2. Критерий на Дарбу за интегруемост. Класове интегруеми функции

Критерий на Дарбу за интегруемост

Теорема 1 (критерий за интегруемост, Дарбу)

Ограничената функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегруема върху $[a, b]$ тогава и само тогава, когато

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ разбиване } \tau \text{ на } [a, b] : S_\tau - s_\tau < \varepsilon. \tag{1}$$

Д-во: Нека $f(x)$ е интегруема. Тогава $I := \underline{I} = \overline{I}$, т.е.

$$I := \sup_\tau s_\tau = \inf_\tau S_\tau. \tag{2}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Числото $I - \frac{\varepsilon}{2}$ не е горна граница на множеството от малките суми на Дарбу. Следователно съществува s_{τ_1} такава, че

$$s_{\tau_1} > I - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Аналогично, $I + \frac{\varepsilon}{2}$ не е долна граница на множеството от големите суми на Дарбу. Следователно съществува S_{τ_2} такава, че

$$S_{\tau_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

От (3) и (4) следва, че

$$S_{\tau_2} - s_{\tau_1} < I + \frac{\varepsilon}{2} - \left(I - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon. \tag{5}$$

Образуваме разбиването $\tau := \tau_1 \cup \tau_2$. От Твърдение 2 в Тема 1 и (5) следва, че

$$S_\tau - s_\tau \leq S_{\tau_2} - s_{\tau_1} < \varepsilon. \tag{6}$$

Обратно, нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогава съществува разбиване τ такова, че $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Следователно

$$\overline{I} - \underline{I} \leq S_\tau - s_\tau < \varepsilon. \tag{7}$$

Така установихме, че

$$0 \leq \overline{I} - \underline{I} < \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{8}$$

Следователно $\underline{I} = \overline{I}$ и $f(x)$ е интегруема върху $[a, b]$.

Бележка

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена и $\tau : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ е разбиване на $[a, b]$. Тогава

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}),$$

$$m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \; M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad (9)$$

както и

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} \omega(f, [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}),$$

$$\omega(f, [x_{i-1}, x_i]) = M_i - m_i \text{ — осцилация на } f(x) \text{ върху } [a, b]. \quad (10)$$

Вижте, Тема 18 по ДИС 1, (13) и (14).

Класове интегруеми функции

Теорема 2

Всяка монотонна функция, дефинирана върху краен затворен интервал, е интегруема върху него.

Д-во: Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е монотонно растяща (монотонно намаляващите функции се разглеждат аналогично). Нека $\tau : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ е разбиване на $[a, b]$. Понеже $f(x)$ е монотонно растяща, $m_i = f(x_{i-1})$ и $M_i = f(x_i)$ и тогава

$$S_\tau - s_\tau \overset{(9)}{=} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}) \tag{11}$$

$$\leq d(\tau) \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = [f(b) - f(a)]\, d(\tau), \tag{12}$$

защото $x_i - x_{i-1} \leq d(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Така установихме, че можем да направим $S_\tau - s_\tau$ колкото искаме малка, стига да вземем разбиване с достатъчно малък диаметър. Сега от Критерия за интегруемост следва, че $f(x)$ е интегруема върху $[a, b]$.

Теорема 3

Всяка непрекъсната функция, дефинирана върху краен затворен интервал, е интегруема върху него.

Д-во: Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. От Теоремата за осцилациите (Тема 18 по ДИС 1) следва, че съществува разбиване $\tau : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ такова, че

$$\omega(f, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{13}$$

Имаме

$$S_\tau - s_\tau \overset{(10)}{=} \sum_{i=1}^{n} \omega(f, [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) \tag{14}$$

$$\overset{(13)}{<} \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a). \tag{15}$$

Така установихме, че можем да направим $S_\tau - s_\tau$ колкото искаме малка, стига да вземем разбиване с достатъчно малък диаметър. Сега от Критерия за интегруемост следва, че $f(x)$ е интегруема върху $[a, b]$.