5. Връзка между определения и неопределения интеграл. Теорема и формула на Лайбниц–Нютон

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегруема. Тогава $f(t)$ е интегруема върху всеки подинтервал на $[a, b]$. Дефинираме функцията

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b]. \tag{1}$$

Твърдение

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегруема. Тогава $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, дефинирана в (1), е непрекъсната.

Доказателство

Нека $x_0 \in [a, b]$ е произволно фиксирана. Имаме

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \overset{(15),\ \text{тема } 3}{=} \int_{x_0}^x f(t)\,dt. \qquad (2)$$

От Теорема 3, Тема 3 следва

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^x |f(t)|\,dt\right|. \qquad (3)$$

Знаем, че всяка интегруема функция е ограничена (Твърдение 1, Тема 1). Следователно съществува $C > 0$ такова, че $|f(t)| \leq C$, $t \in [a, b]$. Сега от (3) и Теорема 2 (б), Тема 3 следва

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \left|\int_{x_0}^x C\,dt\right| = C|x - x_0| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0. \qquad (4)$$

С това установихме, че $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$. Следователно $F(x)$ е непрекъсната в т. x_0. Тази точка бе произволно взета в $[a, b]$. Следователно $F(x)$ е непрекъсната във всяка точка на $[a, b]$.

Основна теорема на ДИС, I част

Теорема 1 (Лайбниц-Нютон, основна теорема на ДИС, I част)

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, дефинирана в (1), е диференцируема, при това $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$ (т.е. $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в $[a, b]$). Накратко

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x), \quad x \in [a, b]. \tag{5}$$

Поради тази причина функцията

$$\int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b], \tag{6}$$

също се нарича неопределен интеграл на $f(x)$ в $[a, b]$.

Следствие

Всяка функция, която е непрекъсната върху краен затворен интервал, притежава примитивна върху него.

Доказателство на Теорема 1

Нека $x_0 \in [a, b]$ е произволно фиксирана и $h \neq 0$ е такова, че $x_0 + h \in [a, b]$. За диференчното частно на $F(x)$ в т. x_0 имаме

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) \tag{7}$$

$$\overset{(15),\ \text{тема } 3}{=} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \tag{8}$$

$$\overset{\text{т-ма ср. ст., тема } 4}{=} \frac{1}{h} f(c_h)[(x_0 + h) - x_0] = f(c_h), \tag{9}$$

където c_h е между x_0 и $x_0 + h$. Щом c_h е между x_0 и $x_0 + h$, то $c_h \to x_0$ при $h \to 0$ (ако x_0 съвпада с край на интервала, то h клони към 0 само от едната страна така, че $x_0 + h \in [a, b]$). Функцията $f(x)$ е непрекъсната в т. x_0. Следователно $\lim\limits_{h\to 0} f(c_h) = f(x_0)$.

Следователно

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0). \tag{10}$$

Следователно $F(x)$ е диференцируема в т. x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$ (ако x_0 съвпада с край на интервала, производната е едностранна — лява или дясна).
Понеже т. x_0 бе произволно фиксирана в $[a, b]$, теоремата е доказана.

Основна теорема на ДИС, II част

Теорема 2 (формула на Лайбниц-Нютон, основна теорема на ДИС, II част)

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Ако $G(x)$ е коя да е примитивна на $f(x)$ върху $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a). \tag{11}$$

Означение: $G(x)\Big|_a^b := G(b) - G(a)$.

Ф-лата на Лайбниц-Нютон може още да се запише така

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\Bigg|_a^b. \tag{12}$$

Следствие

Нека $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ е диференцируема и $G'(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$. Тогава

$$G(x) = G(a) + \int_a^x G'(t)\,dt, \quad x \in [a, b]. \tag{13}$$

Доказателство на Теорема 2

С $F(x)$, дефинирана е (1), имаме

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{14}$$

Според Теорема 1, $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в $[a, b]$. От Твърдението в Тема 31 по ДИС 1 следва, че съществува $C \in \mathbb{R}$ такова, че $G(x) = F(x) + C$, $x \in [a, b]$. В частност от последното получаваме, че $G(a) = F(a) + C$. Но $F(a) = 0$. Следователно $C = G(a)$, откъдето получаваме

$$G(x) = F(x) + G(a), \quad x \in [a, b]. \tag{15}$$

Следователно

$$F(b) = G(b) - G(a). \tag{16}$$

Формули (14) и (16) влекат формулата в теоремата.