Лекция: B–сплайни

Гено Николов, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски"

Съдържание на лекцията

- Дефиниция на B–сплайните. Основни свойства
- Редици от B–сплайни
- Базис от B–сплайни
- Основна рекурентна връзка

B–сплайни

В предната лекция показахме, че всеки сплайн от степен $r-1$ с възли $x_1 < \cdots < x_n$ може да бъде представен като линейна комбинация на $n+r$ функции:

$$1, x, \dots, x^{r-1}, (x-x_1)_+^{r-1}, \dots, (x-x_n)_+^{r-1}.$$

Такова представяне на сплайна не е удобно при работа с компютър. Ако n е много голямо, стойността на сплайна $s(x)$ в точката $x \in (x_i, x_{i+1})$ се записва като сума на голям брой изрази (по-точно, $i+r$ израза), а по същество $s(x)$ е полином от степен $r-1$ в (x_i, x_{i+1}) и би трябвало да се запише като линейна комбинация на r линейно независими функции. При смятане с голям брой изрази се получават грешки от закръгляване на числата в компютъра, които могат да се натрупват и доведат до съществена неточност в крайния резултат. В тази лекция ще въведем друг базис в пространствата от сплайни, който няма този недостатък.

B–сплайни: определение и свойства

Определение

Разделената разлика на отсечената степенна функция $(x-t)_+^{r-1}$ по отношение на x в точките $x_0 < \cdots < x_r$ се нарича B-сплайн от степен $r-1$ с възли $x_0, \ldots, x_r$.

Означаваме тази функция с $B(x_0, \ldots, x_r; t)$,

$$B(x_0, \ldots, x_r; t) = (\cdot - t)_+^{r-1}[x_0, \ldots, x_r].$$

Да се убедим, че $B(x_0, \ldots, x_r; t)$ е сплайн от степен $r-1$ с възли $x_0, \ldots, x_r$. За разделената разлика $f[x_0, \ldots, x_r]$ имаме

$$f[x_0, \ldots, x_r] = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \cdots + c_r f(x_r),$$

където $c_k = \dfrac{1}{\omega'(x_k)}$ и $\omega(x) := (x-x_0)\ldots(x-x_r)$. От тук

$$B(x_0, \ldots, x_r; t) = \sum_{k=0}^{r} c_k (x_k - t)_+^{r-1}. \tag{1}$$

B–сплайни: Теорема

Следователно, $B(x_0, \ldots, x_r; t)$ е наистина сплайн–функция от степен $r-1$ с възли $x_0, \ldots, x_r$. Следващата теорема разкрива две важни свойства на B-сплайните.

Теорема 1.

За всяко $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ имаме:

а) $B(x_0, \ldots, x_r; t) = 0$ при $t \notin [x_0, x_r)$;

б) $B(x_0, \ldots, x_r; t) > 0$ при $t \in (x_0, x_r)$.

Доказателство. а) Ако $t \leq x_0$, тогава $x_k - t \geq 0$ за $k = 0, 1, \ldots, r$, и $(x_k - t)_+^{r-1} = (x_k - t)^{r-1}$, следователно $B(x_0, \ldots, x_r; t) = (\cdot - t)^{r-1}[x_0, \ldots, x_r] = 0$, тъй като разделената разлика от r-ти ред от полинома от степен $r-1$ $(x-t)^{r-1}$ е равна на нула.

Доказателство на Теорема 1

Ако пък $t > x_r$, тогава $x_k - t < 0$ за $k = 0, \dots, r$ и следователно $(x_k - t)_+^{r-1} = 0$ за $k = 0, \dots, r$. Оттук и от представянето (1) получаваме $B(x_0, \dots, x_r; t) = 0$ при $t > x_r$.

б) Нека сега t е фиксирана точка в (x_0, x_r). Да означим с $P_r(x) = bx^r + \cdots$ полинома от степен r, който интерполира функцията $\tau(x) := (x - t)_+^{r-1}$ в точките $x_0, \dots, x_r$, тогава съгласно дефиницията на B–сплайн, $b = B(x_0, \dots, x_r; t)$.

$P_r(x)$ не може да съвпада тъждествено с $(x - t)^{r-1}$ или с нулата в някакъв подинтервал на $(-\infty, \infty)$, защото тогава полиномът $P_r(x)$ би съвпадал тъждествено с полинома $(x - t)^{r-1}$ или с нулата, а това не е вярно, тъй като поради предположението $t \in (x_0, x_r)$, имаме точки, в които полиномът P_r интерполира $(x - t)^{r-1}$, и точки, в които P_r интерполира константата 0.

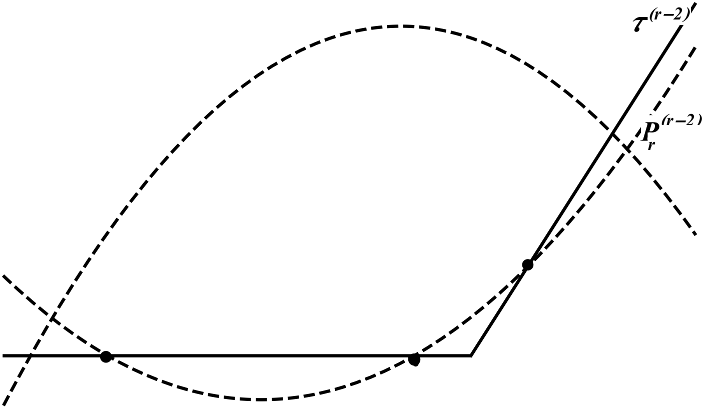
Доказателство на Теорема 1 (продължение)

Да разгледаме разликата $P_r(x) - \tau(x)$. Тя има поне $r+1$ нули: $x_0, x_1, \ldots, x_r$, и тези нули са изолирани. По теоремата на Рол, между всеки две нули на $P_r(x) - \tau(x)$ ще има поне една нула на $P_r'(x) - \tau'(x)$ или по-точно, между всеки две нули на $P_r(x) - \tau(x)$ ще има точка, в която производната $P_r'(x) - \tau'(x)$ си сменя знака. И така, $P_r'(x) - \tau'(x)$ ще има поне r различни нули (смени на знака). Продължавайки по същия начин заключаваме, че $P_r''(x) - \tau''(x)$ ще има поне $r-1$ нули и т.н., $P_r^{(r-2)}(x) - \tau^{(r-2)}(x)$ ще има поне 3 нули. Но

$$P_r^{(r-2)}(x) = \frac{r!}{2}\, bx^2 + \cdots ,$$

т.е. графиката на $P_r^{(r-2)}(x)$ е парабола, а тази на $\tau^{(r-2)}(x) = (r-1)!\,(x-t)_+$ е начупена линия от два сегмента (виж Фигура 1).

Доказателство на Теорема 1 (чертеж)



Фигура: Графики на $P_r^{(r-2)}(x)$ и $\tau^{(r-2)}(x)$.

Доказателство на Теорема 1 (продължение)

Очевидно параболата $P_r^{(r-2)}(x)$ не би могла да пресича $\tau^{(r-2)}(x)$ в повече от две точки, ако тя е обърната с върха си нагоре, т.е. ако водещият ѝ коефициент $r!\,b/2$ е отрицателен. Ако този коефициент е нула, то графиката на $P_r^{(r-2)}(x)$ е линейна функция и също не би могла да пресича графиката на $\tau^{(r-2)}(x)$ в повече от две точки. Следователно $r!\,b/2 > 0$ и оттук $b = B(x_0, \ldots, x_r; t) > 0$. $\square$

Редици от B–сплайни.

Нека

$$\cdots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \cdots$$

е дадена крайна или безкрайна редица от различни точки. С тях ще свързваме редица от B-сплайни $\{B_{i,r-1}(t)\}$, където

$$B_{i,r-1}(t) := B(x_i, \ldots, x_{i+r}; t)\,.$$

Лема 1.

При всеки избор на индекси $m < N$, функциите $\{B_{i,r-1}(t)\}_{i=m}^{N}$ са линейно независими в $(-\infty, \infty)$.

Доказателство на Лема 1

Да допуснем противното, тогава съществува линейна комбинация

$$f(t) = \sum_{i=m}^{m+N} \alpha_i B_{i,r-1}(t) \equiv 0\,, \qquad t \in (-\infty, \infty)\,,$$

в която поне един от коефициентите $\{\alpha_i\}_{i=m}^{n}$ е различен от нула. Да изберем t от интервала (x_m, x_{m+1}). При такова t ще имаме

$$f(t) = \alpha_m B_{m,r-1}(t),$$

защото, съгласно Теорема 1, $B_{i,r-1}(t) = 0$ за $i > m$. Пак от Теорема 1 имаме $B_{m,r-1}(t) > 0$, и от условието $f(t) = 0$ следва, че $\alpha_m = 0$. По същия начин сега показваме, че $\alpha_{m+1} = 0$ и т.н., докато стигнем до заключението, че всички коефициенти $\{\alpha_i\}_{i=m}^{m+N}$ са равни на нула, което противоречи на направеното предположение. Лема 1 е доказана. $\square$

Базис за π_{r-1}

Лема 2.

При всеки избор на точките $\xi_1 < \cdots < \xi_r$ функциите $(\xi_1 - x)^{r-1}, \ldots, (\xi_r - x)^{r-1}$ са линейно независими в $(-\infty, \infty)$ (и следователно образуват базис за π_{r-1}) .

Доказателство. Да допуснем противното, т.е. съществува линейна комбинация

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i (\xi_i - x)^{r-1},$$

която се анулира за всяко $x \in (-\infty, \infty)$, и поне един коефициент a_i е различен от нула. Тъй като $f(x)$ е алгебричен полином на x, който се анулира тъждествено, то и неговите производни ще се анулират тъждествено, т.е.

$$f(x) = f'(x) = \cdots = f^{(r-1)}(x) = 0 \quad \text{за всяко} \quad x \in (-\infty, \infty)\,.$$

Доказателство на Лема 2 (продължение)

Да фиксираме някакво x в $(-\infty, \xi_1)$ и да означим $y_i = \xi_i - x, \quad i = 1, \ldots, r$. Тогава $y_1 < y_2 < \cdots < y_r$ и $f^{(j)}(y_i) = 0$ за $j = 0, 1, \ldots, r-1$. Тези равенства са еквивалентни със системата линейни уравнения

$$
\begin{aligned}
&a_1 y_1^{r-1} + \cdots + a_r y_r^{r-1} = 0 \\
&a_1 y_1^{r-2} + \cdots + a_r y_r^{r-2} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_1.1 \qquad + \cdots + a_r.1 \qquad = 0
\end{aligned}
$$

чиято детерминанта е Вандермондова, и следователно различна от нула. Тогава системата има само нулевото решение $a_1 = \cdots = a_r = 0$, което е противоречие. Лемата е доказана. $\square$

B–сплайни: свойството “минимален носител”

Съгласно Теорема 1, всеки B-сплайн $B_{i,r-1}(t)$ е различен от нула само в крайния интервал (x_i, x_{i+r}). Този интервал се нарича носител на $B_{i,r-1}(t)$. И така, B-сплайните са сплайн-функции с краен носител. Следващата лема показва, че няма сплайни от степен $r-1$, които да са с по-малък носител от B-сплайните.

Лема 3.

Нека $x_1 < \cdots < x_r$ и $f \in S_{r-1}(x_1, \ldots, x_r)$. Ако $f(t) = 0$ за всяко $t \notin [x_1, x_r]$, тогава $f(t) \equiv 0$ в $(-\infty, \infty)$.

Доказателство на Лема 3

Сплайнът f може да бъде представен във вида

$$f(t) = p(t) + \sum_{k=1}^{r} c_k (t - x_k)_+^{r-1},$$

където p е полином от π_{r-1}. Нека $t \in (-\infty, x_1)$. Тогава $f(t) = p(t) = 0$, следователно $p \equiv 0$. И така,

$$f(t) = \sum_{k=1}^{r} c_k (t - x_k)_+^{r-1}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Да изберем сега произволни точки $\xi_1 < \cdots < \xi_r$ от интервала (x_r, ∞) и да означим

$$p_j(x) := (\xi_j - x)^{r-1}, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Съгласно Лема 2, $\{p_j\}_{j=1}^{r}$ образуват базис за π_{r-1}.

Доказателство на Лема 3 (продължение)

Да разгледаме линейния функционал

$$L(p) := \sum_{k=1}^{r} c_k p(x_k).$$

От условието $f(\xi_j) = 0$ следва $L(p_j) = 0$ за $j = 1, \ldots, r$, и понеже $\{p_j\}_1^r$ образуват базис за π_{r-1}, следва, че

$$L(q) = 0 \quad \text{за всяко} \quad q \in \pi_{r-1}.$$

За произволен индекс $j \in \{1, \ldots, r\}$, нека q_j е полиномът от π_{r-1} зададен с интерполационните условия

$$q_j(x_k) = \delta_{kj}, \quad k = 1, \ldots, r.$$

Тъй като линейният функционал L се анулира върху π_{r-1},

$$0 = L(q_j) = \sum_{k=1}^{r} c_k q_j(x_k) = c_j \,.$$

Доказателство на Лема 3 (продължение)

Получихме, че всички коефициенти c_j в представянето (2) са равни на нула, и следователно $f(t) \equiv 0$. Лема 3 е доказана. □

Нека да подчертаем още веднъж: B-сплайните от степен $r-1$ имат минимален носител измежду сплайните от степен $r-1$.

Основният резултат в тази лекция ни казва как да построяваме базис от B–сплайни за пространства от сплайн–функции. Подчертаваме, че тези функции се разглеждат в някакъв краен интервал $[a, b]$. Нека $n > r$ и

$$a < x_{r+1} < x_{r+2} < \cdots < x_n < b\,.$$

Разглеждаме линейното пространство

$$S := S_{r-1}(x_{r+1}, \ldots, x_n) \tag{3}$$

от сплайн-функции от степен $r-1$ с $n-r$ възли $x_{r+1}, \ldots, n$ (напомняме, тези функции ни интересуват само в интервала $[a, b]$). Размерността на S е равна на n.

Базис от B–сплайни

Теорема 2.

Нека точките $x_1 < \cdots < x_r < a$ и $b < x_{n+1} < \cdots < x_{n+r}$ са избрани по произволен начин, и нека
$B_i(t) := B(x_i, \ldots, x_{i+r}; t), \quad i = 1, \ldots, n$. Тогава B-сплайните $\{B_i(t)\}_{i=1}^n$ образуват базис за пространството S върху интервала $[a, b]$.

Доказателство. Тъй като $B_i \in S$ за $i = 1, \ldots, n$ и размерността на S е равна на n, достатъчно е да докажем, че $B_1, \ldots, B_n$ са линейно независими функции в $[a, b]$.
Да допуснем противното: съществува линейна комбинация

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_i(t),$$

която се анулира тъждествено в $[a, b]$, но поне един от коефициентите $\{\alpha_i\}$ е различен от нула.

Доказателство на Теорема 2

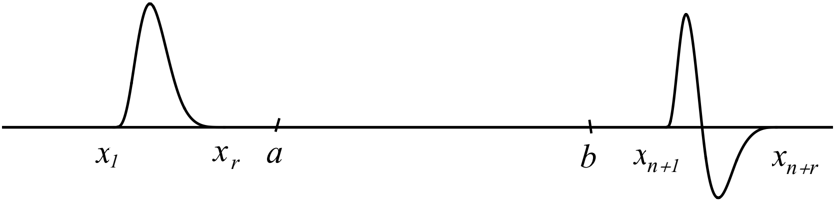
От представянето на f и Теорема 1 се вижда, че

$$f(t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad (-\infty, x_1),$$

$$f(t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad (x_{r+n}, \infty).$$

Съгласно допускането ни, $f(t) \equiv 0$ в $[a, b]$. Но тъй като f съвпада с алгебрични полиноми в интервалите (x_r, x_{r+1}) и $[x_n, x_{n+1}]$, следва че $f \equiv 0$ в $[x_r, x_{n+1}]$, и графиката на f има вида, показан на Фигура 2.

Доказателство на Теорема 2 (Чертеж)



Фигура: Графика на сплайн–функцията f.

Доказателство на Теорема 2 (продължение)

Да разгледаме функциите

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t > x_r\,, \\ f(t) & \text{при} \quad t \le x_r\,, \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < x_{n+1}\,, \\ f(t) & \text{при} \quad t \ge x_{n+1}\,. \end{cases}$$

Очевидно $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$. Тъй като $f_1 \in S_{r-1}(x_1, \ldots, x_r)$ и $f_1(t) \equiv 0$ за $t \notin [x_1, x_r]$, от Лема 3 следва, че $f_1(t) \equiv 0$ в $(-\infty, \infty)$. Аналогично, тъй като $f_2 \in S_{r-1}(x_{n+1}, \ldots, x_{n+r})$ и $f_2(t) \equiv 0$ за $t \notin [x_{n+1}, x_{n+r}]$, от Лема 3 заключаваме, че $f_2 \equiv 0$. Но тогава $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \equiv 0$ в $(-\infty, \infty)$. Съгласно Лема 1, функциите $B_1, \ldots, B_n$ са линейно независими в $(-\infty, \infty)$, и следователно $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Получихме противоречие, което показва, че $\{B_i(t)\}_{i=1}^{n}$ са линейно независими в $[a, b]$. С това Теорема 2 е доказана. $\square$

Базис от B–сплайни

И така, всяка сплайн-функция f от $S_{r-1}(x_{r+1}, \ldots, x_n)$ се представя по единствен начин във вида

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_i(t).$$

Предвид крайния носител на $B_i(t)$, това е много удобно представяне на f за работа с компютър, тъй като при фиксирано t, сплайнът $f(t)$ е всъщност линейна комбинация само на r последователни B-сплайни, които съдържат точката t в своя носител. Друго предимство на това представяне е, че съществува проста схема за пресмятане стойността на B_i в дадена точка.

Основна рекурентна връзка

Пресмятането на стойността на B–сплайните в дадена точка се основава на следната рекурентна връзка:.

Теорема 3 (Основна рекурентна връзка).

За всяко $r \geq 2$ и $t \in (-\infty, \infty)$ е изпълнено равенството

$$B_{i,r-1}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+r} - x_i} B_{i,r-2}(t) + \frac{x_{i+r} - t}{x_{i+r} - x_i} B_{i+1,r-2}(t).$$

Доказателство. Използва се лемата на Стефенсен–Поповичу за разделена разлика от произведение от функции:

$$(f\,g)[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \dots, x_k]\, g[x_k, \dots, x_n].$$

Доказателство на Теорема 3

Да изберем в тази формула $f(x) = x - t$ и $g(x) = (x-t)_+^{r-2}$. Очевидно

$$f(x)g(x) = (x-t)_+^{r-1} \quad \text{за } x \in (-\infty, \infty)$$

и следователно

$$\begin{aligned} B_{i,r-1}(t) &= (f\,g)[x_i, \ldots, x_{i+r}] \\ &= f(x_i)g[x_i, \ldots, x_{i+r}] + f[x_i, x_{i+1}]g[x_{i+1}, \ldots, x_{i+r}], \end{aligned}$$

тъй като $f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = 0$ за $k \geq 2$. По-нататък, отчитаме, че $f(x_i) = x_i - t$, $f[x_i, x_{i+1}] = 1$, $g[x_i, \ldots, x_{i+r-1}] = B_{i,r-2}(t)$, $g[x_{i+1}, \ldots, x_{i+r}] = B_{i+1,r-2}(t)$ и прилагаме рекурентната връзка за разделените разлики, за да получим:

Доказателство на Теорема 3 (продължение)

$$B_{i,r-1}(t) = f(x_i)\frac{g[x_{i+1},\ldots,x_{i+r}] - g[x_i,\ldots,x_{i+r-1}]}{x_{i+r}-x_i} + g[x_{i+1},\ldots,x_{i+r}]$$

$$= \left(1 + \frac{f(x_i)}{x_{i+r}-x_i}\right) g[x_{i+1},\ldots,x_{i+r}] - \frac{f(x_i)}{x_{i+r}-x_i} g[x_i,\ldots,x_{i+r-1}]$$

$$= \frac{x_{i+r}-t}{x_{i+r}-x_i} B_{i+1,r-2}(t) + \frac{t-x_i}{x_{i+r}-x_i} B_{i,r-2}(t),$$

което е исканото равенство. $\square$

Коментар

Забележка

Отбелязваме, че коефициентите пред $B_{i,r-2}(t)$ и $B_{i+1,r-2}(t)$ в рекурентната връзка от Теорема 3 са положителни при $t \in (x_i, x_{i+1})$ и сумата им е равна на 1, т.е. $B_{i,r-1}(t)$ е изпъкнала комбинация на $B_{i,r-2}(t)$ и $B_{i+1,r-2}(t)$. Този факт може да се използва също и за доказателство чрез индукция на Теорема 1.

Рекурентната връзка води до следната схема за пресмятане на стойностите на B-сплайните.

Схема за пресмятане на B–сплайните

$$
\begin{array}{ccccccc}
B_{00}(t) & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & \\
 & & B_{01}(t) & & & & \\
 & \nearrow & & \searrow & & & \\
B_{10}(t) & & & & B_{02}(t) & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & B_{11}(t) & & & & B_{03}(t) \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
B_{20}(t) & & & & B_{12}(t) & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & B_{21}(t) & & & & B_{13}(t) \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
B_{30}(t) & & & & B_{22}(t) & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & B_{31}(t) & & & & \\
 & \nearrow & & & & & \\
B_{40}(t) & & & & & &
\end{array}
$$

Първата колона на тази таблица се попълва, като се използва определението на $B_{i,0}(t)$:

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} \frac{1}{x_{i+1}-x_i} & \text{за} \quad t \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{за} \quad t \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases}.$$

Следващите колони се попълват една след друга като се използват данните от предходната колона и рекурентната връзка.

Край на лекцията !