Тъй като $g(x)$ е непрекъсната в x^0, то същото е вярно и за $\frac{1}{g(x)}$, т.е. $\Delta\left(\frac{1}{g}\right) \to 0$ при $h \to 0$. Имаме

$$\Delta\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{g\left(x^0\right) - g\left(x^0+h\right)}{g\left(x^0\right) g\left(x^0+h\right)} = -\frac{1}{g\left(x^0\right)}\ \Delta g \left(\frac{1}{g\left(x^0\right)} + \Delta\left(\frac{1}{g}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{g^2\left(x^0\right)}\ \Delta g\ -\ \frac{1}{g\left(x^0\right)}\ \Delta g\ \Delta\left(\frac{1}{g}\right)\ =\ \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{B_i}{g^2\left(x^0\right)}\right) h_i + r(h),$$

където

$$r(h) = -\frac{1}{g^2\left(x^0\right)}\ r_g(h)\ -\ \frac{1}{g\left(x^0\right)}\ \Delta g\ \Delta\left(\frac{1}{g}\right).$$

Тогава

$$\frac{r(h)}{||h||}\ =\ -\frac{1}{g^2\left(x^0\right)}\ \frac{r_g(h)}{||h||}\ -\ \frac{1}{g\left(x^0\right)}\ \frac{\Delta g}{||h||}\ \Delta\left(\frac{1}{g}\right).$$

От диференцируемостта на $g(x)$ следва, че $\frac{\Delta g}{||h||}$ е ограничена при достатъчно малки h (докажете!), и следователно $\frac{r(h)}{||h||} \to 0$ при $h \to 0$. ■

Диференциране на съставни функции.

При намиране на частни производни на сума, произведение и т.н. на функции на няколко променливи не е необходимо да се знае нищо повече от известните формули за производна на аритметични операции с функции на една променлива*. Един въпрос, при който положението е различно, е диференцирането на сложни, или съставни, функции. Ще напомним формулата за случая на една променлива: при дадени функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ (външна и вътрешна функция), производната на съставната функция $F(t) = f(\varphi(t))$ се дава с формулата

$$F'(t)\ =\ f'(\varphi(t)).\varphi'(t),$$

т.е. производната на съставната функция е равна на произведението на производните на външната и вътрешната функция. Ще докажем, че подобна формула съществува и за съставна функция на няколко променливи. Ще започнем с по-простия вариант на теоремата:

*Всъщност горните изчисления доказват още веднъж тези формули.

Теорема 4. *Нека $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ е функция, дефинирана в околност на точката $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, и нека функциите на едно променливо $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ са дефинирани и диференцируеми в околност на точката $t^0 \in \mathbb{R}$, при което $x_i^0 = \varphi_i(t^0)$, $i = 1, \ldots, n$. Да предположим, че $f(x)$ е диференцируема (в смисъл на горното определение) в x^0, а $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ - в t^0. Тогава съставната функция*

$$F(t) \;=\; f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

е диференцируема в точката t^0, като нейната производна се дава с формулата

$$F'(t^0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\,\varphi_1'(t^0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\,\varphi_n'(t^0) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\,\varphi_i'(t^0)\,.$$

С други думи, формулата за производната на съставната функция се състои от толкова събираеми, колкото са променливите, като всяко от тях наподобява по форма израза за производна на съставна функция на една променлива.

Доказателство на теоремата. Грубо казано, доказателството се състои в заменяне на функцията с нейната линейна част. Нека t е точка достатъчно близка до t^0. Да означим $\Delta t = t - t^0$, $\Delta x_i = \varphi_i(t) - \varphi_i(t^0)$, $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$. Имаме

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} = \varphi_i'(t^0)\,.$$

Нека $\Delta F = F(t) - F(t^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0)$. Тогава от формулата за нарастването имаме

$$\Delta F \;=\; \sum_{i=1}^{n} \; f'_{x_i}(x^0)\,\Delta x_i \;+\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\Delta x)\,\Delta x_i,$$

като $\alpha_i(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следователно,

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\,\frac{\Delta x_i}{\Delta t} \;+\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\Delta x)\,\frac{\Delta x_i}{\Delta t} \to \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\,\varphi_i'(t^0)\,. \blacksquare$$

Пример. Нека $f(u,v) = u^v$, $u > 0, v > 0$, и нека $\varphi(t), \psi(t)$ са диференцируеми функции с положителни стойности. Ако положим $F(t) = \varphi(t)^{\psi(t)} = f(\varphi(t), \psi(t))$, то от горната теорема получаваме

$$F'(t) = \psi(t).\varphi(t)^{\psi(t)-1}.\varphi'(t) + \ln\varphi(t).\varphi(t)^{\psi(t)}.\psi'(t).$$

Тази формула е известна от първата част на курса, където тя се извежда чрез предварително логаритмуване.

Ще докажем аналогичната теорема за векторни функции (изображения):

Теорема 4′. *Нека $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ е функция, дефинирана и диференцируема в околност на точката $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, а векторната функция $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, зависеща от аргумента $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$, е дефинирана в околност на точката $t^0 = (t_1^0, \ldots, t_k^0)$, при което $\varphi(t^0) = x^0$. Да предположим, че функцията на n променливи $f(x)$ е диференцируема в x^0, а изображението $\varphi(t)$ (т.е. неговите компоненти $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$) - в точката t^0. Тогава съставната функция $F(t) = f(\varphi(t))$ е диференцируема в t^0, и са в сила равенствата:*

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}\left(t^0\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0\right), \quad j = 1, \ldots, k.$$

Забележка. Тук новото в сравнение с теорема 4 се състои единствено във факта, че функцията $F(t)$ е диференцируема като функция на k променливи според определението на настоящия параграф, а не само по всяка променлива поотделно.

Доказателство. Нека, както по-горе, $\Delta t = t - t^0$, $\Delta t_j = t_j - t_j^0$, $\Delta x_i = \varphi_i(t) - \varphi_i(t^0)$, $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$. Формулата за нарастванията, приложена към функциите $f, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, ни дава равенствата

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right) \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\Delta x)\, \Delta x_i,$$

$$\Delta \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0\right) \Delta t_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j}(\Delta t)\, \Delta t_j,$$