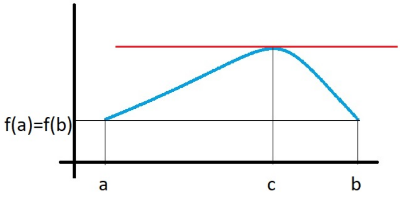
25. Теореми за крайните нараствания

Теорема на Рол

Теорема 1 (Рол)

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Ако $f(a) = f(b)$, то $\exists\, c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Геометрична интерпретация:



Върху графиката съществува точка, в която допирателната е хоризонтална.

Д-во на т-мата на Рол

Щом $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, то от т-мата на Вайерщрас $\Longrightarrow \quad f(x)$ има НГ и НМ ст.
Ако поне едната от тях се достига в т. $c \in (a, b)$, то тя непременно е точка на локален екстремум.
Т-ма на Ферма $\quad \Longrightarrow \quad f'(c) = 0$.
Ако, в противен случай, нито НГ, нито НМ ст. на $f(x)$ не се достигат в точка от (a, b), то тогава това става в т. a или т. b. Но $f(a) = f(b)$. Следователно

$$f_{\text{НГ}} = f_{\text{НМ}} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \equiv \text{const} \tag{1}$$

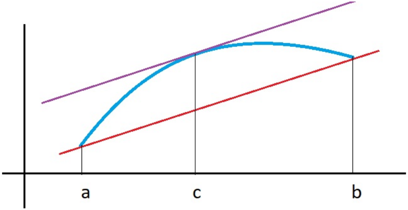
$$\Longrightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \tag{2}$$

Теорема/формула за крайните нараствания

Теорема 2 (Теорема за крайните нараствания, Лагранж)

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Тогава $\exists\, c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ (формула за крайните нараствания).

Геометрична интерпретация:



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ е ъгловият коефициент на правата през т. $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$; $f'(c)$ е ъгловият коефициент на допирателната към графиката в т. $(c, f(c))$.

Следствие (Теорема за крайните нараствания)

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Нека $x_1, x_2 \in [a, b]$ са произволни. Тогава $\exists\, c$ между x_1 и x_2 такова, че $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ (формула за крайните нараствания).

Д-во на т-мата за крайните нараствания

Ще сведем твърдението към т-мата на Рол.
Въвеждаме функцията $h(x) := f(x) - kx$, $x \in [a, b]$, като определяме константата k така, че $h(a) = h(b)$.
Имаме

$$h(a) = h(b) \text{ т.е. } f(a) - ka = f(b) - kb \quad \Longleftrightarrow \quad k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (3)$$

Освен това очевидно, че щом $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b), то и $h(x)$ е такава.
Така $h(x)$ удовлетворява предположенията на т-мата на Рол.
Прилагаме тази т-ма към $h(x)$. Така получаваме, че
$\exists\, c \in (a, b) : h'(c) = 0$.
Пресмятаме, че $h'(x) = f'(x) - k$. Следователно $f'(c) - k = 0$, т.е. $f'(c) = k$. Предвид (3) последното дава точно твърдението на т-мата.

Обобщена теорема/формула за крайните нараствания

Теорема 3 (Обобщена теорема за крайните нараствания, Коши)

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в $[a, b]$ и диференцируеми в (a, b). Нека $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$. Тогава $\exists\, c \in (a, b) : \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ (обобщена формула за крайните нараствания).

Бележка 1

При направените предположения върху $g(x)$, имаме, че $g(a) \neq g(b)$, защото в противен случай от т-мата на Рол, приложена към $g(x)$, би следвало, че $\exists\, c \in (a, b) : g'(c) = 0$, което е в противоречие с направеното предположение, че $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$.

Бележка 2

Т-ма 2 следва от Т-ма 3: прилагаме Т-ма 3 с $g(x) := x$.

Д-во на обобщената т-ма за крайните нараствания

Отново ще сведем твърдението към т-мата на Рол.
Въвеждаме функцията $h(x) := f(x) - kg(x)$, $x \in [a, b]$, като определяме константата k така, че $h(a) = h(b)$.
Имаме

$$h(a) = h(b) \text{ т.е. } f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b)$$
$$\iff k[g(b) - g(a)] = f(b) - f(a) \overset{g(b)-g(a)\neq 0}{\iff} k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (4)$$

Освен това очевидно, че щом $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в $[a, b]$ и диференцируеми в (a, b), то и $h(x)$ е такава.
Така $h(x)$ удовлетворява предположенията на т-мата на Рол.
Прилагаме тази т-ма към $h(x)$. Така получаваме, че
$\exists\, c \in (a, b) : h'(c) = 0$.
Пресмятаме, че $h'(x) = f'(x) - kg'(x)$. Следователно
$f'(c) - kg'(c) = 0$, т.е. $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = k$. Предвид (4) последното дава точно твърдението на т-мата.