26. Теореми на Лопитал

Теорема 1

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в $[a, a+\delta]$, и диференцируеми в $(a, a+\delta)$, където $\delta > 0$. Нека $f(a) = g(a) = 0$ и нека $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, a+\delta)$. Тогава, ако съществува границата

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{1}$$

то съществува и границата

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{2}$$

при това

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3}$$

Последното твърдение остава в сила и ако

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty. \tag{4}$$

Следствие

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в $[a-\delta, a+\delta]$, където $\delta > 0$, и диференцируеми в $(a-\delta, a+\delta)$, като се допуска в т. a да нямат производна. Нека $f(a) = g(a) = 0$ и нека $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$. Тогава, ако съществува границата

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{5}$$

то съществува и границата

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{6}$$

при това

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7}$$

Последното твърдение остава в сила и ако

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty. \tag{8}$$

Д-во на Т-ма 1

Както в доказателството на обобщената т-ма за крайните нараствания, се убеждаваме, че $g(x) \neq 0$ в $(a, b]$.

Да положим $\ell := \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \ell \in \mathbb{R}$.

Трябва ни връзка между $\frac{f}{g}$ и $\frac{f'}{g'}$. Нека $x \in (a, a+\delta)$ е произволно фиксирано. Прилагаме обобщената т-ма за крайните нараствания към f и g в $[a, x]$. Така получаваме, че $\exists\, c \in (a, x)$ такова, че

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{9}$$

Като вземем предвид, че $f(a) = g(a) = 0$, получаваме

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{10}$$

Стойността на c изобщо зависи от x. В този смисъл c е функция на x и ще я означаваме с $c(x)$. Така (10) придобива вида

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}, \quad x \in (a, a+\delta). \tag{11}$$

Важно свойство на $c(x)$ е, че

$$a < c(x) < x. \tag{12}$$

Ако оставим $x \to a + 0$, от (12) получаваме, че $c(x) \to a + 0$, като $c(x) \neq a$ за $x \in (a, a + \delta)$. Имаме

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \overset{\text{гр. съст. ф-я}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \ell \tag{13}$$

$$\overset{(11)}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{14}$$

Горните разсъждения остават в сила и когато $\ell = \pm\infty$.

Бележка

Съвсем ясно е, че е в сила аналогът на Т-ма 1 с лява граница в т. a вместо дясна. В този случай разглеждаме функции $f(x)$ и $g(x)$, дефинирани върху интервал от вида $[a - \delta, a]$, които приемат стойност 0 в т. a.

Д-во на Следствието

Да положим $\ell := \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогава

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \quad \text{както и} \quad \lim_{x\to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell. \tag{15}$$

Направените в следствието предположения показват, че са изпълнени предположенията на Т-ма 1. Следователно

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{16}$$

От друга страна, като приложим бележката след края на д-вото на Т-ма 1, получаваме

$$\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{17}$$

Сега твърдението на следствието следва от (16) и (17).

Теорема 2

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в $(a, a+\delta)$, където $\delta > 0$. Нека $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \pm\infty$ и нека $g(x), g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, a+\delta)$. Тогава, ако съществува границата

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{18}$$

то съществува и границата

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{19}$$

при това

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{20}$$

Последното твърдение остава в сила и ако

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty. \tag{21}$$

Бележка

Твърдението на теоремата остава в сила за лява граница и за граница.

Д-во на Т-ма 2: Постъпваме аналогично на д-вото на Т-ма 1. Да положим $\ell := \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \ell \in \mathbb{R}$.

Нека $x, x_0 \in (a, a+\delta)$ са произволно фиксирани. Ще извършим някои аритметични преобразувания, които са валидни при определени условия. След това ще покажем, че те са изпълнени за x, x_0 достатъчно близо да a.

Прилагаме обобщената т-ма за крайните нараствания към f и g в интервала с краища x и x_0. Така получаваме, че $\exists\, c$, между x и x_0, такова, че

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{22}$$

Представяме лявата страна във вида

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} \, \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}. \tag{23}$$

Така получаваме

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{24}$$

Следователно

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \ell = \left[\frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell\right] \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} + \ell \left[\frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1\right]. \tag{25}$$

Следователно

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| \leq \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell\right| \left|\frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}\right| + |\ell| \left|\frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1\right|. \tag{26}$$

Ще покажем, че можем да направим $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right|$ колкото желаем малко, стига да вземем x достатъчно близо до a. От това ще следва, че

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{27}$$

Също така ще покажем, че за x и x_0, достатъчно близо до a, направените досега аритметични преобразувания са валидни.
Нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано.
Първо, щом

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \tag{28}$$

то $\exists\, \delta_1 \in (0, \delta]$ такова, че

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \varepsilon, \quad x \in (a, a + \delta_1). \tag{29}$$

Фиксираме $x_0 \in (a, a + \delta_1)$. Тогава за всяко $x \in (a, a + \delta_1)$ имаме $c \in (a, a + \delta_1)$ и следователно

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell\right| < \varepsilon, \quad x \in (a, a + \delta_1). \tag{30}$$

Второ, щом $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$, то за x, достатъчно близо до a, имаме $f(x) \neq 0$, както и $1 - \frac{f(x_0)}{f(x)} \neq 0$.

Трето, щом $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \pm\infty$, то

$$\lim_{x\to a+0} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1 \tag{31}$$

и следователно $\exists\, \delta_2 \in (0, \delta_1]$ такова, че

$$\left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1 \right| < \varepsilon, \quad x \in (a, a+\delta_2). \tag{32}$$

Накрая от (26), (30) и (32) следва за $x \in (a, a+\delta_2)$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| \leq \underbrace{\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell \right|}_{<\varepsilon} \underbrace{\left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right|}_{<1+\varepsilon} + |\ell| \underbrace{\left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1 \right|}_{<\varepsilon}. \tag{33}$$

Така установихме, че

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| < \varepsilon(1+\varepsilon) + |\ell|\varepsilon = \varepsilon(1+\varepsilon+|\ell|), \tag{34}$$

с което показахме, че можем да направим $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right|$ колкото желаем малко, стига да вземем x достатъчно близо до a, а с това и

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{35}$$

Твърдението на т-мата в случайте, в които $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, се доказва аналогично непосредствено от

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}, \tag{36}$$

където c е x между x_0.

Теорема 3

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в $(p, +\infty)$. Нека $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ и нека $g'(x) \neq 0$ при $x > p$. Тогава, ако съществува границата

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{37}$$

то съществува и границата

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{38}$$

при това

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{39}$$

Последното твърдение остава в сила и ако

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty. \tag{40}$$

Теорема 4

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в $(p, +\infty)$. Нека $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$ и нека $g(x), g'(x) \neq 0$ при $x > p$. Тогава, ако съществува границата

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{41}$$

то съществува и границата

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{42}$$

при това

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{43}$$

Последното твърдение остава в сила и ако

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty. \tag{44}$$

Твърденията на Т-ми 3 и 4 са в сила и за граници при $x \to -\infty$.

Схема на д-вото на Т-ми 3 и 4

Твърденията на Т-ми 3 и 4 се свеждат съответно към Т-ми 1 и 2 чрез преминаване към функциите

$$F(t) := f\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{и} \quad G(t) := g\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \in \left(0, \frac{1}{p}\right]. \tag{45}$$

Имаме

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{t\to 0+0} h\left(\frac{1}{t}\right). \tag{46}$$

В случая на Т-ма 3, още дефинираме $F(t)$ и $G(t)$ и за $t = 0$, като полагаме $F(0) = G(0) := 0$. Тогава от $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ следва, че $\lim\limits_{t\to 0+0} F(t) = \lim\limits_{t\to 0+0} G(t) = 0$, откъдето на свои ред следва, че $F(t)$ и $G(t)$ са непрекъснати в т. 0. Непрекъснатостта на тези функции във $\left(0, \frac{1}{p}\right]$, както и диференцируемостта им в $\left(0, \frac{1}{p}\right)$, следва непосредствено съответно от непрекъснатостта и диференцируемостта на $f(x)$ и $g(x)$ съотвертно в $[p, +\infty)$ и $(p, +\infty)$, като

$$F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{и} \quad G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right). \tag{47}$$