



P1		P5	
P2		P6	
P3		P7	
P4		P8	
NOTA FINAL			

Instruções: A pontuação máxima desta prova é de 100 pontos, então fique a vontade para fazer quantas questões quiser! Em todas as questões, mostre seus cálculos e apresente uma resposta completa e clara. Certifique-se de que todas suas respostas estejam legíveis e organizadas.

Problema 1 (10 pontos). Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| < 2\}$, determine $A \cap B$ e $A \cup B$.

Problema 2 (10 pontos). Resolva a equação $2^{x^2-3x+2} = 8$.

Problema 3 (10 pontos). Considere a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(x + 1)$. Determine uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $g(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, e $f(g(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Problema 4 (20 pontos). Alice decidiu criptografar uma mensagem para Bob usando a função $f(x) = 3x + 7$. Antes de aplicar essa função, Alice mapeou cada letra do alfabeto em números, onde A é 1, B é 2, C é 3, e assim por diante, até Z ser 26. Para números maiores que 26, o alfabeto volta a se repetir, onde A é 27, B é 28 e assim sucessivamente para todos os números naturais.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
W	X	Y	Z	A	B	C	...														
23	24	25	26	27	28	29	...														

(a) Decifre a mensagem “52 43 10” encontrando a inversa de f .

(b) Tomando o domínio de f como $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$, qual deve ser o domínio de f^{-1} para que as funções estejam bem definidas?

Problema 5 (30 pontos). Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$.

Problema 6 (30 pontos). Denotando por A^c o complementar do conjunto A , ou seja, $A^c = \{x \mid x \notin A\}$. Dados conjuntos A e B quaisquer, mostre que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, ou seja, mostre que todo elemento de $(A \cup B)^c$ é também elemento de $A^c \cap B^c$ e vice-versa.

Problema 7 (40 pontos). Um ônibus de 50 lugares foi fretado para uma excursão. A agência de turismo cobrou de cada passageiro R\$400,00 mais R\$10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros o faturamento da agência é máximo?

Problema 8 (40 pontos). Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0\}$, determine $A - B$.