Задача 0.1. *Ще казваме, че булева формула ϕ е в 2-конюнктивна нормална форма ($2CNF$), ако ϕ е конюнкция от дизюнкти с най-много два литерала.*

Разглеждаме проблема $2SAT$:

`Вход:`ϕ $2CNF$ `формула`
`Въпрос: Изпълнима ли е` ϕ`?`

1. *Да се докаже, че $2SAT$ е в класа P.*
2. *Да се докаже, че има (детерминиран) алгоритъм с времева сложност $O(|\phi|)$, който разрешава $2SAT$ и в случай, че ϕ е изпълнима намира оценка, която свидетелства за това.*

Задача 0.2. *Нека $G = (V, E)$ е граф. Дефинираме рекурсивно редицата от графи $G_i = (V_i, E_i)$ и множествата $C_i \subseteq V$ по следния начин:*

1. $G_0 = G$, $C_0 = \emptyset$.
2. *Ако $E_i \neq \emptyset$, нека $\{u_i, v_i\} \in E_i$. Дефинираме:*

$$\begin{aligned} C_{i+1} &= C_i \cup \{u_i, v_i\} \\ V_{i+1} &= V_i \setminus \{u_i, v_i\} \\ E_{i+1} &= E_i \setminus \{\{x, y\} \in E_i \mid \{x, y\} \cap \{u_i, v_i\} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

1. *Да се докаже, че ако $E_i = \emptyset$, то C_i е върхово покритие на G.*
2. *Да се докаже, че всяко върохово покритие C^* на G съдържа поне един от върховете u_i или v_i за всяко i.*
3. *Да се заключи, че има алгоритъм с времева сложност $O(|V| + |E|)$, който намира върхово покритие C на G, което е не повече от два пъти по-голямо от оптималното.*

Задача 0.3. *Нека $G = (V, E)$ е (неориентиран) граф и $S \subseteq V$ е множество от негови върхове. Казваме, че дърво $T = (V', E')$ е* дърво на Steiner *за S спрямо графа G, ако:*

$$S \subseteq V' \subseteq V \text{ и } E' \subseteq E.$$

Ако $c : E \to \mathbb{N}$ е ценова функция за G, с $c_{\textsc{Steiner}}(S)$ означаваме най-малката цена на щайнерово дърво за S спрямо G:

$$c_{\textsc{Steiner}}(S) = \min\{c(T) \mid T \text{ е щайнерово дърво за } S \text{ спрямо } G\}.$$

Разглеждаме следния проблем SteinerTree*:*

`Вход:`$G = (V, E)$ `неориентиран граф,` $S \subseteq V$`,` $c : E \to \mathbb{N}$`,` $k \in \mathbb{N}$
`Въпрос: Вярно ли е, че` $c_{\textsc{Steiner}}(S) \leq k$`?`

Да се докаже, че SteinerTree *е NP-пълен.*

Упътване 0.1. 1. Заменете всяка клауза $\ell_1 \vee \ell_2$ във ϕ с $(\widetilde{\ell_1} \to \ell_2)(\widetilde{\ell_2} \to \ell_1)$, където:

$$\widetilde{\ell_i} = \begin{cases} \overline{x}, & \text{ако } \ell_i = x \\ x, & \text{ако } \ell_i = \overline{x}. \end{cases}$$

и проверете, че двете формули са еквивалентни.

2. Нека ϕ е конюнкция от формули от вида $\ell_1 \to \ell_2$. Разгледайте ориентиран граф $G_\phi = (V_\phi, E_\phi)$ с върхове:

$$V_\phi = \{\ell \mid \ell \text{ е литерал във } \phi\} \text{ и ребра } E_\phi = \{(\ell_1, \ell_2) \mid \ell_1 \to \ell_2 \text{ е подформула на } \phi\}.$$

Докажете, че ако във G_ϕ има път $\ell_1 \to^*_{G_\phi} \ell_2$, то при всяка оценка v, при която $v(\phi) = 1$ е в сила, че $v(\ell_1 \to \ell_2) = 1$. Заключете, че:

- ако $\ell \to^*_{G_\phi} \widetilde{\ell}$ за някой литерал ℓ и $v(\phi) = 1$, то $v(\ell) = 0$.
- ако ℓ и $\widetilde{\ell}$ са в една и съща компонента на силна свързаност в G_ϕ за някой литерал ℓ, то ϕ не е изпълнима.

3. Разгледайте:

$$\begin{aligned} X_t &= \{x \in Var(\phi) \mid \overline{x} \to^*_{G_\phi} x\} \\ X_f &= \{x \in Var(\phi) \mid x \to^*_{G_\phi} \overline{x}\} \\ Y_t &= \{y \mid \exists x \in X_t(x \to^*_{G_\phi} y) \text{ или } \exists x \in X_f(\overline{x} \to^*_{G_\phi} y)\} \\ Y_f &= \{y \mid \exists x \in X_t(x \to^*_{G_\phi} \overline{y}) \text{ или } \exists x \in X_f(\overline{x} \to^*_{G_\phi} \overline{y})\}. \end{aligned}$$

- Покажете, че ако $v(\phi) = 1$ е изпълнима, то $(Y_t \cup X_t) \cap (Y_f \cup X_f) = \emptyset$ и за всяко $x \in X_t \cup Y_t$, $v(x) = 1$, а за всяко $x \in Y_f \cup X_f$, $v(x) = 0$.
- Покажете, че ако $(X_t \cup Y_t) \cap (X_f \cup Y_f) = \emptyset$, то всяка оценка $v : Var(\phi) \to \{0, 1\}$, за която:

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \in X_t \cup Y_t \\ 0, & \text{ако } x \notin X_t \cup Y_t, \end{cases}$$

има свойството, че $v(\phi) = 1$.

Упътване 0.3.

За това, че SteinerTree е в NP, съобразете, че е достатъчно да генерирате (недетерминирано) $V' \subseteq V$ с $\min(k, |V|)$ върха и след това да проверите, че (V', E') е свързан, където E' са ребрата на G, които свързват два върха от V'.

За пълнотата, достатъчно е да сведете за полиномиално време SteinerTree към 3SAT. За целта разгледайте съждителна формула в 3КНФ:

$$\phi = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i, \text{ където } C_i = \ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \ell_{i,3}.$$

Графът, който искаме да построим заедно с ценовата функция трябва да кодира: избор на истинност за съждителните променливите; проверка на това дали този избор води до изпълнимостта на всяка от клаузите C_i.

Нека $\{x_1, \ldots, x_n\}$ са променливите, които участват във ϕ. С оглед на горното, за момент си представете, че графът е ориентиран, тогава може да моделираме горната идея така

- $V_\phi = \{r, g_1, g_2, \ldots, g_n\} \cup \{x_i, \overline{x_i} \mid i \leq n\} \cup \{C_j \mid j \leq m\}$.
- Мислим си за V като r – корен, $g_1, \ldots, g_n$ "превключватели", които трябва да решат дали x_i или $\overline{x_i}$ е истина, C_j избира свидетел за това, че е вярна. За да постигнем това:

$$E_\phi = \{\{r, g_i\}, \{g_i, x_i\}, \{g_i, \overline{x_i}\} \mid i \leq n\} \cup \{\{\ell_{i,j}, C_j\} \mid j \leq m, i \leq 3\}.$$

- Целта е изпълнимостта на булевата формула да е свързана с дърво на Щайнер за $S_\phi = \{r, g_1, \ldots, g_n, C_1, \ldots, C_m\}$. Да забележим, че ако се абстрахираме от ребрата, които свързват клаузи с литерали, графът е ацикличен. За да форсираме $C_1, \ldots, C_m$ да бъдат листа в щайнеровото дърво, трябва да направим ребрата, които излизат от тях "скъпи така че да не може да не е "изгодно"да се избира повече едно ребро от тях. От друга страна искаме да не допускаме повече от един избор на x_i или $\overline{x_i}$, като те трябва да са равноправни.

- Водени от горните съображения, да разгледаме първо случая, когато сред клаузите C_j са и всички клаузи от вида $\overline{x_i} \vee x_i \vee x_i$. Ясно е, че всяка от тях е тривиално изпълнена, независимо от оценката. Ценното обаче е, че тя ще бъде в множеството S и ще изисква избора на поне една от променливите x_i или $\overline{x_i}$.

- Сега вече може да определим цените:

$$\begin{aligned} c(r, g_i) &= 0, \text{ за всяко } i \\ c(g_i, x_i) = c(g_i, \overline{x_i}) &= 1, \text{ за всяко } i \\ c(\ell_{i,j}, C_i) &= \gamma \text{ за всяко } i \leq m \text{ и } j \leq 3. \end{aligned}$$

  γ трябва да бъде определено подходящо. Как?

- За да се покрие всяка от клаузите е необходимо поне $\gamma.m$. Ако $\gamma > 2n$, то добавянето на повече от m ребра ще бъде по-неизгодно от добавянето на всички ребра $\{g_i, x_i\}, \{g_i, \overline{x_i}\}$, които биха довели до щайнерово дърво с цена от $2n + m\gamma$. Следователно $\gamma = 2n + 1$ за момента върши работа.

- Сега знаем, че оптималното щайнерово дърво за S_ϕ ще избере точно m ребра, в които участват клаузи. Следователно, клаузите ще бъдат листа! Тогава може да си мислим за първоначалното дърво с корен r със синове $g_1, \ldots, g_n$ и остава да бъде решено с кои от синовете на g_i ще участват. Знаем, че поне един от тях трябва да участва, заради специалните клаузи.

- Е, сега е ясно, че ако участват повече от n от литералите $\{x_i, \overline{x_i} \mid i \leq n\}$, цената на щайнеровото дърво ще бъде поне $1 + n + \gamma m = 1 + n + (2n + 1)m$. От друга страна, ако участват точно n от тях, тя ще бъде $n + (2n + 1)m$. Това и определя параметъра $k = n + (2n + 1)m$.

- Довършете, като докажете, че следните са еквивалентни:

  1. в G_ϕ има щайнерово дърво за S_ϕ при ценова функция c ($\gamma = 2n + 1$) с цена не по-голяма от $n + (2n + 1)m$.
  2. ϕ е изпълнима.