

Афинни подпространства

Линейни подпространства – припомняне

Твърдение 1 1. Множеството V от решенията на хомогенна линейна система $Ax = 0$ с n неизвестни е $(n - r)$ -мерно линейно подпространство на \mathbb{R}^n , където r е рангът на A .

2. Ако V е k -мерно линейно подпространство на \mathbb{R}^n , то съществува хомогенна линейна система $Ax = 0$ с n неизвестни, такава че V е множеството от решенията ѝ. При това системата може да се вземе с $n - k$ уравнения (това е минималният възможен брой).

Доказателство: Първото със сигурност е доказвано в курса по алгебра. Вероятно и второто, но ще дам едно негово доказателство.

Нека (v_1, \dots, v_k) е базис на V . Тогава $x \in V \Leftrightarrow$ съществуват $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ такива, че $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$. Идеята как да се построи търсената система е съвършено тривиална: Равенството $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ е система от n уравнения. Изключваме $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ от нея, тоест от някои k от уравненията изразяваме $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ чрез съответните x -ове и заместваме в останалите $n - k$ уравнения. Така получаваме линейна система за x , на която всяко $x \in V$ е решение, което е очевидно от това как беше построена системата. Това е търсената система $Ax = 0$ с $n - k$ уравнения. Останалата част от доказателството е за да се обясни защо наистина някои k от уравненията могат да се решат относно $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ и защо получената система няма други решения освен елементите на V .

Нека M е матрицата $n \times k$, чиито стълбове са v_1, \dots, v_k . Тогава равенството $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ е еквивалентно на $x = M\lambda$, където $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$. Стълбовете на

M са линейно независими, защото са базис на V . Следователно рангът ѝ е k и значи някои k от редовете ѝ са линейно независими. За удобство на означенията нека това са първите k реда. Значи матрицата $k \times k$ от първите k реда на M има ранг k , тоест това е обратима матрица $k \times k$ и значи детерминантата ѝ е ненулева. Тогава по теоремата на Крамер системата от първите k уравнения на $x = M\lambda$ (матрицата на която е получената $k \times k$ матрица с ненулева детерминанта) може да се реши относно $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, и то по единствен начин. По такъв начин получаваме $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ като линейни комбинации на x_1, \dots, x_k . Заместваме в останалите $n - k$ уравнения на $x = M\lambda$ и получаваме система от вида

$$\begin{cases} x_{k+1} &= b_{k+1,1}x_1 + \dots + b_{k+1,k}x_k \\ &\vdots \\ x_n &= b_{n,1}x_1 + \dots + b_{n,k}x_k \end{cases}.$$

Като прехвърлим всичко отляво получаваме хомогенната система

$$\left| \begin{array}{rcl} -b_{k+1,1}x_1 - \dots - b_{k+1,k}x_k + x_{k+1} & = & 0 \\ & \vdots & \\ -b_{n,1}x_1 - \dots - b_{n,k}x_k + x_n & = & 0 \end{array} \right.,$$

тоест $Ax = 0$, чиято матрица е $(n-k) \times n$ матрицата $A = (-B \ E_{n-k})$, където B е $(n-k) \times k$ матрицата $B = (b_{k+i,j})_{i=1,\dots,n-k}^{j=1,\dots,k}$, а E_{n-k} е единичната матрица от ред $n-k$. От това как построихме системата $Ax = 0$ е ясно, че всяко $x \in V$ е нейно решение. Тъй като $\det E_{n-k} = 1 \neq 0$, то A има минор от ред $n-k$, който е ненулев. Следователно A има ранг $r \geq n-k$. Но A има $n-k$ реда и значи $r \leq n-k$. Следователно $r = n-k$. От това следва, че линейното пространство от решенията на $Ax = 0$ има размерност $n-r = k$. И тъй като пространството от решенията съдържа k -мерното пространство V , то съвпада с V .

И накрая, ако $Ax = 0$ е произволна система, пространството от решенията на която е V , то тя не може да има по-малко от $n-k$ уравнения, защото иначе бихме имали $r < n-k$ и пространството от решенията би било с размерност $n-r > k$. \square

Твърдение 2 Нека $Ax = b$ е съвместима линейна система с n неизвестни и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ е едно нейно решение. Тогава $x \in \mathbb{R}^n$ е решение на системата тогава и само тогава, когато $x = x_0 + v$ за някое решение v на съответната хомогенна система $Ax = 0$.

Доказателство: Това сигурно също е доказвано в курса по алгебра, но тъй като доказателството е съвсем просто, ще го напиша.

Тъй като x_0 е решение на системата $Ax = b$, то $Ax_0 = b$. Следователно

$$x \text{ е решение на системата } \Leftrightarrow Ax = b \Leftrightarrow Ax = Ax_0 \Leftrightarrow A(x - x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow v = x - x_0 \text{ удовлетворява } Av = 0, \text{ тоест е решение на хомогенната система } Ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x = x_0 + v, \text{ където } Av = 0, \text{ тоест } v \text{ е решение на хомогенната система } Ax = 0. \quad \square$$

Твърдение 3 Произволно сечение на линейни подпространства е линейно подпространство.

Доказателство: Това сигурно също е доказвано в курса по алгебра, но тъй като доказателството е кратко и лесно, ще го напиша.

Нека U е линейно пространство и $V_i, i \in I$, са линейни подпространства на U . (Индексното множество I е произволно, тоест подпространствата може да са едно, две, краен брой, безкраен брой, но доказателството си върви по един и същ начин.)

Тъй като V_i е линейно подпространство за всяко $i \in I$, то $0 \in V_i$ за всяко $i \in I$. Следователно $0 \in \bigcap_{i \in I} V_i$ и значи $\bigcap_{i \in I} V_i$ не е празно.

Нека $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}, v', v'' \in \bigcap_{i \in I} V_i$. Тогава $v', v'' \in V_i$ за всяко $i \in I$ и тъй като V_i е линейно подпространство за всяко $i \in I$, то $\lambda'v' + \lambda''v'' \in V_i$ за всяко $i \in I$. Следователно $\lambda'v' + \lambda''v'' \in \bigcap_{i \in I} V_i$.

С това е доказано, че $\bigcap_{i \in I} V_i$ е линейно подпространство на U . \square

Афинни подпространства

Нека l е права в геометричната равнина или геометричното пространство, V е линейното пространство на векторите, които са колинеарни с нея, и P_0 е точка от l . Тогава за произволна точка P имаме, че $P \in l$ тогава и само тогава, когато векторът $\overrightarrow{P_0P}$ е колинеарен с l , тоест когато $\overrightarrow{P_0P} \in V$. Следователно $l = \{P : \overrightarrow{P_0P} \in V\}$.

Аналогично, нека π е равнина в геометричното пространство, V е линейното пространство на векторите, които са компланарни с нея, и P_0 е точка от π . Тогава за произволна точка P имаме, че $P \in \pi$ тогава и само тогава, когато векторът $\overrightarrow{P_0P}$ е компланарен с π , тоест когато $\overrightarrow{P_0P} \in V$. Следователно $\pi = \{P : \overrightarrow{P_0P} \in V\}$.

Тия прости съображения са мотивацията за въвеждането на понятието афинно подпространство в произволно афинно пространство.

Нека \mathcal{A} е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U .

Определение 1 Подмножеството B на \mathcal{A} се нарича *афинно подпространство на \mathcal{A}* , ако $B = \{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0Q} \in V\}$, където V е линейно подпространство на U и $P_0 \in \mathcal{A}$, тоест ако за някое линейно подпространство V на U и някоя точка $P_0 \in \mathcal{A}$ е изпълнено $Q \in B \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0Q} \in V$.

Твърдение 4 Нека B е афинното подпространство на \mathcal{A} , зададено с линейното подпространство V на U и точката $P_0 \in \mathcal{A}$, тоест $B = \{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0Q} \in V\}$. Тогава:

1. $P_0 \in B$. В частност, B не е празно множество.
2. За всяка точка $P \in B$ имаме $B = \{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{PQ} \in V\}$.
3. $V = \{\overrightarrow{PQ} : P, Q \in B\}$ и дори за всяка точка $P \in B$ имаме $V = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in B\}$.
4. Линейното подпространство V се определя еднозначно от B .
5. B е афинно пространство, моделирано върху линейното подпространство V .

Доказателство:

1. Имам $\overrightarrow{P_0P_0} = 0$, а $0 \in V$, защото V е линейно подпространство на U . Следователно $P_0 \in B$.
2. Нека $P \in B$. Тогава $\overrightarrow{P_0P} \in V$. За произволна точка $Q \in \mathcal{A}$ имаме $\overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{PQ}$. Тъй като V е линейно подпространство и $\overrightarrow{P_0P} \in V$, от това равенство следва, че $\overrightarrow{P_0Q} \in V \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in V$. Следователно $\{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0Q} \in V\} = \{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{PQ} \in V\}$, тоест $B = \{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{PQ} \in V\}$.

3. Нека $P \in B$. Тогава от 2. следва, че за всяко $Q \in B$ имаме $\overrightarrow{PQ} \in V$. Значи $\{\overrightarrow{PQ} : Q \in B\} \subset V$.

За обратното включване: Нека $v \in V$. Тъй като \mathcal{A} е афинно пространство, то съществува единствено $Q \in \mathcal{A}$ такава, че $\overrightarrow{PQ} = v$. Тъй като $v \in V$, от 2. следва, че $Q \in B$. Следователно за всяко $v \in V$ съществува $Q \in B$ (и при това единствено) такава, че $\overrightarrow{PQ} = v$, тоест $v \in \{\overrightarrow{PQ} : Q \in B\}$. Значи $V \subset \{\overrightarrow{PQ} : Q \in B\}$.

Следователно $V = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in B\}$, с което е доказано второто равенство.

А първото равенство следва от второто, защото

$$\{\overrightarrow{PQ} : P, Q \in B\} = \bigcup_{P \in B} \{\overrightarrow{PQ} : Q \in B\} = \bigcup_{P \in B} V = V.$$

4. Това следва от първото равенство в 3..
5. От 1. знаем, че B не е празно множество. От 3. (а и от 2.) следва, че за $P, Q \in B$ имаме $\overrightarrow{PQ} \in V$. Следователно като ограничим изображението $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ} \in U$ върху $B \times B$ ще получим изображение $B \times B \rightarrow V$. Остава да проверим, че двете свойства от дефиницията на афинно пространство са изпълнени за това изображение.

Че за $P \in B$ и $v \in V$ съществува единствено $Q \in B$ такава, че $\overrightarrow{PQ} = v$, го видяхме при доказателството на обратното включване в 3.. А че за всеки $P, Q, R \in B$ е в сила правилото на триъгълника за събиране е ясно, тъй като то е в сила дори за всеки $P, Q, R \in \mathcal{A}$, защото \mathcal{A} е афинно пространство.

Следователно B е афинно пространство, моделирано върху V . □

Твърдение 5 0-мерните афинни подпространства са едноточковите подмножества.

Доказателство: Размерността на афинно пространство по дефиниция е размерността на направляващото линейно пространство. Следователно афинното подпространство B е 0-мерно тогава и само тогава, когато направляващото му пространство V е 0-мерно, тоест когато $V = \{0\}$. Значи 0-мерно афинно пространство B се определя от $V = \{0\}$ и точка $P_0 \in \mathcal{A}$, така че получаваме

$$B = \{P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0P} \in V\} = \{P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0P} = 0\} = \{P \in \mathcal{A} : P_0 = P\} = \{P_0\}.$$

И тъй като можем да вземем произволно $P_0 \in \mathcal{A}$, то 0-мерните афинни подпространства на \mathcal{A} са всевъзможните едноточкови подмножества на \mathcal{A} . □

Твърдение 6 \mathcal{A} е афинно подпространство на себе си. При това, ако $\dim \mathcal{A} = n$ е крайна, то \mathcal{A} е единственото n -мерно афинно подпространство на \mathcal{A} .

Доказателство: Нека $P_0 \in \mathcal{A}$ е произволна точка. Тъй като $\overrightarrow{P_0 P} \in U$ за всяко $P \in \mathcal{A}$, то афинното подпространство, определено от $V = U$ и P_0 , е $\{P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0 P} \in U\} = \mathcal{A}$.

Нека $\dim \mathcal{A} = n$ е крайна. Това означава, че $\dim U = n$ е крайна. Нека B е n -мерно афинно подпространство на \mathcal{A} . Тогава направляващото линейно пространство V на B е n -мерно линейно подпространство на n -мерното U и следователно $V = U$. Значи B е афинно подпространство, определено от U и някоя точка $P_0 \in \mathcal{A}$, и от доказаното по-горе следва, че $B = \mathcal{A}$. \square

Определение 2 Нека U е линейно пространство, V е линейно подпространство на U и $u_0 \in U$. Означаваме $u_0 + V = \{u_0 + v : v \in V\}$.

Твърдение 7 Афинните подпространства на линейното пространство U са точно подмножествата от вида $u_0 + V$, където V е линейно подпространство на U и $u_0 \in U$, като при това направляващото пространство на $u_0 + V$ е V . В частност, афинните подпространства на U през 0 са точно линейните подпространства на U .

Доказателство: Знаем, че U е афинно пространство, моделирано върху U , с изображението $\overrightarrow{u_0 v} = v - u_0$.

Нека B е афинното подпространство през $u_0 \in U$ с направляващо пространство линейното подпространство V на U . Тогава

$$\begin{aligned} B &= \{u \in U : \overrightarrow{u_0 u} \in V\} = \{u \in U : u - u_0 \in V\} = \{u \in U : u - u_0 = v \text{ за някое } v \in V\} \\ &= \{u \in U : u = u_0 + v \text{ за някое } v \in V\} = \{u_0 + v : v \in V\} = u_0 + V. \end{aligned}$$

В частност, ако $u_0 = 0$, то $B = 0 + V = V$, тоест афинните подпространства на U през 0 са точно линейните подпространства V на U . \square

Твърдение 8 1. Множеството B от решенията на съвместима линейна система $Ax = b$ с n неизвестни е $(n-r)$ -мерно афинно подпространство на \mathbb{R}^n , моделирано върху линейното подпространство V от решенията на съответната хомогенна система $Ax = 0$, където r е рангът на A .

2. Ако B е k -мерно афинно подпространство на \mathbb{R}^n , то съществува линейна система $Ax = b$ с n неизвестни, такава че B е множеството от решенията ѝ. При това системата може да се вземе с $n - k$ уравнения (това е минималният възможен брой).

Доказателство:

1. Нека x_0 е едно решение на $Ax = b$ (такова съществува, защото системата е съвместима). От Твърдение 2 и Определение 2 следва, че $B = x_0 + V$. По Твърдение 7 това означава, че B е афинно подпространство на \mathbb{R}^n , моделирано върху V . Освен това от 1. на Твърдение 1 имаме, че $\dim V = n - r$, така че $\dim B = \dim V = n - r$.
2. От Твърдение 7 следва, че $B = x_0 + V$ за някое $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и някое линейно подпространство V на \mathbb{R}^n . При това $\dim V = \dim B = k$. От 2. на Твърдение 1 имаме, че V е множеството от решенията на някоя хомогенна система $Ax = 0$ с n неизвестни и $n - k$ уравнения. Нека $b = Ax_0$. Тогава x_0 е решение на системата $Ax = b$ и от доказателството на 1. следва, че множеството от решенията ѝ е $x_0 + V$, тоест B . Така намерихме система $Ax = b$ с n неизвестни и $n - k$ уравнения, множеството от решенията на която е B .

И накрая, не съществува система $Ax = b$ с по-малко от $n - k$ уравнения, множество от решенията на която е B , защото в противен случай k -мерното направляващо пространство V на B би било линейното пространство от решенията на съответната хомогенна система $Ax = 0$, която има същия брой уравнения, тоест по-малко от $n - k$, а това противоречи на 2. на Твърдение 1. \square

Твърдение 9 *Нека B и B' са афинни подпространства на \mathcal{A} , моделирани съответно върху линейните подпространства V и V' на U . Тогава:*

1. *Ако $B \subset B'$, то $V \subset V'$.*
2. *Ако $V \subset V'$ и $B \cap B' \neq \emptyset$, то $B \subset B'$.*
3. *Ако $B \subset B'$, то $\dim B \leq \dim B'$.*
4. *Ако $B \subset B'$ и $\dim B = \dim B'$ е крайна, то $B = B'$.*

Доказателство:

1. Това следва от 3. на Твърдение 4:

$$V = \{ \overrightarrow{PQ} : P, Q \in B \} \subset \{ \overrightarrow{PQ} : P, Q \in B' \} = V'.$$

2. Нека $P_0 \in B \cap B' \neq \emptyset$ (такава точка P_0 съществува, защото $B \cap B' \neq \emptyset$). Тогава

$$B = \{ P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0P} \in V \} \subset \{ P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0P} \in V' \} = B'.$$

3. Ако $B \subset B'$, то от 1. следва $V \subset V'$ и значи $\dim V \leq \dim V'$. Тъй като $\dim B = \dim V$ и $\dim B' = \dim V'$, то $\dim B \leq \dim B'$.
4. Ако $B \subset B'$, то от 1. следва $V \subset V'$. При това $\dim V = \dim B = \dim B' = \dim V'$ е крайна и значи $V = V'$. Тъй като $B \subset B'$, то $B \cap B' = B \neq \emptyset$, и тъй като освен това $V' = V \subset V$, от 2. получаваме $B' \subset B$. Следователно $B = B'$. \square

Определение 3 Нека B е афинно подпространство на \mathcal{A} , моделирано върху V . Векторите $v \in V$ наричаме *успоредни на B* и пишем $v \parallel B$.

Теорема 1 Нека $P_0 \in \mathcal{A}$, а $v_1, \dots, v_k \in U$. Тогава най-малкото афинно подпространство B на \mathcal{A} , за което $P_0 \in B$ и $v_1, \dots, v_k \parallel B$, е афинното подпространство породено от точката P_0 и $V = l(v_1, \dots, v_k)$, тоест

$$B = \left\{ P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0 P} \in l(v_1, \dots, v_k) \right\} = \left\{ P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0 P} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \right\}.$$

(Че е най-малкото означава, че всяко афинно подпространство с тия свойства го съдържа.)

Ако освен това v_1, \dots, v_k са линейно независими, то горното B е единственото k -мерно афинно подпространство B на \mathcal{A} , за което $P_0 \in B$ и $v_1, \dots, v_k \parallel B$.

Доказателство: Тъй като афинното подпространство B от формулировката е породено от P_0 и $l(v_1, \dots, v_k)$ и имаме $v_1, \dots, v_k \in l(v_1, \dots, v_k)$, то $P_0 \in B$ и $v_1, \dots, v_k \parallel B$.

Нека B' е произволно афинно подпространство, за което $P_0 \in B'$ и $v_1, \dots, v_k \parallel B'$. Нека V' е направляващото пространство на B' . Тогава $v_1, \dots, v_k \in V'$ и следователно $V = l(v_1, \dots, v_k) \subset V'$. Освен това $P_0 \in B \cap B'$, така че $B \cap B' \neq \emptyset$. От 2. на Твърждение 9 тогава следва, че $B \subset B'$. Значи наистина B е най-малкото афинно подпространство на \mathcal{A} през P_0 , на което v_1, \dots, v_k са успоредни.

Нека v_1, \dots, v_k са линейно независими. Тогава $\dim B = \dim l(v_1, \dots, v_k) = k$. Ако B' е k -мерно афинно подпространство на \mathcal{A} , за което $P_0 \in B'$ и $v_1, \dots, v_k \parallel B'$, то от доказаното по-горе $B \subset B'$. Тъй като освен това $\dim B = k = \dim B'$ е крайна, то от 4. на Твърждение 9 следва, че $B = B'$. Значи наистина B е единственото k -мерно афинно подпространство на \mathcal{A} през P_0 , на което v_1, \dots, v_k са успоредни. \square

Забележка 1 Ако в горната теорема v_1, \dots, v_k са линейно зависими, то $\dim B < k$ (защото $\dim B = \dim l(v_1, \dots, v_k) < k$).

Теорема 2 Нека $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}$. Тогава най-малкото афинно подпространство на \mathcal{A} , което ги съдържа, е афинното подпространство породено от точката P_0 и $V = l(\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_k})$, тоест

$$B = \left\{ P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0 P} \in l(\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_k}) \right\} = \left\{ P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0 P} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i} \right\}.$$

Ако освен това $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}$ не лежат в афинно подпространство на \mathcal{A} с размерност строго по-малка от k , то горното B е единственото k -мерно афинно подпространство B на \mathcal{A} , което ги съдържа.

Доказателство: Тъй като афинното подпространство B от формулировката е породено от P_0 и $l(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k})$, имаме $P_0 \in B$. Освен това за всяко $i = 1, \dots, k$ е изпълнено $\overrightarrow{P_0P_i} \in l(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k})$ и следователно $P_i \in B$. Значи наистина B съдържа P_0, \dots, P_k .

От дефиницията на B и Теорема 1 е ясно, че B е най-малкото афинно подпространство през P_0 , на което $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k}$ са успоредни. Нека B' е произволно афинно подпространство, което съдържа P_0, \dots, P_k . Нека V' е направляващото пространство на B' . Тогава $P_0 \in B'$ и освен това за всяко $i = 1, \dots, k$ от $P_i \in B'$ следва $\overrightarrow{P_0P_i} \in V'$, тоест $\overrightarrow{P_0P_i} \parallel B'$. Значи B' е афинно подпространство през P_0 , на което $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k}$ са успоредни. Но B е най-малкото афинно подпространство с тия свойства. Следователно $B \subset B'$. Значи наистина B е най-малкото афинно подпространство на \mathcal{A} , което съдържа P_0, \dots, P_k .

Имаме $\dim B = \dim l(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k}) \leq k$. Нека $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}$ не лежат в афинно подпространство на \mathcal{A} с размерност строго по-малка от k . Тогава $\dim B \geq k$ и следователно $\dim B = k$. Ако B' е k -мерно афинно подпространство на \mathcal{A} , което съдържа P_0, \dots, P_k , то от доказаното по-горе $B \subset B'$. Тъй като освен това $\dim B = k = \dim B'$ е крайна, то от 4. на Твърдение 9 следва, че $B = B'$. Значи наистина B е единственото k -мерно афинно подпространство на \mathcal{A} , което съдържа P_0, \dots, P_k . \square

Забележка 2 Ако в горната теорема P_0, \dots, P_k лежат в афинно подпространство на \mathcal{A} с размерност строго по-малка от k , то $\dim B < k$ (защото B е най-малкото, в което лежат).

Твърдение 10 Нека B е k -мерно афинно подпространство на \mathcal{A} . Тогава съществуват точки $P_0, \dots, P_k \in B$, които не лежат в афинно подпространство на \mathcal{A} с размерност строго по-малка от k .

Доказателство: Нека V е направляващото пространство на B . Следователно $\dim V = \dim B = k$. Нека (v_1, \dots, v_k) е базис на V . Нека P_0 е произволна точка от B . За $i = 1, \dots, k$ нека P_i е единствената точка, за която $\overrightarrow{P_0P_i} = v_i$. Тъй като $v_1, \dots, v_k \in V$ и $P_0 \in B$, то и $P_1, \dots, P_k \in B$.

Нека B' е афинно подпространство, съдържащо P_0, \dots, P_k . Нека V' е направляващото пространство на B' . Тогава за всяко $i = 1, \dots, k$ имаме $v_i = \overrightarrow{P_0P_i} \in V'$. Следователно $V = l(v_1, \dots, v_k) \subset V'$, откъдето получаваме $\dim B' = \dim V' \geq \dim V = \dim B = k$. Значи наистина не съществува афинно подпространство на \mathcal{A} с размерност строго по-малка от k , което съдържа така построените точки P_0, \dots, P_k . \square

Пример 1 $k = 1$.

$2 = k + 1$ точки лежат в афинно подпространство с размерност строго по-малка от $k = 1$, тоест в 0-мерно афинно подпространство, \Leftrightarrow съвпадат, защото 0-мерните афинни подпространства са едноточковите подмножества.

Твърдение 11 1. В геометричната равнина и в геометричното пространство 1-мерните афинни подпространства са правите.

2. В геометричното пространство 2-мерните афинни подпространства са равнините.

Доказателство:

1. В мотивацията в началото на въпроса видяхме, че ако l е права, V е линейното пространство на векторите, които са колинеарни с нея, и P_0 е точка от l , то $l = \{P : \overrightarrow{P_0P} \in V\}$. Това показва, че l е афинно подпространство, моделирано върху V . Тъй като знаем, че $\dim V = 1$, то l е 1-мерно афинно подпространство. Значи всяка права в геометричната равнина и в геометричното пространство е 1-мерно афинно подпространство.

Обратно: Нека B е 1-мерно афинно подпространство в геометричната равнина или в геометричното пространство. От Твърдение 10 следва, че съществуват две точки $P_0, P_1 \in B$, които не лежат в афинно подпространство с размерност по-малка от 1, тоест различни точки (поради Пример 1). Щом P_0 и P_1 са различни, през тях минава единствена права l . Както вече видяхме, l също е 1-мерно афинно подпространство. От последната част на Теорема 2 (единствеността) следва $l = B$. Значи всяко 1-мерно афинно подпространство в геометричната равнина и в геометричното пространство е права.

Следователно в геометричната равнина и в геометричното пространство всевъзможните 1-мерни афинни подпространства са всевъзможните прави.

2. В мотивацията в началото на въпроса видяхме, че ако π е равнина, V е линейното пространство на векторите, които са компланарни с нея, и P_0 е точка от π , то $\pi = \{P : \overrightarrow{P_0P} \in V\}$. Това показва, че π е афинно подпространство, моделирано върху V . Тъй като знаем, че $\dim V = 2$, то π е 2-мерно афинно подпространство. Значи всяка равнина в геометричното пространство е 2-мерно афинно подпространство.

Обратно: Нека B е 2-мерно афинно подпространство в геометричното пространство. От Твърдение 10 следва, че съществуват три точки $P_0, P_1, P_2 \in B$, които не лежат в афинно подпространство с размерност по-малка от 2. Значи не лежат в 1-мерно афинно подпространство, тоест на една права (поради първата част на твърдението). Щом P_0, P_1, P_2 не лежат на една права, през тях минава единствена равнина π . Както вече видяхме, π също е 2-мерно афинно подпространство. От последната част на Теорема 2 (единствеността) следва $\pi = B$. Значи всяко 2-мерно афинно подпространство в геометричното пространство е равнина.

Следователно в геометричното пространство всевъзможните 2-мерни афинни подпространства са всевъзможните равнини. \square

Горното твърдение мотивира следващото определение:

Определение 4 1-мерните афинни подпространства на произволно афинно пространство \mathcal{A} се наричат *прави*, 2-мерните – *равнини*, а ако $\dim \mathcal{A} = n$ е крайна, то $(n - 1)$ -мерните афинни подпространства се наричат *хиперравнини*.

Пример 2 Нека \mathcal{A} е n -мерно. Тогава хиперравнините са:

1. при $n = 1$ точките.
2. при $n = 2$ правите.
3. при $n = 3$ равнините.

Частни случаи на Теорема 2:

1. $k = 1$: През две различни точки в афинно пространство минава точно една права.
2. $k = 2$: През три различни точки в афинно пространство, които не лежат на една права, минава точно една равнина.
3. $k = n - 1$: През n точки в n -мерно афинно пространство, които не лежат в $(n - 2)$ -мерно афинно подпространство, минава точно една хиперравнина.

Първите два частни случая по-горе са аксиоми при обичайното изграждане на геометрията. Това показва още веднъж, че геометрията, изградена въз основа на понятието афинно пространство, си е обичайната геометрия.

Твърдение 12 Ако B_i са афинни подпространства на \mathcal{A} , моделирани върху V_i , $i \in I$, и $B = \bigcap_{i \in I} B_i$ е непразно множество, то B е афинно подпространство на \mathcal{A} , моделирано върху $\bigcap_{i \in I} V_i$.

Доказателство: Нека $P_0 \in \bigcap_{i \in I} B_i$ (такова P_0 съществува, защото $\bigcap_{i \in I} B_i$ не е празно).

Следователно за всяко $i \in I$ имаме $P_0 \in B_i$ и значи $B_i = \{P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0 P} \in V_i\}$. Тогава $P \in \bigcap_{i \in I} B_i \Leftrightarrow$ за всяко $i \in I$ имаме $P \in B_i \Leftrightarrow$ за всяко $i \in I$ имаме $\overrightarrow{P_0 P} \in V_i$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0 P} \in \bigcap_{i \in I} V_i$. Значи $\bigcap_{i \in I} B_i = \left\{P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0 P} \in \bigcap_{i \in I} V_i\right\}$. Тъй като от Твърдение 3 знаем,

че $\bigcap_{i \in I} V_i$ е линейно подпространство на U , то последното равенство показва, че $\bigcap_{i \in I} B_i$ е афинното пространство през P_0 с направляващо пространство $\bigcap_{i \in I} V_i$. \square

Забележка 3 Всичко дотук очевидно остава в сила и ако вместо \mathbb{R} се вземе произволно поле F , тоест ако U е линейно пространство над произволно поле.

Твърдение 13 *Нека \mathcal{A} е евклидово афинно пространство (тоест U е евклидово линейно пространство) и B е афинно подпространство на \mathcal{A} , моделирано върху линейното подпространство V на U . Тогава знаем, че V е евклидово линейно пространство с наследеното от U скалярно произведение и следователно B е евклидово афинно пространство.*

Забележка 4 Винаги ще разглеждаме афинните подпространства на евклидово афинно пространство като евклидови афинни пространства по начина от горното твърдение, освен ако изрично не е казано друго.