

Контролна работа 5 (ПМ, КН1, И)

Пръстени и полиноми

Задача 1. Нека $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, като $f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$. Намерете полиноми $d, u, v \in \mathbb{Q}[x]$, такива че $d = (f, g)$ и $d = uf + gv$.

Представете всеки от полиномите f и g като произведение на неразложими над \mathbb{Q} полиноми.

Задача 2. Нека $I = (13 + 5\sqrt{6}) \triangleleft \mathbb{Z}[\sqrt{6}]$. Докажете, че $I = \{c + d\sqrt{6} \mid c, d \in \mathbb{Z}, 19 \mid (5c - 13d)\}$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]/I \cong \mathbb{Z}_{19}$.

Задача 3. Нека R и S са пръстени с поне два елемента всеки.

- Докажете, че декартовото произведение $R \times S$ не е поле.
- Ако $K \triangleleft R \times S$, то докажете, че съществуват идеали $I \triangleleft R$ и $J \triangleleft S$, такива че $K = I \times J$.