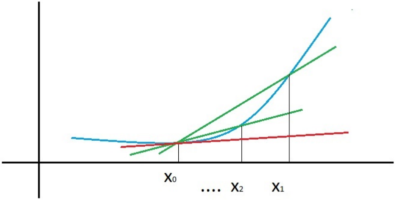
19. Производна на функция. Геометричен и физичен смисъл. Непрекъснатост на диференцируемите функции

Допирателна към графика на функция

Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in (a,b)$. Разглеждаме редица $\{x_n\} : x_n \in [a,b],\ x_n \neq x_0\ \forall n \in \mathbb{N}_+$ и $\lim x_n = x_0$. Построяваме правата през т. $(x_0, f(x_0))$ и $(x_n, f(x_n))$ за $n = 1, 2, \dots$



Тя е графиката на линейната функция

$$y = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}(x - x_0) + f(x_0). \tag{1}$$

Такива прави се наричат <u>секущи</u> за графиката на f.

Дефиниция

Ако всяка така построена редица от секущи клони към една и съща права, тя се нарича <u>допирателна</u> към графиката на $f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$ (или по-кратко в т. x_0).

От (1) и деф. на Хайне за граница на функция се вижда, че допирателната (невертикална) съществува $\iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Производна

Дефиниция

Нека $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in (a, b)$. Ако границата

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2}$$

съществува, казваме, че $f(x)$ е диференцируема в т. x_0, а стойността на тази граница наричаме производна на $f(x)$ в т. x_0 и я означаваме с $f'(x_0)$, т.е.

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{3}$$

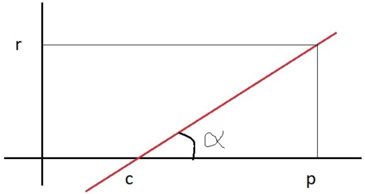
Полагайки $h := x - x_0$, можем да запишем (3) във вида

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{4}$$

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ се нарича диференчно частно на $f(x)$ в т. x_0.

Геометричен смисъл на производната

Така имаме, че допирателната (невертикална) към графиката на $f(x)$ в т. x_0 съществува $\iff$ $f(x)$ е диференцируема в т. x_0. В този случай уравнението на допирателната е $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Така $f'(x_0)$ се явява ъгловият коефициент на допирателната към графиката на $f(x)$ в т. x_0. Това е геометричният смисъл на производната.



$y = k(x - c)$
$k = \operatorname{tg}\alpha$ — ъглов коефициент
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{p-c}$

Скорост — физичен смисъл на производната

$S(t)$ — разстоянието, изминато до момента t
Средната скорост между времевите моменти t_0 и t е

$$\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}. \tag{5}$$

Моментната скорост $v(t_0)$ в момента t_0 се дефинира като границата (стига тя да съществува)

$$v(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}, \tag{6}$$

т.е.

$$v(t_0) := S'(t_0). \tag{7}$$

Физичният смисъл на производната е, че тя дава моментната скорост на изменение на физична величина.

Характеристики на функциите, описани от производната им

(а) Графиката на функция прилича на отсечка достатъчно близо до точка, в която тя е диференцируема.

(б) Големината на производната в дадена точка показва колко бързо стойностите на функцията се изменят спрямо стойностите на аргумента в достатъчно малка околност на тази точка.

Лява и дясна производна

Дефиниция

(а) Нека $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in (a, b]$. Ако границата

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{8}$$

съществува, я наричаме лява производна на $f(x)$ в т. x_0.

(б) Нека $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in [a, b)$. Ако границата

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{9}$$

съществува, я наричаме дясна производна на $f(x)$ в т. x_0.

Твърдение

$\exists\, f'(x_0) \iff \exists\, f'_-(x_0),\ f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.
В този случай имаме $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Диференцируеми функции — производната като функция

Дефиниция

Ако функцията $f(x)$ има производна във всяка вътрешна точка на интервала D, в левия му край, в случай че е число, има дясна производна и в десния му край, в случай че е число, има лява производна, то можем да дефинираме функция на x, която на всяко $x \in D$ съпоставя производната на f в x. Така дефинираната фунция, отново се нарича производна на f и се означава с $f'(x)$ или f'.

Примери

Пример 1: $f(x) \equiv \text{const}$, т.е. $f(x) \equiv c$, където $c \in \mathbb{R}$.
Нека $x_0 \in \mathbb{R}$ е произволно фиксирано. Имаме

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0. \tag{10}$$

Следователно $f(x)$ е диференцируема в т. x_0 и $f'(x_0) = 0$.
Така установихме, че

$$(c)' = 0, \ \text{където } c \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

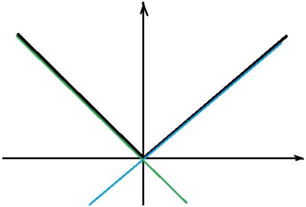
Пример 2: $f(x) = x$. Нека $x_0 \in \mathbb{R}$ е произволно фиксирано. Имаме

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1. \tag{12}$$

Следователно $f(x)$ е диференцируема в т. x_0 и $f'(x_0) = 1$.
Така установихме, че

$$(x)' = 1. \tag{13}$$

Пример 3: $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$



синята права: $y = x$;
зелената права: $y = -x$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{x \geq 0}{=} \frac{x}{x} = 1 \underset{x \to 0+0}{\longrightarrow} 1 \quad \Longrightarrow \quad f_+(0) = 1. \tag{14}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{x \leq 0}{=} \frac{-x}{x} = -1 \underset{x \to 0-0}{\longrightarrow} -1 \quad \Longrightarrow \quad f_-(0) = -1. \tag{15}$$

Непрекъснатост на диференцируемите функции

Теорема

Всяка функция е непрекъсната в точките, в които е диференцируема.

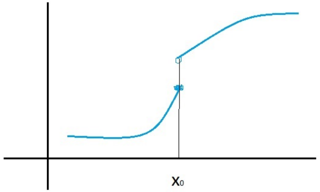
Д-во: Нека $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ е диференцируема в т. $x_0 \in (a, b)$. Тогава

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0} \tag{16}$$

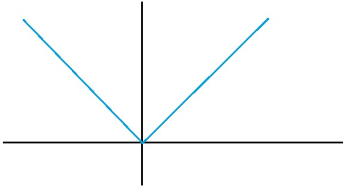
$$\Longrightarrow \quad f(x) - f(x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{17}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \text{ е непрекъсната в т. } x_0. \tag{18}$$

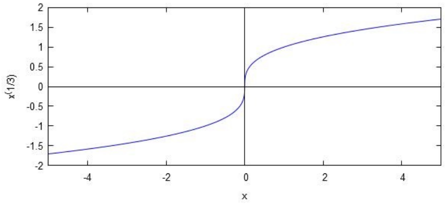
Несъществуване на производна



Прекъсната в т. x_0



$f(x) = |x|$: рогова точка при $x = 0$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$: вертикална допирателна в т. 0

Ако

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty, \tag{19}$$

то имаме вертикална допирателна към графиката на $f(x)$ в т. x_0.