Линейни операции с вектори

Определение 1 Нека v е вектор и $\overrightarrow{AB}$ е представител на v. Тогава векторът с представител $\overrightarrow{BA}$ се нарича *противоположен на* v и се означава с $-v$.

Коректност: Трябва да се провери, че горното определение е коректно, тоест $-v$ не зависи от избора на представителя $\overrightarrow{AB}$ на v.

Нека и $\overrightarrow{CD}$ е представител на v. Трябва да проверим, че $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$ са представители на един и същ вектор, тоест че $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$. Това се доказва лесно и с дефиницията на равенство на свързани вектори, но ние ще го направим чрез свойството на успоредника, защото така става съвсем механично и тривиално.

Щом $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са представители на v, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. От свойството на успоредника тогава получаваме $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Следователно $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. И отново от свойството на успоредника следва $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$.

Значи определението на $-v$ е коректно. $\square$

Пример 1 $-0 = 0$.
Това е така, защото: Нека O е произволна точка. Тогава $\overrightarrow{OO}$ е представител на 0 и като обърнем реда на точките получаваме, че $\overrightarrow{OO}$ е представител и на -0. Значи 0 и -0 имат общ представител, така че $-0 = 0$.

Определение 2 (*събиране на вектори*) Нека u и v са вектори, O е произволна точка, $\overrightarrow{OP}$ е представител на u с начало O, $\overrightarrow{PQ}$ е представител на v с начало P. Векторът с представител $\overrightarrow{OQ}$ се нарича *сбор* или *сума на* u *и* v и се означава с $u + v$.

Коректност: Трябва да се провери, че определението на $u + v$ не зависи от избора на точката O.

Нека O' е друга точка. Повтаряме конструкцията, тръгвайки с O': Нека $\overrightarrow{O'P'}$ е представител на u с начало O', $\overrightarrow{P'Q'}$ е представител на v с начало P'. Трябва да проверим, че $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{O'Q'}$ са представители на един и същ вектор, тоест че $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'}$. Доказателството на това с дефиницията на равенство на свързани вектори е неприятно. Но тук ще ни се отплати трудът, който положихме за доказването на свойството на успоредника, защото чрез него доказателството е съвсем механично и тривиално.

От това, че $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{O'P'}$ са представители на u следва $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'}$, откъдето по свойството на успоредника получаваме $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{PP'}$. А от това, че $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{P'Q'}$ са представители на v следва $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$, откъдето по свойството на успоредника получаваме $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$. Значи имаме $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{PP'}$ и $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$, така че $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{QQ'}$. От това пак по свойството на успоредника следва $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'}$.

Значи определението на $u + v$ е коректно. $\square$

Определение 3 (*изваждане на вектори*) *Разлика на векторите* u *и* v е векторът $u - v := u + (-v)$.

Определение 4 (*умножение на вектор с число*) *Произведение на числото $\lambda \in \mathbb{R}$ с вектора u* се нарича векторът v, определен по следния начин:

а) ако $\lambda = 0$ или $u = 0$, то $v = 0$.

б) ако $\lambda \neq 0$ и $u \neq 0$, то: Нека O е произволна точка и нека P е такава, че $\overrightarrow{OP} = u$. Считайки, че е фиксирана единична отсечка, избираме точката Q върху правата OP така, че $|OQ| = |\lambda||OP|$ и

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}, & \text{ако } \lambda > 0 \\ \overrightarrow{OQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}, & \text{ако } \lambda < 0 \end{array}.$$

Тогава v е векторът с представител $\overrightarrow{OQ}$.

Векторът v се означава с $\lambda.u$ (или λu).

Коректност: Трябва да се провери, че определението на $\lambda.u$ в случая б) не зависи от избора на единичната отсечка и от избора на точката O.

1. Независимост от избора на единичната отсечка.

   Да вземем друга единична отсечка и да означаваме дължината спрямо нея на отсечката AB с $\|AB\|$. Тогава съществува константа $c > 0$ такава, че за всяка отсечка AB имаме $\|AB\| = c.|AB|$. Следователно

   $$\|OQ\| = c.|OQ| = c.|\lambda|.|OP| = |\lambda|.c.|OP| = |\lambda|.\|OP\|.$$

   Значи наистина определението на $\lambda.u$ не зависи от избора на единичната отсечка.

2. Независимост от избора на точката O.

   Нека O' е друга точка. Повтаряме конструкцията, тръгвайки с O': Нека P' е такава, че $\overrightarrow{O'P'} = u$. Избираме точката Q' върху правата $O'P'$ така, че $|O'Q'| = |\lambda||O'P'|$ и

   $$\begin{array}{ll} \overrightarrow{O'Q'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}, & \text{ако } \lambda > 0 \\ \overrightarrow{O'Q'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{O'P'}, & \text{ако } \lambda < 0 \end{array}.$$

   От това, че $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{O'P'}$ са представители на u следва $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'}$, тоест $|OP| = |O'P'|$ и $\overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}$.

   Следователно $|O'Q'| = |\lambda|.|O'P'| = |\lambda|.|OP| = |OQ|$.

   Ако $\lambda > 0$, то $\overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{O'Q'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}$ и тъй като $\overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}$, то $\overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'Q'}$.

   Ако $\lambda < 0$, то $\overrightarrow{OQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{O'Q'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{O'P'}$ и тъй като $\overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}$, то $\overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'Q'}$.

   Значи и в двата случая имаме $\overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'Q'}$. От това и $|O'Q'| = |OQ|$ следва $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'}$, тоест $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{O'Q'}$ са представители на един и същ вектор. Значи наистина определението на $\lambda.u$ не зависи от избора на точката O. $\square$

Теорема 1 *С така дефинираните операции събиране на вектори и умножение на вектор с число векторите в пространството (а и в равнината, а също и върху права) образуват реално линейно пространство (като нулевият вектор и противоположният вектор са също дефинираните по-горе).*

За да докажем тая теорема трябва да проверим осемте свойства от дефиницията на линейно пространство. При това в свойствата, в които участва умножение с число, се налага да се разглеждат по няколко случая. Така че доказателството става дълго и затова ще го пропуснем. Иначе няма нищо трудно в него. (Дори би било хубаво да се опитате да докажете поне четирите свойства, в които участва само събирането. Техните доказателства са съвсем кратки.)