10. Аритметични действия и неравенства с граници на функции. Граница на съставна функция

Аритметични действия с граници на функции

Теорема 1

Нека $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и a е точка на сгъстяване на D.
Ако $f(x)$ и $g(x)$ имат граница в т. a, то граница в т. a имат и функциите $f(x) + g(x)$ и $f(x)g(x)$,
при това

(а) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

и

(б) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Ако освен това $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, то и функцията $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ има граница в т. a, като

(в) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

Доказателство

Благодарение на деф. на Хайне за граница на функция в точка, твърденията се свеждат до своите аналози за граница на редица.

$$\text{Полагаме} \qquad \ell_1 := \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{и} \quad \ell_2 := \lim_{x\to a} g(x). \tag{1}$$

Нека $\{x_n\}$ е произволно фиксирана редица такава, че $\lim x_n = a$, $x_n \in D$ и $x_n \neq a$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.
Тогава

$$(1) \overset{\text{деф. Хайне}}{\Longrightarrow} \lim f(x_n) = \ell_1 \quad \text{и} \quad \lim g(x_n) = \ell_2. \tag{2}$$

Сега от свойствата на граница на редици (тема 2, т-ма 1) следва, че

$$\lim(f(x_n)+g(x_n)) = \ell_1+\ell_2, \quad \lim(f(x_n)g(x_n)) = \ell_1\ell_2, \quad \lim\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

като за последното съотношение използваме, че $g(x_n) \neq 0\ \forall n$ и $\ell_2 \neq 0$.
Това показва, че $f+g$, fg и $\frac{f}{g}$ удовлетворяват деф. на Хайне за граница в т. a и са в сила посочените формули.

Неравенства с граници на функции

Теорема 2

Нека $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и a е точка на сгъстяване на D.
Ако $f(x) \leq g(x)$, $x \in D$, $x \neq a$, и $f(x)$ и $g(x)$ имат граница в т. a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Д-во: Аналогично на предната т-ма.
Полагаме $\ell_1 := \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\ell_2 := \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
Нека $\{x_n\}$ е такава, че $\lim x_n = a$, $x_n \in D$ и $x_n \neq a$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.
Имаме

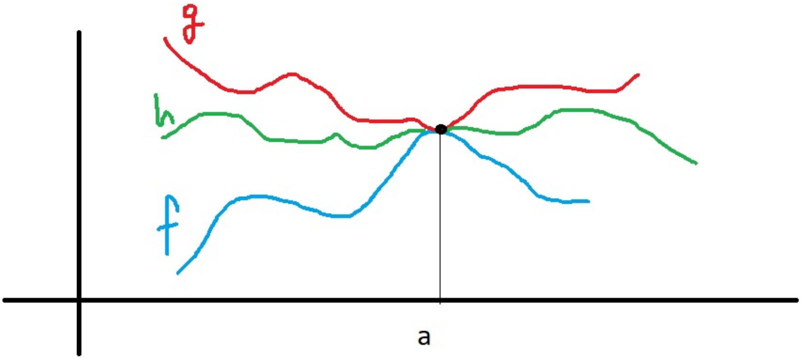
$$\begin{array}{ccccc} f(x_n) & \leq & g(x_n) & \forall n & \\ \downarrow & & \downarrow & & n \to \infty \\ \ell_1 & & \ell_2 & & \end{array}$$

$$\xRightarrow{\text{тема 2, т-ма 2}} \quad \ell_1 \leq \ell_2. \tag{3}$$

Неравенства с граници на функции

Теорема 3

Нека $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и a е точка на сгъстяване на D.
Ако $f(x) \le h(x) \le g(x)$, $x \in D$, $x \ne a$, и $f(x)$ и $g(x)$ имат граница в т. a, като $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$,
то и $h(x)$ има граница в т. a, при това $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$.



Доказателство

Аналогично на предните т-ми.
Нека $\{x_n\}$ е произволно фиксирана редица такава, че $\lim x_n = a$, $x_n \in D$ и $x_n \neq a$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.
Имаме

$$\begin{array}{ccccc} f(x_n) \leq & h(x_n) & \leq g(x_n) & \forall n & \\ \downarrow & & \downarrow & & n \to \infty \\ \ell & & \ell & & \end{array}$$

$$\overset{\text{тема 2, т-ма 3}}{\Longrightarrow} \quad \lim h(x_n) = \ell. \tag{4}$$

Така доказахме, че

$$\forall \{x_n\} : \lim x_n = a,\ x_n \in D,\ x_n \neq a\ \forall n \quad \text{имаме} \quad \lim h(x_n) = \ell. \tag{5}$$

Това показва, че деф. на Хайне е удовлетворена

$$\Longrightarrow \quad \exists \lim_{x \to a} h(x) = \ell. \tag{6}$$

Неравенства с граници на функции

Следствие

$$0 \leq |f(x)| \leq g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \tag{7}$$

Граница на съставна функция

$$g : E \to \mathbb{R}, \quad f : D \to E, \quad \text{композиция:} \quad g(f(x)), \quad x \in D \tag{8}$$

Теорема 4

- Нека $f : D \to E$ и $g : E \to \mathbb{R}$, $D, E \subseteq \mathbb{R}$ и a е точка на сгъстяване на D.
- Нека $\exists\, b := \lim\limits_{x \to a} f(x)$ и b е точка на сгъстяване на E.
- Нека $f(x) \neq b$ за $x \in D$, $x \neq a$.
- Нека $\exists\, \ell := \lim\limits_{y \to b} g(y)$.

Тогава и $g(f(x))$ има граница в т. a, при това $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \ell$.

Бележка

Накратко:

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{y \to \lim\limits_{x \to a} f(x)} g(y). \tag{9}$$

Доказателство

Отново ще използваме дефиницията на Хайне.

Нека $\{x_n\}$ е произволно фиксирана редица такава, че $\lim x_n = a$, $x_n \in D$ и $x_n \neq a$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.
Полагаме $y_n := f(x_n)$.
Имаме, че $y_n \in E$ и $y_n \neq b$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.
Също така

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \Longrightarrow \quad \lim f(x_n) = b \quad \text{т.е.} \quad \lim y_n = b. \tag{10}$$

Сега

$$\lim_{y\to b} g(y) = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim g(y_n) = \ell \quad \text{т.е.} \quad \lim g(f(x_n)) = \ell. \tag{11}$$

Така доказахме, че

$$\forall \{x_n\} : \lim x_n = a,\ x_n \in D,\ x_n \neq a\, \forall n \quad \text{имаме} \quad \lim g(f(x_n)) = \ell. \tag{12}$$

Следователно съществува $\lim_{x\to a} g(f(x)) = \ell$.