Задачи за първа контролна работа

- Докажете, че ако $\{x_i\}_0^n$ са различни точки в интервала $[a,b]$ и $f \in C^{n+1}[a,b]$, тогава за всяко $x \in [a,b]$ съществува точка $\xi \in [a,b]$, такава че $f(x) - L_n(f;x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$, където $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

- Ако $\{\ell_k(x)\}_0^n$ са базисните полиноми на Лагранж за интерполиране в различните точки $\{x_i\}_0^n$, и $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, докажете тъждеството

$$\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)^m \ell_k(x) = 0 \quad \text{за} \quad m = 0,1,\ldots,n.$$

- Ако $\{\ell_k(x)\}_0^n$ са базисните полиноми на Лагранж за интерполиране в различните точки $\{x_i\}_0^n$, и $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, докажете тъждеството

$$\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)^{n+1} \ell_k(x) = (-1)^n \omega(x).$$

- Ако $\{\ell_k(x)\}_0^n$ са базисните полиноми на Лагранж за интерполиране в различните точки $\{x_i\}_0^n$, и $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, докажете тъждеството

$$\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)^{n+2} \ell_k(x) = (-1)^n \omega(x) \sum_{k=0}^{n}(x-x_k).$$

- Докажете, че ако $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, и $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, тогава за всеки полином $p(x) \in \pi_n$ е изпълнено

$$\frac{p(x)}{\omega(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{x-x_k}, \quad \text{където} \quad A_k = \frac{p(x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

- Като използвате интерполационната формула на Лагранж, докажете тъждеството:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{m}{n}\binom{n}{k}\frac{1}{m-k} = \frac{1}{m-n} \quad \text{при} \quad m > n \ge 0.$$

- Като използвате интерполационната формула на Лагранж, докажете тъждеството:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{m}{n}\binom{n}{k}\frac{k}{m-k} = \frac{m}{m-n} \quad \text{при} \quad m > n \ge 1.$$

- Изведете интерполационната формула на Нютон (с разделени разлики).

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, и $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. Като използвате свойствата на разделените разлики, докажете тъждеството:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^m}{\omega'(x_k)} = 0, \qquad m = 0,1,\ldots,n-1.$$

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, и $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. Като използвате свойствата на разделените разлики, докажете тъждеството:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^n}{\omega'(x_k)} = 1.$$

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, и $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. Като използвате свойствата на разделените разлики, докажете тъждеството:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0.$$

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, и $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. Като използвате свойствата на разделените разлики, докажете тъждеството:

$$\sum_{k=0}^{n} x_k \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = (n+1)n.$$

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, и $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. Като използвате свойствата на разделените разлики, докажете тъждеството:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^{n+1}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

- Нека функцията $f(x)$ има производни от всякакъв ред в интервала $[a, b]$, и съществуват положителни константи C и M, такива че за всяко естествено число n е изпълнено

$$|f^{(n)}(x)| \le C.M^m \quad \text{за всяко} \quad x \in [a, b].$$

Докажете, че при всеки избор на интерполационни възли $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ е изпълнено

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - L_n(f; x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$