1. Множество на реалните числа. Принцип за непрекъснатост

Основни числови множества

I. Множество на естествените числа

$1, 2, 3, \ldots$

$0, 1, 2, 3, \ldots$

Означения: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_+$

II. Множество на целите числа

$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Означение: $\mathbb{Z}$

III. Множество на рационалните числа

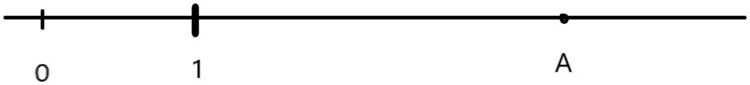
$$\frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}_+$$

Означение: $\mathbb{Q}$

Реални числа — дефиниция (геометричен подход)

Искаме на всяка точка от дадена права да съпоставим число

и то по такъв начин, че всяка отсечка да има дължина



Конструираме последователност от крайни десетични дроби:

$$a_0, a_0.\overline{a_1}, a_0.\overline{a_1 a_2}, \dots, a_0.\overline{a_1 a_2 \dots a_n}, \dots \tag{1}$$

a_0 е цяло число
$a_1, a_2, \dots$ са цифри

$a_0.\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ се намира отляво на т. A,
а $a_0.\overline{a_1 a_2 \dots a_n} + 10^{-n}$ — отдясно

Множество на реалните числа

Ако последователността е крайна, на A съпоставяме последния ѝ елемент — той е крайна десетична дроб.

В противен случай, на A съпоставяме безкрайната последователност от цифри $a_0.\overline{a_1 a_2 \dots a_n \dots}$

Дефиниция

Реално число наричаме всяка крайна или безкрайна десетична дроб.

Множеството на реалните числа се означава чрез $\mathbb{R}$.

Реалните числа, които не са рационални, се наричат <u>ирационални</u>.

Рационалните числа са точно тези, които се представят като крайна или като периодична десетична дроб.

Дефиниция (ограничени множества)

Нека $M \subseteq \mathbb{R}$.

(а) Казваме, че M е ограничено отгоре, ако съществува $c_1 \in \mathbb{R}$ такова, че $x \leq c_1$ за всяко $x \in M$. Всяко реално число c_1 с това свойство се нарича горна граница на M.

(б) Казваме, че M е ограничено отдолу, ако съществува $c_2 \in \mathbb{R}$ такова, че $x \geq c_2$ за всяко $x \in M$. Всяко реално число c_2 с това свойство се нарича долна граница на M.

(в) Казваме, че M е ограничено, ако то е ограничено както отгоре, така и отдолу, т.е. ако съществуват $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ такива, че $c_2 \leq x \leq c_1$ за всяко $x \in M$ или, еквивалентно, съществува $c \in \mathbb{R}$ такова, че $|x| \leq c$ за всяко $x \in M$.

Примери: 1) Множеството $M = [1, 2]$ е ограничено;
2) Множеството $M = (-\infty, 1)$ е ограничено отгоре, но не е ограничено отдолу;
3) Множеството $M = \{\pm 2n : n \in \mathbb{N}\}$ не е ограничено нито отгоре, нито отдолу.

Най-важното свойство на реалните числа

Принцип за непрекъснатост

(а) Всяко ограничено отгоре, непразно множество от реални числа M притежава най-малка горна граница. Тя се нарича негова точна горна граница и се означава със $\sup M$ (чете се "супремум").

(б) Всяко ограничено отдолу, непразно множество от реални числа M притежава най-голяма долна граница. Тя се нарича негова точна долна граница и се означава с $\inf M$ (чете се "инфимум").

Примери: 1) $\sup[0,1] = 1$ и $\inf[0,1] = 0$;
2) $\sup(0,1) = 1$ и $\inf(0,1) = 0$;
3) Нека $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$; тогава $\sup M = 1$ и $\inf M = 0$;
4) Нека $M = \{a \in \mathbb{Q} : a > 0 \text{ и } a^2 < 2\}$; тогава $\sup M = \sqrt{2}$ и ако разполагахме само с рационалните числа, то M, въпреки че е ограничено отгоре, нямаше да има точна горна граница.