24. Теорема за крайните нараствания за функции на няколко променливи

Да припомним първо теоремата, както още се нарича, формулата за крайните нараствания за функции на една променлива (ДИС 1, тема 25, теорема 2).

Теорема 1 (формула за крайните нараствания, една променлива). *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Тогава съществува $c \in (a, b)$ такова, че*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Обикновено използваме тази формула в следния вид, който непосредствено следва от горната теорема.

Следствие 2 (формула за крайните нараствания, една променлива). *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Тогава за всеки $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$, съществува точка c между x_1 и x_2, чиято стойност изобщо зависи от x_1 и x_2, такава, че*

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Нека вместо x_1 пишем x_0 и въведем h така, че $x_2 = x_0 + h$, т.е. положим $h = x_2 - x_0$. Нека още въведем θ така, че $c = x_0 + \theta h$, т.е. положим $\theta = \frac{c - x_0}{h}$. Понеже c е между x_0 и $x_0 + h$, то $\theta \in (0, 1)$. Тогава можем да запишем следствието горе във формата

Следствие 3 (формула за крайните нараствания, една променлива). *Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в някаква околност U на точката x_0. Тогава за всяко $h \neq 0$ такова, че $x_0 + h \in U$ съществува $\theta \in (0, 1)$, чиято стойност изобщо зависи от x_0 и h, такава, че*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta h)h. \tag{1}$$

Да припомним, че под околност на точка върху реалната права имаме предвид кой и да е краен отворен интервал с център тази точка.

Сега ще обобщим това твърдение за функции на няколко променливи.

Теорема 4 (формула за крайните нараствания, няколко променливи). *Нека функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ притежава непрекъснати първи частни производни по всичките си променливи в някаква* *околност U на точката $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Тогава за всяко $h \in \mathbb{R}^n$ такова, че $x^0 + h \in U$ съществува $\theta \in (0,1)$, чиято стойност изобщо зависи от x^0 и h, такава, че*

$$f(x^0 + h) - f(x^0) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x^0 + \theta h)h_i. \tag{2}$$

Да припомним, че под околност на точка в $\mathbb{R}^n$ разбираме всяко кълбо в $\mathbb{R}^n$ без заграждащата го сфера с център тази точка. Горе сумата $x^0 + h$ е в смисъл на сума на вектори, а произведението θh е умножаване на вектора h с числото θ, т.е. ако $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, то

$$x^0 + h = (x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h_n), \quad \theta h = (\theta h_1, \theta h_2, \ldots, \theta h_n).$$

Доказателство. Разглеждаме функцията на една реална променлива $\varphi(t) := f(x^0 + th)$, т.е. $\varphi(t) := f(x_1^0 + th_1, x_2^0 + th_2, \ldots, x_n^0 + th_n)$, където $t \in [0,1]$. Тогава

$$\varphi(0) = f(x^0) \quad \text{и} \quad \varphi(1) = f(x^0 + h). \tag{3}$$

Щом $f(x)$ притежава непрекъснати първи частни производни по всичките си променливи в U, то теоремата за диференциране на съставни функции на няколко променливи влече, че $\varphi(t)$ е диференцируема в $(0,1)$, при това за производната ѝ имаме

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = f'_{x_1}&(x_1^0 + th_1, x_2^0 + th_2, \ldots, x_n^0 + th_n)h_1 \\ &+ f'_{x_2}(x_1^0 + th_1, x_2^0 + th_2, \ldots, x_n^0 + th_n)h_2 \\ &\qquad + \cdots + f'_{x_n}(x_1^0 + th_1, x_2^0 + th_2, \ldots, x_n^0 + th_n)h_n\end{aligned}$$

или, накратко,

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x^0 + th)h_i. \tag{4}$$

Прилагаме формулата за крайните нараствания за функции на една променлива в Теорема 1 към функцията $\varphi(t)$ в интервала $[0,1]$. Така получаваме

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)(1 - 0) \tag{5}$$

за някое $\theta \in (0,1)$ (тук вместо c пишем θ). Нека отбележим, че стойността на θ е различна за различните функции, към които прилагаме формулата за крайните нараствания. Следователно стойността на θ зависи от x^0 и h в общия случай.

Накрая, като заместим (3) и (4) в (5), получаваме твърдението на теоремата. $\square$

Ще завършим с един алтернативен запис на формулата за крайните нараствания за функции на няколко променливи. В него се използва градиента на функцията. Да припомним, ако функцията $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ притежава първи частни производни по всяка променлива в точката $c \in \mathbb{R}^n$, то векторът съставен от тях се нарича градиент на $f(x)$ в точката c и се означава с $\mathrm{grad} f(c)$. Така по дефиниция

$$\mathrm{grad} f(c) = \bigl(f'_{x_1}(c), f'_{x_2}(c), \ldots, f'_{x_n}(c)\bigr).$$

Нека $\langle a, b\rangle$ означава обичайното скаларно призведние в $\mathbb{R}^n$, т.е. ако $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, то по дефиниция

$$\langle a, b\rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Тогава формулата за крайните нараствания (2) може още да се запише във вида

$$f(x^0 + h) - f(x^0) = \langle \mathrm{grad} f(x^0 + \theta h), h\rangle, \tag{6}$$

който съвсем наподобява (1), като производната на функция на една променлива е заменена с градиента на функция на няколко променливи, а произведението между реални числа е заменено със скаларaното произведение на вектори. Дори, както знаем, градиентът на функцията на няколко променливи $f(x)$ в точката $c \in \mathbb{R}^n$ може да се означи с $f'(c)$ и се нарича още (пълна) производна на $f(x)$ в точката c. В това означение, (6) придобива вида

$$f(x^0 + h) - f(x^0) = \langle f'(x^0 + \theta h), h\rangle$$

и приликата с едномерния случай, даден в (1), става още по-голяма.

Забележете, че в случая на функция на една променлива, т.е. $n = 1$, градиентът ѝ представлява вектор с един компонент и може да се интерпретира като реално число, а скаларното произведение в едномерния случай ($n = 1$) се свежда до обичайното умножение на реални числа.