \alpha_5 xz + \alpha_6 yz + \alpha_7 xyz$ . Находим последовательно  $\alpha_1 : \alpha_0 = 0, \alpha_3 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_6 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_5 = 0, \alpha_4 = 1$ ; значит, функция  $f_1$  нелинейна, что, впрочем, следует и из того, что  $f_1$  в таблице истинности содержит нечетное число единиц (равное 3).

Для  $f_2$  и  $f_4$  составляем свои таблицы истинности.

| $x, y$ | $xy$ | $f_2 = x + xy$ | $f_4 = x +$ |
|--------|------|----------------|-------------|
| 00     | 0    | 0              | 1           |
| 01     | 0    | 0              | 0           |
| 10     | 0    | 1              | 0           |
| 11     | 1    | 0              | 1           |

Отсюда следует, что  $f_2 \in T_0, f_2 \notin T_1, f_2 \notin M, S$ ; является полиномом Жегалкина  $f_2 = x + xy$ ;  $f_4 = x + y + 1$  и, значит,  $f_4 \in L$ , также  $f_4 \in T_1$ , но  $f_4 \notin M, S$ . Все эти сведения сведём в таблицу Поста.

|       | $T_0$ | $T_1$ | $L$ | $M$ | $S$ |
|-------|-------|-------|-----|-----|-----|
| $f_1$ | +     | –     | –   | –   | –   |
| $f_2$ | +     | –     | –   | –   | –   |
| $f_3$ | –     | +     | –   | –   | –   |
| $f_4$ | –     | +     | +   | –   | –   |
| $f_5$ | –     | +     | –   | –   | –   |

Таким образом, базисами являются:  $f_1$  и  $f_3$ ;  $f_1$  и  $f_4$ ;  $f_2$  и  $f_4$ ;  $f_1$  и  $f_5$ ,  $f_2$  и  $f_5$ . Полными наборами будут любые наборы, содержащие какой-нибудь базис.

В задачах 51–60 требуется по данному ориентированному графу составить структурную матрицу, а по ней (методами булевой алгебры) найти все пути из вершины  $i$  в вершину  $j$ , а затем (отрицанием этих путей) найти все сечения между двумя указанными вершинами. Пусть дан ориентированный граф (рис. 12), причем ребра  $a, b, h$  являются ориентированными (их направление указано стрелками), а остальные ребра не ориентированы. Требуется методами булевой алгебры найти пути и сечения между вершинами 2 и 4.

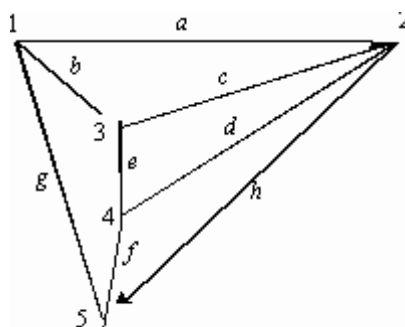


Рис. 12

Составляем структурную матрицу  $S$ , затем вычеркиваем из нее 4-ю строку и 2-й столбец (тем самым получаем минор  $M(4,2)$ ):

$$S = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 & g \\ 0 & 1 & c & d & h \\ 0 & \bar{a} & 1 & e & 0 \\ 0 & \bar{a} & \bar{e} & 1 & f \\ \bar{g} & \bar{h} & 0 & \bar{f} & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & g \\ 0 & c & d & h \\ 0 & 1 & e & 0 \\ \bar{g} & 0 & \bar{f} & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & g \\ 0 & d & h \\ \bar{g} & \bar{f} & 1 \end{vmatrix} \vee e \begin{vmatrix} 1 & g \\ 0 & c & h \\ \bar{g} & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Раскрытие определителей производится по известному правилу: *определитель равен сумме (в данном случае дизъюнкции) произведений элементов, умноженных на свои алгебраические дополнения (в данном случае просто миноры). При этом для определителей 3-го порядка можно пользоваться и правилом треугольника.*

Тогда получаем

$$M_{42} = d \vee g d \bar{g} \vee h \bar{f} \vee e c \vee e b h \bar{g} \vee e \bar{g} c g.$$

Искомые пути, расположенные в порядке прохождения ребер:

$$\Pi_{24} = d \vee h f \vee c e \vee h g b e.$$

Сечения же получатся отрицанием этих путей. Применяя правила де Моргана (заменяя конъюнкцию на дизъюнкцию и наоборот), затем раскрывая скобки, получаем: (знаки отрицания опущены во всех равенствах, кроме 1-го):

$$S_{24} = \overline{\Pi_{24}} = \overline{d \vee h f \vee c e \vee h g b e} : \\ = d (h \vee f) (c \vee e) (h \vee g \vee b \vee e)$$

$$S_{24} = d (h \vee f) (e \vee c h \vee c g \vee c b) = d (h e \vee c h \vee c g h \vee c b h \vee f e \vee f c h \vee f c g \vee f c b),$$

или, применяя в скобках правило поглощения, получаем

$$S_{24} = d (h e \vee c h \vee f e \vee c g \vee f c b),$$

$$S_{24} = d h e \vee d c h \vee d f e \vee d f c g \vee d f c b.$$

В индивидуальных заданиях 61–70 требуется найти в данной сети (т. е. в графе с заданными пропускными способностями ребер) максимальный поток из вершины с номером 1 в вершину с наибольшим номером (в заданиях либо в вершину 5, либо 6). В заданиях заданы 2 графа (граф, который находится слева, – это сеть с заданными пропускными способностями ребер, и граф справа с заданным потоком, который необходимо либо улучшить, либо доказать, что он не улучшает и, значит, является максимальным). Конечно, можно дать задание просто найти максимальный поток между двумя вершинами. Однако при работе *вручную* нельзя дать большое число вершин (в наших заданиях это число равно 5 или 6), а в этих случаях максимальный поток можно найти без всякой теоремы Форда-Фалкерсона (просто из общих соображений). Поэтому задание в примерах 61–70 состоит в том, чтобы *правильно* расставить пометки для

заданного потока, указанного в графе справа и после этого делать выводы о том, является ли этот поток максимальным или нет.

Задание в примерах 61–70 состоит в следующем: *требуется, расставляя пометки в графе с заданным потоком с помощью алгоритма, описанного в теореме Форда – Фалкерсона, найти максимальный поток между вершиной с номером 1 и вершиной с максимальным номером. При этом если улучшенный поток окажется максимальным, то нужно указать то минимальное сечение, которому равен наш поток (если же улучшенный поток не окажется максимальным, то нужно снова его улучшать до тех пор, пока он не окажется максимальным).* На рис. 13а изображен граф с данными пропускными способностями ребер, при этом вершина номер 1 является “источником”, а вершина 6 – стоком. На рис. 13б изображен тот же граф, но на ребрах его задан поток, удовлетворяющий свойствам 1–4, который надо либо увеличить, либо доказать, что он является максимальным.

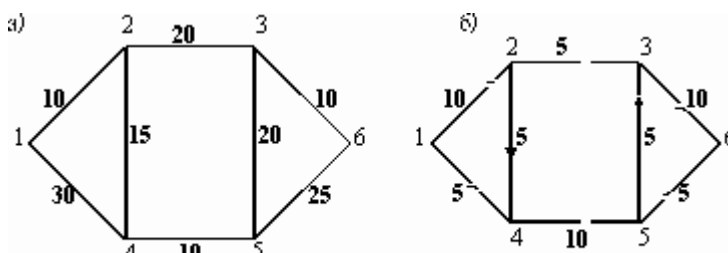


Рис. 13

После этого подробно объясняем, как расставляются пометки в этом графе, и результат этого показываем на рис. 14. Для нового потока (рис. 14) снова расставляем пометки и убеждаемся, что этот поток является максимальным (рис. 15). Здесь же находим минимальное сечение, которому равен поток.

Начинаем расставлять пометки во втором графе (там дан поток). 1-я вершина (источник) всегда имеет пометку  $(\infty)$  (это означает, что второе число как угодно большое). Далее вторую вершину пометить пока нельзя, зато можно пометить вершину 4 и ее пометка будет  $(+1, 25)$ . Это означает, что дуга  $(1, 4)$  прямая, ненасыщенная и по ней можно “перевезти” дополнительно 25 единиц “груза”. Далее вершину 5 пометить пока нельзя, но теперь можно пометить вершину 2 и ее пометка будет  $(-4, 20)$ .

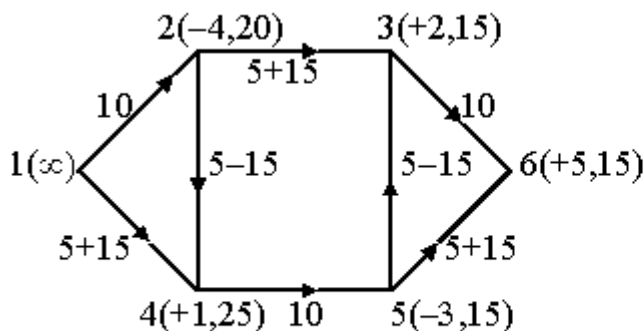


Рис. 14

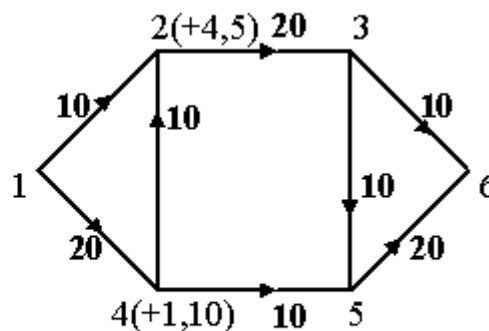


Рис. 15

Это означает, что дуга  $(4, 2)$  обратная, и, учитывая возможный “разворот” ее, по ней можно дополнительно “перевезти” 20 единиц “груза”. Так как 20 меньше 25, получаем данную пометку. Теперь можно пометить вершину 3 пометкой  $(+2, 15)$  и, вершину 5, пометка которой будет  $(-3, 15)$ . (Заметим, что по дуге  $(5, 3)$  с учетом разворота можно дополнительно “перевезти” 25 единиц груза, но так как для вершины 3 второе число было равно 15, то любое следующее число не может быть его больше). Только после этого можем пометить вершину 6 (сток), пометка которой будет  $(+5, 15)$ . Таким образом, наш поток можно увеличить на 15 единиц, прибавляя эти 15 единиц к прямым дугам и вычитая из обратных с учетом возможного “разворота” обратных дуг. Результат всех этих действий изображен на рис. 14.

Таким образом, получили новый поток, изображенный на рис. 15.

После этого для нового потока (рис. 15), снова расставляем пометки, которые также изображены на рис. 15. Мы видим, что для этого потока (кроме источника) можно пометить только 2 вершины: вершину 4 (ее пометка будет (+1,10)) и (после этого) вершину 2, пометка которой будет (+4,5). Больше ничего пометить нельзя, так как из множества помеченных вершин (Y) в множество непомеченных вершин (Z) идут только прямые, насыщенные дуги (дуги (2–3) и (4–5)). Эти две дуги образуют минимальное сечение, величина которого равна 30 условных единиц, и эта же величина равна величине потока. Заметим, что величина потока также равна “количеству груза”, вывозимого из источника, и равна количеству груза, ввозимого в сток. Таким образом, поток на рис. 15 является максимальным, а дуги (2–3) и (4–5) образуют минимальное сечение, которому равен наш поток.

## 16. Индивидуальные задания

В заданиях 1–10 требуется привести данные выражения к ДНФ, пользуясь правилами де Моргана. Если возможно, сократить ДНФ, используя свойство поглощения и правило Блейка:

1. а)  $\overline{x(y\bar{z} \vee x\bar{z})}$ ; б)  $xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y}z$ .
2. а)  $\overline{x\bar{y}(xy\bar{z} \vee \bar{x}y)}$ ; б)  $x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$ .
3. а)  $\overline{x_1 \vee \bar{x}_2x_3 \vee (x_1 \vee x_3x_4)}$ ; б)  $\bar{x}\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ .
4. а)  $\overline{xz(xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y})}$ ; б)  $x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$ .
5. а)  $(x\bar{y}z \vee \bar{y}z) \cdot (\bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z})$ ; б)  $xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz$ .
6. а)  $(x\bar{y}z \vee \bar{y}z) \cdot (\bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z})$ ; б)  $x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}$ .
7. а)  $\overline{x\bar{y}(x\bar{y}z \vee \bar{x}y)}$ ; б)  $x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz$ .
8. а)  $\overline{x\bar{y} \vee (x\bar{y}\bar{z}) \vee \bar{x}\bar{z}}$ ; б)  $x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xy\bar{z}$ .
9. а)  $\overline{x\bar{y} \cdot (yz \vee xy)}$ ; б)  $\bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}$ .
10. а)  $\overline{xyz \vee y\bar{x}\bar{z}}$ ; б)  $x\bar{y} \vee xyz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y$ .

В заданиях 11–20 требуется: в задаче а) написать по данной ДНФ полином Жегалкина, от ДНФ перейти к КНФ, а затем перейти к СКНФ; в задаче б) перейти от данной КНФ к ДНФ, а затем перейти к СДНФ.

11. а)  $\bar{x}y \vee \bar{y}\bar{z}x$ ; б)  $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{z})$ .
12. а)  $\bar{x}y \vee x\bar{y}\bar{z}$ ; б)  $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{y} \vee z)$ .
13. а)  $x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee z$ ; б)  $(x \vee \bar{z})(\bar{y} \vee z)$ .
14. а)  $x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{z} \vee xy$ ; б)  $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y)$ .
15. а)  $x\bar{z} \vee xy \vee yz$ ; б)  $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee z)$ .
16. а)  $x\bar{z} \vee xyz$ ; б)  $(x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})$ .
17. а)  $x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee yz$ ; б)  $(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$ .

18. а)  $x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee \bar{x}z$ ;

б)  $(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y)$ .

19. а)  $\bar{x}y \vee yz \vee \bar{x}\bar{z}$ ;

б)  $(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})$ .

20. а)  $x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}y$ ;

б)  $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{z})$ .

В заданиях 21–30 требуется: составить таблицу истинности данной функции; написать для неё СДНФ и СКНФ (если возможно); найти по таблице истинности полином Жегалкина для данной функции; составить карту Карно для данной функции и найти сокращённую ДНФ.

21.  $(x + \bar{y}) | (x \sim yz)$ .

22.  $((x \vee \bar{y})z) \rightarrow ((x \sim z) + y)$ .

23.  $((x \sim z) + y) \cdot (x | yz)$ .

24.  $((x \vee \bar{y})z) \rightarrow (x + y)$ .

25.  $\bar{x} \rightarrow (z \sim (y + x\bar{z}))$ .

26.  $(x \vee \bar{y})z \rightarrow ((x \downarrow y) | z)$ .

27.  $\bar{x} \rightarrow (\bar{z} \sim (y + xz))$ .

28.  $((x y) | z) \rightarrow (\bar{x} \sim y)$ .

29.  $(x z \rightarrow y) | (x y + xz)$ .

30.  $(x + (yz)) | (x y)$ .

В обоих (а, б) заданиях 31–40 с помощью карт Карно по данной таблице истинности для функции 4 переменных найти её сокращённую ДНФ.

31а.

| $x_3, x_4$ |  |   |   |   |   |
|------------|--|---|---|---|---|
| $x_1, x_2$ |  | 0 | 0 | 1 | 1 |
|            |  | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 00         |  | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 01         |  | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 11         |  | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 10         |  | 1 | 1 | 1 | 1 |

31б.

| $x_3, x_4$ |  |   |   |   |   |
|------------|--|---|---|---|---|
| $x_1, x_2$ |  | 0 | 0 | 1 | 1 |
|            |  | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0000       |  | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 01         |  | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 11         |  | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10         |  | 0 | 1 | 1 | 0 |

32а.

| $x_3, x_4$ |  |   |   |   |   |
|------------|--|---|---|---|---|
| $x_1, x_2$ |  | 0 | 0 | 1 | 1 |
|            |  | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 00         |  | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 01         |  | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 11         |  | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 10         |  | 0 | 0 | 0 | 1 |

32б.

| $x_3, x_4$ |  |   |   |   |   |
|------------|--|---|---|---|---|
| $x_1, x_2$ |  | 0 | 0 | 1 | 1 |
|            |  | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 00         |  | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 01         |  | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 11         |  | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10         |  | 1 | 0 | 0 | 1 |

33а.

33б.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   | $x_3, x_4$ |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|------------|---|---|---|---|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
|            | 0 | 1 | 1 | 0 |            | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 0        | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 0        | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 1        | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 1        | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 1        | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 1        | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 0        | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 0        | 1 | 0 | 0 | 1 |

35a.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
|            | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 0        | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 1        | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 1        | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 0        | 1 | 0 | 0 | 1 |

34a.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
|            | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 0        | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 1        | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 1        | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 0        | 0 | 1 | 1 | 1 |

35б.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
|            | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 0        | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 1        | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 1        | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 0        | 1 | 0 | 0 | 1 |

34б.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
|            | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 0        | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 1        | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 1        | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 0        | 0 | 0 | 0 | 1 |

36a.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
|            | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 0        | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1        | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 1        | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 0        | 0 | 0 | 1 | 0 |

36б.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
|            | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 0        | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 1        | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 1        | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 0        | 1 | 0 | 0 | 1 |

37а.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   |  |
|------------|---|---|---|---|--|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |  |
|            | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 0 0        | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 0 1        | 0 | 0 | 1 | 1 |  |
| 1 1        | 0 | 0 | 0 | 1 |  |
| 1 0        | 1 | 0 | 0 | 0 |  |

37б.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   |  |
|------------|---|---|---|---|--|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |  |
|            | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 0 0        | 1 | 0 | 1 | 1 |  |
| 0 1        | 0 | 0 | 1 | 1 |  |
| 1 1        | 1 | 0 | 1 | 0 |  |
| 1 0        | 0 | 0 | 1 | 0 |  |

38а.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|---|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
|            | 0 | 1 | 1 |   |   |
| 0 0        | 1 | 1 | 1 | 0 |   |
| 0 1        | 1 | 1 | 0 | 0 |   |
| 1 1        | 1 | 1 | 1 | 1 |   |
| 1 0        | 1 | 1 | 1 | 0 |   |

38б.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   |  |
|------------|---|---|---|---|--|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |  |
|            | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 0 0        | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 0 1        | 1 | 0 | 1 | 0 |  |
| 1 1        | 1 | 1 | 0 | 1 |  |
| 1 0        | 1 | 1 | 1 | 1 |  |

39а.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   |  |
|------------|---|---|---|---|--|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |  |
|            | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 0 0        | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 0 1        | 1 | 0 | 1 | 1 |  |
| 1 1        | 1 | 0 | 1 | 1 |  |
| 1 0        | 0 | 1 | 1 | 0 |  |

39б.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   |  |
|------------|---|---|---|---|--|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |  |
|            | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 0 0        | 1 | 1 | 0 | 1 |  |
| 0 1        | 1 | 0 | 0 | 1 |  |
| 1 1        | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 1 0        | 1 | 0 | 0 | 1 |  |

40а.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   |  |
|------------|---|---|---|---|--|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |  |
|            | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 0 0        | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
| 0 1        | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 1 1        | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| 1 0        | 1 | 0 | 1 | 1 |  |

40б.

| $x_3, x_4$ |   |   |   |   |  |
|------------|---|---|---|---|--|
| $x_1, x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |  |
|            | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 0 0        | 1 | 1 | 0 | 1 |  |
| 0 1        | 1 | 1 | 0 | 0 |  |
| 1 1        | 1 | 1 | 1 | 0 |  |
| 1 0        | 1 | 0 | 0 | 1 |  |

В заданиях 41–50 составить таблицу Поста и найти базисы из следующих функций.

41.  $(x \sim \overline{y\overline{z}}, (xy) + z, x \sim \overline{y}, x + y + yx, x \rightarrow (y \rightarrow x))$ .

42.  $(x + \overline{yz}, x \rightarrow (x \rightarrow y), zx \rightarrow (x \sim yz), x \sim (y + \overline{z}))$ .

43.  $(x \vee (y \sim z), x(x + y), (x \rightarrow z) y, \overline{x} | (y \vee x))$ .

44.  $(x + \overline{y}, z, x \rightarrow (y \rightarrow x), (x | x) | (y | y), x \sim yz)$ .

45.  $((xy) \downarrow z, xy \rightarrow x, y + xz, x + y, x \sim (yz))$ .

46.  $(x \overline{y} \vee y \overline{z}, \overline{x} + \overline{y}, x | (y | \overline{x}), x \sim (yx), x + xy)$ .

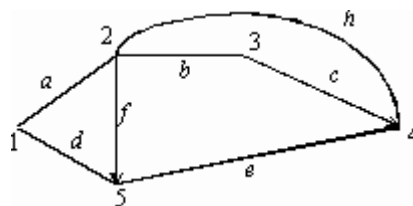
47.  $(x \rightarrow (yz), x \vee y, \overline{z}, x + (y \rightarrow z), x | x, x \sim (y + x))$ .

48.  $(x + yz, (00010111), x \sim \overline{y}, yx + \overline{yz}, x \rightarrow x)$ .

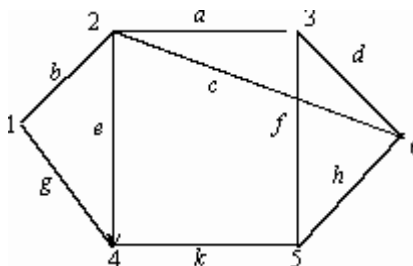
49.  $(xy \rightarrow z, x \sim (y + xz), (11010100), yx + z, (xy) | x)$ .

50.  $(x + (y \sim x), y \rightarrow (xz), (00101011), x \rightarrow (y | z), x + y)$ .

В задачах 51–60 требуется составить структурную матрицу для данного орграфа (или графа) и, методами булевой алгебры, найти все пути  $P_{ij}$  из вершины  $i$  в вершину  $j$ , затем найти все сечения  $S_{ij}$  между этими вершинами. В данном задании (чтобы исключить возможные неясности графического рисунка) указываются все ориентированные ребра, причем запись (2–4) означает, что 2 вершина связана с 4-й, а обратной связи нет. Напомним, что для нахождения путей из вершины  $i$  в вершину  $j$  нужно *раскрывать минор структурной матрицы*  $M_{ji}$  (вычеркивать из структурной матрицы строку с номером  $j$  и столбец с номером  $i$ ). Сечения же находятся *отрицанием* путей (конъюнкция меняется на дизъюнкцию и наоборот). 52. Дан оргграф. Имеется 2 ориентированных ребра: (2–3) и (2–4);  $i=4, j=6$ .

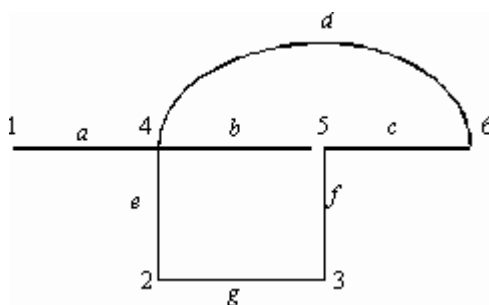


52. Дан оргграф. Имеется 2 ориентированных ребра: (2–3) и (2–4);  $i=4, j=6$ .

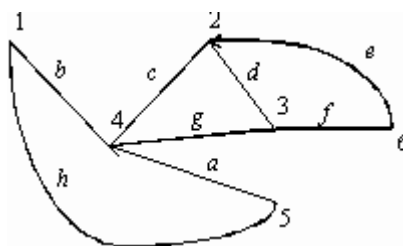


53. Дан оргграф. Имеется 1 ориентированное ребро: (4–5);  $i=3, j=4$ .

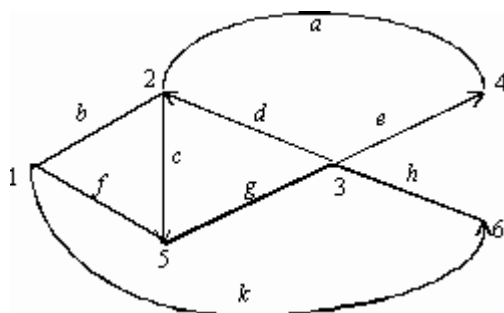




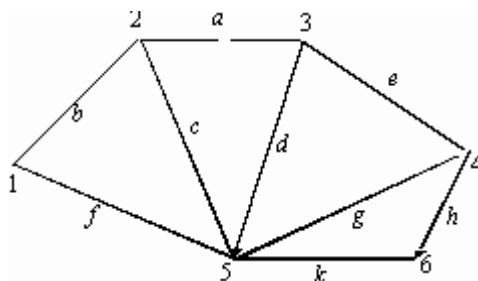
54. Дан орграф. Имеется 2 ориентированных ребра:  $(6-2)$  и  $(5-4)$ ;  $i=3, j=5$ .



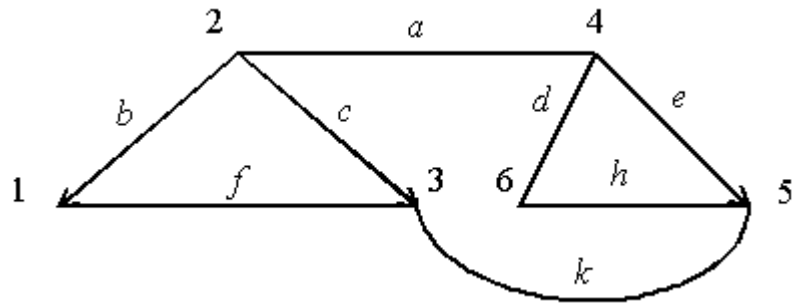
55. Дан орграф. Имеется 4 ориентированных ребра:  $(3-2)$ ,  $(3-4)$ ,  $(2-5)$  и  $(1-6)$ ;  $i=3, j=1$ .



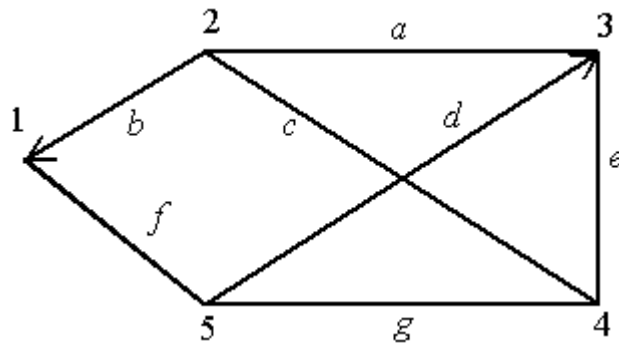
56. Дан орграф. Имеется 4 ориентированных ребра:  $(2-3)$ ,  $(3-5)$ ,  $(5-4)$  и  $(4-6)$ ;  $i=3, j=2$ .



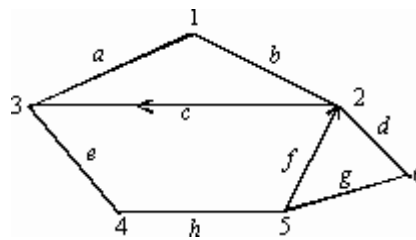
57. Дан орграф. Имеется 3 ориентированных ребра:  $(2-1)$ ,  $(2-3)$  и  $(4-5)$ ;  $i=2, j=4$ .



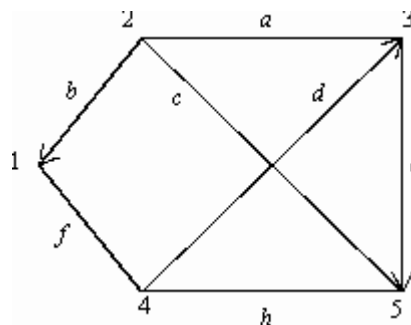
58. Дан оргграф. Имеется 2 ориентированных ребра:  $(2-1)$  и  $(5-3)$ ;  $i=3, j=1$ .



59. Дан оргграф. Имеется 2 ориентированных ребра:  $(2-3)$  и  $(5-2)$ ;  $i=4, j=6$ .



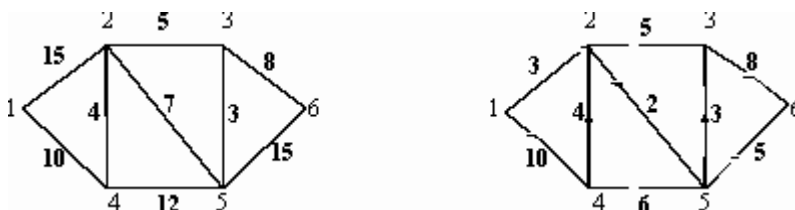
60. Дан оргграф. Имеется 3 ориентированных ребра:  $(2-1)$ ,  $(4-3)$ ,  $(3-5)$ ;  $i=2, j=4$



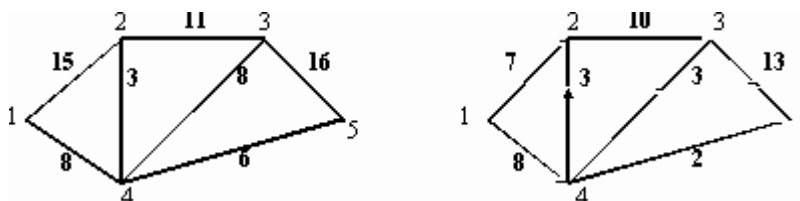
В индивидуальных заданиях 61–70 требуется найти в данной сети (т.е. в графе с заданными пропускными способностями ребер) максимальный поток из вершины с номером 1 в вершину с наибольшим номером (в заданиях либо вершину 5, либо 6). В заданиях заданы 2 графа (граф, который находится слева, – это сеть с заданными пропускными способностями ребер, и граф справа с заданным потоком, который необходимо либо улучшить, либо доказать, что он не улучшаем и, значит, является максимальным). Задание в примерах 61–70 состоит в следующем: *требуется, расставляя пометки в графе с заданным потоком с помощью алгоритма, описанного в теореме Форда – Фалкерсона, найти максимальный поток между вершиной с номером 1 и вершиной с максимальным номером. При этом если улучшенный поток окажется максимальным, то нужно указать то минимальное сечение, которому равен наш поток (если же*

улучшенный поток не окажется максимальным, то нужно снова его улучшать до тех пор, пока он не окажется максимальным).

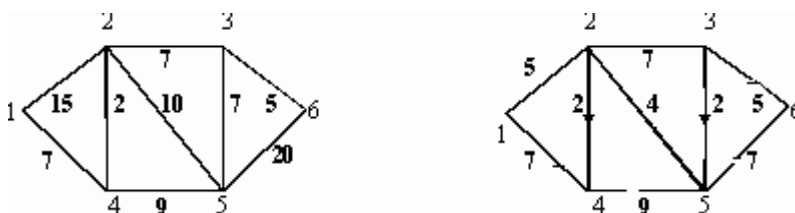
61.



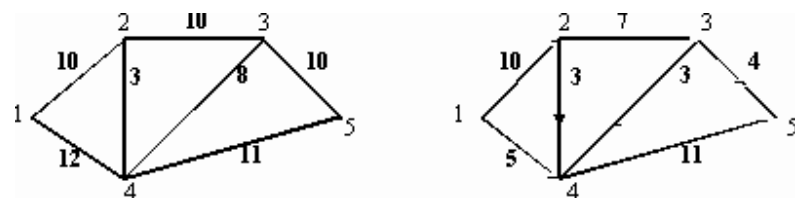
62.



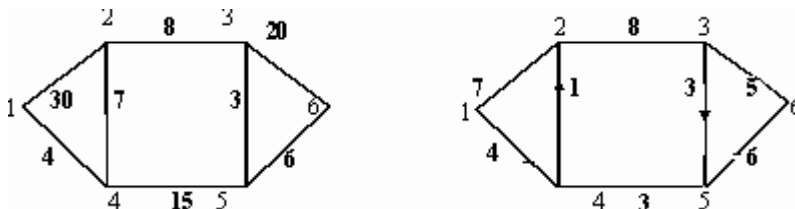
63.



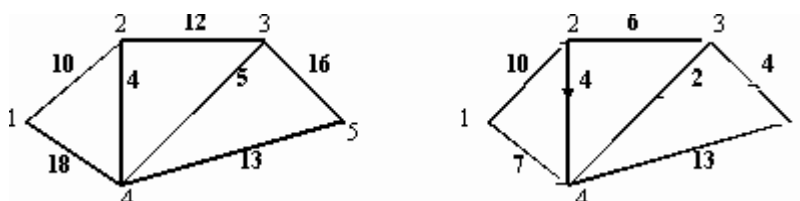
64.



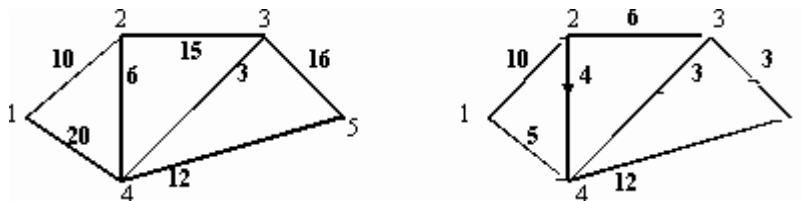
65.



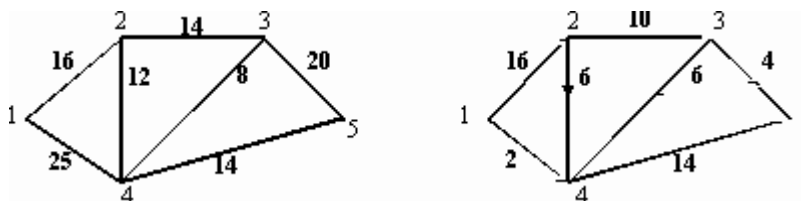
66.



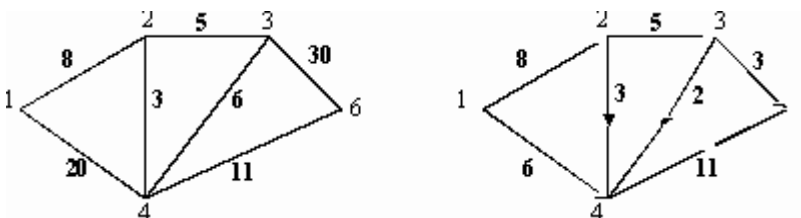
67.



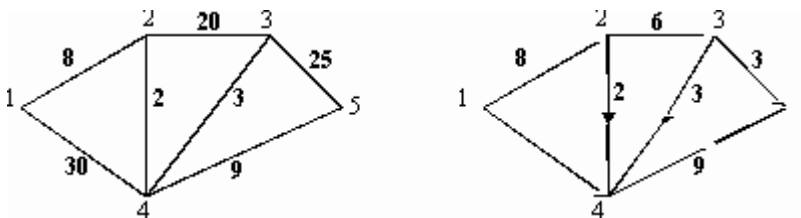
68.



69.



70.



## 17. Дополнительные задачи

*Элементы такого рода задач будут в тестах, предназначенных для сдачи зачета.*

а) Упростить формулы (привести их к сокращенной ДНФ).

1.  $(x \rightarrow x) \rightarrow x.$
2.  $x \rightarrow (x \rightarrow y).$
3.  $\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} \vee (x \rightarrow y) \cdot x.$
4.  $(x \sim y) \cdot (x \vee y).$
5.  $(x \rightarrow y) \cdot (y \rightarrow z) \rightarrow (z \rightarrow x).$
6.  $(x \vee \bar{y} \rightarrow (z \rightarrow y \vee \bar{y} \vee x)) \cdot (x \vee x \rightarrow \overline{(x \rightarrow x)}) \rightarrow y.$
7.  $(x \cdot x \cdot \bar{x} \rightarrow y \cdot \bar{y} \rightarrow z) \vee x \vee (y \cdot z) \vee (y \cdot z).$
8.  $(x \cdot (y \vee z \rightarrow y \vee z)) \vee (y \cdot x \cdot \bar{y}) \vee x \vee (y \cdot x \cdot \bar{x}).$
9.  $(x \rightarrow y) \cdot (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z).$
10.  $xz \vee x\bar{z} \vee yz \vee \bar{x}yz.$

11. Проверить, что наборы следующих функций являются базисами и выразить через них конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание: а) импликация и константа 0; б) импликация и сложение по модулю 2; в) функция трех переменных, заданная таблицей истинности (при естественном порядке наборов переменных: 10011110).

Следующие логические задачи требуется решить методами теории булевых функций:

12. Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:

- а) если первый сдал, то и второй сдал;
- б) если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал;
- в) если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал;
- г) если четвертый сдал, то и первый сдал.

13. Известно следующее: если Петя не видел Колю на улице, то либо Коля ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду; если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал. Выясните, ходил ли Коля в кино.

14. В школе, перешедшей на самообслуживание, четверем старшеклассникам Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7, 8, 9 и 10-й классы. При проверке выяснили, что десятый класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:

- а) Андреев: “Я убирал 9-й класс, а Савельев 7-й”;
- б) Костин: “Я убирал 9-й класс, а Андреев 8-й”;
- в) Савельев: “Я убирал 8-й класс, а Костин -10-й”.

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а в другом – ложь. Какой класс убирал каждый ученик?

15. Пять школьников из пяти различных городов Брянской области прибыли в Брянск для участия в областной олимпиаде по математике. На вопрос: “Откуда вы?” каждый дал ответ:

- а) Иванов: “Я приехал из Клинцов, а Дмитриев – из Новозыбкова”;

б) Сидоров: “Я приехал из Клинцов, а Петров – из Трубчевска”;

в) Петров: “Я приехал из Клинцов, а Дмитриев из Дятькова”;

г) Дмитриев: “Я приехал из Новозыбкова, а Ефимов – из Жуковки”;

д) Ефимов: “Я приехал из Жуковки, а Иванов живет в Дятькове”.

Откуда приехал каждый из школьников, если одно его утверждение верно, а другое ложно?

16. На вопрос: кто из трех студентов изучал логику, получен верный ответ: “Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий”. Кто изучал логику?

17. Однажды следователю пришлось допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу, и каждый из них обвинял кого-то во лжи:

а) Клод утверждал, что Жак лжет;

б) Жак обвинял во лжи Дика;

в) Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку.

Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?

18. Нарисовать функциональную схему для функции

$$(x \rightarrow y) \sim (xy / z).$$

19. Нарисовать РКС для ДНФ:

$$x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee xyz,$$

а также сократить её по правилу Блейка и нарисовать РКС для полученной сокращённой ДНФ.

20. Найти хроматическое число и реберно-хроматическое число для графов из заданий 61 и 70.

21. Выяснить являются ли графы из заданий 61 и 70 эйлеровыми, полуэйлеровыми, гамильтоновыми или полугамильтоновыми. (Объясните свой ответ). Если ответ на какой-нибудь из этих четырех вопросов является положительным, то укажите соответствующий путь.

22. Нарисовать все возможные деревья, содержащие 5 вершин (и значит 4 ребра).

23. Для графа на рис. 16 определите, является ли он эйлеровым, и если да, то найдите эйлеров путь в соответствии с алгоритмом Флери.

24. Является ли граф на рис.16 гамильтоновым, а если нет, то сколько вершин надо добавить, чтобы он стал таковым.

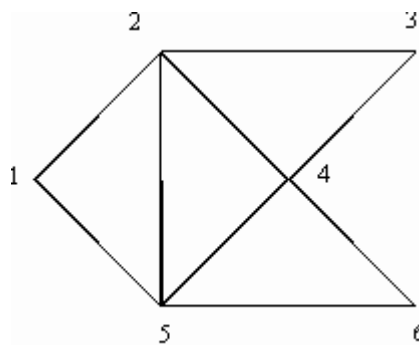


Рис. 16

25. Граф на рис.17 не является плоским. Является ли он планарным? Если да, то нарисуйте этот граф плоским.

### 18. Вопросы для самопроверки

1. Булевы функции. Таблицы истинности.
2. Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание. Свойства. Правила поглощения, де Моргана и Блейка.
3. ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ. Представление булевой функции (по таблице истинности) в виде СДНФ и СКНФ.
4. Сокращенная ДНФ. Нахождение сокращенной формулы с помощью правила Блейка и с помощью карт Карно.
5. Полиномы Жегалкина и их нахождение.
6. Суперпозиция функций. Полные наборы функций и базисы. Теорема Поста и таблица Поста.
7. Графы. Общие понятия. Ориентированные графы. Пути и сечения в графе.
8. Структурная матрица. Нахождение путей и сечений методами булевой алгебры.
9. Сети и потоки в сетях. Теорема Форда-Фалкерсона.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Нефедов В. Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики / МАИ. М., 1992.
2. Лихтарникова Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. СПб, 1988.
3. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. М., 1972.
4. Мамонтова Н.П. и др. Методические указания к практическим занятиям по теории сетей связи / ЛЭИС. Л., 1978.
5. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
6. Уилсон Р. Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977.