Решения на примерните задачи за ядро и образ на линейно изображение и диагонализация на матрицата на линеен оператор

Задача 1. *Спрямо базис e_1, e_2, e_3, e_4 на линейно пространство V над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа, линейният оператор $\varphi : V \to V$ действа по правилото*

$$\begin{aligned} \varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) = \\ = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)e_1 + (3x_1 + x_2 - x_3 + x_4)e_2 + \\ +(2x_1 + x_2 - x_3 - x_4)e_3 + (x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4)e_4 \end{aligned}$$

за произволни $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q}$.

(i) Да се докаже, че съществува еднозначно определен линеен оператор $\psi : V \to V$, изпълняващ равенството $\psi\varphi + \varphi^2 = \mathrm{Id}_V$ за тъждествения линеен оператор $\mathrm{Id}_V : V \to V$, $\mathrm{Id}_V(v) = v$, $\forall v \in V$ и да се намери матрицата $\mathcal{A}_\psi$ на ψ спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

(ii) Да се докаже, че линейните оператори $\varphi : V \to V$ и $\psi + \varphi : V \to V$ са обратими.

Решение: (i) За да намерим матрицата $\mathcal{A}_\varphi \in M_{4\times4}(\mathbb{Q})$ на оператора φ спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, полагаме $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ и получаваме $\varphi(e_1) = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4$. Полагането $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, $x_2 = 1$ дава $\varphi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Избираме $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = 1$ и пресмятаме $\varphi(e_3) = 2e_1 - e_2 - e_3 - e_4$. За $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 1$ намираме $\varphi(e_4) = -e_1 + e_2 - e_3 - 2e_4$. Матрицата $\mathcal{A}_\varphi$ на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3, e_4 е образувана по стълбове от координатите на $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$, $\varphi(e_4)$ спрямо базиса e_1, e_2, e_3, e_4. С други думи,

$$\mathcal{A}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Линейният оператор $\varphi : V \to V$ е обратим тогава и само тогава, когато матрицата $\mathcal{A}_\varphi \in M_{4\times4}(\mathbb{Q})$ на φ спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ е обратима. За да установим обратимостта на $\mathcal{A}_\varphi$ и да намерим $\mathcal{A}_\varphi^{-1} \in M_{4\times4}(\mathbb{Q})$, извършваме елементарни преобразувания по редове към

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

докато приведем лявата половина към единичната матрица $E_4 \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$. Тогава получената вдясно матрица е $\mathcal{A}_\varphi^{-1}$. За целта, умножаваме първия ред по (-3) и прибавяме към втория ред. Умножаваме първия ред по (-2) и прибавяме към третия ред. Изваждаме първия ред от четвъртия и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Изваждаме третия ред от втория. Прибавяме така получения втори ред към първия. Умножаваме втория ред по (-3) и прибавяме към третия. Умножаваме втория ред по (-2), прибавяме към четвъртия и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Изваждаме третия ред от четвъртия. Умножаваме тка получения четвърти ред по 8 и прибавяме към третия. Умножаваме четвъртия ред по (-3) и прибавяме към втория. Умножаваме четвъртия ред по (-2), прибавяме към първия и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Прибавянето на удвоения трети ред към втория дава

$$\left(\begin{array}{rrrr|lrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 & -19 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Вляво получихме единичната матрица $E_4 \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$, така че получената вдясно матрица е

$$\mathcal{A}_\varphi^{-1} = \left(\begin{array}{lrrr} 0 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 8 & -19 & 13 \\ 1 & 5 & -12 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

С това доказахме, че матрицата $\mathcal{A}_\varphi$ е обратима, така че и операторът φ е обратим. В резултат,

$$(\psi + \varphi)\varphi = \psi\varphi + \varphi^2 = \mathrm{Id}_V = \varphi^{-1}\varphi$$

и

$$(\psi + \varphi - \varphi^{-1})\varphi = \mathbb{O}_V \tag{1}$$

а нулевия линеен оператор $\mathbb{O}_V : V \to V$ с $\mathbb{O}_V(v) = \mathcal{O}_V \in V$ за всички $v \in V$. Ако преди прилагане на двете страни на равенството (1) приложим линейния оператор $\varphi^{-1} : V \to V$, ще получим

$$\begin{aligned} \psi + \varphi - \varphi^{-1} &= (\psi + \varphi - \varphi^{-1})\mathrm{Id}_V = (\psi + \varphi - \varphi^{-1})(\varphi\varphi^{-1}) = \\ &= [(\psi + \varphi - \varphi^{-1})\varphi]\varphi^{-1} = \mathbb{O}_V\varphi^{-1} = \mathbb{O}_V. \end{aligned} \tag{2}$$

Следователно $\psi = \varphi^{-1} - \varphi$ е еднозначно определен и матрицата $\mathcal{A}_\psi \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$ на $\psi : V \to V$ спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ е

$$\mathcal{A}_\psi = \mathcal{A}_{\varphi^{-1}-\varphi} = \mathcal{A}_{\varphi^{-1}} - \mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}_\varphi^{-1} - \mathcal{A}_\varphi =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 8 & -19 & 13 \\ 1 & 5 & -12 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 7 & -18 & 12 \\ -1 & 4 & -11 & 9 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Вече доказахме, че операторът φ е обратим. От $\mathrm{Id}_V = \psi\varphi + \varphi^2 = (\psi + \varphi)\varphi$ следва равенството

$$E_4 = \mathcal{A}_{\mathrm{Id}_V} = \mathcal{A}_{(\psi+\varphi)\varphi} = \mathcal{A}_{\psi+\varphi}\mathcal{A}_\varphi$$

на съответните матрици спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Следователно матрицата $\mathcal{A}_{\psi+\varphi} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$ е обратима и обратната и е

$$\mathcal{A}_{\psi+\varphi}^{-1} = \mathcal{A}_\varphi.$$

Оттук, операторът $\psi + \varphi : V \to V$ е обратим и матрицата на $(\psi + \varphi)^{-1} : V \to V$ спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ е

$$\mathcal{A}_{(\psi+\varphi)^{-1}} = \mathcal{A}_{\psi+\varphi}^{-1} = \mathcal{A}_\varphi.$$

Това доказва, че $(\psi + \varphi)^{-1} = \varphi$.

Задача 2. *Спрямо базис e_1, e_2, e_3, e_4 на линейно пространство U над поле F, линейният оператор $\varphi : U \to U$ действа по правилото*

$$\begin{aligned} \varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) = \\ = (2x_1 + 3x_2 + x_3 - 6x_4)e_1 + (x_1 + 2x_2 - 3x_4)e_2 + \\ +(-x_1 - 2x_3 + 3x_4)e_3 + (3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 9x_4)e_4 \end{aligned}$$

за произволни $x_1, x_2, x_3, x_4 \in F$. Да се намерят базиси на сечението $\ker\varphi \cap \mathrm{im}\varphi$ и на сумата $\ker\varphi + \mathrm{im}(\varphi)$ на ядрото $\ker\varphi$ и на образа $\mathrm{im}\varphi$ на φ.

Решение: За да намерим матрицата на $\varphi : U \to U$ спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, полагаме $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ и получаваме $\varphi(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3 + 3e_4$. За $x_2 = 1$, $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ намираме, че $\varphi(e_2) = 3e_1 + 2e_2 + 4e_4$. Полагането $x_3 = 1$, $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ дава $\varphi(e_3) = e_1 - 2e_3 + 2e_4$, а за $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 1$ получаваме

$\varphi(e_4) = -6e_1 - 3e_2 + 3e_3 - 9e_4$. В резултат, матрицата на φ спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ е

$$\mathcal{A}_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Координатните стълбове $x \in M_{4\times 1}(F)$ на векторите от ядрото

$$\ker\varphi = \{u = ex \in U \mid \varphi(u) = \varphi(e)x = e\mathcal{A}_\varphi x = \mathcal{O}_U\}$$

са решенията на хомогенната система линейни уравнения $\mathcal{A}_\varphi x = \mathbb{O}_{4\times 1}$. Разменяме първия и втория ред на $\mathcal{A}_\varphi$. Умножаваме така получения първи ред по (-2) и прибавяме към втория ред. Прибавяме първия ред към третия. Умножаваме първия ред по (-3), прибавяме към четвъртия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Удвояваме втория ред и го прибавяме към първи и трети ред. Умножаваме втория ред по 4, прибавяме към четвърти ред и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Изпускаме трети и четвърти ред и представяме ядрото $\ker(\varphi)$ като пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & & +2x_3 & -3x_4 & = 0 \\ & -x_2 & +x_3 & & = 0 \end{array} \right. . \tag{3}$$

Общото решение на тази система е

$$x_1 = -2x_3 + 3x_4, \quad x_2 = x_3, \quad \forall x_3, x_4 \in F$$

на хомогенната система линейни уравнения $\mathcal{A}_\varphi x = \mathbb{O}_{4\times 1}$. Базис на пространството от решения образуват векторите

$$a_1 = (-2, 1, 1, 0)^t \quad \text{и} \quad a_2 = (3, 0, 0, 1)^t.$$

Следователно, ядрото $\ker(\varphi)$ е с размерност $d(\varphi) = \dim\ker(\varphi) = 2$. По Теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение на крайномерно пространство, рангът на φ е

$$\mathrm{rk}(\varphi) := \dim\mathrm{im}(\varphi) = \dim(U) - \dim\ker(\varphi) = 4 - 2 = 2.$$

Образът $\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$ се поражда от векторите $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$, $\varphi(e_4)$. Вече знаем, че $\dim l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)) = \dim\mathrm{im}(\varphi) = 2$, така че произволни два непропорционални вектора измежду $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)$ образуват базис на $\mathrm{im}(\varphi)$. Например,

$$\varphi(e_3) = (1, 0, -2, 2)^t \quad \text{и} \quad \varphi(e_1) = (2, 1, -1, 3)^t$$

образуват базис на $\mathrm{im}(\varphi)$.

За да намерим базис на $\ker(\varphi) \cap \mathrm{im}(\varphi)$ трябва да представим $\mathrm{im}(\varphi)$ като пространство от решения на хомогенна система линейни уравнения. За целта решаваме хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} \varphi(e_3)^t \\ \varphi(e_1)^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме първия ред по (-2), прибавяме към втория ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Общото решение на получената хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = 2x_3 - 2x_4, \quad x_2 = -3x_3 + x_4 \quad \text{за произволни} \quad x_3, x_4 \in F.$$

Векторите

$$b_1 = (2, -3, 1, 0) \quad \text{и} \quad b_2 = (-2, 1, 0, 1)$$

образуват базис на пространството от решения и $\mathrm{im}(\varphi)$ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrl} 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -2x_1 & +x_2 & & x_4 & = 0 \end{array} \right. . \tag{4}$$

В резултат, сечението $\ker(\varphi) \cap \mathrm{im}(\varphi)$ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения, получена чрез обединение на уравненията на (3) и (4). Матрицата от коефициенти на тази хомогенна система е

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прибавяме третия ред към четвъртия. Умножаваме първия ред по (-2), прибавяме към третия ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме втория ред по (-3) и прибавяме към третия ред. Умножаваме втория ред по (-2), прибавяме го към четвъртия ред и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Третия и четвъртия ред са пропорционални, така че можем да изпуснем третия ред. Прибавяме последния ред към втория. Умножаваме последния ред по 2, прибавяме към първия ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общото решение на получената хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = x_4, \quad x_2 = x_4, \quad x_3 = x_4 \quad \text{за произволно} \quad x_4 \in F.$$

Следователно векторът $c = (1,1,1,1)$ е базис на $\ker(\varphi) \cap \mathrm{im}(\varphi)$. По Теоремата за размерност на сума и сечение имаме

$$\dim(\ker(\varphi) + \mathrm{im}(\varphi)) = \dim \ker(\varphi) + \dim \mathrm{im}(\varphi) - \dim(\ker(\varphi) \cap \mathrm{im}(\varphi)) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

От $\ker(\varphi) = l(a_1, a_2)$ и $\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_3), \varphi(e_1))$ следва, че

$$\ker(\varphi) + \mathrm{im}(\varphi) = l(a_1, a_2) + l(\varphi(e_3), \varphi(e_1)) = l(a_1, a_2, \varphi(e_3), \varphi(e_1)).$$

Следователно, един от векторите $a_1, a_2, \varphi(e_3), \varphi(e_1)$ е линейна комбинация на останалите три вектора, които са линейно независими и образуват базис на $\ker(\varphi) + \mathrm{im}(\varphi)$. За да намерим нетривиална линейна комбинация на $a_1, a_2, \varphi(e_3), \varphi(e_1)$, предполагаме, че

$$\begin{aligned} (0,0,0,0) &= x_1 a_1^t + x_2 a_2^t + x_3 \varphi(e_3)^t + x_4 \varphi(e_1)^t = \\ &= x_1(-2,1,1,0) + x_2(3,0,0,1) + x_3(1,0,-2,2) + x_4(2,1,-1,3) = \\ &= (-2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4,\ x_1 + x_4,\ x_1 - 2x_3 - x_4,\ x_2 + 2x_3 + 3x_4) \end{aligned}$$

за някои $x_1, x_2, x_3, x_4 \in F$. Това равенство е еквивалентно на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrl} -2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 0 \\ x_1 & & & +x_4 & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & -x_4 & = 0 \\ & x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

с матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Разменяме първи и втори ред. Умножаваме така получения първи ред по 2 и прибавяме към втория ред. Изваждаме първия ред от третия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Разменяме втория и четвъртия ред. Умножаваме така получения втори ред по (-3), прибавяме към четвъртия и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Третия и четвърти ред са пропорционални. Изпускаме четвъртия ред. Прибавяме третия ред към втория. Умножаваме третия ред по $-\frac{1}{2}$ и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общото решение на тази хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = -x_4, \quad x_2 = -x_4, \quad x_3 = -x_4 \quad \text{за произволно} \quad x_4 \in F.$$

Следователно $-x_4 a_1 - x_4 a_2 - x_4 \varphi(e_3) + x_4 \varphi(e_1) = (0,0,0,0)^t$ за всяко $x_4 \in F$. В частност, за $x_4 = 1$ получаваме, че $-a_1 - a_2 - \varphi(e_3) + \varphi(e_1) = (0,0,0,0)^t$. Всеки от векторите $a_1, a_2, \varphi(e_3)$ и $\varphi(e_1)$ участва с ненулев коефициент в тази линейна комбинация, така че всеки от тези вектори е линейна комбинация на останалите три вектора. Оттук следва, че произволни три вектора от множеството $a_1, a_2, \varphi(e_3), \varphi(e_1)$ образува базис на 3-мерната сума $\ker(\varphi) + \mathrm{im}(\varphi)$.

Задача 3. *Спрямо базис $f = (f_1, f_2, f_3)$ на линейно пространство V над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа, линейният оператор $\varphi : V \to V$ има матрица*

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 7 \\ -9 & 3 & 5 \\ -12 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 10 \\ -2 & 7 & -10 \\ -2 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Да се намери базис на V, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D.

Решение: (i) Характеристичният полином на φ и на A е

$$
\begin{aligned}
&f_\varphi(x) = f_A(x) = \det(A - xE_3) = \\
&= \begin{vmatrix} -10-x & 2 & 7 \\ -9 & 3-x & 5 \\ -12 & 2 & 9-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & -2+x \\ -9 & 3-x & 5 \\ -12 & 2 & 9-x \end{vmatrix} = \\
&= (-2+x)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -9 & 3-x & 5 \\ -12 & 2 & 9-x \end{vmatrix} = (-2+x)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -9 & 3-x & -4 \\ -12 & 2 & -3-x \end{vmatrix} = \\
&= (-2+x)(-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix} 3-x & -4 \\ 2 & -3-x \end{vmatrix} = (2-x)[(3-x)(-3-x)-(-4)(2)] = \\
&= -(x-2)[-9+x^2+8] = -(x-2)(x^2-1) = -(x-2)(x+1)(x-1),
\end{aligned}
$$

след изваждане на третия ред от първия, което не променя детерминантата, изнасяне на общ множител $-2+x$ от така получения първи ред, прибавяне на първия стълб към третия без промяна на детерминантата и развиване на така получената детерминанта по нейния първи ред. Следователно, характеристистичните корени $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ на φ принадлежат на основното поле $\mathbb{R}$ и са собствени стойности.

Координатният стълб $x \in M_{3\times1}(\mathbb{R}) \setminus \{\mathbb{O}_{3\times1}\}$ на собствен вектор, отговарящ на собствената стойност λ_i изпълнява равенството $Ax = \lambda_i x$, което е еквивалентно на $\mathbb{O}_{3\times1} = Ax - \lambda_i E_3 x = (A - \lambda_i E_3)x$. Следователно, x е ненулево решение на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти $A - \lambda_i E_3$. За $i = 1$, търсим ненулево решение на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$
A - \lambda_1 E_3 = A - (-1)E_3 = A + E_3 = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 7 \\ -9 & 4 & 5 \\ -12 & 2 & 10 \end{pmatrix}.
$$

Изваждаме третия ред от първия. Умножаваме третия ред по (-2) и прибавяме към втория. Делим третия ред на 2 и свеждаме към

$$
\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 15 & 0 & -15 \\ -6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.
$$

Първите два реда са пропорционални, Изпускаме втория ред. Делим първия ред на 3. Умножаваме така получения първи ред по 6, прибавяме към последния ред и получаваме

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Следователно, общото решение е

$$
x_1 = x_3, \quad x_2 = x_3 \quad \text{за произволно} \quad x_3 \in \mathbb{R}.
$$

При избор на ненулева стойност на x_3, например на $x_3 = 1$, получаваме собствен вектор

$$
v_1 = (1, 1, 1)
$$

на φ, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -1$.

За $\lambda_2 = 1$, собствените вектори на φ, отговарящи на λ_2 са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A - \lambda_2 E_3 = A - E_3 = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 7 \\ -9 & 2 & 5 \\ -12 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Изваждаме третия ред от първия и втория. После делим третия ред на 2 и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме първия ред по 6 и прибавяме към третия. Изпускаме втория ред, защото е пропорционален на първия и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Общото решение на хомогенната система линейни уравнения с горната матрица от коефициенти е

$$x_1 = x_3, \quad x_2 = 2x_3 \quad \text{за произволно} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

За $x_3 = 1$ получаваме собствен вектор

$$v_2 = (1, 2, 1)$$

на φ, отговарящ на собствената стойност $\lambda_2 = 1$.

Собствените вектори на φ, отговарящи на собствената стойност $\lambda_3 = 2$ са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A - \lambda_3 E_3 = A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -12 & 2 & 7 \\ -9 & 1 & 5 \\ -12 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме втория ред по (-2), прибавяме към първия и третия ред, за да сведем към

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -9 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Изпускаме третия ред, защото съвпада с първия. Делим първия ред на 3. Умножаваме така получения първи ред по 5, прибавяме към втория и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следователно общото решение е

$$x_3 = 2x_1, \quad x_2 = -x_1 \quad \text{за произволно} \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

За $x_1 = 1$ получаваме собствен вектор

$$v_3 = (1, -1, 2)$$

на φ, отговарящ на собствената стойност $\lambda_3 = 2$.

Собствените вектори v_1, v_2, v_3 образуват линейно независима система, защото отговарят на различни собствени стойности. Следователно, v_1, v_2, v_3 е базис на V, съставен от собствени вектори на φ, в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Характеристичният полином на φ е

$$\begin{aligned} f_\varphi(x) = f_A(x) = \det(A - xE_3) = \\ = \begin{vmatrix} 3-x & -6 & 10 \\ -2 & 7-x & -10 \\ -2 & 6 & -9-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1-x \\ \frac{1-x}{3} & 0 & \frac{(1-x)(x+3)}{6} \\ -2 & 6 & -9-x \end{vmatrix} = \\ = (1-x)^2(-1)^{3+2}.6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{x+3}{6} \end{vmatrix} = -6(x-1)^2 \left[\frac{x+3}{6} - \frac{1}{3} \right] = \\ = -6(x-1)^2 \left(\frac{x+1}{6} \right) = -(x-1)^2(x+1). \end{aligned}$$

след прибавяне на третия ред към първия, умножение на трети ред по $\frac{x-7}{6}$ и прибавяне към втория ред, последвано от изнасяне на общи множители $(1-x)$ от първите два реда и развитие по втори стълб. Оттук, характеристичните корени на φ са $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Съгласно $\pm 1 \in \mathbb{R}$, тези характеристични корени са собствени стойности на φ.

Собствените вектори на φ, отговарящи на собствената стойност $\lambda_1 = -1$ са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A - \lambda_1 E_3 = A - (-1)E_3 = A + E_3 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 10 \\ -2 & 8 & -10 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Удвояваме третия ред и прибавяме към първия. Изваждаме третия ред от втория, делим третия ред на (-2) и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Изпускаме първия ред, защото е пропорционален на втория. Делим втория ред на 2. Утрояваме така получения ред, прибавяме към последния ред и получаваме

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следователно общото решение е

$$x_1 = -x_3, \quad x_2 = x_3 \quad \text{за произволно} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

За $x_3 = -1$ получаваме собствен вектор

$$v_1 = (1, -1, -1)$$

на φ, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -1$.

Собствените вектори на φ, отговарящи на кратната собствена стойност $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A - \lambda_2 E_3 = A - E_3 = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ -2 & 6 & -10 \\ -2 & 6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Всички уравнения на тази система са пропорционални помежду си и еквивалентни на уравнението $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$. Изразяваме $x_1 = 3x_2 - 5x_3$ и построяваме базис

$$v_2 = (3, 1, 0), \quad v_3 = (-5, 0, 1)$$

на нейното пространство от решения.

Векторите v_2, v_3 образуват линейно независима система, съставена от собствени вектори, отговарящи на собствената стойност 1. Присъединявайки към нея собствения вектор v_1, отговарящ на собствената стойност (-1), получаваме базис v_1, v_2, v_3 на V, съставен от собствени вектори на φ. Матрицата на φ спрямо този базис е

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. *Спрямо базис $f = (f_1, f_2, f_3)$ на линейно пространство V над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа, линейният оператор $\psi : V \to V$ има матрица*

$$\text{(i)} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & -5 \\ -9 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Да се докаже, че не съществува базис на V, в който матрицата на ψ е диагонална.

Решение: (i) Да допуснем, че съществува базис v_1, v_2, v_3 на V, в който матрицата D на ψ е диагонална. Тогава v_1, v_2, v_3 са собствени вектори на ψ и диагоналните елементи на D са съответните им собствени стойности. Затова започваме с пресмятане на характеристичния полином

$$f_\psi(x) = f_B(x) = \det(B - xE_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} -3-x & 1 & 2 \\ 7 & -x & -5 \\ -9 & 2 & 6-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-x & 1 & 2 \\ -x^2-3x+7 & 0 & 2x-5 \\ 2x-3 & 0 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2}.1 \begin{vmatrix} -x^2-3x+7 & 2x-5 \\ 2x-3 & 2-x \end{vmatrix} = -[(x^2+3x-7)(x-2)-(2x-3)(2x-5)] =$$

$$= -(x^3+3x^2-7x-2x^2-6x+14-4x^2+6x+10x-15) =$$

$$= -(x^3-3x^2+3x-1) = -(x-1)^3.$$

чрез умножение на първи ред по x и прибавяне към втори ред, умножение на първи ред по (-2) и прибавяне към трети ред, последвано от развитие по втори стълб. Следователно, характеристичните корени на ψ са $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \in \mathbb{C}$, откъдето ψ има единствена собствена стойност 1 с кратност 3. Ако съществува базис v_1, v_2, v_3 на V, в който матрицата D на ψ е диагонална, то

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3.$$

Следователно, операторът $\psi = \mathrm{Id}_V : V \to V$ съвпада с тъждествения оператор на V и матрицата на ψ спрямо произволен базис на V е единичната матрица. Сега $B \neq E_3$ противоречи на този факт и доказва, че не съществува базис на V, в който матрицата на ψ е диагонална.

(ii) Започваме с намиране на характеристичния полином

$$f_\psi(x) = f_B(x) = \det(B - xE_3) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & -1 \\ 2 & 1-x & -2 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+2}(1-x) \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = (1-x)[(2-x)(-x) - 1.(-1)] =$$

$$= (1-x)[x^2-2x+1] = -(x-1)^3$$

чрез развитие по втори стълб. Следователно, характеристичните корени на ψ са $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \in \mathbb{C}$ и ψ има трикратна собствена стойност 1. Ако допуснем, че съществува базис v_1, v_2, v_3 на V, в който ψ има диагонална матрица D, то v_1, v_2, v_3 са собствени вектори на ψ, чиито собствени стойности се намират върху диагонала на D. Оттук,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3,$$

така че операторът $\psi : V \to V$ с единична матрица E_3 спрямо базиса v_1, v_2, v_3 съвпада с тъждествения, т.е. $\psi = \mathrm{Id}_V$. В резултат, матрицата на ψ спрямо произволен базис на V е E_3, което противоречи на $B \neq E_3$ и доказва, че не съществува базис на V, в който матрицата на ψ е диагонал.