Глава 1

Диференциално смятане на функции на няколко променливи

1.1 Разстояние и норма в $\mathbb{R}^n$

Дефиниция на крайномерно пространство. В настоящата глава ще се занимаваме със свойствата на функциите на няколко променливи. Преди да започнем обаче тяхното изучаване, трябва да обърнем внимание на множествата, върху които те са дефинирани. Когато имаме функция на една променлива $f(x)$, тя е определена за x принадлежащо на някакво подмножество (обикновено интервал) на реалната права $\mathbb{R}$. При функция на две променливи $f(x, y)$ стойността на функцията зависи от числовите стойности на двете променливи x и y, при това взети в определен ред - ясно е, че ако разменим тяхните места, получаваме друга стойност на функцията. Така, можем да кажем, че $f(x, y)$ е дефинирана върху някакво множество, състоящо се от *наредени двойки реални числа.* Аналогично функцията на три променливи $f(x, y, z)$ е дефинирана върху множество от *наредени тройки реални числа*, и т.н. Това ни довежда до следната дефиниция, играеща основна роля в по-нататъшните ни разсъждения:

Дефиниция. *Под* <u>*n-мерно евклидово пространство*</u> $\mathbb{R}^n$ *ще раз-*

бираме множеството от всички наредени n-торки $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от реални числа. Числата $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ще наричаме съответно първа, втора,..., n-та координата на точката P.

Пространството $\mathbb{R}^2$ от всички наредени двойки (x, y) се нарича равнина. При $n = 3$ получаваме тримерното пространство $\mathbb{R}^3$ на всички наредени тройки (x, y, z). Ще отбележим, че в линейната алгебра пространствата $\mathbb{R}^n$ се изучават от малко по-различна гледна точка: в тях се въвеждат т.нар. линейни, или векторни операции - събиране на два елемента, и произведение на даден елемент с реално число. Понякога и ние ще използваме тези операции; в такъв случай, за да подчертаем наличието на такива операции, ще наричаме елементите на $\mathbb{R}^n$ вектори, и ще използваме за тях означения от вида $\vec{x}$, $\vec{y}$ и т.н.

Горната дефиниция е частен случай на възприетата в теорията на множествата операция произведение на две или повече множества. Ако $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n$ са някакви множества, тяхното произведение $\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2 \times \ldots \times \mathbf{M}_n$ се определя като множеството от всички наредени n-торки $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ с $m_1 \in \mathbf{M}_1$,...,$m_n \in \mathbf{M}_n$. Тогава $\mathbb{R}^n$ може да се определи като произведение $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ на n екземпляра на реалната права $\mathbb{R}$. Така може да бъдат дефинирани и някои подмножества на евклидовите пространства: ако $[a, b]$ и $[c, d]$ са интервали в $\mathbb{R}$, тяхното произведение $[a, b] \times [c, d]$ представлява правоъгълник в $\mathbb{R}^2$ със страни, успоредни на координатните оси. Произведението на три интервала $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ е правоъгълен паралелопипед в $\mathbb{R}^3$, и т.н.

Забележка. Даденият подход към многомерните пространства (към който ние ще се придържаме и в бъдеще) притежава следния недостатък - в него привилегирована роля играят координатните оси на променливите $x_1, \ldots, x_n$. В приложенията на анализа към природните науки такива привилегировани координатни системи рядко могат да се посочат; така например, в обичайното тримерно пространство ние не можем да предпочетем едни направления пред други. Ще изложим по-общия подход към въпроса, възприет в линейната алгебра:

Нека $\mathbf{H}$ е линейно пространство, т.е. пространство, в което са дефинирани векторните операции: събиране на елементи и умножение на елемент с реално число. Казваме, че пространството $\mathbf{H}$ е n-мерно (има размерност n), ако всеки $n + 1$ вектора в него са линейно зависими (някаква тяхна линейна комбинация с ненулеви коефициенти е нула), но съществуват n на брой линейно независими вектори. Да изберем линейно независима система от вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ в $\mathbf{H}$. Тогава всеки вектор $\vec{x} \in H$ притежава единствено разлагане от вида $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$. Ние можем да съпоставим на всеки вектор $\vec{x}$ n-торката от реални числа $x_1, \ldots, x_n$, с което получаваме взаимно еднозначно изображение на **H** в $\mathbb{R}^n$, запазващо линейните операции. В частност, на всяка функция $f(\vec{x})$ върху **H** ние съпоставяме функцията $f(x_1, \ldots, x_n)$, зависеща от n числови аргумента. Важно е да се помни обаче, че това съпоставяне зависи от избора на координатните вектори $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$; по-голямата (и по-важната) част от дефинираните по-нататък понятия не зависят от избора на координатната система, и ние ще трябва да проверяваме това във всеки конкретен случай.

Най-често едно линейно пространство **H** се разглежда заедно с дадено скаларно произведение: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in \mathbb{R}$ за всеки два елемента $\vec{x}, \vec{y} \in H$. В този случай казваме, че H е *евклидово пространство.* Обикновено избираме векторите $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ така, че да образуват *ортонормирана система* (виж по-долу).

Разстояние и норма в $\mathbb{R}^n$. По-нататък основна роля за нас ще играе понятието *евклидово разстояние между две точки в* $\mathbb{R}^n$. При $n = 1$, т.е. върху правата $\mathbb{R}$, разстоянието между точките с координати x и y е $\rho(x, y) = |x - y|$. Разстоянието между две точки в равнината или в пространство с по-голям брой измерения може да се намери по елементарно-геометричен път с помощта на Питагоровата теорема. Нека $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Q = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогава т. нар. евклидово разстояние между точките P и Q се дава с формулата

$$\rho_2(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

По нататък ние ще използваме не толкова дефиницията на това разстояние, колкото неговите основни свойства:

1/ $\rho_2(P, Q) \geq 0$ за всеки две точки $P,\ Q \in \mathbb{R}^n$; $\rho_2(P, Q) = 0$ тогава и само тогава, когато $P = Q$.

2/ (симетричност) Винаги $\rho_2(P, Q) = \rho_2(Q, P)$.

3/ (неравенство на триъгълника) За всеки три точки $P,\ Q,\ R \in \mathbb{R}^n$ имаме

$$\rho_2(P, R) \leq \rho_2(P, Q) + \rho_2(Q, R).$$

Свойствата 1/ и 2/ са очевидни. Свойството 3/ лесно се интерпретира геометрически: ако разгледаме триъгълника с върхове в точките P, Q и R, то сумата от дължините на страните PQ и QR е по-голяма или равна на дължината на страната PR. Този факт се доказва в елементарната геометрия; разбира се, интересно е и неговото аналитично доказателство - виж Твърдение1 и Задача 1.

Норма в $\mathbb{R}^n$. Да разгледаме сега $\mathbb{R}^n$ като векторно пространство, и да въведем понятието евклидова норма на вектор от $\mathbb{R}^n$: ако $\vec{x} == (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то

$$||\vec{x}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}.$$

Така въведената норма притежава свойствата:

$1'/$ $||\vec{x}||_2 \geq 0$; $||\vec{x}||_2 = 0$ тогава и само тогава, когато $\vec{x} = \vec{0}$.

$2'/$ $||\lambda\, \vec{x}||_2 = |\lambda|\, ||\vec{x}||_2$ за всеки $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

$3'/$ (неравенство на триъгълника) За всеки два вектора $\vec{x},\ \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ имаме $||\vec{x} + \vec{y}||_2 \leq ||\vec{x}||_2 + ||\vec{y}||_2$.

Нормата и разстоянието са очевидно свързани: имаме $\rho_2(P, Q) = \left|\left|\overrightarrow{PQ}\right|\right|_2 = \left|\left|\vec{P} - \vec{Q}\right|\right|_2$, където с $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ означаваме радиус-векторите на точките P и Q. В такъв случай ще казваме, че нормата $||\cdot||_2$ поражда разстоянието ρ_2. В допълнението по-долу ние ще видим и други примери на разстояния, породени от норми.

Твърдение 1. *Нека нормата $||\vec{x}||$ в $\mathbb{R}^n$ удовлетворява условията $1'/$ - $3'/$. Тогава породеното от нея разстояние $\rho(P, Q) = \left|\left|\vec{P} - \vec{Q}\right|\right|$ удовлетворява условията 1/ - 3/.*

Наистина, 1/ веднага следва от $1'/$. Условието 2/ се получава от $2'/$ при $\vec{x} = \vec{P} - \vec{Q}$ и $\lambda = -1$. Накрая, използвайки $3'/$, имаме

$$\left|\left|\vec{P} - \vec{R}\right|\right| = \left|\left|\left(\vec{P} - \vec{Q}\right) + \left(\vec{Q} - \vec{R}\right)\right|\right| \leq \left|\left|\vec{P} - \vec{Q}\right|\right| + \left|\left|\vec{Q} - \vec{R}\right|\right|,$$

т.е. условието 3/. ■

В по-нататъшните ни разглеждания под норма $||\vec{x}||$ и разстояние $\rho(P, Q)$ в $\mathbb{R}^n$ ще разбираме евклидовата норма и евклидовото разстояние (освен ако изрично е казано противното). Добрите геометрични свойства на тази норма се дължат на факта, че тя е породена от скаларното произведение в $\mathbb{R}^n$.

Скаларно произведение. Нека $\mathbf{H}$ е линейно пространство. Казваме, че в $\mathbf{H}$ е дефинирано *скаларно произведение*, ако на всеки два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in H$ е съпоставено реалното число $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, удовлетворяващо съотношенията:

$1''$ (линейност): За всеки четири вектора $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{H}$ и число $\lambda \in \mathbb{R}$ имаме

$$\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle \ , \ \langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \, .$$

$2''$ (симетричност): За всеки два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{H}$ имаме

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \, .$$

$3''$ (положителна определеност): За всеки *ненулев* вектор $\vec{x} \in \mathbf{H}$ имаме

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0.$$

В пространството $\mathbb{R}^n$ стандартното скаларно произведение се дава с формулата $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, където $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. То може да се изрази и геометрично:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = ||\vec{x}|| \, ||\vec{y}|| \cos \sphericalangle (\vec{x}, \vec{y})$$

, където $\sphericalangle (\vec{x}, \vec{y})$ означава ъгъла между векторите $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Лесно се вижда, че двете определения съвпадат - виж зад. 7. Разбира се, това не е единственото скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$.

Ще изложим накратко някои основни свойства на скаларните произведения:

Твърдение 2.*(Неравенство на Коши-Шварц-Буняковски): За всеки два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{H}$ е в сила неравенството*

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \ \sqrt{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}.$$

Равенството се достига само в случая, когато векторите $\vec{x}$ и $\vec{y}$ са колинеарни.

Доказателство. Да разгледаме квадратния тричлен

$$p(t) = \langle \vec{x} + t\vec{y}, \vec{x} + t\vec{y} \rangle = At^2 + 2Bt + C,$$

където $A = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$, $B = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, $C = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$. От свойство $3''$ се вижда, че $p(t) \geq 0$ за всички стойности на t. Следователно $p(t)$ не може да има два различни реални корена - иначе в интервала между тях неговите значения биха били отрицателни. Оттук се вижда, че неговата дискриминанта $D = 4\left(B^2 - AC\right)$ е по-малка или равна на нула, т.е. $B^2 \leq AC$.

Остава да изследваме кога се достига равенството. В такъв случай дискриминантата D е равна на нула, което означава, че $p(t)$ има точно един реален корен - да го означим с t_0. Имаме

$$p\left(t_0\right) = \left\langle \vec{x} + t_0\vec{y}, \vec{x} + t_0\vec{y} \right\rangle = 0,$$

откъдето пак по свойство $3''$ получаваме $\vec{x} + t_0\vec{y} = 0$, или, с други думи, $\vec{x} = -t_0\vec{y}$. ■

Дефиниция (норма, породена от скаларното произведение). *Норма на вектора* $\vec{x} \in \mathbf{H}$ *ще наричаме числото*

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}.$$

Твърдение 3.*Нормата, породена от скаларното произведение, удовлетворява условията* $1'/$ - $3'/$.

Доказателство. Свойствата $1'$ и $2'$ са очевидни. Свойството $3'$ (неравенството на триъгълника) следва от неравенството на Коши-Шварц-Буняковски:

$$||\vec{x} + \vec{y}||^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle =$$

$$= ||x||^2 + 2\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2\,||x||\,||y|| + ||y||^2 = \left(||x|| + ||y||\right)^2. \blacksquare$$

Нека $\mathbf{H}$ е n-мерно линейно пространство със скаларно произведение. Тогава в него може да се избере ортонормиран базис, т.е. вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \in \mathbf{H}$ такива, че $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$ при $i \neq j$ и $||\vec{e}_i|| = 1$ за всяко i. За всяко $\vec{x} \in \mathbf{H}$ е налице разлагането

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \text{ , където } x_i = \left\langle \vec{x}, \vec{e}_i \right\rangle.$$

Лесно се вижда, че ако $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$ и $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{e}_i$, то

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Съпоставяйки на вектора $\vec{x}$ n-торката от числа $(x_1, \ldots, x_n)$, ние получаваме отъждествяване на пространството $\mathbf{H}$ с пространството $\mathbb{R}^n$, като скаларното произведение в $\mathbf{H}$ преминава в описаното по-горе стандартно скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$. Важно е да се отбележи, че такова отъждествяване може да се извърши по много различни начини: то зависи от избора на ортонормирания базис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. При преминаване от един ортонормиран базис към друг координатите се преобразуват чрез умножение с подходяща ортогонална матрица - виж зад. 8.

Допълнение. Разстоянието $\rho_2(P,Q)$ не е единственото разстояние в $\mathbb{R}^n$, притежаващо свойствата 1/ - 3/. За илюстрация на това, да си представим, че живеем в град, разделен на правоъгълни квартали, и се движим само по улиците (виж чертежа). Лесно се вижда, че всеки от най-кратките пътища (такива има много), съединяващ точките с координати $P = (x,y)$ и $Q = (x',y')$, има дължина $\rho_1(P,Q) = |x-x'| + |y-y'|$. Аналогично разстояние може да се дефинира и в $\mathbb{R}^n$ за произволно n с формулата

$$\rho_1(P,Q) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \, .$$

Очевидно разстоянието ρ_1 също притежава свойствата 1/ - 3/. Веднага се вижда, че разстоянието ρ_1 се поражда от нормата

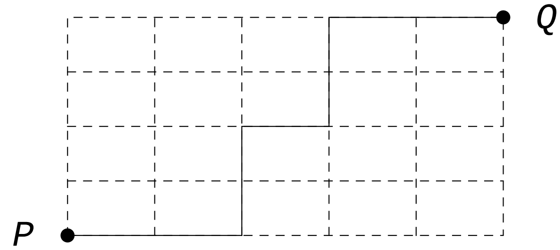
$$||\vec{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, .$$

Друго разстояние ρ_∞, отново удовлетворяващо 1/ - 3/, както и съответната норма $||\vec{x}||_\infty$, могат да бъдат определени с формулите:

$$\rho_\infty(P,Q) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i| \, , \quad ||\vec{x}||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

(за обяснение на индексите виж задачи 1. - 3.).

Забележка. Скаларното произведение и разлагането по ортонормиран базис се прилагат не само в разгледаните тук крайномерни пространства, но и в по-сложни случаи като например за пространства от функции. Така например, то е основен инструмент при разлагането на функции в ред на Фурие (виж §2.9.11 и 2.9.12).



Разстояние $\rho_1(P,Q)$

Упражнения.

1. Да определим при $p \geq 1$ нормата $||\vec{x}||_p$ в $\mathbb{R}^n$ с формулата $||\vec{x}||_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$. Докажете, че условията $1'/$ - $3'/$ са удовлетворени.

Упътване. За да докажете $3'/$ при $p > 1$, покажете, че

$$\left(||\vec{x}+\vec{y}||_p\right)^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1}$$

и приложете за двете суми вдясно неравенството на Хьолдер (виж I. §2.10, зад. 10).

2. Докажете, че при $p \in (0,1)$ неравенството на триъгълника за $||\vec{x}||_p$ не се изпълнява.

Упътване. Покажете, че то не е изпълнено за координатните вектори $\vec{x}$, $\vec{y}$ в $\mathbb{R}^2$.

3. Докажете, че $\lim_{p\to+\infty} ||\vec{x}||_p = ||\vec{x}||_\infty$.

4. Нека $\mathbf{H}$ е пространство със скаларно произведение, и $||\vec{x}||$ е нормата в $\mathbf{H}$, породена от него. Докажете, че е в сила теоремата на Питагор: за всеки $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, такива че $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, имаме

$$||\vec{x}+\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 .$$

5. Докажете, че за всяка норма, определена от скаларно произведение, е в сила равенството на успоредника:

$$2\left(||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2\right) = ||\vec{x}+\vec{y}||^2 + ||\vec{x}-\vec{y}||^2 .$$

(сумата на квадратите на страните на успоредника е равна на сумата на квадратите на неговите диагонали).

6. Докажете, че при $p \neq 2$ нормата $||\vec{x}||_p$ не се поражда от никое скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$.

Упътване. Докажете, че равенството на успоредника от зад. 5 не е изпълнено, ако $\vec{x}$ и $\vec{y}$ са координатните вектори.

7. Докажете, че аналитичната и геометричната дефиниция на скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$ съвпадат.

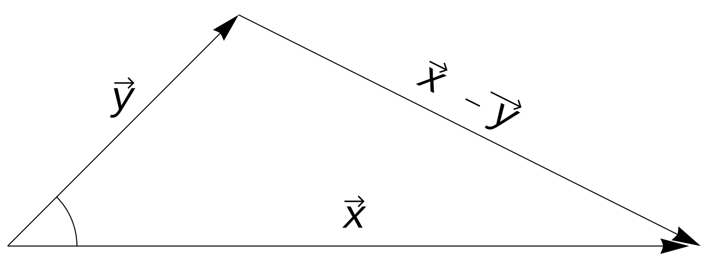
Упътване. От свойствата на дефинираното по аналитичен път скаларно произведение следва, че

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2} \left(||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - ||\vec{x} - \vec{y}||^2 \right).$$

Да разгледаме триъгълника, образуван от векторите $\vec{x}$ и $\vec{y}$, приложени в една и съща точка; страните му са равни на $||\vec{x}||$, $||\vec{y}||$ и $||\vec{x} - \vec{y}||$. Прилагайки косинусовата теорема за този триъгълник, получаваме, че

$$||\vec{x} - \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - 2\, ||\vec{x}||\, ||\vec{y}|| \cos \sphericalangle (\vec{x}, \vec{y}).$$

Замествайки в предното равенство, получаваме съвпадението на аналитичната и геометричната дефиниция на скаларното произведение.



Чертеж към задача 7.

8. Нека $\mathbf{H}$ е n-мерно векторно пространство със скаларно произведение, и $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ е ортонормирана система от вектори в $\mathbf{H}$, а $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$

е друга система от n вектора, изразяваща се чрез предходната с формулите

$$\vec{f_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\vec{e_i}\ ,\ j = 1, \ldots, n.$$

а/ Докажете, че системата $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}$ е ортонормирана точно тогава, когато матрицата $\{a_{i,j}\}$ е ортогонална. (В такъв случай казваме, че матрицата $\{a_{i,j}\}$ определя ортогонално преобразование на $\mathbf{H}$ в себе си.)

Пояснение. Една $n \times n$ - матрица от реални числа $A = \{a_{i,j}\}_{i=1,\ldots,n,j=1,\ldots,n}$ се нарича <u>ортогонална</u>, ако редовете и образуват ортонормирана система в $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j_1}a_{i,j_2} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & j_1 \neq j_2 \\ 1, & j_1 = j_2 \end{array} \right. .$$

Детерминантата на ортогоналната матрица е равна на 1 или -1 (покажете!).

б/ Покажете, че ако $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e_i}$ и $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j\vec{f_j}$, то връзката между предишните коефициенти $\{x_i\}$ и новите $\{\tilde{x}_j\}$ се дава с формулите

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\tilde{x}_j.$$

9. Докажете, че всяко ортогонално преобразование на $\mathbb{R}^2$ в себе си с положителна детерминанта се задава с матрица от вида

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

т.е. представлява ротация на подходящ ъгъл θ.

10. Докажете, че всяко ортогонално преобразование на $\mathbb{R}^2$ в себе си с отрицателна детерминанта представлява отражение относно подходяща права, минаваща през началото.

Упътване. Покажете, че в този случай (за разлика от предишния) характеристичното уравнение на матрицата има реални корени, равни на $+1$ и -1. Нека $\vec{f_+}$ и $\vec{f_-}$ са съответните собствени вектори. Покажете, че преобразованието представлява отражение относно правата, на която лежи вектора $\vec{f_+}$.

1.2 Топология и сходимост в $\mathbb{R}^n$

Както знаем, анализът върху реалната права се базира на отворените интервали в $\mathbb{R}$ и понятието околност (симетрична околност) на точка. За да развием анализа в многомерно пространство, ще трябва да въведем аналогични обекти в него, като имаме предвид, че геометрията на подмножествата на многомерното пространство е много по-сложна от тази на едномерното.

Наличието на разстояние в $\mathbb{R}^n$ ни позволява да дефинираме понятието кръгова околност на дадена точка: под кръгова околност на точката $P \in \mathbb{R}^n$ с радиус r разбираме отворен кръг (евентуално кълбо) с център P и радиус r, т.е. множеството от всички точки Q от $\mathbb{R}^n$, намиращи се на разстояние по-малко от r от точката P. Означаваме:

$$\mathbf{B}(P,r) = \{Q : \rho(Q,P) < r\}\,.$$

В едномерния случай това е симетричен интервал с център P и радиус r.

Нека сега $\mathbf{M}$ е подмножество на $\mathbb{R}^n$. Ще разделим точките от $\mathbb{R}^n$ на три класа в зависимост от местоположението им спрямо $\mathbf{M}$.

Дефиниция. *Точката $P \in \mathbb{R}^n$ се нарича вътрешна за $\mathbf{M}$, ако съществува $r > 0$ такова, че $\mathbf{B}(P,r) \subset \mathbf{M}$.*

С други думи, точката е вътрешна за едно множество, ако тя се съдържа в него заедно с някоя своя кръгова околност.

Множеството на всички вътрешни точки на $\mathbf{M}$ се бележи с $\mathbf{M}^o$.

Дефиниция. *Точката $P \in \mathbb{R}^n$ се нарича външна за $\mathbf{M}$, ако съществува $r > 0$ такова, че $\mathbf{B}(P,r) \cap \mathbf{M} = \emptyset$.*

С други думи, точката е ~~вътрешна~~ за $\mathbf{M}$, ако тя се съдържа в допълнението му заедно с някоя своя кръгова околност, т.е. принадлежи на $(\mathbb{R}^n \backslash \mathbf{M})^0$.

Оставащите точки ще наричаме контурни:

Дефиниция. *Точката $P \in \mathbb{R}^n$ се нарича контурна за $\mathbf{M}$, ако тя не е нито вътрешна, нито външна за $\mathbf{M}$.*

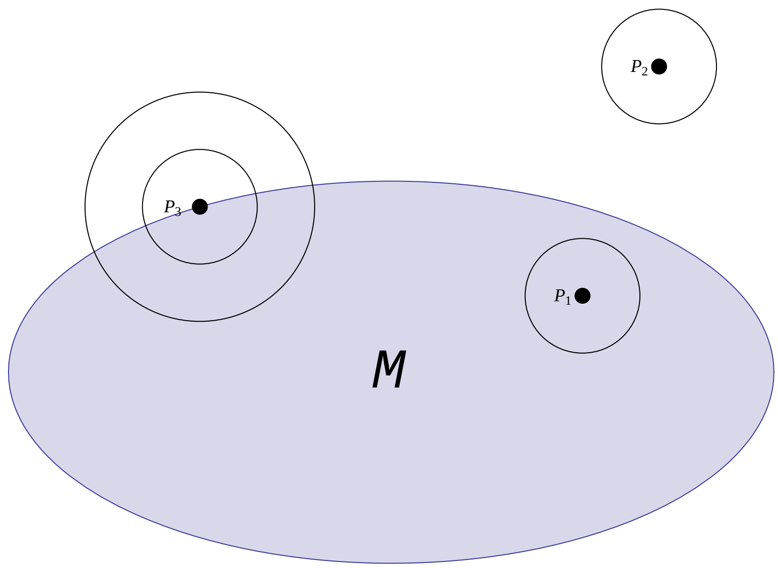
Множеството от контурните точки се нарича контур на $\mathbf{M}$ и се бележи с $b\,\mathbf{M}$ или с $b(\mathbf{M})$.

Горната дефиниция не е конструктивна; по-добро описание на контура на едно множество се дава в следното твърдение:

Твърдение 1. *Една точка е контурна за* $\mathbf{M}$ *точно тогава, когато всяка нейна кръгова околност се пресича и с* $\mathbf{M}$*, и с* $\mathbb{R}^n \backslash \mathbf{M}$.

Доказателство. Ако точката P не е нито вътрешна, нито външна за $\mathbf{M}$, то за всяко $r > 0$ кръговата околност $\mathbf{B}(P, r)$ не може да се съдържа нито в $\mathbf{M}$, нито в $\mathbb{R}^n \backslash \mathbf{M}$. Това означава, че тя ще има общи точки и с $\mathbb{R}^n \backslash \mathbf{M}$, и с $\mathbf{M}$.

Обратно, ако всяка кръгова околност на P има общи точки с $\mathbf{M}$ и с $\mathbb{R}^n \backslash \mathbf{M}$, то очевидно никоя кръгова околност на P не може да се съдържа в $\mathbf{M}$ или в $\mathbb{R}^n \backslash \mathbf{M}$, т.е. P не е вътрешна или външна за M. ∎



Вътрешна (P_1), външна (P_2), контурна (P_3) точки за множеството $\mathbf{M}$.

Следствие. *Контурите на множеството* $\mathbf{M}$ *и на неговото допълнение* $\mathbb{R}^n \backslash \mathbf{M}$ *съвпадат.*

Забележка. Дадените по-горе дефиниции зависят от това в кое евклидово пространство разглеждаме множеството $\mathbf{M}$. Така например, нека $\mathbf{I}$ е подинтервал на правата $\mathbb{R}$. Тогава неговата вътрешност в смисъл на горната дефиниция съвпада с множеството на вътрешните му точки в обичайния смисъл, т.е. съвпада с интервала, евентуално с изключени крайни точки. От друга страна, ако разгледаме същия интервал $\mathbf{I}$ като подмножество на оста x в равнината $\mathbb{R}^2$, то вътрешността му е празна, и той се състои само от контурни точки (докажете!).

Ясно е, че външните за $\mathbf{M}$ точки не принадлежат на $\mathbf{M}$; следователно точките, принадлежащи на $\mathbf{M}$, са вътрешни или контурни. Това дава $\mathbf{M} \subset \mathbf{M}^o \cup b(\mathbf{M})$. От друга страна, тези две множества не са длъжни да съвпадат; наистина, точките от контура на $\mathbf{M}$ могат и да не му принадлежат. Оттук получаваме една класификация на подмножествата на $\mathbb{R}^n$, която играе основна роля по-нататък:

Дефиниция. *Едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ се нарича отворено в $\mathbb{R}^n$, ако то не съдържа точки от контура си. Под околност на дадена точка ще разбираме отворено множество, което я съдържа.*

Ще разгледаме и другият краен случай:

Дефиниция. *Едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ се нарича затворено в $\mathbb{R}^n$, ако то съдържа всички точки на контура си.*

Ще отбележим, че в общия случай едно множество може да съдържа някои точки от контура, а други да не съдържа. С други думи, "повечето" множества в $\mathbb{R}^n$ не са нито отворени, нито затворени.

Както видяхме по-горе, контурите на едно множество и неговото допълнение съвпадат. Следователно, ако $\mathbf{M}$ не съдържа нито една точка от $b\mathbf{M}$, то $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{M}$ ще съдържа всички точки на $b\mathbf{M}$, и обратно. Оттук получаваме:

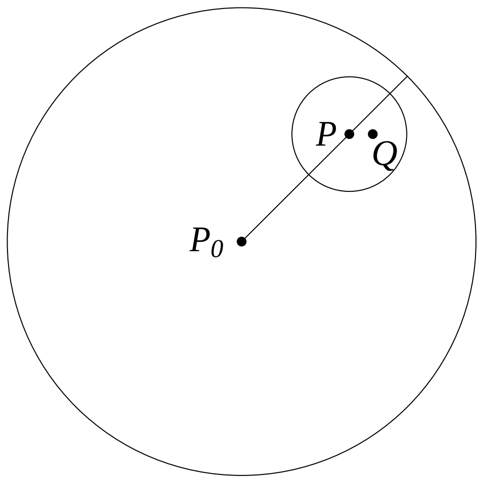
Твърдение 2. *Едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ е отворено точно тогава, когато неговото допълнение в $\mathbb{R}^n$ е затворено.*

Забележка. Лесно се вижда, че множеството $\mathbf{M}^o$ от вътрешните точки на $\mathbf{M}$ е отворено – очевидно това е най-голямото отворено множество, съдържащо се в $\mathbf{M}$.

Множеството от външните точки на $\mathbf{M}$ също е отворено.

Дефиниция. Множеството $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \cup b\mathbf{M}$ се нарича затворена обвивка на $\mathbf{M}$. Множеството $\overline{\mathbf{M}}$ е затворено, защото допълнението му съвпада с външността на $\mathbf{M}$.

Всяко затворено множество, което съдържа $\mathbf{M}$, ще съдържа и $\overline{\mathbf{M}}$ (докажете). С други думи, $\overline{\mathbf{M}}$ е най-малкото затворено множество, съдържащо $\mathbf{M}$.



Отвореният кръг е отворено множество.

Пример. Отвореният кръг е отворено множество.

Доказателство. Нека P е произволна точка от отворения кръг $\mathbf{B}(P_0, r)$ с център P_0 и радиус r. Това означава, че $\rho(P_0, P) < r$. Да изберем ε такова, че $0 < \varepsilon < r - \rho(P_0, P)$; ще докажем, че $\mathbf{B}(P, \varepsilon) \subset B(P_0, r)$. Наистина, нека $Q \in \mathbf{B}(P, \varepsilon)$. Тогава по неравенството на триъгълника

$$\rho(P_0, Q) \leq \rho(P_0, P) + \rho(P, Q) < \rho(P_0, P) + \varepsilon < r.$$

$\blacksquare$

По същия начин се доказва, че затвореният кръг, т.е. множеството от точки P, за които $\rho(P_0, P) \leq r$, е затворено множество. И в двата случая контура на кръга съвпада с неговата гранична окръжност (или сфера,...), т.е. с множеството $\mathbf{S}(P_0, r) = \{P : \rho(P_0, P) = r\}$.

Сходимост на редици от точки в $\mathbb{R}^n$.

Дефиниция. *Казваме, че редицата $\{P_k\}_{k=1,2,...}$ от точки на $\mathbb{R}^n$ е сходяща към точката P_0 (пишем $P_k \to P_0$, или $\lim_{k\to\infty} P_k = P_0$), ако*

$$\rho(P_k, P_0) \ \to \ 0.$$

По-подробно, за всяко положително ε съществува номер ν, така че за всяко естествено $k > \nu$ да имаме $\rho(P_k, P_0) < \varepsilon$. Казано по друг начин: Всяка кръгова околност на граничната точка съдържа всички членове на редицата освен краен брой (или: всички от известно място нататък).

Сходимостта на редици от точки в $\mathbb{R}^n$ може лесно да се сведе към сходимост на числови редици. Наистина, нека точката P_k да е с координати $\left(x_1^k, \ldots, x_n^k\right)$, и съответно P_0 - с $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Тогава имаме

Теорема 3. *Редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ клони към P_0 тогава и само тогава, когато за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$ редицата $\left\{x_i^k\right\}$ от i-тите координати клони по k към i-тата координата x_i^0 на P_0 (такава сходимост понякога се нарича покоординатна сходимост.*

Доказателство. Нека $\rho\left(P_k, P_0\right) \rightarrow 0$. Тогава за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$ имаме:

$$0 \leq \left|x_i^k - x_i^0\right| = \sqrt{\left|x_i^k - x_i^0\right|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^k - x_j^0\right|^2} = \rho\left(P_k, P_0\right)$$

и по лемата за полицаите $\lim_{k\to\infty} \left|x_i^k - x_i^0\right| = 0$.

Обратно, ако за всяко i имаме $\left|x_i^k - x_i^0\right| \rightarrow 0$, след повдигане в квадрат, сумиране, и кореноване, получаваме, че $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i^k - x_i^0\right|^2} \rightarrow 0$. ∎

От теоремата веднага се вижда, че сходимостта в $\mathbb{R}^n$ е съгласувана с линейните операции. По-точно, имаме:

Следствие. Ако $P_k \rightarrow P_0$ и $Q_k \rightarrow Q_0$ в $\mathbb{R}^n$, и λ_k е числова редица, клоняща към λ_0, то

$$P_k + Q_k \rightarrow P_0 + Q_0 \quad , \quad \lambda_k\ P_k \rightarrow \lambda_0\ P_0.$$

Теорема 3 ни дава възможност да пренесем условието на Коши за сходимост, доказано в I §1.6 за числови редици, към редици от точки в $\mathbb{R}^n$.

Дефиниция. *Казваме, че редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ от точки на $\mathbb{R}^n$ удовлетворява условието на Коши, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число ν такова, че при $k > \nu$, $l > \nu$ да имаме $\rho\left(P_k, P_l\right) < \varepsilon$.*

Теорема 4. *Една редица от точки на $\mathbb{R}^n$ е сходяща тогава и само тогава, когато удовлетворява условието на Коши.*

Доказателство. В едната посока твърдението лесно се доказва непосредствено от дефиницията за сходимост. Нека $P_k \to P_0$. Да вземем произволно $\varepsilon > 0$ и да изберем ν такова, че при $k > \nu$ да имаме $\rho(P_k, P_0) < \varepsilon/2$. Тогава при $k > \nu$, $l > \nu$ имаме $\rho(P_k, P_l) \leq \rho(P_k, P_0) + \rho(P_0, P_l) < \varepsilon$.

За доказателство на обратното твърдение ще използваме, че за редици от числа то вече е доказано (виж т. 8 на I §1.6). Ако условието на Коши е изпълнено, то за всяко $i = 1, \ldots, n$ при $k > \nu$, $p > \nu$ имаме $\left|x_i^k - x_i^l\right| \leq \rho(P_k, P_l) < \varepsilon$. Така редицата $\left\{x_i^k\right\}_{k=1,2,\ldots}$ от i-тите координати на точките P_k удовлетворява условието на Коши и следователно е сходяща. Да означим границата и чрез x_i^0. Тогава от теорема 3 следва, че редицата P_k клони към точката $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. ■

Характеризация на затворените множества. Разглеждането на сходимостта позволява да се даде еквивалентна дефиниция на понятието затворено множество:

Теорема 5. *Едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ е затворено точно тогава, когато съдържа границите на всички сходящи редици от свои елементи.*

Доказателство. Нека $\mathbf{F}$ е затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$, и редицата P_k клони към P_0, като $P_k \in \mathbf{F}$ за всяко естествено k. Трябва да докажем, че и $P_0 \in \mathbf{F}$.

Наистина, нека допуснем, че P_0 не принадлежи на $\mathbf{F}$. Тъй като $\mathbf{F}$ е затворено, то съдържа всички свои контурни точки. Тогава P_0 може да бъде само външна за $\mathbf{F}$. Следователно можем да намерим $r > 0$ такова, че $\mathbf{B}(P_0, r)$ не пресича $\mathbf{F}$. От друга страна, по дефиницията за сходимост при достатъчно голямо k имаме $P_k \in \mathbf{B}(P_0, r)$. Това обаче противоречи на предположението, че всички точки на редицата са в $\mathbf{F}$.

Обратно, нека $\mathbf{F}$ съдържа границите на всички сходящи редици от свои елементи; ще докажем, че $\mathbf{F}$ съдържа контурните си точки. Нека P_0 е произволна точка от контура на $\mathbf{F}$. Да разгледаме кръговете $\mathbf{B}(P_0, 1/k)$ с център P_0 и радиус $1/k$. От твърдение 1 следва, че всеки от тези кръгове има непразно сечение с $\mathbf{F}$ и следователно съществува точка $P_k \in \mathbf{F} \cap \mathbf{B}(P_0, 1/k)$. Тъй като $\rho(P_k, P_0) < 1/k$, то $\rho(P_k, P_0) \to 0$, и следователно $P_k \to P_0$. От друга страна, тъй като всички точки P_k са в $\mathbf{F}$, то от предположението следва, че и $P_0 \in \mathbf{F}$, което трябваше да се докаже. ■

Забележка. От доказателството се вижда, че ако добавим към дадено множество $\mathbf{M}$ границите на всички сходящи редици от негови елементи, ще получим точно затворената му обвивка $\overline{\mathbf{M}}$.

Точки на сгъстяване и подредици. Както и в едномерния случай, можем да въведем понятието точка на сгъстяване на дадена редица от точки на $\mathbb{R}^n$:

Дефиниция. *Казваме, че точката P_0 е точка на сгъстяване на редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ кръговата околност $\mathbf{B}(P_0, \varepsilon)$ на P_0 съдържа безкрайно много точки от редицата.*

Това означава, че всяка кръгова околност на P_0 съдържа точки с произволно големи номера. Следователно горната дефиниция може да се изкаже и по друг начин:

Точката P_0 е точка на сгъстяване на редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ и естествено n съществува номер $m > n$ такъв, че $P_m \in \mathbf{B}(P_0, \varepsilon)$.

Ясно е, че ако редицата $\{P_k\}$ притежава граница P_0, то точката P_0 е и единствена точка на сгъстяване на тази редица.* В общия случай една редица от точки може да има много точки на сгъстяване. Така, в I.§1.6 беше показано, че множеството $\mathbb{Q}$ от рационалните числа може да бъде номерирано, и така получената редица има за точки на сгъстяване всички реални числа. Не е трудно този пример да бъде пренесен в многомерния случай: да означим с $\mathbb{Q}^2$ множеството от всички точки в $\mathbb{R}^2$, за които и двете координати са рационални. Тогава отново точките от $\mathbb{Q}^2$ могат да бъдат подредени в редица, и тази редица има за точки на сгъстяване всички точки от $\mathbb{R}^2$ (докажете!)

Подредици. Ще напомним понятието подредица на дадена редица: ако ни е дадена редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ от точки на $\mathbb{R}^n$ и строго монотонно растяща система $k_1 < k_2 < \ldots < k_l < \ldots$ от естествени числа, ние може да си образуваме редицата $\{P_{k_l}\}_{l=1,2,\ldots}$, която наричаме подредица на дадената.

Твърдение 6. *Ако редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ е сходяща към точката P_0, то всяка нейна подредица е сходяща към същата граница.*

*Както ще покажем по-нататък, за ограничени редици е в сила и обратното твърдение.

Доказателство. Наистина, след като извън всяка кръгова околност на P_0 от вида $\mathbf{B}(P_0, \varepsilon)$ се намират само краен брой членове на началната редица, то извън нея може да има най-много краен брой членове на подредицата. ∎

Както и в едномерния случай, понятията подредица и точка на сгъстяване са тясно свързани:

Теорема 7. *Точката P_0 е точка на сгъстяване на редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\dots}$ точно тогава, когато съществува подредица $\{P_{k_l}\}_{l=1,2,\dots}$, клоняща към P_0.*

Доказателство. Ако $\lim_{l\to\infty} P_{k_l} = P_0$, то всеки отворен кръг от вида $B(P_0, \varepsilon)$ съдържа безкрайно много членове на подредицата (всички освен краен брой) и следователно безбройно много членове на дадената редица.

Обратно, нека P_0 е точка на сгъстяване на редицата $\{P_k\}$. Можем да изберем номер k_1 такъв, че $P_{k_1} \in \mathbf{B}(P_0, 1)$. Да разгледаме кръга $\mathbf{B}(P_0, 1/2)$; тъй като според дефиницията на точка на сгъстяване той съдържа членове на редицата с произволно големи номера, ние можем да намерим естествено число k_2 такова, че $k_2 > k_1$ и $P_{k_2} \in \mathbf{B}(P_0, 1/2)$. Продължавайки по същия начин, при намерени вече $k_1 < k_2 < \ldots < k_{l-1}$, ние можем да изберем k_l така, че $k_l > k_{l-1}$ и $P_{k_l} \in \mathbf{B}(P_0, 1/l)$. С това получихме безкрайна редица $k_1 < k_2 < \ldots < k_l < \ldots$ от естествени числа такива, че $\rho(P_{k_l}, P_0) < 1/l$, откъдето $\lim_{l\to\infty} P_{k_l} = P_0$. ∎

Компактни множества. Теореми на Болцано-Вайерщрас и Хайне-Борел.

В тази точка ще покажем как теоремата на Болцано-Вайерщрас, известна в едномерния случай, се пренася в многомерното пространство.

Едно подмножество $\mathbf{M}$ на $\mathbb{R}^n$ ще наричаме ограничено, ако числовото множество $\{\rho(0, P)\}_{P\in\mathbf{M}}$ на разстоянията на всички точки от $\mathbf{M}$ до началото на координатната система е ограничено отгоре. Лесно се вижда, че $\mathbf{M}$ е ограничено точно тогава, когато всички координати x_i, $i = 1, \ldots, n$ на всички негови точки $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ са ограничени по модул от някаква константа. Една редица $\{P_k\}$ ще наричаме ограничена, ако множеството от нейните точки е ограничено.

Теорема 8. (Болцано-Вайерщрас) *Всяка ограничена редица от точки на $\mathbb{R}^n$ притежава поне една точка на сгъстяване.*

Като се вземе пред вид теорема 7, се получава следната еквивалентна формулировка: Всяка ограничена редица от точки на $\mathbb{R}^n$ съдържа сходяща подредица.

Доказателство. При $n = 1$ теоремата е доказана в първата част на курса (виж I.§1.6), като се използва последователно разделяне на интервала, съдържащ членовете на редицата, на две равни части. Това доказателство може лесно да се приспособи и за многомерното пространство (виж теоремата на Хайне-Борел по-долу), но по-краткия начин е да използваме едномерния случай за доказване на многомерния.

За удобство ще докажем случая $n = 2$. Нека $P_k = (x_k, y_k)$ е ограничена редица от точки на равнината. Тогава съществува константа C такава, че $|x_k|, |y_k| \leq C$. От ограничената числова редица $\{x_k\}_{k=1,2,\ldots}$ можем да изберем сходяща подредица $\{x_{k_l}\}_{l=1,2,\ldots}$; нека $\lim_{l\to\infty} x_{k_l} = x_0$. Да разгледаме сега съответната подредица от вторите координати $\{y_{k_l}\}_{l=1,2,\ldots}$. Тъй като тя също е ограничена, можем на свой ред да намерим нейна подредица $\left\{y_{k_{l_p}}\right\}_{p=1,2,\ldots} \to y_0$. Тъй като редицата $\left\{x_{k_{l_p}}\right\}_{p=1,2,\ldots}$ е подредица на редицата $\{x_{k_l}\}_{l=1,2,\ldots}$, то според твърдение 6 тя също клони към x_0. Тогава, по теорема 3, редицата от точки $P_{k_{l_p}} = \left(x_{k_{l_p}}, y_{k_{l_p}}\right)$ е подредица на дадената и клони към точката $P_0 = (x_0, y_0)$.

За редици от точки на $\mathbb{R}^n$ при по-големи стойности на n доказателството се извършва по същия начин. Разликата е, че трябва n пъти да се избират подредици на подредиците ..., като в крайна сметка отново се получава покоординатно сходяща подредица на дадената редица. ■

Следствие 9. Ако редицата $\{P_k\}$ от точки на $\mathbb{R}^n$ е ограничена и има само една точка на сгъстяване, то тази точка е и граница на редицата.

Доказателство. Нека $\{P_k\}$ е ограничена редица от точки и P_0 е нейната единствена точка на сгъстяване. Да допуснем, че $\{P_k\}$ не клони към P_0. Това означава, че съществува $\varepsilon > 0$ такова, че извън кръга $\mathbf{B}(P_0, \varepsilon)$ остават безкрайно много членове на редицата. Повтаряйки конструкцията на теорема 7, ние можем да конструираме подредица P_{k_l} на дадената, чиито точки са извън $\mathbf{B}\left(P_0, \varepsilon\right)$. За тази подредица е приложима теорема 8, и ние може да намерим на свой ред нейна сходяща подредица $\left\{P_{k_{l_p}}\right\}_{p=1,2,\ldots}$. Да означим границата и с $\widetilde{P}$. Ясно е, че $\widetilde{P} \neq P$. От друга страна, $\widetilde{P}$ е точка на сгъстяване на подредицата P_{k_l}, а следователно и на дадената редица $\{P_k\}$, което противоречи на условието на теоремата. ■

Дефиниция. *Едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ наричаме компактно, ако то е ограничено и затворено.*

Като използуваме това понятие, можем да дадем друга формулировка на теоремата на Болцано-Вайерщрас:

Теорема 10. *Подмножеството $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n$ е компактно тогава и само тогава, когато от всяка редица от негови точки може да се избере подредица, клоняща към точка от $\mathbf{M}$.*

Доказателство. Нека $\mathbf{M}$ е компактно и $\{P_k\}$ е редица от негови точки. Тъй като $\mathbf{M}$ е ограничено, то същото е вярно и за редицата $\{P_k\}$, и ние можем да изберем нейна сходяща подредица. По теорема 5 от затвореността на $\mathbf{M}$ следва, че границата на подредицата също принадлежи на $\mathbf{M}$.

Обратно, нека $\mathbf{M}$ да притежава свойството за съществуване на сходяща подредица. Ще докажем, че $\mathbf{M}$ е ограничено и затворено. Ако $\mathbf{M}$ не е ограничено, то съществува редица от точки $P_k \in \mathbf{M}$ такава, че $\rho\left(\vec{0}, P_k\right) \to +\infty$. Да изберем нейна подредица P_{k_l}, сходяща към точката $P_0 \in \mathbf{M}$. Тогава, от една страна, $\rho\left(\vec{0}, P_{k_l}\right) \to \rho\left(\vec{0}, P_0\right)$. От друга страна, тъй като $\rho\left(\vec{0}, P_{k_l}\right)$ е подредица на $\rho\left(\vec{0}, P_k\right)$, то $\rho\left(\vec{0}, P_{k_l}\right) \to +\infty$. Полученото противоречие доказва ограничеността на $\mathbf{M}$.

За да докажем, че $\mathbf{M}$ е затворено, да вземем произволна точка P_0 от контура $b\mathbf{M}$ на $\mathbf{M}$, и да изберем, както в доказателството на теорема 5, редица P_k от точки на $\mathbf{M}$, така че $P_k \to P_0$. Съществува нейна подредица P_{k_l}, сходяща към точка $P' \in \mathbf{M}$. От твърдение 6 следва обаче, че $P' = P_0$ и следователно $P_0 \in \mathbf{M}$. ■

Забележка. Горното твърдение е характерно за крайномерните пространства. В случая на безкрайномерни нормирани пространства то не е вярно, и затова