Решения на примерните задачи за матрица на линейно изображение и действия с линейни изображения

Задача 1. *Нека e_1, e_2, e_3 е базис на линейно пространство V над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа и*

$$f_1 = e_1 + 2e_2 - e_3, \quad f_2 = -2e_1 + e_2 - e_3, \quad f_3 = e_1 - e_2 + e_3.$$

Да се докаже, че за произволни вектори $v_1, v_2, v_3 \in V$ съществува единствен линеен оператор $\varphi : V \to V$ с $\varphi(f_i) = v_i$ за всички $1 \leq i \leq 3$.

Ако $\psi : V \to V$ е линейният оператор с

$$\psi(f_1) = 3f_1 + 8f_2 + 13f_3, \quad \psi(f_2) = -f_1 - f_2 - f_3, \quad \psi(f_3) = -f_2 - 2f_3,$$

да се намерят векторите $\psi(e_1)$, $\psi(e_2)$, $\psi(e_3)$ като линейни комбинации на e_1, e_2, e_3.

Решение: Достатъчно е да докажем, че f_1, f_2, f_3 е базис на V, за да твърдим, че за произволни вектори $v_1, v_2, v_3 \in V$ съществува единствен линеен оператор $\varphi : V \to V$ с $\varphi(f_i) = v_i$ за всички $1 \leq i \leq 3$. За целта, разглеждаме матрицата

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

образувана по стълбове от координатите на f_1, f_2, f_3 спрямо базиса e_1, e_2, e_3. Достатъчно е да проверим, че T е неособена или обратима, за да твърдим, че $f = (f_1, f_2, f_3)$ е базис на V.

Ако f е базис на V, то матрицата на ψ спрямо базиса f_1, f_2, f_3 е образувана по стълбове от координатите на $\psi(f_1)$, $\psi(f_2)$, $\psi(f_3)$ спрямо базиса $f = (f_1, f_2, f_3)$ и е

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 \\ 13 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Еквивалентно, $\psi(f) = fB$. Ако $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ е матрицата на ψ спрямо базиса e, то $\psi(e) = eA$. Комбинирайки с $f = eT$ получаваме

$$e(AT) = (eA)T = \psi(e)T = \psi(eT) = \psi(f) = fB = (eT)B = e(TB).$$

Съгласно линейната независимост на базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$, оттук следва, че $AT = TB$ или $A = TBT^{-1}$. Достатъчно е да намерим обратната матрица T^{-1} на T, за да получим, че T е неособена и $f = eT$ е базис на V. С елементарни преобразувания по редове към матрицата

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

привеждаме лявата половина към единичната матрица E_3. Тогава дясната половина е T^{-1}. По-точно, умножаваме първия ред по (-2) и прибавяме към втория. Събираме първия ред към третия и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Удвояваме третия ред, прибавяме към втория и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Умножаваме втория ред по (-2) и прибавяме към първия. Умножаваме втория ред по (-3), прибавяме към третия и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right).$$

Изваждаме третия ред от първия, прибавяме го към втория и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right).$$

Умножаваме втори и трети ред по (-1) и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right).$$

Следователно

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Съществуването на T^{-1} доказва, че $f = (f_1, f_2, f_3)$ е базис на V. Матрицата $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ на ψ спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ е

$$A = TBT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 \\ 13 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следователно
$$\psi(e_1) = e_2, \quad \psi(e_2) = e_3, \quad \psi(e_3) = \mathcal{O}_V.$$

Задача 2. *Спрямо базис $e = (e_1, e_2, e_3)$ на линейно пространство U над поле F и базис $f = (f_1, f_2)$ на линейно пространство V над F са дадени линейните изображения*

$$\varphi : U \longrightarrow V \quad \textit{с} \quad \varphi(e_1) = f_1 - f_2, \quad \varphi(e_2) = f_1, \quad \varphi(e_3) = f_2,$$

$$\psi : U \longrightarrow V \quad \textit{с} \quad \psi(e_1) = f_2, \quad \psi(e_2) = f_1, \quad \psi(e_3) = 2f_1 - f_2,$$

$$\theta : U \longrightarrow V \quad \textit{с} \quad \theta(e_1) = f_1 + f_2, \quad \theta(e_2) = -f_1 + f_2, \quad \theta(e_3) = f_1 + 3f_2,$$

(i) Да се докаже, че φ, ψ, θ е линейно независима система вектори от пространството $\mathrm{Hom}(U, V)$ на линейните изображения на U във V.

(ii) Ако $\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{A}_\psi, \mathcal{A}_\theta \in M_{2\times 3}(F)$ са матриците на φ, ψ и θ спрямо базиса e на U и базиса f на V, да се намерят необходими и достатъчни условия върху елементите a_{ij} на матрица
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$
при които $A \in l(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{A}_\psi, \mathcal{A}_\theta)$.

Решение: (i) Матрицата на φ спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ на U и базиса $f = (f_1, f_2)$ на V е
$$\mathcal{A}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Матрицата на ψ спрямо e и f е
$$\mathcal{A}_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
а матрицата на θ спрямо тези базиси е
$$\mathcal{A}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Знаем, че съответствието
$$\mathcal{A} : \mathrm{Hom}(U, V) \to M_{2\times 3}(F),$$
съпоставящо на линейно изображение на U във V матрицата на това изображение спрямо базиса e на U и базиса f на V е линеен изоморфизъм. Следователно, φ, ψ, θ са линейно независими вектори от $\mathrm{Hom}(U, V)$ тогава и само тогава, когато матриците $\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{A}_\psi, \mathcal{A}_\theta$ образуват линейно независима вектори от $M_{2\times 3}(F)$. Еквивалентно, φ, ψ, θ са линейно зависими точно когато $\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{A}_\psi, \mathcal{A}_\theta$ са линейно зависими, защото линейните изоморфизми $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{-1}$ трансформират линейно зависима система вектори в линейно зависима система.

За да установим лиенйната независимост на $\mathcal{A}_{\varphi}, \mathcal{A}_{\psi}, \mathcal{A}_{\theta} \in M_{2\times 3}(F)$ предполагаме, че

$$\begin{aligned}
\mathbb{O}_{2\times 3} &= x_1\mathcal{A}_{\varphi} + x_2\mathcal{A}_{\psi} + x_3\mathcal{A}_{\theta} = \\
= x_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} &+ x_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_1 + x_2 - x_3 & 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & x_3 & x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

за някакви $x_1, x_2, x_3 \in F$. Тогава $(x_1, x_2, x_3) \in F^3$ е решение на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

С подходящи кратни на петия ред, прибавени към останалите редове, анулираме елементите на трети стълб извън пети ред без промяна на елементите в останалите колони и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

С подходящи кратни на първия ред, прибавени към останалите редове, анулираме елементите на първи стълб под първи ред, без промяна на елементите в останалите стълбове и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

От първо, второ и пето уранение следва $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Това доказва линейната независимост на матриците $\mathcal{A}_{\varphi}, \mathcal{A}_{\psi}, \mathcal{A}_{\theta} \in M_{2\times 3}(F)$, а оттам и линейната независимост на линейните изображения $\varphi, \psi, \theta \in \mathrm{Hom}(U, V)$.

(ii) Трябва да намерим хомогенна система линейни уравнения с пространство от решения $l(\mathcal{A}_{\varphi}, \mathcal{A}_{\psi}, \mathcal{A}_{\theta})$. За целта, разглеждаме хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllllll} a_{11} & +a_{12} & & -a_{21} & & +a_{23} & = 0 \\ & a_{12} & +2a_{13} & +a_{21} & & -a_{23} & = 0 \\ a_{11} & -a_{12} & +a_{13} & +a_{21} & +a_{22} & +3a_{23} & = 0 \end{array} \right. .$$

Относно стълба от неизвестни $a = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23})^t$, матрицата на тази хомогенна система линейни уравнения е

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Изваждаме първия ред от третия. Изваждаме втория ред от първия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Удвояваме втория ред, прибавяме го към третия и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получената хомогенна система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{cccccccc} a_{11} & & -2a_{13} & -2a_{21} & & +2a_{23} & = 0 \\ & a_{12} & +2a_{13} & +a_{21} & & -a_{23} & = 0 \\ & & 5a_{13} & +4a_{21} & +a_{22} & & = 0 \end{array} \right.$$

има общо решение

$$a_{11} = 2a_{13} + 2a_{21} - 2a_{23}, \quad a_{12} = -2a_{13} - a_{21} + a_{23}, \quad a_{22} = -5a_{13} - 4a_{21}$$

за произволни $a_{13}, a_{21}, a_{23} \in F$. Следователно пространството от решения е 3-мерно и има базис

$$b_1 = (2, -2, 1, 0, -5, 0)^t, \quad b_2 = (2, -1, 0, 1, -4, 0)^t, \quad b_3 = (-2, 1, 0, 0, 0, 1).$$

Оттук, $l(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{A}_\psi, \mathcal{A}_\theta)$ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{cccccccc} 2a_{11} & -2a_{12} & +a_{13} & & -5a_{22} & & = 0 \\ 2a_{11} & -a_{12} & & +a_{21} & -4a_{22} & & = 0 \\ -2a_{11} & +a_{12} & & & & +a_{23} & = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in l(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{A}_\psi, \mathcal{A}_\theta)$$

тогава и само тогава, когато елементите a_{ij} на A изпълняват равенствата (1).