35. Интегриране на рационални функции на $\sin x$ и $\cos x$

Подинтегралната функция се получава от $\sin x$ и $\cos x$ само чрез аритметичните операции.

(а) Свеждаме към интеграл от рационална функция чрез универсалната субституция:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi). \tag{1}$$

Тогава $x = 2\operatorname{arctg} t$.

(б) Ако подинтегралната функция се образува от $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ и $\sin x \cos x$ само чрез аритметичните операции, по-добре е да се използва субституцията:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$
$$t = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Тогава $x = \operatorname{arctg} t$.

Пример: $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

(а) Универсалната субституция

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{d(2\operatorname{arctg} t)}{1+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} = 2\int \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2+4t^2}(\operatorname{arctg} t)' dt \tag{3}$$

$$= 2\int \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2+4t^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{t^2+1}{t^4+6t^2+1}\,dt = \dots \tag{4}$$

Връщаме се към първоначалната променлива: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$.

(б) Чрез субституцията $x = \operatorname{arctg} t$.

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{d\operatorname{arctg} t}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{1+2t^2}(\operatorname{arctg} t)' dt \tag{5}$$

$$= \int \frac{1+t^2}{1+2t^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \dots \tag{6}$$

Връщаме се към първоначалната променлива: $t = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Пример: (б) — продължение

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \int \frac{dt}{1+\left(\sqrt{2}t\right)^2} \tag{7}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{1+\left(\sqrt{2}t\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}t\right) + \mathrm{const} \tag{8}$$

$$\overset{t=\operatorname{tg} x}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + \mathrm{const}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{9}$$

Но поради π-периодичността на подинтегралната функция и на функцията $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right)$ имаме и

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + \mathrm{const},$$
$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

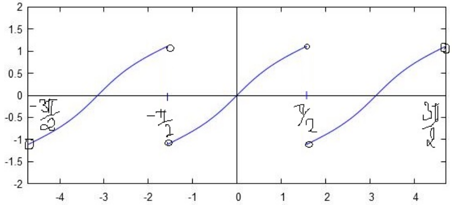
Интегралът върху $\mathbb{R}$

Полагаме

$$F(x) := \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + c_k, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \qquad (11)$$

където $c_k \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$. Тогава

$$F'(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (12)$$



Графиката на $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right)$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x < \frac{\pi}{2} + k\pi}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} + k\pi \\ x > -\frac{\pi}{2} + k\pi}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Определяме константите c_k, $k \in \mathbb{Z}$, така, че

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x < \frac{\pi}{2} + k\pi}} F(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x > \frac{\pi}{2} + k\pi}} F(x). \tag{13}$$

Така $F(x)$ ще има граница в т. $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(13) е еквивалентно на (да забележим, че $\frac{\pi}{2} + k\pi = -\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi$)

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_k = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_{k+1} \iff c_{k+1} = c_k + \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \tag{14}$$

Така получаваме

$$c_k = c_0 + \frac{k\pi}{\sqrt{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Дефинираме $F(x)$ в точките $\frac{\pi}{2} + k\pi$, като полагаме

$$F\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) := \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + k\pi} F(x) = c_0 + \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Тогава $F(x)$ е непрекъсната върху $\mathbb{R}$.

Имаме още

$$F'_-\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x<\frac{\pi}{2}+k\pi}} F'(x) \stackrel{(12)}{=} \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x<\frac{\pi}{2}+k\pi}} \frac{1}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{2} \tag{17}$$

$$F'_+\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x>\frac{\pi}{2}+k\pi}} F'(x) \stackrel{(12)}{=} \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x>\frac{\pi}{2}+k\pi}} \frac{1}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{2} \tag{18}$$

Следователно

$$F'_-\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = F'_+\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Следователно $F(x)$ е диференцируема в т. $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, и $F'\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\frac{1}{2}$.
С това показахме, че $F(x)$ е диференцируема върху $\mathbb{R}$ и $F'(x)=\frac{1}{1+\sin^2 x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Така установихме, че

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

където

$$F(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right) + c_0 + \frac{k\pi}{\sqrt{2}}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z} \\ c_0 + \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2}+k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{21}$$

където $c_0 \in \mathbb{R}$.

Задача. Намерете неопределния интеграл

$$\int |\sin x|\, dx, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{22}$$