

31. Пресмятане на определен интеграл на функция на две променливи върху криволинееен трапец

Криволинеен трапец

Нека $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ са непрекъснати и $\varphi(x) \leq \psi(x)$, $x \in [a, b]$.

Множеството

$$T := \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \quad (1)$$

се нарича криволинеен трапец.

От самата дефиниция на пеано-жорданова мярка следва, че ако $f(x)$ е неотрицателна, интегрируема функция, дефинирана върху $[a, b]$, и положим

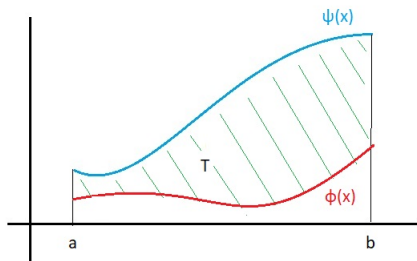
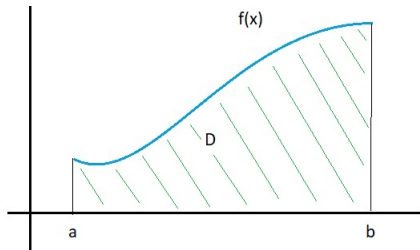
$$D := \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \quad (2)$$

то D е измеримо и

$$\mu(D) = \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$

Следователно

$$\mu(T) = \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)] dx. \quad (4)$$



Теорема

Нека T е криволинеен трапец, дефиниран чрез (1) и $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава

$$\iint_T f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx. \quad (5)$$

Бележка: Левият интеграл съществува, защото T е измеримо и $f(x, y)$ е непрекъсната. Дясната страна е също добре дефинирана, защото, както може да се докаже, функцията

$$I(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \quad (6)$$

е дефинирана и непрекъсната в $[a, b]$ и следователно интегрируема.

Схема на д-вото

Ще скицираме доказателството на формулата от теоремата.

Нека $\eta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ е разбиване на $[a, b]$,

$$\lambda_k(x) := \varphi(x) + \frac{k}{n}[\psi(x) - \varphi(x)], \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (7)$$

$$T_{i,k} := \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, \lambda_{k-1}(x) \leq y \leq \lambda_k(x)\}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогава $\tau := \{T_{i,k}\}_{i,k=1}^n$ е измеримо разбиване на T .

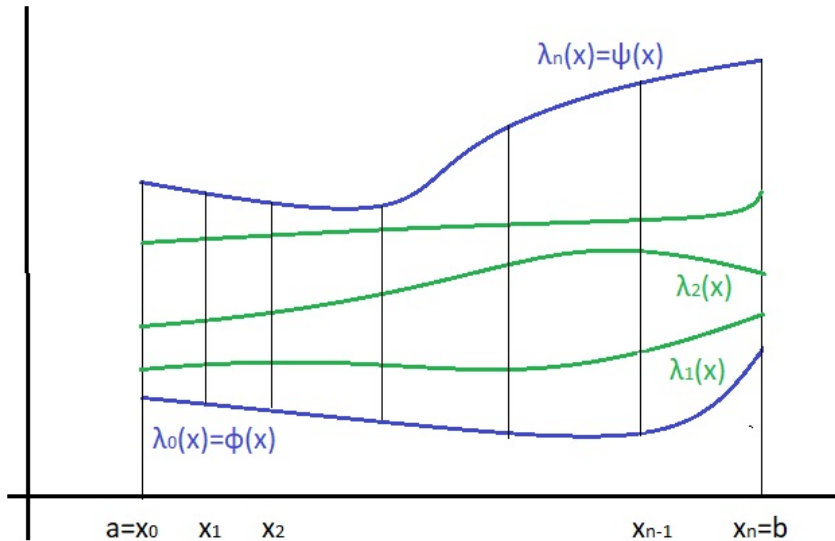
Накрая нека

$$S_\tau := \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n M_{i,k} \mu(T_{i,k}), \quad M_{i,k} := \sup_{(x,y) \in T_{i,k}} f(x, y), \quad (8)$$

$$s_\tau := \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{i,k} \mu(T_{i,k}), \quad m_{i,k} := \inf_{(x,y) \in T_{i,k}} f(x, y). \quad (9)$$

Тогава

$$s_\tau \leq \iint_T f(x, y) \, dx dy \leq S_\tau. \quad (10)$$



Имаме

$$\int_a^b I(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} I(x) dx, \quad (11)$$

както и

$$I(x) = \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} f(x, y) dy. \quad (12)$$

Следователно

$$\int_a^b I(x) dx = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (13)$$

Используем, что

$$\int_a^b I(x) dx = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} \underbrace{f(x, y)}_{\substack{\leq M_{i,k}, \\ (x,y) \in T_{i,k}}} dy \right) dx \quad (14)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} M_{i,k} dy \right) dx \quad (15)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n M_{i,k} \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} [\lambda_k(x) - \lambda_{k-1}(x)] dx}_{=\mu(T_{i,k})} \stackrel{\text{по деф.}}{=} S_T. \quad (16)$$

Аналогично се установява, что

$$\int_a^b I(x) dx \geq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{i,k} \mu(T_{i,k}) \stackrel{\text{по деф.}}{=} s_T. \quad (17)$$

Така показахме, че

$$s_\tau \leq \int_a^b l(x) dx \leq S_\tau. \quad (18)$$

Оттук и (10) следва

$$\left| \iint_T f(x, y) dx dy - \int_a^b l(x) dx \right| \leq S_\tau - s_\tau. \quad (19)$$

Остава да забележим, че благодарение на непрекъснатостта на $f(x, y)$ върху компакта T имаме, че тя е дори равномерно непрекъсната и следователно можем да направим разликата $S_\tau - s_\tau$ колкото искаме малка стига да вземем достатъчно дребно разбиване τ от разглеждания тук вид на T , за което е достатъчно всъщност да вземем достатъчно дребно разбиване η на $[a, b]$ (тогава и n расте).