13. Непрекъснати функции. Аритметични действия с непрекъснати функции. Непрекъснатост на съставни функции

Непрекъснати функции в точка

Дефиниция

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}$. Казваме, че $f(x)$ е непрекъсната в $x_0 \in D$, ако

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ такова, че } |x - x_0| < \delta. \tag{1}$$

Бележка

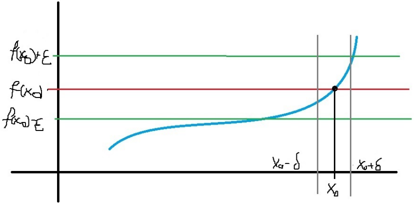
В случая, когато $x_0 \in D$ е точка на сгъстяване на D, имаме

$$(1) \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{2}$$

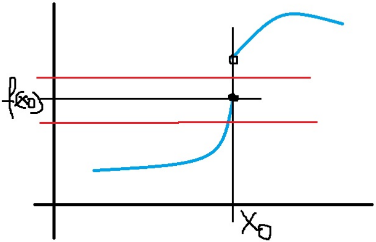
Онези точки на D, които не са негови точки на сгъстяване, се наричат изолирани точки. По дефиниция всяка функция е непрекъсната във всяка изолирана точка на своята дефиниционна област.

Непрекъснати функции в множество

Пример: Ако $D = [0,1] \cup \{2\}$, то всяка точка от $[0,1]$ е негова точка на сгъстяване, а 2 е изолирана точка.



Непрекъсната в т. x_0

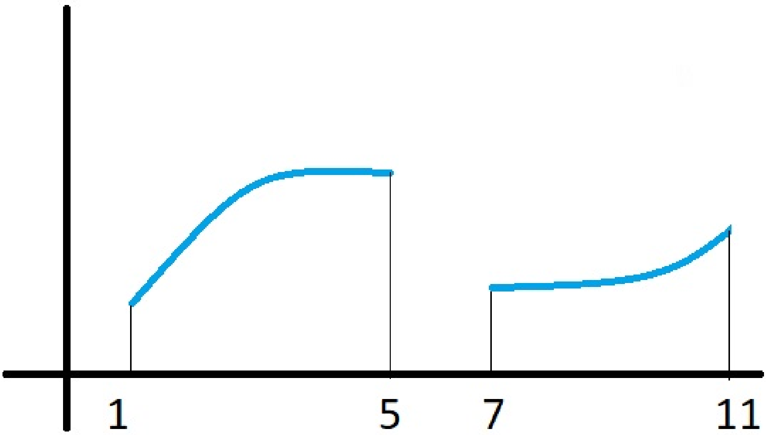


Прекъсната в т. x_0

Дефиниция

Една функция се нарича <u>непрекъсната в дадено множество</u> от реални числа, ако тя е дефинирана и непрекъсната във всяка точка от това множество.

Непрекъснати функции в множество



Дефиниционна област: $[1,5] \cup [7,11]$

Аритметични действия с непрекъснати функции

Теорема 1

Сума, разлика, произведение и частно (стига знаменателят да не се анулира) на две непрекъснати функции в дадена точка, съответно множество, са също непрекъснати в тази точка, съответно множество.

Д-во: Нека $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ са непрекъснати в $x_0 \in D$.
Ако x_0 е изолирана точка, то $f \pm g$, fg и $\frac{f}{g}$ са непрекъснати в x_0 по дефиниция.
Ако x_0 е точка на сгъстяване на D, можем да използваме характеризацията на свойството непрекъснатост посредством граница на функция:

$$h(x) \text{ е непрекъсната в т. } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} h(x) = h(x_0). \tag{3}$$

Имаме

$$f(x) \text{ е непрекъсната в т. } x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{4}$$

$$g(x) \text{ е непрекъсната в т. } x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0). \tag{5}$$

$$\overset{\text{Т-ма 1(а), тема 10}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to x_0} [f(x)+g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) + g(x) \text{ е непрекъсната в т. } x_0. \tag{6}$$

Аналогично се установява, че $f - g$, fg и $\frac{f}{g}$ са непрекъснати в x_0.
Ако $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в D, т.е. непрекъснати са във всяка точка на D, установеното досега показва, че $f \pm g$, fg и $\frac{f}{g}$ са непрекъснати във всяка точка на D, т.е. са непрекъснати в D.

Непрекъснатост на съставни функции

Теорема 2

Композицията на две непрекъснати функции е също непрекъсната функция.

Д-во: Нека $f : D \to E$ и $g : E \to \mathbb{R}$ са непрекъснати. Ще докажем, че съставната функция $h(x) := g(f(x))$, $x \in D$, е непрекъсната в D.
Нека $x_0 \in D$ е произволно. Ще докажем, че $h(x)$ е непрекъсната в x_0. Полагаме $y_0 := f(x_0)$.
Нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано. Ще покажем, че

$$\exists\, \delta > 0 : |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ такова, че } |x - x_0| < \delta. \tag{7}$$

От непрекъснатостта на $g(y)$ в т. y_0 следва, че

$$\exists\, \eta > 0 : |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \quad \forall y \in E \text{ такова, че } |y - y_0| < \eta. \tag{8}$$

От непрекъснатостта на $f(x)$ в т. x_0 следва, че

$$\exists\, \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \eta \quad \forall x \in D \text{ такова, че } |x - x_0| < \delta. \tag{9}$$

От (8) и (9) $\Longrightarrow$ (7).