3. Основни свойства на определения интеграл: линейност, монотонност и адитивност

Линейност

Теорема 1

Нека $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ са интегруеми и $k \in \mathbb{R}$. Тогава:

(а) функцията $f(x) + g(x)$ е интегруема върху $[a, b]$ и

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx, \tag{1}$$

(б) функцията $kf(x)$ е интегруема върху $[a, b]$ и

$$\int_a^b kf(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx. \tag{2}$$

Доказателство

(а) За всяко разбиване τ имаме

$$R_\tau(f+g) = R_\tau(f) + R_\tau(g). \tag{3}$$

Тъй като $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми върху $[a, b]$, всяка една от римановите суми в дясната страна има граница при $d(\tau) \to 0$ и тя е равна съответно на определения интеграл на $f(x)$ и $g(x)$ върху $[a, b]$. Така установяваме, че съществува границата

$$\lim_{d(\tau)\to 0} R_\tau(f+g) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \tag{4}$$

с което показахме, че $f(x) + g(x)$ удовлетворява дефиницията на Риман за интегруемост и е в сила формулата в (а).

(б) Аналогично, като използваме равенството $R_\tau(kf) = kR_\tau(f)$.

Монотонност

Теорема 2

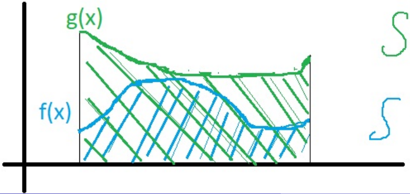
Нека $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ са интегруеми.

(а) Ако $f(x) \geq 0$ в $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0. \tag{5}$$

(б) Ако $f(x) \leq g(x)$ в $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx. \tag{6}$$



$$S = \int_a^b g(x)dx$$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Доказателство

(а) За всяка риманова сума имаме $R_\tau(f) \geq 0$. Следователно за нейната граница при $d(\tau) \to 0$ (която съществува, защото $f(x)$ е интегруема), получаваме

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{по деф.}}{=} \lim_{d(\tau)\to 0} R_\tau(f) \geq 0. \tag{7}$$

(б) Разглеждаме функцията $h(x) := g(x) - f(x) \geq 0$ в $[a, b]$. Както следва от Теорема 1, тя е интегруема. Имаме

$$\underbrace{\int_a^b h(x)\,dx}_{\overset{\text{т-ма 1}}{=} \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx} \overset{\text{(а)}}{\geq} 0. \tag{8}$$

Оттук следва (б).

Монотонност — продължение

Теорема 3

Ако $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегруема, то интегруема е и функцията $|f(x)|$, при това

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{9}$$

Доказателство

От неравенството

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leq |f(x) - f(y)| \quad \forall x, y \in [a, b] \tag{10}$$

следва

$$\omega(|f|, D) \leq \omega(f, D) \quad \forall D \subseteq [a, b]. \tag{11}$$

Следователно за всяко разбиване τ на $[a, b]$ имаме (вж. (10) в Тема 2)

$$S_\tau(|f|) - s_\tau(|f|) \leq S_\tau(f) - s_\tau(f). \tag{12}$$

Според НУ в Критерия за интегруемост, понеже $f(x)$ е интегруема, можем да направим дясната страна горе колкото искаме близка до 0, взимайки подходящо разбиване τ. Но тогава и лявата страна е близка до 0 за същото разбиване. Сега от ДУ в Критерия за интегруемост следва, че $|f(x)|$ е интегруема.

Неравенството следва от Теорема 2 след интгериране на неравенствата $\pm f(x) \leq |f(x)|$ върху $[a, b]$.

Адитивност

Теорема 4

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $c \in (a, b)$. Тогава $f(x)$ е интегруема върху $[a, b]$ тогава и само тогава, когато е интегруема върху всеки един от интервалите $[a, c]$ и $[c, b]$. Ако $f(x)$ е интегруема върху $[a, b]$, то в сила е формулата

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{13}$$

Полагаме:

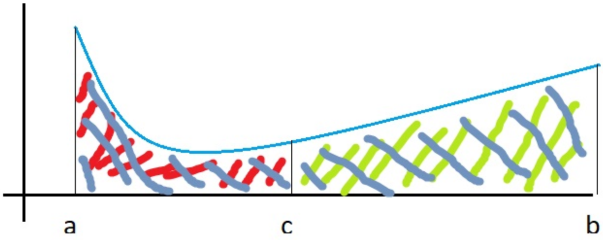
$$\int_a^a f(x)\,dx := 0, \quad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx, \quad a < b. \tag{14}$$

Следствие

Нека $f : D \to \mathbb{R}$ и $D \subseteq \mathbb{R}$ е интервал. Тогава за всеки $a, b, c \in D$ имаме

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{15}$$

стига да съществува всеки един от определените интеграли.



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$S = \int_a^c f(x)dx$$

$$S = \int_c^b f(x)dx$$

Доказателство на Теорема 4

Ще докажем интегруемостта посредством критерия за интегруемост, а формулата чрез риманови суми.

Нека $f(x)$ е интегруема върху $[a, b]$. Ще докажем, че тогава $f(x)$ е интегруема върху $[a, c]$ и върху $[c, b]$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано. Ще покажем, че съществува разбиване τ на $[a, c]$ такова, че

$$S_\tau(f\big|_{[a,c]}) - s_\tau(f\big|_{[a,c]}) < \varepsilon. \tag{16}$$

Тук $f\big|_{[a,c]}$ означава функцията $f(x)$ с дефиниционна област $[a, c]$.

От (16), благодарение на Критерия за интегруемост (ДУ), следва, че $f(x)$ е интегруема върху $[a, c]$. Щом $f(x)$ е интегруема върху $[a, b]$, то от Критерия за интегруемост (НУ) следва, че съществува разбиване τ_1 на $[a, b]$ такова, че

$$S_{\tau_1}(f\big|_{[a,b]}) - s_{\tau_1}(f\big|_{[a,b]}) < \varepsilon. \tag{17}$$

Образуваме разбиването $\tau_2 := \tau_1 \cup \{c\}$ на $[a, b]$. От Твърдение 2 в Тема 1 и (17) следва, че

$$S_{\tau_2}(f\big|_{[a,b]}) - s_{\tau_2}(f\big|_{[a,b]}) \overset{\text{Тв. 2, Тема 1}}{\leq} S_{\tau_1}(f\big|_{[a,b]}) - s_{\tau_1}(f\big|_{[a,b]}) \overset{(17)}{<} \varepsilon. \quad (18)$$

Нека τ е множеството от делящите точки в τ_2, които са в $[a, c]$. τ е разбиване на $[a, c]$, за което

$$S_{\tau}(f\big|_{[a,c]}) - s_{\tau}(f\big|_{[a,c]}) \leq S_{\tau_2}(f\big|_{[a,b]}) - s_{\tau_2}(f\big|_{[a,b]}). \quad (19)$$

Оттук и (18) следва, че

$$S_{\tau}(f\big|_{[a,c]}) - s_{\tau}(f\big|_{[a,c]}) < \varepsilon. \quad (20)$$

Сега от Критрия за интегруемост (ДУ) следва, че $f(x)$ е интегруема върху $[a, c]$.
Съвсем аналогично се показва, че $f(x)$ е интегруема върху $[c, b]$.

Нека, обратно, $f(x)$ е интегруема върху $[a, c]$ и върху $[c, b]$. Ще докажем, че $f(x)$ е интегруема върху $[a, b]$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано. Ще покажем, че съществува разбиване τ на $[a, b]$ такова, че

$$S_\tau(f\big|_{[a,b]}) - s_\tau(f\big|_{[a,b]}) < \varepsilon. \tag{21}$$

Тогава от Критерия за интегруемост (ДУ) ще следва, че $f(x)$ е интегруема върху $[a, b]$.

Понеже $f(x)$ е интегруема върху $[a, c]$, то, както следва от Критерия за интегруемост (НУ), съществува разбиване τ_1 на $[a, c]$ такова, че

$$S_{\tau_1}(f\big|_{[a,c]}) - s_{\tau_1}(f\big|_{[a,c]}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{22}$$

Аналогично установяваме, че съществува разбиване τ_2 на $[c, b]$ такова, че

$$S_{\tau_2}(f\big|_{[c,b]}) - s_{\tau_2}(f\big|_{[c,b]}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{23}$$

Да разгледаме разбиването на $[a, b]$, дефинирано чрез $\tau := \tau_1 \cup \tau_2$. За него имаме

$$\begin{aligned} &S_\tau(f\big|_{[a,b]}) - s_\tau(f\big|_{[a,b]}) \\ &\qquad = \underbrace{(S_{\tau_1}(f\big|_{[a,c]}) - s_{\tau_1}(f\big|_{[a,c]}))}_{\overset{(22)}{<}\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{(S_{\tau_2}(f\big|_{[c,b]}) - s_{\tau_2}(f\big|_{[c,b]}))}_{\overset{(23)}{<}\frac{\varepsilon}{2}} \\ &\qquad < \varepsilon. \end{aligned} \tag{24}$$

С това (21) е установено.

Остава да докажем формулата в теоремата. Разглеждаме разбивания τ на $[a, b]$, сред делящите точки на които присъства т. c. Да означим с τ_1 разбиването на $[a, c]$, което се получава от делящите точки на τ, които принадлежат на $[a, c]$, а с τ_2 — разбиването на $[c, b]$, което се получава от делящите точки на τ, които принадлежат на $[c, b]$. Тогава

$$R_\tau(f) = R_{\tau_1}(f) + R_{\tau_2}(f). \tag{25}$$

От $d(\tau) \to 0$ следва, че $d(\tau_1) \to 0$ и $d(\tau_2) \to 0$. От интегруемостта на $f(x)$ върху $[a, b]$, $[a, c]$ и $[c, b]$ съответно следва, че

$$\lim_{d(\tau)\to 0} R_\tau(f) = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{26}$$

$$\lim_{d(\tau_1)\to 0} R_{\tau_1}(f) = \int_a^c f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \lim_{d(\tau_2)\to 0} R_{\tau_2}(f) = \int_c^b f(x)\,dx. \tag{27}$$

Така, след граничен преход $d(\tau) \to 0$ в (25), следва формулата в теоремата.