Лекция: Приложение на кубични сплайн-функции за решаване на гранична задача за ОДУ от втори ред

Гено Николов, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски"

Съдържание на лекцията

- Гранична задача за ОДУ от втори ред
- Приложение на кубични сплайн-функции за численото ѝ решаване

Гранична задача за ОДУ от втори ред

В тази лекция ще се покажем как кубични сплайн-функции могат да се използват за численото решаване на граничната задача за решаване на уравнението

$$y'' - q(x)\, y = f(x) \tag{1}$$

при наложени гранични условия

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta\,. \tag{2}$$

Най-често, решението на тази гранична задача за обикновено диференциално уравнение от втори ред е невъзможно да се намери в явен вид. Това налага необходимостта от прилагане на числени методи за неговото намиране.

Кубична сплайн-функция

За целта да разгледаме произволна мрежа

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,,$$

и да положим

$$y_i = y(x_i)\,, \quad q_i = q(x_i)\,, \quad f_i = f(x_i)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,.$$

Да означим с $s(x)$ кубичната сплайн функция с възли в точките x_i, $i = 1, \ldots, n-1$, която интерполира решението на граничната задача (1)-(2) и удовлетворява уравнението (1) в точките от мрежата, т.е.

$$s''(x) - q(x)\,s(x) = f(x) \quad \text{за} \;\; x = x_i,\; i = 0, \ldots, n\,.$$

Да въведем още означенията

$$\begin{aligned} h_i &= x_i - x_{i-1}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,,\\ M_i &= s''(x_i)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

Кубична сплайн-функция

За $i = 1, \ldots, n$ ще намерим полинома $p_i(x) \in \pi_3$, с които $s(x)$ съвпада върху интервала $[x_{i-1}, x_i]$. Тогава $p_i''(x)$ е линейна функция, удовлетворяваща условията $p_i''(x_{i-1}) = M_{i-1}$ и $p_i''(x_i) = M_i$, и следователно

$$p_i''(x) = \frac{x_i - x}{h_i}\, M_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i}\, M_i\,. \tag{3}$$

След двукратно интегриране на равенството (3) получаваме, че

$$p_i(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i}\, M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i}\, M_i + A_i(x - x_{i-1}) + B_i\,, \tag{4}$$

където A_i и B_i са константи, които определяме от условията $p_i(x_{i-1}) = s(x_{i-1}) = y_{i-1}$ и $p_i(x_i) = s(x_i) = y_i$. От тук намираме последователно

$$B_i = y_{i-1} - \frac{h_i^2}{6}\, M_{i-1}\,, \quad A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}\,(M_i - M_{i-1})\,. \tag{5}$$

Кубична сплайн-функция

Построената по този начин начасти кубична функция $s(x)$, ($s(x) = p_i(x)$ за $x \in [x_{i-1}, x_i]$), е непрекъсната (защото $p_i(x_i) = p_{i+1}(x_i) = y_i$) и има непрекъсната втора производна (защото $p_i''(x_i) = p_{i+1}''(x_i) = M_i$). За да бъде кубичен сплайн, трябва $s(x)$ да има и непрекъсната първа производна, т.е. трябва да е изпълнено

$$p_i'(x_i) = p_{i+1}'(x_i) \quad \text{за} \;\; i = 1, \ldots, n-1\,. \tag{6}$$

Като диференцираме (4), получаваме

$$p_i'(x) = -\frac{(x_i - x)^2}{2h_i}\, M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i}\, M_i + A_i\,,$$

където A_i е дадено в (5). След полагане на $x = x_i$ и $x = x_{i-1}$ намираме

Кубична сплайн-функция

$$p_i'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_{i-1} + 2M_i)\,,$$
$$p_i'(x_{i-1}) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_{i-1} + M_i)\,.$$

Като заместим навсякъде в последното равенство i с $i+1$, получаваме

$$p_{i+1}'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(2M_i + M_{i+1})\,.$$

От условието (6) и приравняването на получените изрази за $p_i'(x_i)$ и $p_{i+1}'(x_i)$ следва, че

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_{i-1} + 2M_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(2M_i + M_{i+1}) \quad (7)$$

за $i = 1, \dots, n-1$.

Кубична сплайн-функция

Тъй като предположихме, че сплайн-функцията $s(x)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$s''(x) - q(x)\,s(x) = f(x) \quad \text{за} \;\; x = x_i,\; i = 0, \ldots, n,$$

изпълнено е

$$M_j = q_j\,y_j + f_j\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n\,.$$

След като заместим M_{i-1}, M_i и M_{i+1} в (7) с тези изрази, получаваме системата от $n-1$ линейни уравнения

$$\Big(\frac{1}{h_i} - \frac{h_i q_i}{6}\Big) y_{i-1} - \Big(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} + \frac{(h_i + h_{i+1})q_i}{3}\Big)\, y_i + \Big(\frac{1}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}\,q_{i+1}}{6}\Big) y_{i+1}$$

$$= \frac{1}{6}\Big(h_i\,f_{i-1} + 2\big(h_i + h_{i+1}\big) f_i + h_{i+1} f_{i+1}\Big)\,, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

за неизвестните y_1, $y_2, \ldots,$ y_{n-1}.

Кубична сплайн-функция

Тази система допълваме с равенствата от граничните условия (2),

$$y_0 = \alpha\,,\ \ y_n = \beta\,.$$

Това е система от линейни уравнения с тридиагонална матрица, и можем да я решим по известния ни вече метод на прогонката. В случая на равноотдалечени възли

$$x_i = a + i\,h\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,, \quad h = \frac{b-a}{n},$$

горната система може да се запише във вида

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{q_i}{6}\right) y_{i-1} - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2q_i}{3}\right) y_i + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{q_{i+1}}{6}\right) y_{i+1} = \frac{1}{6}\Big(f_{i-1} + 4\,f_i + f_{i+1}\Big)\,,$$

$$(i = 1, \ldots, n-1)\,,$$

$$y_0 = \alpha\,, \qquad y_n = \beta\,.$$

Кубична сплайн-функция

Може да се докаже, че ако функциите q и f са непрекъснати, тогава грешката на приближеното решение на задачата (1)–(2), получено от горната система, клони към нула когато $h \to 0$, т.е. с увеличаването на n ще имаме

$$\max_i |y(x_i) - y_i| \to 0\,.$$

Край на лекцията !