Лема 0.1. *Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ е ненамаляваща функция, а $b > 1$ е цяло и a, c са положителни реални числа. Ако $T : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ удовлетворява неравенствата:*

$$\begin{aligned} T(n) &\leq a \text{ при } n < b \\ T(n) &\leq cT(\lceil n/b \rceil) + f(n), \end{aligned}$$

то

$$T \in O\left(n^{\log_b c} + \sum_{j=0}^{\lceil \log_b n \rceil - 1} c^j f(\lceil n/b^{j+1} \rceil) \right).$$

Доказателство. Тъй като $c > 0$ и $f(0) > 0$, то достатъчно е да докажем резултата при $f(0) \geq a$.

Да означим с $T' : \mathbb{N}^+ \to [0, \infty]$ функцията:

$$T'(n) = \max\{T(m) \mid m \leq n\}.$$

Тогава е ясно, че $T(n) \leq T'(n)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Поради това е достатъчно да докажем, че T' принадлежи на желания клас. Да забележим, че:

$$T'(n) \leq a \text{ за } n < b.$$

Освен това за $k \geq 1$ имаме:

$$\begin{aligned} T'(b^{k+1}) &= \max\{T(m) \mid m \leq b^{k+1}\} \\ &\leq \max(\{T(m) \mid m < b\} \cup \{T(m) \mid b \leq m \leq b^{k+1}\}) \\ &\leq \max(\{a\} \cup \{cT(\lceil m/b \rceil) + f(m) \mid b \leq m \leq b^{k+1}\}) \\ &= \max(\{a\} \cup \{cT(m) + f(b^{k+1}) \mid m \leq b^k\}), \end{aligned}$$

където използвахме, че от монотонността на f, $f(m) \leq f(b^{k+1})$ за $m \leq b^{k+1}$, а след това, че $m \leq b^{k+1}$, влече, че $m/b \leq b^k$, откъдето, понеже b е цяло, то и $\lceil m/b \rceil \leq b^k$. Така получаваме, че:

$$T'(b^{k+1}) \leq \max(a, cT'(b^k) + f(b^{k+1})).$$

Тъй като $f(0) \geq a$, и f е монотонна, то $f(b^{k+1}) \geq a$, откъдето:

$$T'(b^{k+1}) \leq cT'(b^k) + f(b^{k+1}).$$

Сега с индукция по k ще покажем, че:

$$T'(b^k) \leq c^k a + \sum_{j=1}^{k} c^{k-j} f(b^j).$$

За $k = 0$, твърдението следва, от $T'(b^0) = T'(1) \leq a$, защото $1 < b$. За индуктивната стъпка, нека:

$$T'(b^k) \leq c^k a + \sum_{j=1}^{k} c^{k-j} f(b^j).$$

Тогава:

$$\begin{aligned} T'(b^{k+1}) &\leq cT'(b^k) + f(b^{k+1}) \\ &\overset{\text{и.х.}}{\leq} c\left(c^k a + \sum_{j=1}^{k} c^{k-j} f(b^j) \right) + f(b^{k+1}) \\ &= c^{k+1} a + \sum_{j=1}^{k} c^{k+1-j} f(b^j) + f(b^{k+1}) \\ &= c^{k+1} a + \sum_{j=1}^{k+1} c^{k+1-j} f(b^j), \end{aligned}$$

което искахме да докажем. Накрая, нека $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ и нека k е най-малкото естествено число, за което $n \leq b^k$. Тогава $n > b^{k-1}$, защото $n > 0$. Сега имаме, че:

$$k - 1 < \log_b n \leq k, \text{ тоест } \log_b n \leq k < \log_b n + 1.$$

При $c \geq 1$, това означава, че $c^k \leq c^{\log_b n+1} = cn^{\log_b c}$. Докато при $c < 1$ имаме, че $c^k \leq c^{\log_b n} = n^{\log_b c}$. Така че, $ac^k \leq c'n^{\log_b c}$ за някоя константа $c' = \max(ac, a)$. Накрая, тъй като f е растяща и $b^{k-1} < n \leq b^k$:

$$f(b^j) = f(b^{k-1}b^{j-k+1}) \leq f(\lceil n/b^{j-k+1}\rceil).$$

С това получаваме, че:

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq T'(b^k) \leq c'n^{\log_b c} + \sum_{j=1}^{k} c^{k-j} f(b^j) \\
&\leq c'n^{\log_b c} + \sum_{j=1}^{k} c^{k-j} f(\lceil n/b^{j-k+1}\rceil) \\
&= c'n^{\log_b c} + \sum_{j=0}^{k-1} c^{j} f(\lceil n/b^{j+1}\rceil) \\
&= c'n^{\log_b c} + \sum_{j=0}^{\lceil \log_b n\rceil-1} c^{j} f(\lceil n/b^{j+1}\rceil).
\end{aligned}$$

Това и искахме да докажем. □

Следствие 0.1. *При условията от предишната лема, ако:*

1. $f(n) \in O(n^\alpha)$ *с* $\alpha < \log_b c$, *то* $T \in O(n^{\log_b c})$.
2. $f(n) \in O(n^\alpha)$ *с* $\alpha > \log_b c$, *то* $T \in O(n^\alpha)$.
3. $f(n) \in \Theta(n^{\log_b c})$, *то* $T \in O(n^{\log_b c}\log_b n)$.

Доказателство.

Когато $f(n) = n^\alpha$ при $n > 0$ имаме, че:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\lceil \log_b n\rceil-1} c^{j} f(\lceil n/b^{j+1}\rceil) &= \sum_{j=0}^{\lceil \log_b n\rceil-1} c^{j} (\lceil n/b^{j+1}\rceil)^\alpha \\
&\leq \sum_{j=0}^{\lceil \log_b n\rceil-1} c^{j} (n/b^{j})^\alpha,
\end{aligned}$$

защото когато $n/b^{j+1} \geq 1$, $(n/b^j - n/b^{j+1}) = (b-1)n/b^{j+1} \geq b-1 \geq 1$ съдържа цяло число. Следователно:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\lceil \log_b n\rceil-1} c^{j} f(\lceil n/b^{j+1}\rceil) &\leq \sum_{j=0}^{\lceil \log_b n\rceil-1} c^{j} (n/b^{j})^\alpha \\
&= n^\alpha \sum_{j=0}^{\lceil \log_b n\rceil-1} (c/b^\alpha)^j \\
&= \begin{cases} n^\alpha \lceil \log_b n\rceil, \text{ ако } c = b^\alpha \\ n^\alpha \frac{(c/b^\alpha)^{\lceil \log_b n\rceil}-1}{c/b^\alpha-1} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Сега, ако $f \in \Theta(n^{\log_b c})$, знаем, че $f(n) \leq c'n^\alpha$ за някое $c' > 0$ с $\alpha = \log_b c$, тоест в сила е първия случай, $c = b^\alpha$ и тогава:

$$T \in O(n^{\log_b c} + n^{\log_b c}(\log_b(n+1)+1)) = O(n^{\log_b c}\log_b(n+1)).$$

Когато $\alpha \neq \log_b c$ имаме, че:

$$\sum_{j=0}^{\lceil \log_b n\rceil-1} c^{j} f(\lceil n/b^{j+1}\rceil) \leq c'\frac{n^{\log_b c} - n^\alpha}{c/b^\alpha - 1}.$$

Сега, ако $\alpha < \log_b c$, което се случва, когато $f \in O(n^\alpha)$ с $\alpha < \log_b c$ получаваме, че

$$\sum_{j=0}^{\lceil \log_b n\rceil-1} c^{j} f(\lceil n/b^{j+1}\rceil) \leq c'\frac{n^{\log_b c} - n^\alpha}{c/b^\alpha - 1} \in \Theta(n^{\log_b c}).$$

Когато $\alpha > \log_b c$, което се случва, когато $f \in \Omega(n^\alpha)$ с $\alpha > \log_b c$, получаваме:

$$\sum_{j=0}^{\lceil \log_b n \rceil - 1} c^j f(\lceil n/b^{j+1} \rceil) \leq c' \frac{n^{\log_b c} - n^\alpha}{c/b^\alpha - 1} \in \Theta(n^\alpha).$$

Като отчетем, че $n^{\log_b c} + n^\alpha \in O(n^{\max(\log_b c, \alpha)})$, оценките за T следват. $\square$