

ЗАПИСКИ
по Изследване на операциите
на проф. Надя Златева

2022

§1. Кратък увод в Изследване на операциите

§1.1. Какво се разбира под Изследване на операциите?

Операции (Operations) са дейностите, които изпълнява дадена организация или система за постигане на своите цели.

Изследване (Research) е процесът на анализ на тези дейности чрез използване на научни методи.

Изследване на операциите (Operations Research) е научна дисциплина за анализ на управлението на организации и системи.

Или, както пише Хамди Таха в увода на неговата станала класическа книга „Увод в изследване на операциите“, *„Изследване на операциите (ИО) е научен подход за вземане на решения за управление на дадена система в условия на ограничения от технически, икономически или друг характер върху системата.“*.

Под ИО почти винаги се разбира използването на математически методи за моделиране на системата и за анализ на нейните характеристики. Наистина, математическите модели и методи заемат централно място в ИО, но решаването на задачи на организационното управление далеч не винаги се свежда до построяване на математически модел и до извършване на съответните изчисления. Това се обуславя от факта, че в хода на вземане на управленски решения често е необходимо да се отчитат фактори, съществени за правилното решаване на поставената задача, които обаче не могат непосредствено да бъдат включени в математическия модел. Такъв фактор например е човешкото поведение. Наличието на поведенчески елемент в моделираната система често води до това, че използваният за изработване на управленско решение математически модел се оказва твърде груб и поради това неспособен да даде правилно решение на поставената управленска задача.

В тази връзка като пример най-често се привежда станалият част от фолклора на ИО „асансьорен проблем“: служителите в административния офис на една голяма фирма често се оплаквали от това, че дълго чакат асансьора. Бил предприет опит възникналият проблем да бъде решен чрез математическите методи на теорията за масовото обслужване. Решението по ред причини се оказало неудачно. По-нататъшното изследване на проблема показало, че претенциите на служителите към режима на работа на асансьора са неоснователни, тъй като времето за чакане на асансьора в действителност било напълно приемливо. Тогава възникнала идеята, позволила решаването на „асансьорния проблем“, а именно: било предложено на всеки етаж редом с асансьорните врати да се поставят големи огледала. Когато това било направено, жалбите

веднага секнали. В очакване на асансьора хората се оглеждали в огледалата. При това времето за чакане минавало неусетно за тях и те нямали никакви основания да се оплакват от бавната работа на асансьора.

Приведеният пример показва необходимостта от правилна преценка на възможностите за математическо описание на изследваните процеси и за това, че в сферата на организационното управление далеч не всичко се поддава на формализация и следователно на адекватно отразяване в математическия модел. Интересно е да се отбележи, че това обстоятелство е взето предвид още при първото използване в практиката на методите на ИО – първото приложение на ИО е направено с военни цели, т.е. първите изследвани операции са военните операции. Малко преди и по време на Втората световна война Генералният щаб на британската армия възлага на екип от изявени в различни области учени, между които и психолози, да анализира някои военни операции: разполагане на радарите, управление на конвоите, подобряване на ефективността на бомбардировките, на антиподводничарските акции, на операциите по минирането и т.н. Повечето от тези проблеми са варианти на добре изучената днес задача за оптимално разпределение на ограничени ресурси (в случая – на военна техника).

От казаното дотук става ясно, че ИО е сравнително нова, но динамично развиваща се научна дисциплина. Методите на ИО се прилагат успешно при решаване на проблеми в сферата на промишленото производство, военното дело, селското стопанство, транспорта, финансите, икономиката, планирането и др. Използването на методи на ИО за решаване на проблеми от областта финансите и икономиката се нарича още Management Science. Напоследък термините Operations Research и Management Science се използват като синоними.

Тъй като ИО се използва за решаване на задачи на организационното управление, да видим каква е

§1.2. Структурата на задачата за организационно управление

При поставяне на задачата за организационното управление преди всичко е важно да се определят три неща:

1. *целта*, преследвана от субекта на управлението;

Целта е крайният резултат, който е необходимо да се постигне по пътя на избор и реализация на някакви управляващи въздействия върху управляваната система. В икономическата сфера целта най-често е да се максимизира печалбата или да се минимизират разходите. Когато целта е определена, за *оптимален* се счита такъв начин на действие, който води до постигането на тази цел.

2. стойностите на кои характеристики на изследваната система могат да се променят (*управляеми променливи*);

При проучването на обекта на управление трябва да се намерят тези негови характеристики, чиито стойности могат да се променят (да се управляват). С други думи, трябва да се определи цялото множество от т. нар. *управляеми променливи*, които често ще наричаме само *променливи*. В случаите, когато априорната информация за идентификация на променливите не е достатъчна, за тяхното изясняване се налага да се привлечат специалисти от различни области, които в една или друга степен да вземат участие в процеса на анализ на системата. В тази връзка да отбележим, че най-доброто решение на „асансьорния проблем“ е било предложено от този член на екипа от анализатори, който е имал повече познания в областта на психологията, отколкото в областта на формалните методи на ИО.

3. стойностите на кои характеристики на изследваната система не се променят (*параметри* на системата).

Идентификацията на *неуправляемите променливи* (параметри), т.е. на тези характеристики на системата, изменението на чиито стойности не зависи от решенията на субекта на управление, също е важен момент при вземане на управленски решения. Например, за да се вземе решение относно обема и структурата на продукцията, която смята да реализира на пазара, фирменото ръководство трябва да има предвид такива параметри като пазарните цени на отделните изделия. Ясно е, че в реални ситуации игнорирането на някои параметри може да доведе до построяването на неадекватен модел и следователно до вземането на погрешни решения.

След като сме изяснили структурата на задачата за управление, да преминем към

§1.3. Изкуството да се моделира

В ИО централната роля е отредена на математическото моделиране. За да се построи математически модел е необходима ясна представа за целта на изследваната система и точна информация за ограниченията върху системата – те определят областта от допустими стойности на управляемите променливи. Анализът на модела трябва да доведе до намирането на най-добро управленско въздействие върху обекта на управление, при което се изпълняват и всички ограничения.

Сложността на реалните системи силно затруднява представянето на целта и ограниченията в аналитичен вид. На пръв поглед при анализ на реалната ситуация е необходимо да се отчетат огромен брой променливи и ограничения, но често само една част от тях се оказва съществена за описание на поведението на изследваната система. Поради това е уместно първо да се направи опростено описание на реалната

система, при което е най-важно да се открият определящите за поведението на системата променливи, параметри и ограничения. С други думи, в опростеното описание на реалната система се използват само тези фактори на системата (променливи, ограничения и параметри), които определят основната линия на поведение на реалната система. Математическият модел от своя страна представя използваните за описанието на опростената система съотношения във вид на целева функция и съвкупност от функционални ограничения.

Правила, определящи прехода от реалната система към математическия модел, не съществуват. Свеждането на множеството фактори, управляващи поведението на системата, към относително неголям брой определящи фактори и преходът от опростения образ на оригиналната система към модела, е изкуство, а не наука. Степента на адекватност на построенния модел зависи преди всичко от способностите на членовете на екипа от анализатори.

Въпреки че строги предписания за това как следва да се разработва даден модел е невъзможно да се формулират, добре е да се има представа за възможните типове модели, за тяхната структура и характеристики.

§1.4. Една класификация на моделите на ИО

Най-важният тип модели на ИО са *математическите модели*. В основата на тяхното създаване стои допускането на това, че всички променливи, параметри и ограничения на системата, както и целта на управление, са количествено измерими.

Нека с x_j , $j = 1, \dots, k$ означим променливите на системата. Нека X бъде множеството от тези k -мерни вектори (точки) $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, чиито координати (x_1, \dots, x_k) удовлетворяват всички ограничения, наложени на системата. Множеството X се нарича *допустимо множество*. Ако условията за функциониране на управляваната система се описват с m на брой ограничения, то след изясняване на функционалната зависимост между параметрите и променливите на системата, допустимото множество X може да се представи като множеството от решенията на система от m функционални равенства и/или неравенства, а целта на управление да се опише посредством функция (наречена *целева функция*) на променливите x_1, \dots, x_k на системата.

Следователно, математическият модел е свеждането на задачата за организационно управление до следната математическа задача:

Да се намери оптималната стойност на целевата функция

$$f(x_1, \dots, x_k)$$

при следните ограничения

$$g_i(x_1, \dots, x_k) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

където $f, g_i, i = 1, \dots, m$, са функции на k променливи, а $b_i, i = 1, \dots, m$, са реални числа. Знакът \leq означава, че функционалното ограничение може да бъде от един от следните три вида: неравенство \leq , равенство $=$ или неравенство \geq .

Тази математическа задача се нарича *задача на математическото оптимиране* или още *оптимизационна задача*.

Всяка точка $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, чиито координати удовлетворяват всичките m ограничения на оптимизационната задача (т.е. точка $\mathbf{x} \in X$) се нарича *допустима точка* или *допустимо решение*. *Оптимално решение* е такава допустима точка, в която целевата функция приема най-добрата си стойност (оптимум) сред стойностите си във всички допустими точки. Оптималната стойност на целевата функция, която се търси, е *минимум* или *максимум*. Нарича се *критерий* и зависи от задачата. Например това може да бъде максимума на печалбата или минимума на загубите при дадено производство.

От своя страна математическите модели могат да се разделят на *детерминистични* и *стохастични* модели.

При *детерминистичните модели* стойностите на параметрите на системата са известни константи. С такива модели работят линейното оптимиране, целочисленото оптимиране, оптимизирането върху графи, теорията на оптималното управление и др.

При *стохастичните модели* параметрите на системата приемат определени стойности с някаква вероятност. С такива модели работят теорията на случайните процеси, теорията на масовото обслужване, теорията за полезността, теорията на игрите, динамичното оптимиране и др.

Настоящият курс е посветен основно на детерминистичните математически модели и методите за тяхното решаване.

Въпреки че в курса се разглеждат предимно математически модели, добре е да се знае, че освен математическите модели в ИО се използват и *имитационни* и *евристични* модели.

Имитационните модели „възпроизвеждат“ поведението на системата в продължение на някакъв период от време. Това се постига чрез определяне на поредност от събития, които дават важна информация за поведението на системата. След това характеристиките на системата се регистрират само в моментите, когато тези събития се случват. Получената информация се събира във вид на статистически данни от наблюденията на тези събития. Тази информация се обновява всеки път при настъпване на някое от интересующите анализатора събития.

Тъй като при построяването на имитационен модел не е необходимо използването на математически функции, свързващи в явен вид променливите и параметрите на системата, тези модели по правило позволяват да се имитира поведението на много сложни системи, за които

построяването на математически модели и получаването чрез тях на решение е невъзможно. Освен това гъвкавостта, присъща на имитационните модели, позволява да се получи по-точно представяне на системата. Основният недостатък на имитационното моделиране се състои в това, че неговата реализация е еквивалентна на провеждането на множество експерименти, а това неизбежно води до експериментални грешки. При имитационното моделиране обикновено възникват големи трудности, свързани с разработката на експеримента (статистически аспект), натрупването и съхраняването на резултатите от наблюденията и необходимата проверка на статистическите изводи. Поради тази причина имитационното моделиране е по-неудобен инструмент за изследване от математическите модели, които позволяват да се получи явно решение на поставената в общ вид задача.

Видяхме, че математическият модел на ИО търси оптимално решение на поставения проблем. Съответната му математическа задача обаче може да се окаже толкова сложна, че намирането на нейно точно решение да бъде невъзможно. Дори когато съществуването на оптимално решение е теоретически доказано, необходимите за неговото получаване пресмятания могат да бъдат огромен брой, а необходимото за тяхното извършване време — твърде дълго. В такива случаи за получаване на рационално (приближено) решение могат да се използват *евристични методи*, базирани на интуитивно или емпирично избрани правила, чрез които се подобрява текущото решение. По същество евристичните методи представляват процедури за търсене на разумен преход от една допустима точка към друга допустима точка с цел подобряване на текущата стойност на целевата функция на модела. Когато по-нататъшно приближение към оптимума е невъзможно да се получи, най-добрата от получените до момента допустими точки се приема за приближено решение на задачата.

§1.5. Изчислителни аспекти на ИО

Повечето алгоритми, разработени за решаване на оптимизационни задачи, не позволяват решението да се получи директно в аналитична форма. Като правило решението се намира чрез последователност от повтарящи се изчислителни процедури (*итерации*). Основната особеност на итерационния процес се състои в това, че на всяка стъпка съществува възможност за получаване на допустима точка, която е по-близко до оптимума, отколкото текущата допустима точка.

Итерационният характер на изчислителния процес, използван за решаване на задачи с помощта на методи на ИО обуславя използването на компютри за числените пресмятания. Освен това размерността на някои оптимизационни задачи е толкова голяма, че опитите да се получи тяхно решение, като се пресмята на ръка, са безсмислени.

Въпреки, че успехите в използването в практиката на методите на ИО се дължат на мощните изчислителни машини, остават ред задачи, за които не съществуват ефективни числени методи за решаване. Основната причина за възникващите трудности се състои в това, че дори в случая, когато сходимостта на алгоритъма е теоретически доказана и се използват мощни компютри за пресмятанията, времето за извършване на тези пресмятания може да бъде много дълго. Друг проблем е характерният за компютърните пресмятания недостатък — грешките от закръгляване. Влиянието на грешките от закръгляване неизбежно се проявява при решаване на задачи с целочислени стойности на променливите, понеже в компютъра аритметичните действия се изпълняват с плаваща запетая. При реализиране на итерационен изчислителен процес влиянието на натрупването на грешките от закръгляване в даден момент може да стане съществено. Този проблем напоследък не е толкова актуален поради постигнатото вече високо технологично ниво на компютрите, което позволява постигането на по-голяма точност при пресмятанията.

Въпреки това, възможните трудности при осъществяване на изчислителния процес при решаване на оптимизационни задачи винаги трябва да се имат предвид. Затруднения от този род могат да заставят анализатора да опрости модела и да го приведе в съответствие с наличните възможности за числени пресмятания. За съжаление такива опростявания по правило увеличават разрыва между оригиналната система и модела, което води до получаване на по-неточно решение на изходната задача.

§1.6. Етапи на ИО

Вече се убедихме, че в процеса по ИО специалистът в областта на математическото моделиране е добре да бъде подпомогнат от други специалисти, компетентни в различните аспекти на изследваната проблемна ситуация. Следователно в състава на екипа от анализатори е необходимо да влизат и представители на възложителя, носещи пряка отговорност за функционирането на изследваната система, а също така за проверката и практическото внедряване на получените решения.

Работата на анализаторския екип в процеса на ИО, преминава през следните етапи:

1. описание на проблема;
2. построяване на модела;
3. решаване на поставената задача с помощта на модела;
4. проверка на адекватността на модела;
5. прилагане на получените резултати в практиката.

Въпреки че тази последователност не е задължителна, тя може да се счита за общоприета. С изключение на третия етап, при който решението се получава като се използват апробирани формализирани методи, всички останали етапи се изпълняват без строго регламентирани правила. Това се обуславя от факта, че изборът на една или друга процедура за изпълнение на всеки етап зависи от конкретния проблем, от условията за функциониране на системата и от опита на екипа.

На *първия етап* се описва проблемът, което в общи линии включва следните основни стъпки:

- формулиране на задачата;
- намиране на присъщите на изследваната система параметри и променливи, цел и ограничения.

Вторият етап е свързан с построяването на модела. На този етап екипът, след като отчете особеностите на поставената задача, трябва да избере най-подходящия за адекватно описание на изследваната система модел. При построяването на такъв модел трябва да се установят *количествените съотношения*, необходими за изразяване на целта и ограниченията във вид на функции от управляемите променливи. Ако разработваната задача принадлежи на някой общ клас задачи на ИО (например линейни задачи, целочислени задачи и т.н.), удобно е да се използва някой от добре известните математически методи за тяхното решаване. Ако математическите съотношения, използвани в модела, са твърде сложни и не позволяват да се получи аналитично решение на задачата, по-подходящ за изследване може да се окаже имитационен модел. В някои случаи може да се наложи съвместно използване на математически, имитационни и евристични модели.

На *третия етап* се решава формулираната задача. При използване на математически модели решението се получава с помощта на апробирани оптимизационни методи, които водят до оптимално решение на задачата. В случая на прилагане на имитационни или евристични модели понятието за оптималност става по-неопределено и полученото решение само приблизително удовлетворява критерия за оптималност за функциониране на системата.

На третия етап освен намирането на оптимално решение винаги, когато това е възможно, трябва да бъде получена допълнителна информация за възможното изменение на решението при изменение на параметрите на системата. Тази част от изследването обикновено се нарича *анализ за чувствителност* на модела. Той е много полезен, когато някои параметри на изследваната система не подлежат на точно измерване. В такава ситуация е важно да се изследват възможните изменения на оптимума в зависимост от изменението в някакви интервали на съответните параметри на системата.

Четвъртият етап се състои в проверка на адекватността на модела. Моделът може да се счита за адекватен, ако е способен да даде достатъчно надеждно предсказание за поведението на системата. Общият метод за проверка за адекватност на модела се състои в съпоставяне на получените резултати с характеристиките на системата, които тя е имала при определени условия в миналото. Ако при аналогични входни параметри моделът достатъчно точно възпроизвежда поведението на системата, той се счита за адекватен. Тъй като построяването на модела обикновено става като се използват щателно проверени ретроспективни данни, благоприятният изход от едно такова сравнение е предопределен.

Този способ за оценка на адекватност на модела е непригоден при разработване на нови системи, тъй като в този случай липсват необходимите за проверка на модела данни. В някои случаи е допустима паралелна разработка на имитационен модел, предназначен за генериране на данни, необходими за проверката на основния математически модел.

Заключителният етап е свързан с реализацията на получените и проверени резултати. На този етап е необходимо да се оформят крайните резултати от изследването във вид на точни инструкции по прилагане на резултатите, които трябва да бъдат такива, че да бъдат лесно възприемани от лицата, осъществяващи управлението на системата.

§1.7. Кратко описание, цели и източници на курса по ИО

Целта на курса по ИО е да запознае студентите с основни класове задачи на ИО, със съответните им модели, както и с някои математически методи за тяхното решаване.

Въпреки че на компютърните упражнения ще бъде използван софтуер за решаване на задачите, заблуждаващо е мнението, че не е необходимо да се изучава математическият апарат на ИО, понеже компютърът може „сам да реши“ задачата. Не бива да се забравя, че компютърът решава това, което анализаторът е формулирал като задача. Следователно, ако той самият не е наясно с вида и възможностите на използвания модел, както и с преимуществата и недостатъците на съответния математически метод, то това неизбежно ще се отрази на качеството на полученото решение.

Целта на курса е да даде на студентите представа за математическия апарат на ИО и с помощта на прости примери да покаже сферата на приложение на методите на ИО. След като получи знания за математическите основи на ИО студентът би могъл се занимава с практическо изследване на реални задачи и сам да повишава нивото на своята подготовка в дадена конкретна област на ИО, като изучава съответните специализирани публикации.

В началото на курса подробно ще бъдат разгледани основите на линейното оптимиране (ЛО). Такава е създамата се традиция, която неотменно се спазва във всички курсове и книги по ИО и която се обуславя от това, че ЛО служи за основа и на много други математически методи на ИО, като например целочисленото оптимиране. По-нататък в курса ще бъдат разгледани целочисленото оптимиране, някои графови модели и др.

Полезни за доброто и бързо овладяване на преподавания материал ще бъдат вече придобитите знания от студентите в областите линейна алгебра и теория на графите.

Някои от източниците, върху които са базирани записките върху преподавания в курса материал са:

- [1] J. G. Ecker, M. Kupferschmid, Introduction to Operations Research, Kreiger Publishing Company, Florida, 1991.
- [2] D. Goldfarb, M. Todd. Chapter II. Linear programming, In: Handbooks in OR & MS, vol. 1 (G. L. Nemhauser et al. Eds.), Elsevier, 1989.
- [3] P. Jensen, J. Bard, Operations Research. Models and Methods, John Wiley & Sons, 2003.
- [4] G. Nemhauser, L. Wolsey, Integer and Combinatorial Optimization, John Wiley & Sons, 1999.
- [5] W. L. Winston, Operations Research. Applications and Algorithms, 4th ed., Duxbury Press, 2004.
- [6] <http://algs4.cs.princeton.edu>
- [7] М. Базара, К. Шетти, Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы, Москва, Мир, 1982.
- [8] Й. Митев, Записки по Изследване на операциите II част, 2009.
- [9] Х. Таха, Введение в исследование операций, Мир, Москва, 1985, Вильямс, Москва, 2005.

§2. Задача на линейното оптимиране. Каноничен вид

В §1.4 видяхме, че построяването на математическия модел води до формулирането на задача на математическото оптимиране (оптимизационна задача) от следния вид:

$$\begin{aligned} &\text{да се намери} \\ &\min / \max f(x_1, \dots, x_k) \quad (\text{целева функция}) \\ &\text{при} \\ &g_i(x_1, \dots, x_k) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{ограничения}), \end{aligned}$$

където $f, g_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ са функции на k променливи x_1, \dots, x_k , а b_i , $i = 1, \dots, m$ са реални числа. Знакът $\begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix}$ означава, че функционалното ограничение е от един от следните три вида: неравенство \leq , равенство $=$ или неравенство \geq .

С други думи, решаването на оптимизационната задача се състои в това да се намери оптималната стойност (минимум или максимум) на някаква функция $f(\mathbf{x})$ за стойности на аргумента \mathbf{x} , които принадлежат на някакво подмножество X на пространството \mathbb{R}^k , състоящо се от решенията на m -те функционални равенства и неравенства.

Основен дял на математическото оптимиране е *линейното оптимиране*.

§2.1. Задача на линейното оптимиране

Задача на линейното оптимиране (ЛО) е такава задача на математическото оптимиране, в която целевата функция f , както и всички функции g_i , $i = 1, \dots, m$ описващи ограниченията, са *линейни функции*.

Следователно общият вид на задача на линейното оптимиране е следният

$$\begin{aligned} (L) \quad &\min / \max z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k c_j x_j, \\ &\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &x_j \geq 0, \quad j \in J \subseteq \{1, 2, \dots, k\}, \end{aligned}$$

като за удобство неравенствата, отнасящи се само до неотрицателния знак на някои от променливите се записват отделно от останалите ограничения.

Теоретичните основи на линейното оптимиране се полагат с изучаването на системи линейни неравенства, което може да се проследи назад във времето до една работа на Фурие от 1826 г. По-късно много

математици доказват различни частни случаи на най-важният резултат на линейното оптимиране, който и ние ще разгледаме — т. нар. *силна теорема за двойственост*.

Приложната страна на теорията започва да се разработва през 1939 г. от руския математик Леонид Канторович, който пръв забелязва практическата важност на някои класове линейни оптимизационни задачи и пръв дава алгоритъм за тяхното решаване. За съжаление години наред работите на Канторович остават непознати на Запад и незабелязани на Изток. Силен тласък в развитието на приложната страна на линейното оптимиране дават работите на Джордж Данциг, който през 1947 г. разработва симплекс метода за решаване на линейни задачи, които възникват в планирането на въздушните операции на военно-въздушните сили на САЩ. За първи път симплекс методът е публикуван през 1951 г. и си остава най-широко използваният алгоритъм за решаване на линейни задачи.

През 2000-та година в публикацията

J. Dongarra and F. Sullivan, Guest Editors Introduction to the top 10 algorithms, Computing in Science & Engineering, 2000, vol. 2, 22-23¹

симплекс методът е обявен за един от „десетте алгоритъма с най-голямо влияние върху развитието и приложенията на науката през 21-ви век“.

С развитието на компютърните технологии се създават редица програмни реализации на този и други алгоритми за решаване на линейни задачи.

През същата 1951 г., през която Данциг публикува симплекс метода, в своя публикация холандският математик Тялинг Купманс показва, че линейните задачи представляват подходящ модел за анализ на класически икономически теории. През 1975 г. Шведската Кралска Академия на Науките присъжда Нобеловата награда за икономика на Канторович и Купманс „за техния принос в теорията за оптималното разпределение на ресурси“. Академията намира работата на Данциг като твърде математическа за присъждане на наградата по икономика (а знаем, че не се присъжда Нобелова награда за математика).

След като Канторович дава математическата формулировка на общата задача на ЛО, а Данциг разработва симплекс метода за решаването ѝ, редица задачи биват разпознати като задачи на ЛО. Важни примери за такива задачи са транспортната задача, поставена от Хичкок (1941 г.) и задачата за диета, поставена от Стигълър (1945 г.). Конкретни модели на тези и други линейни задачи ще бъдат разгледани на упражненията. Много практически задачи могат да се формулират като задачи на линейното оптимиране, а линейните модели се използват най-вече в икономическия анализ и планирането.

Първото успешно решаване на линейна задача с компютър датира от 1952 г., след което симплекс методът, негови вариации, а и принципно

¹<https://www.computer.org/csdl/magazine/cs/2000/01/c1022/13rRUxBJhBm>

различни алгоритми за решаване на линейната задача, са кодирани за среден и висок клас машини.

По-нататък в курса ще бъде развита основната теория на линейното оптимиране и ще бъде представен симплекс метода за решаване на линейни задачи. Изложението ще бъде едновременно геометрично, аналитично и алгоритмично.

Пример за конкретна линейна задача в общ вид с две променливи е следния

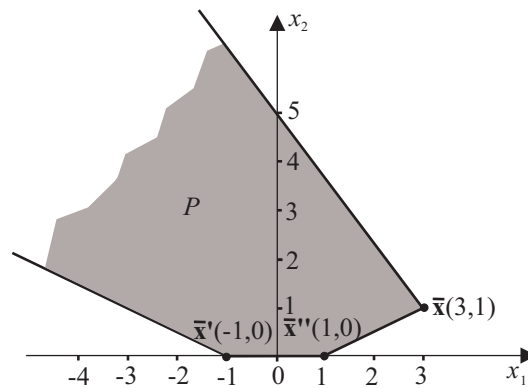
Пример 2.1. Да се намери

$$(L) \quad \begin{aligned} \max z(\mathbf{x}) &= 3x_1 - 2x_2 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1, \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 15, \\ x_1 + 2x_2 &\geq -1, \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ако означим с P допустимото множество на задачата, тя може да бъде записана накратко така:

$$(L) \quad \max_{\mathbf{x} \in P} z(\mathbf{x}) = 3x_1 - 2x_2.$$

Допустимото множество P на задачата (L) се състои от всички вектори $\mathbf{x}(x_1, x_2)$, чиито координати удовлетворяват и четирите линейни неравенства. От геометрична гледна точка, множеството от точки, чиито координати са решения на линейно неравенство, е *полуравнина*. Следователно допустимото множество P е сечение на четири полуравнини и представлява оцветения в сиво неограничен многоъгълник с върхове в точките $\bar{\mathbf{x}}(3, 1)$, $\bar{\mathbf{x}}'(-1, 0)$ и $\bar{\mathbf{x}}''(1, 0)$, който е изобразен на фиг. 2.1.

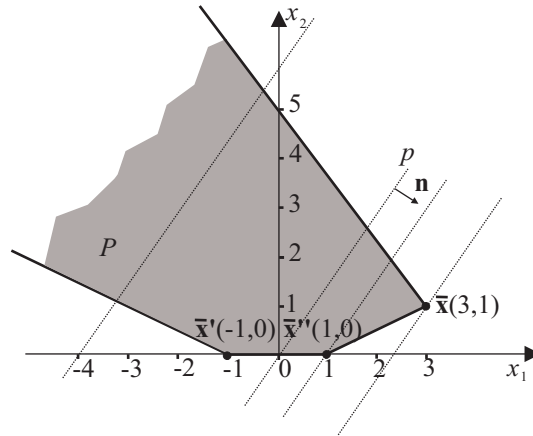


Фигура 2.1.

Интересуваме се от най-голямата стойност на линейната функция $z(\mathbf{x}) = 3x_1 - 2x_2$, която тя може да приеме за векторите $\mathbf{x}(x_1, x_2) \in P$. Да разгледаме уравнението $z(\mathbf{x}) = 0$. Негови решения са всички точки от правата

$$p : 3x_1 - 2x_2 = 0,$$

а точките от допустимото множество, в които z приема стойност 0, са точките от сечението на p с многоъгълника, което е отсечка, както се вижда на фиг. 2.2.



Фигура 2.2.

Нормалният вектор към правата p е векторът $\mathbf{n}(3, -2)$. Той указва посоката, при движение в която стойността на линейната функция z нараства (в нашия случай надясно). Тъй като решаваната задача е за максимум, ясно е че увеличаване на стойността на целевата функция ще получим при успоредно преместване на p надясно. Това преместване е смислено дотогава, докато сечението на правата с допустимото множество е непразно. В нашия случай можем да преместваме p надясно дотогава, докато сечението ѝ с допустимото множество стане върха $\bar{\mathbf{x}}(3, 1)$. За стойността на z в $\bar{\mathbf{x}}$ имаме $z(\bar{\mathbf{x}}) = 3x_1 - 2x_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 7$. По-нататъшно увеличение на стойностите на z не е възможно, тъй като при по-нататъшно местене на p надясно сечението ѝ с допустимото множество P ще бъде празно. Следователно тази задача има **единствено оптимално решение** и това е върхът $\bar{\mathbf{x}}(3, 1)$. В него се достига оптималната (в случая максималната) стойност на z върху допустимото множество P . Тя е 7 и се получава като заместим в целевата функция z стойностите на координатите на оптималното решение $\bar{\mathbf{x}}(3, 1)$, в случая $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

В следващия пример върху допустимото множество P от задачата от Пример 2.1 ще максимизираме друга целева функция.

Пример 2.2. Да се намери

$$\max_{\mathbf{x} \in P} z(\mathbf{x}) = 3x_1 - 6x_2.$$

Нормалният вектор на целевата функция е векторът $\mathbf{n}(3, -6)$. Той е колинеарен на нормалния вектор $\mathbf{n}_1(1, -2)$ към правата

$$l_1 : x_1 - 2x_2 = 1,$$

която определя първата полуравнина в множеството P . Следователно при транслиране на съответната на целевата функция права

$$p : 3x_1 - 6x_2 = 0$$

по посока на нормалния ѝ вектор $\mathbf{n}(3, -6)$ последното непразно сечение на транслираната права с множеството P ще бъде отсечката $[\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}'']$. Това означава, че всички точки от отсечката $[\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}'']$ са оптимални решения на тази задача, т.е. тя има **ограничено множество от решения**. Оптималната (в случая максималната) стойност на z върху допустимото множество P е 3 се получава като заместим в целевата функция стойностите на координатите на произволна точка от отсечката, например точката $\bar{\mathbf{x}}(3, 1)$.

В следващия пример отново върху допустимото множество P от задачата от Пример 2.1 ще максимизираме различна целева функция.

Пример 2.3. Да се намери

$$\max_{\mathbf{x} \in P} z(\mathbf{x}) = 8x_1 + 6x_2.$$

Нормалният вектор на целевата функция е векторът $\mathbf{n}(8, 6)$. Той е колинеарен на нормалния вектор $\mathbf{n}_{l_2}(4, 3)$ към правата

$$l_2 : 4x_1 + 3x_2 = 15,$$

която определя втората полуравнина в множеството P . Това означава, че при транслиране на съответната на целевата функция права

$$p : 8x_1 + 6x_2 = 0$$

по посока на нормалния ѝ вектор $\mathbf{n}(8, 6)$ последното непразно сечение на транслираната права с множеството P ще бъде лъчът с начало точката $\bar{\mathbf{x}}$ и направляващ вектор $\mathbf{d}(-3, 4)$. Следователно, всяка точка от лъча $\{\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}, t \geq 0\}$ е оптимално решение на тази задача, т.е. тя има **неограничено множество от решения**. Във всяка точка от този лъч целевата функция z има една и съща стойност, която е оптималната (в случая максималната) стойност, която z може да приеме в точки от върху допустимото множество P . Тази стойност е 30 и се получава като заместим в целевата функция стойностите на координатите на произволна точка от лъча, например точката $\bar{\mathbf{x}}(3, 1)$.

Накрая, нека да разгледаме задача, в която и целевата функция z , и допустимото множество P са точно същите, както в Пример 2.1.

Пример 2.4. Да се намери

$$\min_{\mathbf{x} \in P} z(\mathbf{x}) = 3x_1 - 2x_2.$$

Да обърнем внимание на факта, че това е различна задача от задачата в Пример 2.1, защото е променен критерият на задачата — вместо най-голямата сега търсим най-малката стойност, която може да приеме целевата функция z в точка от допустимото множество P .

Това означава, че трябва да местим съответната на целевата функция права

$$p: 3x_1 - 2x_2 = 0$$

успоредно не по посоката на нормалния ѝ вектор $\mathbf{n}(3, -2)$, а в обратната на него посока, в случая наляво. Но колкото и далеч да отместим успоредно наляво правата p , сечението ѝ с допустимото множество ще бъде непразно. Това означава, че в допустимото множество има точки, в които z приема произволно малки стойности. Следователно задачата за минимум на z върху P **няма решение** поради неограничено намаляване към $-\infty$ на целевата функция z върху допустимото множество P .

Разгледаният метод за решаване може да се приложи към произволна линейна задача с две променливи и да послужи за намиране на нейно решение или за установяване на неограниченост на целевата ѝ функция върху допустимото ѝ множество. Той обаче е неуместен за линейни задачи с повече от две променливи, което налага за тяхното решаване да се търси по-систематичен подход.

Да започнем с няколко означения. Вектор $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ записваме в матрична форма като вектор-стълб, т.е. като $k \times 1$ матрица състо-

яща се от неговите координати, или $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$. С \mathbf{x}^T означаваме тран-

спонирания вектор на вектора \mathbf{x} , т.е. $1 \times k$ матрицата $\mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_k]$. Скалярното произведение на векторите \mathbf{c} и \mathbf{x} в \mathbb{R}^k записваме като резултат от матрично умножение:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = [c_1, \dots, c_k] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^k c_j x_j,$$

а целевата функция на линейната задача (L) изразяваме като $z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$.

Аналогично, всяко от m -те ограничения на (L) записваме във вида

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

където $\mathbf{a}_i^T = [a_{i1}, \dots, a_{ik}]$.

След въведените означения задачата (L) се записва така:

$$\begin{aligned} (L) \quad & \min / \max \quad z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x_j \geq 0, \quad j \in J \subseteq \{1, 2, \dots, k\}, \end{aligned}$$

§2.2. Канонична задача

Линейна задача в общ вид (L) може да бъде за минимум или пък за максимум, а ограниченията могат да бъдат неравенства \leq и \geq и равенства. За да се улесни и уеднакви подхода към линейна задача в общ вид (L) тя се привежда в *каноничен вид*. Линейна задача, която е в каноничен вид се нарича *канонична задача*.

Дефиниция 2.1. Канонична задача е линейна задача за минимум с ограничения равенства с неотрицателни десни страни, върху всичките променливи на която са наложени условия за неотрицателност.

Линейна задача в общ вид (L) се привежда в съответната ѝ канонична задача (K) като се направят следните прости преобразувания:

- търсенето на $\max \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ се заменя с търсенето на $\min -\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, тъй като за произволно множество $X \subset \mathbb{R}^k$ и произволна функция $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ е изпълнено, че $\max_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = -\min_{\mathbf{x} \in X} -f(\mathbf{x})$;
- ако $b_i < 0$ за някое i , двете страни на съответното ограничение се умножават с -1 ;
- всяка *свободна променлива* x_j , $j \notin J$, (променлива x_j , върху която в (L) няма наложено условие за неотрицателност) се заменя с разликата на две неотрицателни променливи x_j^+ и x_j^- :

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+ \geq 0, \quad x_j^- \geq 0;$$

- неравенство от вида

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i$$

се превръща в равенство чрез добавяне към лявата му страна на нова неотрицателна променлива x_{k+i} , наречена *допълнителна променлива*

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + x_{k+i} = b_i, \quad x_{k+i} \geq 0.$$

- неравенство от вида

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i$$

се превръща в равенство чрез изваждане от лявата му страна на нова неотрицателна променлива x_{k+i} , наречена също *допълнителна променлива*:

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - x_{k+i} = b_i, \quad x_{k+i} \geq 0.$$

От казаното е ясно, че преобразуването на задачата (L) в съответната ѝ канонична задача (K) става за сметка на увеличаване на броя на променливите от k на n .

В матрична форма каноничната задача се записва така:

$$(K) \quad \begin{aligned} \min \quad & z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

където $\mathbf{c}(c_1, \dots, c_n)$ е n -мерен вектор, който наричаме *вектор на целевата функция*, $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n)$ е n -мерен вектор, който наричаме *вектор на променливите*, $\mathbf{b}(b_1, \dots, b_m)$ е m -мерен вектор с неотрицателни координати, който наричаме *вектор на дясната страна*, а $m \times n$ матрицата $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i=1 \div m, j=1 \div n}$, чиито вектор-редове са векторите \mathbf{a}_i^T на линейните функции, описващи ограниченията, наричаме *матрица на ограниченията*.

Да отбележим, че неравенството $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ трябва да се разбира като векторно неравенство и означава, че $x_j \geq 0$ за всяко $j = 1, \dots, n$, т.е. неравенството $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ е еквивалентно на система от n числови неравенства. Аналогично, равенството $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ е векторно равенство и означава, че координатите на векторите \mathbf{Ax} и \mathbf{b} са съответно равни, т.е. равенството $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ е еквивалентно на система от m числови равенства.

Да отбележим също така, че координатите на вектора на целевата функция в каноничната задача (K) , съответстващи на допълнителни променливи, са равни на нула.

Исходната задача (L) и съответната ѝ канонична задача (K) са еквивалентни в следния смисъл: на всяка допустима точка на (L) чрез подходящо преобразуване на координатите ѝ може да се съпостави допустима точка на (K) (и обратно) така че стойностите на целевите функции на двете задачи в тях да бъдат равни (ако (L) е за минимум) или да се различават само по знак (ако (L) е за максимум, тъй като тогава при канонизация се сменя критерия и това води до смяна на знака поради факта, че $\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} = -\max(-\mathbf{c})^T \mathbf{x}$).

Следователно, за да решим исходната задача (L) е достатъчно да решим съответната ѝ канонична задача (K) .

По-нататък ще разглеждаме предимно канонични линейни задачи.

За да илюстрираме правилата за преобразуване на линейна задача в канонична, да приведем в каноничен вид задачата (L) от Пример 2.1.

Тъй като x_1 е свободна по знак променлива, навсякъде (в целевата функция и в ограниченията) я представяме във вида $x_1 = x_1^+ - x_1^-$, където $x_1^+ \geq 0$ и $x_1^- \geq 0$.

От задача за максимум преминаваме към задача за минимум

$$\min z_K(\mathbf{x}) = -3x_1^+ + 3x_1^- + 2x_2.$$

Тъй като третото неравенство е с отрицателна дясна страна, го умножаваме с -1 , за да получим

$$-x_1 - 2x_2 \leq 1.$$

Добавяме по една неотрицателна допълнителна променлива в лявата страна на трите неравенства, които сега са в посоката \leq .

Окончателно, каноничният вид на задачата от Пример 2.1 е

$$(K) \quad \begin{aligned} \min z_K(\mathbf{x}) &= -3x_1^+ + 3x_1^- + 2x_2 \\ x_1^+ - x_1^- - 2x_2 + x_3 &= 1, \\ 4x_1^+ - 4x_1^- + 3x_2 + x_4 &= 15, \\ -x_1^+ + x_1^- - 2x_2 + x_5 &= 1, \\ x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

От изходната линейна задача (L) с две променливи (x_1, x_2) получихме съответната ѝ канонична задача (K) с шест променливи $(x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Ако векторът $\mathbf{x}_L(x_1, x_2)$ е допустима точка за изходната задача (L) и ако

- $x_1 \geq 0$, то съответният му вектор

$$\mathbf{x}_K(x_1, 0, x_2, 1 - x_1 + 2x_2, 15 - 4x_1 - 3x_2, 1 + x_1 + 2x_2)$$

е допустима точка за каноничната задача (K) ;

- $x_1 < 0$, то съответният му вектор

$$\mathbf{x}_K(0, -x_1, x_2, 1 - x_1 + 2x_2, 15 - 4x_1 - 3x_2, 1 + x_1 + 2x_2)$$

е допустима точка за каноничната задача (K) .

И в двата случая $z_K(\mathbf{x}_K) = -z(\mathbf{x}_L)$, т.е. стойностите на целевите функции на каноничната задача (K) и на изходната задача (L) в съответните допустими решения \mathbf{x}_K и \mathbf{x}_L се различават само по знак. Това е така, защото при канонизацията сменихме критерия на изходната задача от максимум на минимум.

Обратно, ако $\mathbf{x}_K(x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4, x_5)$ е допустима точка за каноничната задача (K) , то съответният му вектор $\mathbf{x}_L(x_1^+ - x_1^-, x_2)$ е допустима точка за изходната задача (L) , като отново $z(\mathbf{x}_L) = -z_K(\mathbf{x}_K)$.

Сега да допуснем, че сме решили задачата (K) и сме получили нейно оптимално решение \mathbf{x}_K^* . За него имаме, че $z_K(\mathbf{x}_K^*) \leq z_K(\mathbf{x}_K)$ за произволна допустима точка \mathbf{x}_K за задачата (K) . Ако \mathbf{x}_L^* е съответната на \mathbf{x}_K^* допустима точка за задачата (L) , за която $z(\mathbf{x}_L^*) = -z_K(\mathbf{x}_K^*)$, то \mathbf{x}_L^* е нейно оптимално решение.

Наистина, нека да вземем произволна допустима за задачата (L) точка \mathbf{x}_L . Нека \mathbf{x}_K е съответната ѝ допустима за задачата (K) точка, в която $z(\mathbf{x}_L) = -z_K(\mathbf{x}_K)$. Тъй като

$$-z(\mathbf{x}_L^*) = z_K(\mathbf{x}_K^*) \leq z_K(\mathbf{x}_K) = -z(\mathbf{x}_L),$$

като умножим двете страни с (-1) получаваме

$$z(\mathbf{x}_L^*) \geq z(\mathbf{x}_L).$$

Тъй като \mathbf{x}_L беше произволна допустима за (L) точка, то \mathbf{x}_L^* е оптимално решение на (L) .

§3. Канонично многостенно множество. Върхове и базисни допустими решения

В § 2.2 показахме как произволна линейна задача (L) се свежда до съответна на нея канонична задача

$$(K) \quad \begin{aligned} \min \quad & z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

където \mathbf{A} е $(m \times n)$ матрица, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^m$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ е n -мерен вектор на променливите.

Вектор $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n)$ се нарича *допустима точка* (*допустимо решение*) на задачата (K) , ако координатите му удовлетворяват всички ограничения. Допустима точка се нарича *оптимално решение*, ако в нея целевата функция z приема най-малката си стойност от стойностите си във всички допустими точки. Множеството от всички допустими точки на задачата (K) означаваме с

$$M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

и наричаме нейно *допустимо множество*.

За задачата (K) има точно три възможности:

- Допустимото ѝ множество M е празно. Това означава, че ограниченията на (K) са несъвместими. В този случай (K) няма решение и се нарича *несъвместима*.
- Допустимото множество M е непразно, а целевата функция $z(\mathbf{x})$ е неограничена отдолу върху M (т.е. $z(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$ за точки $\mathbf{x} \in M$). Тогава (K) няма решение и се нарича *неограничена*.
- Допустимото множество M е непразно, а целевата функция $z(\mathbf{x})$ е ограничена отдолу върху M . В този случай ще докажем, че (K) има оптимално решение, т.е. съществува $\mathbf{x}^* \in M$, такова че $z(\mathbf{x}^*) = \min\{z(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in M\}$ и (K) се нарича *разрешима*.

Очевидно от вида на допустимото множество M на каноничната задача (K) до голяма степен зависи нейната разрешимост и затова е необходимо да изучим неговите свойства.

Всяко множество от вида

$$M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

ще наричаме *канонично множество*. От алгебрична гледна точка то се състои от неотрицателните решения $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ на система линейни уравнения $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. За да вникнем обаче в теорията на линейното оптимизиране и за да разберем идеята на симплекс метода, използван за решаване на линейни задачи, от съществено значение е да изучим геометричните свойства на това множество.

§3.1. Изпъкнали множества. Някои свойства

Дефиниция 3.1. Нека \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 са две точки в \mathbb{R}^n . За всяко $\lambda \in [0, 1]$ съответната точка

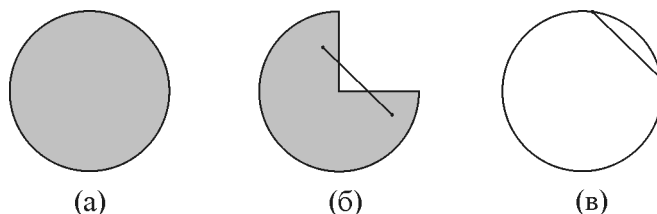
$$\mathbf{x}_\lambda = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2$$

се нарича *изпъкнала комбинация* на точките \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 с *тегла* съответно λ и $1 - \lambda$. Ако $\lambda \neq 0, 1$, то \mathbf{x}_λ се нарича *истинска изпъкнала комбинация* на точките \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 .

Очевидно, когато λ се мени от 0 до 1 съответните изпъкнали комбинации \mathbf{x}_λ описват отсечката с краища \mathbf{x}_2 и \mathbf{x}_1 .

Дефиниция 3.2. Множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ се нарича *изпъкнало*, когато за всеки две точки \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , принадлежащи на C , на C принадлежи и всяка изпъкнала комбинация на \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 (всяка точка от съединяващата ги отсечка).

С други думи, едно множество е изпъкнало, ако заедно с всеки две точки от множеството в него се съдържа изцяло и отсечката, която ги съединява (вж. фиг. 3.1). Празното и едноточковото множество по дефиниция са изпъкнали множества.



Фигура 3.1. Примери на изпъкнало множество (а) и неизпъкнали множества (б) и (в)

Дефиниция 3.3. Точка \mathbf{x} от изпъкнало множество C се нарича *върх* на C ако \mathbf{x} не може да се представи като истинска изпъкнала комбинация на две различни точки от C .

С други думи, $\mathbf{x} \in C$ е върх на C , ако не е вътрешна точка за никоя отсечка с краища в C , т.е. представянето $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2$, където $0 < \lambda < 1$ и $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ е невъзможно.

Всеки триъгълник (разглеждан с вътрешността си) има три върха и това са върховете му, единичното евклидово кълбо $B[0, 1] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ има за върхове точките от единичната евклидова сфера $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$, а правата и полуравнината са изпъкнали множества, които нямат върхове.

Като обобщение на Дефиниция 3.1 за k -точки получаваме

Дефиниция 3.4. Изпъкнала комбинация на k точки $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ се нарича точка \mathbf{x} от вида

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \text{където } \lambda_i \geq 0 \text{ за всяко } i = 1, \dots, k, \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

Да забележим, че в една изпъкнала комбинация теглата са неотрицателни и сумата им е равна на 1.

Множеството от всички изпъкнали комбинации на k точки $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ се нарича тяхна *изпъкнала обвивка*, означава се с $\text{co}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ и е най-малкото изпъкнало множество, което ги съдържа. Например, изпъкналата обвивка на две точки е отсечката, която ги съединява, изпъкналата обвивка на три точки в общо положение е триъгълникът с върхове в тях, на четири — образуваната от тях пирамида, и т. н.

Симплекс с размерност k се нарича изпъкналата обвивка на $k + 1$ точки $\text{co}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$, такива че векторите $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$ са линейно независими.

Твърдение 3.1. Ако C_1, \dots, C_k са изпъкнали множества в \mathbb{R}^n , то тяхното сечение $C := \bigcap_{i=1}^k C_i$ също е изпъкнало множество.

Доказателство. Ако C е празното множество или е едноточково, то няма какво да доказваме. Да вземем две произволни точки $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in C$ и произволно число $\lambda \in [0, 1]$ и да образуваме изпъкналата им комбинация $\lambda \mathbf{x}' + (1 - \lambda) \mathbf{x}''$. Ако покажем, че тя принадлежи на C , твърдението ще бъде доказано. Да фиксираме индекс i в множеството $\{1, \dots, k\}$. От това, че $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in C_i$, което е изпъкнало, следва, че $\lambda \mathbf{x}' + (1 - \lambda) \mathbf{x}'' \in C_i$. Тъй като това е вярно за всяко i в множеството $\{1, \dots, k\}$ имаме, че

$$\lambda \mathbf{x}' + (1 - \lambda) \mathbf{x}'' \in \bigcap_{i=1}^k C_i = C. \quad \square$$

§3.2. Многостенно множество. Изпъкналост. Канонично многостенно множество

Дефиниция 3.5. Множество от точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, които са решения на дадено линейно уравнение $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$, където $\mathbf{a}^T \in \mathbb{R}^n$ е ненулев вектор, а $b \in \mathbb{R}$ е реално число, се нарича *хиперравнина* и се означава с $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$. Векторът \mathbf{a} се нарича *нормален вектор* на H .

В \mathbb{R}^n при $n = 2$ хиперравнината е права, при $n = 3$ хиперравнината е равнина и т. н.

Дефиниция 3.6. Множество от точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, които са решения на дадено линейно неравенство $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$, където $\mathbf{a}^T \in \mathbb{R}^n$ е ненулев вектор, а $b \in \mathbb{R}$ е реално число, се нарича *затворено полупространство* и се означава с $H^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b\}$.

Всяка хиперравнина $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$ определя затворените полупространства $H^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b\}$ и $H^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b\}$.

Твърдение 3.2. Всяко множество от вида H , H^+ , H^- е изпъкнало множество.

Доказателство. Достатъчно е да проверим дефиницията за изпъкналост. Ще докажем че затворено полупространство $H^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ е изпъкнало множество. Доказателството за H и H^+ се прави аналогично.

И така, нека вземем произволни \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 от H^- и произволно число $\lambda \in [0, 1]$. Образоваме изпъкналата комбинация \mathbf{x} на \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 с тегла λ и $1 - \lambda$ съответно

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2$$

и трябва да покажем, че $\mathbf{x} \in H^-$.

Тъй като $\mathbf{x}_1 \in H^-$, то $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}$. Аналогично от $\mathbf{x}_2 \in H^-$ имаме $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_2 \leq \mathbf{b}$. Умножаваме първото неравенство с λ , второто с $(1 - \lambda)$ (при което посоката на неравенствата не се променя, защото $\lambda \geq 0$ и $1 - \lambda \geq 0$):

$$\lambda \mathbf{a}^T \mathbf{x}_1 \leq \lambda \mathbf{b}$$

$$(1 - \lambda) \mathbf{a}^T \mathbf{x}_2 \leq (1 - \lambda) \mathbf{b}$$

и ги събираме. Получаваме

$$\mathbf{a}^T (\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \leq \lambda \mathbf{b} + (1 - \lambda) \mathbf{b} = \mathbf{b},$$

което означава, че $\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \in H^-$, или $\mathbf{x} \in H^-$, което трябваше да се докаже. \square

Дефиниция 3.7. *Многостенно множество* $P \subset \mathbb{R}^n$ наричаме множество, образувано от пресичането на краен брой затворени полупространства и хиперравнини. Ако многостенно множество е непразно и ограничено, то се нарича *многостен*.

Твърдение 3.3. *Многостенно множество* $P \subset \mathbb{R}^n$ *е изпъкнало.*

Доказателство. Тъй като хиперравнините и затворените полупространства са изпъкнали множества (Твърдение 3.2) и тъй като сечение на изпъкнали множества е изпъкнало (Твърдение 3.1), следва че P е изпъкнало. \square

Следствие 3.1. *Канонично множество* $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ *е многостенно множество.*

Доказателство. Множеството M представлява сечение на m -те хиперравнини, определени с уравненията

$$\mathbf{a}_1^T \mathbf{x} = b_1, \dots, \mathbf{a}_m^T \mathbf{x} = b_m, \quad (\text{системата } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ разписана по уравнения})$$

където \mathbf{a}_i^T е i -ят вектор-ред на матрицата \mathbf{A} и на n -те затворените полупространства, определени с неравенствата

$$\mathbf{e}_1^T \mathbf{x} \geq 0, \dots, \mathbf{e}_n^T \mathbf{x} \geq 0, \quad (\text{разписано покоординатно } \mathbf{x} \geq \mathbf{0})$$

където \mathbf{e}_i^T е i -ят вектор-ред на единичната матрица от ред n . Като сечение на краен брой хиперравнини и затворени полупространства, M е многостенно множество. \square

Канонично множество M ще наричаме още *канонично многостенно множество*.

Следствие 3.2. *Канонично многостенно множество M е изпъкнало множество.*

Доказателство. Следва непосредствено от Следствие 3.1 и Твърдение 3.3. \square

§3.3. Как да разпознаем точките в канонично множество M , които не са негови върхове

От оптимизационна гледна точка върховете на канонично множество M са важни негови елементи, защото (както ще покажем по-късно в Теорема 5.2) ако каноничната задача (K) има решение, то сред решенията ѝ винаги има такова, което е връх на допустимото ѝ множество M .

Нека е дадено канонично множество $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Нека е дадена и точка $\mathbf{x} \in M$. Ако можем да намерим ненулев вектор \mathbf{z} и число $t_0 > 0$, такива че точките $\mathbf{x} + t_0\mathbf{z}$ и $\mathbf{x} - t_0\mathbf{z}$ да бъдат в M , то тогава \mathbf{x} ще бъде среда на отсечка с краища тези две точки от M и следователно няма как да бъде връх на M .

В следващата лема ще покажем, че ако съответните на положителните координати на дадената точка $\mathbf{x} \in M$ вектор-стълбове на матрицата \mathbf{A} са в линейна зависимост, то координатите на ненулев вектор \mathbf{z} с горното свойство можем да получим като използваме коефициентите, изразяващи тази линейна зависимост.

Лема 3.1. *Нека $\mathbf{x} \in M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Ако вектор-стълбовете на матрицата \mathbf{A} , съответстващи на положителните координати на \mathbf{x} са линейно зависими, то съществуват ненулев вектор $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ и числа $t^- < 0 < t^+$, такива че*

$$(1) \quad \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0};$$

$$(2) \quad z_i = 0, \text{ ако } x_i = 0;$$

$$(3) \quad \text{векторът } \mathbf{x} + t\mathbf{z} \in M \text{ за всяко } t \in [t^-, t^+]$$

и \mathbf{x} не е връх на M .

Доказателство. Да означим вектор-стълбовете на матрицата \mathbf{A} с $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$.

Да вземем произволно $\mathbf{x} \in M$. Координатите му са неотрицателни числа. Нека първите p координати на \mathbf{x} са положителни, а последните $n-p$ са нули, т.е. $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ като $x_j > 0, j = 1, \dots, p$ (което винаги можем да постигнем с преномериране на променливите). На положителните координати x_1, \dots, x_p на \mathbf{x} съответстват вектор-стълбовете $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p$ на матрицата \mathbf{A} . Съгласно предположението на лемата, те са линейно зависими. Следователно съществуват числа z_1, \dots, z_p не всич-

ките равни на нула и такива, че $\sum_{j=1}^p z_j \mathbf{A}_j = \mathbf{0}$.

Да означим $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ и да отбележим, че $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ и че \mathbf{z} удовлетворява (2). Да забележим, че

$$(3.1) \quad \mathbf{A}\mathbf{z} = \sum_{j=1}^n z_j \mathbf{A}_j = \sum_{j=1}^p z_j \mathbf{A}_j = \mathbf{0},$$

откъдето следва (1).

Да разгледаме векторите $\mathbf{x} + t\mathbf{z}$, където t е реално число. От (3.1) имаме, че за всяко $t \in \mathbb{R}$ е изпълнено

$$(3.2) \quad \mathbf{A}(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + t\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Следователно, $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \in M$ точно тогава, когато $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$.

Като запишем това векторно неравенство покоординатно и отчетем, че за координатите от $p+1$ до n то очевидно е изпълнено като равенство, получаваме

$$x_i + tz_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

което е система линейни относно t неравенства. Нейните решения трябва да удовлетворяват неравенствата

$$t \geq -\frac{x_i}{z_i}, \quad \text{за всяко } i \in \{1, \dots, p\} \text{ такова че } z_i > 0$$

и

$$t \leq -\frac{x_i}{z_i}, \quad \text{за всяко } i \in \{1, \dots, p\} \text{ такова че } z_i < 0$$

и следователно множеството от решения на системата е числов интервал. Неговата долна граница е $t^- := \max_{i: z_i > 0} -\frac{x_i}{z_i}$, а ако няма i , такива че $z_i > 0$, тя е $t^- := -\infty$. Да обърнем внимание, че $t^- < 0$. Горната граница на интервала е $t^+ := \min_{i: z_i < 0} -\frac{x_i}{z_i}$, а ако няма i , такива че $z_i < 0$, тя е $t^+ := +\infty$. Очевидно $t^+ > 0$. Важно е да обърнем внимание, че поне едно от числата t^- и t^+ е крайно (защото $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$). Така получаваме интервала $[t^-, t^+]$ от решения на системата линейни неравенства.

За всяко $t \in [t^-, t^+]$ ще бъде изпълнено $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$, което комбинирано с (3.2) означава, че $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \in M$ и (3) следва. \square

§3.4. Алгебрична характеристика на върховете на M

Логичен е въпросът: след като от линейната зависимост на вектор-стълбовете на матрицата \mathbf{A} , съответстващи на положителните координати на вектор $\mathbf{x} \in M$ следва, че \mathbf{x} не е връх на M , можем ли да твърдим, че ако те са линейно независими, то \mathbf{x} е връх на M ? Положителният отговор на този въпрос дава

Теорема 3.1 (алгебрична характеристика на върховете на M). *Точка $\mathbf{x} \in M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ е връх на M тогава и само тогава, когато вектор-стълбовете на матрицата \mathbf{A} , съответстващи на положителните координати на \mathbf{x} , са линейно независими.*

Доказателство. Да фиксираме $\mathbf{x} \in M$ като допуснем, че първите p координати на \mathbf{x} са положителни, а последните $n - p$ са нули, т.е. $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ като $x_j > 0$, $j = 1, \dots, p$.

Да отбележим, че ако $p = 0$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то очевидно \mathbf{x} е връх на M . Наистина, ако допуснем че $\mathbf{0} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2$ за някое $\lambda \in (0, 1)$ и някои $\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}$ и $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0}$ от M , то това е възможно само ако $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Следователно $\mathbf{0}$ не може да се представи като истинска изпъкнала комбинация на две различни точки от M и по дефиниция е връх на M .

Нека $p > 0$ и \mathbf{x} е връх на M . Трябва да докажем, че векторите $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p$ са линейно независими. Допускаме обратното, т.е. че са линейно зависими. Прилагаме Лема 3.1 и получаваме ненулев вектор $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p, 0, \dots, 0)$ и числа $t^- < 0 < t^+$, такива че $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \in M$ за всяко $t \in [t^-, t^+]$. Да фиксираме $t > 0$, такова че числата t и $-t$ да бъдат в интервала $[t^-, t^+]$. Тогава точките $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x} + t\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}_2 := \mathbf{x} - t\mathbf{z}$ са в M , като $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, защото $t > 0$ и $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Като вземем средата на отсечката с краища \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , получаваме

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - t\mathbf{z}) = \mathbf{x},$$

т.е. \mathbf{x} е истинска изпъкнала комбинация на две различни точки \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 от M , което е в противоречие с това, че \mathbf{x} е връх на M . Полученото противоречие показва, че ако точката \mathbf{x} е връх на M , то стълбовете на \mathbf{A} , съответстващи на положителните ѝ координати са линейно независими.

Обратно, нека сега стълбовете $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p$ са линейно независими. Трябва да покажем, че \mathbf{x} е връх на M .

Да допуснем, че \mathbf{x} не е връх на M . Това означава, че $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2$ за някои $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in M$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ и някое $0 < \lambda < 1$. Тъй като и двете точки \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 са в M , $\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Тъй като двете числа λ и $1 - \lambda$ са положителни и последните $n - p$ координати на \mathbf{x} са равни на нула, то последните $n - p$ координати на \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 също са равни на нула. Следователно последните $n - p$ координати на вектора $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ са нули, а сред първите p има поне една ненулева (тъй като

$$\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2). \text{ Тогава } \mathbf{0} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \sum_{j=1}^n (x_{1j} - x_{2j}) \mathbf{A}_j = \sum_{j=1}^p (x_{1j} - x_{2j}) \mathbf{A}_j,$$

което означава, че стълбовете $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p$ са линейно зависими.

Полученото противоречие показва, че ако вектор-стълбовете на \mathbf{A} , съответстващи на положителните координати на \mathbf{x} , са линейно независими, то \mathbf{x} е връх на M . \square

§3.5. Базисни решения. Базисни допустими решения

Вече знаем, че върховете на M се характеризират с линейната независимост на вектор-стълбовете на матрицата \mathbf{A} , съответстващи на положителните им координати.

Да припомним, че максималният брой линейно независими вектор-стълбовете на $m \times n$ матрица \mathbf{A} се нарича *ранг* на \mathbf{A} и се означава с $r(\mathbf{A})$. Рангът на \mathbf{A} също така е равен на максималния брой линейно независими вектор-редове на \mathbf{A} , както и на реда на най-големия ненулев минор

на \mathbf{A} . Ако всичките m вектор-редове на \mathbf{A} са линейно независими, казваме че \mathbf{A} има *пълнен ранг по редове*. Очевидно в този случай $r(\mathbf{A}) = m$ и $m \leq n$.

Когато \mathbf{A} няма пълен ранг по редове (т.е. вектор-редовете на \mathbf{A} са линейно зависими), то

- или системата линейни уравнения $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ няма решение (и съответно M е празното множество);
- или някои от уравненията в системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ са *излишни* (в смисъл, че са линейно зависими от останалите уравнения).

Да видим при какви обстоятелства попадаме във всеки от тези два случая. Да означим с \mathbf{a}_i^T , $i = 1, \dots, m$ вектор-редовете на \mathbf{A} . Щом те са линейно зависими, за някои реални числа α_i , $i = 1, \dots, m$, не всички равни на нула, $\sum_{1 \leq i \leq m} \alpha_i \mathbf{a}_i^T = \mathbf{0}$. Нека $\alpha_k \neq 0$, за някое $k \in \{1, \dots, m\}$.

Тогава като разделим последния израз на $\alpha_k \neq 0$ за вектор-реда \mathbf{a}_k^T получаваме $\mathbf{a}_k^T = \sum_{1 \leq i \leq m, i \neq k} \beta_i \mathbf{a}_i^T$, където $\beta_i := -\alpha_i / \alpha_k$.

Ако $b_k \neq \sum_{1 \leq i \leq m, i \neq k} \beta_i b_i$, то системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ няма решение.

Ако $b_k = \sum_{1 \leq i \leq m, i \neq k} \beta_i b_i$, то k -то уравнение е в линейна зависимост от останалите, следователно е излишно и може да се отстрани от системата. Това отстраняване не променя системата в смисъл, че новата система има същото множество от решения.

След като едно по едно бъдат отстранени всички излишни уравнения, се достига до система от уравнения, еквивалентна на изходната, чиято матрица е с пълен ранг по редове.

По тази причина без ограничение на общността оттук нататък ще предполагаме, че $m \times n$ матрицата \mathbf{A} , която разглеждаме, е с $r(\mathbf{A}) = m$. В този случай координатите на върховете на M се получават като *базисни решения* на линейната система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Какво се разбира под базисно решение?

Тъй като $r(\mathbf{A}) = m$, то съществува поне една неособена подматрица от ред m на матрицата \mathbf{A} . Всяка такава подматрица се нарича *базисна матрица*.

Нека фиксираме базисна матрица \mathbf{B} . Означаваме с B множеството от индекси на стълбове на \mathbf{A} , които са стълбове на \mathbf{B} и ги наричаме *базисни индекси*. Ако предположим, че \mathbf{B} се състои от първите m стълба на \mathbf{A} (което винаги можем да постигнем чрез преномериране на променливите), тогава $B = \{1, \dots, m\}$.

Матрицата \mathbf{A} се разделя на две подматрици $\mathbf{A} = [\mathbf{B} | \mathbf{N}]$, където с \mathbf{N} е означена подматрицата на \mathbf{A} , състояща се от останалите $n - m$ стълба. Съответно с N означаваме множеството от небазисните индекси, в случая $N = \{m + 1, \dots, n\}$.

m -те променливи, чиито индекси са базисни, т.е. x_j за $j \in B$ наричаме *базисни променливи* или *базис*, а останалите $n - m$ променливи, т.е. x_j за $j \in N$ наричаме *небазисни променливи*. Векторът на базисните

променливи означаваме с $\mathbf{x}_B = (x_j)_{j \in B}$, а векторът на небазисните променливи означаваме с $\mathbf{x}_N = (x_j)_{j \in N}$. По този начин произволен вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ се представя във вида $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$.

Нека сега векторът \mathbf{x} е решение на системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Тогава

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{B}|\mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}.$$

Тъй като \mathbf{B} е неособена матрица, съществува матрицата \mathbf{B}^{-1} , с която умножаваме отляво преобразуваната система, за да получим

$$\mathbf{B}^{-1} | \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow$$

$$(3.3) \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N.$$

Последното векторно равенство означава, че линейната система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ е разрешена относно базисните променливи \mathbf{x}_B , т.е. че посредством (3.3) базисните координати \mathbf{x}_B на решение \mathbf{x} на системата се изразяват чрез небазисните му координати \mathbf{x}_N .

Казано с други думи, за всеки зададен набор от $n - m$ числени стойности на небазисните променливи \mathbf{x}_N чрез (3.3) се пресмятат числените стойности на m -те базисни променливи \mathbf{x}_B и така се получават n -те координати на едно частно решение $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$ на системата.

Ако зададем нулеви стойности на небазисните променливи, т.е. положим $\bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$, от (3.3) за базисните променливи ще получим $\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.

По този начин на всяка базисна матрица \mathbf{B} (или, което е еквивалентно, на всеки базис B) по единствен начин се съпоставя решение на системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ от вида $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

Дефиниция 3.8. Нека \mathbf{B} е базисна матрица, съставена от m (линейно независими) стълба на \mathbf{A} . Векторът $\bar{\mathbf{x}}$, чиито небазисни координати са нули (т.е. $\bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$), а базисните му координати са $\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ се нарича *базисно решение с базисна матрица \mathbf{B} (с базис B)*.

Терминът базис идва от това, че вектор-стълбовете на матрицата \mathbf{B} образуват базис за линейното пространство, породено от вектор-стълбовете на \mathbf{A} , и на $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ може да се гледа като на представяне на вектора \mathbf{b} като линейна комбинация на вектор-стълбовете на \mathbf{A} , чиито коефициенти са координатите на решение \mathbf{x} на системата.

Дефиниция 3.9. Ако координатите на базисно решение $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ с базисна матрица \mathbf{B} са неотрицателни, т.е. ако $\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, то се нарича *базисно допустимо решение*, т.к. в този случай $\bar{\mathbf{x}}$ принадлежи на каноничното множество $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ и следователно е допустима точка за канонична задача с допустимо множество M .

И така, всяка базисна матрица поражда точно едно базисно решение, което ако е с неотрицателни координати, е базисно допустимо решение.

Геометричното понятие *върх* и алгебричното понятие *базисно допустимо решение* дефинират един и същ обект в каноничното множество M , както ще се убедим от следната

Теорема 3.2. Ако каноничното множество $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ е непразно, то за $\bar{\mathbf{x}} \in M$ следните твърдения са еквивалентни:

- (а) $\bar{\mathbf{x}}$ е връх на M ;
- (б) $\bar{\mathbf{x}}$ е базисно допустимо решение.

Доказателство. (а) \implies (б). От Теорема 3.1 следва линейната независимост на стълбовете на \mathbf{A} , съответстващи на положителните координати на $\bar{\mathbf{x}}$. Тъй като $r(\mathbf{A}) = m$ техният брой не надминава m и можем да ги допълним до базисна $m \times m$ матрица \mathbf{B} на $\bar{\mathbf{x}}$ с някои от другите стълбове на \mathbf{A} . Възможно е това допълване да става по различни начини.

(б) \implies (а). Нека $\bar{\mathbf{x}}$ е базисно допустимо решение с базисна матрица \mathbf{B} , т.е. $\bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Положителните координати на $\bar{\mathbf{x}}$ са сред базисните му координати, чиито индекси, разбира се, са индекси на стълбове на \mathbf{B} , а те са линейно независими. От Теорема 3.1 следва, че $\bar{\mathbf{x}}$ е връх на M . \square

Теорема 3.2 позволява по-нататък да използваме термините връх и базисно допустимо решение като синоними.

§3.6. Изродени и неизродени базисни допустими решения

Тъй като $r(\mathbf{A}) = m$, връх в M може да има най-много m на брой положителни координати. Правим разлика между върхове с точно m положителни координати и върхове с по-малко от m положителни координати.

Дефиниция 3.10. Базисно допустимо решение с базисна матрица \mathbf{B} , $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$ се нарича *неизродено*, ако всичките му базисни координати са положителни, т.е. $\bar{\mathbf{x}}_B > \mathbf{0}$, и се нарича *изродено* в противен случай. Тогава сред базисните му координати има такива с нулева стойност, които се наричат *базисни нули*. Връх на M се нарича *неизроден*, ако съответното му базисно допустимо решение е неизродено и се нарича *изроден* в противен случай.

Знаем, че на всяка базисна матрица съответства точно едно базисно решение, което — ако е допустимо — е връх на M . Ако обаче връх на M има по-малко от m положителни координати, то той може да се поражда като базисно допустимо решение от няколко различни базисни матрици (базиса), тъй като допълването до базисна матрица с останалите вектор-стълбове на \mathbf{A} може да става по различни начини.

Възможно е изроден връх $\bar{\mathbf{x}}$ да има огромен брой базиси: ако $\bar{\mathbf{x}}$ има $p < m$ положителни координати, то $\bar{\mathbf{x}}$ може да има

$$\binom{n-p}{n-m} = \frac{(n-p)!}{(n-m)!(m-p)!}$$

различни базиса. Координатите на върха $\bar{\mathbf{x}}$ са едни и същи, но множествата от негови координати, означени като базисни и небазисни са различни.

Типичен пример за изроденост се получава в задачата за назначение. Каноничното множество от допустими решения

$$M_k = \left\{ x_{ij} : \sum_{j=1}^k x_{ij} = 1, i=1, \dots, k; \sum_{i=1}^k x_{ij} = 1, j=1, \dots, k; x_{ij} \geq 0, i, j=1, \dots, k \right\}$$

на тази задача има $k!$ върха, на всеки от които съответстват по $2^{k-1}k^{k-2}$ различни базиса. Следователно, при $k = 8$, всеки от 40 320-те върха на M_8 има по 33 554 432 различни базиса!

От Теорема 3.2 следва и изключително важният факт, че върховете на канонично множество са краен брой.

Следствие 3.3. *Канонично множество $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \neq \emptyset$ има само краен брой върхове.*

Доказателство. Всеки връх на M е базисно допустимо решение, т.е. на него му съответства базисна матрица. Тъй като на неизроден връх съответства точно една базисна матрица, а на изроден връх е възможно да съответства и повече от една базисна матрица, имаме че

$$\#\{\text{върхове}\} \leq \#\{\text{базисни матрици}\}.$$

За да се образува една базисна матрица се взимат m линейно независими базисни стълба от n -те стълба на \mathbf{A} . Има краен брой начини, по които могат да бъдат взети m от n елемента и той е $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Следователно

$$\#\{\text{базисни матрици}\} \leq \binom{n}{m}$$

и върховете на M могат да бъдат най-много $\binom{n}{m}$ на брой. \square

§4. Канонично многостенно множество. Посоки. Теорема за представяне

Нека $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ е канонично многостенно множество. Върховете на M са важни негови елементи, тъй като (както ще покажем в Следствие 4.2 по-долу), ако M е ограничено множество (т.е. M е многостен) произволна точка от M се представя като изпъкнала комбинация на върховете на M . Това означава, че ограниченото канонично множество може да бъде построено на базата на краен брой свои елементи (върховете му), като се вземат всичките им изпъкнали комбинации.

Когато каноничното множество е неограничено обаче, върховете му не са достатъчни за получаване на всичките му точки. В този случай за целта освен върховете на множеството са необходими и посоките в него.

§4.1. Посоки в канонично множество M . Алгебрична характеристика на посоките в M

Най-напред ще въведем термина посока за произволно множество.

Дефиниция 4.1. *Посока* в произволно множество $S \subset \mathbb{R}^n$ е ненулев вектор $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, такъв че за всяка точка $\mathbf{x}_0 \in S$ лъчът $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d}, \mu \geq 0\}$ лежи изцяло в S .

От Дефиниция 4.1 е ясно, че ако \mathbf{d} е посока в множество S , то $\nu\mathbf{d}$ за $\nu > 0$ също е посока в S .

Едно множество $K \subset \mathbb{R}^n$ се нарича *конус с връх в $\mathbf{0}$* , ако за всяко $\mathbf{d} \in K$ в K се съдържа и $\nu\mathbf{d}$ за произволно $\nu > 0$.

Следователно множеството от всички посоки в S е конус с връх в началото $\mathbf{0}$ и поради това се нарича *конус на посоките в S* . Ако S е изпъкнало множество, то лесно се доказва, че и конусът на посоките в S е изпъкнало множество, т.е. е *изпъкнал конус*. Тъй като M е изпъкнало множество (вж. Следствие 3.2), то посоките в M са изпъкнал конус с връх в $\mathbf{0}$. Това може да се докаже и директно като се използва характеристиката на посоките в M , дадена в Теорема 4.1 по-долу.

Посоки в многостенното множество P , изобразено на фиг. 2.1 например са направляващите вектори $\mathbf{d}_1(-2, 1)$ и $\mathbf{d}_2(-3, 4)$ на неограничените ръбове на многоъгълника. Изпъкналият конус на посоките на това множество е $K := \{\mu_1(-2, 1) + \mu_2(-3, 4) : \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0\}$.

Изглежда очевидно, а и в Следствие 4.1 по-долу ще го докажем, че едно канонично множество M е неограничено тогава и само тогава, когато в M има посока. Следователно за канонични задачи, в които допустимото множество е неограничено, ще ни бъде необходима алгебрична характеристика на посоките в M .

Теорема 4.1 (алгебрична характеризация на посоките в M).
Вектор $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ е посока в M тогава и само тогава, когато

$$\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{d} \geq \mathbf{0}.$$

Доказателство. Нека $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ е посока в M . За фиксирана точка $\mathbf{x}_0 \in M$ имаме, че $\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d} \in M$ за всяко положително μ . Това означава че за всяко $\mu > 0$ е изпълнено $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d}) = \mathbf{b}$ и тъй като $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$, то $\mu\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$, откъдето $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$. Ако допуснем, че сред координатите на \mathbf{d} има отрицателна, за големи μ съответната ѝ координата на вектора $\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d}$ също ще бъде отрицателна, което противоречи на това, че $\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d} \in M$ и следователно има само неотрицателни координати.

Обратно, ако $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ удовлетворява условията на твърдението, то за произволна точка $\mathbf{x}_0 \in M$ имаме, че $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d}) = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ и $\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ за всяко неотрицателно μ . Съгласно Дефиниция 4.1, \mathbf{d} е посока в M . \square

Използваме алгебричната характеристика на върховете (Теорема 3.1) и на посоките (Теорема 4.1) в канонично множество M , за да докажем

§4.2. Теорема за представяне на канонично множество M

Да означим с $V := \{\bar{\mathbf{x}}_i : i \in I\}$ множеството от върховете на M . Да обърнем внимание на това, че индексното множество I е крайно множество, тъй като съгласно Следствие 3.3 M има краен брой върхове.

Теорема 4.2 (за представяне). *Всяка точка $\mathbf{x} \in M$ може да се представи във вида*

$$(4.1) \quad \mathbf{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d},$$

където $\lambda_i \geq 0$ за всички $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ и \mathbf{d} е посока в M или \mathbf{d} е нулевият вектор.

Доказателство. Твърдението ще докажем с индукция по броя на положителните координати на точките в M .

Нека p_0 е най-малкият възможен брой положителни координати на точка в M .

Ще покажем, че всяка точка в M с p_0 положителни координати е връх на M .

Наистина, ако $p_0 = 0$, то нулевият вектор $\mathbf{0} \in M$. В този случай $\mathbf{0}$ е връх на M (вж. доказателството на Теорема 3.1).

Нека сега $p_0 > 0$ и да допуснем, че в M има точка \mathbf{x} с p_0 положителни координати, която не е връх. Съгласно Теорема 3.1 вектор-стълбовете на \mathbf{A} , съответстващи на положителните ѝ координати са линейно зависими. Тогава, съгласно Лема 3.1 съществува вектор $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$,

такъв че $z_i = 0$ ако $x_i = 0$ и числа $t^- < 0 < t^+$, такива че $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \in M$ за всяко $t \in [t^-, t^+]$ като поне единият край на интервала е краен. Нека t^- е крайно. Точката $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + t^-\mathbf{z}$ е точка от M , която обаче има поне още една нулева координата повече от \mathbf{x} (ако $t^- = -x_r/z_r$, то $x_r \neq 0$, докато $x'_r = x_r + t^-\mathbf{z}_r = x_r + \frac{-x_r}{z_r}z_r = 0$) а това е невъзможно съгласно дефиницията на p_0 .

Представянето (4.1) очевидно е в сила за точки, които са върхове на M , тъй като ако \mathbf{x} е връх, то $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}_i$ за някое $i \in I$.

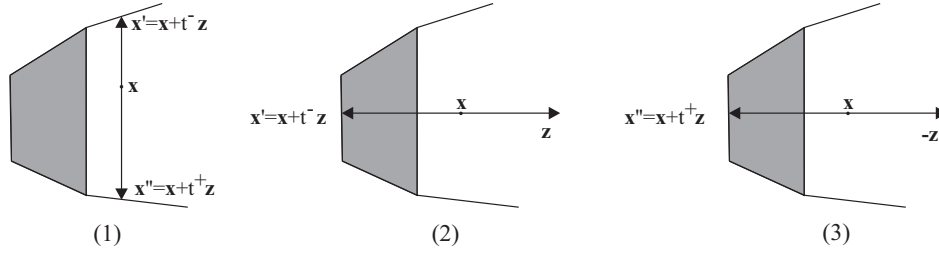
Следователно точките в M с минимален брой положителни координати имат представянето (4.1).

Да предположим, че точките в M с по-малко от p положителни координати имат представянето (4.1).

Да разгледаме точка $\mathbf{x} \in M$, която има точно p положителни координати.

Ако \mathbf{x} е връх, казахме, че за него представянето е в сила. Ако \mathbf{x} не е връх, то съгласно Теорема 3.1 вектор-стълбовете на \mathbf{A} , съответстващи на положителните му координати са линейно зависими. Тогава, съгласно Лема 3.1 съществува вектор $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, такъв че $z_i = 0$ ако $x_i = 0$, $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}$ и числа $t^- < 0 < t^+$, такива че $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \in M$ за всяко $t \in [t^-, t^+]$.

Възможни три случая, илюстрирани на фиг. 4.1.



Фигура 4.1.

Случай 1. Векторът \mathbf{z} има положителни и отрицателни координати. В този случай t^- и t^+ приемат крайни стойности. Точките $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + t^-\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}'' = \mathbf{x} + t^+\mathbf{z}$ са точки от M , които лежат върху правата през \mathbf{x} , определена от \mathbf{z} , и имат поне още една нулева координата повече от \mathbf{x} . Следователно, \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' са точки от M с по-малко от p положителни координати. Според индукционното предположение те имат желаното представяне

$$\mathbf{x}' = \sum_{i \in I} \lambda'_i \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d}', \text{ където } \lambda'_i \geq 0, i \in I, \sum_{i \in I} \lambda'_i = 1, \mathbf{d}' \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{d}' = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{x}'' = \sum_{i \in I} \lambda''_i \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d}'', \text{ където } \lambda''_i \geq 0, i \in I, \sum_{i \in I} \lambda''_i = 1, \mathbf{d}'' \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{d}'' = \mathbf{0}.$$

Точката \mathbf{x} лежи на отсечката с краища \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' и следователно е тяхна изпъкнала комбинация, т.е. съществува $\lambda \in (0, 1)$, такова че

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}' + (1 - \lambda) \mathbf{x}''.$$

Стойността на λ намираме от

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \lambda \mathbf{x}' + (1 - \lambda) \mathbf{x}'' = \lambda(\mathbf{x} + t^- \mathbf{z}) + (1 - \lambda)(\mathbf{x} + t^+ \mathbf{z}) \\ &= \mathbf{x} + (\lambda t^- + (1 - \lambda)t^+) \mathbf{z}.\end{aligned}$$

Получаваме $(\lambda t^- + (1 - \lambda)t^+) \mathbf{z} = \mathbf{0}$, но \mathbf{z} е ненулев вектор и следователно $\lambda t^- + (1 - \lambda)t^+ = 0$. Оттук намираме стойността на $\lambda = t^+ / (t^+ - t^-)$.

Като отразим това, че точките \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' имат желаното представяне,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \lambda \mathbf{x}' + (1 - \lambda) \mathbf{x}'' = \lambda \left(\sum_{i \in I} \lambda'_i \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d}' \right) + (1 - \lambda) \left(\sum_{i \in I} \lambda''_i \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d}'' \right) \\ &= \sum_{i \in I} (\lambda \lambda'_i + (1 - \lambda) \lambda''_i) \bar{\mathbf{x}}_i + \lambda \mathbf{d}' + (1 - \lambda) \mathbf{d}''\end{aligned}$$

и като положим

$$\lambda_i := \lambda \lambda'_i + (1 - \lambda) \lambda''_i \quad \text{за всяко } i \in I \quad \text{и} \quad \mathbf{d} := \lambda \mathbf{d}' + (1 - \lambda) \mathbf{d}''$$

получаваме, че

$$\mathbf{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d},$$

където

$$\lambda_i \geq 0 \text{ за } i \in I,$$

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = \sum_{i \in I} (\lambda \lambda'_i + (1 - \lambda) \lambda''_i) = \lambda \sum_{i \in I} \lambda'_i + (1 - \lambda) \sum_{i \in I} \lambda''_i = \lambda + (1 - \lambda) = 1,$$

$$\mathbf{d} \geq \mathbf{0} \text{ и } \mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{A}(\lambda \mathbf{d}' + (1 - \lambda) \mathbf{d}'') = \lambda \mathbf{A}\mathbf{d}' + (1 - \lambda) \mathbf{A}\mathbf{d}'' = \mathbf{0}.$$

От последното е ясно, че \mathbf{d} е нулевият вектор или посока в M и следователно \mathbf{x} има желаното представяне.

Случай 2. Векторът $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$. В този случай само t^- е крайно. Дефинираме \mathbf{x}' , както в случай 1. Точката \mathbf{x} записваме като

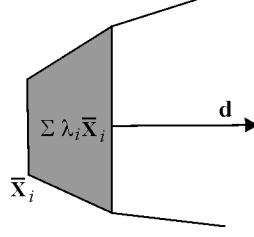
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + (-t^-) \mathbf{z}, \quad \text{където } t^- < 0.$$

Тъй като според индукционното предположение \mathbf{x}' има желаното представяне и тъй като \mathbf{z} е посока в M (понеже $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$ и $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}$ от (3.1)), то очевидно \mathbf{x} има представянето (4.1).

Случай 3. Векторът $\mathbf{z} \leq \mathbf{0}$. Доказателството е аналогично на това в случай 2, като заменим \mathbf{x}' , t^- и \mathbf{z} съответно с \mathbf{x}'' , t^+ и $-\mathbf{z}$. \square

От Теоремата за представяне е ясно, че за представянето на произволен елемент от канонично множество M са необходими както изпъкналите комбинации на върховете на M , така и посоките в M , ако има такива (вж. фиг. 4.2).

Отговор на въпроса кога в M има посока дава



Фигура 4.2.

Следствие 4.1. *Непразно канонично множество M е неограничено тогава и само тогава, когато в M има посока.*

Доказателство. Нека в M има посока $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$. Тъй като $M \neq \emptyset$, в M има поне една точка \mathbf{x}_0 . Съгласно дефиницията за посока, в M се съдържа и лъчът $\{\mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{d}, \mu \geq 0\}$, който е неограничено множество. Следователно M е неограничено множество.

Обратно, нека M е неограничено. Да допуснем, че в M няма посока. От Теоремата за представяне имаме, че произволен елемент $\mathbf{x} \in M$ се представя във вида

$$\mathbf{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i \bar{\mathbf{x}}_i, \quad \text{където } \lambda_i \geq 0, i \in I \quad \text{и} \quad \sum_{i \in I} \lambda_i = 1.$$

Да означим $k := \max_{i \in I} \|\bar{\mathbf{x}}_i\|$. Като максимум на краен брой числа константата k е добре дефинирана и от представянето на \mathbf{x} имаме, че

$$\|\mathbf{x}\| = \left\| \sum_{i \in I} \lambda_i \bar{\mathbf{x}}_i \right\| \leq \sum_{i \in I} \lambda_i \|\bar{\mathbf{x}}_i\| \leq k \sum_{i \in I} \lambda_i = k,$$

което означава, че нормата на произволен вектор в M не надминава k , т.е. M се съдържа в кълбо с център $\mathbf{0}$ и радиус k , и следователно M е ограничено множество. Полученото противоречие доказва, че ако M е неограничено, в M има посока. \square

Следствие 4.2. *Ако M е непразно и ограничено множество (т.е. M е многостен), то всяко $\mathbf{x} \in M$ се представя като изпъкнала комбинация на върховете на M .*

Доказателство. От Теоремата за представяне в представянето (4.1) на произволен елемент \mathbf{x} на M задължително ще имаме $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, тъй като M е ограничено и според Следствие 4.1 в M няма посока. \square

§5. Основни теореми на линейното оптимиране

Тук ще докажем двете теореми, които са от съществено значение за теорията на линейното оптимиране. Те са в основата и на разработването на алгоритми (в частност на симплекс алгоритъма) за решаване на линейни задачи. Тези теореми разкриват значението, което върховете на допустимото множество на каноничната задача имат за тези алгоритми.

Разглеждаме каноничната задача на линейното оптимиране

$$(K) \quad \begin{aligned} \min \quad & z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

където \mathbf{A} е $m \times n$ матрица, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^m$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ е n -мерен вектор на променливите.

Както обикновено, означаваме с $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ нейното допустимо множество.

Теорема 5.1. *Ако $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ е непразно множество, то M има поне един връх.*

Доказателство. Тъй като $M \neq \emptyset$, то в M има поне една точка \mathbf{x} . Тя има представянето (4.1), доказано в Теорема 4.2. Ако допуснем, че множеството $V = \{\bar{\mathbf{x}}_i, i \in I\}$ от върховете на M е празно, то от Теоремата за представяне, $\mathbf{x} = \mathbf{d}$, където \mathbf{d} е нулевият вектор или \mathbf{d} е посока в M (съгласно Теоремата за алгебрична характеристика на посоките в M , \mathbf{d} е посока в M тогава и само тогава когато $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{Ad} = \mathbf{0}$), но и в двата случая $\mathbf{Ad} = \mathbf{0}$. Тъй като \mathbf{x} е в M , то $\mathbf{b} = \mathbf{Ax} = \mathbf{Ad} = \mathbf{0}$, т.е. $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ и следователно нулевият вектор $\mathbf{0} \in M$. Но когато $\mathbf{0}$ е в множеството M , то $\mathbf{0}$ връх на M , откъдето получаваме противоречие с допускането, че множеството от върховете на M е празно. \square

Теорема 5.2. *Ако допустимото множество M на задачата (K) е непразно, то или целевата функция $z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ е неограничена отдолу върху M , или най-малката стойност на $z(\mathbf{x})$ за $\mathbf{x} \in M$ се достига в някой от върховете на M .*

Доказателство. Има два взаимно изключващи се случая:

Случай 1. В M има посока \mathbf{d} такава, че $\mathbf{c}^T \mathbf{d} < 0$.

В този случай M е неограничено множество и стойностите на z намаляват неограничено върху M . Наистина, ако вземем произволна точка \mathbf{x} от непразното множество M , то съгласно дефиницията за посока, всички точки от лъча $\{\mathbf{x} + \mu \mathbf{d} : \mu \geq 0\}$ са в M . Стойностите на z върху

точките от този допустим лъч са $z(\mathbf{x} + \mu \mathbf{d}) = \mathbf{c}^T(\mathbf{x} + \mu \mathbf{d}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mu \mathbf{c}^T \mathbf{d}$ и очевидно клонят към $-\infty$, когато $\mu \rightarrow +\infty$, поради това, че $\mathbf{c}^T \mathbf{d} < 0$.

Случай 2. Всички посоки \mathbf{d} в M са такива, че $\mathbf{c}^T \mathbf{d} \geq 0$.

Да вземем произволна точка $\mathbf{x} \in M$. Според Теоремата за представяне съществуват числа $\lambda_i \geq 0$ за $i \in I$, такива че $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ и вектор \mathbf{d} , който е посока в M или $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, такива че

$$\mathbf{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d}.$$

За стойността на z в \mathbf{x} имаме

$$\begin{aligned} z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d} \right) = \sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{c}^T \mathbf{d} \\ &\geq \sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}_i \geq \sum_{i \in I} \lambda_i \min_{i \in I} \{ \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}_i \} = \min_{i \in I} \{ \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}_i \} \sum_{i \in I} \lambda_i \\ &= \min_{i \in I} \{ \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}_i \} = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}_{i_0} = z(\bar{\mathbf{x}}_{i_0}), \end{aligned}$$

което означава, че най-малката стойност на z върху M е във върха $\bar{\mathbf{x}}_{i_0}$ на M . \square

Този резултат стои в основата на решаването на линейни задачи. Той показва, че ако в M има посока \mathbf{d} , която сключва тъп ъгъл с вектора на целевата функция \mathbf{c} , задачата (K) е неограничена, а в противен случай като кандидати за оптимално решение е достатъчно да бъдат разглеждани само върховете на M .

§6. Симплекс метод

От Теорема 5.2 е ясно, че като кандидати за оптимално решение на каноничната задача

$$(K) \quad \begin{aligned} \min \quad & z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

където \mathbf{A} е $m \times n$ матрица, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^m$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ е n -мерен вектор на променливите, е достатъчно да разглеждаме само върховете на допустимото ѝ множество $M = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

За големи стойности на m и n намирането на всички върхове на M е непрактично, тъй като M може да има $\binom{n}{m}$ на брой върхове, а $\binom{n}{m}$ расте много бързо при нарастването на n и m . Следователно за решаването на (K) е необходим по-систематичен подход. Такъв подход прилага симплекс методът, разработен от Джордж Данциг през 1947 г. На практика симплекс методът се оказва толкова успешен, че и до момента е един от най-известните и най-широко използваните методи за компютърно реализиране на числените пресмятания при решаване на линейни задачи.

За начало ще изложим идеята на симплекс метода, която има ясна геометрична мотивация.

§6.1. Описание на симплекс метода (СМ)

Симплекс методът има две фази.

ПЪРВАТА ФАЗА (ФАЗА I) или установява, че допустимото множество M е празно и следва КРАЙ на алгоритъма, или намира връх на M (Теорема 5.1 гарантира съществуването на поне един връх, ако M е непразно множество). Намереният връх служи за начало на втората фаза на метода и поради това се нарича още *начален връх*.

ВТОРАТА ФАЗА (ФАЗА II) е същинската част на метода. Намирайки се в текущия връх $\bar{\mathbf{x}}$, методът търси ръб на M , излизащ от $\bar{\mathbf{x}}$, по който целевата функция z намалява.

Ако СМ установи, че по всички ръбове на M , излизащи от върха $\bar{\mathbf{x}}$, целевата функция z нараства, то $\bar{\mathbf{x}}$ е оптимално решение и следва КРАЙ на алгоритъма.

Ако СМ намери неограничен ръб на M , излизащ от $\bar{\mathbf{x}}$, по който целевата функция z намалява, то задачата (K) е неограничена и следва КРАЙ на алгоритъма.

Ако СМ намери ограничен ръб на M , излизащ от $\bar{\mathbf{x}}$, по който целевата функция z намалява, то СМ отива в другия му край, който е връх $\bar{\mathbf{x}}'$ на M , в който обаче z приема по-малка стойност, т.е.

$$z(\bar{\mathbf{x}}') < z(\bar{\mathbf{x}}).$$

По този начин, започвайки от началния връх, методът се движи от връх на връх по ръбовете на M , като движението се извършва само по ръбове, по които целевата функция z намалява. Следователно ако методът напусне даден връх, той никога не се връща в него и след краен брой итерации (тъй като според Следствие 3.3 M има краен брой върхове) или се достига до връх на M , който е оптимално решение на задачата (K) , или се достига до неограничен ръб в допустимото множество M , по който целевата функция z намалява неограничено.

По-нататък целта ни е да намерим съответната алгебрична форма на горното просто геометрично описание на симплекс метода.

Най-напред ще разгледаме същинската фаза на СМ — фаза II, която намира оптимално решение, като предположим, че фаза I вече е намерила начален връх. Както ще се убедим в § 7.3, симплекс методът успешно може да бъде приложен и за решаването на задачата на фаза I — намирането на началния връх.

Предполагаме, че вектор-редовете на матрицата \mathbf{A} са линейно независими, т.е. че $r(\mathbf{A}) = m$ и че $m < n$.

За да опишем една итерация на симплекс метода, да предположим, че $\bar{\mathbf{x}}$ е текущият връх. Нека базисната му матрица \mathbf{B} се състои от първите m вектор-стълба на \mathbf{A} , т.е. базисът е $B = \{1, \dots, m\}$, а множеството от небазисни индекси е $N = \{m+1, \dots, n\}$. С направените означения, върхът $\bar{\mathbf{x}}$ на M е $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$.

§6.2. Базисно представяне на задачата (K) спрямо базиса B

Нека $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$ е връх на M с базис B . Задачата (K) се представя в *базисен вид спрямо базиса B* по следния начин:

1. Изразяваме базисните координати \mathbf{x}_B на решение \mathbf{x} на системата $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ чрез небазисните му координати \mathbf{x}_N (както в § 3.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} &\Leftrightarrow [\mathbf{B}|\mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathbf{B}^{-1}[\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N] = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \\ &\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{x}}_B - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N. \end{aligned}$$

Така за произволно решение \mathbf{x} на системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ получаваме представянето

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N \\ \bar{\mathbf{x}}_N + \mathbf{I}\mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_N = \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_N,$$

като с \mathbf{I} е означена единичната матрица от ред $n - m$.

Нека за всеки небазисен индекс $j \in N$ (т.е. за $j > m$) означим с \mathbf{d}_j съответния стълб на матрицата $\begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$, т.е.

$$(6.1) \quad \mathbf{d}_j := \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix},$$

където \mathbf{A}_j е j -ият стълб на матрицата \mathbf{A} , а \mathbf{e}_j е $(n - m)$ -мерен вектор, чиято $(j - m)$ -та координата е 1, а останалите му координати са нули. След въведеното означение $\begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_N = \sum_{j \in N} x_j \mathbf{d}_j$ и

$$(6.2) \quad \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{j \in N} x_j \mathbf{d}_j.$$

2. Като използваме представянето (6.2) на решение \mathbf{x} на системата, за стойността на целевата функция z в \mathbf{x} получаваме

$$z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \left(\bar{\mathbf{x}} + \sum_{j \in N} x_j \mathbf{d}_j \right) = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} + \sum_{j \in N} x_j \mathbf{c}^T \mathbf{d}_j.$$

Нека за всеки небазисен индекс $j \in N$ означим с \bar{c}_j скаларното произведение $\mathbf{c}^T \mathbf{d}_j$. Имаме

$$\bar{c}_j = \mathbf{c}^T \mathbf{d}_j = [\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_N^T] \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix} = c_j - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j.$$

Ако използваме същата формула, за да пресметнем \bar{c}_i за базисен индекс $i \in B$, получаваме

$$\bar{c}_i = c_i - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i = c_i - \mathbf{c}_B^T \mathbf{e}_i = c_i - c_i = 0.$$

За всеки индекс $j \in \{1, \dots, n\}$ така полученото число \bar{c}_j се нарича *относителна оценка* или още *редуцирана цена* на променливата x_j спрямо базиса B . Векторът $\bar{\mathbf{c}}^T = [\bar{\mathbf{c}}_B^T, \bar{\mathbf{c}}_N^T] = [\mathbf{0}^T, \bar{\mathbf{c}}_N^T]$, чиито координати са относителните оценки на променливите спрямо базиса B , се нарича *вектор на относителните оценки спрямо базиса B* .

Да забележим, че относителните оценки на базисните променливи са нули.

След направеното полагане имаме

$$z(\mathbf{x}) = z(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j.$$

3. Като отразим направените в 1 и 2 преобразувания и полагания в задачата (K) , получаваме еквивалентната на нея задача

$$\begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= z(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j \\ (K_B) \quad \mathbf{x} &= \bar{\mathbf{x}} + \sum_{j \in N} x_j \mathbf{d}_j \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

в която решенията на системата и стойностите на целевата функция в тях са изразени само посредством небазисните променливи $x_j, j \in N$.

Представянето на задачата (K) във вида (K_B) наричаме нейно *базисно представяне спрямо базиса B* .

§6.3. Какво представляват векторите \mathbf{d}_j и числата \bar{c}_j в задачата (K_B)

Казахме че, намирайки се в текущия връх $\bar{\mathbf{x}}$, симплекс методът решава по кой от ръбовете на допустимото множество M , излизаци от $\bar{\mathbf{x}}$, да тръгне. При направените предположения $M \neq \emptyset$, $\text{rank } \mathbf{A} = m$, от всеки връх на M излизат точно $n - m$ ръба (размерността на M е $n - m$).

Знаем, че координатите на върха $\bar{\mathbf{x}}$ на M удовлетворяват m -те уравнения

$$(6.3) \quad \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} = b_1, \dots, \mathbf{a}_m^T \mathbf{x} = b_m, \quad (\text{тъй като } \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b})$$

и $(n - m)$ -те уравнения

$$(6.4) \quad \mathbf{e}_{m+1}^T \mathbf{x} = 0, \dots, \mathbf{e}_n^T \mathbf{x} = 0, \quad (\text{тъй като } \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}).$$

Това означава, че $\bar{\mathbf{x}}$ е решение на линейна система от n уравнения с n неизвестни. Това може да се изкаже и така: $\bar{\mathbf{x}}$ е в сечението на n -те хиперравнини, зададени с уравненията (6.3) и (6.4). Да означим с \mathcal{M} матрицата на тази линейна система:

$$\mathcal{M} := \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Тъй като \mathbf{B} и \mathbf{I} са неособени матрици, вектор-редовете на матрицата \mathcal{M} са линейно независими и следователно \mathcal{M} също е неособена. Това означава, че $\bar{\mathbf{x}}$ е единственото решение на системата. С други думи казано, $\bar{\mathbf{x}}$ е единствената точка в сечението на n -те хиперравнини, тъй като те имат линейно независими нормални вектори (вектор-редовете на \mathcal{M}). Да напомним и че $\bar{\mathbf{x}} \in M$.

Ръб на M , излизащ от $\bar{\mathbf{x}}$ е сечението на M с m -те хиперравнини (6.3) и $n-m-1$ от хиперравнините (6.4) (или общо $n-1$ хиперравнини).

Сечението на $(n-1)$ -те хиперравнини (с линейно независими нормални вектори) е права през $\bar{\mathbf{x}}$, а сечението на тази права с изпъкналото множество M е изпъкнало множество върху правата и следователно може да бъде:

- една точка — точката $\bar{\mathbf{x}}$;
- отсечка, единият край на която е $\bar{\mathbf{x}}$, или
- лъч с начало $\bar{\mathbf{x}}$.

Да отбележим, че **не е възможно** сечението на правата с M да бъде цялата права, защото тогава $\bar{\mathbf{x}}$ не би бил връх на M .

Ако сечението е само точката $\bar{\mathbf{x}}$, говорим за *фиктивен ръб*, в противен случай ръбът е *действителен* като ако е отсечка е *ограничен ръб*, а ако е лъч е *неограничен ръб*, излизащ от $\bar{\mathbf{x}}$.

Следователно, за да получим ръб на M , излизащ от $\bar{\mathbf{x}}$ освен m -те хиперравнини (6.3) трябва да вземем и с една по-малко от $(n-m)$ -те хиперравнини (6.4). Това можем да направим по $(n-m)$ начина. Това означава, че от $\bar{\mathbf{x}}$ излизат $n-m$ ръба. Тези ръбове се представят във вида

$$\{\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_j, t \geq 0\} \subset M, \quad \mathbf{d}_j = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}, \quad j \in N,$$

т.е. векторите \mathbf{d}_j , $j \in N$ са **направляващи вектори по ръбовете, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}$** .

За да се убедим в това да пресметнем за $q \in N$

$$(6.5) \quad \mathbf{M}\mathbf{d}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q + \mathbf{A}_q \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix},$$

което означава, че векторът \mathbf{d}_q е ортогонален на нормалните вектори на хиперравнините (6.3) и (6.4) с изключение на хиперравнината $\mathbf{e}_q^T \mathbf{x} = 0$, т.е. векторът \mathbf{d}_q лежи на правата, която е сечение на тези $n-1$ линейно независими хиперравнини.

Остава да видим кои са допустимите точки от тази права, т.е. точките от нея, които са в M . Да разгледаме точките от вида

$$(6.6) \quad \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_q,$$

където t е реален параметър. Съгласно (6.5) $\mathbf{A}\mathbf{d}_q = \mathbf{0}$ и

$$(6.7) \quad \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_q) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{A}\mathbf{d}_q = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

т.е. за произволно реално число t векторът $\mathbf{x}(t)$ е решение на системата $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Следователно, допустимостта на $\mathbf{x}(t)$ е еквивалентна на неотрицателността на неговите координати. Да положим

$$(6.8) \quad \mathbf{w}_q := \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q$$

и да изразим координатите на

$$(6.9) \quad \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_q = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B - t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q \\ t\mathbf{e}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B - t\mathbf{w}_q \\ t\mathbf{e}_q \end{bmatrix}.$$

Векторът $\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0}$ ако $\bar{\mathbf{x}}_B - t\mathbf{w}_q \geq \mathbf{0}$ и ако $t\mathbf{e}_q \geq \mathbf{0}$. Второто векторно неравенство води до $t \geq 0$ поради $\mathbf{e}_q \geq \mathbf{0}$. Първото векторно неравенство е еквивалентно на системата от m числови неравенства $\bar{x}_i - tw_{iq} \geq 0$, $i \in B$, където с w_{iq} е означена i -та координата на вектора \mathbf{w}_q . Ако $w_{iq} \leq 0$, i -то неравенство очевидно е в сила, а ако $w_{iq} > 0$, трябва $t \leq \frac{\bar{x}_i}{w_{iq}}$.

Ако векторът \mathbf{w}_q има положителни координати от *теста за минимално отношение* определяме

$$\bar{t} := \min \left\{ \frac{\bar{x}_i}{w_{iq}} : w_{iq} > 0, i \in B \right\},$$

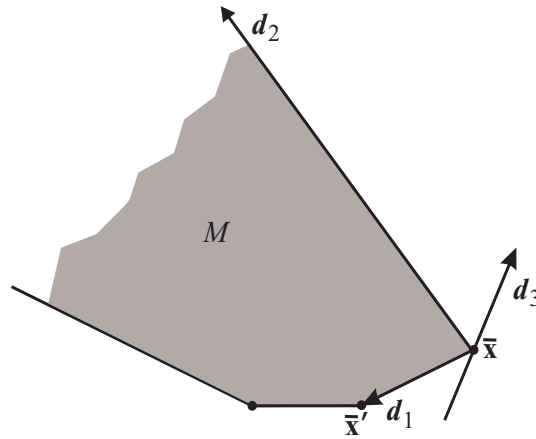
а ако векторът \mathbf{w}_q няма положителни координати, полагаме $\bar{t} = +\infty$. За всяко $t \in [0, \bar{t}]$ имаме, че $\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0}$ и следователно $\mathbf{x}(t) \in M$.

Ако $\mathbf{w}_q \leq \mathbf{0}$, то $\bar{t} = +\infty$ и ръбът с направление \mathbf{d}_q е неограничен. В този случай $\mathbf{d}_q = \begin{bmatrix} -\mathbf{w}_q \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{d}_q = \mathbf{0}$, $\mathbf{d}_q \neq \mathbf{0}$ и \mathbf{d}_q е посока в M .

Ако \mathbf{w}_q има положителна координата, има две възможности: или $\bar{t} > 0$ и ръбът с направление \mathbf{d}_q е ограничен, като другият му край е $\mathbf{x}(\bar{t})$, или $\bar{t} = 0$, което означава че $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(0)$ е единствената допустима точка, т.е. ръбът с направление \mathbf{d}_q е фиктивен.

Да отбележим, че ако $\bar{\mathbf{x}}$ е неизродено базисно допустимо решение (т.е. $\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} > \mathbf{0}$ и всичките му базисни координати са положителни), то всеки от ръбовете с направление \mathbf{d}_j , $j \in N$ е действителен. Наистина, в този случай по всяко направление или $\bar{t} = +\infty$ и имаме неограничен ръб, или $\bar{t} > 0$ като минимум на краен брой положителни числа и имаме ограничен ръб.

Ако $\bar{\mathbf{x}}$ е изроден връх обаче, възможно е някой от векторите \mathbf{d}_q да определя фиктивен ръб: \mathbf{d}_q определя фиктивен ръб, излизащ от $\bar{\mathbf{x}}$, ако за някой базисен индекс $i \in B$ базисната координата $\bar{x}_i = 0$ като същевременно $w_{iq} > 0$: в този случай $\bar{t} = 0$ и $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(0)$ е единствената допустима точка от вида $\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_q$. В случай на изроден връх за намиране на $(n - m)$ -те действителни ръба, излизащи от него трябва да се използват всичките му базиси.



Фигура 6.1.

На фигура 6.1 векторът \mathbf{d}_1 определя действителен ограничен ръб на M , излизащ от върха $\bar{\mathbf{x}}$, другият край на който е върхът $\bar{\mathbf{x}}'$, векторът \mathbf{d}_2 определя действителен неограничен ръб на M , излизащ от $\bar{\mathbf{x}}$, докато векторът \mathbf{d}_3 определя фиктивен ръб.

Както вече казахме, симплекс методът търси сред ръбовете, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}$ такъв, по който целевата функция z намалява. От вида (6.9) на $\mathbf{x}(t)$ е ясно, че движението по ръба с направление \mathbf{d}_q е еквивалентно на увеличаване на стойностите на небазисната променлива x_q , докато стойностите на всички останали небазисни променливи остават фиксирани на нула.

Как се изменя при това движение стойността на целевата функция z ? От базисния вид (K_B) на задачата спрямо базиса B на $\bar{\mathbf{x}}$ следва, че за векторите от ръба с направление \mathbf{d}_q ще имаме

$$z(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}^T (\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_q) = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{c}^T \mathbf{d}_q = z(\bar{\mathbf{x}}) + t\bar{c}_q,$$

откъдето е ясно как би се изменила целевата функция, ако симплекс методът тръгне по ръба \mathbf{d}_q (т.е. започне да увеличава небазисната променлива x_q):

- ако $\bar{c}_q < 0$, градиентът \mathbf{c} на целевата функция z сключва тъп ъгъл с направлението \mathbf{d}_q на ръба и z ще намалява при движение по този ръб;
- ако $\bar{c}_q > 0$, \mathbf{c} сключва остър ъгъл с \mathbf{d}_q и z ще нараства при движение по този ръб;
- ако $\bar{c}_q = 0$, \mathbf{c} е ортогонален на \mathbf{d}_q и стойностите на z не се изменят при движение по този ръб.

Това изяснява ролята на относителните оценки: **относителната оценка \bar{c}_q на небазисната променлива x_q показва дали при движение**

по ръба с направляващ вектор \mathbf{d}_q , излизащ от върха $\bar{\mathbf{x}}$ стойностите на целевата функция z ще нарастват (при $\bar{c}_q > 0$), ще намаляват (при $\bar{c}_q < 0$) или няма да се променят (при $\bar{c}_q = 0$) в сравнение със стойността на z в $\bar{\mathbf{x}}$.

§6.4. Критерий за оптималност на текущото базисно допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}$

От казаното дотук и от базисния вид на задачата (K_B) получаваме

Теорема 6.1. (Критерий за оптималност). *Ако за всички небазисни индекси $j \in N$ относителните оценки $\bar{c}_j \geq 0$, то базисното допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}$ е оптимално решение на каноничната задача (K) .*

Доказателство. За произволна допустима точка $\mathbf{x} \in M$ от базисния вид на задачата (K_B) имаме, че $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{j \in N} x_j \mathbf{d}_j$ и че $x_j \geq 0$ за $j \in N$.

Стойността на целевата функция z в \mathbf{x} е

$$(6.10) \quad z(\mathbf{x}) = z(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j.$$

Тъй като $x_j \geq 0$ за $j \in N$, ако всички относителни оценки $\bar{c}_j \geq 0$ за $j \in N$, то сумата в (6.10) ще има неотрицателна стойност и следователно $z(\mathbf{x}) \geq z(\bar{\mathbf{x}})$ за произволно $\mathbf{x} \in M$, което означава, че $\bar{\mathbf{x}}$ е оптимално решение на (K) . \square

Вярно ли е обратното твърдение? Не. Ако $\bar{\mathbf{x}}$ е неизродено оптимално базисно допустимо решение, то тогава $\bar{c}_j \geq 0$ за всеки индекс $j \in N$, но ако $\bar{\mathbf{x}}$ е изродено оптимално базисно допустимо решение е възможно $\bar{c}_q < 0$ за някое $q \in N$ — ако ръбът с направление \mathbf{d}_q е фиктивен ръб, излизащ от $\bar{\mathbf{x}}$.

Непосредствени следствия от (6.10) са

Следствие 6.1. *Ако за всички небазисни индекси $j \in N$ относителните оценки $\bar{c}_j > 0$, то базисното допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}$ с базис B е единствено оптимално решение на каноничната задача (K) .*

Следствие 6.2. *Ако $\bar{\mathbf{x}}$ е оптимално базисно допустимо решение на (K) с небазисни относителни оценки $\bar{c}_{j_1} = \bar{c}_{j_2} = \dots = \bar{c}_{j_k} = 0$, то всяка допустима точка $\mathbf{x} \in M$ от вида*

$$(6.11) \quad \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^k x_{j_i} \mathbf{d}_{j_i}$$

също е оптимално решение на (K) .

Да обърнем внимание на това че ако някои небазисни променливи имат нулеви относителни оценки в оптималното базисно допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}$, то това не означава, че $\bar{\mathbf{x}}$ не е единствено оптимално решение. Наистина, ако $\bar{\mathbf{x}}$ е изродено, то може да бъде единствената допустима точка от вида (6.11) поради фиктивност на ръбовете с направления \mathbf{d}_{j_i} , участващи в (6.11).

§6.5. Критерий за неограниченост на целевата функция

Нека сега за текущото $\bar{\mathbf{x}}$ с базис B не е в сила критерият за оптималност, т.е. нека съществува небазисен индекс $q \in N$, за който $\bar{c}_q < 0$. Това означава, че при движение по ръба с направление \mathbf{d}_q целевата функция намалява. Въпреки че симплекс методът може да тръгне по произволен такъв ръб на намаляване, обичайното правило² е да се избере ръбът, съответстващ на най-малката отрицателна относителна оценка \bar{c}_q .

След като симплекс методът е избрал ръб на намаляване с направление \mathbf{d}_q (с относителна оценка $\bar{c}_q < 0$), той се придвижва от $\bar{\mathbf{x}}$ по този ръб, т.е. започва да увеличава t в (6.6).

Има две възможности:

- $\mathbf{w}_q \leq 0$. Тогава $\bar{t} = \infty$ и ръбът с направление \mathbf{d}_q е неограничен ръб на намаляване на z ;

Получаваме

Теорема 6.2. (критерий за неограниченост на целевата функция). *Ако за някой небазисен индекс $q \in N$, $\bar{c}_q < 0$ и $\mathbf{w}_q \leq 0$, то задачата (K) е неограничена.*

Доказателство. От $\mathbf{w}_q \leq 0$ следва $\mathbf{d}_q \geq 0$, а от (6.5) имаме, че $\mathbf{A}\mathbf{d}_q = \mathbf{0}$. От Теорема 4.1, която характеризира посоките на M , следва че ненулевият (тъй като $\mathbf{e}_q \neq \mathbf{0}$) вектор \mathbf{d}_q е посока в M . Тъй като $\mathbf{c}^T \mathbf{d}_q = \bar{c}_q < 0$, векторът \mathbf{c} на целевата функция z съдържа тъп ъгъл с тази посока. От Теорема 5.2 следва, че z намалява неограничено по ръба $\{\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_q, t \geq 0\}$. \square

- $\mathbf{w}_q \not\leq 0$. Тогава \bar{t} е крайно като при $\bar{t} > 0$ ръбът с направление \mathbf{d}_q е ограничен ръб на M , а при $\bar{t} = 0$ е фиктивен ръб. И в двата случая обаче се прави

§6.6. Преход към съседно базисно допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}'$

Тъй като $\mathbf{w}_q \not\leq 0$, най-голямата стъпка, която можем да направим по ръба \mathbf{d}_q без да нарушим допустимостта, намираме от *теста за минимално отношение*

$$(6.12) \quad \bar{t} := \min \left\{ \frac{\bar{x}_i}{w_{iq}} : w_{iq} > 0, i \in B \right\},$$

²Нарича се правило на Бил.

т.е. $\mathbf{x}(t) \in M$ за стойности на $t \in [0, \bar{t}]$ и $\mathbf{x}(t) \notin M$ за стойности на $t > \bar{t}$. Както ще докажем в Лема 6.1, точката $\bar{\mathbf{x}}' := \bar{\mathbf{x}} + \bar{t}\mathbf{d}_q$, до която достигаме като направим тази стъпка, е базисно допустимо решение, чийто базис се различава от базиса на $\bar{\mathbf{x}}$ само по един индекс. Две базисни допустими решения, чиито базиси се различават само по един индекс се наричат *съседни*. Да отбележим, че ако $\bar{t} > 0$, то $\bar{\mathbf{x}}'$ ще бъде връх на M , свързан с върха $\bar{\mathbf{x}}$ с ограничения ръб \mathbf{d}_q , а ако $\bar{t} = 0$, то $\bar{\mathbf{x}}'$ ще съвпадне с $\bar{\mathbf{x}}$, но ще има базис, който се различава от базиса на $\bar{\mathbf{x}}$. Върхове на M , които са краища на ограничен ръб на M се наричат *съседни* върхове.

Нека в теста за минимално отношение (6.12) имаме, че минимумът се достига за базисен индекс p , т.е.

$$\bar{t} := \min \left\{ \frac{\bar{x}_i}{w_{iq}}, \quad w_{iq} > 0, i \in B \right\} = \frac{\bar{x}_p}{w_{pq}}.$$

Координатата w_{pq} на вектора \mathbf{w}_q , която е в знаменател на минималното отношение, винаги е положително число. Числото w_{pq} се нарича още *ключово число*.

Координатите на точката $\bar{\mathbf{x}}'$, която се получава в края на стъпката с дължина \bar{t} по ръба \mathbf{d}_q , съгласно (6.9) и дефиницията на \bar{t} , са

$$\begin{aligned} \bar{x}'_j &= 0, \quad j \in N, j \neq q, \\ \bar{x}'_q &= \bar{t} = \bar{x}_p / w_{pq}, \\ \bar{x}'_i &= \bar{x}_i - \bar{t}w_{iq} = \bar{x}_i - \bar{x}_p w_{iq} / w_{pq}, \quad i \in B. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ако допуснем, че $\bar{\mathbf{x}}$ е неизродено (т.е. $\bar{x}_i > 0, i \in B$) ще забележим, че в $\bar{\mathbf{x}}$ имаме че $\bar{x}_q = 0$ (небазисна координата) и че $\bar{x}_p > 0$ (базисна координата), докато в $\bar{\mathbf{x}}'$ имаме, че $\bar{x}'_q = \bar{t} > 0$ и че $\bar{x}'_p = \bar{x}_p - \bar{x}_p w_{pq} / w_{pq} = 0$.

Това идва да подсказва, че така полученото $\bar{\mathbf{x}}'$ е базисно допустимо решение, което е съседно на $\bar{\mathbf{x}}$ — неговият базис B' се отличава от базиса B на $\bar{\mathbf{x}}$ по това, че в него не участва променливата x_p , но участва променливата x_q . Това ще докажем в следващата

Лема 6.1. *Точката $\bar{\mathbf{x}}'$ с координати (6.13) е друго базисно допустимо решение с базис B' , който се различава от базиса B на $\bar{\mathbf{x}}$ по това че съдържа индекса q , а не съдържа индекса p , т.е. $B' = B \setminus \{p\} \cup \{q\}$, а базисната му матрица \mathbf{B}' се различава от базисната матрица \mathbf{B} на $\bar{\mathbf{x}}$, по това, че един от нейните стълбове \mathbf{A}_p е заменен със стълба \mathbf{A}_q , т.е.*

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + (\mathbf{A}_q - \mathbf{A}_p)\mathbf{e}_p^T.$$

Доказателство. Точката $\bar{\mathbf{x}}'$ принадлежи на M поради дефиницията на \bar{t} . Да забележим, че стълбовете на матрицата \mathbf{A} , съответстващи на положителните координати на $\bar{\mathbf{x}}'$, са стълбове на матрицата \mathbf{B}' . Като вземем предвид Теорема 3.1 и Теорема 3.2, достатъчно е да покажем, че стълбовете на матрицата \mathbf{B}' са линейно независими.

Да допуснем противното, т.е. че стълбовете \mathbf{A}_i , $i \in B'$ са линейно зависими. Това означава, че съществуват числа β_i , $i \in B'$ не всичките равни на нула и такива, че $\sum_{i \in B'} \beta_i \mathbf{A}_i = \mathbf{0}$ или като вземем предвид, че

$$B' = B \setminus \{p\} \cup \{q\},$$

$$(6.14) \quad \sum_{i \in B, i \neq p} \beta_i \mathbf{A}_i + \beta_q \mathbf{A}_q = \mathbf{0}.$$

От $\mathbf{A}_q = \mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q = \mathbf{B}\mathbf{w}_q$ имаме, че \mathbf{A}_q се представя като линейна комбинация на стълбовете на \mathbf{B} като коефициентите на линейната комбинация са координатите на вектора \mathbf{w}_q или $\mathbf{A}_q = \sum_{i \in B} w_{iq} \mathbf{A}_i$. Като използваме това представяне на вектора \mathbf{A}_q в (6.14), получаваме

$$\sum_{i \in B, i \neq p} \beta_i \mathbf{A}_i + \beta_q \sum_{i \in B} w_{iq} \mathbf{A}_i = \mathbf{0} \iff \sum_{i \in B, i \neq p} (\beta_i + \beta_q w_{iq}) \mathbf{A}_i + \beta_q w_{pq} \mathbf{A}_p = \mathbf{0}.$$

Последното е линейна комбинация на векторите \mathbf{A}_i , $i \in B$, но те са линейно независими. Следователно всички коефициенти на тази линейна комбинация са равни на нула. От $\beta_q w_{pq} = 0$ и $w_{pq} > 0$ (понеже w_{pq} е ключово число!) следва, че $\beta_q = 0$, което, заместено в останалите коефициенти води до $\beta_i = 0$ за всяко $i \in B, i \neq p$. Получаваме, че всички коефициенти β_i , $i \in B'$, са нули, а с това и търсеното противоречие. \square

При така настъпилата смяна на базиса B с базиса B' , казваме, че променливата x_q *влиза* в базиса на мястото на променливата x_p , която *излиза* от базиса.

Като обобщим горните разсъждения, получаваме

Теорема 6.3. *Ако $\bar{c}_q < 0$ и \mathbf{w}_q има положителна координата, то $\bar{\mathbf{x}}'$ с координати (6.13) е различно от $\bar{\mathbf{x}}$ базисно допустимо решение, в което стойността на целевата функция $z(\bar{\mathbf{x}}') = z(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{t}\bar{c}_q$ е по-малка от стойността $z(\bar{\mathbf{x}})$, когато \bar{t} , определено с (6.12), е положително число (в частност, когато $\bar{\mathbf{x}}$ е неизродено).*

За да завършим итерацията на симплекс метода, остава само да заменим базисното допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}$ с базисното допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}'$, да заменим базиса B с B' и да заменим базисната матрица \mathbf{B} с базисната матрица \mathbf{B}' .

§7. Симплекс алгоритъм.
Изроденост и зацикляне. Правило на Бленд.
Методи за намиране на начално базисно
допустимо решение.
Приложни реализации на симплекс метода

В § 6 подробно описахме какво се случва на всяка итерация на симплекс метода за решаване на канонична задача

$$(K) \quad \begin{aligned} \min \quad & z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

където \mathbf{A} е $m \times n$ матрица, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^m$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Сега ще дадем

§7.1. Алгоритъм на симплекс метода

ФАЗА I:

- (0) Или се установява, че допустимото множество е празното и тогава КРАЙ – задачата (K) е несъвместима; или се намира начално базисно допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}$ с базисна матрица $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{j_1}, \dots, \mathbf{A}_{j_m}]$. Множеството от индексите на базисните променливи се означава с $B = \{j_1, \dots, j_m\}$ (т.е. x_{j_i} е i -та базисна променлива, $i = 1, \dots, m$), а множеството от индексите на небазисните променливи се означава с N .

ФАЗА II:

- (1) Пресмятат се относителните оценки на небазисните променливи

$$\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j \quad \text{за всяко } j \in N.$$

- (2) Проверка на критерия за оптималност. Ако $\bar{c}_j \geq 0$, за всяко $j \in N$, то КРАЙ — текущото решение $\bar{\mathbf{x}}$ е оптимално; оптималната стойност на целевата функция е $z(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$. В противен случай се преминава към стъпка (3).
- (3) Избор на небазисна променлива за влизане в базиса. Избира се ръб на намаляване на z , като се избере небазисен индекс

$$q \in \{j \in N : \bar{c}_j < 0\},$$

което означава, че променливата x_q е избрана за влизане в базиса. Ако има повече от една отрицателна относителна оценка, изборът е нееднозначен.

- (4) Проверка на критерия за неограниченост на целевата функция. Намират се координатите на вектора

$$\mathbf{w}_q = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_q.$$

Ако $\mathbf{w}_q \leq \mathbf{0}$, то КРАЙ — в допустимото множество M има неограничен ръб с направление $\mathbf{d}_q = \begin{bmatrix} -\mathbf{w}_q \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix}$, по който $z \rightarrow -\infty$. В противен случай се преминава към стъпка (5).

- (5) Избор на базисна променлива за излизане от базиса. Пресмята се

$$\bar{t} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{x}_{ji}}{w_{iq}} : w_{iq} > 0 \right\}.$$

За излизане от базиса се избира базисна променлива x_{jp} , за която

$$\bar{t} = \frac{\bar{x}_{jp}}{w_{pq}}.$$

Ако минимумът при определяне на \bar{t} се достига за повече от един базисен индекс, изборът на излизаща от базиса променлива е нееднозначен.

- (6) Обновява се текущото базисно допустимо решение, базиса B и базисната матрица \mathbf{B} :

$$\bar{x}_q \Leftarrow \bar{t} = \bar{x}_{jp}/w_{pq},$$

$$\bar{x}_{ji} \Leftarrow \bar{x}_{ji} - \bar{t}w_{iq}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$B \Leftarrow B \setminus \{j_p\} \cup \{q\},$$

$$\mathbf{B} \Leftarrow \mathbf{B} + (\mathbf{A}_q - \mathbf{A}_{j_p})\mathbf{e}_p^T,$$

$$j_p \Leftarrow q$$

и се преминава към стъпка (1).

§7.2. Крайност на симплекс метода. Изроденост и зацикляне. Правило на Бленд за избягване на зациклянето

От Теорема 6.3 следва, че ако всички върхове на допустимото множество M са неизродени, то стойността на целевата функция ще намалява на всяка итерация и че напусайки даден връх, симплекс методът няма да се върне пак в него. Тъй като M има краен брой върхове, това означава, че симплекс алгоритъмът е краен. Зацикляне на алгоритъма може да се получи само в изроден връх.

Нека текущият връх \bar{x} с базис B е изроден и за влизане в базиса е определена небазисна променлива x_q с относителна оценка $\bar{c}_q < 0$. Ако \bar{x} има базисна нула $\bar{x}_p = 0$ и същевременно $w_{pq} > 0$, то тогава $\bar{t} = 0$ и избраният ръб на намаляване с направление d_q е фиктивен. Като резултат предприетата стъпка ще бъде с нулева дължина и в края на итерацията върхът \bar{x}' ще съвпадне с върха \bar{x} , но ще има **различен базис** $B' = B \setminus \{p\} \cup \{q\}$.

Тъй като текущият връх \bar{x} и стойността на целевата функция в него $z(\bar{x})$ не се променят, теоретично е възможно симплекс методът да зацikli — да преминава безкрайно през редица от базиси на един и същи изроден връх, и да не го напуска. На практика това не представлява проблем, тъй като съществуват правила за избор на влизащата в базиса променлива и на излизащата от базиса променлива, които предотвратяват зациклянето.

Пример за такова правило е **правилото на Бленд**, което гласи: **на всяка итерация** от променливите, които са кандидати за влизане в базиса **и** от променливите, които са кандидати за излизане от базиса, **винаги** се избират тези с **най-малък индекс**.

Кандидати за влизане в базиса са всички небазисни променливи x_q , такива че $\bar{c}_q < 0$ (вж. стъпка (3) на симплекс алгоритъма), а кандидати за излизане от базиса са всички базисни променливи x_{j_p} , за чийто индекс j_p се достига минимумът \bar{t} в теста за минимално отношение (вж. стъпка (5) на симплекс алгоритъма).

Ще докажем, че при спазване на правилото на Бленд симплекс алгоритъмът е краен.

Теорема 7.1. *Симплекс алгоритъмът приключва след краен брой итерации, ако на всяка итерация от кандидатите за влизане и от кандидатите за излизане от базиса се избират променливите с най-малкия индекс.*

Доказателство. Достатъчно е да покажем, че при спазване на горното правило алгоритъмът не зацикля, което ще направим като допуснем, че се образува цикъл и ще докажем, че това води до противоречие.

И така, да допуснем, че въпреки спазването на правилото на Бленд се получава цикъл и че зациклянето е в изродения връх \bar{x} .

Нека $\{B_1, \dots, B_k\}$ е редицата от базиси на \bar{x} , през които зацикля методът, т.е. симплекс методът генерира следната безкрайна редица от базиси на \bar{x}

$$(7.1) \quad B_1, \dots, B_k, B_1, \dots$$

Както обикновено с B означаваме множеството от базисни индекси, а с N — множеството от съответните небазисни индекси, т.е. $N := \{1, 2, \dots, n\} \setminus B$.

Ще казваме, че дадена променлива е *непостоянна*, ако тя участва в един и не участва в друг от тези базиси.

Нека x_p е непостоянната променлива с най-голям индекс, нека B е базиса, от който тя излиза и нека x_q е променливата, влизаща в базиса B на мястото на x_p . Тъй като променливата x_q влиза в базиса B , а от него излиза променливата x_p , то $q \in N$, а $p \in B$ и следователно променливата x_q е непостоянна променлива (не участва в базиса B , но участва в следващия го базис). Оттук $q < p$.

От базисния вид (K_B) на задачата спрямо базиса B за решение \mathbf{x} на системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ имаме

$$(7.2) \quad \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{j \in N} x_j \mathbf{d}_j \quad \text{и} \quad z(\mathbf{x}) = z(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j.$$

Нека сега означим с B^* този базис сред базисите в (7.1), в който променливата x_p влиза. Очевидно B^* е различен от B . Да означим с N^* множеството от небазисните спрямо базиса B^* индекси, т.е. $N^* := \{1, \dots, n\} \setminus B^*$.

От базисния вид (K_{B^*}) на задачата спрямо базиса B^* за решение \mathbf{x} на системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ имаме

$$(7.3) \quad \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{j \in N^*} x_j \mathbf{d}_j^* \quad \text{и} \quad z(\mathbf{x}) = z(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j \in N^*} \bar{c}_j^* x_j = z(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^n \bar{c}_j^* x_j,$$

като последното равенство в представянето на $z(\mathbf{x})$ следва от това, че относителните оценки на базисните спрямо базиса B^* променливи са нули, т.е. $\bar{c}_j^* = 0$ за $j \in B^*$ и включването им в сумата не я променя.

От (7.2) е ясно, че за произволно зададен набор от стойности на променливите x_j , $j \in N$ могат да се пресметнат стойностите на променливите x_i , $i \in B$ и да така да се получи частно решение $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$ на системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Нека \mathbf{x} е частното решение на системата, което се получава като зададем $x_q := \alpha$ за произволно число $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x_j := 0$ за $j \in N$, $j \neq q$. От (7.2), като вземем предвид, че $\mathbf{d}_q = \begin{bmatrix} -\mathbf{w}_q \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix}$, получаваме $x_i = \bar{x}_i - \alpha w_{iq}$ за $i \in B$.

Стойността на целевата функция z в така полученото частно решение \mathbf{x} според (7.2) е $z(\mathbf{x}) = z(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{c}_q \alpha$, а според (7.3) е $z(\mathbf{x}) = z(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{c}_q^* \alpha + \sum_{i \in B} \bar{c}_i^* (\bar{x}_i - \alpha w_{iq})$. Като приравним тези два изрази получаваме

$$\left(\bar{c}_q - \bar{c}_q^* + \sum_{i \in B} \bar{c}_i^* w_{iq} \right) \alpha = \sum_{i \in B} \bar{c}_i^* \bar{x}_i.$$

Тъй като това равенство е в сила за всяко $\alpha \in \mathbb{R}$, то коефициентът пред α (а също така и стойността на дясната страна на равенството) е нула:

$$\bar{c}_q - \bar{c}_q^* + \sum_{i \in B} \bar{c}_i^* w_{iq} = 0.$$

Тъй като променливата x_q влиза в базиса B , това означава, че относителната ѝ оценка спрямо този базис е $\bar{c}_q < 0$. Тъй като променливата x_q **не** влиза в базиса B^* (в този базис влиза променливата x_p) и тъй като $q < p$, то по правилото на Бленд за избор на променлива за влизане в базиса B^* имаме, че $\bar{c}_q^* \geq 0$. Следователно

$$\sum_{i \in B} \bar{c}_i^* w_{iq} > 0,$$

което означава, че съществува индекс $r \in B$, такъв че

$$(7.4) \quad \bar{c}_r^* w_{rq} > 0.$$

В частност $\bar{c}_r^* \neq 0$. Тъй като относителните оценки на базисните променливи са нули, то r е небазисен индекс, т.е. $r \in N^*$. Получаваме, че променливата x_r е непостоянна, понеже участва в базиса B и не участва в базиса B^* . Следователно $r \leq p$. В действителност $r < p$, тъй като $\bar{c}_p^* w_{pq} < 0$ (относителната оценка $\bar{c}_p^* < 0$, понеже x_p влиза в базиса B^* , а $w_{pq} > 0$, понеже x_p излиза от базиса B , за да влезе на нейно място x_q , откъдето w_{pq} е ключовото число, а то винаги е положително).

Това, че $r < p$ води до $\bar{c}_r^* \geq 0$, защото в противен случай съгласно критерия за избор на променлива с най-малък индекс за влизане в базиса B^* влизаща в базиса B^* щеше да бъде променливата x_r , а не x_p и от (7.4) следва

$$(7.5) \quad w_{rq} > 0.$$

Тъй като всеки от базисите в редицата (7.1) е базис на един и същи връх \bar{X} , то всяка непостоянна променлива е с нулева стойност в \bar{X} , т.е. имаме базисна нула $\bar{x}_i = 0$, ако i е непостоянна променлива. В частност

$$(7.6) \quad \bar{x}_r = 0.$$

От (7.5) и (7.6) следва, че променливата x_r е била кандидат за излизане от базиса B и понеже $r < p$, то по правилото на Бленд тя е трябвало да бъде избрана за излизане от базиса B , а не променливата x_p . Получихме търсеното противоречие и с това доказахме теоремата. \square

Задачи, допустимото множество на което има изродени върхове, са често срещани. За това, че симплекс методът няколко итерации е бил в изроден връх може да се съди по това, че целевата функция приема една и съща стойност неколккратно (преди да бъде намерен действителен ръб на намаляване), а след това стойностите ѝ отново започват да намаляват.

При изложението на стъпките на симплексната итерация на фаза II на симплекс метода в § 6 предположихме, че във фаза I вече е намерено начално базисно допустимо решение (това е стъпка (0) на алгоритъма).

Да видим сега как симплекс методът, който намира оптимално решение във фаза II, може успешно да се приложи и за решаването на задачата на фаза I — намирането на началния връх.

§7.3. Методи за намиране на начало базисно допустимо решение

За реализиране на фаза I на симплекс метода ще разгледаме два метода.

При *двуетапния метод* на първия етап се решава спомагателна канонична задача, от чието оптимално решение се получава базисно допустимо решение на (K) , което на втория етап симплекс методът използва като начален връх за решаване на (K) .

Спомагателната канонична задача (I) се формулира по следния начин:

- всяко от ограниченията на задачата (K) се преобразува като към лявата му страна се добавя *изкуствена неотрицателна променлива* $y_i \geq 0$, при което то добива вида $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + y_i = b_i$;
- върху новото множество от ограничения се минимизира сумата на изкуствените променливи.

Така се получава следната канонична задача

$$(I) \quad \begin{aligned} \min \quad & \xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m y_i \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b} \geq \mathbf{0}), \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

където $\mathbf{y}(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ е векторът на изкуствените променливи, а с \mathbf{I} е означена единичната матрица от ред m .

Задачата (I) има очевидно базисно допустимо решение $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{b})$. Неговият базис се състои само от изкуствените променливи \mathbf{y} , а базисната му матрица е \mathbf{I} . В частност допустимото множество на (I) не е празно. Целевата функция ξ приема неотрицателни стойности върху него. Следователно, задачата (I) е разрешима.

И така, за каноничната задача (I) прилагаме симплекс метода като използваме $(\mathbf{0}, \mathbf{b})$ за начален връх, за да намерим нейно оптимално базисно допустимо решение $(\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*)$. Да означим с ξ^* оптималната стойност на ξ , т.е. $\xi^* := \xi(\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*)$.

Възможни са три случая:

1. $\xi^* > 0$, което означава, че в оптималния базис има изкуствена променлива y_i с положителна стойност $\bar{y}_i^* > 0$. В този случай допустимото множество на задачата (K) е празно. Наистина, ако допустимото множество M на задачата (K) не е празно, то $\xi^* = 0$: като вземем $\mathbf{x} \in M$ и положим $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, съответният вектор $(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ е допустим за задачата (I) и за него $\xi(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0$.
2. $\xi^* = 0$ и всички изкуствени променливи y_i са небазисни за $(\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*)$. В този случай $\bar{\mathbf{x}}^*$ е базисно допустимо решение на задачата (K) ,

което фаза II на СМ ще използва за начално базисно допустимо решение при нейното решаване.

3. $\xi^* = 0$, но някои от изкуствените променливи y_i са останали в базиса с нулева стойност (базисни нули) и оптималното решение $(\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*)$ е изродено. В този случай всяка изкуствена променлива, която е останала в базиса, може или да се елиминира заедно с излишното уравнение, с което е асоциирана, или да се замени в базиса с някоя небазисна \mathbf{x} -променлива.

По точно казано, нека $\bar{y}_i^* = 0$ и y_i е k -та базисна променлива. Ако

- $\mathbf{e}_k^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j = 0$ за всички небазисни стълбове \mathbf{A}_j , то това означава, че след елементарни преобразувания k -ият ред на матрицата \mathbf{A} се е трансформирал в нулевия вектор, а k -то уравнение на системата се е трансформирало в твърждеството $\mathbf{0}^T \mathbf{x} = 0$. Следователно в системата линейни уравнения $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ k -то е излишно и k -ият ред може да се отстрани от матрицата \mathbf{A} , а k -ият ред и k -ият стълб да се отстранят от базисната матрица на $(\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*)$ заедно с k -та базисна променлива y_i .
- $\mathbf{e}_k^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j \neq 0$ за някой небазисен стълб \mathbf{A}_j , то y_i може да се замени в базиса от небазисната променлива x_j . Тъй като при тази замяна $\bar{t}=0$ (поради $\bar{y}_i^* = 0$), променя се само базисът на решението.

След като изкуствените променливи се заменят последователно в базиса с \mathbf{x} -променливи, се получава базисно допустимо решение на задачата (I) с базис, състоящ се само от \mathbf{x} -променливи, от което се получава базисно допустимо решение за задачата (K), както в случай 2.

По-често за намиране на начално базисно допустимо решение се използва т.нар. *M-метод*. Той използва същите идеи, както двуетапния метод, но обединява в едно намирането на начално базисно допустимо решение и решаването на каноничната задача. Разглежда се т.нар. *M-задача*

$$(M) \quad \min \quad z_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + M \sum_{i=1}^m y_i$$

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b} \geq \mathbf{0}),$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0},$$

където $M > 0$ е достатъчно голямо число.

Следващите две теореми показват как каноничната задача (K) се решава посредством решаване на съответната ѝ (M)-задача.

Теорема 7.2. Ако задачата (K) е разрешима, то съществува число $M_0 > 0$, такова че за всяко $M \geq M_0$ съответната (M) -задача е разрешима и ако $(\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*)$ е нейно оптимално базисно допустимо решение, то $\bar{\mathbf{y}}^* = \mathbf{0}$.

Доказателство. Тъй като в доказателството на този резултат се използва двойственост в линейното оптимиране, на която е посветен § 8, то ще бъде направено в § 8. \square

Теорема 7.3. Ако $(\mathbf{x}^*, \mathbf{0})$ е оптимално решение на задачата (M) , то \mathbf{x}^* е оптимално решение на задачата (K) .

Доказателство. Тъй като $(\mathbf{x}^*, \mathbf{0})$ е допустима точка за задачата (M) , то \mathbf{x}^* е допустима точка за задачата (K) . Нека \mathbf{x} е произволна допустима точка за задачата (K) . Тогава $(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ е допустима точка за (M) и $z_M(\mathbf{x}^*, \mathbf{0}) \leq z_M(\mathbf{x}, \mathbf{0})$. Но $z_M(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = z(\mathbf{x})$ за всяко \mathbf{x} , откъдето $z(\mathbf{x}^*) \leq z(\mathbf{x})$ и \mathbf{x}^* е оптимално решение на (K) . \square

И така, (M) -задачата има очевидно начално базисно допустимо решение $(\mathbf{0}, \mathbf{b})$. Симплекс методът, приложен за решаване на (M) -задачата приключва по един от следните два начина:

1. Установява, че (M) -задачата е неограничена. Тогава от Теорема 7.2 следва, че каноничната задача (K) няма решение. Ако е нужно да се изясни дали неразрешимостта на (K) се дължи на празно допустимо множество или на неограниченост на целевата функция се правят допълнителни изследвания;
2. Намира оптимално базисно допустимо решение $(\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*)$ на (M) -задачата. Ако $\bar{\mathbf{y}}^* \neq \mathbf{0}$, то от доказателството на Теорема 7.2 (вж. § 8) става ясно, че в този случай задачата (K) е с празно допустимо множество. Ако $\bar{\mathbf{y}}^* = \mathbf{0}$, то съгласно Теорема 7.3, $\bar{\mathbf{x}}^*$ е оптимално решение на задачата (K) .

§7.4. Приложни реализации на симплекс метода

Тук ще се спрем на това как на практика се извършват пресмятанията, необходими в хода на симплексната итерация.

§7.4.1. Таблична форма на симплекс метода

Един от начините да се извършат пресмятанията, необходими на итерацията на симплекс метода е да се вложат данните за текущото базисно решение в една голяма матрица, наречена *симплексна таблица*, която може да бъде генерирана директно от данните на задачата.

При зададени матрица на ограниченията \mathbf{A} , дясна страна \mathbf{b} и вектор на целевата функция \mathbf{c} , изходната таблица е просто следната по-голяма матрица:

$$T'' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}^T & 0 \end{array} \right].$$

Таблицата T'' е с $m + 1$ реда и $n + 1$ стълба.

Нека $\bar{\mathbf{x}}$ е базисно решение с базисна матрица \mathbf{B} . Ако е необходимо, преномериране променливите така, че x_1, \dots, x_m да бъдат базисните променливи. Тогава базисната матрица \mathbf{B} на $\bar{\mathbf{x}}$ се състои от първите m стълба на \mathbf{A} , а последните $n - m$ стълба образуват подматрицата \mathbf{N} с размерност $m \times (n - m)$.

След евентуалното преномериране на променливите в таблицата имаме, че първите стълбове са базисните, т.е.

$$T''(\bar{\mathbf{x}}) = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right].$$

Изразяването на базисните координати \mathbf{x}_B на решение \mathbf{x} на системата $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ чрез небазисните му координати \mathbf{x}_N се постига чрез елементарни Гаусови преобразувания на горната част на таблицата до

$$T'(\bar{\mathbf{x}}) = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right].$$

Матрицата, която преобразува \mathbf{B} в \mathbf{I} , е матрицата \mathbf{B}^{-1} и направените елементарни преобразувания са еквивалентни на умножение отляво с матрицата \mathbf{B}^{-1} на горната част на таблицата $T''(\bar{\mathbf{x}})$.

За да завършим, остава да заместим така изразените базисни променливи в целевата функция z , при което тя става функция само на небазисните променливи. За целта умножаваме с \mathbf{c}_B^T горната част на таблицата $T'(\bar{\mathbf{x}})$ и я вадим от долната, при което получаваме

$$T(\bar{\mathbf{x}}) = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & -\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & \bar{\mathbf{c}}_N^T & -z(\bar{\mathbf{x}}) \end{array} \right].$$

Това е окончателният вид на симплексната таблица за базисното решение $\bar{\mathbf{x}}$.

Направените преобразувания са еквивалентни на привеждането на задачата (K) в базисен вид спрямо базиса B на $\bar{\mathbf{x}}$.

Векторът от базисните координати на $\bar{\mathbf{x}}$, който е $\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ се намира горе вдясно на $T(\bar{\mathbf{x}})$, а небазисните му координати, разбира се, са $\bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$. Стойността на целевата функция z в $\bar{\mathbf{x}}$ е $z(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ и се намира долу вдясно на таблицата с обратен знак.

Симплексната таблица $T(\bar{\mathbf{x}})$ съдържа цялата информация, необходима на симплексната итерация.

От нея може да се прецени дали базисното допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}$ е оптимално или не — координатите на вектора на относителните оценки на небазисните променливи $\bar{\mathbf{c}}_N^T = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$, се намират долу в средата на таблицата.

Ако $\bar{\mathbf{c}}_N \geq \mathbf{0}$, то $\bar{\mathbf{x}}$ удовлетворява критерия за оптималност и следователно е оптимално решение на задачата (K) , а оптималната стойност на целевата функция е $z(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$.

Ако сред координатите на вектора $\bar{\mathbf{c}}_N$ има отрицателни, то $\bar{\mathbf{x}}$ не удовлетворява критерия за оптималност и стойността на целевата функция още може да се намали. Всяка отрицателна координата $\bar{c}_j < 0$ на вектора $\bar{\mathbf{c}}_N$ съответства на ръб \mathbf{d}_j , по който целевата функция намалява.

Избира се отрицателна координата \bar{c}_q на $\bar{\mathbf{c}}_N$ (като се спазва правилото на Бил или правилото на Бленд). Това означава, че в базиса ще влезе небазисната променлива x_q .

За да се определи коя от базисните променливи ще излезе от базиса, е необходимо да се намери \bar{t} от теста за минимално отношение:

$$(7.7) \quad \bar{t} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{x}_i}{w_{iq}} = \frac{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_q)_i} : w_{iq} > 0 \right\} = \frac{\bar{x}_p}{w_{pq}} = \frac{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_p}{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_q)_p}.$$

В него участват координатите на вектора $\mathbf{w}_q := \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_q$ (той се намира в q -ия стълб на таблицата $T(\bar{\mathbf{x}})$ — стълбът в горната част на таблицата, който стои над координатата \bar{c}_q на вектора $\bar{\mathbf{c}}_N$) и на вектора $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ (той, както вече отбелязахме, се намира горе вдясно на таблицата).

Минимумът в (7.7) се взема само по положителните координати на вектора \mathbf{w}_q . Ако в стълба \mathbf{w}_q няма положителни координати, то от текущия връх $\bar{\mathbf{x}}$ излиза неограничен ръб $\mathbf{d}_q = \begin{bmatrix} -\mathbf{w}_q \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix}$, по който целевата функция z намалява неограничено.

В противен случай се преминава към съседно базисно допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}'$, чиято базисна матрица \mathbf{B}' се получава, като p -ия стълб на матрицата \mathbf{B} се замени със стълба \mathbf{A}_q .

За да се получи симплексната таблица $T(\bar{\mathbf{x}}')$ на новото базисно допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}'$ е по-удобно да се използва таблицата $T(\bar{\mathbf{x}})$ на предходното $\bar{\mathbf{x}}$, а не началната таблица T'' . Преобразуването, което трансформира $T(\bar{\mathbf{x}})$ в $T(\bar{\mathbf{x}}')$, се нарича *pivot* или *завъртане*. То осъществява стъпка (6) на симплекс алгоритъма и е еквивалентно на привеждането на задачата (K) в базисен вид спрямо новия базис B' .

Да означим с t_{ij} елемента, който се намира в i -ия ред и j -ия стълб на $T(\bar{\mathbf{x}})$ за $i = 1, \dots, m+1$, $j = 1, \dots, n+1$.

Да означим с t'_{ij} елемента, който ще се намира в i -ия ред и j -ия стълб на $T(\bar{\mathbf{x}}')$ за $i = 1, \dots, m+1$, $j = 1, \dots, n+1$.

При завъртането (pivot) t'_{ij} се получават от t_{ij} по следния начин:

$$1. \quad t'_{pj} = \frac{t_{pj}}{t_{pq}}, \quad j = 1, \dots, n+1,$$

$$2. \ t'_{ij} = t_{ij} - t_{iq} \frac{t_{pj}}{t_{pq}}, \quad j = 1, \dots, n+1, \quad i = 1, \dots, m+1, i \neq p.$$

Така 1. и 2. за $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$ изразяват новите базисни променливи $\mathbf{x}_{B'}$ чрез новите небазисни променливи $\mathbf{x}_{N'}$;

1. и 2. за $1 \leq i \leq m$ и $j = n+1$ пресмятат новите базисни координати $\bar{\mathbf{x}}_{B'}$ от старите $\bar{\mathbf{x}}_B$;

2. за $i = m+1$ и $1 \leq j \leq n$ изразява z като функция само на новите небазисни променливи $\mathbf{x}_{N'}$, т.е. новите относителни оценки $\bar{\mathbf{c}}'$ се получават от старите $\bar{\mathbf{c}}$.

По този начин на всяка итерация се създава симплексна таблица на текущото базисно допустимо решение, която съдържа цялата необходима на симплексната итерация информация — за оптималност, за неограниченост, за край на алгоритъма.

Именно табличната форма на симплекс метода е формата в която той е бил описан при своето създаване. Въпреки че тази форма е илюстративна и приемлива за учебни примери с малко променливи, тя не е подходяща за решаване на задачи с голяма размерност, както и на задачи, в които матрицата \mathbf{A} има някаква структура (например има много нулеви коефициенти), а такива често възникват в практиката. Това е така, понеже завъртането на таблицата обикновено разрушава структурата на матрицата \mathbf{A} . Друг недостатък на завъртането е, че при него на всяка итерация се генерират всичките $n - m$ стълба на матрицата $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$, докато само един от тях — стълбът $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q$ — е необходим за пресмятанията в теста за минимално отношение (7.7).

§7.4.2. Модифициран симплекс метод

За отстраняване на недостатъците на табличната форма на симплекс метода на по-късен етап е разработен т.нар. *модифициран симплекс метод*.

Когато симплекс методът се намира в текущия връх $\bar{\mathbf{x}}$ с базисна матрица \mathbf{B} , необходимо е да бъдат направени пресмятанията на стъпки (1), (4) и (5) от алгоритъма. Пресмятането на относителните оценки на стъпка (1) се извършва на два етапа: първо се намират координатите на вектора

$$\boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

и след това той се използва за пресмятане на относителните оценки

$$\bar{c}_j = c_j - \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{A}_j, \quad j \in N.$$

Векторът $\boldsymbol{\pi}$ се нарича *вектор на симплексните множители*, съответстващ на базиса B .

Следователно, за целите на симплексната итерация е необходимо да бъдат намерени координатите на векторите $\boldsymbol{\pi}$, \mathbf{w}_q и $\bar{\mathbf{x}}_B$. Те се пресмятат съответно така:

$$(7.8) \quad \boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}, \quad \mathbf{w}_q = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_q \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

и следователно за намирането им е достатъчно да се знае обратната на базисната матрица \mathbf{B} — матрицата \mathbf{B}^{-1} .

При първоначалните реализации на модифицирания симплекс метод матрицата \mathbf{B}^{-1} се е съхранявала и поддържала в явен вид, като се е обновявала при всяка смяна на базиса.

В последствие се взима предвид, че решаването на система линейни уравнения става бързо и лесно, ако матрицата на системата е *елементарна матрица*. Една матрица се нарича *елементарна*, ако се различава от единичната само по елементите на един от своите стълбове. Реализира се идеята на всяка итерация матрицата \mathbf{B}^{-1} да бъде представяна и поддържана във вид на произведение от елементарни матрици.

Ако \mathbf{B} е базисната матрица на текущото решение, следващата базисна матрица \mathbf{B}' (която се получава като p -ият стълб на \mathbf{B} се замени със стълба \mathbf{A}_q) може да се получи след умножение отлясно на \mathbf{B} с елементарна матрица, която ще означим с \mathbf{E} , т.е.

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}\mathbf{E},$$

където

$$(7.9) \quad \mathbf{E} := \begin{bmatrix} 1 & & w_{1q} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & w_{pq} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & w_{mq} & & 1 \end{bmatrix}.$$

\uparrow
 стълб p

Лесно се проверява, че умножаването на \mathbf{B} отлясно с \mathbf{E} оставя всички стълбове на \mathbf{B} непроменени с изключение на p -ия, който се трансформира в $\mathbf{B}\mathbf{w}_q = \mathbf{A}_q$, както е необходимо. С други думи казано, това умножение заменя p -ия стълб на \mathbf{B} с вектора \mathbf{A}_q .

За да обновим матрицата \mathbf{B}^{-1} , да забележим, че

$$(\mathbf{B}')^{-1} = (\mathbf{B}\mathbf{E})^{-1} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}^{-1},$$

където обратната на матрицата \mathbf{E} от (7.9) е елементарната матрица

$$(7.10) \quad \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{e}_p^T(\mathbf{w}_q - \mathbf{e}_p)}{w_{pq}} = \begin{bmatrix} 1 & & -w_{1q}/w_{pq} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1/w_{pq} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -w_{mq}/w_{pq} & & 1 \end{bmatrix}.$$

\uparrow
 стълб p

В § 7.3 видяхме, че след въвеждане на изкуствени променливи базисната матрица на началното базисно допустимо решение е единичната матрица \mathbf{I} . Тогава на k -та итерация обратната на матрицата \mathbf{B}_k се представя като произведение на k елементарни матрици

$$(7.11) \quad \mathbf{B}_k^{-1} = \mathbf{E}_k^{-1} \mathbf{E}_{k-1}^{-1} \cdots \mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{I},$$

където всяка от матриците \mathbf{E}_i^{-1} е от вида (7.10). Обновяването на обратната на базисната матрица става просто чрез добавяне на нова елементарна матрица в произведението. Ясно е, че вместо да се помни цялата елементарна матрица \mathbf{E}_i^{-1} , достатъчно е да се помни само стълба на \mathbf{E}_i^{-1} , който се различава от съответния стълб на единичната матрица, както и неговото място в \mathbf{E}_i^{-1} , което пести памет.

След натрупването на $2m$ на брой елементарни матрици в произведението е препоръчително текущата матрица \mathbf{B}^{-1} да се преизчислява, а използваните до момента елементарни матрици да се изтриват. Тъй като е известно кои са стълбовете на \mathbf{A} , включени в \mathbf{B} , то преизчисляването на \mathbf{B}^{-1} се състои в последователна замяна на стълбовете на \mathbf{I} като всяка замяна съответства на умножение с елементарна матрица от вида \mathbf{E}^{-1} . Така след преизчисляването си \mathbf{B}^{-1} вече е представена като произведение на m елементарни матрици.

По описания начин се поддържа представянето на \mathbf{B}^{-1} като произведение на не повече от $2m$ елементарни матрици, което спестява изчислително време, пести памет и намалява грешките от закръгляване.

Още по-съвременен подход е да се гледа на (7.8) като на три системи линейни уравнения с една и съща матрица на коефициентите \mathbf{B} :

$$\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T, \quad \mathbf{B} \mathbf{w}_q = \mathbf{A}_q, \quad \mathbf{B} \bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{b}$$

и за тяхното решаване да се използват числените методи на линейната алгебра, като се направи стандартното директно разлагане на матрицата $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ на произведение на долна триъгълна матрица \mathbf{L} и горна триъгълна матрица \mathbf{U} . Това позволява лесното и бързо решаване на трите системи. Възможно е елементите на разлагането \mathbf{L}' и \mathbf{U}' на следващата базисна матрица $\mathbf{B}' = \mathbf{L}'\mathbf{U}'$ да не се пресмятат чрез директното ѝ разлагане, а да се получат от предходните \mathbf{L} и \mathbf{U} чрез подходящо умножение с елементарни матрици.

§8. Двойственост в линейното оптимиране

Двойствеността в линейното оптимиране позволява линейните задачи да се изследват с помощта на други, тясно свързани с тях, линейни задачи.

Ще покажем как с произволна линейна задача може да се асоциира друга линейна задача, наречена нейна двойствена, и как поведението на едната от тях (разрешима, неограничена) влияе на поведението на другата.

Да напомним, че общият вид на линейна задача е следният (вж. § 2)

$$(L) \quad \begin{aligned} \min / \max \quad & z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x_j \geq 0, \quad j \in J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Нека разгледаме линейна задача (L) с критерий минимум. Нека всички функционални неравенства в множеството от нейните ограничения обърнем в посоката \geq (т.е. ако неравенството е от вида \leq , умножаваме двете му страни с -1 без да държим сметка за знака на числото, което ще се получи в дясната страна!).

Така преработена, произволна линейна задача за минимум изглежда по следния начин

$$(P) \quad \begin{aligned} \min \quad & z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in I, \\ & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, \quad i \in \bar{I}, \\ & x_j \geq 0, \quad j \in J, \\ & x_j \leq 0, \quad j \in \bar{J}. \end{aligned}$$

Множеството от индексите на ограниченията $\{1, \dots, m\}$ е разделено на индексно множество I , състоящо се от индексите на ограниченията неравенства и индексно множество \bar{I} , състоящо се от индексите на ограниченията равенства. Очевидно $I \cap \bar{I} = \emptyset$ и $I \cup \bar{I} = \{1, \dots, m\}$.

По аналогичен начин множеството от индекси на променливите $\{1, \dots, n\}$ е разделено на индексно множество J , състоящо се от индексите на променливите, на които е наложено условие за неотрицателност и индексно множество \bar{J} , състоящо се от индексите на променливите, които са свободни по знак. Очевидно $J \cap \bar{J} = \emptyset$ и $J \cup \bar{J} = \{1, \dots, n\}$.

Знакът \leq използваме, за да означим това, че върху съответната променлива не е наложено условие за неотрицателност и тя е свободна по знак.

Ако означим с \mathbf{A} матрицата, чиито вектор-редове са векторите \mathbf{a}_i^T , $i = 1, \dots, m$, получаваме $m \times n$ матрицата на ограниченията на задачата, чиито вектор-стълбове, както и преди, ще означаваме с \mathbf{A}_j , $j = 1, \dots, n$. Векторът на целевата функция е $\mathbf{c}(c_1, \dots, c_n)$, векторът

на променливите е $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, а векторът на дясната страна е $\mathbf{b}(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$.

Правилото, по което на една линейна задача за минимум (P) се съпоставя друга линейна задача се нарича спрягане.

§8.1. Спрягане на линейна задача за минимум (P)

Първо ще напишем съответната на задача за минимум (P) спрегнатата задача (D) , а след това да обясним подробно начина, по който се прави това.

$$(P) \quad \begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} &\geq b_i, \quad i \in I, \\ \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} &= b_i, \quad i \in \bar{I}, \\ x_j &\geq 0, \quad j \in J, \\ x_j &\leq 0, \quad j \in \bar{J}, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad (D) \quad \begin{aligned} \max v(\mathbf{y}) &= \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ y_i &\geq 0, \quad i \in I, \\ y_i &\leq 0, \quad i \in \bar{I}, \\ \mathbf{A}_j^T \mathbf{y} &\leq c_j, \quad j \in J, \\ \mathbf{A}_j^T \mathbf{y} &= c_j, \quad j \in \bar{J}. \end{aligned}$$

Променливите в (D) са толкова, колкото са ограниченията в (P) , т.е. на всяко от ограниченията $i \in \{1, \dots, m\}$ в (P) се съпоставя двойствена променлива y_i в (D) . Векторът на променливите на (D) е $\mathbf{y}(y_1, \dots, y_m)$. Ако i -то ограничение в (P) е неравенство \geq , то в (D) съответната променлива $y_i \geq 0$ (т.е. ѝ се налага условие за неотрицателност), а ако е равенство, то $y_i \leq 0$ (т.е. y_i е свободна по знак).

Ограниченията на (D) са толкова, колкото са променливите в (P) , т.е. на всяка от променливите $x_j, j \in \{1, \dots, n\}$ в (P) се съпоставя ограничение в (D) . За да се получи j -то ограничение, вектор стълба \mathbf{A}_j на матрицата на ограниченията \mathbf{A} на (P) се умножава скаларно с вектора на двойствените променливи \mathbf{y} . Полученото скаларно произведение $\mathbf{A}_j^T \mathbf{y}$ трябва да бъде $\leq c_j$ (коэффициента в целевата функция пред x_j), ако в (P) на x_j е наложено условие за неотрицателност (т.е. $x_j \geq 0$) и трябва да бъде $= c_j$, ако променливата x_j в (P) е свободна по знак (т.е. $x_j \leq 0$).

Критерият на (D) е **максимум**, а *целевата ѝ функция* е скаларното произведение на вектора \mathbf{b} в дясната страна на ограниченията на (P) с вектора на двойствените променливи \mathbf{y} .

§8.2. Връзка между задачите (P) и (D)

Видяхме как на задача от вида (P) (за минимум, с n променливи и m ограничения, с неравенства в посоката \geq) чрез спрягане се съпоставя задача от вида (D) (за максимум, с m променливи и с n ограничения, с неравенства в посоката \leq).

Задачата (D) лесно можем да преработим в еквивалентна на нея задача от вида (P) – като я превърнем в задача за минимум (имайки предвид, че $\max \mathbf{b}^T \mathbf{y} = -\min(-\mathbf{b})^T \mathbf{y}$) и като обърнем неравенствата ѝ в посоката \geq . Спрегнатата на така преработената задача (D) ще съвпадне със задачата (P) , което ще докажем в

Лема 8.1. *Спрегнатата задача на задачата (D) е задачата (P).*

Доказателство. Първо, както казахме, преобразуваме задачата (D) в задача за минимум и обръщаме неравенствата ѝ в посоката \geq :

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \max v(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y} & - \min[-\mathbf{b}^T \mathbf{y}] \\ y_i \geq 0, \quad i \in I, & y_i \geq 0, \quad i \in I, \\ y_i \leq 0, \quad i \in \bar{I}, & y_i \leq 0, \quad i \in \bar{I}, \\ \mathbf{A}_j^T \mathbf{y} \leq c_j, \quad j \in J, & -\mathbf{A}_j^T \mathbf{y} \geq -c_j, \quad j \in J, \\ \mathbf{A}_j^T \mathbf{y} = c_j, \quad j \in \bar{J}, & -\mathbf{A}_j^T \mathbf{y} = -c_j, \quad j \in \bar{J}. \end{array} \sim$$

На така преработената задача по правилото за спрягане пишем съответната спрегната и я опростяваме

$$\begin{array}{ll} -\max[-\mathbf{c}^T \mathbf{x}] & \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ -\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq -b_i, \quad i \in I, & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in I, \\ -\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = -b_i, \quad i \in \bar{I}, & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, \quad i \in \bar{I}, \\ x_j \geq 0, \quad j \in J, & x_j \geq 0, \quad j \in J, \\ x_j \leq 0, \quad j \in \bar{J}, & x_j \leq 0, \quad j \in \bar{J}, \end{array} \sim (P)$$

при което получаваме задачата (P). \square

От лемата е ясно, че всяка от задачите (P) и (D) се получава от другата чрез спрягане. Затова те се наричат *двойка спрегнати задачи*. Ясно е, също така, че аналогично на правилото за спрягане, което използвахме, за да получим задача (D) от задача (P), може да се напише правило за спрягане, по което да получим задача (P) от задача (D).

§8.3. Двойка спрегнати задачи (L) и (DL)

Нека е дадена задача на линейното оптимиране в общ вид (L).

Ако (L) е **с критерий минимум**, то като обърнем всичките ѝ неравенства в посока \geq , гледаме на нея като на задача от вида (P). По правилото за спрягане пишем съответната ѝ задача за максимум от вида (D). Така получената задача наричаме *двойнствената задача* на задачата (L) и означаваме с (DL).

Ако (L) е **с критерий максимум**, то като обърнем всичките ѝ неравенства в посока \leq , гледаме на нея като на задача от вида (D). Спрягаме я и получената задача за минимум от вида (P) наричаме *двойнствената задача* на задачата (L) и също означаваме с (DL).

Двойката задачи (L) и (DL) се получават една от друга чрез спрягане и също се наричат *двойка спрегнати задачи*.

Следователно, двойнствената на дадена линейна задача за минимум е задача за максимум от вида (D), а двойнствената на дадена линейна задача за максимум е задача от вида (P).

Видяхме как на произволна линейна задача (L) се съпоставя нейната двойнствена задача (DL).

За да решим задачата (L) , решаваме съответната ѝ канонична задача (K) . Нека (DK) е двойствената задача на задачата (K) . Възниква въпросът каква е връзката между задачите (DL) и (DK) ?

Отговорът е: задачите (DL) и (DK) се различават само по знаците на (някои от) променливите си.

За да поясним казаното, нека е дадена задача (L) , която е от вида (P) и е такава, че векторът в дясната ѝ страна \mathbf{b} е с неотрицателни координати (за което очевидно е достатъчно $b_i \geq 0$, за всяко $i \in I$). Нека (K) бъде съответната ѝ канонична задача. Да означим с $\mathbf{y}(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ вектора на променливите на задачата (DL) и да означим с $\boldsymbol{\pi}(\pi_1, \dots, \pi_m) \in \mathbb{R}^m$ вектора на променливите на задачата (DK) . В този случай очевидно $y_i = \pi_i$ за всяко $i = 1, \dots, m$ и двете задачи съвпадат, т.е. $(DK) \equiv (DL)$. Проверете!

Ако обаче разгледаме задача (L) , която е от вида (P) , но за някое $i_0 \in I$ имаме $b_{i_0} < 0$, то при канонизирането ѝ i_0 -то ограничение се умножава с -1 , което води до това че $y_{i_0} = -\pi_{i_0}$, т.е. съответните на i_0 -то ограничение двойствени променливи в задачите (DL) и (DK) се различават по знак.

Тази ситуация по-лесно се илюстрира на конкретни примери, отколкото в общия случай, затова на упражнения ще бъдат разгледани достатъчно примери.

От казаното е ясно, че ако намерим решение на задачата (DK) (двойствената на каноничната) от него лесно ще получим решение (като сменим някои от знаците на координатите му) на задачата (DL) (двойствената на изходната) и обратното.

Това ни позволява по-нататък да разглеждаме само двойката спрегнати задачи, състояща се от канонична задача

$$(K) \quad \begin{aligned} \min \quad & z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

и нейната двойствена

$$(DK) \quad \begin{aligned} \max \quad & v(\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi} \\ & \mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{c}, \\ & \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

§8.4. Теорема за двойственост

За отношенията между двойката спрегнати задачи (K) и (DK) ще докажем няколко основни резултата.

Теорема 8.1 (слаба теорема за двойственост). *Ако \mathbf{x} е допустима точка за (K) и $\boldsymbol{\pi}$ е допустима точка за (DK) , то $\mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$.*

Доказателство. От това, че \mathbf{x} е допустима точка за (K) , имаме че удовлетворява $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. За произволно $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$ получаваме $\mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi} = (\mathbf{A} \mathbf{x})^T \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi}$. Ако $\boldsymbol{\pi}$ е допустима точка за (DK) , то тя

удовлетворява $\mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{c}$ и от $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ следва, че $\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, т.е. $\mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$. \square

Слабата теорема за двойственост всъщност твърди, че:

- I. ако (DK) е съвместима и $\boldsymbol{\pi}$ е допустима точка за (DK) , то числото $v(\boldsymbol{\pi})$ е долна граница за стойностите на целевата функция z на (K) в произволни нейни допустими точки;
- II. ако (K) е съвместима и \mathbf{x} е допустима точка за (K) , то числото $z(\mathbf{x})$ е горна граница за стойностите на целевата функция v на (DK) в произволни нейни допустими точки.

Като следствие от Теорема 8.1 получаваме

Следствие 8.1. Нека \mathbf{x}^* е допустима точка за (K) , а $\boldsymbol{\pi}^*$ е допустима точка за (DK) . Ако $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi}^*$, то \mathbf{x}^* и $\boldsymbol{\pi}^*$ са оптимални решения на съответните задачи.

Доказателство. Според слабата теорема за двойственост за произволна допустима точка \mathbf{x} на (K) и за допустимото $\boldsymbol{\pi}^*$ за (DK) имаме, че $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$ и следователно \mathbf{x}^* е оптимално решение за (K) .

Използвайки същата теорема, за произволна допустима точка $\boldsymbol{\pi}$ на (DK) и за допустимото \mathbf{x}^* за (K) имаме, че $\mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi}^*$ и следователно $\boldsymbol{\pi}^*$ е оптимално решение за (DK) . \square

Съществуват ли обаче допустими точки \mathbf{x}^* за (K) и $\boldsymbol{\pi}^*$ за (DK) , които да удовлетворяват условието на това следствие?

Отговор на този въпрос дава:

Теорема 8.2 (силна теорема за двойственост). За двойката спрегнати задачи (K) и (DK) е изпълнено, че:

- (а) ако едната е разрешима, то и другата е разрешима, като при това оптималните стойности на целевите им функции са равни;
- (б) ако едната е неограничена, то другата е несъвместима.

Доказателство. (а) Ще допуснем, че е разрешима задачата (K) и ще покажем, че е разрешима задачата (DK) . Обратното се доказва аналогично.

И така, нека $\bar{\mathbf{x}}^*$ е оптималното базисно допустимо решение с базисна матрица \mathbf{B} на каноничната задача (K) , получено при решаването ѝ със симплекс метода, т.е.

$$\bar{\mathbf{x}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B^* \\ \bar{\mathbf{x}}_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Да разгледаме съответния на $\bar{\mathbf{x}}^*$ вектор на симплексните множители $\boldsymbol{\pi}^{*T} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ (вж. § 7.4.2). Имаме, че

$$\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}^* = [\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_N^T] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B^* \\ \bar{\mathbf{x}}_N^* \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_N^T] \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \boldsymbol{\pi}^{*T} \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi}^*.$$

Това означава, че за оптималния връх $\bar{\mathbf{x}}^*$ и съответния му вектор на симплексните множители $\boldsymbol{\pi}^*$ е в сила равенството

$$(8.1) \quad z(\bar{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}^* = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi}^* = v(\boldsymbol{\pi}^*)$$

на функционалните стойности. Това обаче още не означава, че за $\boldsymbol{\pi}^*$ можем да твърдим, че е оптимално решение на задачата (DK) , защото още не сме установили, че е допустима точка за (DK) .

Тъй като $\bar{\mathbf{x}}^*$ е оптимално базисно допустимо решение, получено със симплекс метода, за него е в сила критерият за оптималност

$$\bar{\mathbf{c}}_N^T = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq \mathbf{0}$$

който е еквивалентен на

$$\mathbf{c}_N^T \geq \boldsymbol{\pi}^{*T} \mathbf{N}.$$

Тъй като очевидно $\mathbf{c}_B^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} = \boldsymbol{\pi}^{*T} \mathbf{B}$, получаваме

$$\mathbf{c}^T = [\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_N^T] \geq [\boldsymbol{\pi}^{*T} \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi}^{*T} \mathbf{N}] = \boldsymbol{\pi}^{*T} [\mathbf{B} | \mathbf{N}] = \boldsymbol{\pi}^{*T} \mathbf{A},$$

или $\mathbf{c} \geq \mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi}^*$. Това означава, че $\boldsymbol{\pi}^*$ (съответстващ на оптималното $\bar{\mathbf{x}}^*$) е допустима точка за задачата (DK) . Показахме, че ако $\bar{\mathbf{x}}^*$ е оптимално базисно допустимо решение на (K) с базис B , то съответният му вектор на симплексните множители $\boldsymbol{\pi}^{*T} := \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ е допустима точка за двойствената задача (DK) , което съгласно (8.1) удовлетворява $\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}^* = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi}^*$. От Следствие 8.1 имаме, че $\boldsymbol{\pi}^*$ е оптимално решение за (DK) , с което доказателството на (а) приключва.

(б) следва непосредствено от Теорема 8.1 с допускане на противното. \square

Да отбележим, че обратното на Теорема 8.2(б) твърдение в общия случай не е вярно, т.е. ако едната от двойката спрегнати задачи е несъвместима, то от това **не следва** че другата задача е неограничена. Възможно е и двете задачи да бъдат несъвместими, както се вижда от следния

Пример 8.1. *Двойката спрегнати задачи*

$$(K) \quad \begin{aligned} \min \quad & z(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 \\ & x_1 - x_2 = 1, \\ & x_1 - x_2 = 0, \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{aligned} \quad (DK) \quad \begin{aligned} \max \quad & v(\boldsymbol{\pi}) = \pi_1 \\ & \pi_1 + \pi_2 \leq -1, \\ & -\pi_1 - \pi_2 \leq -1, \\ & \pi_1 \leq 0, \quad \pi_2 \leq 0 \end{aligned}$$

е такава, че и двете са несъвместими.

Както отбелязахме в § 7 вече разполагаме с достатъчно средства да направим доказателството на Теорема 7.2.

Теорема 7.2. *Ако задачата (K) е разрешима, то съществува число $M_0 > 0$, такова че за всяко $M \geq M_0$ съответната (M) -задача е разрешима и ако $(\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*)$ е нейно оптимално базисно допустимо решение, то $\bar{\mathbf{y}}^* = \mathbf{0}$.*

Доказателство. Нека \mathbf{x} е допустима точка за (K) . Тогава $(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ е допустима точка за всяка (M) -задача

$$(M) \quad \begin{aligned} \min \quad & z_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + M \sum_{i=1}^m y_i \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b} \geq \mathbf{0}), \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

(допустимото множество на (M) -задачите не зависи от числото M !) и следователно M -задачата е с непразно допустимо множество, т.е. **не е несъвместима**.

Тъй като (K) е разрешима, от Силната теорема за двойственост следва, че задачата (DK) е разрешима, в частност е с непразно допустимо множество.

Нека $\boldsymbol{\pi}(\pi_1, \dots, \pi_m)$ е произволна допустима точка за задачата

$$(DK) \quad \begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi} \\ \text{с.} \quad & \mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Да положим $\bar{M} := \max_{1 \leq i \leq m} \pi_i$. Тогава за $M \geq \bar{M}$, $\boldsymbol{\pi}$

$$(DM) \quad \begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi} \\ \text{с.} \quad & \mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{c} \\ & \pi_i \leq M, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

ще бъде допустима точка и за задачата

Следователно за $M \geq \bar{M}$ задачата (DM) ще бъде с непразно допустимо множество. Съгласно Слабата теорема за двойственост, съответната й (M) -задача **не е неограничена**.

Тъй като за канонична задача (а (M) -задачата е такава) имаме точно три възможности (вж. началото на §3), а двете отпаднаха, следва че за $M \geq \bar{M}$, (M) -задачата е разрешима.

За доказателството на втората част на теоремата е достатъчно да предположим, че (K) има непразно допустимо множество.

Нека \mathbf{x} е произволна допустима точка за (K) .

Нека $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ е базисно допустимо решение за (M) , такова че $\bar{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$. Тогава съществува $M_1 \geq \bar{M}$ такова че

$$z_{M_1}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} + M_1 \left(\sum_{i=1}^m \bar{y}_i \right) > \mathbf{c}^T \mathbf{x} = z_{M_1}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

и следователно $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ няма как да бъде оптимално за (M) -задача с $M \geq M_1$.

Тъй като базисните допустими решения $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ (и в частност тези, за които $\bar{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$) са краен брой, то като вземем най-голямата от съответстващите им константи от вида M_1 и я означим с \widetilde{M} , е ясно, че за всяко $M \geq \widetilde{M}$ оптималните базисни допустими решения за (M) -задачата (ако съществуват) ще бъдат от вида $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$.

Полагаме $M_0 := \max\{\bar{M}, \widetilde{M}\}$ и с това доказателството приключва. \square

§9. Класическа транспортна задача

§9.1. Икономическа постановка

Даден продукт се произвежда в пунктове A_1, \dots, A_m в количества съответно a_1, \dots, a_m , а се консумира в пунктове B_1, \dots, B_n съответно в количества b_1, \dots, b_n , като сумарното производство е равно на сумарното потребление, т.е.

$$(9.1) \quad \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Транспортните разходи за превоза на единица продукт от пункта A_i до пункта B_j са съответно c_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Очевидно $c_{ij} \geq 0$.

Задачата е пунктовете на потребление B_1, \dots, B_n да се снабдят, така че техните потребности да бъдат задоволени и общите транспортни разходи да бъдат минимални.

Условието (9.1) се нарича още *условие за баланс*. Без ограничение на общността считаме, че $a_i > 0$, $i = 1, \dots, m$ и $b_j > 0$, $j = 1, \dots, n$.

§9.2. Математически модел

Да означим с x_{ij} количеството продукт, с което пунктът A_i , $i = 1, \dots, m$, ще снабди пункта B_j , $j = 1, \dots, n$. Като означим вектора на променливите с $\mathbf{x}(x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{mn})$, задачата е

$$(TP) \quad \begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Следователно *транспортната задача (TP)* е задача на линейното оптимизиране в каноничен вид. Броят на променливите е mn , а броят на ограниченията от тип равенство е $m + n$.

Ако в (TP) означим със \mathbf{c} вектора на целевата функция, с $\tilde{\mathbf{b}}(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$ — вектора на дясната страна, а с \mathbf{A} — съответната $(m + n) \times mn$ матрица на ограниченията, можем да запишем задачата в следния матричен вид:

$$(TP) \quad \begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{A} \mathbf{x} &= \tilde{\mathbf{b}}, \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

§9.3. (TP) като частен случай на линейна задача

Като се разпишат $(m+n)$ -те ограничения равенства на транспортната задача

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_{11} + \cdots + x_{1n} & & & & & & = a_1, \\
 & x_{21} + \cdots + & x_{2n} & & & & = a_2, \\
 \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & & \\
 & & & & x_{m1} + \cdots + & x_{mn} & = a_m, \\
 x_{11} & & +x_{21} & & +x_{m1} & & = b_1, \\
 & x_{12} & & +x_{22} & & +x_{m2} & = b_2, \\
 \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & & \\
 & & x_{1n} & & +x_{2n} & & +x_{mn} = b_n
 \end{array}$$

лесно се вижда, че коефициентите пред променливите са нули или единици. Всяка променлива x_{ij} участва с коефициент 1 само в две уравнения: i -то и $(m+j)$ -то. Това означава, че матрицата на ограниченията \mathbf{A} на (TP) съдържа само 0 и 1, а вектор-стълбовете ѝ \mathbf{A}_{ij} имат точно по две координати различни от нула и това са i -та и $(m+j)$ -та.

§9.4. Свойства на транспортната задача

Теорема 9.1. Условието за баланс (9.1) е необходимо и достатъчно условие (TP) да бъде разрешима.

Доказателство. Необходимостта е очевидна: ако \mathbf{x}^* е оптимално решение на (TP), то (тъй като е допустимо) удовлетворява всички ограничения. Като сумираме първите m ограничения за \mathbf{x}^* получаваме

$$(9.2) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^* = \sum_{i=1}^m a_i,$$

а като сумираме последните n ограничения за \mathbf{x}^* получаваме

$$(9.3) \quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij}^* = \sum_{j=1}^n b_j,$$

От това, че левите страни на равенствата (9.2) и (9.3) са равни следва, че и десните им страни са равни, което е (9.1).

Обратно, ако е изпълнено (9.1) и означим $s := \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, то

векторът \mathbf{x} с координати $x_{ij} := \frac{a_i b_j}{s}$ е допустим за (TP) и тя следователно е съвместима. Понеже целевата ѝ функция z е ограничена отдолу върху допустимото ѝ множество ($z \geq 0$), то транспортната задача е разрешима. \square

Тъй като за стойности на m и n , които не са единици (и това е естественият случай), е изпълнено $m + n \leq mn$, то очевидно $r(\mathbf{A}) \leq m + n$.

Ако умножим първите m вектор-редове на \mathbf{A} с 1, а останалите n вектор-редове с -1 и ги съберем, ще получим нулевия вектор, което означава, че вектор-редовете на \mathbf{A} са линейно зависими. Следователно $r(\mathbf{A}) \leq m + n - 1$. Ще докажем

Теорема 9.2. $r(\mathbf{A}) = m + n - 1$.

Доказателство. Тъй като детерминантата

$$\det \left\| \frac{\mathbf{A}_{1n} \mathbf{A}_{2n} \dots \mathbf{A}_{mn} \mathbf{A}_{11} \mathbf{A}_{12} \dots \mathbf{A}_{1n-1}}{\text{без последната координата}} \right\| =$$

$$= \det \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\| = 1$$

(развийте детерминантата по първия стълб), рангът на \mathbf{A} е точно $m + n - 1$. \square

Следователно всяко базисно допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}$ на (TP) ще има базис от $m + n - 1$ променливи.

§9.5. Транспортна таблица. Основни понятия

Транспортната таблица (ТТ) се състои от редове, стълбове и клетки. Всяка *клетка* се определя с наредена двойка числа (i, j) — номерата на реда и стълба в ТТ, в които тя се намира. С клетката (i, j) се асоциират три неща:

- променливата x_{ij} ,
- транспортните разходи c_{ij} и
- вектор-стълба \mathbf{A}_{ij} на матрицата на ограниченията \mathbf{A} .

Затворена начупена линия наричаме линия, образувана от отсечки по такъв начин, че всеки край на дадена отсечка от линията е край на точно още една отсечка от нея. Краищата на отсечките се наричат *върхове* на начупената линия.

Цикъл наричаме всяка затворена начупена линия с върхове в клетки на ТТ, която удовлетворява следните две условия:

- а) всяка отсечка лежи изцяло в ред или в стълб на ТТ;

- б) двете отсечки, които излизат от всеки връх на цикъла, лежат едната в ред, а другата в стълб на ТТ.

Съвкупност от клетки на ТТ, която съдържа поне един цикъл се нарича *циклична*. В противен случай се нарича *ациклична*. Произволен цикъл γ може да се опише по следния начин

$$\gamma : (i_1, j_1)(i_2, j_1)(i_2, j_2) \dots (i_s, j_s)(i_1, j_s).$$

§9.6. Свойства на базисните допустими решения на класическата транспортна задача

Теорема 9.3. *Съвкупност от вектор-стълбове $\{\mathbf{A}_{ij}\}$ на матрицата \mathbf{A} е линейно независима тогава и само тогава, когато съответната ѝ съвкупност от клетки $\{(i, j)\}$ в ТТ е ациклична.*

Доказателство. Нека съвкупността от вектор-стълбове $\{\mathbf{A}_{ij}\}$ на матрицата \mathbf{A} е линейно независима.

Да допуснем, че съответният им набор от клетки $\{(i, j)\}$ в ТТ е цикличен, т.е. съдържа цикъл

$$\gamma : (i_1, j_1)(i_2, j_1)(i_2, j_2) \dots (i_s, j_s)(i_1, j_s).$$

Тогаво линейната комбинация на векторите

$$\mathbf{A}_{i_1 j_1} - \mathbf{A}_{i_2 j_1} + \mathbf{A}_{i_2 j_2} + \dots + \mathbf{A}_{i_s j_s} - \mathbf{A}_{i_1 j_s} = \mathbf{0}.$$

Защо това е така? Освен нулеви координати, векторът $\mathbf{A}_{i_1 j_1}$ има 1 на i_1 и $m + j_1$ място. С изваждане от него на вектора $\mathbf{A}_{i_2 j_1}$ се елиминира 1 на $m + j_1$ място. Координатата $m + j_1$ става равна на 0, а координатата i_2 става -1 . С добавянето на вектора $\mathbf{A}_{i_2 j_2}$ се елиминира 1 на i_2 място, т.е. i_2 координата става нула, но се появява 1 на $m + j_2$ място, и т. н. Накрая, с изваждането на вектора $\mathbf{A}_{i_1 j_s}$ се елиминират 1 на $m + j_s$ място, появила се от добавянето на предходния вектор $\mathbf{A}_{i_s j_s}$ и 1 на i_1 място, появила се от първия вектор $\mathbf{A}_{i_1 j_1}$. Получаваме, че всички координати са нули.

Следователно имаме линейна зависимост на част от вектор-стълбовете $\{\mathbf{A}_{ij}\}$ — на тези от тях, чиито индекси съответстват на клетки от цикъла. Оттам имаме линейна зависимост на цялата съвкупност $\{\mathbf{A}_{ij}\}$, а това води до противоречие.

Обратно, нека векторите $\{\mathbf{A}_{ij}\}$ са линейно зависими. Да означим с β_{ij} съответните коефициенти в линейната комбинация, която изразява нулевия вектор чрез тях. Нека $\beta_{i_1 j_1} > 0$. Това означава, че ще съществува $\beta_{i_2 j_1} < 0$ (за да се компенсира положителната координата $m + j_1$ координата $\beta_{i_1 j_1}$ на вектора $\beta_{i_1 j_1} \mathbf{A}_{i_1 j_1}$ в сумата). Аналогично трябва да съществува $\beta_{i_2 j_2} > 0$ (за да се компенсира отрицателната i_2 координата

$\beta_{i_2 j_1}$ на вектора $\beta_{i_2 j_1} \mathbf{A}_{i_2 j_1}$ в сумата) и т. н. Като проследим зависимостта на индексите, виждаме че можем да построим цикъл

$$\gamma : (i_1, j_1)(i_2, j_1)(i_2, j_2) \dots (i_s, j_s)(i_1, j_s)$$

в ТТ. \square

Следствие 9.1. *Ако $\bar{\mathbf{x}}$ е базисно допустимо решение за (ТР), то съвкупността от клетки в ТТ, съответстваща на базисните му координати, е ациклична.*

Доказателство. Знаем, че ако $\bar{\mathbf{x}}$ е базисно допустимо решение, то стълбовете на матрицата \mathbf{A} , съответстващи на базисните му координати, са линейно независими (Теорема 3.1) и остава да приложим Теорема 9.3. \square

Нека сега $\bar{\mathbf{x}}$ е базисно допустимо решение (връх) за (ТР). Ако в ТТ клетките, съответстващи на базисните координати на $\bar{\mathbf{x}}$ запълним с тяхната стойност, а клетките, съответстващи на небазисните му координати (които, разбира се са нули) оставим празни, получаваме ТТ, съответстваща на базисното допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}$, която означаваме с $T(\bar{\mathbf{x}})$. В таблицата $T(\bar{\mathbf{x}})$ пълните (базисните) клетки са $m + n - 1$ на брой и съгласно Следствие 9.1 образуват ациклична съвкупност.

Теорема 9.4. *Нека $\bar{\mathbf{x}}$ е базисно допустимо решение. За произволна небазисна (празна) клетка на неговата транспортна таблица $T(\bar{\mathbf{x}})$ съществува единствен цикъл, който я свързва с базисните (пълните) клетки на $T(\bar{\mathbf{x}})$.*

Доказателство. Знаем, че в $T(\bar{\mathbf{x}})$ базисните (пълните) клетки са $m + n - 1$ на брой и образуват ациклична съвкупност, която означаваме с H . Нека (k, l) е празна клетка. Да я присъединим към H . Получаваме нова съвкупност $H' = H \cup (k, l)$, която е циклична, тъй като се състои от $m + n$ клетки (всеки $m + n$ стълба на \mathbf{A} са линейно зависими съгласно Теорема 9.2, а на линейно зависима съвкупност от вектори съответства циклична съвкупност от клетки, съгласно Теорема 9.3). При това всеки цикъл в H' съдържа (k, l) , тъй като в противен случай H би била циклична съвкупност.

За да установим единствеността, да допуснем, че съществуват два различни цикъла, свързващи (k, l) с H :

$$(k, l)(k, j_1)(i_1, j_1) \dots (i_p, j_p)(i_p, l)$$

и

$$(k, l)(k, s_1)(r_1, s_1) \dots (r_q, s_q)(r_q, l).$$

Всички клетки в тях без (k, l) са базисни за $\bar{\mathbf{x}}$. Махаме (k, l) и построяваме цикъл от базисни клетки

$$(i_p, l)(i_p, j_p) \dots (i_1, j_1)(k, j_1)(k, s_1)(r_1, s_1) \dots (r_q, s_q)(r_q, l),$$

което е в противоречие с това, че $\bar{\mathbf{x}}$ е базисно допустимо решение и базисните му клетки образуват ациклична съвкупност. \square

§9.7. Разпределителен метод за решаване на (TP)

Преминаване от едно базисно допустимо решение \bar{x} към съседно на него базисно допустимо решение \bar{x}' .

Нека \bar{x} е базисно допустимо решение за (TP) с транспортна таблица $T(\bar{x})$. Нека (k, l) е празна (небазисна) клетка в $T(\bar{x})$. Според Теорема 9.4 съществува единствен цикъл, който я свързва с пълните (базисните) клетки на $T(\bar{x})$. Нека това е цикълът

$$\gamma_{kl} : \begin{array}{cccccc} (k, l) & (k, j_1) & (i_1, j_1) & \dots & (i_s, j_s) & (i_s, l) \\ + & - & + & \dots & + & - \end{array}$$

Да отбележим, че в него всички клетки освен (k, l) са базисни за \bar{x} .

На клетките на цикъла γ_{kl} присвояваме алтернативно знаците $+$ и $-$, като започнем с $+$ от клетката (k, l) . Тогава клетките на цикъла γ_{kl} се разделят на две равномошни съвкупности γ_{kl}^+ и γ_{kl}^- . Пресмятаме числото

$$\bar{c}_{kl} := \sum_{(i,j) \in \gamma_{kl}^+} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in \gamma_{kl}^-} c_{ij}$$

и намираме

$$\bar{t} := \min_{(i,j) \in \gamma_{kl}^-} \bar{x}_{ij}.$$

Да напомним, че \bar{x}_{ij} са координатите на \bar{x} и тъй като в съвкупността γ_{kl}^- участват само базисни клетки, то координатите \bar{x}_{ij} , необходими за намирането на \bar{t} са базисни за \bar{x} и стойностите им са вписани в $T(\bar{x})$. Да отбележим също, че тъй като $\bar{x} \geq 0$, то $\bar{t} \geq 0$.

Координатите \bar{x}'_{ij} на съседното базисно допустимо решение \bar{x}' намираме по следния начин

$$\begin{aligned} \bar{x}'_{ij} &= \bar{x}_{ij} + \bar{t}, & (i, j) &\in \gamma_{kl}^+, \\ \bar{x}'_{ij} &= \bar{x}_{ij} - \bar{t}, & (i, j) &\in \gamma_{kl}^-, \\ \bar{x}'_{ij} &= \bar{x}_{ij}, & (i, j) &\notin \gamma_{kl}. \end{aligned}$$

В новата транспортна таблица $T(\bar{x}')$, съответстваща на новото \bar{x}' , се изразва **точно една** от старите базисни клетки (клетка, принадлежаща на γ_{kl}^- , за чийто индекс се достига \bar{t}), а клетката (k, l) се запълва с количество \bar{t} , понеже $(k, l) \in \gamma_{kl}^+$ и следователно

$$\bar{x}'_{kl} = \bar{x}_{kl} + \bar{t} = 0 + \bar{t} = \bar{t}.$$

Ако минимумът при определянето на \bar{t} се достигне в повече от една клетка $(i, j) \in \gamma_{kl}^-$, то само една от тези клетки – клетка (i_p, j_p) – се оставя празна (излиза от базиса), а останалите се запълват с нули (базисни нули!) в таблицата на новото \bar{x}' .

Новополученият вектор \bar{x}' остава допустим за транспортната задача, тъй като разпределянето на количеството \bar{t} (откъдето идва и името на метода — разпределителен метод) се извършва последователно в

рамките на един ред или стълб и така се осигурява изпълнението на ограниченията равенства (т.е. $\bar{\mathbf{x}}'$ удовлетворява $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}' = \tilde{\mathbf{b}}$), а от дефиницията на \bar{t} следва, че $\bar{\mathbf{x}}' \geq \mathbf{0}$.

Нещо повече, $\bar{\mathbf{x}}'$ е базисно допустимо решение, тъй като съвкупността от пълните клетки H' на $\bar{\mathbf{x}}'$ се различава от съвкупността от пълните клетки H на $\bar{\mathbf{x}}$ само по това, че съдържа клетката (k, l) , а не съдържа една от клетките на γ_{kl}^- — клетката (i_p, j_p) . Следователно в H' с изключение на (k, l) всички останали клетки принадлежат на ациклична съвкупност. Тогава, ако в H' има цикъл, той непременно ще съдържа (k, l) . Така обаче ще получим поне два различни цикъла — този в H' (който не съдържа клетката (i_p, j_p)) и γ_{kl} (който съдържа клетката (i_p, j_p)), които свързват (k, l) с базисните клетки H на $\bar{\mathbf{x}}$, което е противоречие с Теорема 9.4.

Сравняване на $z(\bar{\mathbf{x}})$ и $z(\bar{\mathbf{x}}')$.

Ако означим

$$S := \sum_{(i,j) \notin \gamma_{kl}} c_{ij} \bar{x}_{ij}, \quad S^+ := \sum_{(i,j) \in \gamma_{kl}^+} c_{ij} \bar{x}_{ij}, \quad S^- := \sum_{(i,j) \in \gamma_{kl}^-} c_{ij} \bar{x}_{ij},$$

то

$$\begin{aligned} z(\bar{\mathbf{x}}') &= \sum_{(i,j)} c_{ij} \bar{x}'_{ij} = \sum_{(i,j) \notin \gamma_{kl}} c_{ij} \bar{x}_{ij} + \sum_{(i,j) \in \gamma_{kl}^+} c_{ij} (\bar{x}_{ij} + \bar{t}) + \sum_{(i,j) \in \gamma_{kl}^-} c_{ij} (\bar{x}_{ij} - \bar{t}) = \\ &= S + S^+ + S^- + \bar{t} \left(\sum_{(i,j) \in \gamma_{kl}^+, l} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in \gamma_{kl}^-} c_{ij} \right) = z(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{t} \bar{c}_{kl}. \end{aligned}$$

Критерий за оптималност на $\bar{\mathbf{x}}$.

Ако за всички празни (небазисни) в $T(\bar{\mathbf{x}})$ клетки (k, l) е изпълнено, че $\bar{c}_{kl} \geq 0$, то базисното допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}$ е оптимално. В противен случай може да се премине към „не по-лошо“ съседно базисно допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}'$. Числата \bar{c}_{kl} , които се пресмятат за празните (небазисните) клетки (k, l) , са относителните оценки на небазисните променливи x_{kl} .

§9.8. Алгоритъм на разпределителния метод за решаване на (TP)

- (0) Намира се начално базисно допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}$.
- (1) За всяка празна (небазисна) клетка (i, j) в таблицата $T(\bar{\mathbf{x}})$ се пресмятат относителните оценки \bar{c}_{ij} . Ако всички празни клетки имат $\bar{c}_{ij} \geq 0$, то КРАЙ, $\bar{\mathbf{x}}$ е оптимално. В противен случай се премива към стъпка (2).

- (2) Избира се празна клетка (k, l) , такава че $\bar{c}_{kl} < 0$ и се преминава към съседно на $\bar{\mathbf{x}}$ базисно допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}'$ (или към нов базис на $\bar{\mathbf{x}}$, ако $\bar{\mathbf{x}}$ е изродено). Сменя се $\bar{\mathbf{x}}$ с $\bar{\mathbf{x}}'$ и се отива на стъпка (1).

§9.9. Крайност на алгоритъма. Заcikляне. Избягване на заcikлянето

Алгоритъмът на разпределителния метод е краен поради това, че имаме само краен брой базисни допустими решения. Заcikляне може да се получи само в изроден връх. Необходимо и достатъчно условие за задачата да бъде изродена, е да съществува частичен баланс, т. е. баланс между производството и потреблението на непълни групи производители и потребители. Заcikляне в малки учебни примери на практика не се получава, а в големи задачи заcikлянето може да се избегне, като предварително задачата се преобразува в неизродена чрез разрушаване на частичните баланси и преминаване към т.нар. ε -задача

$$\begin{aligned}
 (TP_\varepsilon) \quad \min z(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a'_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
 \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b'_j, \quad j = 1, \dots, n, \\
 x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned}$$

където $a'_i = a_i + \varepsilon$, $i = 1, \dots, m$, $b'_j = b_j$, $j = 1, \dots, n-1$, $b'_n = b_n + m\varepsilon$, а $\varepsilon > 0$ е малко число.

§9.10. Методи за намиране на начално базисно допустимо решение за (TP)

Метод на северозападния ъгъл.

Започва се от северозападната клетка на ТТ — клетката $(1, 1)$. На базисната променлива x_{11} се присвоява стойност $\bar{x}_{11} := \min\{a_1, b_1\}$.

- 1) Ако $a_1 < b_1$, то $b_1 \Leftarrow b_1 - a_1$ и се зачертава 1-ия ред (реда на a_1) от ТТ.
- 2) Ако $b_1 < a_1$, то $a_1 \Leftarrow a_1 - b_1$ и се зачертава 1-ия стълб (стълба на b_1) от ТТ.
- 3) Ако $a_1 = b_1$, то или $b_1 \Leftarrow 0$ и се зачертава 1-ия ред от ТТ, или $a_1 \Leftarrow 0$ и се зачертава 1-ия стълб от ТТ.

Така размерността на ТТ се намалява с единица. За новата таблица процедурата се повтаря и така до пълно изчерпване.

В третия случай на следващата итерация ще се получи нулева стойност на съответната базисна променлива, т. е. началното базисно допустимо решение ще бъде изродено.

Запълването на клетките става от крайната горе вляво (северозападната клетка) до крайната долу вдясно, като се върви алтернативно в редове или стълбове, при което очевидно се получава ациклична съвкупност от $m + n - 1$ клетки. Следователно, стига се до базисно допустимо решение.

Метод на минималния елемент.

Започва се от клетка (i_0, j_0) на ТТ с минимални транспортни разходи, т. е. от клетка, за която $c_{i_0 j_0} = \min c_{ij}$. На базисната променлива $x_{i_0 j_0}$ се присвоява стойност $\bar{x}_{i_0 j_0} := \min\{a_{i_0}, b_{j_0}\}$.

- 1) Ако $a_{i_0} < b_{j_0}$, то $b_{j_0} \Leftarrow b_{j_0} - a_{i_0}$ и се зачертава ред i_0 (реда на a_{i_0}) от ТТ.
- 2) Ако $b_{j_0} < a_{i_0}$, то $a_{i_0} \Leftarrow a_{i_0} - b_{j_0}$ и се зачертава стълб j_0 (стълба на b_{j_0}) от ТТ.
- 3) Ако $a_{i_0} = b_{j_0}$, то или $b_{j_0} \Leftarrow 0$ и се зачертава ред i_0 от ТТ, или $a_{i_0} \Leftarrow 0$ и се зачертава стълб j_0 от ТТ.

Така размерността на ТТ се намалява с единица. За новата таблица процедурата се повтаря и така до изчерпване.

В третия случай в някоя от следващите итерации ще получим нулева стойност на базисна променлива и началното базисното допустимо решение ще бъде изродено.

Запълването на клетките става така, че на всяка итерация се елиминира ред или стълб и не е възможно да се получи цикъл. Следователно получава се базисно допустимо решение.

Поради факта, че методът на минималния елемент отчита транспортните разходи, а методът на северозападния ъгъл не, вероятността първият да намери начално базисно допустимо решение, което е по-близо до оптималното, е по-голяма.

§9.11. Целочисленост на решението на (ТР)

Матрицата на ограниченията \mathbf{A} на транспортната задача (ТР) е от специален вид. Всички нейни минори са детерминанти, чиято стойност е равна на 0, 1 или -1 . Правоъгълна матрица с това свойство се нарича напълно (или абсолютно) унимодулярна. Т.е. матрицата на ограниченията \mathbf{A} на транспортната задача (ТР) е напълно унимодулярна. Напълно унимодулярните матрици играят важна роля в теорията на целочисленото линейно оптимиране. Базисните решения на линейна система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, матрицата \mathbf{A} на която е напълно унимодулярна

се получават само чрез събирания и изваждания на десните страни на уравненията. Следователно, линейни задачи, чиито ограничения са от вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, където матрицата \mathbf{A} е напълно унимодулярна, а векторът \mathbf{b} е с координати, които са цели числа имат целочислени базисни допустими решения. В частност при решаването им със стандартни средства на линейното оптимиране, като например симплекс метода, полученото оптимално базисно допустимо решение е целочислено. Следователно, ако векторът дясна част $\tilde{\mathbf{b}}(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$ на транспортната задача (TP) е с целочислени координати, то всички оптимални базисни допустими решения на задачата ще бъдат целочислени.

Матрицата на ограниченията на транспортната задача всъщност е матрица на инцидентност на двудолен неориентиран граф. Двудолен или биграф е такъв граф, върховете на който могат да бъдат разделени на две множества така че всяко ребро на графа да съединява връх от едното множество с връх от другото множество, т.е. няма ребра, съединяващи върхове от едно и също множество. В случая на транспортната задача едното множество върхове са пунктовете на производство, а другото – пунктовете на потребление. Всяка матрица на инцидентност на двудолен неориентиран граф е напълно унимодулярна. Напълно унимодулярна е и всяка матрица на инцидентност на произволен ориентиран граф.

§10. Дискретно оптимиране

Като се разгледат внимателно оптимизационните задачи, ясно се забелязва, че когато се моделира природно явление (такова, което има естествен произход), то математическият модел е непрекъснат, т.е. използваните в модела функции са непрекъснати функции в някакви интервали или свързани области.

Когато се прави математически модел на структури, създадени от човека, почти винаги възниква дискретност. Това е резултат от много фактори — стандартизация и унификация, серийност в производството и управлението, създаване на големи структури, в които процесите са прекъснати и квантувани и като такива си взаимодействат — транспорт, комуникации, различни мрежови образувания и т.н. и т.н.

Във втория случай математическият модел води до т.нар. дискретни (в частност целочислени) оптимизационни задачи, чийто най-общ вид е:

$$\max / \min \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega\},$$

където Ω е крайно или изброимо множество.

Да отбележим, че дори в случаите, когато f е непрекъснатата функция, това **не е** непрекъснатата задача, заради дискретния вид на допустимото множество.

Най-често дискретността се предполага за всяка от променливите на задачата поотделно:

$$\max \{f(x_1, \dots, x_n) : g_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i, i=1, \dots, m, x_j \in \Omega_j, j=1, \dots, n\}$$

и ако $f, g_i, i = 1, \dots, m$, са линейни функции на n променливи, а $\Omega_j, j = 1, \dots, n$, са множества от цели числа, получаваме т.нар. линейна целочислена оптимизационна задача

$$\max \{c^T \mathbf{x} : a_i^T \mathbf{x} \leq b_i, i = 1, \dots, m, 0 \leq x_j \text{ и цели, } j = 1, \dots, n\}.$$

Естествено (и най-често) част от променливите приемат непрекъснати стойности, а друга част от променливите приемат дискретни стойности — тогава говорим за смесено-целочислена задача. Такива задачи възникват най-често при оптимизация на икономически и производствени процеси.

§10.1. Оптимизационни модели на дискретни задачи

Ще разгледаме някои класически модели, които са важни и от теоретична гледна точка.

Задача за назначение. Във фирма има обявени n свободни работни места, за които кандидатстват n кандидати. Знаем c_{ij} — колко кандидатът i е годен за място j .

Въвеждаме променливите

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако кандидатът } i \text{ заема място } j, \\ 0, & \text{ако кандидатът } i \text{ не заема място } j. \end{cases}$$

$$\text{Търсим } \max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (\text{максималната полза})$$

при ограничения

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (\text{кандидатът } i \text{ заема точно едно място}), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad (\text{място } j \text{ се заема от точно един кандидат}), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Задача за раницата. Крадец разполага с раница с обем b и иска да максимизира печалбата си като реши кои предмети j с цена c_j и обем a_j да открадне.

$$\text{Търсим } \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (\text{максималната печалба})$$

при ограничения

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b,$$

$$0 \leq x_j \text{ и цели, } j = 1, \dots, n.$$

При горната формулировка говорим за целочислена задача за раницата.

Ако $x_j \in \{0, 1\}$ говорим за двоична задача за раницата.

Ако освен ограничението за обем се въведе и ограничение за тежест

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j \leq p,$$

и вече имаме две ограничения — за обем и за тежест, говорим за двумерна задача за раницата, а при повече ограничения — за многомерна задача за раницата.

Задача за покритие на граф. Нека $G(V, E)$ е граф с върхове $v_i \in V, i = 1, \dots, m$, ребра $e_j \in E, j = 1, \dots, n$ и матрица на инцидентност с елементи

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако реброто } e_j \text{ е инцидентно с върха } v_i, \\ 0, & \text{ако реброто } e_j \text{ не е инцидентно с върха } v_i. \end{cases}$$

Намирането на най-малкия брой ребра (минималното покритие), такива че всеки връх да бъде инцидентен с поне едно от тях, се формулира така: търсим

$$\min \sum_{j=1}^n x_j$$

при ограничения

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq 1, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогава тези ребра e_j , за които в решението \bar{x}^* съответните координати \bar{x}_j^* имат стойност 1, образуват търсеното покритие.

Задача от подобен тип е и следната: трима кандидати k_1, k_2, k_3 кандидатстват за работа в преводаческа фирма, която търси да назначи преводачи по английски, немски, френски, руски и китайски език. Всеки от кандидатите би получил заплата c_1, c_2, c_3 в зависимост от квалификацията си. Целта на фирмата е да осигури преводи от всеки един от езиците и то на минимална цена. Ако владенето от кандидатите на съответните езици е дадено с таблицата

кандидат език	k_1	k_2	k_3
английски	1		1
немски		1	1
френски	1	1	
руски		1	1
китайски	1		1

то моделът е следният

$$\min c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \quad \text{или} \quad \min c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &\geq 1 & x_1 + x_3 &\geq 1 \\ x_2 + x_3 &\geq 1 & x_2 + x_3 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 & x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_2 + x_3 &\geq 1 & x_j &\in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, 3. \\ x_1 + x_3 &\geq 1 \\ x_j &\in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Задача за четирите цвята. След откритието на Гутенберг, освен книги започват да се печатат и политически карти, при които територията на всяка държава се оцветява с отделен цвят. Веднага забелязали, че каквато и да е картата четири цвята са достатъчни, за да няма съседни държави, оцветени с еднакви цветове. Този факт бе доказан едва в наше време, като доказателството му и досега не е напълно прието

като чисто математическо, защото при него се използва компютърна проверка на варианти.

Нека политическата карта представим като граф G с върхове $i = 1, \dots, n$ като върховете на графа са държавите. Нека $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ е матрицата на съседство на графа: $a_{ij} = 1$, ако върхът i и върхът j са свързани с ребро (т.е. държавите i и j имат обща граница) за $i, j = 1, \dots, n$ и $a_{ij} = 0$ в противен случай. Въвеждаме променливите

$$z_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ако върхът } i \text{ е оцветен с цвета } k, \\ 0, & \text{ако върхът } i \text{ не е оцветен с цвета } k. \end{cases}$$

Тогава ограниченията са

$$\sum_{k=1}^t z_{ik} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{единствен цвят за връх})$$

където числото $t \geq 4$ и

$$L(1 - z_{ik}) - \sum_{j=1}^n a_{ij} z_{jk} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, t,$$

където L е число по-голямо от броя на съседните върхове на връх с най-голям брой такива, т.е. $L > \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}$.

Така ако държавата i е оцветена с цвета k (т.е. $z_{ik} = 1$) ще имаме че $\sum_{j=1}^n a_{ij} z_{jk} \leq 0$. И ако държавата i има обща граница с някоя държава j (т.е. $a_{ij} = 1$), то задължително $z_{jk} = 0$, т.е. цветът k няма да бъде използван за оцветяване на държавата j .

При тези ограничения търсим

$$\min \sum_{k=1}^t n^k \sum_{i=1}^n z_{ik}.$$

Коефициентите n^k са подбрани така, че използването на нов цвят да става само ако има абсолютна необходимост от него.

Трябва да отбележим, че политическата карта поражда планарен граф (или още плосък граф), т.е. граф, който може да бъде изобразен в равнината така, че ребрата му да не се пресичат. За графи, които не са планарни твърдението за четирите цвята не е вярно.

Задача за търговския пътник. Имаме пълен граф с n върха и за всеки два върха i и j знаем разстоянието между тях c_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$. Търси се хамилтонов цикъл в графа (цикъл, който минава през всички върхове на графа точно по веднъж), който има минимална сума от разстоянията по ребрата си. С други думи, търговският пътник тръгва

от върха 1 и преминавайки през всеки връх по веднъж трябва да се върне във върха 1 като при това измине най-кратък път. Въвеждаме променливите

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако от връх } i \text{ отива във връх } j, \\ 0, & \text{ако от връх } i \text{ не отива във връх } j. \end{cases}$$

Търсим

$$\begin{aligned} \min \sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \text{ (във всеки връх се влиза веднъж)}, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \text{ (от всеки връх се излиза веднъж)}, \\ x_{ij} \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Дотук ограниченията не са достатъчни, за да гарантират, че полученият път ще представлява хамилтонов цикъл — той може да се състои от няколко несвързани цикли. За да бъде избегната тази ситуация се въвеждат още n цели променливи $u_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ и ограничения

$$(10.1) \quad u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, \quad i, j = 2, \dots, n.$$

Ако има подцикъл, несъдържащ върха 1, то като съберем ограниченията, съответстващи на неговите ребра (за тях имаме $x_{ij} = 1$), то u_i и u_j ще се унищожат и ще стигнем до противоречивото неравенство $n \leq n - 1$. Следователно, не може в решението да има цикъл, неминаващ през върха 1.

За цикъл през върха 1 можем да намерим последователно стойности за u_i и u_j по него така че $u_i - u_j = -1$ и след като отчетем факта, че върхът 1 не влиза в така въведените ограничения (10.1), за хамилтоновия цикъл получаваме, че ограниченията (10.1) се изпълняват като равенства.

Задача за оптимален разкрой. Нека разполагаме с метални пръти с дължини l_1, \dots, l_k и от тях трябва да се отрежат елементи с дължини a_1, \dots, a_p съответно по n_1, \dots, n_p броя. Въвеждаме променливите x_{ij} — брой елементи от вид $i = 1, \dots, p$, които ще отрежем от прът $j = 1, \dots, k$ и променливите $y_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \dots, k$.

Търсим

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^k y_j \\ & \sum_{i=1}^p a_i x_{ij} \leq y_j l_j, \quad j = 1, \dots, k, \\ & \sum_{j=1}^k x_{ij} = n_i, \quad i = 1, \dots, p, \\ & 0 \leq x_{ij}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, k, \text{ и цели,} \\ & y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Първата група ограничения осигурява това, че ще режем от минимален брой пръти и няма да режем повече от дължината на пръта. Втората група гарантира броя на елементите.

Този модел за първи път е формулиран от руския математик Леонид Канторович през 1937-38 г. Той предлага и метод за решаване — вариант на симплекс метода.

Оптимизация на маршрути. До един събирателен център S (завод, град) трябва да се превозват пътници от няколко места, като всички те са свързани с достатъчно гъста мрежа от пътища.

Един от възможните начини да се построи оптимизационен модел е да се определи множеството от всички възможни (допустими) маршрути и да се оптимизира в това множество. Да, но в това множество има на няколко порядъка по-голям брой маршрути от действително необходимите. Отделен въпрос е и какво значи „допустим“ маршрут, защото психологически изследвания установяват, че ако човек пътува до работното си място повече от 45 мин. той рязко се демотивира и т.н.

Ние ще разгледаме по-оптимален модел.

Нека a_i , $i = 1, \dots, n$ е броят пътници от пункт i до S , а b е броят места в автобуса.

Нека x_{ij} е броят на пътниците от пункт $i = 1, \dots, n$ по маршрут $j = 1, \dots, m$. Нека M_i е индексното множество на всички маршрути, минаващи през пункт i , а P_j е индексното множество на всички пунктове по маршрут j и нека въведем променливите $y_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \dots, m$.

Ограниченията $\sum_{j \in M_i} x_{ij} = a_i$, $i = 1, \dots, n$ гарантират, че маршрутите през пункт i ще поемат a_i пътници, а ограниченията $\sum_{i \in P_j} x_{ij} \leq y_j b$, $j = 1, \dots, m$ гарантират, че ако маршрутът j се реализира (т.е. ако $y_j = 1$), то автобусът няма да се препълни.

Търсим $\min \sum_{j=1}^m y_j$, което сочи, че ще използваме минимален брой автобуси.

В случай, че на разположение са няколко вида автобуси (да речем два) с капацитет $b_1 < b$ и искаме при непълен голям автобус да използваме по-малкия, правим следното: въвеждаме променливи $\bar{y}_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \dots, m$ и в ограничения неравенства променяме десните страни на $\leq y_j b + \bar{y}_j b_1$ и добавяме ограничения $y_j + \bar{y}_j \leq 1$, $j = 1, \dots, m$ като търсим $\min \sum_{j=1}^m (y_j + c\bar{y}_j)$, където $0 < c < 1$.

Матрицата на ограниченията на тази задача е напълно унимодулярна (всичките ѝ минори са детерминанти, които имат стойност 0, 1 или -1). Известно е, че задачи на линейното оптимизиране с ограничения $Ax = b$, в които матрицата на ограниченията е абсолютно унимодулярна, а векторът b е с целочислени координати имат целочислени базисни допустими решения и по тази причина могат да бъдат решени със стандартни средства като симплекс метода. В такива задачи изискването за целочисленост на x_{ij} може да отпадне. Забележете, че същото свойство притежава и матрицата на ограниченията на класическата транспортна задача, която разглеждахме в § 9.

§10.2. Някои полезни похвати

При решаването на дискретни задачи се налага да бъдат преодолявани различни трудности. Тук ще се спрем на някои от тях.

Задачи с фиксирани добавки се срещат в случаите, когато към целевата функция се добавя фиксирана стойност, в случай че дадена променлива е различна от нула, независимо от това каква точно е стойността на променливата. Обичаен пример за фиксирана добавка е началната такса при такситата, която се начислява при повикване на таксито и е една и съща независимо от изминатото разстояние. Друг пример е цената за доставка на партида стоки, която не зависи от големината на партидата.

Ако целевата функция е $z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ фиксираната добавка се отразява в нея по следния начин:

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=1}^n d_j z_j \right\},$$

а в ограниченията се добавят $0 \leq x_j \leq U z_j$, $j = 1, \dots, n$, $z_j \in \{0, 1\}$, където U е достатъчно голямо положително число.

Това гарантира, че когато $x_j > 0$, то $z_j = 1$ и фиксираната добавка d_j влиза в целевата функция, а ако $x_j = 0$, то задължително $z_j = 0$ тъй като търсим минимум, а добавката е $d_j > 0$.

Различни логически ограничения водят до **ограничения от тип или-или**. Такова например е условието, ако едната от две променливи

приема положителна стойност, то другата задължително да има стойност 0. Тогава избираме достатъчно голямо число U и въвеждаме двоична променлива $z \in \{0, 1\}$ и ограниченията

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq Uz, \\ 0 &\leq x_2 \leq U(1 - z). \end{aligned}$$

Така ако $x_1 > 0$, то от първото ограничение следва, че $z = 1$, което пък чрез второто ограничение влече, че $x_2 = 0$. Ако пък $x_2 > 0$, то от второто ограничение следва, че $z = 0$, което пък чрез първото ограничение влече, че $x_1 = 0$.

Ако *целевата функция е от специален вид*, например

$$\max \sum_j c_j x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k},$$

и променливите $x_j \in \{0, 1\}$, то можем да заменим тази нелинейна функция с линейна като за всяко събираемо j от нея прибавим ограничения

$$\frac{x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_k}}{k} = z_j + y_j, \quad z_j \in \{0, 1\}, \quad 0 \leq y_j \leq 1 - \frac{1}{k}$$

и като нова целева функция вземем линейната функция $\sum_j c_j z_j$, на която също търсим максимума.

Да отбележим, че $z_j = 1$ само ако всички $x_{j_1} = x_{j_2} = \dots = x_{j_k} = 1$. В противен случай $z_j = 0$ и $y_j = \frac{x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_k}}{k} \leq \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}$.

Подобни трудности постоянно възникват в практически задачи — нелинейни или прекъснати целеви функции, неизпъкнали или несвързани допустими множества и др.

§11. Целочислено линейно оптимиране

Целочисленото оптимиране е дял от математическото оптимиране, който се занимава с оптимизационни задачи, на които или всички, или само някои от променливите приемат цели стойности. Една задача наричаме **целочислена** ако всички нейни променливи трябва да приемат цели стойности. Ако това условие се отнася само до някои от променливите на задачата, тя се нарича **смесено целочислена задача**. Така, ако в една задача на линейното оптимиране (L) се добави условието всичките ѝ променливи x_j , $j = 1, \dots, n$ да приемат цели стойности, новата задача се нарича целочислена линейна задача, а ако се добави условието само някои от променливите ѝ x_j да приемат цели стойности, тя се нарича смесено целочислена линейна задача.

Да разгледаме следния прост пример на линейна целочислена задача:

Пример 11.1. Да се намери

$$(IP) \quad \begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= -x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 &\leq 1, \\ 16x_1 - 14x_2 &\leq 7, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Тази задача би била линейна задача ако го нямаше последното изискване – променливите x_1 и x_2 да приемат само цели стойности. Естествено е да се предположи, че подобна целочислена задача би могла да се реши като просто се игнорират изискванията за целочисленост, реши се линейната (нецелочислена) задача и след това се закръглят до цели числа нецелочислените координати на решението. Само че подобен подход много често води до получаване на точка, която е недопустима за целочислената задача или до допустима точка, стойността на целевата функция в която е далеч от оптималната стойност на целочислената задача. Линейната задача, която получаваме като забравим за условието за целочисленост на променливите:

$$(LP) \quad \begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= -x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 &\leq 1, \\ 16x_1 - 14x_2 &\leq 7, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

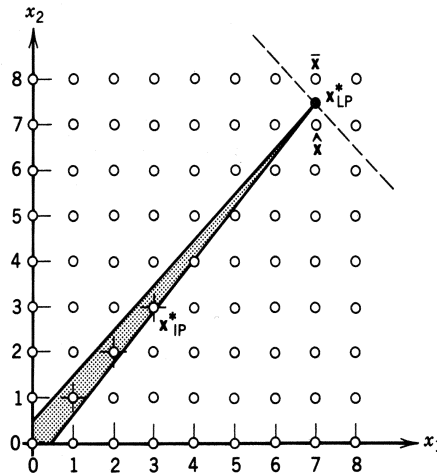
се нарича отслабена (защото премахвайки условието за целочисленост на решението, ние отслабваме ограниченията) или релаксирана задача, съответстваща на целочислената задача (IP) . Оптималното решение на (LP) е $\mathbf{x}_{LP}^* = (7; 7; 5)$, а оптималната стойност на целевата функция е $z_{LP}^* = -14, 5$. Като закръглим нецелочислената координата на решението надолу ще получим

$$\hat{\mathbf{x}} = (7; 7) \text{ и стойност на целевата функция } \hat{z} = z(\hat{\mathbf{x}}) = -14,$$

а като я закръглим нагоре съответно ще получим

$$\bar{\mathbf{x}} = (7; 8) \text{ и стойност на целевата функция } \bar{z} = z(\bar{\mathbf{x}}) = -15.$$

За съжаление нито една от точките $\hat{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{x}}$ не е допустима за задачата (IP).



Фигура 11.1.

Допустимото множество на отслабената задача (LP) е заштрихованият четириъгълник на фиг. 11.1. В него само четирите точки означени с кръгче, от които излизат четири чертички имат целочислени координати и следователно представляват допустимото множество на целочислената задача (IP). Оптималното решение на целочислената задача (IP) е

$$\mathbf{x}_{IP}^* = (3; 3) \text{ с оптимална стойност на целевата функция } z_{IP}^* = -6.$$

Очевидно оптималното решение \mathbf{x}_{IP}^* на целочислената задача е далеч от всяка от точките $\hat{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{x}}$, както и оптималната стойност z_{IP}^* на целевата функция на целочислената задача е далеч от стойностите \hat{z} и \bar{z} .

Този пример показва, че една целочислена линейна задача в общия случай не може да се реши чрез просто закръгляване на координатите на решението на нейната релаксация. Въпреки това решението на релаксираната задача (LP) може да даде някаква информация за решението на целочислената задача (IP). Добавянето на допълнителни ограничения към една оптимизационна задача или намалява допустимото ѝ множество, или то остава същото. Намаляването на допустимото множество никога не води до по-добра оптимална стойност на целевата функция. Следователно, добавянето на целочислени ограничения към една линейна задача никога не може да подобри оптималната ѝ стойност. Така ако z_{IP}^* е оптималната стойност на една целочислена линейна задача за минимум, а z_{LP}^* е оптималната стойност на нейната релаксация, то

$$z_{IP}^* \geq z_{LP}^*.$$

С други думи, решаването на съответната на дадена целочислена линейна задача за минимум релаксирана задача ни дава долна граница на оптималната стойност на целевата функция на целочислената задача.

Фигура 11.1 може да ни наведе на мисълта за един друг наивен подход за решаване на целочислени задачи. Допустимото множество на една линейна задача винаги съдържа безкрайно много точки, защото променливите ѝ могат да приемат произволни реални стойности. Ако променливите трябва да приемат целочислени стойности, понякога (ако допустимото множество е ограничено) би могло да се случи така, че целочислената задача да има само краен брой допустими точки и те могат да се изследват една по една в търсене на оптималното решение. В задачата (IP) от примера от ограниченията неравенства можем да заключим, че няма допустими точки, чиито координати да са по-големи от 8. Тъй като и двете координати трябва да са неотрицателни, единствените целочислени точки $\mathbf{x}(x_1, x_2)$, които могат да бъдат допустими за (IP) са тези, за които

$$x_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

и

$$x_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Всяка от тези $9 \times 9 = 81$ точки може да бъде проверена, за да се види дали удовлетворява ограниченията неравенства. След това целевата функция може да се пресметне само в тези точки и най-малката от тях ще бъде оптималната стойност. Този метод на решаване се нарича пълно изчерпване. При него се определя множеството от цели стойности, които може да приема всяка променлива. За примера от фиг. 11.1 е ясно, че за координатите на всяка точка с цели координати (x_1, x_2) , удовлетворяваща неравенствата трябва да бъде изпълнено $x_1 \leq 8$ и $x_2 \leq 8$ въз основа на което беше лесно да определим множествата от възможните им стойности. В много задачи обаче това не е толкова лесно, защото границите на променливите може да не бъдат толкова лесни за установяване. Ограниченията в някои задачи определят неограничени области, а в такъв случай изобщо не могат да се поставят граници за стойностите на променливите.

Дори когато е възможно да се определи крайно множество от възможни стойности на променливите, пълното изчерпване е непривлекателно от изчислителна гледна точка за всички целочислени задачи, с изключение може би на най-простите от тях. Реалните целочислени задачи по правило са с много променили, като всяка от тях е възможно да приема много цели стойности. Ако задачата е само с 10 променливи и ако всяка от тях може да приема само 9 стойности, както беше в нашия пример, то броят на точките, които трябва да се изследват при едно пълно изчерпване би бил $9^{10} = 3\,486\,784\,401$. Така че, дори и пресмятанятия да се правят на високопроизводителни изчислителни машини, пълното изчерпване обикновено изобщо не се разглежда като възможност.

Всеки практичен алгоритъм за решаване на целочислени задачи трябва по някакъв начин да отчита всички възможни допустими точки

без явно да ги изчерпва. Примерът 11.1 показва, че в общия случай оптималното решение на една линейна целочислена задача не може да се получи чрез просто закръгляване на координатите на решението на нейната релаксирана (нецелочислена) линейна задача. Въпреки това, ако се случи така, че решението на релаксираната задача да има координати, които са цели числа, то разбира се ще бъде решение и на целочислената задача. Това навежда на мисълта, по някакъв начин да се построи линейна задача, чието решение да бъде оптимално за целочислената задача, която искаме да решим.

Има два принципно различни подхода, по които това да бъде направено, които определят и разделянето на методите за решаване на целочислени линейни оптимизационни задачи на два вида — методи на отсичането и комбинаторни методи.

При *методите на отсичането* като изходна се взима релаксираната задача (без условията за целочисленост). Чрез добавянето на специални допълнителни ограничения, които отчитат изискването за целочисленост, допустимото множество на релаксираната задача се деформира дотогава, докато координатите на оптималното решение станат целочислени. С всяко допълнително ограничение се отсича някаква част от допустимото множество, в която обаче няма точки с цели координати.

В основата на *комбинаторните методи* лежи идеята за претърсването на всички допустими точки на целочислената задача. Разбира се, най-напред се разглежда проблема за разработка на такива тестови процедури, които позволяват пряко да се разглеждат само част от тези допустими точки, а останалите да се отчитат косвено, за да не се стига до пълно изчерпване. В случай, че целочислените променливи са булеви (приемат само стойности 0 или 1) се прилагат комбинаторни методи. Булевите свойства на променливите съществено опростяват намирането на решение.

§11.1. Метод на Гомори

От историческа гледна точка това е първият алгоритъм за решаване на дискретни линейни оптимизационни задачи. Той е метод на отсичането. Разработен е от Гомори през 1957-58 год. като метод за решаване на линейни целочислени задачи.

Най-общо идеята е следната: нека търсим

$$\begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}, \\ 0 \leq x_j, \text{ и цели } j &= 1, \dots, n, \end{aligned}$$

където \mathbf{A} е $(m \times n)$ матрица, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^m$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ е n -мерен вектор на променливите. Това е канонична задача с допълнително условие за целочисленост върху всички променливи.

Знаем, че ограниченията $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $0 \leq x_j$, $j = 1, \dots, n$ (без целочисленост) представляват изпъкнало канонично многостенно множество $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Да означим множеството от точки с цели координати в M с Ω . Очевидно Ω е допустимото множество на дадената целочислена задача и $\Omega \subset M$. Ако означим с M' изпъкналата обвивка на Ω , тя също ще бъде изпъкнало многостенно множество, като $M' \subset M$. Задачата

$$\min \{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in M'\}$$

очевидно е еквивалентна на изходната и е линейна оптимизационна задача, която можем да решим със симплекс метода. Нейното решение ще бъде целочислено. Оказва се обаче, че намирането на изпъкналата обвивка M' е изключително сложна задача — по-сложна от изходната. Идеята на Гомори се състои в това, че не е необходимо да търсим цялата изпъкнала обвивка M' , а само тази част от нея, която се намира „около“ непрекъснатото решение на линейната задача. Това се постига чрез последователни „отсичания“ от изходното многостенно множество M чрез т.нар. правилни отсичащи хиперравнини. Всяка нова хиперравнина е ново линейно ограничение, което не се удовлетворява от непрекъснатото решение (т.е. тя го отсича от M), но не отсича нито една точка от Ω , т.е. нито една точка от M с цели координати. След добавянето на ново ограничение се решава получената нова линейна задача и се предполага, че в края на процеса последното получено решение ще се окаже целочислено, с което ще сме решили изходната задача.

Необходимо условие за прилагането на метода на Гомори е всички коефициенти на матрицата на ограниченията \mathbf{A} и десните части на ограниченията \mathbf{b} да бъдат цели числа.

Ще опишем (без доказателство) построяването на правилно отсичане.

Нека е решена релаксираната задача, съответна на изходната (с премахнато условие за целочисленост на променливите):

$$\begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}, \\ 0 &\leq x_j, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

и нека полученото оптимално базисно допустимо решение $\bar{\mathbf{x}}$ е с базисна матрица $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m]$. От базисния вид на задачата спрямо оптималния базис имаме, че базисните променливи на решение на системата се изразяват чрез небазисните като

$$(11.1) \quad x_i = \bar{x}_i - \sum_{j \in N} w_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

където $\mathbf{w}_j = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j$ за \mathbf{A}_j , който е j -ият стълб на матрицата \mathbf{A} , а w_{ij} е i -та координата на вектора \mathbf{w}_j за $i = 1, \dots, m$.

Ако $\bar{\mathbf{x}}$ е с целочислени координати, то очевидно ще бъде решение и на изходната задача. Нека сега случаят не е такъв и например координатата му \bar{x}_i не е цяло число. Очевидно става дума за базисна координата

тъй като небазисните са нули. Нека представим $\bar{x}_i = [\bar{x}_i] + \{\bar{x}_i\}$, където $[\bar{x}_i]$ е цяло число, а $0 < \{\bar{x}_i\} < 1$ и да представим $w_{ij} = [w_{ij}] + \{w_{ij}\}$, където $[w_{ij}]$ е цяло число, а $0 \leq \{w_{ij}\} < 1$ (като обърнем внимание, че ако $w_{ij} = \frac{7}{4}$, то $[w_{ij}] = 1$, а $\{w_{ij}\} = \frac{3}{4}$, докато ако $w_{ij} = -\frac{7}{4}$, то $[w_{ij}] = -2$, а $\{w_{ij}\} = \frac{1}{4}$). Заместваме в изразяването (11.1) на x_i и получаваме

$$x_i = [\bar{x}_i] - \sum_{j \in N} [w_{ij}]x_j + \{\bar{x}_i\} - \sum_{j \in N} \{w_{ij}\}x_j$$

или

$$x_i - [\bar{x}_i] + \sum_{j \in N} [w_{ij}]x_j = \{\bar{x}_i\} - \sum_{j \in N} \{w_{ij}\}x_j.$$

Тъй като искаме координатите на \mathbf{x} да имат цели стойности, то лявата част на равенството трябва да бъде цяло число. Следователно и дясната част на равенството трябва да бъде цяло число. Да обърнем внимание, че $\sum_{j \in N} \{w_{ij}\}x_j \geq 0$ понеже $x_j \geq 0$ и $\{w_{ij}\} \geq 0$ за всяко j . Оттук дясната страна на последното равенство

$$\{\bar{x}_i\} - \sum_{j \in N} \{w_{ij}\}x_j \leq \{\bar{x}_i\} < 1$$

и следователно

$$\{\bar{x}_i\} - \sum_{j \in N} \{w_{ij}\}x_j \leq 0$$

тъй като трябва да бъде цяло число.

Отсичането на Гомори е

$$(11.2) \quad s_i = \sum_{j \in N} \{w_{ij}\}x_j - \{\bar{x}_i\}$$

като $s_i \geq 0$ е нова неотрицателна променлива, която трябва да приема цели стойности.

Понеже за оптималното решение $\bar{\mathbf{x}}$ имаме, че небазисните му координати $\bar{x}_j = 0$ за $j \in N$, то като ги заместим в отсичането (11.2) получаваме $s_i = -\{\bar{x}_i\} < 0$, т.е. получаваме отрицателна стойност на променливата s_i . Тъй като трябва $s_i \geq 0$, имаме че $\bar{\mathbf{x}}$ не удовлетворява новото ограничение или с други думи казано, то отсича $\bar{\mathbf{x}}$ от допустимото множество на релаксираната задача. Налага се да се направи реоптимизация върху новото допустимо множество. За целта се използва вариант на симплекс метода наречен двойствен симплекс метод.

И така, всеки път след построяване на ново отсичане, се решава получената нова линейна задача и се предполага, че в края на процеса поредното получено решение ще се окаже целочислено, с което ще бъде решена изходната целочислена задача.

Да илюстрираме казаното дотук със следния

Пример 11.2. Да се намери

$$\max \{21x_1 + 11x_2 : 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13, 0 \leq x_j \text{ и цели, } j = 1, 2, 3\}.$$

Разглеждаме съответната релаксирана задача (без условието за целочисленост):

$$\max \{21x_1 + 11x_2 : 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13, 0 \leq x_j, j = 1, 2, 3\}$$

и я свеждаме до канонична задача:

$$\begin{aligned} \min & -21x_1 - 11x_2 \\ & 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Оптималният базис е $\{x_1\}$, в което може да се убедим след като решим системата относно x_1 , заместим го в целевата функция и получим неотрицателни коефициенти пред небазисните x_2 и x_3 :

$$\begin{aligned} \min & x_2 + 3x_3 - 39 \\ & x_1 + \frac{4}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 = \frac{13}{7}, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Следователно оптималното решение е $\bar{x} = (\frac{13}{7}, 0, 0)$, а оптималната стойност на целевата функция е $z^* = -39$. Очевидно \bar{x}_1 не е цяло. От неговото уравнение изразяваме

$$x_1 = -\frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 + 1 + \frac{6}{7},$$

за да получим отсичането

$$s_1 = \frac{4}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 - \frac{6}{7}.$$

Трябва да решим задачата с добавеното отсичане:

$$\begin{aligned} \min & x_2 + 3x_3 - 39 \\ & x_1 + \frac{4}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 = \frac{13}{7} \\ & \frac{4}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 - s_1 = \frac{6}{7}, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, s_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Оптималният базис е $\{x_1, x_2\}$, в което може да се убедим след като решим системата относно x_1 и x_2 , заместим ги в целевата функция и получим неотрицателни коефициенти пред небазисните x_3 и s_1 :

$$\begin{aligned} \min & \frac{11}{4}x_3 + \frac{7}{4}s_1 - 37\frac{1}{2} \\ & x_1 + s_1 = 1, \\ & x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{7}{4}s_1 = \frac{3}{2}, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, s_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Следователно оптималното решение е $\bar{\mathbf{x}} = \left(1, \frac{3}{2}, 0, 0\right)$, а оптималната стойност на целевата функция е $z^* = -37\frac{1}{2}$. Очевидно \bar{x}_2 не е цяло. От неговото уравнение изразяваме

$$x_2 = -\frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{4}s_1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}x_3 + \left(2 - \frac{1}{4}\right)s_1 + 1 + \frac{1}{2},$$

за да получим отсичането

$$s_2 = \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{2}.$$

Сега трябва да решим задачата с добавеното отсичане:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{11}{4}x_3 + \frac{7}{4}s_1 - 37\frac{1}{2} \\ x_1 \quad & + s_1 = 1, \\ x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{7}{4}s_1 \quad & = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}s_1 - s_2 \quad & = \frac{1}{2}, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Оптималният базис е $\{s_1, x_2, x_3\}$, в което може да се убедим след като решим системата относно s_1 , x_2 и x_3 , заместим ги в целевата функция и получим неотрицателни коефициенти пред небазисните x_1 и s_2 :

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 11s_2 - 33 \\ x_1 \quad & + s_1 = 1, \\ 2x_1 + x_2 \quad & + s_2 = 3 \\ -x_1 \quad & + x_3 - 4s_2 = 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Оптималното решение е $\bar{\mathbf{x}} = (0, 3, 1, 1, 0)$, а оптималната стойност на целевата функция е $z^* = -33$. Оттук получаваме оптималното целочислено решение $\mathbf{x}^*(0, 3, 1)$ на изходната целочислена задача и оптималната стойност 33 на целевата ѝ функция, с което изчислителният процес приключва.

Методът на отсичащите равнини не получава широко разпространение поради причини, които прозират и от нашето кратко описание — много дълъг изчислителен процес, при който неминуемо се губи точност, няма гаранция за сходимост на процеса в общия случай, получените по време на изчислителния процес решения на релаксираните задачи (с изключение на последното) са нецелочислени и не принадлежат на допустимото множество на изходната целочислена задача и т.н.

§12. Метод на разклоняване и граници

Методът на разклоняване и граници (Branch & Bound) е комбинаторен метод, който предлага един универсален подход за решаване на почти всички видове дискретни оптимизационни задачи. Идеята за създаването му възниква през 1963 год. след една забавна история, при която фирма публикува с рекламна цел една задача от тип задача на търговския пътник без да знае нито какво е решението, нито как се решават подобни задачи. След нарастващ скандал от страна на клиентите да получат наградата за това, че са изпратили верен отговор, фирмата се обръща към професионални математици, които решават въпросния пример и предлагат новия метод.

За да илюстрираме метода, да разгледаме следния пример на целочислена линейна задача.

Пример 12.1. Да се намери

$$(IP) \quad \begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= 4x_1 - 6x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_1 + 3x_2 &\leq 9, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0, \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

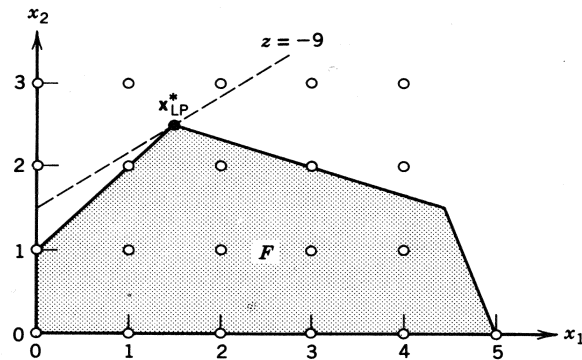
Съответната ѝ релаксирана линейна задача (без условията за целочисленост) е

$$(LP) \quad \begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= 4x_1 - 6x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_1 + 3x_2 &\leq 9, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Като означим с F допустимото множество на релаксираната задача, можем да я запишем накратко като

$$(LP) \quad \min_{\mathbf{x} \in F} z(\mathbf{x}).$$

Оптималното решение \mathbf{x}_{LP}^* на тази задача е с координати $x_1^* = 1, 5$, $x_2^* = 2, 5$, а оптималната стойност на целевата функция е $z^* = -9$. На фиг. 12 е показано допустимото множество F и оптималното решение \mathbf{x}_{LP}^* на релаксираната задача (LP) , а с пунктирна линия е означена



Фигура 12.1.

линията на ниво $z = -9$, съответстваща на оптималната стойност на целевата функция.

На фиг. 12 някои от точките са означени със символа (\circ). Те имат цели стойности и на двете си координати. Такива точки се наричат точки от целочислената решетка, или за по-кратко – целочислени точки. Допустимото множество на задачата (IP) е сечението на допустимото множество F на задачата (LP) с целочислената решетка. Тъй като решението на задачата (LP) има нецелочислени координати, то очевидно не е допустимо за целочислената задача (IP). Да забележим, че тъй като x_1 трябва да приема цяла стойност в оптималното решение на (IP), то оптималното решение на (IP) трябва да удовлетворява

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in F \\ x_1 \leq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{x} \in F \\ x_1 \geq 2 \end{cases}.$$

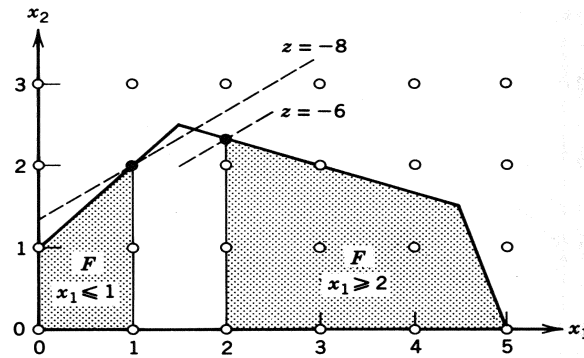
Нещо повече, ако конструираме две нови линейни задачи, чиито допустими множества са посочените, тогава нежеланата нецелочислена координата $x_1 = 1,5$ ще бъде изключена от решенията и на двете. Забележете, че всяка допустима точка на целочислената задача попада в някое от двете множества, т.е. с това разделяне на множеството не губим нито една целочислена точка. Двете нови релаксирани линейни задачи са

$$\begin{array}{ll} \min z(\mathbf{x}) & \min z(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in F & \mathbf{x} \in F \\ x_1 \leq 1, & x_1 \geq 2, \end{array}$$

с оптимални решения и стойности на целевата функция в тях съответно

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1, & x_1 = 2, \\ x_2 = 2, & x_2 = \frac{7}{3}, \\ z = -8 & z = -6. \end{array}$$

Допустимите множества на тези две задачи са показани на фиг. 12.2, а оптималните им решения са обозначени със символа (\bullet).



Фигура 12.2.

Процесът на конструиране на нови задачи чрез добавяне на ограничения се нарича **разклоняване**. Тъй като ограниченията, които добавихме бяха върху променливата x_1 казваме, че сме разклонили по x_1 .

Както се вижда на фиг. 12.2, разклоняването по x_1 има ефекта на разделяне на множеството F на две подмножества

$$F \cap \{\mathbf{x} : x_1 \leq 1\} \quad \text{и} \quad F \cap \{\mathbf{x} : x_1 \geq 2\}.$$

Линейни релаксирани задачи, които се получават в резултат на разклоняването се наричат под-задачи, за да бъдат различавани от главната задача (master problem) (IP). Решението на лявата под-задача е целочислено и следователно е допустима точка за (IP). Разбира се, все още не можем да твърдим, че то е нейно оптимално решение, защото могат да съществуват други целочислени допустими точки (извън допустимото множество на тази подзадача), в които целевата функция да приема по-малка стойност. Да забележим, че оптималните стойности на под-задачите се явяват (в случая долни) граници на стойностите на целевата функция върху съответните допустими множества. Така например, що се отнася до дясната под-задача нито една точка в множеството $\{\mathbf{x} \in F, x_1 \geq 2\}$ не би могла да дава по-добра (в случая по-малка) стойност, отколкото $z = -6$. Следователно и нито една целочислена точка в това множество не би могла. Тъй като вече разполагаме с целочислена точка, която дава по-добра стойност на целевата функция (решението на лявата под-задача $\mathbf{x}(1, 2)$, при което $z = -8$), то не би могло оптималното решение на (IP) да бъде такова, за което $x_1 \geq 2$. Това означава, че множеството $\{\mathbf{x} \in F, x_1 \geq 2\}$ може да бъде изключено от по-нататъшни разглеждания.

Оптималната стойност на лявата под-задача е долна граница на стойностите на целевата функция върху множеството $\{\mathbf{x} \in F, x_1 \leq 1\}$, т.е. нито една точка в това множество не може да даде по-добра стойност на целевата функция от $z = -8$. В частност, нито една целочислена

точка в него не може да даде по-добра стойност на z от тази, която тя има в $\mathbf{x}^*(1, 2)$.

Окончателно, $\mathbf{x}^*(1, 2)$ е оптималното решение на (IP) .

Да забележим, че също така успешно бихме могли да решим (IP) и ако разклоним по другата променлива – по x_2 . В резултат ще получим следните две под-задачи

$$\begin{array}{ll} \min z(\mathbf{x}) & \min z(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in F & \mathbf{x} \in F \\ x_2 \leq 2, & x_2 \geq 3, \end{array}$$

с оптимално решение

с празно допустимо множество.

$$\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ z = -8. \end{array}$$

Това, че дясната под-задача е с празно допустимо множество означава, че оптималното решение на (IP) не може да бъде такова, че за него да бъде изпълнено $x_2 \geq 3$. Това е в съответствие с показаното на фиг. 12.2, от което е ясно, че няма точки в F , целочислени или не, за които $x_2 \geq 3$. Решението на лявата под-задача е най-доброто което може да се получи върху подмножеството на F , за което $x_2 \leq 2$ и следователно няма целочислено решение в това подмножество, което да е по-добро от $\mathbf{x}(1, 2)$. Така още веднъж заключаваме, че $\mathbf{x}(1, 2)$ е оптималното решение на (IP) .

Методът, който използвахме, за да решим примера се нарича **метод на разклоняване и граници** (Branch & Bound). Той работи чрез разбиване на допустимото множество на подмножества и разклоняване на под-задачи, чиито оптимални стойности се използват като граници, за да определи дали дадено подмножество може да съдържа оптималното решение или не. Процесът на взимане на решение дали дадено подмножество да бъде изключено от по-нататъшни разглеждания се нарича *fathoming* (изключване). Изключването дава същият резултат, какъвто би бил получен чрез пълно изчерпване на всички възможни допустими точки, но го дава без в действителност да изследва всички точки. По тази причина методът разклоняване и граници представлява схема за неявно изчерпване.

В разгледания пример, за да намерим долна граница на целевата функция върху всяко от подмножествата, решавахме релаксираната (нецелочислена) линейна под-задача. Логиката на метода обаче не зависи от това какви точно граници се използват, така че методът може да се използва за решаване и на нелинейни целочислени задачи, както и за произволни дискретни задачи. Разбира се, тогава релаксираните задачи ще се образуват по различен начин, а за съответно определяне на границите на функцията ще се използват други методи.

Както илюстрирахме с примера, методът Branch & Bound (или накратко B&B) генерира последователност от множества, които се различават едно от друго само по границите върху променливите. Решенията на съответните им под-задачи се използват за да се заключи, че някои подмножества не могат да съдържат решението на главната целочислена задача и тези подмножества системно се елиминират от по-нататъшни разглеждания. В даден момент методът или ще генерира под-задача чието решение ще бъде оптимално за главната задача или ще установи, че главната задача е с празно допустимо множество.

За да опростим формалното изложение на алгоритъма ще използваме означенията, които въведохме в примера, в който главната целочислена задача бе от вида

$$(IP) \quad \begin{aligned} \min \quad & z(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in \quad & F \\ & x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

За да опишем алгоритъма просто внимателно изписваме стъпките на метода, използван за решаване на примера.

§12.1. B&B алгоритъм за решаване на целочислена линейна задача (IP)

0. Инициализиране. Решава се съответната на главната задача (IP) оценъчна задача

$$\min_{\mathbf{x} \in F} z(\mathbf{x})$$

(без условията за целочисленост). Ако решението ѝ удовлетворява условията за целочисленост, КРАЙ (то е оптимално и за главната задача). Ако не, като R (рекорд) на оптималната стойност на целевата функция z се взима $R = +\infty$ и се образува списък $S = \{F\}$.

1. Разклоняване. От списъка S се избира и се изважда от него едно множество (на първата итерация се избира F). Избира се нецелочислена координата на решението на съответната му оценъчна под-задача. Множеството се разделя на две подмножества чрез добавяне на ограничения, които изключват нецялата координата на решението. Двете под-множества се добавят към списъка S .

2. Граници. За всяко от двете нови подмножества се намира долна граница z_L на стойностите на z върху него.

3. Изключване. Всяко от двете нови подмножества се изследва за това дали може да съдържа оптимално решение на главната задача и се изключва от по-нататъшни разглеждания (от списъка S), ако

- (а) $z_L \geq R$, или
- (б) е празно, или
- (в) z_L се достига в целочислена точка и $z_L < R$.

В случай (в),

- целочислената точка става текущо решение;
- сменя се рекорда $R = z_L$;
- GO TO 3, за да се види дали и други множества от списъка могат да се изключат.

4. Тест. Ако $S = \emptyset$ (т.е. списъкът е празен), КРАЙ (текущото решение е оптимално за главната задача (IP)). В противен случай, GO TO 1.

Всяко пълно преминаване през стъпки от 1 до 4 на алгоритъма е една итерация. Ако в края на алгоритъма рекордът не се е променил, т.е. $R = +\infty$, то главната задача е с празно допустимо множество. За съжаление, в този случай алгоритъмът се превръща в почти пълно изчерпване на вариантите.

Важно е да се помни, че тъй като целевата функция е една и съща при всички под-задачи, то всяко от множества в списъка може да се идентифицира със съответната под-задача, на която е допустимо множество.

Има много начини да се имплементира алгоритъма, различаващи се по това

- как се избират множества от списъка;
- как се избира по коя променлива да се разклонява;
- как се определят долните граници на целевата функция

върху множества.

В примера беше загатнато за такива вариации, защото получихме решението по два начина – разклонявайки по различни променливи. И двата процеса за намиране на решението на задачата от примера следват горния алгоритъм. Но, за да се създаде програма за реализиране на алгоритъма за определен клас от задачи е необходимо предварително да се определят точните правила по които ще се правят горните три избора. Това до голяма степен зависи от това дали решаваната целочислена задача има специфична структура, която позволява да се направи вариант на алгоритъма, в който тези избори се правят по по-удачен начин.

С помощта на метода Branch & Bound, вече казахме, могат да се решават произволни дискретни задачи. Релаксацията се прави като подмножествата се включват в подходящо подбрани техни разширения и се решават съответните оценъчни под-задачи за определяне на границите. Тук възникват редица въпроси, свързани с ефективността на алгоритъма. Колко „лесно“ се решават оценъчните задачи, колко точни са границите, няма ли S да стане много голям списък и т.н. Принципните отговори са: колкото по-груби са разширенията, толкова по-лоши са границите и толкова по-голям е списъкът S , но за сметка на това

оценъчните задачи се решават по-лесно. Компромисът тук се прави по различен начин за всеки отделен вид задачи в зависимост от тяхната специфика.

Накрая, за да илюстрираме възможностите на алгоритъма V&B, ще дадем неговия вариант за решаване на двоична задача за раницата

$$(KP) \quad \max \{z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b, x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n\}.$$

За всеки предмет $j, j = 1, \dots, n$ са известни неговата цена c_j и неговият обем a_j . Ще предположим, че е изпълнено условието

$$(12.1) \quad \frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{a_n},$$

което означава че предметите са подредени в намаляващ ред на отношението цена/обем. Това предположение не ограничава общността, защото винаги можем да преномерираме променливите: променливата x_1 да съответства на предмета, за който отношението цена/обем е максималното, променливата x_2 да означава предмета, за който отношението цена/обем е максималното от тези на останалите предмети и т.н.

Съответната на задача от вида (KP) релаксирана (оценъчна) задача е задачата

$$(RKP) \quad \max \{z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b, 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, n\},$$

която се получава като релаксираме условието за това променливите да приемат само стойностите 0 и 1 и го заменим с условието променливите да приемат стойности в интервала от 0 до 1. В случая множеството F е нейното допустимо множество

$$F = \{\mathbf{x} : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b, 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, n\}.$$

Ако разклоняваме по променливата x_j двете множества ще бъдат $\{\mathbf{x} \in F, x_j = 0\}$ и $\{\mathbf{x} \in F, x_j = 1\}$, т.е. във всяко от тях x_j ще бъде с фиксирана на 0 или на 1 стойност.

Оптимално решение \mathbf{x}^* на оценъчна задача (RKP) , за която е в сила условието (12.1), се намира много лесно. Ако означим с k най-

голямото цяло положително число, за което $\sum_{j=1}^k a_j \leq b$ и положим $\alpha =$

$$\frac{b - \sum_{j=1}^k a_j}{a_{k+1}}, \text{ то}$$

$$\mathbf{x}^* = (1, 1, \dots, 1, \frac{\alpha}{a_{k+1}}, 0, \dots, 0)$$

е оптимално решение на (RKP) . Съответно $z_U = z(\mathbf{x}^*)$ е горна граница за стойностите на z върху допустимото множество на (KP) .

След като уточнихме как изглеждат в случая оценъчните задачи и как да ги решаваме, за да намираме необходимите граници, остава да посочим критерий за избор на множества от списъка и на променливи, по които да ги разклоняваме. За по-кратко ще го направим като разпишем

§12.2. Алгоритъм В&В за решаване на едномерна двоична задача за раницата (KP)

0. Инициализиране. Ако е нужно, преномериране променливите така, че да бъде изпълнено условието (12.1). Решаваме оценъчната задача (RKP) . Ако решението удовлетворява условията за целочисленост, КРАЙ (то е оптимално за (KP)). Ако не, като рекорд R взимаме $R = -\infty$, а списъкът е $S = \{F\}$.

1. Разклоняване. От списъка S избираме и изваждаме от него множеството с най-голяма стойност на границата z_U , пресметнатата за съответната оценъчна задача (на първата итерация се избира допустимото множество F на (RKP)). Множеството се разделя на две подмножества като се разклонява по променливата с най-малък индекс, която не е фиксирана като стойност в него (на първата итерация се разклонява по x_1). Двете подмножества се добавят към списъка S .

2. Граници. За всяко от двете нови подмножества се решава съответната му оценъчна задача от вида (RKP) и за граница z_U се взима нейната оптимална стойност.

3. Изключване. Всяко от двете нови подмножества се разглежда и се изключва от по-нататъшни разглеждания (от списъка S), ако

- (а) съответната граница $z_U \leq R$, или
- (б) е празно, или
- (в) z_U се достига в целочислена точка и $z_U > R$.

В случай (в):

- целочислената точка става текущо решение;
- сменя се рекорда $R = z_U$;
- GO TO 3, за да се види дали и други множества от списъка могат да се изключат.

4. Тест. Ако $S = \emptyset$, КРАЙ (текущото решение е оптимално за главната задача (KP)). В противен случай, GO TO 1.

Да приложим сега горния метод за решаване на конкретна двоична задача за раницата.

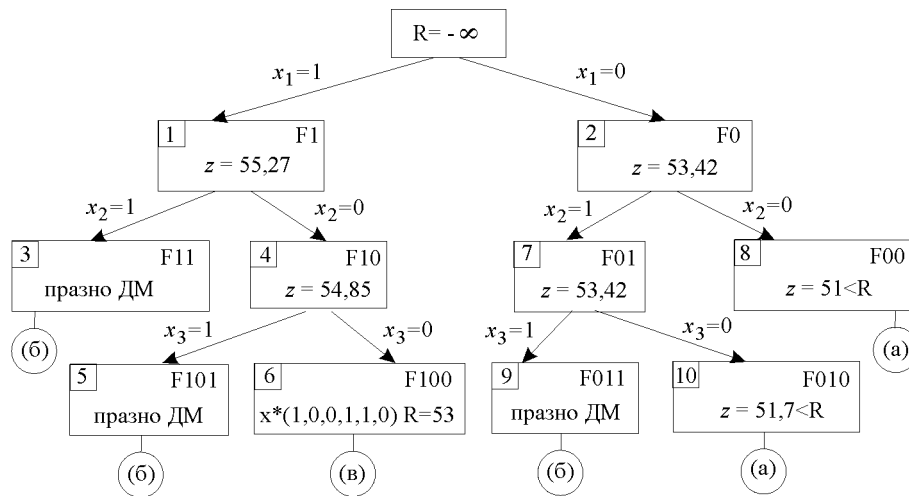
Пример 12.2. Да се намери

$$\max z(\mathbf{x}) = 32x_1 + 32x_2 + 30x_3 + 8x_4 + 13x_5 + 11x_6$$

$$(KP) \quad 21x_1 + 22x_2 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37,$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Резултатът от изпълнението на алгоритъма В&В за този пример е представен схематично на фиг. 12.2. Числата в малките квадратчета на схемата не са номера на итерациите, а обозначават последователността, в която работим с подмножествата (и съответните им под-задачи).



Фигура 12.3.

ИТЕРАЦИЯ 1

0. Инициализиране. Проверяваме дали е изпълнено условието (12.1) като проверяваме дали са верни неравенствата

$$\frac{32}{21} \geq \frac{32}{22} \geq \frac{30}{21} \geq \frac{8}{6} \geq \frac{13}{10} \geq \frac{11}{9}.$$

В случая това е така и променливите са подредени в намаляващ ред на отношенията цена/обем на предметите. Решаваме съответната ѝ оценъчна задача

$$\max z(\mathbf{x}) = 32x_1 + 32x_2 + 30x_3 + 8x_4 + 13x_5 + 11x_6$$

$$(RKP) \quad 21x_1 + 22x_2 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37,$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, 6.$$

и за решението ѝ получаваме $x^* \left(1, \frac{16}{22}, 0, 0, 0, 0 \right)$, което не е целочислено. Полагаме $R = -\infty$. Образуваме списъка $S = \{F\}$. Да забележим, че понеже оптималната стойност на (LP) е $32 + 32 \cdot \frac{16}{22} \approx 55,27$,

то в най-добрият случай решаваната задача (KP) би имала оптимална стойност 55.

1. Разклоняване. Тъй като сме на първа итерация взимаме единственото множество в списъка

$$F = \{21x_1 + 22x_2 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, 6\}.$$

Разклоняваме го по x_1 и получаваме двете под-множества

$$F1 = \{21.1 + 22x_2 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, x_1 = 1, \\ 0 \leq x_j \leq 1, j = 2, \dots, 6\}$$

и

$$F0 = \{21.0 + 22x_2 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, x_1 = 0, \\ 0 \leq x_j \leq 1, j = 2, \dots, 6\},$$

които добавяме към списъка. Списъкът е $S = \{F1, F0\}$.

2. Граници. Решаваме оценъчната под-задача $\boxed{1} \max_{\mathbf{x} \in F1} z(\mathbf{x})$, или

$$\max z(\mathbf{x}) = 32.1 + 32x_2 + 30x_3 + 8x_4 + 13x_5 + 11x_6$$

$$21.1 + 22x_2 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, \quad 0 \leq x_j \leq 1, j = 2, \dots, 6.$$

Решението ѝ е $\mathbf{x}^* \left(1, \frac{16}{22}, 0, 0, 0, 0\right)$ и съответно за граница z_U на тази под-задача получаваме $z = z(\mathbf{x}^*) = 32 + 32 \cdot \frac{16}{22} \approx 55, 27$.

Решаваме оценъчната под-задача $\boxed{2} \max_{\mathbf{x} \in F0} z(\mathbf{x})$, която разписана подробно е

$$\max z(\mathbf{x}) = 32.0 + 32x_2 + 30x_3 + 8x_4 + 13x_5 + 11x_6$$

$$21.0 + 22x_2 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, \quad 0 \leq x_j \leq 1, j = 2, \dots, 6.$$

Решението ѝ е $\mathbf{x}^* \left(0, 1, \frac{15}{21}, 0, 0, 0\right)$ и границата е $z = z(\mathbf{x}^*) = 32 + 30 \cdot \frac{15}{21} \approx 53, 42$.

3. Изключване. Тъй като решенията и на двете под-задачи не са целочислени, не можем да изключим никое от множествата $F1$ и $F0$ от $S = \{F1(55, 27), F0(53, 42)\}$.

4. Тест. $S = \{F1(55, 27), F0(53, 42)\} \neq \emptyset$ и GO TO 1.

ИТЕРАЦИЯ 2

1. Разклоняване. От списъка $S = \{F1(55, 27), F0(53, 42)\}$ избираме и изваждаме множеството с по-голяма граница на съответната под-задача – в случая $F1$ и го разбиваме на две подмножества като

разклоняваме по нефиксираната в него променлива с най-голям индекс – x_2 . Получаваме двете под-множества

$$F11 = \{21.1 + 22.1 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, x_1 = 1, x_2 = 1,$$

$$0 \leq x_j \leq 1, j = 3, \dots, 6\}$$

и

$$F10 = \{21.1 + 22.0 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, x_1 = 1, x_2 = 0,$$

$$0 \leq x_j \leq 1, j = 3, \dots, 6\},$$

които добавяме към списъка. Списъкът е $S = \{F0(53, 42), F11, F10\}$.

2. Граници. Оценъчната под-задача $\boxed{3} \max_{\mathbf{x} \in F11} z(\mathbf{x})$, или

$$\max z(\mathbf{x}) = 32.1 + 32.1 + 30x_3 + 8x_4 + 13x_5 + 11x_6$$

$$21.1 + 22.1 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, \quad 0 \leq x_j \leq 1, j = 3, \dots, 6$$

очевидно има празно допустимо множество.

За решението на оценъчната под-задача $\boxed{4} \max_{\mathbf{x} \in F10} z(\mathbf{x})$, или

$$\max z(\mathbf{x}) = 32.1 + 32.0 + 30x_3 + 8x_4 + 13x_5 + 11x_6$$

$$21.1 + 22.0 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37,$$

$$0 \leq x_j \leq 1, j = 3, \dots, 6.$$

имаме, че е $\mathbf{x}^* \left(1, 0, \frac{16}{21}, 0, 0, 0\right)$, а съответната граница е $z = z(\mathbf{x}^*) = 32 + 30 \cdot \frac{16}{21} \approx 54, 85$.

3. Изключване. Тъй като под-задача $\boxed{3}$ е с празно допустимо множество, изключваме $F11$ от списъка поради (б).

4. Тест. Списъкът е $S = \{F0(53, 49), F10(54, 85)\} \neq \emptyset$ и GO TO 1.

ИТЕРАЦИЯ 3

1. Разклоняване. От списъка $S = \{F0(53, 42), F10(54, 85)\}$ изваждаме множеството с по-голяма граница – в случая $F10$ и го разбиваме на две подмножества като разклоняваме по следващата по индекс нефиксирана в него променлива – x_3 . Получаваме двете под-множества

$$F101 = \{21.1 + 22.0 + 21.1 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1,$$

$$0 \leq x_j \leq 1, j = 4, \dots, 6\}$$

и

$$F100 = \{21.1 + 22.0 + 21.0 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0,$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 4, \dots, 6\},$$

които добавяме към списъка. Списъкът е $S = \{F0(53, 42), F101, F100\}$.

2. Граници. Оценъчната под-задача $\boxed{5} \max_{\mathbf{x} \in F101} z(\mathbf{x})$ е с празно допустимо множество.

Решението на оценъчната под-задача $\boxed{6} \max_{\mathbf{x} \in F100} z(\mathbf{x})$, или

$$\max z(\mathbf{x}) = 32.1 + 32.0 + 30.0 + 8x_4 + 13x_5 + 11x_6$$

$$21.1 + 22.0 + 21.0 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, \quad 0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 4, \dots, 6$$

е $\mathbf{x}^*(1, 0, 0, 1, 1, 0)$ и за граница получаваме $z = z(\mathbf{x}^*) = 32 + 8 + 13 = 53$.

3. Изключване. Тъй като под-задача $\boxed{5}$ е с празно допустимо множество, изключваме $F101$ от списъка поради (б). Значи $S = \{F0(53, 42), F100(53)\}$.

Тъй като под-задача $\boxed{6}$ има целочислено решение, изключваме $F100$ от списъка поради (в). Нейното решение $\mathbf{x}^*(1, 0, 0, 1, 1, 0)$ става **текущо решение**, а с нейната граница **сменяме рекорда** и **R=53**. Значи $S = \{F0(53, 42)\}$. Преглеждаме списъка S за подзадачи със стойност под рекорда – няма такива.

4. Тест. $S = \{F0(53, 42)\} \neq \emptyset$ и GO TO 1.

ИТЕРАЦИЯ 4

1. Разклоняване. От списъка $S = \{F0(53, 42)\}$ избираме единственото $F0$, изключваме го от списъка и го разбиваме на две подмножества като разклоняваме по следващата по индекс нефиксирана в него променлива – x_2 . Получаваме двете под-множества

$$F01 = \{21.0 + 22.1 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1,$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 3, \dots, 6\}$$

и

$$F00 = \{21.0 + 22.0 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 0,$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 3, \dots, 6\},$$

които добавяме към списъка. Списъкът е $S = \{F01, F00\}$.

2. Граници. Решаваме оценъчната под-задача $\boxed{7} \max_{\mathbf{x} \in F01} z(\mathbf{x})$. Нейното решение е $\mathbf{x}^*\left(0, 1, \frac{15}{21}, 0, 0, 0\right)$ (същото като решението на под-задача $\boxed{2}$) и като граница имаме $z = z(\mathbf{x}^*) = 32 + 30 \cdot \frac{15}{21} \approx 53, 42$.

За решението на оценъчната под-задача $\boxed{8} \max_{\mathbf{x} \in F00} z(\mathbf{x})$, или

$$\max z(\mathbf{x}) = 32.0 + 32.0 + 30.x_3 + 8x_4 + 13x_5 + 11x_6$$

$$21.0 + 22.0 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, \quad 0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 3, \dots, 6.$$

имаме, че е $\mathbf{x}^*(0, 0, 1, 1, 1, 0,)$ и за граница получаваме $z = z(\mathbf{x}^*) = 30 + 8 + 13 = 51$.

3. Изключване. Тъй като под-задача [8] има граница под рекорда $R = 53$, изключваме $F00$ от списъка поради (а). Списъкът е $S = \{F01(53, 42)\}$.

4. Тест. $S = \{F01(53, 42)\} \neq \emptyset$ и GO TO 1.

ИТЕРАЦИЯ 5

1. Разклоняване. От списъка $S = \{F01(53, 42)\}$ избираме и изваждаме единственото множество $F01$. Разбиваме го на две подмножества като разклоняваме по нефиксираната в него променлива с най-голям индекс – x_3 . Получаваме двете под-множества

$$F011 = \{21.0 + 22.1 + 21.1 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1,$$

$$0 \leq x_j \leq 1, j = 4, \dots, 6\}$$

и

$$F010 = \{21.0 + 22.1 + 21.0 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0,$$

$$0 \leq x_j \leq 1, j = 4, \dots, 6\},$$

които добавяме към списъка. Списъкът е $S = \{F011, F010\}$.

2. Граници. Оценъчната под-задача [9] $\max_{\mathbf{x} \in F011} z(\mathbf{x})$ е с празно допустимо множество.

Решението на оценъчната под-задача [10] $\max_{\mathbf{x} \in F010} z(\mathbf{x})$, или

$$\max z(\mathbf{x}) = 32.0 + 32.1 + 30.0 + 8x_4 + 13x_5 + 11x_6$$

$$21.0 + 22.1 + 21.0 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 37, \quad 0 \leq x_j \leq 1, j = 4, \dots, 6.$$

е $\mathbf{x}^*\left(0, 1, 0, 1, \frac{9}{10}, 0,\right)$ като за граница на тази подзадача получаваме $z = z(\mathbf{x}^*) = 32 + 8 + 13 \cdot \frac{9}{10} \approx 51,7$.

3. Изключване. Тъй като под-задача [9] е с празно допустимо множество, изключваме $F011$ от списъка поради (б). $S = \{F010(51, 7)\}$.

Тъй като под-задача [10] има граница 51,7, която е под рекорда $R = 53$, изключваме $F010$ от списъка поради (а). $S = \emptyset$.

4. Тест. $S = \emptyset$ и КРАЙ.

Списъкът е празен. Задачата е решена. Оптималното решение е последното текущо решение $\mathbf{x}^*(1, 0, 0, 1, 1, 0)$, при което се получава рекорда $R = 53$. Това означава, че максималната цена на раницата е 53 и се получава като в нея се сложат 1-ият, 4-ият и 5-ият предмет.

Изчислителният процес при реализиране на метода на разклоняване и граници се състои в последователно намиране на все по-добри допустими целочислени решения, последното от които е оптималното, но този факт се установява едва след изчерпване на списъка S . Очевидното предимство на този метод пред метода на отсичащите хиперравнини е, че тук получаваме все по-близки до оптималното допустими решения, докато при другия — или оптималното решение (което е свързано с неясно колко пресмятания), или нищо.

§13. Динамично оптимиране

Този метод е предложен от американския математик Ричард Белман през 1950-53 год. и успешно се прилага при много широки класове задачи (дори и не само дискретни) с общото свойство, че процесът на оптимизация може да се разбие на последователни стъпки с обща рекурентна връзка между тях.

Нека е дадена задачата

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(x_j) : \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, 0 \leq x_j \text{ и цели, } j = 1, \dots, n \right\},$$

където b е цяло положително число.

Целевата функция на тази задача е такава, че всяко събираемо зависи само от една променлива. Функция от този вид се нарича адитивна, като на f_j не са наложени никакви ограничения.

Нека като първа стъпка отделим променливата x_n и за $b_n = b$ да търсим

$$\begin{aligned} F_n(b_n) &:= \max_{x_1, \dots, x_n} \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(x_j) : \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \right\} \\ &= \max_{x_n} \left\{ f_n(x_n) + \max_{x_1, \dots, x_{n-1}} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j) : \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \leq b - a_n x_n \right\} \right\} \\ &= \max_{x_n} \{ f_n(x_n) + F_{n-1}(b_{n-1}) \} \end{aligned}$$

като $b_{n-1} := b - a_n x_n = b_{n-1}(x_n)$, т.е. b_{n-1} зависи от x_n .

Означаваме

$$F_{n-1}(b_{n-1}) := \max_{x_1, \dots, x_{n-1}} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j) : \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \leq b_{n-1} \right\},$$

и продължаваме с рекурентната връзка

$$\begin{aligned} F_{n-1}(b_{n-1}) &= \max_{x_{n-1}} \left\{ f_{n-1}(x_{n-1}) + \max_{x_1, \dots, x_{n-2}} \left\{ \sum_{j=1}^{n-2} f_j(x_j) : \sum_{j=1}^{n-2} a_j x_j \leq b_{n-2} \right\} \right\} \\ &= \max_{x_{n-1}} \{ f_{n-1}(x_{n-1}) + F_{n-2}(b_{n-2}) \} \end{aligned}$$

като $b_{n-2} := b - a_n x_n - a_{n-1} x_{n-1} = b_{n-2}(x_n, x_{n-1})$, т.е. b_{n-2} зависи от x_n и x_{n-1} , а

$$F_{n-2}(b_{n-2}) := \max_{x_1, \dots, x_{n-2}} \left\{ \sum_{j=1}^{n-2} f_j(x_j) : \sum_{j=1}^{n-2} a_j x_j \leq b_{n-2} \right\}.$$

Последователно стигаме до

$$F_2(b_2) := \max_{x_2} \{f_2(x_2) + F_1(b_1)\} \quad \text{и}$$

$$F_1(b_1) := \max_{x_1} \{f_1(x_1) : a_1x_1 \leq b_1\},$$

което можем да пресметнем директно.

На практика, за всички възможни стойности на b_1 ($b_1 = 0, 1, 2, \dots, b$) намираме $x_1(b_1)$, което е такова че в него се достига максимума на $f_1(x_1)$ за тези x_1 , които удовлетворяват неравенството $a_1x_1 \leq b_1$. Пресмятаме $F_1(b_1) = f_1(x_1(b_1))$ и запомняме $x_1(b_1)$ и $F_1(b_1)$ в таблица.

След това за всички възможни стойности на b_2 ($b_2 = 0, 1, 2, \dots, b$) намираме $x_2(b_2)$, което е такова че в него се достига максимума на $f_2(x_2)$ за тези x_2 , които удовлетворяват неравенството $a_2x_2 \leq b_2$. Пресмятаме $F_2(b_2) = f_2(x_2(b_2)) + F_1(b_1)$, където $b_1 = b_2 - a_2x_2(b_2)$ като за стойността на $F_1(b_1)$ ползваме предходната таблица.

Продължаваме да пресмятаме по рекурентната зависимост $F_3(b_3)$ и т.н. до $F_n(b_n)$.

Последователните таблици имат следния вид

b_1	$F_1(b_1)$	$x_1(b_1)$	b_2	$F_2(b_2)$	$x_2(b_2)$	b_n	$F_n(b_n)$	$x_n(b_n)$
0	$F_1(0)$	$x_1(0)$	0	$F_2(0)$	$x_2(0)$	0	$F_n(0)$	$x_n(0)$
1	$F_1(1)$	$x_1(1)$	1	$F_2(1)$	$x_2(1)$	1	$F_n(1)$	$x_n(1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
b			b			b		

От последната таблица взимаме b_n^* за което $\max\{F_n(b_n)\} = F_n(b_n^*)$ и от него намираме оптималната стойност $x_n^* = x_n(b_n^*)$. След като вече знаем x_n^* , последователно намираме

$$x_{n-1}^* = x_{n-1}(b - a_n x_n^*),$$

$$x_{n-2}^* = x_{n-2}(b - a_n x_n^* - a_{n-1} x_{n-1}^*),$$

и т.н.

Възниква въпросът колко големи са тези таблици. Например, при $b = 20$ и $n = 5$ броят на всички възможни варианти е

$$\frac{(n+b-1)!}{b!(n-1)!} = C_{24}^4 = 10\,626,$$

докато нашите таблици ще съдържат

$$\frac{(b+1)[(n-1)(b+2)+2]}{2} = 945$$

числа, т.е. докато броят на вариантите расте експоненциално с n и b , то размерът на пресмятанията в нашия случай расте с квадрата на b и линейно по n .

Нека използваме описания метод, за да решим следната задача за раницата

Пример 13.1. Да се намери

$$\max \{3x_1 + 7x_2 + 15x_3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 4, 0 \leq x_j \text{ и цели}\}$$

Попълваме трите таблици

b_1	$F_1(b_1)$	$x_1(b_1)$	b_2	$F_2(b_2)$	$x_2(b_2)$	b_3	$F_3(b_3)$	$x_3(b_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	1	3	0	1	3	0
2	6	2	2	7	1	2	7	0
3	9	3	3	10	1	3	15	1
4	12	4	4	14	2	4	18	1

От последната таблица получаваме, че максимумът на F_3 е 18 и се получава при $b_3 = 4$, а за него $x_3(4) = 1$. Следователно оптималното $x_3^* = 1$. След това имаме, че

$$x_2^* = x_2(4 - 3x_3^*) = x_2(4 - 3 \cdot 1) = x_2(1) = 0$$

от втората таблица и накрая

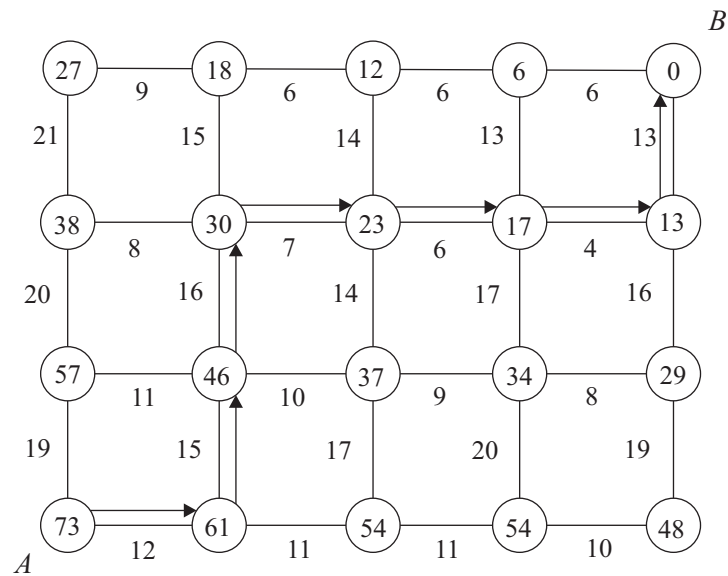
$$x_1^* = x_1(4 - 3x_3^* - 2x_2^*) = x_1(4 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = x_1(1) = 1$$

от първата таблица.

Така оптималната стойност на раницата е 18 и се получава като сложим в нея един предмет от първия вид ($x_1^* = 1$) и един предмет от третия вид ($x_3^* = 1$).

Основната идея в динамичното оптимиране се базира на т.нар. **принцип на Белман**, който гласи, че оптималната траектория на дадена система от състояние A до състояние B не зависи от това как тя е попаднала в състояние A . Системи с такова свойство се наричат Марковски системи. При по-внимателно вглеждане ще откриете, че точно на това се основават и горните рекурентни отношения.

Идеята на динамичното оптимиране става ясна и от следния пример: летателен апарат (самолет, ракета) трябва да достигне от точка A до точка B , отдалечени по разстояние и височина, с минимален разход на гориво.



Фигура 13.1.

Хоризонталното и вертикалното разстояние са разделени на части като разходът на гориво за всяка отсечка е даден на фиг. 13.1. До всеки възел може да се стигне от възел разположен непосредствено отляво или отдолу. В крайната точка B поставяме оценка 0. В точка B може да се достигне по хоризонталната отсечка отляво или по вертикалната отдолу. В първия случай разходът е 6, а във втория 13, така че в съответните възли поставяме 6 и 13. В съседния на вече оценените възли поставяме $\min\{6 + 13, 13 + 4\} = 17$ — това е минималното количество гориво за всички възможни начини да се стигне от този възел до B (а те са два). Така последователно оценяваме всички възли и за A получаваме оценка 73, която е стойността в оптималното решение, което възстановяваме по обратен път.

§14. Мрежово планиране

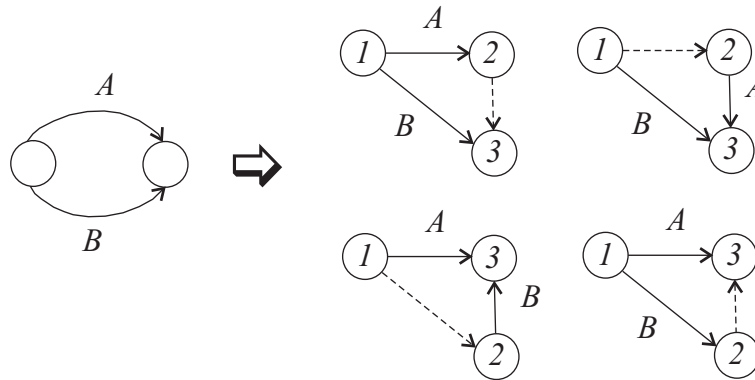
През 1961 г. в САЩ се дава ход на проекта Аполо. Една от основните му цели е човекът да стъпи на Луната и с това САЩ да изпревари СССР в космическите изследвания. За реализацията на проекта е необходимо решаването на няколко хиляди проблема като решаването на всеки от тях зависи от резултатите на редица други. Мнението на специалистите било, че всичко това ще отнеме десетилетия, което било неприемливо.

Група математици слагат ред в този хаос като предлагат метода, наречен мрежово планиране, за подреждане и оптимизиране на дейностите.

През 1969 г. човекът стъпва на Луната, а проектът Аполо успешно приключва през 1972 г.

§14.1. Построяване на мрежа на проекта

Проектът се моделира с мрежа. Мрежата е ориентиран граф без цикли. Всеки отделен процес (операция) от проекта се обозначава чрез дъга, ориентирана по посока на изпълнението на проекта. Всеки процес се представя с точно една дъга и трябва се определя еднозначно с двата си крайни върха. В случай, че имаме два паралелни (конкуриращи се) процеса това се постига с въвеждане на фиктивен процес (обозначен с пунктирна линия), който не поглъща времеви или други ресурси.

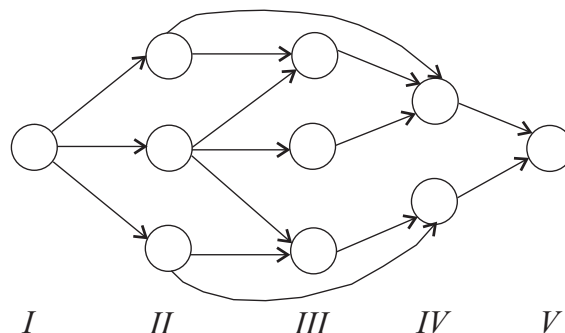


Фигура 14.1.

Ако са дадени конкуриращите се процеси A и B по един от четирите начина, показани на фиг. 14.1 получаваме възможност да идентифицираме процесите A и B с уникална двойка върхове като въведем фиктивен процес.

Мрежата на проекта се построява като визуално графът се подрежда по групи върхове, несвързани помежду си, наречени нива. Нивата се номерират във възходящ ред като посоката на свързващите ги дъги е само от ниво с по-малък номер към ниво с по-голям. Подреждането на върховете на графа (събитията) установява отношения на предшествие сред процесите на проекта. Без ограничение на общността можем

да приемем, че първото и последното ниво се състоят само от по един връх — начало и край на проекта съответно.



Фигура 14.2.

Посоченият на фиг. 14.2 граф например има пет нива.

На всяка дъга се присвоява положително число — продължителността на процеса, а върховете, които са начало и край на дъгата можем да наречем събития — съответно начало и край на процеса. На всяко събитие можем да гледаме като на точка от времевата ос, където завършва един процес и започва друг. В термините на графа събитието е връх.

За върха (събитието) j дефинираме

\square_j — най-ранното възможно настъпване на събитието j (най-ранният момент на завършване на операциите, завършващи в този връх);

Δ_j — най-късното възможно настъпване на събитието j (най-късният момент за започване на операциите, започващи от този връх);

D_{ij} — продължителност на процеса (i, j) .

§14.2. Метод на критичния път

За построяване на мрежовия график на проекта се използва методът на критичния път — Critical Path Method (CPM).

Намирането на критичния път става на два етапа (хода). В хода напред се пресмятат най-ранните моменти на събитията, а при хода назад — най-късните моменти на събитията.

Ход напред: започва от първия връх 1 и завършва в последния връх n . Полага се $\square_1 = 0$, т.е. проектът започва в момента 0. После числата \square се пресмятат по нива: за върха j се намират върховете i от предходните нива, които са непосредствено свързани с j с процеси (дъги) (i, j) . За тях вече са пресметнати \square_i и се пресмята $\square_j = \max_i \{\square_i + D_{ij}\}$.

Пресмятанията завършват с намиране на \square_n . \square_n е продължителността на целия проект.

Ход назад: започва от последния връх n и завършва в първия връх 1. Полага се $\Delta_n = \square_n$, т.е. най-ранният и най-късният момент на завършване на проекта съвпадат. После числата Δ се пресмятат по нива: за върха j се намират върховете k от следващите нива, които са непосредствено свързани с j с процеси (дъги) (j, k) . За тях вече са

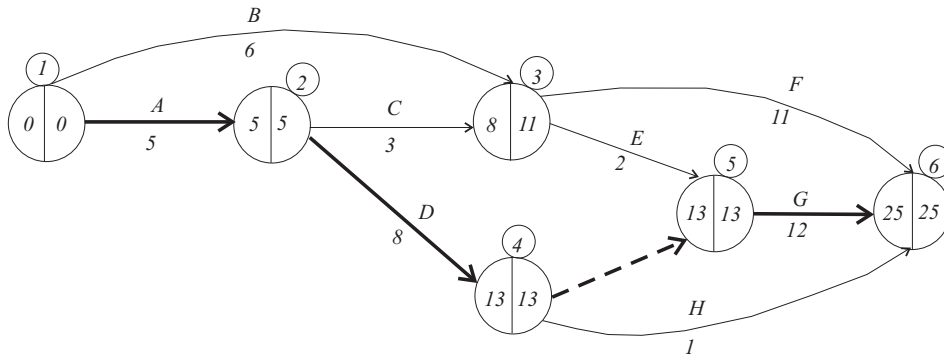
пресметнати Δ_k и се пресмята $\Delta_j = \min_k \{\Delta_k - D_{jk}\}$. Пресмятанятията за вършват с намиране на Δ_1 . При правилни пресмятания задължително трябва да се получи $\Delta_1 = 0$.

Процесът (i, j) се нарича *критичен*, ако

1. $\Delta_i = \square_i$
2. $\Delta_j = \square_j$
3. $\Delta_j - \Delta_i = \square_j - \square_i = D_{ij}$.

Критичните процеси образуват непрекъснат път от първия до последния връх. Критичен път винаги съществува, но може да не бъде единствен.

Пример 14.1. Да се намери критичният път на проекта, даден на фиг. 14.3.



Фигура 14.3.

За да се онагледят методът, всеки връх j се разделя на две части като в лявата част след пресмятането му се нанася числото \square_j , а в дясната част след пресмятането му се нанася числото Δ_j . Номерът на върха е вписан в малкото кръгче отгоре.

Ход напред:

$$\begin{aligned}
 \square_1 &= 0 \\
 \square_2 &= \square_1 + D_{12} = 5 \\
 \square_3 &= \max\{\square_1 + D_{13}, \square_2 + D_{23}\} = \max\{0 + 6, 5 + 3\} = 8 \\
 \square_4 &= \square_2 + D_{24} = 5 + 8 = 13 \\
 \square_5 &= \max\{\square_3 + D_{35}, \square_4 + D_{45}\} = \max\{8 + 2, 13 + 0\} = 13 \\
 \square_6 &= \max\{\square_3 + D_{36}, \square_4 + D_{46}, \square_5 + D_{56}\} = \max\{19, 25, 14\} = 25.
 \end{aligned}$$

Следователно проектът се изпълнява за 25 дни.

Ход назад:

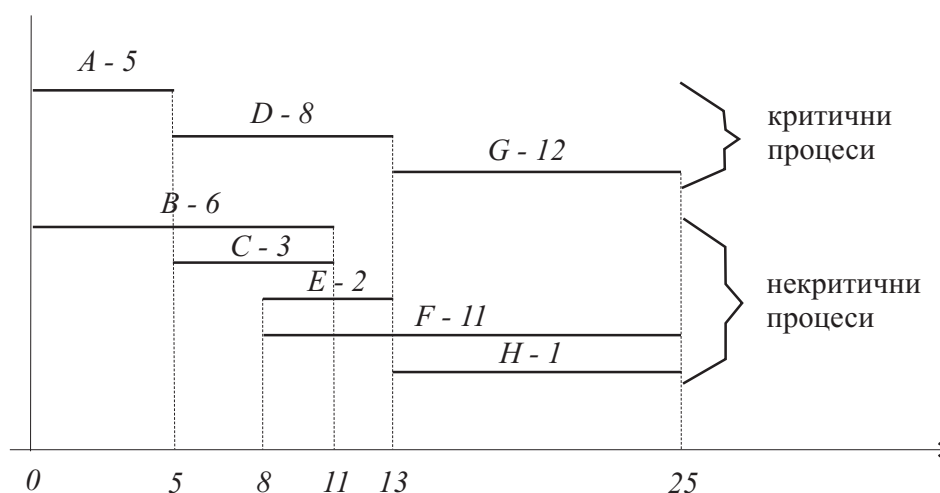
$$\begin{aligned}
 \Delta_6 &= \square_6 = 25 \\
 \Delta_5 &= \Delta_6 - D_{56} = 25 - 12 = 13 \\
 \Delta_4 &= \min\{\Delta_6 - D_{46}, \Delta_5 - D_{45}\} = \min\{25 - 1, 13 - 0\} = 13 \\
 \Delta_3 &= \min\{\Delta_5 - D_{35}, \Delta_6 - D_{36}\} = \min\{13 - 2, 25 - 11\} = 11 \\
 \Delta_2 &= \min\{\Delta_3 - D_{23}, \Delta_4 - D_{24}\} = \min\{11 - 3, 13 - 8\} = 5 \\
 \Delta_1 &= \min\{\Delta_3 - D_{13}, \Delta_2 - D_{12}\} = \min\{11 - 6, 5 - 5\} = 0.
 \end{aligned}$$

Критичният път е $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$, а критичните процеси са A , D и G като фиктивният не се взема под внимание. Той се появява поради това, че процесите $H(4, 6)$ и $G(5, 6)$ са конкуриращи се процеси. Процесът $H = (4, 6)$ не е критичен, тъй като не изпълнява третото условие!

§14.3. Построяване на времевия график на проекта

За всеки процес (i, j) , \square_i е най-ранният момент на започване на процеса, а Δ_j е най-късният момент на завършване на процеса. Така $[\square_i, \Delta_j]$ е максималният интервал от време, в който се изпълнява процесът (i, j) .

Времевия график за проекта от Пример 14.1 е даден на фиг. 14.4.



Фигура 14.4.

Критичните процеси са разполагат последователно един след друг без времеви луфтове и припокривания. Тяхната обща продължителност е равна на продължителността на проекта (в случая 25 дни).

Некритичните процеси се представят с максималните интервали на изпълнение $[\square_i, \Delta_j]$, които превишават реалната продължителност на тези процеси.

Как се избира времето за начало на некритичен процес? Обикновено предпочитат да започват некритичните процеси в най-ранния възможен момент. В този случай остава резерв от време, който може да се използва за решаване на неочаквано възникнали по време на изпълнение на процеса проблеми. Ако на некритичните процеси не се налагат допълнителни ограничения и всички те започват в най-ранните възможни моменти от време, то времевият график се прави автоматично. Във всички случаи обаче трябва да се следи да не се наруши последователността на процесите.

В нашия пример процесът C трябва да е завършил до началото на процеса E , но максималните интервали на изпълнение на тези процеси се припокриват, затова реалните интервали на изпълнението им също могат да се припокриват. Затова е необходимо да се предвидят някакви

„червени флагчета“, които да указват кога даден процес може да започне без нарушения на отношението на следване с други процеси. За целта се използват резервите от време на некритичните процеси.

За всеки некритичен процес (i, j) се дефинира

- пълен резерв от време $ПР(i, j) = \Delta_j - \square_i - D_{ij}$ и
 - свободен резерв от време $СР(i, j) = \square_j - \square_i - D_{ij}$,
- като очевидно $СР(i, j) \leq ПР(i, j)$.

§14.4. Правило на червеното флагче

За некритичен процес (i, j)

- ако $СР(i, j) = ПР(i, j)$, то даденият процес може да се изпълнява по всяко време вътре в максималния интервал $[\square_i, \Delta_j]$ без да това да нарушава последователността на процесите;

- ако $СР(i, j) < ПР(i, j)$, то без да се нарушава последователността процесът може да започва с отместване от \square_i , което не превишава $СР(i, j)$. Отместване на началото на процеса от \square_i , превишаващо $СР(i, j)$ (но не повече от $ПР(i, j)$) е възможно, но трябва да се съпровожда с поне равно отместване относно \square_j на всички процеси, които започват от j .

Некритичният процес (i, j) получава червено флагче само когато $СР(i, j) < ПР(i, j)$ и то се взема под внимание при отместване на началото на процеса относно \square_i , при което следва да се отчете отместване на процесите, следващи j .

Нека да пресметнем резервите от време на некритичните процеси от проекта от Пример 14.1.

некритичен процес	продължителност	$ПР(i, j)$ $\Delta_j - \square_i - D_{ij}$	$СР(i, j)$ $\square_j - \square_i - D_{ij}$	флагче
$B(1, 3)$	6	$11 - 0 - 6 = 5$	$8 - 0 - 6 = 2$	✓
$C(2, 3)$	3	$11 - 5 - 3 = 3$	$8 - 5 - 3 = 0$	✓
$E(3, 5)$	2	$13 - 8 - 2 = 3$	$13 - 8 - 2 = 3$	
$F(3, 6)$	11	$25 - 8 - 11 = 6$	$25 - 8 - 11 = 6$	
$H(4, 6)$	1	$25 - 13 - 1 = 11$	$25 - 13 - 1 = 11$	

Процесите E , F и H могат да се изпълняват по всяко време в максималните си интервали.

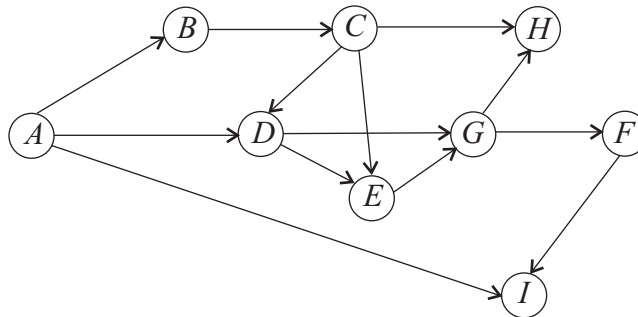
Процесите B и C са обозначени с червени флагчета.

Да разгледаме процеса B . За него $ПР$ е 5, което означава, че той може да започне във всеки ден от интервала $[0, 5]$ дни от началото на изпълнение на проекта. Но неговият $СР$ е 2 дни и ако B започне в 0, 1 или 2 ден от началото на проекта това не би оказало влияние върху следващите го процеси E и F . Ако процесът B започне в ден $(2 + d)$ за $2 < 2 + d \leq 5$, то началото на процесите E и F е необходимо да се премести от най-ранният момент на тяхното начало (ден 8 от началото на проекта) с не по-малко от d дена. Само тогава не се нарушава последователността на B , E и F .

За процеса C имаме $СР$ нула. Това означава, че всяко отместване от началото на този процес трябва да се съпровожда с не по-малко отместване на началото на следващите го процеси E и F .

§14.5. Подреждане на върховете на графа по нива

Ще го илюстрираме с пример. За графа, даден на

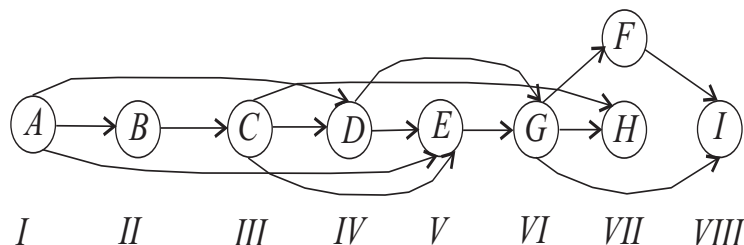


Фигура 14.5.

матрицата на съседство е

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		1		1					1
B			1						
C				1	1			1	
D					1		1		
E							1		
F									1
G						1		1	
H									
I									
	0	1	1	2	2	1	2	2	2
		0	1	1	2	1	2	2	1
⋮	⋮								

Сумираме числата във всеки стълб и записваме резултата отдолу. Върховете, за които се получи 0 са на първо ниво – в случая върхът *A*. Зачертаваме от матрицата редът и стълбът на *A*. Сумираме числата във всеки стълб. Там където се получи 0 е второто ниво – в случая това е върхът *B*. Повтаряме до изчерпване. Полученият в резултат граф е с 8 нива и изглежда така:



Фигура 14.6.

§15. Потоци в мрежи.

Алгоритъм на Форд-Фулкерсон

§15.1. Мрежа. Поток в мрежа. Задача за максимален поток. Разрез. Задача за минимален разрез

От теория на графите знаем, че *мрежа* това е ориентиран свързан граф, с всяка дъга (a, b) на който е асоциирано положително число $c(a, b)$, наречено капацитет на дъгата и в него са обособени два върха — източник s (в който не влизат дъги) и приемник t (от който не излизат дъги). Такава мрежа се нарича още st -мрежа.

Мрежите се използват за моделиране на транспортни системи, комуникационни системи, екосистеми, водопреносни и електрически системи и много други.

Нека е дадена st -мрежа. *Поток* f от s до t в мрежата е такова присвояване на всяка от дъгите (a, b) на неотрицателно количество $f(a, b)$, което удовлетворява следните две условия, произтичащи от

- капацитета: $0 \leq f(a, b) \leq c(a, b)$ за всяка дъга (a, b) ;
- и от изискването да се поддържа локално равновесие: във всеки връх количеството на влизащия в него поток да бъде равно на количеството на излизащия от него поток (с изключение на източника s , от който само излиза поток и на приемника t , в който само влиза поток).

Големина на потока f е количеството, влизащо в t . *Максимален поток* е този, който е с максимална големина.

И така, от върха s по дъгите на мрежата започва пренос на продукт, който завършва в t като количеството продукт, влизащо във всеки връх на мрежата (различен от s и t) е равно на излизащото от него количество и максималното количество от продукта, което може да мине по всяка дъга не може да надхвърля нейния капацитет.

Задачата за максимален поток е в дадена st -мрежа да се намери максимален поток.

Разрез (A, B) на st -мрежа е разделяне на върховете на мрежата на две непресичащи се множества A и B , такива че s е в A , а t е в B . *Капацитет на разреза* (A, B) е сумата на капацитетите на дъгите от връх в A към връх в B . *Минимален разрез* е разрез с минимален капацитет.

Задачата за минимален разрез е в дадена st -мрежа да се намери минимален разрез.

Ако f е поток, а (A, B) е разрез в st -мрежа, то *чистият поток от f през разреза (A, B)* е сумата на потоците от f по дъгите от A към B минус сумата на потоците по дъгите от B към A .

§15.2. Задача за максимален поток

Както казахме, това е задачата в дадена st -мрежа да се определи максималният поток от s до t .

Тази задача може да се формулира като линейна оптимизационна задача като се въведат следните променливи: v — големина на потока и f — количеството поток по всяка от дъгите. За всеки връх a означаваме с $I(a)$ множеството от върхове, дъги от които влизат в a (in a), а с $O(a)$ означаваме множеството от върхове, в които влизат дъги от a (out a).

Линейната задача е следната:

$$\begin{aligned} \max v \\ \sum_{a \in O(s)} f(s, a) &= v, \\ \sum_{a \in I(t)} f(a, t) &= v, \\ \sum_{b \in O(a)} f(a, b) - \sum_{b \in I(a)} f(b, a) &= 0, \quad \forall a \neq s, t \\ 0 \leq f(a, b) &\leq c(a, b), \quad \forall (a, b). \end{aligned}$$

Решаването на тази линейна задача е крайно неефективно и затова има разработен специализиран алгоритъм.

§15.3. Алгоритъм на Форд-Фулкерсон

Алгоритъмът е създаден през 1950-те години от L. R. Ford Jr. и D. R. Fulkerson за решаване на задачата за максимален поток и е публикуван през 1956 г.

Идеята на алгоритъма е следната: ако в st -мрежа тече някакъв поток, то да се намери нарастващ път (augmenting path), по който този поток може да бъде увеличен и така до намиране на максималния поток.

Нека в st -мрежата тече някакъв поток f . Спрямо този поток можем да разбием множеството от дъги на мрежата на три множества:

- множество от дъги I като дъга $(a, b) \in I$, ако $f(a, b) = 0$. Полагаме $i(a, b) = c(a, b)$. Т.е. това са дъги, по които тече нулев поток и можем само да увеличаваме (increase) потока по тях с количество, не по-голямо от съответното i .

- множество от дъги R като дъга $(a, b) \in R$, ако $f(a, b) = c(a, b)$. Полагаме $r(a, b) = c(a, b)$. Т.е. това са дъги, капацитетът на които е запълнен от потока и имаме възможност само да намаляваме (reduce) потока по тях с количество, не по-голямо от съответното r .

- множество от дъги $I \& R$. За тях очевидно е изпълнено, че $0 < f(a, b) < c(a, b)$ и по тях можем както да увеличаваме потока с количество не по-голямо от остатъчния капацитет $i(a, b) = c(a, b) - f(a, b)$, така

и да го намаляваме с количество, не по-голямо от текущия по дъгата поток $r(a, b) = f(a, b)$.

Търсене на нарастващ път по отношение на потока f :

- (1) Оцветяваме s .
- (2) Ако a е оцветен, а b не е и $(a, b) \in I$ или $(a, b) \in I \& R$, оцветяваме b и (a, b) и пресмятаме $i(a, b)$.
Ако b е оцветен, а a не е и $(a, b) \in R$ или $(a, b) \in I \& R$, оцветяваме a и (a, b) и пресмятаме $r(a, b)$.
- (3) Ако t е оцветен, това означава, че е намерен т. нар. *нарастащ път* от s до t . Ако t не е оцветен, няма нарастващ път.

Нарастащият път е ненасочен път от s до t . По него може да се увеличава потока по правите дъги (тъй като не са пълни) и да се намалява потока по обратните дъги (тъй като не са празни).

Ако не може да бъде намерен нарастващ път спрямо потока f това означава, че всеки (ненасочен) път от s до t се блокира от пълна права или от празна обратна дъга.

Да отбележим, че съществуват различни начини на намиране на нарастващ път. Например, може да се използва т.нар. остатъчен капацитет на мрежата и да се направи резидуална мрежа, в която всеки път от s до t е нарастващ път.

Алгоритъм на Форд-Фулкерсон:

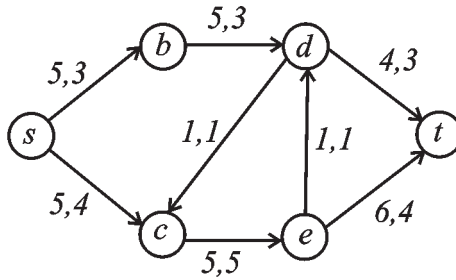
- (0) В дадена st -мрежа се започва с поток f .
- (1) Търси се нарастващ път по отношение на f . Ако няма нарастващ път, то КРАЙ — потокът f е максимален. В противен случай е намерен нарастващ път спрямо f и се отива на стъпка (2);
- (2) пресмята се $\varepsilon = \min(i, r)$ за всички дъги в нарастващия път (оцветените) — *bottleneck капацитет* на нарастващия път;
- (3) увеличава се големината на потока с ε и се коригира потока по дъгите от нарастващия път: намалява се с ε по дъгите с намерено r и се увеличава с ε по дъгите с намерено i ; С новия поток се преминава към стъпка (1).

Разбира се, ако за мрежата са известни само капацитетите на дъгите, може да се започне с нулев поток f , но тъй като в повечето практически задачи по мрежата вече тече някакъв поток, по-разумно е алгоритъмът да започне от него.

Ще използваме алгоритъма на Форд-Фулкерсон, за да решим задачата от следния

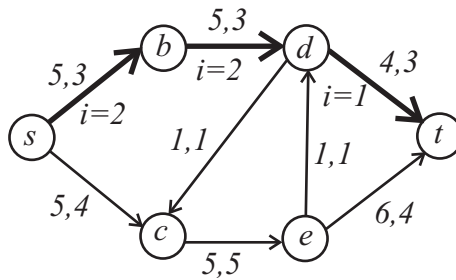
Пример 15.1. Да се намери максималният поток в st -мрежата, дадена на фиг. 15.1.

Двойката числа до всяка дъга е от вида c, f като първото число означава капацитета на дъгата, а второто число — количеството на потока по нея.



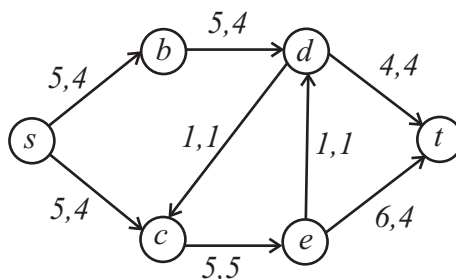
Фигура 15.1.

Началният поток е с големина 7. Намираме спрямо този начален поток нарастващ път $s \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow t$ и определяме неговия bottleneck капацитет $\varepsilon = \min\{2, 2, 1\} = 1$ (вж. фиг. 15.2).



Фигура 15.2.

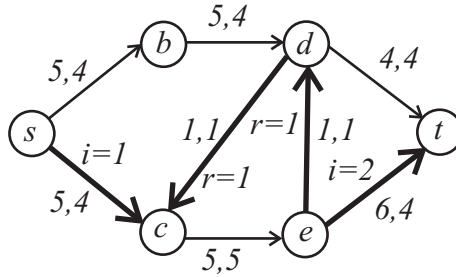
Коригираме потоците по дъгите от нарастващия път с намереното $\varepsilon = 1$ и получаваме новия поток с големина 8 по мрежата, представен на фиг. 15.3.



Фигура 15.3.

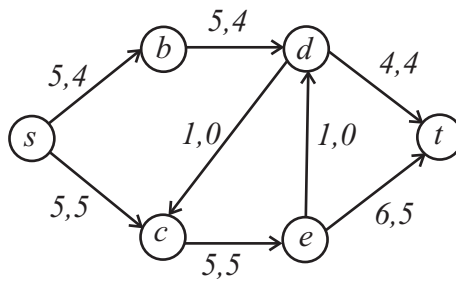
Спрямо новия поток, намираме нарастващия път $s \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow t$

и определяме неговия bottleneck капацитет $\varepsilon = \min\{1, 1, 1, 2\} = 1$ (вж. фиг. 15.4).



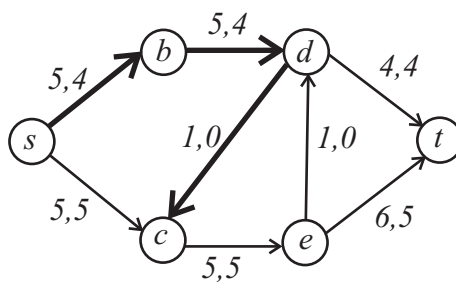
Фигура 15.4.

Коригираме потоците по дъгите от нарастващия път с намереното $\varepsilon = 1$ и получаваме новия поток с големина 9 по мрежата, представен на фиг. 15.5.



Фигура 15.5.

Спрямо новия поток се опитваме да намерим нарастващ път, но не можем да стигнем до t (вж. фиг. 15.6).



Фигура 15.6.

Тъй като няма нарастващ път спрямо потока с големина 9, то той (представеният на фиг. 15.5), е максималният.

§15.4. Връзката между потоци и разреди

Нека е дадена st -мрежа.

Лема 15.1 (за големината на потока). Ако f е произволен поток, а (A, B) е произволен разрез, то чистият поток от f през разреза (A, B) е равен на големината на потока f .

Доказателство. С индукция по броя върхове в B .

Начална стъпка: за $B = \{t\}$ твърдението е в сила от дефиницията на големина на поток.

Индукционна стъпка: твърдението остава в сила поради условията за локално равновесие всеки път, когато местим връх от A в B . \square

Следствие 15.1. Ако f е произволен поток, то излизаният от s поток е равен на влизания в t поток и следователно е равен на големината на потока f .

Теорема 15.1 (за слаба дуалност). Ако f е произволен поток, а (A, B) е произволен разрез, то големината на потока f не надминава капацитета на разреза (A, B) .

Доказателство. Съгласно Лемата за големината на потока

$$\begin{aligned} \text{големината на } f &= \text{чистият поток от } f \text{ през } (A, B) \\ &\leq \text{капацитета на разреза } (A, B) \end{aligned}$$

като неравенството следва от това, че по всяка дъга потокът не надминава капацитета на дъгата. \square

Ще докажем двете основни теореми за потоци в мрежи:

Теорема 15.2 (за нарастващия път). Потокът f е максимален, тогава и само тогава, когато по отношение на него няма нарастващ път.

Теорема 15.3 (за максималния поток и минималния разрез). Големината на максималния поток в нея е равна на капацитета на минималния разрез.

като докажем

Теорема 15.4. За поток f следните твърдения са еквивалентни:

- (i) съществува разрез, чийто капацитет е равен на големината на потока f ;
- (ii) f е максимален поток;
- (iii) не съществува нарастващ път по отношение на f .

Доказателство. (i) \Rightarrow (ii). Да предположим, че (A, B) е разрез, чийто капацитет е равен на големината на потока f . Тогава за произволен поток f' съгласно Теоремата за слаба дуалност

$$\text{големината на } f' \leq \text{капацитета на разреза } (A, B) = \text{големината на } f$$

като равенството е съгласно предположението. Следователно f е максимален поток.

(ii) \Rightarrow (iii) ще докажем като допуснем противното.

Нека f е максимален поток и да допуснем, че съществува нарастващ път по отношение на f . Тогава можем да увеличим потока f като изпратим допълнителен поток по този нарастващ път. Следователно, f не е максимален поток.

(iii) \Rightarrow (i). Нека не съществува нарастващ път по отношение на f .

Нека (A, B) е разрез, в който A е множеството от върхове, свързани с s с ненасочен път с непълни прави или празни обратни дъги.

По дефиниция $s \in A$, а понеже не съществува нарастващ път, то $t \in B$.

Тъй като ако a е връх от A , то всички дъги, излизащи от него (прави дъги) са пълни (т.е. потокът по тях е равен на капацитета им), а всички към него (обратни дъги) са празни (т.е. потокът по тях е нула), и другият край на всички тези дъги е връх в B , то

$$\begin{aligned}\text{капацитетът на } (A, B) &= \text{чистият поток от } f \text{ през } (A, B) \\ &= \text{големината на } f\end{aligned}$$

като за второто равенство използваме Лемата за големината на потока. \square

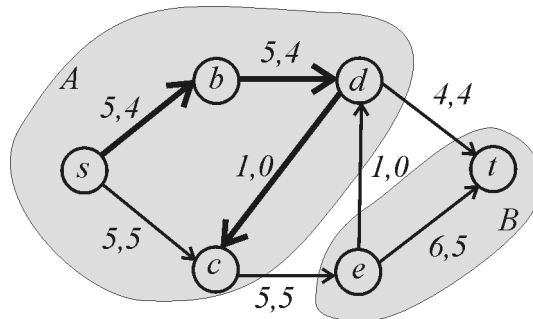
От казаното до тук е ясно как можем да използваме максималния поток за намиране на минималния разрез.

Нека f е максимален поток.

Съгласно Теоремата за нарастващия път, не съществува нарастващ път по отношение на f . Намираме множеството A като множеството от тези върхове, които са свързани с s с ненасочен път, по който няма пълни прави или празни обратни дъги. Множеството B се състои от всички останали върхове. Разрезът (A, B) е минимален.

Пример 15.2. Да се намери минималният разрез в st -мрежата, дадена на фиг. 15.1.

Множеството A се състои от върховете $\{s, b, d, c\}$, а множеството B се състои от върховете $\{e, t\}$ (вж. фиг. 15.7). Минималният разрез е (A, B) . От A към B има две дъги — дъгите (d, t) и (c, e) . Сумата от капацитетите по тях е $4 + 5 = 9$, което както знаем е големината на максималния поток.



Фигура 15.7.