Вектори

Ще работим в пространството. В равнината всичко е същото, като само на няколко места трябва да се направят очевидни дребни модификации.

Определение 1 *Отворена отсечка с краища точките* A *и* B е множеството от всички точки, които са между A и B. *Затворена отсечка с краища* A *и* B е множеството, състоящо се от точките A и B и точките от отворената отсечка с краища A и B. Вместо затворена отсечка ще казваме само *отсечка*.
В дефиницията се допуска и $A = B$. В тоя случай затворената отсечка AA се състои само от точката A (такава отсечка се нарича *нулева отсечка*), а отворената отсечка AA е празното множество.

Забележка 1 В горното определение считаме, че е известно какво означава една точка да е между две дадени точки, тоест че понятието „между“ е първично понятие. И чрез него определихме понятието „отворена отсечка“. Алтернативно, бихме могли да считаме, че е известно какво е отворена отсечка, тоест че „отворена отсечка“ е първично понятие, и чрез него да определим понятието „между“ по следния начин: Точката C е между точките A и B, ако лежи на отворената отсечка AB.

Забележка 2 С AB ще означаваме и отворената, и затворената отсечка с краища A и B, и правата, определена от точките A и B. Ако има опасност от объркване, ще поясняваме за кое става дума.

Определение 2 Нека l е права и $P \in l$. Тогава $l \setminus \{P\}$ се разпада на две подмножества, като точките $A, B \in l \setminus \{P\}$ са от различни подмножества $\Leftrightarrow$ P е между A и B. Тия подмножества се наричат *отворени лъчи с начало* P. *Затворен лъч с начало* P е множество, състоящо се от точката P и точките от отворен лъч с начало P. Вместо затворен лъч ще казваме само *лъч*.
Ако r е лъч с начало P и $A \in r$, $A \neq P$, то ще означаваме r и с $PA^{\rightarrow}$.
Двата лъча с начало P се наричат *противоположни*.

Определение 3 Нека l е права, лежаща в равнината π. Тогава $\pi \setminus l$ се разпада на две подмножества, като точките $A, B \in \pi \setminus l$ са от различни подмножества $\Leftrightarrow$ отворената отсечка AB пресича l. Тия подмножества се наричат *отворени полуравнини с граница* l. *Затворена полуравнина с граница* l е множество, състоящо се от точките на l и точките от отворена полуравнина с граница l. Вместо затворена полуравнина ще казваме само *полуравнина*.

Определение 4 Нека π е равнина в пространството A_3. Тогава $A_3 \setminus \pi$ се разпада на две подмножества, като точките $A, B \in A_3 \setminus \pi$ са от различни подмножества $\Leftrightarrow$ отворената отсечка AB пресича π. Тия подмножества се наричат *отворени полупространства с граница* π. *Затворено полупространство с граница* π е множество, състоящо се от точките на π и точките от отворено полупространство с граница π. Вместо затворено полупространство ще казваме само *полупространство*.

Определение 5 Нека a и b са лъчи. Казваме, че a е *еднопосочен* с b и пишем $a \uparrow\uparrow b$, ако правите определени от a и b са успоредни (Считаме, че всяка права е успоредна на себе си!) и

а) ако правите определени от a и b съвпадат, то $a \supset b$ или $b \supset a$.

б) ако правите определени от a и b са различни и π е равнината определена от тях, а A и B са началата на a и b, то a и b лежат в една и съща полуравнина в π относно правата AB.

Казваме, че a и b са *противопосочни* и пишем $a \uparrow\downarrow b$, ако правите определени от a и b са успоредни, но a и b не са еднопосочни.

Твърдение 1 *Релацията еднопосочност на лъчи е релация на еквивалентност в множеството на всички лъчи.*

Доказателство: Трябва да се докаже, че еднопосочността е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

рефлексивност Трябва да се докаже, че $a \uparrow\uparrow a$. Това е ясно от а) на Определение 5, защото $a \subset a$.

симетричност Трябва да се докаже, че ако $a \uparrow\uparrow b$, то $b \uparrow\uparrow a$. Това е ясно, защото и в а), и в б) на Определение 5 a и b играят симетрична роля.

транзитивност Трябва да се докаже, че ако $a \uparrow\uparrow b$ и $b \uparrow\uparrow c$, то $a \uparrow\uparrow c$. Това ще го приемем без доказателство по следните причини. Първо, за да се направи строго доказателство трябва много ясно да формулираме какви са аксиомите, от които ще го докажем, а ние не искаме да задълбаваме в аксиоматиката. И второ, тъй като за взаимното положение на лъчите има много случаи (трите са на една права, два са на една права, а третия на друга, трите са на различни прави, но правите могат да са в една равнина или да не са в една равнина), доказателството става дълго. $\square$

Чрез понятието „еднопосочност на лъчи“ може да се даде строга дефиниция на понятието „посока“, което в училището се използва в интуитивен смисъл. (Това понятие няма да ни трябва в останалата част на курса.)

Определение 6 Класовете на еквивалентност относно релацията еднопосочност на лъчи се наричат *посоки.*

Определение 7 Казваме, че две отсечки AB и CD са *еднакви* и пишем $AB \cong CD$, ако имат една и съща дължина.

Коректност: Дължината на отсечка зависи от това коя отсечка е избрана за единична отсечка за измерване на дължини. Тъй като дефинирахме еднаквостта на отсечки чрез дължините им, за да е коректна тая дефиниция трябва да проверим, че тя не зависи от избора на единичната отсечка за измерване на дължина.

Нека е избрана една единична отсечка. Дължината спрямо нея на отсечката PQ ще означаваме с $|PQ|$. (Това ще е обичайното означение за дължина на отсечка или разстояние между две точки, което ще използваме.) Да вземем друга единична отсечка и да означаваме дължината спрямо нея на отсечката PQ с $\|PQ\|$. Тогава съществува константа $c > 0$ такава, че за всяка отсечка PQ имаме $\|PQ\| = c.|PQ|$. Следователно $\|AB\| = \|CD\| \Leftrightarrow c.|AB| = c.|CD| \Leftrightarrow |AB| = |CD|$.

Значи еднаквостта на отсечки не зависи от избора на единичната отсечка за измерване на дължина. С това коректността е доказана. $\square$

Забележка 3 В училището вместо „еднакви отсечки“ се е казвало „равни отсечки“. Аз предпочитам да казваме „еднакви“ по следната причина. В математиката обикновено се казва, че два обекта са равни, когато са всъщност един и същ обект. Така че ако използваме „равни отсечки“, ще имаме ситуации, в които две отсечки са равни, но различни, което не звучи добре. Освен това, когато човек кръсти някакви обекти „равни“, често по невнимание автоматично започва да прилага за тях някакви свойства на равенството без да е проверил дали наистина са в сила.

Твърдение 2 *Еднаквостта на отсечки е релация на еквивалентност в множеството на всички отсечки.*

Доказателство: Трябва да се докаже, че еднаквостта на отсечки е рефлексивна, симетрична и транзитивна. Фиксираме една единична отсечка за измерване на дължина.

рефлексивност $AB \cong AB$, защото $|AB| = |AB|$.

симетричност Нека $AB \cong CD$. Значи $|AB| = |CD|$. Следователно $|CD| = |AB|$, така че $CD \cong AB$.

транзитивност Нека $AB \cong CD$ и $CD \cong EF$. Значи $|AB| = |CD|$ и $|CD| = |EF|$. Следователно $|AB| = |EF|$, така че $AB \cong EF$. $\square$

Определение 8 Отсечка, на която единият край A е избран за първи, а другият край B – за втори, се нарича *насочена отсечка* или *свързан вектор* и се означава с $\overrightarrow{AB}$. A се нарича *начало*, а B – *край* на $\overrightarrow{AB}$.
Ако $A = B$, то $\overrightarrow{AB}$ (тоест $\overrightarrow{AA}$) се нарича *нулева насочена отсечка* или *нулев свързан вектор*.

Забележка 4 При $A \neq B$ отсечките AB и BA са равни, тоест съвпадат, но свързаните вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ са различни!

Определение 9 Казваме, че $\overrightarrow{AB}$ е *еднопосочен* с $\overrightarrow{CD}$ и пишем $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$, когато е изпълнено едно от условията:

а) поне един от двата свързани вектора е нулев (тоест $A = B$ или $C = D$).

б) двата свързани вектора са ненулеви (тоест $A \neq B$ и $C \neq D$) и $AB^{\rightarrow} \upuparrows CD^{\rightarrow}$.

Казваме, че $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са *противопосочни* и пишем $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$, когато е изпълнено едно от условията а) и б$'$), което се получава от б) като се замени $AB^{\rightarrow} \upuparrows CD^{\rightarrow}$ с $AB^{\rightarrow} \uparrow\downarrow CD^{\rightarrow}$.

Забележка 5 По горното определение нулевите свързани вектори са и еднопосочни, и противопосочни с всеки свързан вектор. Това е удобно в някои ситуации (например Определение 10) за да не се разглеждат два случая – на нулев вектор и на ненулев вектор. (Разбира се има и ситуации, в които това е неудобно и в тях би било по-удобно да бяхме дефинирали еднопосочност и противопосочност само за ненулеви вектори.)

Твърдение 3 *Релацията еднопосочност на свързани вектори е релация на еквивалентност в множеството на ненулевите свързани вектори.*

Доказателство: Тъй като ни интересуват само ненулеви свързани вектори, еднопосочността се дефинира чрез б) на Определение 9, тоест свежда се до еднопосочност на съответните лъчи. Така че твърдението следва директно от Твърдение 1. □

Забележка 6 В множеството на всички свързани вектори релацията еднопосочност очевидно е рефлексивна и симетрична, но не е релация на еквивалентност, защото не е транзитивна: Ако беше транзитивна, то за произволни свързани вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ от $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{EE}$ и $\overrightarrow{EE} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ (защото $\overrightarrow{EE}$ е нулев) би следвало $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$, тоест всеки два свързани вектора биха били еднопосочни, което не е вярно.

Определение 10 Казваме, че свързаните вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са *равни* и пишем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ако отсечките AB и CD са еднакви и $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$.

Забележка 7 В горното определение отново се използва „равни“ за обекти, които могат да бъдат различни. Има алтернативен термин, а именно „еквиполентни“, но тъй като той се използва изключително рядко, ще оставим в тоя случай исторически утвърдилото се „равни“. Така или иначе скоро ще започнем да работим само със свободни вектори, за които равенството си е в обичайния за математиката смисъл — два свободни вектора са равни, когато съвпадат.

Пример 1 Нека $\overrightarrow{AB}$ е нулев свързан вектор, тоест $A = B$. Тогава $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ и $\overrightarrow{CD}$ е нулев, тоест когато $C = D$.

Това е така, защото: Нека е фиксирана единична отсечка за измерване.

Ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $AB \cong CD$, тоест $0 = |AB| = |CD|$. Значи $C = D$.

Обратно, ако $C = D$, то $|AB| = 0 = |CD|$, тоест $AB \cong CD$, а също $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$, защото $\overrightarrow{AB}$ е нулев. Значи $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Твърдение 4 *Релацията равенство на свързани вектори е релация на еквивалентност в множеството на всички свързани вектори.*

Доказателство: По дефиниция равенството на свързани вектори се свежда до еднопосочност и еднаквост на съответните отсечки. От Твърдение 3 и забележката след него и Твърдение 2 следва, че тая релация е рефлексивна и симетрична. Значи остава да се докаже транзитивността, тоест ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

Ако трите вектора са ненулеви, това пак следва от Твърдение 3 и Твърдение 2.

Нека някой от векторите е нулев, например $\overrightarrow{CD}$. Тогава от $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и правата посока в Пример 1 следва, че и $\overrightarrow{AB}$ е нулев, и от $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ и правата посока в Пример 1 следва, че и $\overrightarrow{EF}$ е нулев. Така че от обратната посока в Пример 1 получаваме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

Аналогични са разсъжденията, ако $\overrightarrow{AB}$ е нулев или $\overrightarrow{EF}$ е нулев.

С това транзитивността е доказана. Значи равенството на свързани вектори е релация на еквивалентност. □

Определение 11 Класовете на еквивалентност относно релацията равенство на свързани вектори се наричат *свободни вектори.*
Ако v е свободен вектор и $\overrightarrow{AB} \in v$, то казваме, че $\overrightarrow{AB}$ е *представител* на v. Вместо $\overrightarrow{AB} \in v$ ще пишем $\overrightarrow{AB} = v$ (защото това е общоприетият начин на писане).
За краткост вместо свободен вектор обикновено ще казваме само *вектор.*

Забележка 8 Някои хора слагат стрелкички отгоре на свободните вектори, тоест пишат $\overrightarrow{v}$. Ние няма да го правим, защото е излишно — от контекста винаги е ясно дали v означава вектор или нещо друго. (Същото е в алгебрата — там елементите на линейно пространство се наричат вектори, но не им се слагат стрелкички.) При свързаните вектори обаче ще си слагаме стрелките отгоре, тоест ще пишем $\overrightarrow{AB}$, защото при тях ако не се пишат стрелките опасността от объркване с обикновени отсечки (или прави) е по-голяма.

Забележка 9 Горното е формалното определение на свободен вектор. Неформално обаче човек обикновено си ги представя по следния начин: Свързаните вектори са „вързани“ за една начална точка. Докато свободните вектори не са вързани за начална точка, те могат „свободно“ да „плуват“ в пространството, тоест между два равни свързани вектора не се прави разлика — те се считат един и същ обект.

Забележка 10 Векторите в училището се дефинират както свързаните вектори погоре. Но след това с тях се работи като със свободни вектори — местят се в пространството без да се прави разлика между началния вектор и преместения вектор. Например при събирането векторите се преместват както ни е удобно за да приложим правилото на триъгълника или на успоредника за събиране. Това е пример на грешката, описана в една от забележките по-горе: Някакви обекти се кръщават „равни“ и след това се започва без никакво доказателство да се счита, че имат едни и същи свойства и могат да се заменят един с друг в разни операции.

Теорема 1 *Нулевите свързани вектори образуват един клас на еквивалентност, тоест един свободен вектор. Тоя свободен вектор се нарича* нулев (свободен) вектор *и се означава с* 0.

Доказателство: От обратната посока в Пример 1 имаме, че всички нулеви свързани вектори са равни и следователно лежат в един и същ клас на еквивалентност. В тоя клас няма ненулеви свързани вектори, защото ако някой свързан вектор е в него, то той е равен на нулев свързан вектор и следователно от правата посока в Пример 1 също е нулев. Значи наистина всички свързани вектори образуват един клас на еквивалентност, тоест един свободен вектор. $\square$

Теорема 2 *Ако v е вектор и O е точка, то съществува единствена точка P, такава че $\overrightarrow{OP} = v$.*

Доказателство: Ако $v = 0$, то $\overrightarrow{OP} = v \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}$ е нулев свързан вектор, тоест когато $P = O$. Значи в тоя случай наистина има единствена точка P, такава че $\overrightarrow{OP} = v$, а именно $P = O$.

Нека $v \neq 0$. Нека $\overrightarrow{AB}$ е представител на v. Значи трябва да докажем, че съществува единствена точка P, за която $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, тоест $\overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$ и $OP \cong AB$. Тъй като $v \neq 0$, то $\overrightarrow{AB}$ е ненулев свързан вектор, тоест $A \neq B$. Значи точките A и B задават права AB. Тогава от условието $\overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$ следва, че P трябва да лежи върху правата през O, която е успоредна на правата AB. Върху тая права има точно две точки P, за които отсечката $OP \cong$ отсечката AB, тоест които са на разстояние $|AB|$ от O (считаме, че сме фиксирали единична отсечка за измерване на дължини). Тъй като те лежат върху противоположните лъчи с начало O, то точно за една от тях имаме $OP^{\rightarrow} \uparrow\uparrow AB^{\rightarrow}$, тоест $\overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$. Значи наистина съществува единствена точка P, такава, че
$\overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$ и отсечката $OP \cong$ отсечката AB, тоест $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, тоест $\overrightarrow{OP} = v$. $\square$

Твърдение 5 *(свойство на успоредника) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.*

Доказателство: Имаме да доказваме еквивалентност, но всъщност е достатъчно да докажем правата посока, защото ако в нея разменим B и C получаваме
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, тоест обратната посока.

И така, ще докажем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Доказателството е дълго, защото трябва да се разгледат много случаи, но всеки от случаите е лесен.

Нека $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Считаме, че е фиксирана единична отсечка.

1. $A = B$.

   Значи $\overrightarrow{AB}$ е нулев свързан вектор и по Пример 1 следва, че и $\overrightarrow{CD}$ е нулев, тоест и $C = D$. Следователно $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (отляво и отдясно е написано едно и също нещо).

2. $A \neq B$.

   Значи и $C \neq D$ (иначе като в предишния случай бихме получили $A = B$ — противоречие). Следователно $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ означава, че $|AB| = |CD|$ и $AB^{\rightarrow} \uparrow\uparrow CD^{\rightarrow}$.

(а) Правите AB и CD съвпадат.

Следователно $AB^{\to} \uparrow\uparrow CD^{\to}$ означава, че $AB^{\to} \supset CD^{\to}$ или $CD^{\to} \supset AB^{\to}$. Можем да считаме, че $AB^{\to} \supset CD^{\to}$, защото случаят $CD^{\to} \supset AB^{\to}$ се разглежда аналогично (и дори не е нужно да се разглежда, защото се получава от предишния със смяна на буквите).

i. $A = C$.

Следователно двата лъча имат общо начало и щом единият съдържа другия, то те съвпадат, тоест $AB^{\to} = CD^{\to}$. Значи $D \in CD^{\to} = AB^{\to}$ и $|AD| = |CD| = |AB|$. Следователно $D = B$. Значи $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA}$ и $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB}$ са нулеви свързани вектори, така че от Пример 1 получаваме $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

ii. $A \neq C$.

Означаваме $x = |AB| = |CD|$, $y = |BC|$. Имаме следните две възможности:

Върху лъча $AB^{\to}$ точката B е преди точката C. Следователно $|AC| = x + y = |BD|$.

Върху лъча $AB^{\to}$ точката B е след точката C. Следователно $|AC| = x - y = |BD|$.

Значи и в двата случая имаме $|AC| = |BD|$, а също така и в двата случая имаме $AC^{\to} \supset BD^{\to}$. Следователно и в двата случая $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

(б) Правите AB и CD са различни.

Следователно $AB^{\to} \uparrow\uparrow CD^{\to}$ означава, че правите AB и CD са успоредни и B и D са в една и съща полуравнина в равнината $ABCD$ относно правата AC. Тъй като освен това имаме $|AB| = |CD|$, то $ABDC$ е успоредник. Следователно $|AC| = |BD|$ и освен това правите AC и BD са успоредни и C и D са от една и съща полуравнина в равнината $ABCD$ относно правата AB (защото $CD \parallel AB$ и следователно CD не пресича AB), тоест $AC^{\to} \uparrow\uparrow BD^{\to}$. Значи $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

С това всички случаи са изчерпани и твърдението е доказано. $\square$

Забележка 11 Наименованието „свойство на успоредника“ на горното твърдение идва от случая 2.(б), защото това всъщност е следната добре известната теорема:
Ако в един четириъгълник две срещуположни страни са успоредни и имат равни дължини, то той е успоредник и следователно и другите две срещуположни страни са успоредни и имат равни дължини.