Евклидови линейни пространства. Ортонормирани базиси. Ортогонално допълнение

Тоя въпрос представлява по същество припомняне на неща, които са известни от курса по алгебра. Включен е и с цел фиксиране на терминологията (в курса по алгебра някои неща може да са формулирани по различен начин). Може да съдържа и някои по-маловажни факти, които в курса по алгебра са били пропуснати, но тук ще ни трябват. Написал съм доказателствата само на нещата, за които разбрах, че не са доказвани в курса по алгебра.

Дефиниции и примери

Нека U е реално линейно пространство.

Определение 1 *Скаларно произведение* в U е изображение

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : U \times U \to \mathbb{R}, \quad (u,v) \mapsto \langle u,v\rangle,$$

което има свойствата:

1. $\langle v,u\rangle = \langle u,v\rangle$ за $u,v \in U$ (*симетричност*)
2. $\langle u_1+u_2,v\rangle = \langle u_1,v\rangle + \langle u_2,v\rangle$ за $u_1,u_2,v \in U$ (*адитивност по първия аргумент*)
3. $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$ за $u,v \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (*хомогенност по първия аргумент*)
4. $\langle u,u\rangle > 0$ за $u \in U$, $u \neq 0$ (*положителност*)
   (Вместо *положителност* се казва още *положителна определеност* или *положителна дефинираност* или *положителна дефинитност*.)

$\langle u,v\rangle$ се нарича *скаларно произведение на векторите u и v*.

Забележка 1 Срещат се и други означения за скаларното произведение. Например uv, $u.v$, (u,v), $\langle u|v\rangle$.

Забележка 2 Условията 2. и 3. в горното определение заедно са еквивалентни на условието

$$\langle \lambda_1u_1+\lambda_2u_2,v\rangle = \lambda_1\langle u_1,v\rangle + \lambda_2\langle u_2,v\rangle \quad \text{за } u_1,u_2,v \in U,\ \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R},$$

което се нарича *линейност по първия аргумент*.

Твърдение 1 *Нека $\langle \cdot, \cdot \rangle$ е скаларно произведение в U. Тогава:*

1. $\langle 0, v\rangle = 0 = \langle v, 0\rangle$ *за* $v \in U$.
2. $\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle$ *за* $u, v_1, v_2 \in U$ *(адитивност по втория аргумент)*
3. $\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ *за* $u, v \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *(хомогенност по втория аргумент)*
4. *За* $u \in U$ *е в сила* $\langle u, u\rangle \geq 0$ *и* $= \Leftrightarrow u = 0$.
5. $\left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^{l} \mu_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \lambda_i \mu_j \langle u_i, v_j\rangle$ *за* $u_i, v_j \in U$, $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$.

Забележка 3 Условията 2. и 3. в горното твърдение заедно са еквивалентни на условието

$$\langle u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\rangle = \lambda_1\langle u, v_1\rangle + \lambda_2\langle u, v_2\rangle \quad \text{за } u, v_1, v_2 \in U,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

което се нарича *линейност по втория аргумент.* Следователно скаларното произведение е линейно и по двата си аргумента, тоест е *билинейно.*

Така свойствата на скаларното произведение се резюмират накратко по следния начин: Скаларното произведение е симетрично, билинейно и положително дефинитно.

Определение 2 *Евклидово линейно пространство* е реално линейно пространство, в което е фиксирано едно скаларно произведение.

Пример 1 За $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, дефинираме $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$, тоест $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y$. Това е скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$. Нарича се *стандартно скаларно произведение в* $\mathbb{R}^n$. Винаги ще разглеждаме $\mathbb{R}^n$ като евклидово линейно пространство с това скаларно произведение, освен ако изрично не е казано друго.

Пример 2 Скаларното произведение на геометрични вектори удовлетворява четирите условия от Определение 1 и следователно е скаларно произведение в смисъла на това определение. Следователно векторите в геометричното пространство образуват 3-мерно евклидово линейно пространство. Аналогично векторите в геометричната равнина образуват 2-мерно евклидово линейно пространство и векторите върху геометрична права образуват 1-мерно евклидово линейно пространство.
(Тия неща вече сме ги видели и във въпрос 5.)

Твърдение 2 *Ако U е евклидово линейно пространство и V е линейно подпространство на U, то ограничението върху V на скаларното произведение в U е скаларно произведение във V и следователно с него V е евклидово линейно пространство.*

Доказателство: Щом свойствата от Определение 1 важат за векторите от U, то те важат и за векторите от $V \subset U$. Следователно ограничението върху V на скаларното произведение на U е скаларно произведение във V. □

Забележка 4 Винаги ще разглеждаме линейните подпространства на евклидово линейно пространство като евклидови линейни пространства със скаларното произведение от горното твърдение, освен ако изрично не е казано друго.

Дължини и ъгли в евклидово линейно пространство

Нека U е евклидово линейно пространство.

Определение 3 За $u \in U$ означаваме $|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Нарича се *дължина* или *норма на* u.
(Дефиницията е коректна поради 4. в Твърдение 1.)

Забележка 5 Друго често срещано означение за $|u|$ е $\|u\|$.

Твърдение 3 *За $u, v \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ са в сила:*

1. $|u| \geq 0$ $u = \Leftrightarrow u = 0$.
2. $|\lambda u| = |\lambda||u|$.
3. $|u + v| \leq |u| + |v|$ *(неравенство на триъгълника).*

Забележка 6 Ако U е реално линейно пространство, то всяко изображение $|\cdot| : U \to \mathbb{R}$, което има трите свойства от Твърдение 3, се нарича *норма в* U. Така че Твърдение 3 казва, че дефинираната от нас дължина на вектори в евклидово линейно пространство е норма. Понякога тя се нарича *евклидова норма* за да се подчертае, че идва от скаларно произведение.

Теорема 1 (неравенство на Коши-Буняковски-Шварц) *Нека $u, v \in U$. Тогава*

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|$$

$u = \Leftrightarrow$ *и u и v са линейно зависими.*
(Еквивалентни формулировки на неравенството:
$\langle u, v \rangle^2 \leq |u|^2|v|^2, \quad \langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle, \quad -|u||v| \leq \langle u, v \rangle \leq |u||v|$.*)*

Пример 3 В $\mathbb{R}^n$ имаме

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad |x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Следователно:
Неравенството на Коши-Буняковски-Шварц е

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

тоест

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

– това е доказал Коши.
Неравенството на триъгълника е

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Следващото твърдение показва, че скаларното произведение може да се изрази чрез дължината. (И всъщност се вижда, когато се извежда неравенството на триъгълника от неравенството на Коши-Буняковски-Шварц.)

Твърдение 4 *За* $u, v \in U$ *е в сила* $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u, v\rangle$ *и следователно* $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(|u + v|^2 - |u|^2 - |v|^2)$.

Доказателство:

$$|u + v|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2.$$

(И тъй като по неравенството на Коши-Буняковски-Шварц $\langle u, v\rangle \leq |u||v|$, получаваме неравенството на триъгълника.) □

Определение 4 Нека векторите $u, v \in U$ са ненулеви. Единственото $\varphi \in [0, \pi]$, за което $\cos\varphi = \frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}$, се нарича *ъгъл между* u *и* v. Означава се с $\sphericalangle(u, v)$, тоест
$\sphericalangle(u, v) = \arccos\frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}$.
(Че такова φ съществува следва от неравенството на Коши-Буняковски-Шварц, защото от $-|u||v| \leq \langle u, v\rangle \leq |u||v|$ следва $-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|} \leq 1$.)

Пример 4 Ако $u \in U$ е ненулев, то $\sphericalangle(u,u) = 0$, $\sphericalangle(u,-u) = \pi$.
Това е така, защото

$$\sphericalangle(u,u) = \arccos\frac{\langle u,u\rangle}{|u||u|} = \arccos\frac{|u|^2}{|u|^2} = \arccos 1 = 0,$$

$$\sphericalangle(u,-u) = \arccos\frac{\langle u,-u\rangle}{|u||-u|} = \arccos\frac{-\langle u,u\rangle}{|u||u|} = \arccos\frac{-|u|^2}{|u|^2} = \arccos(-1) = \pi.$$

Твърдение 5 *Нека $u, v \in U$ са ненулеви вектори. Тогава:*

1. $\sphericalangle(v,u) = \sphericalangle(u,v)$.
2. $\langle u,v\rangle = |u||v|\cos\sphericalangle(u,v)$.

Забележка 7 В линейното пространство на геометричните вектори в равнината или пространството от някакви геометрични съображения знаехме какво означава дължина на вектор и ъгъл между два вектора и дефинирахме скаларно произведение чрез формулата $\langle u,v\rangle = |u||v|\cos\sphericalangle(u,v)$. В произволно реално линейно пространство е по-удобно и кратко да се дефинира направо скаларно произведение вместо да се въвеждат първо някакви геометрични обекти, чрез които да дефинираме понятията дължина и ъгъл и след това чрез тях и тая формула да въведем скаларно произведение. След това, както направихме и ние, чрез скаларното произведение лесно се дефинират понятията дължина и ъгъл и, както се вижда от Определение 3 и Определение 4 (или 2. на Твърдение 5), те са свързани със скаларното произведение по същия начин както при класическите геометрични вектори, тоест $|u| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$ и $\langle u,v\rangle = |u||v|\cos\sphericalangle(u,v)$.

Следващото твърдение е още един пример, който потвърждава, че за въведените от нас понятия важат класически факти в обичайния си вид. Това, че косинусовата теорема в геометричната равнина или пространство може да се запише в тоя вид го видяхме в доказателството на Теорема 3 във въпрос 5 (формулата за скаларното произведение чрез координати).

Твърдение 6 (косинусова теорема) *Нека $u, v \in U$ са ненулеви вектори. Тогава*

$$|v-u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\sphericalangle(u,v).$$

Доказателство: Като приложим формулата от Твърдение 4 с $-u$ вместо u получаваме

$$|-u+v|^2 = |-u|^2 + |v|^2 + 2\langle -u,v\rangle = |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u,v\rangle = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\sphericalangle(u,v).$$

$\square$

Ортонормирани базиси

Нека U е евклидово линейно пространство.

Определение 5 Казваме, че векторите $u, v \in U$ са *ортогонални* (или *перпендикулярни*), и пишем $u \perp v$, ако $\langle u, v\rangle = 0$.

Твърдение 7

1. *$v \perp u \Leftrightarrow u \perp v$.*
2. *$u \perp 0$ за всяко $u \in U$.*
3. *$u \perp u \Leftrightarrow u = 0$.*
4. *Ако $u \perp v$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то $\lambda u \perp \mu v$.*
5. *Ако $u, v \in U$ са ненулеви, то $u \perp v \Leftrightarrow \sphericalangle(u, v) = \frac{\pi}{2}$.*

Определение 6 Векторът $u \in U$ се нарича *единичен*, ако $|u| = 1$.

Твърдение 8 *Ако $u \in U$ е ненулев, то $\frac{u}{|u|}$ е единичен.*

Определение 7 Казваме, че векторите $u_1, \ldots, u_k \in U$ образуват

1. *ортогонална система*, ако всеки от тях е ортогонален на всеки от останалите, тоест ако $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ при $i \neq j$.
2. *ортонормирана система*, ако образуват ортогонална система и всеки от тях е единичен, тоест ако $\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j \\ 1 \text{ при } i = j \end{cases}$.

Забележка 8 Очевидно тая дефиниция може без изменение да се обобщи и за безкрайни системи от вектори.

Определение 8 Казваме, че базисът $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на U е *ортогонален* (съответно *ортонормиран*), ако $e_1, \ldots, e_n$ е ортогонална (съответно ортонормирана) система.

Пример 5 Стандартният базис на $\mathbb{R}^n$ е ортонормиран.

Твърдение 9 *Ако векторите $u_1, \ldots, u_k \in U$ образуват ортогонална система и $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, то и $\lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_k u_k$ образуват ортогонална система.*

Теорема 2 (Питагор) *Ако $u_1, \ldots, u_k \in U$ е ортогонална система, то*

$$|u_1 + \cdots + u_k|^2 = |u_1|^2 + \cdots + |u_k|^2.$$

Твърдение 10 *Ако ненулевите вектори $u_1, \ldots, u_k \in U$ образуват ортогонална система, то те са линейно независими.*

Следствие 1 *Ако $u_1, \ldots, u_k \in U$ е ортонормирана система, то $u_1, \ldots, u_k$ са линейно независими.*

Следствие 2 *Всяка ортонормирана система от n вектора в n-мерно евклидово линейно пространство е ортонормиран базис.*

Лема 1 *Ако $e_1, \dots, e_k$ е ортонормирана система в U и $k < \dim U$, то съществува $e_{k+1} \in U$, така че $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}$ е ортонормирана система.*

Забележка 9 В лемата може и $k = 0$. В тоя случай това, което се твърди в нея, е, че ако $0 < \dim U$, то съществува $e_1 \in U$, така че e_1 е ортонормирана система, тоест ако $U \neq \{0\}$, то съществува единичен вектор $e_1 \in U$ (което е ясно от Твърдение 8).

Теорема 3 *Ако U е крайномерно и $e_1, \dots, e_k$ е ортонормирана система в U, която не е базис на U, то тя може да се допълни до ортонормиран базис на U.*

От тая теорема при $k = 0$ получаваме:

Теорема 4 *Във всяко крайномерно евклидово линейно пространство съществува ортонормиран базис.*

Следствие 3 *Във всяко крайномерно ориентирано евклидово линейно пространство съществува положително ориентиран ортонормиран базис.*

Забележка 10 Доказателството на Теорема 4 (по-същество, доказателството на Лема 1) дава алгоритъм за построяване на ортонормиран базис $(e_1, \dots, e_n)$ тръгвайки от произволен базис $(f_1, \dots, f_n)$, който се нарича метод на Грам-Шмит.

Забележка 11 Теорема 4 не е вярна в безкрайномерния случай, тоест не всяко безкрайномерно евклидово линейно пространство притежава ортонормиран базис.
(В безкрайномерния случай вместо ортонормирани базиси се използват максимални ортонормирани системи.)

Теорема 5 *Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на U. Тогава следните условия са еквивалентни:*

1. *e е ортонормиран базис.*

2. *Ако $u \in U$ има спрямо e координатен вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, то $|u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$.*

3. *Ако $u, v \in U$ имат спрямо e координатни вектори $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, то*

   $$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

4. *Ако $u \in U$ има спрямо e координатен вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, то $x_i = \langle u, e_i \rangle$, тоест*

   $$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i.$$

Забележка 12 Горната теорема показва, че в координати относно ортонормиран базис дължина и скаларно произведение се пресмятат както в $\mathbb{R}^n$. Тя най-често се прилага по следния начин: Ако базисът e е ортонормиран, то дължината на вектор се пресмята чрез координатите му по формулата в 2., скаларното произведение на вектори се пресмята чрез координатите им по формулата в 3., а координатите на вектор се пресмятат по формулата от 4. (последното приложение се среща по-рядко).

Заествайки получените в горната теорема формули за скаларното произведение и дължината чрез координати спрямо ортонормиран базис в дефинициите на ортогоналност на вектори и ъгъл между вектори, получаваме

Следствие 4 *Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран базис на U и спрямо него $u, v \in U$ имат координатни вектори $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Тогава:*

1. *$u \perp v \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$.*
2. *Ако $u \neq 0$, $v \neq 0$, то*

$$\cos \sphericalangle(u, v) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} {y_i}^2}}, \quad \textit{тоест} \quad \sphericalangle(u, v) = \arccos \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} {y_i}^2}}.$$

Следващото твърдение показва, че в координати относно ортонормиран базис формулите за дължината и за скаларното произведение имат най-прост вид.

Твърдение 11 *Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е произволен базис на U и спрямо него $u, v \in U$ имат координатни вектори $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Тогава*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j, \quad |u| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j},$$

където $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, $i, j = 1, \dots, n$.

Ортогонално допълнение

Нека U е евклидово линейно пространство.

Определение 9 Нека $V \subset U$. *Ортогонално множество на* V се нарича множеството $V^\perp = \{u \in U:\ \forall v \in V\ \ u \perp v\} = \{u \in U:\ \forall v \in V\ \ \langle u, v\rangle = 0\}$.

Пример 6 $\emptyset^\perp = U$.
Това е така, защото всяко $u \in U$ е ортогонално на всички елементи на $\emptyset$.

Пример 7 $\{0\}^\perp = U$.
Това е така, защото всяко $u \in U$ е ортогонално на 0, тоест на всички елементи на $\{0\}$.

Пример 8 $U^\perp = \{0\}$.
Това е така, защото: Ако $u \in U^\perp$, то, тъй като $u \in U$, получаваме $u \perp u$ и следователно $u = 0$. А 0 наистина е в $U^\perp$, защото $0 \perp v$ за всяко $v \in U$. Значи $U^\perp = \{0\}$.

Забележка 13 Първите два примера показват, че може различни множества да имат едно и също ортогонално множество.

Твърдение 12 *Нека V и W са подмножества на U. Тогава:*

1. *$V^\perp$ е линейно подпространство на U.*
2. *Ако $V \subset W$, то $V^\perp \supset W^\perp$.*
3. *$V^\perp = l(V)^\perp$.*
4. *$(V^\perp)^\perp \supset V$.*
5. *$V \bigcap V^\perp = \begin{cases} \emptyset, & \text{ако } 0 \notin V \\ \{0\}, & \text{ако } 0 \in V \end{cases}$.*
6. *Ако V е крайномерно линейно подпространство на U, то $U = V \oplus V^\perp$.*
7. *Ако V е крайномерно линейно подпространство на U, то $(V^\perp)^\perp = V$.*
8. *Ако U е крайномерно и V е линейно подпространство на U, то*
$$\dim V^\perp = \dim U - \dim V.$$
9. *Ако V и W са линейни подпространства на U, то $(V + W)^\perp = V^\perp \bigcap W^\perp$.*

Доказателство:

3. Тъй като $V \subset l(V)$, то от 2. следва $V^\perp \supset l(V)^\perp$.

   За обратното включване: Нека $u \in V^\perp$. Тогава $\langle u, v\rangle = 0$ за всяко $v \in V$. Произволен елемент $w \in l(V)$ има вида $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$, където $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $v_1, \ldots, v_k \in V$. Тогава $\langle u, w\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underbrace{\langle u, v_i\rangle}_{0} = 0$. Значи $\langle u, w\rangle = 0$ за всяко $w \in l(V)$, което означава, че $u \in l(V)^\perp$. Следователно $V^\perp \subset l(V)^\perp$.

   Значи $V^\perp = l(V)^\perp$.

4. Нека $v \in V$. Тогава за всяко $u \in V^\perp$ имаме $\langle u, v\rangle = 0$. Това означава, че $v \in (V^\perp)^\perp$. Следователно $V \subset (V^\perp)^\perp$.

6. Тъй като V е крайномерно, то съществува ортонормиран базис $(e_1, \ldots, e_k)$ на V. Нека $u \in U$. Дефинираме $u^\parallel = \sum_{i=1}^{k} \langle u, e_i\rangle e_i$, $u^\perp = u - u^\parallel$. От самата дефиниция на $u^\parallel$ следва $u^\parallel \in V$. Ще докажем, че $u^\perp \in V^\perp$. За $j = 1, \ldots, k$ имаме

   $$\langle u^\perp, e_j\rangle = \langle u, e_j\rangle - \langle u^\parallel, e_j\rangle = \langle u, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle u, e_i\rangle \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{\substack{0 \text{ при } i \neq j \\ 1 \text{ при } i = j}} = \langle u, e_j\rangle - \langle u, e_j\rangle = 0.$$

   Това означава, че $u^\perp \in \{e_1, \ldots, e_k\}^\perp$. Но по 3. имаме $\{e_1, \ldots, e_k\}^\perp = l(e_1, \ldots, e_k)^\perp$, а тъй като $(e_1, \ldots, e_k)$ е базис на V, то $l(e_1, \ldots, e_k) = V$. Така че $\{e_1, \ldots, e_k\}^\perp = V^\perp$ и следователно $u^\perp \in V^\perp$.

   И така, V е линейно подпространство, от 1. знаем, че $V^\perp$ също е линейно подпространство, и за всяко $u \in U$ имаме, че $u = u^\parallel + u^\perp$, като $u^\parallel \in V$, $u^\perp \in V^\perp$. Това означава, че $U = V + V^\perp$. Освен това от 5. следва $V \cap V^\perp = \{0\}$, защото $0 \in V$, тъй като V е линейно подпространство. Следователно сумата е директна, тоест $U = V \oplus V^\perp$.

9. Тъй като $V + W \supset V$ и $V + W \supset W$, то от 2. следва $(V + W)^\perp \subset V^\perp$ и $(V + W)^\perp \subset W^\perp$ и значи $(V + W)^\perp \subset V^\perp \bigcap W^\perp$.

   За обратното включване: Нека $u \in V^\perp \bigcap W^\perp$. Тогава $\langle u, v\rangle = 0$ за всяко $v \in V$ и $\langle u, w\rangle = 0$ за всяко $w \in W$. Тъй като всеки елемент на $V + W$ има вида $v + w$, където $v \in V$, $w \in W$, и $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle = 0$, то $u \in (V + W)^\perp$. Следователно $V^\perp \bigcap W^\perp \subset (V + W)^\perp$.

   Значи $(V + W)^\perp = V^\perp \bigcap W^\perp$. □

Забележка 14 Свойството 8. в горното твърдение е вярно и когато U е безкрайномерно, а V е крайномерно (и следователно при произволно U и крайномерно V), ако се уговорим да считаме $\infty -$ (крайно число) $= \infty$.

Определение 10 Ако V е крайномерно линейно подпространство на U, то $V^\perp$ се нарича *ортогонално допълнение на* V *в* U (заради разлагането $U = V \oplus V^\perp$).
Ако $u \in U$ и относно разлагането $U = V \oplus V^\perp$ имаме $u = u^\parallel + u^\perp$, то $u^\parallel \in V$ се нарича *ортогонална проекция на* u *във* V, а $u^\perp \in V^\perp$ се нарича *ортогонална* (или *нормална*) *към* V *компонента на* u.

От доказателството на 6. на Твърдение 12 получаваме:

Твърдение 13 *Нека* V *е крайномерно линейно подпространство на* U *и* $(e_1, \ldots, e_k)$ *е ортонормиран базис на* V*. Тогава за* $u \in U$ *имаме*

$$u^\parallel = \sum_{i=1}^{k} \langle u, e_i \rangle e_i, \quad u^\perp = u - u^\parallel = u - \sum_{i=1}^{k} \langle u, e_i \rangle e_i.$$

Забележка 15 Ако U е крайномерно, то 6., 7., 8. на Твърдение 12, Определение 10 и Твърдение 13 важат за всяко линейно подпространство на U (защото всяко линейно подпространство на крайномерно линейно пространство е крайномерно).