Афинни пространства

Дефиниция и примери

Определение 1 Нека V е реално линейно пространство. Непразното множество A се нарича *афинно пространство, моделирано върху* V (или *с направляващо пространство* V), ако е зададено изображение

$$A \times A \to V : \quad (P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ},$$

което има свойствата:

1. $\forall P \in A$ и $\forall v \in V$ $\exists! Q \in A : \overrightarrow{PQ} = v$.
2. $\forall P, Q, R \in A$ е в сила $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
   (правило на триъгълника за събиране на вектори).

Елементите на A се наричат *точки*.
Размерност на A се нарича размерността на V.

Пример 1 Едноточковото множество $A = \{O\}$ е афинно пространство, моделирано върху тривиалното линейно пространство $V = \{0\}$, тоест е 0-мерно афинно пространство. Това е така, защото:
$A \times A$ има единствен елемент (O, O), а V има единствен елемент 0. Значи има единствено изображение $A \times A \to V$, което се задава с $(O, O) \mapsto 0$, тоест $\overrightarrow{OO} = 0$. Проверката на двете свойства от определението за това изображение е тривиална:

1. Единствената възможност за P е $P = O$, а единствената възможност за v е $v = 0$. Значи трябва да се докаже, че съществува единствена точка $Q \in A$, за която е изпълнено $\overrightarrow{OQ} = 0$. Но в A така или иначе си има единствена точка, а именно O. Така че горното трябва да се провери за $Q = O$ и то наистина е вярно: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OO} = 0$. Значи първото свойство е изпълнено.
2. Единствената възможност за P, Q, R е $P = Q = R = O$. Тогава имаме
   $$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OO} = 0 + 0 = 0 = \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PR}.$$
   Значи и второто свойство е изпълнено.

Пример 2 Нека V е реално линейно пространство. Тогава $A = V$ е афинно пространство, моделирано върху V, с изображението

$$V \times V \to V : \quad (P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ} = Q - P.$$

Това е така, защото:

1. За дадени $P \in A = V$ и $v \in V$ търсим Q, такова че $\overrightarrow{PQ} = v$, тоест $Q - P = v$. И наистина съществува, и то единствено, такова Q, а именно $Q = v + P$. Така че първото свойство е изпълнено.

2. За дадени $P, Q, R \in A = V$ имаме

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (Q - P) + (R - Q) = R - P = \overrightarrow{PR}.$$

   Значи и второто свойство е изпълнено.

Когато линейно пространство се разглежда като афинно, винаги се има предвид тоя пример.

Пример 3 Частен случай на предишния пример: $\mathbb{R}^n$ е n-мерно афинно пространство, моделирано върху себе си.

Пример 4 Геометричното пространство е 3-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство на векторите в пространството.
Геометричната равнина е 2-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство на векторите в равнината (компланарни с равнината).
Геометричната права е 1-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство на векторите върху правата (колинеарни с правата).
Това е така, защото първото свойство сме го проверили в края на въпрос 1, а второто всъщност е дефиницията за събиране на геометрични вектори от въпрос 2.

Тоя пример показва, че всичко, което важи за афинни пространства, важи и в класическата геометрия на пространството и равнината. Така че работейки с афинни пространства получаваме възможността от една страна да формулираме едновременно общите неща от афинната геометрия на пространството и на равнината (а и на права) вместо да ги повтаряме два или три пъти с незначителни изменения, а от друга страна без никакви затруднения да се занимаваме с афинна геометрия в пространства с произволна размерност, тоест да не се ограничаваме с малките размерности 1, 2, 3. (Афинната геометрия е частта от геометрията, в която не се интересуваме от измервания. В нея се интересуваме от взаимното положение на някакви фигури, например пресичане на прави или равнини, или успоредност на прави или равнини, или прави или равнини, минаващи през някакви точки.)

Твърдение 1 *В афинно пространство са в сила свойствата:*

1. $\overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

2. $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

3. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.

4. *Ако* $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, *то* $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ *(свойство на успоредника).*

Доказателство:

1. Ако във второто свойство в определението вземем трите точки да съвпадат, получаваме $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$ и следователно $\overrightarrow{PP} = 0$. С това е доказана обратната посока.

   Щом $\overrightarrow{PP} = 0$, то ако $\overrightarrow{PQ} = 0$, от единствеността в първото свойство в определението, приложено за P и $v = 0$, следва, че $Q = P$. С това е доказана и правата посока.

2. Ако във второто свойство в определението вземем $R = P$, получаваме $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$ и следователно $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

3. Това всъщност е второто свойство в определението за точките O, P, Q: $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$ и следователно $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.

4. Ако $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, то от 3. за точките P, R, S следва $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PR}$. Следователно $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QS}$, като второто равенство следва от 3. за точките P, Q, S. $\square$

Ако човек сравни горното доказателство на свойството на успоредника с доказателството на същото свойство от въпрос 1, то може би ще се засили в голяма степен вярата му в правдоподобността на твърдението, че изграждането на геометрията въз основа на понятията линейно пространство и афинно пространство е значително по-просто от класическия подход, известен от училището.

Забележка 1 В горните неща (с изключение на Пример 4) никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че те важат без промяна и ако V е линейно пространство над произволно поле F.

Ориентация

Определение 2

1. *Ориентация* в крайномерно афинно пространство е ориентация в направляващото линейно пространство.

2. Казваме, че крайномерно афинно пространство е *ориентирано*, ако е избрана едната от двете възможни ориентации (тоест, ако направляващото пространство е ориентирано). Избраната ориентация се нарича *положителна*, а другата – *отрицателна*.

Забележка 2 Ориентация върху права се нарича още *посока върху правата*, а ориентирана права – *ос*. Ориентация в равнина се нарича още *посока на въртене в равнината*.

Пример 5 $\mathbb{R}^n$, разглеждано като линейно пространство, се счита ориентирано чрез стандартната ориентация (тоест чрез дефинираната от стандартния базис ориентация). Следователно получаваме *стандартна ориентация* в $\mathbb{R}^n$, разглеждано като афинно пространство.

Евклидови афинни пространства

Определение 3 *Евклидово афинно пространство* е афинно пространство, чието направляващо линейно пространство е евклидово линейно пространство (тоест в направляващото пространство е фиксирано едно скаларно произведение).

Пример 6 Нека U е евклидово линейно пространство. Тогава U, разглеждано като афинно пространство, моделирано върху себе си, е евклидово афинно пространство.
В частност, $\mathbb{R}^n$ е евклидово афинно пространство.

Пример 7 При фиксирана единична отсечка получаваме скаларно произведение в линейното пространство на векторите в геометричното пространство. Следователно геометричното пространство става 3-мерно евклидово афинно пространство. Аналогично геометричната равнина става 2-мерно евклидово афинно пространство, а геометричната права става 1-мерно евклидово афинно пространство.

Тоя пример показва, че всичко, което важи за евклидови афинни пространства, важи и в класическата геометрия на пространството и равнината. Така че работейки с евклидови афинни пространства получаваме възможността от една страна да формулираме едновременно общите неща от евклидовата геометрия на пространството и на равнината (а и на права) вместо да ги повтаряме два или три пъти с незначителни изменения, а от друга страна без никакви затруднения да се занимаваме с евклидова геометрия в пространства с произволна размерност, тоест да не се ограничаваме с малките размерности 1, 2, 3.

Нека A е евклидово афинно пространство.

Определение 4 *Разстояние между точките* $P, Q \in A$ се нарича дължината на вектора $\overrightarrow{PQ}$. Означава се с $|PQ|$, тоест $|PQ| = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$.

Твърдение 2 *За* $P, Q, R \in A$ *са в сила:*

1. $|PQ| \geq 0$ *и* $= \Leftrightarrow P = Q$.
2. $|QP| = |PQ|$.
3. $|PR| \leq |PQ| + |QR|$ *(неравенство на триъгълника).*

Доказателство: Свойствата следват лесно от свойствата на дължината (нормата) от въпроса за евклидови линейни пространства със същите номера и свойствата от Твърдение 1 със същите номера:

1. $|PQ| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \geq 0$ и $= \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow P = Q$.
2. $|QP| = \left|\overrightarrow{QP}\right| = \left|-\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |PQ|$.
3. $|PR| = \left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\right| \leq \left|\overrightarrow{PQ}\right| + \left|\overrightarrow{QR}\right| = |PQ| + |QR|$. $\square$

Определение 5 Ако $O, P, Q \in A$, $O \neq P$, $O \neq Q$, то дефинираме $\sphericalangle POQ = \sphericalangle\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right)$.

Пример 8 Ако $O, P \in A$, $O \neq P$, то $\sphericalangle POP = 0$.

Твърдение 3 *Нека $O, P, Q \in A$, $O \neq P$, $O \neq Q$. Тогава $\sphericalangle QOP = \sphericalangle POQ$.*

Доказателство: Следва от симетрията на ъгъла между вектори:
$\sphericalangle QOP = \sphericalangle\left(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP}\right) = \sphericalangle\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right) = \sphericalangle POQ$. □

Твърдение 4 (косинусова теорема) *Нека $O, P, Q \in A$, $O \neq P$, $O \neq Q$. Тогава*

$$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ|\cos\sphericalangle POQ.$$

Доказателство: Следва от косинусовата теорема за вектори от въпроса за евклидови линейни пространства:

$$\begin{aligned} |PQ|^2 = \left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OQ}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|\cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right) \\ &= |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ|\cos\sphericalangle POQ. \end{aligned}$$ □