Лекция 4: Крайни разлики. Интерполационни формули с крайни разлики

Гено Николов, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски"

Съдържание на лекцията

Крайни разлики

Често използвани в практиката са равноотдалечените възли при интерполиране на функции. В този случай е налице значително по-проста схема за построяване на интерполационния полином. Това става с използването на така наречените крайни разлики. Ще въведем това понятие и представим някои негови елементарни свойства.

Нека е дадена една редица от числа $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots$ Ще интерпретираме тези числа като стойности на функция f в някакви точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$.

Определение

Крайна разлика на f в x_i от ред k се бележи с $\Delta^k f_i$ и се определя индуктивно с рекурентната връзка

$$\Delta^k f_i := \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

където $\Delta^1 f_i = \Delta f_i := f_{i+1} - f_i$ за всяко i.

Връзка между крайни и разделени разлики

В случай, че точките $\{x_i\}$ са равноотдалечени, съществува проста връзка между разделените и крайните разлики. Тя е представена в следната лема.

Лема 1

Нека $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, \ldots, k$, и функцията $f(x)$ е определена в тези точки. Тогава

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!\, h^k}. \tag{1}$$

Доказателство. Ще приложим индукция по броя на точките. За две точки имаме

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{\Delta f_i}{1!\, h}$$

и следователно твърдението е вярно.

Доказателство на Лема 1

Да допуснем, че връзката (1) е в сила за произволни k равноотдалечени точки. Нека $x_j = x_0 + jh$, $j = 0 \dots, k$, са произволни $k+1$ точки. Като приложим рекурентната връзка за разделени разлики и индукционното предположение получаваме

$$\begin{aligned} f[x_0, \dots, x_k] &= \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \\ &= \frac{1}{x_k - x_0}\left(\frac{\Delta^{k-1} f_1}{(k-1)! h^{k-1}} - \frac{\Delta^{k-1} f_0}{(k-1)!\, h^{k-1}}\right) = \frac{\Delta^k f_0}{k!\, h^k}. \end{aligned}$$

Лемата е доказана. $\square$

Свойства на крайните разлики

Чрез връзката (1) много от свойствата на разделената разлика се пренасят върху крайните разлики. Да отбележим някои от тях.

1. Крайната разлика е линеен функционал, т.е.

$$\Delta^n (f + \alpha\, g)_i = \Delta^n f_i + \alpha\, \Delta^n g_i$$

   за всеки две функции f, g и число α.

2. Нека $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$. Тогава

$$\Delta^n f_0 = n!\, h^n a_0$$

   при всеки избор на $h > 0$ и точките $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, \ldots, n$.

3. Крайната разлика от n-ти ред анулира всички полиноми от степен $n - 1$.

Представяне на крайните разлики

Съгласно определението, $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$. Оттук и рекурентната връзка следва, че всяка крайна разлика (от произволен ред) може да се представи като линейна комбинация на стойностите $\{f_i\}$. Например,

$$\begin{aligned} \Delta^2 f_0 &= \Delta f_1 - \Delta f_0 = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0, \\ \Delta^3 f_0 &= \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0. \end{aligned}$$

От тези примери се вижда, че коефициентите в разглежданото представяне са биномните коефициенти с алтернативно сменящи се знаци. Оказва се, че това наистина е така и то може да бъде строго доказано, например по индукция, като се използва рекурентната връзка за крайни разлики и свойствата на биномните коефициенти. Ние ще дадем тук едно друго доказателство, което се основава на връзката между разделена и крайна разлика.

Представяне на крайните разлики

Теорема 1. За всяко естествено число n е в сила формулата

$$\Delta^n f_0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_i.$$

Доказателство. Нека $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, \dots, n$ и $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Тогава по Лема 1, $\Delta^n f_0 = n!\, h^n f[x_0, \dots, x_n]$. От представянето на разделената разлика получаваме

$$\Delta^n f_0 = \; = n!\, h^n \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)} = n!\, h^n \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (ih - jh)}$$

$$= n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{f_i}{i!(n-i)!} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_i\,,$$

което е исканото равенство. $\square$

Формула на Нютон за интерполиране напред

Тези сведения за крайните разлики са достатъчни за да се справим с нашата първоначална задача – представянето на интерполационния полином. И така, нека възлите $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ са равноотдалечени и функцията f е определена в тях. Търсим полинома $L_n(f;x)$ от π_n, който интерполира f в $x_0,\ldots,x_n$. Съгласно интерполационната формула на Нютон,

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\ldots,x_k](x-x_0)\cdots(x-x_{k-1}).$$

Нека $x_i = x_0 + i\,h$, $i = 0,\ldots,n$. Да направим смяна на променливата x с t по формулата $x = x_0 + th$. Тогава

$$(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1}) = \prod_{i=0}^{k-1}(x_0+th-x_0-ih) = h^k t(t-1)\cdots(t-k+1).$$

Формула на Нютон за интерполиране напред

Сега, като използваме и връзката между разделена и крайна разлика, получаваме

$$L_n(f;x) = L_n(f;x_0+th) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!}\, t(t-1)\cdots(t-k+1).$$

В литературата се среща означението $\binom{t}{k}$ при произволни реални стойности на параметъра t. С него се означава биномната функция, която се определя с равенството:

$$\binom{t}{k} := \begin{cases} \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!} & \text{при } k>0 \\ 1 & \text{при } k=0. \end{cases}$$

Така получихме формулата на Нютон за интерполиране напред:

$$\boxed{L_n(f;x_0+th) = \sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \Delta^k f_0\,.}$$

Формула на Нютон за интерполиране напред

Тя се нарича така, защото възлите се привличат в нарастващ ред при изчисляване на коефициентите пред полиномите $\binom{t}{k}$. Да забележим, че във формулата на Нютон за интерполиране напред стойността $f(x_0) = f_0$ участва във всички коефициенти, стойността в следващия възел x_1 участва във всички от втория до последния и т.н., стойността $f(x_n)$ участва само в последния коефициент. Следователно, ако искаме да изчислим приближено стойността на f в точка x, която е близко до x_0, то добре е да използваме формулата на Нютон за интерполиране напред, защото в тази формула участват съществено стойностите на f в точки близки до x_0 и като такива, те носят най-пълна информация за стойността на f в x. Следвайки тази логика, би трябвало при приближаване на $f(x)$ за точки x, близки до последния възел x_n да използваме интерполационна формула, в която възлите се привличат в обратен ред: $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$.

Формула на Нютон за интерполиране назад

Да изведем и тази формула. По формулата на Нютон, приложена за възлите $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$ (в този ред), имаме

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}](x - x_n)\cdots(x - x_{n-k+1}).$$

Като приложим смяната $x = x_n + th$ получаваме

$$L_n(f;x) = L_n(f;x_n + th) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_{n-k}}{k!\, h^k} \prod_{i=0}^{k-1} (x_n + th - x_n + ih)$$

и следователно

$$\boxed{L_n(f;x_n + th) = \sum_{k=0}^{n} \binom{t+k-1}{k} \Delta^k f_{n-k}\,.}$$

Това е формулата на Нютон за интерполиране назад.

Други интерполационни формули с крайни разлики

По аналогичен начин могат да бъдат изведени интерполационни фомули, при които възлите се привличат в произволен друг ред. Например, ако точката x е близко до x_i, то добре е възлите да се подредят по следния начин: $x_i, x_{i+1}, x_{i-1}, x_{i+2}, x_{i-2}, \dots$.

Пресмятането на коефициентите на интерполационния полином с равноотдалечени възли се свежда към пресмятане на крайни разлики. Изчисленията могат да се организират по следната проста схема:

Схема за пресмятане на крайни разлики

$$
\begin{array}{llllll}
\vdots & \vdots & & & \\
x_{-3} & f_{-3} & & & \\
 & & \Delta f_{-3} & & \\
x_{-2} & f_{-2} & & \Delta^2 f_{-3} & \\
 & & \Delta f_{-2} & & \Delta^3 f_{-3} \\
x_{-1} & f_{-1} & & \Delta^2 f_{-2} & \\
 & & \Delta f_{-1} & & \Delta^3 f_{-2} \\
x_0 & f_0 & & \Delta^2 f_{-1} & \\
 & & \Delta f_0 & & \Delta^3 f_{-1} \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & \\
 & & \Delta f_1 & & \Delta^3 f_0 \\
x_2 & f_2 & & \Delta^2 f_1 & \\
 & & \Delta f_2 & & \\
x_3 & f_3 & & & \\
\vdots & \vdots & & &
\end{array}
$$

Край на лекцията !