Дефиниция 0.1. *Казваме, че $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ е* затворена относно включване *фамилия от подмножества на X, ако за всяко множество $A \in \mathcal{F}$:*

$$\forall B(B \subseteq A \to \mathcal{F}).$$

Дефиниция 0.2. *Нека X е крайно множество, а $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Казваме, че $\mathcal{F}$ е* матроид *над X, ако изпълнява следните две свойства:*

1. *$\mathcal{F}$ е непразна затворена затворена фамилия от множества.*

2. *винаги когато $A, B \in \mathcal{F}$ и $|A| > |B|$, има елемент $a \in A \setminus B$, за който $B \cup \{a\} \in \mathcal{F}$.*

Лема 0.1. *Нека $X \subseteq \mathbb{R}^d$ е крайно множество от вектори. Нека $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ е фамилията, която се състои от всички подмножества на X, които представляват множества от линейно независими вектори. Тогава $\mathcal{F}$ е матроид на X.*

Доказателство. Ясно е, че ако $A \subseteq X$ са линейно независими и $B \subseteq A$, то и B е множество от линейно независими вектори. Следователно, $\mathcal{F}$ е затворено относно включване. Нека сега $A, B \in \mathcal{F}$ и $|A| > |B| = m$. Нека, $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1} \in A$ са различни вектори. Да допуснем, че $B \cup \{a_i\} \notin \mathcal{F}$ за всяко $i \leq m+1$. Тогава a_i е линейна комбинация на векторите от B за всяко i, защото B е линейно независимо. Тъй като $dim(span(B)) = m$, то това означава, че $\{a_1, \ldots, a_{m+1}\}$ са линейно зависими. Противоречие. ☐

Дефиниция 0.3. *Нека X е крайно множество, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ е затворено надолу, а $Y \subseteq X$. Казваме $A \subseteq Y$ е максимално по включване подмножество Y спрямо $\mathcal{F}$, ако за всеки елемент $y \in Y \setminus A$, $A \cup \{y\} \notin \mathcal{F}$.*

Казваме, че $\mathcal{F}$ е балансирано *ако за всяко $Y \subseteq X$ и всеки две максимални по включване множества $A, B \subseteq Y$ относно $\mathcal{F}$, $|A| = |B|$.*

Лема 0.2. *Нека $G = (V, E)$ е неориентиран граф, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ е фамилията от онези множества от ребра $E' \subseteq E$, за които (V, E') е гора. Тогава $\mathcal{F}$ е балансирано множество над E.*

Доказателство. Да си примоним, че един граф е гора точно когато е ацикличен. Съответно компонентите на свързаност на всяка гора са дървета. И така, нека $E' \in \mathcal{F}$ и $E'' \subseteq E$. Тъй като (V, E') е ацикличен граф, то и (V, E'') е ацикличен граф и следователно е гора. Това показва, че $E'' \in \mathcal{F}$, тоест $\mathcal{F}$ е затворено относно включване.

Нека сега $Y \subseteq E$. Нека $C_1, \ldots, C_k$ са компонентите на свързаност на графа (V, Y), а $E' \subseteq Y$ е елемент на $\mathcal{F}$. Ясно е, че всяка компонента на свързаност на (G, E') се съдържа в някоя от компонентите C_i. Нещо, повече ако има различни компоненти C', C'' в графа (V, E'), които се съдържат в една и съща компонента на свързаност C_i, то в C_i прост път от C' до C'', да кажем $u \to^*_{C_i} v$. Тогава, ако w е последният връх по този път, който принадлежи на C', то реброто ww', което следва w, не е от E'. Следователно $E' \cup \{ww'\} \in \mathcal{F}$ и $E' \cup \{ww'\} \subseteq Y$. Следователно, E' е максимално по включване подмножество на Y относно $\mathcal{F}$ точно когато (V, E') има k компоненти на свързаност. Но тъй като (V, E') е гора, то това означава, че $|E'| = |V| - k$, което не зависи от избора на максималното по включване множество E'. Следователно $\mathcal{F}$ е балансирано. ☐

Лема 0.3. *Нека $\mathcal{F}$ е матроид над X, тогава $\mathcal{F}$ е балансирано.*

Доказателство. Наистина, ако A и B са максимални по включване подмножества на $Y \subseteq X$ спрямо $\mathcal{F}$. Да допуснем, че $|A| \neq |B|$ и нека, без ограничение на общността, нека $|A| > |B|$. Тогава има $a \in A \setminus B$, за който $B \cup \{a\} \in \mathcal{F}$. Тъй като $a \in A \subseteq Y$, то $B \subsetneq B \cup \{a\} \subseteq Y$, тоест B не е максимално по включване подмножество на Y спрямо $\mathcal{F}$. Противоречие, следователно $|A| = |B|$. ☐

Лема 0.4. *Нека X е крайно, а $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ е непразна, затворена надолу фамилия от множества. Ако $\mathcal{F}$ е балансирано, то $\mathcal{F}$ е матроид.*

Доказателство. Нека $A, B \in \mathcal{F}$ са произволни и $|A| > |B|$. Тогава $Y = A \cup B \subseteq X$. Нека $A' \subseteq Y$ е максимално по включване подмножество на Y спрямо $\mathcal{F}$, което съдържа A. Тъй като Y е крайно, такова има. Тъй като $|A'| \geq |A| > |B|$ и $\mathcal{F}$ е балансирано, то B не е максимално по включване. Следователно има $a \in Y \setminus B$, за което $B \cup \{a\} \in \mathcal{F}$. Но $Y = A \cup B$ и тъй като $a \notin B$, то $a \in A$. ☐

Като директно следствие получаваме, че:

Corollary 0.1. *Нека $G = (V, E)$ е неориентиран граф, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ е фамилията от онези множества от ребра $E' \subseteq E$, за които (V, E') е гора. Тогава $\mathcal{F}$ е матроид на X.*

Дефиниция 0.4. Базис *на матроид $\mathcal{F}$ над X наричаме множеството $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ от максималните по включване подмножества на X спрямо $\mathcal{F}$.*

Теорема 0.1. *Нека X е крайно множество, а $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ е непразна затворена фамилия от подмножества на X. Тогава следните са еквивалентни:*

1. *$\mathcal{F}$ е матроид.*

2. *за всяка функция $w : X \to \mathbb{Q}_0^+$ алчният алгоритъм за $(X, \mathcal{F}, w)$ намира множество $A \in \mathcal{F}$, което максимизира $w(A)$, т.е.:*
$$w(A) = \max\{w(B) \mid B \in \mathcal{F}\}$$

3. *за всяка функция $w : X \to \mathbb{Q}$ алчният алгоритъм за $(X, \mathcal{F}, w)$ намира множество $A \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$, което максимизира $w(A)$.*
$$w(A) = \max\{w(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})\}$$

4. *за всяка функция $w : X \to \mathbb{Q}$ дуалният алчен алгоритъм за $(X, \mathcal{F}, w)$ намира множество $A \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$, което минимизира $w(A)$.*
$$w(A) = \min\{w(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})\}$$

Доказателство. Нека за всяка функция алчният $w : X \to \mathbb{Q}_0^+$ алчният алгоритъм за $(X, \mathcal{F}, w)$ намира множество $A \in \mathcal{F}$, което максимизира $w(A)$, т.е.:
$$w(A) = \max\{w(B) \mid B \in \mathcal{F}\}$$
Нека $A, B \in \mathcal{F}$ и $|A| > |B|$. Нека $a = |A|$, $b = |B|$. Нека $w : X \to \mathbb{Q}_0^+$ е функцията, за която:
$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} - \frac{1}{a^2}, \text{ ако } x \in B \\ \frac{1}{a}, \text{ ако } x \in A \setminus B \\ 0, \text{ ако } x \notin A \cup B \end{cases}.$$
Тогава, лесно се вижда, че $\frac{1}{b} - \frac{1}{a^2} > \frac{1}{a}$. Наистина, това неравенство е еквивалентно на $a^2 > b(a+1)$ и последното е очевидно, защото $b \leq a - 1$. Поради това, алчният алгоритъм ще разгледа първо всичко елементи на B, след това всички елементи на A и накрая всички останали. Тъй като $B \in \mathcal{F}$, то след като разгледа елементите от B, алгоритъмът ще е акумулирал точно B, чиято цена ще е $w(B) = 1 - \frac{b}{a^2}$. Ако никой елемнт на $A \setminus B$ не може да се добави, то алгоритъмът ще намери множество с цена $w(B) = 1 - \frac{b}{a^2}$. От друга страна:
$$w(A) = \sum_{x \in A \setminus B} w(x) + \sum_{x \in A \cap B} w(x) = \sum_{x \in A \setminus B} \frac{1}{a} + \sum_{x \in A \cap B} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a^2}\right) > \sum_{x \in A \setminus B} \frac{1}{a} + \sum_{x \in A \cap B} \frac{1}{a} = \frac{|A|}{a} = 1.$$
Тъй като алгоритъмът е коректен, то той добавя поне един елемент от $A \setminus B$ към B и следователно има $a \in A \setminus B$, за което $B \cup \{a\} \in \mathcal{F}$. Следователно $\mathcal{F}$ е матроид.

Нека сега $\mathcal{F}$ е матроид и $w : X \to \mathbb{Q}_0^+$. Нека $w(x_1) \geq w(x_2) \cdots \geq w(x_n)$ е редът, в който алчният алгоритъм разглежда елементите на X. Нека A е множеството, което намира алчният алгоритъм и $Y_i = \{x_1, \ldots, x_i\}$, а $A_i = Y_i \cap A$. Да забележим, че A_i а максимално по включване подмножество на Y_i спрямо $\mathcal{F}$. Наистина, ако това не е вярно, то има елемент $x_j \in Y_i \setminus A_i$, за който $A_i \cup \{x_j\} \subseteq \mathcal{F}$. Но тогава, понеже $\mathcal{F}$ е затворено относно включване, то $A_i \cap Y_j \cup \{x_j\} \in \mathcal{F}$. Това означава, че $A_j \cup \{x_j\} \in \mathcal{F}$ и в същото алгоритъмът не е добавил x_j към A. Това е абсурд.

Сега да забележим, че ако $B \subseteq X$ и $B_i = B \cap Y_i$, то $w(B_{i+1}) - w(B_i) = w(x_{i+1})(|B_{i+1}| - |B_i|)$. Оттук получаваме, че:
$$w(B) = \sum_{i=1}^{n}(w(B_i) - w(B_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} w(x_i)(|B_i| - |B_{i-1}|) = \sum_{i=2}^{n} |B_i|(w(x_i) - w(x_{i-1})) + |B_1| w(x_1).$$
Сега, ако $B \in \mathcal{F}$, то $|B_i| \leq |A_i|$ и тъй като $w(x_i) - w(x_{i-1}) \geq 0$, то $|A_i|(w(x_i) - w(x_{i-1})) \geq |B_i|(w(x_i) - w(x_{i-1}))$. Накрая, ако $|B_1| \neq 0$, то $B_1 = \{x_1\} \in \mathcal{F}$ и следователно $A_1 = \{x_1\}$. Тъй като $w(x_1)$, това означава, че $|B_1| w(x_1) \leq |A_1| w(x_1)$. С това показахме, че $w(A) \geq w(B)$ за всяко $b \in \mathcal{F}$.

Останалата част от теоремата може да се види така. Първо, от предишната лема всеки два елемента $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ имат равен брой елементи. Следователно оптимизацията на $w(B)$ за $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ е еквивалентна на оптимизацията на $w'(B)$, където $w'(x) = w(x) + c$ за произволна фиксирана константа $c \in \mathbb{Q}$. $\square$