15. Монотонни функции. Непрекъснатост на монотонните и на обратните функции

Монотонни функции — дефиниция

Дефиниция

Казваме, че $f : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}$, е:

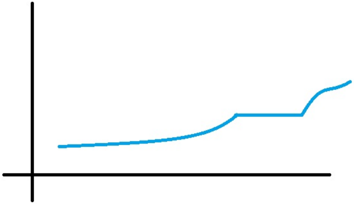
(а) монотонно растяща, ако за всеки $x_1 < x_2$ в D имаме $f(x_1) \leq f(x_2)$,

(б) строго монотонно растяща, ако за всеки $x_1 < x_2$ в D имаме $f(x_1) < f(x_2)$,

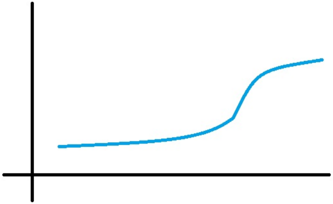
(в) монотонно намаляваща, ако за всеки $x_1 < x_2$ в D имаме $f(x_1) \geq f(x_2)$,

(г) строго монотонно намаляваща, ако за всеки $x_1 < x_2$ в D имаме $f(x_1) > f(x_2)$.

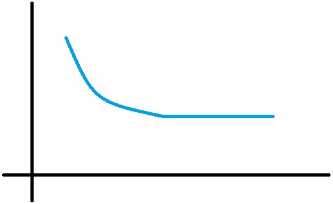
Геометрична илюстрация



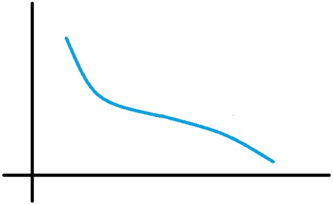
монотонно растяща



строго монотонно растяща

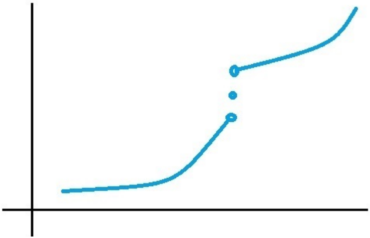


монотонно намаляваща

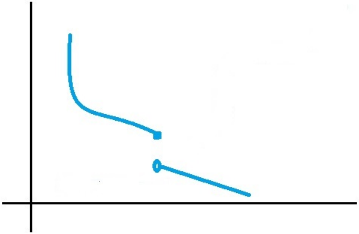


строго монотонно намаляваща

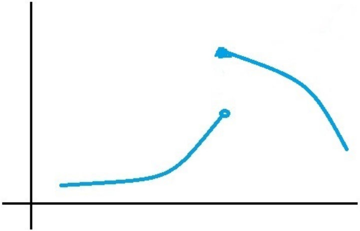
Геометрична илюстрация



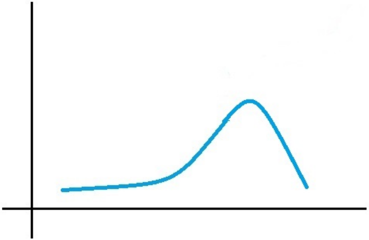
монотонно растяща



монотонно намаляваща



не е монотонна



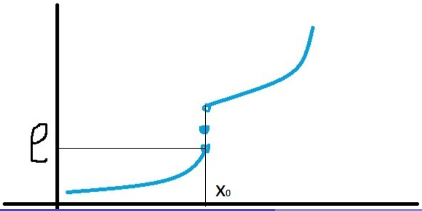
не е монотонна

Монотонни функции — непрекъснатост

Теорема 1

Всяка монотонна функция, дефинирана в интервал, притежава лява и дясна граница във всяка вътрешна точка от дефиниционната си област.

Д-во: Ще разгледаме само случая на монотонно растяща ф-ция. Монотонно намаляващите ф-ции се разглеждат аналогично или можем да използваме, че ако f е монотонно намаляваща, то $-f$ е монотонно растяща. Нека $f : D \to \mathbb{R}$ е монотонно растяща и D е интервал. Нека т. $x_0 \in D$ не е левият край на интервала D. Ще докажем, че $f(x)$ има лява граница в x_0.



Разгл. $M := \{f(x) : x \in D,\ x < x_0\}$. То е непразно и ограничено отгоре от $f(x_0)$. Пол. $\ell := \sup M$. Ще докажем, че $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \ell$.

Разсъждаваме аналогично на доказателството на теоремата за ограничените монотонни редици.
Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогава $\ell - \varepsilon$ не е горна граница на M.
Следователно $\exists\, x_1 < x_0 : f(x_1) > \ell - \varepsilon$. Понеже $f(x)$ е монотонно растяща, то за всяко $x > x_1$ имаме $f(x) \geq f(x_1) > \ell - \varepsilon$.
От друга страна, щом ℓ е горна граница на M, то $f(x) \leq \ell \quad \forall x < x_0$.
Така установихме, че

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_1 < x_0 : \ell - \varepsilon < f(x) \leq \ell \quad \forall x \in (x_1, x_0). \tag{1}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \ell. \tag{2}$$

Аналогично се доказва, че ако т. $x_0 \in D$ не е десният край на D, $f(x)$ има дясна граница в x_0.

Теорема 2

Ако $f : D \to \mathbb{R}$ е мотононна, D е интервал и $x_0 \in D$ не е край на D, то

$$f(x) \text{ е непрекъсната в т. } x_0 \iff \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x). \tag{3}$$

Д-во: В Т-ма 1 доказахме, че лявата и дясната граница на $f(x)$ в т. x_0 съществуват. Нека $f(x)$ е монотонно растяща (случаят на монотонно намаляваща функция се разглежда аналогично).
В неравенството

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x < x_0 \ (x \in D) \tag{4}$$

извършваме граничен преход $x \to x_0 - 0$ и така получаваме

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \leq f(x_0). \tag{5}$$

Аналогично в неравенството

$$f(x_0) \le f(x) \quad \forall x > x_0 \ (x \in D) \tag{6}$$

извършваме граничен преход $x \to x_0 + 0$ и така получаваме

$$f(x_0) \le \lim_{x \to x_0 + 0} f(x). \tag{7}$$

$$(5) \text{ и } (7) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x \to x_0 + 0} f(x). \tag{8}$$

Оттук следва, че

$$\begin{array}{c} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x). \\ \Updownarrow \\ f(x) \text{ е непрекъсната в т. } x_0 \end{array} \tag{9}$$

Бележка

Нека $f : D \to \mathbb{R}$ е мотононна и D е интервал.
(а) Ако D е затворен отляво с ляв край a, то

$$f(x) \text{ е непрекъсната в т. } a \iff \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a). \tag{10}$$

(б) Ако D е затворен отдясно с десен край b, то

$$f(x) \text{ е непрекъсната в т. } b \iff \lim_{x \to b-0} f(x) = f(b). \tag{11}$$

Твърдение

Нека $f : D \to \mathbb{R}$ е мотононно растяща и D е интервал.

(а) Ако D е отворен отляво и ограничен отдолу с ляв край a, то

$$\text{или} \quad \exists \lim_{x \to a+0} f(x), \quad \text{или} \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty. \tag{12}$$

(б) Ако D не е ограничен отдолу, то

$$\text{или} \quad \exists \lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \text{или} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty. \tag{13}$$

(в) Ако D е отворен отдясно и ограничен отгоре с десен край b, то

$$\text{или} \quad \exists \lim_{x \to b-0} f(x), \quad \text{или} \quad \lim_{x \to b-0} f(x) = +\infty. \tag{14}$$

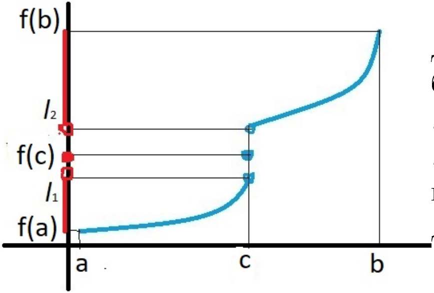
(г) Ако D не е ограничен отгоре, то

$$\text{или} \quad \exists \lim_{x \to +\infty} f(x), \quad \text{или} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty. \tag{15}$$

Аналогично за монотонно намаляващи функции.

Теорема 3

Ако $f : D \to \mathbb{R}$ е мотононна и D и $f(D)$ са интервали, то $f(x)$ е непрекъсната в D.



Д-во: Благодарение на Теорема 2 и бележката след нея знаем, че ако $f(x)$ е прекъсната в точка от D, то $f(D)$ се състои от поне два интервала (които не могат да се сведат до един интервал).

На черт.: $f : D \to \mathbb{R}$, $D = [a, b]$,
$l_1 := \lim\limits_{x \to c-0} f(x)$ и $l_2 := \lim\limits_{x \to c+0} f(x)$.
Имаме
$f(D) = [f(a), l_1) \cup \{f(c)\} \cup (l_2, f(b)]$.

Монотонни функции — обратимост

Теорема 4

Всяка строго монотонна функция е обратима и обратната ѝ е строго монотонна от същия вид.

Д-во: Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, е строго монотонно растяща функция, т.е.

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{за} \quad x_1 < x_2 \ (x_1, x_2 \in D). \tag{16}$$

Оттук веднага следва, че

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{за} \quad x_1 \neq x_2, \tag{17}$$

т.е. $f(x)$ е инекция.
Следователно $f : D \to f(D)$ е биекция и има обратна функция $f^{-1} : f(D) \to D$.

Ще докажем, че $f^{-1}(y)$ е също строго монотонно растяща.
Нека $y_1, y_2 \in f(D)$ са произволни такива, че $y_1 < y_2$.
Ще докажем, че $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Допускаме противното, т.е.

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2). \tag{18}$$

Полагаме $x_1 := f^{-1}(y_1)$ и $x_2 := f^{-1}(y_2)$.
Тогава $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = y_2$.
Според направеното предположение (18), имаме $x_1 \geq x_2$.
$f(x)$ е строго монотонно растяща $\quad\Longrightarrow\quad$ е монотонно растяща

$$\overset{x_2 \leq x_1}{\Longrightarrow} \quad f(x_2) \leq f(x_1) \quad \text{т.е.} \quad y_2 \leq y_1. \tag{19}$$

Противоречие.

Случаят на строго монотонно намаляваща функция се разглежда аналогично.

Непрекъснатост на обратните функции

Теорема 5

Обратната функция на непрекъсната строго монотонна функция, дефинирана в интервал, е също непрекъсната.

Д-во: Нека $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и строго монотонна функция и D е интервал. Както вече показахме в Теорема 4, щом f е строго монотонна, то тя има обратна f^{-1}, която е дефинирана в $f(D)$, и е също строго монотонна.

В Следствието на Т-ма 2 в тема 14 показахме, че областта от стойности на всяка непрекъсната функция, дефинирана върху интервал, е също интервал. Така имаме, че $f(D)$ е интервал.

Прилагаме Теорема 3 към монотонната функция f^{-1}, дефинирана в интервала $f(D)$. За нейната област от стойности имаме $f^{-1}(f(D)) = D$. Следователно тя е интервал и Теорема 3 влече, че f^{-1} е непрекъсната в $f(D)$.