Сплайни от първа степен. Модул на непрекъснатост.

Определение: Разстояние наричаме величината

$$dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\} = inf \max_{x_0 \le x \le x_n} |f(x) - S(x)|,$$

където инфимумът е по всички сплайни от първа степен $S(x) \in S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Задача 1. Нека $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$. Нека $I_1(f; x) \in S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, за който $f(x_k) = I_1(f; x_k), k = 0 \div n$. Да се докаже, че

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - I_1(f; x)| \le 2\, dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}.$$

Доказателство: Нека $s^*(x) \in S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ е най-добрата начупена линия, т. е.

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - s^*(x)| = dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}.$$

Трябва да оценим $|f(x) - I_1(f; x)|$. Нека $x \in [x_k, x_{k+1}], k = 0,1, \dots, n-1$. Тогава

$$\begin{aligned}
\max_{x\in[x_k,x_{k+1}]} |f(x) - I_1(f; x)| &= \max_{x\in[x_k,x_{k+1}]} |f(x) - s^*(x) + s^*(x) - I_1(f; x)| \\
&\le \max_{x\in[x_k,x_{k+1}]} |f(x) - s^*(x)| + \max_{x\in[x_k,x_{k+1}]} | s^*(x) - I_1(f; x)| \le
\end{aligned}$$

$$\le \max_{x\in[x_0,x_n]} |f(x) - s^*(x)| + \max_{x\in[x_k,x_{k+1}]} | s^*(x) - I_1(f; x)| \le$$

$$\le dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\} + \max\{|s^*(x_k) - I_1(f; x_k)|, |s^*(x_{k+1}) - I_1(f; x_{k+1})|\} =$$

$$= dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\} + \max\{|s^*(x_k) - f(x_k)|, |s^*(x_{k+1}) - f(x_{k+1})|\} \le$$

$$\le dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\} + \max_{x\in[x_0,x_n]} |f(x) - s^*(x)| = 2dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}.$$

В поредицата от неравенства използвахме, че линейна функция $s^*(x) - I_1(f; x)$ достига максимума си в един от двата края на интервала, когато $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Също така използвахме интерполационните условия $f(x_k) = I_1(f; x_k)$.

Ако $x \in [x_k, x_{k+1}]$ получихме, че $\max_{x\in[x_k,x_{k+1}]} |f(x) - I_1(f; x)| \le 2dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}$ и тази оценка е вярна за всяко $k = 0,1, \dots, n-1$. Следователно

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - I_1(f; x)| \le 2\, dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}.$$

Модул на непрекъснатост на функция

Нека $x \in [a, b]$ и е функцията $f(x)$ е дефинирана в този интервал.

Определение: Модул на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в $[a, b]$ наричаме величината

$$\omega(f; \delta) = sup\{|f(x) - f(y)|, \text{когато } |x - y| \le \delta; x, y \in [a, b]\}, \qquad \text{където } 0 < \delta \le (b - a).$$

От дефиницията се вижда, че $\omega(f;\delta)$ е ненамаляваща функция на δ. Ако $f(x)$ е непрекъсната за $x \in [a,b]$, то $\omega(f;\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$.

Задача 2. Нека $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ и $I_1(f;x) \in S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, който интерполира $f(x)$ във възлите $x_k,\ k = 0,1,\dots,n$. Да се докаже, че $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x) - I_1(f;x)| \le \omega(f;\Delta n)$, където

$\Delta n = \max\limits_{0\le i\le n-1}\{x_{i+1} - x_i\}$.

Доказателство: Нека $x \in [x_k, x_{k+1}]$, тогава

$$I_1(f;x) = L_1(f;x) = \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} f(x_k) + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} f(x_{k+1}).$$

Базисните полиноми на Лагранж имат сума едно и следователно може да представим по подобен начин и $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} f(x) + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} f(x).$$

Тогава получаваме

$$|f(x) - I_1(f;x)| = \left|\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\big(f(x)-f(x_k)\big) + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\big(f(x)-f(x_{k+1})\big)\right| \le$$

$$\le \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}|f(x)-f(x_k)| + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}|f(x)-f(x_{k+1})| \le$$

$$\le \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\omega(f;|x-x_k|) + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\omega(f;|x-x_{k+1}|) \le$$

$$\le \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\omega(f;x_{k+1}-x_k) + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\omega(f;x_{k+1}-x_k) =$$

$$= \left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\omega(f;x_{k+1}-x_k) = \omega(f;x_{k+1}-x_k) \le \omega(f;\Delta n).$$

=> за $x \in [x_k, x_{k+1}]$ получаваме $|f(x) - I_1(f;x)| \le \omega(f;\Delta n)$ и това неравенство не зависи от k. Следователно

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x) - I_1(f;x)| \le \omega(f;\Delta n).$$

Задача 3. Нека $x_k = \frac{k}{n}, k = 0 \div n$ и $f(x) \in C^1[0,1]$. Нека $I_1(f;x) \in\ S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, за който $f(x_k) = I_1(f;x_k), k = 0 \div n$. Да се докаже, че съществува константа $c > 0$, независеща от n, такава че $|f(x) - I_1(f;x)| \le \frac{c}{n}$ за всяко $x \in [0,1]$.

Доказателство: Ще използваме предишната задача. Тук $\Delta n = \frac{1}{n}$. Имаме

$$|f(x) - I_1(f;x)| \le \omega\left(f;\frac{1}{n}\right), \forall x \in [0,1].$$

Нека $M = \max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$. Функцията $f(x) \in C^1[a,b]$ и следователно

$$|f(x)-f(y)|=|f'(x_*)|.|x-y|\leq M|x-y|, \qquad x_*\in[x,y];\ \forall x,y\in[0,1]$$

$$=>\omega(f;\delta)\leq M\delta, \forall\delta\in[0,1]\ =>|f(x)-I_1(f;x)|\leq\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)\leq\frac{M}{n}, \forall x\in[0,1].$$

Нека вземем $c=M$ и получаваме $|f(x)-I_1(f;x)|\leq\frac{c}{n}$ за всяко $x\in[0,1]$.

Задача 4. Нека $x_k=\frac{k}{n}, k=0\div n$ и $f(x)\in C^2[0,1]$. Нека $I_1(f;x)\in\ S_1(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$, за който $f(x_k)=I_1(f;x_k), k=0\div n$. Да се докаже, че съществува константа $c>0$, независеща от n, такава че $|f(x)-I_1(f;x)|\leq\frac{c}{n^2}$ за всяко $x\in[0,1]$.

Доказателство: Нека $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f''(x)|$ при $x\in[x_k,x_{k+1}]=\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ имаме

$$|f(x)-I_1(f;x)|=|f(x)-L_1(f;x)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_k)(x-x_{k+1})\right|\leq\frac{M}{2}(x-x_k)(x_{k+1}-x).$$

Но пароболата $(x-x_k)(x_{k+1}-x)$ достига максимума си във върха на параболата, т. е.

$$|f(x)-I_1(f;x)|\leq\frac{M}{2}\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)^2=\frac{M}{8n^2}, \forall k$$

Полагаме $c=\frac{M}{8}$ и получаваме

$$|f(x)-I_1(f;x)|\leq\frac{c}{n^2}, \forall x\in[0,1].$$