12. Някои основни граници на функции

$\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1, \quad a > 0$

Забелязваме, че е достатъчно да докажем, че

$$\lim_{x \to 0+0} a^x = 1, \quad a > 1. \tag{1}$$

Действително тогава за лявата граница получаваме

$$a^x = \frac{1}{\underbrace{a^{-x}}_{\xrightarrow[x \to 0-0]{} 1}} \xrightarrow[x \to 0-0]{} 1. \tag{2}$$

$$(1) \text{ и } (2) \implies \lim_{x \to 0} a^x = 1, \quad a > 1. \tag{3}$$

Случаят $0 < a < 1$ се свежда към (3) посредством представянето

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} \quad \left(\text{имаме, че } \frac{1}{a} > 1 \text{ щом } 0 < a < 1\right). \tag{4}$$

Доказателство на $\lim\limits_{x\to 0+0} a^x = 1, \quad a > 1$

Ще докажем, че

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 : a^x - 1 < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < x < \delta. \tag{5}$$

Да припомним, че, след като $a > 1$, то $a^x \geq 1$ при $x \geq 0$

$$\Longrightarrow \quad a^x - 1 \geq 0, \quad x \geq 0. \tag{6}$$

Достатъчно е да докажем (5) за $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. че

$$\Big(\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \; a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geq n_0\Big) \iff \lim a^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{7}$$

Това е така благодарение на

$$a^{x_1} \leq a^{x_2}, \quad x_1 \leq x_2, \tag{8}$$

което следва от $a^x \geq 1$, $x \geq 0$.
Действително, $a^{x_2} = \underbrace{a^{x_2 - x_1}}_{\geq 1} a^{x_1}$.

(7) $\Longrightarrow$ (5)

$$x \leq \frac{1}{n} \quad \overset{(8)}{\Longrightarrow} \quad a^x - 1 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1. \tag{9}$$

Затова, каквото и $\varepsilon > 0$ да вземем, според (7) съществува $n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че

$$a^{\frac{1}{n_0}} - 1 < \varepsilon \quad \overset{(9)}{\Longrightarrow} \quad a^x - 1 < \varepsilon \quad \text{при} \quad x \leq \frac{1}{n_0} =: \delta, \tag{10}$$

с което (5) е установено.

Доказателство на $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$, т.е. $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

Полагаме $b_n := a^{\frac{1}{n}} - 1$.

Имаме

$$a = (b_n + 1)^n \overset{\text{бин. ф-ла}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k 1^{n-k} \geq n b_n \tag{11}$$

(запазваме само събираемото за $k = 1$ останалите изпускаме; те са > 0).

Така получаваме

$$0 \leq b_n \leq \frac{a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim b_n \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim a^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{12}$$

С това доказателството на $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1,\ a > 0$ приключва.

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Аналогично на първата граница.

Първо ще докажем, че $\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. За тази цел ще свържем стойностите на функцията $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ за $x \in (0,1]$ с членове на редици от вида $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$, за която знаем, че

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{13}$$

(всъщност границата на тази редица по деф. се означава с e).

Нека $x \in (0,1]$. При клоненето си към 0 с положителни стойности, x попада в интервали от вида $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ за $n = 1, 2, \dots$

Използваме, че при $x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ имаме

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{14}$$

Имаме

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\to e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1 \text{ при } n\to\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} e. \qquad (15)$$

Аналогично

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}}_{\to 1 \text{ при } n\to\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} e. \qquad (16)$$

Така установихме, че

$$\begin{array}{ccccc} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}} & \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq & \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} & \\ \downarrow & & \downarrow & n\to\infty \\ e & & e & \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists \lim_{x\to 0+0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \qquad (17)$$

$\lim\limits_{x \to 0-0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Нека $x \in (-1, 0)$. Ще сведем този случай, към вече разгледания. Използваме представянето

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{-x}} \\
&= \left(1 + \left[\frac{1}{1+x} - 1\right]\right)^{\frac{1}{-x}} \\
&= \left(1 + \frac{-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{-x}} \\
&= \left(1 + \frac{-x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-x}} \left(1 + \frac{-x}{1+x}\right) \\
&\overset{y := \frac{-x}{1+x}}{=} (1+y)^{\frac{1}{y}} \, (1+y) \, .
\end{aligned}
$$

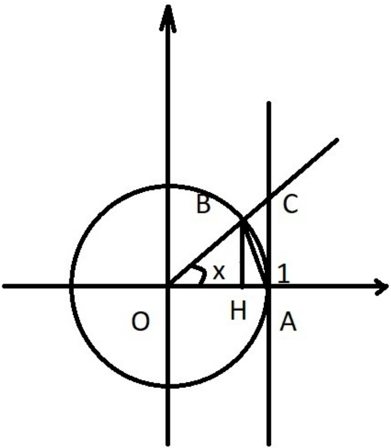
Имаме, че при $x \to 0-0$ величината $y := \frac{-x}{1+x} \to 0+0$. Тогава

$$\lim_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0+0}(1+y)^{\frac{1}{y}} \lim_{y\to 0+0}(1+y) \overset{(17)}{=} e.1 = e. \qquad (18)$$

$$(17) \text{ и } (18) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \qquad (19)$$

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Нека $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
Имаме



$$S_{\Delta\, OAB} \leq S_{\text{сект.}\, OAB} \leq S_{\Delta\, OAC} \quad (20)$$

$$OA = 1,\ BH = \sin x,\ AC = \operatorname{tg} x$$

$$S_{\Delta\, OAB} = \frac{1}{2} OA.BH = \frac{\sin x}{2},$$

$$S_{\text{сект.}\, OAB} = \pi . \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2},$$

$$S_{\Delta\, OAC} = \frac{1}{2} OA.AC = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$\overset{(20)}{\Longrightarrow} \quad \sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

Имаме

$$0 \leq \sin x \leq x \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0+0. \tag{21}$$

Сега от Теорема 3 в тема 10 (или нейното Следствие)

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0+0} \sin x = 0. \tag{22}$$

За лявата граница оттук следва, като използваме, че $\sin(-x) = -\sin x$,

$$\sin x = -\sin(-x) \underset{x \to 0-0}{\longrightarrow} 0, \text{ защото } -x \to 0+0 \quad \text{при} \quad x \to 0-0. \tag{23}$$

Така установихме, че

$$\lim_{x \to 0+0} \sin x = \lim_{x \to 0-0} \sin x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0} \sin x = 0. \tag{24}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

Използваме следната връзка между cos и sin:

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}. \tag{25}$$

От $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ и теоремата за граница на съставна функция (Теорема 4 в тема 10) следва, че

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{x}{2} = 0 \quad \overset{\text{Т-ма 1(б), тема 10}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x\to 0} \sin^2 \frac{x}{2} = 0. \tag{26}$$

$$\overset{\text{Т-ма 1, тема 10}}{\Longrightarrow} \quad \cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 - 2.0 = 1. \tag{27}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

За $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имаме

$$\sin x \le x \le \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Longrightarrow \quad \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1. \tag{28}$$

Както вече установихме, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, така че имаме

$$\underbrace{\cos x}_{\to 1,\ x\to 0+0} \le \frac{\sin x}{x} \le 1 \quad \stackrel{\text{Т-ма 3, тема 10}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{29}$$

За да докажем и че лявата граница е толкова, отново използваме $\sin(-x) = -\sin x$ и следователно

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}. \tag{30}$$

Сега при $x \to 0-0$ имаме $-x \to 0+0$ и следователно, щом $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, то $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin(-x)}{-x} \xrightarrow[x\to 0-0]{} 1$.