Контролна работа 2 (ПМ, КН1, И)
Теория на групите

Задача 1. В множеството $\mathbb{R}^2$ въвеждаме операция $\oplus$ по правилото

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, 3^{-c}b + 3^{-a}d).$$

Докажете, че $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ е абелева група. Намерете обратният елемент на $(4, 5)$ в нея.

Задача 2. Нека $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3,\ (a, b) \neq (\overline{0}, \overline{0}) \right\}$. Докажете, че H е циклична група относно умножението на матрици. Направете схема на включванията на подгрупите на H.

Задача 3. Нека $G = \langle g_0 \rangle$ и $H = \langle h_0 \rangle$ са крайни циклични групи от взаимнопрости редове. Докажете, че директното произведение $G \times H$ е циклична група от ред произведението на редовете на G и H.

Упътване. Операцията в $G \times H$ е $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 *_G g_2, h_1 \circ_H h_2)$, където $*_G$ е операцията на G, а $\circ_H$ е операцията в H.