Линейна алгебра

Комплексни числа

Задача 1. *Нека* $z_1 = 4+3i$ *и* $z_2 = 3+i$. *Пресметнете* z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2 *и* $\frac{z_1}{z_2}$.

Задача 2. *Намерете тригонометричния вид на комплексните числа:* 4; -3; $-5i$; $2+2i$; $\frac{-3+3\sqrt{3}i}{2}$; $1-i\sqrt{3}$.

Задача 3. *Намерете тригонометричния и алгебричния вид на произведението*

$$\Big(-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}i}{2}\Big)(1-i\sqrt{3}).$$

Задача 4. *Пресметнете степента* $(1+i)^{10}$.

Задача 5. *Намерете* $\Big(\dfrac{2+6\sqrt{3}i}{8-4\sqrt{3}i}\Big)^{255}$.

Задача 6. *Намерете* $\sqrt[15]{4+4i}$ *и* $\sqrt[5]{i-1}$. *Изобразете намерените числа в комплексната равнина.*

Системи линейни уравнения

Задача 7. *Решете системата* $\left|\begin{array}{llll} x & +y & +2z & =8 \\ -x & -2y & +3z & =1 \\ 3x & -7y & +4z & =10 \end{array}\right.$.

Задача 8. *Решете системата* $\left|\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & =4 \\ x_3 & +x_1 & & =2 \\ 2x_2 & +x_1 & +3x_3 & =7 \end{array}\right.$.

Задача 9. *Намерете всички решения на системата* $\left|\begin{array}{llll} x & +z & & =2 \\ 2x & +5y & & =7 \\ 3x & +5y & +z & =9 \end{array}\right.$.

Задача 10. *Решете* $\left|\begin{array}{lllll} x & +y & -z & +2t & =6 \\ -x & +y & +4z & -3t & =-2 \\ & y & +3z & +t & =5 \\ x & +5y & +5z & & =14 \end{array}\right.$.

Задача 11. *Решете* $\left|\begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & =-1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & -2x_4 & =-2 \\ -x_1 & +2x_2 & -4x_3 & +x_4 & =1 \\ 3x_1 & & & -3x_4 & =-3 \end{array}\right.$.

Задача 12. *Намерете решенията на системата в зависимост от параметъра* a:

$$\left|\begin{array}{llll} x & -y & +z & =2 \\ 3x & -2y & +(a+3)z & =5 \\ 2x & -(a+2)y & +z & =2a+5 \end{array}\right. .$$

Задача 13. *Решете системата в зависимост от стойностите на параметъра λ:*

$$\left|\begin{array}{lllll} x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & =-2 \\ 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & =6 \\ 11x_1 & +11x_2 & +4x_3 & +8x_4 & =8 \\ 10x_1 & +2x_2 & & +8x_4 & =\lambda \end{array}\right. .$$

Задача 14. *Определете вида на системата* $\left|\begin{array}{llll} 3x & +2y & +z & =1 \\ x & +2y & +az & =3 \\ x & +y & +z & =b \end{array}\right.$ *в зависимост от a и b (несъвместима, определена или неопределена).*

Линейни пространства

Задача 15. *Нека $V=\{r\in\mathbb{R}\mid r>0\}$. Въвеждаме операциите $\oplus: V\times V\to V$ и $\odot:\mathbb{R}\times V\to V$, определени от*

$$u\oplus v=uv;\quad \alpha\odot u=u^{\alpha}.$$

Докажете, че V е линейно пространство над $\mathbb{R}$ относно операциите $\oplus$ и $\odot$.

Задача 16. *Кои от подмножествата на $\mathbb{R}^2$ са линейни пространства относно покоординатните операции:*
$A=\{(x,y)\mid y=2x\}$; $\quad B=\{(x,y)\mid x=y-3\}$; $\quad C=\{(x,y)\mid y=2x,\ x=3y\}$;
$D=\{(x,y)\mid xy=0\}$?

Задача 17. *Нека $a\in\mathbb{R}$ и $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y+2z=a\}$. За кои a множеството U е линейно пространство относно покоординатните операции?*

Задача 18. *Представете тези множества от задачи 16 и 17, които са линейни пространства, като линейни обвивки.*

Задача 19. *Докажете, че* $W=\left\{\begin{pmatrix} a & a+b \\ b & 2a\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$ *е линейно пространство относно събиране и умножение с число на матрици.*

Задача 20. *Докажете, че $\mathcal{G}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f(0)+f(1)=0\}$ е линейно пространство относно поточковите операции.*

Линейна зависимост и независимост. Ранг

Задача 21. *Дадени са векторите $u,v_1,v_2,v_3\in\mathbb{R}^3$, където $u=(-1,7,b)$, $v_1=(1,-2,1)$, $v_2=(-1,3,1)$ и $v_3=(0,1,2)$. За кои стойности на b векторът u е линейна комбинация на векторите v_1, v_2, v_3?*

Задача 22. *Линейно зависими ли са векторите $v_1=(1,1,3)$, $v_2=(5,-1,2)$ и $v_3=(-3,0,4)$ от линейното пространство $\mathbb{R}^3$?*

Задача 23. *Линейно зависими ли са полиномите f_1, f_2, $f_3\in\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, където $f_1=3x+x^2-x^3$, $f_2=6+5x^2+x^3$ и $f_3=4-7x+x^2+3x^3$?*

Задача 24. *За кои $a\in\mathbb{R}$ векторите $(2,2,a)$, $(2,a,2)$ и $(a,2,2)$ са линейно зависими?*

Задача 25. *Намерете ранговете на системите вектори от* $\mathbb{R}^3$*:*
$r\big((2,1,-3);\ (3,1,-5);\ (1,0,-7);\ (4,2,1);\ (1,0,-2)\big)$*;*
$r\big((1,1,2);\ (-2,-2,-4);\ (0,3,5);\ (4,1,3);\ (-2,-5,-9);\ (3,3,6)\big)$.

Задача 26. *Намерете* $r(v_1, v_2, v_3, v_4)$*, където* $v_1 = (1,-1,2,3)$*,* $v_2 = (2,1,-1,1)$*,* $v_3 = (1,1,-2,1)$*,* $v_4 = (3,-2,5,6)$.

Задача 27. *Намерете* $r\big((2,-1,3,1);\ (-1,2,1,1);\ (1,1,4,2);\ (3,-3,2,b)\big)$ *в зависимост от стойностите на* b.

Задача 28. *Намерете* $r\big((1,-1,2,1,1);(2,1,-1,1,-1);(1,-1,1,-1,1);(-1,-1,2,p,q)\big)$ *според стойностите на параметтрите* p *и* q.

Базис. Координати

Задача 29. *Намерете ранга и максимална линейно независима подсистема на векторите* $v_1 = (0,6,6,1,0)$*,* $v_2 = (3,1,1,0,0)$*,* $v_3 = (1,-1,3,1,-2)$*,* $v_4 = (-2,3,1,0,1)$*,* $v_5 = (2,3,5,1,-1)$*,* $v_6 = (1,-6,4,2,-5)$.

Задача 30. *Кои от следните системи вектори образуват базис на* $\mathbb{R}^2$*:*
$v_1 = (2,3)$ *и* $\boldsymbol{0} = (0,0)$*;*
$v_1 = (2,3)$*;*
$v_1 = (2,3)$ *и* $v_2 = (3,5)$*;*
$v_1 = (2,3)$*,* $v_2 = (3,5)$ *и* $v_3 = (1,1)$*?*

Задача 31. *Полиномите* f_1, f_2, f_3 *образуват ли базис на* $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$*, където:*
$f_1 = 1 - 3x + 2x^2$*,* $f_2 = 1 + x + 4x^2$*,* $f_3 = 1 - 7x$*;*
$f_1 = 3 + x + 4x^2$*,* $f_2 = 2 + 5x + 6x^2$*,* $f_3 = 1 + 4x + 8x^2$*?*

Задача 32. *Покажете, че векторите от* $\mathbb{R}^4$ *са линейно независими и ги допълнете до базис на* $\mathbb{R}^4$*, където:*
$a_1 = (1,-1,2,3)$*,* $a_2 = (-2,2,1,-1)$*;*
$b_1 = (1,-2,-3,2)$*,* $b_2 = (2,1,-4,-3)$*,* $b_3 = (1,3,-2,-3)$.

Задача 33. *Да се провери, че* v_1, v_2, v_3 *образуват базис на* $\mathbb{R}^3$ *и да се намерят координатите на* $v = (1,1,1)$ *спрямо този базис, където:*
$v_1 = (2,2,-1)$*,* $v_2 = (2,-1,2)$*,* $v_3 = (-1,2,2)$*;*
$v_1 = (1,5,3)$*,* $v_2 = (2,7,3)$*,* $v_3 = (3,9,4)$.

Задача 34. *Кои от множествата*
$A = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$*;*
$B = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$*;*
$C = \{(a,b,c,d) \mid c = a - 2b,\ d = a + b;\ a, b \in \mathbb{R}\}$*;*
$D = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b + c + d = 0\}$
са линейни пространства относно покоординатните операции? За тези от тях, които са, намерете размерността им, както и един техен базис.

Сечение и сума на подпространства

Задача 35. *Нека* $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 = x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4\}$. *Намерете* $\dim U$ *и един базис на* U.

Задача 36. *Намерете базис на пространството от решенията (ФСР) на хомогенната система* $\left|\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.\right.$

Задача 37. *Намерете ФСР на системата:* $\left|\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -2x_5 & =0 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & +x_5 & =0 \\ 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & +x_4 & -3x_5 & =0 \\ 3x_1 & -x_2 & +7x_3 & -x_4 & & =0 \end{array}\right.$.

Задача 38. *Представете линейните обвивки като множество от решения на система:*
$U = l\big\{(2,1,-1,3);\ (3,1,2,1);\ (1,1,-4,5)\big\}$;
$V = l\big\{(1,1,-2,2);\ (2,1,3,-2);\ (1,2,3,4);\ (3,4,5,6)\big\}$.

Задача 39. *Нека* $U = l\big\{(1,2,1,-2);\ (1,0,3,-2)\big\}$ *и* V *е множеството от решенията на системата* $\left|\begin{array}{lllll} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & & =0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & =0 \end{array}\right.$.

Намерете базиси на пространствата U, V, $U \cap V$ *и* $U + V$.

Задача 40. *Нека* $U_1 = l\big((1,-1,2,3); (1,1,3,2)\big)$ *и* $U_2 = l\big((1,-2,1,1); (3,1,2,4)\big)$. *Намерете базиси на пространствата* U_1, U_2, $U_1 + U_2$ *и* $U_1 \cap U_2$.

Задача 41. *Намерете базис на сечението* $U_1 \cap U_2$, *където*
$U_1 = l\{(1,1,-3,1);\ (2,-1,0,-1);\ (1,-1,1,-1)\}$ *и*
$U_2 = l\{(1,2,-2,-1);\ (1,-1,0,0);\ (-3,6,-2,-1)\}$.

Линейни изображения и оператори – ядро и образ

Задача 42. *Нека* $\boldsymbol{0}$, ε *и* J *са оператори в пространството* $\mathbb{R}^3$, *като* $\boldsymbol{0}(x,y,z) = (0,0,0)$, $\varepsilon(x,y,z) = (x,y,z)$ *и* $J(x,y,z) = (y,z,0)$.

Докажете, че $\boldsymbol{0}$, ε, J, $\varepsilon + J$ *и* $3J$ *са линейни оператори. Намерете матриците им спрямо стандартния базис.*

Задача 43. *Определете всички линейни изображения* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Задача 44. *Нека* $V = \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ *е пространството от полиномите от степен най-много 3. Нека* $\varphi : V \to V$ *и* $\psi : V \to V$ *са определени с:*

$$\big(\varphi(f)\big)(x) = f'(x) - (x^2+1)f''(x);$$
$$\big(\psi(f)\big)(x) = f(x+1) - f(x).$$

Докажете, че φ *и* ψ *са линейни оператори във* V *и намерете матриците им спрямо базиса* 1, x, x^2, x^3 *на* V.

Задача 45. *Намерете ранга и дефекта на операторите* $\boldsymbol{0}$, ε, J, J^2 *и* J^3 *(от задача 42).*

Задача 46. *Спрямо стандартния базис на* $\mathbb{R}^4$ *линейният оператор* φ *има матрица*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Намерете $r(\varphi)$ *и* $d(\varphi)$. *Намерете базиси на пространствата* $\ker\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$, $\ker\varphi + \operatorname{Im}\varphi$ *и* $\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$.

Умножение на матрици. Обратна матрица. Матрични уравнения

Задача 47. *Нека* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Пресметнете* AB, BA, CD, DC.

Задача 48. *Нека* $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *е определено от* $T(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Докажете, че T *е линеен оператор и намерете матрицата му спрямо базиса* E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} *на* $M_2(\mathbb{R})$. *Пресметнете* $r(T)$ *и* $d(T)$. *Намерете базиси на пространствата* $\operatorname{Im} T$ *и* $\ker T$.

Задача 49. *Намерете* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, *където* $n \in \mathbb{N}$.

Задача 50. *Намерете* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

Задача 51. *Намерете обратната матрица (ако съществува) на всяка от матриците:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 52. *Решете матричните уравнения:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

Смяна на базис

Задача 53. *Нека векторите* e_1 *и* e_2 *образуват базис на линейното пространство* V. *Нека* $f_1 = e_1 + e_2$ *и* $f_2 = -2e_1 - e_2$. *Докажете, че* f_1, f_2 *– базис на* V *и намерете координатите на вектора* $v = x_1e_1 + x_2e_2$ *спрямо базиса* f_1, f_2.

Изображението $\varphi : V \to V$ *е определено от*

$$\varphi(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1e_1 + (-x_1 + 2x_2)e_2.$$

Докажете, че φ *е линеен оператор и намерете матрицата му спрямо всеки от базисите* e_1, e_2 *и* f_1, f_2 *на* V.

Задача 54. *Нека* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *е линеен оператор с матрица* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *спрямо стандартния базис. Нека още* $b_1 = (1, 2, 1)$, $b_2 = (-1, 1, 1)$ *и* $b_3 = (2, -1, -1)$. *Покажете, че* b_1, b_2, b_3 *е базис на* $\mathbb{R}^3$ *и намерете матрицата на* φ *спрямо този базис.*

Задача 55. *Нека* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *изпълнява* $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_2 + x_3)$.

Нека $e'_1 = (1, 2, 1)$, $e'_2 = (-1, 1, 0)$, $e'_3 = (1, 1, 1)$. *Нека* $f'_1 = (5, 4)$ *и* $f'_2 = (4, 3)$.

Покажете, че e'_1, e'_2, e'_3 *– базис на* $\mathbb{R}^3$, f'_1, f'_2 *– базис на* $\mathbb{R}^2$ *и намерете матрицата на* φ *спрямо тези базиси на* $\mathbb{R}^3$ *и* $\mathbb{R}^2$.

Задача 56. *Нека* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ *е линейно изображение и* $f(1, 0, 0) = 1$, $f(1, 2, 0) = 7$, $f(2, 3, 5) = 6$. *Намерете* $f(3, 2, 1)$.

Задача 57. *Докажете, че* $v_1 = (1, 1, -3)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 3, -2)$ *е базис на* $\mathbb{R}^3$. *Намерете дуалния му базис.*

Задача 58. *Спрямо стандартния базис на* $\mathbb{R}^3$ *линейният оператор* φ *има матрица* $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. *Нека* $f_1 = (1, 2, 2)$, $f_2 = (3, 4, 1)$ *и* $f_3 = (2, 3, 1)$.

Докажете, че f_1, f_2 *и* f_3 *образуват базис на* $\mathbb{R}^3$. *Намерете матрицата на* φ *спрямо този базис.*

Детерминанти – първа част

Задача 59. *Пресметнете* $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Задача 60. *Намерете детерминантата* $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

Задача 61. *Пресметнете* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & 1 & 1 \\ x_n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Задача 62. *Намерете* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a & a & a & 1+a \\ b & b & 1+b & b \\ c & 1+c & c & c \\ 1+d & d & d & d \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Задача 63. *Нека* $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$. *Пресметнете* $\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

Задача 64. *Пресметнете* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 9 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 10 \end{vmatrix}$.

Задача 65. *Намерете детерминантите от ред n:* $\begin{vmatrix} 2 & \dots & 2 & 2 & 5 \\ 2 & \dots & 2 & 5 & 2 \\ 2 & \dots & 5 & 2 & 2 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 5 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

Задача 66. *Намерете* $\begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{vmatrix}$.

Задача 67. *Развийте* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ *по втория ред.*

Задача 68. *Пресметнете* $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Задача 69. *Пресметнете* $\Delta_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ . & . & . & \ddots & . \\ y & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$ *и* $a_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$.

Детерминанти – втора част

Задача 70. *Намерете:* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ . & . & \ddots & \ddots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ . & . & \ddots & \ddots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & i & 0 & \dots & 0 \\ -i & 1 & i & \dots & 0 \\ 0 & -i & 1 & \ddots & 0 \\ . & . & \ddots & \ddots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

Задача 71. *Намерете* $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ . & . & \ddots & \ddots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$.

Задача 72. *Пресметнете* $W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ . & . & . & \dots & . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

Задача 73. *Намерете ранга по редове, по стълбове и по минори на матрицата* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Задача 74. *Намерете ранга на матриците* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ *и*

$B = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ *в зависимост от* λ.

Задача 75. *Пресметнете* $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ . & . & \dots & . \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$ *за* $n \geq 3$.

Собствени стойности и вектори

Задача 76. *Нека* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *е линейният оператор, дейтващ по правилото*

$$\varphi(x, y) = (9x + 12y, 12x + 41y).$$

Намерете матрицата на φ *спрямо базиса* $b_1 = (1, 3)$, $b_2 = (-3, 1)$ *на* $\mathbb{R}^2$.

Задача 77. *Намерете реалните собствени стойности и вектори на матриците:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

Задача 78. *Намерете* $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^k$ *за* $k \in \mathbb{N}$.

Задача 79. *Намерете собствените стойности и вектори на матрицата* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 80. *Линейният оператор* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *действа според* $\varphi(x, y, z) = (z, y, x)$. *Намерете базис на* $\mathbb{R}^3$, *спрямо който* φ *има диагонална матрица* D, *както и матрицата* D.

Задача 81. *Намерете обратима матрица* T *и диагонална матрица* D, *такива че*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = TDT^{-1}.$$

Задача 82. *Намерете всички собствени стойности и вектори на* $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Задача 83. *Намерете* t_n, *ако* $t_0 = 2$, $t_1 = 5$ *и* $t_n = 5t_{n-1} - 6t_{n-2}$ *за всяко* $n \geq 2$.

Задача 84. *Диагонализирайте матрицата* $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Евклидови пространства. Метод на Грам–Шмид

Задача 85. *Намерете ъгъла между векторите:*

- $a = (2, 1, 3, 2)$, $b = (1, 2, -2, 1)$;
- $u = (1, 2, 2, 3)$, $v = (3, 1, 5, 1)$.

Задача 86. *Допълнете до ортогонален базис на* $\mathbb{R}^n$ *системата:*

- $a_1 = (1, 2, 2)$, $a_2 = (2, 1, -2)$;
- $b_1 = (1, -2, 3, 1)$, $b_2 = (2, 1, 1, -3)$.

Задача 87. *Намерете ортонормиран базис на линейната обвивка на дадените вектори по метода на Грам–Шмид:*

- $u_1 = (1, -2, 1)$, $u_2 = (4, -5, 4)$, $u_3 = (-1, -8, -3)$;
- $v_1 = (2, 1, 3, -1)$, $v_2 = (7, 4, 3, -3)$, $v_3 = (1, 1, -6, 0)$, $v_4 = (5, 7, 7, 8)$.

Задача 88. *Нека* $U = l\big((1, 2, 0, 1);\ (3, 2, 1, 2);\ (1, -2, 1, 0)\big)$. *Намерете ортонормирани базиси на пространствата* U *и* $U^{\perp}$.

Задача 89. *Нека* $a_1 = (1, 1, -1, -1)$, $a_2 = (3, 1, -1, -3)$, $a_3 = (-1, -1, -1, 3)$ *и* $a = (1, 3, 3, 9)$. *Намерете ортогонален базис на* $U = l(a_1, a_2, a_3)$, *както и проекцията и перпендикуляра от* a *към* U.

Задача 90. *Нека* $a_1 = (1, 2, 1, 1)$, $a_2 = (1, 3, 1, 2)$, $a_3 = (2, 5, 3, 3)$ *и* $a = (1, 2, 3, 4)$. *Намерете проекцията и перпендикуляра от* a *към* U.

Симетрични оператори и матрици

Задача 91. *Докажете, че* $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$.

Задача 92. *Нека* $a_1 = (1, 2, -1, 0)$, $a_2 = (-1, -5, 1, 1)$, $a_3 = (0, 9, 0, 1)$ *и* $U = l(a_1, a_2, a_3)$. *Намерете ортогоналното допълнение* $U^{\perp}$, *както и проекцията и перпендикуляра от* $a = (1, 1, 1, 1)$ *към* U.

Задача 93. *Намерете собствените стойности и вектори на матрицата* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 94. *Спрямо стандартния базис на Евклидовото пространство* $\mathbb{R}^3$ *линейният оператор* φ *има матрица* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Намерете ортонормиран базис на* $\mathbb{R}^3$, *спрямо който* φ *има диагонална матрица* D.

Задача 95. *Нека* e_1, e_2, e_3 *е ортонормиран базис на Евклидовото пространство* V. *Операторът* $\psi : V \to V$ *е определен от*

$$\psi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (-2x_1 + 2x_2 + 4x_3)e_1 + (2x_1 - 5x_2 + 2x_3)e_2 + (4x_1 + 2x_2 - 2x_3)e_3.$$

Диагонализирайте ψ *спрямо ортонормиран базис на* V *и докажете, че* $\psi^3 + 9\psi^2 = 108\varepsilon$.

Задача 96. *За матрицата* $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *намерете ортогонална матрица* U *и диагонална матрица* D*, такива че* $H = UDU^t$.

Задача 97. *Нека* $n \geq 3$ *и* $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ *са такива че* $||a|| = ||b|| = 1$ *и* $\langle a, b \rangle = 0$. *Дефинираме* $\varphi(v) = \langle a, v \rangle b + \langle b, v \rangle a$. *Докажете, че* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *е линеен симетричен оператор. Намерете собствените стойности и вектори на* φ.