Решения на примерните задачи за базис на сума и сечение на подпространства, матрични уравнения и линейни изпбражения

Задача 1. *В пространството $\mathbb{Q}^4$ на наредените четворки рационални числа е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите*

$$a_1 = (1, -1, -3, 0), \quad a_2 = (3, -1, -6, -1)$$

и линейната обвивка $W = l(b_1, b_2)$ на векторите

$$b_1 = (1, 1, 0, -1), \quad b_2 = (2, 8, 4, -1).$$

Да се намерят базиси на сумата $U + W$ и на сечението $U \cap W$.

Решение: От $U = l(a_1, a_2)$ и $W = l(b_1, b_2)$ следва, че $U + W = l(a_1, a_2, b_1, b_2)$. Образуваме матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

с вектор-редове a_1, a_2, b_1, b_2. Умножаваме редовете с ненулеви рационални числа. Умножаваме ред с рационално число и прибавяме към следващ ред. Тези елеметарни преобразувания по редове не променят линейните обвивки $l(a_1)$, $l(a_1, a_2)$, $l(a_1, a_2, b_1)$, $l(a_1, a_2, b_1, b_2)$ на началните отсечки на системата a_1, a_2, b_1, b_2. По-точно, умножаваме първия ред по (-3) и прибавяме към втория. Изваждаме първия ред от третия. Умножаваме първия ред по (-2), прибавяме към четвъртия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Равенството на втория и третия ред показва, че b_1 принадлежи на $l(a_1, a_2)$. Първи, втори и четвърти ред образуват линейно независима система, така че a_1, a_2, b_2 е базис на $l(a_1, a_2, b_1, b_2) = U + W$.

За да намерим базис на $U \cap W$ трябва да представим U и W като пространства от решения на хомогенни линейни системи. Решаваме хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & -3x_3 & & = 0 \\ 3x_1 & -x_2 & -6x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

с матрица от коефициенти a_1, a_2 като умножим първото уравнение по (-3), прибавяме към второто уравнение и получаваме $2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$. Следователно

$$x_1 = x_2 + 3x_3, \quad x_4 = 2x_2 + 3x_3 \quad \text{за произволни} \quad x_2, x_3 \in \mathbb{Q}.$$

Пространството от решения на тази хомогенна линейна система уравнения има базис

$$c_1 = (1, 1.0, 2), \quad c_2 = (3, 0, 1, 3).$$

Следователно U пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = 0 \\ 3x_1 & & +x_3 & +3x_4 & = 0 \end{array} \right. . \tag{1}$$

За да представим W като пространство от решения на хомогенна система линейни уравнения, решаваме хомогенната система

$$\left| \begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +8x_2 & +4x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

с матрица от коефициенти, съставена по редове от b_1, b_2. Умножаваме първото уравнение по (-2), прибавяме към второто и получаваме $6x_2 + 4x_3 + x_4 = 0$. Замествайки $x_4 = -6x_2 - 4x_3$ в първото уравнение, извеждаме $x_1 = -7x_2 - 4x_3$ за произволни $x_2, x_3 \in \mathbb{Q}$. Векторите

$$d_1 = (-7, 1, 0, -6) \quad \text{и} \quad d_2 = (-4, 0, 1, -4)$$

образуват базис на пространството от решения и W е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrr} -7x_1 & +x_2 & & -6x_4 & = 0 \\ -4x_1 & & +x_3 & -4x_4 & = 0 \end{array} \right. . \tag{2}$$

Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = 0 \\ 3x_1 & & +x_3 & +3x_4 & = 0 \\ -7x_1 & +x_2 & & -6x_4 & = 0 \\ -4x_1 & & +x_3 & -4x_4 & = 0 \end{array} \right. ,$$

получена чрез обединение на уравненията на (1) и (2). Матрицата от коефициенти на тази система е

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ -7 & 1 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме първия ред по (-3) и прибавяме към втория ред. Умножаваме първия ред по 7 и прибавяме към третия. Умножаваме първия ред по 4, прибавяме към четвъртия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Делим третия ред на 8 и записваме като втори ред. Умножаваме така получения втори ред по 3 и прибавяме към втория ред на предишната матрица. Умножаваме така получения втори ред по (-4), прибавяме към последния ред на предишната матрица и получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Изпускаме четвъртия ред, защото съвпада с третия ред. Изваждаме втория ред от първия и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Следователно

$$x_1 = -x_4, \quad x_2 = -x_4, \quad x_3 = 0 \quad \text{за произволно} \quad x_4 \in \mathbb{Q}.$$

Това доказва, че сечението $U \cap W$ е 1-мерно и има базис $(-1, -1, 0, 1)$.

Задача 2. *В пространството $\mathbb{Q}^4$ на наредените четворки рационални числа е дадено пространството от решения U на хомогенната система линейни уравнения*

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \end{array}\right.$$

и пространството от решения W на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +3x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = 0 \end{array}\right. .$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ и на сумата $U + W$.

Решение: Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +3x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = 0 \end{array}\right. ,$$

получена чрез обединение на уравненията на U и на W. Образуваме матрицата от коефициенти

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right).$$

Изваждаме третия ред от четвъртия. Умножаваме първия ред по (-2) и прибавяме към втория. Изваждаме първия ред от третия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Прибавяме втория ред към първия. Умножаваме втория ред по (-5) и прибавяме към утроения трети ред. Делим четвъртия ред на 2 и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме четвъртия ред по (-5), прибавяме към третия ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

От третото уравнение получаваме $x_4 = 0$. После четвъртото уравнение $x_3 - 2x_4 = 0$ дава $x_3 = 0$. Замествайки във второто уравнение $3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$, стигаме до извода, че $x_2 = 0$. Накрая, от първото уравнение $x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$ получаваме $x_1 = 0$. Следователно сечението $U \cap W = \{(0,0,0,0)\}$ е нулевото подпространство на $\mathbb{Q}^4$.

Матрицата от коефициенти

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

на хомогенната система линейни уравнения с пространство от решения U има ранг $\mathrm{rk}(A) = 2$, защото редовете и не са пропорционални помежду си. Следователно U има размерност $\dim(U) = 4 - \mathrm{rk}(A) = 4 - 2 = 2$. Аналогично, матрицата от коефициенти

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

на хомогенната система линейни уравнения с пространство от решения W е с ранг $\mathrm{rk}(B) = 2$, защото редовете и не са пропорционални. Оттук, подпространството W има размерност $\dim(W) = 4 - \mathrm{rk}(B) = 4 - 2 = 2$. По Теоремата за размерност на сума и сечение, сумата $U + W$ е с размерност

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 0 = 4 = \dim(\mathbb{Q}^4).$$

Следовятелно $U + W = \mathbb{Q}^4$ и всеки базис на $\mathbb{Q}^4$ е базис на $U + W$. Например, векторите

$$e_1 = (1,0,0,0),\ e_2 = (0,1,0,0),\ e_3 = (0,0,1,0),\ e_4 = (0,0,0,1)$$

образуват базис на $U + W = \mathbb{Q}^4$.

Задача 3. *Да се реши матричното уравнение*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: С елементарни преобразувания по редове се опитваме да сведем лявата половина на матрицата

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

към единичната матрица E_4. Изваждаме втория ред от четвъртия. Умножаваме първия ред по (-2) и прибавяме към втория ред. Умножаваме първия ред по (-3) и прибавяме към третия ред, за да сведем към

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -1 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & -2 & -7 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Записваме разликата на третия и втория ред като втори ред и го прибавяме към първия ред. Умножаваме така получения втори ред по (-3), прибавяме към втория ред на горната матрица и получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Удвояваме третия ред и прибавяме към втория. Умножаваме третия ред по (-3), прибавяме към четвъртия ред и получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right).$$

Делим четвъртия ред на (-8). Умножаваме така получения четвърти ред по (-2) и прибавяме към третия ред. Умножаваме четвъртия ред по (-3), прибавяме към втория ред и свеждаме към матрицата

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

В лявата половина получихме единичната матрица E_4, така че решаваното матрично уравнение има единствено решение

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. *Да се реши матричното уравнение*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 6 \\ 10 & 1 & 4 \\ 14 & 0 & 6 \\ 15 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение: Полагаме

$$Y = X \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и решаваме матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 6 \\ 10 & 1 & 4 \\ 14 & 0 & 6 \\ 15 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

чрез елементарни преобразувания по редове към матрицата

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 9 & -9 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 10 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 14 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 15 & -6 & 8 \end{array}\right).$$

Привеждаме лявата половина към единичната матрица E_4 чрез алгоритъм, който е различен от този в предишната задача. Изваждаме втория ред от третия получаваме

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 9 & -9 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 10 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 15 & -6 & 8 \end{array}\right).$$

Изваждаме третия ред от първия и втория ред от четвъртия. Умножаваме третия ред по (-2), прибавяме към втория и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrr} 0 & -1 & 2 & 1 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 & -7 & 4 \end{array}\right).$$

Прибавяме втория ред към първия. Умножаваме така получения първи ред по (-3), прибавяме към четвъртия и получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -16 & 8 & -8 \end{array}\right).$$

Делим четвъртия ред на (-8). Умножаваме така получения четвърти ред по (-2) и прибавяме към първия. Изваждаме четвъртия ред от втория и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Прибавяме първия ред км втория, разменяме първи и трети ред и получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

В лявата половина получихме единичната матрица E_4, така че

$$Y = X \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Транспонираме полученото матрично уравнение и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Образуваме матрицата

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Удвояваме първия ред и прибавяме към втория. Изваждаме първия ред от третия и получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 7 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Умножаваме третия ред по 3 и прибавяме към втория. После удвояваме така получения втори ред и прибавяме към третия. Умножаваме втория ред по (-3), прибавяме към първия ред и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Удвояваме третия ред и прибавяме към първия. Умножаваме третия ред по (-1) и получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Лявата половина на матрицата е равна на единичната матрица E_3, така че

$$X^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. *Да се реши матричното уравнение*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение: Разглеждаме матрицата

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Изваждаме първия ред от третия. Умножаваме първия ред по (-2), прибавяме към втория и получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Изваждаме втория ред от третия и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Както за системи линейни уравнения, така и за матрични уревнения, изпускаме нулевите редове без промяна на множеството от решения. По-точно, произволни елементи X_{ij} на неизвестната 3×3 матрица X изпълняват уравненията

$$(0,0,0) \begin{pmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \\ X_{3j} \end{pmatrix} = 0.X_{1j} + 0.X_{2j} + 0.X_{3j} = 0$$

за всички $1 \leq j \leq 3$. Следователно, разширената матрица на решаваното матрично уравнение се свежда към

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -4 & 4 & 2 \end{array} \right).$$

Удвояваме втория ред, прибавяме към първия и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 5 & 0 & -4 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -4 & 4 & 2 \end{array} \right).$$

Тази разширена матрица отговаря на матричното уравнение

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{rrr} -4 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{array} \right).$$

За всяко $1 \leq j \leq 3$ имаме система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{llll} X_{1j} & +5X_{2j} & & = a_j \\ & 3X_{2j} & -X_{3j} & = b_j \end{array} \right.$$

за елементите на j-тия стълб на неизвестната матрица $X \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$, която зависи от j-тия стълб

$$\left(\begin{array}{c} a_j \\ b_j \end{array} \right) \quad \text{на} \quad \left(\begin{array}{rrr} -4 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{array} \right).$$

Решенията на тези системи са

$$X_{1j} = -5X_{2j} + a_j, \quad X_{3j} = 3X_{2j} - b_j \quad \text{за произволни} \quad X_{2j} \in \mathbb{C}.$$

Следователно решенията на матричното уравнение са

$$X = \left(\begin{array}{ccc} -5X_{21} - 4 & -5X_{22} + 6 & -5X_{23} + 4 \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ 3X_{21} + 4 & 3X_{22} - 4 & 3X_{23} - 2 \end{array} \right) \quad \text{за произволни} \quad X_{21}, X_{22}, X_{23} \in \mathbb{C}.$$

Задача 6. *Да се реши матричното уравнение*

$$Y \left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{rrr} 3 & 5 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Решение: Транспонираме даденото матрично уравнение и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right) Y^t = \left(\begin{array}{rr} 3 & -3 \\ 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{array} \right)$$

с разширена матрица

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Изваждаме първия ред от третия. Умножаваме първия ред по (-2), прибавяме към втория ред и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Изваждаме втория ред от третия и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Изпускаме третия ред и получаваме матричното уравнение

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} Y_{11} & Y_{21} \\ Y_{12} & Y_{22} \\ Y_{13} & Y_{23} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rr} 3 & -3 \\ -1 & 4 \end{array}\right).$$

За всяко $1 \leq j \leq 2$, то се свежда до

$$\left| \begin{array}{cccc} Y_{j1} & -Y_{j2} & +2Y_{j3} & = a_j \\ & 3Y_{j2} & -Y_{j3} & = b_j \end{array} \right. ,$$

където

$$\left(\begin{array}{c} a_j \\ b_j \end{array}\right) \quad \text{е } j\text{-тият стълб на} \quad \left(\begin{array}{rr} 3 & -3 \\ -1 & 4 \end{array}\right).$$

Прибавяйки удвоеното второ уравнение към първото, привеждаме към Гаус-Жорданов вид

$$\left| \begin{array}{cccc} Y_{j1} & +5Y_{j2} & & = a_j + 2b_j \\ & 3Y_{j2} & -Y_{j3} & = b_j \end{array} \right.$$

и прочитаме решението

$$Y_{j1} = -5Y_{j2} + a_j + 2b_j, \quad Y_{j3} = 3Y_{j2} - b_j \quad \text{за произволно} \quad Y_{j2} \in \mathbb{C}.$$

С други думи, решението на матричното уравнение е

$$Y = \left(\begin{array}{ccc} -5Y_{12} + 1 & Y_{12} & 3Y_{12} + 1 \\ -5Y_{22} + 5 & Y_{22} & 3Y_{12} - 4 \end{array}\right) \quad \text{за произволни} \quad Y_{12}, Y_{22} \in \mathbb{C}.$$

Задача 7. *Да се реши матричното уравнение*

$$Y \left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Решение: Транспонираме даденото матрично уравнение и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) Y^t = \left(\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{array}\right)$$

с разширена матрица

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Изваждаме първия ред от третия. Умножаваме първия ред по (-2) и прибавяме към втория, за да сведем към

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Изваждаме втория ред от третия и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Съответното матрично уравнение гласи

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{21} \\ Y_{12} & Y_{22} \\ Y_{13} & Y_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Y_{11} - Y_{12} + 2Y_{13} & Y_{21} - Y_{22} + 2Y_{23} \\ 3Y_{12} - Y_{13} & 3Y_{22} - Y_{23} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

и няма решение, защото елементите от трети ред и втори стълб са $0 \neq 4$.

Задача 8. *Нека e_1, e_2, e_3 е базис на линейно пространство U над поле F, а f_1, f_2, f_3 е базис на линейно пространство V над F. Линейното изображение $\varphi : U \to V$ трансформира базиса e_1, e_2, e_3 на U във векторите*

$$\varphi(e_1) = f_1 + f_2 - 2f_3, \quad \varphi(e_2) = f_1 - 2f_2 + f_3, \quad \varphi(e_3) = -2f_1 + f_2 + f_3.$$

Да се намери множеството

$$\varphi^{-1}(\mathcal{O}_V) := \{u \in U \mid \varphi(u) = \mathcal{O}_V\}$$

на пра-образите на нулевия вектор $\mathcal{O}_V \in V$ и множеството

$$\varphi^{-1}(f_1 + f_2 - 2f_3) := \{u \in U \mid \varphi(u) = f_1 + f_2 - 2f_3\}$$

на пра-образите на вектора $f_1 + f_2 - 2f_3 \in V$.

Решение: Вектор $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in U$ с $x_1, x_2, x_3 \in F$ изпълнява условието

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_V = \varphi(u) = \varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + x_3\varphi(e_3) = \\ = x_1(f_1 + f_2 - 2f_3) + x_2(f_1 - 2f_2 + f_3) + x_3(-2f_1 + f_2 + f_3) = \\ = (x_1 + x_2 - 2x_3)f_1 + (x_1 - 2x_2 + x_3)f_2 + (-2x_1 + x_2 + x_3)f_3 \end{aligned}$$

тогава и само тогава, когато

$$\left| \begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0 \\ -2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \end{array} \right. ,$$

защото базисните вектори f_1, f_2, f_3 на V образуват линейно независима система. Матрицата от коефицинети на тази хомогенна система линейни уравнения е

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Изваждаме първия ред от втория. Удвояваме първия ред, прибавяме към втория и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{array} \right).$$

Втория и третия ред са пропорционални. Изпускаме третия ред, делим втория ред на 3 и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Прибавяме втория ред към първия и свеждаме към матрицата от коефициенти

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Решаваната хомогенна система линейни уравнения има решение

$$x_1 = x_3, \quad x_2 = x_3 \quad \text{за произволно } x_3 \in F.$$

Следователно

$$\varphi^{-1}(\mathcal{O}_V) = \{x_3(e_1 + e_2 + e_3) \,|\, x_3 \in F\} = l(e_1 + e_2 + e_3).$$

Условието

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 - 2f_3 = \varphi(u) = \varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + x_3\varphi(e_3) = \\ = x_1(f_1 + f_2 - 2f_3) + x_2(f_1 - 2f_2 + f_3) + x_3(-2f_1 + f_2 + f_3) = \\ = (x_1 + x_2 - 2x_3)f_1 + (x_1 - 2x_2 + x_3)f_2 + (-2x_1 + x_2 + x_3)f_3 \end{aligned}$$

за вектор $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in U$ е в сила тогава и само тогава, когато

$$\left| \begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 1 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 1 \\ -2x_1 & +x_2 & +x_3 & = -2 \end{array} \right. ,$$

защото произволен вектор на линейното пространство V има еднозначно определени координати спрямо базиса f_1, f_2, f_3. Разширената матрица на решаваната система линейни уравнения е

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Изваждаме първия ред от втория. Удвояваме първия ред, прибавяме към третия и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

Прибавяме втория ред към третия. Делим втори ред на 3. Прибавяме така получения втори ред към първия и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Изпускаме третия ред и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

с множество от решения

$$x_1 = x_3 + 1, \quad x_2 = x_3 \quad \text{за произволно} \quad x_3 \in F.$$

Оттук,

$$\varphi^{-1}(f_1 + f_2 - 2f_3) = \{x_3(e_1 + e_2 + e_3) + e_1 \,|\, x_3 \in F\} = e_1 + l(e_1 + e_2 + e_3).$$