27. Критерий за константност. Критерий за монотонност

Критерий за константност

Теорема 1 (критерий за константност)

Нека $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ е диференцируема. Тогава
$f(x) \equiv \mathrm{const} \iff f'(x) \equiv 0$.

Д-во: Ако $f(x) \equiv \mathrm{const}$, то $f'(x) \equiv 0$, защото $(\mathrm{const})' = 0$.

Обратно, нека $f'(x) \equiv 0$. Според формулата за крайните нараствания имаме, че за всеки $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ такова, че

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0. \tag{1}$$

Така установихме, че $f(x_1) = f(x_2)$ за всеки $x_1, x_2 \in (a, b)$.
Следователно $f(x) \equiv \mathrm{const}$.

Следствие

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Ако $f'(x) \equiv 0$ в (a, b), то $f(x) \equiv \mathrm{const}$ в $[a, b]$.

Пример

Ще докажем основното тригонометрично т-во:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Въвеждаме функцията $f(x) := \cos^2 x + \sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$. Тя е диференцируема и

$$f'(x) = 2\cos x(-\sin x) + 2\sin x \cos x = 0 \quad \forall x. \tag{3}$$

Сега от Критерия за константност следва, че $f(x) \equiv \mathrm{const}$.
За да намерим тази константа, пресмятаме стойноста на $f(x)$ в някоя удобна стойност на x.
В случая това лесно става при $x = 0$.
Имаме $f(0) = \cos^2 0 + \sin^2 0 = 1 + 0 = 1$.
Така установихме, че $f(x) = f(0) = 1$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Критерий за монотонност

Теорема 2 (критерий за монотонност)

Нека $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ е диференцируема. Тогава:

(а) $f(x)$ е монотонно растяща в $(a, b) \iff f'(x) \geq 0$ в (a, b);

(б) $f(x)$ е монотонно намаляваща в $(a, b) \iff f'(x) \leq 0$ в (a, b);

(в) $f(x)$ е строго монотонно растяща в (a, b), ако $f'(x) > 0$ в (a, b);

(г) $f(x)$ е строго монотонно намаляваща в (a, b), ако $f'(x) < 0$ в (a, b).

Д-во: (а) Нека $f(x)$ е монотонно растяща в (a, b). Тогава за произволно фиксирано $x_0 \in (a, b)$ имаме

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in (a, b),\ x \neq x_0. \tag{4}$$

Следователно

$$f'(x_0) \overset{\text{по деф.}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \tag{5}$$

Тук $x_0 \in (a, b)$ бе произволно фиксирано.

Нека сега $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in (a, b)$. Нека $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, са произволно фиксирани. Според формулата за крайните нараствания имаме, че $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ такова, че

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \tag{6}$$

Понеже $f'(c) \geq 0$, оттук следва, че $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, т.е. $f(x_1) \leq f(x_2)$. Точките $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, бяха произволно фиксирани. Следователно така установихме, че $f(x_1) \leq f(x_2)$ за всеки $x_1, x_2 \in (a, b)$ такива, че $x_1 < x_2$. Това точно означава, че $f(x)$ е монотонно растяща в (a, b).

(б) Прилагаме (а) към ф-цията $-f(x)$.

(в) От (6) следва $f(x_1) < f(x_2)$ за всеки $x_1, x_2 \in (a, b)$ такива, че $x_1 < x_2$.

(г) Прилагаме (в) към ф-цията $-f(x)$.