14. Теорема за междинните стойности

Частен случай

Теорема 1 (Болцано)

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и $f(a)f(b) < 0$. Тогава $\exists\, c \in [a, b] : \ f(c) = 0$.

Д-во: Да предположим, че $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$.
Случаят $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ се свежда към първия, като разгледаме $-f$ вместо f.

Разглеждаме множеството $M := \{x \in [a, b] : f(x) > 0\}$.
То е непразно ($a \in M$) и ограничено отгоре ($x \leq b \quad \forall x \in M$).
От Пр. за непрекъснатост следва, че то има точна горна граница.
Да я означим с c, т.е. $c := \sup M$.

Ще докажем, че $f(c) = 0$.

Имаме $c \in [a, b]$, защото

$a \in M$ и c е горна граница на $M \implies a \leq c$
и
b е горна граница на M и c е точната горна граница на $M \implies c \leq b$.

Ако допуснем, че $f(c) > 0$, от непрекъснатостта на $f(x)$ в т. c следва, че $\exists\, \delta > 0: \ f(x) > 0$ за $x \in (c - \delta, c + \delta)$.
Но така излиза, че в M има числа, които са $> c$, и следователно c не е горна граница на M — противоречие.

Аналогично, ако допуснем, че $f(c) < 0$, от непрекъснатостта на $f(x)$ в т. c следва, че $\exists\, \delta > 0: \ f(x) < 0$ за $x \in (c - \delta, c + \delta)$.
Също така от дефиницията на c непосредствено следва, че $f(x) \leq 0$ при $x > c$.
Така излиза, че в M няма числа, които са $> c - \delta$, т.е.
$x \leq c - \delta \quad \forall x \in M$.
Следователно M има горна граница $< c$ — противоречие.

Така остава, че единствено е възможно $f(c) = 0$.

Теорема за междинните стойности

Теорема 2 (т-ма за междинните стойности)

Непрекъсната функция, дефинирана в интервал, приема за стойност всяко число между кои и да е две свои стойности, тоест, ако $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната, $D \subseteq \mathbb{R}$ е интервал и y_0 е между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, където $x_1, x_2 \in D$, то $\exists\, x_0 \in D : f(x_0) = y_0$.

Д-во: Ще сведем твърдението на теоремата към нейния частен случай, доказан в Т-ма 1.
Нека за определеност $x_1 < x_2$.
Разглеждаме функцията $g(x) := f(x) - y_0$ при $x \in [x_1, x_2]$.
Щом D е интервал и $x_1, x_2 \in D$, то $[x_1, x_2] \subseteq D \quad \Longrightarrow \quad f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в $[x_1, x_2]$.
Следователно $g(x)$ е непрекъсната в $[x_1, x_2]$.
Щом y_0 е между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, то $g(x_1)g(x_2) < 0$.
Прилагаме Т-ма 1 към $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$. Следователно $\exists\, x_0 \in [x_1, x_2] : g(x_0) = 0$, т.е. $f(x_0) - y_0 = 0$, т.е. $f(x_0) = y_0$.

Важно следствие

Следствие

Областта от стойности на непрекъсната функция, дефинирана върху интервал, е интервал.

Д-во: Нека $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и $D \subseteq \mathbb{R}$ е интервал. Ще докажем, че $f(D)$ е интервал.

Случаят, в който D се състои от една точка, е тривиален. Нека D има ненулева дължина.
Ако $f(D)$ е ограничено отдолу, полагаме $a := \inf f(D)$ (Пр. за непр.), иначе полагаме $a := -\infty$.
Ако $f(D)$ е ограничено отгоре, полагаме $b := \sup f(D)$ (Пр. за непр.), иначе полагаме $b := +\infty$.
Щом D има ненулева дължина, то $a \neq b$; по-точно $a < b$.

Ще покажем, че $f(D)$ е интервал с краища a и b.

От дефиницията на a и b следва, че в $f(D)$ няма числа, които са $< a$ или $> b$.

Остава да се убедим, че каквото и y_0 да вземем, което се намира строго между a и b, то

$$\exists\, x_0 \in D : f(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Щом y_0 е строго между a и b, то $\exists\, y_1, y_2 \in f(D) : \; y_1 < y_0 < y_2$.

Сега Т-ма 2 влече (1).