Лекция 5: Интерполационна задача на Ермит

Гено Николов, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски"

Съдържание на лекцията

- Интерполационна задача на Ермит
- Частен случай: всички възли с кратност 2
- Представяне на остатъка

Интерполационна задача на Ермит

Досега се занимавахме с интерполационната задача на Лагранж, която се състоеше в построяването на алгебричен полином от степен $\leq n$, който в $n+1$ дадени различни точки $x_0, \ldots, x_n$ приема дадени стойности $y_0, \ldots, y_n$, съответно. Сега ще разгледаме една по-обща задача, при която се търси полином, който интерполира не само функцията, но и нейни производни. Да представим точната ѝ формулировка.
Нека $x_0, \ldots, x_n$ са дадени $n+1$ различни точки от реалната права. Нека $\nu_0, \ldots, \nu_n$ са цели положителни числа и

$$\{y_{k\lambda},\ k = 0, \ldots, n,\ \lambda = 0, \ldots, \nu_k - 1\}$$

е таблица от произволни реални стойности. Означаваме $N := \nu_0 + \cdots + \nu_n - 1$. Задачата е да се построи алгебричен полином P от степен N, който удовлетворява условията

$$P^{(\lambda)}(x_k) = y_{k\lambda}, \quad k = 0, \ldots, n, \quad \lambda = 0, \ldots, \nu_k - 1. \tag{1}$$

Тя е известна като интерполационна задача на Ермит.

Съществуване и единственост на решението

Теорема 1

При всеки избор на интерполационните възли $\{x_k\}_0^n$ ($x_i \neq x_j$ при $i \neq j$) и при всяка таблица от стойности $\{y_{k\lambda}\}$ интерполационната задача на Ермит (1) има единствено решение.

Доказателство. Условията (1) представляват една система от $N+1$ линейни уравнения с неизвестни – коефициентите $a_0, \ldots, a_N$ на полинома $P(x)$. Тази система ще има единствено решение, ако нейната детерминанта D е различна от нула. Да допуснем, че $D = 0$. Тогава хомогенната система

$$P^{(\lambda)}(x_k) = 0, \quad k = 0, \ldots, n, \; \lambda = 0, \ldots, \nu_k - 1,$$

има ненулево решение $P(x) = a_0 x^N + \cdots + a_{N-1} x + a_N$, (т.е. с поне един коефициент a_i различен от нула).

Частен случай: всички възли с кратност 2

Но горните условия означават, че P има $N+1$ нули, броейки кратностите им. От друга страна, $P \in \pi_N$. Следователно $P(x) \equiv 0$ и оттук $a_0 = \cdots = a_N = 0$. Стигнахме до противоречие. Теоремата е доказана. □

Остава да разгледаме важния за нас въпрос за построяване на решението. Ще започнем с един частен случай, при който $\nu_0 = \nu_1 = \cdots = \nu_n = 2$. Ще намерим в явен вид полинома от степен $2n+1$, който интерполира дадена функция f и нейната първа производна в $n+1$ точки $x_0 < \cdots < x_n$. За целта ще използваме означенията

$$\omega(x) := (x - x_0) \ldots (x - x_n), \quad \omega_k(x) := \frac{\omega(x)}{x - x_k}.$$

Да припомним още, че

$$\omega'(x_k) = \omega_k(x_k) = (x_k - x_0) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n).$$

Теорема

Теорема 2

Нека $x_0, \ldots, x_n$ са произволни различни точки от реалната права. Тогава, при всеки избор на числата $y_0, \ldots, y_n$ и $y'_0 \ldots, y'_n$, полиномът

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{n} y_k \left\{ 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k) \right\} \left[\frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} \right]^2 \\ &+ \sum_{k=0}^{n} y'_k \left\{ \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} \right\}^2 (x - x_k) \end{aligned}$$

е от степен най-много $2n + 1$ и удовлетворява условията

$$P(x_k) = y_k, \quad P'(x_k) = y'_k, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{2}$$

Доказателство на Теорема 2

Съгласно Теорема 1, съществува единствен полином P от π_{2n+1}, който удовлетворява интерполационните условия (2). Ние ще търсим този полином във вида

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \Phi_{k0}(x) + \sum_{k=0}^{n} y'_k \Phi_{k1}(x),$$

където при всяко $k \in \{0, \ldots, n\}$ базисните полиноми $\Phi_{k0}, \Phi_{k1} \in \pi_{2n+1}$ се определят от условието

$$\begin{cases} \Phi_{k0}(x_i) = \delta_{ki}, & \Phi'_{k0}(x_i) = 0, \\ \\ \Phi_{k1}(x_i) = 0, & \Phi'_{k1}(x_i) = \delta_{ki} \end{cases} \tag{3}$$

за $i = 0, \ldots, n$. Тук сме използвали символа на Кронекер δ_{ki},

$$\delta_{ki} := \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq i \\ 1 & \text{при} \quad k = i. \end{cases}$$

Доказателство на Теорема 2 (продължение)

Очевидно условията (3) влекат веднага (2). Това се установява с директна проверка. Сега да построим полиномите Φ_{k0} и Φ_{k1}. Ще започнем с Φ_{k0}. От (3) се вижда, че $\Phi_{k0}(x)$ има двукратна нула в x_i за всяко $i \neq k$. Следователно $\Phi_{k0}(x)$ е от вида

$$\Phi_{k0}(x) = \omega_k^2(x)[A + B(x - x_k)],$$

където константите A и B са избрани така, че да удовлетворяват условията

$$\Phi_{k0}(x_k) = 1, \quad \Phi'_{k0}(x_k) = 0.$$

От първото условие

$$\Phi_{k0}(x_k) = \omega_k^2(x_k)A = 1$$

определяме A,

$$A = \frac{1}{\omega_k^2(x_k)} = \frac{1}{[\omega'(x_k)]^2}.$$

Доказателство на Теорема 2 (продължение)

Заместваме получената стойност за A във второто условие

$$\Phi'_{k0}(x_k) = 2\omega_k(x_k)\omega'_k(x_k)A + \omega_k^2(x_k)B = 0$$

и определяме B,

$$B = -2\frac{\omega'_k(x_k)}{\omega_k^3(x_k)}.$$

Остава да забележим, че $2\omega'_k(x_k) = \omega''(x_k)$. Наистина, като диференцираме два пъти тъждеството

$$\omega_k(x)(x - x_k) = \omega(x)$$

получаваме

$$\omega''_k(x)(x - x_k) + 2\omega'_k(x) = \omega''(x),$$

и при $x = x_k$ следва исканото равенство. Следователно

$$\Phi_{k0}(x) \quad = \quad \omega_k^2(x)\left[\frac{1}{\omega_k^2(x_k)} - \frac{\omega''(x_k)}{\omega_k^3(x_k)}(x - x_k)\right]$$

Доказателство на Теорема 2 (продължение)

От условията (3) можем да намерим лесно явния вид на $\Phi_{k1}(x)$. Тъй като x_i е двукратна нула на $\Phi_{k1}(x)$ при $i \neq k$ и x_k е проста нула, то

$$\Phi_{k1}(x) = C\omega_k^2(x)(x - x_k).$$

Константата C определяме от условието $\Phi'_{k1}(x_k) = 1$. Получаваме

$$C\omega_k^2(x_k) = 1.$$

Оттук $C = 1/\omega_k^2(x_k) = 1/[\omega'(x_k)]^2$ и следователно

$$\Phi_{k1}(x) = \left[\frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}\right]^2 (x - x_k).$$

Теоремата е доказана. $\square$

Представяне на базисните полиноми

Забележка

Да си припомним, че базисните полиноми на Лагранж за интерполиране във възлите $x_0, x_1, \ldots, x_n$ се представят с формулата

$$\ell_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

От тук получаваме следното алтернативно представяне на базисните полиноми $\Phi_{k0}(x)$ и $\Phi_{k1}(x)$:

$$\begin{aligned}
\Phi_{k0}(x) &= \ell_k^2(x)\left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right], \\
\Phi_{k1}(x) &= \ell_k^2(x)\,(x - x_k).
\end{aligned}$$

Формула за интерполационния полином

Обикновено числата $\{y_k\}$ и $\{y_k'\}$ са стойности на някаква функция $f(x)$ и нейната производна $f'(x)$ в точките $\{x_k\}_{k=0}^n$. Тогава интерполационният полином P се нарича интерполационнен полином на Ермит за функцията f.

Съгласно казаното по-горе, този полином се записва така:

$$
\begin{aligned}
P(f;x) \quad = \quad & \sum_{k=0}^{n} \ell_k^2(x) \left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right] f(x_k) \\
& + \sum_{k=0}^{n} f'(x_k) \ell_k^2(x)(x - x_k)\, f'(x_k).
\end{aligned}
$$

$\nu_0, \ldots, \nu_n$ се наричат кратности на възлите $x_0, \ldots, x_n$. Тук решихме задачата на Ермит в частния случай

$$\nu_0 = \nu_1 = \cdots = \nu_n = 2.$$

Представяне на остатъка

Съществува явен вид на решението и при произволни кратности $\{\nu_k\}_{k=0}^n$. Няма да го разглеждаме, тъй като в следващата лекция ще дадем по-прост метод за построяване на интерполационния полином на Ермит.

При дадени възли $\{x_k\}_{k=0}^n$ и кратности $\{\nu_k\}_{k=0}^n$ да означим

$$\Omega(x) := (x - x_0)^{\nu_0}(x - x_1)^{\nu_1} \cdots (x - x_n)^{\nu_n} .$$

Нека $N + 1 := \nu_0 + \cdots + \nu_n$. Интерполационният полином на Ермит $H_N(f; x) \in \pi_N$, който удовлетворява условията (1) при $y_{k\lambda} = f^{(\lambda)}(x_k)$ за $k = 0, \dots, n$ и $\lambda = 0, \dots, \nu_k - 1$, служи за приближение на функцията $f(x)$. Ще дадем оценка на грешката, която правим при приближението $f(x) \approx H_N(f; x)$.

Представяне на остатъка

Теорема 3

Нека $a \le x_0 < \cdots < x_n \le b$, $\{\nu_k\}_0^n$ са произволни цели положителни числа, такива че $\nu_0 + \cdots + \nu_n = N+1$, и функцията f има непрекъсната $(N+1)$-ва производна в $[a,b]$,. Тогава за всяко $x \in [a,b]$ съществува число $\xi \in (\min\{x, x_0, \ldots x_n\},\ \max\{x, x_0, \ldots x_n\})$ такова, че

$$f(x) - H_N(f;x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\Omega(x)\,. \tag{4}$$

Доказателство. Равенството (4) се доказва по същия начин, както доказахме съответната теорема за грешката при интерполиране по Лагранж. Очевидно (4) е изпълнено когато x съвпада с някой от възлите x_i. Затова нека предположим, че x е фиксирана точка от $[a,b]$ несъвпадаща с никой интерполационен възел.

Доказателство на Теорема 3

Образуваме си помощната функция

$$F(z) = f(z) - H_N(f;z) - C\,\Omega(z)$$

и избираме константата C така, че $F(z)$ да се анулира при $z = x$. Тогава $F(z)$ ще има $N+2$ нули: $x_0, \ldots, x_n$, с кратности съответно $\nu_0, \ldots, \nu_n$ и точката x. По теоремата на Рол, $F^{(N+1)}(z)$ ще има поне една нула, която се намира между най-малката и най-голямата нула на $F(z)$.
Означаваме я с ξ. Тогава като изразим C от равенството $F^{(N+1)}(\xi) = 0$ и от условието $F(x) = 0$, получаваме (4).
Теоремата е доказана. $\square$
Представянето на остатъка в интерполационната формула на Ермит от Теорема 3 ни позволява да оценяваме грешката, която допускаме, заествайки функцията $f(x)$ с $H_n(f;x)$.

Оценка на грешката

Следствие

Нека са изпълнени предположенията в Теорема 3, и нека

$$|f^{(N+1)}(x)| \leq M \qquad \text{за всяко} \quad x \in [a, b]\,.$$

Тогава за всяко $x \in [a, b]$ е изпълнено неравенството

$$|f(x) - H_n(f; x)| \leq \frac{M}{(N+1)!}\,|\Omega(x)|\,.$$

Край на лекцията !