Лема 0.1. *Рангът на всеки връх x $\rho(x)$ е точно броят на неговите деца $d(x)$. Нещо повече, ако в период от време x, в който x не е корен, $\rho(x)$ може да намалее най-много веднъж и това се случва когато бъде маркиран.*

Доказателство. Да забележим, че рангът се променя на редове @5 в DetachRecur и @18 в Consolidate. В първия случай, върхът намалява ранга си и непосредствено след това губи едно от децата си, а във втория се увеличава с единица непосредствено след като е получил ново дете. При инициализацията е очевидно, че полагайки рангът да бъде 0, осигуряваме той да е равен на броя на децата на новия връх.

Втората част също е ясна. Ако даден връх не е корен и намали своята степен за първи път, той бива маркиран. Следователно това се случва на ред @5 в DetatchRecur. Ако той загуби за втори път свое дете, то за него се изпълнява за втори път @5 в DetachRecur и тъй като той вече е маркиран, за него ще се изпълни @9 в DetachRecur и той съответно ще стане корен. $\square$

Лема 0.2. *Нека x е връх от степен $d(x) = d$ във фибоначиева пирамида и y_1, y_2,..., y_d са синовете на x, подредени в нарастващ ред по тяхната степен. Тогава:*

$$d(y_i) \geq \begin{cases} i-1 \text{ ако } y_i \text{ не е маркиран} \\ i-2 \text{ ако } y_i \text{ ако е маркиран.} \end{cases}$$

Доказателство. Разбира се, това свойство е изпълнено когато се трие връх, защото тогава даден връх x губи някой от синовете си и условията тривиално се запазват. В този случай, трябва да разгледаме още и бащата $p(x)$ на x, x е маркиран и ако той е бил j-ти по ред и не си променя относителния ред, то твърдението следва. Ако той си сменя относителния ред, то той може единствено да намалее и без ограничение може да предполагаме, че елементът w, който идва на j-та позиция е с ранг $d(w) > d'(x) = d(x) - 1$. Следователно, $d(w) \geq d(x) \geq j-1$, относителният ред на x като син на $p(x)$ ще е $i < j$, тоест $d'(x) = d(x)-1 \geq j-2 \geq i-1$.

При сливане на два върха, x' и x'', от Attach, $d(x') = d(x'')$. Непосредствено след това, $d'(x') = d(x') + 1$ и x'' е син на x' от степен $d(x'') \geq d(x') - 1 = d'(x') - 2$. $\square$

Лема 0.3. *Ако x е връх от степен $d(x) = d$, то в поддървото на x във фибоначиева пирамида има поне f_d елемента, където f_d е $(d+1)$-тото число на Фибоначи.*

Доказателство. От горната лема, имаме $|T_x| \geq 1 + \sum_{i=1}^{d} |T_{y_i}|$ и разсъждавайки по индукция, това означава:

$$|T_x| \geq 1 + 1 + \sum_{i=2}^{d} f_{i-1} \geq 1 + \sum_{i=0}^{d-1} f_i = f_{d+1}.$$

$\square$

Лема 0.4. *След всяка операция ExtractMin, във фибоначиева пирамида с общ брой елементи n броят на корените е $O(\log n)$.*

Доказателство. Тъй като при ExtractMin се прилага Consolidate, то след тази операция, всички корени имат различна степен. Нека $D = \max\{d(r) \mid r \text{ е корен}\}$. От горната лема, в корена от степен D има поне f_D елемента. От друга страна, този брой не надвишава общия брой елементи в пирамидата, тоест $f_D \leq n$. Оттук получаваме, $D \in O(\log n)$. Тъй като броят на корените не надминава $D + 1$, то това завършва доказателството. $\square$

Лема 0.5. *Операцията нека EM' и EM'' са две операции ExtractMin, между които няма други операции ExtractMin, но има x добавени елемента и d $DecreaseKey$ и u размаркирания на елементи. Тогава операцията EM'' отнема $O(\log n' + x + u + d)$ време, където n' е броят на елементите в пирамидата след EM'.*

Доказателство. Според предишната лема, броят на корените в пирамидата след EM' е $\log n'$. След това, той нараства с единица при всяко добавяне на елемент; нараства с единица при всяка операция $DecreaseKey$, която води до връх, чиято стойност е по-малка от тази на баща му – не повече от d и най-накрая, нараства с единица когато някой връх е бил маркиран и бива размаркиран и добавян като корен – общо u. Тъй като операцията EM'' има сложност пропорционална на броя на корените непосредствено преди нея са $\le \log n' + x + u + d$, оценката следва. □

Лема 0.6. *Нека dk е общият брой операции $DecreaseKey$. Тогава, общият брой размаркирания не надвишава dk.*

Доказателство. Нека u_i и m_i е броят размаркирания и броят маркирани върхове преди $(i+1)$-тата операция $DecreaseKey$. Ясно е, че тези стойности се променят само от $DecreaseKey$. При $(i+1)$-та операция $DecreaseKey$, размаркиранията се увеличават с не повече $(m_i - m_{i+1}) + 1$. Следователно:

$$u_{i+1} \le u_i + (m_i - m_{i+1}) + 1.$$

Оттук получаваме, че $u \le 0 + \sum_{i=0}^{dk}((m_i - m_{i+1}) + 1) = 0 + dk + 0 - m_{dk+1} \le dk$. □

Лема 0.7. *Амортизираната сложност на ExtractMin е $O(\log m)$, където m е максималният брой елементи, които някога е имало в пирамидата.*

Доказателство. Нека операциите ExtractMin са $EM_1, EM_2, \ldots, EM_t$ в този ред, а x_i, u_i, d_i са съответно: брой добавяния, брой размаркирания и брой операции $DecreaseKey$ преди EM_{i+1}. Тогава, ако n_i е броят елементи в пирамидата след EM_i, то операцията EM_{i+1} отнема не повече $O(\log m + x_i + u_i + d_i)$ време, защото $m \ge n_i$. Сега е ясно, че времето за всички операции $EM_1, EM_2, \ldots, EM_t$ е:

$$O\left(\sum_{i=1}^{t}(\log m + x_i + u_i + d_i)\right) = O(t \log m + x + u + d),$$

където x е общият брой добавени елементи, u – общият брой размаркирания и d е общият брой $DecreaseKey$. Тъй като $u \le d$, то получаваме $O(t \log m + x + 2d)$. От друга страна броят на всички операции е $ops = (t + x + d)$. Следователно средноаритметичното на времето за всички операции $ExtractMin$ разпределено на всички операции е $O((t \log m + x + 2d)/(t + x + d)) = O(\log m + 1)$. □

Лема 0.8. *Амортизираната сложност за $DecreaseKey$ е $O(1)$.*

Доказателство. Нека $DK_1, DK_2, \ldots, DK_s$ са операциите $DecreaseKey$ в този ред. Нека m_i са брой маркирани върхове непосредствено преди DK_{i+1}. Тогава $m_0 = 0$ и времето за DK_{i+1} е $O(m_i - m_{i+1} + 1)$. Сега е ясно, че общото време за всички операции $DecreaseKey$ е:

$$O\left(\sum_{i=1}^{s}(m_i - m_{i+1} + 1)\right) = O(s + m_0 - m_{s+1}) = O(s).$$

Тъй като всички операции са поне s, то амортизираното време за една операция $DecreaseKey$ е $O(1)$. □