ВЪВЕДЕНИЕ В СИСТЕМАТА WOLFRAM MATHEMATICA

Име	**Оператор**
събиране	+
изваждане	-
умножение	*
деление	/
степенуване	^
математически скоби	( )
матем. равенство	==
присвояване	=
списъци	{ , , }
аргументи на команди и функции	[, ,]
разделител на команди и оператори	;
стартиране	Shift + Enter
нов ред	Enter
коментар	(* *)

Имената на всички вградени функции, команди и константи започват с главна буква. Wolfram Mathematica може да смята точно (обикновени дроби) и приближено (десетични дроби).

Основни функции и команди:

1) Числен вид:
   N[E] (* числен вид на e *) 2.71828

   N[Pi,20](* числен вид на π с 15 символа *) 3.1415926535897932385

2) Многократна сума:
   Sum[1/k^2 , {k, 1, Infinity}] (* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ *) $\frac{\pi^2}{6}$

3) Многократно произведение:
   Product[k^2, {k, 1,5}] (* $\prod_{k=1}^{5} k^2$ *) 14400

4) Граници:
   Limit[(1 + 1/n)^n, n → Infinity] e

5) Интегриране:
   Integrate[1/(1 + x^2) , x] (* $\int \frac{dx}{1+x^2}$ *) ArcTan[x]

NIntegrate[1/(1 + x^2) , {x, 0,1}] (* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ *) $\frac{\pi}{4}$

6) Решаване на уравнения и системи уравнения:

Solve[{$x + y$ == 2, $x - 5y$ == −1}, {x, y}] $\{\{x \to \frac{3}{2}, y \to \frac{1}{2}\}\}$

NSolve[z^3 − 3z^2 + 5z − 2 == 0] $\{\{z \to 0.5466023484835962\}, \{z \to 1.2266988257582019 - 1.4677115087102244i\}, \{z \to 1.2266988257582019 + 1.4677115087102244i\}\}$

7) Разлагане на множители:

Factor[x^3 + y^3] $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

8) Разкриване на скоби:

Expand[%] $x^3 + y^3$

9) Развитие в ред на Телор:

Series[x * Cot[x], {x, 0,11}] $1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \frac{2x^{10}}{93555} + O[x]^{12}$

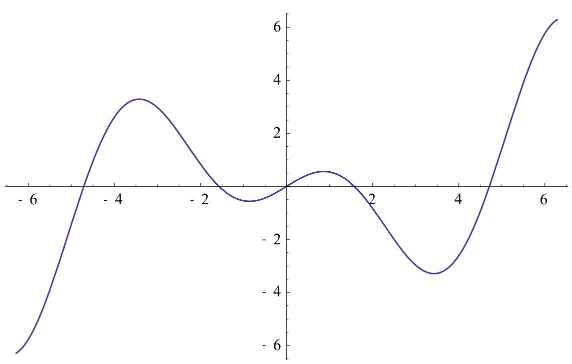
10) Матрично смятане:

```
A={{1,2,3},{1,0,-1},{2,2,3}}
Det[A]
```
-2

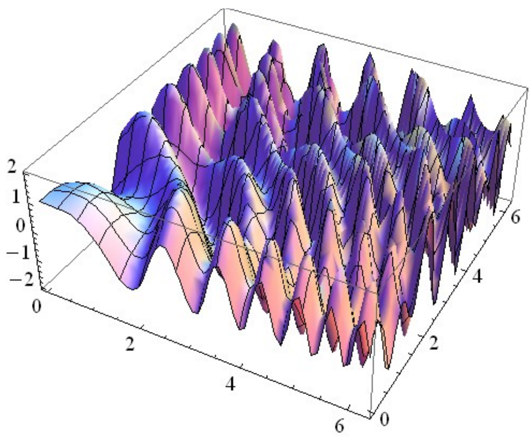
```
Inverse[A]
```
$\{\{-1,0,1\},\{\frac{5}{2},\frac{3}{2},-2\},\{-1,-1,1\}\}$

11) Дефиниране на функции и графика:

```
f[x_]:=Cos[x]*x;
Plot[f[x],{x,-2Pi,2Pi}]
```



```
h[x_,y_]:=Sin[x y]+Cos[x^2+y^2];
Plot3D[h[x,y],{x,0,2Pi},{y,0,2Pi}]
```



12) Условен оператор:
$k = \text{Input}[k]; l = 0; \text{If}[k < 0, l = -k, l = k]; l$ (* $l = \text{Abs}[k]$ *)

13) Оператор за цикъл:
$s = 0; \text{Do}[s = s + k, \{k, 1,99,2\}]; s$ (* $s = 1 + 3 + \cdots + 99$ *) 2500

14) Условен оператор за цикъл:
$\text{s1} = 0; k = 0; \text{While}[k < 100, k = k + 2; \text{s1} = \text{s1} + k]; \text{s1}$ (* $s1 = 0 + 2 + 4 + \cdots + 100$ *) 2550.

Интерполационен полином на Лагранж (ИПЛ)

Нека $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ са различни реални точки и $f(x_k)$ са дадени. Интерполационният полином на Лагранж се задава по следния начин: $L_n(f;x)$=$\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\, f(x_k)$, където $\omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$ и базисните полиноми на Лагранж са $l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} = \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}$, където $\omega_k(x) = \frac{\omega(x)}{x-x_k}$. Знаем, че $L_n(f;x_к) = f(x_к), \forall k = 0, 1, \dots, n$.

Ако $f(x)$ има непракъсната $(n+1)$ производна и $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M, \forall x \in [a,b]$, то

$$|f(x) - L_n(f;x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|\omega(x)|.$$

Твърдение: Ако $f(x) \in \pi_n$, то $L_n(f;x) \equiv f(x)$.

Задача 1. С помощта на *Wolfram Mathematica* да се построи ИПЛ за $f(x) = \frac{1}{1+x}$ с интерполационни възли:

а) $x_k = \frac{k}{n}, k = 0,1,\dots,n;$ за $n = 5; 15$ и $50;$

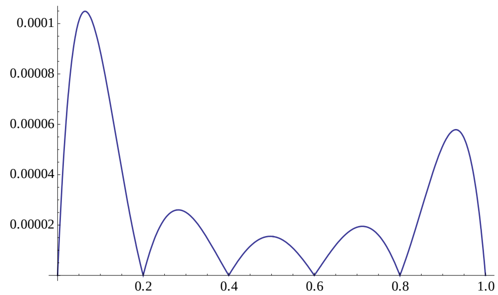
б) $x_k = \sin^2\frac{(2k+1)\pi}{4n+4}, k = 0,1,\dots,n;$ за $n = 5; 10.$

Решение:

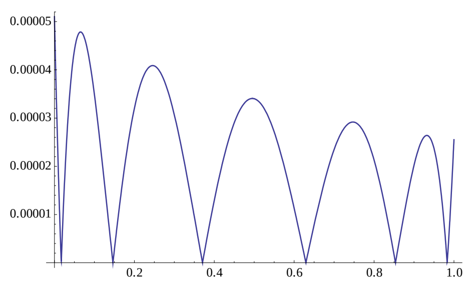
а**)**

```
n=5;
f[t_]:=1/(1+t);
Do[x[k]=k/n,{k,0,n}];
w[t_]:=Product[t-x[k],{k,0,n}];
Do[v[k_,t_]:=w[t]/(t-x[k]),{k,0,n}];
Do[l[k_,t_]:=v[k,t]/Simplify[v[k,t]/.t→x[k]],{k,0,n}];
L[f_,t_]:=Sum[l[k,t]*f[x[k]],{k,0,n}];
m=Expand[L[f,t]]
Plot[Abs[f[t]-m],{t,0,1}]
```

$$1 - \frac{251t}{252} + \frac{2875t^2}{3024} - \frac{4625t^3}{6048} + \frac{625t^4}{1512} - \frac{625t^5}{6048}$$



б)
```
n=5;
f[t_]:=1/(1+t);
Do[x[k]=(Sin[(2k+1)Pi/(4n+4)])^2,{k,0,n}];
w[t_]:=Product[t-x[k],{k,0,n}];
Do[v[k_,t_]:=w[t]/(t-x[k]),{k,0,n}];
Do[l[k_,t_]:=v[k,t]/Simplify[v[k,t]/.t→x[k]],{k,0,n}];
L[f_,t_]:=Sum[l[k,t]*f[x[k]],{k,0,n}];
m=Expand[L[f,t]];
Plot[Abs[f[t]-m],{t,0,1}]
```



Задача 2. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) \equiv 1$.

Доказателство: Нека $f(x) = 1 \in \pi_0 \subset \pi_n => L_n(f;x) \equiv f(x) \equiv 1$, но $f(x_k) = 1, \forall\, x$.

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) \equiv 1.$$

Задача 3. Да се докаже, че за $m = 1,2 \dots, n$ е в сила $\sum_{k=0}^{n} l_k(x).x_k^m = x^m$.

Доказателство: Нека $f(x) = x^m \in \pi_m \subseteq \pi_n => L_n(f;x) \equiv f(x) = x^m$, но $f(x_k) = x_k^m, \forall\, x_k$.

$$=> \ L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) x_k^m = x^m.$$

Задача 4. Нека $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} l_k(x).x_k^{n+1}$.

Решение: Нека $f(x) = x^{n+1} \in \pi_{n+1} => L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x).x_k^{n+1}$. Но $L_n(f;x_k) = f(x_k), \forall k = 0,1,\dots,n$ $=> f(x) - L_n(f;x) \in \pi_{n+1}$ със старши коефициент 1 $=> f(x) - L_n(f;x) = \omega(x)$.

$$=> \sum_{k=0}^{n} l_k(x).x_k^{n+1} = x^{n+1} - \omega(x).$$

Задача 5. Нека $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} l_k(x).x_k^{n+2}$.

Решение: Нека $f(x) = x^{n+2} \in \pi_{n+2} => L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x).x_k^{n+2}$. Но $L_n(f;x_k) = f(x_k), \forall k = 0,1,\dots,n$ $=> f(x) - L_n(f;x) \in \pi_{n+2}$ със старши коефициент 1 $=> f(x) - L_n(f;x) = \omega(x)(x-A)$. Приравняваме коефициентите пред x^{n+1} от двете страни на равенството. Отляво този коефициент е нула, а в дясната страна по формулите на Виет е равен на сумата от корените. Получаваме:

$$0 = -x_0 - x_1 - \cdots - x_n - A$$

$$=> A = -\sum_{i=0}^{n} x_i$$

$$=> \sum_{k=0}^{n} l_k(x).x_k^{n+2} = x^{n+2} - \omega(x)\left(x + \sum_{i=0}^{n} x_i\right).$$

Задача 6. Нека $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Да се докаже , че за $m = 1,2 \dots, n$ е в сила $\sum_{k=0}^{n} l_k(x).(x - x_k)^m = 0$.

Доказателство: Нека $f(t) = (x-t)^m \in \pi_m \subseteq \pi_n => L_n(f;t) \equiv f(t)$.

$$=> \ L_n(f;t) = \sum_{k=0}^{n} l_k(t)(x - x_k)^m = (x-t)^m,$$

и за $t = x$ получаваме $\sum_{k=0}^{n} l_k(x).(x - x_k)^m = 0$.

Разделени разлики

Разделена разлика за функцията $f(x)$ във възлите $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ се дефинира по следния начин:

- В един възел $f[x_0] = f(x_0)$;
- Рекурентно в повече възли $f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1,x_2,\dots,x_k]-f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$.

На лекции е доказана следната формула (1) за разделената разлика във всички интерполационни възли:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} \qquad (1)$$

Разделената разлика $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ е равна на коефициента пред x^n в интерполационния полином на Лагранж $L_n(f; x)$ от $\boldsymbol{n}$-та степен за $f(x)$ с възли $x_0, x_1, \dots, x_n$.

От горното твърдение получаваме:

1) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0,$ за $f(x) = x^m, m = 0,1, \dots, n-1;$
2) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1,$ за $f(x) = x^n$.

Тези тъждества могат да бъдат написани в следния вид, използвайки формула (1):

1') $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^m}{\omega'(x_k)} = 0, m = 0,1, \dots, n-1;$

2') $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^n}{\omega'(x_k)} = 1.$

Задача 1. Да се намерят коефициентите A_k в разлагането $\frac{p(x)}{\omega(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{x-x_k}$, където $p(x) \in \pi_n$.

Решение: $p(x) \in \pi_n \Rightarrow p(x) = L_n(p; x) \Rightarrow p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} p(x_k)$

Делим двете страни на равенството на $\omega(x)$ и получаваме:

$\frac{p(x)}{\omega(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{x-x_k}$, където $A_k = \frac{p(x_k)}{\omega'(x_k)}$.

Задача 2. Да се разложи на елементарни дроби рационалната функция $\frac{x+2}{x(x-1)(x-2)}$.

Решение: $p(x) = x + 2;\ \omega(x) = x(x-1)(x-2)$. Използвайки изведените в Задача 1. формули за коефициентите A_k получаваме:

$$A_0 = \frac{p(x_0)}{\omega'(x_0)} = \frac{p(0)}{\omega'(0)} = 1;$$

$$A_1 = \frac{p(x_1)}{\omega'(x_1)} = \frac{p(1)}{\omega'(1)} = -3;$$

$$A_2 = \frac{p(x_2)}{\omega'(x_2)} = \frac{p(2)}{\omega'(2)} = 2.$$

$$=> \frac{x+2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-2}.$$

Задача 3. Нека $m \in \{1,2,\dots,n-1\}$. Да се докаже, че $\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\omega'(x_k)} \neq 0$.

Доказателство:
Нека $p(x) \in \pi_n$ е зададен с интерполационните условия:

x_k	x_0	x_1	....	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	....	x_n
$p(x_k)$	0	0	...	0	1	1	...	1

$$p(x_i) = 0, i = 0, \dots, m-1;\ p(x_i) = 1, i = m, m+1, \dots, n$$

=>$p[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\omega'(x_k)}$. Ще покажем, че степентта на $p(x)$ е точно равна на n, т. е. не е по-ниска. По теоремата на Рол $p'(x)$ ще се нулира поне веднъж във всеки един от интервалите $(x_0, x_1), \dots, (x_{m-2}, x_{m-1})$ и в интервалите $(x_m, x_{m+1}), \dots, (x_{n-1}, x_n)$, защото в краищата им има равни стойности. Тогава нулите на $p'(x)$ са $(m-1) + (n-m) = n-1$. Следователно $p(x)$ има точно n нули => $p[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\omega'(x_k)} \neq 0$.

Задача 4. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}$.

Решение: Търсим разделената разлика на функцията $f(x) = \omega''(x)$.

Но $\omega(x) \in \pi_{n+1} => \omega''(x) \in \pi_{n-1}$ и от твърдението 1) получаваме, че $\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0$.

Задача 5. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k \omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}$.

Решение: Търсим разделената разлика на функцията $f(x) = x\omega''(x)$. Но $\omega(x) \in \pi_{n+1} => x\omega''(x) \in \pi_n$.

$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) = x^{n+1} + a_1 x^n + \dots + a_{n+1}$,

$$=> \omega'(x) = (n+1)x^n + n.a_1 x^{n-1} + \cdots$$

$$=> \omega''(x) = (n+1)n.x^{n-1} + n(n-1)a_1 x^{n-2} + \cdots$$

$$=> x\omega''(x) = (n+1)n.x^n + n(n-1)a_1 x^{n-1} + \cdots$$

$$=> \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k \omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = n(n+1).$$

Задача 6. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^{n+1}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Доказателство: Лявата страна на равенството е разделена разлика за функцията $f(x) = x^{n+1}$. Търсим коефициента пред x^n в интерполационния полином на Лагранж (ИПЛ) $L_n(f; x)$. Но той интерполира функцията във възлите $x_0, x_1, \dots, x_n$. Следователно

$$f(x_i) - L_n(f; x_i) = 0, i = 0,1, \dots, n$$

$$=> f(x) - L_n(f; x) = \omega(x)$$

Приравняваме коефициентите пред x^n от двете страни на равенството. От дясната страна използваме формулите на Виет. Получаваме:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x_k,$$

Следователно $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^{n+1}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Задача 7. Като използвате ИПЛ докажете тъждествата:

а) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{m}{n}\frac{1}{m-k} = \frac{1}{m-n}, \forall m > n \geq 0;$

б) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{m}{n}\frac{k}{m-k} = \frac{m}{m-n}, \forall m > n \geq 1.$

Решение: Нека $x_k = k, k = 0,1, \dots, n \Rightarrow \omega(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n)$;

$$\omega'(k) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} (k-j);$$

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)f(k)}{(x-k)\omega'(k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x(x-1)\dots(x-n)f(k)}{(x-k).\,k(k-1)(k-2)\dots 1.\,(-1)(-2)\dots(-(n-k))}.$$

Нека $x = m \Rightarrow L_n(f;m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} m(m-1)\dots(m-n)f(k)}{(m-k)k!(n-k)!}$. Умножаваме и делим на $n!$ в дробта и получаваме:

$$L_n(f;m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(m-n)}{(m-k)} \binom{n}{k}\binom{m}{n} f(k).$$

а) Нека $f(x) = 1 \in \pi_0 \Rightarrow f(m) = L_n(f;m) = 1$. Делим двете страни на равенството на $(m-n) \neq 0$ и получаваме $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{m}{n}\frac{1}{m-k} = \frac{1}{m-n}$.

б) Нека $f(x) = x \in \pi_1 \Rightarrow f(m) = L_n(f;m) = m$. Делим двете страни на равенството на $(m-n) \neq 0$ и получаваме $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{m}{n}\frac{k}{m-k} = \frac{m}{m-n}$.

Задача 8. Нека $f(x)$ има производни от всякакъв ред в интервала $[a,b]$, и съществуват положителни константи C и M, такива че за всяко естествено число n е изпълнено

$$\left|f^{(m)}(x)\right| \leq CM^m \text{ за всяко } x \in [a,b]$$

Докажете, че за всеки избор на интерполационни възли $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ е изпълнено

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - L_n(f;x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказателство:
От формулата за грешката и условието имаме

$$|f(x) - L_n(f;x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|\omega(x)| \leq \frac{CM^{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = \frac{C\big(M(b-a)\big)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \;\; \xi \in (a,b)$$

е изпълнено за всяко $x \in [a,b]$. Следователно

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - L_n(f;x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Интерполационна формула на Нютон с разделени разлики:

$$L_n(f;x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \cdots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Задача 9. Да се намери полином $p(x) \in \pi_3$, такъв че $p(-1) = 3, p(0) = 1, p(1) = -1, p(2) = 3$.

Решение: Имаме 4 интерполационни възела. Можем да построим единствен полином от трета степен с тези условия по формулата на Нютон. За целта са ни необходими разделените разлики. Тях най-лесно можем да пресметнем от рекурентната връзка в следната таблица:

x_i	$p[x_i]$	$p[x_i,x_{i+1}]$	$p[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$p[x_i x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
-1	3	$\frac{1-3}{0-(-1)} = -2$	$\frac{-2-(-2)}{1-(-1)} = 0$	$\frac{3-0}{2-(-1)} = 1$
0	1	$\frac{-1-1}{1-0} = -2$	$\frac{4-(-2)}{2-0} = 3$	
1	-1	$\frac{3-(-1)}{2-1} = 4$		
2	3			

Оцветените в червено разделени разлики участват във формулата на Нютон. Заместваме в нея:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p[x_0,x_1,\ldots,x_k](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})$$
$$= 3 - 2(x+1) + 0(x+1)(x-0) + 1(x+1)(x-0)(x-1) = x^3 - 3x + 1.$$

Задача 10. Да се напише програма на Wolfram *Mathematica* за намиране на ИПЛ по условията от **задача 9**.

Решение: Нека означим разделената разлика $a[i,j] = f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+j}]$. Програмата е:

```
n=3;
Do[x[i]=i-1,{i,0,n}];
a[0,0]=3;a[1,0]=1;a[2,0]=-1;a[3,0]=3;
Do[Do[a[i,j]=(a[i+1,j-1]-a[i,j-1])/(x[i+j]-x[i]),{i,0,n-j}],{j,1,n}];
L[t_]:=a[0,0]+Sum[a[0,j]*Product[t-x[i],{i,0,j-1}],{j,1,n}];
Simplify[L[t]]
```

Out[1]= $1 - 3t + t^3$

Разделени разлики с кратни възли. Интерполационен полином на Ермит

Нека $a \le x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n \le b$ и $f \in C^n[a,b]$. Разделена разлика на функцията $f(x)$ във възлите $x_0, x_1, \dots, x_k$ се дефинира по следния начин:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \begin{cases} \dfrac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, x_0 \ne x_k \\ \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad x_0 = x_k \end{cases}$$

Интерполационният полином на Ермит се задава с формулата на Нютон:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\ x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}).$$

Задача 1. Да се намери полином $p(x) \in \pi_4$, такъв че $p(-1) = \frac{1}{2}, p(0) = 1, p'(0) = 0, p''(0) = -2, p(1) = \frac{1}{2}$.

Решение: Имаме 5 интерполационни възела $x_0 = -1, x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 1$. Нулата е трикратен възел. Можем да построим единствен полином от четвърта степен с тези условия по формулата на Нютон. За целта са ни необходими разделените разлики. Тях най-лесно можем да пресметнем от рекурентната връзка в следната таблица:

x_i	$p[x_i]$	$p[x_i, x_{i+1}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$p[x_i, \dots, x_{i+4}]$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-\frac{1}{2}}{0-(-1)} = \frac{1}{2}$	$\frac{0-\frac{1}{2}}{0-(-1)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1+\frac{1}{2}}{0-(-1)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+1} = \frac{1}{2}$
0	1	$\frac{p'(0)}{1!} = 0$	$\frac{p''(0)}{2!} = -1$	$\frac{-\frac{1}{2}+1}{1-0} = \frac{1}{2}$	
0	1	$\frac{p'(0)}{1!} = 0$	$\frac{-\frac{1}{2}-0}{1-0} = -\frac{1}{2}$		
0	1	$\frac{\frac{1}{2}-1}{1-0} = -\frac{1}{2}$			
1	$\frac{1}{2}$				

Оцветените в червено разделени разлики участват във формулата на Нютон. Заместваме в нея:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)(x-0) - \frac{1}{2}(x+1)x^2 + \frac{1}{2}(x+1)x^3 = \frac{x^4}{2} - x^2 + 1.$$

Задача 2. Да се намери полином $p(x) \in \pi_4$, такъв че $p(-1) = 4, p'(-1) = -11, p(1) = 2, p'(1) = 5, p''(1) = 10$.

Решение: Преминаваме към попълване на таблицата с разделените разлики:

x_i	$p[x_i]$	$p[x_i, x_{i+1}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$p[x_i, \dots, x_{i+4}]$
-1	4	$\frac{p'(-1)}{1!} = -11$	$\frac{-1+11}{1-(-1)} = 5$	$\frac{3-5}{2} = -1$	$\frac{1+1}{1+1} = 1$
-1	4	$\frac{2-4}{1-(-1)} = -1$	$\frac{5+1}{1+1} = 3$	$\frac{5-3}{2} = 1$	
1	2	$\frac{p'(1)}{1!} = 5$	$\frac{p''(1)}{2!} = 5$		
1	2	$\frac{p'(1)}{1!} = 5$			
1	2				

Оцветените в червено разделени разлики участват във формулата на Нютон. Заместваме в нея:

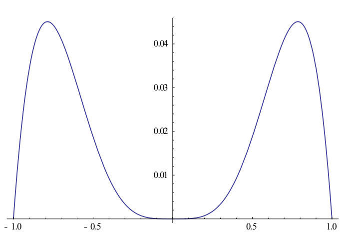
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) =$$
$$= 4 - 11(x+1) + 5(x+1)^2 - 1(x+1)^2(x-1) + 1(x+1)^2(x-1)^2$$
$$= x^4 - x^3 + 2x^2.$$

Задача 3. Да се намери интерполационния полином на Ермит във възлите $x_0 = -1, x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 1$ за функцията $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ чрез функция на Wolfram Mathematica. Да се визуализира графиката на грешката.

Решение: Намираме $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}; f(0) = 1; f'(0) = 0; f''(0) = -2$. Ще използваме вградената функция за намиране на интерполационен полином по зададени възли, техните функционални стойности и стойностите на производните. Така изглежда:

```
f[t_]:=1/(1+t^2);
L[t_]:=InterpolatingPolynomial[{{-1,1/2},{0,{1,0,-2}},{1,1/2}},t];
a=Expand[L[t]]
Plot[f[t]-a,{t,-1,1}]
```

Out[1]= $1 - t^2 + \frac{t^4}{2}$



Крайни разлики

Крайни разлики използваме, когато интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка h, т. е. възлите се задават се с формулата $x_k = x_0 + k.h,\ k = 0,1,\dots,n$. Означаваме функционалните стойности в тези възли с $f_k = f(x_k)$.

Разделена разлика за функцията $f(x)$ във възлите $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ се дефинира по следния начин:

- от първи ред: $\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$;
- от k-ти ред рекурентно: $\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j$.

На лекции са доказани следните формули:

1) $\Delta^n f_0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_j$;
2) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}$.

Доказали сме (в предходното упражнение), че:

а) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0,$ за $f(x) = x^m, m = 0,1,\dots,n-1;$ (*)

б) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1,$ за $f(x) = x^n.$ (**)

Ще интерпретираме тези изводи в термините на крайни разлики.

Задача 4: Да се докаже тъждеството $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = 0$ за $k = 0,1,\dots,n-1$.

Доказателство: Лявата страна на равенството е крайна разлика за функцията $f_j = f(j) = j^k, k \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Това са стойностите на функцията $f(x) = x^k \in \pi_{n-1}$ в точките $x_j = j,\ j = 0 \div n$. Интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка $h = 1$. Но разделената разлика в (n +1) точки на полином от (n-1) степен е равна на нула, т. е. $x^k[x_0 x_1, \dots, x_n] = 0,\ k = 0 \div n-1$ и от връзката между разделена и крайна разлика 2) получаваме $\Delta^n f_0 = 0$, т.е. $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = 0$.

Задача 5: Да се докаже тъждеството $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^n = n!$

Доказателство: Лявата страна на равенството е крайна разлика за функцията $f_j = f(j) = j^n$. Това са стойностите на функцията $f(x) = x^n \in \pi_n$ в точките $x_j = j,\ j = 0 \div n$. Интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка $h = 1$. Но разделената разлика в (n +1) точки на полином от n-та степен е равна на едно, т. е. $x^n[x_0 x_1, \dots, x_n] = 1$ и от връзката между разделена и крайна разлика 2) получаваме $\Delta^n f_0 = n!\, h^n f[x_0, x_1, \dots, x_n]$, т.е. $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = n!$

Задача 6: Да се намери $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{m+j}{k}$, където $m \in N, k = 0,1,\dots,n-1$.

Доказателство: Лявата страна на равенството е крайна разлика от n-ти ред за $f_j = f(j) = \binom{m+j}{k}$.

$$=> f(x) = \binom{x+m}{k} = \frac{(x+m)(x+m-1)\dots(x+m-k+1)}{k!} \in \pi_k \subseteq \pi_{n-1}.$$

Но $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$ и от равенството 2) получаваме, че $\Delta^n f_0 = 0$ и следователно $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\binom{m+j}{k} = 0$.

Лема на Поповичу

Тя ни дава формула, по която да пресметнем разделената разлика на произведение на две функции в (n +1) интерполационни възли чрез раделените разлики на отделните функции. Лемата гласи:

$$(f.g)[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k].g[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n].$$

Задача 7: Да се намери $x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Решение: Можем да представим $x^{n+1} = x.x^n$. От (*) и (**) получаваме, че

$x[x_0] = x_0, x[x_0, x_1] = 1,\ x[x_0, x_1, \dots, x_k] = 0,\ \ x^n[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1.$

Прилагаме лемата на Поповичу за функцията x^{n+1}

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x[x_0, x_1, \dots, x_k].x^n[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] =$$
$$= x[x_0].\ x^n[x_0, x_1, \dots, x_n] + \ x[x_0, x_1].\ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n] + 0 = x_0 + \ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Така получихме рекурентна връзка за разделените разлики на функциите x^{n+1} и x^n

Прилагаме отново лемата за $x^n[x_1, x_2, \dots, x_n]$

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = x_0 + \ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n] = x_0 + x_1 + \ x^{n-1}[x_2, x_3, \dots, x_n]$$

След многократно приложение на лемата на Поповичу окончателно получаваме

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \textstyle\sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Задача 8: Да се намери $\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, за $x_k \neq 0, \forall k$.

Решение: Можем да представим $1 = x.\frac{1}{x}$, но $1 \in \pi_0 \Rightarrow 1[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$. Прилагаме лемата на Поповичу за константата 1, равенствата (*) и (**). Получаваме:

$0 = 1[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x\,[x_0, x_1, \dots, x_k].\frac{1}{x}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] = x_0.\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] + x[x_0, x_1].\frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n] + 0 = x_0.\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] + \frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n].$

От това равенство изразяваме $\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ и получаваме

$$\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] = -\frac{1}{x_0}.\frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

Аналогично прилагаме лемата на Поповичу още $(n-1)$ пъти и получаваме:

$$\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{(-1)^n}{x_0 . x_1 \dots x_n}.$$

Задача 9: Да се намери $\frac{1}{x^2}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, за $x_k \neq 0, \forall k$.

Решение: Можем да използваме намереното в **Задача 8** и лемата на Поповичу.

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}.\frac{1}{x} => \frac{1}{x^2}[x_0, x_1, \dots, x_n] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_k].\frac{1}{x}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x_0 . x_1 \dots x_k}.\frac{(-1)^{n-k}}{x_k . x_{k+1} \dots x_n} = \frac{(-1)^n}{x_0 . x_1 \dots x_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k}.$$