23. Производни от по-висок ред. Формула на Лайбниц

Производни от по-висок ред

Дефиниция

(а) Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в (a, b) и производната ѝ $f'(x)$ е диференцируема в т. $x_0 \in (a, b)$, то производната на $f'(x)$ в т. x_0 наричаме <u>втора производна на $f(x)$ в т. x_0</u>; означаваме я с $f''(x_0)$.
(б) Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в (a, b) и производната ѝ $f'(x)$ е също диференцируема в този интервал, то можем да разгледаме производната на $f'(x)$ като функция, дефинирана в (a, b). Тя се нарича <u>втора производна на $f(x)$</u> и се означава с $f''(x)$, т.е. $f''(x) := \big(f'(x)\big)'$.
(в) Аналогично, ако $f''(x)$ е диференцируема, полагаме $f'''(x) := \big(f''(x)\big)'$. Тя се нарича <u>трета производна на $f(x)$</u> и т.н.

По-общо, полагаме:

$$f^{(0)}(x) := f(x), \quad f^{(n)}(x) := \big(f^{(n-1)}(x)\big)', \quad n \in \mathbb{N}_+. \tag{1}$$

$f^{(n)}$ се нарича <u>n-та производна на $f(x)$</u> или още производна от ред n на $f(x)$.

Примери

Така имаме
$$f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \quad f^{(3)} = f''' \text{ и т.н.} \tag{2}$$

Пример 1: $f(x) = x^3$. Имаме

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = 3x^2, \quad f^{(2)}(x) = (f'(x))' = 6x, \quad f^{(3)}(x) = (f^{(2)}(x))' = 6,$$
$$f^{(n)}(x) \equiv 0, \quad n \geq 4.$$

Пример 2: $f(x) = e^x$. Имаме

$$f^{(1)}(x) = e^x, \quad f^{(2)}(x) = (f'(x))' = e^x \quad \text{и изобщо} \quad f^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall n.$$

Зад. Намерете $(\sin x)^{(n)}$.

Формула на Лайбниц

Твърдение

Нека $f(x)$ и $g(x)$ притежават производни от ред n в (a, b) и $c \in \mathbb{R}$. Тогава и функциите $f(x) + g(x)$ и $cf(x)$ също притежават производни от ред n в (a, b), като

$$\left(f(x) + g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \quad \text{и} \quad \left(cf(x)\right)^{(n)} = cf^{(n)}(x). \tag{3}$$

Теорема (ф-ла на Лайбниц)

Нека $f(x)$ и $g(x)$ притежават производни от ред $n \geq 1$ в (a, b). Тогава и функцията $f(x)g(x)$ също притежава производна от ред n в (a, b), като

$$\left(f(x)g(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x). \tag{4}$$

Д-во на ф-лата на Лайбниц

Индукция по n.

(а) База: $n = 1$. Имаме

$$(fg)^{(1)} = f'g + fg', \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(1-k)} = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0)} = fg' + f'g. \tag{6}$$

(б) Индукционна стъпка: Предполагаме, че формулата е вярна за някое положително естествено число n (това е т.нар. индукционно предположение, ИП). Ще я докажем за следващото естествено ч.

$$(fg)^{(n+1)} \overset{\text{по деф.}}{=} \left((fg)^{(n)}\right)' \overset{\text{ИП}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g \\
&= f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)},
\end{aligned}
$$

като накрая използваме формулата

$$
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{7}
$$

Сега от Пр. на МИ следва верността на формулата за всяко $n \in \mathbb{N}_+$.