Ориентация

Матрица на прехода между базиси (припомняне от алгебрата)

Нека V е n-мерно реално линейно пространство и $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ са базиси на V. Тогава всеки от $e'_1, \dots, e'_n$ е линейна комбинация на $e_1, \dots, e_n$, тоест съществуват числа $t_{ij} \in \mathbb{R}$, такива че

$$
\begin{array}{rcl}
e'_1 & = & t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \cdots + t_{n1}e_n \\
e'_2 & = & t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \cdots + t_{n2}e_n \\
\vdots & \vdots & \qquad\qquad\quad \vdots \\
e'_j & = & t_{1j}e_1 + t_{2j}e_2 + \cdots + t_{nj}e_n \\
\vdots & \vdots & \qquad\qquad\quad \vdots \\
e'_n & = & t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \cdots + t_{nn}e_n
\end{array} \tag{1}
$$

тоест

$$
e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2}
$$

Означаваме $T = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, тоест T е матрицата $n \times n$, чиито стълбове са координатните вектори на $e'_1, \dots, e'_n$ спрямо базиса e, тоест (i, j)-тият елемент на T е i-тата координата на e'_j спрямо базиса e.

Разглеждайки $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ като вектор-редове и считайки, че вектор може да се умножава с число отдясно, получаваме, че (1) (и еквивалентното му (2)) се записва в матричен вид като

$$
e' = e.T. \tag{3}
$$

Матрицата T се нарича *матрица на прехода от базиса e към базиса e'*.

Матрицата на прехода е обратима матрица.

(Дори имаме: Ако e е базис, T е матрица и $e' = e.T$, то e' е базис $\Leftrightarrow$ T е обратима.)

Твърдение 1

1. *Матрицата на прехода от базиса e към същия базис e е единичната матрица E, тоест $e = e.E$.*

2. *Ако матрицата на прехода от базиса e към базиса e' е T, то матрицата на прехода от e' към e е T^{-1} (тоест матрицата на прехода в обратната посока е обратната матрица), тоест $e' = e.T \Rightarrow e = e'.T^{-1}$.*

3. *Ако матрицата на прехода от базиса e към базиса e' е S, а матрицата на прехода от e' към базиса e'' е T, то матрицата на прехода от e към e'' е ST, тоест $e' = e.S$, $e'' = e'.T \Rightarrow e'' = e.ST$.*

Доказателството на това твърдение се съдържа във формулировката му.

Всичко дотук важи и за n-мерно линейно пространство над произволно поле. В последващите неща обаче полето не може да е произволно, защото ще използваме положителност и отрицателност. Затова ще разглеждаме линейни пространства над $\mathbb{R}$.

Ориентация

Нека V е n-мерно реално линейно пространство.

Определение 1 Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ са два базиса на V и матрицата на прехода от e към f е T. Казваме, че *e е еднакво ориентиран с f*, и пишем $e \sim f$, ако $\det T > 0$. Казваме, че *e е противоположно ориентиран на f*, и пишем $e \not\sim f$, ако e не е еднакво ориентиран с f, тоест ако $\det T < 0$. (Тъй като T е обратима, $\det T \neq 0$.)

Пример 1 Ако $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис и $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, то и $f = (\lambda e_1, e_2, \dots, e_n)$ е базис и e е еднакво ориентиран с f при $\lambda > 0$ и противоположно ориентиран на f при $\lambda < 0$. Същото заключение е в сила, ако вместо e_1 с λ се умножи който и да е e_i. В частност, ако се смени знака на един от базисните вектори, то първоначалният базис е противоположно ориентиран на новополучения.

Това е така, защото матрицата на прехода T от e към f се получава от E чрез умножаване на първия (или в по-общия случай на i-тия) стълб с λ и следователно $\det T = \lambda \det E = \lambda$.

Пример 2 Ако $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис, то и $f = (e_2, e_1, e_3, \dots, e_n)$ е базис и e е противоположно ориентиран на f. Същото заключение е в сила, ако вместо e_1 и e_2 се разменят местата на които и да е e_i и e_j.

Това е така, защото матрицата на прехода T от e към f се получава от E чрез разменяне на местата на първия и втория (или в по-общия случай на i-тия и j-тия) стълб и следователно $\det T = -\det E = -1 < 0$.

Пример 3 Ако $n = 3$ и $e = (e_1, e_2, e_3)$ е базис, то и $f = (e_2, e_3, e_1)$ е базис и e е еднакво ориентиран с f.

Това е така, защото матрицата на прехода от e към f е $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и следователно $\det T = 1 > 0$.

Теорема 1

1. *Релацията еднаква ориентираност на базиси е релация на еквивалентност в множеството на всички базиси на V.*

2. *Класовете на еквивалентност относно тая релация са два: ако f е един базис на V, то те са $\{e : e \sim f\}$ и $\{e : e \not\sim f\}$.*

Доказателство:

1. Трябва да се докаже, че $\sim$ е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

рефлексивност Нека e е базис на V. По 1. на Твърдение 1 матрицата на прехода от e към e е E. Тъй като $\det E = 1 > 0$, то $e \sim e$.

симетричност Нека e и f са базиси на V и $e \sim f$. Следователно за матрицата на прехода T от e към f имаме $\det T > 0$. По 2. на Твърдение 1 матрицата на прехода от f към e е T^{-1}. Тъй като $\det\left(T^{-1}\right) = \frac{1}{\det T} > 0$, то $f \sim e$.

транзитивност Нека e, f, g са базиси на V и $e \sim f$, $f \sim g$. Следователно за матриците на прехода S от e към f и T от f към g имаме $\det S > 0$ и $\det T > 0$. По 3. на Твърдение 1 матрицата на прехода от e към g е ST. Тъй като $\det(ST) = \det S . \det T > 0$, то $e \sim g$.

   Следователно $\sim$ е релация на еквивалентност.

2. Множеството $\{e : e \sim f\}$ е клас на еквивалентност, а именно класът на f. Значи трябва да се докаже, че и множеството $\{e : e \not\sim f\}$ също е клас на еквивалентност.

   Тъй като $\sim$ е релация на еквивалентност, множеството на всички базиси се разбива на класове на еквивалентност. Един от тях е класът на f. Следователно множеството от останалите базиси, а именно $\{e : e \not\sim f\}$, е обединението на останалите класове на еквивалентност. Ако покажем, че всеки два елемента на $\{e : e \not\sim f\}$ са еквивалентни, то това множество ще се съдържа в един клас на еквивалентност. Така ще получим, че $\{e : e \not\sim f\}$ е един клас на еквивалентност, освен ако е празно.

   Че всеки два елемента на $\{e : e \not\sim f\}$ са еквивалентни се вижда както по-горе при транзитивността: Ако $e \not\sim f$ и $g \not\sim f$, то за матриците на прехода S от e към f и T от f към g имаме $\det S < 0$ и $\det T < 0$. Тогава за матрицата на прехода ST от e към g получаваме $\det(ST) = \det S . \det T > 0$, така че $e \sim g$.

   А че $\{e : e \not\sim f\}$ не е празно е ясно, защото негов елемент може да се построи например като в Пример 1 — чрез смяна на знака на някой от векторите в f.

   Значи освен класът на f, тоест $\{e : e \sim f\}$, има още точно един клас на еквивалентност, а именно $\{e : e \not\sim f\}$. $\square$

Забележка 1 Поради горната теорема в релацията ориентираност на базиси двата базиса играят симетрична роля, така че вместо e е еднакво ориентиран с f можем да казваме *e и f са еднакво ориентирани*, а вместо e е противоположно ориентиран на f — *e и f са противоположно ориентирани*.

Определение 2 1. *Ориентация* в крайномерно реално линейно пространство е клас на еквивалентност относно релацията еднаква ориентираност на базиси.

2. Казваме, че крайномерно реално линейно пространство е *ориентирано*, ако е избрана едната от двете възможни ориентации. Избраната ориентация се нарича *положителна*, а другата – *отрицателна*.

Забележка 2 Избор на ориентация може да се зададе чрез избор на базис: взима се класът на еквивалентност на базиса.

Определение 3 Базис в ориентирано линейно пространство се нарича *положително ориентиран* (съответно *отрицателно ориентиран*), ако задава положителната (съответно отрицателната) ориентация.

Пример 4 Дефинираната от стандартния базис на $\mathbb{R}^n$ ориентация се нарича *стандартна ориентация* в $\mathbb{R}^n$. По подразбиране $\mathbb{R}^n$ се счита ориентирано по тоя начин.