10. Критерии за сходимост на несобствени интеграли

Принцип за сравняване

Теорема (Принцип за сравняване на несобствени интеграли от неотрицателни функции)

Нека $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ са непрекъснати и удовлетворяват неравенствата

$$0 \le f(x) \le g(x), \quad x \in [a, b). \tag{1}$$

Тогава:

(а) ако несобственият интеграл $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ е сходящ, то сходящ е и несобственият интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$;

(б) ако несобственият интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ е разходящ, то разходящ е и несобственият интеграл $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$.

Символът b може да означава и $+\infty$.

Доказателство

(a) Полагаме за $p \in [a, b)$

$$F(p) := \int_a^p f(x)\,dx \quad \text{и} \quad G(p) := \int_a^p g(x)\,dx. \tag{2}$$

Понеже $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b)$, то $F(p)$ е монотонно растяща. Действително за $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in [a, b)$, поради адитивността на интеграла имаме

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(x)\,dx - \int_a^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \geq 0. \tag{3}$$

Аналогично се вижда, че $G(p)$ е също монотонно растяща.

От монотонността на интеграла и $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a,b)$, следва

$$F(p) \leq G(p), \quad p \in [a,b). \tag{4}$$

Несобственият интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ е сходящ. По дефиниция

$$\lim_{p \to b} G(p) = \int_a^b g(x)\,dx. \tag{5}$$

Като вземем още предвид, че $G(p)$ е монотонно растяща, от (5) получаваме, че $G(p)$ е ограничена отгоре. Сега от (4) следва, че $F(p)$ е ограничена отгоре. Тя е монотонно растяща. Следователно има граница при $p \to b - 0$ ($p \to +\infty$, ако $b = +\infty$) (Твърдение, Тема 15, ДИС1). Следователно несобственият интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ е сходящ.

(б) следва от (а) с допускане на противното.

Критерии за сходимост — несобств. инт. от II вид

Твърдение 1

Нека $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, е непрекъсната и неограничена. Ако съществува границата

$$\lim_{x \to b-0} f(x)(b-x)^{\lambda} \quad \text{с някое } \lambda < 1, \tag{6}$$

то несобственият интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ е абсолютно сходящ.

Твърдение 2

Нека $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, е непрекъсната и неограничена. Ако съществува границата

$$\lim_{x \to b-0} f(x)(b-x) \neq 0 \quad (\text{но се допуска } \pm\infty), \tag{7}$$

то несобственият интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ е разходящ.

Аналогично за особеност в т. a.

Критерии за сходимост — несобств. инт. от I вид

Твърдение 3

Нека $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Ако съществува границата

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)x^{\lambda} \quad \text{с някое } \lambda > 1, \tag{8}$$

то несобственият интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е абсолютно сходящ.

Твърдение 4

Нека $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Ако съществува границата

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)x \neq 0 \quad (\text{но се допуска } \pm\infty), \tag{9}$$

то несобственият интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е разходящ.

Упътване за доказателство на твърденията

Прилага се Принципът за сравняване на несобствени интеграли от неотрицателни функции към $|f(x)|$ и функция от вида $|x-c|^{-\lambda}$. Използва се, че

$$\int \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda \neq 1, \\ \ln x, & \lambda = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Оттук се вижда, че интегралът има крайна граница
при $x \to 0 \iff \lambda < 1$,
а при $x \to +\infty \iff \lambda > 1$.

Примери

1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}\,dx$. Забелязваме, че $\displaystyle\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ е непрекъсната и следователно има граница в т. 1. Тук $\lambda = \frac{1}{2} < 1$. Следователно несобственият интеграл е сходящ (Твърдение 1).

2) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$. Знаем, че $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} x^\lambda \ln x = 0$ за всяко $\lambda > 0$, в частност, например, с $\lambda = \frac{1}{2} < 1$. Следователно несобственият интеграл е сходящ (Твърдение 1).

3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$. Използваме, че $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$. Следователно несобственият интеграл е разходящ (Твърдение 4).