Задача 1 *Нека $\mathcal{L} = \langle p, \dot{=} \rangle$ е език на предикатното смятане от първи ред с формално равенство и един двуместен предикатен символ p.*

За подмножество на естествените числа $A \subseteq \mathbb{N}$, с $\mathcal{S}_A = (\mathcal{P}(A), p^{\mathcal{S}_A})$ означаваме структурата за езика $\mathcal{L}$ с носител подмножествата на множеството A и интерпретация на нелогическия симвло p:

$$p^{\mathcal{S}_A}(X, Y) \overset{def}{\iff} \text{ има инекция от } X \text{ в } Y.$$

Да се докаже, че за всяко $A \subseteq \mathbb{N}$, в $\mathcal{S}_A$ са определими:

1. $\{\emptyset\}$.
2. $\{(X, Y) \mid$ *има биекция от* X *в* $Y\}$.
3. $\{(X, Y) \mid$ *има сюрекция от* X *в* $Y\}$.
4. *за всяко естествено число n, е множеството:*

$$F_{A,n} = \{X \subseteq A \mid |A| = n\}.$$

Измежду всички подмножества $A \subseteq \mathbb{N}$, които съдържат елемента 0, да се намерят тези, за които е вярно, че:

1. $\{\{0\}\}$ *е определимо в* $\mathcal{S}_A$.
2. $\{A \setminus \{0\}\}$ *е определимо в* $\mathcal{S}_A$.

Да се намерят онези подмножества $A \subseteq \mathbb{N}$, за които е вярно, че в $\mathcal{S}_A$ е определимо $\{A\}$.

Задача 2 *Разглеждаме езика $\mathcal{L} = \langle f \rangle$ с единствен нелогически символ двуместния предикатен символ f.*

За естествено число $n > 3$, с $\mathcal{G}_n$ означаваме класа от неориентирани графи с точно n върха.

За граф $G = (V, E)$ с $\mathcal{F}(E)$ означаваме фамилията от онези подмножества $F \subseteq E$ от ребра на графа G, за които графът (V, F) е гора, т.е. ацикличен граф.

За всеки граф $G \in \mathcal{G}_n$, $G = (V, E)$, $\mathcal{S}_G = (\mathcal{F}(E), f^{\mathcal{S}_G})$ е структурата за езика L с носител $\mathcal{F}(E)$ и интерпретация на f:

$$f^{\mathcal{S}_G}(A, B) \overset{def}{\iff} A \subseteq B.$$

Да се докаже, че за всеки фиксиран граф $G \in \mathcal{G}_n$, $G = (V, E)$, следните множества са определими в $\mathcal{S}_G$:

1. $\{\emptyset\}$,
2. $\{\{e\} \mid e \in E\}$.

Да се докаже, че има затворени формули $\phi_{forerst}$ и ϕ_{tree} над езика $\mathcal{L}$, за които е вярно следното:

1. *за всеки граф $G \in \mathcal{G}_n$, $\mathcal{S}_G \models \phi_{forest}$ точно когато G е гора.*
2. *за всеки граф $G \in \mathcal{G}_n$, $\mathcal{S}_G \models \phi_{tree}$ точно когато G е дърво.*

В зависимост от броя на ребрата, за кои гори $G \in \mathcal{G}_n$ е вярно, че всяко ребро на G е определимо в $\mathcal{S}_G$? Отговорът да се обоснове.

Задача 3 *С $\mathbb{Q}^+$ бележим множеството от неотрицателните рационални числа, а с $\mathcal{F}$ – множеството от всички (тотални) функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Нека $\mathcal{L}$ е език с нелогически символи триместнети предикатни символи $shift$ и $mult$, а $\mathcal{S} = \langle \mathbb{Q}^+ \cup \mathcal{F}; \{shift^{\mathcal{S}}, mult^{\mathcal{S}}\}\rangle$ е структура за езика $\mathcal{L}$, в която:*

$$shift^{\mathcal{S}}(f,n,g) \stackrel{def}{\longleftrightarrow} f \in \mathcal{F} \,\&\, g \in \mathcal{F} \,\&\, n \in \mathbb{N} \,\&\, \forall k \in \mathbb{N}(f(k+n) = g(k))$$
$$mult^{\mathcal{S}}(f,n,q) \stackrel{def}{\longleftrightarrow} f \in \mathcal{F} \,\&\, n \in \mathbb{N} \,\&\, q \in \mathbb{Q}^+ \,\&\, nf(0) = q.$$

Да се докаже, че следните множества са определими в $\mathcal{S}$ с формули от езика $\mathcal{L}$:

1. $\{0\}$,
2. $Sum = \{(a,b,c) \in \mathbb{N} \mid a+b=c\}$.
3. $LessEq_{\mathbb{N}} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$.
4. $Less_{\mathbb{Q}} = \{(a,b) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ \mid a \leq b\}$.
5. $Mon = \{f \in \mathcal{F} \mid \forall n \in \mathbb{N}(f(n) \leq f(n+1))\}$.

Кои от следните множества са опредилими в $\mathcal{S}$ с формули от езика $\mathcal{L}$ и защо:

1. $ConvQ = \{f \in \mathcal{F} \mid \exists r \in \mathbb{Q}^+(\lim_{n\to\infty} f(n) = r)\}$?
2. $Conv = \{f \in \mathcal{F} \mid \exists r \in \mathbb{R}(\lim_{n\to\infty} f(n) = r)\}$?

Нека Aut е множеството от всички от функции $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$, за които има автоморфизъм h' на структурата $\mathcal{S}$, така че за всяко естествено число n, $h(n) = h'(n)$. Вярно ли е, че Aut е определимо в $\mathcal{S}$ с формула от $\mathcal{L}$? Отговорът да се обоснове.

Забележка: Задачата се усложнява при $\mathbb{Q}$ вместо $\mathbb{Q}^+$. Сложността е свързана с технически особености, свързана с отрицателните рационални числа. Човек трябва да си играе с това определи -1, след това $\mathbb{Q}^-$ и когато извършва сравнения да сменя подходящо знака.

Задача 4 *Нека $\mathbb{P}$ е множеството от точки, а $\mathbb{T}$ – множеството от неизродените затворени равностранни триъгълници в евклидовата равнината.*

Разглеждаме език $\mathcal{L} = (\{z\})$ с единствен нелогически символ – двуместния предикатен символ z и структура $\mathcal{S} = \langle \mathbb{P} \cup \mathbb{T}; z^{\mathcal{S}}\rangle$ за $\mathcal{L}$, където:

$$z^{\mathcal{S}}(p,t) \stackrel{def}{\longleftrightarrow} p \in \mathbb{P} \& t \in \mathbb{T} \& p \in t.$$

Да се докаже, че следните множества са определими в $\mathcal{S}$ с формула от езика $\mathcal{L}$:

1. $Boundary = \{(p,t) \in \mathbb{P} \times \mathbb{T} \mid p$ *лежи на една от страните на* $t\}$.
2. $Vertex = \{(p,t) \in \mathbb{P} \times \mathbb{T} \mid p$ *е връх на* $t\}$.

Кои от следните множества са определими в $\mathcal{S}$ с формула от езика $\mathcal{L}$:

1. $Middle = \{(a,m,b) \in \mathbb{P}^3 \mid m$ *е среда на същинската отсечка* $ab\}$,
2. $Perp = \{(a,b,c) \in \mathbb{P}^3 \mid a \neq b \neq c$ *и* $\angle abc = 90°\}$,
3. $Parallelogram = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{P}^4 \mid abcd$ *е същински успоредник* $\}$,
4. $Square = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{P}^4 \mid abcd$ *е същински квадрат* $\}$,

5. $Circle = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{P}^4 \mid d$ *е център на описаната окръжност около* $\triangle abc\}$?

Отговорите да се обосноват.

Забележка: Интересен вариант на горната задача е следният:

1. $\mathcal{L} = (\{z, sim\})$, където z и sim са двуместни предикатни символи.
2. $\mathcal{S} = \langle \mathbb{P} \cup \mathbb{T}; z^{\mathcal{S}}, sim^{\mathcal{S}} \rangle$, където $\mathbb{T}$ е множеството от неизродените триъгълници в равнината, $\mathbb{P}$ – множеството от точки, а z и sim се интерпретират като:

$$\begin{aligned} z^{\mathcal{S}}(p,t) &\overset{def}{\longleftrightarrow} p \in \mathbb{P} \& t \in \mathbb{T} \& p \in t \\ sim^{\mathcal{S}}(t_1,t_2) &\overset{def}{\longleftrightarrow} t_1, t_2 \in \mathbb{T} \text{ и } t_1 \sim t_2. \end{aligned}$$

Иска се да се отговори на същите въпроси както и в оригиналното условие.

При тази формулировка е добре да се разменят $Middle$ и $Perp$.

Задача 5 *Да се докаже, че множеството от следните пет формули е изпълнимо:*

$$\begin{aligned} \phi_1 &: \forall x(p(x,x) \& \neg r(x,x)) \\ \phi_2 &: \forall x \forall y \forall z((p(x,y) \& p(y,z) \Rightarrow p(x,z)) \& (r(x,y) \& r(y,z) \Rightarrow r(x,z))) \\ \phi_3 &: \forall x \forall y((p(x,y) \Rightarrow p(y,x)) \& (\neg p(x,y) \Rightarrow r(x,y) \vee r(y,x))) \\ \phi_4 &: \forall x(r(x,f(x)) \& \neg \exists y(r(x,y) \& r(y,f(x)))) \\ \phi_5 &: \forall x(\exists y(p(x,y) \& \neg \exists z(f(z) \doteq y)) \& \exists y(p(x,y) \& \exists z(f(z) \doteq y))). \end{aligned}$$

Задача 6 *Да се докаже, че множеството от следните пет формули е изпълнимо:*

$$\begin{aligned} \phi_1 &: \forall x(\neg p(x,x) \& p(x,f(x)) \& \neg \exists y(p(x,y) \& p(y,f(x)))) \\ \phi_2 &: \forall x \forall y \forall z(p(x,y) \& p(y,z) \Rightarrow p(x,z))) \\ \phi_3 &: \forall x \forall y(p(y,f(x)) \iff \exists z(r(x,z) \& f(z) \doteq y)) \\ \phi_4 &: \forall x \forall y \forall z(r(x,z) \& r(x,y) \& f(y) = f(z) \Rightarrow y \doteq z) \\ \phi_5 &: \forall x \exists y(r(y,x)). \end{aligned}$$

Задача 7 *Да се докаже, че множеството от следните пет формули е изпълнимо:*

$$\begin{aligned} \phi_1 &: \forall x(\neg p(x,x) \& p(x,f(x)) \& \neg \exists y(p(x,y) \& p(y,f(x)))) \\ \phi_2 &: \forall x \forall y \forall z(p(x,y) \& p(y,z) \Rightarrow p(x,z))) \\ \phi_3 &: \forall x \forall y(p(y,f(x)) \iff \exists z(r(x,z) \& f(z) \doteq y)) \\ \phi_4 &: \forall x \forall y \forall z(r(x,z) \& r(x,y) \& f(y) = f(z) \Rightarrow y \doteq z) \\ \phi_5 &: \forall x \exists y(r(y,x)). \end{aligned}$$

Задача 8 *Да се докаже, че множеството от следните пет формули е изпълнимо:*

$$\begin{aligned} \phi_1 &: \forall x(\neg p(x,x)) \& \exists y(p(x,y)) \\ \phi_2 &: \forall x \forall y \forall z(p(x,y) \& p(y,z) \Rightarrow p(x,z))) \& \forall x \exists y(p(f(x),f(y))) \\ \phi_3 &: \forall x \forall y(p(f(y),f(x)) \iff \exists z(r(x,z) \& f(z) \doteq f(y))) \\ \phi_4 &: \forall x \forall y \forall z(r(x,z) \& r(x,y) \& f(y) \doteq f(z) \Rightarrow y \doteq z) \\ \phi_5 &: \forall x \exists y(r(y,x)) \& \forall x \forall y \forall z(r(y,x) \& r(z,x) \Rightarrow y \doteq z) \end{aligned}$$

Упътване 0.1 *Ясно е, че първите две формули са изпълнени точно в такива структури, в които интерпретацията на p е строга частична наредба, в която всеки елемент се мажорира и интерпретацията на $f(x)$ се мажорира от интерпретацията на $f(y)$ за някое y.*

Също така последната формула, ϕ_5, казва, че интерпретацията на r е релация, чиято обратна е графика на тотална функция. Да означим интерпретацията на r с $r^{\mathcal{S}}$, а с ρ функцията $\rho = [r^{\mathcal{S}}]^{-1}$.

Накрая ϕ_4 изразява, че $\rho(a) = \rho(b)$ и $f^{\mathcal{S}}(a) = f^{\mathcal{S}}(b)$ влекат, че $a = b$, тоест двойката $(\rho(a), f^{\mathcal{S}}(a))$ кодира еднозначно елемента a.

След тези наблюдения, да разгледаме структурата $\mathcal{S} = \langle S, \succ, F, R\rangle$, където:

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{s : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}(s(n) > s(n+1))\} \\ \succ & = & \{(s', s'') \in S \times S \,|\, s'(0) > s''(0)\} \\ F(s)(n) & = & s(0) - n, \text{ за всяко } s \in S \text{ и } n \in \mathbb{N} \\ R & = & \{(s', s'') \in S \times S \,|\, \forall n \in \mathbb{N}(s'(n) = s''(n+1))\}. \end{array}$$

Да обърнем внимание, че функцията $s(n) = -n$ за $n \in \mathbb{N}$ има свойството, че $s(n) > s(n+1)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $s(n) \in \mathbb{Z}$. Следователно $s \in S$, тоест $S \neq \emptyset$. Полагаме $p^{\mathcal{S}} = \succ$, $f^{\mathcal{S}} = F$, $r^{\mathcal{S}} = R$, при което получаваме структура за дадения език. Трябва да отбележим, че $F(s)(n) = s(0) - n > s(0) - (n+1) = F(s)(n+1) \in \mathbb{Z}$, което показва, че F е функция от S в S.

Ясно е, че $\succ$ е строга частична наредба, защото е първообраз на строгата частична наредба $(\mathbb{Z}, >)$ при стандартната проекция $\pi : S \to \mathbb{Z}$, $\pi(s) = s(0)$.

Нататък, ако $s \in S$, редицата $s' = s(.+1)$ принадлежи на S, защото по дефиниция s е монотонна и оттук и s' е монотонна. По същата причина $s'(0) = s(1) < s(0)$, откъдето $s \succ s'$. Накрая, от това, че $F(s)(0) = s(0) > s'(0) = F(s')(0)$, получаваме, че $F(s) \succ F(s')$. Дотук показахме, че:

1. *$\succ$ е строга частична наредба и всеки елемент се мажорира, което означава, че $\mathcal{S}$ моделира ϕ_1 и първият конюнкт на ϕ_2.*
2. *За всеки елемент $s \in S$, има елемент s', за който $F(s) \succ F(s')$, тоест и вторият конюнкт на ϕ_2 е изпълнен в $\mathcal{S}$.*

Така имаме, че:

$$\mathcal{S} \models \{\phi_1, \phi_2\}.$$

Нататък, за всяко $s'' \in S$, редицата s', за която $s'(n) = s''(n+1)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ се определя еднозначно и очевидно е монотонна. Следователно R^{-1} е тотална функция. Оттук нататък ще бележим тази функция с ρ. Тоест полагаме:

$$\rho = R^{-1}.$$

Като отчетем бележките в началото, с това показахме, че и:

$$\mathcal{S} \models \{\phi_5\}.$$

Да разгледаме $\phi_4^{\mathcal{S}}$. От бележките в началото, тази формула е истина точно когато от редиците $(F(s), \rho(s))$ еднозначно може да възстановим s. Но по дефиницията на F, $s(0) = F(s)(0)$, а по дефиницията на ρ знаем, че:

$$s(n+1) = \rho(s)(n).$$

Следователно редицата s се определя еднозначно от $(F(s), \rho(s))$ като:

$$s(n) = \begin{cases} F(s)(0), & \text{ако } n = 0 \\ \rho(s)(n-1), & \text{ако } n > 0. \end{cases}$$

С това проверихме, че и $\mathcal{S} \models \phi_4$. Следователно:

$$\mathcal{S} \models \{\phi_1, \phi_2, \phi_4, \phi_5\}.$$

Остава да докажем, че $\phi_3^{\mathcal{S}}$ е истина. Ясно е, че това е еквивалентно на това да докажем следните две твърдения:

1. *ако $F(s') \succ F(s'')$ за някои две редици от S, то има редица $s \in S$, за която $F(s) = F(s')$ и $\rho(s) = s''$.*

2. *ако $F(s) = F(s')$ и $\rho(s) = s''$, то $F(s') \succ F(s'')$ за всеки три редици $s, s', s'' \in S$.*

Да започнем с второто твърдение. Тъй като $\rho(s) = s''$, то $s''(0) = s(1)$. Тъй като $F(s) = F(s')$, то $s(0) = F(s)(0) = F(s')(0) = s'(0)$. Но $s \in S$, откъдето $s(0) > s(1) = s''(0)$. Следователно $F(s')(0) = s'(0) = s(0) > s''(0) = F(s'')(0)$, тоест $F(s')(0) > F(s'')(0)$ и по дефиниция това означава, че $F(s') \succ F(s'')$. С това доказахме второто твърдение.

Сега да проверим верността и на първото. Нека $F(s') \succ F(s'')$. Тогава $s'(0) = F(s')(0) > F(s'')(0) = s''(0)$. Нека s е редицата:

$$s(n) = \begin{cases} s'(0), & \text{ако } n = 0 \\ s''(n-1), & \text{ако } n > 0. \end{cases}$$

Тъй като $s(0) = s'(0) > s''(0) = s(1)$, то $s \in S$. Тогава по дефиниция имаме, че $\rho(s)(n) = s(n+1) = s''(n)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, откъдето $\rho(s) = s''$. От друга страна, отново по дефиниция имаме, че:

$$F(s)(n) = s(0) - n = s'(0) - n = F(s')(n) \text{ за всяко } n \in \mathbb{N}.$$

С това установихме, че и $F(s) = F(s')$. С това доказахме и първото твърдение, откъдето следва, че:

$$\mathcal{S} \models \phi_3$$

и предвид това, че $\mathcal{S}$ моделира $\{\phi_1, \phi_2, \phi_4, \phi_5\}$ получаваме, че $\mathcal{S}$ е модел за $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}$, тоест наистина последното множество от пет формули е изпълнимо.