

Контролна работа 4 (ПМ, КН1, И)

Теория на пръстените

Задача 1. Попълнете таблицата за умножение на пръстена R и намерете неговите подпръстени и идеали:

$+$	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

\cdot	a	b	c	d
a	b			d
b			b	d
c	a	b		d
d	d	d	d	d

Задача 2. В множеството \mathbb{R} на реалните числа въвеждаме нови операции \oplus и \odot :

$$r_1 \oplus r_2 = r_1 + r_2 - 5; \quad r_1 \odot r_2 = 5 + 2(r_1 - 5)(r_2 - 5).$$

Докажете, че $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ е поле.

Задача 3. R пръстен с единица 1 и R има поне два различни елемента. Нека a и b са елементи от R , такива че $ab = 1$. Докажете, че:

- ако a не е делител на нулата, то $ba = 1$;
- ако b не е делител на нулата, то $ba = 1$.

Бонус: Дайте пример за пръстен S с поне два елемента и единица 1, както и елементи $a, b \in S$, за които $ab = 1$ и $ba \neq 1$.