Векторно произведение

Работим в геометричното пространство, като считаме че са фиксирани единична отсечка за измерване на дължини и ориентация.

Определение 1 *Векторно произведение на векторите u и v* е векторът $u \times v$, дефиниран по следния начин:

а) Ако u и v са колинеарни, то $u \times v = 0$.

б) Ако u и v не са колинеарни, то $u \times v$ е единственият вектор, който удовлетворява условията:
$|u \times v| = |u||v| \sin \sphericalangle(u, v)$,
$u \times v$ е перпендикулярен на u и v,
$(u, v, u \times v)$ е положително ориентиран базис (казва се още *дясна тройка*).

Коректност: Трябва да се докаже, че в б) наистина съществува единствен вектор удовлетворяващ трите условия.

Да си изберем една точка O, която да ни служи за начална точка, в която да нанасяме векторите. Тъй като u и v не са колинеарни, то съществува единствена равнина π през O, с която те са компланарни. Нека l е правата през O, която е перпендикулярна на π. Тогава всеки вектор w, който е перпендикулярен на u и v, е колинеарен с l. Тъй като u и v не са колинеарни, то $u \neq 0$, $v \neq 0$ и $\sphericalangle(u, v) \neq 0, \pi$, така че $|u||v| \sin \sphericalangle(u, v) \neq 0$. Следователно има точно два вектора, които са колинеарни с l и имат дължина $|u||v| \sin \sphericalangle(u, v)$. Ако означим единия от тях с w, то другият е противоположният му $-w$. Векторите u, v, w са некомпланарни, защото иначе бихме имали, че w е компланарен с π и тъй като той е колинеарен с перпендикулярната права l, то той е 0, което противоречи на това, че дължината му е $|u||v| \sin \sphericalangle(u, v) \neq 0$. Следователно u, v, w са линейно независими, така че (u, v, w) е базис на линейното пространство на векторите в пространството и значи и $(u, v, -w)$ е такъв. Но базисите (u, v, w) и $(u, v, -w)$ са противоположно ориентирани. Значи точно един от тях е положително ориентиран. Следователно съществува точно един вектор (w или $-w$), който удовлетворява трите условия в б). Така че наистина дефиницията в б) е коректна.

Забележка 1 Друго означение за векторното произведение е $\wedge$, тоест $u \wedge v$.

Забележка 2 Ако $u \neq 0$, $v \neq 0$ и $u \parallel v$, то $\sphericalangle(u, v) = 0$ или π и следователно $\sin \sphericalangle(u, v) = 0$. Така че и в тоя случай е в сила равенството $|u \times v| = |u||v| \sin \sphericalangle(u, v)$. Ако $u = 0$ или $v = 0$, то $\sphericalangle(u, v)$ не е дефиниран. Но тъй като дължината на нулевия вектор е 0, то в тоя случай $|u \times v| = 0 = |u||v| \sin \varphi$ каквото и да е φ. Следователно, ако се уговорим да считаме, че нулевият вектор и другите вектори сключват произволен ъгъл, то тогава $|u \times v| = |u||v| \sin \sphericalangle(u, v)$ за всички вектори u и v.

При същата уговорка нулевият вектор е перпендикулярен на всеки вектор, така че и второто условие в б) е изпълнено при произволни u и v (тоест и при $u \parallel v$).

Но третото условие въобще няма смисъл при $u \parallel v$, защото нулевият вектор не може да бъде елемент на базис.

Теорема 1 (критерий за колинеарност на вектори)
Векторите u и v са колинеарни $\Leftrightarrow u \times v = 0$.

Доказателство: Правата посока е а) на Определение 1. Обратната посока следва от б) на Определение 1, защото когато u и v не са колинеарни имаме
$|u \times v| = |u||v| \sin \sphericalangle(u, v) \neq 0$ (това го видяхме в доказателството на коректността). $\square$

Теорема 2 *Ако векторите u и v не са колинеарни, то лицето на успоредника, построен върху u и v, е $|u \times v|$, а лицето на триъгълника, построен върху u и v, е $\frac{1}{2}|u \times v|$.*

Доказателство: Нека O е произволна точка, P, Q са точките, за които $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v$, а R е точката, за която $OPRQ$ е успоредник. Под *успоредника, построен върху u и v*, се разбира именно успоредникът $OPRQ$. (Ако се тръгне от друга начална точка $\widetilde{O}$, ще се получи друг успоредник, но той е еднакъв на $OPRQ$ и значи има същото лице.)

Имаме $S_{OPRQ} = |OP|.|OQ|. \sin \sphericalangle POQ = |u|.|v|. \sin \sphericalangle(u, v) = |u \times v|$.

Под *триъгълника, построен върху u и v*, се разбира триъгълникът OPQ.

Имаме $S_{OPQ} = \frac{1}{2} S_{OPRQ} = \frac{1}{2}|u \times v|$. $\square$

Теорема 3 *Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е положително ориентиран ортонормиран базис на пространството на геометричните вектори и спрямо него векторите u и v имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава координатите на $u \times v$ спрямо e са*
$u \times v \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$, *тоест* $u \times v(x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

Доказателство: Нека w е векторът, чиито координати спрямо e са дадените във формулировката, тоест $w(x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$. Трябва да докажем, че $u \times v = w$.

Нека първо $u \parallel v$.

Ако $u = 0$, то $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, и следователно всички координати на w са 0. Значи $w = 0$.

Ако $u \neq 0$, то $v = \lambda u$ за някое $\lambda \in \mathbb{R}$. Следователно $y_i = \lambda x_i$, $i = 1, 2, 3$, и пак получаваме, че всички координати на w са 0. Значи пак $w = 0$.

Следователно при $u \parallel v$ имаме $w = 0 = u \times v$.

Нека сега u и v не са колинеарни. За да докажем, че $u \times v = w$ трябва да докажем, че w удовлетворява трите условия в б) на Определение 1.

Тъй като e е ортонормиран базис имаме (второто равенство се получава лесно с разкриване на скобите и директна проверка)

$$\begin{aligned} |w|^2 &= (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \\ &= \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 = |u|^2 |v|^2 - \langle u, v \rangle^2 \\ &= |u|^2 |v|^2 - |u|^2 |v|^2 \cos^2 \sphericalangle(u, v) = |u|^2 |v|^2 \left(1 - \cos^2 \sphericalangle(u, v)\right) = |u|^2 |v|^2 \sin^2 \sphericalangle(u, v). \end{aligned}$$

Тогава от $|u| \geq 0$, $|v| \geq 0$ и $\sin \sphericalangle(u, v) \geq 0$ (защото $0 \leq \sphericalangle(u, v) \leq \pi$) следва
$|w| = |u||v| \sin \sphericalangle(u, v)$, с което е проверено първото условие.

По-долу ще ни трябва, че $w \neq 0$. Това е така, защото от неколинеарността на u и v следва $|u| > 0$, $|v| > 0$ и $\sin \sphericalangle(u, v) > 0$ (защото $\sphericalangle(u, v) \neq 0, \pi$) и значи
$|w| = |u||v| \sin \sphericalangle(u, v) > 0$.

Тъй като e е ортонормиран базис имаме

$$\begin{aligned}\langle w,u\rangle &= (x_2y_3-x_3y_2)x_1+(x_3y_1-x_1y_3)x_2+(x_1y_2-x_2y_1)x_3 &= 0,\\ \langle w,v\rangle &= (x_2y_3-x_3y_2)y_1+(x_3y_1-x_1y_3)y_2+(x_1y_2-x_2y_1)y_3 &= 0.\end{aligned}$$

Следователно $w \perp u, v$, с което е проверено второто условие.

Матрицата от координатите спрямо базиса e на векторите u, v, w е

$$T = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2y_3-x_3y_2\\ x_2 & y_2 & x_3y_1-x_1y_3\\ x_3 & y_3 & x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}.$$

Развивайки по третия стълб получаваме

$$\begin{aligned}\det T &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}(x_2y_3-x_3y_2)+\begin{vmatrix} x_3 & y_3\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}(x_3y_1-x_1y_3)+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}(x_1y_2-x_2y_1)\\ &= (x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2=|w|^2>0.\end{aligned}$$

Следователно T е обратима матрица, което означава, че и (u,v,w) е базис на линейното пространство на векторите в пространството. И T е матрицата на прехода от базиса e към базиса (u,v,w) и $\det T>0$, така че двата базиса са еднакво ориентирани. Тъй като e е положително ориентиран, от това следва, че и (u,v,w) е положително ориентиран базис, с което е проверено и третото условие.

Следователно и когато u и v не са колинеарни имаме $w = u\times v$.

С това теоремата е доказана. □

Забележка 3 Формулата за координатите на $u\times v$ от Теорема 3 може да се помни по следните начини:

$$u\times v = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1\\ x_2 & y_2 & e_2\\ x_3 & y_3 & e_3\end{vmatrix}$$

(първият стълб са координатите на u, вторият стълб са координатите на v, третият стълб са базисните вектори). Пресмята се формално тая детерминанта, тоест все едно, че e-тата са букви, означаващи някакви числа, и се получава $u\times v = z_1.e_1+z_2.e_2+z_3.e_3$ (където z-овете са някакви числа), което означава, че координатите на $u\times v$ са (z_1,z_2,z_3). Всъщност като се развие детерминантата по третия стълб се получава следната явна формула за z_1, z_2, z_3:

$$u\times v = \begin{vmatrix} x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}.e_1+\begin{vmatrix} x_3 & y_3\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}.e_2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}.e_3,$$

тоест координатите на $u\times v$ са $\left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$ (както и трябваше да се получи).

Друг начин е да се помни, че координатите на $u \times v$ са минорите от втори ред на матрицата $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ — матрицата от координатите на u и v. По-точно, i-тата координата е минорът, който се получава като се задраска i-тия ред, като само при $i = 2$ се взима със знак $-$. Или пък винаги се взима с $+$, но при писането на i-тия минор винаги се започва от следващия ред след i-тия, като се счита, че редовете са подредени циклично, тоест след третия следва първият.

Теорема 4 *Векторното произведение има следните свойства:*

1. $v \times u = -u \times v$ *(антисиметричност)*
2. $(u + v) \times w = u \times w + v \times w, \quad u \times (v + w) = u \times v + u \times w$ *(адитивност по двата аргумента)*
3. $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v), \quad u \times (\lambda v) = \lambda(u \times v),$ *където* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(хомогенност по двата аргумента)*

Доказателство: Ще докажем теоремата като използваме формулата за координатите от Теорема 3. Свойствата 1. и 3. се доказват лесно и чрез дефиницията, но трябва да се разглеждат случаи в зависимост от това дали u и v са колинеарни или не и дали $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ или $\lambda = 0$. При доказателството с координати няма разглеждане на случаи и е съвсем кратко. Също така, доказателството на свойството 2. с дефиницията е доста дълго и изисква допълнителна подготовка, а с координати е съвсем кратко и просто.

Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е положително ориентиран ортонормиран базис на пространството на геометричните вектори и спрямо него векторите u, v, w имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$.

1. Имаме

$$u \times v \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right), \quad v \times u \left(\begin{vmatrix} y_2 & x_2 \\ y_3 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} \right).$$

Тъй като при размяна на местата на два стълба на матрица детерминантата ѝ си сменя знака, то

$$v \times u \left(- \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Значи координатите на $v \times u$ са $-$(съответните координати на $u \times v$). Следователно $v \times u = -u \times v$.

2. Имаме

$$u \times w \left(\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & z_3 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \right), \quad v \times w \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \right).$$

Тъй като $u + v(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, то

$$(u + v) \times w \left(\begin{vmatrix} x_2 + y_2 & z_2 \\ x_3 + y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 + y_3 & z_3 \\ x_1 + y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & z_1 \\ x_2 + y_2 & z_2 \end{vmatrix} \right).$$

Знаем, че когато някой стълб на матрица е сума на два стълба, то детерминантата ѝ е сумата на детерминантите на двете матрици, съответният стълб на които е един от тия два стълба. Следователно

$$(u + v) \times w \left(\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & z_3 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \right).$$

Значи координатите на $(u + v) \times w$ са сумите на съответните координати на $u \times w$ и $v \times w$. Следователно $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$.

Второто равенство $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$ се доказва по същия начин (като тоя път вторите стълбове ще са суми), а всъщност следва и от вече доказаната адитивност по първия аргумент и антисиметричността по следния начин:

$$u \times (v + w) = -(v + w) \times u = -(v \times u + w \times u) = (-v \times u) + (-w \times u) = u \times v + u \times w.$$

3. Имаме

$$u \times v \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Тъй като $\lambda u(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, то

$$(\lambda u) \times v \left(\begin{vmatrix} \lambda x_2 & y_2 \\ \lambda x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda x_3 & y_3 \\ \lambda x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda x_1 & y_1 \\ \lambda x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Знаем, че когато някой стълб на матрица се умножи с число, то детерминантата на получената матрица е детерминантата на първоначалната, умножена със същото число. Следователно

$$(\lambda u) \times v \left(\lambda \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \lambda \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \lambda \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Значи координатите на $(\lambda u) \times v$ са съответните координати на $u \times v$, умножени с λ. Следователно $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v)$.

Второто равенство $u \times (\lambda v) = \lambda(u \times v)$ се доказва по същия начин (като тоя път вторите стълбове ще са умножени с λ), а всъщност следва и от вече доказаната хомогенност по първия аргумент и антисиметричността по следния начин:

$$u \times (\lambda v) = -(\lambda v) \times u = -(\lambda(v \times u)) = \lambda(-v \times u) = \lambda(u \times v). \qquad \square$$

Забележка 4 Свойствата 2. и 3. в горната теорема заедно са еквивалентни на свойството

$$(\lambda u + \mu v) \times w = \lambda(u \times w) + \mu(v \times w), \quad u \times (\lambda v + \mu w) = \lambda(u \times v) + \mu(u \times w)$$

(*линейност по двата аргумента*)

тоест векторното произведение е билинейно.