1.11 Условни локални екстремуми. Множители на Лагранж

В задачата за търсене на максимална и минимална стойности на функция на много променливи в област $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$, разгледана в §7, остана открит следния проблем: да се намерят екстремалните стойности на функцията върху границата $b\mathbf{D}$ на областта $\mathbf{D}$. Ако например $\mathbf{D}$ е кълбо, то възниква въпросът за търсене на екстремумите на функцията върху ограничаващата го сфера. На такава задача е посветен настоящият параграф.

Нека $\mathbf{M}$ е подмножество на $\mathbb{R}^n$ и $f(x)$ е функция, дефинирана върху M.

Дефиниция. *Казваме, че точката $x^0 \in \mathbf{M}$ е точка на условен локален максимум на функцията $f(x)$ върху множеството $\mathbf{M}$, ако съществува $\varepsilon > 0$, така че за за всяка точка $x \in \mathbf{M}$, за която $||x - x^0|| < \varepsilon$, да имаме*

$$f(x) \leq f\left(x^0\right).$$

Както се вижда, това определение се различава от даденото в §5 определение на (безусловен) локален максимум по това, че се разглеждат само стойностите на $f(x)$ върху множеството $\mathbf{M}$.

Ако заместим горното неравенство с противоположното му, получаваме дефиницията на условен локален минимум. Най-сетне, двете дефиниции се обединяват в понятието условен локален екстремум.

Ще разгледаме една елементарна геометрична задача: измежду всички правоъгълници с даден периметър да се намери този с максимално лице. Ако означим с x и y страните на правоъгълника, стигаме до следната формулировка:

Задача: Ако множеството $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^2$ е множеството на всички точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяващи условията $x > 0, y > 0, x + y = p$, да се намери максималната стойност върху $\mathbf{M}$ на функцията $f(x, y) = xy$.

Разбира се, задачата се решава елементарно, като се изрази y чрез x и след това се намери максимума на получената функция на една променлива. Ние обаче използваме задачата за илюстриране на развитите по-долу методи.

Множители на Лагранж - случай на едно уравнение в $\mathbb{R}^2$. За да изясним идеята, в тази точка ще разгледаме случая, когато $\mathbf{M}$ е множеството от всички точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, за които $F(x, y) = 0$. Тук $F(x, y)$ е еднократно гладка функция на 2 променливи, дефинирана в област в $\mathbb{R}^2$ и удовлетворяваща условието

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} F(x, y) \neq \vec{0},$$

т.е. първите ѝ частни производни никъде не се анулират едновременно. Налице е следното необходимо условие за условен локален екстремум:

Теорема 1. *Нека еднократно гладката функция $f(x, y)$ достига условен локален екстремум върху $\mathbf{M}$ в точката $(x_0, y_0) \in \mathbf{M}$. Тогава съществува константа λ такава, че*

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x_0, y_0) = \lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} F(x_0, y_0).$$

Реалното число λ се нарича множител на Лагранж, съответстващ на дадената екстремална задача.

Лесно се вижда как теорема 1 може да бъде използвана за намиране на подозрителните за условен локален екстремум точки: разглеждаме системата от три уравнения с три неизвестни (x, y, λ):

$$f'_x(x, y) = \lambda F'_x(x, y),\ f'_y(x, y) = \lambda F'_y(x, y),\ F(x, y) = 0,$$

от която намираме координатите (x, y) на търсената точка (обикновено третото неизвестно λ не е от значение и се елиминира). Например в дадената по-горе задача за правоъгълниците получаваме уравненията

$$x = \lambda,\ y = \lambda,\ x + y = p.$$

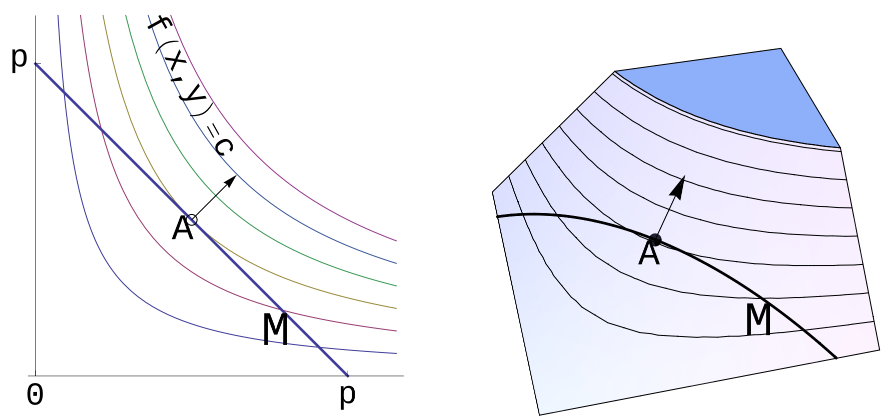
Очевидно единственото им решение е точката $A = (p/2, p/2)$, и в нея се достига търсеният максимум.

Геометрична интерпретация. Преди доказателството ще дадем геометрична интерпретация на твърдението на теоремата. Да си спомним Теорема 2 от §5, чието доказателство дадохме в предния параграф.

Теоремата гласи, че градиентът на функцията в дадена точка е перпендикулярен на линията на ниво на функцията, минаваща през същата точка. Според Теорема 1, векторите $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\,(x_0, y_0)$ и $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F\,(x_0, y_0)$ са колинеарни; това означава, че линиите на ниво на функциите $f(x, y)$ и $F(x, y)$, минаващи през точката (x_0, y_0), имат обща тангента, т.е. се допират помежду си. Очевидно линията на ниво на $F(x, y)$, минаваща през (x_0, y_0), съвпада с множеството $\mathbf{M}$, описвано с уравнението $F(x, y) = 0$. Така стигаме до следната формулировка на Теорема 1:

В точката (x_0, y_0) множеството $\mathbf{M}$ се допира до линията на ниво на $f(x, y)$, минаваща през тази точка.

На чертежа теоремата е илюстрирана за задачата за правоъгълниците, дадена по-горе; представени са множеството $\mathbf{M}$ (отсечка), и линиите на ниво на функцията $f(x, y) = xy$.



Вляво -линии на ниво на функцията $f(x, y) = xy$,
точка на условен локален екстремум на $f(x, y)$ върху $\mathbf{M}$.
Вдясно - съответните линии върху графиката на $f(x, y)$.

Можем да дадем и друга интерпретация на теоремата: да си представим, както в §5, планинска местност, като функцията $f(x, y)$ задава надморската височина в дадена точка, и множеството $\mathbf{M}$ - като пътека в тази местност. Тогава в най-високата си точка пътеката става хоризонтална, т.е. допира се до хоризонталата, минаваща през тази точка.

Доказателство на теорема 1. Трябва да докажем равенствата

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0, y_0\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0, y_0\right).$$

Ще използваме теоремата за неявната функция, за да параметризираме множеството **M** около точката (x_0, y_0). (Виж теорема 2 от предния параграф.) Тъй като $\overrightarrow{\operatorname{grad}} F\left(x_0, y_0\right) \neq \vec{0}$, можем да предположим например, че $\frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) \neq 0$. Тогава в някаква околност на точката x_0 съществува еднократно гладка функция $\varphi\left(x\right)$, удовлетворяваща условията

т-ма 1 от тема 27

$$\varphi\left(x_0\right) = y_0, \quad F\left(x, \varphi(x)\right) \equiv 0.$$

Диференцирайки последното равенство по x в точката x_0, получаваме

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) + \varphi'\left(x_0\right) \frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) = 0.$$

От друга страна, замествайки y с $\varphi(x)$, получаваме функцията на една променлива $g(x) = f\left(x, \varphi(x)\right)$, определена в околност на x_0. Точките от вида $(x, \varphi(x))$ принадлежат на **M**; следователно, ако $f(x, y)$ притежава условен локален екстремум в точката (x_0, y_0), то $g(x)$ притежава локален екстремум от същия вид в точката x_0. Оттук следва, че производната и в тази точка се анулира:

$$g'\left(x_0\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) + \varphi'\left(x_0\right) \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) = 0.$$

Да изразим $\varphi'\left(x_0\right)$ от предишното равенство и да го заместим тук; получаваме

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) - \frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)}\right) = 0.$$

Полагайки $\lambda = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)}$, виждаме, че и двете искани равенства са изпълнени. ■