Лекция: Равномерни приближения на непрекъснати функции с алгебрични полиноми

Гено Николов, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски"

Съдържание на лекцията

Пространството $C[a, b]$

Нека $[a, b]$ е даден краен интервал. Да разгледаме линейното пространство от всички непрекъснати в $[a, b]$ функции. Да въведем норма в това пространство, определена с равенството

$$\|f\| := \max_{x\in[a,b]} |f(x)| . \qquad (1)$$

Лесно се вижда, че (1) наистина е норма. Тя се нарича равномерна (или Чебишова) норма. Оттук нататък, с $C[a, b]$ ще бележим нормираното по този начин пространство от непрекъснати в $[a, b]$ функции. Както вече знаем, всяка норма поражда разстояние. Равномерната норма поражда равномерното разстояние

$$\rho(f, g) := \|f - g\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| . \qquad (2)$$

Най-добри равномерни приближения

В метризираното по този начин пространство $C[a, b]$ да разгледаме задачата за най-добро приближение на непрекъснати функции с алгебрични полиноми. Величината

$$E_n(f) := \inf_{p \in \pi_n} \|f - p\|$$

наричаме най-добро равномерно приближение на f с полиноми от степен n. Ако инфимумът се достига за някакъв полином p^* от π_n, т.е. ако $\|f - p^*\| = E_n(f)$, то p^* се нарича полином на най-добро равномерно приближение за f в π_n. Тъй като $C[a, b]$ е нормирано пространство и π_n е линейно подпространство на $C[a, b]$, въпросът за съществуване на полином на най-добро равномерно приближение за всяка непрекъсната функция f се решава като следствие от общата теорема за най-добри приближения в линейни нормирани пространства, която доказахме в предходната лекция.

Теорема на Борел

В конкретния случай този резултат е известен като

Теорема на Борел

За всяка функция f от $C[a,b]$ и всяко цяло неотрицателно число n съществува полином на най-добро равномерно приближение за f от π_n.

Въпросът за единственост обаче не може да бъде решен с общата теорема за приближаване в строго нормирани пространства, защото $C[a,b]$ не е строго нормирано.

Пример

Нека $[a,b]=[0,1]$, и $f_1(x):=1$, $f_2(x):=x$. Тогава

$$\|f_1\|=\|f_2\|=1,\quad \|f_1+f_2\|=2$$

и следователно $\|f_1+f_2\|=\|f_1\|+\|f_2\|$, но очевидно f_1 и f_2 не са линейно зависими.

Лема на Вале–Пусен

Въпреки това, ще покажем, че за всяка непрекъсната функция в $[a, b]$ полиномът на най-добро приближение от π_n е единствен. Следният важен резултат е доказан от белгийския математик Вале-Пусен.

Лема на Вале–Пусен

Нека $Q \in \pi_n$. Да предположим, че съществуват $n+2$ точки $x_0 < \ldots < x_{n+1}$ в $[a, b]$ и положителни числа $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}$, такива, че

$$f(x_i) - Q(x_i) = (-1)^i \varepsilon \lambda_i, \qquad i = 0, \ldots, n+1\,, \tag{3}$$

където $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$. Тогава

$$E_n(f) \geq \lambda := \min_{0 \leq i \leq n+1} \lambda_i\,.$$

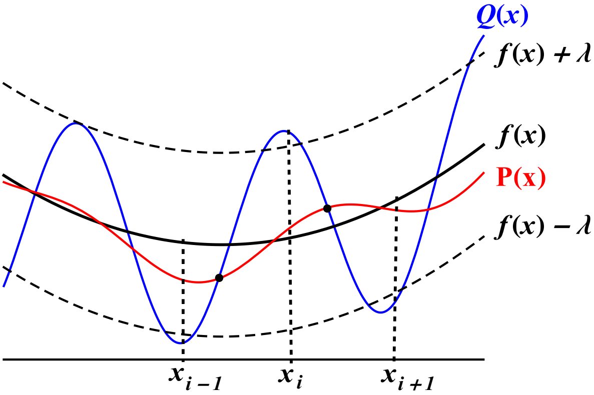
Лема на Вале–Пусен: доказателство

Да допуснем противното. Тогава съществува полином $P \in \pi_n$ такъв, че

$$\|f - P\| = E_n(f) < \lambda\,.$$

При това, очевидно $P \neq Q$.
Предположението ни означава, че графиката на полинома P лежи изцяло в ивицата с ширина 2λ и централна крива f. Съгласно условието на лемата, графиката на $Q(x)$ "преграждa" тази ивица във всеки интервал $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n+1$. Графиката на $P(x)$ трябва да премине през всяка такава "преграда", поради което графиките на P и Q ще имат поне една пресечна точка във всеки интервал (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, n+1$. Ситуацията е представена геометрично на чертежа.

Картинка



Фигура: Графики на f, Q и P.

Лема на Вале–Пусен: доказателство

Абсцисата на всяка пресечна точка на графиките P и Q е нула на полинома $P(x) - Q(x)$. От тук следва, че $P - Q$ ще има поне по една нула във всеки от тези $n+1$ интервала, т.е., най-малко $n+1$ нули. Това е невъзможно, тъй като $P - Q$ е полином от степен n. Полученото противоречие доказва лемата на Вале–Пусен. $\square$

Теорема на Чебишов за алтернанса

Пълната характеристика на полинома на най-добро равномерно приближение е дадена от великия руски математик Пафнутий Лвович Чебишов (1821-1894) в знаменитата му теорема за алтернанса. Тази теорема е основополагаща в Теория на приближенията.

Теорема на Чебишов за алтернанса

Нека f е произволна непрекъсната функция в крайния и затворен интервал $[a, b]$. Необходимо и достатъчно условие полиномът P от π_n да бъде полином на най-добро равномерно приближение за f от n-та степен в $[a, b]$ е да съществуват $n+2$ точки $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ от $[a, b]$ такива, че $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leq b$ и

$$f(x_i) - P(x_i) = (-1)^i \varepsilon \, \|f - P\|, \qquad i = 0, \ldots, n+1\,, \tag{4}$$

където $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$.

Доказателство на теоремата на Чебишов

Условието (4) означава, че разликата $f(x) - P(x)$ достига максималната си по модул стойност в $n + 2$ точки, като си сменя алтернативно знака. В такъв случай казваме, че f и P осъществяват алтернанс в $n + 2$ точки.

Ще докажем само достатъчността на условието (4). Нека P удовлетворява (4). Тогава по Лемата на Вале-Пусен,

$$E_n(f) \geq \|f - P\| \ .$$

От определението за $E_n(f)$ следва, че е изпълнено обратното неравенство, $E_n(f) \leq \|f - Q\|$ за всяко $Q \in \pi_n$. Следователно имаме равенство, $E_n(f) = \|f - P\|$ и P е полином на най-добро равномерно приближение. $\square$

Доказателството на необходимостта на условието за алтернанс (4) е по-сложно, и ще го пропуснем.

Единственост на полинома на най-добро равномерно приближение

Единствеността на полинома на най-добро равномерно приближение следва лесно от теоремата на Чебишов.

Теорема (Единственост)

За всяка непрекъсната в $[a, b]$ функция f съществува единствен полином на най-добро равномерно приближение от π_n.

Доказателство. Да допуснем противното, т.е., съществуват непрекъсната функция f и полиноми P и Q от π_n, за които

$$\|f - P\| = \|f - Q\| = E_n(f)\,. \tag{5}$$

При това, $P \neq Q$.

Доказателство на теоремата за единственост

Полиномът $(P+Q)/2$ е също полином на най-добро равномерно приближение на f, защото

$$
\begin{aligned}
E_n(f) &\leq \left\| f - \frac{P+Q}{2} \right\| = \frac{1}{2} \left\| (f-P) + (f-Q) \right\| \\
&\leq \frac{1}{2} \| f - P \| + \frac{1}{2} \| f - Q \| = E_n(f) \ .
\end{aligned}
$$

По теоремата на Чебишов за алтернанса, съществуват поне $n+2$ точки $\{x_i\}_0^{n+1}$ такива, че

$$
f(x_i) - \frac{P(x_i)+Q(x_i)}{2} = (-1)^i \varepsilon \ E_n(f) \quad (\varepsilon = 1 \text{ или } \varepsilon = -1) \ .
$$

Следователно

$$
\left| \frac{f(x_i) - P(x_i)}{2} + \frac{f(x_i) - Q(x_i)}{2} \right| = E_n(f) \ . \tag{6}
$$

Доказателство на теоремата за единственост

Но

$$|f(x_i) - P(x_i)| \leq E_n(f) ,$$

$$|f(x_i) - Q(x_i)| \leq E_n(f) ,$$

съгласно предположението (5). Тогава, за да бъде изпълнено (6), числата $f(x_i) - P(x_i)$ и $f(x_i) - Q(x_i)$ трябва да имат еднакъв знак и да са равни на $E_n(f)$ по абсолютна стойност, т.е.

$$f(x_i) - P(x_i) = f(x_i) - Q(x_i), \qquad i = 0, \dots, n+1 .$$

Оттук следва $P(x_i) = Q(x_i)$ за $i = 0, \dots, n+1$, което влече $P \equiv Q$. Стигнахме до противоречие с условието $P \neq Q$. Теоремата за единственост е доказана. $\square$

Пример за полином на най-добро равномерно приближение

Нека f е произволен ненулев елемент на F. Тогава Функциите f, за които може да бъде намерен в явен вид полинома на най-добро равномерно приближение, са много малко. Един интересен пример в това отношение е функцията x^n. Оказва се, че полиномът P_{n-1} на най-добро равномерно приближение в $[-1,1]$ за $f(x) = x^n$ от $(n-1)$–ва степен се записва в явен вид и е тясно свързан с полинома на Чебишов $T_n(x)$. Съгласно теоремата за алтернанса, P_{n-1} се определя напълно от условието да съществуват $(n-1)+2 = n+1$ точки $x_0, \ldots, x_n$ в $[-1,1]$ такива, че

$$x_i^n - P_{n-1}(x_i) = (-1)^i \varepsilon \max_{x \in [-1,1]} |x^n - P_{n-1}(x)|, \quad i = 0, \ldots, n. \tag{7}$$

Пример за полином на най-добро равномерно приближение

Но $x^n - P_{n-1}(x)$ е полином от $n-$та степен с водещ коефициент 1. Следователно (7) ще бъде изпълнено, ако построим полином от вида

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \ ,$$

който приема максималната си стойност в $[-1, 1]$ в $n+1$ точки с алтернативно сменящи се знаци. В една от първите лекции доказахме съществуването на такъв полином.

Полиномът на Чебишов $T_n(x)$ удовлетворява условията:

$$\max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1 \,,$$

$$T_n(x) = 2^{n-1} x^n + \ldots \,,$$

$$T_n(\eta_k) = (-1)^k \qquad k = 0, \ldots, n \,, \quad \eta_k = \cos \frac{k\pi}{n} \,.$$

Пример за полином на най-добро равномерно приближение

Виждаме, че полиномът

$$\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n - P_{n-1}(x)$$

удовлетворява исканите условия (7) в точките $\eta_0, \ldots, \eta_n$. Следователно,

$$P_{n-1}(x) = x^n - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

е полиномът на най-добро равномерно приближение от степен $n-1$ за x^n в $[-1, 1]$.

Край на лекцията !