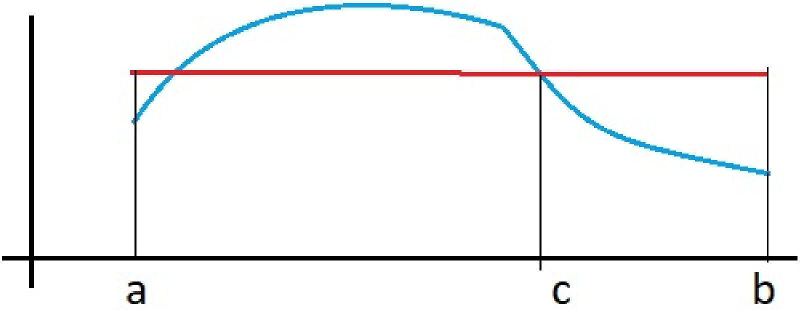
4. Теорема за средните стойности

Теорема (за средните стойности)

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава съществува $c \in [a, b]$ такова, че

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{1}$$

Геометрична интерпретация



Доказателство на теоремата

Както знаем благодарение на т-мата на Вайерщрас, щом $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната, то тя има НМ и НГ стойност. Да ги означим съответно с m и M. Тогава

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b]. \tag{2}$$

След като интегрираме тези неравенства (Теорема 2 в Тема 3) и вземем предвид колко е стойността на определен интеграл от константна функция (примера в края на Тема 1), получаваме

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \quad \Longrightarrow \quad m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M. \tag{3}$$

Числата m и M са стойности на непрекъсната функция $f(x)$. От Теоремата за междинните стойности (Тема 14 от ДИС 1) следва, че съществува $c \in [a, b]$ такова, че

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{4}$$

откъдето и следва твърдението на теоремата.