Задачи за първа контролна работа

- Докажете, че ако $\{x_i\}_0^n$ са различни точки в интервала $[a,b]$ и $f \in C^{n+1}[a,b]$, тогава за всяко $x \in [a,b]$ съществува точка $\xi \in [a,b]$, такава че $f(x) - L_n(f;x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$, където $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

- Ако $\{\ell_k(x)\}_0^n$ са базисните полиноми на Лагранж за интерполиране в различните точки $\{x_i\}_0^n$, и $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, докажете тъждеството
$$\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)^m \ell_k(x) = 0 \quad \text{за} \quad m = 0,1,\ldots,n.$$

- Ако $\{\ell_k(x)\}_0^n$ са базисните полиноми на Лагранж за интерполиране в различните точки $\{x_i\}_0^n$, и $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, докажете тъждеството
$$\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)^{n+1} \ell_k(x) = (-1)^n\omega(x).$$

- Ако $\{\ell_k(x)\}_0^n$ са базисните полиноми на Лагранж за интерполиране в различните точки $\{x_i\}_0^n$, и $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, докажете тъждеството
$$\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)^{n+2} \ell_k(x) = (-1)^n\omega(x)\sum_{k=0}^{n}(x-x_k).$$

- Докажете, че ако $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, и $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, тогава за всеки полином $p(x) \in \pi_n$ е изпълнено
$$\frac{p(x)}{\omega(x)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{x-x_k}, \quad \text{където} \quad A_k = \frac{p(x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

- Като използвате интерполационната формула на Лагранж, докажете тъждеството:
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{m}{n}\binom{n}{k}\frac{1}{m-k} = \frac{1}{m-n} \quad \text{при} \quad m > n \geq 0.$$

- Като използвате интерполационната формула на Лагранж, докажете тъждеството:
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{m}{n}\binom{n}{k}\frac{k}{m-k} = \frac{m}{m-n} \quad \text{при} \quad m > n \geq 1.$$

- Изведете интерполационната формула на Нютон (с разделени разлики).

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, и $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. Като използвате свойствата на разделените разлики, докажете тъждеството:
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^m}{\omega'(x_k)} = 0, \qquad m = 0,1,\ldots,n-1.$$

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, и $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. Като използвате свойствата на разделените разлики, докажете тъждеството:
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^n}{\omega'(x_k)} = 1.$$

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, и $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. Като използвате свойствата на разделените разлики, докажете тъждеството:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0.$$

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, и $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. Като използвате свойствата на разделените разлики, докажете тъждеството:

$$\sum_{k=0}^{n} x_k \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = (n+1)n.$$

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, и $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. Като използвате свойствата на разделените разлики, докажете тъждеството:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^{n+1}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

- Нека функцията $f(x)$ има производни от всякакъв ред в интервала $[a, b]$, и съществуват положителни константи C и M, такива че за всяко естествено число n е изпълнено

$$|f^{(n)}(x)| \le C.M^m \quad \text{за всяко} \quad x \in [a, b].$$

  Докажете, че при всеки избор на интерполационни възли $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ е изпълнено

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - L_n(f; x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Задачи за втора контролна работа (20.11.2023)

- Нека $\{x_i\}_{i=0}^n$ са различни точки. Намерете в явен вид алгебричен полином $\Phi_{k,0}(x) \in \pi_{2n+1}$, удовлетворяващ интерполационните условия

$$\begin{array}{l} \Phi_{k,0}(x_i) = 0 \;\text{ за }\; i \in \{0,1,\dots,n\} \setminus \{k\},\; \Phi_{k,0}(x_k) = 1 \\ \Phi'_{k,0}(x_i) = 0 \;\text{ за }\; i = 0,1,\dots,n. \end{array}$$

- Нека $\{x_i\}_{i=0}^n$ са различни точки. Намерете в явен вид алгебричен полином $\Phi_{k,1}(x) \in \pi_{2n+1}$, удовлетворяващ интерполационните условия

$$\begin{array}{l} \Phi_{k,1}(x_i) = 0 \;\text{ за }\; i = 0,1,\dots,n, \\ \Phi'_{k,1}(x_i) = 0 \;\text{ за }\; i \in \{0,1,\dots,n\} \setminus \{k\},\; \Phi'_{k,1}(x_k) = 1. \end{array}$$

- Нека $\{t_i\}_0^m$ и ξ са различни точки, докажете, че

$$((x-\xi)f(x))[\xi, t_1, t_2, \dots, t_m] = f[t_1, t_2, \dots, t_m]\,.$$

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, различни от нула. Ако $f(x) = \dfrac{1}{x}$, намерете с помощта на формулата на Стефенсон-Поповичу $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, различни от нула. Ако $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, намерете с помощта на формулата на Стефенсон-Поповичу $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки. Ако $f(x) = x^{n+1}$, намерете с помощта на формулата на Стефенсон-Поповичу $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки. Ако $f(x) = x^{n+2}$, намерете с помощта на формулата на Стефенсон-Поповичу $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

- Нека $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Ако $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, докажете, че

$$\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{\omega'(x_i)} \neq 0\,.$$

- Като използвате връзката между разделени и крайни разлики и формулата на Стефенсон-Поповичу, докажете тъждеството

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

- Като използвате представянето на крайните разлики и връзката им с разделените разлики, докажете тъждеството

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = \begin{cases} 0, & \text{за }\; k = 0,1,\dots,n-1 \\ n!, & \text{за }\; k = n. \end{cases}$$

- Като използвате представянето на крайните разлики и връзката им с разделените разлики, докажете тъждеството

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{m+j}{k} = 0 \;\text{ за всяко }\; m \in \mathbb{N} \;\text{ и }\; k = 0,1,\dots,n-1.$$

- Изведете явна формула за тригонометричния полином от ред n, интерполиращ дадена функция f в точките $x_k = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$.

- Ако $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, докажете, че функциите
$$\{e^{\alpha_0 x}, e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}\}$$
образуват Чебишова система в интервала $(-\infty, \infty)$.

- Като използвате интерполационен полином с интерполационни възли в точките $0, 1, \ldots, n$, намерете формула за
$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2.$$

- Като използвате интерполационен полином с интерполационни възли в точките $0, 1, \ldots, n$, намерете формула за
$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3.$$

- Ако $0 \le \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, докажете, че функциите
$$\{x^{\alpha_0}, x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}\}$$
образуват Чебишова система в интервала $(0, \infty)$.

- Ако $f(x)$ притежава непрекъсната n-та производна в интервала $[a, b]$, и $f^{(n)}(x) \neq 0$ в (a, b), докажете, че функциите
$$\{1, x, \ldots, x^{n-1}, f(x)\}$$
образуват Чебишова система в интервала $[a, b]$.

- Докажете, че функциите $\{1,\ x,\ x\cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $(0, \frac{\pi}{2}]$.

- Докажете, че функциите $\{1,\ x,\ x\sin x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

- Докажете, че функциите $\{\sin x,\ \sin 2x\}$ не образуват Чебишова система в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- Докажете, че функциите $\{1,\ \cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[0, \pi]$.

- Докажете, че функциите $\{1,\ \cos x\}$ не образуват Чебишова система в интервала $[0, 2\pi)$.