

## 2.2 Дефиниция на многомерния интеграл

В настоящия параграф ще дадем дефиниция на двоен интеграл (която лесно се прехвърля и за интеграл върху пространство с по-висока от две размерност). Ще напомним, че в едномерния случай имаме две еквивалентни дефиниции на определения интеграл - дефиниция на Риман и дефиниция на Дарбу. В многомерния случай ситуацията е по-сложна - въвеждат се четири дефиниции, специална дефиниция - съответно на Риман и Дарбу, и обща дефиниция - също на Риман и Дарбу. (Смисълът на тези думи ще бъде обяснен по-долу.)

**Специална дефиниция на двойния интеграл.** Нека  $f(x, y)$  е функция, дефинирана в измеримо (и следователно ограничено) подмножество на равнината. Ще започнем с частния случай, когато дефиниционното множество е правоъгълник.

**Двоен интеграл върху правоъгълник: дефиниция на Риман.** Нека  $f(x, y)$  е дефинирана в правоъгълника  $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ . Да изберем делящи точки  $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m$  така че  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ . Ще означим с  $\Delta_{ij}$  правоъгълника  $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ; тогава

$$\Delta = \cup_{i=1}^n \cup_{j=1}^m \Delta_{ij}.$$

Да изберем по една точка  $P_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in \Delta_{ij}$ ; това означава, че  $\xi_{ij} \in [x_{i-1}, x_i], \eta_{ij} \in [y_{j-1}, y_j]$ .

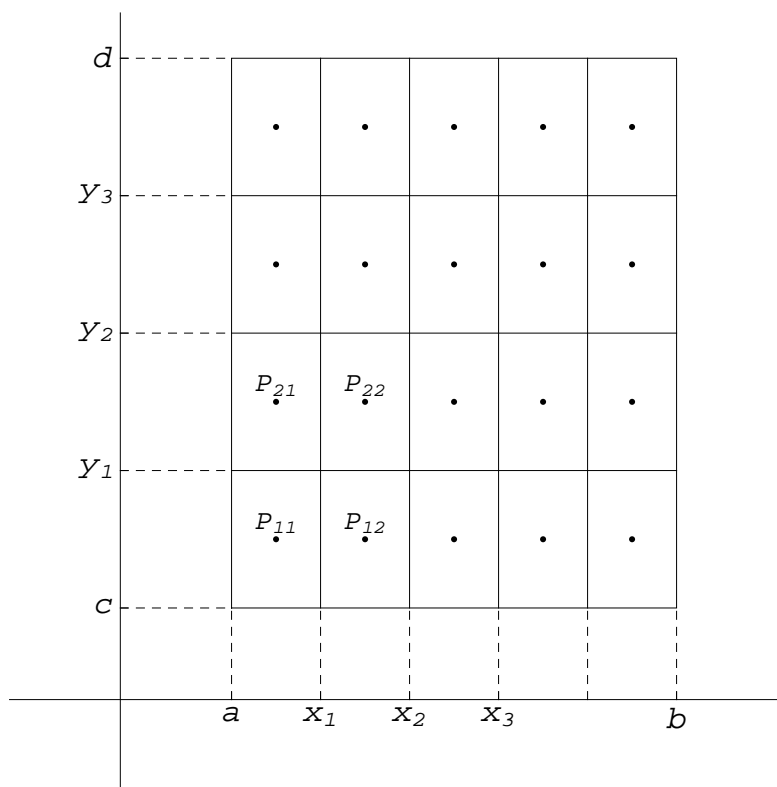
Съвокупността от всички делящи и междинни точки ще наричаме разбиване на  $\Delta$ . За всяко такова разбиване  $\tau$  ще означаваме с  $R_\tau(f)$  (или просто  $R_\tau$ ) съответната риманова сума:

$$R_\tau(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(P_{ij}) \mu(\Delta_{ij}).$$

Ще въведем понятието диаметър на разбиването  $\tau$ :

$$\text{diam } \tau = \max_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}.$$

(Ще отбележим, че диаметърът не зависи от избора на междинните точки, а само от делящите.)



Разбиване на правоъгълника  $\Delta = [a, b] \times [c, d]$

**Дефиниция.** Казваме, че двойният интеграл от  $f(x, y)$  по правоъгълника  $\Delta$  е равен на числото  $I(f)$ , ако

$$I(f) = \lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} R_\tau(f).$$

**Забележка.** Лесно се вижда, че изискването " $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ " е равносилно с това, максималната дължина на подинтервалите  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $[y_{j-1}, y_j]$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  също да клони към нула.

Двойният интеграл се означава по следния начин:

$$I(f) = \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx dy.$$

Ще опишем по-подробно понятието за граница, използвано в горната дефиниция:

Равенството  $I(f) = \lim_{diam \tau \rightarrow 0} R_{\tau}(f)$  означава, че за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , така че за всяко разбиване  $\tau$ , за което  $diam \tau < \delta$ , да имаме  $|I(f) - R_{\tau}(f)| < \varepsilon$ .

Разбира се, тази граница не е длъжна да съществува; ако тя съществува, функцията  $f(x, y)$  се нарича интегруема по Риман в  $\Delta$ .

**Двоен интеграл върху правоъгълник: дефиниция на Дарбу.** Тук ще предположим предварително, че  $f(x, y)$  е ограничена в  $\Delta$ , и ще положим

$$m_{ij} = \inf f(P) : P \in \Delta_{ij}, \quad M_{ij} = \sup f(P) : P \in \Delta_{ij}.$$

Както в едномерния случай, за всяко разбиване  $\tau$  ще образуваме съответната малка и голяма сума на Дарбу:

$$s_{\tau}(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \cdot \mu(\Delta_{ij}), \quad S_{\tau}(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \cdot \mu(\Delta_{ij}).$$

Лесно се вижда, че множествата от всички малки и от всички големи суми на Дарбу са ограничени; наистина, ако  $m$  и  $M$  са съответно долна и горна граница за функцията  $f(x, y)$  върху  $\Delta$ , то за всяко  $\tau$  имаме неравенствата  $m \leq m_{ij} \leq M_{ij} \leq M$  и следователно

$$m \cdot \mu(\Delta) \leq s_{\tau}(f) \leq S_{\tau}(f) \leq M \cdot \mu(\Delta).$$

Тогава можем да дефинираме числата  $\underline{I}(f)$ ,  $\bar{I}(f)$ , наречени долен и горен интеграл от  $f(x, y)$ , с формулите

$$\underline{I}(f) = \sup_{\tau} s_{\tau}(f), \quad \bar{I}(f) = \inf_{\tau} S_{\tau}(f).$$

Малко по-надолу ще докажем, че винаги  $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$ ; за нас е важен случаят, когато те съвпадат.

**Дефиниция.** Казваме, че функцията  $f(x, y)$  е интегруема по Дарбу в  $\Delta$ , ако  $I(f) = \bar{I}(f)$ ; общата им стойност се бележи с  $I(f)$  и се нарича интеграл от  $f$  върху  $\Delta$ .

**Двоен интеграл върху произволно измеримо множество – специална дефиниция.** Нека  $f(x, y)$  е дефинирана за  $(x, y) \in \mathbf{D}$ , където  $\mathbf{D}$  е измеримо подмножество на равнината. Тъй като  $\mathbf{D}$  е и ограничено, можем да изберем правоъгълник  $\Delta$ , съдържащ  $\mathbf{D}$ . Да означим с  $\tilde{f}(x, y)$  или  $\tilde{f}(P)$ , продължението на функцията  $f$  с нулеви стойности върху цялото  $\Delta$ :

$$\tilde{f}(P) = \begin{cases} f(P), & P \in \mathbf{D} \\ 0, & P \in \Delta \setminus \mathbf{D} \end{cases}$$

**Дефиниция.** Ще дефинираме двойния интеграл от  $f(x, y)$  върху  $\mathbf{D}$  като равен на двойния интеграл от  $\tilde{f}(x, y)$  върху  $\Delta$ , определен в предния абзац:

$$\iint_{\mathbf{D}} f(x, y) \, dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\Delta} \tilde{f}(x, y) \, dx dy.$$

Лесно се вижда, че стойността на интеграла не зависи от избора на правоъгълника  $\Delta$ .

По този начин дефинициите на Риман и Дарбу се пренасят към случая на произволно измеримо дефиниционно множество; ще ги наричаме специални дефиниции, съответно на Риман и Дарбу.

**Обща дефиниция на двойния интеграл.** Ще дадем една по-обща дефиниция на разбиване. Нека  $\mathbf{D}$  е измеримо множество в равнината, и нека  $\mathbf{D}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , са измерими подмножества на  $\mathbf{D}$ , такива, че

$$\mathbf{D} = \cup_{i=1}^n \mathbf{D}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{D}_i^o \cap \mathbf{D}_j^o = \emptyset \text{ за } i \neq j$$

- ще казваме, че в този случай имаме измеримо разбиване на  $\mathbf{D}$  на неп-ресичащи се множества. Ще казваме, че разбиването е специално, ако то се получава чрез разрязване по хоризонтални и вертикални линии, както беше направено в предишните точки на този параграф. Всъщност, разликата между общите и специални дефиниции (на Риман и

Дарбу) се състои в това, дали се използват произволни разбивания на дефиниционната област, или само специални.

**Обща дефиниция на Риман.** Нека  $\mathbf{D}$  е измеримо множество в равнината, и  $f(x, y)$  е функция, дефинирана в  $\mathbf{D}$ . Нека  $\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^n \mathbf{D}_i$  е разбиване на измеримото множество  $\mathbf{D}$ . Да изберем по една точка  $P_i \in \mathbf{D}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Под риманова сума, съответстваща на разбиването  $\tau$  и точките  $\{P_i\}$ , разбираме израза

$$R_\tau(f) = \sum_{i=1}^n f(P_i) \mu(\mathbf{D}_i).$$

Нуждаем се от определение на понятието диаметър на разбиването. Ще напомним, че ако  $\mathbf{A}$  е ограничено подмножество в равнината, неговия диаметър е максималното разстояние<sup>\*</sup> между две негови точки.

$$\text{diam } \mathbf{A} = \sup_{P, Q \in \mathbf{A}} \rho(P, Q).$$

Ако  $\tau$  е горното разбиване, дефинираме

$$\text{diam } \tau = \max_{i=1, \dots, n} (\text{diam } \mathbf{D}_i).$$

Лесно се вижда, че за специални разбивания тази дефиниция съвпада с дадената по-горе. Сега можем да възпроизведем дефиницията на Риман. Отново дефинираме

$$I(f) = \lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} R_\tau(f),$$

като тук се разглеждат произволни измерими разбивания на  $\mathbf{D}$ .

**Обща дефиниция на Дарбу.** Аналогично на горното, полагаме

$$m_i = \inf f(P) : P \in \mathbf{D}_i, \quad M_{ij} = \sup f(P) : P \in \mathbf{D}_i,$$

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^n m_i \mu(\mathbf{D}_i), \quad S_\tau(f) = \sum_{i=1}^n M_i \mu(\mathbf{D}_i),$$

---

<sup>\*</sup>Така, диаметърът на един правоъгълник е равен на неговия диагонал, а диаметърът на един кръг е равен на неговия диаметър.

и отново

$$\underline{I}(f) = \sup_{\tau} s_{\tau}(f), \quad \bar{I}(f) = \inf_{\tau} S_{\tau}(f).$$

Ще покажем, че  $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$ . Ще казваме, че разбиването  $\tau'$  следва разбиването  $\tau$  (записва се  $\tau' \succ \tau$ ), ако  $\tau'$  е получено от  $\tau$  чрез допълнително разбиване на някои от неговите дялящи множества.

**Лема 1.** *При допълнително разбиване малките суми се увеличават, а големите намаляват. По-точно, ако  $\tau' \succ \tau$ , то*

$$s_{\tau'}(f) \geq s_{\tau}(f), \quad S_{\tau'}(f) \leq S_{\tau}(f).$$

**Доказателство.** Достатъчно е да докажем твърдението, когато  $\tau'$  е получено от  $\tau$  чрез разбиване на едно от дялящите множества на  $\tau$  на две части. Наистина, в общия случай може да се счита, че  $\tau'$  се получава от  $\tau$  чрез краен брой такива стъпки; ако на всяка стъпка е доказано, че големите суми намаляват, оттук се вижда, че  $S_{\tau'}(f) \leq S_{\tau}(f)$ , и аналогично за малките суми.

Така, нека имаме разбиването  $\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^n \mathbf{D}_i$ , нека  $\mathbf{D}_1$  е разбито на две измерими подмножества с непресичащи се вътрешности:  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}' \cup \mathbf{D}''$ , и нека разбиването  $\tau'$  се определя с  $\mathbf{D} = \mathbf{D}' \cup \mathbf{D}'' \cup \mathbf{D}_2 \cup \dots \cup \mathbf{D}_n$ . Да означим с  $m', m''$  точните долни граници на  $f$  върху множествата  $\mathbf{D}'$ ,  $\mathbf{D}''$ , и съответно с  $M', M''$  - нейните точни горни граници върху същите множества. Очевидно имаме  $m', m'' \geq m_1$  и  $M', M'' \leq M_1$ . Тогава имаме

$$\begin{aligned} s_{\tau'}(f) - s_{\tau}(f) &= m' \cdot \mu(\mathbf{D}') + m'' \cdot \mu(\mathbf{D}'') - m_1 \cdot \mu(\mathbf{D}_1) = \\ &= m' \cdot \mu(\mathbf{D}') + m'' \cdot \mu(\mathbf{D}'') - m_1 \cdot (\mu(\mathbf{D}') + \mu(\mathbf{D}'')) = \\ &= (m' - m_1) \mu(\mathbf{D}') + (m'' - m_1) \mu(\mathbf{D}'') \geq 0, \end{aligned}$$

и по същия начин доказателството протича за големите суми (направете го!). ■

**Лема 2.** *Ако  $\tau', \tau''$  са две разбивания на  $\mathbf{D}$ , то  $s_{\tau'}(f) \leq S_{\tau''}(f)$  (т.е. коя да е малка сума на Дарбу не надминава коя да е голяма).*

**Доказателство.** Нека  $\tau' : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^n \mathbf{D}'_i$  и  $\tau'' : \mathbf{D} = \cup_{j=1}^m \mathbf{D}''_j$ . Да означим с  $\tau$  разбиването

$$\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^n \cup_{j=1}^m (\mathbf{D}'_i \cap \mathbf{D}''_j).$$

Очевидно  $\tau$  е измеримо разбиване, и лесно се вижда, че  $\tau \succ \tau'$  и  $\tau \succ \tau''$ .  
От лема 1 имаме

$$s_{\tau'}(f) \leq s_{\tau}(f) \leq S_{\tau}(f) \leq S_{\tau''}(f).$$

**Забележка.** Ако  $\tau$  и  $\tau'$  са специални разбивания, то  $\tau''$  е също специално разбиване. Следователно твърдението на лема 2, както и следващото следствие, са валидни и за специалната дефиниция на Дарбу.

**Следствие.** За всяка функция  $f$  е изпълнено неравенството  $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$ .

Наистина, в лявата страна на неравенството  $s_{\tau'}(f) \leq S_{\tau''}(f)$  можем да вземем супремума по всички разбивания  $\tau'$ , с което получаваме  $\underline{I}(f) \leq S_{\tau''}(f)$ . Вземайки отдясно инфимума по всички  $\tau''$ , получаваме исканото неравенство.

От горните твърдения непосредствено следва:

**Критерий за интегрируемост по Дарбу.** Функцията  $f(x, y)$  е интегрируема (в общия или специалния смисъл) по Дарбу точно тогава, когато за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува разбиване  $\tau$  (общо или специално) на дефиниционната област такова, че

$$S_{\tau}(f) - s_{\tau}(f) < \varepsilon.$$

Наистина, ако горното условие е изпълнено, то веднага се вижда, че  $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ ; обратно, ако долният и горният интеграл съвпадат и са равни на  $I$ , то можем да намерим разбивания  $\tau'$ ,  $\tau''$ , така че

$$s_{\tau'}(f) > I - \varepsilon/2, \quad S_{\tau''}(f) < I + \varepsilon/2, \quad \text{и следователно } S_{\tau''}(f) - s_{\tau'}(f) < \varepsilon.$$

Да изберем разбиването  $\tau$  такова, че  $\tau \succ \tau', \tau''$ . Тогава от установените в лема 2 неравенства следва, че  $S_{\tau}(f) - s_{\tau}(f) < \varepsilon$ .

**Еквивалентност на различните дефиниции на двойния интеграл<sup>\*</sup>.** По-горе изложихме четири различни дефиниции на двойния (и изобщо многомерния) интеграл: дефиниции на Риман

<sup>\*</sup>Читателят, който не се интересува от доказателството на този факт, може да прескочи остатъка на параграфа.

и на Дарбу, всяка от тях в общ и специален вариант. Ще докажем, че тези дефиниции са еквивалентни, и по-точно, че е в сила твърдението:

**Теорема (еквивалентност на дефинициите).** *Ако една функция е интегрируема по една от горните дефиниции, тя е интегрируема и по всички останали, и съответните стойности на интеграла по всяка от тях съвпадат.*

**Доказателство.** Доказателството ще проведем по следната схема:

$$\begin{array}{ccc} \text{Риман обща} & \Rightarrow & \text{Риман специална} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \text{Дарбу обща} & \Leftarrow & \text{Дарбу специална} \end{array}$$

Ще докажем всяка от горните импликации.

**1/ Риман обща  $\Rightarrow$  Риман специална:** Принципът на доказателството може да бъде формулиран така: ако границата съществува за общи разбивания с диаметър, клонящ към нула, то тя съществува и за частния случай на специални разбивания. Това разсъждение е вярно в случая, когато дефиниционната област е правоъгълник, но в общия случай то трябва да бъде проведено по-прецизно. Римановите суми за  $f(x, y)$  и за нейното продължение  $\tilde{f}(x, y)$  могат да се различават близо до контура на дефиниционната област. Ще използваме следната

**Лема 3.** *Нека  $\mathbf{D}$  е измеримо подмножество на равнината, и  $\Delta$  е правоъгълник, съдържащ  $\mathbf{D}$ . Тогава за всяко  $\varepsilon > 0$  може да се намери  $\delta > 0$  такова, че за всяко специално разбиване  $\tau : \Delta = \cup_{i=1}^n \cup_{j=1}^m \Delta_{ij}$  с  $\text{diam } \tau < \delta$  сумата от лицата на тези правоъгълници  $\Delta_{ij}$ , които имат общи точки с контура  $b\mathbf{D}$  на  $\mathbf{D}$ , да бъде по-малка от  $\varepsilon$ .*

**Доказателство.** Тъй като  $\mathbf{D}$  е измеримо, то  $b\mathbf{D}$  е пренебрежимо по Пеано-Жордан. Да изберем елементарно множество  $\mathbf{E}$  такова, че  $b\mathbf{D} \subset \mathbf{E}^0$  и  $\mu(\mathbf{E}) < \varepsilon$ . Тогава двете компактни множества  $b\mathbf{D}$  и  $b\mathbf{E}$  не се пресичат, и следователно разстоянието между тях  $\rho(b\mathbf{D}, b\mathbf{E})$  е положително (виж §1.3, упр. 3). Да го означим с  $\delta$ . Тогава, ако  $\text{diam } \tau < \delta$ , то за всеки правоъгълник  $\Delta_{ij}$ , който има общи точки с  $b\mathbf{D}$ , е изпълнено  $\Delta_{ij} \subset \mathbf{E}$ . Следователно сумата на лицата на всички такива правоъгълници не надминава лицето на  $\mathbf{E}$ , т.е. е по-малко от  $\varepsilon$ . (Да отбележим, че доказателството е в сила и за общи разбивания. Освен това, твърдението остава вярно, ако вместо  $b\mathbf{D}$  се разглежда произволно затворено и пренебрежимо подмножество на  $\mathbf{D}$ .) ■



**Доказателство на импликацията 1/.** Нека  $f$  е интегрируема върху  $\mathbf{D}$  в смисъл на общата дефиниция на Риман, и нека  $I$  да е съответния интеграл. Да изберем правоъгълник  $\Delta$ , съдържащ  $\mathbf{D}$ , и нека  $\tilde{f}(x, y)$  е продължението на  $f$  с нула върху цялото  $\Delta$ , което беше използвано по-горе в специалните дефиниции. Да фиксираме  $\varepsilon > 0$ , и да вземем такова  $\delta_1 > 0$ , така че за всяко разбиване  $\tau$  на  $\mathbf{D}$  с  $\text{diam } \tau < \delta_1$  да имаме  $|I - R_\tau(f)| < \varepsilon$ . Да изберем  $\delta$ , съответстваща на  $\varepsilon$  както в лема 3.

Нека сега  $\tilde{\tau}: \Delta = \cup_{i=1}^n \cup_{j=1}^m \Delta_{ij}$  е специално разбиване на правоъгълника  $\Delta$  с  $\text{diam } \tilde{\tau} < \min(\delta, \delta_1)$ , и  $\tilde{P}_{ij} \in \Delta_{ij}$ . Нека означим с  $\tau$  съответното разбиване на  $\mathbf{D}$ , породено от множествата  $\mathbf{D}_{ij} = \mathbf{D} \cap \Delta_{ij}$ , и да изберем точките  $P_{ij} \in \mathbf{D}_{ij}$  така, че  $P_{ij} = \tilde{P}_{ij}$  в случая, когато  $\Delta_{ij}$  се съдържа във вътрешността на  $\mathbf{D}$  (ако  $\Delta_{ij}$  пресича  $b\mathbf{D}$ , то може да имаме  $\tilde{P}_{ij} \notin \mathbf{D}$ ). Нека  $R_\tau f$  да е римановата сума, съответстваща на общото разбиване  $\tau$  и на междинните точки  $P_{ij}$ . По построение  $|I - R_\tau f| < \varepsilon$ . От друга страна,

$$R_{\tilde{\tau}} \tilde{f} - R_\tau f = \sum_{\Delta_{ij} \cap b\mathbf{D} \neq \emptyset} \left( \tilde{f}(\tilde{P}_{ij}) - f(P_{ij}) \right) \mu(\Delta_{ij})$$

и следователно, ако означим с  $C$  една горна граница за  $|f(P)|$ , получаваме

$$\left| R_{\tilde{\tau}} \tilde{f} - R_\tau f \right| \leq 2C \sum_{\Delta_{ij} \cap b\mathbf{D} \neq \emptyset} \mu(\Delta_{ij}) < 2C\varepsilon$$

В крайна сметка получаваме

$$\left| I - R_{\tilde{\tau}} \tilde{f} \right| \leq |I - R_\tau f| + \left| R_{\tilde{\tau}} \tilde{f} - R_\tau f \right| < (1 + 2C)\varepsilon$$

и може да бъде направено произволно малко. ■

**2/ Риман специална  $\Rightarrow$  Дарбу специална:** Да изберем  $\varepsilon > 0$ . За всички разбивания  $\tau$  на дефиниционната област  $\Delta$  на  $\tilde{f}$  с достатъчно малък диаметър имаме

$$R_\tau \tilde{f} = \sum_{i,j} \tilde{f}(P_{ij}) \mu(\Delta_{ij}) \in (I - \varepsilon, I + \varepsilon)$$

независимо от избора на междинните точки  $P_{ij}$ . Променяйки тези точки, можем да накараме функционалните стойности  $\tilde{f}(P_{ij})$  да клонят

към минималната  $m_{ij}$  или максималната  $M_{ij}$  стойности на функцията в  $\Delta_{ij}$ ; тогава римановата сума  $R_\tau \tilde{f}$  ще клони съответно към малката  $s_\tau \tilde{f}$  или към голямата  $S_\tau \tilde{f}$  суми на Дарбу за  $\tau$ . Чрез граничен преход получаваме, че

$$I - \varepsilon \leq s_\tau \tilde{f} \leq S_\tau \tilde{f} \leq I + \varepsilon,$$

откъдето  $S_\tau \tilde{f} - s_\tau \tilde{f} \leq 2\varepsilon$ . Според критерия на Дарбу, доказан по-горе, това означава, че  $\tilde{f}$  е интегрируема по Дарбу върху  $\Delta$ .

**3/ Дарбу специална  $\Rightarrow$  Дарбу обща:** Нека, както и по-горе, е дадена функцията  $f$  с дефиниционна област  $\mathbf{D}$ ,  $\Delta$  е правоъгълник, съдържащ  $\mathbf{D}$ , и  $\tilde{f}$  е продължението на  $f$  с нулеви стойности. Предполагаме, че  $\tilde{f}$  е интегрируема по специалната дефиниция на Дарбу в  $\Delta$ . Да фиксираме  $\varepsilon > 0$ , и нека  $\tilde{\tau}: \Delta = \cup_{i=1}^n \cup_{j=1}^m \Delta_{ij}$  е специално разбиване на  $\Delta$  такова, че  $S_{\tilde{\tau}} \tilde{f} - s_{\tilde{\tau}} \tilde{f} < \varepsilon$ . Отново ще означим с  $\tau$  съответното разбиване на  $\mathbf{D}$ :  $\tau: \mathbf{D} = \cup_{i,j} (\Delta_{ij} \cap \mathbf{D})$ . Очевидно имаме

$$s_{\tilde{\tau}} \tilde{f} \leq s_\tau f, \quad S_{\tilde{\tau}} \tilde{f} \geq S_\tau f$$

(докажете!) и следователно  $S_\tau f - s_\tau f < \varepsilon$ , т.е. критерият на Дарбу е удовлетворен.

**4/ Дарбу обща  $\Rightarrow$  Риман обща:** В това доказателство основната тежест се носи от следната теорема, чието доказателство ще дадем по-нататък:

**Теорема на Дарбу.** Ако  $f(x, y)$  е ограничена функция върху измеримото множество  $\mathbf{D}$ , и  $\tau$  пробягва всички разбивания на  $\mathbf{D}$  от общ вид, то са налице съотношенията

$$\lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} s_\tau f = \underline{I}(f), \quad \lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} S_\tau f = \bar{I}(f).$$

Ако сметнем теоремата на Дарбу за доказана, то твърдението се получава чрез прилагане на лемата за полицаите към очевидното неравенство

$$s_\tau f \leq R_\tau f \leq S_\tau f.$$

По-подробно, нека  $f$  е интегрируема върху  $\mathbf{D}$  според общата дефиниция на Дарбу. Тогава по горната теорема за всяко  $\varepsilon > 0$  можем да намерим  $\delta > 0$ , така че за всяко разбиване  $\tau$  с  $\text{diam } \tau < \delta$  да имаме

$s_\tau f > I(f) - \varepsilon$ ,  $S_\tau f < I(f) + \varepsilon$ , и следователно за всяко такова  $\tau$  ще бъде изпълнено  $I(f) - \varepsilon < R_\tau f < I(f) + \varepsilon$ .

Доказаните импликации позволяват да се твърди, че ако една от дефинициите е изпълнена, то са изпълнени и останалите три, и, разбира се, стойността на интеграла се получава една и съща. Остава само да докажем теоремата на Дарбу. ■

**Доказателство на теоремата на Дарбу.** Ще докажем твърдението за малките суми, за големите то се доказва аналогично.

Да фиксираме  $\varepsilon > 0$ . По дефиниция можем да намерим измеримо разбиване  $\tau^*$  на  $\mathbf{D}$ :  $\tau^* : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^k \mathbf{D}_i^*$  такова, че

$$s_{\tau^*} f = \sum_{i=1}^k m_i^* \mu(\mathbf{D}_i^*) > \underline{I}(f) - \varepsilon,$$

където  $m_i^* = \inf_{P \in \mathbf{D}_i^*} f(P)$ .

Нека  $\mathbf{A}$  е обединението на контурите на всички  $\mathbf{D}_i^*$ :

$$\mathbf{A} = \cup_{i=1}^k \partial \mathbf{D}_i^*.$$

Тъй като всички множества  $\mathbf{D}_i^*$  са измерими, то по критерия за измеримост от предния параграф получаваме, че  $\mathbf{A}$  е пренебрежимо множество. Лесно се вижда, че то е и затворено. Нека изберем  $\delta > 0$  както в лема 3. Това означава, че ако  $\tau : \mathbf{D} = \cup_{j=1}^n \mathbf{D}_j$  е произволно покритие на  $\mathbf{D}$  с  $\text{diam } \tau < \delta$ , то

$$\sum_{\mathbf{D}_j \cap \mathbf{A} \neq \emptyset} \mu(\mathbf{D}_j) < \varepsilon.$$

Теоремата ще бъде доказана, ако успеем да покажем, че за всички такива  $\tau$  съответната малка сума  $s_\tau f$  е достатъчно близко до  $\underline{I}(f)$ .

В доказателството на лема 2 ние видяхме как се конструира разбиване, което да следва две дадени разбивания. Тук ще намерим разбиване  $\tau_1$ , което да следва  $\tau$  и  $\tau^*$ . Това разбиване има вида

$$\tau_1 : \mathbf{D} = \cup_{j=1}^n \cup_{i=1}^k (\mathbf{D}_i^* \cap \mathbf{D}_j).$$

От една страна, от факта, че  $\tau_1 \succ \tau^*$  според лема 2 следва, че

$$s_{\tau_1} f \geq s_{\tau^*} f > \underline{I}(f) - \varepsilon.$$

От друга страна, след като  $\tau_1 \succ \tau$ , ние можем да разгледаме разбиването  $\tau_1$  като получено от разбиването  $\tau$  чрез раздробяване на неговите дялящи множества. Важно е да отбележим, че при това се раздробяват само тези множества от  $\tau$ , които имат общи точки с някои от контурите на  $\mathbf{D}_i^*$ , т.е. с множеството  $\mathbf{A}$ .

Да напишем сумата  $s_\tau f$  във вида

$$s_\tau f = \sum_{j=1}^n m_j \mu(\mathbf{D}_j) = \Sigma' + \Sigma'',$$

където в  $\Sigma'$  участват само тези  $j$ , за които  $\mathbf{D}_j \cap \mathbf{A} \neq \emptyset$ , а в  $\Sigma''$  – всички останали. Ако числото  $C$  е горна граница за стойностите на  $|f(P)|$ , то

$$|\Sigma'| < C.\varepsilon.$$

Ще направим същото и за сумата  $s_{\tau_1} f$ , съответстваща на разбиването  $\tau_1$ . Имаме

$$s_{\tau_1} f = \tilde{\Sigma}' + \tilde{\Sigma}'',$$

където във  $\tilde{\Sigma}'$  участват събираемите, получени от множества, имащи общи точки със  $\mathbf{A}$ , а в  $\tilde{\Sigma}''$  – всички останали. Тъй като множествата, участващи във  $\Sigma''$ , не се раздробяват, то

$$\Sigma'' = \tilde{\Sigma}''.$$

Оценявайки сумата  $\tilde{\Sigma}'$  по същия начин, както  $\Sigma'$ , получаваме, че

$$|\tilde{\Sigma}'| < C.\varepsilon.$$

Следователно,

$$s_{\tau_1} f - s_\tau f = \tilde{\Sigma}' - \Sigma' \leq |\tilde{\Sigma}'| + |\Sigma'| < 2C.\varepsilon.$$

Комбинирайки това с неравенството  $s_{\tau_1} f > \underline{I}(f) - \varepsilon$ , получаваме неравенството

$$s_\tau f > s_{\tau_1} f - 2C.\varepsilon > \underline{I}(f) - (2C + 1)\varepsilon,$$

изпълнено за всички разбивания  $\tau$  с  $\text{diam } \tau < \delta$ .

Теоремата на Дарбу е доказана, с което приключва и доказателството на еквивалентността на четирите дефиниции на двойния интеграл. ■

## 2.3 Основни свойства на многомерния интеграл

Тук ще изброим и докажем основните свойства на двойния интеграл. Те не се различават особено от свойствата на едномерния риманов интеграл, изучени в първата част. В предния параграф ние въведохме няколко еквивалентни дефиниции на интеграла, и при доказателството на всяко свойство ще използваме тази от тях, която е най-удобна за случая. Интеграла от  $f(x, y)$  върху  $\mathbf{D}$  ще означаваме с  $\iint_{\mathbf{D}} f(x, y) \, dxdy$  или просто с  $I(f)$ .

**Свойство 1. Линеиност и хомогенност.** Ако функциите  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  са интегрируеми върху  $\mathbf{D}$ , то и  $f(x, y) + g(x, y)$ ,  $\lambda f(x, y)$  са също интегрируеми, и

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{D}} (f(x, y) + g(x, y)) \, dxdy &= \iint_{\mathbf{D}} f(x, y) \, dxdy + \iint_{\mathbf{D}} g(x, y) \, dxdy, \\ \iint_{\mathbf{D}} \lambda f(x, y) \, dxdy &= \lambda \iint_{\mathbf{D}} f(x, y) \, dxdy. \end{aligned}$$

**Доказателство.** Ще използваме дефиницията на Риман (без значение - обща или специална). Нека  $\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^n \mathbf{D}_i$  е какво да е разбиване на  $\mathbf{D}$  и  $P_i \in \mathbf{D}_i$ . Имаме

$$R_{\tau}(f+g) = \sum_{i=1}^n (f(P_i) + g(P_i)) \mu(\mathbf{D}_i) = R_{\tau}(f) + R_{\tau}(g), \quad R_{\tau}(\lambda f) = \lambda R_{\tau}(f),$$

откъдето чрез граничен преход при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$  получаваме исканите равенства. ■

**Свойство 2. Позитивност.** Ако  $f(x, y) \geq 0$  навсякъде върху  $\mathbf{D}$ , то и  $I(f) \geq 0$ .

**Доказателство.** Очевидно за всяко разбиване  $\tau$  ще имаме  $R_{\tau}(f) \geq 0$ , откъдето чрез граничен преход получаваме  $I(f) \geq 0$ . ■

Позитивността на интеграла автоматично влече след себе си още няколко свойства.

**Свойство 3. Монотонност.** Ако  $f(x, y) \geq g(x, y)$  навсякъде върху  $\mathbf{D}$ , то  $I(f) \geq I(g)$  (с други думи, неравенствата могат да се интегрират).

**Доказателство.** Тъй като  $f(x, y) - g(x, y) \geq 0$ , то по свойство 2 имаме  $I(f - g) \geq 0$ , откъдето по свойство 1 получаваме  $I(f) - I(g) \geq 0$ . ■

**Свойство 4.** Ако функцията  $f(x, y)$  е интегрируема върху  $\mathbf{D}$ , то нейният модул  $|f(x, y)|$  е също интегрируем, и  $|I(f)| \leq I(|f|)$ .

**Доказателство.** Нека предположим, че вече сме доказали, че  $|f(x, y)|$  е интегрируема. Ще докажем исканото неравенство. Наистина, навсякъде е изпълнено неравенството

$$-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|,$$

откъдето по свойство 3 следва, че

$$-I(|f|) \leq I(f) \leq I(|f|).$$

Следователно,

$$|I(f)| = \max(I(f), -I(f)) \leq I(|f|).$$

Малко по-трудно е да докажем, че от интегрируемостта на  $f$  следва интегрируемостта на  $|f|$ . За целта ще използваме критерия на Дарбу за интегрируемост, доказан в предния параграф. Нека  $\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^n \mathbf{D}_i$  е произволно разбиване на  $\mathbf{D}$ . Да означим с  $m_i, M_i$  съответно точната долна и горна граница на  $f(x, y)$  върху  $\mathbf{D}_i$ , а с  $\widetilde{m}_i, \widetilde{M}_i$  - точната долна и горна граница на  $|f(x, y)|$  върху същото множество. Очевидно имаме  $\widetilde{M}_i - \widetilde{m}_i \leq M_i - m_i$  (докажете!), откъдето

$$\begin{aligned} S_\tau(|f|) - s_\tau(|f|) &= \sum_{i=1}^n (\widetilde{M}_i - \widetilde{m}_i) \mu(\mathbf{D}_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \mu(\mathbf{D}_i) = S_\tau(f) - s_\tau(f). \end{aligned}$$

Тъй като  $f$  е интегрируема, по критерия на Дарбу за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува разбиване  $\tau$  такова, че  $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$ . Тогава за това разбиване ще имаме и  $S_\tau(|f|) - s_\tau(|f|) < \varepsilon$ , т.е. функцията  $|f|$  удовлетворява условието на критерия на Дарбу и следователно е интегрируема. ■

**Забележка.** В част I беше даден пример на неинтегрируема по Риман функция  $f(x)$  такава, че  $|f(x)|$  е интегрируема. Подобен пример лесно може да се построи и за функция на две (или повече) променливи.

**Свойство 5. (Връзка между интеграла и мярката).** За всяко измеримо множество  $\mathbf{D}$  имаме:

$$\iint_{\mathbf{D}} 1 \, dxdy = \mu(\mathbf{D}).$$

**Доказателство.** Очевидно за произволно разбиване  $\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^n \mathbf{D}_i$  е в сила  $R_{\tau}(1) = \sum_{i=1}^n \mu(\mathbf{D}_i) = \mu(\mathbf{D})$ . ■

**Свойство 6. (Теорема за средните стойности).** Нека  $\mathbf{D}$  е затворено, измеримо и линейно свързано множество (виж §1.3. за дефиниция на линейно свързано множество), и  $f(x, y)$  е непрекъснатата\* върху  $\mathbf{D}$ . Тогава съществува точка  $P_0 \in \mathbf{D}$  такава, че

$$\iint_{\mathbf{D}} f(x, y) \, dxdy = f(P_0) \mu(\mathbf{D}).$$

**Доказателство.** Да означим с  $m$  и  $M$  съответно точната долна и горна граница на стойностите на  $f(x, y)$  върху  $\mathbf{D}$ . Според теоремите на Вайерщрас (теорема 7 и 8 на §1.3) тези граници се достигат, т.е. съществуват точки  $P_{min}, P_{max} \in \mathbf{D}$  такива, че  $f(P_{min}) = m$ ,  $f(P_{max}) = M$ . Интегрирайки неравенствата  $m \leq f(x, y) \leq M$ , получаваме  $m\mu(\mathbf{D}) \leq \iint_{\mathbf{D}} f(x, y) \, dxdy \leq M\mu(\mathbf{D})$ , (виж свойство 5), откъдето

$$f(P_{min}) = m \leq \frac{1}{\mu(\mathbf{D})} \iint_{\mathbf{D}} f(x, y) \, dxdy \leq M = f(P_{max}).$$

По теоремата за междинните стойности (теорема 11 на §1.3) всяко число, намиращо се между две стойности на функцията, е също стойност на функцията, откъдето следва съществуването на точка  $P_0 \in \mathbf{D}$  такава, че  $f(P_0) = \frac{1}{\mu(\mathbf{D})} \iint_{\mathbf{D}} f(x, y) \, dxdy$ . ■

**Забележка.** Числото  $f(P_0) = \frac{1}{\mu(\mathbf{D})} \iint_{\mathbf{D}} f(x, y) \, dxdy$  се нарича средна стойност на функцията  $f(x, y)$  върху  $\mathbf{D}$ .

**Свойство 7. (Адитивност по множество).** Нека  $\mathbf{D} = \mathbf{D}' \cup \mathbf{D}''$  е разбиване на измеримото множество  $\mathbf{D}$  на две измерими подмножества  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{D}''$  с непресичащи се вътрешности, и  $f(x, y)$  е функция, дефинирана върху  $\mathbf{D}$ . Тогава

\*По-долу ще покажем, че всяка непрекъсната функция върху затворено и измеримо множество е интегрируема.

- 1/  $f(x, y)$  е интегрируема върху  $\mathbf{D}$  точно тогава, когато тя е интегрируема върху  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{D}''$ , и  
 2/ имаме

$$\iint_{\mathbf{D}} f(x, y) \, dxdy = \iint_{\mathbf{D}'} f(x, y) \, dxdy + \iint_{\mathbf{D}''} f(x, y) \, dxdy.$$

**Доказателство.** И тук ще докажем най-напред лесната част, т.е. 2/. Да предположим, че е известно, че  $f$  е интегрируема върху  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{D}''$ . Нека  $\tau' : \mathbf{D}_1 = \cup_{i=1}^n \mathbf{D}'_i$  е разбиване на  $\mathbf{D}'$ , и  $\tau'' : \mathbf{D}'' = \cup_{j=1}^m \mathbf{D}''_j$  е разбиване на  $\mathbf{D}''$ . Елементите на тези две разбивания образуват разбиване на  $\mathbf{D}$ :

$$\tau : \mathbf{D} = (\cup_{i=1}^n \mathbf{D}'_i) \cup (\cup_{j=1}^m \mathbf{D}''_j).$$

Да изберем и междинните точки  $P'_i \in \mathbf{D}'_i$ ,  $P''_j \in \mathbf{D}''_j$ . Тогава, чрез граничен преход в равенството

$$R_{\tau}(f) = R_{\tau'}(f) + R_{\tau''}(f)$$

при  $\text{diam } \tau'$  и  $\text{diam } \tau''$  клонящи към нула (тогава очевидно и  $\text{diam } \tau$  клонят към нула) получаваме по дефиницията на Риман равенството 2/.

За доказателството на твърдението 1/ ще използваме критерия на Дарбу за интегрируемост. Нека е дадено, че  $f$  е интегрируема върху  $\mathbf{D}'$  и върху  $\mathbf{D}''$ . Нека  $\tau'$ ,  $\tau''$  са разбивания съответно на  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{D}''$  такива, че

$$S_{\tau'}(f) - s_{\tau'}(f) < \varepsilon, \quad S_{\tau''}(f) - s_{\tau''}(f) < \varepsilon.$$

Нека  $\tau$  е разбиването на  $\mathbf{D}$ , образувано от елементите на  $\tau_1$  и  $\tau_2$  както по-горе. Тогава

$$S_{\tau}(f) = S_{\tau'}(f) + S_{\tau''}(f), \quad s_{\tau}(f) = s_{\tau'}(f) + s_{\tau''}(f)$$

и следователно

$$S_{\tau}(f) - s_{\tau}(f) < 2\varepsilon,$$

т.е. функцията  $f(x, y)$  е интегрируема върху  $\mathbf{D}$ .

Обратно, нека  $f$  да е интегрируема върху  $\mathbf{D}$ , и нека  $\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^n \mathbf{D}_i$  е разбиване на  $\mathbf{D}$  такова, че  $S_{\tau}(f) - s_{\tau}(f) < \varepsilon$ . Да образуваме породеното от него разбиване  $\tau'$  на  $\mathbf{D}'$ :  $\tau' : \mathbf{D}' = \cup_{i=1}^n \mathbf{D}'_i$ , където  $\mathbf{D}'_i = \mathbf{D}_i \cap \mathbf{D}'$ . Да означим с  $m_i$ ,  $M_i$  съответно точната долна и горна граница на  $f(x, y)$  върху  $\mathbf{D}_i$ , а с  $m'_i$ ,  $M'_i$  - точната долна и горна граница на тази функция върху  $\mathbf{D}'_i$ . Лесно се вижда, че  $M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$ , и следователно

$$S_{\tau'}(f) - s_{\tau'}(f) \leq S_{\tau}(f) - s_{\tau}(f) < \varepsilon,$$



т.е.  $f$  е интегрируема върху  $\mathbf{D}'$ . Абсолютно по същия начин се вижда, че  $f$  е интегрируема и върху  $\mathbf{D}''$ . ■

### Упражнения.

1. Докажете неравенствата:\*

а) (интегрално неравенство на Хьолдер)

$$\iint_{\mathbf{D}} |f(x, y) g(x, y)| \, dx dy \leq \left( \iint_{\mathbf{D}} |f(x, y)|^p \, dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \iint_{\mathbf{D}} |g(x, y)|^q \, dx dy \right)^{\frac{1}{q}},$$

където  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  са интегрируеми функции върху  $\mathbf{D}$ ,  $p > 1$ ,  $q > 1$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Упътване: Можем да считаме, че  $\mathbf{D} = [a, b] \times [c, d]$  е правоъгълник. Вземете специално разбиване на  $\mathbf{D}$ , при което интервалите  $[a, b]$  и  $[c, d]$  се делят на равни части. Разгледайте съответната риманова сума за интеграла, стоящ отляво, и приложете неравенството на Хьолдер за суми (виж част I, §2.10. зад. 10).

б) (интегрално неравенство на Йенсен)

$$\varphi \left( \frac{\iint_{\mathbf{D}} p(x, y) f(x, y) \, dx dy}{\iint_{\mathbf{D}} p(x, y) \, dx dy} \right) \leq \frac{\iint_{\mathbf{D}} p(x, y) \varphi(f(x, y)) \, dx dy}{\iint_{\mathbf{D}} p(x, y) \, dx dy},$$

където  $\varphi(x)$  е изпъкнала и непрекъсната функция на една променлива,  $f(x, y)$  е непрекъсната в  $\mathbf{D}$  и взема стойности в дефиниционното множество на  $\varphi(x)$ ,  $p(x, y)$  е интегрируема и неотрицателна в  $\mathbf{D}$ .

Упътване: приложете неравенството на Йенсен (част I, §2.10) за изпъкналата функция  $\varphi(x)$  към римановите суми (образувани както в точка а/) за интеграла  $\iint_{\mathbf{D}} p(x, y) f(f(x, y)) \, dx$ .

---

\*Неравенствата, както и тяхните доказателства, са напълно идентични с тези в едномерния случай, разгледани в част I, §4.2, зад. 2.

в) (интегрално неравенство на Минковски)

$$\begin{aligned} & \left( \iint_{\mathbf{D}} |f(x, y) + g(x, y)|^p \, dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \left( \iint_{\mathbf{D}} |f(x, y)|^p \, dx dy \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \iint_{\mathbf{D}} |g(x, y)|^p \, dx dy \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

където  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  са интегрируеми функции в  $\mathbf{D}$  и  $p > 1$ .

Упътване: подинтегралната функция в левия интеграл се мажорира от сумата  $|f(x, y) + g(x, y)|^{p-1} \cdot |f(x, y)| + |f(x, y) + g(x, y)|^{p-1} \cdot |g(x, y)|$ . Приложете към всяко от събираемите неравенството на Хьолдер от точка а/.

## 2.4 Класове интегрируеми функции.

Използвайки критерия на Дарбу, ще дадем някои достатъчни условия за интегрируемост. Най-просто, и най-често използвано, е следното твърдение:

**Теорема 1.** *Ако функцията  $f(x, y)$  е непрекъсната върху затвореното и измеримо множество  $\mathbf{D}$ , тя е интегрируема върху него.*

**Доказателство.** Най-напред ще отбележим, че  $\mathbf{D}$  е ограничено (това влиза в дефиницията на измеримост) и затворено, т.е. то е компактно, и за функцията  $f$  са в сила теоремите на Вайерщрас и Кантор (виж §1.3). Специално, теоремата на Кантор (виж §1.3, теор. 10) гласи, че всяка непрекъсната функция върху  $\mathbf{D}$  е и равномерно непрекъсната.

Приложено към функцията  $f$ , това означава следното: за всяко  $\varepsilon > 0$  можем да намерим  $\delta > 0$ , така че за всеки две точки  $P, Q \in \mathbf{D}$ , за които  $\rho(P, Q) < \delta$ , е изпълнено  $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ .

Нека сега фиксираме  $\varepsilon > 0$ , и нека  $\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^n \mathbf{D}_i$  е измеримо разбиване на  $\mathbf{D}$  с  $\text{diam } \tau < \delta$ . Тогава за всеки две точки  $P, Q$ , принадлежащи на едно и също множество  $\mathbf{D}_i$ , ще имаме  $\rho(P, Q) < \delta$  и следователно  $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ . Ако накараме  $f(P)$  да се доближава към максималната стойност  $M_i$  на  $f$  върху  $\mathbf{D}_i$ , а  $f(Q)$  - към минималната и стойност  $m_i$ , получаваме, че за всяко  $i = 1, \dots, n$  е изпълнено  $M_i - m_i \leq \varepsilon$ . Следователно

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \mu(\mathbf{D}_i) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \mu(\mathbf{D}_i) = \varepsilon \mu(\mathbf{D})$$

и по критерия на Дарбу получаваме твърдението на теоремата. ■

В някои случаи изискването за непрекъснатост навсякъде е прекалено силно и не обхваща някои важни случаи като например стъпаловидните функции. Оказва се, че то може съществено да се отслаби, като се поиска функцията да е ограничена и множеството на нейните точки на прекъсване да е пренебрежимо:

**Теорема 2.** *Нека функцията  $f(x, y)$  е дефинирана и ограничена върху измеримото множество  $\mathbf{D}$ . Да предположим, че съществува пренебрежимо подмножество  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{D}$ , така че  $f(x, y)$  е непрекъсната във всички точки на  $\mathbf{D} \setminus \mathbf{A}$ . Тогава  $f$  е интегрируема върху  $\mathbf{D}$ .*