# ВЪВЕДЕНИЕ В СИСТЕМАТА WOLFRAM MATHEMATICA

| Име | Оператор |
|---|---|
| събиране | + |
| изваждане | - |
| умножение | * |
| деление | / |
| степенуване | ^ |
| математически скоби | ( ) |
| матем. равенство | == |
| присвояване | = |
| списъци | { , , } |
| аргументи на команди и функции | [ , , ] |
| разделител на команди и оператори | ; |
| стартиране | Shift + Enter |
| нов ред | Enter |
| коментар | (*    *) |

Имената на всички вградени функции, команди и константи започват с главна буква. Wolfram Mathematica може да смята точно (обикновени дроби) и приближено (десетични дроби).

## Основни функции и команди:

1) Числен вид:
   N[E]    (* числен вид на $e$ *)    2.71828

   N[Pi,20] (* числен вид на $\pi$ с 15 символа *)    3.14159265358979323851

2) Многократна сума:
   Sum[1/k^2 , {k, 1, Infinity}]    (* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ *)    $\frac{\pi^2}{6}$

3) Многократно произведение:
   Product[k^2, {k, 1,5}]    (* $\prod_{k=1}^{5} k^2$ *)    14400

4) Граници:
   Limit[(1 + 1/n)^n, n → Infinity]    $e$

5) Интегриране:
   Integrate[1/(1 + x^2) , x]    (* $\int \frac{dx}{1+x^2}$ *)    ArcTan[x]

NIntegrate[1/(1 + $x$^2) , {$x$, 0,1}] (* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$*) $\frac{\pi}{4}$

6) Решаване на уравнения и системи уравнения:
Solve[{$x + y$ == 2, $x - 5y$ == −1}, {$x, y$}] $\{\{x \to \frac{3}{2}, y \to \frac{1}{2}\}\}$

NSolve[$z$^3 − 3$z$^2 + 5$z$ − 2 == 0] {{$z$ → 0.5466023484835962}, {$z$ → 1.2266988257582019 − 1.4677115087102244$i$}, {$z$ → 1.2266988257582019 + 1.4677115087102244$i$}}

7) Разлагане на множители:
Factor[$x$^3 + $y$^3] $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

8) Разкриване на скоби:
Expand[%] $x^3 + y^3$

9) Развитие в ред на Телор:
Series[$x$ ∗ Cot[$x$], {$x$, 0,11}] $1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \frac{2x^{10}}{93555} + O[x]^{12}$

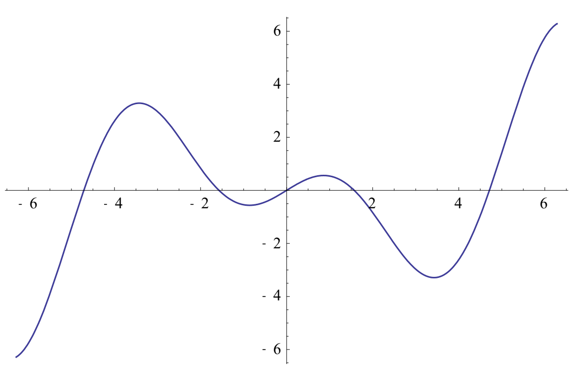
10) Матрично смятане:

```
A={{1,2,3},{1,0,-1},{2,2,3}}
Det[A]
```
$-2$

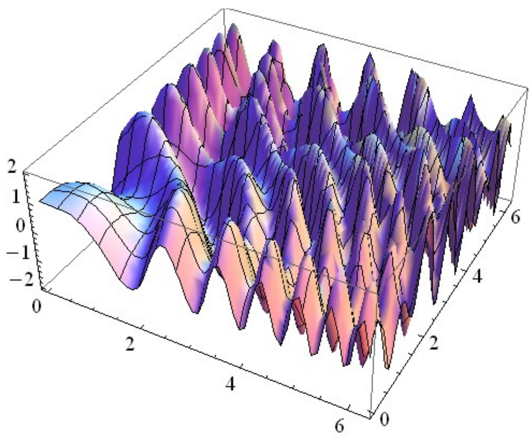
```
Inverse[A]
```
$\{\{-1,0,1\},\{\frac{5}{2},\frac{3}{2},-2\},\{-1,-1,1\}\}$

11) Дефиниране на функции и графика:

```
f[x_]:=Cos[x]*x;
Plot[f[x],{x,-2Pi,2Pi}]
```



```
h[x_,y_]:=Sin[x y]+Cos[x^2+y^2];
Plot3D[h[x,y],{x,0,2Pi},{y,0,2Pi}]
```




12) Условен оператор:
$k = \text{Input}[k]; l = 0; \text{If}[k < 0, l = -k, l = k]; l$ (* $l = \text{Abs}[k]$ *)

13) Оператор за цикъл:
$s = 0; \text{Do}[s = s + k, \{k, 1,99,2\}]; s$ (* $s = 1 + 3 + \cdots + 99$ *) 2500

14) Условен оператор за цикъл:
$\text{s1} = 0; k = 0; \text{While}[k < 100, k = k + 2; \text{s1} = \text{s1} + k]; \text{s1}$ (* $s1 = 0 + 2 + 4 + \cdots + 100$ *) 2550.

# Интерполационен полином на Лагранж (ИПЛ)

Нека $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ са различни реални точки и $f(x_k)$ са дадени. Интерполационният полином на Лагранж се задава по следния начин: $L_n(f;x)$=$\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\, f(x_k)$, където $\omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$ и базисните полиноми на Лагранж са $l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} = \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}$, където $\omega_k(x) = \frac{\omega(x)}{x-x_k}$. Знаем, че $L_n(f;x_к) = f(x_к), \forall k = 0, 1, \dots, n$.

Ако $f(x)$ има непракъсната $(n+1)$ производна и $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M, \forall x \in [a,b]$ , то

$$|f(x) - L_n(f;x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|\omega(x)|.$$

**Твърдение:** Ако $f(x) \in \pi_n$, то $L_n(f;x) \equiv f(x)$.

**Задача 1.** С помощта на *Wolfram Mathematica* да се построи ИПЛ за $f(x) = \frac{1}{1+x}$ с интерполационни възли:

а) $x_k = \frac{k}{n}, k = 0,1,\dots,n;$ за $n = 5; 15$ и $50;$

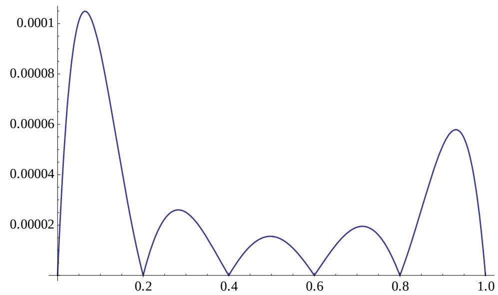
б) $x_k = \sin^2\frac{(2k+1)\pi}{4n+4}, k = 0,1,\dots,n;$ за $n = 5; 10.$

**Решение:**

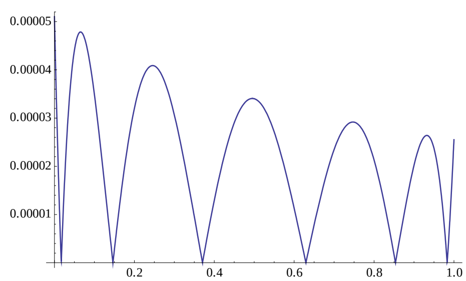
а**)**

```
n=5;
f[t_]:=1/(1+t);
Do[x[k]=k/n,{k,0,n}];
w[t_]:=Product[t-x[k],{k,0,n}];
Do[v[k_,t_]:=w[t]/(t-x[k]),{k,0,n}];
Do[l[k_,t_]:=v[k,t]/Simplify[v[k,t]/.t→x[k]],{k,0,n}];
L[f_,t_]:=Sum[l[k,t]*f[x[k]],{k,0,n}];
m=Expand[L[f,t]]
Plot[Abs[f[t]-m],{t,0,1}]
```

$$1 - \frac{251t}{252} + \frac{2875t^2}{3024} - \frac{4625t^3}{6048} + \frac{625t^4}{1512} - \frac{625t^5}{6048}$$




**б)** 
```
n=5;
f[t_]:=1/(1+t);
Do[x[k]=(Sin[(2k+1)Pi/(4n+4)])^2,{k,0,n}];
w[t_]:=Product[t-x[k],{k,0,n}];
Do[v[k_,t_]:=w[t]/(t-x[k]),{k,0,n}];
Do[l[k_,t_]:=v[k,t]/Simplify[v[k,t]/.t→x[k]],{k,0,n}];
L[f_,t_]:=Sum[l[k,t]*f[x[k]],{k,0,n}];
m=Expand[L[f,t]];
Plot[Abs[f[t]-m],{t,0,1}]
```




**Задача 2.** Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) \equiv 1$.

**Доказателство:** Нека $f(x) = 1 \in \pi_0 \subset \pi_n \Rightarrow L_n(f;x) \equiv f(x) \equiv 1$, но $f(x_k) = 1, \forall\, x$.

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) \equiv 1.$$

**Задача 3.** Да се докаже, че за $m = 1,2 \dots, n$ е в сила $\sum_{k=0}^{n} l_k(x).\, x_k^m = x^m$.

**Доказателство:** Нека $f(x) = x^m \in \pi_m \subseteq \pi_n \Rightarrow L_n(f;x) \equiv f(x) = x^m$, но $f(x_k) = x_k^m, \forall\, x_k$.

$$=> \ L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) x_k^m = x^m.$$

**Задача 4.** Нека $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ . Да се намери $\sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+1}$.

**Решение:** Нека $f(x) = x^{n+1} \in \pi_{n+1} => L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+1}$. Но $L_n(f;x_k) = f(x_k), \forall k = 0, 1, \dots, n$ $=> f(x) - L_n(f;x) \in \pi_{n+1}$ със старши коефициент 1 $=> f(x) - L_n(f;x) = \omega(x)$.

$$=> \sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+1} = x^{n+1} - \omega(x).$$

**Задача 5.** Нека $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ . Да се намери $\sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+2}$.

**Решение:** Нека $f(x) = x^{n+2} \in \pi_{n+2} => L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+2}$. Но $L_n(f;x_k) = f(x_k), \forall k = 0, 1, \dots, n$ $=> f(x) - L_n(f;x) \in \pi_{n+2}$ със старши коефициент 1 $=> f(x) - L_n(f;x) = \omega(x)(x - A)$. Приравняваме коефициентите пред $x^{n+1}$ от двете страни на равенството. Отляво този коефициент е нула, а в дясната страна по формулите на Виет е равен на сумата от корените. Получаваме:

$$0 = -x_0 - x_1 - \cdots - x_n - A$$

$$=> A = -\sum_{i=0}^{n} x_i$$

$$=> \sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+2} = x^{n+2} - \omega(x)\left(x + \sum_{i=0}^{n} x_i\right).$$

**Задача 6.** Нека $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ . Да се докаже , че за $m = 1,2 \dots, n$ е в сила $\sum_{k=0}^{n} l_k(x). (x - x_k)^m = 0$ .

**Доказателство:** Нека $f(t) = (x - t)^m \in \pi_m \subseteq \pi_n => L_n(f;t) \equiv f(t)$.

$$=> \ L_n(f;t) = \sum_{k=0}^{n} l_k(t)(x - x_k)^m = (x - t)^m,$$

и за $t = x$ получаваме $\sum_{k=0}^{n} l_k(x). (x - x_k)^m = 0$ .

# Разделени разлики

Разделена разлика за функцията $f(x)$ във възлите $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ се дефинира по следния начин:

- В един възел $f[x_0] = f(x_0)$;
- Рекурентно в повече възли $f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$.

На лекции е доказана следната формула (1) за разделената разлика във всички интерполационни възли:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} \qquad (1)$$

Разделената разлика $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ е равна на коефициента пред $x^n$ в интерполационния полином на Лагранж $L_n(f;x)$ от $\boldsymbol{n}$-та степен за $f(x)$ с възли $x_0, x_1, \dots, x_n$.

От горното твърдение получаваме:

1) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0,$ за $f(x) = x^m, m = 0,1, \dots, n-1;$
2) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1,$ за $f(x) = x^n$.

Тези тъждества могат да бъдат написани в следния вид, използвайки формула (1):

1') $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^m}{\omega'(x_k)} = 0, m = 0,1, \dots, n-1;$

2') $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^n}{\omega'(x_k)} = 1.$

**Задача 1.** Да се намерят коефициентите $A_k$ в разлагането $\frac{p(x)}{\omega(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{x - x_k}$, където $p(x) \in \pi_n$.

**Решение:** $p(x) \in \pi_n \Rightarrow p(x) = L_n(p;x) \Rightarrow p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} p(x_k)$

Делим двете страни на равенството на $\omega(x)$ и получаваме:

$\frac{p(x)}{\omega(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{x - x_k}$, където $A_k = \frac{p(x_k)}{\omega'(x_k)}$.

**Задача 2.** Да се разложи на елементарни дроби рационалната функция $\frac{x+2}{x(x-1)(x-2)}$.

**Решение:** $p(x) = x + 2;\ \omega(x) = x(x-1)(x-2)$. Използвайки изведените в Задача 1. формули за коефициентите $A_k$ получаваме:

$$A_0 = \frac{p(x_0)}{\omega'(x_0)} = \frac{p(0)}{\omega'(0)} = 1;$$

$$A_1 = \frac{p(x_1)}{\omega'(x_1)} = \frac{p(1)}{\omega'(1)} = -3;$$

$$A_2 = \frac{p(x_2)}{\omega'(x_2)} = \frac{p(2)}{\omega'(2)} = 2.$$

$$=> \frac{x+2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-2}.$$

**Задача 3**. Нека $m \in \{1,2,\dots,n-1\}$. Да се докаже, че $\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\omega'(x_k)} \neq 0$.

**Доказателство:**
Нека $p(x) \in \pi_n$ е зададен с интерполационните условия:

| $x_k$ | $x_0$ | $x_1$ | .... | $x_{m-1}$ | $x_m$ | $x_{m+1}$ | .... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x_k)$ | 0 | 0 | ... | 0 | 1 | 1 | ... | 1 |

$$p(x_i) = 0, i = 0,\dots,m-1;\ p(x_i) = 1, i = m, m+1,\dots,n$$

=>$p[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\omega'(x_k)}$. Ще покажем, че степентта на $p(x)$ е точно равна на $n$, т. е. не е по-ниска. По теоремата на Рол $p'(x)$ ще се нулира поне веднъж във всеки един от интервалите $(x_0, x_1), \dots, (x_{m-2}, x_{m-1})$ и в интервалите $(x_m, x_{m+1}), \dots, (x_{n-1}, x_n)$, защото в краищата им има равни стойности. Тогава нулите на $p'(x)$ са $(m-1) + (n-m) = n-1$. Следователно $p(x)$ има точно $n$ нули => $p[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\omega'(x_k)} \neq 0$.

**Задача 4**. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}$.

**Решение:** Търсим разделената разлика на функцията $f(x) = \omega''(x)$.

Но $\omega(x) \in \pi_{n+1} => \omega''(x) \in \pi_{n-1}$ и от твърдението 1) получаваме, че $\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0$.

**Задача 5.** Да се намери $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}$.

**Решение:** Търсим разделената разлика на функцията $f(x) = x\omega''(x)$. Но $\omega(x) \in \pi_{n+1} => x\omega''(x) \in \pi_n$.

$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) = x^{n+1} + a_1x^n + \dots + a_{n+1}$,

$$=> \omega'(x) = (n+1)x^n + n.a_1x^{n-1} + \cdots$$

$$=> \omega''(x) = (n+1)n.x^{n-1} + n(n-1)a_1x^{n-2} + \cdots$$

$$=> x\omega''(x) = (n+1)n.x^n + n(n-1)a_1x^{n-1} + \cdots$$

$$=> \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = n(n+1).$$

**Задача 6.** Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^{n+1}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

**Доказателство:** Лявата страна на равенството е разделена разлика за функцията $f(x) = x^{n+1}$. Търсим коефициента пред $x^n$ в интерполационния полином на Лагранж (ИПЛ) $L_n(f;x)$. Но той интерполира функцията във възлите $x_0, x_1, \dots, x_n$. Следователно

$$f(x_i) - L_n(f;x_i) = 0, i = 0,1,\dots,n$$

$$=> f(x) - L_n(f;x) = \omega(x)$$

Приравняваме коефициентите пред $x^n$ от двете страни на равенството. От дясната страна използваме формулите на Виет. Получаваме:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x_k,$$

Следователно $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^{n+1}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

**Задача 7.** Като използвате ИПЛ докажете тъждествата:

а) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{m}{n} \frac{1}{m-k} = \frac{1}{m-n}, \forall m > n \geq 0$;

б) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{m}{n} \frac{k}{m-k} = \frac{m}{m-n}, \forall m > n \geq 1$.

**Решение:** Нека $x_k = k, k = 0,1, \dots, n \Rightarrow \omega(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n)$;

$$\omega'(k) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} (k-j);$$

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x) f(k)}{(x-k)\omega'(k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x(x-1)\dots(x-n) f(k)}{(x-k).k(k-1)(k-2)\dots 1.(-1)(-2)\dots(-(n-k))}.$$

Нека $x = m \Rightarrow L_n(f;m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} m(m-1)\dots(m-n) f(k)}{(m-k)k!(n-k)!}$. Умножаваме и делим на $n!$ в дробта и получаваме:

$$L_n(f;m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(m-n)}{(m-k)} \binom{n}{k} \binom{m}{n} f(k).$$

а) Нека $f(x) = 1 \in \pi_0 \Rightarrow f(m) = L_n(f;m) = 1$. Делим двете страни на равенството на $(m-n) \neq 0$ и получаваме $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{m}{n} \frac{1}{m-k} = \frac{1}{m-n}$.

б) Нека $f(x) = x \in \pi_1 \Rightarrow f(m) = L_n(f;m) = m$. Делим двете страни на равенството на $(m-n) \neq 0$ и получаваме $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{m}{n} \frac{k}{m-k} = \frac{m}{m-n}$.

**Задача 8.** Нека $f(x)$ има производни от всякакъв ред в интервала $[a,b]$, и съществуват положителни константи $C$ и $M$, такива че за всяко естествено число $n$ е изпълнено

$$\left|f^{(m)}(x)\right| \leq CM^m \text{ за всяко } x \in [a,b]$$

Докажете, че за всеки избор на интерполационни възли $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ е изпълнено

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - L_n(f;x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

**Доказателство:**
От формулата за грешката и условието имаме

$$|f(x) - L_n(f;x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!} |\omega(x)| \leq \frac{CM^{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} = \frac{C\left(M(b-a)\right)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \ \ \xi \in (a,b)$$

е изпълнено за всяко $x \in [a,b]$. Следователно

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - L_n(f;x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

### Интерполационна формула на Нютон с разделени разлики:

$$L_n(f;x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \cdots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

**Задача 9.** Да се намери полином $p(x) \in \pi_3$, такъв че $p(-1) = 3, p(0) = 1, p(1) = -1, p(2) = 3$.

**Решение:** Имаме 4 интерполационни възела. Можем да построим единствен полином от трета степен с тези условия по формулата на Нютон. За целта са ни необходими разделените разлики. Тях най-лесно можем да пресметнем от рекурентната връзка в следната таблица:

| $x_i$ | $p[x_i]$ | $p[x_i,x_{i+1}]$ | $p[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$ | $p[x_i x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$ |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 3 | $\frac{1-3}{0-(-1)} = -2$ | $\frac{-2-(-2)}{1-(-1)} = 0$ | $\frac{3-0}{2-(-1)} = 1$ |
| 0 | 1 | $\frac{-1-1}{1-0} = -2$ | $\frac{4-(-2)}{2-0} = 3$ | |
| 1 | -1 | $\frac{3-(-1)}{2-1} = 4$ | | |
| 2 | 3 | | | |

Оцветените в червено разделени разлики участват във формулата на Нютон. Заместваме в нея:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p[x_0,x_1,\ldots,x_k](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})$$
$$= 3 - 2(x+1) + 0(x+1)(x-0) + 1(x+1)(x-0)(x-1) = x^3 - 3x + 1.$$

**Задача 10.** Да се напише програма на Wolfram *Mathematica* за намиране на ИПЛ по условията от **задача 9**.

**Решение:** Нека означим разделената разлика $a[i,j] = f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+j}]$. Програмата е:

```
n=3;
Do[x[i]=i-1,{i,0,n}];
a[0,0]=3;a[1,0]=1;a[2,0]=-1;a[3,0]=3;
Do[Do[a[i,j]=(a[i+1,j-1]-a[i,j-1])/(x[i+j]-x[i]),{i,0,n-j}],{j,1,n}];
L[t_]:=a[0,0]+Sum[a[0,j]*Product[t-x[i],{i,0,j-1}],{j,1,n}];
Simplify[L[t]]
```

Out[1]= $1 - 3t + t^3$

# Разделени разлики с кратни възли. Интерполационен полином на Ермит

Нека $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq b$ и $f \in C^n[a,b]$. Разделена разлика на функцията $f(x)$ във възлите $x_0, x_1, \ldots, x_k$ се дефинира по следния начин:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \begin{cases} \dfrac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, x_0 \neq x_k \\ \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad x_0 = x_k \end{cases}$$

Интерполационният полином на Ермит се задава с формулата на Нютон:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\ x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}).$$

**Задача 1.** Да се намери полином $p(x) \in \pi_4$, такъв че $p(-1) = \frac{1}{2}, p(0) = 1, p'(0) = 0, p''(0) = -2, p(1) = \frac{1}{2}$.

**Решение:** Имаме 5 интерполационни възела $x_0 = -1, x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 1$. Нулата е трикратен възел. Можем да построим единствен полином от четвърта степен с тези условия по формулата на Нютон. За целта са ни необходими разделените разлики. Тях най-лесно можем да пресметнем от рекурентната връзка в следната таблица:

| $x_i$ | $p[x_i]$ | $p[x_i, x_{i+1}]$ | $p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ | $p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ | $p[x_i, \ldots, x_{i+4}]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1 - \frac{1}{2}}{0 - (-1)} = \frac{1}{2}$ | $\frac{0 - \frac{1}{2}}{0 - (-1)} = -\frac{1}{2}$ | $\frac{-1 + \frac{1}{2}}{0 - (-1)} = -\frac{1}{2}$ | $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + 1} = \frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 | $\frac{p'(0)}{1!} = 0$ | $\frac{p''(0)}{2!} = -1$ | $\frac{-\frac{1}{2} + 1}{1 - 0} = \frac{1}{2}$ | |
| 0 | 1 | $\frac{p'(0)}{1!} = 0$ | $\frac{-\frac{1}{2} - 0}{1 - 0} = -\frac{1}{2}$ | | |
| 0 | 1 | $\frac{\frac{1}{2} - 1}{1 - 0} = -\frac{1}{2}$ | | | |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | | | | |

Оцветените в червено разделени разлики участват във формулата на Нютон. Заместваме в нея:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{1}{2}(x + 1)(x - 0) - \frac{1}{2}(x + 1)x^2 + \frac{1}{2}(x + 1)x^3 = \frac{x^4}{2} - x^2 + 1.$$

**Задача 2.** Да се намери полином $p(x) \in \pi_4$, такъв че $p(-1) = 4, p'(-1) = -11, p(1) = 2, p'(1) = 5, p''(1) = 10$.

**Решение:** Преминаваме към попълване на таблицата с разделените разлики:

| $x_i$ | $p[x_i]$ | $p[x_i, x_{i+1}]$ | $p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ | $p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ | $p[x_i, \dots, x_{i+4}]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 4 | $\frac{p'(-1)}{1!} = -11$ | $\frac{-1+11}{1-(-1)} = 5$ | $\frac{3-5}{2} = -1$ | $\frac{1+1}{1+1} = 1$ |
| -1 | 4 | $\frac{2-4}{1-(-1)} = -1$ | $\frac{5+1}{1+1} = 3$ | $\frac{5-3}{2} = 1$ | |
| 1 | 2 | $\frac{p'(1)}{1!} = 5$ | $\frac{p''(1)}{2!} = 5$ | | |
| 1 | 2 | $\frac{p'(1)}{1!} = 5$ | | | |
| 1 | 2 | | | | |

Оцветените в червено разделени разлики участват във формулата на Нютон. Заместваме в нея:

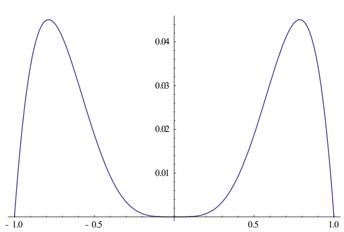
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) =$$
$$= 4 - 11(x+1) + 5(x+1)^2 - 1(x+1)^2(x-1) + 1(x+1)^2(x-1)^2$$
$$= x^4 - x^3 + 2x^2.$$

**Задача 3.** Да се намери интерполационния полином на Ермит във възлите $x_0 = -1, x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 1$ за функцията $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ чрез функция на Wolfram Mathematica. Да се визуализира графиката на грешката.

**Решение:** Намираме $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}; f(0) = 1; f'(0) = 0; f''(0) = -2$. Ще използваме вградената функция за намиране на интерполационен полином по зададени възли, техните функционални стойности и стойностите на производните. Така изглежда:

```
f[t_]:=1/(1+t^2);
L[t_]:=InterpolatingPolynomial[{{-1,1/2},{0,{1,0,-2}},{1,1/2}},t];
a=Expand[L[t]]
Plot[f[t]-a,{t,-1,1}]
```

Out[1]= $1 - t^2 + \frac{t^4}{2}$



# Крайни разлики

Крайни разлики използваме, когато интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка $h$, т. е. възлите се задават се с формулата $x_k = x_0 + k.h,\ k = 0,1,\dots,n$. Означаваме функционалните стойности в тези възли с $f_k = f(x_k)$.

Разделена разлика за функцията $f(x)$ във възлите $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ се дефинира по следния начин:

- от първи ред: $\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$;
- от *k*-ти ред рекурентно: $\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j$.

На лекции са доказани следните формули:

1) $\Delta^n f_0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_j$;
2) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}$.

Доказали сме (в предходното упражнение), че:

а) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0,$ за $f(x) = x^m, m = 0,1,\dots,n-1;$ (*)

б) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1,$ за $f(x) = x^n.$ (**)

Ще интерпретираме тези изводи в термините на крайни разлики.

**Задача 4:** Да се докаже тъждеството $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = 0$ за $k = 0,1,\dots,n-1$.

**Доказателство:** Лявата страна на равенството е крайна разлика за функцията $f_j = f(j) = j^k, k \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Това са стойностите на функцията $f(x) = x^k \in \pi_{n-1}$ в точките $x_j = j,\ j = 0 \div n$. Интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка $h = 1$. Но разделената разлика в (*n* +1) точки на полином от (*n*-1) степен е равна на нула, т. е. $x^k[x_0 x_1, \dots, x_n] = 0,\ k = 0 \div n-1$ и от връзката между разделена и крайна разлика 2) получаваме $\Delta^n f_0 = 0$, т.е. $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = 0$.

**Задача 5:** Да се докаже тъждеството $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^n = n!$

**Доказателство:** Лявата страна на равенството е крайна разлика за функцията $f_j = f(j) = j^n$. Това са стойностите на функцията $f(x) = x^n \in \pi_n$ в точките $x_j = j,\ j = 0 \div n$. Интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка $h = 1$. Но разделената разлика в (*n* +1) точки на полином от *n*-та степен е равна на едно, т. е. $x^n[x_0 x_1, \dots, x_n] = 1$ и от връзката между разделена и крайна разлика 2) получаваме $\Delta^n f_0 = n!\, h^n f[x_0, x_1, \dots, x_n]$, т.е. $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = n!$

**Задача 6:** Да се намери $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{m+j}{k}$, където $m \in N, k = 0,1,\dots,n-1$.

**Доказателство:** Лявата страна на равенството е крайна разлика от *n*-ти ред за $f_j = f(j) = \binom{m+j}{k}$.

$$=> f(x) = \binom{x+m}{k} = \frac{(x+m)(x+m-1)\dots(x+m-k+1)}{k!} \in \pi_k \subseteq \pi_{n-1}.$$

Но $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$ и от равенството 2) получаваме, че $\Delta^n f_0 = 0$ и следователно $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\binom{m+j}{k} = 0$.

**Лема на Поповичу**

Тя ни дава формула, по която да пресметнем разделената разлика на произведение на две функции в ($n$ +1) интерполационни възли чрез раделените разлики на отделните функции. Лемата гласи:

$$(f.g)[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k].g[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n].$$

**Задача 7:** Да се намери $x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

**Решение:** Можем да представим $x^{n+1} = x.x^n$. От (*) и (**) получаваме, че

$x[x_0] = x_0, x[x_0, x_1] = 1,\ x[x_0, x_1, \dots, x_k] = 0,\ \ x^n[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1.$

Прилагаме лемата на Поповичу за функцията $x^{n+1}$

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x[x_0, x_1, \dots, x_k].x^n[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] =$$
$$= x[x_0].\ x^n[x_0, x_1, \dots, x_n] + \ x[x_0, x_1].\ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n] + 0 = x_0 + \ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Така получихме рекурентна връзка за разделените разлики на функциите $x^{n+1}$ и $x^n$

Прилагаме отново лемата за $x^n[x_1, x_2, \dots, x_n]$

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = x_0 + \ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n] = x_0 + x_1 + \ x^{n-1}[x_2, x_3, \dots, x_n]$$

След многократно приложение на лемата на Поповичу окончателно получаваме

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

**Задача 8:** Да се намери $\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, за $x_k \neq 0, \forall k$.

**Решение:** Можем да представим $1 = x.\frac{1}{x}$, но $1 \in \pi_0 \Rightarrow 1[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$. Прилагаме лемата на Поповичу за константата 1, равенствата (*) и (**). Получаваме:

$0 = 1[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x\,[x_0, x_1, \dots, x_k].\frac{1}{x}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] = x_0.\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] + x[x_0, x_1].\frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n] + 0 = x_0.\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] + \frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n].$

От това равенство изразяваме $\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ и получаваме

$$\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] = -\frac{1}{x_0}.\frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

Аналогично прилагаме лемата на Поповичу още $(n-1)$ пъти и получаваме:

$$\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{(-1)^n}{x_0 . x_1 \dots x_n}.$$

**Задача 9:** Да се намери $\frac{1}{x^2}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, за $x_k \neq 0, \forall k$.

**Решение:** Можем да използваме намереното в **Задача 8** и лемата на Поповичу.

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} . \frac{1}{x} => \frac{1}{x^2}[x_0, x_1, \dots, x_n] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_k] . \frac{1}{x}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x_0 . x_1 \dots x_k} . \frac{(-1)^{n-k}}{x_k . x_{k+1} \dots x_n} = \frac{(-1)^n}{x_0 . x_1 \dots x_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k}.$$

# Системи на Чебишов

**Задача 1**. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} k^3$ чрез интерполиране с разделени разлики.

**Решение:** Нека $S(n) = \sum_{k=0}^{n} k^3$ => $S(0) = 0, S(1) = 1, S(2) = 9, S(3) = 36, S(4) = 100, \dots, S(n) = S(n-1) + n^3$. Интерполационните възли са $x_i = i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Създаваме таблицата за намиране на разделените разлики:

| $x_i$ | S[$i$] | S[$i$,$i$+1] | S[$i$,$i$+1,$i$+2] | S[$i$,$i$+1,$i$+2,$i$+3] | S[$i$,$i$+1, …,$i$+4] | S[$i$,$i$+1, …,$i$+5] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 7/2 | 2 | ¼ | 0 |
| 1 | 1 | 8 | 19/2 | 3 | ¼ | … |
| 2 | 9 | 27 | 37/2 | 4 | … | 0 |
| 3 | 36 | 64 | 61/2 | … | ¼ | |
| 4 | 100 | 125 | … | $n$-1 | | |
| … | … | … | $\frac{3n^2-3n+1}{2}$ | | | |
| $n$-1 | $S(n-1)$ | $n^3$ | | | | |
| $n$ | $S(n)$ | | | | | |

$$S(n) \in \pi_4 => S(n) = L_n(S; n) =$$
$$= 0 + 1.n + \frac{7}{2}n(n-1) + 2n(n-1)(n-2) + \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**Системи на Чебишов:**

Нека $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ са непрекъснати и линейно независими функции в интервала I. Казваме, че те образуват система на Чебишов в интервала I, ако всеки обобщен ненулев полином по тези функции има не повече от $n$ различни нули в I.

Обобщен полином на функциите наричаме линейна комбинация на системата $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$:

$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$, където $a_k \neq 0$ за някое $k$.

**Задача 2**. Нека $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ са различни реални числа. Да се докаже, че $\{e^{\alpha_i x}\}_{i=0}^{n}$ образуват Чебишова система върху реалната права.

**Доказателство:** Индукция по броя на функциите.

$n = 0, \varphi(x) = a_0 e^{\alpha_0 x} \neq 0$ за $a_0 \neq 0$ => твърдението е вярно.

Допускаме, че твърдението е вярно за $(n-1)$. Ще докажем, че твърдението е в сила за $n \in N$.

Да допуснем противното, т.е. съществува обобщен полином $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{\alpha_k x}$, който има $(n+1)$ различни реални нули $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Ясно е, че $a_i \neq 0, i = 0,1, \dots, n$, защото в противен случай ще попаднем в индукционното предположение. Тогава

$\varphi(x) = e^{\alpha_0 x}\{a_0 + a_1 e^{(\alpha_1-\alpha_0)x} + \cdots + a_n e^{(\alpha_n-\alpha_0)x}\}$. Но $e^{\alpha_0 x} \neq 0$ => нулите на $\varphi(x)$ съвпадат с нулите на $\theta(x) = a_0 + a_1 e^{(\alpha_1-\alpha_0)x} + \cdots + a_n e^{(\alpha_n-\alpha_0)x}$. За $\theta(x)$ прилагаме теоремата на Рол. Следователно $\theta'(x)$ има поне $n$ различни реални нули. Но $\theta'(x)$ е обобщен полином на функциите

$\{e^{(\alpha_i-\alpha_0)x}\}_{i=1}^{n}$, където $\alpha_1 - \alpha_0 < \alpha_2 - \alpha_0 < \cdots < \alpha_n - \alpha_0$. Съгласно индукционното предположение $\theta'(x)$ има не повече от $(n-1)$ различни реални нули, което е противоречие, дължащо се на грешното допускане. Следователно $\{e^{\alpha_i x}\}_{i=0}^{n}$ образуват Чебишова система върху реалната права.

**Задача 3**. Нека $f(x) \in C^n[a,b]$ и $f^{(n)}(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$. Да се докаже, че $\{1, x, \dots, x^{n-1}, f(x)\}$ образуват Чебишова система в интервала $[a,b]$.

**Доказателство:** Да допуснем, че функциите не са Т-система в интервала $[a,b]$. Тогава съществува $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n f(x)$ с $(n+1)$ различни нули в интервала $[a,b]$. Ясно е, че $a_n \neq 0$, защото ако $a_n = 0$, то $\varphi(x)$ има не повече от $n$ различни нули. От теоремата на Рол следва, че $\varphi'(x)$ има $\boldsymbol{n}$ различни нули в $(a,b)$ и след многократно приложение на теоремата на Рол получаваме, че $\varphi^{(n)}(x) = a_n f^{(n)}(x)$ има поне една нула в $(a,b)$. Но $f^{(n)}(x) \neq 0$ и $a_n \neq 0$ => $\varphi^{(n)} \neq 0$, което е противоречие, дължащо се на грешното допускане. Следователно $\{1, x, \dots, x^{n-1}, f(x)\}$ образуват Чебишова система в интервала $[a,b]$.

**Задача 4**. Да се докаже, че $\{1, x, x\cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$.

**Доказателство:** Да допуснем, че функциите $\{1, x, x\cos x\}$ не са Т-система в интервала. Тогава съществува $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x\cos x$, която има три различни нули в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$, $a_2 \neq 0$, защото ако $a_2 = 0$, то $\varphi(x)$ има не повече от един корен. От теоремата на Рол следва, че $\varphi''(x)$ има поне един корен в интервала $(0, \frac{\pi}{2})$. Но $\varphi''(x) = -a_2(2\sin x + x\cos x) \neq 0, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Получихме противоречие, дължащо се на грешното допускане. Следователно $\{1, x, x\cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$.

**Задача 5**. Да се докаже, че функциите $\{1, \sin x\}$ не образуват Чебишова система в интервала $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

**Доказателство:** Трябва да намерим такава линейна комбинация на тези функции, която да има поне две нули в интервала $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$. Нека $a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_1 = -1$. Функцията $\varphi(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x$ има два корена $x_1 = \frac{\pi}{4}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ в интервала $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$. Следователно функциите $\{1, \sin x\}$ не образуват Чебишова система в интервала $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

## Интерполиране с тригонометрични полиноми

Нека $f(x)$ е периодична функция с период $2\pi$. Нека са зададени стойностите на тази функция $f(x_k) = y_k$ в $(2n+1)$ възела $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} \leq 2\pi$. Тогава може да построим единствен тригонометричен полином $\tau(f;x)$, който интерполира функцията $f(x)$ във възлите $\{x_k\}_{k=0}^{2n}$.

$$\tau(f;x) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k(x) y_k,$$

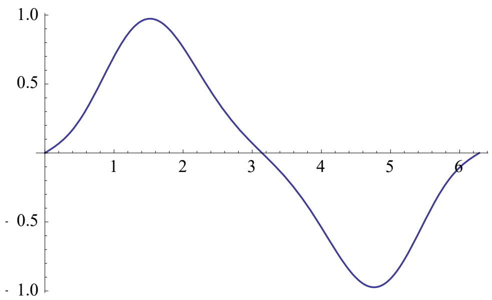
$$\lambda_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{2n} \frac{\sin\frac{x-x_j}{2}}{\sin\frac{x_k-x_j}{2}}.$$

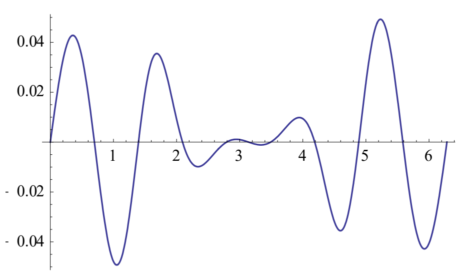
Изпълнени са следните интерполационни условия: $\tau(f;x_k) = f(x_k) = y_k,\ k = 0,1,\dots,2n$.

**Задача:** Да се състави програма за построяването на тригонометричен полином $\tau(f;x)$ за функцията $f(x) = \frac{\sin x}{1+(\cos x)^2}$ с интерполационни възли $x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, k = 0,1,\dots,2n,$ за $n = 4$.

**Решение:**

```
n=4;
Do[x[k]=2k*Pi/(2n+1),{k,0,2n}];
f[t_]:=Sin[t]/(1+Cos[t]^2);
Do[l[k_,t_]:=(s=1;Do[If[j≠k,s*=Sin[(t-x[j])/2]/Sin[(x[k]-
x[j])/2]],{j,0,2n}];s),{k,0,2n}];
T[t_]:=Sum[l[k,t]*f[x[k]],{k,0,2n}];
Plot[T[t],{t,0,2Pi}]
Plot[f[t]-T[t],{t,0,2Pi}]
```




Задачи са самостоятелна работа:

1) Да се докаже, че функциите $\{1, \cos x\}$ не образуват Чебишова система в интервала $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
2) Да се докаже, че $\{1, x, x\sin x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

# Интерполиране със сплайни от първа степен

**Задача 1**. Да се докаже, че функциите $\left\{\frac{1}{x-a_i}\right\}_{i=0}^{n}$ образуват Чебишова система върху всеки интервал, несъдържащ $a_0,\ a_1, \dots, a_n$.

**Доказателство:** Всеки обобщен полином на тези функции има вида

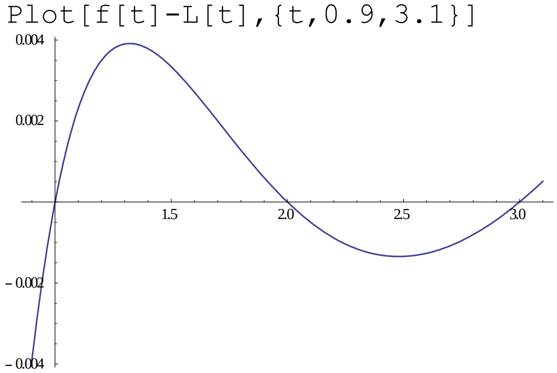
$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{x - a_k} = \frac{P_n(x)}{\omega(x)},\ P_n(x) \epsilon \pi_n.$$

Нулите на $\varphi(x)$ съвпадат с нулите на $P_n(x)$, а броят им не надвишава $n$. Следователно функциите $\left\{\frac{1}{x-a_i}\right\}_{i=0}^{n}$ образуват Чебишова система върху всеки интервал, несъдържащ $a_0,\ a_1, \dots, a_n$.

**Задача 2**. С помощта на *Wolfram Mathematica* да се построи обобщен полином по функциите $f_0(t) = \frac{1}{t+1}, f_1(t) = \frac{1}{t+2}, f_2(t) = \frac{1}{t+3},$ интерполиращ функцията $f(t) = e^{-t}$ във възлите $t_0 = 1, t_1 = 2, t_2 = 3$. Да се изобрази графиката на грешката в интервала $[1,3]$.

**Решение:**

```
f0[t_]:=1/(1+t);
f1[t_]:=1/(2+t);
f2[t_]:=1/(3+t);
f[t_]:=Exp[-t];
result=Solve[{a*f0[1]+b*f1[1]+c*f2[1]==f[1],
a*f0[2]+b*f1[2]+c*f2[2]==f[2],a*f0[3]+b*f1[3]+c*f2[3]==f[3]},{a,b,c}]
L[t_]:=Simplify[a*f0[t]+b*f1[t]+c*f2[t]/.result];
Plot[f[t]-L[t],{t,0.9,3.1}]
```



**Сплайн функции от първа степен – начупена линия**

Когато интерполираме със сплайни от първа степен ще използваме модулните функции вместо отсечените. Ще докажем, че те са линейно независими в интервала на интерполационните възли. Без ограничение на общността ще разглеждаме интервала $[0,1]$.

**Задача 3**. Нека $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$. Докажете, че функциите $\{|x - x_i|\}_{i=0}^{n}$ са линейно независими в интервала $[0,1]$.

**Доказателство:** Допускаме, че $f(x) = c_0|x - x_0| + c_1|x - x_1| + \cdots + c_n|x - x_n| \equiv 0$ в интервала $[0,1]$.

Нека $x \in (x_k, x_{k+1}),\ k = 0 \div n - 1$. Тогава, разкривайки модулите имаме

$$f(x) = c_0(x - x_0) + c_1(x - x_1) + \ \ldots + c_k(x - x_k) - c_{k+1}(x - x_{k+1}) - \cdots - c_n(x - x_n)$$
$$= (c_0 + c_1 + \cdots + c_k - c_{k+1} - \cdots - c_n)x + A \equiv 0$$

$$=> (c_0 + c_1 + \cdots + c_k - c_{k+1} - \cdots - c_n) = 0, x \in (x_k, x_{k+1}).$$

Получаваме аналогично равенство, ако $x \in (x_{k-1}, x_k)$. Като извадим две такива последователни уравнения получаваме $2c_k = 0 => c_k = 0, k = 1 \div n - 1.$ Тогава

$$f(x) = c_0(x - 0) + c_n(1 - x) = (c_0 - c_n)x + c_n \equiv 0 => c_0 = c_n = 0.$$

Следователно функциите $\{|x - x_i|\}_{i=0}^{n}$ са линейно независими в интервала $[0,1]$. Техният брой е равен на размерността на множеството от сплайни от първа степен $S_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ и следователно те образуват базис.

**Задача 4**. Нека $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1, I_1(f; x) \in S_1(x_1, x_{2,} \ldots, x_{n-1})$ е сплайн функция от първа степен, такъв че $I_1(f; x_i) = f(x_i), i = 0 \div n$. Да се намерят коефициентите $c_k$ в представянето

$$I_1(f; x) = \sum_{k=0}^{n} c_k |x - x_k|.$$

**Решение:** От интерполационните условия имаме

$$I_1(f; x_i) = \sum_{k=0}^{n} c_k |x_i - x_k| = f(x_i), i = 0 \div n.$$

$$=> \sum_{k=0}^{i-1} c_k(x_i - x_k) + \sum_{k=i+1}^{n} c_k(x_k - x_i) = \sum_{k=0}^{i-1} c_k(x_i - x_k) - \sum_{k=i+1}^{n} c_k(x_i - x_k) = f(x_i).$$

Аналогично

$I_1(f; x_{i+1}) = \sum_{k=0}^{i} c_k(x_{i+1} - x_k) - \sum_{k=i+2}^{n} c_k(x_{i+1} - x_k) = f(x_{i+1}).$

От второто равенство изваждаме първото и получаваме

$$\sum_{k=0}^{i} c_k(x_{i+1}-x_i) - \sum_{k=i+1}^{n} c_k(x_{i+1}-x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i),$$

Делим двете страни на уравнението на $(x_{i+1}-x_i) \neq 0$

$$\sum_{k=0}^{i} c_k - \sum_{k=i+1}^{n} c_k = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} = f[x_i, x_{i+1}], i = 0,1,\dots,n-1 \qquad (1)$$

$$=> \sum_{k=0}^{i-1} c_k - \sum_{k=i}^{n} c_k = f[x_{i-1}, x_i], i = 1,\dots,n \qquad (2).$$

Изваждаме левите и десните страни на тези равенства и получаваме:

$$2c_i = f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]$$

$$=> c_i = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{2}, i = 1 \div n-1 \qquad (3)$$

Остава да намерим $c_0$ и $c_n$. Използваме интерполация в краищата на интервала.

$$I_1(f; x_0) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x_k - x_0) = f(x_0),$$

$$I_1(f; x_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x_n - x_k) = f(x_n).$$

Събираме двете уравнения и получаваме:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \frac{f(x_0)+f(x_n)}{x_n - x_0} \qquad (4).$$

Прилагаме равенството (1) за $i = 0$ и събираме с уравнението (4). Така намираме $c_0$

$$c_0 = \frac{1}{2}\left(f[x_0, x_1] + \frac{f(x_0)+f(x_n)}{x_n - x_0}\right) \qquad (5).$$

За да намерим $c_n$ използваме уравнението (2) за $i = n$ и го изваждаме от уравнението (4). Получаваме

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{x_n - x_0} - f[x_{n-1}, x_n]\right) \qquad (6).$$

**Задача 5.** Да се построи сплайн функция от първа степен $I_1(f; x) \in S_1(x_1, x_{2,} \dots, x_{n-1})$ за функцията $f(x) = \sqrt{x}$ с възли:

**а)** $x_k = \frac{k}{n}, k = 0,1,\dots,n$ при $n = 5$;

**б)** $x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^4, k = 0,1,\dots,n$ при $n = 5$.

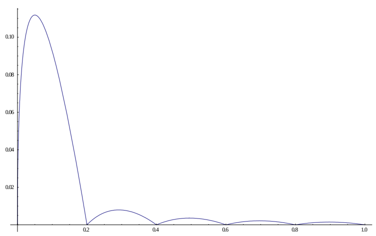
Да се визуализира графика на грешката, както и графика на фунцията и сплайна едновременно. Сравнете грешките в двата случая.

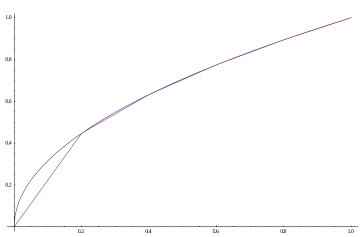
**Решение:**

**а)** От формули (3), (5) и (6) за коефициентите в представянето на сплайна $I_1(f;x)$ като линейна комбинация на модулните функции.

В конкретната задача $x_n - x_0 = 1$. В програмата ще запазим същите означения.

```
n=5;
Do[x[k]=k/n,{k,0,n}];
f[t_]:=Sqrt[t];
c[0]=(f[x[0]]+f[x[n]]+(f[x[1]]-f[x[0]])/(x[1]-x[0]))/2;
c[n]=(f[x[0]]+f[x[n]]-(f[x[n]]-f[x[n-1]])/(x[n]-x[n-1]))/2;
Do[c[i]=((f[x[i+1]]-f[x[i]])/(x[i+1]-x[i])-
(f[x[i]]-f[x[i-1]])/(x[i]-x[i-1]))/2,{i,1,n-1}];
I1[t_]:=Sum[c[k]*Abs[t-x[k]],{k,0,n}];
Plot[f[t]-I1[t],{t,0,1},PlotRange→All]
Plot[{f[t],I1[t]},{t,0,1}]
```





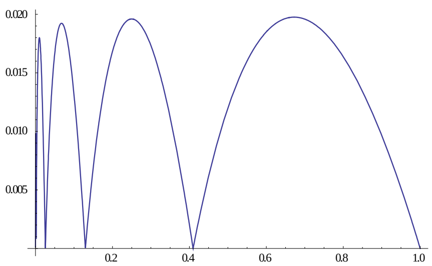
Първата графика е на грешката, а втората е сравнителна графика на функцията и сплайна.

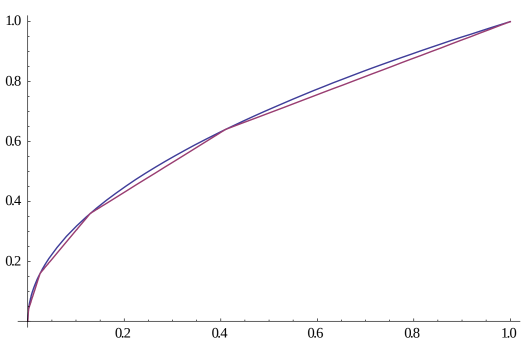
Наблюдения: От първата графика на грешката забелязваме, че грешката е най-голяма в левия край на интервала. Това се дължи на факта, че функцията $f(x)$ бързо нараства, както е видно от втората графика на сплайна и функцията едновременно. В син цвят е графика на функцията $f(x) = \sqrt{x}$, а в червен цвят е графиката на сплайна $I_1(f;x)$.

***Моля студентите да стартират програмата с други стойности на $n$, например 10 и 50. Направете съответните изводи.***

**б)** За подточка б) е необходимо да се промени формулата за изчисляване на интерполационните възли. Ето програмата:

```
n=5;
Do[x[k]=(k/n)^4,{k,0,n}];
f[t_]:=Sqrt[t];
c[0]=(f[x[0]]+f[x[n]]+(f[x[1]]-f[x[0]])/(x[1]-x[0]))/2;
c[n]=(f[x[0]]+f[x[n]]-(f[x[n]]-f[x[n-1]])/(x[n]-x[n-1]))/2;
Do[c[i]=((f[x[i+1]]-f[x[i]])/(x[i+1]-x[i])-
(f[x[i]]-f[x[i-1]])/(x[i]-x[i-1]))/2,{i,1,n-1}];
I1[t_]:=Sum[c[k]*Abs[t-x[k]],{k,0,n}];
Plot[f[t]-I1[t],{t,0,1},PlotRange→All]
Plot[{f[t],I1[t]},{t,0,1}]
```




Наблюдения и изводи: Забелязваме, че грешката значително намалява при втория случай. Това е така, защото интерполационните възли са сгъстени в левия край на интервала, където функцията стръмно нараства.

*Моля студентите да стартират втория вариант на програмата с други стойности на $n$, например 10 и 50. Направете съответните изводи. Сравнете двата случая за различните стойности на $n$.*

## Разделени разлики с кратни възли. Интерполационен полином на Ермит

Нека $a \le x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n \le b$ и $f \in C^n[a,b]$. Разделена разлика на функцията $f(x)$ във възлите $x_0, x_1, \dots, x_k$ се дефинира по следния начин:

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k] = \begin{cases} \dfrac{f[x_1,\dots,x_k] - f[x_0,\dots,x_{k-1}]}{x_k - x_0}, x_0 \neq x_k \\ \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad x_0 = x_k \end{cases}$$

Интерполационният полином на Ермит се задава с формулата на Нютон:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\, x_1, \dots, x_k](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1}).$$

**Задача 1.** Да се намери полином $p(x) \in \pi_4$, такъв че $p(-1) = \frac{1}{2}, p(0) = 1, p'(0) = 0, p''(0) = -2, p(1) = \frac{1}{2}$.

**Решение:** Имаме 5 интерполационни възела $x_0 = -1, x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 1$. Нулата е трикратен възел. Можем да построим единствен полином от четвърта степен с тези условия по формулата на Нютон. За целта са ни необходими разделените разлики. Тях най-лесно можем да пресметнем от рекурентната връзка в следната таблица:

| $x_i$ | $p[x_i]$ | $p[x_i,x_{i+1}]$ | $p[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$ | $p[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$ | $p[x_i,\dots,x_{i+4}]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1-\frac{1}{2}}{0-(-1)} = \frac{1}{2}$ | $\frac{0-\frac{1}{2}}{0-(-1)} = -\frac{1}{2}$ | $\frac{-1+\frac{1}{2}}{0-(-1)} = -\frac{1}{2}$ | $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+1} = \frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 | $\frac{p'(0)}{1!} = 0$ | $\frac{p''(0)}{2!} = -1$ | $\frac{-\frac{1}{2}+1}{1-0} = \frac{1}{2}$ | |
| 0 | 1 | $\frac{p'(0)}{1!} = 0$ | $\frac{-\frac{1}{2}-0}{1-0} = -\frac{1}{2}$ | | |
| 0 | 1 | $\frac{\frac{1}{2}-1}{1-0} = -\frac{1}{2}$ | | | |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | | | | |

Оцветените в червено разделени разлики участват във формулата на Нютон. Заместваме в нея:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p[x_0,x_1,\dots,x_k](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1}) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)(x-0) - \frac{1}{2}(x+1)x^2 + \frac{1}{2}(x+1)x^3 = \frac{x^4}{2} - x^2 + 1.$$

**Задача 2.** Да се намери полином $p(x) \in \pi_4$, такъв че $p(-1) = 4, p'(-1) = -11, p(1) = 2, p'(1) = 5, p''(1) = 10$.

**Решение:** Преминаваме към попълване на таблицата с разделените разлики:

| $x_i$ | $p[x_i]$ | $p[x_i, x_{i+1}]$ | $p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ | $p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ | $p[x_i, \dots, x_{i+4}]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 4 | $\frac{p'(-1)}{1!} = -11$ | $\frac{-1+11}{1-(-1)} = 5$ | $\frac{3-5}{2} = -1$ | $\frac{1+1}{1+1} = 1$ |
| -1 | 4 | $\frac{2-4}{1-(-1)} = -1$ | $\frac{5+1}{1+1} = 3$ | $\frac{5-3}{2} = 1$ | |
| 1 | 2 | $\frac{p'(1)}{1!} = 5$ | $\frac{p''(1)}{2!} = 5$ | | |
| 1 | 2 | $\frac{p'(1)}{1!} = 5$ | | | |
| 1 | 2 | | | | |

Оцветените в червено разделени разлики участват във формулата на Нютон. Заместваме в нея:

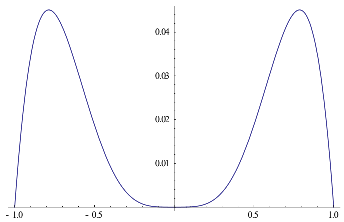
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) =$$
$$= 4 - 11(x+1) + 5(x+1)^2 - 1(x+1)^2(x-1) + 1(x+1)^2(x-1)^2$$
$$= x^4 - x^3 + 2x^2.$$

**Задача 3.** Да се намери интерполационния полином на Ермит във възлите $x_0 = -1, x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 1$ за функцията $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ чрез функция на Wolfram Mathematica. Да се визуализира графиката на грешката.

**Решение:** Намираме $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}; f(0) = 1; f'(0) = 0; f''(0) = -2$. Ще използваме вградената функция за намиране на интерполационен полином по зададени възли, техните функционални стойности и стойностите на производните. Така изглежда:

```
f[t_]:=1/(1+t^2);
L[t_]:=InterpolatingPolynomial[{{-1,1/2},{0,{1,0,-2}},{1,1/2}},t];
a=Expand[L[t]]
Plot[f[t]-a,{t,-1,1}]
```

Out[1]= $1 - t^2 + \frac{t^4}{2}$



# Крайни разлики

Крайни разлики използваме, когато интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка $h$, т. е. възлите се задават се с формулата $x_k = x_0 + k.h,\ k = 0,1,\dots,n$. Означаваме функционалните стойности в тези възли с $f_k = f(x_k)$.

Разделена разлика за функцията $f(x)$ във възлите $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ се дефинира по следния начин:

- от първи ред: $\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$;
- от *k*-ти ред рекурентно: $\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j$.

На лекции са доказани следните формули:

1) $\Delta^n f_0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_j$;
2) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}$.

Доказали сме (в предходното упражнение), че:

а) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0,$ за $f(x) = x^m, m = 0,1,\dots,n-1;$ (*)

б) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1,$ за $f(x) = x^n.$ (**)

Ще интерпретираме тези изводи в термините на крайни разлики.

**Задача 4:** Да се докаже тъждеството $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = 0$ за $k = 0,1,\dots,n-1$.

**Доказателство:** Лявата страна на равенството е крайна разлика за функцията $f_j = f(j) = j^k, k \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Това са стойностите на функцията $f(x) = x^k \in \pi_{n-1}$ в точките $x_j = j,\ j = 0 \div n$. Интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка $h = 1$. Но разделената разлика в (*n* +1) точки на полином от (*n*-1) степен е равна на нула, т. е. $x^k[x_0 x_1, \dots, x_n] = 0,\ k = 0 \div n-1$ и от връзката между разделена и крайна разлика 2) получаваме $\Delta^n f_0 = 0$, т.е. $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = 0$.

**Задача 5:** Да се докаже тъждеството $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^n = n!$

**Доказателство:** Лявата страна на равенството е крайна разлика за функцията $f_j = f(j) = j^n$. Това са стойностите на функцията $f(x) = x^n \in \pi_n$ в точките $x_j = j,\ j = 0 \div n$. Интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка $h = 1$. Но разделената разлика в (*n* +1) точки на полином от *n*-та степен е равна на едно, т. е. $x^n[x_0 x_1, \dots, x_n] = 1$ и от връзката между разделена и крайна разлика 2) получаваме $\Delta^n f_0 = n!\, h^n f[x_0, x_1, \dots, x_n]$, т.е. $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = n!$

**Задача 6:** Да се намери $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{m+j}{k}$, където $m \in N, k = 0,1,\dots,n-1$.

**Доказателство:** Лявата страна на равенството е крайна разлика от *n*-ти ред за $f_j = f(j) = \binom{m+j}{k}$.

$$=> f(x) = \binom{x+m}{k} = \frac{(x+m)(x+m-1)\dots(x+m-k+1)}{k!} \in \pi_k \subseteq \pi_{n-1}.$$

Но $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$ и от равенството 2) получаваме, че $\Delta^n f_0 = 0$ и следователно $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{m+j}{k} = 0$.

**Лема на Поповичу**

Тя ни дава формула, по която да пресметнем разделената разлика на произведение на две функции в ($n$ +1) интерполационни възли чрез раделените разлики на отделните функции. Лемата гласи:

$$(f.g)[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k].g[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n].$$

**Задача 7:** Да се намери $x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

**Решение:** Можем да представим $x^{n+1} = x.x^n$. От (*) и (**) получаваме, че

$x[x_0] = x_0, x[x_0, x_1] = 1,\ x[x_0, x_1, \dots, x_k] = 0,\ \ x^n[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1.$

Прилагаме лемата на Поповичу за функцията $x^{n+1}$

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x[x_0, x_1, \dots, x_k].x^n[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] =$$
$$= x[x_0].\ x^n[x_0, x_1, \dots, x_n] + \ x[x_0, x_1].\ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n] + 0 = x_0 + \ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Така получихме рекурентна връзка за разделените разлики на функциите $x^{n+1}$ и $x^n$

Прилагаме отново лемата за $x^n[x_1, x_2, \dots, x_n]$

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = x_0 + \ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n] = x_0 + x_1 + \ x^{n-1}[x_2, x_3, \dots, x_n]$$

След многократно приложение на лемата на Поповичу окончателно получаваме

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

**Задача 8:** Да се намери $\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, за $x_k \neq 0, \forall k$.

**Решение:** Можем да представим $1 = x.\frac{1}{x}$, но $1 \in \pi_0 \Rightarrow 1[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$. Прилагаме лемата на Поповичу за константата 1, равенствата (*) и (**). Получаваме:

$0 = 1[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x\,[x_0, x_1, \dots, x_k].\frac{1}{x}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] = x_0.\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] + x[x_0, x_1].\frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n] + 0 = x_0.\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] + \frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n].$

От това равенство изразяваме $\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ и получаваме

$$\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] = -\frac{1}{x_0}.\frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

Аналогично прилагаме лемата на Поповичу още $(n-1)$ пъти и получаваме:

$$\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{(-1)^n}{x_0.x_1 \dots x_n}.$$

**Задача 9:** Да се намери $\frac{1}{x^2}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, за $x_k \neq 0, \forall k$.

**Решение:** Можем да използваме намереното в **Задача 8** и лемата на Поповичу.

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}.\frac{1}{x} => \frac{1}{x^2}[x_0, x_1, \dots, x_n] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_k].\frac{1}{x}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x_0.x_1 \dots x_k}.\frac{(-1)^{n-k}}{x_k.x_{k+1} \dots x_n} = \frac{(-1)^n}{x_0.x_1 \dots x_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k}.$$

# Сплайни от първа степен. Модул на непрекъснатост.

**Определение:** Разстояние наричаме величината

$$dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\} = inf \max_{x_0 \le x \le x_n} |f(x) - S(x)|,$$

където инфимумът е по всички сплайни от първа степен $S(x) \in S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

**Задача 1.** Нека $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$. Нека $I_1(f; x) \in S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, за който $f(x_k) = I_1(f; x_k), k = 0 \div n$. Да се докаже, че

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - I_1(f; x)| \le 2\, dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}.$$

**Доказателство:** Нека $s^*(x) \in S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ е най-добрата начупена линия, т. е.

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - s^*(x)| = dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}.$$

Трябва да оценим $|f(x) - I_1(f; x)|$. Нека $x \in [x_k, x_{k+1}], k = 0,1, \dots, n-1$. Тогава

$$\max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |f(x) - I_1(f; x)| = \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |f(x) - s^*(x) + s^*(x) - I_1(f; x)|$$

$$\le \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |f(x) - s^*(x)| + \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |s^*(x) - I_1(f; x)| \le$$

$$\le \max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - s^*(x)| + \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |s^*(x) - I_1(f; x)| \le$$

$$\le dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\} + \max\{|s^*(x_k) - I_1(f; x_k)|, |s^*(x_{k+1}) - I_1(f; x_{k+1})|\} =$$

$$= dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\} + \max\{|s^*(x_k) - f(x_k)|, |s^*(x_{k+1}) - f(x_{k+1})|\} \le$$

$$\le dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\} + \max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - s^*(x)| = 2 dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}.$$

В поредицата от неравенства използвахме, че линейна функция $s^*(x) - I_1(f; x)$ достига максимума си в един от двата края на интервала, когато $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Също така използвахме интерполационните условия $f(x_k) = I_1(f; x_k)$.

Ако $x \in [x_k, x_{k+1}]$ получихме, че $\max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |f(x) - I_1(f; x)| \le 2 dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}$ и тази оценка е вярна за всяко $k = 0,1, \dots, n-1$. Следователно

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - I_1(f; x)| \le 2\, dist\{f, S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}.$$

## Модул на непрекъснатост на функция

Нека $x \in [a, b]$ и е функцията $f(x)$ е дефинирана в този интервал.

**Определение:** Модул на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в $[a, b]$ наричаме величината

$$\omega(f; \delta) = sup\{|f(x) - f(y)|, \text{когато } |x - y| \le \delta; x, y \in [a, b]\}, \qquad \text{където } 0 < \delta \le (b - a).$$

От дефиницията се вижда, че $\omega(f;\delta)$ е ненамаляваща функция на $\delta$. Ако $f(x)$ е непрекъсната за $x \in [a,b]$, то $\omega(f;\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$.

**Задача 2.** Нека $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ и $I_1(f;x) \in S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, който интерполира $f(x)$ във възлите $x_k,\ k = 0,1,\dots,n$. Да се докаже, че $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - I_1(f;x)| \le \omega(f;\Delta n)$, където

$\Delta n = \max\limits_{0\le i\le n-1} \{x_{i+1} - x_i\}$.

**Доказателство:** Нека $x \in [x_k, x_{k+1}]$, тогава

$$I_1(f;x) = L_1(f;x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} f(x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f(x_{k+1}).$$

Базисните полиноми на Лагранж имат сума едно и следователно може да представим по подобен начин и $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} f(x) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f(x).$$

Тогава получаваме

$$\begin{aligned}
|f(x) - I_1(f;x)| &= \left|\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}\big(f(x) - f(x_k)\big) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\big(f(x) - f(x_{k+1})\big)\right| \le \\
&\le \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}|f(x) - f(x_k)| + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}|f(x) - f(x_{k+1})| \le \\
&\le \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}\omega(f;|x - x_k|) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\omega(f;|x - x_{k+1}|) \le \\
&\le \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}\omega(f;x_{k+1} - x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\omega(f;x_{k+1} - x_k) = \\
&= \left(\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)\omega(f;x_{k+1} - x_k) = \omega(f;x_{k+1} - x_k) \le \omega(f;\Delta n).
\end{aligned}$$

=> за $x \in [x_k, x_{k+1}]$ получаваме $|f(x) - I_1(f;x)| \le \omega(f;\Delta n)$ и това неравенство не зависи от $k$. Следователно

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - I_1(f;x)| \le \omega(f;\Delta n).$$

**Задача 3.** Нека $x_k = \frac{k}{n}, k = 0 \div n$ и $f(x) \in C^1[0,1]$. Нека $I_1(f;x) \in\ S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, за който $f(x_k) = I_1(f;x_k), k = 0 \div n$. Да се докаже, че съществува константа $c > 0$, независеща от $n$, такава че $|f(x) - I_1(f;x)| \le \frac{c}{n}$ за всяко $x \in [0,1]$.

**Доказателство:** Ще използваме предишната задача. Тук $\Delta n = \frac{1}{n}$. Имаме

$$|f(x) - I_1(f;x)| \le \omega\left(f;\frac{1}{n}\right), \forall x \in [0,1].$$

Нека $M = \max\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)|$. Функцията $f(x) \in C^1[a,b]$ и следователно

$$|f(x) - f(y)| = |f'(x_*)|.|x - y| \leq M|x - y|, \qquad x_* \in [x, y];\ \forall x, y \in [0,1]$$

$$=> \omega(f;\delta) \leq M\delta, \forall \delta \in [0,1]\ => |f(x) - I_1(f;x)| \leq \omega\left(f;\frac{1}{n}\right) \leq \frac{M}{n}, \forall x \in [0,1].$$

Нека вземем $c = M$ и получаваме $|f(x) - I_1(f;x)| \leq \frac{c}{n}$ за всяко $x \in [0,1]$.

**Задача 4.** Нека $x_k = \frac{k}{n}, k = 0 \div n$ и $f(x) \in C^2[0,1]$. Нека $I_1(f;x) \in\ S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, за който $f(x_k) = I_1(f;x_k), k = 0 \div n$. Да се докаже, че съществува константа $c > 0$, независеща от $n$, такава че $|f(x) - I_1(f;x)| \leq \frac{c}{n^2}$ за всяко $x \in [0,1]$.

**Доказателство:** Нека $M = \max\limits_{x \in [0,1]} |f''(x)|$ при $x \in [x_k, x_{k+1}] = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ имаме

$$|f(x) - I_1(f;x)| = |f(x) - L_1(f;x)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_k)(x - x_{k+1})\right| \leq \frac{M}{2}(x - x_k)(x_{k+1} - x).$$

Но пароболата $(x - x_k)(x_{k+1} - x)$ достига максимума си във върха на параболата, т. е.

$$|f(x) - I_1(f;x)| \leq \frac{M}{2}\left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right)^2 = \frac{M}{8n^2}, \forall k$$

Полагаме $c = \frac{M}{8}$ и получаваме

$$|f(x) - I_1(f;x)| \leq \frac{c}{n^2}, \forall x \in [0,1].$$

# B-сплайни

В задачите ще използваме представянето на разделената разлика като линейна комбинация от функционалните стойности в интерполационните възли, т. е. доказаната формула:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$$

**Задача 1.** Нека $B_{i,r-1}(t) = (\cdot - t)_+^{r-1}[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r}], i \in \mathbb{Z}$ е безкрайна редица от B-сплайни с възли $x_i < x_{i+1}, \forall i$. Да се докаже, че

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_{k+r} - x_k) B_{k,r-1}(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}, r \geq 2.$$

Това свойство се нарича разделяне на единицата.

**Доказателство:** От Теорема 1. от лекцията за B-сплайни знаем: $B_{k,r-1}(t) \neq 0$ само за $t \in (x_k, x_{k+r})$. Извън този интервал B-сплайнът е равен на нула.

Нека $t \in (x_i, x_{i+1})$. Тогава само краен брой събираеми от безкрайната сума са различни от нула. Заместваме B-сплайните, които всъщност са разделени разлики. Използваме рекурентната връзка за разделени разлики и получаваме:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_{k+r} - x_k) B_{k,r-1}(t) = \sum_{k=i+1-r}^{i} (x_{k+r} - x_k) B_{k,r-1}(t) =$$

$$= \sum_{k=i+1-r}^{i} (x_{k+r} - x_k)\, (\cdot - t)_+^{r-1}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+r}] =$$

$$= \sum_{k=i+1-r}^{i} (x_{k+r} - x_k) \frac{(\cdot - t)_+^{r-1}[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+r}] - (\cdot - t)_+^{r-1}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+r-1}]}{x_{k+r} - x_k} =$$

$$= (\cdot - t)_+^{r-1}[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+r}] - (\cdot - t)_+^{r-1}[x_{i+1-r}, x_{i+2-r}, \dots, x_i].$$

Но $t \in (x_i, x_{i+1}) => (x_k - t)_+^{r-1}[x_{i+1-r}, x_{i+2-r}, \dots, x_i] = 0$ за $k = i + 1 - r, i + 2 - r, \dots, i$.

При $t \in (x_i, x_{i+1}) => (x_k - t)_+^{r-1} = (x_k - t)^{r-1}$ за $k = i + 1, \dots, i + r$. Следователно

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_{k+r} - x_k) B_{k,r-1}(t) = (\cdot - t)^{r-1}[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+r}] = 1,$$

защото разделената разлика на функцията $\varphi(x) = (x - t)^{r-1} \in \pi_{r-1}$ в $r$ възела $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+r}$ е равна на единица.

**Задача 2.** Нека $B_{i,r-1}(t) = (\cdot - t)_+^{r-1}[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r}], i \in \mathbb{Z}$ е безкрайна редица от В-сплайни с възли $x_i < x_{i+1}, \forall i$. Да се докаже, че

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_{k,r-1}(t)dt = \frac{1}{r}.$$

**Доказателство:** Отново от свойството, че $B_{k,r-1}(t) \neq 0$ само за $t \in (x_k, x_{k+r})$ и извън този интервал В-сплайнът е равен на нула, получаваме

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} B_{k,r-1}(t)dt = \int_{x_k}^{x_{k+r}} B_{k,r-1}(t)dt = \int_{x_k}^{x_{k+r}} \sum_{i=k}^{k+r} c_i (x_i - t)_+^{r-1}\, dt,$$

където коефициентите $c_i = \frac{1}{\omega\prime(x_i)}$. Следователно

$$I = \sum_{i=k}^{k+r} c_i \int_{x_k}^{x_{k+r}} (x_i - t)_+^{r-1} dt = \sum_{i=k}^{k+r} c_i \int_{x_k}^{x_i} (x_i - t)^{r-1} dt = \sum_{i=k}^{k+r} c_i \left\{ -\frac{(x_i - t)^r}{r} \right\} \Bigg|_{t=x_k}^{x_i} =$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{i=k}^{k+r} c_i (x_i - x_k)^r = \frac{1}{r} (\cdot - x_k)^r [x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+r}] = \frac{1}{r}$$

т. к. разделената разлика на функцията $\varphi(x) = (x - t)^r \in \pi_r$ в $(r+1)$ възела $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+r}$ е равна на единица.

**Задача 3.** Нека $r > 2, r \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че

$$\frac{d}{dt}\{B_{i,r-1}(t)\} = \frac{r-1}{x_{i+r} - x_i}\{B_{i,r-2}(t) - B_{i+1,r-2}(t)\}.$$

**Доказателство:** Нека $A = \frac{d}{dt}\{(\cdot - t)_+^{r-1}[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r}]\}$. Имаме формулата

$$\frac{d}{dt}\{(x_k - t)_+^{r-1}\} = -(r-1)(x_k - t)_+^{r-2},$$

защото за $t \geq x_k \Rightarrow (x_k - t)_+^{r-1} = 0$ и следователно равенството е вярно, а за

$t < x_k \Rightarrow (x_k - t)_+^{r-1} = (x_k - t)^{\,r-1}$ и следователно равенството отново е в сила.

$$\Rightarrow A = \sum_{k=i}^{i+r} c_k . \frac{d}{dt}\{(x_k - t)_+^{r-1}\} = \sum_{k=i}^{i+r} c_k . (1-r)(x_k - t)_+^{r-2} = (1-r)(\cdot - t)_+^{r-2}[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r}]$$

$$= (1-r)\left\{ \frac{(\cdot - t)_+^{r-2}[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+r}] - (\cdot - t)_+^{r-2}[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r-1}]}{x_{i+r} - x_i} \right\} =$$

$$= \frac{r-1}{x_{i+r} - x_i}\{B_{i,r-2}(t) - B_{i+1,r-2}(t)\}.$$

**Задача 4.** Нека $r > 2, r \in \mathbb{N}; t \neq x_{i+r}$. Да се докаже, че

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{B_{i,r-1}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r-1}}\right\} = (r-1)\frac{B_{i,r-2}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r}}.$$

**Доказателство:** От Теорема 3. от лекцията за B-сплайни имаме следната рекурентна връзка:

$$B_{i,r-1}(t) = \frac{x_{i+r}-t}{x_{i+r}-x_i}B_{i+1,r-2}(t) + \frac{t-x_i}{x_{i+r}-x_i}B_{i,r-2}(t) \qquad (1)$$

Диференцираме лявата страна

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{B_{i,r-1}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r-1}}\right\} = \frac{B'_{i,r-1}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r-1}} + B_{i,r-1}(t).\frac{r-1}{(x_{i+r}-t)^{r}} = \frac{(r-1)B_{i,r-1}(t) + (x_{i+r}-t)B'_{i,r-1}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r}}.$$

Използваме доказаното в **Задача 3.** и заместваме в горното равенство производната на $B_{i,r-1}(t)$. Получаваме:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{B_{i,r-1}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r-1}}\right\} = \frac{(r-1)B_{i,r-1}(t) + (x_{i+r}-t)\frac{r-1}{x_{i+r}-x_i}\{B_{i,r-2}(t) - B_{i+1,r-2}(t)\}}{(x_{i+r}-t)^{r}}$$

$$= \frac{(r-1)\left\{\frac{x_{i+r}-t}{x_{i+r}-x_i}B_{i+1,r-2}(t) + \frac{t-x_i}{x_{i+r}-x_i}B_{i,r-2}(t)\right\} + (x_{i+r}-t)\frac{r-1}{x_{i+r}-x_i}\{B_{i,r-2}(t) - B_{i+1,r-2}(t)\}}{(x_{i+r}-t)^{r}}$$

$$= \frac{(r-1)}{(x_{i+r}-t)^{r}}\left\{\frac{x_{i+r}-t}{x_{i+r}-x_i}B_{i,r-2}(t) + \frac{t-x_i}{x_{i+r}-x_i}B_{i,r-2}(t)\right\} = (r-1)\frac{B_{i,r-2}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r}}.$$

В горното равенство използвахме рекурентна връзка (1).

**Задача 5:** Нека $B(t) = (\cdot - t)_+^2[-1,1,2,3]$ е $B$-сплайнът от втора степен. Да се намери явният вид на $B(t)$ в интервала $[1; 2]$.

**Решение:** Търсим разделената разлика на отсечената функция $f(x) = (x-t)_+^2$. Ще построим таблицата за намиране на разделените разлики, като интерполационните възли са $x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = 2,\ x_3 = 3; t \in [1; 2]$.

| $x_i$ | $f[x_i]$ | $f[x_i, x_{i+1}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 0 | $\frac{(2-t)^2}{3}$ | $\frac{-5t^2+14t-5}{24}$ |
| 1 | 0 | $(2-t)^2$ | $\frac{(3-t)^2-2(2-t)^2}{2}$ | |
| 2 | $(2-t)^2$ | $(3-t)^2-(2-t)^2$ | | |
| 3 | $(3-t)^2$ | | | |

=> явният вид на $B$-сплайна е $B(t) = \frac{-5t^2+14t-5}{24}$ при $t \in [1; 2]$.

# Полином на най-добро равномерно приближение

Нека $f(x)$ е непрекъсната функция в интервал $[a,b]$. Равномерна (Чебишова) норма в това пространство се определя с равенството: $\|f\| := \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Равномерната норма поражда равномерно разстояние $\rho(f,g) := \|f-g\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$.

В метризираното по този начин пространство $C[a,b]$ търсим полином $p \in \pi_n$ на най-добро равномерно приближение. Величината

$$E_n(f) := inf\|f-p\|,\ p \in \pi_n$$

ще наричаме *най-добро равномерно приближение* на *f* с полиноми от степен *n.* Ако инфимумът се достига за някакъв полином $p_* \in \pi_n$, т.е. ако $\|f-p_*\| = E_n(f)$, то $p_*$ се нарича *полином на най-добро равномерно приближение* в $\pi_n$.

**Теорема на Чебишов за алтернанса:** Нека $f(x)$ е произволна непрекъсната функция в интервала $[a,b]$. Необходимото и достатъчно условие полиномът $P \in \pi_n$ да бъде полином на най-добро равномерно приближение за $f$ от *n*-та степен в $[a,b]$ е да съществуват *n* + 2 точки $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ от $[a,b]$ такива, че $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \le b$ и $f(x_i) - P(x_i) = (-1)^i\, \varepsilon \|f-P\|,\quad i = 0,1,\ldots,n+1$,
където $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$.

**Задача 1:** Докажете, че ако $f(x)$ е четна (нечетна) функция за $x \in [-a,a]$, то и полиномът на най-добро равномерно приближение (ПНДРП) за $f(x)$ в $[-a,a]$ е също четен (нечетен).

**Доказателство:** доказателството на твърдението следва от единствеността на ПНДРП. Нека например функцията е четна, т. е. $f(x) = f(-x), \forall x \in [-a,a]$. Нека $P(x) \in \pi_n$ е ПНДРП за $f(x)$ в $[-a,a]$. Тогава

$$E_n(f) = \max_{x\in[-a,a]} |f(x) - P(x)| = \max_{x\in[-a,a]} |f(-x) - P(-x)| = \max_{x\in[-a,a]} |f(x) - P(-x)|$$

$=> P(-x)$ е също ПНДРП от $n$-та степен за $f(x)$ в $[-a,a]$. Но знаем, че ПНДРП е единствен

$$=> P(-x) \equiv P(x),$$

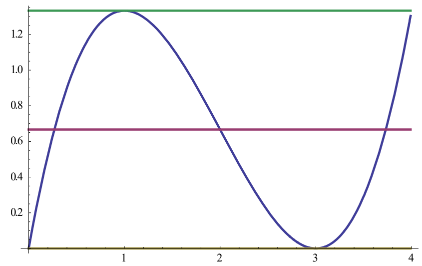
т. е. $P(x)$ е четен полином. Аналогично се доказва твърдението в случая на нечетна функция $f(x)$ в $[-a,a]$.

**Задача 2:** Нека $f(x) \in C[a,b]$. Да се намери ПНДРП от $\pi_0$ за $f(x)$ в $[a,b]$.

**Решение:** Тъй като $f(x) \in C[a,b] => \exists\ x_1$ и $x_2 \in [a,b]$, за които функцията достига максимума и минимума си в този интервал. По Теоремата на Чебишов за алтернанса са необходими две точки на алтернанс. Тези точки са $x_1$ и $x_2$. Тогава ПНДРП е

$$P(x) = \frac{1}{2}\big(f(x_1) + f(x_2)\big) = const \in \pi_0.$$

На долната графика са изчертани функцията $f(x)$ (в син цвят) и ПНДРП $P(x)$ (в тъмно червен цвят) за интервала $[0,4]$. Точките на алтернанс в конкретния пример са $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, а абсцисната ос и правата в зелен цвят образуват ивицата от успоредни прави, която $P(x)$ разполовява.




**Задача 3:** Нека $f(x) \in C^1[a,b]$ е изпъкнала (вдлъбната) в $[a,b]$. Да се намери ПНДРП от $\pi_1$ за $f(x)$ в $[a,b]$.

**Решение:** Нека функцията е изпъкнала в интервала. Това означава, че втората производна на функцията е положителна и следователно първата производна на функцията е монотонно растяща в интервала $[a,b]$. По Теоремата на Чебишов за алтернанса са необходими три точки на алтернанс $a \le x_0 < x_1 < x_2 \le b$. Нека $P(x) \in \pi_1$ е ПНДРП за $f(x)$ в $[a,b] \Rightarrow P(x) = Ax + B$. Допускаме, че две от точките на алтернанс $a < x_0 < x_1$ са вътрешни. От условието

$$f(x_0) - P(x_0) = P(x_1) - f(x_1) = \pm\|f - P\| \Rightarrow f'(x_0) - P'(x_0) = P'(x_1) - f'(x_1) = 0$$

И тъй като $P'(x) = A$ получаваме $f'(x_0) = f'(x_1) = A$, което е противоречие с монотонността на $f'(x)$. Следователно $x_0 = a$ и аналогично се доказва, че $x_2 = b$. От теоремата за крайните нараствания съществува точка $x_1 \in (a,b)$, такава че $f'(x_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, т. е. допирателната към $f(x)$ в точка $x_1$ е успоредна на хордата $\big(a, f(a)\big), \big(b, f(b)\big)$. Правата, която разполовява ивицата между двете успоредни прави е ПНДРП от $\pi_1$ за $f(x)$ в $[a,b]$. Ето и стъпките от алгоритъма за построяване на ПНДРП:

1) Построяваме правата $g(x) = L_1(f;x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$;
2) Намираме точка $x_1 \in (a,b)$: $f'(x_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$;
3) Построяваме ПНДРП от $\pi_1$ за $f(x)$ в $[a,b]$: $P(x) = g(x) - \frac{1}{2}\big(g(x_1) - f(x_1)\big)$.

**Задача 4:** Да се намери ПНДРП от $\pi_1$ за $f(x) = \sqrt{x}$ в $[0,1]$.

**Решение:** Проверяваме дали функцията има постоянна по знак втора производна, т. е. дали функцията е изпъкнала или вдлъбната. Ако е такава, то може да приложим алгоритъма от **Задача 3.**

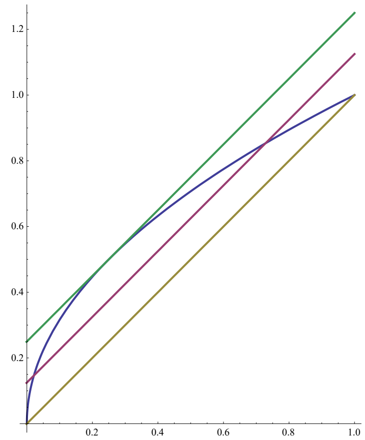
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0 \text{ в } (0,1],$$

следователно $f(x)$ е вдлъбната. Правата $g(x) = L_1(f;x) = x$.

Търсим $x_1 \in (0,1)$: $f'(x_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$,

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow P(x) = x - \frac{1}{2}\big(g(x_1) - f(x_1)\big) = x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = x + \frac{1}{8}; E_1(f) = \frac{1}{8}.$$

На графика виждаме функцията $f(x)$ (в син цвят) и ПНДРП $P(x)$ (в тъмно червен цвят). Точките на алтернанс са $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}$ и $x_2 = 1$, а правите в зелен и резидав цвят образуват ивицата от успоредни прави, която се разполовява от $P(x)$.



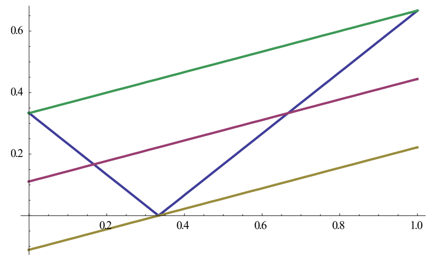

**Задача 5:** Да се намери ПНДРП от $\pi_1$ за $f(x) = \left|x - \frac{1}{3}\right|$ в $[0,1]$.

**Решение:** По Теоремата на Чебишов за алтернанса са необходими три точки на алтернанс $0 = x_0 < x_1 < x_2 = 1$. За $x = \frac{1}{3}$ функцията $f(x)$ има глобален минимум и в тази точка графиката на функцията е най-отдалечена от хордата $\big(0, f(0)\big), \big(1, f(1)\big)$ – интерполационния полином $L_1(f; x)$. Следователно вътрешната точка на алтернанс е $x_1 = \frac{1}{3}$.

Следваме първа и трета стъпка от алгоритъма от **Задача 3.** и получаваме

$$g(x) = L_1(f; x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3} => P(x) = g(x) - \frac{1}{2}\big(g(x_1) - f(x_1)\big) = \frac{x}{3} + \frac{1}{9}.$$

На графика са илюстрирани функцията $f(x)$ (в син цвят) и ПНДРП $P(x)$ (в тъмно червен цвят). Точките на алтернанс са $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = 1$, а правите в зелен и резидав цвят образуват ивицата от успоредни прави, която се разполовява от $P(x)$.




**Задача 6:** Да се намери ПНДРП от $\pi_3$ за $f(x) = |x|$ в $[-1,1]$.

**Решение:** По Теоремата на Чебишов за алтернанса са необходими пет точки на алтернанс $-1 \leq x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 1$. Функцията $f(x)$ е четна, интервалът е симетричен относно нулата и от **Задача 1.** следва, че ПНДРП $P(x)$ е също четен. Следователно ПНДРП за $f$ от трета степен съвпада с ПНДРП за $f$ от втора степен, т. е. $E_3(f) = E_2(f)$. Тогава $P(x) = Ax^2 + B$. От съображения за четност (симетрия) следва, че точките на алтернанс са разположени симетрично $x_0 = -x_4 = -1,\ x_1 = -x_3,\ x_2 = 0,\ x_4 = 1$. Тогава да разгледаме половината интервал $[0,1]$. Точките на алтернанс $x_2$, $x_3$ и $x_4$ удовлетворяват $P(0) - f(0) = f(x_3) - P(x_3) = P(1) - f(1)$. Точката $x_3$ е вътрешна точка на алтернанс (екстремум) и следователно $f'(x_3) - P'(x_3) = 0$. Заместваме в тези равенства и получаваме следната система от уравнения за коефициентите $a$ и $b$ на $P(x)$ и $x_3$:

$$\left| \begin{array}{c} A + B - 1 = B \\ x_3 - Ax_3^2 - B = B \\ 1 - 2Ax_3 = 0 \end{array} \right.$$

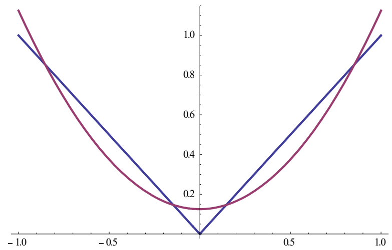
$$=> A = 1, x_3 = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{8},$$

$$=> P(x) = x^2 + \frac{1}{8}, E_2(f) = E_3(f) = \frac{1}{8}.$$

Ще използваме Wolfram Mathematica за да начертаем графиката на функцията $f(x)$ и полинома на най-добро равномерно приближение от трета степен $P(x)$ за $f$ в интервала $[-1,1]$.

$$\text{Plot}[\{\text{Abs}[x], x\text{^}2 + 1/8\}, \{x, -1,1\}, \text{PlotStyle} \to \text{Thick}]$$

На графика е изобразена $f(x)$ (в син цвят) и $P(x)$ (в тъмно червен цвят). Разстоянието от координатното начало до върха на параболата е равно на $E_3(f) = \frac{1}{8}$.


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
– 1.0
– 0.5
0.5
1.0

## Метод на най-малките квадрати

**Задача 1:** Дадена е таблица $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n}$, където $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Докажете, че съществува единствена права $P(x) = Ax + B$, за която величината $S(A,B) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - Ax_i - B)^2$ е минимална.

**Доказателство:** Необходимото и достатъчно условие за минимум на изпъкналата функция $S(A,B)$ е частните производни от първи ред да са равни на нула, т. е. $S'_A = S'_B = 0$. Диференцираме и получаваме:

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - Ax_i - B)(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - Ax_i - B)(-1) = 0$$

$$=> \left| \begin{array}{l} A\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + B\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \quad A\sum_{i=1}^{n} x_i + n.B = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{array} \right.$$

Тази система има единствено решение, когато детерминантата й е различна от нула. Но детерминантата $\Delta = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0$, защото $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Следователно съществува единствена права $P(x) = Ax + B$, която минимизира $S(A,B)$.

**Задача 2:** По метода на най-малките квадрати намерете права, която приближава таблицата:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$ | 2 | 4 | 2 | 1 |

**Решение:** Търсим права $P(x) = Ax + B$, за която величината $S(A,B) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - Ax_i - B)^2$ е минимална. НДУ за минимум са $S'_A = S'_B = 0$. След диференциране получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} A\sum_{i=1}^{4} x_i^2 + B\sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \\ \quad A\sum_{i=1}^{4} x_i + 4.B = \sum_{i=1}^{4} y_i \end{array} \right.$$

От таблицата намираме $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 14; \sum_{i=1}^{4} x_i = 6; \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 11;\ \sum_{i=1}^{4} y_i = 9$. Заместваме в системата и получаваме $A = -\frac{1}{2}; B = 3$. Следователно $P(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

**Задача 3:** По метода на най-малките квадрати намерете права, която приближава таблицата:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y_i$ | 2 | 1 | 0 | 1 |
| $w_i$ | 1 | 1 | 2 | 1 |

**Решение:** Търсим права $P(x) = Ax + B$, за която величината $S(A,B) = \sum_{i=1}^{n} w_i(y_i - Ax_i - B)^2$ е минимална. НДУ за минимум са $S'_A = S'_B = 0$. След диференциране получаваме системата

$$\left| \begin{aligned} A\sum_{i=1}^{4} w_i x_i^2 + B\sum_{i=1}^{4} w_i x_i &= \sum_{i=1}^{4} w_i x_i y_i \\ A\sum_{i=1}^{4} w_i x_i + B\sum_{i=1}^{4} w_i &= \sum_{i=1}^{4} w_i y_i \end{aligned} \right.$$

От таблицата намираме $\sum_{i=1}^{4} w_i x_i^2 = 7; \sum_{i=1}^{4} w_i x_i = 3; \sum_{i=1}^{4} w_i x_i y_i = 0;$ $\sum_{i=1}^{4} w_i y_i = 4.$ Заместваме в системата и получаваме $A = -\frac{6}{13}; B = \frac{14}{13}$. Следователно $P(x) = \frac{-6x+14}{13}$.

**Задача 4:** По метода на най-малките квадрати намерете парабола, която приближава таблицата:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$ | -4 | 15 | -9 | 10 | 7 | 6 |

**Решение:** Търсим парабола $P(x) = Ax^2 + Bx + C$, за която величината $S(A,B,C) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C)^2$ е минимална. НДУ за минимум са $S'_A = S'_B = S'_C = 0$. След диференциране получаваме системата

$$\left| \begin{aligned} A\sum_{i=1}^{6} x_i^4 + B\sum_{i=1}^{6} x_i^3 + C\sum_{i=1}^{6} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{6} x_i^2 y_i \\ A\sum_{i=1}^{6} x_i^3 + B\sum_{i=1}^{6} x_i^2 + C\sum_{i=1}^{6} x_i &= \sum_{i=1}^{6} x_i y_i \\ A\sum_{i=1}^{6} x_i^2 + B\sum_{i=1}^{6} x_i + 6C &= \sum_{i=1}^{6} y_i \end{aligned} \right.$$

От таблицата намираме

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^4 = 115; \sum_{i=1}^{6} x_i^3 = 27; \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 19; \sum_{i=1}^{6} x_i = 3; \sum_{i=1}^{6} x_i^2 y_i = 91; \sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 35; \sum_{i=1}^{6} y_i = 25.$$

Използваме Wolfram Mathematica за да решим системата

$$\text{Solve}[\{115A + 27B + 19C == 91{,}27A + 19B + 3C == 35{,}19A + 3B + 6C = \\ = 25\}, \{A, B, C\}]$$

$$\{\{A \to -\frac{2}{7}, B \to \frac{11}{7}, C \to \frac{30}{7}\}\}$$

Получаваме парабола $P(x) = \frac{-2x^2+11x+30}{7}$.

**Задача 5:** Намерете формула от вида $y(x) = A.2^{Bx}$ за приближаване на таблицата:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 32 |

**Решение:** Правим полагане $z(x) = \log_2 y(x) => z(x) = \log_2(A.2^{Bx}) = \log_2 A + Bx = Bx + C$, където $C = \log_2 A$. Константите $B$ и $C$ определяме по метода на най-малките квадрати за таблицата:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 |

Търсим права $P(x) = Bx + C$, за която величината $S(B, C) = \sum_{i=1}^{n}(z_i - Bx_i - C)^2$ е минимална. НДУ за минимум са $S'_B = S'_C = 0$. След диференциране получаваме системата

$$\left| \begin{array}{c} B\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + C\sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{i=1}^{5} x_i z_i \\ B\sum_{i=1}^{5} x_i + 5C = \sum_{i=1}^{5} z_i \end{array} \right.$$

От таблицата намираме $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 55; \sum_{i=1}^{5} x_i = 15; \sum_{i=1}^{5} x_i z_i = 45;$ $\sum_{i=1}^{5} z_i = 11$. Заместваме в системата и получаваме $B = \frac{6}{5}; C = -\frac{7}{5}$.

Следователно $z(x) = \frac{6x-7}{5} => y(x) = 2^{z(x)} = 2^{-7/5}.2^{6x/5}$.

**Задача 6:** По метода на най-малките квадрати да се реши преопределената система:

$$\left| \begin{array}{c} x - y = 1 \\ x + y = 1 \\ x + y = -1 \\ x - y = -1. \end{array} \right.$$

**Решение:** Решаваме матричната система $A.X = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме матричното уравнение с $A^t$ отляво и получаваме определената система $A^t.A.X = A^t.B$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} => A^tA = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; A^tB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 4x + 0.y = 0 \\ 0.x + 4y = 0 \end{cases} => (x, y) = (0,0).$$

Геометричният смисъл може да се види на следния чертеж: