21. Производна на съставна и на обратна функция

Производна на съставна функция

Теорема 1

Нека $f : (a,b) \to (A,B)$ и $g : (A,B) \to \mathbb{R}$ са диференцируеми. Тогава съставната функция $h(x) := g(f(x))$ е диференцируема в (a,b) и $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$, $x \in (a,b)$.

Д-во: За да видим откъде произлиза формулата, ще докажем теоремата при допълнителното предположение, че $f(x)$ е строго монотонна.
Нека $x_0 \in (a,b)$ е произволно фиксирано. Полагаме $y_0 := f(x_0) \in (A,B)$. Разглеждаме диференчното частно на $h(x)$ в т. x_0. Имаме

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(y_0)}{f(x)-y_0}\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{1}$$

Понеже $f(x)$ е диференцируема в т. x_0, имаме, че

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0). \tag{2}$$

Понеже $g(y)$ е диференцируема в т. y_0, имаме, че

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0). \tag{3}$$

Щом $f(x)$ е диференцируема в т. x_0, то тя е непрекъсната в т. x_0. Следователно $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$. Имаме още, че $f(x) \neq y_0$ при $x \neq x_0$.
Сега от (3) и теоремата за граница на съставна функция (т-ма 4 в тема 10) следва

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(y_0)}{f(x) - y_0} = g'(y_0). \tag{4}$$

Накрая от (1), (2) и (4) следва твърдението на т-мата в т. x_0, а тя бе произволно фиксирана в (a, b).

Производна на обратна функция

Теорема 2

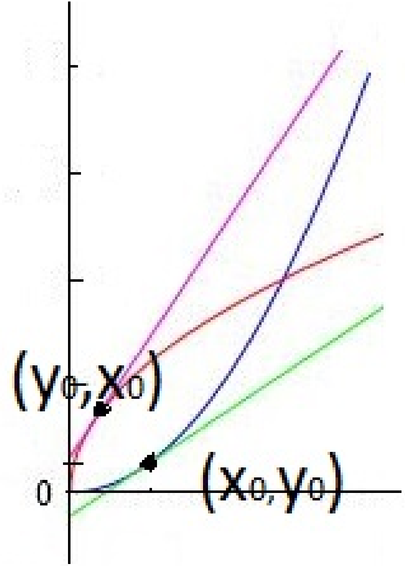
Нека $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ е строго монотонна и диференцируема, като $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Тогава обратната функция на $f(x)$ е също диференцируема и $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \quad y \in f((a, b))$.

Д-во: Вече доказахме, че всяка строго монотонна функция е обратима (тема 15), както и че областта от стойности на непрекъсната функция, дефинирана върху интервал, също е интервал (тема 14), така че $f((a, b))$ е интервал. Непосредствено се убеждаваме, че $f((a, b))$ е по-точно отворен интервал.

Ще докажем теоремата чрез геометрични аргументи.

Нека $y_0 \in f((a, b))$ е произволно фиксирано и $x_0 \in (a, b)$ е единственото такова, че $f(x_0) = y_0$. Тогава $f^{-1}(y_0) = x_0$.

Щом $f(x)$ е диференцируема в т. x_0, то съществува допирателната към графиката на $f(x)$ в т. (x_0, y_0). Нейното уравнение е $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.
Графиката на $f^{-1}(x)$ е симетрична на графиката на $f(x)$ относно ъглополовящата на първи и трети квадрант.
Следователно съществува допирателната към графиката на $f^{-1}(x)$ в т. (y_0, x_0). Тя се явява симетрична на допирателната към графиката на $f(x)$ в т. (x_0, y_0) относно ъглополовящата на първи и трети квадрант. Следователно уравнение на допирателната към графиката на $f^{-1}(x)$ в т. (y_0, x_0) е $x = f'(x_0)(y - x_0) + y_0$, т.е. $y = \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - y_0) + x_0$ (тук използваме, че $f'(x_0) \neq 0$).
Следователно $f^{-1}(x)$ е диференцириема в т. y_0 и $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ (тук използваме, че производната в дадена точка е равна на ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията в тази точка).
Остана да припомним, че $x_0 = f^{-1}(y_0)$.



синьо — $y = f(x)$

червено — $y = f^{-1}(x)$

зелено — допирателната към графиката на $f(x)$ в точката (x_0, y_0), $y_0 = f(x_0)$,
нейното уравнение е

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ &= f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \end{aligned}$$

лилаво — допирателната към графиката на $f^{-1}(x)$ в точката (y_0, x_0), $x_0 = f^{-1}(y_0)$,
нейното уравнение е

$$\begin{aligned} y &= (f^{-1})'(y_0)(x - y_0) + f^{-1}(y_0) \\ &= (f^{-1})'(y_0)(x - y_0) + x_0 \end{aligned}$$

Бележка

Ако вече сме установили, че обратната на обратима диференцируема функция е диференцируема, можем да получим формулата от предната т-ма, като диференцираме тъждеството

$$f(f^{-1}(y)) = y. \tag{5}$$

Имаме

$$[f(f^{-1}(y))]' = (y)'. \tag{6}$$

Към лявата страна прилагаме формулата за диференциране на съставня функция, а за дясната знаем, че $(y)' = 1$. Получаваме

$$f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1 \tag{7}$$

$$\overset{f'(f^{-1}(y))\neq 0}{\Longrightarrow} \qquad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{8}$$