

8. Функции. Инекция, сюрекция и биекция. Обратни функции. Елементарни функции. Графика на функция

Функции

Функция наричаеме съответствие (правило), което на всеки един елемент на едно множество съпоставя точно един елемент в друго множество.

По-точно, функция f наричаеме съответствие (правило), което на всеки елемент x на множество D съпоставя точно един елемент, означен чрез $f(x)$, в множество E .

Пишем накратко $f : D \rightarrow E$.

Казваме, че f е дефинирана в D и приема стойности в E .

D — дефиниционна област на f ,

$f(D) := \{f(x) : x \in D\}$ — област от стойности на f ,

x — независима променлива или аргумент на функцията,

$f(x)$ — зависима променлива и стойността на f в x .

Често с $f(x)$ се означава и самата функция.

Ще разглеждаме функции, за които $D, E \subseteq \mathbb{R}$.

Примери

Пример 1

$$\mathbb{R} \ni x \xrightarrow{f} x^2 \in \mathbb{R}$$

Обикновено пишем: $f(x) = x^2$

Пример 2

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ 2 - x, & x \in (1, 2], \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases} \quad (1)$$

Пример 3: Всяка редица представлява функция, дефинирана в \mathbb{N} със стойности в \mathbb{R}

$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, но пишем обикновено a_n вместо $a(n)$

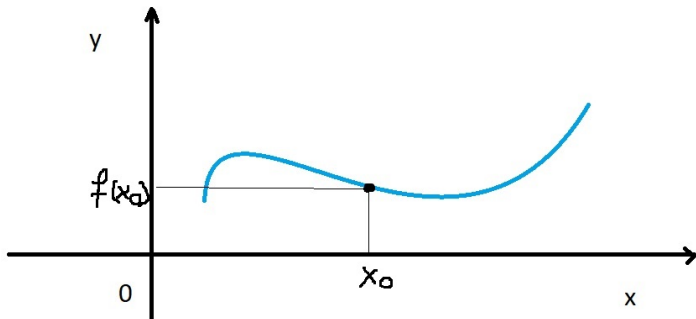
Графика

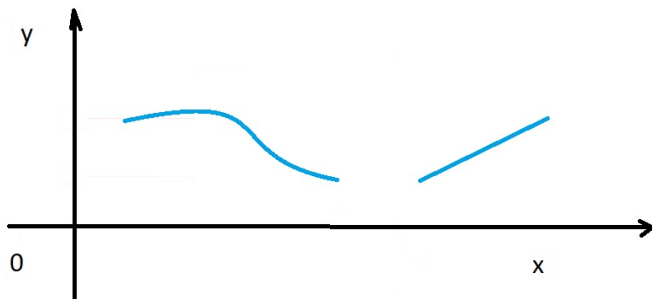
Всяка функция $f : D \rightarrow E$, където $D, E \subseteq \mathbb{R}$, представлява съвкупност от наредени двойки реални числа

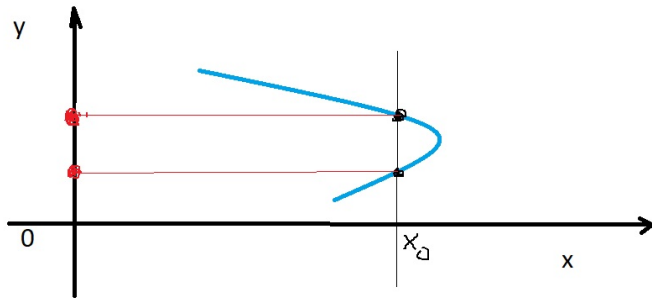
$$(x, f(x))$$

Това дава възможност за нагледна геометрична интерпретация на функцията.

Графика на функцията f наричаме множеството от точки в равнината с декартови координати $(x, f(x))$, където $x \in D$.







Не е графика на функция на x

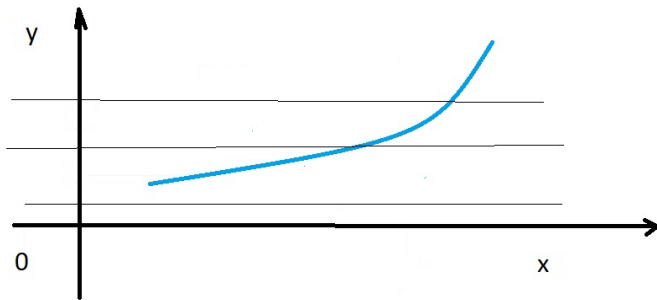
Инекция, сюрекция и биекция

Дефиниция

Казваме, че $f : D \rightarrow E$, където $D, E \subseteq \mathbb{R}$, е:

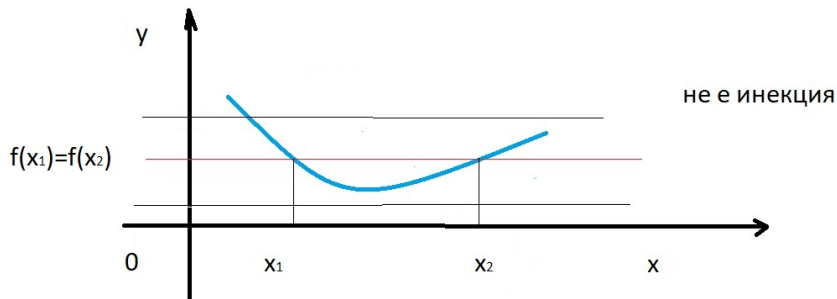
- (а) инекция, ако $x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in D \implies f(x_1) \neq f(x_2)$;
- (б) сюрекция, ако $\forall y_0 \in E \exists x_0 \in D : y_0 = f(x_0)$, т.е. $E = f(D)$;
- (в) биекция, ако е едновременно инекция и сюрекция.

Относно инекция

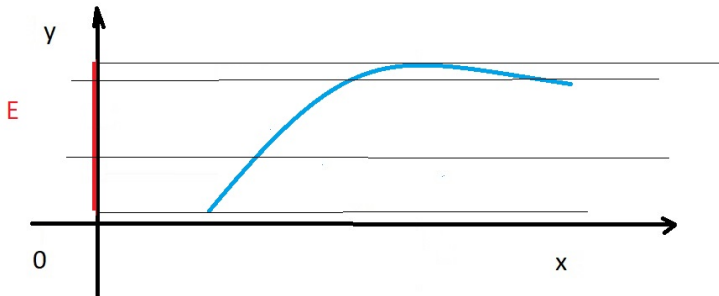


Дадена функция е инекция \iff всяка права, успоредна на Ox , пресича графика на функцията най-много в една точка.

Относно инекция

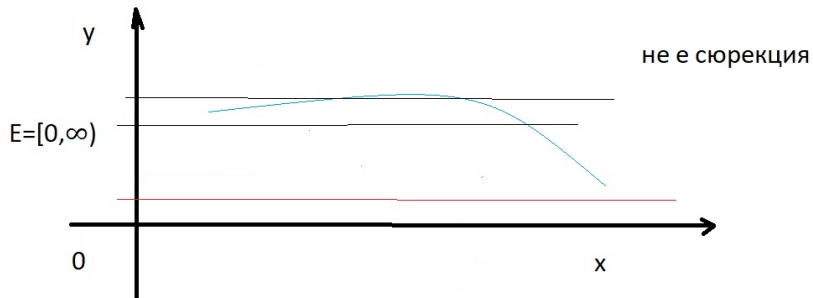


Относно сюрекция



Дадена функция е сюрекция \iff всяка права, успоредна на Ox , през точка от E пресича графика на функцията поне в една точка.

Относно сюрекция

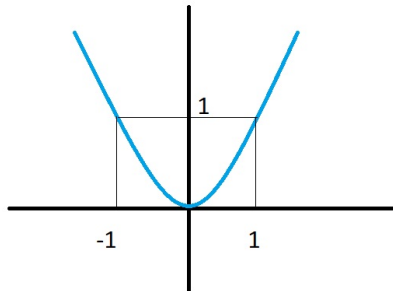


Примери

$$f : D \rightarrow E$$

$f(x) = x^2$ е инекция, ако $D \subseteq [0, \infty)$,

иначе не е; напр. не е върху $D = [-1, 1]$



$f(x) = x^2$ е сюрекция, ако $D = E = [0, \infty)$,
както и ако $D = \mathbb{R}$ и $E = [0, \infty)$,

но не е, ако $D = [0, \infty)$ и $E = \mathbb{R}$;

$f(x) = x^2$ е сюрекция, ако $D = E = [0, 1]$,
както и ако $D = [-1, 1]$ и $E = [0, 1]$,
но не е, ако $D = [-1, 1]$ и $E = [0, 2]$.

Относно биекция

Функцията $f : D \rightarrow E$, където $D, E \subseteq \mathbb{R}$, е биекция

\iff всяка права, успоредна на Ox , през точка от E пресича графиката на функцията точно в една точка,

т.е. за всяко $y_0 \in E$ уравнението

$$f(x) = y_0 \tag{2}$$

има точно едно решение в D ($x \in D$).

Обратни функции

Дефиниция

Нека $f : D \rightarrow E$, където $D, E \subseteq \mathbb{R}$, е биекция. Дефинираме функцията $f^{-1} : E \rightarrow D$, като за $y \in E$, полагаме $f^{-1}(y) := x$, където $x \in D$ е единственото такова, че $f(x) = y$.

Функцията f^{-1} се нарича обратна функция на f .

Трябва да правим разлика между $f^{-1}(y)$ и $f(x)^{-1} := \frac{1}{f(x)}$.

Пример

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0, 1].$$

Тогава f е инекция

$$\text{и } f(D) = [0, 1]$$

$\implies f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ е биекция.

За да намерим обратната функция на f ,
решаваме уравнението

$$f(x) = y, \quad y \in [0, 1] \tag{3}$$

относно $x \in [0, 1]$,

т.е.

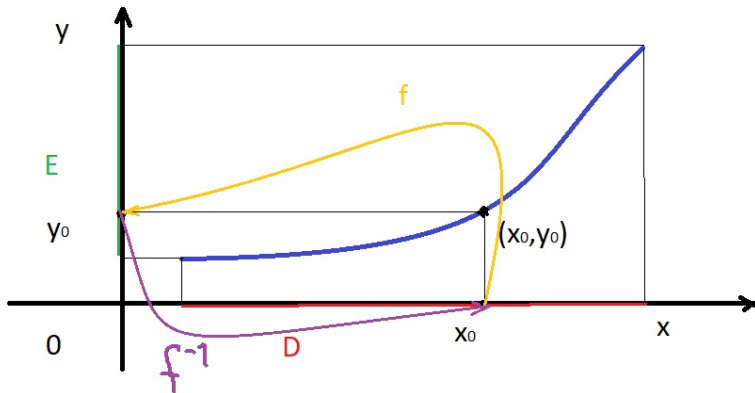
$$x^2 = y, \quad x, y \in [0, 1]. \tag{4}$$

Получаваме

$$x = \sqrt{y}, \quad y \in [0, 1] \tag{5}$$

$$\implies f^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad y \in [0, 1]. \tag{6}$$

Основни свойства на f^{-1}



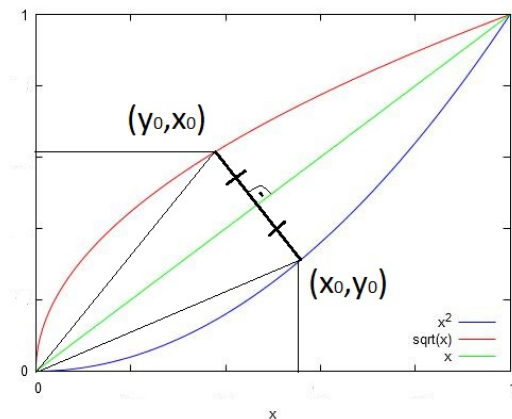
Основни свойства на f^{-1}

(а) $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in E,$

(б) $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D.$

Връзка между графиките на правата и обратната функция

Те са симетрични относно ъглополовящата на първи и трети квадрант.



Елементарни функции

- Алгебрични полиноми: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$
- Рационални функции: $\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$,
 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$
- Степенна функция: x^α , $\alpha \in \mathbb{R}$
- Показателна функция: a^x , $a > 0$
- Логаритмична функция: $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$
- Тригонометрични функции
- Обратни тригонометрични функции
- Образованите от тях функции чрез аритметичните действия и композиция