

13. Степенни редове. Област и радиус на сходимост

Степенни редове

Дефиниция

Функционален ред от вида

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + \cdots \quad (1)$$

$$\text{или, накратко, } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n, \quad (2)$$

където $a, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, се нарича степенен.

Примери:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad \text{или, накратко, } \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad (3)$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{или, накратко, } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (4)$$

Теорема 1

Ако степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ за някое $x_0 \neq 0$, то той е сходящ и то абсолютно за всяко x такова, че $|x| < |x_0|$.

Следствие 1

Ако степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ е сходящ за някое $x_0 \neq a$, то той е сходящ и то абсолютно за всяко x такова, че $|x - a| < |x_0 - a|$.

Доказателство на Теорема 1

И така известно е, че числовият ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ е сходящ. Нека x_1 е произволно фиксирано такава, че $|x_1| < |x_0|$. За да установим твърдението на теоремата, трябва да докажем, че числовият ред $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|$ е сходящ.

Ще си послужим с Принципа за сравняване на числови редове с неотрицателни членове (Теорема 1, Тема 6, ДИС 1).

Използваме, че

$$|a_n x_1^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x_1}{x_0} \right|^n. \quad (5)$$

Да положим за краткост $q := \left| \frac{x_1}{x_0} \right|$. Тогава $0 \leq q < 1$.

Понеже $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ е сходящ, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$ (НУ за сход. на редове, Теорема 3, Тема 5, ДИС 1). Следователно съществува $C > 0$ такава, че

$$|a_n x_0^n| \leq C \quad \forall n. \quad (6)$$

От (5) и (6) следва

$$|a_n x_1^n| \leq C q^n \quad \forall n. \quad (7)$$

Числовият ред $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ е сходящ, защото $q \in [0, 1)$. Следователно

сходящ е и $\sum_{n=0}^{\infty} C q^n$. Сега от (7) и Принципа за сравняване на
числови редове с неотрицателни членове следва, че числовият ред
 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|$ е сходящ.

Радиус на сходимост

Теорема 2

За всеки степенен ред от вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е в сила точно едно от следните твърдения:

- (а) той е абсолютно сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$,
- (б) той е сходящ само за $x = 0$,
- (в) $\exists R > 0$ такава, че редът е абсолютно сходящ при $|x| < R$ и е разходящ при $|x| > R$.

Следствие 2

За всеки степенен ред от вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ е в сила точно едно от следните твърдения:

- (а) той е абсолютно сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$,
- (б) той е сходящ само за $x = a$,
- (в) $\exists R > 0$ такава, че редът е абсолютно сходящ при $|x - a| < R$ и е разходящ при $|x - a| > R$.

Числото R се нарича радиус на сходимост на реда. Приема се, че ако е налице случай (б), $R = 0$, а ако е налице случай (а), $R = \infty$.

Доказателство на Теорема 2

За да докажем теоремата, ще покажем, че ако нито (а), нито (б) не са изпълнени, то е изпълнено (в).

Нека E е областта на сходимост на реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

- 1) E не е празно, защото всеки такъв ред е сходящ поне при $x = 0$.
- 2) E е ограничено отгоре. Ако допуснем противното, ще излезе, че каквото и $x_1 \in \mathbb{R}$ да вземем, $|x_1|$ не е горна граница на E и тогава, ще съществува $x_0 \in E$ такава, че $|x_1| < x_0$. Сега от Теорема 1 следва, че редът е сходящ в x_1 . Това означава, че редът е сходящ за всяко x — случай, който изключихме. Така установихме, че E е ограничено отгоре.
- 3) Сега от Принципа за непрекъснатост следва, че E има точна горна граница. Да я означим с R , т.е. полагаме $R := \sup E$. Ще докажем, че това R притежава свойствата, посочени във (в).

4) Ще докажем, че $R > 0$. Щом не е изпълнено (б), то в E има поне едно число, различно от 0 ; да го означим с x_0 . Като приложим отново Т-ма 1, заключаваме, че редът е сходящ за всяко x_1 такова, че $|x_1| < |x_0|$. Следователно в E има положителни числа, откъдето на свой ред следва, че $R > 0$.

5) Ще докажем, че редът е абсолютно сходящ за всяко x такова, че $|x| < R$. Нека x_1 е произволно фиксирано такова, че $|x_1| < R$. Тогава от дефиницията на R следва, че $\exists x_0 \in E$ такова, че $|x_1| < x_0$ (иначе R нямаше да е най-малката горна граница на E). От Т-ма 1 следва, че редът е абсолютно сходящ в т. x_1 .

6) Остана да покажем, че редът е разходящ при $|x| > R$. Ако допуснем, че редът е сходящ за някое x_0 такова, че $|x_0| > R$, то от Т-ма 1 ще следва, че той е сходящ за всяко x такова, че $|x| < |x_0|$. Но тогава ще излезе, че в E има числа $> R$, от което би излязло, че R не е горна граница на E — противоречие с избора на R .

С това доказателството на Т-ма 2 е завършено.

Област на сходимост

Нека R е радиусът на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, а

E е неговата област на сходимост. От Следствие 2 получаваме:

- (а) ако $R = \infty$, то $E = \mathbb{R}$,
- (б) ако $R = 0$, то $E = \{a\}$,
- (в) ако $0 < R < \infty$, то $(a - R, a + R) \subseteq E \subseteq [a - R, a + R]$, т.е. областта на сходимост на реда е интервал с краища $a \pm R$.

Областта на сходимост на всеки степенен ред е интервал.