

~~K~~ #4

Задача 1

+	a	b	c	d
a	a	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

.	a	b	c	d
a	b	c	a	d
b	c	a	b	d
c	a	b	c	d
d	d	d	d	d

$$1) c \cdot c = c(a+b) = ca + cb = a + b = c$$

$$2) ~~b \cdot b~~ = ac = (b+c)c = bc + cc = b + c = a$$

$$3) ab = a(a+c) = aa + ac = b + a = c$$

$$4) ba = (a+c)a = aa + ca = b + a = c$$

$$5) bb = b(a+c) = ba + bc = c + b = a$$

Приведените подпространства ^(и идеали) са $\{a\}$ и $\{a, b, c, d\}$.
 Сега остава да разгледаме простени от 2
 елемента като ~~и~~ нулевия задължително
 участва.

1) $\{d, a\}$

$$d - a = d + a = a \in \{d, a\}$$

$$a - d = a + d = a \in \{a, d\}$$

$$a \cdot d = d \cdot a = d \in \{a, d\}$$

$$a \cdot a = b \notin \{a, d\}$$

$\Rightarrow \{d, a\}$ не е подгрупа

2) $\{d, b\}$

$$b \cdot b = a \notin \{d, b\}$$

$\Rightarrow \{d, b\}$ не е подгрупа

3) $\{d, c\}$

$$d \cdot d = d = d \cdot c = c \cdot d \in \{d, c\}$$

$$c \cdot c = c \in \{d, c\}$$

$$c - d = c + d = c$$

$$d - c = d + c = c \in \{d, c\}$$

$\Rightarrow \{d, c\}$ е подгрупа

$$c \cdot a = a$$

$\Rightarrow \{d, c\}$ не е улеа

Задача 7)

$$r_1 \oplus r_2 = r_1 + r_2 - 5$$

$$r_1 \odot r_2 = 5 + 2(r_1 - 5)(r_2 - 5) = 5 + 2r_1r_2 - 10r_2 - 10r_1 + 50$$

Неробко не гоа, а (\mathbb{R}, \oplus) е адитивна група:

- $r_1 + r_2 - 5 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \oplus$ е затворено в \mathbb{R}

- Нейтрален ел. $e = 5$

$$r_1 \oplus e = r_1 + e - 5 = r_1 + 5 - 5 = r_1$$

- Обрнатен ел. на r_1 е $r_2 = 10 - r_1$

$$\begin{aligned} r_1 \oplus r_2 &= r_1 + r_2 - 5 = r_1 + (10 - r_1) - 5 = 10 - 5 = 5 = e \\ &= r_1 - r_1 + 10 - 5 = 5 = e \end{aligned}$$

- Комутативност:

$$r_1 \oplus r_2 = r_1 + r_2 - 5 = r_2 + r_1 - 5 = r_2 \oplus r_1$$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \oplus)$ е ад. гр.

Задача 8) на групата (\mathbb{R}, \oplus)

Где да разгледаме свойствата на \odot :

- $5 + 2(r_1 - 5)(r_2 - 5) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \odot$ е затворено в \mathbb{R}

- ед. ел. e на \odot $e = \frac{11}{2}$

$$r_1 \odot e = 5 + 2(r_1 - 5)\left(\frac{11}{2} - 5\right) = 5 + 2(r_1 - 5) \cdot \frac{1}{2} = 5 + r_1 - 5 = r_1$$

(*) • ассоциативность

$$(r_1 \oplus r_2) \oplus r_3 = (r_1 + r_2 - 5) \oplus r_3 = r_1 + r_2 - 5 + r_3 - 5 =$$

$$= r_1 + (r_2 + r_3 - 5) - 5 = r_1 \oplus (r_2 \oplus r_3)$$

• обратная ел. к r_1 $e = r_2 = \frac{1}{4(r_1 - 5)}$

$$r_1 \odot r_2 = 5 + 2r_1 r_2 - 10r_1 - 10r_2 = 10r_1 + 25 =$$

$$= 5 + 2r_1 \cdot \left(\frac{1}{4r_1 - 20} + 5 \right) - 10r_1 - 10 \left(\frac{1}{4r_1 - 20} + 5 \right) =$$

$$= 30 + \frac{r_1}{4r_1 - 20} + 5r_1 - 10r_1 - \frac{10}{4r_1 - 20} - 50 + 25 =$$

$$= 5 + \frac{r_1 - 10}{4(r_1 - 5)} - 5r_1$$

• обратная ел. к r_1 : e

$$e = r_1 \oplus r_2$$

$$5 + 2r_1 r_2 - 10r_1 - 10r_2 + 25 = \frac{11}{2} \cdot 2$$

$$60 + 4r_2(r_1 - 5) - 20r_1 = 11$$

$$r_2 = \frac{-49 + 20r_1}{4(r_1 - 5)}$$

• ассоциативность

$$(r_1 \odot r_2) \oplus r_3 = (5 + 2(r_1 - 5)(r_2 - 5)) \oplus r_3 =$$

$$= 5 + 2(5 + 2(r_1 - 5)(r_2 - 5) - 5)(r_3 - 5) =$$

$$= 5 + 4(r_1 - 5)(r_2 - 5)(r_3 - 5) =$$

$$= r_1 \odot (r_2 \odot r_3)$$

• Ассоциативность:

$$= r_1 \odot r_2 = 5 + 2(r_1 - 5)(r_2 - 5) = 5 + 2(r_2 - 5)(r_1 - 5) = r_2 \odot r_1$$

• Дистрибутивность:

$$r_1 \odot (r_2 \oplus r_3) = r_1 \odot (r_2 + r_3 - 5) =$$

$$= 5 + 2(r_1 - 5)(r_2 + r_3 - 5 - 5) =$$

$$= 5 + 2(r_1 - 5)((r_2 - 5) + (r_3 - 5)) =$$

$$= 5 + 2(r_1 - 5)(r_2 - 5) + 2(r_1 - 5)(r_3 - 5)$$

$$= (5 + 2(r_1 - 5)(r_2 - 5)) + (5 + 2(r_1 - 5)(r_3 - 5)) - 5 =$$

$$= (r_1 \odot r_2) \oplus (r_1 \odot r_3)$$

$$\Rightarrow (\mathbb{R}, \oplus, \odot) \text{ — н.г.}$$

3.2.3) R - не коммутативна ; $|R| \geq 2$

$$a, b \in R$$

$$ab = 1$$

$$a) \nexists c \in R : ac \neq 0 \text{ и } ca \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{или } ca = 0, \text{ или } c = 0$$

$$1 \cdot a - a = 0$$

$$\Leftrightarrow (ab)a - a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(ba - 1) = 0$$

отсюда
получим

$$\Leftrightarrow ba - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow ba = 1$$

d) b не делит a

$$b \cdot 1 - b = 0$$

$$\Leftrightarrow b(ab) - b = 0$$

$$\Leftrightarrow (ba - 1)b = 0$$

отсюда
получим

$$\Leftrightarrow ba - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow ba = 1$$