11. Лява и дясна граница на функция. Асимптоти

Лява и дясна граница на функция — дефиниция на Коши

Дефиниция

Казваме, че $a \in \mathbb{R}$ е дясна точка на сгъстяване на $D \subseteq \mathbb{R}$, ако всеки интервал от вида $(a, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, съдържа точка от D.

Казваме, че $a \in \mathbb{R}$ е лява точка на сгъстяване на $D \subseteq \mathbb{R}$, ако всеки интервал от вида $(a-\varepsilon, a)$, $\varepsilon > 0$, съдържа точка от D.

Дефиниция (Коши)

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ е дясна точка на сгъстяване на D. Казваме, че $\ell \in \mathbb{R}$ е дясна граница на $f(x)$ при x, клонящо към a, и пишем $\ell = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, ако

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ такова, че } |x - a| < \delta \text{ и } \underline{x > a}.$$

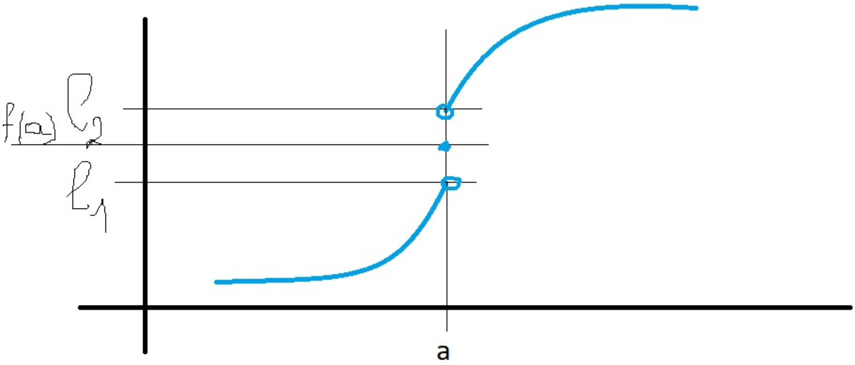
Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ е лява точка на сгъстяване на D. Казваме, че $\ell \in \mathbb{R}$ е лява граница на $f(x)$ при x, клонящо към a, и пишем $\ell = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, ако

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ такова, че } |x - a| < \delta \text{ и } \underline{x < a}.$$

Други означения: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$, $\quad \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

$$f(x) \underset{x \to a+0}{\longrightarrow} \ell, \quad f(x) \underset{x \to a-0}{\longrightarrow} \ell, \quad f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} \ell, \quad f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} \ell$$

Геометрична интерпретация



$$\ell_1 = \lim_{x \to a-0} f(x), \quad \ell_2 = \lim_{x \to a+0} f(x) \qquad (1)$$

Връзка между граница, лява граница и дясна граница

Твърдение

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \exists \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = \ell \tag{2}$$

Лява и дясна граница на функция — дефиниция на Хайне

Дефиниция (Хайне)

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ е дясна точка на сгъстяване на D. Казваме, че $\ell \in \mathbb{R}$ е <u>дясна граница</u> на $f(x)$ при x, клонящо към a, ако

$$\forall \{x_n\} : \lim x_n = a,\ x_n \in D,\ x_n > a\ \forall n \quad \text{имаме} \quad \lim f(x_n) = \ell.$$

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ е лява точка на сгъстяване на D. Казваме, че $\ell \in \mathbb{R}$ е <u>лява граница</u> на $f(x)$ при x, клонящо към a, ако

$$\forall \{x_n\} : \lim x_n = a,\ x_n \in D,\ x_n < a\ \forall n \quad \text{имаме} \quad \lim f(x_n) = \ell.$$

Теорема

Дефинициите на Коши и Хайне за дясна/лява граница на функция в точка са еквивалентни.

Вертикална асимптота

Дефиниция (Коши)

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на D. Казваме, че $f(x)$ клони към $+\infty$ при x, клонящо към a, и пишем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, ако

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : f(x) > A \quad \forall x \in D \text{ такова, че } |x - a| < \delta \text{ и } \underline{x \neq a}.$$

Дефиниция (Коши)

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ е дясна (съотв. лява) точка на сгъстяване на D. Казваме, че $f(x)$ клони към $+\infty$ при x, клонящо към a отдясно (съотв. отляво), и пишем $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty$ (съотв. $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = +\infty$), ако

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : f(x) > A \quad \forall x \in D \text{ такова, че } |x - a| < \delta \text{ и } \underline{x > a}$$

$$\text{(съотв. } \underline{x < a}\text{).}$$

Вертикална асимптота (допълнение)

Дефиниция (Коши)

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на D. Казваме, че $f(x)$ клони към $-\infty$ при x, клонящо към a, и пишем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, ако

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : f(x) < A \quad \forall x \in D \text{ такова, че } |x - a| < \delta \text{ и } \underline{x \neq a}.$$

Дефиниция (Коши)

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ е дясна (съотв. лява) точка на сгъстяване на D. Казваме, че $f(x)$ клони към $-\infty$ при x, клонящо към a отдясно (съотв. отляво), и пишем $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = -\infty$ (съотв. $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = -\infty$), ако

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : f(x) < A \quad \forall x \in D \text{ такова, че } |x - a| < \delta \text{ и } \underline{x > a}$$

$$(\text{съотв. } \underline{x < a}).$$

Други означения и деф. на Хайне

Други означения: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \pm\infty$, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$.

$$f(x) \xrightarrow[x\to a+0]{} \pm\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x\to a-0]{} \pm\infty, \quad f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x>a}]{} \pm\infty, \quad f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x>a}]{} \pm\infty$$

Във всеки един от описаните случаи, казваме, че правата с уравнение $x = a$ е вертикална асимптота за графиката на функцията $f(x)$.

Дефиниция (Хайне)

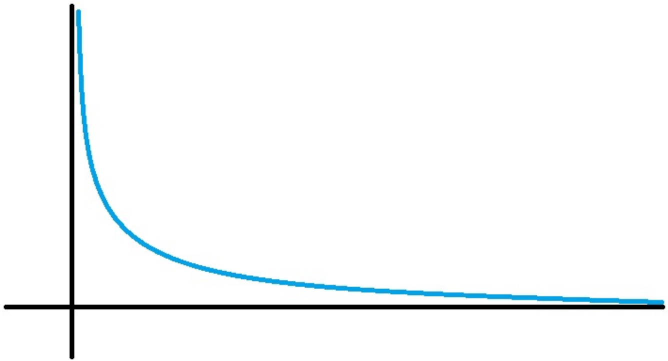
Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на D. Казваме, че $f(x)$ клони към $+\infty$ при x, клонящо към a, ако

$$\forall \{x_n\} : \lim x_n = a,\ x_n \in D,\ x_n \neq a\ \forall n \quad \text{имаме} \quad \lim f(x_n) = +\infty.$$

При x, клонящо към a отдясно (съотв. отляво), заместваме условието $x_n \neq a\ \forall n$ с $x_n > a\ \forall n$ (съотв. $x_n < a\ \forall n$).

Пример

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$$



Правата с уравнение $x = 0$ (т.е. ординатната ос) е вертикална асимптота за графиката на функцията.

Хоризонтална асимптота

Дефиниция (Коши)

Нека $f : [c, \infty) \to \mathbb{R}$, където $c \in \mathbb{R}$. Казваме, че $f(x)$ има граница ℓ (клони към ℓ) при x, клонящо към $+\infty$, и пишем $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, ако

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu > c : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x > \nu.$$

Дефиниция (Коши)

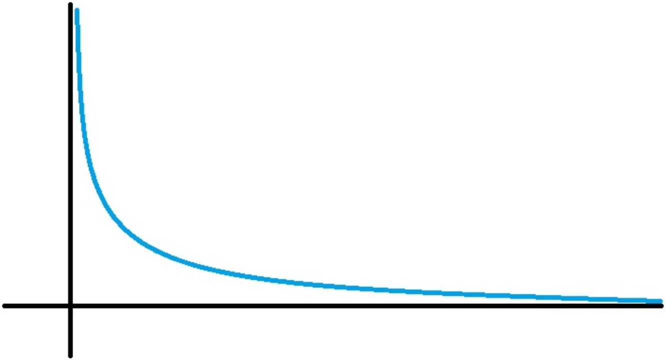
Нека $f : (-\infty, c] \to \mathbb{R}$, където $c \in \mathbb{R}$. Казваме, че $f(x)$ има граница ℓ (клони към ℓ) при x, клонящо към $-\infty$, и пишем $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, ако

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu < c : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x < \nu.$$

Казваме, че правата с уравнение $y = \ell$ е <u>хоризонтална асимптота</u> към графиката на функцията $f(x)$ при $x \to +\infty$, съотв. $x \to -\infty$.

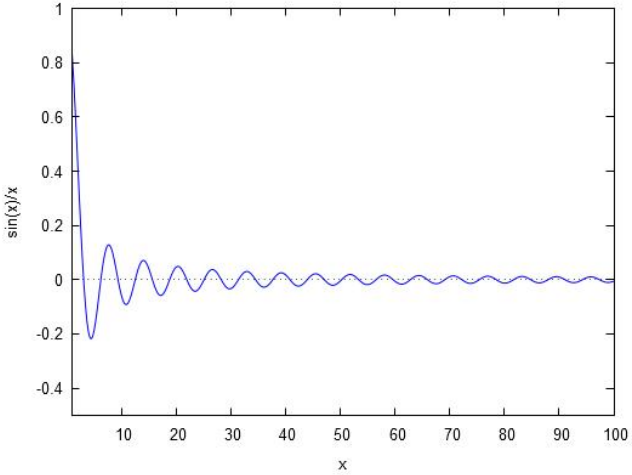
Съществуват еквивалентни форми на тези дефиниции в стила на деф. на Хайне.

Пример 1: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$



Хоризонтална асимптота при $x \to +\infty$: правата $y = 0$, т.е. абсцисната ос

Пример 2: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$



Хоризонтална асимптота при $x \to +\infty$: правата $y = 0$, т.е. абсцисната ос

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Дефиниция

Нека $f : [c, \infty) \to \mathbb{R}$, където $c \in \mathbb{R}$.

(а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty : \quad \forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \nu > c : \; f(x) > A \quad \forall x > \nu;$

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty : \quad \forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \nu > c : \; f(x) < A \quad \forall x > \nu.$

Дефиниция

Нека $f : (-\infty, c] \to \mathbb{R}$, където $c \in \mathbb{R}$.

(а) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty : \quad \forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \nu < c : \; f(x) > A \quad \forall x < \nu;$

(б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty : \quad \forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \nu < c : \; f(x) < A \quad \forall x < \nu.$

Съществуват еквивалентни форми на тези дефиниции в стила на деф. на Хайне.

Наклонена асимптота

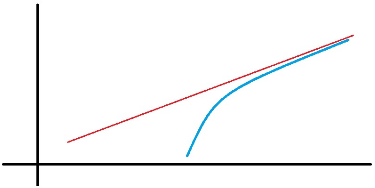
Дефиниция

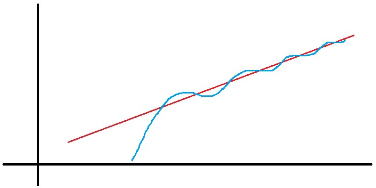
Казваме, че правата с уравнение $y = ax + b$ е <u>наклонена асимптота</u> за графиката на $f(x)$ при $x \to +\infty$ (съотв. $x \to -\infty$), ако

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ \text{съотв. } x \to -\infty}} \left(f(x) - (ax + b)\right) = 0. \tag{3}$$

Бележка: Хоризонталната асимптота е частен случай на наклонена.

Примери:





НДУ за наклонена асимптота

Твърдение

Правата с уравнение $y = ax + b$ е наклонена асимптота за графиката на $f(x)$ при $x \to +\infty$

$$\iff \quad \exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{и} \quad \exists \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - ax\big) = b. \tag{4}$$

Аналогично при $x \to -\infty$.

Бележка

Поведението на $\frac{f(x)}{x}$ при $x \to +\infty$ отчита колко стръмна е графиката на $f(x)$ спрямо права. Това, че $\frac{f(x)}{x}$ има граница при $x \to +\infty$, показва, че $f(x)$ клони към $+\infty$ или $-\infty$ при $x \to +\infty$, подобно на права (по-точно, подобно на ax, като коефициентът a показва колко стръмна е тази права и накъде е насочена). След това $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - ax\big)$ показва с колко е транслирана във вертикална посока правата $y = ax$.

Доказателство

$\Longrightarrow$) Нека правата с уравнение $y = ax + b$ е наклонена асимптота за графиката на $f(x)$ при $x \to +\infty$.
Тогава

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - ax\big) = b. \tag{5}$$

За да установим първото твърдение в (4), използваме, че

$$\frac{f(x)}{x} - a = \frac{f(x) - ax}{x}, \quad \text{но} \quad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - ax\big) = b \tag{6}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x) - ax}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a. \tag{7}$$

$\Longleftarrow$) От второто твърдение в (4) следва:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - ax\big) = b \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$$

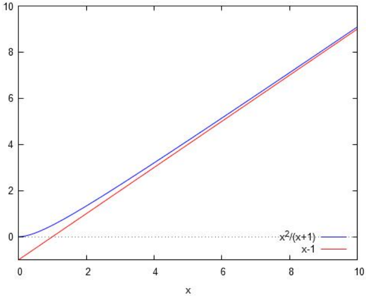
$$\overset{\text{деф.}}{\Longrightarrow} \quad y = ax + b \text{ е наклонена асимптота.} \tag{8}$$

Пример 1: $f(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad x \geq 0$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 =: a \tag{9}$$

$$f(x) - ax = f(x) - x = -\frac{x}{x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1 =: b \tag{10}$$

$\Longrightarrow$ правата с у-ние $y = x - 1$ е наклонена асимптота за графиката на $f(x)$ при $x \to +\infty$



Пример 2: $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, \; x \geq 1$

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\sin x}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 + 0 = 1 =: a, \quad \text{защото } |\sin x| \leq 1 \quad \forall x \tag{11}$$

$$f(x) - ax = f(x) - x = \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 =: b \tag{12}$$

$\Longrightarrow$ правата с у-ние $y = x$ е наклонена асимптота за графиката на $f(x)$ при $x \to +\infty$