Божана, [illegible] КР #3

Задача 4)

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4)(2)(5\ 6)$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 6)(2\ 4)(3\ 5)$

$r(\sigma) = [2, 3] = 6$

$r(\tau) = [2, 2, 2] = 2$

2. $r(\sigma^k) \leq r(\tau^k), \quad k \in \mathbb{Z}$

k трябва да дели 3, тогава

$r(\sigma^k) = \begin{cases} 2, & \text{ако } k \nmid 2 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$

и $r(\tau^k) = \begin{cases} 2, & \text{ако } k \nmid 2 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$

Тоест ако $k | 3$, редовете им ще са равни

3. $r(\sigma^5) \leq r(\sigma\tau\sigma^{-1})$

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$\tau\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\sigma\tau\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)$

$r(\sigma\tau\sigma^{-1}) = 2 \Rightarrow r(\sigma^5) = 1 \Rightarrow 5 | 6$

Задача 2) $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$

	$\bar0$	$\bar1$
$\bar0$	1	2
$\bar1$	4	4
$\bar2$	2	2
$\bar3$	4	4

$A_0 = \{(\bar0, \bar0)\}$

$A_1 = A_0 \cup \{(\bar0; \bar1)\} < A_0$

$A_2 = A_0 \cup \{(\bar2; \bar0)\} < A_0$

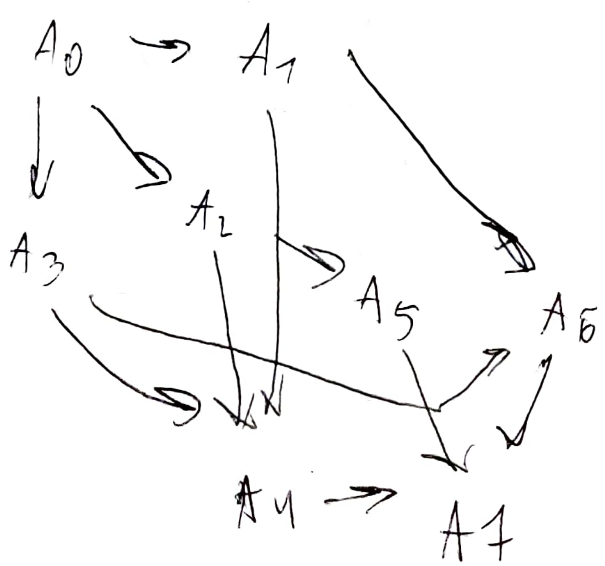
$A_3 = A_0 \cup \{(\bar2; \bar1)\} < A_0$

$A_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \quad < A_1, A_2, A_3$

$A_5 = \mathbb{Z}_4 \times \bar0 = A_2 \cup \{(\bar1; \bar0); (\bar3; \bar0)\} \quad < A_2$

$A_6 = A_1 \cup \{(\bar1, \bar1); (\bar3, \bar1)\} \cup A_2 \quad < A_1, A_2$

$A_7 = G \quad < A_4, A_5, A_6$



Задача 3) $G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid ab \neq 0\}$

$(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2, a_1 c_2 + c_1 b_2) \in G \mid \begin{matrix} a_1 a_2 \neq 0 \\ b_1 b_2 \neq 0 \end{matrix}$

- Доказване, че G е група:

• Единичният ел. е $e = (1,1,0)$

Нека $(a,b,c) \in G$

$(a,b,c)(1,1,0) = (a.1, b.1, 1.c + 0.1) = (a,b,c)$

$(1,1,0)(a,b,c) = (1.a, 1.b, 0.1 + c.1) = (a,b,c)$

• Обратният ел. на $(a,b,c) \in G$ е $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, -\frac{c}{ab}\right)$

$(a,b,c) \cdot \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, -\frac{c}{ab}\right) = \left(a \cdot \frac{1}{a}, b \cdot \frac{1}{b}; \frac{1}{b} \cdot c + a \cdot \left(-\frac{c}{ab}\right)\right) =$

$= \left(1, 1; \frac{c}{b} - \frac{c}{b}\right) = (1,1,0)$

• $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, -\frac{c}{ab}\right)(a,b,c) = (1,1,0)$

• Асоциативност:

Нека $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) \in G$

Имаме нужда да проверим само за 3-тия елемент от деф. пр., защото за другите два е просто произв. в $\mathbb{R}$

$(a_1, b_1, c_1)((a_2, b_2, c_2)(a_3, b_3, c_3)) =$

$(a_1, b_1, c_1)(\ldots, \ldots, a_2 c_3 + b_3 c_2) = (\ldots, \ldots, a_1 a_2 c_3 + b_3 c_2 + b_2 b_3 c_1)$

$= (\ldots, \ldots, a_1a_2c_3 + a_1b_3c_2 + b_2b_3c_1) = (\ldots, \ldots, b_3(a_1c_2 + b_2c_1) + a_1a_2c_3) =$

$= (\ldots, \ldots, a_1c_2 + b_2c_1)(a_3, b_3, c_3) = ((a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2))(a_3, b_3, c_3)$

– Ще докажем, че G е неабелева:

Нека $(a_1, b_1, c_1); (a_2, b_2, c_2) \in G$

$(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2) = (a_1a_2, b_1b_2, a_1c_2 + c_1b_2)$

$\#$

$(a_2, b_2, c_2)(a_1, b_1, c_1) = (a_1a_2, b_1b_2, a_2c_1 + c_2b_1)$

$\Rightarrow$ не е абелева

– $K = \{(a, b, c) \in G \mid a = b\}$

Искаме да докажем $G/K \cong \mathbb{R}^*$ с т. за хоморф.

т.е. търсим $\varphi : G \to \mathbb{R}^*$, такова че:

- $\operatorname{Ker} \varphi = K$
- $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^*$
- φ да е хоморфизъм

Нека ~~да~~ видим дали $\varphi((a, b, c)) = \frac{a}{b}$, изпълнява условията:

- $\operatorname{Ker} \varphi = \{(a, b, c) \in G \mid \frac{a}{b} = 1\} = \{(a, b, c) \in G \mid a = b\}$
- $\operatorname{Im} \varphi = \{\frac{a}{b} \mid (a, b, c) \in G\} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{R}^*\} = \{c \mid c \in \mathbb{R}^*\} =$ (защото $\mathbb{R}^*$ е затв. за дел.)

$= \mathbb{R}^*$

• Нека (a_1, b_1, c_1); $(a_2, b_2, c_2) \in G$

$\varphi((a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2)) = \varphi(a_1a_2, b_1b_2, a_1c_2 + b_2c_1) =$

$= \frac{a_1a_2}{b_1b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \varphi(a_1, b_1, c_1)\, \varphi(a_2, b_2, c_2)$

$\Rightarrow$ Можем да приложим теоремата за хомоморфизма и от нея следва, че

$G/K \cong \mathbb{R}^*$ и $K \trianglelefteq G$