9. Интегриране по части и смяна на променливата в несобствените интеграли

Ще разгледаме аналозите на формулата за интегриране по части и на теоремата за смяна на променливата при несобствените интеграли. Ще направим това за несобствените интеграли от I вид (род), т.е. тези върху безкраен интервал, но същите резултати са в сила и за тези от II вид, т.е. върху краен интервал.

Полагаме за $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, където $g(x)$ е диференцируема,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dg(x) := \int_a^{+\infty} f(x) g'(x)\, dx \tag{1}$$

стига несобственият интеграл вдясно да е сходящ.

Интегриране по части

Теорема 1 (формула за интегриране по части)

Нека $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ са диференцируеми и производните им са непрекъснати. Нека още съществува границата $\ell := \lim_{x \to +\infty} f(x)g(x)$. Ако е сходящ единият от несобствените интеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dg(x) \quad \text{или} \quad \int_a^{+\infty} g(x)\, df(x), \tag{2}$$

то е сходящ и другият, като е в сила формулата

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dg(x) = \ell - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} g(x)\, df(x). \tag{3}$$

Горната формула може накратко да се запише и така

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dg(x) = [f(x)g(x)]\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} g(x)\, df(x). \tag{4}$$

Доказателство

Каквото и $p > a$ да фиксираме, формулата за интегриране по части за собствени риманови интеграли дава

$$\int_a^p f(x)\,dg(x) = f(p)g(p) - f(a)g(a) - \int_a^p g(x)\,df(x). \tag{5}$$

т.е.

$$\int_a^p f(x)g'(x)\,dx = f(p)g(p) - f(a)g(a) - \int_a^p g(x)f'(x)\,dx. \tag{6}$$

Да предположим, че $\int_a^{+\infty} g(x)\,df(x)$ е сходящ. Това означава по дефиниция, че съществува границата

$$\lim_{p\to+\infty} \int_a^p g(x)f'(x)\,dx \tag{7}$$

и

$$\int_a^{+\infty} g(x)f'(x)\,dx := \lim_{p\to+\infty} \int_a^p g(x)f'(x)\,dx. \tag{8}$$

Това заедно с равенството (6) и съществуването на $\lim_{p\to+\infty} f(p)g(p)$ показва, че съществува и границата

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^p f(x)g'(x)\,dx, \tag{9}$$

като, след граничен преход в (6) получаваме

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = \ell - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} g(x)f'(x)\,dx, \tag{10}$$

което е именно формулата от твърдението на теоремата.
Ако предположим, че съществува другият несобствен интеграл, разсъжденията са аналогични.

Смяна на променливата

Теорема 2 (за смяна на променливата)

Нека $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Нека $\varphi : [\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ е строго монотонно растяща функция, като β може да означава и символа $+\infty$. Нека $\varphi(t)$ е диференцируема и производната ѝ е непрекъсната. Накрая нека $\varphi(\alpha) = a$ и $\lim_{t \to \beta} \varphi(t) = +\infty$. Тогава

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, d\varphi(t), \tag{11}$$

като от сходимостта на кой и да е от тези интеграли следва и сходимостта на другия (в случай че е несобствен).

Любопитно е, че е възможно десният интеграл горе да е собствен.

В сила е и аналогично твърдение за $\varphi(t)$ строго монотонно намаляваща.

Доказателство

Подхождаме аналогично на предната теорема. Да предположим, че интегралът $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, d\varphi(t)$ е собствен или сходящ несобствен.
Случаят, в който левият интеграл се предполага сходящ, се разглежда аналогично.
Каквото и $p > a$ да фиксираме, теоремата за смяна на променливата в собсвените интеграли влече

$$\int_a^p f(x)\, dx = \int_\alpha^{\varphi^{-1}(p)} f(\varphi(t))\, d\varphi(t). \tag{12}$$

Тук, както обикновено $\varphi^{-1}(y)$ е обратната функция на $\varphi(t)$, а тя е обратима, защото е строго монотонна.
Сега в случаят, в който и десният интеграл във формулата в теоремата е несобствен, твърдението непосредствено следва след граничен преход $p \to +\infty$ в горното равенство. Тук взимаме предвид, че $\lim_{p\to+\infty} \varphi^{-1}(p) = \beta$, което следва от $\lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t) = +\infty$.

Ако $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,d\varphi(t)$ е собствен (тогава непременно $\beta \in \mathbb{R}$) остава още да съобразим, че

$$\lim_{\gamma\to\beta-0}\int_\alpha^\gamma g(t)\,dt = \int_\alpha^\beta g(t)\,dt \tag{13}$$

за всяка интегруема (в частност, непрекъсната) функция $g(t)$, дефинирана върху $[\alpha,\beta]$ (Твърдение, Тема 5).

Пример: $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$. Правим смяна на променливата $x = \dfrac{1}{t}$. Получаваме

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \int_1^0 t^2 d\frac{1}{t} = \int_1^0 t^2\left(\frac{1}{t}\right)' dt \tag{14}$$

$$= -\int_1^0 t^2\frac{1}{t^2}dt = \int_0^1 dt = 1. \tag{15}$$