Лекция 6: Разделени разлики с кратни възли

Гено Николов, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски"

Съдържание на лекцията

- Разделени разлики с кратни възли
- Формула за интерполационния полином на Ермит
- Пресмятане на разделени разлики с кратни възли
- Разделена разлика от произведение на две функции

Обобщение на интерполационната формула на Нютон

Понятието разделена разлика на функция в дадени точки $x_0, \ldots, x_N$ беше въведено при предположение, че точките са различни, т.е. че $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Съществува естествено обобщение на това понятие, което има смисъл и при произволна редица от точки. Тясната връзка между разделена разлика и интерполационната формула на Нютон ни подсказва, че бихме могли да използваме обобщените разделени разлики за построяване на интерполационния полином с кратни възли, т.е. за решаване на интерполационната задача на Ермит. Сега ще въведем обобщените разлики и ще докажем някои техни свойства.

Записване на вектор с кратни възли

Нека $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_N)$ е произволна съвкупност от точки. За нас ще бъде по-удобно да предполагаме, че те са подредени във възходящ ред, $x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_N$. Нека f е достатъчно гладка функция (т.е. имаща достатъчен брой непрекъснати производни), която е определена в $x_0, \ldots, x_N$. Тъй като точките $\{x_i\}$ не са задължително различни, да си мислим, че те са разделени на n групи от съвпадащи точки. По-точно, нека първите ν_1 точки съвпадат с точката t_1, следващите ν_2 съвпадат с t_2 и т.н., последните ν_n точки съвпадат с t_n , където $t_1 < \cdots < t_n$. Ще записваме това условие накратко така

$$\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_N) \equiv ((t_1, \nu_1), \ldots, (t_n, \nu_n)).$$

Тук (t, ν) означава, че точката t е записана последователно ν пъти в редицата. Ясно е, че $N + 1 = \nu_1 + \cdots + \nu_n$.

Разделени разлики с кратни възли

Определение

Ще казваме, че полиномът p интерполира f в точките $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_N) \equiv ((t_1, \nu_1), \ldots, (t_n, \nu_n))$, ако $p \in \pi_N$ и

$$p^{(j)}(t_i) = f^{(j)}(t_i), \quad i = 1, \ldots, n, \ \ j = 0, \ldots, \nu_i - 1,$$

т.е. ако p интерполира f във възлите $((t_1, \nu_1), \ldots, (t_n, \nu_n))$ в смисъл на Ермит.

Определение

Разделена разлика на функцията f в точките $x_0, \ldots, x_N$ ще наричаме коефициента пред x^N в полинома $p(x)$, който интерполира f в същите точки $x_0, \ldots, x_N$.

Тази обобщена разлика ще бележим отново с $f[x_0, \ldots, x_N]$.

Разделени разлики с кратни възли: пример

Отбелязваме, че това определение е еквивалентно с даденото по-рано определение на разделена разлика в случая, когато точките $x_0, \ldots, x_N$ са различни. Еквивалентността следва от теоремата, идентифицираща разделената разлика $f[x_0, \ldots, x_n]$ с коефициента пред x^n в интерполационния полином на Лагранж $L_n(f; x)$.

Като пример, да намерим разделената разлика $f[a, \ldots, a]$ на f в точката a с кратност $N+1$. Известно е, че полиномът

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!}(x-a)^N,$$

построен по формулата на Тейлър, удовлетворява условието

$$p^{(j)}(a) = f^{(j)}(a), \quad j = 0, \ldots, N.$$

С други думи, полиномът p интерполира f в точката a с кратност $N+1$. От явния вид на p се вижда, че коефициентът му пред x^N е точно равен на $f^{(N)}(a)/N!$.

Интерполационна формула

Следователно, съгласно даденото по-горе определение,

$$f[x_0, \ldots, x_N] = \frac{f^{(N)}(a)}{N!} \quad \text{при } x_0 = \cdots = x_N = a. \tag{1}$$

Основната причина за въвеждането на обобщени разделени разлики се разкрива в следното твърдение.

Теорема 1

Нека $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_N)$, $a \le x_0 \le \cdots \le x_N \le b$, са произволни точки. Да предположим, че f има N непрекъснати производни в $[a, b]$. Тогава полиномът

$$p(\mathbf{x}, f; t) := f(x_0) + \sum_{k=1}^{N} f[x_0, \ldots, x_k](t - x_0) \cdots (t - x_{k-1}) \tag{2}$$

интерполира f в точките $\mathbf{x}$.

Доказателство на Теорема 1

Доказателство. Ще приложим индукция по броя на точките. При $N = 0$ имаме $p(\mathbf{x}, f; t) = f(x_0)$ и твърдението е очевидно вярно. Да допуснем, че теоремата е вярна за произволни N точки. Нека $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_N)$ е множество от произволни $N + 1$ точки, $x_0 \leq \cdots \leq x_N$. Както вече знаем от лекцията за интерполационна задача на Ермит, съществува единствен полином $H(t)$ от π_N, който интерполира f в точките $\mathbf{x}$. Ще покажем, че $H(t) \equiv p(\mathbf{x}, f; t)$. Съгласно индукционното предположение полиномът

$$p_1(t) := \sum_{k=0}^{N-1} f[x_0, \dots, x_k](t - x_0) \cdots (t - x_{k-1})$$

интерполира f в точките $x_0, \dots, x_{N-1}$. Тъй като

$$p(\mathbf{x}, f; t) = p_1(t) + f[x_0, \dots, x_N](t - x_0) \cdots (t - x_{N-1}),$$

полиномът $p(\mathbf{x}, f; t)$ също ще интерполира f в $x_0, \dots, x_{N-1}$.

Доказателство на Теорема 1 (продължение)

Оттук следва, че полиномът $R(t) := H(t) - p(\mathbf{x}, f; t)$ ще се анулира в $x_0, \ldots, x_{N-1}$. И така, R има поне N нули. Но водещият коефициент (този пред t^N) в $p(\mathbf{x}, f; t)$ е $f[x_0, \ldots, x_N]$ по построение, а коефициентът пред t^N в $H(t)$ е също $f[x_0, \ldots, x_N]$, съгласно определението на обобщена разделена разлика. Следователно, коефициентът пред t^N в $R(t)$ е равен на нула. Това означава, че $R(t)$ е алгебричен полином от степен най-много $N - 1$. Видяхме вече, че $R(t)$ има поне N нули. Следователно, по основната теорема на алгебрата, $R(t) \equiv 0$ и оттук, $H(t) \equiv p(\mathbf{x}, f; t)$. Индукцията е завършена и теоремата е доказана. □

Теорема 1 показва, че интерполационната формула на Нютон остава в сила и при произволни (не задължително различни) възли $x_0, \ldots, x_N$. Този факт ни позволява да използваме класическата формула на Нютон за решаване на по-сложната задача на Ермит.

Лема

Практическото приложение на Теорема 1 изисква ефективен метод за пресмятане на обобщените разделени разлики на дадена функция. Сега ще покажем, че простата схема за пресмятане на обикновени разделени разлики може да се пригоди за пресмятане на разделени разлики в общия случай. За целта най-напред ще докажем една лема, която има и самостоятелно значение.

Лема 1

Нека $\xi, t_1, \ldots, t_m$ са произволни точки и f е достатъчно гладка функция, определена в тях. Тогава

$$\{(x-\xi)f(x)\}[\xi, t_1, \ldots, t_m] = f[t_1, \ldots, t_m]\,. \tag{3}$$

Доказателство на Лема 1

Доказателство. Да поясним, че лявата страна на (3) е разделена разлика на функцията $(x-\xi)f(x)$ в точките $\xi, t_1, \dots, t_m$.

Нека p е полиномът от π_{m-1}, който интерполира f в $t_1, \dots, t_m$. Тогава $q(x) := (x-\xi)p(x)$ е полином от π_m, който интерполира функцията $(x-\xi)f(x)$ в точките $\xi, t_1, \dots, t_m$. Съгласно определението на обобщена разделена разлика, лявата страна на (3) е коефициентът пред x^m в q, а дясната страна съвпада с коефициента пред x^{m-1} в p. Но тези два коефициента са еднакви поради връзката $q(x) = (x-\xi)p(x)$. Равенството (3) е доказано. $\square$

Вече сме готови да пристъпим към извеждането на рекурентна връзка за обобщените разделени разлики.

Пресмятане на разделени разлики с кратни възли

Теорема 2

Нека f има k непрекъснати производни в $[a, b]$. Тогава за произволни точки $x_0 \leq \ldots \leq x_k$ от $[a, b]$ е в сила рекурентната връзка

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \begin{cases} \frac{f[x_1,\ldots,x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}, & \text{ако } x_0 < x_k \\ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & \text{ако } x_0 = x_k. \end{cases} \tag{4}$$

Доказателство. Случаят $x_0 = x_k$ следва от доказаната вече формула (1), затова можем да предположим, че $x_0 < x_k$.

Доказателство на Теорема 2

Тъй като разделената разлика е линеен функционал, то

$$(x_k - x_0) f[x_0, \ldots, x_k] = \{(x_k - x + x - x_0) f\}[x_0, \ldots, x_k]$$

$$= \{(x_k - x) f\}[x_0, \ldots, x_k] + \{(x - x_0) f\}[x_0, \ldots, x_k] .$$

Но въз основа на Лема 1,

$$\begin{aligned} \{(x_k - x) f\}[x_0, \ldots, x_k] &= -f[x_0, \ldots, x_{k-1}], \\ \{(x - x_0) f\}[x_0, \ldots, x_k] &= f[x_1, \ldots, x_k] . \end{aligned}$$

Следователно, при $x_0 < x_k$ имаме

$$(x_k - x_0) f[x_0, \ldots, x_k] = f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}] ,$$

което е точно връзката в (4). Теоремата е доказана. $\square$

Задача

Изчисляването на обобщените разлики, а оттам и построяването на интерполационния полином на Ермит, може да се организира в проста схема, основаваща се на рекурентната връзка (4). Ще я покажем върху един пример.

Задача.

Да се построи полиномът p от π_3, който удовлетворява интерполационните условия

$$p(0) = 1, \quad p'(0) = 0, \quad p''(0) = 2, \quad p(1) = -1\,.$$

Решение: В този случай имаме $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Съгласно формулата от Теорема 1,

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x_0) + p[x_0, x_1](x - x_0) + p[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + p[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= p(0) + p[0, 0]x + p[0, 0, 0]x^2 + p[0, 0, 0, 1]x^3\,. \end{aligned}$$

Решение на задачата (продължение)

За пресмятане на разделените разлики използваме таблицата по-долу, където първите 2 колони съдържат данните, а следващите се попълват въз основа на (4).

x_i	$p(x_i)$	$p[\cdot,\cdot]$	$p[\cdot,\cdot,\cdot]$	$p[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	1			
		$\boxed{0}$		
0	1		$\boxed{1}$	
		0		$\boxed{-3}$
0	1		-2	
		-2		
1	-1			

Решение на задачата (продължение)

Отбелязаните в квадаратче числа са търсените коефициенти. Получаваме

$$p(x) = 1 + 0.x + 1.x^2 - 3.x^3 = -3x^3 + x^2 + 1\,.$$

С непосредствена проверка се вижда, че намереният полином удовлетворява исканите интерполационни условия.

$\square$

Непрекъснатост на разделените разлики

След като имаме определението на разделена разлика за всяка редица $x_0, \ldots, x_N$ от различни точки, бихме могли да разширим това определение и за произволни точки по непрекъснатост (т.е. чрез граничен преход). Например, можехме да определим разделена разлика на f в точка a с кратност 2 с най-естественото равенство

$$f[a, a] = \lim_{h \to 0} f[a, a + h] \,.$$

Тъй като

$$\lim_{h \to 0} f[a, a + h] = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a) \,,$$

ако f е диференцируема функция в a, то при този подход бихме получили $f[a, a] = f'(a)$, т.е., точно резултатът, който вече получихме и при възприетото от нас определение. Оказва се, че двата подхода водят до един и същ резултат не само в този частен случай. Те са еквивалентни.

Непрекъснатост на разделените разлики

Това твърдение следва от свойството непрекъснатост на въведената от нас обобщена разделена разлика. Ще го формулираме като теорема, без да се спираме на доказателството му.

Теорема 3

Нека $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_N)$ е произволен набор от точки и $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$, т.е.

$$|x_i - y_i| \to 0 \qquad i = 0, \dots, N\,.$$

Тогава, ако f има непрекъсната N−та производна в интервал съдържащ възлите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, то $f[x_0, \dots, x_N] \to f[y_0, \dots, y_N]\,.$

Представяне на остатъка

Да отбележим още, че ако f е достатъчно гладка функция, остатъкът при интерполиране в произволни точки $x_0, \ldots, x_N$ може да се представи във вида

$$f(x) - p(\mathbf{x}, f; x) = f[x_0, \ldots, x_N, x](x - x_0) \cdots (x - x_N).$$

Това следва чрез граничен преход от изведената вече формула в случая на различни възли.

Ще завършим тази лекция с едно правило за пресмятане на разделена разлика на произведение на две функции. То наподобява (и всъщност включва като частен случай) известното правило на Лайбниц за производна на произведение от две функции.

Разделена разлика от произведение на две функции

Лема на Стефенсон-Поповичу

За произволни точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и достатъчно гладки функции f и g, определени в тях, е в сила представянето

$$(fg)[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k]\, g[x_k, \ldots, x_n]\,.$$

Доказателство. Ще приложим индукция по броя на точките. За една точка имаме $(fg)[x_0] = f(x_0)g(x_0) = f[x_0]g[x_0]$ и твърдението е очевидно вярно. Да допуснем, че то е вярно за произволни n точки. Нека $x_0, \ldots, x_n$ са произволни $n+1$ точки. Представяме f по интерполационната формула на Нютон:

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x](x - x_0). \tag{5}$$

Доказателство на лемата на Стефенсон-Поповичу

Тогава

$$(fg)[x_0,\ldots,x_n] = \{(f(x_0)+f[x_0,x](x-x_0))g(x)\}[x_0,\ldots,x_n]$$

$$= f(x_0)g[x_0,\ldots,x_n] + \{f[x_0,x](x-x_0))g(x)\}[x_0,\ldots,x_n].$$

Но по Лема 1,

$$\{f[x_0,x](x-x_0))g(x)\}[x_0,\ldots,x_n] = \{f[x_0,x]g(x)\}[x_1,\ldots,x_n].$$

Прилагаме индукционното предположение за последното произведение и получаваме

$$(fg)[x_0,\ldots,x_n] = f(x_0)g[x_0,\ldots,x_n] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0,x][x_1,\ldots,x_k]\, g[x_k,\ldots,x_n].$$

Доказателство на лемата на Стефенсон-Поповичу

От тук и от равенството $f[x_0, x][x_1, \ldots, t_m] = f[x_0, x_1, \ldots, x_m]$, $m \geq 1$, заключаваме, че формулата на Стефенсон-Поповичу е вярна и за произволни $n + 1$ точки, с което индукционната стъпка е направена. Последното равенство лесно следва от формулата (5) и Лема 1. Наистина, имаме

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \ldots, x_m] &= \{f(x_0) + f[x_0, x](x - x_0)\}[x_0, x_1, \ldots, x_m] \\ &= \{f[x_0, x](x - x_0)\}[x_0, x_1, \ldots, x_m] \\ &= f[x_0, x][x_1, \ldots, x_m] . \end{aligned}$$

Доказателството на лемата е завършено. $\square$

Край на лекцията !