26. Локални екстремуми на функции на две променливи — необходими условия и достатъчни условия

Дефиниция

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и (x_0, y_0) е вътрешна за D.

(а) Казваме, че $f(x, y)$ има локален максимум в т. (x_0, y_0), ако съществува околност $U \subseteq D$ на (x_0, y_0) такава, че

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in U. \tag{1}$$

Казваме, че той е строг, ако неравенството горе е строго при $(x, y) \neq (x_0, y_0)$.

(б) Казваме, че $f(x, y)$ има локален минимум в т. (x_0, y_0), ако съществува околност $U \subseteq D$ на (x_0, y_0) такава, че

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in U. \tag{2}$$

Казваме, че той е строг, ако неравенството горе е строго при $(x, y) \neq (x_0, y_0)$.

(в) Локалните максимуми и минимуми се наричат локални екстремуми.

Дефиниция

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и $(x_0, y_0) \in D$.

(а) Казваме, че $f(x, y)$ има глобален максимум в т. (x_0, y_0), ако

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in D. \tag{3}$$

Казваме, че той е строг, ако н-вото горе е строго при $(x, y) \neq (x_0, y_0)$.

(б) Казваме, че $f(x, y)$ има глобален минимум в т. (x_0, y_0), ако

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in D. \tag{4}$$

Казваме, че той е строг, ако н-вото горе е строго при $(x, y) \neq (x_0, y_0)$.

(в) Глобалните максимуми и минимуми се наричат глобални екстремуми.

(г) Стойността на функцията в точка на глобален максимум се нарича НГ стойност на функцията, а стойността ѝ в точка на глобален максимум — НМ стойност.

Теорема 1 (НУ за лок. екстр., Ферма)

Ако функция има локален екстремум в дадена точка, то всяка първа частна производна, която съществува в тази точка, е равна на 0.

Д-во: Нека $f(x, y)$ има локален максимум в т. (x_0, y_0) и частната производна $f'_x(x_0, y_0)$ съществува. Ще докажем, че $f'_x(x_0, y_0) = 0$. Съвсем аналогично се установява, че $f'_y(x_0, y_0) = 0$ (стига да съществува). Случаят на локален минимум се свежда към този на локален максимум, като се разгледа $-f(x, y)$.
Разглеждаме функцията на една променлива $\varphi(x) := f(x, y_0)$. Тя има локален максимум в т. x_0. От самата дефиниция на частна производна следва, че $\varphi(x)$ е диференцируема в т. x_0, като

$$\varphi'(x_0) = f'_x(x_0, y_0). \tag{5}$$

Сега от НУ за локален екстремум (т-мата на Ферма) за функции на една променлива (ДИС 1, тема 24) следва, че $\varphi'(x_0) = 0$, което предвид (5) влече $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Дефиниция

Решенията на системата

$$\begin{vmatrix} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{vmatrix} \tag{6}$$

(във вътрешността на дефиниционната област на $f(x,y)$) се наричат критични точки на $f(x,y)$.

Бележка

Ако $f(x,y)$ е непрекъсната върху компакта $D \subseteq \mathbb{R}^2$, то, както знаем от т-мата на Вайерщрас (тема 20, т-ма 8), $f(x,y)$ има НГ и НМ стойност върху D. Нека още $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ съществуват навсякъде във вътрешността на D. Тогава НГ и НМ стойност се достигат в критична точка или върху контура на D.

Теорема 2 (ДУ за лок. екстр.)

Нека $f(x, y)$ има непрекъснати частни производни до втори ред включително в околност на т. (x_0, y_0). Нека

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \tag{7}$$

и

$$f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - f''_{xy}(x_0, y_0)^2 > 0. \tag{8}$$

Тогава:

(а) ако $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, то $f(x, y)$ има локален минимум в т. (x_0, y_0);

(б) ако $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, то $f(x, y)$ има локален максимум в т. (x_0, y_0).

Бележка. Те са дори строги.

Бележка

Ако

$$f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - f''_{xy}(x_0, y_0)^2 < 0, \tag{9}$$

то $f(x, y)$ няма локален екстремум в т. (x_0, y_0).

Доказателство

Ще докажем (а); (б) се свежда към (а), като разгледаме функцията $-f(x, y)$.

Полагаме

$$\Delta(x, y) := f''_{xx}(x, y) f''_{yy}(x, y) - f''_{xy}(x, y)^2. \tag{10}$$

Понеже $f''_{xx}(x, y)$ е непрекъсната и $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, то $f''_{xx}(x, y) > 0$ в околност на т. (x_0, y_0).

Аналогично $\Delta(x, y) > 0$ в околност на т. (x_0, y_0).

Следователно съществува околност на т. (x_0, y_0) такава, че за всяка т. (x, y) в нея

$$f''_{xx}(x, y) > 0 \quad \text{и} \quad \Delta(x, y) > 0. \tag{11}$$

Нека (x, y) е произволно фиксирана в тази околност. Да положим за краткост $h := x - x_0$ и $k := y - y_0$.

Благодарение на ф-лата на Тейлър (Следствието в тема 25) имаме

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)h+f'_y(x_0,y_0)k$$
$$+\frac{1}{2}\Big[f''_{xx}(x_0+ch,y_0+ck)h^2+2f''_{xy}(x_0+ch,y_0+ck)hk+f''_{yy}(x_0+ch,y_0+ck)k^2\Big]$$

с някакво $c\in(0,1)$. Предвид (7), това влече

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\Big[f''_{xx}(x_0+ch,y_0+ck)h^2$$
$$+2f''_{xy}(x_0+ch,y_0+ck)hk+f''_{yy}(x_0+ch,y_0+ck)k^2\Big]. \quad (12)$$

За да завършим доказателството, ще покажем, че дясната страна на равенството горе е неотрицателна. Да положим

$$\alpha:=\frac{1}{2}f''_{xx}(x_0+ch,y_0+ck),\quad \beta:=\frac{1}{2}f''_{xy}(x_0+ch,y_0+ck),$$
$$\gamma:=\frac{1}{2}f''_{yy}(x_0+ch,y_0+ck).$$

Тогава (12) се представя във вида

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2. \quad (13)$$

Благодарение на (11) имаме

$$\alpha > 0 \quad \text{и} \quad \alpha\gamma - \beta^2 > 0, \tag{14}$$

от което следва, че $\alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2 \geq 0$.
Действително

$$\alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2 = \frac{1}{\alpha}(\alpha^2 h^2 + 2\alpha\beta hk + \alpha\gamma k^2) \tag{15}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{>0} \Big[(\alpha h + \beta k)^2 + (\underbrace{\alpha\gamma - \beta^2}_{>0})k^2\Big]. \tag{16}$$

Бележка. Може да се установи, че дясната страна горе е дори строго положителна при $(h, k) \neq (0, 0)$, т.е. при $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. Следователно локалният минимум е строг.