Решения на задачите от Домашна работа 3 по Алгебра 1

Задача 1. *В пространството F^4 на наредените четворки с елементи от поле F са дадени линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите*

$$a_1 = (3, -1, -1, 1), \quad a_2 = (-1, 1 - 3, 3)$$

и пространството от решения W на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +5x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = 0 \end{array} \right. .$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ и на сумата $U + W$.

Решение: За да представим U като пространство от решения на хомогенна система линейни уравнения, разглеждаме хомогенната система линейни уравнения

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

с матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Утроява,е втория ред, прибавяме към първия ред и получаваме

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -10 & 10 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Делим първия ред на 2. Изваждаме така получения първи ред от втория и сеждаме към

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

По този начин получаваме общото решение

$$x_1 = 2x_3 - 2x_4, \quad x_2 = 5x_3 - 5x_4 \quad \text{за произволни} \quad x_3, x_4 \in F.$$

Векторите

$$b_1 = (2, 5, 1, 0) \quad \text{и} \quad b_2 = (-2, -5, 0, 1)$$

образуват базис на пространството от решения и U е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +5x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -2x_1 & -5x_2 & & +x_4 & = 0 \end{array} \right. . \qquad (1)$$

Вектор $v \in U \cap W$ принадлежи на сечението на U и W тогава и само тогава, когато изпълнява уравненията на U и уравненията на W. По този начин, $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +5x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -2x_1 & -5x_2 & & +x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & +5x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

с матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Записваме третия ред като първи. След това записваме разликата на първи и четвърти ред, последвана от сумата на втори и четвърти ред. Умножаваме така получения първи ред по (-2), прибавяме към четвъртия ред на предишната матрица и записваме като четвърти ред на новата матрица, за да получим

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Прибавяме втория ред към третия. Делим втория ред на 2. Изваждаме така получения втори ред от четвъртия ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Изпускаме четвъртия ред, защото е пропорционален на третия. Изваждаме третия ред от първия. Умножаваме третия ред по (-2), прибавяме към втория ред и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Делим втория ред на 3. Умножаваме така получения втори ред по 2, прибавяме към първия ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общото решения на хомогенната система линейни уравнения с горната матрица от коефициенти е

$$x_1 = -2x_4, \quad x_2 = x_4, \quad x_3 = -x_4 \quad \text{за произволно} \quad x_4 \in F.$$

За $x_4 = 1$ получаваме базис

$$(-2, 1, -1, 1)$$

на $U \cap W$.

За да намерим базис на $U + W$, първо намираме базис на W. За целта решаваме хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме първия ред по (-2), прибавяме към втория ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме втория ред по $\frac{1}{5}$. Прибавяме така получения втори ред към първия и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{5} & 0 & \frac{17}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & -1 & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}.$$

Получената хомогенна система линейни уравнения има общо решение

$$x_1 = \frac{7}{5}x_2 - \frac{17}{5}x_4, \quad x_3 = \frac{3}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_4 \quad \text{за произволни} \quad x_2, x_4 \in F.$$

Например,

$$b_1 = (7, 5, 3, 0), \quad b_2 = (-17, 0, -8, 5)$$

е базис на W. От $U = l(a_1, a_2)$ и $W = l(b_1, b_2)$ следва, че сумата

$$U + W = l(a_1, a_2) + l(b_1, b_2) = l(a_1, a_2, b_1, b_2)$$

се поражда от векторите a_1, a_2, b_1, b_2. Векторите a_1, a_2, пораждащи U са линейно независими, така че $\dim(U) = 2$. Аналогично, $\dim(W) = 2$. По теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Следователно векторите a_1, a_2, b_1, b_2 са линейно зависими. За да изберем максимална линейно независима подсистема на a_1, a_2, b_1, b_2, предполагаме, че

$$\begin{aligned} (0, 0, 0,) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 b_1 + x_4 b_2 = \\ = x_1(3, -1, -1, 1) + x_2(-1, 1 - 3, 3) + x_3(7, 5, 3, 0) + x_4(-17, 0, -8, 5) = \\ = (3x_1 - x_2 + 7x_3 - 17x_4,\ -x_1 + x_2 + 5x_3,\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 8x_4,\ x_1 + 3x_2 + 5x_4) \end{aligned}$$

за $x_1, x_2, x_3, x_4 \in F$. Тогава $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F^4$ е решение на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -17 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & -8 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Запазваме втория ред, Умножаваме втория ред по 3 и прибавяме към първия. Изваждаме втория ред от третия, прибавяме го към четвъртия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 22 & -17 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -8 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Прибавяме третия ред към четвъртия. Удвояваме първия ред, прибавяме го към третия и получаваме

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 22 & -17 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & -42 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Третия и четвъртия ред са пропорционални. Изпускаме четвъртия ред. Делим третия ред на 42. Умножаваме третия ред по -22 и прибавяме към първия ред. Умножаваме третия ред по (-5), прибавяме към втория ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме първия ред по $\frac{1}{2}$, изваждаме от втория ред и получаваме

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ -1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следователно

$$x_1 = \frac{5}{2}x_4, \quad x_2 = -\frac{5}{2}x_4, \quad x_3 = x_4 \quad \text{за произволно} \quad x_4 \in F.$$

За $x_4 = 2$ получаваме $x_1 = 5$, $x_2 = -5$, $x_3 = 2$, т.е.

$$5a_1 - 5a_2 + 2b_1 + 2b_2 = (0, 0, 0, 0).$$

Всеки от векторите a_1, a_2, a_3, a_4 участва в горната линейна комбинация и може да бъде изпуснат от системата a_1, a_2, b_1, b_2, без промяна на линейната обвивка. Оттук, произволни три вектора от a_1, a_2, b_1, b_2 образуват базис на $U + W = l(a_1, a_2, b_1, b_2)$.

Задача 2. *В линейното пространство U над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа са дадени базиси $e = (e_1, e_2)$ и $e' = (e'_1, e'_2)$ с*

$$e'_1 = e_1 + 3e_2, \quad e'_2 = 2e_1 + 5e_2,$$

а в линейното пространство V над $\mathbb{Q}$ са дадени базиси $f = (f_1, f_2, f_3)$ и $f' = (f'_1, f'_2, f'_3)$ с

$$f_1 = f'_1 + 3f'_2 + 6f'_3, \quad f_2 = -f'_2 - 2f'_3, \quad f_3 = -f'_1 - 4f'_2 - 7f'_3.$$

Да разгледаме линейното изображение $\varphi : U \to V$, зададено чрез

$$\varphi(x_1 e'_1 + x_2 e'_2) = (2x_1 + 4x_2) f'_1 + (6x_1 + 12x_2) f'_2 + (14x_1 + 27x_2) f'_3$$

за произволни $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$. Да се намери матрицата A на φ спрямо базиса $e = (e_1, e_2)$ на U и базиса $f = (f_1, f_2, f_3)$ на V.

Решение: По условие, матрицата на прехода от базиса $e = (e_1, e_2)$ към базиса $e' = (e'_1, e'_2)$ е

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

а матрицата на прехода от $f' = (f'_1, f'_2, f'_3)$ към $f = (f_1, f_2, f_3)$ е

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Следователно $e' = eT$ и $f = f'S$. Матрицата на $\varphi : U \to V$ спрямо базиса e' на U и базиса f' на V е

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}.$$

Матрицата A на φ спрямо базиса e на U и базиса f на V изпълнява равенството $\varphi(e) = fA$. От

$$f'(SAT) = (f'S)(AT) = f(AT) = (fA)T = \varphi(e)T = \varphi(eT) = \varphi(e') = f'B$$

и линейната независимост на f'_1, f'_2, f'_3 следва $SAT = B$. В резултат,

$$A = S^{-1} B T^{-1}.$$

За да намерим обратната T^{-1} на T, извършваме елементарни преобразувания по редове, свеждащи лявата половина на

$$(T|E_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

към единичната матрица E_2. Тогава получената вдясно матрица е T^{-1}. По-точно, умножаваме първия ред по (-3), прибавяме към втория ред и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

Удвояваме втория ред, прибавяме към първия. Умножаваме втория ред по (-1) и получаваме

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right).$$

Вляво получихме единичната матрица E_2, така че вдясно е матрицата

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

За да намерим обратната матрица S^{-1} на S, извършваме елементарни преобразувания по редове към матрицата $(S|E_3)$ докато получим единичната матрица E_3 в лявата половина. Тогава получената вдясно матрица е S^{-1}. По-точно, започвайки с

$$(S|E_3) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

умножаваме втория ред по (-2) и прибавяме към третия ред. Умножаваме първия ред по (-3), прибавяме към втория и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Прибавяме третия ред към първия и втория, за да получим

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

След умножение на втория ред по (-1) имаме

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Следователно

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оттук,

$$\begin{aligned} A = S^{-1}BT^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \\ 14 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задача 3. *Спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ на линейно пространство V над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа са дадени линейният оператор $\varphi_1 : V \to V$ с*

$$\varphi_1(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (-2x_1 + 5x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_2 + x_3)e_2 + (x_1 - 2x_2 + x_3)e_3$$

за произволни $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ *и линейният оператор* $\varphi_2 : V \to V$ *с*

$$\varphi_2(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1e_1 + x_3e_2 + x_2e_3$$

за произволни $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. *Спрямо базиса* $f = (f_1, f_2)$ *на линейно пространство* W *над* $\mathbb{C}$ *е дадено линейно изображение* $\psi : V \to W$ *с*

$$\psi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3)f_1 + (-2x_1 + 4x_2 - 6x_3)f_2$$

за произволни $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. *За кои стойности на комплексния параметър* $p \in \mathbb{C}$ *композицията* $\psi(\varphi_1 + p\varphi_2) = \mathbb{O}$ *е нулевото изображение* $\mathbb{O} : V \to W$ *с* $\mathbb{O}(v) = \mathcal{O}_W$ *за всяко* $v \in V$.

Решение: Матриците $\mathcal{A}_{\varphi_1}$, съответно, $\mathcal{A}_{\varphi_2}$ на линейните оператори φ_1, съответно, φ_2 спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ на V са съставени по стълбове от координатите на образите на e_1, e_2, e_3 спрямо този базис. По-точно,

$$\mathcal{A}_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицата на $\psi : V \to W$ спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ на V е базиса $f = (f_1, f_2)$ на W е

$$\mathcal{A}_{\psi} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Равенството $\psi(\varphi_1 + p\varphi_2) = \mathbb{O}$ на линейни изображения $V \to W$ е изпълнено тогава и само тогава, когато матриците $\mathcal{A}_{\varphi_1}$, $\mathcal{A}_{\varphi_2} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ на φ_1, φ_2 спрямо базиса e на V и матриците $\mathcal{A}_{\psi}, \mathcal{A}_{\mathbb{O}} = \mathbb{O}_{2\times 3} \in M_{2\times 3}(\mathbb{C})$ на $\mathbb{O}, \psi : V \to W$ спрямо базиса e на V и базиса f на W изпълняват равенството

$$\mathbb{O}_{2\times 3} = \mathcal{A}_{\mathbb{O}} = \mathcal{A}_{\psi(\varphi_1 + p\varphi_2)} = \mathcal{A}_{\psi}\mathcal{A}_{\varphi_1 + p\varphi_2} = \mathcal{A}_{\psi}(\mathcal{A}_{\varphi_1} + p\mathcal{A}_{\varphi_2}).$$

Следователно, търсим онези $p \in \mathbb{C}$, за които

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{2\times 3} = \mathcal{A}_{\psi}(\mathcal{A}_{\varphi_1} + p\mathcal{A}_{\varphi_2}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p-2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & p+1 \\ 1 & p-2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 & 3p-3 & 2-2p \\ -2p+2 & 6-6p & 4p-4 \end{pmatrix}.$$

Горното равенство е изпълнено тогава и само тогава, когато $p = 1$.

Задача 4. *Спрямо някакъв базис на линейното пространство* U *над полето* $\mathbb{R}$ *на реалните числа линейният оператор* $\varphi : U \to U$ *има матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Да се намерят базиси на сечението $\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi)$ *и на сумата* $\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$ *на ядрото* $\ker(\varphi)$ *и на образа* $\operatorname{im}(\varphi)$ *на* φ.

Решение: Координатите на векторите от ядрото $\ker(\varphi) := \{u \in U \,|\, \varphi(u) = \mathcal{O}_U\}$ на φ спрямо дадения базис са решенията на хомогенната система линейни уравнения $Ax = \mathbb{O}_{5\times 1}$. Разглеждаме нейната матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Прибавяме втория ред към третия. Прибавяме първия ред към четвъртия и петия ред. Удвояваме първия ред, прибавяме го към втория и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запазваме първия ред. Изваждаме петия ред от втория. Изпускаме нулевия трети ред, защото не налага ограничение върху променливите. Умножаваме така получения втори ред по (-5), прибавяме към четвъртия ред на горната матрица и записваме на мястото на третия ред. Делим петия ред на горната матрица на 4 и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме втория ред по (-3) и прибавяме към първия ред. Изваждаме втория ред от четвъртия. Делим третия ред на 3 и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Изпускаме четвъртия ред, защото съвпада с третия. Изваждаме третия ред от първия, прибавяме го към втория и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следователно $\ker(\varphi)$ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & & & +x_4 & +2x_5 & =0 \\ & x_2 & & +x_4 & & =0 \\ & & -x_3 & +x_4 & & =0 \end{array} \right. . \qquad (2)$$

Общото решение на тази хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = -x_4 - 2x_5, \quad x_2 = -x_4, \quad x_3 = x_4 \quad \text{за произволни} \quad x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Векторите

$$a_1 = (-1,-1,1,1,0)^t \quad \text{и} \quad a_2 = (-2,0,0,0,1)^t$$

образуват базис на пространството от решения $\ker(\varphi)$.

Образът $\mathrm{im}(\varphi)$ на φ е линейната обвивка на вектор-стълбовете на матрицата A. От $\dim(U) = 5$ и дефект $d(\varphi) = \dim\ker(\varphi) = 2$ следва, че рангът на φ е $\mathrm{rk}(\varphi) = \dim\mathrm{im}(\varphi) = \dim(U) - d(\varphi) = 5 - 2 = 3$. Произволна максимална линейно независима система вектор-редове на транспонираната матрица A^t отговаря на максимална линейно независима система стълбове на A. Към матрицата

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

прилагаме само умножение на ред с ненулево реално число и умножение на ред с реално число и прибавяне към следващ ред, за да запазим линейните обвивки на началните отсечки на вектор-редовете. По-точно, изваждаме третия ред от четвъртия и петия. Умножаваме първия ред по (-3) и прибавяме към втория. Умножаваме първия ред по (-2), прибавяме към третия ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Делим втоиря ред на 5. Изваждаме така получения втори ред от третия. Умножаваме втория ред по (-3) и прибавяме към четвъртия ред. Прибавяме втория ред към петия и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1,6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Последните три реда са пропорционални помежду си, а първите три реда са линейно независими. Следователно, първите три реда на A^t са линейно независими и векторите

$$b_1 = (1, -2, 2, -1, -1)^t, \quad b_2 = (3, -1, 1, 2, 1)^t, \quad b_3 = (2, -3, 3, 0, -2)^t$$

образуват базис на вектор-стулбовете на A, а оттам и базис на образа $\mathrm{im}(\varphi)$ на φ. За да намерим хомогенна система линейни уравнения с пространство от решения $\mathrm{im}(\varphi)$, започваме с решаване на хомогенната система линейни уравнения, чиято матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

е съставена по редове от векторите b_1^t, b_2^t, b_3^t. Умножаваме първия ред по (-3) и прибавяме към втория. Умножаваме първия ред по (-2), прибавяме към третия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прибавяме удвоения трети ред към първия. Умножаваме третия ред по (-5), прибавяме към втория ред, записваме резултата като трети ред и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Делим третия ред на 5. Умножаваме така получения трети ред по 3 и прибавяме към първия. Умножаваме третия ред по 2, прибавяме към втория и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1,4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1,6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Общото решение на хомогенната система линейни уравнения с горната матрица е

$$x_1 = -1,4x_5, \quad x_2 = x_3 - 1,6x_5, \quad x_4 = 0,8x_5 \ \text{ за произволни } \ x_3, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Векторите

$$c_1 = (0, 1, 1, 0, 0) \quad \text{и} \quad c_2 = (-7, -8, 0, 4, 5)$$

образуват базис на пространството от решения, така че образът $\mathrm{im}(\varphi)$ на φ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrrl} & x_2 & +x_3 & & & = 0 \\ -7x_1 & -8x_2 & & +4x_4 & +5x_5 & = 0 \end{array} \right. . \qquad (3)$$

Сечението $\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi)$ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrrr} x_1 & & & +x_4 & +2x_5 & =0 \\ & x_2 & & +x_4 & & =0 \\ & & -x_3 & +x_4 & & =0 \\ & x_2 & +x_3 & & & =0 \\ -7x_1 & -8x_2 & & +4x_4 & +5x_5 & =0 \end{array} \right.$$

получена чрез обединяване на уравненията на (2) с уравненията на (3). От второ уравнение имаме $x_2 = -x_4$, а третото уравнение дава $x_3 = x_4$. От първото уравнение изразяваме $x_1 = -x_4 - 2x_5$ и заместваме в петото уравнение

$$0 = -7x_1 - 8x_2 + 4x_4 + 5x_5 = -7(-x_4 - 2x_5) - 8(-x_4) + 4x_4 + 5x_5 = 19x_4 + 19x_5.$$

В резултат, $x_5 = -x_4$ и $x_1 = -x_4 - 2x_5 = -x_4 - 2(-x_4) = x_4$ за произволно $x_4 \in \mathbb{R}$. За $x_4 = 1$ получаваме базисен вектор

$$(1, -1, 1, 1, -1)$$

на сечението $\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi)$. Вземайки предвид $d(\varphi) = \dim \ker(\varphi) = 2$ и $\operatorname{rk}(\varphi) = \dim \operatorname{im}(\varphi) = 3$, стигаме до извода, че сумата $\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$ е с размерност

$$\dim(\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)) = \dim \ker(\varphi) + \dim \operatorname{im}(\varphi) - \dim(\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi)) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Построихме базис a_1, a_2 на U, така че $\ker(\varphi) = l(a_1, a_2)$. Аналогично, $\operatorname{im}(\varphi) = l(b_1, b_2, b_3)$, защото b_1, b_2, b_3 е базис на $\operatorname{im}(\varphi)$. Следователно

$$\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi) = l(a_1, a_2) + l(b_1, b_2, b_3 = l(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3).$$

За да изберем максимална линейно независима система вектори от a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, транспонираме тези вектори и ги записваме като редовете на матрицата

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме ред с ненулево реално число или умножаваме ред с число и прибавяме към следващ ред, без да променяме линейните обвивки на началните отсечки на системата вектори a_1, a_2, b_1, v_2, b_3. Прибавяме втория ред към петия. По-точно, умножаваме първия ред по (-2) и прибавяме към втория ред. Прибавяме първия ред към третия. Умножаваме първия ред по 3, прибавяме към четвъртия ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Петият ред съвпада с третия, така че първите четири реда са линейно независми и образуват базис на $\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$. Оттук, векторите a_1, a_2, b_1, b_2 образуват базис на $\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$.