3. Монотонни редици. Ограничени монотонни редици. Неперово число

Монотонни редици

Дефиниция 1

(а) Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е <u>монотонно растяща</u>, ако $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n$, т.е.

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots ; \tag{1}$$

(б) Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е <u>строго монотонно растяща</u>, ако $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$;

(в) Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е <u>монотонно намаляваща</u>, ако $a_n \ge a_{n+1}$ $\forall n$, т.е.

(г) Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е <u>строго монотонно намаляваща</u>, ако $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$.

Примери: 1) $1, 2, \ldots, n, \ldots$ — строго монотонно растяща.
2) $1, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ — монотонно растяща.
3) $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ — строго монотонно намаляваща.

Ограничени монотонни редици

Теорема

Всяка ограничена монотонна редица е сходяща.

Д-во: Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена монотонно растяща редица.
Ще докажем, че

$$\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}. \tag{2}$$

Да положим $\ell := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ще покажем, че е изпълнена дефиницията за граница на редица, т.е. ще покажем, че колкото и малко положително число ε да вземем, от известно място нататък членовете на редицата са на разстояние по-малко от ε от ℓ.
Нека $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано. Тогава $\ell - \varepsilon$ не е горна граница на множеството от членове на редицата, защото е $< \ell$, а ℓ е най-малката горна граница на това множество. Тогава съществува член на редицата, да означим номера му с n_0, такъв, че $a_{n_0} > \ell - \varepsilon$.
Сега, като вземем предвид, че редицата е монотонно растяща, съобразяваме, че всичките ѝ членове след a_{n_0} също са $> \ell - \varepsilon$.

Така установихме, че съществува $n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че

$$a_n > \ell - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0. \tag{3}$$

От друга страна, ℓ е горна граница на множеството от членове на редицата и следователно

$$a_n \leq \ell \quad \forall n. \tag{4}$$

От (3)-(4) следва, че

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq \ell \quad \forall n \geq n_0, \tag{5}$$

откъдето получаваме, че

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0. \tag{6}$$

С това показахме, че ℓ удовлетворява дефиницията за граница на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и установихме твърдението на теоремата за монотонно растящи редици.

Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена монотонно намаляваща редица, то $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена монотонно растяща редица и според вече доказаното е сходяща. Следователно сходяща е и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Всъщност, ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена монотонно намаляваща редица, то

$$\lim a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}. \tag{7}$$

Неперово число

Разглеждаме редицата $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Ще докажем, че тя е:

(а) монотонно растяща,

(б) ограничена отгоре: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Тогава от теоремата ще следва, че тя е сходяща. Прието е нейната граница да се озачава с буквата e. Това число се нарича неперово, а също и число на Ойлер. То е ирационално

$$e = 2,71828\dots$$

Дефиниция 2

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{8}$$

(a) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща

Развиваме $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ чрез биномната формула:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \tag{9}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \tag{10}$$

Сравняваме k-тите членове в двете суми горе:

$$k=0 : \binom{n}{0}\frac{1}{n^0} = 1 \quad \text{и} \quad \binom{n+1}{0}\frac{1}{(n+1)^0} = 1, \tag{11}$$

$$k=1 : \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} = n\frac{1}{n} = 1 \quad \text{и} \quad \binom{n+1}{1}\frac{1}{(n+1)^1} = 1, \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
& 2 \le k \le n: && (13)\\
& \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} && (14)\\
& = \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} && (15)\\
& = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right), && (16)\\
& \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right), && (17)
\end{aligned}
$$

в развитието на $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ има още едно събираемо: за $k = n+1$ — то е положително. Използваме, че $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, откъдето $1 - \frac{\ell}{n} < 1 - \frac{\ell}{n+1}$ за всяко $\ell \in \mathbb{N}$. Следователно

$$
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{18}
$$

(б) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре

Нека $n \geq 2$. Отново използваме полученото по-горе в (9), (11), (12) и (16):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1} \cdots \underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{<1}$$

$$< 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2!}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3!}}_{<\frac{1}{2.2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n!}}_{<\frac{1}{\underbrace{2.2.\cdots.2}_{n-1 \text{ на брой}}}}$$

$$< 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < \frac{1}{1-\frac{1}{2}}} < 1 + 2 = 3.$$

$2 \leq e \leq 3$

Като вземем предвид, че първият член на редицата $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ е равен на 2, от (а) и (б) следва, че

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

След граничен преход $n \to \infty$ в тези неравенства (Т-ма 2, Тема 2), получаваме

$$2 \leq \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3. \tag{20}$$

Така установихме, че

$$2 \leq e \leq 3. \tag{21}$$