2. Редици от реални числа. Сходящи редици. Основни свойства на сходящите редици. Редици, клонящи към безкрайност

Редици от реални числа — дефиниция

Дефиниция 1

Безкрайна редици от реални числа или, накратко, редица наричаме всяко съответствие, което на всяко естествено число съпоставя някое реално число.

Ако на 1 се съпоставя $a_1 \in \mathbb{R}$, на 2 се съпоставя $a_2 \in \mathbb{R}$, на 3 се съпоставя $a_3 \in \mathbb{R}$ и изобщо на $n \in \mathbb{N}$ се съпоставя $a_n \in \mathbb{R}$, то накратко редицата се обозначава по следните два начина:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \tag{1}$$

или

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{2}$$

Числата a_n, където $n = 1, 2, \dots$, се наричат членове на редицата; a_1 е първи член, a_2 е втори член, изобщо a_n се нарича n-ти член или още общ член на редицата, особено когато той се дава чрез формула, която показва как се определя неговата стойност чрез n.

Примери

1) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

2) $0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots$

3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

4) Редицата $S_4, S_8, S_{16}, \ldots, S_{2^n}, \ldots$ от лица на вписани правилни 2^n-ъгълници в единичния кръг

5) Редицата $\{a_0.\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ от крайни десетични дроби, чиито членове са все по-близо до дадена точка върху права, отговаряща на ирационално число (Тема 1)

Ограничени редици

Дефиниция 2

Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е:

(а) ограничена отгоре, ако множеството от нейните членове $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ е ограничено отгоре, т.е. ако съществува $c_1 \in \mathbb{R}$ такова, че $a_n \leq c_1$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Всяко реално число c_1 с това свойство се нарича горна граница на редицата.

(б) ограничена отдолу, ако множеството от нейните членове $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ е ограничено отдолу, т.е. ако съществува $c_2 \in \mathbb{R}$ такова, че $a_n \geq c_2$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Всяко реално число c_2 с това свойство се нарича долна граница на редицата.

(в) ограничена, ако множеството от нейните членове $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ е ограничено, т.е. ако съществуват $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ такива, че $c_2 \leq a_n \leq c_1$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ или, еквивалентно, съществува $c \in \mathbb{R}$ такова, че $|a_n| \leq c$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. С други думи, една редица е ограничена точно тогава, когато всичките ѝ членове попадат в някакъв краен интервал.

Сходящи редици. Граница на редица

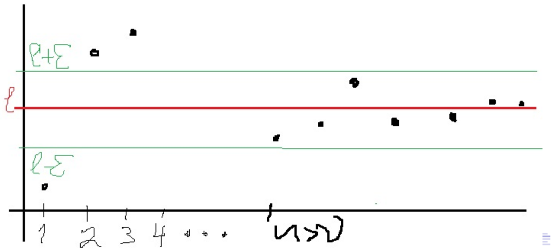
Дефиниция 3

Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е <u>сходяща</u> и $\ell \in \mathbb{R}$ е нейна <u>граница</u>, ако

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{R} : \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{за всяко} \quad n > \nu.$$

В такъв случай пишем $\lim a_n = \ell$ или още $a_n \longrightarrow \ell$. Още казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>клони към</u> ℓ.
Редица, която не е сходяща, наричаме <u>разходяща</u>.

Геометрична интерпретация:



Бележка

Околност на реалното число ℓ наричаме всеки краен (отворен) интервал с център/среда ℓ и ненулева дължина.

Свойството, въведено в Дефиниция 3, може да се изкаже еквивалентно и по следния начин:

Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $\ell \in \mathbb{R}$ е нейна граница точно тогава, когато каквато и околност на ℓ да вземем (колкото и малка да е тя) всички членове на редицата от някое място нататък, т.е. от някой номер нататък, попадат в нея (което от своя страна се случва точно тогава, когато извън околността остават само краен брой членове).

Геометрична интерпретация:

Пример

Разглеждаме редицата

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Ще докажем, че $\lim \frac{1}{n} = 0$.
Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Ще покажем, че съществува $\nu \in \mathbb{R}$ такова, че ако $n > \nu$, то $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Имаме

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}; \tag{3}$$

следователно можем да вземем $\nu := \frac{1}{\varepsilon}$.

Основни свойства на сходящите редици

Твърдение 1

Всяка редица може да има най-много една граница, т.е. всяка сходяща редица има точно една граница.

Д-во: за самостоятелно упражнение (чрез допускане на противното и достигане до противоречие).

Твърдение 2

Ако премахнем краен брой членове на сходяща редица или добавим краен брой членове към нея, тя остава сходяща към същата граница.

Д-во: за самостоятелно упражнение (чрез Дефиниция 3 и по-точно бележката след нея).

Твърдение 3

Всяка сходяща редица е ограничена.

Бележка

Съществуват ограничени редици, които не са сходящи. Например, $0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots$

Д-во на Тв. 3: Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща. Да означим с $\ell \in \mathbb{R}$ нейната граница. Тогава, каквото и $\varepsilon > 0$ да фиксираме (за целите на доказателството можем да вземем например $\varepsilon = 1$), от някой номер нататък всички членове на редицата попадат в интервала $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$. Следователно извън този интервал остават само краен брой членове на редицата. Ако те са поне един, то сред тях има най-малък и най-голям. Следователно съществува краен интервал, който съдържа всички членове на редицата, а това означава, че тя е ограничена.

Сума, разлика, произведение и частно на сходящи редици

Теорема 1

Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ са две сходящи редици. Тогава:

(а) $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е също сходяща, като $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$;

(б) $\{a_n.b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е също сходяща, като $\lim(a_n.b_n) = (\lim a_n).(\lim b_n)$;

(в) $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е също сходяща, като $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$, стига $b_n \neq 0$ за всяко n и $\lim b_n \neq 0$.

Следствие

От (а) и (б) следва и че $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е също сходяща, като $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$.

Доказателство на Теорема 1

(a) Нека $a := \lim a_n$ и $b := \lim b_n$. Ще покажем, че можем да направим $|(a_n + b_n) - (a + b)|$ колкото искаме малко за всички достатъчно големи n. Оттук ще следва, че $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и границата ѝ е $a + b$. Използваме, че

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|. \quad (4)$$

Понеже $\lim a_n = a$, то можем да направим $|a_n - a|$ колкото искаме малко за всички достатъчно големи n; аналогично и $|b_n - b|$.
По-подробно, нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано. Тогава

$$\lim a_n = a \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \nu_1 \in \mathbb{R} : \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{за всяко} \quad n > \nu_1, \quad (5)$$

$$\lim b_n = b \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \nu_2 \in \mathbb{R} : \quad |b_n - b| < \varepsilon \quad \text{за всяко} \quad n > \nu_2. \quad (6)$$

Да положим $\nu := \max\{\nu_1, \nu_2\}$. Тогава при $n > \nu$, благодарение на (4)-(6), имаме

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\varepsilon, \quad (7)$$

което показва, че можем да направим $|(a_n + b_n) - (a + b)|$ колкото искаме малко за всички достатъчно големи n.

(б) Използваме въведените в (а) означения.
Тук трябва да покажем, че можем да направим $|a_n b_n - ab|$ колкото искаме малко за всички достатъчно големи n.
Използваме, че

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &\leq \underbrace{|b_n|}_{\overset{\text{Тв. 3}}{\leq} c \ \forall n} .|a_n - a| + |a|.|b_n - b|. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогава при $n > \nu$, благодарение на (8), (5) и (6), получаваме

$$|a_n b_n - ab| < c\varepsilon + |a|\varepsilon = (c + |a|)\varepsilon. \tag{9}$$

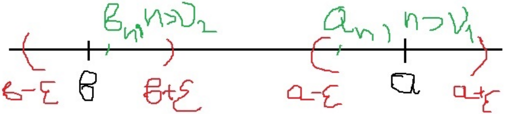
(в) остава за самостоятелно упражнение.

Неравенства между сходящи редици

Теорема 2

Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ са две сходящи редици и $a_n \leq b_n$ за всяко n. Тогава $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Д-во: Нека $a := \lim a_n$ и $b := \lim b_n$. Допускаме противното: $b < a$. Да фиксираме $\varepsilon > 0$ толкова малко, че $b + \varepsilon \leq a - \varepsilon$.



Тогава

$$\lim a_n = a \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \nu_1 \in \mathbb{R}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{за всяко} \quad n > \nu_1, \qquad (10)$$

$$\lim b_n = b \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \nu_2 \in \mathbb{R}: \quad |b_n - b| < \varepsilon \quad \text{за всяко} \quad n > \nu_2. \qquad (11)$$

Да вземем едно $n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че $n_0 > \nu_{1,2}$. Тогава

$$b_{n_0} \overset{(11)}{<} b + \varepsilon \leq a - \varepsilon \overset{(10)}{<} a_{n_0}, \qquad (12)$$

което противоречи на $a_{n_0} \leq b_{n_0}$.

Неравенства между сходящи редици

Теорема 3

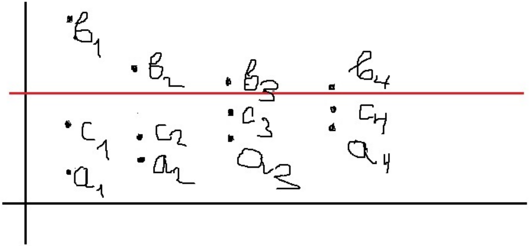
Нека редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяват условията:

(i) $a_n \leq c_n \leq b_n$ за всяко n;

(ii) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ са сходящи, като $\lim a_n = \lim b_n = \ell$.

Тогава $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ също е сходяща и $\lim c_n = \ell$.

Геометрична интерпретация:



Доказателство на Теорема 3

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано. Тогава

$$\lim a_n = \ell \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \nu_1 \in \mathbb{R} : \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{за всяко} \quad n > \nu_1, \tag{13}$$

$$\lim b_n = \ell \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \nu_2 \in \mathbb{R} : \quad |b_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{за всяко} \quad n > \nu_2. \tag{14}$$

Да положим $\nu := \max\{\nu_1, \nu_2\}$. Тогава при $n > \nu$, благодарение на (i) и (13)-(14), имаме

$$\ell - \varepsilon \overset{(13)}{<} a_n \overset{(i)}{\leq} c_n \overset{(i)}{\leq} b_n \overset{(14)}{<} \ell + \varepsilon. \tag{15}$$

Следователно

$$|c_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{за всяко} \quad n > \nu, \tag{16}$$

което според дефиницията за сходмост на редица означава, че $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $\lim c_n = \ell$.

Следствие

Ако $|c_n - \ell| \leq b_n \longrightarrow 0$, то $c_n \longrightarrow \ell$.

Редици, клонящи към безкрайност

Дефиниция 4

Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>клони към</u> $+\infty$, ако

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \nu \in \mathbb{R} : \quad a_n > A \quad \text{за всяко} \quad n > \nu.$$

Пишем $\lim a_n = +\infty$ или $a_n \longrightarrow +\infty$.

Пример: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

Дефиниция 5

Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>клони към</u> $-\infty$, ако

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \nu \in \mathbb{R} : \quad a_n < B \quad \text{за всяко} \quad n > \nu.$$

Пишем $\lim a_n = -\infty$ или $a_n \longrightarrow -\infty$.

Твърдение 4

Нека $\{a_n\}$ е редица. Тогава:

(а) ако $\lim a_n = 0$ и $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то $\lim \dfrac{1}{a_n} = +\infty$;

(б) ако $\lim a_n = +\infty$ и $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$.