8. Несобствени интеграли. Сходимост. Абсолютна и условна сходимост. Основни свойства на несобствените интеграли: линейност, монотонност и адитивност

Интеграл от неограничена функция

Дефиниция

Нека $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ е неограничена върху $[a, b)$ и интегруема върху всеки интервал $[a, p]$, $a < p < b$. Ако границата

$$\lim_{p \to b-0} \int_a^p f(x)\,dx \tag{1}$$

съществува, ще я означаваме с

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

и ще я наричаме несобствен интеграл на $f(x)$ върху $[a, b)$. Още казваме, че $f(x)$ е интегруема в несобствен смисъл, както и че несобственият интеграл (2) е сходящ. Ако границата (1) не съществува, казваме, че несобственият интеграл (2) е разходящ.

Аналогично за $f(x)$ — неограничена върху $(a, b]$.

Примери

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$. Разглеждаме за $0 < p < 1$

$$\int_p^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_p^1 = \ln 1 - \ln p = -\ln p \underset{p\to 0+0}{\longrightarrow} +\infty \tag{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} \quad \text{е разходящ.} \tag{4}$$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Разглеждаме за $0 < p < 1$

$$\int_p^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_p^1 = 2(1-\sqrt{p}) \underset{p\to 0+0}{\longrightarrow} 2 \tag{5}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \quad \text{сходящ.} \tag{6}$$

Примери

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ НЕ е несобствен интеграл.

Подинтегралната функция е ограничена. Дори можем да считаме, че в т. 0 е дефинирана по непрекъснатост със своята граница в тази точка:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{7}$$

Интеграл от функция с неограничена дефиниционна област

Дефиниция

Нека $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ е интегруема върху всеки интервал $[a, p]$, $p > a$. Ако границата

$$\lim_{p \to +\infty} \int_a^p f(x)\, dx \tag{8}$$

съществува, ще я означаваме с

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \tag{9}$$

и ще я наричаме несобствен интеграл на $f(x)$ върху $[a, +\infty)$. Още казваме, че $f(x)$ е интегруема в несобствен смисъл, както и че несобственият интеграл (9) е сходящ. Ако границата (8) не съществува, казваме, че несобственият интеграл (9) е разходящ.

Аналогично за $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$.

Примери

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$. Разглеждаме за $p > 1$

$$\int_1^p \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^p = \ln p - \ln 1 = \ln p \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty \tag{10}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \quad \text{е разходящ.} \tag{11}$$

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Разглеждаме за $p > 1$

$$\int_1^p \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^p = -\left(\frac{1}{p} - 1\right) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 1 \tag{12}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 \quad \text{е сходящ.} \tag{13}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$ — несобствени интеграли от I вид/род

$$\int_a^{b} f(x)\,dx$$ — несобствени интеграли от II вид/род,

където $f(x)$ е неограничена върху $[a, b)$ или $(a, b]$

Определените интеграли от интегруеми функции върху краен затворен интервал ще наричаме за определеност собствени.

Абсолютна и условна сходимост

Дефиниция

Несобствен интеграл се нарича абсолютно сходящ, ако е сходящ несобственият интеграл от абсолютната стойност на функцията. Несобствен интеграл се нарича условно сходящ, ако е сходящ, но не е абсолютно сходящ.

Примери:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \text{ — усл. сх.,} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx \text{ — абс. сх..} \tag{14}$$

Теорема 1

Всеки абсолютно сходящ несобствен интеграл е сходящ.

Основни свойства: линейност

Всички те следват непосредствено от дефиницията на несобствените интеграли и съответните свойства на собствените.

Теорема 2

Нека $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ са непрекъснати и $k \in \mathbb{R}$. Тогава:

(а) $$\int_a^{+\infty} [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx + \int_a^{+\infty} g(x)\, dx;$$

(б) $$\int_a^{+\infty} k\, f(x)\, dx = k \int_a^{+\infty} f(x)\, dx;$$

стига интегралите вдясно да са сходящи, сходящи са и тези вляво.

Доказателство

(а) За всяко $p > a$ имаме, благодарение на линейността на определения интеграл,

$$\int_a^p [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_a^p g(x)\,dx. \tag{15}$$

Понеже несобствените интеграли $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ са сходящи, дясната страна на (15) има граница при $p \to \infty$ и тя е равна на сумата от границите на двете събираеми. Следователно съществува границата

$$\int_a^{+\infty} [f(x) + g(x)]\,dx \overset{\text{по деф.}}{=} \lim_{p\to+\infty} \int_a^p [f(x) + g(x)]\,dx \tag{16}$$

$$= \lim_{p\to+\infty} \int_a^p f(x)\,dx + \lim_{p\to+\infty} \int_a^p g(x)\,dx \tag{17}$$

$$= \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} g(x)\,dx. \tag{18}$$

Това показва, че несобственият интеграл $\int_a^{+\infty}[f(x) + g(x)]\,dx$ е сходящ и е в сила формулата в (а). (б) Аналогично.

Основни свойства: монотонност

Теорема 3

Нека $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ са непрекъснати. Тогава:

(а) Ако $f(x) \geq 0$, $x \geq a$, то $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \geq 0$;

(б) Ако $f(x) \leq g(x)$, $x \geq a$, то $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$;

стига интегралите да са сходящи.

Основни свойства: адитивност

Теорема 4

Нека $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и $c > a$. Тогава:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx,$$

като, ако единият от несобствените интеграли е сходящ, то е сходящ и другият.

Аналогични свойства притежават и несобствените интеграли върху краен интервал.