9. Граница на функция. Дефиниции на Коши и Хайне, еквивалентност

Граница на функция — дефиниция на Коши

Дефиниция

Казваме, че $a \in \mathbb{R}$ е <u>точка на сгъстяване</u> на $D \subseteq \mathbb{R}$, ако всяка околност на a съдържа точка от D, различна от a.

Околност на $a \in \mathbb{R}$ наричаме всеки интервал от вида $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Дефиниция (Коши)

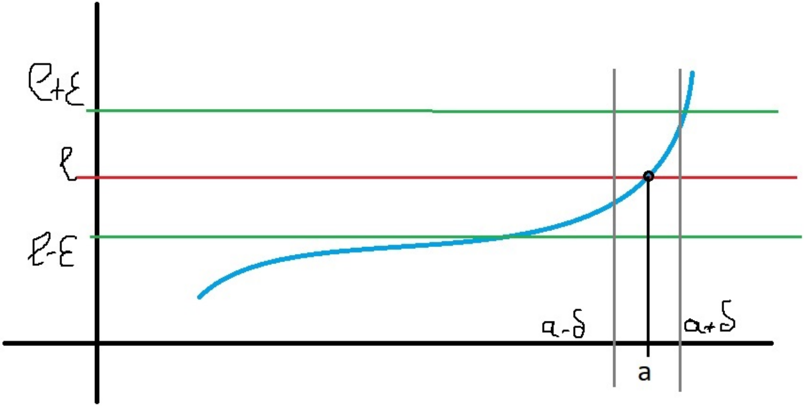
Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на D.
Казваме, че $\ell \in \mathbb{R}$ е <u>граница</u> на $f(x)$ при x, клонящо към a, и пишем $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, ако

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ такова, че } |x - a| < \delta \text{ и } \underline{x \neq a}.$$

Пишем още $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. Казва се още:

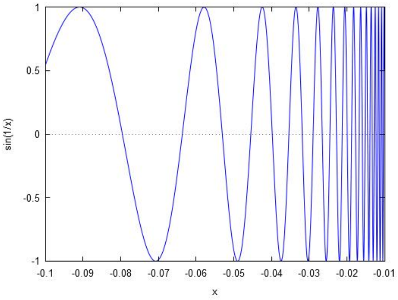
- $f(x)$ клони към ℓ при x, клонящо към a;
- $f(x)$ има граница ℓ в a.

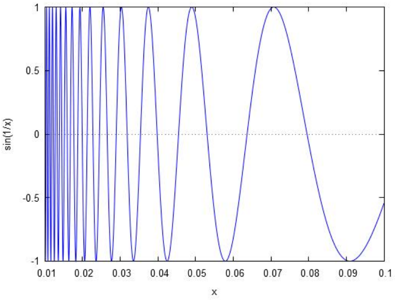
Геометрична интерпретация



Пример на функция без граница в точка

$$\nexists \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \tag{1}$$





Граница на функция — дефиниция на Хайне

Дефиниция (Хайне)

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на D. Казваме, че $\ell \in \mathbb{R}$ е граница на $f(x)$ при x, клонящо към a, ако

$$\forall \{x_n\} : \lim x_n = a,\ x_n \in D,\ x_n \neq a\ \forall n \quad \text{имаме} \quad \lim f(x_n) = \ell.$$

Бележка

$a \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на D

$$\iff \quad \exists \{x_n\} : \lim x_n = a,\ x_n \in D,\ x_n \neq a\ \forall n. \tag{2}$$

Теорема

Дефинициите на Коши и Хайне за граница на функция в точка са еквивалентни.

Доказателство на теоремата: Коши $\Longrightarrow$ Хайне

Нека $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$ според деф. на Коши.
Ще докажем, че

$$\forall \{x_n\} : \lim x_n = a,\ x_n \in D,\ x_n \neq a\ \forall n \quad \text{имаме} \quad \lim f(x_n) = \ell. \tag{3}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано.
Деф. Коши

$$\Longrightarrow \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ такова, че } |x - a| < \delta \text{ и } x \neq a. \tag{4}$$

Нека $\{x_n\}$ е произволна редица такава, че
$\lim x_n = a,\ x_n \in D,\ x_n \neq a \quad \forall n.$
Имаме, че

$$\lim x_n = a \quad \Longrightarrow \quad \exists \nu \in \mathbb{R} : |x_n - a| < \delta \quad \forall n > \nu. \tag{5}$$

Оттук и (4)

$$\Longrightarrow \quad |f(x_n) - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > \nu \quad \Longrightarrow \quad \lim f(x_n) = \ell. \tag{6}$$

Доказателство на теоремата: Хайне $\Longrightarrow$ Коши

Нека $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ според деф. на Хайне.

Това означава, че

$$\forall \{x_n\} : \lim x_n = a, \ x_n \in D, \ x_n \neq a \quad \forall n \quad \text{имаме} \quad \lim f(x_n) = \ell. \tag{7}$$

Ще докажем, че

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in D$ такова, че $|x - a| < \delta$ и $x \neq a$.

Допускаме противното:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \quad \exists \xi \in D : \xi \neq a, \ |\xi - a| < \delta \text{ и } |f(\xi) - \ell| \geq \varepsilon_0$$

$$\overset{\delta = \frac{1}{n}}{\Longrightarrow} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in D : x_n \neq a, \ |x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ и } |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0. \tag{8}$$

Така излезе, че съществува $\{x_n\}$ такава, че

$$\lim x_n = a, \ x_n \in D, \ x_n \neq a \quad \forall n \quad \text{но} \quad \lim f(x_n) \neq \ell. \tag{9}$$

Противоречие.