Глава 2

Интегрално смятане на функции на няколко променливи

2.1 Мярка на Пеано-Жордан

Нашата първа стъпка към дефинирането на Римановия интеграл в равнината, както и в произволно крайномерно Евклидово пространство, ще бъде да въведем мярка в такива пространства: т.нар. *мярка на Пеано-Жордан*. За да използваме геометричната интуиция, ние ще работим главно в случая на равнината $\mathbb{R}^2$, отбелязвайки какво е необходимо да се промени в случая на пространства с размерност по-голяма от 2. Трябва да се отбележи, че ако разликата между едномерния и двумерния случай е доста съществена (както читателят ще се убеди по-долу), то между размерност 2 и размерности 3,4,...,1000,.. такава почти няма, и всички определения и доказателства се пренасят почти без изменения.

Дефиниция на мярката на Пеано - Жордан. Нашата цел ще бъде да определим мярката, или лицето, на равнинна фигура. Ще тръгнем от две естествени правила:

- Лицето на правоъгълник е равно на произведението на страните му, и

- По-голямата фигура има и по-голямо лице, т.е. ако $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}'$ са фигури в равнината и $\mathbf{D} \subset \mathbf{D}'$, то лицето на $\mathbf{D}$ не надминава лицето на $\mathbf{D}'$.

Така, нашата основна "тухличка" при изграждането на мярката в равнината ще бъдат затворените правоъгълници, т.е. множества от вида
$$\Delta = [a,b] \times [c,d] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b]\,, y \in [c,d]\right\}.$$

За всеки правоъгълник ще въведем мярка (или лице): $\mu\,(\Delta) = (b-a)(d-c)$.

Нека подчертаем, че тук разглеждаме не какви да е правоъгълници, а само правоъгълници със страни, успоредни на координатните оси. Освен това, разглеждаме затворени правоъгълници; тяхната вътрешност се състои от произведението на съответните отворени интервали:

$$\Delta^o = (a,b) \times (c,d),$$

а контурът им се състои от четири отсечки.

В случая на пространство с размерност 3 и повече, навсякъде по-долу вместо "правоъгълник" трябва да се чете "правоъгълен паралелепипед", като отново се разглеждат паралелепипеди със страни, успоредни на координатните оси. Под правоъгълен паралелепипед в $\mathbb{R}^n$ ще разбираме множество от вида

$$\Delta = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in [a_1, b_1]\,, \ldots, x_n \in [a_n, b_n]\}\,,$$

което обикновено се записва във вида

$$\Delta = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]\,.$$

Мярката отново се определя като произведение на страните:

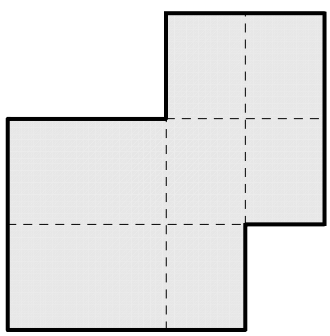
$$\mu(\Delta) = (b_1 - a_1) \ldots . (b_n - a_n)\,.$$

Дефиниция. *Казваме, че множеството $E \subset \mathbb{R}^2$ е елементарно, ако то може да се представи като обединение на краен брой затворени правоъгълници.*

Ще отбележим, че обединение, сечение и разлика на елементарни множества е също елементарно множество.

Лема 1. *Всяко елементарно множество* **E** *може да се представи като обединение на краен брой правоъгълници с непресичащи се вътрешности (за краткост ще ги наричаме непресичащи се правоъгълници).*

Доказателство. Да продължим отсечките, ограничаващи всеки от правоъгълниците, и да разсечем останалите правоъгълници по така получените прави. Полученото разбиване на множеството **E** очевидно удовлетворява изискванията на лемата. (На чертежа е представен случая, когато **E** е обединение на два правоъгълника.) ■



Представяне на елементарно множество като обединение на непресичащи се правоъгълници.

Дефиниция. *Нека* **E** *е елементарно множество, представено като обединение на непресичащи се правоъгълници:*

$$\mathbf{E} = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i,$$

$$\Delta_i^o \cap \Delta_j^o = \emptyset \quad \text{за} \quad i \neq j.$$

Ще определим мярката $\mu(\mathbf{E})$ *като*

$$\mu(\mathbf{E}) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\Delta_i\right).$$

Разбира се, трябва да докажем, че определението е коректно, т.е. не зависи от начина на представяне на **E** като обединение на непресичащи се правоъгълници. Нека най-напред **E** е правоъгълник, представен като обединение на други правоъгълници; тогава твърдението е очевидно (и става още по-очевидно, ако направим допълнителни разрези както в предната лема). В общия случай, нека

$$\mathbf{E} = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i = \bigcup_{j=1}^{m} \widetilde{\Delta}_j$$

са две различни представяния на $\mathbf{E}$ като обединение на непресичащи се правоъгълници. За всяко i от 1 до n имаме $\Delta_i = \cup_{j=1}^{m} \left(\Delta_i \cap \widetilde{\Delta}_j\right)$, което дава представяне на правоъгълника Δ_i като обединение на непресичащи се правоъгълници, и според отбелязаното по-горе $\mu(\Delta_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu\left(\Delta_i \cap \widetilde{\Delta}_j\right)$. Следователно

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu\left(\Delta_i \cap \widetilde{\Delta}_j\right)$$

и по същият начин

$$\sum_{j=1}^{m} \mu\left(\widetilde{\Delta}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \mu\left(\Delta_i \cap \widetilde{\Delta}_j\right),$$

с което коректността на дефиницията е доказана. ■

Следващата стъпка е да се опитаме да апроксимираме произволна фигура в равнината чрез елементарни множества. Това може да стане по различни начини. За илюстрация, нека си представим, че имаме фигура, нарисувана върху милиметрова хартия, и искаме да пресметнем приблизително нейното лице. Единият начин е да сумираме лицата на квадратчета, които имат общи точки с фигурата; така ще получим оценка отгоре за лицето и. Другият начин е да броим само онези квадратчета, които се съдържат вътре във фигурата; така получаваме оценка отдолу. Другояче казано, ние апроксимираме отвън и отвътре нашата фигура с множества, съставени от квадратчета, т.е. с елементарни множества. Така се стига до понятията горна и долна мярка на множество:

Дефиниция. *Нека* $\mathbf{A}$ *е ограничено подмножество на* $\mathbb{R}^2$. *Ще определим* *горна мярка* *на множеството* $\mathbf{A}$ *(с означение* $\mu^*(\mathbf{A})$*) като* *точната долна граница на мерките на всички елементарни множества, съдържащи* $\mathbf{A}$*:*

горен индекс *

$$\mu_*(\mathbf{A}) = \inf\left\{\mu(\mathbf{E}) : \mathbf{E} \text{ - } \textit{елементарно, } \mathbf{A} \subset \mathbf{E}\right\}.$$

Аналогично, определяме <u>долна мярка</u> на $\mathbf{A}$ *с формулата*

$$\mu_*(\mathbf{A}) = \sup\left\{\mu(\mathbf{E}) : \mathbf{E} \text{ - } \textit{елементарно, } \mathbf{E} \subset \mathbf{A}\right\}.$$

Забележка. Понякога ще е удобно да налагаме малко по-силни условия: да искаме $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}^o$ в дефиницията на горна мярка, и $\mathbf{E} \subset \mathbf{A}^o$ дефиницията на долна мярка. (Ще напомним, че $\mathbf{A}^o$ означава вътрешността на множеството $\mathbf{A}$, т.е. всички точки, които влизат в $\mathbf{A}$ заедно с някаква своя кръгова околност - виж §1.2). Лесно се вижда, че това не променя тяхните стойности.

Очевидно за всяко множество $\mathbf{A}$ имаме $\mu_*(\mathbf{A}) \leq \mu^*(\mathbf{A})$. За някои множества обаче тези две числа може да се различават. Например, да вземем множеството от всички точки в квадрата, които имат рационални координати:

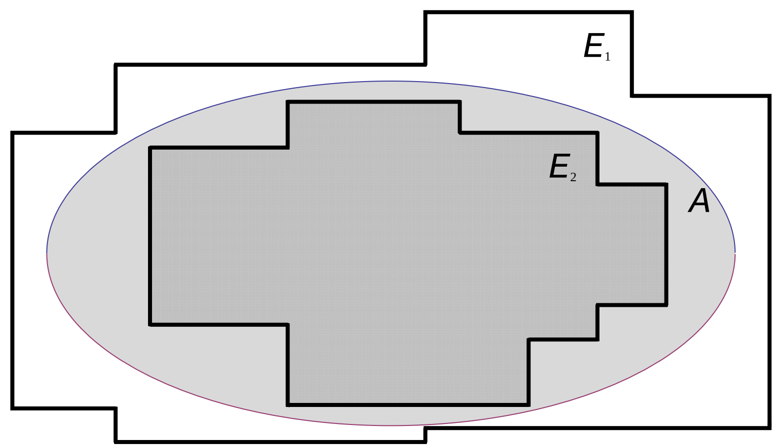
$$\mathbf{A} = \left\{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x, y \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Лесно се вижда, че $\mu^*(\mathbf{A}) = 1$, но $\mu_*(\mathbf{A}) = 0$ (множеството $\mathbf{A}$ не съдържа неизродени правоъгълници). Поради това ние ще определим мярката само върху някои множества в $\mathbb{R}^2$ - т. нар. <u>измерими множества</u>:

Дефиниция. *Ограниченото множество* $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^2$ *се нарича <u>измеримо</u>, ако неговата горна и долна мярки съвпадат. Общата им стойност се бележи с* $\mu(\mathbf{A})$ *и се нарича <u>мярка на Пеано-Жордан</u> на множеството* $\mathbf{A}$*.*

Оставяме на читателя докаже следното твърдение, което представлява лека модификация на горната дефиниция:

Лема 2. *Множеството* $\mathbf{A}$ *е измеримо тогава и само тогава, когато за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществуват елементарни множества* $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, *така че* $\mathbf{E}_2 \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{E}_1$ *и* $\mu\left(\mathbf{E}_1\right) - \mu\left(\mathbf{E}_2\right) < \varepsilon$.



Горна и долна мярка на множество.

Забележка. Горното определение на понятията "измеримо множество" и "мярка" има един сериозен недостатък – то използва фиксирана координатна система в равнината (съотв. в $\mathbb{R}^n$). Доказателството, че мярката не зависи от координатната система, ще бъде отложено до §6 (то се получава като следствие от теоремата за смяна на променливите при многократните интеграли).

Нека дадем някакво описание на измеримите множества в равнината и операциите, които могат да се извършват с тях.

Дефиниция. *Множеството се нарича пренебрежимо по Пеано-Жордан, ако* $\mu^*(\mathbf{A}) = 0$ *(от тук, разбира се, следва, че то е и измеримо).*

Лема 3. *Всяко подмножество на пренебрежимо множество е пренебрежимо. Обединение на краен брой пренебрежими множества също е пренебрежимо.*

Доказателство. Първото твърдение е очевидно. За второто, достатъчно е да докаже твърдението за случая на две множества.

Наистина, нека $\mu^*(\mathbf{A}_1) = \mu^*(\mathbf{A}_2) = 0$. Да изберем произволно $\varepsilon > 0$. Тогава според дефиницията на μ^* можем да намерим елементарни множества $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, така че $\mu(\mathbf{E}_1), \mu(\mathbf{E}_2) < \varepsilon/2$, $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{E}_1$, $\mathbf{A}_2 \subset \mathbf{E}_2$. Множеството $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2$ е също елементарно, при което $\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \subset \mathbf{E}$, и $\mu(\mathbf{E}) < \varepsilon$, т.е. $\mu^*(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2) = 0$. ■

Сега можем да формулираме необходимо и достатъчно условие за измеримост на множество. За тази цел ще използваме понятието контур на множество, въведено в §1.2.

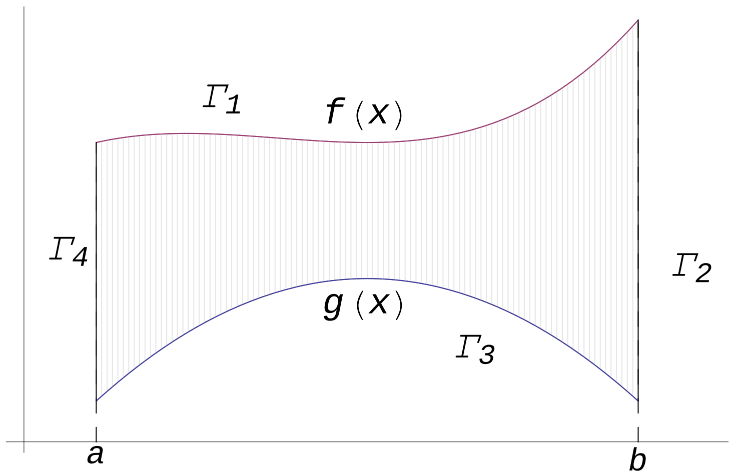
Теорема 4 (критерий за измеримост). *Едно ограничено множество* $\mathbf{A}$ *е измеримо тогава и само тогава, когато неговият контур* $b\mathbf{A}$ *е пренебрежимо множество.*

Доказателство. Нека е измеримо множество, т.е. $\mu_*(\mathbf{A}) = \mu^*(\mathbf{A}) = \mu(\mathbf{A})$. Да изберем произволно $\varepsilon > 0$. От дефиницията на горна и долна мярка следва съществуването на елементарно множество $\mathbf{E}_1$ такова, че $\mathbf{A} \subset E_1^o$ и $\mu(\mathbf{E}_1) < \mu(\mathbf{A}) + \varepsilon/2$, и на елементарно множество $\mathbf{E}_2$ такова, че $\mathbf{E}_2 \subset \mathbf{A}^o$ и $\mu(\mathbf{E}_2) > \mu(\mathbf{A}) - \varepsilon/2$. Очевидно $\mathbf{E}_2 \subset \mathbf{E}_1$. Да означим $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \setminus \mathbf{E}_2$; тогава $\mu(\mathbf{E}) = \mu(\mathbf{E}_1) - \mu(\mathbf{E}_2) < \varepsilon$ и контурът $b\mathbf{A}$ на множеството $\mathbf{A}$ се съдържа в $\mathbf{E}$, откъдето следва, че $b\mathbf{A}$ е пренебрежимо множество.

Обратно, да предположим, че $b\mathbf{A}$ е пренебрежимо, и да го включим във вътрешността на елементарното множество $\mathbf{E}$, за което $\mu(\mathbf{E}) < \varepsilon$. Тогава контурът $b\mathbf{E}$ на $\mathbf{E}$ не съдържа контурни точки на $\mathbf{A}$ и следователно може да се представи във вида $b\mathbf{E} = \mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2$, където $\mathbf{C}_1$ се състои само от външни точки на $\mathbf{A}$, а $\mathbf{C}_2$ - само от външни. Да положим $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} \cup \mathbf{A}^o$ и $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \setminus \mathbf{E}$. Тогава имаме $b(\mathbf{E}_1) = \mathbf{C}_1$ и $b(\mathbf{E}_2) = \mathbf{C}_2$. Тъй като контурите на $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ се състоят от отсечки, успоредни на координатните оси, то те са елементарни множества. Освен това, лесно се вижда, че $\mathbf{E}_2 \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{E}_1$ и $\mu(\mathbf{E}_1) - \mu(\mathbf{E}_2) = \mu(\mathbf{E}) < \varepsilon$, което показва, че $\mathbf{A}$ е измеримо множество. ■

Следствие. *Обединението, сечението и разликата на две измерими множества е също измеримо.*

Доказателство. Нека $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ да са измерими множества, и нека множеството $\mathbf{C}$ да е равно или на тяхното обединение $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, или на тяхното сечение $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, или на разликата $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$. Във всеки от тези три



Криволинеен трапец.

случая имаме

$$b\mathbf{C} \subset b\mathbf{A} \cup b\mathbf{B}$$

(докажете!). Тъй като $b\mathbf{A}$ и $b\mathbf{B}$ са пренебрежими, то от направената по-горе забележка следва, че и $b\mathbf{C}$ е пренебрежимо, т.е. множеството $\mathbf{C}$ е измеримо. ■

Ще напомним един начин на аналитично описание на фигурите в равнината (виж I, §4.5):

Дефиниция. *Нека в интервала* $[a, b]$ *са зададени непрекъснатите функции* $g(x)$ *и* $f(x)$ *, като навсякъде е изпълнено* $g(x) \leq f(x)$. *Тогава криволинеен трапец, определен от функциите* g *и* f*, наричаме фигурата* $\mathbf{D}$*, съставена от всички точки* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, удовлетворяващи неравенствата*

$$a \leq x \leq b \quad , \quad g(x) \leq y \leq f(x)\,.$$

Всички фигури, срещани в елементарната геометрия, могат да бъдат представени или като криволинеен трапец, или като обединение на краен брой криволинейни трапци. Следващата теорема показва, че категорията на измеримите множества е достатъчно широка и обхваща почти всички множества, срещани в анализа:

Теорема 5. *Всеки криволинеен трапец е измеримо множество.*

Доказателство. Да означим с Γ контура на областта $\mathbf{D}$. Очевидно Γ се състои от четири части, които ще означим с Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, където;

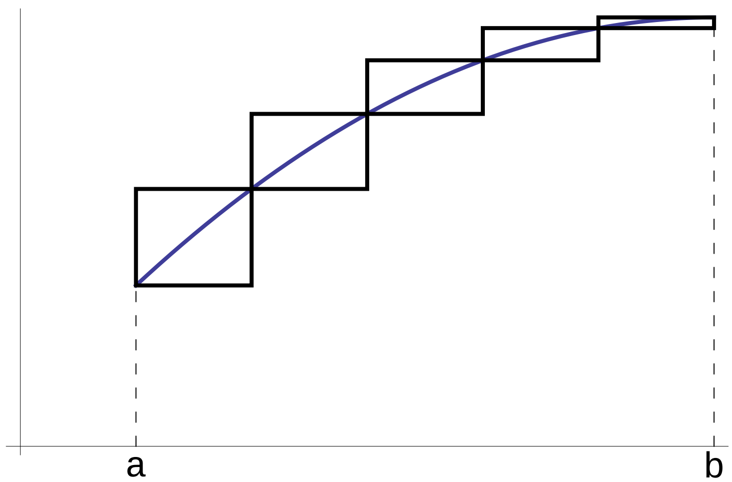
Γ_1 е графиката на непрекъснатата функция $f(x)$ в интервала $[a, b]$.

Γ_2 е вертикалната отсечка, свързваща точката $(b, f(b))$ с $(b, g(b))$.

Γ_3 е графиката на $g(x)$ в интервала $[a, b]$.

Γ_4 е вертикалната отсечка, свързваща точката $(a, f(a))$ с $(a, g(a))$.

Оставяме на читателя да докаже, че отсечките Γ_2 и Γ_4 са пренебрежими множества. Тогава теоремата следва от критерия за измеримост и от следната лема, приложена за $g(x)$ и $f(x)$:



Измеримост на графиката на непрекъснатата функция (лема 6)

Лема 6. *Ако $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала $[a, b]$, нейната графика*

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in [a, b], y = f(x)\}$$

е пренебрежимо множество.

Доказателство на лемата. Да разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на делящите точки $a = x_0 < \ldots < x_n = b$, и нека m_i и M_i да означават съответно минималната и максималната стойности на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Функцията $f(x)$ е непрекъсната в компактния интервал $[a, b]$ и следователно равномерно непрекъсната в него. Тогава за всяко дадено $\varepsilon > 0$ можем да намерим разбиване такова, че $M_i - m_i < \varepsilon$ за всяко i от 1 до n. Да означим с Δ_i правоъгълника

$$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i], \quad i = 1, \ldots n.$$

Нека положим $\mathbf{E} = \cup_{i=1}^{n} \Delta_i$. Очевидно $\Gamma_f \subset \mathbf{E}$. От друга страна

$$\mu(\mathbf{E}) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a)$$

и може да бъде направено колкото си искаме малко. С това лема 6, а с нея и теорема 5, са доказани. ■

Забележка. Трябва да се отбележи, че за параметрично зададените криви в равнината ситуацията е съвсем различна: множеството от точките на една параметрично зададена чрез непрекъснати функции крива линия може и да не бъде пренебрежимо множество. Един пример за това се дава от т. нар. крива на Пеано: може да се покаже, че съществува непрекъснато изображение на интервала $\mathbf{I} = [0, 1]$ *върху* квадрата $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ (виж задача 3). С други думи, множеството от точките на тази непрекъсната крива съвпада с квадрата, който не е пренебрежимо множество.

За да докажем пренебрежимост на кривата, трябва да наложим по-силно условие. Ще напомним, че една крива се нарича *ректифицируема*, ако нейната дължина е крайна (виж I, §4.4). Изпълнена е:

Теорема 7. *Множеството на точките, лежащи на една непрекъсната ректифицируема крива, е пренебрежимо по Пеано-Жордан.*

Доказателство. Нека Γ е ректифицируема крива и l е нейната дължина. Разполагайки последователни точки $P_0, \ldots, P_n$ върху кривата, ние можем да я разделим на n части $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ с равна дължина, т.е. дължината на всяка от кривите Γ_i с краища P_{i-1}, P_i ще е равна на $\frac{l}{n}$. Нека Δ_i е квадрат с център точката P_i и дължина на всяка от страните $\frac{2l}{n}$. Тъй като за всяка точка $P \in \Gamma_i$ разстоянието $\varrho(P, P_i)$ не надминава дължината на Γ_i, очевидно имаме $\Gamma_i \subset \Delta_i$ и $\Gamma \subset \cup_{i=1}^{n} \Delta_i$. От друга страна, мярката

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{n} \Delta_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\Delta_i\right) = n.\frac{4l^2}{n^2} = \frac{4l^2}{n}$$

и може да бъде направена колкото си искаме малка чрез увеличаване на n. ■

Адитивност на мярката на Пеано - Жордан. Ще докажем основното свойство на мярката:

Теорема 8. *Нека* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *са измерими множества с непресичащи се вътрешности и нека* $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. *Тогава*

$$\mu(\mathbf{C}) = \mu\left(\mathbf{A}\right) + \mu\left(\mathbf{B}\right).$$

Можем да си представим ситуацията и по следния начин: с помощта на някаква крива линия или друго пренебрежимо множество измеримото множество $\mathbf{C}$ е разделено на две части; ще покажем, че при това общата мярка се запазва.

Доказателство. Да изберем елементарни множества $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ такива, че $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2 \subset \mathbf{A}^o$ и $\mu\left(\mathbf{E}_1\right) < \mu(\mathbf{A}) + \varepsilon/2$, $\mu\left(\mathbf{E}_2\right) > \mu(\mathbf{A}) - \varepsilon/2$. По същия начин можем да намерим елементарни множества $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ такива, че $\mathbf{B} \subset \mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2 \subset \mathbf{B}^o$ и $\mu\left(\mathbf{F}_1\right) < \mu(\mathbf{B}) + \varepsilon/2$, $\mu\left(\mathbf{F}_2\right) > \mu(\mathbf{B}) - \varepsilon/2$. Тогава $\mathbf{C} \subset \mathbf{E}_1 \cup \mathbf{F}_1$ и следователно

$$\mu(\mathbf{C}) \leq \mu\left(\mathbf{E}_1\right) + \mu\left(\mathbf{F}_1\right) < \mu\left(\mathbf{A}\right) + \mu\left(\mathbf{B}\right) + \varepsilon,$$

откъдето следва, че $\mu(\mathbf{C}) \leq \mu\left(\mathbf{A}\right) + \mu\left(\mathbf{B}\right)$.

За доказателство на обратното неравенство да отбележим, че $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{F}_2$ не се пресичат (тук използваме, че $\mathbf{A}^o \cap \mathbf{B}^o = \emptyset$) и следователно $\mu\left(\mathbf{E}_2 \cup \mathbf{F}_2\right) = \mu\left(\mathbf{E}_2\right) + \mu\left(\mathbf{F}_2\right)$. Тъй като $\mathbf{E}_2 \cup \mathbf{F}_2 \subset \mathbf{C}$, то

$$\mu(\mathbf{C}) \geq \mu\left(\mathbf{E}_2\right) + \mu\left(\mathbf{F}_2\right) > \mu\left(\mathbf{A}\right) + \mu\left(\mathbf{B}\right) - \varepsilon.$$

Тъй като ε е произволно, от тук следва теоремата. ■

Чрез индукция по броя на събираемите лесно се доказва следното

Следствие. *Ако* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ *са измерими множества, като* $\mathbf{A}_i^o \cap \mathbf{A}_j^o = \emptyset$ *при* $i \neq j$, *то*

$$\mu\left(\mathbf{A}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu\left(\mathbf{A}_i\right).$$

Упражнения.

1. Множество на Кантор. Ще конструираме едно интересно подмножество на интервала $[0,1]$. Да разделим този интервал на три равни подинтервала, и нека $\mathbf{E}_0$ е средният от тях - отвореният интервал $(1/3, 2/3)$. Да разделим всеки от останалите два интервала отново на три равни части, и нека $\mathbf{E}_1$ е обединението на средните подинтервали, т.е. $\mathbf{E}_1 = (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$. Аналогично $\mathbf{E}_2 = (1/27, 2/27) \cup (7/27, 8/27) \cup (19/27, 20/27) \cup (25/27, 26/27)$ и т.н. Нека $\mathbf{K}_n = [0,1] \setminus \mathbf{E}_n$, $\mathbf{E} = \cup_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n$, $\mathbf{K} = \cap_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n = [0,1] \setminus \mathbf{E}$. Множеството $\mathbf{K}$ се нарича канторово множество и притежава редица интересни свойства.

За да опишем множеството на Кантор, е удобно да представяме числата от $[0,1]$ като (крайни или безкрайни) троични дроби. Ако са дадени троичните цифри $a_1, \ldots, a_n$ (т.е. всяка от тях е равна на 0, 1, или 2), то с ${}_3\overline{0.a_1 \ldots a_n}$ ще означаваме числото $\sum_{k=1}^{n} a_k/3^k$. Аналогично ще означаваме и безкрайните троични дроби.

1 а/. Докажете, че множеството $\mathbf{E}_n$ се състои от 2^n непресичащи се отворени интервали с дължина $1/3^{n+1}$. Всеки от тях има вида

$$\left({}_3\overline{0.a_1 \ldots a_n\, 1}\,,\ {}_3\overline{0.a_1 \ldots a_n\, 2}\right),$$

където всяко от числата $a_1, \ldots, a_n$ е равно на нула или две. Ние ще означим с $\mathbf{K}_0$ множеството от крайните точки на описаните по-горе интервали; тогава $\mathbf{K}_0$ е изброимо подмножество на $\mathbf{K}$.

1 б/. Докажете, че множеството $\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}_0$ се състои от всички троично ирационални* точки от $[0,1]$, които не съдържат единицата в раз-

*под троично ирационални числа разбираме такива, които не се представят като крайна троична дроб, т.е. не могат да се представят като дроб, в която в знаменателя стои степен на тройката.