ЗАДАЧИ ПО АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

I ЧАСТ: Афинни операции с вектори

1 зад. В четириъгълника $ABCD$ точките M и N са средите съответно на страните AD и CB.

Да се докаже, че $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$

2 зад. В четириъгълника $ABCD$ точките M и N са средите съответно на диагоналите AC и DB.

Да се докаже, че $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$.

3 зад. Нека точките K, L, M и N са средите съответно на страните BC, CD, DE и EA на петоъгълника $ABCDE$, а точките P и Q са средите съответно на отсечките KM и LN. Докажете, че $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

4 зад. В успоредника $ABCD$ точките M и N са средите съответно на страните BC и CD. Точката P е такава, че $AMPN$ е успоредник. Докажете, че точката P принадлежи на правата AC.

5 зад. В триъгълник ABC CM е медиана. Нека точките P и Q са такива, че $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. Докажете, че точките A, P и Q са колинеарни.

6 зад. В четириъгълника $ABCD$ точката P е средата на страната AB, а точката Q е средата на страната CD. Нека точките M и N са такива, че $AMQD$ и $NBCQ$ са успоредници. Докажете, че точката P е средата на отсечката MN .

7 зад. $ABCD$ е произволен четириъгълник, в който точка M е средата на AB, точка K е средата на CD, точка O е средата на MK. Докажете, че $4.\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

II ЧАСТ: Линейна зависимост и независимост на вектори.

1 зад. Даден е триъгълник ABC, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Върху страните AC и BC са нанесени съответно точките M и N така, че $CM:MA = 2:3$ и $CN:NB = 2:3$.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AB}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се покаже, че правите MN и AB са успоредни;
b) Да се докаже, че правите AN и BM имат точно една обща точка.

2 зад. Даден е успоредник $ABCD$, за който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, точката $O = AC \cap BD$, а точката P е от страната BC такава, че $BP:PC = 3:1$.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
b) Ако точката Q е от страната AD такава, че $AQ:QD = 1:3$, да се докаже, че точките P, Q и O са колинеарни.

3 зад. Даден е успоредник *ABCD*, за който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, точката $O = AC \cap BD$. Точките P и Q са определени от равенствата: $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{QB} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}$.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{OQ}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
b) Да се докаже, че точките *P*, *Q* и *O* са колинеарни;
c) Да се докаже подточка b), ако $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{n}.\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{QB} = \frac{1}{n}.\overrightarrow{AB}$, $n \in \mathbb{R}^+$.

4 зад. Даден е успоредник *ABCD*, за който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, точката $O = AC \cap BD$. Точките M и N са медицентровете съответно на триъгълник ABD и триъгълник ABC.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AB}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
b) Да се покаже, че правите *MN* и *AB* са успоредни.

5 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Точките A_1, C_1 и O_1 са медицентровете съответно на триъгълниците: *BOC*, *AOB* и *ABC*.

a) Да се изразят медианите на тетраедъра $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{OO_1}$ чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
b) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ са линейно независими;
c) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ са линейно зависими, т.е. четирите точки *A*, *C*, A_1 и C_1 лежат в една равнина. От двете подусловия b) и c) следва, че двете прави AA_1 и CC_1 се пресичат в единствена точка *M*;
d) Да се докаже, че намерената по-горе точка *M* лежи и на третата медиана OO_1 и да се намерят отношенията, в които т. *M* дели всяка от медианите.

5 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Точките *M*, *N*, *P* и *Q* са медицентровете съответно на триъгълниците: *AOB*, *BOC*, *ABC* и *AOC*. Да се докаже, че следните прави са две по две успоредни: *MN* и *AC*, *MQ* и *BC*, *QN* и *AB*, *MP* и *OC*, *NP* и *OA*, *PQ* и *OB*.

III ЧАСТ: Скаларно произведение на два вектора

1 зад. Даден е триъгълник *ABC*, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Дадени са точките *F* и *D*, съответно от страните *AB* и *CB* на триъгълника, такива че: *AF*:*FB* = 1:3 и *CD*:*DB* = 1:3.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AD}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
b) Да се намерят дължините на векторите $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AD}$;
c) Да се намери косинусът на ъгъла между векторите $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AD}$.

2 зад. Даден е триъгълник *ABC*, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \gamma$. Медианите AA_1 и BB_1 на триъгълника са взаимно перпендикулярни. Да се определи $\cos\gamma$.

Упътване: Да се изразят векторите $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и да се пресметне скаларното им произведение.

3 зад. Даден е триъгълник ABC, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \sqrt{2}, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Отсечката CH е височина в триъгълника, т.$H \in AB$. Да се изрази вектора $\overrightarrow{CH}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4 зад. Даден е тетраедър $OABC$, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Нека $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 1$ и трите вектора са два по два перпендикулярни. Построена е височината OH на тетраедъра, т.$H \in (ABC)$ и $OH \perp (ABC)$. Да се изрази вектора $\overrightarrow{CH}$ чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

5 зад. Спрямо ОКС $K = Oxy$ са дадени точките: $A(2, -1), B(-1, 0)$ и $C(2, 3)$. Да се докаже, че трите точки образуват триъгълник. Да се намерят:

a) Координатите на медицентъра M на триъгълник ABC и разстоянието от т.M до върха C;
b) Координатите на петите на трите височини на триъгълника, спуснати от върховете A, B и C.

6 зад. Спрямо ОКС $K = Oxyz$ са дадени точките: $A(1, -1, 2), B(2, 1, 1), C(1,1,2)$и $D(-3, 2, -1)$. Да се докаже, че четирите точки не лежат в една равнина. Да се намерят:

a) Да се намерят дължините на страните на триъгълник ABC;
b) Косинусите на ъглите на триъгълник ABC;
c) Координатите на медицентъра G на триъгълник $\boldsymbol{ABD}$ и дължината на вектора $\overrightarrow{CG}$;
d) Координатите на точката H: т.$H \in (ABC)$ и $DH \perp (ABC)$.

IV ЧАСТ: Векторно и смесено произведение на вектори

1 зад. Спрямо ОКС $K = Oxyz$ са дадени векторите $\vec{a}(1, 0, 2), \vec{b}(2, -1, 3)$ и $\vec{c}(1, -1, 0)$. Да се намерят координатите на неизвестния вектор $\vec{x}$ от уравненията: $(\vec{a}\vec{b}\vec{x}) = 1, (\vec{b}\vec{c}\vec{x}) = 2, (\vec{c}\vec{a}\vec{x}) = 0$.

2 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Да се определи неизвестния вектор $\vec{p}$ от равенствата : $(\vec{a}\vec{p}) = -18, (\vec{b}\vec{p}) = 12, (\vec{a}\vec{b}\vec{p}) = -12$.

3 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Нека $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ и

$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}, \sphericalangle(\vec{c}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

a) Да се пресметне смесеното произведение $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ и да се докаже, че трите вектора са линейно независими;

b) Нека *OABC* е тетраедър като: $\overrightarrow{OA} = (\vec{c} + \vec{b})$, $\overrightarrow{OB} = (\vec{c} + \vec{a})$ и $\overrightarrow{OC} = (\vec{a} + \vec{b})$. Да се намери обема на тетраедъра *OABC*.

4 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. В триъгълника *OAB*

$\overrightarrow{OA} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$, а $\overrightarrow{OB} = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})$.

a) Да се намерят периметъра и лицето на триъгълника;

b) Ако т.*M* е медицентърът на триъгълник *OAB*, да се изрази вектора $\overrightarrow{OM}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и да се пресметне дължината му.

5 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = (\vec{a} \times \vec{b})$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})$. Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ са линейно независими и да се намери обема на тетраедъра *OABC*.

6 зад. Спрямо ОКС *K* = *Oxyz* са дадени точките: $A(5, -2, 1), B(1, 1, -2), C(1,0,5)$и $D(1, 1,1)$.

a) Да се намери лицето на триъгълник *ABC*;

b) Да се намери обема на тетраедъра *ABCD*.

7 зад. Спрямо ОКС *K* = *Oxy* в равнината са дадени точките: $A(1, -1), B(-3, 2), C(5, 1)$. Да се намери лицето на триъгълник *ABC*.

ОБЩИ ЗАДАЧИ - ВЕКТОРИ

1 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, за които $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) = \sphericalangle(\vec{c},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Нека т.H е петата на височината през върха O на тетраедъра *OABC*. Да се изрази вектора $\overrightarrow{OH}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и да се намери дължината му.

2 зад. Дадени са векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, за които $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle(\vec{c},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) = \frac{2\pi}{3}$. Нека *OABC* е тетраедър, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

a) Да се намери обема на тетраедъра *OABC*;

b) Нека точките *M*, *N* и *P* принадлежат съответно на отсечките *AB*, *BC* и *CA* като *AM:MB* = *BN:NC* = *CP:PA* = 1:2. Да се изразят векторите $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{MP}$ като линейни комбинации на $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Да се пресметнат обиколката и лицето на триъгълник *MNP*, и $\cos\sphericalangle NMP$.

c) Нека точката *G* е медицентърът на ΔABC. Да се докаже, че т.*G* е медицентърът и на ΔMNP.

3 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Нека $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) Да се намери обема на тетраедъра *OABC*;

b) Ако точките A_1, B_1 и O_1 са средите на страните на триъгълник *OAB*, да се намерят обиколката и лицето на триъгълник $A_1B_1O_1$.

4 зад. Дадени са векторите $\overrightarrow{CA} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}), \overrightarrow{CB} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{a} \times \vec{b}$, като $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

a) Нека точка *H* е петата на височината на Δ *ABC*, спусната от върха *A* към страната *BC*. Да се изрази $\overrightarrow{AH}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се намери дължината на $\overrightarrow{AH}$.

b) Да се намерят лицето на триъгълник *ABC* и обема на тетраедъра *ABCD*.

5 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ като $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$.
$\overrightarrow{CA} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}), \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) Нека точката *H* е петата на височината през върха *A* на триъгълник *ABC*. Да се изрази векторът $\overrightarrow{AH}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се намери $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, ако $|\overrightarrow{AH}| = 1$.

b) При каква стойност на ъгъла α векторите $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са линейно независими?

c) При $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, да се намери обема на тетраедъра *ABCD*.

6 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ като $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Даден е успоредника *ABCD*, за който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Нека точката *M* е средата на страната *AB*, а точките *N*, *P* и *Q* са медицентровете съответно на ΔAMD, Δ *MCB* и ΔCDM.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{PN}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и да се докаже, че правите *PN* и CD са успоредни;

b) Да се намерят лицето и обиколката на ΔNPQ;

c) Ако $\overrightarrow{AS} = \vec{a} \times \vec{b}$, да се намери обема на паралелепипеда с ръбове $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AS}$.

7 зад. Даден е тетраедър $OABC$, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Точките M, N и P са медицентровете съответно на триъгълниците: AOB, BOC и AOC.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{PM}$ като линейни комбинации на $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$;

b) Да се докаже, че следните прави са две по две успоредни: MN и AC, PM и BC, NP и AB;

c) Ако $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ и $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, да се намери периметъра на триъгълник MNP.

8 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за които $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Нека $ABCD$ е успоредник, като $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Точката M е средата на AB, а точките P и Q са медицентровете съответно на ΔAMD и ΔCDM.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{PM}$ като линейни комбинации на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се докаже, че $PQ \parallel AC$;

b) Намерете дължината на $\overrightarrow{QP}$ и лицето на ΔMPQ.

9 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за които $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$, $\varphi \in (0, \pi)$. Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{a} \times \vec{b}$. Намерете ъгъла φ така, че обемът на тетраедъра $OABC$ да е равен на 9.

10 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за които $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.
Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) Ако съществува тетраедър $OABC$, намерете неговият обем;

b) Нека точките A_1, B_1 и G са медицентровете съответно на ΔOBC, ΔOAC и ΔABC. Да се изразят векторите $\overrightarrow{A_1G}$, $\overrightarrow{B_1G}$ и $\overrightarrow{B_1A_1}$ като линейни комбинации на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и да се намери лицето на ΔA_1B_1G.

11 зад. Дадени са векторите $\overrightarrow{CA} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}), \overrightarrow{CB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{a} \times \vec{b}$, като $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

a) Нека точка H е петата на височината на Δ ABC, спусната от върха A към страната BC. Да се изрази $\overrightarrow{AH}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се намери дължината на $\overrightarrow{AH}$.

b) Да се намерят лицето на триъгълник ABC и обема на тетраедъра $ABCD$.

12 зад. Дадени са векторите $\overrightarrow{OA} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} \times \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$, като $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

a) Нека точка H е петата на височината на Δ OAC, спусната от върха O към страната AC. Да се изрази $\overrightarrow{OH}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се намери дължината на $\overrightarrow{OH}$.

b) Да се намерят лицето на триъгълник OAC и обема на тетраедъра $OABC$.