4. Точки на сгъстяване и подредици. Основни свойства. Теорема на Болцано–Вайерщрас. Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост на редици

Точка на сгъстяване на редица

околност на $a \in \mathbb{R}$ — всеки интервал от вида $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$

Дефиниция

Казваме, че $a \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако всяка околност на a съдържа безбройно много членове на редицата.

За сравнение: казваме, че $a \in \mathbb{R}$ е граница на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако всяка околност на a съдържа всички членове на редицата от известно място нататък (това място зависи от околността)
$\Longleftrightarrow$ извън всяка околност на a има само краен брой членове на редицата.

Пример: $0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots$

$1, 1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, \ldots, 1, \frac{1}{n}, \ldots$

Граница и точка на сгъстяване

Твърдение 1

Ако $\ell = \lim a_n$, то ℓ е единствената точка на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Д-во: От $\ell = \lim a_n$ следва, че всяка околност на ℓ съдържа всички членове на редицата от известно място нататък
$\Longrightarrow$ съдържа безбройно много нейни членове
$\Longrightarrow$ ℓ е точка на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Да вземем произволно реално число $a \neq \ell$.
Фиксираме $\varepsilon > 0$ толкова малко, че интервалите

$$(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \quad \text{и} \quad (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \tag{1}$$

да не се пресичат.
Първият интервал съдържа всички членове на редицата от известно място нататък
$\Longrightarrow$ извън него остават само краен брой членове
$\Longrightarrow$ във втория интервал попадат само краен брой членове
$\Longrightarrow$ a не е точка на сгъстяване на редицата.

Подредици

Дефиниция

Ако отстраним част от членовете на редица, но така че да останат безбройно много, получаваме редица, която наричаме нейна подредица.

Примери:

$$1, 2, \ldots, n, \ldots \tag{2}$$

нейни подредици се явяват, например:

$$1, 3, \ldots, 2n-1, \ldots \tag{3}$$

и

$$2, 4, \ldots, 2n, \ldots \tag{4}$$

както и

$$2, 3, \ldots, n+1, \ldots \tag{5}$$

Подредици

Общо означение:

дадена е редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$;

да означим номерата на членове ѝ, които запазваме (остават след отстраняването на членове), с

$$n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \tag{6}$$

Тогава подредицата има вида

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots \tag{7}$$

накратко: $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

Да забележим, че:

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \quad \text{и} \quad n_k \geq k \tag{8}$$

Свойства на подредиците

Твърдение 2

Всяка подредица на сходяща редица също е сходяща и то към същата граница.

Д-во: Нека $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ и $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е подредица на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \quad \Longrightarrow \quad \exists \nu \in \mathbb{R} : \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > \nu \tag{9}$$

$$\overset{n_k \geq k}{\Longrightarrow} \quad |a_{n_k} - \ell| < \varepsilon \quad \forall k > \nu \tag{10}$$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell. \tag{11}$$

Връзка между подредици и точки на сгъстяване

Теорема 1

Ако a е точка на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то съществува подредица на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, която е сходяща с граница a. Обратно, границата на всяка сходяща подредица на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е точка на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема на Болцано-Вайерщрас

Теорема 2 (Б.-В.)

Всяка ограничена редица има точка на сгъстяване.

Еквивалентно (Теорема 1): Всяка ограничена редица има сходяща подредица.

Д-во: Нека $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена редица.

Нека $[a_1, b_1]$ е интервал, който съдържа всичките ѝ членове.

Разделяме $[a_1, b_1]$ чрез средата му на два подинтервала: $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ и $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$.

Поне единият от тях съдържа безбройно много членове на редицата.

Да означим който и да е от тях с това свойство с $[a_2, b_2]$.

Разделяме $[a_2, b_2]$ на два подинтервала чрез средата му.

Поне единият от така получените подинтервали съдържа безбройно много членове на редицата.

Да означим който и да е от тях с това свойство с $[a_3, b_3]$.

Продължавайки така, получаваме безбройно много интервали:

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots, \tag{12}$$

които имат следните свойства:

(а) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \ldots;$

(б) $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}, \quad n = 2, 3, \ldots;$

(в) всеки от тях съдържа безбройно много членове на $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(a) $\implies$

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \quad \implies \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ е монотонно растяща} \tag{13}$$

и

$$b_n \geq b_{n+1} \quad \forall n \quad \implies \quad \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ е монотонно намаляваща} \tag{14}$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ са ограничени (членовете им се съдържат в $[a_1, b_1]$)

Теоремата за ограничените монотонни редици (тема 3)
$\implies$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ са сходящи.

Полагаме $a := \lim a_n$ и $b := \lim b_n$. Ще докажем, че $a = b$.

Според (б)

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \tag{15}$$

В това равенство правим граничен преход $n \to \infty$. Получаваме

$$\begin{array}{ccccc} b_n & - & a_n & = & \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ b & & a & & 0 \end{array} \tag{16}$$

$$\implies \quad b - a = 0 \quad \implies \quad a = b. \tag{17}$$

Ще докажем, че a е точка на сгъстяване на $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано.

$$\lim a_n = \lim b_n = a \quad \Longrightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \ a_{n_0}, b_{n_0} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \tag{18}$$

$$\Longrightarrow \quad [a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \tag{19}$$

(в) $\Longrightarrow$ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ съдържа безбройно много членове на $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$.

т.е. a е точка на сгъстяване на $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$.

НДУ на Коши за сходимост на редици

Дефиниция

Казваме, че $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворява условието на Коши, ако

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{R} : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{при} \quad m, n > \nu. \tag{20}$$

Теорема 3

Редица е сходяща $\iff$ удовлетворява условието на Коши.