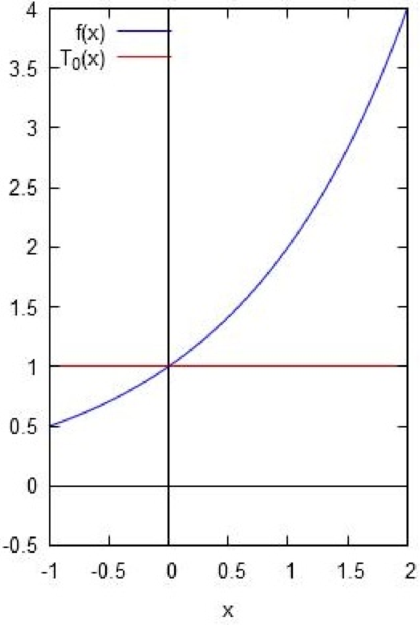
30. Формула на Тейлър

Мотивация: приближено пресмятане на стойности на функции



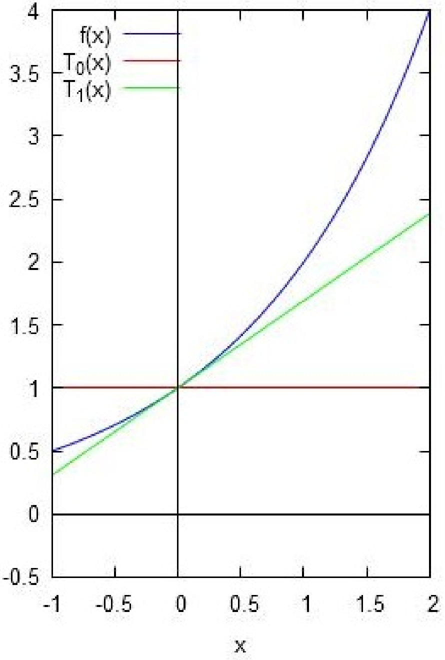
$f(x) := 2^x$ в близост до т. $x = 0$

Непрекъснатост $\Longrightarrow$
$f(x) \approx f(0) = 1$ за $x \approx 0$.

Полагаме $T_0(x) := f(0)$.
Полагаме $R_0(x) := f(x) - T_0(x)$ — грешката при приближаването на $f(x)$ с $T_0(x)$. Получаваме

$$\lim_{x \to 0} R_0(x) = 0.$$

Още се използва означението $R_0(x) = o(1)$ (при $x \to 0$).
Така имаме $f(x) = T_0(x) + o(1)$ (при $x \to 0$).



Диференцируемост (има допирателна в т. $x = 0$, която не е вертикална)

$$\Longrightarrow \quad f(x) \approx f'(0)x + f(0) \qquad (1)$$
$$= (\ln 2)x + 1, \quad x \approx 0$$

Полагаме $T_1(x) := f'(0)x + f(0)$.
Полагаме $R_1(x) := f(x) - T_1(x)$ — грешката при приближаването на $f(x)$ с $T_1(x)$. Имаме

$$\lim_{x \to 0} R_1(x) = 0. \qquad (2)$$

$T_1(x)$ дава по-добро приближение от $T_0(x)$. Имаме не само (2), но дори

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0. \tag{3}$$

Действително

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - T_1(x)}{x} &= \frac{f(x) - [f'(0)x + f(0)]}{x} \\ &= \underbrace{\frac{f(x) - f(0)}{x}}_{x \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0)} - f'(0) \xrightarrow[x\to 0]{} 0. \end{aligned}$$

Когато е изпълнено (3), пишем още $R_1(x) = o(x)$ (при $x \to 0$).

Така имаме $f(x) = T_1(x) + o(x)$ (при $x \to 0$).

$T_0(x)$ е полином от ст. 0, а $T_1(x)$ е полином от ст. 1; да се опитаме да построим по-добро приближение с полином от ст. 2.
Търсим $T_2(x) := ax^2 + bx + c$ такъв, че

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_2(x)}{x^2} = 0. \tag{4}$$

$$(4) \implies \lim_{x\to 0}[f(x) - T_2(x)] = 0 \implies c = f(0). \tag{5}$$

Още

$$(4) \implies \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_2(x)}{x} = 0 \tag{6}$$

т.е. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - (ax^2 + bx + c)}{x} = 0 \implies \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - (bx + f(0))}{x} = 0$

т.е. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} - b \right) = 0 \implies b = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0). \quad (7)$

Остана да намерим $a \in \mathbb{R}$ такова, че

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - [ax^2 + f'(0)x + f(0)]}{x^2} = 0$$

$$\text{т.е.} \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x) - [f'(0)x + f(0)]}{x^2} - a \right) = 0 \tag{8}$$

$$\iff \quad a = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - [f'(0)x + f(0)]}{x^2}.$$

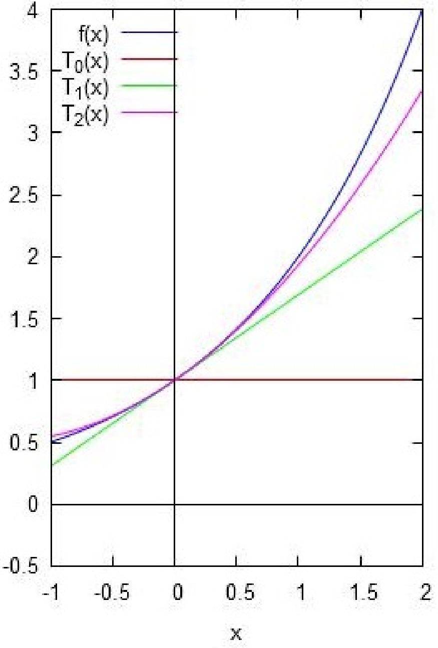
За да намерим тази граница, прилагаме правилото на Лопитал. Разгл.

$$\frac{[f(x) - (f'(0)x + f(0))]'}{(x^2)'} = \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{f''(0)}{2}. \tag{9}$$

Така установихме, че $T_2(x) = \frac{f''(0)}{2} x^2 + f'(0)x + f(0)$, а за грешката $R_2(x) := f(x) - T_2(x)$ имаме

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0, \tag{10}$$

което още се записва във вида $f(x) = T_2(x) + o(x^2)$ (при $x \to 0$).



$$T_0(x) := f(0),$$
$$T_1(x) := f'(0)x + f(0),$$
$$T_2(x) := \frac{f''(0)}{2}x^2 + f'(0)x + f(0).$$

Формула на Тейлър с остатъчен член във формата на Пеано

Теорема 1

Нека $f(x)$ притежава производна от ред n в т. x_0. Тогава

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (\text{при } x \to x_0). \tag{11}$$

Това означава, че ако положим

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad \text{и} \quad R_n(x) := f(x) - T_n(x) \tag{12}$$

то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{13}$$

$T_n(x)$ се нарича <u>полином на Тейлър</u> от степен n за $f(x)$ в т. x_0, а $R_n(x)$ се нарича <u>остатъчен член</u> във ф-лата на Тейлър.

Теорема 1 <u>не</u> влиза в материала за изпита.

Формула на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж

Теорема 2 (формула на Тейлър)

Нека $f(x)$ притежава производни до ред $n+1$ включително в $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, където $\delta > 0$. Тогава за всяко $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ съществува c между x_0 и x такова, че

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{14}$$

Разписана ф-лата има вида

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{15}$$

Доказателство на Т-ма 2

Лема 1

Нека $f(x)$ притежава производна от ред n в т. x_0. Тогава

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \tag{16}$$

притежава свойството $(T_n)^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \quad i = 0, 1, \dots n.$

Д-во: Имаме

$$(T_n)^{(i)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(i)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \left((x - x_0)^k \right)^{(i)} \tag{17}$$

$$= \sum_{k=i}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k(k-1)\cdots(k-(i-1))(x - x_0)^{k-i}. \tag{18}$$

Следователно $(T_n)^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$.

Лема 2

Нека $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ притежават производни до ред $n+1$ включително в $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, където $\delta > 0$. Нека още

$$\varphi^{(i)}(x_0) = \psi^{(i)}(x_0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{19}$$

а $\psi^{(i)}(x) \neq 0$ за $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x \neq x_0$, и $i = 0, 1, \ldots, n+1$. Тогава за всяко $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x \neq x_0$, съществува c между x_0 и x такова, че $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \dfrac{\varphi^{(n+1)}(c)}{\psi^{(n+1)}(c)}$.

Бележка

Може да се докаже, че ако $\psi^{(i)}(x_0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n$ и $\psi^{(n+1)}(x) \neq 0$ за $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x \neq x_0$, то и $\psi^{(i)}(x) \neq 0$ за $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x \neq x_0$, и $i = 0, 1, \ldots, n$. Това става чрез т-мата на Рол, както в Бележка 1 след Т-ма 2 (обобщената т-ма за крайните нараствания) в Тема 25.

Нека $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, е произволно фиксирано. Прилагаме обобщената формула за крайните нараствания (об.ф.кр.н.) към φ и ψ в интервала с краища x_0 и x. Получаваме, че съществува c_1, между x_0 и x такова, че

$$\underbrace{\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)}}_{=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}} \overset{\text{об.ф.кр.н.}}{=} \frac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)} = \frac{\varphi'(c_1) - \varphi'(x_0)}{\psi'(c_1) - \psi'(x_0)}. \tag{20}$$

След това аналогично прилагаме об.ф.кр.н. към φ' и ψ' в интервала с краища x_0 и c_1. Получаваме, че съществува c_2, между x_0 и c_1 (оттук между x_0 и x) такова, че

$$\frac{\varphi'(c_1)-\varphi'(x_0)}{\psi'(c_1)-\psi'(x_0)} \overset{\text{об.ф.кр.н.}}{=} \frac{\varphi''(c_2)}{\psi''(c_2)} = \frac{\varphi''(c_2)-\varphi''(x_0)}{\psi''(c_2)-\psi''(x_0)}. \tag{21}$$

Продължавайки така, получаваме, че съществуват т. $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ между x_0 и x такива, че

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)} \tag{22}$$

$$= \frac{\varphi'(c_1)-\varphi'(x_0)}{\psi'(c_1)-\psi'(x_0)} = \frac{\varphi''(c_2)}{\psi''(c_2)} \tag{23}$$

$$= \frac{\varphi''(c_2)-\varphi''(x_0)}{\psi''(c_2)-\psi''(x_0)} = \frac{\varphi'''(c_3)}{\psi'''(c_3)} \tag{24}$$

$$\ldots \tag{25}$$

$$= \frac{\varphi^{(n)}(c_n)-\varphi^{(n)}(x_0)}{\psi^{(n)}(c_n)-\psi^{(n)}(x_0)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(c_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(c_{n+1})}. \tag{26}$$

Взимаме $c = c_{n+1}$.

Завършване на д-вото на Т-ма 2

Твърдението на Т-ма 2 е тривиално за $x = x_0$ — то се свежда до $f(x_0) = f(x_0)$.

Нека $x \neq x_0$. Прилагаме Лема 2 с $\varphi(x) := f(x) - T_n(x)$ и $\psi(x) := (x - x_0)^{n+1}$. Ф-цията $\varphi(x)$ удовлетворява предположенията в Лема 2 благодарение на Лема 1, а относно $\psi(x)$ имаме $\psi^{(i)}(x) = (n+1)n \cdots (n-i+2)(x-x_0)^{n-i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$. Лема 2 влече, че съществува c между x_0 и x такава, че

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{\psi^{(n+1)}(c)}; \tag{27}$$

следователно

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{\psi^{(n+1)}(c)}\,\psi(x); \tag{28}$$

следователно

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}, \tag{29}$$

откъдето се получава и формулата в т-мата.