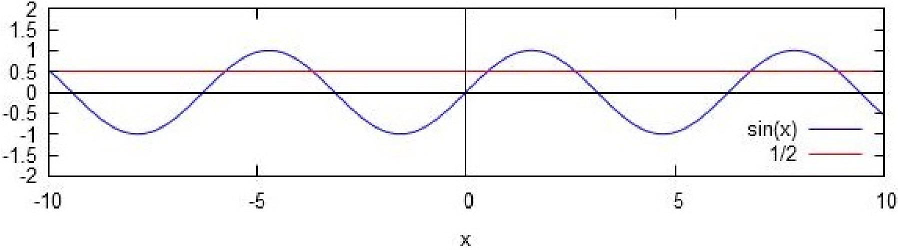
16. Обратни тригонометрични функции

Обратната функция на sin

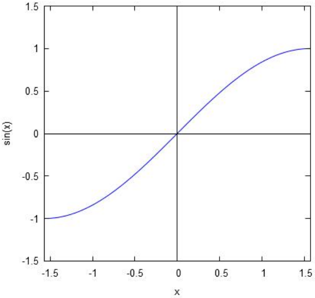
За да посочим ъгъл с определен синус, е удобно да разполагаме с функция, която е обратна на синус.



Пример: $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Разглеждаме sin върху част от дефиниционната ѝ област, но такава, че функцията върху нея е инекция и покрива цялата област от стойности на sin, т.е. $[-1, 1]$.

Удачен избор с посочените свойства е $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



В интервала $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ функцията sin е строго монотонно растяща и областта ѝ от стойности е $[-1, 1]$, т.е. $\mathsf{sin} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ е биекция; следователно има обратна; тя се означава чрез arcsin;

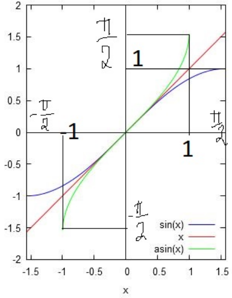
$$\mathsf{arcsin} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \qquad (1)$$

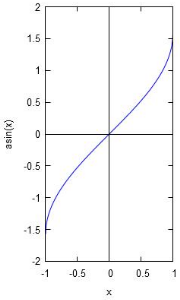
Дефиниция на arcsin

Дефиниция

Дефинираме функцията $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, като за $x \in [-1, 1]$, полагаме $\arcsin x := \alpha$, където $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ е единственото такова, че $\sin \alpha = x$.

$\arcsin x$ — дъгата, чийто синус е x





Графиката на $\arcsin x$

Основни стойности и свойства на $\arcsin$

Някой стойности на $\arcsin$:

1. $\arcsin 0 = 0$, защото $\sin 0 = 0$ и $0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
2. $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, защото $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
3. $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, защото $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ и $-\frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Основни свойства:

(а) $\sin(\arcsin x) = x$, $x \in [-1, 1]$;

(б) $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$, $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Един пример

Ще намерим формула за $\cos(\arcsin x)$, където $x \in [-1, 1]$.

За $x \in [-1, 1]$ произволно фиксирано, полагаме $\alpha := \arcsin x$. Тогава $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $\sin\alpha = x$. Ще пресметнем $\cos\alpha$. Имаме $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ понеже $\cos\alpha \geq 0$ за $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Следователно, като използваме основно с-во (а), получаваме

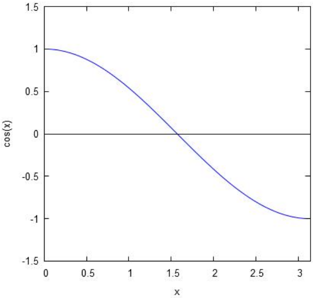
$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2} = \sqrt{1-x^2}. \tag{2}$$

Така установихме тъждеството

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1]. \tag{3}$$

Обратната функция на cos

Разглеждаме cos върху част от дефиниционната ѝ област, но такава, че функцията върху нея е инекция и покрива цялата област от стойности на cos, т.е. $[-1, 1]$.
Удачен избор с посочените свойства е $[0, \pi]$.



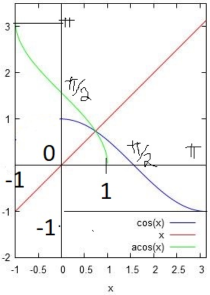
В интервала $[0, \pi]$ функцията cos е строго монотонно намаляваща и областта ѝ от стойности е $[-1, 1]$, т.е. $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ е биекция; следователно има обратна; тя се означава чрез arccos;

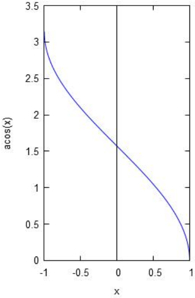
$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]. \qquad (4)$$

Дефиниция на arccos

Дефиниция

Дефинираме функцията $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, като за $x \in [-1, 1]$, полагаме $\arccos x := \alpha$, където $\alpha \in [0, \pi]$ е единственото такова, че $\cos \alpha = x$.





Графиката на $\arccos x$

Основни стойности и свойства на arccos

Някой стойности на arccos:

1. $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, защото $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ и $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$;
2. $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, защото $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$;
3. $\arccos(-1) = \pi$, защото $\cos\pi = -1$ и $\pi \in [0, \pi]$.

Основни свойства:

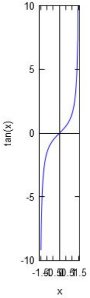
(а) $\cos(\arccos x) = x$, $x \in [-1, 1]$;

(б) $\arccos(\cos\alpha) = \alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$.

Зад. Докажете тъждеството $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1]$.

Обратната функция на tg

Разглеждаме tg върху част от дефиниционната ѝ област, но такава, че функцията върху нея е инекция и покрива цялата област от стойности на tg, т.е. $\mathbb{R}$.
Удачен избор с посочените свойства е $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.



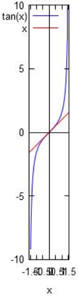
В интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ функцията tg е строго монотонно растяща и областта ѝ от стойности е $\mathbb{R}$, т.е. $\mathrm{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ е биекция; следователно има обратна; тя се означава чрез arctg;

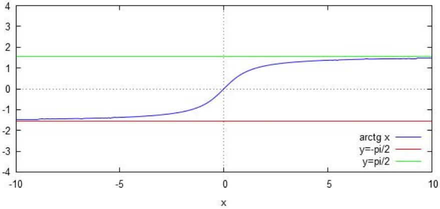
$$\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{5}$$

Дефиниция на arctg

Дефиниция

Дефинираме функцията $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, като за $x \in \mathbb{R}$, полагаме $\operatorname{arctg} x := \alpha$, където $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ е единственото такова, че $\operatorname{tg} \alpha = x$.





Графиката на $\operatorname{arctg} x$

Основни стойности и свойства на arctg

Някой стойности на arctg:

1. $\operatorname{arctg} 0 = 0$, защото $\operatorname{tg} 0 = 0$ и $0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
2. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, защото $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
3. $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, защото $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Основни свойства:

(а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $x \in \mathbb{R}$;

(б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Бележка

Горните две свойства показват, че на всяко число от числовата права може да се съпостави различно число от крайния интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Следователно в който и да е интервал с различни краища има точно толкова числа колкото върху цялата числова права!

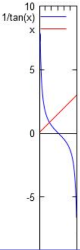
Обратната функция на ctg

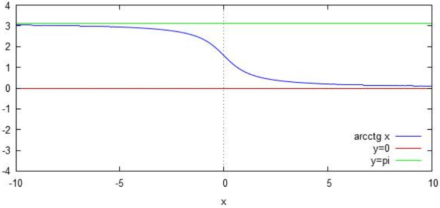
Фунцията ctg е строго монотонно намаляваща в $(0, \pi)$ и областта от стойностите, които приема върху този интервал е $\mathbb{R}$. Следователно $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ е биекция; следователно има обратна; тя се означава чрез arcctg;

$$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi). \tag{6}$$

Дефиниция

Дефинираме функцията $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, като за $x \in \mathbb{R}$, полагаме $\operatorname{arcctg} x := \alpha$, където $\alpha \in (0, \pi)$ е единственото такова, че $\operatorname{ctg} \alpha = x$.





Основни свойства на arcctg

Основни свойства:

(а) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, $x \in \mathbb{R}$;

(б) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha$, $\alpha \in (0, \pi)$.