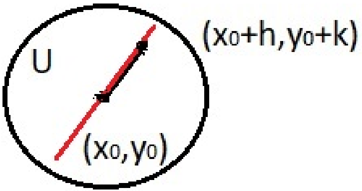
25. Формула на Тейлър за функции на две променливи

Нека $f(x, y)$ притежава частни производни до ред $n + 1$ включително в околност U на т. (x_0, y_0) и те са непрекъснати в U.

Нека $h, k \in \mathbb{R}$ са такива, че $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$.

Тогава отсечката с крайща точките (x_0, y_0) и $(x_0 + h, y_0 + k)$ лежи в U, като двата ѝ края са вътрешни точки.
Дори имаме $(x_0 + ht, y_0 + kt) \in U$ за всяко $t \in (-1 - \delta, 1 + \delta)$ с някакво $\delta > 0$.



Разглеждаме функцията $\varphi(t) := f(x_0 + ht, y_0 + kt)$, $t \in (-1 - \delta, 1 + \delta)$.

Теоремата за диференциране на съставни функции на няколко променливи (т-ма 4, тема 23) влече, че $\varphi(t)$ притежава производни до ред $n + 1$, включително, в $(-1 - \delta, 1 + \delta)$.

Прилагаме формулата на Тейлър за функции на една променлива към $\varphi(t)$ в т. 0 (т-ма 2, тема 30, ДИС 1):

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}\, t^i + \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, t^{n+1}, \tag{1}$$

където $t \in (-1-\delta, 1+\delta)$ и c е между 0 и t.

При $t = 1$ получаваме

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \tag{2}$$

където c е между 0 и 1.

Пресмятаме $\varphi^{(i)}(0)$.

Да припомним: $\varphi(t) := f(x_0 + ht, y_0 + kt)$. Тогава

$$\varphi'(t) = f'_x(x_0 + ht, y_0 + kt)h + f'_y(x_0 + ht, y_0 + kt)k \tag{3}$$

Следователно

$$\varphi'(0) = f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k. \tag{4}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= [f'_x(x_0 + ht, y_0 + kt)h + f'_y(x_0 + ht, y_0 + kt)k]' &(5)\\
&= h[f''_{xx}(x_0 + ht, y_0 + kt)h + f''_{xy}(x_0 + ht, y_0 + kt)k] &(6)\\
&\qquad + k[f''_{yx}(x_0 + ht, y_0 + kt)h + f''_{yy}(x_0 + ht, y_0 + kt)k] &(7)\\
&= f''_{xx}(x_0 + ht, y_0 + kt)h^2 + 2f''_{xy}(x_0 + ht, y_0 + kt)hk &(8)\\
&\qquad + f''_{yy}(x_0 + ht, y_0 + kt)k^2. &(9)
\end{aligned}$$

Следователно

$$\varphi''(0) = f''_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)hk + f''_{yy}(x_0, y_0)k^2. \tag{10}$$

Чрез математическа индукция се установява, че

$$\begin{aligned}\varphi^{(i)}(t) = \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x_0+ht, y_0+kt)h^i \\ &+ \binom{i}{1}\frac{\partial^i f}{\partial x^{i-1}\partial y}(x_0+ht, y_0+kt)h^{i-1}k \\ &+ \binom{i}{2}\frac{\partial^i f}{\partial x^{i-2}\partial y^2}(x_0+ht, y_0+kt)h^{i-2}k^2 \\ &+ \cdots + \\ &+ \binom{i}{i-1}\frac{\partial^i f}{\partial x\partial y^{i-1}}(x_0+ht, y_0+kt)hk^{i-1} \\ &+ \frac{\partial^i f}{\partial y^i}(x_0+ht, y_0+kt)k^i.\end{aligned}$$

Накратко този израз може да се запише така (сравнете с биномната ф-ла):

$$\varphi^{(i)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x_0+ht, y_0+kt). \tag{11}$$

Следователно

$$\varphi^{(i)}(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i} f(x_0, y_0), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{12}$$

и

$$\varphi^{(n+1)}(c) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + ch, y_0 + ck). \tag{13}$$

Според имаме (2)

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}. \tag{14}$$

Така, благодарение на (12)-(14) получаваме следния резултат.

Теорема (ф-ла на Тейлър за функции на две променливи)

Нека $f(x, y)$ притежава частни производни до ред $n+1$ включително в околност U на т. (x_0, y_0) и те са непрекъснати в U. Тогава за всеки $h, k \in \mathbb{R}$ такива, че $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$ съществува $c \in (0, 1)$ такова, че

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + ch, y_0 + ck). \tag{15}$$

Следствие ($n = 1$)

Нека $f(x, y)$ притежава частни производни до втори ред включително в околност U на т. (x_0, y_0) и те са непрекъснати в U. Тогава за всеки $h, k \in \mathbb{R}$ такива, че $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$ съществува $c \in (0, 1)$ такова, че

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k$$
$$+\frac{1}{2}\left[f''_{xx}(x_0{+}ch, y_0{+}ck)h^2{+}2f''_{xy}(x_0{+}ch, y_0{+}ck)hk{+}f''_{yy}(x_0{+}ch, y_0{+}ck)k^2\right].$$