Лекция 3: Разделени разлики. Интерполационна формула на Нютон

Гено Николов, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски"

Съдържание на лекцията

- Разделени разлики
- Свойства на разделените разлики
- Интерполационна формула на Нютон
- Представяне на остатъка във формулата на Нютон

Разделени разлики

Вече споменахме, че задачата за построяване на алгебричен полином p от π_n, който интерполира дадена функция f в $n+1$ точки $x_0, \dots, x_n$, е била решена най-напред от Нютон. Сега ще представим неговото решение. За целта ще въведем едно ново понятие - разделена разлика.

Определение

Нека $x_0, \dots, x_n$ са дадени различни точки (т.е. $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$). Разделената разлика на функцията f в точките $x_0, \dots, x_n$ се бележи с $f[x_0, \dots, x_n]$ и се определя индуктивно със следната рекурентна връзка

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

като приемаме, че $f[x_i] := f(x_i)$ за всяка точка x_i.

Теорема

Съществува тясна връзка между интерполационния полином на Лагранж с възли $x_0, \ldots, x_n$ и разделената разлика $f[x_0, \ldots, x_n]$. Тя се разкрива в следната теорема.

Теорема 1

Разделената разлика $f[x_0, \ldots, x_n]$ съвпада с коефициента пред x^n в интерполационния полином на Лагранж $L_n(f; x)$ за функцията f с възли в същите точки $x_0, \ldots, x_n$.

Доказателство: с индукция относно броя на точките. При две точки x_0, x_1 имаме

$$\begin{aligned} L_1(f; x) &= f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0) \\ &= f[x_0, x_1](x - x_0) + f(x_0)\,. \end{aligned}$$

Доказателство на Теорема 1

Следователно коефициентът пред x в $L_1(f;x)$ е равен на разделената разлика $f[x_0,x_1]$.

Да допуснем сега, че теоремата е вярна за произволни n точки. Ще я докажем за $n+1$ точки. И така, нека $x_0,\ldots,x_n$ са произволни $n+1$ различни точки. Да въведем полиномите $p(x)$ и $q(x)$ от π_{n-1} по следния начин:

$$\begin{array}{llll} p(x) & \text{интерполира} \quad f & \text{в точките} & x_1,\ldots,x_n, \\ q(x) & \text{интерполира} \quad f & \text{в точките} & x_0,\ldots,x_{n-1}. \end{array}$$

Да разгледаме полинома

$$r(x) := \frac{(x-x_0)p(x)-(x-x_n)q(x)}{x_n-x_0}.$$

Тъй като p и q са от π_{n-1}, то r е алгебричен полином от степен $\le n$. Освен това, при $i\in\{1,\ldots,n-1\}$,

$$r(x_i) := \frac{(x_i-x_0)f(x_i)-(x_i-x_n)f(x_i)}{x_n-x_0} = f(x_i).$$

Доказателство на Теорема 1 (продължение)

При $i = 0$ и $i = n$ имаме

$$\begin{aligned} r(x_0) &= -\frac{(x_0 - x_n)}{x_n - x_0} q(x_0) = f(x_0), \\ r(x_n) &= \frac{(x_n - x_0)}{x_n - x_0} p(x_n) = f(x_n). \end{aligned}$$

И така, $r \in \pi_n$ и $r(x)$ интерполира $f(x)$ в точките $x_0, \ldots, x_n$. От единствеността на интерполационния полином на Лагранж следва, че $r(x) \equiv L_n(f; x)$. Следователно коефициентът пред x^n в $L_n(f; x)$ е равен на коефициента пред x^n в $r(x)$. Да означим с α и β коефициентите пред x^{n-1} в $p(x)$ и $q(x)$, съответно. Тогава от формулата за $r(x)$ се вижда, че коефициентът D пред x^n в $r(x)$ е равен на

$$\frac{\alpha - \beta}{x_n - x_0}.$$

Доказателство на Теорема 1 (продължение)

Но съгласно индукционното предположение

$$\alpha = f[x_1, \ldots, x_n], \quad \beta = f[x_0, \ldots, x_{n-1}].$$

Следователно

$$D = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = f[x_0, \ldots, x_n].$$

Последното равенство следва от рекурентната връзка (1). Индукцията е завършена. Теоремата е доказана. □

Забележка

Тъй като интерполационният полином на Лагранж $L_n(f; x)$ е еднозначно определен, а от там и коефициентът му пред x^n, Теорема 1 ни дава друга, еквивалентна дефиниция за разделена разлика.

Представяне на разделените разлики

От Теорема 1 следват редица интересни свойства на разделената разлика. Ще отбележим някои от тях.
От записа

$$f[x_0, x_1] = f(x_0)\,\frac{1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\,\frac{1}{x_1 - x_0}$$

се вижда, че разделената разлика $f[x_0, x_1]$ се представя като линейна комбинация на стойностите на функцията f в x_0 и x_1. Тогава от рекурентната връзка (1) следва, че всяка разделена разлика $f[x_0, \ldots, x_n]$ се представя като линейна комбинация на стойностите на функцията f в $x_0, \ldots, x_n$. Сега ще намерим коефициентите в това представяне. За целта ще използваме Теорема 1.

Представяне на разделените разлики

По формулата на Лагранж,

$$
\begin{aligned}
L_n(f;x) &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)} \, \frac{\omega(x)}{x-x_k}\,,
\end{aligned}
$$

където $\omega(x) := (x-x_0)\dots(x-x_n)$. От последното равенство виждаме, че коефициентът пред x^n в $L_n(f;x)$ е равен на

$$
\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}.
$$

Представяне на разделените разлики

Следователно, съгласно Теорема 1,

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)}. \tag{2}$$

Това е търсеното явно представяне на разделената разлика чрез стойностите на f в точките $x_0, \ldots, x_n$. Можем да запишем (2) и по-кратко, като използваме, че

$$\omega'(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)\,,$$

и от там

$$\boxed{f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}.}$$

Свойства на разделените разлики

От представянето (2) се вижда веднага, че разделената разлика е един линеен функционал, т.е. за всеки две функции f, g и число c е в сила формулата

$$(f + cg)[x_0, \ldots, x_n] = f[x_0, \ldots, x_n] + cg[x_0, \ldots, x_n].$$

Друго следствие от (2) е, че разделената разлика не зависи от реда, в който се записват точките. Имаме

$$f[x_0, \ldots, x_n] = f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}]$$

за всяко разместване $(i_0, \ldots i_n)$ на индексите $(0, \ldots, n)$. Наистина, при разместване на индексите се променят само местата на събираемите в сумата (2).

Свойства на разделените разлики

Сега ще докажем, че ако $f(x) = a_0 x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, то

$$f[x_0, \ldots, x_n] = a_0.$$

С други думи, разделената разлика в $n+1$ точки на полином от степен n е равна на коефициента му пред x^n. Това следва от факта, че ако $f \in \pi_n$, то f съвпада с интерполационния си полином на Лагранж в $n+1$ точки. Тогава

$$\begin{aligned} f[x_0, \ldots, x_n] &= \text{коефициента пред} \quad x^n \quad \text{в} \quad L_n(f; x) \\ &= \text{коефициента пред} \quad x^n \quad \text{в} \quad f(x) = a_0. \end{aligned}$$

Важен частен случай от това твърдение е следното свойство:

$$\text{Ако} \quad f \in \pi_{n-1}, \quad \text{то} \quad f[x_0, \ldots, x_n] = 0.$$

Наистина, ако $f \in \pi_{n-1}$, то коефициентът пред x^n в $f(x)$ е равен на нула. И така, разделената разлика в $n+1$ точки анулира всички полиноми от степен по-малка или равна на $n-1$.

Интерполационна формула на Нютон

Сега вече сме готови да изведем формулата на Нютон за интерполационния полином. Да разгледаме разликата

$$L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x),$$

където $L_{k+1}(f; x)$ интерполира f в точките $x_0, \ldots, x_{k+1}$, а $L_k(f; x)$ интерполира f в точките $x_0, \ldots, x_k$. Ясно е, че $L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x)$ е алгебричен полином от степен $k + 1$. Освен това

$$L_{k+1}(f; x_i) - L_k(f; x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0 \quad \text{за} \quad i = 0, \ldots, k.$$

Следователно $x_0, \ldots, x_k$ са всичките нули на полинома $L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x)$. Тогава той може да се запише във вида

$$L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x) = A(x - x_0) \ldots (x - x_k), \qquad (3)$$

където A е константа, равна на коефициента пред x^{k+1} в лявата страна на (3), т.е. коефициента пред x^{k+1} в $L_{k+1}(f; x)$.

Интерполационна формула на Нютон

Но съгласно Теорема 1, коефициентът пред x^{k+1} в $L_{k+1}(f;x)$ е равен на разделената разлика $f[x_0,\dots,x_{k+1}]$. Доказахме, че $A = f[x_0,\dots,x_{k+1}]$ и следователно, от (3),

$$L_{k+1}(f;x) = L_k(f;x) + f[x_0,\dots,x_{k+1}](x-x_0)\dots(x-x_k). \quad (4)$$

Прилагайки последователно тази връзка за $k = n-1, n-2, \dots, 0$, получаваме следния явен израз за интерполационния полином на Лагранж:

$$\begin{aligned} L_n(f;x) = & f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ & + \dots + f[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

или, ако приемем, че $(x-x_0)\dots(x-x_{k-1}) = 1$ при $k=0$,

$$\boxed{L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\dots,x_k](x-x_0)\dots(x-x_{k-1}).} \quad (5)$$

Това е интерполационната формула на Нютон.

Представяне на остатъка във формулата на Нютон

Сега ще изведем един израз за остатъка при интерполиране на f като използваме разделени разлики. Нека x е произволна фиксирана точка, различна от $x_0, \dots, x_n$. Да означим с $L_{n+1}(f;t)$ полинома, който интерполира f в точките $x_0, \dots, x_n$ и x. Нека $L_n(f;t)$ интерполира f в точките $x_0, \dots, x_n$. От връзката (4) следва

$$L_{n+1}(f;t) = L_n(f;t) + f[x_0, \dots, x_n, x](t - x_0) \dots (t - x_n).$$

Това равенство е вярно за всяко t. При $t = x$ имаме

$$L_{n+1}(f;x) = L_n(f;x) + f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \dots (x - x_n).$$

Но тъй като x е интерполационен възел за $L_{n+1}(f;t)$, то $L_{n+1}(f;x) = f(x)$. Следователно

$$\boxed{f(x) = L_n(f;x) + f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \dots (x - x_n).} \qquad (6)$$

Сравняване на двете представяния на остатъка

Равенството (6) беше изведено при предположение, че $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$. При $x = x_k$, $k = 0, \dots, n$, по определение имаме $f(x) = L_n(f; x)$. Отбелязваме, че представянето (6) е в сила за всяка функция f определена в точките $x_0, \dots, x_n, x$. Да сравним формулата (6) с известната ни вече формула

$$f(x) = L_n(f; x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \dots (x - x_n),$$

изведена при предположение, че f има непрекъсната $(n+1)$-ва производна. В първия случай остатъкът при интерполиране с $L_n(f; x)$ е записан като

$$f[x_0, \dots, x_n, x]\,\omega(x), \quad \omega(x) := (x - x_0) \dots (x - x_n),$$

а във втория, като

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x),$$

където ξ е някаква точка.

Връзка между разделена разлика и производна

Следователно разделената разлика на f в $n+2$ точки $x_0, \ldots, x_n, x$ е равна на $(n+1)$-вата производна в някаква междинна точка. Тъй като това свойство на разделената разлика е много важно, да го запишем точно:

Свойство на разделената разлика

Нека $f(x)$ има непрекъснати производни до k-тата включително в интервала $[a, b]$ и $x_0, \ldots, x_k$ са произволни различни точки в $[a, b]$. Тогава

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \tag{7}$$

където ξ е някаква точка от интервала $(\min\{x_0, \ldots, x_k\}, \max\{x_0, \ldots, x_k\})$.

От тази връзка, между другото, директно следва, че ако $f \in \pi_{k-1}$, то $f[x_0, \ldots, x_k] = 0$ (защото $f^{(k)}(t) \equiv 0$).

Схема за пресмятане на разделени разлики

Налице е проста и удобна за компютърна реализация схема за изчисляване на разделените разлики, основава единствено на рекурентната връзка.

Схема за пресмятане на разделени разлики

$$
\begin{array}{ccccc}
x_i & f_i & f[\cdot,\cdot] & f[\cdot,\cdot,\cdot] & f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot] \\
x_0 & f(x_0) & & & \\
 & & f[x_0,x_1] & & \\
x_1 & f(x_1) & & f[x_0,x_1,x_2] & \\
 & & f[x_1,x_2] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
x_2 & f(x_2) & & f[x_1,x_2,x_3] & \\
 & & f[x_2,x_3] & & f[x_1,x_2,x_3,x_4] \\
x_3 & f(x_3) & & f[x_2,x_3,x_4] & \\
 & & f[x_3,x_4] & & \\
x_4 & f(x_4) & & &
\end{array}
$$

Схема за пресмятане на разделени разлики

В първия стълб се записват възлите $\{x_i\}$, а във втория – стойностите $\{f(x_i)\}$. Таблицата се попълва стълб след стълб, като се използват намерените вече разлики в предходния стълб.

От формулата на Нютон се вижда, че за да построим интерполационния полином $L_n(f;x)$, достатъчно е да намерим разделените разлики $f[x_0,\dots,x_k]$, $k=0,\dots,n$. Коефициентите $f[x_0,\dots,x_k]$, $k=0,\dots,n$, във формулата на Нютон се намират по горния диагонал на таблицата.

Пример

Да построим полином $p(x)$ от степен 2, който удовлетворява интерполационните условия

$$p(0)=1,\quad p(1)=0,\quad p(2)=3.$$

Пример

Решение. В този случай $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. По интерполационната формула на Нютон

$$\begin{aligned} p(x) =& L_2(p; x) = p(x_0) + p[x_0, x_1](x - x_0) + p[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ =& p(0) + p[0, 1]x + p[0, 1, 2]x(x - 1). \end{aligned}$$

Коефициентите $p(x_0)$, $p[x_0, x_1]$, $p[x_0, x_1, x_2]$ се намират по горния диагонал на таблицата

$$\begin{array}{cccc} x_i & p(x_i) & p[x_i, x_{i+1}] & p[x_0, x_1, x_2] \\ \\ 0 & 1 & & \\ & & -1 & \\ 1 & 0 & & 2 \\ & & 3 & \\ 2 & 3 & & \end{array}$$

Решение (продължение)

Имаме $p(x_0) = 1$, $p[x_0, x_1] = -1$, $p[x_0, x_1, x_2] = 2$.
Следователно

$$p(x) = 1 + (-1)x + 2x(x - 1) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Направете проверка, за да се убедите сами, че намереният полином $p(x)$ удовлетворява исканите интерполационни условия.

Край на лекцията !