Лекция: Сплайн функции. Интерполиране с кубични сплайни

Гено Николов, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски"

Съдържание на лекцията

- Дефиниция и представяне на сплайн–функциите
- Интерполиране с на части кубична функция
- Интерполиране с кубични сплайни
- Теорема на Холидей

Сплайн функции: как се появяват ?

При изучаването на грешката при интерполиране с алгебрични полиноми стана ясно, че тя зависи, от една страна, от свойствата на интерполираната функция (например, гладкост и големина на производните ѝ), а от друга, от дължината на интервала, в който приближаваме (например, интерполираме) функцията. И ако по отношение на първия фактор няма какво да се направи, по втория можем да постъпим така:
Разделяме оригиналния интервал $[a, b]$ на голям брой подинтервали $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, m$, с малка дължина, и приближаваме функцията в отделните интервали $[x_i, x_{i+1}]$ с различни полиноми $p_i(x) \in \pi_r$.

Сплайн функции: как се появяват ?

По този начин получаваме приближението

$$f(x) \approx P(x) := p_i(x) \text{ за } x \in (x_i, x_{i+1}).$$

Функцията $P(x)$ е на части полиномиална и приближава f с определена точност. В общия случай $P(x)$ е прекъсната в точките $x_1, \ldots, x_m$. Това е нежелателен ефект, затова се поставя изискването полиномите $p_{i-1}(x)$ и $p_i(x)$ да имат една и съща стойност в точката на свързване x_i, при което получаваме непрекъсната на части полиномиална функция $P(x)$. Ако поставим допълнително изискване производните на $p_{i-1}(x)$ и $p_i(x)$ да съвпадат в x_i, тогава $P(x)$ ще има непрекъсната производна, т.е., графиката ѝ ще е гладка крива. При още по-силни изисквания за съгласуваност $P(x)$ ще има непрекъснати производни до даден ред, задавайки гладка крива, приближаваща добре графиката на f. Такива криви се наричат сплайн–функции.

Сплайн функции: определение

Наименованието идва от английското spline, което е името на стар механичен уред за чертане на гладки криви през зададени точки. Теорията на сплайн–функциите възниква през 40-те години на миналия век, но се развива интензивно и в наши дни. Сплайн-функциите имат многобройни приложения, в това число в теорията на приближенията и в компютърния геометричен дизайн.

Определение

Функцията $s(x)$ е сплайн-функция от степен r с възли $x_1 < \cdots < x_n$, ако удовлетворява следните изисквания:

1. $s(x)$ е полином от степен ненадминаваща r във всеки интервал (x_i, x_{i+1}), $i = 0, \ldots, n$ (където $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = \infty$);
2. $s(x), s'(x), \ldots, s^{(r-1)}(x)$ са непрекъснати в $(-\infty, \infty)$.

Линейни пространства от сплайн функции

Множеството от сплайн–функции от степен r с възли в точките $x_1, \dots, x_n$ ще бележим с $S_r(x_1, \dots, x_n)$. Това множество е линейно пространство, което съдържа π_r.
Вместо сплайн-функция понякога ще пишем накратко "сплайн".
Непосредствено от определението следват свойствата:

1. Ако $s \in S_r(x_1, \dots, x_n)$, то s' е сплайн от степен $r-1$ със същите възли.
2. Ако $s \in S_r(x_1, \dots, x_n)$, то r-тата производна на s е на части постоянна функция с евентуални скокове в точките $x_1, \dots, x_n$. Обратно, r-тата примитивна функция на една на части постоянна функция със скокове в точките $x_1, \dots, x_n$ е сплайн от степен r с възли в $x_1, \dots, x_n$.

Отсечена степенна функция

Най-прост пример на сплайн-функция от степен r с един възел е отсечената степенна функция.

Определение

Отсечената степенна функция $(x-\xi)_+^r$ се дефинира посредством

$$(x-\xi)_+^r := \begin{cases} (x-\xi)^r, & \text{ако } x \geq \xi \\ 0, & \text{ако } x < \xi\,. \end{cases}$$

Тя е сплайн от степен r с единствен възел в точката ξ, като при $x \geq \xi$ съвпада с полинома $(x-\xi)^r$, а при $x < \xi$ съвпада с полинома $p(x) \equiv 0$. Освен това $\left\{(x-\xi)_+^r\right\}^{(i)}$ е непрекъсната в точката $x = \xi$ за $i = 0, \ldots, r-1$ (и приема там стойност 0). Отсечената степенна функция играе основна роля в теорията на сплайн-функциите.

Представяне на сплайн функциите

Следващата теорема показва, че всеки сплайн се представя като сума от алгебричен полином и линейна комбинация на подходящи отсечени степенни функции.

Теорема 1.

Всяка сплайн-функция $s(x)$ от $S_r(x_1,\dots,x_n)$ се представя по единствен начин във вида

$$s(x) = p(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k (x - x_k)_+^r\,, \tag{1}$$

където p е полином от степен r, а $c_1,\dots,c_n$ са реални числа. Коефициентите $\{c_k\}_{k=1}^n$ се получават по формулата

$$c_k = \frac{s^{(r)}(x_k+0) - s^{(r)}(x_k-0)}{r!}, \quad k = 1,\dots,n.$$

Доказателство на Теорема 1

Да поясним най-напред, че използваме означението

$$f(x+0) := \lim_{h\to 0, h>0} f(x+h), \quad f(x-0) := \lim_{h\to 0, h>0} f(x-h)\,.$$

Нека $s(x) \in S_r(x_1, \dots, x_n)$. Тогава s съвпада с някакъв полином P_k от степен r в интервала (x_k, x_{k+1}), $k = 0, \dots, n$. Тъй като $s^{(j)}(x)$ е непрекъсната функция в точката x_k, изпълнено е $P_{k-1}^{(j)}(x_k) = P_k^{(j)}(x_k)$ за $j = 0, \dots, r-1$. Последното означава, че полиномът $P_k - P_{k-1}$ има r–кратна нула в точката x_k, или, еквивалентно,

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + c_k(x - x_k)^r \quad \text{за всяко } x\ , \tag{2}$$

където c_k е някаква константа.

Доказателство на Теорема 1 (продължение)

От тази рекурентна връзка за полиномите $\{P_k\}$ следва представянето

$$P_k(x) = P_0(x) + \sum_{i=1}^{k} c_i (x - x_i)^r \,.$$

От това, че $s(x)$ съвпада с $P_k(x)$ при $x \in (x_k, x_{k+1})$ и предвид определението на отсечената степенна функция, горното равенство ни дава

$$s(x) = P_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i (x - x_i)_+^r \,,$$

с което доказахме търсеното представяне на $s(x)$.

Доказателство на Теорема 1 (продължение)

Ще докажем формулата за коефициентите c_k. След r–кратно диференциране на (2) в точката x_k получаваме

$$P_k^{(r)}(x_k) = P_{k-1}^{(r)}(x_k) + c_k\, r!\,,$$

откъдето следва

$$c_k\, r! = P_k^{(r)}(x_k) - P_{k-1}^{(r)}(x_k) = s^{(r)}(x_k + 0) - s^{(r)}(x_k - 0),$$

което е точно формулата за коефициента c_k. Полиномът $p(x)$ в представянето (1) се определя също еднозначно – той съвпада с полинома $P_0(x)$. Теоремата е доказана. $\square$

Линейно пространство от сплайни

Тъй като всеки израз от вида (1) е сплайн от $S_r(x_1, \ldots, x_n)$, от Теорема 1 следва, че $S_r(x_1, \ldots, x_n)$ съвпада с множеството от всички функции от вида (1). Размерността на линейното пространство $S_r(x_1, \ldots, x_n)$ е равна на $r + n + 1$. Тя е равна на броя базисните функции в представянето (1), а именно n отсечени $(x - x_k)_+^r$, $k = 1, \ldots, n$, и степенните функции $1, x, \ldots, x^r$. В следващата лекция ще се запознаем с по-удобен от изчислителна гледна точка базис на $S_r(x_1, \ldots, x_n)$

Интерполиране с на части кубична функция

Нека $f(x)$ е реална непрекъсната функция в $[a, b]$. Искаме да построим кубичен сплайн $s(x)$ с възли в $x_1, \dots, x_n$, който интерполира $f(x)$ в точките $x_0, \dots, x_{n+1}$, където $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$. Да построим s означава да намерим полиномите от трета степен $\{P_i(x)\}$, които представят $s(x)$ в интервалите (x_i, x_{i+1}), $i = 0, \dots, n$. От интерполационните условия

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n+1,$$

следват условия за полинома P_i:

$$P_i(x_i) = f(x_i), \quad P_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n. \qquad (3)$$

На части кубична функция (продължение)

От равенствата (3) в частност следва

$$P_{i-1}(x_i) = P_i(x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

следователно $s(x)$ е непрекъсната функция в $[a, b]$. Напомняме, че всеки кубичен полином се определя напълно с четири интерполационни условия. За сега всяка кубична част $P_i(x)$ интерполира $f(x)$ само в две точки: x_i и x_{i+1}. За определяне на $P_i(x)$ ни трябват с още две интерполационни условия. По-долу ще подберем тези условия така, че s да бъде не само непрекъсната, но да има непрекъснати първа и втора производна, т.е. да бъде кубичен сплайн. Да поискаме $P_i(x)$ да удовлетворява условията

$$P_i'(x_i) = d_i, \quad P_i'(x_{i+1}) = d_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n\ , \tag{4}$$

като параметрите $d_0, \dots, d_{n+1}$ ще уточним по-късно.

На части кубична функция (продължение)

Условията (4) гарантират, че $s'(x)$ е непрекъсната функция в $[a, b]$. За да определим $P_i(x)$ от интерполационните условия на Ермит (3) и (4), ще използваме формулата на Нютон

$$\begin{aligned} P_i(x) = & P_i(x_i) + P_i[x_i, x_i](x - x_i) + P_i[x_i, x_i, x_{i+1}](x - x_i)^2 \\ & + P_i[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}](x - x_i)^2(x - x_{i+1}). \end{aligned}$$

Попълваме таблицата за пресмятане на разделените разлики. Нека $\Delta_i := x_{i+1} - x_i$, тогава

$$P_i(x_i) = f(x_i), \quad P_i[x_i, x_i] = d_i, \quad P_i[x_i, x_{i+1}] = f[x_i, x_{i+1}],$$

$$\begin{aligned} P_i[x_i, x_i, x_{i+1}] &= \frac{f[x_i, x_{i+1}] - d_i}{\Delta_i}, \\ P_i[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}] &= \frac{d_{i+1} - 2f[x_i, x_{i+1}] + d_i}{(\Delta_i)^2}. \end{aligned}$$

Кубична ермитова интерполация

Да предположим, че интерполираната функция f притежава производна в интервала $[a, b]$. Тогава можем да изберем в (4)

$$d_i = f'(x_i), \quad i = 0, \ldots, n+1.$$

В този случай $P_i(x)$ е интерполационният полином на Ермит за функцията f с два възела: x_i и x_{i+1}, всеки с кратност 2. Да означим с s_0 получената по този начин функция, и да предположим, че f има непрекъсната четвърта производна в интервала $[a, b]$. От формулата за представяне на остатъка на интерполационния полином на Ермит, при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ получаваме

$$\begin{aligned} |f(x) - s_0(x)| &= |(x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2|.|f[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}, x]| \\ &\leq \left(\frac{\Delta_i}{2}\right)^4 \max_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} \frac{\left|f^{(4)}(\xi)\right|}{4!} \end{aligned}$$

Кубична ермитова интерполация (продължение)

Следователно за всяко x от $[a, b]$ имаме оценка за грешката

$$|f(x) - s_0(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right| \frac{\left(\max\limits_{0 \leq i \leq n} \Delta_i \right)^4}{384}.$$

В частност, ако изберем равномерна мрежа от възли, т.е.

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n+1}, \qquad i = 0, \ldots, n+1\,,$$

тогава $\Delta_i = (b-a)/(n+1)$ за всяко i. Ако означим $M = \max\{|f^{(4)}(x)| \ : \ x \in [a, b]\}$, оценката за грешката в този случай добива вида

$$|f(x) - s_0(x)| \leq \frac{M(b-a)^4}{384(n+1)^4} \quad \text{за всяко } x \in [a, b]\,.$$

Интерполиране с кубични сплайни

Както вече отбелязахме, функцията $s(x)$, определена от условията (3) и (4), е не само непрекъсната, но има и непрекъсната първа производна при всеки избор на параметрите d_i. Ще покажем, че винаги е възможно да се изберат параметрите $\{d_i\}$ така, че функцията $s(x)$ да има и непрекъсната втора производна, т.е. да бъде кубичен сплайн. Изискването $s''(x)$ да е непрекъсната е еквивалентно с условията

$$P''_{i-1}(x_i) = P''_i(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Интерполиране с кубични сплайни (продълж.)

От представянията на P_{i-1} и P_i по формулата на Нютон:

$$\begin{aligned} P_{i-1}(x) = & f(x_{i-1}) + f[x_{i-1}, x_{i-1}](x - x_{i-1}) + f[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1})^2 \\ & + f[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i]\,(x - x_{i-1})^2 (x - x_i)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_i(x) = & f(x_i) + f[x_i, x_i]\,(x - x_i) + f[x_i, x_i, x_{i+1}]\,(x - x_i)^2 \\ & + f[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}](x - x_i)^2 (x - x_{i+1})\,, \end{aligned}$$

след двукратно диференциране и полагане $x = x_i$ получаваме

$$P''_{i-1}(x_i) = 2P_{i-1}[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] + 4P_{i-1}[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i]\Delta_{i-1}$$

$$P''_i(x_i) = 2P_i[x_i, x_i, x_{i+1}] - 2P_i[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}]\Delta_i\,.$$

Интерполиране с кубични сплайни (продълж.)

Като заместим разделените разлики с изразите намерени по-горе (тези, участващи в представянето на $P''_{i-1}(x_i)$, получаваме със смяната на i с $i-1$), равенството (5) добива вида

$$\frac{f[x_{i-1},x_i]-d_{i-1}}{\Delta_{i-1}}+2\frac{d_i-2f[x_{i-1},x_i]+d_{i-1}}{\Delta_{i-1}}$$
$$=\frac{f[x_i,x_{i+1}]-d_i}{\Delta_i}-\frac{d_{i+1}-2f[x_i,x_{i+1}]+d_i}{\Delta_i}\ .$$

След преобразуване получаваме, че условията (5) са еквивалентни на системата уравнения

$$\Delta_i d_{i-1}+2(\Delta_{i-1}+\Delta_i)d_i+\Delta_{i-1}d_{i+1}=b_i,\quad i=1,\ldots,n, \qquad (6)$$

където сме положили

$$b_i=3(f[x_{i-1},x_i]\Delta_i+f[x_i,x_{i+1}]\Delta_{i-1}),\quad i=1,\ldots,n.$$

Интерполиране с кубични сплайни (продълж.)

Да предположим, че стойностите на d_0 и d_{n+1} са избрани по някакъв начин. Тогава (6) е система от n линейни уравнения с n неизвестни $d_1, \ldots, d_n$, имаща единствено решение. Това следва от по-общ резултат, който доказваме по-долу.

Определение

Матрицата $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ е с доминиращ главен диагонал по редове, ако са изпълнени неравенствата

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Лема 1.

Нека $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ е матрица с доминиращ главен диагонал по редове. Тогава детерминантата на $\mathbf{A}$ е различна от нула.

Доказателство на Лема 1

Доказателство. Да допуснем, че е изпълнено (7), но въпреки това $|\mathbf{A}| = 0$. Тогава хомогенната система линейни уравнения

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \tag{8}$$

има ненулево решение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$. Нека

$$|x_k| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|, \quad |x_k| > 0.$$

Тогава от k-тото уравнение на системата (8) следва

$$-a_{kk}\, x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj}\, x_j\,,$$

и прилагайки неравенството на триъгълника, получаваме

$$|a_{kk}|.|x_k| = \Big|\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j\Big| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|.|x_j| \le |x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|\,.$$

Доказателство на Лема 1 (продължение)

От тук следва
$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\,,$$
което е противоречие с (7). Следователно допускането $|\mathbf{A}| = 0$ е невярно, и Лема 1 е доказана. $\square$

Да се върнем сега към матрицата $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ на системата (6). $\mathbf{A}$ е тридиагонална, т.е. $a_{ij} = 0$ при $|i-j| > 1$. Тя е матрица с доминиращ главен диагонал по редове, понеже

$$a_{11} = 2(\Delta_0+\Delta_1) > \Delta_1 = a_{12},\;\; a_{n,n} = 2(\Delta_{n-1}+\Delta_n) > \Delta_{n-1} = a_{n,n-1}$$

$$a_{ii} = 2(\Delta_{i-1}+\Delta_i) > \Delta_{i-1}+\Delta_i = a_{i,i-1}+a_{i,i+1}\,, \qquad i = 2,\ldots,n-1\,.$$

Интерполиране с кубични сплайни (продълж.)

Следователно системата (6) има единствено решение при всеки избор на d_0 и d_{n+1}. Следните два избора се използват най-често.

(i) Ако $f'(a)$ и $f'(b)$ са известни, избираме

$$d_0 = f'(a), \quad d_{n+1} = f'(b).$$

По този начин се получава така наречената пълна кубична сплайнова интерполация.

(ii) d_0 и d_{n+1} се определят от уравненията

$$\begin{aligned} s''(a) &= P_0''(x_0) = 0, \\ s''(b) &= P_n''(x_{n+1}) = 0, \end{aligned}$$

които заедно с (6) образуват система от $n+1$ уравнения за определяне на $d_0, \ldots, d_{n+1}$. Така получаваме естествената кубична сплайнова интерполация.

Интерполиране с кубични сплайни (продълж.)

Кубични сплайни с възли $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$, които съвпадат с полиноми от първа степен в интервалите $(-\infty, x_0)$ и (x_{n+1}, ∞) се наричат естествени кубични сплайни. Естествените кубични сплайни s удовлетворяват условията $s''(a) = s''(b) = 0$. Наричат се естествени поради естественото им поведение – те описват поведението на еластична пръчка, която е промушена през халки, намиращи се в точките $\{x_i, f(x_i)\}_0^{n+1}$. Ясно е, че такава пръчка ще приеме формата на права линия преди първата и след последната халка. Уредът за чертане "сплайн", за който вече споменахме, се състои от еластична пръчка и приспособления за прикрепването ѝ към произволни точки от чертожната дъска.

Екстремално свойство

Ще докажем едно екстремално свойство на естествените сплайни, показващо че (в известен смисъл) те са най-гладките функции измежду всички други, които интерполират дадена таблица.

Нека $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_{n+1})$ са дадени точки, $a = x_0 < \cdots < x_{n+1} = b$, и $\bar{y} = (y_0, \ldots, y_{n+1})$ са дадени стойности (реални числа).

Да означим с $F(\bar{x}, \bar{y})$ множеството от всички функции f с непрекъсната в $[a, b]$ втора производна, които удовлетворяват интерполационните условия:

$$f(x_k) = y_k \quad \text{за} \quad k = 0, \ldots, n+1.$$

Теорема на Холидей

Теорема на Холидей.

При дадени $\bar{x}$ и $\bar{y}$, нека $s(x)$ е единственият естествен кубичен сплайн с възли в $x_1, \dots, x_n$, който принадлежи на класа от интерполиращи функции $F(\bar{x}, \bar{y})$. Тогава за всяка функция $f \in F(\bar{x}, \bar{y})$ е изпълнено неравенството

$$\int_a^b \left[s''(x)\right]^2 dx \leq \int_a^b \left[f''(x)\right]^2 dx \,,$$

и равенството се достига само при $f \equiv s$.

За доказателството на теоремата на Холидей ще използваме следното спомагателно твърдение.

Една лема

Лема 2.

Нека f_1 и f_2 са непрекъснати функции в интервала $[a, b]$, такива че

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx = 0\,.$$

Тогава

$$\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x)\right]^2 dx \geq \int_a^b \left[f_2(x)\right]^2 dx$$

и равенството се достига тогава и само тогава когато $f_1(x) \equiv 0\,.$

Доказателство на Лема 2

Доказателството на Лема 2 е елементарно:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]^2 dx = \int_a^b [f_1(x)]^2 dx + 2\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx + \int_a^b [f_2(x)]^2 dx \\ = \int_a^b \left[f_1(x)\right]^2 dx + \int_a^b \left[f_2(x)\right]^2 dx \\ \geq \int_a^b \left[f_2(x)\right]^2 dx\,,\end{aligned}$$

като равенството е изпълнено само при $f_1 \equiv 0$.

Доказателство на теоремата на Холидей

Нека f е произволна функция от $F(\bar{x},\bar{y})$ и $s(x)$ е естественият кубичен сплайн от $F(\bar{x},\bar{y})$ с възли в точките $x_0,\ldots,x_{n+1}$. Да означим

$$\sigma := \int_a^b \left[f''(x) - s''(x)\right] s''(x)\,dx\,.$$

С интегриране по части получаваме

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[f''(x) - s''(x)\right] s''(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} s''(x)\left[f'(x)-s'(x)\right]\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[f'(x)-s'(x)\right] s'''(x)\,dx\,.$$

Доказателство на теоремата на Холидей (продълж.)

Като кубичен сплайн, s съвпада с полином от трета степен в интервала (x_{i-1}, x_i), затова $s'''(x)$ е константа в (x_{i-1}, x_i), която означаваме с c_i. Получаваме

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n+1} s''(x)\left[f'(x) - s'(x)\right]\Bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} - \sum_{i=1}^{n+1} c_i[f(x) - s(x)]\Bigg|_{x_{i-1}}^{x_i}. \quad (9)$$

Втората сума в (9) е равна на нула, защото $f, s \in F(\bar{x}, \bar{y})$ и следователно

$$f(x_j) - s(x_j) = y_j - y_j = 0 \quad \text{за } j = 0, \ldots, n+1.$$

Доказателство на теоремата на Холидей (продълж.)

Функцията $s''(x)\,[f'(x) - s'(x)]$ е непрекъсната, затова в първата сума от (9) всички изрази съдържащи стойностите на тази функция във вътрешните точки $x_1, \ldots, x_n$ взаимно се съкращават, и остава само разликата на стойностите ѝ в $x_{n+1} = b$ и $x_0 = a$. Окончателно получаваме

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_a^b \left[f''(x) - s''(x)\right] s''(x)\,dx \\ &= s''(b)\left[f'(b) - s'(b)\right] - s''(a)\left[f'(a) - s'(a)\right]\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Ако s е естественият кубичен сплайн от $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, тогава $s''(a) = s''(b) = 0$ и следователно $\sigma = 0$. Последното означава, че функциите $f_1(x) = f''(x) - s''(x)$ и $f_2(x) = s''(x)$ са ортогонални.

Доказателство на теоремата на Холидей (продълж.)

Можем следователно да приложим Лема 2, получавайки

$$\int_a^b \left[f''(x)\right]^2 dx = \int_a^b \left[\left(f''(x) - s''(x)\right) + s''(x)\right]^2 dx \geq \int_a^b \left[s''(x)\right]^2 dx\,,$$

с което неравенството в теоремата на Холидей е доказано. Съгласно Лема 2, равенството се достига само при $f_1 = f'' - s'' \equiv 0$, т.е. когато $f - s$ е полином от първа степен. Но тъй като по условие $f - s$ се анулира в $n + 2$ точки: $x_0, \ldots, x_{n+1}$, от тук следва $f \equiv s$. И така, равенството се достига само при $f \equiv s$. Теоремата на Холидей е доказана. $\square$

Забележка

Забележка

Теоремата на Холидей остава вярна и ако F е класът от функции удовлетворяващи интерполационните условия

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n+1, \quad f'(a) = y'_0, \; f'(b) = y'_{n+1},$$

а s е кубичният сплайн от този клас, осъществяващ пълната кубична сплайнова интерполация. Наистина, в този случай имаме

$$f'(a) - s'(a) = 0, \quad f'(b) - s'(b) = 0\,,$$

и от равенството (10) отново следва, че функциите $f''(x) - s''(x)$ и $s''(x)$ са ортогонални.

Край на лекцията !