Лекция: Метод на прогонката за системи с тридиагонална матрица

Гено Николов, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски"

Съдържание на лекцията

- Лентови матрици
- Система с тридиагонална матрица
- Метод на прогонката
- Възможни проблеми

Лентови матрици

Редица изчислителни задачи се свеждат до решаването на системи от линейни уравнения с разредени матрици от коефициенти пред неизвестните, т.е., матрици, голяма част от елементите на които са равни на нула. Специален клас от тях са така наречените лентови матрици.

Определение

Една матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ се нарича тридиагонална, петдиагонална, ..., $(2r-1)$-диагонална, където $r \leq [n/2]$, ако за елементите ѝ е изпълнено

$$a_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad |i-j| > r.$$

Системи с лентова матрица

Решаването на една система уравнения $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ с лентова матрица може да се извърши по някой от обичайните методи, но е по-добре да се използва лентовата структура на матрицата, което води до някои изчислителни удобства. Един от методите, който се прилага за решаване на системи уравнения с тридиагонални матрици, е методът на прогонката. В англоезичната литература този метод носи името Thomas algorithm.

Система с тридиагонална матрица

Ще приложим метода на прогонката за решаване на системата уравнения

$$
\left|
\begin{array}{llllllll}
b_1x_1 + & c_1x_2 & & & & & = & d_1 \\
a_2x_1 + & b_2x_2 + & c_2x_3 & & & & = & d_2 \\
 & a_3x_2 + & b_3x_3 & +c_3x_4 & & & = & d_3 \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & a_kx_{k-1} + b_kx_k + c_kx_{k+1} & & & = & d_k \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & a_{n-1}x_{n-2} & +b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n & = & d_{n-1} \\
 & & & & & a_n\,x_{n-1} + b_n\;\;x_n & = & d_n
\end{array}
\right.
$$

Прав ход на прогонката

За $i = 1, 2, \ldots, n-1$, изразяваме x_i във вида

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i. \tag{1}$$

При $i = 1$ и $b_1 \neq 0$, намираме от първото уравнение

$$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad \beta_1 = \frac{d_1}{b_1}.$$

Ако $b_1 = 0$ и $c_1 \neq 0$, можем да намерим x_2 от първото уравнение, и замествайки го във второто и третото уравнения на системата, получаваме редуцирана система с тридиагонална матрица за неизвестните $x_1, x_3, \ldots, x_n$.

Прав ход на прогонката

Да предположим, че сме намерили числата α_i и β_i в представянето (1) за $i = 1, \ldots, k-1$, където $k \leq n-1$. Замествайки x_{k-1} от (1) при $i = k-1$ в k-тото уравнение от системата, намираме α_k и β_k така:

$$a_k(\alpha_{k-1}x_k + \beta_{k-1}) + b_k x_k + c_k x_{k+1} = d_k,$$

$$(a_k\alpha_{k-1} + b_k)x_k + c_k x_{k+1} = d_k - a_k\beta_{k-1}, \qquad (2)$$

$$\alpha_k = -\frac{c_k}{a_k\alpha_{k-1} + b_k},\ \beta_k = \frac{d_k - a_k\beta_{k-1}}{a_k\alpha_{k-1} + b_k}. \qquad (3)$$

По този начин рекурсивно намираме числата α_k и β_k за $k = 2, \ldots, n-1$.

Обратен ход на прогонката

Можем да смятаме, че в последното уравнение на системата $c_n = 0$, тогава равенството (2) остава в сила, т.е. изпълнено е

$$(a_n\alpha_{n-1} + b_n)x_n = d_n - a_n\beta_{n-1}, \quad x_n = \frac{d_n - a_n\beta_{n-1}}{a_n\alpha_{n-1} + b_n}.$$

Виждаме, че $x_n = \beta_n$, където β_n е пресметнато по формулата (3). С това правият ход на прогонката е завършен.
Обратният ход на прогонката се състои от последователно прилагане на формулата

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i$$

за $i = n-1, n-2, \ldots, 1$, с което намирането на решението на системата е завършено.

Възможни проблеми при прилагане на метода

Проблеми при прилагането на този метод биха могли да възникнат, ако за някое k се окаже, че знаменателят в (3) е равен на нула. Ако това се случи за някое $k < n$, тогава бихме могли да намерим x_{k+1} от уравнението (2), което в случая ще има вида $c_k x_{k+1} = d_k - a_k \beta_{k-1}$ (в случай, че последното уравнение има решение, в противния случай дадената система е неразрешима). Заествайки с намереното x_{k+1} в уравненията с номера $k+1, \ldots, n$, получаваме система с тридиагонална матрица за променливите $x_k, x_{k+2}, \ldots, x_n$. След като решим тази система по метода на прогонката, ще сме намерили x_k. Тогава извършваме обратен ход на прогонката, намирайки последователно $x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_1$ от формулата (1).

Възможни проблеми при прилагане на метода

Ако описаният проблем възникне при $k = n$, тогава уравнението $(a_n \alpha_{n-1} + b_n) x_n = d_n - a_n \beta_{n-1}$ или няма решение, в който случай и дадената система няма решение, или пък всяко x_n е решение на системата. Тогава задавайки произволна стойност $x_n = t$, намираме x_i за $i = n-1, n-2 \ldots, 1$ с обратния ход на прогонката по формулата (1).

Край на лекцията !