28. Достатъчни условия за локален екстремум

Теорема 1

Нека $f(x)$ е диференцируема в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, където $\delta > 0$.

(а) Ако $f'(x) \le 0$ за $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) \ge 0$ за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 е точка на локален минимум за $f(x)$.

(б) Ако $f'(x) \ge 0$ за $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) \le 0$ за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 е точка на локален максимум за $f(x)$.

Д-во: (а) От Критерия за монотонност следва, че $f(x)$ е монотонно намаляваща в $(x_0 - \delta, x_0)$ и монотонно растяща в $(x_0, x_0 + \delta)$. Понеже $f(x)$ е непрекъсната в т. x_0, оттук следва, че $f(x)$ е монотонно намаляваща в $(x_0 - \delta, x_0]$ и монотонно растяща в $[x_0, x_0 + \delta)$. От първото следва, че

$$f(x) \ge f(x_0), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0], \tag{1}$$

а от второто, че

$$f(x_0) \le f(x), \quad x \in [x_0, x_0 + \delta). \tag{2}$$

Това показва, че x_0 е точка на локален минимум за $f(x)$.
(б) Прилагаме (а) към $-f(x)$.

Теорема 2

Нека $f(x)$ е диференцируема в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, където $\delta > 0$.

(а) Ако $f'(x) < 0$ за $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 е точка на строг локален минимум за $f(x)$.

(б) Ако $f'(x) > 0$ за $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 е точка на строг локален максимум за $f(x)$.

Теорема 3

Нека $f(x)$ е диференцируема в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, където $\delta > 0$, като $f'(x_0) = 0$. Нека още $f(x)$ притежава втора производна в т. x_0.

(а) Ако $f''(x_0) > 0$, то x_0 е точка на строг локален минимум за $f(x)$.

(б) Ако $f''(x_0) < 0$, то x_0 е точка на строг локален максимум за $f(x)$.

Д-во: (а) Имаме, че

$$f''(x_0) \overset{\text{по деф.}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0. \tag{3}$$

Следователно $\exists\, \delta_1 \in (0, \delta)$ такова, че

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0, \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1), \quad x \neq x_0. \tag{4}$$

Но $f'(x_0) = 0$, следователно

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0, \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1), \quad x \neq x_0. \tag{5}$$

Това показва, че $f'(x)$ има същия знак като $x - x_0$ в околност на x_0.

Оттук получаваме, че
$f'(x) < 0$ за $x \in (x_0 - \delta_1, x_0)$ и $f'(x) > 0$ за $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$
и твърдението следва от Т-ма 2 (а).

(б) Прилагаме (а) към $-f(x)$.