12. Диференциране и интегриране на редици и редове от функции

Ще разгледаме при какви условия:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \tag{1}$$

или, съответно,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{2}$$

както и

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \tag{3}$$

или, съответно,

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx. \tag{4}$$

Интегриране на редици

Теорема 1 (за почленно интегриране на редици)

Нека $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots,$ са непрекъснати. Ако $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ в $[a, b]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{5}$$

Доказателство

Първо, да отбележим, че от Т-ма 1 в Тема 11 следва, че $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и следователно интегруема върху този интервал. Имаме

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx. \tag{6}$$

Щом $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ в $[a, b]$, то каквото и $\varepsilon > 0$ да фиксираме, за него можем да намерим $\nu \in \mathbb{R}$ такова, че при $n > \nu$ да имаме

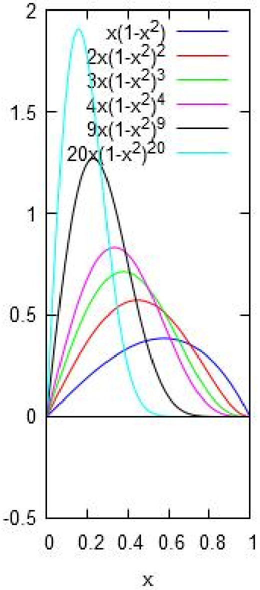
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]. \tag{7}$$

Сега от (6) и (7) следва

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \varepsilon(b - a), \quad n > \nu, \tag{8}$$

което показва, че можем да направим разликата вляво колкото желаем малка за достатъчно големи n.

Пример: $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$



Имаме, че $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $x \in [0,1]$, но

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{n}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n d(x^2) \tag{9}$$

$$= -\frac{n}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2) \tag{10}$$

$$= -\frac{n}{2(n+1)}(1-x^2)^{n+1}\Big|_0^1 \tag{11}$$

$$= -\frac{n}{2(n+1)}[(1-1^2)^{n+1} - (1-0^2)^{n+1}] \tag{12}$$

$$= \frac{n}{2(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Тук $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows} 0$ в $[0,1]$.

Интегриране на редове

Теорема 2 (за почленно интегриране на редове)

Нека $u_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots,$ са непрекъснати. Ако функционалният ред $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в $[a, b]$ и $S(x)$ е неговата сума, то

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx. \tag{14}$$

Д-во: Твърдението следва от Теорема 1, приложена към редицата от частични суми на реда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Диференциране на редици

Теорема 3 (за почленно диференциране на редици)

Нека D е интервал, $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots,$ са диференцируеми и производните им са непрекъснати в D. Нека още функционалната редица $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходящ в D и да означим границата ѝ с $f(x)$. Накрая, нека функционалната редица $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е <u>равномерно</u> сходяща в D. Тогава $f(x)$ е диференцируема в D и

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad x \in D. \tag{15}$$

Доказателство

Да положим $\varphi(x) := \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$, $x \in D$. Нека $a \in D$. Нека $x \in D$ е произволно фиксирано. Тогава интервалът с краища a и x се съдържа в D. От основната т-ма на ДИС, II ч. (ф-лата на Л.-Н., Тема 5) следва

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt. \tag{16}$$

В това равенство извършваме граничен преход $n \to \infty$ и чрез Теорема 1 получаваме

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)\,dt. \tag{17}$$

Тук $x \in D$ бе произволно фиксирано. Следователно (17) е в сила за всяко $x \in D$. От Теорема 1 в Тема 11 следва, че $\varphi(x)$ е непрекъсната в D. Сега от основната т-ма на ДИС, I ч. (т-мата на Л.-Н., Тема 5) следва, че $f(x)$ е диференцируема в интервала D и $f'(x) = \varphi(x)$, $x \in D$.

Диференциране на редове

Теорема 4 (за почленно диференциране на редове)

Нека D е интервал, $u_n : D \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, са диференцируеми и производните им са непрекъснати в D. Нека още функционалният ред $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е сходящ в D и да означим сумата му с $S(x)$. Накрая, нека функционалният ред $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ е равномерно сходящ в D.

Тогава $S(x)$ е диференцируема в D и

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in D. \tag{18}$$

Д-во: Твърдението следва от Теорема 3, приложена към редицата от частични суми на реда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.