Примерни задачи за ортогонализация по метода на Грам-Шмид, ортогонална проекция и перпендикуляр от вектор към подпространство

Задача 1. *Спрямо ортонормиран базис на евклидово пространство V са зададени векторите*

(i) $a_1 = (1, -1, 1, 1)$, $a_2 = (2, 2, -3, -1)$, $a_3 = (1, 5, -3, -1)$;

(ii) $a_1 = (1, -1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 4, -1, 4)$, $a_3 = (3, 7, -1, 7)$,

Да се намерят векторите $b_1, b_2, b_3 \in V$, *които се получават от* a_1, a_2, a_3 *чрез ортогонализация по метода на Грам-Шмидт.*

Решение: (i) Избираме $b_1 = a_1 = (1, -1, 1, 1)$. Търсим такъв вектор $b_2 = a_2 + \lambda_{2,1} b_1$, за който скаларното произведение

$$0 = \langle b_2, b_1 \rangle = \langle a_2, a_1 \rangle + \lambda_{2,1} \langle a_1, a_1 \rangle =$$
$$[2.1 + 2.(-1) + (-3).1 + (-1).1] + \lambda_{2,1}[1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2] = -4 + 4\lambda_{2,1}$$

се анулира. Това изисква $\lambda_{2,1} = 1$ и определя вектора

$$b_2 = a_2 + a_1 = (2, 2, -3, -1) + (1, -1, 1, 1) = (3, 1, -2, 0),$$

ортогонален на $b_1 = a_1$. Следващият вектор $b_3 = a_3 + \lambda_{3,1} b_1 + \lambda_{3,2} b_2$ трябва да е ортогонален на b_1 и на b_2. Следователно

$$0 = \langle b_3, b_1 \rangle = \langle a_3, b_1 \rangle + \lambda_{3,1} \langle b_1, b_1 \rangle =$$
$$= [1.1 + 5.(-1) + (-3).1 + (-1).1] + 4\lambda_{3,1} = -8 + 4\lambda_{3,1}$$

и

$$0 = \langle b_3, b_2 \rangle = \langle a_3, b_2 \rangle + \lambda_{3,2} \langle b_2, b_2 \rangle =$$
$$= [1.3 + 5.1 + (-3).(-2) + (-1).0] + \lambda_{3,2}[3^2 + 1^2 + (-2)^2 + 0^2] = 14 + 14\lambda_{3,2}$$

защото b_1 и b_2 са ортогонални помежду си. В резултат, $\lambda_{3,1} = 2$, $\lambda_{3,2} = -1$ и

$$b_3 = a_3 + 2b_1 - b_2 = (1, 5, -3, -1) + 2(1, -1, 1, 1) - (3, 1, -2, 0) = (0, 2, 1, 1).$$

(ii) Избираме $b_1 = a_1 = (1, -1, 1, -1)$. Търсим такъв вектор $b_2 = a_2 + \lambda_{2,1} b_1$, че

$$0 = \langle b_2, b_1 \rangle = \langle a_2, b_1 \rangle + \lambda_{2,1} \langle b_1, b_1 \rangle =$$
$$= [1.1 + 4.(-1) + (-1).1 + 4.(-1)] + \lambda_{2,1}[1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2] = -8 + 4\lambda_{2,1}.$$

Следователно $\lambda_{2,1} = 2$ и

$$b_2 = a_2 + 2b_1 = (1, 4, -1, 4) + 2(1, -1, 1, -1) = (3, 2, 1, 2).$$

Следващият вектор $b_3 = a_3 + \lambda_{3,1} b_1 + \lambda_{3,2} b_2$ изпълнява равенствата

$$0 = \langle b_3, b_1 \rangle = \langle a_3, b_1 \rangle + \lambda_{3,1} \langle b_1, b_1 \rangle =$$
$$= [3.1 + 7.(-1) + (-1).1 + 7.(-1)] + 4\lambda_{3,2} = -12 + 4\lambda_{3,1}$$

и

$$0 = \langle b_3, b_2 \rangle = \langle a_3, b_2 \rangle + \lambda_{3,2} \langle b_2, b_2 \rangle =$$
$$= [3.3 + 7.2 + (-1).1 + 7.2] + \lambda_{3,2}[3^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2] = 36 + 18\lambda_{3,2},$$

вземайки предвид $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle b_2, b_1 \rangle = 0$. Оттук, $\lambda_{3,1} = 3$, $\lambda_{3,2} = -2$ и

$$b_3 = a_3 + 3b_1 - 2b_2 = (3, 7, -1, 7) + 3(1, -1, 1, -1) - 2(3, 2, 1, 2) = (0, 0, 0, 0).$$

Следователно $a_3 = -3b_1 + 2b_2 \in l(b_1, b_2) = l(a_1, a_2)$.

Задача 2. *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени линейната обвивка $U = l(a_1, a_2, a_3)$ на векторите*

$$a_1 = (1, 2, -1, 0), \quad a_2 = (-1, -5, 1, 1), \quad a_3 = (0, 9, 0, 1)$$

и векторът $v = (1, 1, 1, 1)$. Да се намерят:

(i) ортогонални базиси на подпространството U и на ортогоналното му допълнение $U^{\perp}$;

(ii) ортогоналната проекция v_1 и перпендикулярът h_1 от v към U;

Решение: (i) Прилагаме ортогонализация по метода на Грам-Шмид към векторите a_1, a_2, a_3 и получаваме ортогонален базис

$$b_1 = a_1 = (1, 2, -1, 0),$$

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 = a_2 - \left(\frac{(-1).1 + (-5).2 + 1.(-1) + 1.0}{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 0^2} \right) b_1 =$$
$$= a_2 - \left(\frac{-12}{6} \right) b_1 = a_2 + 2b_1 = (-1, -5, 1, 1) + 2(1, 2, -1, 0) = (1, -1, -1, 1),$$

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle a_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle a_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 =$$
$$= a_3 - \left(\frac{0.1 + 9.2 + 0.(-1) + 1.0}{6} \right) b_1 - \left(\frac{0.1 + 9.(-1) + 0.(-1) + 1.1}{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} \right) b_2 =$$
$$= a_3 - \frac{18}{6} b_1 - \left(\frac{-8}{4} \right) b_2 = a_3 - 3b_1 + 2b_2 =$$
$$= (0, 9, 0, 1) - 3(1, 2, -1, 0) + 2(1, -1, -1, 1) = (-1, 1, 1, 3)$$

на подпространството U.

Вектор $v \in V$ с координати $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ принадлежи на ортогоналното допълнение $U^{\perp}$ на $U = l(a_1, a_2, a_3) = l(b_1, b_2, b_3)$ тогава и само тогава, когато е перпендикулярен на b_1, b_2, b_3. Координатите на векторите са зададени спрямо ортонормиран базис, така че x е координатен стълб на вектор от $U^{\perp}$ точно когато x е решение на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$\left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Прибавяме втория ред към третия и го изваждаме от първия ред, за да сведем към

$$\left(\begin{array}{rrrr} 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Делим третия ред на 4, прибавяме го към първия ред, изваждаме го от втория ред и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrrr} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Делим първия ред на 3, прибавяме към втория ред и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Общото решение на тази хомогенна система линйени уравнения е

$$x_1 = x_3, \quad x_2 = x_4 = 0 \quad \text{за произволно} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Следователно ортогоналното допълнение на U е правата $U^{\perp} = l(c)$, породена от вектора $c = (1, 0, 1, 0)$.

(ii) Търсим вектор $v_1 = x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 \in U$ с реални x_1, x_2, x_3, така че $v - v_1$ да принадлежи на ортогоналното допълнение $U^{\perp}$. За $U = l(a_1, a_2, a_3) = l(b_1, b_2, b_3)$ условието $v - v_1 \in U^{\perp}$ е еквивалентно на

$$0 = \langle v - v_1, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle - x_i \langle b_i, b_i \rangle \quad \text{за} \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Оттук

$$x_1 = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} = \frac{1.1 + 1.2 + 1.(-1) + 1.0}{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$x_2 = \frac{\langle v, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} = \frac{1.1 + 1.(-1) + 1.(-1) + 1.1}{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{0}{4} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\langle v, b_3 \rangle}{\langle b_3, b_3 \rangle} = \frac{1.(-1) + 1.1 + 1.1 + 1.3}{(-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

така че

$$v_1 = \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{3}b_3 = \frac{1}{3}(1,2,-1,0) + \frac{1}{3}(-1,1,1,3) = (0,1,0,1),$$
$$h_1 = v - v_1 = (1,1,1,1) - (0,1,0,1) = (1,0,1,0).$$

По друг начин, търсим перпендикуляра $h_1 = xc \in U^{\perp}$, $x \in \mathbb{R}$, така че

$$v_1 = v - h_1 = v - xc \in U = (U^{\perp})^{\perp} = l(c)^{\perp}.$$

С други думи,

$$0 = \langle v_1, c\rangle = \langle v, c\rangle - x\langle c, c\rangle$$

и

$$x = \frac{\langle v, c\rangle}{\langle c, c\rangle} = \frac{1.1 + 1.0 + 1.1 + 1.0}{1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2} = \frac{2}{2} = 1, \quad h_1 = c = (1,0,1,0),$$
$$v_1 = v - c = (1,1,1,1) - (1,0,1,0) = (0,1,0,1).$$

Задача 3. *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени пространството от решения U на хомогенното линейно уравнение*

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

и векторът $v = (1,1,1,1)$. Да се намерят:
(i) ортогонален базис на подпространството U;
(ii) ортогоналната проекция v_1 и перпендикулярът h_1 от v към U;

Решение: (i) Матрицата от коефициенти $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ на хомогенната система линейни уравнения с пространство от решения U има ранг 1. Следователно размерността на U е $\dim(U) = 4 - 1 = 3$. Избираме решението $c_1 = (1,0,0,1)$. Търсим c_2 като ненулево решение на даденото хомогенно линейно уравнение $x_1 = -x_2 + 2x_3 + x_4$, което е перпендикулярно на решението c_1. Тогава c_2 е решение на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & & & +x_4 & = 0 \end{array} \right. .$$

Например, $c_2 = (0,2,1,0) \in U$. Накрая определяме вектора $c_3 \in U$, ортогонален на c_1 и c_2 като ненулево решение на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & & & +x_4 & = 0 \\ & 2x_2 & +x_3 & & = 0 \end{array} \right. .$$

Матрицата от коефициенти на решаваната хомогенна система линейни уравнения е

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Изваждаме второто уравнение от първото. Умножаваме така полученото първо уравнение по (-2), прибавяме към третото и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Делим третото уравнение на 4. Изваждаме така полученото трето уравнение от второто. Удвояваме третото уравнение, прибавяме към първото и получаваме

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Общото решение на получената хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = \frac{5}{4}x_3, \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_3, \quad x_4 = -\frac{5}{4}x_3 \quad \text{за произволно} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

За $x_3 = 4$ получаваме базис $c_3 = (5, -2, 4, -5)$ на пространството от решения на разглежданата хомогенна система линейни уравнения. Векторите c_1, c_2, c_3 образуват ортогонален базис на U.

(ii) Ортогоналната проекция на v върху U е от вида $v_1 = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 \in U$, така че $v - v_1 \in U^{\perp}$ или $0 = \langle v - v_1, c_i\rangle = \langle v, c_i\rangle - x_i\langle c_i, c_i\rangle$ за $1 \leq i \leq 3$. Пресмятаме

$$x_1 = \frac{\langle v, c_1\rangle}{\langle c_1, c_1\rangle} = \frac{1.1 + 1.0 + 1.0 + 1.1}{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\langle v, c_2\rangle}{\langle c_2, c_2\rangle} = \frac{1.0 + 1.2 + 1.1 + 1.0}{0^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2} = \frac{3}{5},$$

$$x_3 = \frac{\langle v, c_3\rangle}{\langle c_3, c_3\rangle} = \frac{1.5 + 1.(-2) + 1.4 + 1.(-5)}{5^2 + (-2)^2 + 4^2 + (-5)^2} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35}$$

и получаваме

$$v_1 = c_1 + \frac{3}{5}c_2 + \frac{1}{35}c_3 = (1, 0, 0, 1) + \frac{3}{5}(0, 2, 1, 0) + \frac{1}{35}(5, -2, 4, -5) = \left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right),$$

$$h_1 = v - v_1 = (1, 1, 1, 1) - \left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right) = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right).$$

По друг начин, $U^{\perp} = l(c)$ за вектора $c = (1, 1, -2, -1)$, чиито координати са взети от хомогенното уравнение на U. Търсим $h_1 = xc$, $x \in \mathbb{R}$, така че $v_1 = v - h_1 = v - xc \in U = (U^{\perp})^{\perp} = l(c)^{\perp}$. Еквивалентно,

$$0 = \langle v_1, c\rangle = \langle v, c\rangle - x\langle c, c\rangle \quad \text{и} \quad x = \frac{\langle v, c\rangle}{\langle c, c\rangle} = \frac{1.1 + 1.1 + 1.(-2) + 1.(-1)}{1^2 + 1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = -\frac{1}{7}.$$

В резултат,

$$h_1 = -\frac{1}{7}(1, 1, -2, -1) = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right),$$

$$v_1 = v - h_1 = (1, 1, 1, 1) - \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right).$$