14. Диференциране и интегриране на степенни редове

Равномерна сходимост на степенните редове

Теорема 1

Нека степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ има радиус на сходимост $R > 0$. Тогава редът е равномерно сходящ във всеки интервал $[\alpha, \beta]$ такъв, че $[\alpha, \beta] \subset (a-R, a+R)$. Ако $R = \infty$, то редът е равномерно сходящ във всеки интервал $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.

Доказателство

Достатъчно е да докажем твърдението при $a = 0$. Оттук то ще следва в общия случай чрез транслация: $y := x - a$.
Да положим $c := \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Тогава $[\alpha, \beta] \subseteq [-c, c] \subset (-R, R)$. Ще докажем, че редът е равномерно сходящ в $[-c, c]$. Ще използваме Критерия на Вайерщрас (Теорема 3, Тема 11).
Имаме

$$\left|a_n x^n\right| \le \left|a_n c^n\right|, \quad x \in [-c, c]. \tag{1}$$

Щом $0 \le c < R$ (ако $R = \infty$, това неравенство преминава в $0 \le c$ и всъщност е излишно), то степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е абсолютно сходящ за $x = c$ (Теорема 2, Тема 13), т.е. сходящ е числовият ред $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n c^n\right|$.
Остава да приложим Критерия на Вайерщрас към функционалния ред с $u_n(x) := a_n x^n$ и числовия с $c_n := \left|a_n c^n\right|$.

Диференциране на степенни редове

Теорема 2

Степенният ред
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \tag{2}$$
и полученият от него степенен ред чрез почленно диференциране
$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \tag{3}$$
имат един и същи радиус на сходимост.

Бележка: Възможно е областите на сходимост на тези редове да са различни.

Диференциране на степенни редове

Теорема 3 (за диференциране на степенни редове)

Нека степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ има радиус на сходимости $R > 0$ и

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad x \in (a-R, a+R). \tag{4}$$

Тогава $S(x)$ е диференцируема и

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-a)^{n-1}, \quad x \in (a-R, a+R). \tag{5}$$

Ако $R = \infty$, то твърдението е в сила за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Доказателство

Както знаем от Теорема 2, радиусът на сходимост на степенния ред в (5) е също R. От Теорема 1 следва, че редът в (5) е равномерно сходящ във всеки интервал $[\alpha, \beta] \subset (a - R, a + R)$. Сега от теорема за почленно диференциране на функционални редове (Т-ма 4, Тема 12) следва равенството (5) за всяко $x \in [\alpha, \beta]$.

Понеже тук $[\alpha, \beta]$ е произволен краен затворен подинтервал на $(a - R, a + R)$, (5) следва за всяко $x \in (a - R, a + R)$.

Интегриране на степенни редове

Теорема 4 (за интегриране на степенни редове)

Нека степенният ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-a)^n$ има радиус на сходимост $R>0$ и

$$S(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-a)^n, \quad t \in (a-R, a+R). \tag{6}$$

Тогава $S(t)$ е интегруема върху всеки интервал с краища a и $x \in (a-R, a+R)$, като

$$\int_a^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}, \quad x \in (a-R, a+R). \tag{7}$$

Ако $R=\infty$, то твърдението е в сила за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Бележка: Радиусът на сходимост на степенния ред в (7) е R. Това следва от Теорема 2, защото редът в (6) се получава от този в (7) чрез почленно диференциране.

Доказателство

Нека $x \in (a - R, a + R)$ е произволно фиксирано. Тогава, както знаем от Теорема 1, редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (t-a)^n$ е равномерно сходящ в затворения интервал с краища a и x. Сега, като приложим Теоремата за почленно интегриране на функционални редове (Теорема 2, Тема 12), получаваме

$$\int_a^x S(t)\,dt = \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-a)^n \right) dt \tag{8}$$

$$\overset{\text{т-ма 2, тема 12}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^x (t-a)^n dt \tag{9}$$

$$\overset{\text{ф-ла на Л.-Н.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left. \frac{(t-a)^{n+1}}{n+1} \right|_a^x \tag{10}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}. \tag{11}$$

Относно краищата на областта на сходимост

Теорема 5 (Абел)

Нека степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ има радиус на сходимост $R > 0$ и

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad x \in (a-R, a+R). \tag{12}$$

Ако числовият ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ е сходящ, то

$$\lim_{\substack{x \to a+R \\ x < a+R}} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n. \tag{13}$$

Аналогично твърдение е в сила за другия край на областта на сходимост на реда.

Бележка: В условията на теоремата, сходимостта на реда е равномерна в $[a, a+R]$, съответно в $[a-R, a]$.