34. Интегриране на някои видове ирационални функции

I. Интеграли от функции, получени от

$$\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \quad \left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}, \quad p_i \in \mathbb{Z},\ q_i \in \mathbb{N}_+, \tag{1}$$

само чрез аритметичните операции. Предполага се, че $a_1b_2 \neq a_2b_1$.

Смяната на променливата, определена чрез

$$\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2} = t^k, \quad k := \mathrm{HOK}(q_1, q_2, \dots, q_n) \tag{2}$$

свежда такъв интеграл към интеграл от рационална функция.

Пример 1: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}, \quad x > 0$

Тук

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}, \quad p_1 = p_2 = 1,\ q_1 = 2,\ q_2 = 3. \tag{3}$$

Тогава $k = \text{НОК}(2,3) = 6$ и правим смяна на променливата, определена чрез $x = t^6$, $t > 0$. Получаваме

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \overset{x=t^6}{=} \int \frac{d(t^6)}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}} \overset{t\geq 0}{=} \int \frac{(t^6)'}{t^3+t^2}\,dt = 6\int \frac{t^5}{t^3+t^2}\,dt \tag{4}$$

$$= 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt = 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1}\,dt \tag{5}$$

$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| + \text{const}\right) \tag{6}$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln(t+1) + \text{const} \tag{7}$$

$$\overset{t=\sqrt[6]{x}}{=} 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + \text{const}. \tag{8}$$

Пример 2: $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx, \quad x>1$

Записваме подинтегралната функция във вида

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}\,dx. \tag{9}$$

Правим субституцията, определена чрез

$$\frac{x+1}{x-1}=t^2, \quad t>0, \quad \text{т.е.} \quad t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}. \tag{10}$$

Тогава

$$x=\frac{t^2+1}{t^2-1} \tag{11}$$

и

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx=\int \frac{t-1}{t+1}\,d\frac{t^2+1}{t^2-1} \tag{12}$$

$$=\int \frac{t-1}{t+1}\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)'dt=-4\int \frac{t}{(t+1)^3(t-1)}\,dt=\ldots \tag{13}$$

II. Интеграли от диференциален бином

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx, \quad m,n,p\in\mathbb{Q},\ a,b\in\mathbb{R},\ a,b\neq 0. \tag{14}$$

(а) Ако $p\in\mathbb{Z}$, получаваме интеграл от вида I.

(б) Ако $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$, правим субституцията, определена от

$$ax^n+b=t^k, \quad \text{където } k\in\mathbb{N}_+ \text{ е знаменателят на } p. \tag{15}$$

Получаваме интеграл от рационална ф-ция.

(в) Ако $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$, изнасяме x^n пред скоби:

$$\int x^{m+np}(bx^{-n}+a)^p dx. \tag{16}$$

Получаваме интеграл от вида II.(б).

Бележка: В противен случай интегралът не може да се изрази само чрез елементарни ф-ции.

Пример 1: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x}\,dx, \quad x>0$

Тук $m=-1$, $n=4$ и $p=\frac{1}{2}$ и $\frac{m+1}{n}=0$ — случай (б). Правим субституцията, определена чрез

$$1+x^4=t^2, \quad t>0, \quad \text{т.е.} \quad t=\sqrt{1+x^4}. \tag{17}$$

Тогава

$$x=\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{4}} \tag{18}$$

и

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x}\,dx = \int t\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{4}} d\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{4}} \tag{19}$$

$$= \int t\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{4}} \left[\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{4}}\right]' dt \tag{20}$$

$$= \int t\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{4}\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{4}} 2t\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = \dots \tag{21}$$

Пример 2: $\int x\sqrt[3]{1+x^3}\,dx, \quad x>0$

Тук $m=1$, $n=3$ и $p=\frac{1}{3}$ и $\frac{m+1}{n}+p=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$ — случай (в).
Преработотваме подинтегралната ф-ция във вида

$$\int x\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\int x^2\sqrt[3]{x^{-3}+1}\,dx. \tag{22}$$

Правим субституцията, определена чрез

$$x^{-3}+1=t^3, \quad \text{т.е.} \quad t=\sqrt[3]{x^{-3}+1} \quad (\overset{x>0}{\Longrightarrow} \quad t>1). \tag{23}$$

Тогава

$$x=\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{3}}, \quad t>1, \quad \text{и} \tag{24}$$

$$\int x\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\int x^2\sqrt[3]{x^{-3}+1}\,dx=\int\left(t^3-1\right)^{-\frac{2}{3}}t\,d\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{3}} \tag{25}$$

$$=\int\left(t^3-1\right)^{-\frac{2}{3}}t\left[\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{3}}\right]'dt \tag{26}$$

$$=\int\left(t^3-1\right)^{-\frac{2}{3}}t\left(-\frac{1}{3}\right)\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}3t^2dt=-\int\frac{t^3}{(t^3-1)^2}\,dt=\dots \tag{27}$$

III. Интеграли от функции, получени от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ чрез аритметичните действия.

Свеждат се към интеграл от рационална ф-ция чрез т.нар. субституции на Ойлер.

(а) Първа субституция на Ойлер: приложима е ако $a > 0$ и се определя чрез $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$.

(б) Втора субституция на Ойлер: приложима е ако квадратният тричлен има два различни реални корена и се определя чрез $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$, където α е един от корените на ax^2+bx+c.

(в) Трета субституция на Ойлер: приложима е ако $c > 0$ и се определя чрез $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$.

Бележка: Винаги е приложима поне една от тези субституции.

Пример: $\int \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}\,dx$

(a) Правим субституцията, определена чрез $\sqrt{x^2-3x+2} = x+t$. Решаваме като уравнение относно x. След повдигане на квадрат, получаваме

$$x^2-3x+2 = (x+t)^2 = x^2+2tx+t^2 \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{2-t^2}{2t+3}. \tag{28}$$

Следователно

$$\sqrt{x^2-3x+2} = x+t = \frac{2-t^2}{2t+3} + t = \frac{t^2+3t+2}{2t+3} \tag{29}$$

и тогава

$$\int \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}\,dx = \int \frac{t^2+3t+2}{2t+3}\,\frac{2t+3}{2-t^2}\,d\,\frac{2-t^2}{2t+3} \tag{30}$$

$$= \int \frac{t^2+3t+2}{2-t^2}\left(\frac{2-t^2}{2t+3}\right)' dt = 2\int \frac{(t^2+3t+2)^2}{(2t+3)^2(t^2-2)}\,dt = \ldots \tag{31}$$

Накрая се връщаме към старата променлива: $t = \sqrt{x^2-3x+2} - x$.

Пример — продължение

(б) Имаме $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Правим субституцията, определена чрез $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = t(x-1)$. Решаваме като уравнение относно x. След повдигане на квадрат, получаваме

$$(x-1)(x-2) = t^2(x-1)^2 \quad \Longrightarrow \quad x-2 = t^2(x-1) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{t^2-2}{t^2-1}. \tag{32}$$

Следователно

$$\sqrt{x^2-3x+2} = t(x-1) = t\left(\frac{t^2-2}{t^2-1} - 1\right) = -\frac{t}{t^2-1} \tag{33}$$

и тогава

$$\int \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}\,dx = \int \frac{-t}{t^2-1}\,\frac{t^2-1}{t^2-2}\,d\,\frac{t^2-2}{t^2-1} \tag{34}$$

$$= -\int \frac{t}{t^2-2}\left(\frac{t^2-2}{t^2-1}\right)' dt = -2\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2(t^2-2)}dt = \dots \tag{35}$$

Накрая се връщаме към старата променлива: $t = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$.

Пример — продължение

(в) Правим субституцията, определена чрез $\sqrt{x^2-3x+2}=xt+\sqrt{2}$. Решаваме като уравнение относно x. След повдигане на квадрат, получаваме

$$x^2-3x+2=\left(xt+\sqrt{2}\right)^2=x^2t^2+2\sqrt{2}tx+2 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{2\sqrt{2}t+3}{1-t^2}. \tag{36}$$

Следователно

$$\sqrt{x^2-3x+2}=xt+\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}t^2+3t}{1-t^2}+\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}t^2+3t+\sqrt{2}}{1-t^2} \tag{37}$$

и тогава

$$\int\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}\,dx=\int\frac{\sqrt{2}t^2+3t+\sqrt{2}}{1-t^2}\,\frac{1-t^2}{2\sqrt{2}t+3}\,d\,\frac{2\sqrt{2}t+3}{1-t^2} \tag{38}$$

$$=\int\frac{\sqrt{2}t^2+3t+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}t+3}\left(\frac{2\sqrt{2}t+3}{1-t^2}\right)'dt=2\int\frac{\left(\sqrt{2}t^2+3t+\sqrt{2}\right)^2}{(t^2-1)^2\left(2\sqrt{2}t+3\right)}\,dt=\dots$$

Накрая се връщаме към старата променлива: $t=\frac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2}}{x}$.