32. Интегриране по части, интегриране чрез внасяне под знака на диференциала и чрез смяна на променливата

Интегриране по части

Теорема 1 (формула за интегриране по части)

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в интервала D и функциите $f(x)g'(x)$ и $f'(x)g(x)$ имат неопределени интеграли в D. Тогава е в сила формулата

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx, \quad x \in D. \tag{1}$$

Бележка

Може да се докаже, че ако $f'(x)g(x)$ има неопределен интеграл в D, то и $f(x)g'(x)$ също има неопределен интеграл в D, и обратното.

Означение: $\displaystyle\int f(x)\,dg(x) := \int f(x)g'(x)\,dx.$

Тогава ф-ла (1) може да се запише във вида:

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x), \quad x \in D. \tag{2}$$

Доказателство на Т-ма 1

Имаме $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, $x \in D$. Това показва, че $f(x)g(x)$ е примитивна на $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ в D. Следователно

$$\int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx = f(x)g(x) + \mathrm{const}, \quad x \in D. \tag{3}$$

Поради линейността на интеграла (Т-мата от Тема 31) имаме

$$\int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx. \tag{4}$$

Следователно

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx + \mathrm{const}, \quad x \in D. \tag{5}$$

Понеже адитивната константа **const** се включва в значението на неопределения интеграл, обикновено тя се изпуска и последната формула се записва във вида

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx, \quad x \in D. \tag{6}$$

Пример

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = \int x de^x \tag{7}$$

$$\overset{\text{ф-ла за инт. по ч.}}{=} xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + \mathrm{const}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Две свойства

Твърдение

Нека $f, g : D \to \mathbb{R}$, D е интервал, $g(x)$ е диференцируема в D и $k \in \mathbb{R}$. Тогава:

(а) $\displaystyle\int f(x)\, d[g(x) + k] = \int f(x)\, dg(x), \quad x \in D;$

(б) $\displaystyle\int f(x)\, d[kg(x)] = k \int f(x)\, dg(x), \quad x \in D.$

Д-во: (а) Според дефиницията на $\int fdg$ имаме

$$\int f(x)\, d[g(x) + k] \overset{\text{по деф.}}{=} \int f(x)[g(x) + k]'\, dx \tag{9}$$

$$= \int f(x) g'(x)\, dx \overset{\text{по деф.}}{=} \int f(x)\, dg(x). \tag{10}$$

(б) Аналогично:

$$\int f(x)\, d[kg(x)] \overset{\text{по деф.}}{=} \int f(x)[kg(x)]'\, dx \tag{11}$$

$$= \int f(x) kg'(x)\, dx \overset{\text{т-мата в тема 31}}{=} k \int f(x) g'(x)\, dx \overset{\text{по деф.}}{=} k \int f(x)\, dg(x).$$

Интегриране чрез внасяне под знака на диференциала

Теорема 2

Ако $\int f(t)\,dt = F(t) + \text{const}, \ \ t \in E$, и $\varphi : D \to E$ е диференцируема, където D и E са интервали, то
$\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + \text{const}, \ \ x \in D.$

Пример:

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} d\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) \tag{12}$$

$$\overset{\text{т-ма 2}}{=} \frac{1}{2} e^{x^2} + \text{const}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Доказателство на Т-ма 2

Понеже по дефиниция

$$\int f(\varphi(x))\, d\varphi(x) = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx, \tag{14}$$

доказателството на т-мата се свежда до установяването на това, че $F(\varphi(x))$ е примитивна на $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ в D.
От $\int f(t)\, dt = F(t) + \text{const},\ t \in E$, следва, че $F(t)$ е диференцируема в E и $F'(t) = f(t)$, $t \in E$.
Сега от т-мата за диференциране на съставна функция следва, че $F(\varphi(x))$ е диференцируема в D и $[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\varphi'(x)$, $x \in D$.
Но $F'(t) = f(t)$, $t \in E$.
Следователно $[F(\varphi(x))]' = f(\varphi(x))\varphi'(x)$, $x \in D$, което и трябваше да докажем.

Интегриране чрез смяна на променливата

Теорема 3

Нека $f : D \to \mathbb{R}$ и $\psi : E \to D$, където D и E са интервали, като $\psi(E) = D$. Нека $\psi(t)$ е строго монотонна и диференцируема, като $\psi'(t) \neq 0$, $t \in E$. Ако

$$\int f(\psi(t))\, d\psi(t) = \Phi(t) + \text{const}, \quad t \in E, \tag{15}$$

то

$$\int f(x)\, dx = \Phi(\psi^{-1}(x)) + \text{const}, \quad x \in D. \tag{16}$$

Метод на прилагаме на т-мата:

$$\int f(x)\, dx \overset{x=\psi(t)}{=} \int f(\psi(t))\, d\psi(t) = \int f(\psi(t))\psi'(t)\, dt$$
$$= \cdots \quad \cdots \quad \cdots ☺ = \Phi(t) + \text{const} \overset{t=\psi^{-1}(x)}{=} \Phi(\psi^{-1}(x)) + \text{const}. \tag{17}$$

Доказателство на Т-ма 3

Трябва да покажем, че $\Phi(\psi^{-1}(x))$ е диференцируема в D и $[\Phi(\psi^{-1}(x))]' = f(x)$, $x \in D$.
От

$$\int f(\psi(t))\,d\psi(t) = \Phi(t) + \text{const}, \quad t \in E, \tag{18}$$

следва, че $\Phi(t)$ е диференцируема в E и $\Phi'(t) = f(\psi(t))\psi'(t)$.
От т-мата за диференциране на обратни функции (Т-ма 2 в Тема 21) следва, че $\psi^{-1}(x)$ е диференцируема в D и

$$(\psi^{-1})'(x) = \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(x))}, \quad x \in D. \tag{19}$$

Сега от т-мата за диференциране на съставни ф-ции следва, че $\Phi(\psi^{-1}(x))$ е диференцируема в D и

$$[\Phi(\psi^{-1}(x))]' = \Phi'(\psi^{-1}(x))(\psi^{-1})'(x) \tag{20}$$

$$= f(\psi(\psi^{-1}(x)))\psi'(\psi^{-1}(x))\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(x))} \tag{21}$$

$$= f(x), \quad x \in D. \tag{22}$$

Пример

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = ?, \quad x > 0 \tag{23}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx \overset{x=t^2,t>0}{=} \int \frac{\sqrt{t^2}}{1+\sqrt{t^2}}\,d(t^2) \tag{24}$$

$$= \int \frac{|t|}{1+|t|}(t^2)'\,dt \overset{t\geq 0}{=} 2\int \frac{t^2}{1+t}\,dt \tag{25}$$

$$= 2\int \frac{(t^2-1)+1}{1+t}\,dt = 2\int \left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt \tag{26}$$

$$= 2\int t\,dt - 2\int dt + 2\int \frac{dt}{1+t} \tag{27}$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2}+c\right) - 2(t+c) + 2\int \frac{d(1+t)}{1+t} \tag{28}$$

$$= t^2 - 2t + 2\ln(1+t) + c \tag{29}$$

$$\overset{t=\sqrt{x}}{=} x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) + c. \tag{30}$$