I. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в измеримото и затворено равнинно множество R, а C е константа, то

$$\iint_R Cf(x, y)\,dx\,dy = C\iint_R f(x, y)\,dx\,dy. \tag{I}$$

II. Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са непрекъснати в измеримото и затворено множество R, то

$$\iint_R [f(x, y)+g(x, y)]\,dx\,dy = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy + \iint_R g(x, y)\,dx\,dy. \tag{II}$$

III. Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са непрекъснати в измеримото и затворено равнинно множество R и ако те удовлетворяват за всички точки от R неравенството

$$f(x, y) \leq g(x, y),$$

то

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy \leq \iint_R g(x, y)\,dx\,dy. \tag{III}$$

IV. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в измеримото и затворено равнинно множество R, то

$$\left|\iint_R f(x, y)\,dx\,dy\right| \leq \iint_R |f(x, y)|\,dx\,dy. \tag{IV}$$

V. Ако R_1 и R_2 са две измерими и затворени равнинни множества, които нямат общи точки или имат само контурни общи точки, и ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната както в R_1, така и в R_2, то

$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{R_2} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{V}$$

Разбира се, последното равенство посредством математическа индукция се обобщава за случая на произволен краен брой множества $R_1, R_2, \ldots, R_n$, образуващи правилно разделяне на измеримото и затворено множество $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_n$. В този случай имаме

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{R_i} f(x, y)\,dx\,dy.$$

VI. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в измеримото и затворено равнинно множество R и ако за всички точки от R тя удовлетворява неравенствата

$$m \leq f(x, y) \leq M,$$

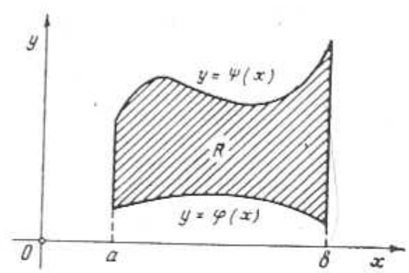
то

$$m\,\mu(R) \leq \iint_R f(x, y)\,dx\,dy \leq M\,\mu(R), \tag{VI}$$

Нека подчертаем, че изложените току-що свойства на двойните интеграли в същност са валидни не само за непрекъснати, но изобщо за интегруеми функции. Впрочем доказателството на свойство VI даже в този най-общ случай се извършва съвсем просто с разсъждения, подобни на онези, посредством които установихме в края на § 51 аналогичните неравенства за простия интеграл.

§ 93. Пресмятане на двойните интеграли

Да се пресметне стойността на даден двоен интеграл, като се изхожда от самата дефиниция на това понятие, в общия случай е практически безнадеждна за решаване задача поради нейната сложност. Ето защо е извънредно важно да се запознаем с други методи, които биха ни довели по-просто до желания резултат. За съжаление ние не познаваме такива прости методи дори в случая на непрекъсната функция $f(x, y)$, ако не сме направили допълнителни предположения за вида на интеграционната област R. В този параграф ще видим обаче, че такъв метод съществува за една специална категория интеграционни области — все пак достатъчно широка за практическите нужди на математиката и нейните приложения. Чрез този метод пресмятането на даден двоен интеграл се свежда към последователното пресмятане на два прости интеграла.



Черт. 72

Нека са дадени две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, дефинирани и непрекъснати в един краен и затворен интервал $[a, b]$, които удовлетворяват в този интервал неравенството

$$\varphi(x) \leq \psi(x).$$

От това неравенство следва, че графиката на функцията $\psi(x)$ ще лежи изцяло над графиката на функцията $\varphi(x)$ (макар някъде тези две графики и да могат да се допират). Да разгледаме областта R, която се огражда отдолу от графиката на функцията $\varphi(x)$, отгоре от графиката на функцията $\psi(x)$, а отстрани — от правите с уравнения $x=a$ и $x=b$ (черт. 72). Тя се състои от точките (x, y), чиито координати удовлетворяват неравенствата

$$a \leqq x \leqq b, \qquad \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x). \tag{1}$$

Област от такъв вид ще наричаме **криволинеен трапец**.

Поради непрекъснатостта на функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ криволинейният трапец R ще представлява, както знаем, измеримо множество в равнината. Лесно се вижда също, че то е и затворено. Нека отбележим освен това, че мярката $\mu(R)$ на криволинейния трапец R, определен чрез неравенствата (1), се дава с равенството

$$\mu(R)=\int_a^b [\psi(x)-\varphi(x)]\,dx. \tag{2}$$

Това се вижда веднага въз основа на равенството (4), дадено в края на § 86 и на адитивността на пеано-жордановата мярка.*

Именно в случая, когато интеграционната област е криволинеен трапец, ще се запознаем с метод за пресмятане на двойните интеграли. Предварително обаче ще установим следната

Помощна теорема. *Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в криволинейния трапец R, зададен с неравенствата (1), то интегралът*

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \tag{3}$$

съществува за всяко фиксирано x от интервала $[a, b]$ и представлява непрекъсната функция на x в този интервал.

Доказателство. При всяко фиксирано x от интервала $[a, b]$ функцията $f(x, y)$, разглеждана като функция само на y, е непрекъсната в интервала $[\varphi(x), \psi(x)]$. Ето защо тя ще бъде интегруема в този интервал и ще можем да образуваме интеграла (3). (Тази бележка, казано по-точно, се отнася за случая, когато $\varphi(x)<\psi(x)$, но ако $\varphi(x)=\psi(x)$, интегралът (3) очевидно също съществува и е равен на нула.)

Нека покажем сега, че функцията

$$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \tag{4}$$

е непрекъсната в интервала $[a, b]$. За целта ще отбележим най-напред, че функциите $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, y)$ са ограничени. Ето защо можем да намерим такава константа K, че да имаме $|\varphi(x)| \leqq K$ и $|\psi(x)| \leqq K$ за $x\in[a, b]$ и $|f(x, y)| \leqq K$ за $(x, y)\in R$.

Да вземем една точка x_0 от интервала $[a, b]$ и едно произволно положително число ε. Поради непрекъснатостта на функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в точката x_0 и равномерната непрекъснатост на функцията $f(x, y)$ в R ще съществува такова $\delta>0$, че от неравенството $|x-x_0|<\delta$ да следват неравенствата

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{4K}, \quad |\psi(x)-\psi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{4K} \tag{5}$$

и

$$|f(x, y)-f(x_0, y)|<\frac{\varepsilon}{4K} \tag{6}$$

(стига точката x да принадлежи на $[a, b]$, а точките (x_0, y) и (x, y) — на R).

Нека сега x е точка от интервала $[a, b]$, за която имаме $|x-x_0|<\delta$. Ще разгледаме два случая. Първо ще се спрем на случая, когато $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$. Тогава $F(x_0)=0$, поради което ще имаме

$$|F(x)-F(x_0)|=|F(x)|=\left|\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\right| \leqq K(\psi(x)-\varphi(x))$$

$$=K[(\psi(x)-\psi(x_0))+(\varphi(x_0)-\varphi(x))]<K\,.\,2\frac{\varepsilon}{4K}<\varepsilon.$$

С това непрекъснатостта на $F(x)$ в точката x_0 е установена в разглеждания случай.

Остава да разгледаме случая, когато $\varphi(x_0)<\psi(x_0)$. Сега можем да считаме, че числото δ сме взели по такъв начин, че от неравенството $|x-x_0|<\delta$ да следват освен неравенствата (5) и (6) още и неравенствата

$$\varphi(x)<\psi(x_0) \quad \text{и} \quad \psi(x)>\varphi(x_0). \tag{7}$$

Налага се по-нататък да се разгледат поотделно следните четири възможни подслучая:

1) $\varphi(x) \geqq \varphi(x_0)$, $\quad \psi(x) \geqq \psi(x_0)$;

2) $\varphi(x) \geqq \varphi(x_0)$, $\quad \psi(x)<\psi(x_0)$;

---

* По-точно казано, равенството (2) се получава веднага от равенството (4) в § 86, в случая, когато функцията $\varphi(x)$ (а следователно и $\psi(x)$) е неотрицателна. Когато условието за неотрицателност не е изпълнено, ще вземем такова число m, че да имаме $\varphi(x) \geqq m$ за $x\in[a, b]$ и ще разгледаме криволинейния трапец R_1, определен от неравенствата

$$a \leqq x \leqq b, \quad \varphi(x)-m \leqq y \leqq \psi(x)-m.$$

Тъй като множеството R_1 е получено чрез едно вертикално преместване на множеството R, тези две множества имат еднакви мерки. А мярката на R_1 поради неотрицателността на функциите $\varphi(x)-m$ и $\psi(x)-m$ ще се дава с интеграла

$$\int_a^b [(\psi(x)-m)-(\varphi(x)-m)]\,dx=\int_a^b [\psi(x)-\varphi(x)]\,dx.$$

3) $\varphi(x)<\varphi(x_0)$, $\psi(x)\geqq\psi(x_0)$;

4) $\varphi(x)<\varphi(x_0)$. $\psi(x)<\psi(x_0)$.

Ние ще разгледаме първия от тях. Останалите се третират по подобен начин. И така ще приемем, че са изпълнени неравенствата

$$\varphi(x)\geqq\varphi(x_0) \quad \text{и} \quad \psi(x)\geqq\psi(x_0). \tag{8}$$

Като вземем пред вид, че поради неравенствата (7) и (8) всички написани по-нататък интеграли имат смисъл, ще имаме

$$|F(x)-F(x_0)|=\left|\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)\,dy-\int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0,\ y)\,dy\right|$$

$$=\left|\int_{\varphi(x)}^{\psi(x_0)} f(x,\ y)\,dy+\int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x,\ y)\,dy-\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(x_0,\ y)\,dy-\int_{\varphi(x)}^{\psi(x_0)} f(x_0,\ y)\,dy\right|$$

$$\leqq\int_{\varphi(x)}^{\psi(x_0)} |f(x,\ y)-f(x_0,\ y)|\,dy+\int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} |f(x,\ y)|\,dy+\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} |f(x_0,\ y)|\,dy$$

$$\leqq\frac{\varepsilon}{4K}(\psi(x_0)-\varphi(x))+K|\psi(x)-\psi(x_0)|+K|\varphi(x)-\varphi(x_0)|$$

$$<\frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K+K\cdot\frac{\varepsilon}{4K}+K\cdot\frac{\varepsilon}{4K}=\varepsilon.$$

По този начин се убеждаваме в непрекъснатостта на функцията $F(x)$ в произволно взетата точка x_0 от интервала $[a,\ b]$. С това теоремата е доказана.

Сега вече да преминем към главната теорема на настоящия параграф, посочваща начин за пресмятане на двойни интеграли в криволинейни трапеци.

Теорема. Нека $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *са две функции, дефинирани и непрекъснати в интервала* $[a,\ b]$ *и удовлетворяващи в този интервал неравенството* $\varphi(x)\leqq\psi(x)$. *Ако функцията* $f(x,\ y)$ *е непрекъсната в криволинейния трапец* R, *зададен посредством неравенствата*

$$a\leqq x\leqq b, \qquad \varphi(x)\leqq y\leqq\psi(x), \tag{1}$$

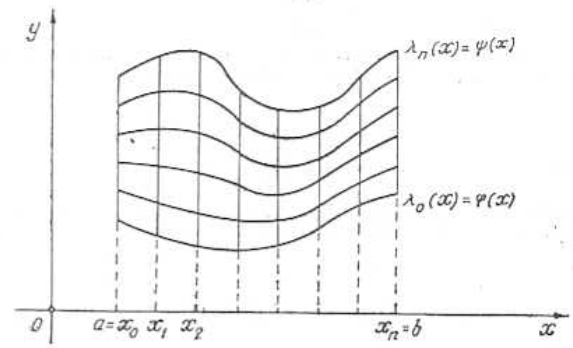
то

$$\iint_R f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_a^b\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)\,dy\right]dx. \tag{9}$$

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. Тъй като функцията $f(x,\ y)$ е непрекъсната в ограниченото и затворено множество R, ще можем да намерим съгласно теоремата за равномерната непрекъснатост такова положително число δ, че във всяко подмно-

жество на R с диаметър, по-малък от δ, осцилацията на $f(x,\ y)$ да бъде по-малка от $\frac{\varepsilon}{\mu(R)}$. След това нека вземем едно естествено число n. Да разгледаме функциите

$$\lambda_k(x)=\varphi(x)+\frac{k}{n}[\psi(x)-\varphi(x)],\quad k=0,\ 1,\ldots,\ n.$$



Черт. 73

Очевидно $\lambda_0(x)=\varphi(x)$ и $\lambda_n(x)=\psi(x)$. Освен това поради неравенството $\varphi(x)\leqq\psi(x)$ е ясно, че за всяко x от интервала $[a,\ b]$ ще имаме

$$\lambda_{k-1}(x)\leqq\lambda_k(x),\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

което показва, че при всяко k графиката на функцията $\lambda_k(x)$ ще се намира над графиката на $\lambda_{k-1}(x)$. Да разделим по-нататък интервала $[a,\ b]$ на n равни части посредством точките

$$a=x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n=b$$

и да прекараме през тези точки вертикални прави. Тези прави заедно с графиките на функциите $\lambda_k(x)$ ще разделят (при това правилно) областта R на n^2 подобласти (черт. 73), всяка от които представлява един по-малък криволинеен трапец. Ще означим с R_{ik} криволинейния трапец, определен чрез неравенствата

$$x_{i-1}\leqq x\leqq x_i,\quad \lambda_{k-1}(x)\leqq y\leqq\lambda_k(x).$$

Ако вземем числото n достатъчно голямо, можем да направим диаметрите на всички R_{ik} по-малки* от избраното по-горе число δ. Тогава, означавайки с M_{ik} и m_{ik} точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството R_{ik}, ще имаме

$$M_{ik}-m_{ik}<\frac{\varepsilon}{\mu(R)}.$$

Да разгледаме сега функцията

$$F(x)=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy.$$

Както видяхме в помощната теорема, тя е непрекъсната, а следователно и интегруема в интервала $[a, b]$. Ще излезем от равенството

$$\int\limits_a^b F(x)\, dx=\sum_{i=1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)\, dx.$$

* По-подробно в това можем да се убедим по следния начин. Нека ρ е такова положително число, че от неравенството $|x'-x''|<\rho$ да следват неравенствата

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{\delta}{8} \text{ и } |\psi(x')-\psi(x'')|<\frac{\delta}{8}.$$

Да означим освен това с K някаква константа, такава, че да имаме $|\varphi(x)|\leqq K$ и $|\psi(x)|\leqq \leqq K$ за $x\in[a, b]$. Ще вземем естественото число n толкова голямо, че да са изпълнени неравенствата

$$\frac{b-a}{n}<\frac{\delta}{2}, \qquad \frac{b-a}{n}<\rho, \qquad \frac{2K}{n}<\frac{\delta}{8}.$$

Ако сега (x', y') и (x'', y'') са две точки, принадлежащи на криволинейния трапец R_{ik}, то

$$|y'-y''| \leqq |y'-\lambda_k(x')|+|\lambda_k(x')-\lambda_k(x'')|+|\lambda_k(x'')-y''|$$
$$\leqq \lambda_k(x')-\lambda_{k-1}(x')+|\lambda_k(x')-\lambda_k(x'')|+\lambda_k(x'')-\lambda_{k-1}(x'').$$

При това

$$\lambda_k(x')-\lambda_{k-1}(x')=\frac{1}{n}[\psi(x')-\varphi(x')]\leqq\frac{2K}{n}<\frac{\delta}{8}.$$

Аналогично

$$\lambda_k(x'')-\lambda_{k-1}(x'')<\frac{\delta}{8}.$$

От друга страна, $|x'-x''|<\frac{b-a}{n}<\rho$, поради което

$$|\lambda_k(x')-\lambda_k(x'')|=\left|\left(1-\frac{k}{n}\right)(\varphi(x')-\varphi(x''))+\frac{k}{n}(\psi(x')-\psi(x''))\right|$$
$$\leqq|\varphi(x')-\varphi(x'')|+|\psi(x')-\psi(x'')|<\frac{\delta}{8}+\frac{\delta}{8}=\frac{\delta}{4}.$$

От друга страна, имаме

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} f(x, y)\, dy,$$

откъдето

$$\int\limits_a^b F(x)\, dx=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} f(x, y)\, dy\right] dx.$$

Като вземем пред вид, че в множеството R_{ik} е изпълнено неравенството $f(x, y)\leqq M_{ik}$, ще получим

$$\int\limits_a^b F(x)\, dx=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} f(x, y)\, dy\right] dx$$
$$\leqq\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\sum_{k=1}^{n}M_{ik}(\lambda_k(x)-\lambda_{k-1}(x))\right] dx$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{ik}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}[\lambda_k(x)-\lambda_{k-1}(x)]\, dx.$$

Съгласно формулата (2), приложена за криволинейния трапец R_{ik}, имаме

$$\mu(R_{ik})=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}[\lambda_k(x)-\lambda_{k-1}(x)]\, dx.$$

Следователно

$$\int\limits_a^b F(x)\, dx\leqq\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{ik}\,\mu(R_{ik})=S,$$

Ето защо ще имаме

$$|y'-y''|<\frac{\delta}{8}+\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{8}=\frac{\delta}{2}.$$

Като вземем пред вид, че $|x'-x''|<\frac{b-a}{n}<\frac{\delta}{2}$, най-сетне за разстоянието между точките (x', y') и (x'', y'') ще получим

$$\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}<\sqrt{\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^2}{4}}=\frac{\delta}{\sqrt{2}}.$$

Оттук заключаваме, че диаметърът на множеството R_{ik} е по-малък от δ.

където S е голямата сума на Дарбу, отговаряща на разглежданото разделяне на областта R на подобласти. Аналогично се получава

$$\int_a^b F(x)\,dx \geq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ik}\,\mu(R_{ik}) = s,$$

където s е малката сума на Дарбу за същото разделяне. И така изпълнени са неравенствата

$$s \leq \int_a^b F(x)\,dx \leq S.$$

Но в сила са също тъй и неравенствата

$$s \leq \iint_R f(x,\ y)\,dx\,dy \leq S.$$

Следователно ще имаме

$$\left| \iint_R f(x,\ y)\,dx\,dy - \int_a^b F(x)\,dx \right| \leq S - s$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (M_{ik} - m_{ik})\,\mu(R_{ik})$$

$$< \frac{\varepsilon}{\mu(R)} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \mu(R_{ik}) = \frac{\varepsilon}{\mu(R)} \cdot \mu(R) = \varepsilon.$$

Поради произволния избор на числото ε заключаваме, че е в сила равенството

$$\iint_R f(x,\ y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx,$$

което не е нищо друго освен равенството (9).

Пример 1. Да пресметнем двойния интеграл

$$\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy,$$

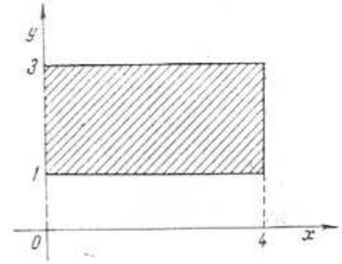
където R е правоъгълникът (черт. 74), даден с неравенствата

$$0 \leq x \leq 4, \qquad 1 \leq y \leq 3.$$

Съгласно формулата (9) ще имаме

$$\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^4 \left[\int_1^3 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 x \left[\int_1^3 \frac{dy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x \left| 2\sqrt{x^2+y^2} \right|_1^3 dx$$



Черт. 74

$$= \int_0^4 x\left(\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{x^2+9}\,dx^2 - \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{x^2+1}\,dx^2$$

$$= \frac{1}{3} \left| (x^2+9)^{\frac{3}{2}} \right|_0^4 - \frac{1}{3} \left| (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \right|_0^4 = \frac{1}{3}\left(25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{3}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{3}(125 - 27) - \frac{1}{3}(17\sqrt{17} - 1) = 33 - \frac{17}{3}\sqrt{17}.$$

Пример 2. Да пресметнем двойния интеграл

$$\iint_R xy^2\,dx\,dy,$$

където R е триъгълникът (черт. 75), образуван от пресичането на правите с уравнения

$$y = 0, \quad x = 1, \quad y = x.$$

Тук областта R е криволинеен трапец, който се определя от неравенствата

$$0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq x.$$

Тогава формулата (9) ще ни даде