Смесено произведение

Работим в геометричното пространство, като считаме че са фиксирани единична отсечка за измерване на дължини и ориентация.

Определение 1 *Смесено произведение на векторите* u, v, w се нарича реалното число $\langle u, v, w\rangle = \langle u \times v, w\rangle$ (тоест векторното произведение $u \times v$, умножено скаларно с w).

Забележка 1 Други означения за смесеното произведение са (u, v, w) и uvw.

Теорема 1 *Ако векторите u, v, w не са компланарни, то обемът на паралелепипеда, построен върху u, v, w, е $|\langle u, v, w\rangle|$, а обемът на тетраедъра, построен върху u, v, w, е $\frac{1}{6}|\langle u, v, w\rangle|$.*

Доказателство: Нека O е произволна точка, а P, Q, R са точките, за които $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v$, $\overrightarrow{OR} = w$. Нека $OPR'QRQ'O'P'$ е паралелепипедът, чиито ръбове през върха O са OP, OQ, OR (с O', P', Q', R' сме означили точките, които лежат съответно диагонално срещу O, P, Q, R). Под *паралелепипеда, построен върху u, v, w,* се разбира именно паралелепипедът $OPR'QRQ'O'P'$. (Ако се тръгне от друга начална точка $\widetilde{O}$ се получава друг паралелепипед, но той е еднакъв на $OPR'QRQ'O'P'$ и значи има същия обем.)

Ще считаме успоредника $OPR'Q$ за основа на паралелепипеда $OPR'QRQ'O'P'$. Нека O'' е петата на перпендикуляра от O към срещуположната основа $RQ'O'P'$. Тогава $h = |OO''|$ е височината на паралелепипеда и обемът му е $V = S_{OPR'Q}.h$.

Тъй като $OPR'Q$ е успоредникът, построен върху векторите u и v, от предишния въпрос знаем, че $S_{OPR'Q} = |u \times v|$.

Нека $\varphi = \sphericalangle\left(\overrightarrow{OO''}, w\right)$. От правоъгълния триъгълник $OO''R$ имаме

$$h = |OO''| = |OR|\cos\varphi = |w|\cos\varphi.$$

Тъй като $\overrightarrow{OO''} \perp u, v$, то $\overrightarrow{OO''} \parallel u \times v$. Следователно

$$\varphi = \begin{cases} \sphericalangle(u \times v, w) & \text{при } u \times v \uparrow\uparrow \overrightarrow{OO''}, \text{ тоест при } \sphericalangle(u \times v, w) \le \frac{\pi}{2}, \\ \pi - \sphericalangle(u \times v, w) & \text{при } u \times v \uparrow\downarrow \overrightarrow{OO''}, \text{ тоест при } \sphericalangle(u \times v, w) \ge \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(Всъщност не е възможно $\sphericalangle(u \times v, w) = \frac{\pi}{2}$, защото тогава R лежи в равнината OPQ, тоест u, v, w са компланарни, което противоречи на условието. Но това не е съществено за доказателството.) Значи

$$\cos\varphi = \begin{cases} \cos\sphericalangle(u \times v, w) & \text{при } \sphericalangle(u \times v, w) \le \frac{\pi}{2}, \text{ тоест при } \cos\sphericalangle(u \times v, w) \ge 0, \\ -\cos\sphericalangle(u \times v, w) & \text{при } \sphericalangle(u \times v, w) \ge \frac{\pi}{2}, \text{ тоест при } \cos\sphericalangle(u \times v, w) \le 0. \end{cases}$$

Това означава, че $\cos\varphi = |\cos\sphericalangle(u \times v, w)|$. Следователно $h = |w|.|\cos\sphericalangle(u \times v, w)|$.

Така получаваме

$$\begin{aligned} V &= S_{OPR'Q}.h = \underbrace{|u \times v|}_{\geq 0}.\underbrace{|w|}_{\geq 0}.|\cos \sphericalangle(u \times v, w)| = ||u \times v|.|w|.\cos \sphericalangle(u \times v, w)| \\ &= |\langle u \times v, w\rangle| = |\langle u, v, w\rangle|. \end{aligned}$$

Под *тетраедъра, построен върху* u, v, w, се разбира тетраедърът $OPQR$. Имаме

$$V_{OPQR} = \frac{1}{3}S_{OPQ}.h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{OPR'Q}.h = \frac{1}{6}V_{\text{паралелепипеда}} = \frac{1}{6}|\langle u, v, w\rangle|. \qquad \square$$

Теорема 2 *Нека* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *е положително ориентиран ортонормиран базис на пространството на геометричните вектори и спрямо него векторите* u, v, w *имат координати* $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$. *Тогава* $\langle u, v, w\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Доказателство: Тъй като e е положително ориентиран ортонормиран базис, от предишния въпрос имаме $u \times v \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$. Следователно с развитие по последния стълб получаваме

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot z_1 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \cdot z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot z_3 = \langle u \times v, w\rangle = \langle u, v, w\rangle. \qquad \square$$

Теорема 3 (критерий за компланарност на вектори)
Векторите u, v, w *са компланарни* $\Leftrightarrow \langle u, v, w\rangle = 0$.

Доказателство: Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е положително ориентиран ортонормиран базис на пространството на геометричните вектори. Знаем, че
u, v, w са компланарни $\Leftrightarrow$ детерминантата от координатите им спрямо e е 0. Но от Теорема 2 имаме, че тая детерминанта е $\langle u, v, w\rangle$. Следователно u, v, w са компланарни $\Leftrightarrow \langle u, v, w\rangle = 0$. $\square$

Теорема 4 *Смесеното произведение има следните свойства:*

1. $\langle v, u, w\rangle = -\langle u, v, w\rangle$, $\quad \langle w, v, u\rangle = -\langle u, v, w\rangle$, $\quad \langle u, w, v\rangle = -\langle u, v, w\rangle$
(антисиметричност)

2. $\langle v, w, u\rangle = \langle u, v, w\rangle$, $\quad \langle w, u, v\rangle = \langle u, v, w\rangle$ *(цикличност)*

3. $\langle u_1 + u_2, v, w\rangle = \langle u_1, v, w\rangle + \langle u_2, v, w\rangle$, $\quad \langle u, v_1 + v_2, w\rangle = \langle u, v_1, w\rangle + \langle u, v_2, w\rangle$,
$\langle u, v, w_1 + w_2\rangle = \langle u, v, w_1\rangle + \langle u, v, w_2\rangle$ *(адитивност по трите аргумента)*

4. $\langle \lambda u, v, w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle$, $\langle u, \lambda v, w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle$, $\langle u, v, \lambda w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle$, *където* $\lambda \in \mathbb{R}$
(хомогенност по трите аргумента)

Доказателство: Свойствата 3. и 4. и първото равенство в 1. следват от свойствата на скаларното произведение и векторното произведение. Ако докажем едно от другите две равенства в 1., то и другото равенство в 1., а също и свойството 2. също ще следват от свойствата на скаларното и векторното произведение. Ще докажем второто равенство в 1. чрез координати. (Може да се докаже и без координати като се използват Теорема 1 и Теорема 3, но е малко по-дълго, а пък и ние вече използвахме координати за да докажем Теорема 3.)

Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е положително ориентиран ортонормиран базис на пространството на геометричните вектори и спрямо него векторите u, v, w имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$.

1. Тъй като при размяна на местата на два стълба на матрица детерминантата ѝ си сменя знака, то

$$\langle w, v, u \rangle = \begin{vmatrix} z_1 & y_1 & x_1 \\ z_2 & y_2 & x_2 \\ z_3 & y_3 & x_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -\langle u, v, w \rangle.$$

   Първото равенство се доказва по същия начин, като тоя път се разменят първите два стълба, но следва и директно от свойствата на скаларното произведение и векторното произведение по следния начин:

$$\langle v, u, w \rangle = \langle v \times u, w \rangle = \langle -u \times v, w \rangle = -\langle u \times v, w \rangle = -\langle u, v, w \rangle.$$

   Третото равенство се доказва по същия начин, като тоя път се разменят последните два стълба, но следва и от първите две равенства по следния начин:

$$\langle u, w, v \rangle = -\langle w, u, v \rangle = \langle v, u, w \rangle = -\langle u, v, w \rangle.$$

2. Може да се докаже с координати като 1., като тоя път ще имаме циклична пермутация на стълбовете, което се свежда до двукратна размяна на стълбове, и значи ще имаме двукратна смяна на знака на детерминантата, тоест същия знак в крайна сметка. Но следва и директно от 1. по следния начин:

$$\langle v, w, u \rangle = -\langle w, v, u \rangle = \langle u, v, w \rangle,$$

   а второто равенство следва от първото, приложено два пъти — за векторите v, w, u и за векторите u, v, w:

$$\langle w, u, v \rangle = \langle v, w, u \rangle = \langle u, v, w \rangle.$$

3. Може да се докаже с координати като 1., като тоя път се използва свойството, че когато някой стълб на матрица е сума на два стълба, то детерминантата ѝ е сумата на детерминантите на двете матрици, съответният стълб на които е един от тия два стълба. Но следва и директно от свойствата на скаларното произведение и векторното произведение по следния начин:

$$\begin{aligned}
\langle u_1+u_2, v, w\rangle &= \langle (u_1+u_2)\times v, w\rangle = \langle u_1\times v + u_2\times v, w\rangle \\
&= \langle u_1\times v, w\rangle + \langle u_2\times v, w\rangle = \langle u_1, v, w\rangle + \langle u_2, v, w\rangle, \\
\langle u, v_1+v_2, w\rangle &= \langle u\times (v_1+v_2), w\rangle = \langle u\times v_1 + u\times v_2, w\rangle \\
&= \langle u\times v_1, w\rangle + \langle u\times v_2, w\rangle = \langle u, v_1, w\rangle + \langle u, v_2, w\rangle, \\
\langle u, v, w_1+w_2\rangle &= \langle u\times v, w_1+w_2\rangle \\
&= \langle u\times v, w_1\rangle + \langle u\times v, w_2\rangle = \langle u, v, w_1\rangle + \langle u, v, w_2\rangle.
\end{aligned}$$

4. Може да се докаже с координати като 1., като тоя път се използва свойството, че когато някой стълб на матрица се умножи с число, то детерминантата на получената матрица е детерминантата на първоначалната, умножена със същото число. Но следва и директно от свойствата на скаларното произведение и векторното произведение по следния начин:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda u, v, w\rangle &= \langle (\lambda u)\times v, w\rangle = \langle \lambda(u\times v), w\rangle = \lambda\langle u\times v, w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle, \\
\langle u, \lambda v, w\rangle &= \langle u\times (\lambda v), w\rangle = \langle \lambda(u\times v), w\rangle = \lambda\langle u\times v, w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle, \\
\langle u, v, \lambda w\rangle &= \langle u\times v, \lambda w\rangle = \lambda\langle u\times v, w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle. \qquad \square
\end{aligned}$$

Забележка 2 Свойствата 3. и 4. в горната теорема заедно са еквивалентни на свойството

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v, w\rangle = \lambda_1\langle u_1, v, w\rangle + \lambda_2\langle u_2, v, w\rangle, \\
&\langle u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w\rangle = \lambda_1\langle u, v_1, w\rangle + \lambda_2\langle u, v_2, w\rangle, \\
&\langle u, v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\rangle = \lambda_1\langle u, v, w_1\rangle + \lambda_2\langle u, v, w_2\rangle
\end{aligned}$$

(*линейност по трите аргумента*)

тоест смесеното произведение е трилинейно.

Пример 1 От антисиметричността на смесеното произведение (а също и от Теорема 3 или Теорема 2) следва, че ако два от векторите u, v, w съвпадат, то $\langle u, v, w\rangle = 0$. Например, ако $w = u$, то като разменим местата на първия и третия аргумент получаваме $\langle u, v, u\rangle = -\langle u, v, u\rangle$ и следователно $\langle u, v, u\rangle = 0$.

Твърдение 1 *Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е произволен базис на пространството на геометричните вектори и спрямо него векторите u, v, w имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$. Тогава*

$$\langle u, v, w\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .\langle e_1, e_2, e_3\rangle.$$

Доказателство: Имаме

$$u = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \qquad v = \sum_{j=1}^{3} y_j e_j, \qquad w = \sum_{k=1}^{3} z_k e_k.$$

От трилинейността на смесеното произведение тогава получаваме

$$\langle u, v, w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{j=1}^{3} y_j e_j, \sum_{k=1}^{3} z_k e_k \right\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{3} x_i y_j z_k \langle e_i, e_j, e_k \rangle.$$

От Пример 1 следва, че ако някои два от индексите i, j, k съвпадат, то $\langle e_i, e_j, e_k \rangle = 0$. Следователно в сумата остават събираемите, в които индексите i, j, k са различни, тоест когато те представляват пермутация на 1, 2, 3. Значи

$$\begin{aligned}\langle u, v, w \rangle &= x_1 y_2 z_3 \langle e_1, e_2, e_3 \rangle + x_1 y_3 z_2 \langle e_1, e_3, e_2 \rangle + x_2 y_1 z_3 \langle e_2, e_1, e_3 \rangle + x_2 y_3 z_1 \langle e_2, e_3, e_1 \rangle \\ &\quad + x_3 y_1 z_2 \langle e_3, e_1, e_2 \rangle + x_3 y_2 z_1 \langle e_3, e_2, e_1 \rangle.\end{aligned}$$

Всички смесени произведения, които участват в тая сума, могат чрез свойствата антисиметричност и цикличност да се изразят чрез $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ и получаваме

$$\begin{aligned}\langle u, v, w \rangle &= (x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1) \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} . \langle e_1, e_2, e_3 \rangle.\end{aligned}$$

□