22. Производни на елементарните функции

Логаритмичната функция: $\log_a x,\ x > 0\ (a > 0, a \neq 1)$

При фиксирано $x > 0$ разглеждаме диференчното частно

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}, \quad h \neq 0,\ x + h > 0. \tag{1}$$

Имаме

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \ln\left[\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \ln\left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right]. \tag{2}$$

Знаем, че

$$\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e. \tag{3}$$

Затова представяме диференчното частно на $\ln$ във вида

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} &= \ln\left\{\left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}\right\} \\ &= \frac{1}{x} \ln\left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Имаме

$$\overset{(3),\ y=\frac{h}{x}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = e. \tag{5}$$

Сега от (4) и (5), благодарение на т-мата за граница на съставна функция (т-ма 4, тема 10) следва

$$\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{1}{x}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}. \tag{6}$$

Така установихме, че $\ln x$ е диференцируема навсякъде в дефиниционната си област $(0,+\infty)$ и

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x>0. \tag{7}$$

Оттук още получаваме

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}, \quad x>0. \tag{8}$$

Показателната функция: $a^x, \ x \in \mathbb{R} \ (a > 0, \ a \neq 1)$

a^x, $x \in \mathbb{R}$, може да се разглежда като обратна на $\log_a x$, $x \in (0, +\infty)$.
Т-ма 2 в Тема 21 влече, че a^x е диференцируема навсякъде.
Намираме производната ѝ като диференцираме тъждеството

$$\log_a(a^x) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

За тази цел прилагаме Т-ма 1 в Тема 21 и $(x)' = 1$:

$$[\log_a(a^x)]' = (x)' \tag{10}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{a^x \ln a}(a^x)' = 1 \tag{11}$$

$$\Longrightarrow \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

В частност, за e^x (т.е. $a = e$) имаме

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Степенната функция: x^α, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Използваме представянето

$$x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln x}, \quad x > 0. \tag{14}$$

То показва, че x^α е композиция на диференцируеми функции и следователно също е диференцируема (Т-ма 1 в Тема 21). За производната ѝ имаме

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &= \left(e^{\alpha \ln x}\right)' \qquad (15) \\ &= e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \frac{\alpha}{x} \qquad (16) \\ &= \alpha x^{\alpha-1}. \qquad (17) \end{aligned}$$

Така установихме, че

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0. \tag{18}$$

Тригонометричните функции

I. $\sin x$

За фиксирано $x \in \mathbb{R}$ разглеждаме диференчното частно

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}, \quad h \neq 0. \tag{19}$$

Имаме

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 2\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right). \tag{20}$$

От непрекъснатостта на $\cos$ следва, че

$$\lim_{h\to 0}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x. \tag{21}$$

Знаем, че

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1. \tag{22}$$

От (20), (21) и (22) следва

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x. \tag{23}$$

С това доказахме, че $\sin x$ е диференцируема навсякъде в дефиниционната си област $\mathbb{R}$ и

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

II. $\cos x$

Използваме връзката със $\sin$

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right). \tag{25}$$

Така $\cos x$ се явява съставна функция на диференцируеми функции. Следователно също е диференциряема и според правилото за диференциране на съставни функции имаме

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' \tag{26}$$

$$= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) . \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' \tag{27}$$

$$= -\sin x. \tag{28}$$

Така установихме, че

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

III. $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

Използваме, че

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{30}$$

Следователно $\operatorname{tg} x$ е частно на диференцириеми функции и следователно също е диференцируема. От формулата за диференциране на частно имаме

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \tag{31}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{32}$$

Така доказахме, че

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{33}$$

Аналогично се установява, че $\operatorname{ctg} x$ е диференцириема във всяка точка $\neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, и

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Обратните тригонометрични функции

Диференцируемостта на всяка една от тези функции следва от Т-ма 2 в Тема 21.
За намирането на производната използваме същия подход като в случая на показателната функция.
В случая на $\arcsin x$, диференцираме тъждеството:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad x \in (-1, 1). \tag{35}$$

Получаваме

$$\begin{aligned} &\cos(\arcsin x).(\arcsin x)' = 1 \\ &\qquad \Longrightarrow \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned} \tag{36}$$

Аналогично се пресмята, че

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \tag{37}$$

За да намерим производната на $\operatorname{arctg} x$, диференцираме тъждеството

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

Получаваме

$$\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} (\operatorname{arctg} x)' = 1 \quad \Longrightarrow \quad (\operatorname{arctg} x)' = \cos^2(\operatorname{arctg} x). \tag{39}$$

За да опростим дясната страна, използваме тъждеството

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \tag{40}$$

То дава

$$\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + [\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)]^2} = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{41}$$

От (39) и (41) получаваме

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{42}$$

Аналогично се пресмята, че

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{43}$$