Скаларно произведение в геометричното пространство

Работим в геометричното пространство.

Определение 1 *Ъгъл между ненулевите вектори u и v* е ъгълът между произволни техни представители с общо начало. Означава се с $\sphericalangle(u, v)$.

Коректност: Трябва да се провери, че ъгълът не зависи от това коя точка сме взели за общо начало на представителите. Но това е ясно: Ако вземем представители с начало O, а именно $\overrightarrow{OP} = u$ и $\overrightarrow{OQ} = v$, и с начало O', а именно $\overrightarrow{O'P'} = u$ и $\overrightarrow{O'Q'} = v$, то $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'}$ и $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'}$. В частност, $\overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}$ и $\overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'Q'}$ и следователно $\sphericalangle\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right) = \sphericalangle\left(\overrightarrow{O'P'}, \overrightarrow{O'Q'}\right)$.

Пример 1 При $u \neq 0$ имаме $\sphericalangle(u, u) = 0$.

Пример 2 При $u \neq 0$, $v \neq 0$ имаме $\sphericalangle(v, u) = \sphericalangle(u, v)$.

Оттук нататък считаме, че е фиксирана единична отсечка за измерване на дължини.

Определение 2 Базисът $e = (e_1, e_2, e_3)$ на линейното пространство на векторите в пространството се нарича *ортонормиран*, ако векторите e_1, e_2, e_3 са единични и взаимно перпендикулярни, тоест $|e_i| = 1$, $i = 1, 2, 3$, и $\sphericalangle(e_i, e_j) = \frac{\pi}{2}$ при $i \neq j$.

Забележка 1 Ясно е, че съществуват ортонормирани базиси, защото съществуват три взаимно перпендикулярни прави и върху всяка от тях можем да вземем по един единичен вектор.

Теорема 1 *Нека базисът $e = (e_1, e_2, e_3)$ на линейното пространство на векторите в пространството е ортонормиран и спрямо него векторът u има координати (x_1, x_2, x_3). Тогава $|u| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$.*

Доказателство: Нека O е произволна точка, точката P' е такава, че $\overrightarrow{OP'} = x_1 e_1$, точката P'' е такава, че $\overrightarrow{P'P''} = x_2 e_2$ и точката P е такава, че $\overrightarrow{P''P} = x_3 e_3$. Тогава
$\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = u$ и следователно $|u| = |OP|$.

Имаме $\overrightarrow{OP'} = x_1 e_1 \parallel e_1$ и значи точката P' е върху правата през O, която е колинеарна с e_1. Също така $\overrightarrow{P'P''} = x_2 e_2 \parallel e_2$ и значи точката P'' е върху правата през P', която е колинеарна с e_2. Следователно P'' е в равнината през O, която е компланарна с e_1 и e_2. Тъй като $\overrightarrow{P''P} = x_3 e_3 \parallel e_3$, то точката P е върху правата през P'', която е колинеарна с e_3. Но e_3 е перпендикулярен на e_1 и e_2, така че правата през P'', която е колинеарна с e_3, е перпендикулярна на равнината през O, която е компланарна с e_1 и e_2. Следователно триъгълникът $OP''P$ е правоъгълен с прав ъгъл при върха P'' и по теоремата на Питагор получаваме $|OP|^2 = |OP''|^2 + |P''P|^2$.

Тъй като e_1 и e_2 са перпендикулярни, то правата през O, която е колинеарна с e_1, и правата през P', която е колинеарна с e_2, са перпендикулярни. Следователно триъгълникът $OP'P''$ е правоъгълен с прав ъгъл при върха P' и по теоремата на Питагор получаваме $|OP''|^2 = |OP'|^2 + |P'P''|^2$.

Значи

$$\begin{aligned} |u|^2 &= |OP|^2 = |OP'|^2 + |P'P''|^2 + |P''P|^2 = |x_1e_1|^2 + |x_2e_2|^2 + |x_3e_3|^2 \\ &= |x_1|^2|e_1|^2 + |x_2|^2|e_2|^2 + |x_3|^2|e_3|^2 = {x_1}^2.1^2 + {x_2}^2.1^2 + {x_3}^2.1^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2, \end{aligned}$$

тоест $|u| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$. □

Определение 3 *Скаларно произведение на векторите u и v* е числото $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$, дефинирано по следния начин:

а) Ако $u = 0$ или $v = 0$, то $\langle u, v\rangle = 0$.

б) Ако $u \neq 0$ и $v \neq 0$, то $\langle u, v\rangle = |u||v| \cos \sphericalangle(u, v)$.

Забележка 2 Срещат се и други означения за скаларното произведение. Например uv, $u.v$, (u, v).

Забележка 3 Ако $u = 0$ или $v = 0$, то $\sphericalangle(u, v)$ не е дефиниран. Но тъй като дължината на нулевия вектор е 0, то в тоя случай $\langle u, v\rangle = 0 = |u||v| \cos\varphi$ каквото и да е φ. Следователно, ако се уговорим да считаме, че нулевият вектор и другите вектори сключват произволен ъгъл, то тогава $\langle u, v\rangle = |u||v| \cos \sphericalangle(u, v)$ за всички вектори u и v.

Пример 3 При $u \neq 0$ имаме $\langle u, u\rangle = |u||u| \cos \sphericalangle(u, u) = |u||u| \cos 0 = |u|^2$, а също и при $u = 0$ имаме $\langle u, u\rangle = 0 = |u|^2$.

Теорема 2 (критерий за перпендикулярност на вектори)
Ненулевите вектори u и v са перпендикулярни $\Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$.

Доказателство: $\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow |u||v| \cos \sphericalangle(u, v) = 0$
$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle(u, v) = 0$ (защото $|u| \neq 0$, $|v| \neq 0$) $\Leftrightarrow \sphericalangle(u, v) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u \perp v$. □

Забележка 4 Ако приемем, че нулевият вектор е перпендикулярен на всеки вектор (което е в унисон с приемането, че сключва произволен ъгъл с всеки вектор — щом сключва произволен ъгъл значи сключва и прав ъгъл), то горната теорема е вярна и без изискването u и v да са ненулеви.

Теорема 3 *Нека базисът $e = (e_1, e_2, e_3)$ на линейното пространство на векторите в пространството е ортонормиран и спрямо него векторите u и v имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.*

Доказателство: Ако $u = 0$ или $v = 0$, то всички x-ове са 0 или всички y-ци са 0 и следователно $\langle u, v\rangle = 0 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Нека $u \neq 0$ и $v \neq 0$. Нека O е произволна точка, а точките P и Q са такива, че $\overrightarrow{OP} = u$ и $\overrightarrow{OQ} = v$.

По косинусовата теорема за триъгълника OPQ (която важи и за изродени триъгълници, тоест когато O, P, Q са на една права — виж по-долу Забележка 5) имаме

$$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos \sphericalangle POQ.$$

Тъй като $|OP| = |u|$, $|OQ| = |v|$ и $\sphericalangle POQ = \sphericalangle(u, v)$, то

$$|OP||OQ| \cos \sphericalangle POQ = |u||v| \cos \sphericalangle(u, v) = \langle u, v\rangle.$$

Освен това $\overrightarrow{PQ} = v - u$. Следователно $|v - u|^2 = |PQ|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u, v\rangle$, откъдето получаваме

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(|u|^2 + |v|^2 - |v - u|^2\right).$$

Тъй като координатите на $v-u$ спрямо базиса e са $(y_1-x_1, y_2-x_2, y_3-x_3)$, по Теорема 1 имаме

$$|u|^2 = {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2, \quad |v|^2 = {y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2, \quad |v-u|^2 = (y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2.$$

Следователно

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \frac{1}{2}\left(\left({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2\right) + \left({y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2\right) - \left((y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}(2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.\end{aligned}$$

□

Забележка 5 В училището косинусовата теорема вероятно е формулирана само за истински триъгълници. Тя обаче важи и за изродени триъгълници OPQ, тоест когато O, P, Q са на една права, и доказателството в тоя случай е много просто:
Ако O е между P и Q, то $|PQ| = |OP| + |OQ|$ и $\sphericalangle POQ = \pi$. Следователно

$$\begin{aligned}|PQ|^2 &= (|OP| + |OQ|)^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 + 2|OP||OQ|\\ &= |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ|.(-1) = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos\pi\\ &= |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos \sphericalangle POQ.\end{aligned}$$

Ако O не е между P и Q, тоест P и Q са от една и съща страна на O, то $|PQ| = |OP| - |OQ|$ или $|PQ| = |OQ| - |OP|$, тоест $|PQ| = ||OP| - |OQ||$, и $\sphericalangle POQ = 0$. Следователно

$$\begin{aligned}|PQ|^2 &= ||OP| - |OQ||^2 = (|OP| - |OQ|)^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ|\\ &= |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ|.1 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos 0\\ &= |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos \sphericalangle POQ.\end{aligned}$$

От Теорема 1, Теорема 2 и Теорема 3 веднага получаваме

Теорема 4 *Нека базисът $e = (e_1, e_2, e_3)$ на линейното пространство на векторите в пространството е ортонормиран и спрямо него ненулевите вектори u и v имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава:*

1. $u \perp v \Leftrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$.
2. $\cos \sphericalangle(u, v) = \dfrac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}.\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2}}$, *тоест*
   $\sphericalangle(u, v) = \arccos \dfrac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}.\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2}}$.

Теорема 5 *Скаларното произведение има следните (основни) свойства:*

1. $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$ *(симетричност)*
2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ *(адитивност по първия аргумент)*
3. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ *за* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(хомогенност по първия аргумент)*
4. $\langle u, u\rangle > 0$ *за* $u \neq 0$ *(положителност)*

Доказателство: Ще докажем свойствата чрез координати. Това е най-вече заради второто свойство, чието доказателство чрез дефиницията е неприятно, докато с координати е тривиално. Останалите три се доказват лесно и с дефиницията, но и с координати доказателствата им са тривиални.

Нека сме фиксирали ортонормиран базис и спрямо него векторите u, v, w имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$.

1. Следва от Теорема 3, защото $\langle u, v\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3 = \langle v, u\rangle$. (Следва също и директно от дефиницията, защото $\sphericalangle(u, v) = \sphericalangle(v, u)$.)
2. Следва от Теорема 3, защото $u + v$ има координати $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ и следователно
   $$\begin{aligned}\langle u + v, w\rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + (x_3 + y_3)z_3\\ &= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) + (y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3) = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle.\end{aligned}$$
3. Следва от Теорема 3, защото λu има координати $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ и следователно
   $$\langle \lambda u, v\rangle = (\lambda x_1)y_1 + (\lambda x_2)y_2 + (\lambda x_3)y_3 = \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = \lambda\langle u, v\rangle.$$
   (Може да се докаже лесно и с дефиницията като се внимава как се изразява $\sphericalangle(\lambda u, v)$ чрез $\sphericalangle(u, v)$ в зависимост от знака на λ.)
4. Следва от Теорема 3, защото $\langle u, u\rangle = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 > 0$, тъй като при $u \neq 0$ поне един от x-овете е различен от 0. (Следва също и директно от дефиницията, защото както видяхме в Пример 3 $\langle u, u\rangle = |u|^2 > 0$ при $u \neq 0$.) $\square$

Забележка 6 За $u = 0$ имаме $\langle u, u \rangle = 0$.

Забележка 7 Свойствата 2. и 3. в горната теорема заедно са еквивалентни на свойството

$$\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle \qquad \text{(\textit{линейност по първия аргумент})}$$

Че линейността следва от 2. и 3. е ясно: Прилага се 2. и след това за всяко от събираемите се прилага 3.. Обратно, 2. следва като в линейността се вземе $\lambda = 1$ и $\mu = 1$, а 3. следва като в линейността се вземе $\mu = 0$ и произволно v, например $v = 0$.

Забележка 8 Поради симетричността на скаларното произведение, то е адитивно, хомогенно и линейно и по втория си аргумент. Така че скаларното произведение е билинейно, тоест линейно е и по двата си аргумента.

От Теорема 5 веднага получаваме

Следствие 1 *Скаларното произведение на вектори в геометричното пространство е скаларно произведение в смисъла от курса по алгебра и следователно векторите в геометричното пространство образуват* 3*-мерно евклидово линейно пространство в смисъла от курса по алгебра.*

Забележка 9 Всичко направено по-горе важи и в геометричната равнина (а и върху геометрична права), като навсякъде трябва да се махне третият базисен вектор и третата координата (а върху права — вторият и третият базисен вектор и втората и третата координата) и в Следствие 1 евклидовото линейно пространство е 2-мерно (а за права — 1-мерно).