11. Редици и редове от функции. Сходимост и равномерна сходимост. Критерий на Вайерщрас

Редици от функции

Дефиниция

Нека $D \subseteq \mathbb{R}$. Ако на всяко естествено число n е съпоставена функция $f_n : D \to \mathbb{R}$, казваме, че е дефинирана редица от функции $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Тя още се обозначава и така

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \tag{1}$$

Функциите се наричат членове на редицата;
$f_n(x)$ се нарича общ член на редицата; този термин се използва, особено когато членовете на редицата се задават с обща формула.

Тези редици още се наричат функционални.

Примери: 1) $x, x^2, \dots, x^n, \dots$; $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$; общ член: $f_n(x) = x^n$.

2) $\sin x, \frac{\sin 2x}{2}, \dots, \frac{\sin nx}{n}, \dots$; $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$; общ член: $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$.

Сходимост на редици от функции

За всяко фиксирано $x \in D$

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \tag{2}$$

представлява числова редица. Стойностите на x, за които тази редица е сходяща, образуват областта на сходимост на функционалната редица $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Понеже границата изобщо зависи от x, тя представлява функция на x, дефинирана в областта на сходимост на редицата. Да означим областта на сходимост на редицата с E, $E \subseteq D$. Пишем

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in E, \tag{3}$$

или

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x), \quad x \in E. \tag{4}$$

Примери

1) $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$; $f_n(x) = x^n$

$$x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0, & x \in (-1,1), \\ 1, & x = 1, \\ +\infty, & x > 1, \\ \nexists, & x \le -1. \end{cases} \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1), \\ 1, & x = 1; \end{cases} \tag{6}$$

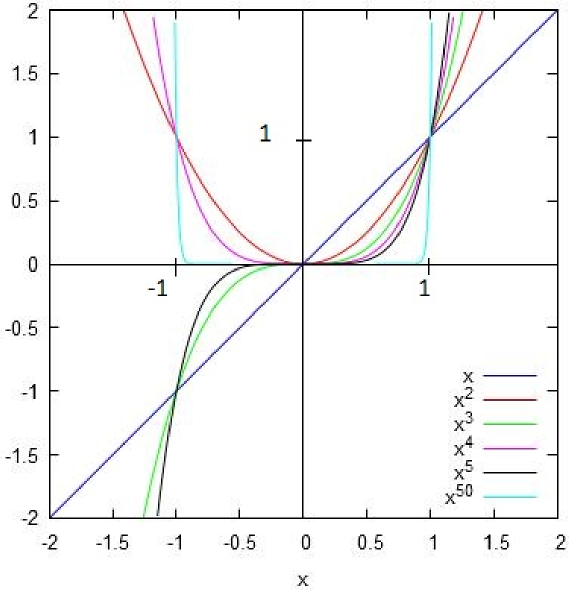
област на сходимост: $(-1, 1]$.

2) $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$; $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$.

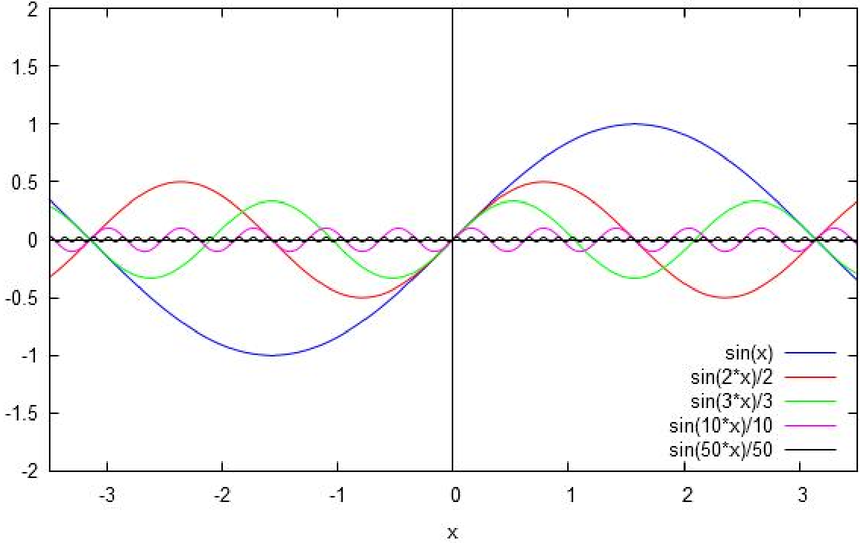
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{7}$$

област на сходимост: $\mathbb{R}$.

$f_n(x) = x^n$



$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$



Равномерна сходимост

Дефиниция

Нека $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от функции, която е сходяща в $E \subseteq \mathbb{R}$, и $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Казваме, че $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща към $f(x)$ в E, ако

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > \nu,\ x \in E. \tag{8}$$

Пишем $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ в E.

Пример: $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.
Знаем, че $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $x \in \mathbb{R}$. Понеже

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \le \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

то дори $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ в $\mathbb{R}$.

Непрекъснатост на равномерна граница

Теорема 1

Равномерна граница на непрекъснати функции е непрекъсната функция. По-точно, ако функциите $f_n(x)$ са непрекъснати в $E \subseteq \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, и редицата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща в E, то нейната граница $f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ също е непрекъсната в E.

Д-во: Нека $x_0 \in E$ е произволно фирсирано. Ще докажем, че

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta,\ x \in E. \tag{10}$$

С това ще сме установили, че $f(x)$ е непрекъсната в т. x_0. След като тя е произволна в E, то така ще сме показали, че $f(x)$ е непрекъсната в E.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано.
Ще използваме неравенството

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - f_n(x_0)] + [f_n(x_0) - f(x_0)]| \\
&\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \quad (11)
\end{aligned}
$$

Понеже $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ в E, можем да направим $|f(x) - f_n(x)|$ колкото искаме малко за всяко $x \in E$ стига да вземем n достататъчно голямо (и то едно и също за всяко x). И така съществува $n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че

$$
|f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in E. \qquad (12)
$$

Функцията $f_{n_0}(x)$ е непрекъсната в т. x_0. Следователно съществува $\delta > 0$ такова, че

$$
|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta,\ x \in E. \qquad (13)
$$

От (11) с $n = n_0$, (12) и (13) следва, че

$$
|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta,\ x \in E. \qquad (14)
$$

Редове от функции

Дефиниция

Нека $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ редица от функции, дефинирани в $D \subseteq \mathbb{R}$. Ред от функции (или още функционален ред) наричаме израз от вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad \text{или, накратко,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{15}$$

Функциите $u_n(x)$ се наричат членове на реда; $u_n(x)$ се нарича общ член на реда; този термин се използва, особено когато членовете на реда се задават с обща формула.

n-та частична сума на реда (15) наричаме функцията

$$S_n(x) := \sum_{i=1}^{n} u_i(x). \tag{16}$$

Дефиниция — продължение

Областта на сходимост на редицата $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ наричаме област на сходимост на реда, а нейната граница — сума на реда, т.е. ако E е областта на сходимост на реда, полагаме

$$S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad x \in E, \tag{17}$$

и наричаме $S(x)$ сума на реда (15).
Сумата още се означава и чрез самото означение за реда в (15) при допълнителното условие x да принадлежи на областта на сходимост на реда.

Примери: 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ или, написано по друг начин, $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$.

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ или, написано по друг начин, $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

Пример: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $u_n(x) = x^n$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \tag{18}$$

Частични суми

$$S_n(x) := \sum_{i=0}^{n} x^i = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & x \neq 1, \\ n+1, & x = 1. \end{cases} \tag{19}$$

Следователно редът е сходящ само за $x \in (-1, 1)$. Това е неговата област на сходимост. А сумата му за $x \in (-1, 1)$ е

$$S(x) \overset{\text{по деф.}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}. \tag{20}$$

Накратко

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{или} \quad \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

Равномерна сходимост

Дефиниция

Казваме, че функционалният ред $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в $E \subseteq \mathbb{R}$, ако функционалната редица от неговите частични суми е равномерно сходяща в E.

Непрекъснатост на сумата на равномерно сходящ ред

Теорема 2

Сумата на равномерно сходящ ред, чиито членове са непрекъснати функции, е непрекъсната функция. По-точно, ако функциите $u_n(x)$ са непрекъснати в $E \subseteq \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в E и $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е неговата сума, то $S(x)$ също е непрекъсната в E.

Д-во: Прилагаме Теорема 1 към функционалната редица с общ член частичната сума на реда

$$S_n(x) := \sum_{i=1}^{n} u_i(x). \tag{21}$$

Критерий на Вайерщрас

Теорема 3 (критерий на Вайерщрас)

Нека $u_n : E \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots,$ удовлетворяват неравенствата

$$|u_n(x)| \le c_n, \quad x \in E, \tag{22}$$

където $c_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ако числовият ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ е сходящ, то функционалният ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в E.

Бележка: Всъщност при направените в теоремата предположения, се доказва, че функционалният ред е също и абсолютно сходящ, т.е. функционалният ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ е сходящ за всяко $x \in E$.