Лекция: Най-добри приближения в линейни нормирани пространства

Гено Николов, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски"

Съдържание на лекцията

- Постановка на задачата за най-добро приближение
- Линейни нормирани пространства
- Норми в $\mathbb{R}^n$
- Съществуване и единственост на елемент на най-добро приближение

Метрични пространства

Нека F е линейно пространство. За близостта между елементите в F можем да съдим, ако в F е въведена функция на разстояние.

Определение

Функцията $\varrho : F \times F \mapsto \mathbb{R}_+$ се нарича функция на разстояние в F, ако удовлетворява следните изисквания:

1. $\varrho(f, g) \geq 0$ за всеки f, $g \in F$, като равенството се достига само при $f = g$;
2. $\varrho(f, g) = \varrho(g, f)$ за всеки f, $g \in F$ (симетричност);
3. $\varrho(f, g) \leq \varrho(f, h) + \varrho(h, g)$ за всеки f, g, $h \in F$ (неравенство на триъгълника).

Най-добро приближение на функция

Линейно пространство, в което е въведено разстояние (метрика) се нарича метрично пространство. Ще формулираме задачата за приближаване в метричното пространство F.
Нека $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ са линейно независими елементи от F, и Ω_n е крайномерното подпространство на F породено от тях, т.е. множеството от линейните комбинации на $\{\varphi_k\}_0^n$,

$$\Omega_n := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k \; : \; (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}.$$

Величината

$$E_n(f) := \inf\{\rho(f, \varphi) \; : \; \varphi \in \Omega_n\}$$

се нарича най-добро приближение на f с елементи от Ω_n.

Елемент на най-добро приближение

Ако съществува елемент φ_f от Ω_n, за който инфимума се достига, т.е.

$$\rho(f, \varphi_f) = \inf\{\rho(f, \varphi) \; : \; \varphi \in \Omega_n\},$$

φ_f се нарича елемент на най-добро приближение за f.

След формулиране на тази задача за приближаване възникват следните основни въпроси:

- Съществува ли елемент на най-добро приближение?
- Ако такъв елемент съществува, то той единствен ли е?
- Как може да бъде построен (или разпознат) елементът на най-добро приближение?

Линейни нормирани пространства

Съществува достатъчно широк клас от метрични пространства, за които може да бъде даден отговор на въпроса за съществуване на елемент на най-добро приближение. Това са линейните нормирани пространства.

Нека F е дадено линейно пространство (над $\mathbb{R}$). Казваме, че в F е въведена норма, ако на всеки елемент f от F е съпоставено число $\|f\|$ (наречено норма на f) и това съответствие удовлетворява условията:

1. $\|f\| \geq 0$, и равенство се достига тогава и само тогава когато $f = 0$ (нулевия елемент в F);
2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ за всяко $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. 3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ за всеки $f, g \in F$.

Линейни нормирани пространства

Линейно пространство F, в което е въведена норма, се нарича линейно нормирано пространство.
Всяка норма $\|\cdot\|$ поражда функция на разстояние посредством:

$$\rho(f, g) := \|f - g\|.$$

Не е трудно да се провери, че така определеното ρ действително удовлетворява изброените по-горе изисквания за функция на разстояние (направете проверката сами).
Всяка норма в F е функция, дефинирана в F.

Теорема 1.

Нормата е непрекъсната функция по отношение на разстоянието, породено от нея.

Доказателство на Теорема 1

Доказателство. Следва от неравенството

$$|\,\|f\| - \|g\|\,| \leq \|f - g\|,$$

което на свой ред се получава така:

$$\|f\| = \|f - g + g\| \leq \|f - g\| + \|g\| \Rightarrow \|f\| - \|g\| \leq \|f - g\|.$$

Разменяйки f и g, имаме $\|g\| - \|f\| \leq \|g - f\| = \|f - g\|$. Следователно $|\,\|f\| - \|g\|\,| \leq \rho(f, g)$. От тук, ако $\rho(f, g) \to 0$, то $\|f\| \to \|g\|$, т.е. $\|f\|$ е непрекъсната функция на f. $\square$

Норми в $\mathbb{R}^n$

Да разгледаме линейното пространство

$$\mathbb{R}^n = \{f = (f_1, \dots, f_n) \quad : \quad f_1, \dots, f_n - \text{ реални числа } \}$$

от n-мерни реални вектори. Тук всяка норма е всъщност функция на n променливи – координатите $f_1, \dots, f_n$ на f.

Теорема 2.

Всяка норма в $\mathbb{R}^n$ е непрекъсната функция относно координатите на елемента.

Доказателство. Нека

$$\mathbf{e}_k = (\underbrace{0, \dots, 1}_{k}, 0, \dots, 0), \quad k = 1, \dots, n,$$

са базисните вектори в $\mathbb{R}^n$, тогава всеки вектор $f = (f_1, \dots, f_n)$ от $\mathbb{R}^n$ се записва във вида $f = f_1\mathbf{e}_1 + \cdots + f_n\mathbf{e}_n$.

Норми в $\mathbb{R}^n$

Имаме

$$\mid \|f\| - \|g\| \mid \leq \|f - g\| = \|\sum_{i=1}^{n}(f_i - g_i)\mathbf{e}_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \mid f_i - g_i \mid \|\mathbf{e}_i\|,$$

откъдето следва, че $\|f\| \to \|g\|$ при $f_i \to g_i, \quad i = 1, \dots, n$.
Теорема 2 е доказана. $\square$

В едно линейно пространство F може да бъде въведена норма по различни начини. Най-често използваните норми в $\mathbb{R}^n$ са:

$$\|f\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \mid f_i \mid,$$

$$\|f\|_1 := \mid f_1 \mid + \cdots + \mid f_n \mid,$$

$$\|f\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2\right)^{1/2}$$ – евклидова норма.

Еквивалентни норми

Последната норма се нарича евклидова, защото поражда евклидовото разстояние

$$d(f,g) := \|f-g\|_2 = \left\{\sum_{k=1}^{n}(f_k-g_k)^2\right\}^{1/2}.$$

Определение

Казваме, че две норми $\nu(f)$ и $\mu(f)$ са еквивалентни в F, ако съществуват положителни числа m и M такива, че

$$m\,\mu(f) \le \nu(f) \le M\,\mu(f) \quad \text{за всяко } f \in F\,.$$

Теорема 3.

Всеки две норми в $\mathbb{R}^n$ са еквивалентни.

Доказателство на Теорема 3

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че всяка норма ν е еквивалентна с евклидовата норма $\|\cdot\|_2$. Нека

$$S := \Big\{f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \|f\|_2 = 1\Big\}.$$

S е ограничено и затворено множество. Съгласно Теорема 2, $\nu(f) = \nu(f_1, \dots, f_n)$ е непрекъсната функция на f_i, $i = 1, \dots, n$. По теоремата на Вайерщрас, $\nu(f)$ достига своята минимална стойност в S. Следователно съществува f^* от S, такъв че

$$m := \inf\{\nu(f) \ : \ (f_1, \dots, f_n) \in S\} = \nu(f^*).$$

Очевидно $m \geq 0$. Нещо повече, $m > 0$. Наистина, допускането $m = 0$ води до $\nu(f^*) = 0$ и следователно $f^* = 0$, т.е. $f_1^* = \dots = f_n^* = 0$, противоречие с това, че $f^* \in S$.
И така, $\nu(f) \geq m > 0$ за всяко $f \in S$.

Доказателство на Теорема 3 (продължение)

Нека f е произволен ненулев елемент на $\mathbb{R}^n$. Тогава $f/\|f\|_2 \in S$ и съгласно току-що доказаното неравенство,

$$\nu(f) = \nu\left(\frac{f}{\|f\|_2}\,\|f\|_2\right) = \|f\|_2\,\nu\left(\frac{f}{\|f\|_2}\right) \geq m\|f\|_2\ .$$

Доказахме, че $m\|f\|_2 \leq \nu(f)$ за всяко $f \in \mathbb{R}^n$.

По същата схема, като изберем

$$M := \sup\{\nu(f) :\ f = (f_1, \ldots, f_n) \in S\},$$

получаваме

$$\nu(f) \leq M\|f\|_2 \quad \text{за всяко} \ \ f \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 3 е доказана. $\square$

Задача

Задача.

Проверете, че за нормите в $\mathbb{R}^n$ посочени по-горе са изпълнени следните неравенства:

(i) $\|f\|_\infty \le \|f\|_1 \le n\,\|f\|_\infty$;

(ii) $\|f\|_\infty \le \|f\|_2 \le \sqrt{n}\,\|f\|_\infty$;

(iii) $\|f\|_2 \le \|f\|_1 \le \sqrt{n}\,\|f\|_2$.

Ще формулираме едно важно следствие от теоремата за еквивалентност на нормите.

Следствие 1.

Всяко кълбо $D_r = \{(f_1, \dots, f_n) : \|f\| \le r < \infty\}$ в $\mathbb{R}^n$ е ограничено и затворено множество.

Доказателство на Следствие 1

Нека f е елемент от кълбото D_r. Тогава $\|f\| \leq r$ и от еквивалентността на нормите в $\mathbb{R}^n$ следва, че съществува константа $M > 0$ такава, че

$$\|f\|_\infty \leq M\, r.$$

От тук $|f_i| \leq M\, r$, $i = 1, \ldots, n$, което показва, че множеството D_r е ограничено. Ще покажем, че то е и затворено. Нека $\{f^{(k)}\}$ е произволна редица от елементи $f^{(k)} \in D_r$, която клони към $g \in \mathbb{R}^n$, т.е. $\lim_{k\to\infty} \|f^{(k)} - g\| = 0$. Тогава от

$$\|g\| = \|g - f^{(k)} + f^{(k)}\| \leq \|f^{(k)} - g\| + \|f^{(k)}\| \leq \|f^{(k)} - g\| + r$$

след граничен преход при $k \to \infty$ получаваме $\|g\| \leq r$, т.е. $g \in S_r$. Следователно D_r е затворено множество. $\square$

Норми в крайномерни пространства

Твърденията, доказани тук за $\mathbb{R}^n$, всъщност са верни за всяко крайномерно линейно пространство $\Omega_n = \{\varphi = a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n : (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ в F, тъй като всеки елемент φ от Ω_n може да се отъждестви с вектора $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ от своите коефициенти в представянето му чрез базисните елементи $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Съществуване на елемент на най-добро приближение

Теорема 5. (Съществуване)

Нека F е линейно нормирано пространство. Нека $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ са линейно независими елементи на F и Ω_n е линейното подпространство, породено от тях. Тогава за всяко $f \in F$ съществува елемент на най-добро приближение от Ω_n по отношение на разстоянието, породено от нормата на F.

Доказателство. Нека f е произволен ненулев елемент от F. Ако $\varphi \in \Omega_n$ и $\|\varphi\| > 2\|f\| =: r$, тогава

$$\|f - \varphi\| \geq | \, \|\varphi\| - \|f\| \, | > 2\|f\| - \|f\| = \|f\| = \|f - 0\| \geq E_n(f).$$

Следователно, ако $\|\varphi\| > r$, нулевият елемент на F (който принадлежи и на Ω_n) ще приближава f по-добре от φ.

Доказателство на Теорема 5 (продължение)

По тази причина имаме

$$\inf_{\varphi\in\Omega_n} \|f-\varphi\| = \inf\{\|f-\varphi\| : \varphi\in\Omega_n, \|\varphi\|\le r\}$$

$$= \inf_{(a_1,\dots,a_n)\in D_r} \|f-\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\|.$$

Но $\|f-\varphi\|$ е непрекъсната функция на коефициентите $a_1,\dots,a_n$ на φ, а D_r е ограничено и затворено множество. По теоремата на Вайерщрас,

$$\inf_{(a_1,\dots,a_n)\in D_r} \|f-\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\|$$

се достига, и следователно

$$\inf_{\varphi\in\Omega_n} \|f-\varphi\| = \|f-\varphi_f\|$$

за някое $\varphi_f\in\Omega_n$. Теоремата е доказана. $\square$

Единственост на елемента на най-добро приближение

Единствеността на елемента на най-добро приближение може да се гарантира при допълнително предположение за нормата в F.

Определение

Нормираното линейно пространство F се нарича строго нормирано, ако от равенството

$$\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$$

следва, че елементите f и g са линейно зависими.

Теорема 6. (Единственост)

Ако F е строго нормирано пространство, то за всяко $f \in F$ съществува единствен елемент на най-добро приближение от Ω_n.

Доказателство на Теорема 6

Доказателство. Да допуснем противното: за някое $f \in F$ съществуват елементи p и q от Ω_n, $p \neq q$, такива че

$$\|f - p\| = \|f - q\| = E_n(f) := \inf\{\|f - \varphi\| : \varphi \in \Omega_n\}\,.$$

Тогава от дефиницията на най-добро приближение $E_n(f)$ и неравенството на триъгълника следва

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq \|f - \frac{p+q}{2}\| = \frac{1}{2}\|(f-p) + (f-q)\| \\ &\leq \frac{1}{2}(\|f-p\| + \|f-q\|) = E_n(f), \end{aligned}$$

което показва, че в горната верига трябва да имаме само равенства.

Доказателство на Теорема 6 (продължение)

В частност, трябва да е изпълнено

$$\|(f-p)+(f-q)\| = \|f-p\| + \|f-q\|.$$

Тогава от строгата нормираност на F следва, че $f-p = \alpha(f-q)$. Ако $\alpha = 1$, това равенство води до $p = q$, противоречие. Ако $\alpha \neq 1$, то $f = (p-\alpha q)/(1-\alpha)$ и следователно $f \in \Omega_n$, което от своя страна влече $f = p = q$ и стигаме отново до противоречие с предположението, че $p \neq q$. Теоремата е доказана. $\square$

Край на лекцията !