1. Определен интеграл. Дефиниции на Риман и Дарбу, еквивалентност. Геометричен смисъл

Определен интеграл — дефиниция на Риман

Дефиниция

Разбиване на интервала $[a, b]$ наричаме всяко множество от точки $\tau := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ такива, че

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Пишем още

$$\tau : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Точките $x_0, x_1, \dots, x_n$ се наричат делящи. Диаметър на разбиването τ наричаме числото $d(\tau) := \max\limits_{i=1,\dots,n} (x_i - x_{i-1})$.

Дефиниция

Точките $c_1, c_2, \dots, c_n$ наричаме междинни за разбиването

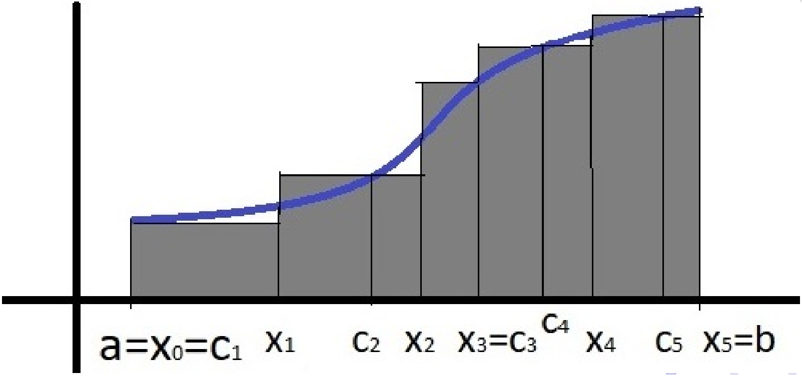
$$\tau : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

ако $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Дефиниция

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Нека $\tau : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ е разбиване на $[a, b]$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ са междинни точки за τ. Риманова сума на $f(x)$ по разбиването τ и междинните точки $c_1, c_2, \ldots, c_n$ наричаме сумата

$$R_\tau := R_\tau(f) := \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{1}$$



Дефиниция (Риман)

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Казваме, че римановите суми на $f(x)$ клонят към $I \in \mathbb{R}$ (или имат граница I) при диаметър на разбиването, клонящ към 0, ако

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad |R_\tau(f) - I| < \varepsilon \\ \text{за всяко разбиване } \tau \text{ с } d(\tau) < \delta \text{ и всеки междини точки.} \tag{2}$$

Пишем

$$\lim_{d(\tau)\to 0} R_\tau(f) = I. \tag{3}$$

Числото I се нарича риманов определен интеграл на $f(x)$ върху интервала $[a, b]$ и се означава с

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Така накратко

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{d(\tau)\to 0} R_\tau(f). \tag{4}$$

Дефиниция — продължение

Ако $f(x)$ има риманов определен интеграл върху $[a, b]$, казваме, че $f(x)$ е интегруема (в смисъл на Риман) върху $[a, b]$.

Още казваме определенен интеграл в смисъл на Риман.

За краткост ще казваме "определен интеграл" и "интегруема", без да споменаваме името на Риман.

Ограниченост на интегруемите функции

Твърдение 1

Всяка интегруема функция е ограничена.

Д-во: Нека $f(x)$ е интегруема върху $[a, b]$. Да положим $I := \int_a^b f(x)\,dx$. Тогава съществува разбиване $\tau: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ на $[a, b]$ такова, че

$$|R_\tau - I| < 1, \quad R_\tau := \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{5}$$

за всеки междинни точки $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Следователно

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < 1 + |I| \quad \forall c_i \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{6}$$

Като варираме $c_1 \in [x_0, x_1]$, а оставим останалите c_i фиксирани, от (6) получаваме, че $f(x)$ е ограничена в $[x_0, x_1]$. Аналогично установяваме, че $f(x)$ е ограничена във всеки от останалите $[x_{i-1}, x_i]$.

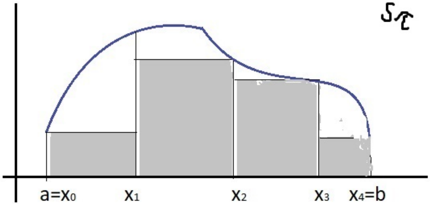
Определен интеграл — дефиниция на Дарбу

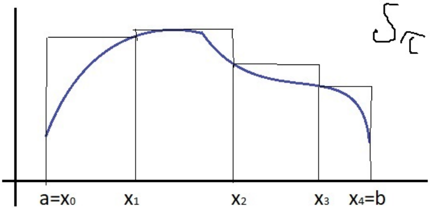
Дефиниция (суми на Дарбу)

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена. За разбиване
$\tau : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ на $[a, b]$ дефинираме съответно малката и голяма сума на Дарбу на $f(x)$ чрез

$$s_\tau := s_\tau(f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \tag{7}$$

$$S_\tau := S_\tau(f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x). \tag{8}$$





Определен интеграл — дефиниция на Дарбу

Да положим $m := \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогава

$$s_\tau \leq M(b-a) \quad \text{и} \quad S_\tau \geq m(b-a) \quad \forall\tau. \tag{9}$$

Първото неравенство показва, че множесвото от малките суми на Дарбу е ограничено отгоре. Тогава от Принципа за непрекъснатост следва, че то има точна горна граница. Аналогично второто неравенство показва, че множесвото от големите суми на Дарбу е ограничено отдолу. Тогава от Принципа за непрекъснатост следва, че това множество има точна долна граница.

Дефиниция (Дарбу)

Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ е ограничена. Долен, съответно горен, определен интеграл на $f(x)$ върху $[a,b]$ (в смисъл на Дарбу) наричаме числата

$$\underline{I} := \sup_\tau s_\tau \quad \text{и} \quad \overline{I} := \inf_\tau S_\tau. \tag{10}$$

Ако $\underline{I} = \overline{I}$, казваме, че $f(x)$ е интегруема върху $[a,b]$ и общата стойност на $\underline{I}$ и $\overline{I}$ наричаме определен интеграл на $f(x)$ върху $[a,b]$.

Свойства на сумите на Дарбу

Твърдение 2

При добавяне на нови делящи точки, малките суми на Дарбу не намаляват, а големите — не нарастват.

Д-во: Достатъчно е да установим твърдението при добавянето на една деляща точка. Общият случай следва след повторение на тази стъпка. Ще разгледаме малките суми на Дарбу. Твърдението за големите се д-ва аналог. или може да се използва $S_\tau(f) = -s_\tau(-f)$.
Нека $\tau_1 : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ е разбиване на $[a, b]$ и τ_2 е разбиването на $[a, b]$, което се получава от τ_1 с добавяне на делящата точка x'. Нека $x' \in (x_{j-1}, x_j)$. Тогава

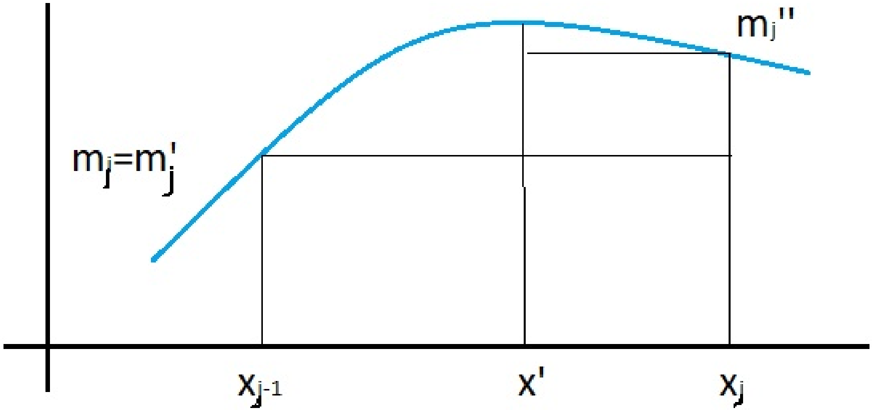
$$s_{\tau_2} - s_{\tau_1} = m_j'(x' - x_{j-1}) + m_j''(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}), \qquad (11)$$

където

$$m_j := \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x), \quad m_j' := \inf_{x\in[x_{j-1},x']} f(x), \quad m_j'' := \inf_{x\in[x',x_j]} f(x). \qquad (12)$$

Имаме $m_j', m_j'' \geq m_j$.

Свойства на сумите на Дарбу — продължение



От (11) следва

$$s_{\tau_2} - s_{\tau_1} = \underbrace{m_j'}_{\geq m_j}(x' - x_{j-1}) + \underbrace{m_j''}_{\geq m_j}(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}) \tag{13}$$

$$\geq m_j(x' - x_{j-1} + x_j - x' - x_j + x_{j-1}) = 0. \tag{14}$$

Твърдение 3

Всяка малка сума на Дарбу не надминава всяка голяма.

Д-во: Очевидно за всяко разбиване τ на интервала $[a, b]$ имаме

$$s_\tau \leq S_\tau. \tag{15}$$

Нека τ_1 и τ_2 са две произволни разбивания на $[a, b]$. От тях образуваме разбиването $\tau := \tau_1 \cup \tau_2$. От Твърдение 2 следва

$$s_{\tau_1} \leq s_\tau \quad \text{и} \quad S_{\tau_2} \geq S_\tau. \tag{16}$$

Като комбинираме (15) и (16), получаваме

$$s_{\tau_1} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq S_{\tau_2}. \tag{17}$$

Следствие

Имаме $\underline{I} \leq \overline{I}$.

Еквивалентност на двете дефиниции за определен интеграл

Лема (Дарбу)

Имаме $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} s_\tau = \underline{I}$ и $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} S_\tau = \overline{I}$.

Теорема

Дефинициите на Риман и Дарбу за определен интеграл са еквивалентни.

Д-во: Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегруема по смисъла на дефиницията на Риман. Това означава, че $\exists\, I = \lim\limits_{d(\tau)\to 0} R_\tau$. Следователно $f(x)$ е ограничена. Ще докажем, че $\underline{I} = \overline{I} = I$. Това ще означва, че $f(x)$ е интегруема в смисъла на дефиницията на Дарбу и определеният ѝ интеграл по смисъла на тази дефиниция съвпада с този по дефиницията на Риман.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано. Тогава съществува разбиване $\tau: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ такова, че

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon \quad \forall c_i \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{18}$$

Варираме всяко едно c_i съответно в $[x_{i-1}, x_i]$ така, че $f(c_i) \to m_i$. Така от (18) получаваме

$$\left| \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) - I \right| \leq \varepsilon. \tag{19}$$

Аналогично, като варираме всяко едно c_i съответно в $[x_{i-1}, x_i]$ така, че $f(c_i) \to M_i$, от (18) получаваме

$$\left| \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - I \right| \leq \varepsilon. \tag{20}$$

$$\Longrightarrow \quad I - \varepsilon \overset{(19)}{\leq} s_\tau \leq \underline{I} \overset{\text{Сл.}}{\leq} \overline{I} \leq S_\tau \overset{(20)}{\leq} I + \varepsilon. \tag{21}$$

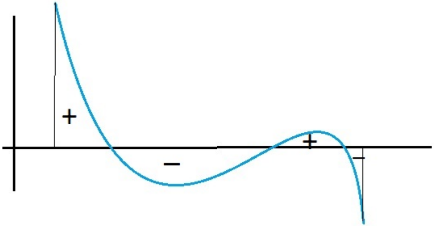
$$\Longrightarrow \quad I - \varepsilon \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq I + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{I} = \overline{I} = I. \tag{22}$$

Обратно, нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегруема по смисъла на дефиницията на Дарбу. Това означава, че $\underline{I} = \overline{I}$. Да положим $I := \underline{I} = \overline{I}$. Ще докажем, че $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} R_\tau = I$. Това ще означава, че $f(x)$ е интегруема в смисъла на дефиницията на Риман и определеният ѝ интеграл по смисъла на тази дефиниция съвпада с този по дефиницията на Дарбу. Очевидно

$$
\begin{aligned}
&s_\tau \le R_\tau \le S_\tau \quad \forall \tau && (23)\\
&\downarrow \qquad\qquad\quad \downarrow \quad \text{при} \quad d(\tau) \to 0 && (24)\\
&\underline{I} = I \qquad \overline{I} = I \qquad (\text{Лема на Дарбу}). && (25)
\end{aligned}
$$

Следователно $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} R_\tau = I$.

Геометричен смисъл на определния интеграл — ориентирано лице



Стойността на определения интеграл на интегруема функция дава лицето на фигурата, заключена между графиката на функцията и абцисната ос, като лицето на частите над абцисната ос се взимат със знак $+$, а тези под — със знак $-$.

Пример: Нека $f(x) \equiv k$ в $[a, b]$, където $k \in \mathbb{R}$. За всяко разбиване $\tau: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ на $[a, b]$ и всеки свързани с него междинни точки $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имаме

$$R_\tau = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = k \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = k(b-a) \underset{d(\tau)\to 0}{\longrightarrow} k(b-a).$$

Следователно $f(x)$ е интегруема върху $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a), \quad \text{т.е.} \quad \int_a^b k\,dx = k(b-a). \tag{26}$$

Лема на Дарбу — доказателство

Лема (Дарбу)

Имаме $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} s_\tau = \underline{I}$ и $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} S_\tau = \overline{I}$.

Д-во: Ще докажем твърдението за малките суми на Дарбу. Това за големите се д-ва аналог. или може да се използва $S_\tau(f) = -s_\tau(-f)$. Ще докажем, че

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \underline{I} - s_\tau < \varepsilon \quad \forall \tau \text{ с } d(\tau) < \delta. \tag{27}$$

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена. Полагаме

$$m := \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad \text{и} \quad M := \sup_{x\in[a,b]} f(x). \tag{28}$$

Случаят $m = M$ е тривиален (тогава $f \equiv c$, $c := m = M$, и $s_\tau = c(b - a)\ \forall \tau$). Ще считаме, че $m < M$.

Първо ще докажем, че ако τ_1 е разбиване на интервала $[a, b]$, а τ_2 е разбиването, което се получава от него с добавянето на една нова точка, то

$$s_{\tau_2} - s_{\tau_1} \leq (M - m)d(\tau_1). \tag{29}$$

От (11) следва

$$s_{\tau_2} - s_{\tau_1} = \underbrace{m'_j}_{\leq M}(x' - x_{j-1}) + \underbrace{m''_j}_{\leq M}(x_j - x') - \underbrace{m_j}_{\geq m}(x_j - x_{j-1}) \tag{30}$$

$$\leq M(x_j - x_{j-1}) - m(x_j - x_{j-1}) = (M - m)(x_j - x_{j-1}) \tag{31}$$

$$\leq (M - m)d(\tau_1). \tag{32}$$

Като итерираме (29), установяваме, че ако τ_2 се получава от τ_1 чрез добавянето на най-много k нови точки, то

$$s_{\tau_2} - s_{\tau_1} \leq k(M - m)d(\tau_1). \tag{33}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано. Понеже $\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2}$ не е вече горна граница на множеството от малките суми на Дарбу, то съществува разбиване τ_1 такова, че $s_{\tau_1} > \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2}$, т.е.

$$\underline{I} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{34}$$

Да означим броя на вътрешните точки на τ_1 с k. Пол. $\delta := \frac{\varepsilon}{2k(M-m)}$.
Нека τ е произволно разбиване на $[a, b]$ с $d(\tau) < \delta$.
Образуваме разбиването $\tau_2 := \tau \cup \tau_1$. Тъй като то се получава от τ с добавянето на най-много k точки, то от (33) следва

$$s_{\tau_2} - s_\tau \le k(M-m)d(\tau) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{35}$$

а от Твърдение 2 и (34) следва

$$s_{\tau_1} \overset{\text{Тв. 2}}{\le} s_{\tau_2} \quad \Longrightarrow \quad \underline{I} - s_{\tau_2} \le \underline{I} - s_{\tau_1} \overset{(34)}{<} \frac{\varepsilon}{2}. \tag{36}$$

Накрая, като използваме (35) и (36), получаваме

$$\underline{I} - s_\tau = (\underline{I} - s_{\tau_2}) + (s_{\tau_2} - s_\tau) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{37}$$

с което доказателството на лемата приключва.