29. Изпъкнали и вдлъбнати функции. Инфлексна точка. Непрекъснатост на изпъкналите функции. Критерии за изпъкналост

Дефиниция

Нека D е интервал. Казваме, че $f : D \to \mathbb{R}$ е изпъкнала (в D), ако за всеки $x_1, x_2 \in D$ и всяко $\alpha \in (0, 1)$ имаме

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2). \tag{1}$$

Нека $x_1 < x_2$. Когато α се мени от 0 до 1, точката $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ описва $[x_1, x_2]$ (от десния към левия край).
Да положим $x := \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$. Тогава

$$\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{и} \quad 1 - \alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

Сега можем да запишем (1) във вида

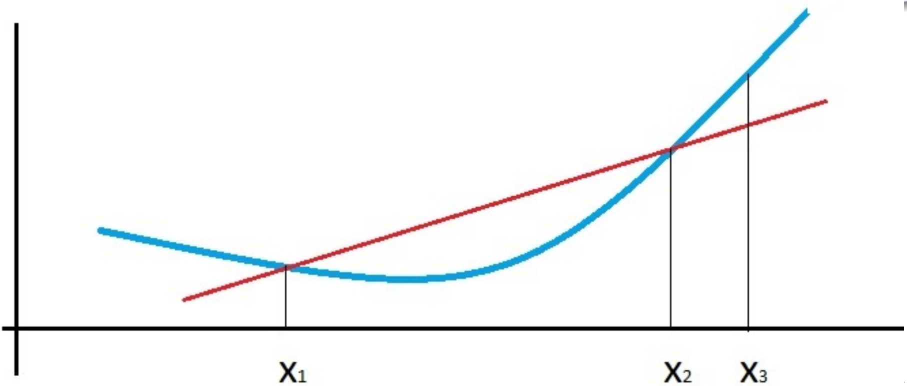
$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad x \in [x_1, x_2]. \tag{3}$$

Дясната страна представлява линейната функция, чиято графика е точно правата през точките $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$.

Геометрична интерпретация

Твърдение

(а) Функция е изпъкнала в даден интервал $\iff$ при всяка секуща на графиката ѝ, частта на графиката между пресечните точки се намира под секущата.
(б) Освен това пък останалата част графиката ѝ се намира над секущата.



Доказателство на Тв.

Д-во: (a) следва от (3).

(б) Допускаме противното, т.е. че $\exists\, x_3 \notin [x_1, x_2]$ такова, че

$$f(x_3) < \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2). \tag{4}$$

Достатъчно е да разгледаме случая $x_2 < x_3$ (аналогично $x_3 < x_1$). Щом $x_1 < x_2 < x_3$, то $x_2 = \beta x_1 + (1-\beta)x_3$ с $\beta = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \in (0,1)$, а тогава $1 - \beta = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$ (вж. (2)). От $f(x)$ е изпъкнала $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
f(x_2) &\le \beta f(x_1) + (1-\beta) f(x_3) && (5)\\
&\overset{(4)}{<} \beta f(x_1) + (1-\beta)\left[\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)\right] && (6)\\
&= \left(\beta + (1-\beta)\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1}\right) f(x_1) + (1-\beta)\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) && (7)\\
&= \underbrace{\left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1}\right)}_{=0} f(x_1) + \underbrace{\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}}_{=1} f(x_2) && (8)\\
&= f(x_2) \quad \text{— противоречие.} && (9)
\end{aligned}$$

Дефиниция

Нека D е интервал. Казваме, че $f : D \to \mathbb{R}$ е вдлъбната (в D), ако за всеки $x_1, x_2 \in D$ и всяко $\alpha \in (0,1)$ имаме

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2). \tag{10}$$

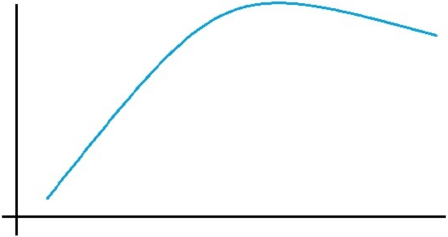
Бележка

Нека $f : D \to \mathbb{R}$ и D е интервал. Функцията $f(x)$ е вдъбната $\iff$ $-f(x)$ е изпъкнала.

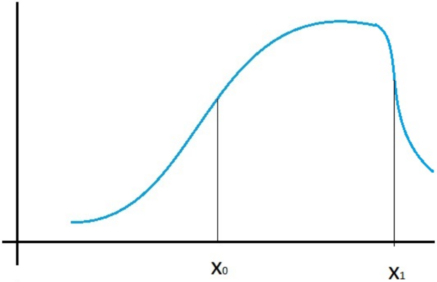
Дефиниция

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, D е интервал и $x_0 \in D$ е вътрешна. Казваме, че x_0 е инфлексна точка за $f(x)$, ако $\exists\, \delta > 0$ такова, че $f(x)$ е изпъкнала в $[x_0 - \delta, x_0]$ и вдлъбната в $[x_0, x_0 + \delta]$ или обратното.

Илюстрации



вдлъбната ф-ция

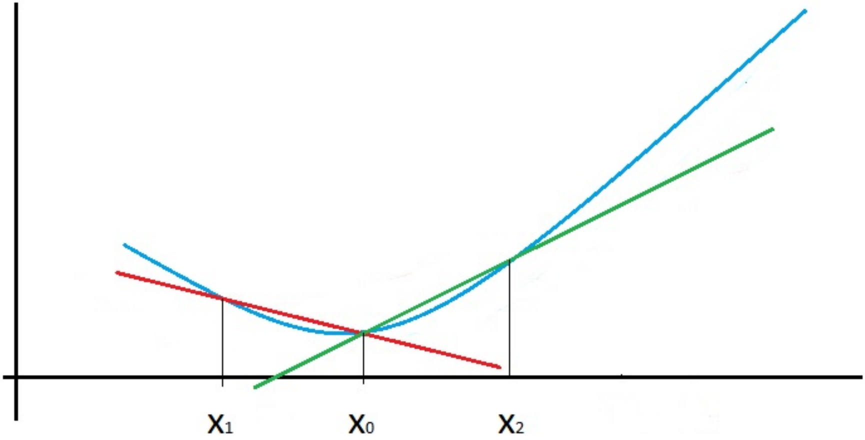


x_0, x_1 — инфлексни точки

Непрекъснатост на изпъкналите функции

Теорема 1

Всяка изпъкнала функция, дефинирана в интервал, е непрекъсната във всяка вътрешна точка на интервала.



Доказателство на Т-ма 1

Нека $f : D \to \mathbb{R}$ е изпъкнала и D е интервал. Нека x_0 е произволно фиксирана вътрешна точка на D. Ще докажем, че $f(x)$ е непрекъсната в x_0, като установим $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Фиксираме точки $x_1, x_2 \in D$ такива, че $x_1 < x_0 < x_2$. Разглеждаме секущите на графиката на $f(x)$ през точките $(x_1, f(x_1))$ и $(x_0, f(x_0))$, както и през точките $(x_0, f(x_0))$ и $(x_2, f(x_2))$. Да означим съответстващите им линейни функции с $l_1(x)$ (с червената графика) и $l_2(x)$ (със зелената графика). Благодарение на Твърдението имаме

$$l_2(x) \le f(x) \le l_1(x), \quad x \in [x_1, x_0], \tag{11}$$

$$l_1(x) \le f(x) \le l_2(x), \quad x \in [x_0, x_2]. \tag{12}$$

Понеже $\lim\limits_{x\to x_0} l_1(x) = l_1(x_0) = f(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} l_2(x) = l_2(x_0) = f(x_0)$, то

$$(11) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0) \tag{13}$$

$$(12) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0). \tag{14}$$

Оттук следва $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

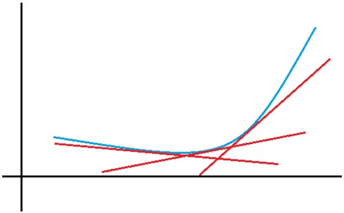
Критерии за изпъкналост/вдлъбнатост и за инфлексия

Теорема 2 (НДУ за изпъкналост)

Диференцируема функция е изпъкнала върху интервал $\Longleftrightarrow$ производната ѝ е монотонно растяща функция върху този интервал.

Теорема 3 (НДУ за изпъкналост)

Диференцируема функция е изпъкнала върху интервал $\Longleftrightarrow$ графиката ѝ се намира над всяка своя допирателна.



Теорема 4 (НДУ за вдлъбнатост)

Диференцируема функция е вдлъбната върху интервал $\Longleftrightarrow$ производната ѝ е монотонно намаляваща функция върху този интервал.

От Т-ми 2 и 4 и от критериите за лок. екстр. и за монотонност следват още критериите.

Теорема 5 (НУ за инфлексна точка)

Ако т. x_0 е инфлексна за функцията $f(x)$ и тя притежава втора производна в тази точка, то $f''(x_0) = 0$.

Теорема 6 (НДУ за изпъкналост/вдлъбнатост)

Нека $f(x)$ притежава втора производна в интервала D.
(а) $f(x)$ е изпъкнала $\smile$ в $D \iff f''(x) \geq 0$ в D.
(б) $f(x)$ е вдлъбната $\frown$ в $D \iff f''(x) \leq 0$ в D.

Теорема 7(ДУ за инфлексна точка)

Ако функция притежава втора производна в околност на т. x_0 и тя си сменя знака в тази точка, то тя е инфлексна за функцията.

Идея на д-вото на Т-ми 2 и 3 (не се включва в материала за изпита)

Преобразуваме н-вото

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad x \in [x_1, x_2], \tag{15}$$

дефиниращо изпъкналостта на $f(x)$, в следния еквивалентен вид

$$\underbrace{\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)}_{=1} f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \tag{16}$$

$$[(x_2 - x) + (x - x_1)]f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2) \tag{17}$$

$$(x_2 - x)[f(x) - f(x_1)] \leq (x - x_1)[f(x_2) - f(x)] \tag{18}$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad x \in (x_1, x_2). \tag{19}$$

Използва се и ф-лата за крайните нараствания.