B-сплайни

В задачите ще използваме представянето на разделената разлика като линейна комбинация от функционалните стойности в интерполационните възли, т. е. доказаната формула:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$$

Задача 1. Нека $B_{i,r-1}(t) = (\cdot - t)_+^{r-1}[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r}], i \in \mathbb{Z}$ е безкрайна редица от B-сплайни с възли $x_i < x_{i+1}, \forall i$. Да се докаже, че

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_{k+r} - x_k) B_{k,r-1}(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}, r \geq 2.$$

Това свойство се нарича разделяне на единицата.

Доказателство: От Теорема 1. от лекцията за B-сплайни знаем: $B_{k,r-1}(t) \neq 0$ само за $t \in (x_k, x_{k+r})$. Извън този интервал B-сплайнът е равен на нула.

Нека $t \in (x_i, x_{i+1})$. Тогава само краен брой събираеми от безкрайната сума са различни от нула. Заместваме B-сплайните, които всъщност са разделени разлики. Използваме рекурентната връзка за разделени разлики и получаваме:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_{k+r} - x_k) B_{k,r-1}(t) = \sum_{k=i+1-r}^{i} (x_{k+r} - x_k) B_{k,r-1}(t) =$$

$$= \sum_{k=i+1-r}^{i} (x_{k+r} - x_k)\, (\cdot - t)_+^{r-1}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+r}] =$$

$$= \sum_{k=i+1-r}^{i} (x_{k+r} - x_k) \frac{(\cdot - t)_+^{r-1}[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+r}] - (\cdot - t)_+^{r-1}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+r-1}]}{x_{k+r} - x_k} =$$

$$= (\cdot - t)_+^{r-1}[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+r}] - (\cdot - t)_+^{r-1}[x_{i+1-r}, x_{i+2-r}, \dots, x_i].$$

Но $t \in (x_i, x_{i+1}) \Rightarrow (x_k - t)_+^{r-1}[x_{i+1-r}, x_{i+2-r}, \dots, x_i] = 0$ за $k = i+1-r, i+2-r, \dots, i$.

При $t \in (x_i, x_{i+1}) \Rightarrow (x_k - t)_+^{r-1} = (x_k - t)^{r-1}$ за $k = i+1, \dots, i+r$. Следователно

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_{k+r} - x_k) B_{k,r-1}(t) = (\cdot - t)^{r-1}[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+r}] = 1,$$

защото разделената разлика на функцията $\varphi(x) = (x-t)^{r-1} \in \pi_{r-1}$ в r възела $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+r}$ е равна на единица.

Задача 2. Нека $B_{i,r-1}(t) = (\cdot - t)_+^{r-1}[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r}], i \in \mathbb{Z}$ е безкрайна редица от B-сплайни с възли $x_i < x_{i+1}, \forall i$. Да се докаже, че

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_{k,r-1}(t)dt = \frac{1}{r}.$$

Доказателство: Отново от свойството, че $B_{k,r-1}(t) \neq 0$ само за $t \in (x_k, x_{k+r})$ и извън този интервал B-сплайнът е равен на нула, получаваме

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} B_{k,r-1}(t)dt = \int_{x_k}^{x_{k+r}} B_{k,r-1}(t)dt = \int_{x_k}^{x_{k+r}} \sum_{i=k}^{k+r} c_i (x_i - t)_+^{r-1}\, dt,$$

където коефициентите $c_i = \frac{1}{\omega'(x_i)}$. Следователно

$$I = \sum_{i=k}^{k+r} c_i \int_{x_k}^{x_{k+r}} (x_i - t)_+^{r-1} dt = \sum_{i=k}^{k+r} c_i \int_{x_k}^{x_i} (x_i - t)^{r-1} dt = \sum_{i=k}^{k+r} c_i \left\{ -\frac{(x_i - t)^r}{r} \right\} \Bigg|_{t=x_k}^{x_i} =$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{i=k}^{k+r} c_i (x_i - x_k)^r = \frac{1}{r} (\cdot - x_k)^r [x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+r}] = \frac{1}{r}$$

т. к. разделената разлика на функцията $\varphi(x) = (x - t)^r \in \pi_r$ в $(r+1)$ възела $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+r}$ е равна на единица.

Задача 3. Нека $r > 2, r \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че

$$\frac{d}{dt}\{B_{i,r-1}(t)\} = \frac{r-1}{x_{i+r} - x_i}\{B_{i,r-2}(t) - B_{i+1,r-2}(t)\}.$$

Доказателство: Нека $A = \frac{d}{dt}\{(\cdot - t)_+^{r-1}[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r}]\}$. Имаме формулата

$$\frac{d}{dt}\{(x_k - t)_+^{r-1}\} = -(r-1)(x_k - t)_+^{r-2},$$

защото за $t \geq x_k \Rightarrow (x_k - t)_+^{r-1} = 0$ и следователно равенството е вярно, а за

$t < x_k \Rightarrow (x_k - t)_+^{r-1} = (x_k - t)^{\, r-1}$ и следователно равенството отново е в сила.

$$\Rightarrow A = \sum_{k=i}^{i+r} c_k . \frac{d}{dt}\{(x_k - t)_+^{r-1}\} = \sum_{k=i}^{i+r} c_k . (1-r)(x_k - t)_+^{r-2} = (1-r)(\cdot - t)_+^{r-2}[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r}]$$

$$= (1-r)\left\{ \frac{(\cdot - t)_+^{r-2}[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+r}] - (\cdot - t)_+^{r-2}[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r-1}]}{x_{i+r} - x_i} \right\} =$$

$$= \frac{r-1}{x_{i+r} - x_i}\{B_{i,r-2}(t) - B_{i+1,r-2}(t)\}.$$

Задача 4. Нека $r > 2, r \in \mathbb{N}; t \neq x_{i+r}$. Да се докаже, че

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{B_{i,r-1}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r-1}}\right\} = (r-1)\frac{B_{i,r-2}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r}}.$$

Доказателство: От Теорема 3. от лекцията за B-сплайни имаме следната рекурентна връзка:

$$B_{i,r-1}(t) = \frac{x_{i+r}-t}{x_{i+r}-x_i}B_{i+1,r-2}(t) + \frac{t-x_i}{x_{i+r}-x_i}B_{i,r-2}(t) \qquad (1)$$

Диференцираме лявата страна

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{B_{i,r-1}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r-1}}\right\} = \frac{B'_{i,r-1}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r-1}} + B_{i,r-1}(t).\frac{r-1}{(x_{i+r}-t)^{r}} = \frac{(r-1)B_{i,r-1}(t) + (x_{i+r}-t)B'_{i,r-1}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r}}.$$

Използваме доказаното в **Задача 3.** и заместваме в горното равенство производната на $B_{i,r-1}(t)$. Получаваме:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{B_{i,r-1}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r-1}}\right\} = \frac{(r-1)B_{i,r-1}(t) + (x_{i+r}-t)\frac{r-1}{x_{i+r}-x_i}\{B_{i,r-2}(t) - B_{i+1,r-2}(t)\}}{(x_{i+r}-t)^{r}}$$

$$= \frac{(r-1)\left\{\frac{x_{i+r}-t}{x_{i+r}-x_i}B_{i+1,r-2}(t) + \frac{t-x_i}{x_{i+r}-x_i}B_{i,r-2}(t)\right\} + (x_{i+r}-t)\frac{r-1}{x_{i+r}-x_i}\{B_{i,r-2}(t) - B_{i+1,r-2}(t)\}}{(x_{i+r}-t)^{r}}$$

$$= \frac{(r-1)}{(x_{i+r}-t)^{r}}\left\{\frac{x_{i+r}-t}{x_{i+r}-x_i}B_{i,r-2}(t) + \frac{t-x_i}{x_{i+r}-x_i}B_{i,r-2}(t)\right\} = (r-1)\frac{B_{i,r-2}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r}}.$$

В горното равенство използвахме рекурентна връзка (1).

Задача 5: Нека $B(t) = (\cdot - t)_+^2[-1,1,2,3]$ е B-сплайнът от втора степен. Да се намери явният вид на $B(t)$ в интервала $[1; 2]$.

Решение: Търсим разделената разлика на отсечената функция $f(x) = (x-t)_+^2$. Ще построим таблицата за намиране на разделените разлики, като интерполационните възли са $x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = 2,\ x_3 = 3; t \in [1; 2]$.

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
-1	0	0	$\frac{(2-t)^2}{3}$	$\frac{-5t^2+14t-5}{24}$
1	0	$(2-t)^2$	$\frac{(3-t)^2 - 2(2-t)^2}{2}$	
2	$(2-t)^2$	$(3-t)^2 - (2-t)^2$		
3	$(3-t)^2$			

=> явният вид на B-сплайна е $B(t) = \frac{-5t^2+14t-5}{24}$ при $t \in [1; 2]$.