33. Интегриране на рационални функции

$$\int \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n}\,dx, \quad a_0, b_0 \neq 0,\ a_i, b_j \in \mathbb{R} \tag{1}$$

I. $m \geq n$ — делим:

$$\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = P_{m-n}(x) + \frac{c_0x^p + c_1x^{p-1} + \cdots + c_p}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n},$$

$$p < n, \quad P_{m-n} \text{ е п-м от ст. } m-n \tag{2}$$

Примери:

$$1) \quad \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1};$$

$$2) \quad \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}.$$

II. $m < n$

1. Разлагаме знаменателя на множители

$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = b_0(x-r)^k \cdots (\underbrace{x^2+px+q}_{\text{неразложим}})^\ell \cdots \tag{3}$$

Лема

Нека $m < n$. Тогава $\exists$ реални числа $A_1, \ldots, B_1, \ldots, C_1, \ldots$ такива, че

$$\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n}$$

$$= \frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$$

$+\cdots$ (аналогична група за всеки реален корен на знаменателя)

$$+ \frac{B_1x + C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_\ell x + C_\ell}{(x^2+px+q)^\ell}$$

$+\cdots$ (аналогична група за всеки неразложим кв. тричлен в (3))

Дробите вдясно се наричат елементарни, а самото разлагане — разлагане в сума на елементарни дроби.

Пример 1

$$\frac{3x^2-4x+3}{x^2(x-1)} \overset{\text{Лема}}{=} \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1} \tag{4}$$

Освобождаваме се от знаменателя:

$$3x^2-4x+3 = Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2 \quad \forall\, x \tag{5}$$

За да намерим A, B и C, даваме на x три подходящи стойности:

$$x=0: \quad 3=-B \quad \Longrightarrow \quad B=-3, \tag{6}$$

$$x=1: \quad 2=C \quad \Longrightarrow \quad C=2, \tag{7}$$

$$x=2: \quad 7=2A+B+4C=2A-3+8 \quad \Longrightarrow \quad A=1. \tag{8}$$

Следователно

$$\frac{3x^2-4x+3}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x-1}. \tag{9}$$

Пример 1 — продължение

Следователно

$$\int \frac{3x^2 - 4x + 3}{x^2(x-1)}\,dx = \int \frac{dx}{x} - 3\int \frac{dx}{x^2} + 2\int \frac{dx}{x-1} \tag{10}$$

$$= \ln|x| - 3\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \text{const} + 2\int \frac{d(x-1)}{x-1} \tag{11}$$

$$= \ln|x| + 3\frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + \text{const}. \tag{12}$$

Пример 2

$$\frac{2x^2 - x + 1}{x(x^2 + x + 1)} \overset{\text{Лема}}{=} \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \tag{13}$$

Метод на неопределените коефициенти. Освобождаваме се от знаменателя и правим приведение:

$$2x^2 - x + 1 = A(x^2 + x + 1) + x(Bx + C) \tag{14}$$

$$= (A + B)x^2 + (A + C)x + A \quad \forall x. \tag{15}$$

Следователно

$$\left| \begin{aligned} 2 &= A + B \\ -1 &= A + C \\ 1 &= A \end{aligned} \right. \quad \Longrightarrow \quad A = B = 1, \quad C = -2. \tag{16}$$

Следователно

$$\frac{2x^2 - x + 1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{x} + \frac{x - 2}{x^2 + x + 1}. \tag{17}$$

Пример 2 — продължение

$$\int \frac{2x^2 - x + 1}{x(x^2+x+1)}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x-2}{x^2+x+1}\,dx. \tag{18}$$

$$\int \frac{x-2}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{x-2}{\left[x^2 + 2x\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}\,dx \tag{19}$$

(отделяме точен квадрат в знаменателя)

$$= \int \frac{x-2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx \qquad (t = x + \frac{1}{2}) \tag{20}$$

$$\overset{x=t-\frac{1}{2}}{=} \int \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right) - 2}{t^2+\frac{3}{4}}\,d\left(t - \frac{1}{2}\right) \tag{21}$$

$$= \int \frac{t-\frac{5}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\left(t-\frac{1}{2}\right)'\,dt \tag{22}$$

$$= \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt - \frac{5}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}. \tag{23}$$

Пример 2 — продължение

$$\int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,d\frac{t^2}{2} \tag{24}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2)}{t^2+\frac{3}{4}} \tag{25}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} \tag{26}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \mathrm{const} \tag{27}$$

$$\overset{t=x+\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \mathrm{const}. \tag{28}$$

Пример 2 — продължение

$$\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} \tag{29}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{d\frac{2t}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} \tag{30}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{d\frac{2t}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} \tag{31}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + \mathrm{const} \tag{32}$$

$$\overset{t=x+\frac{1}{2}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathrm{const}. \tag{33}$$