# 20. Диференциране на сума, произведение и частно на функции

## Теорема

Нека $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ са диференцируеми. Тогава диференцируеми са и функциите $f + g$ и $fg$, като

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x), \quad x \in (a, b), \tag{1}$$

и

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad x \in (a, b). \tag{2}$$

Ако още $g(x) \neq 0$ в $(a, b)$, то диференцириема е и функцията $\dfrac{f}{g}$, като

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x),}{g^2(x)}, \quad x \in (a, b). \tag{3}$$

Нека $c \in \mathbb{R}$. Тогава

$$(2) \quad \Longrightarrow \quad [cf(x)]' = cf'(x), \tag{4}$$

# Доказателство

За да установим диференцируемостта и посочената формула за производната, във всеки един от случаите ще докажем, че диференчното частно има граница, която е равна на дясната страна на съответната формула.

Навсякъде по-долу $x_0 \in (a, b)$ е произволно фиксирана и предполагаме, че $h \neq 0$ е достатъчно близко до $0$, че да имаме $x_0 + h \in (a, b)$.

# Сума

Имаме

$$\frac{[f(x_0+h)+g(x_0+h)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{h}$$
$$= \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)} + \underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} g'(x_0)}, \quad (6)$$

защото $f$ и $g$ са диференцируеми в т. $x_0$.

С това установихме, че

$$\lim_{h\to 0} \frac{[f(x_0+h)+g(x_0+h)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{h} = f'(x_0)+g'(x_0), \quad (7)$$

с което показахме, че $f+g$ има производна в т. $x_0$ и

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0). \quad (8)$$

# Произведение

Имаме

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{[f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)]+[f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)]}{h}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)} \underbrace{g(x_0+h)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} g(x_0)} + f(x_0)\underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} g'(x_0)},$$

защото $f$ и $g$ са диференцируеми в т. $x_0$.

С това установихме, че

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0), \quad (9)$$

с което показахме, че $fg$ има производна в т. $x_0$ и

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0). \quad (10)$$

# Частно

За да докажем твърдението за частно, свеждаме частното към произведение:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}. \tag{11}$$

Така, за да завършим доказателството, е достатъчно да намерим производната на $\frac{1}{g}$ (което е частният случай на третото твърдение, в който $f(x) \equiv 1$) и след това да приложим формулата за производна на произведение (10).

Имаме

$$\frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = -\underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} g'(x_0)} \frac{1}{\underbrace{g(x_0+h)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} g(x_0)} g(x_0)}. \tag{12}$$

Така установихме, че

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \tag{13}$$

с което показахме, че $\dfrac{1}{g}$ има производна в т. $x_0$ и

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{14}$$

Сега третото твърдение в теоремата, предвид (11), следва непосредствено от (10) и (14):

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &\overset{(11)}{=} \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\
&\overset{(10)}{=} f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\
&\overset{(14)}{=} \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot\left(-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\right) \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.
\end{aligned}
$$