1	
2	
3	
4	
5	
6	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

Números e Funções Reais — Avaliação Final

Prof. Adriano Barbosa

PROFMAT 20/07/2018

Aluno(a):...

Para as questões de 1 a 6 escolha e resolva apenas o exercício A ou B de cada uma delas.

1A. Prove que $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ é uma bijeção.

1B. Sejam X e Y conjuntos arbitrários e $f : X \to Y$ uma função. Prove que, se A, $B \subset X$ então

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

2A. Prove que se a, b, c e d são números racionais tais que $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c\sqrt{2} + d\sqrt{3}$ então $a = c$ e $b = d$.

2B. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente tal que, para todo x racional, vale $f(x) = ax + b$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes). Prove que se tem $f(x) = ax + b$ também se x for irracional.

3A. A imagem de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o conjunto $f(\mathbb{R})$ cujos elementos são os números $f(x)$, onde x é qualquer número real. Determine as imagens das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = rx + s$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2 + bx + c$. Discuta as possibilidades e justifique suas afirmações.

3B. Considere as seguintes possibilidades a respeito das funções afins $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$.

A) $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

B) $f(x) \neq g(x)$ seja qual for $x \in \mathbb{R}$.

C) Existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x)$.

Com essas informações,

(a) Exprima cada uma das possibilidades acima por meio de relações entre os coeficientes a, b, c e d.

(b) Interprete geometricamente cada uma dessas 3 possibilidades usando os gráficos de f e g.

4A. A população de uma cultura de bactérias, num ambiente controlado, é estimada pela área que ocupa sobre uma superfície plana e tem taxa de crescimento diária proporcional a seu tamanho. Se, decorridos 20 dias, a população duplicou, então ela ficou 50% maior

(a) antes de 10 dias.

(b) ao completar 10 dias.

(c) após 10 dias.

Escolha a resposta certa e justifique sua opção.

4B. Calcule as seguintes expressões:

(a) $\log_n \left[\log_n \left(\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} \right) \right]$

(b) $x^{\log a / \log x}$, onde $a > 0$, $x > 0$ e a base dos logaritmos é fixada arbitratiamente.

5A. Resolva a equação

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

5B. (a) Encontre uma expressão para $\operatorname{sen}(3x)$ como um polinômio de coeficientes inteiros em termos de $\operatorname{sen}(x)$.

(b) Mostre que $\operatorname{sen}(10^\circ)$ é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros.

6A. Um professor propôs a seguinte questão: "Dada a sequência $1, 4, 9, 16, \ldots$, determine o quinto termo". Um aluno achou um resultado diferente de 25, que era a resposta esperada pelo professor. Ele obteve um polinômio $P(x)$ satisfazendo cinco condições: $P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(3) = 9$, $P(4) = 16$ e $P(5) \neq 25$. Encontre um polinômio $P(x)$ satisfazendo as condições acima e tal que $P(5) = 36$.

6B. (a) Seja $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros. Se a fração irredutível $\frac{a}{b}$, com a, b inteiros e $b \neq 0$, é raiz de $p(X)$, mostre que a é divisor de a_0 e b é dividor de a_n.

(b) Encontre todas as raízes reais do polinômio $p(X) = 2X^4 + X^3 - 7X^2 - 3X + 3$.

Boa Prova!