Примерни задачи за базис на сума и сечение на подпространства, матрични уравнения и линейни изпбражения

Задача 1. *В пространството* $\mathbb{Q}^4$ *на наредените четворки рационални числа е дадена линейната обвивка* $U = l(a_1, a_2)$ *на векторите*

$$a_1 = (1, -1, -3, 0), \quad a_2 = (3, -1, -6, -1)$$

и линейната обвивка $W = l(b_1, b_2)$ *на векторите*

$$b_1 = (1, 1, 0, -1), \quad b_2 = (2, 8, 4, -1).$$

Да се намерят базиси на сумата $U + W$ *и на сечението* $U \cap W$.

Задача 2. *В пространството* $\mathbb{Q}^4$ *на наредените четворки рационални числа е дадено пространството от решения* U *на хомогенната система линейни уравнения*

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

и пространството от решения W *на хомогенната система линейни уравнения*

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +3x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = 0 \end{array} \right. .$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ *и на сумата* $U + W$.

Задача 3. *Да се реши матричното уравнение*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. *Да се реши матричното уравнение*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 6 \\ 10 & 1 & 4 \\ 14 & 0 & 6 \\ 15 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. *Да се реши матричното уравнение*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. *Да се реши матричното уравнение*

$$Y \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 7. *Да се реши матричното уравнение*

$$Y \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. *Нека* e_1, e_2, e_3 *е базис на линейно пространство* U *над поле* F, *а* f_1, f_2, f_3 *е базис на линейно пространство* V *над* F. *Линейното изображение* $\varphi : U \to V$ *трансформира базиса* e_1, e_2, e_3 *на* U *във векторите*

$$\varphi(e_1) = f_1 + f_2 - 2f_3, \quad \varphi(e_2) = f_1 - 2f_2 + f_3, \quad \varphi(e_3) = -2f_1 + f_2 + f_3.$$

Да се намери множеството

$$\varphi^{-1}(\mathcal{O}_V) := \{u \in U \,|\, \varphi(u) = \mathcal{O}_V\}$$

на пра-образите на нулевия вектор $\mathcal{O}_V \in V$ *и множеството*

$$\varphi^{-1}(f_1 + f_2 - 2f_3) := \{u \in U \,|\, \varphi(u) = f_1 + f_2 - 2f_3\}$$

на пра-образите на вектора $f_1 + f_2 - 2f_3 \in V$.