ВЪВЕДЕНИЕ В СИСТЕМАТА WOLFRAM MATHEMATICA

Име	**Оператор**
събиране	+
изваждане	-
умножение	*
деление	/
степенуване	^
математически скоби	( )
матем. равенство	==
присвояване	=
списъци	{ , , }
аргументи на команди и функции	[, ,]
разделител на команди и оператори	;
стартиране	Shift + Enter
нов ред	Enter
коментар	(* *)

Имената на всички вградени функции, команди и константи започват с главна буква. Wolfram Mathematica може да смята точно (обикновени дроби) и приближено (десетични дроби).

Основни функции и команди:

1) Числен вид:
   N[E] (* числен вид на e *) 2.71828

   N[Pi,20] (* числен вид на π с 15 символа *) 3.1415926535897932385

2) Многократна сума:
   Sum[1/k^2 , {k, 1, Infinity}] (* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ *) $\frac{\pi^2}{6}$

3) Многократно произведение:
   Product[k^2, {k, 1,5}] (* $\prod_{k=1}^{5} k^2$ *) 14400

4) Граници:
   Limit[(1 + 1/n)^n, n → Infinity] e

5) Интегриране:
   Integrate[1/(1 + x^2) , x] (* $\int \frac{dx}{1+x^2}$ *) ArcTan[x]

NIntegrate[1/(1 + x^2) , {x, 0,1}] $\qquad$ (* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ *) $\qquad$ $\frac{\pi}{4}$

6) Решаване на уравнения и системи уравнения:
Solve[{$x + y == 2, x - 5y == -1$}, {x, y}] $\qquad$ $\{\{x \to \frac{3}{2}, y \to \frac{1}{2}\}\}$

NSolve[z^3 − 3z^2 + 5z − 2 == 0] $\qquad$ $\{\{z \to 0.5466023484835962\}, \{z \to 1.2266988257582019 - 1.4677115087102244i\}, \{z \to 1.2266988257582019 + 1.4677115087102244i\}\}$

7) Разлагане на множители:
Factor[x^3 + y^3] $\qquad$ $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

8) Разкриване на скоби:
Expand[%] $\qquad$ $x^3 + y^3$

9) Развитие в ред на Телор:
Series[x * Cot[x], {x, 0,11}] $\qquad$ $1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \frac{2x^{10}}{93555} + O[x]^{12}$

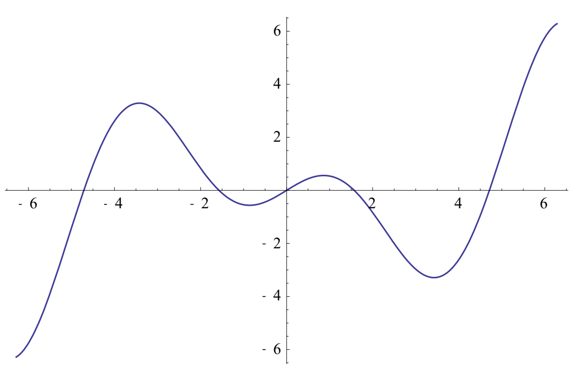
10) Матрично смятане:

```
A={{1,2,3},{1,0,-1},{2,2,3}}
Det[A]
```
-2

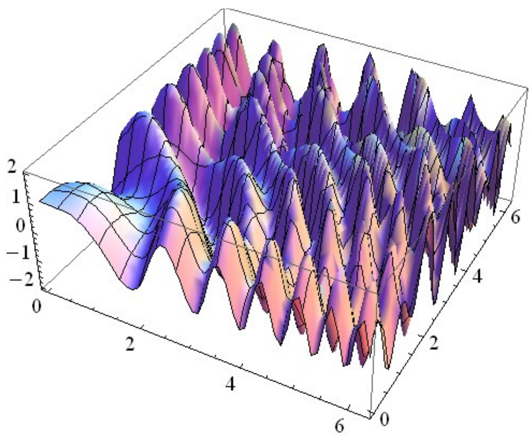
```
Inverse[A]
```
$\{\{-1,0,1\}, \{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -2\}, \{-1, -1,1\}\}$

11) Дефиниране на функции и графика:

```
f[x_]:=Cos[x]*x;
Plot[f[x],{x,-2Pi,2Pi}]
```



```
h[x_,y_]:=Sin[x y]+Cos[x^2+y^2];
Plot3D[h[x,y],{x,0,2Pi},{y,0,2Pi}]
```



12) Условен оператор:
$k = \mathrm{Input}[k]; l = 0; \mathrm{If}[k < 0, l = -k, l = k]; l$ (* $l = \mathrm{Abs}[k]$ *)

13) Оператор за цикъл:
$s = 0; \mathrm{Do}[s = s + k, \{k, 1,99,2\}]; s$ (* $s = 1 + 3 + \cdots + 99$ *) 2500

14) Условен оператор за цикъл:
$\mathrm{s1} = 0; k = 0; \mathrm{While}[k < 100, k = k + 2; \mathrm{s1} = \mathrm{s1} + k]; \mathrm{s1}$ (* $s1 = 0 + 2 + 4 + \cdots + 100$ *) 2550.

Интерполационен полином на Лагранж (ИПЛ)

Нека $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ са различни реални точки и $f(x_k)$ са дадени. Интерполационният полином на Лагранж се задава по следния начин: $L_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\, f(x_k)$, където $\omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$ и базисните полиноми на Лагранж са $l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} = \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}$, където $\omega_k(x) = \frac{\omega(x)}{x-x_k}$. Знаем, че $L_n(f;x_к) = f(x_к), \forall k = 0, 1, \dots, n$.

Ако $f(x)$ има непрекъсната $(n+1)$ производна и $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M, \forall x \in [a,b]$, то

$$|f(x) - L_n(f;x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|\omega(x)|.$$

Твърдение: Ако $f(x) \in \pi_n$, то $L_n(f;x) \equiv f(x)$.

Задача 1. С помощта на *Wolfram Mathematica* да се построи ИПЛ за $f(x) = \frac{1}{1+x}$ с интерполационни възли:

а) $x_k = \frac{k}{n}, k = 0,1,\dots,n;$ за $n = 5; 15$ и $50;$

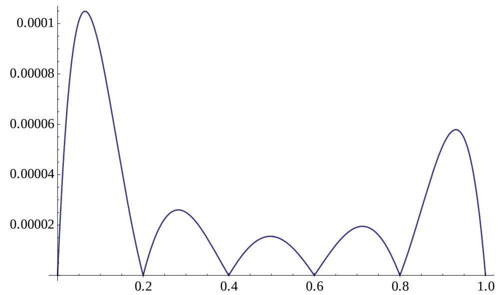
б) $x_k = \sin^2\frac{(2k+1)\pi}{4n+4}, k = 0,1,\dots,n;$ за $n = 5; 10.$

Решение:

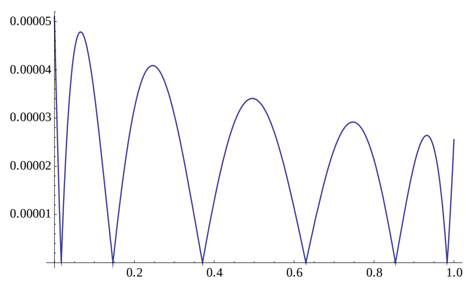
а**)**

```
n=5;
f[t_]:=1/(1+t);
Do[x[k]=k/n,{k,0,n}];
w[t_]:=Product[t-x[k],{k,0,n}];
Do[v[k_,t_]:=w[t]/(t-x[k]),{k,0,n}];
Do[l[k_,t_]:=v[k,t]/Simplify[v[k,t]/.t→x[k]],{k,0,n}];
L[f_,t_]:=Sum[l[k,t]*f[x[k]],{k,0,n}];
m=Expand[L[f,t]]
Plot[Abs[f[t]-m],{t,0,1}]
```

$$1-\frac{251t}{252}+\frac{2875t^2}{3024}-\frac{4625t^3}{6048}+\frac{625t^4}{1512}-\frac{625t^5}{6048}$$



б)
```
n=5;
f[t_]:=1/(1+t);
Do[x[k]=(Sin[(2k+1)Pi/(4n+4)])^2,{k,0,n}];
w[t_]:=Product[t-x[k],{k,0,n}];
Do[v[k_,t_]:=w[t]/(t-x[k]),{k,0,n}];
Do[l[k_,t_]:=v[k,t]/Simplify[v[k,t]/.t→x[k]],{k,0,n}];
L[f_,t_]:=Sum[l[k,t]*f[x[k]],{k,0,n}];
m=Expand[L[f,t]];
Plot[Abs[f[t]-m],{t,0,1}]
```



Задача 2. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) \equiv 1$.

Доказателство: Нека $f(x) = 1 \in \pi_0 \subset \pi_n \Rightarrow L_n(f;x) \equiv f(x) \equiv 1$, но $f(x_k) = 1, \forall\, x$.

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) \equiv 1.$$

Задача 3. Да се докаже, че за $m = 1,2 \dots, n$ е в сила $\sum_{k=0}^{n} l_k(x).\, x_k^m = x^m$.

Доказателство: Нека $f(x) = x^m \in \pi_m \subseteq \pi_n \Rightarrow L_n(f;x) \equiv f(x) = x^m$, но $f(x_k) = x_k^m, \forall\, x_k$.

$$=> \ L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) x_k^m = x^m.$$

Задача 4. Нека $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+1}$.

Решение: Нека $f(x) = x^{n+1} \in \pi_{n+1} => L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+1}$. Но $L_n(f;x_k) = f(x_k), \forall k = 0,1,\dots,n$ $=>$ $f(x) - L_n(f;x) \in \pi_{n+1}$ със старши коефициент 1 $=>$ $f(x) - L_n(f;x) = \omega(x)$.

$$=> \sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+1} = x^{n+1} - \omega(x).$$

Задача 5. Нека $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+2}$.

Решение: Нека $f(x) = x^{n+2} \in \pi_{n+2} => L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+2}$. Но $L_n(f;x_k) = f(x_k), \forall k = 0,1,\dots,n$ $=>$ $f(x) - L_n(f;x) \in \pi_{n+2}$ със старши коефициент 1 $=>$ $f(x) - L_n(f;x) = \omega(x)(x-A)$. Приравняваме коефициентите пред x^{n+1} от двете страни на равенството. Отляво този коефициент е нула, а в дясната страна по формулите на Виет е равен на сумата от корените. Получаваме:

$$0 = -x_0 - x_1 - \cdots - x_n - A$$

$$=> A = -\sum_{i=0}^{n} x_i$$

$$=> \sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+2} = x^{n+2} - \omega(x)\left(x + \sum_{i=0}^{n} x_i\right).$$

Задача 6. Нека $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$. Да се докаже , че за $m = 1,2 \dots, n$ е в сила $\sum_{k=0}^{n} l_k(x). (x - x_k)^m = 0$.

Доказателство: Нека $f(t) = (x-t)^m \in \pi_m \subseteq \pi_n => L_n(f;t) \equiv f(t)$.

$$=> \ L_n(f;t) = \sum_{k=0}^{n} l_k(t)(x - x_k)^m = (x-t)^m,$$

и за $t = x$ получаваме $\sum_{k=0}^{n} l_k(x). (x - x_k)^m = 0$.

Разделени разлики

Разделена разлика за функцията $f(x)$ във възлите $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ се дефинира по следния начин:

- В един възел $f[x_0] = f(x_0)$;
- Рекурентно в повече възли $f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$.

На лекции е доказана следната формула (1) за разделената разлика във всички интерполационни възли:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} \qquad (1)$$

Разделената разлика $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ е равна на коефициента пред x^n в интерполационния полином на Лагранж $L_n(f; x)$ от $\boldsymbol{n}$-та степен за $f(x)$ с възли $x_0, x_1, \dots, x_n$.

От горното твърдение получаваме:

1) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0,$ за $f(x) = x^m, m = 0,1, \dots, n-1;$
2) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1,$ за $f(x) = x^n$.

Тези тъждества могат да бъдат написани в следния вид, използвайки формула (1):

1') $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^m}{\omega'(x_k)} = 0, m = 0,1, \dots, n-1;$

2') $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^n}{\omega'(x_k)} = 1.$

Задача 1. Да се намерят коефициентите A_k в разлагането $\frac{p(x)}{\omega(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{x - x_k}$, където $p(x) \in \pi_n$.

Решение: $p(x) \in \pi_n \Rightarrow p(x) = L_n(p; x) \Rightarrow p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} p(x_k)$

Делим двете страни на равенството на $\omega(x)$ и получаваме:

$\frac{p(x)}{\omega(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{x - x_k}$, където $A_k = \frac{p(x_k)}{\omega'(x_k)}$.

Задача 2. Да се разложи на елементарни дроби рационалната функция $\frac{x+2}{x(x-1)(x-2)}$.

Решение: $p(x) = x + 2;\ \omega(x) = x(x-1)(x-2)$. Използвайки изведените в Задача 1. формули за коефициентите A_k получаваме:

$$A_0 = \frac{p(x_0)}{\omega'(x_0)} = \frac{p(0)}{\omega'(0)} = 1;$$

$$A_1 = \frac{p(x_1)}{\omega'(x_1)} = \frac{p(1)}{\omega'(1)} = -3;$$

$$A_2 = \frac{p(x_2)}{\omega'(x_2)} = \frac{p(2)}{\omega'(2)} = 2.$$

$$=> \frac{x+2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-2}.$$

Задача 3. Нека $m \in \{1,2,\dots,n-1\}$. Да се докаже, че $\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\omega'(x_k)} \neq 0$.

Доказателство:
Нека $p(x) \in \pi_n$ е зададен с интерполационните условия:

x_k	x_0	x_1	....	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	....	x_n
$p(x_k)$	0	0	...	0	1	1	...	1

$$p(x_i) = 0, i = 0,\dots,m-1;\ p(x_i) = 1, i = m, m+1,\dots,n$$

=>$p[x_0,x_1,\dots,x_n] = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\omega'(x_k)}$. Ще покажем, че степентта на $p(x)$ е точно равна на n, т. е. не е по-ниска. По теоремата на Рол $p'(x)$ ще се нулира поне веднъж във всеки един от интервалите $(x_0,x_1),\dots,(x_{m-2},x_{m-1})$ и в интервалите $(x_m,x_{m+1}),\dots,(x_{n-1},x_n)$, защото в краищата им има равни стойности. Тогава нулите на $p'(x)$ са $(m-1)+(n-m) = n-1$. Следователно $p(x)$ има точно n нули => $p[x_0,x_1,\dots,x_n] = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\omega'(x_k)} \neq 0$.

Задача 4. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}$.

Решение: Търсим разделената разлика на функцията $f(x) = \omega''(x)$.

Но $\omega(x) \in \pi_{n+1} => \omega''(x) \in \pi_{n-1}$ и от твърдението 1) получаваме, че $\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0$.

Задача 5. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}$.

Решение: Търсим разделената разлика на функцията $f(x) = x\omega''(x)$. Но $\omega(x) \in \pi_{n+1} => x\omega''(x) \in \pi_n$.

$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) = x^{n+1} + a_1x^n + \cdots + a_{n+1}$,

$$=> \omega'(x) = (n+1)x^n + n.a_1x^{n-1} + \cdots$$

$$=> \omega''(x) = (n+1)n.x^{n-1} + n(n-1)a_1x^{n-2} + \cdots$$

$$=> x\omega''(x) = (n+1)n.x^n + n(n-1)a_1x^{n-1} + \cdots$$

$$=> \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = n(n+1).$$

Задача 6. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^{n+1}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Доказателство: Лявата страна на равенството е разделена разлика за функцията $f(x) = x^{n+1}$. Търсим коефициента пред x^n в интерполационния полином на Лагранж (ИПЛ) $L_n(f;x)$. Но той интерполира функцията във възлите $x_0,x_1,\dots,x_n$. Следователно

$$f(x_i) - L_n(f;x_i) = 0, i = 0,1,\dots,n$$

$$=> f(x) - L_n(f;x) = \omega(x)$$

Приравняваме коефициентите пред x^n от двете страни на равенството. От дясната страна използваме формулите на Виет. Получаваме:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x_k,$$

Следователно $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^{n+1}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Задача 7. Като използвате ИПЛ докажете тъждествата:

а) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{m}{n} \frac{1}{m-k} = \frac{1}{m-n}, \forall m > n \geq 0$;

б) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{m}{n} \frac{k}{m-k} = \frac{m}{m-n}, \forall m > n \geq 1$.

Решение: Нека $x_k = k, k = 0,1, \dots, n \Rightarrow \omega(x) = x(x-1)(x-2) \dots (x-n)$;

$$\omega'(k) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} (k-j);$$

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x) f(k)}{(x-k)\omega'(k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x(x-1)\dots(x-n) f(k)}{(x-k).\, k(k-1)(k-2)\dots 1.\, (-1)(-2)\dots(-(n-k))}.$$

Нека $x = m \Rightarrow L_n(f;m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} m(m-1)\dots(m-n) f(k)}{(m-k)k!(n-k)!}$. Умножаваме и делим на $n!$ в дробта и получаваме:

$$L_n(f;m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(m-n)}{(m-k)} \binom{n}{k} \binom{m}{n} f(k).$$

а) Нека $f(x) = 1 \in \pi_0 \Rightarrow f(m) = L_n(f;m) = 1$. Делим двете страни на равенството на $(m-n) \neq 0$ и получаваме $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{m}{n} \frac{1}{m-k} = \frac{1}{m-n}$.

б) Нека $f(x) = x \in \pi_1 \Rightarrow f(m) = L_n(f;m) = m$. Делим двете страни на равенството на $(m-n) \neq 0$ и получаваме $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{m}{n} \frac{k}{m-k} = \frac{m}{m-n}$.

Задача 8. Нека $f(x)$ има производни от всякакъв ред в интервала $[a, b]$, и съществуват положителни константи C и M, такива че за всяко естествено число n е изпълнено

$$\left|f^{(m)}(x)\right| \leq CM^m \text{ за всяко } x \in [a,b]$$

Докажете, че за всеки избор на интерполационни възли $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ е изпълнено

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - L_n(f;x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказателство:
От формулата за грешката и условието имаме

$$|f(x) - L_n(f;x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!} |\omega(x)| \leq \frac{CM^{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} = \frac{C\big(M(b-a)\big)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \;\; \xi \in (a,b)$$

е изпълнено за всяко $x \in [a,b]$. Следователно

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - L_n(f;x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Интерполационна формула на Нютон с разделени разлики:

$$L_n(f;x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

Задача 9. Да се намери полином $p(x) \in \pi_3$, такъв че $p(-1) = 3, p(0) = 1, p(1) = -1, p(2) = 3$.

Решение: Имаме 4 интерполационни възела. Можем да построим единствен полином от трета степен с тези условия по формулата на Нютон. За целта са ни необходими разделените разлики. Тях най-лесно можем да пресметнем от рекурентната връзка в следната таблица:

x_i	$p[x_i]$	$p[x_i,x_{i+1}]$	$p[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$p[x_i x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
-1	3	$\frac{1-3}{0-(-1)} = -2$	$\frac{-2-(-2)}{1-(-1)} = 0$	$\frac{3-0}{2-(-1)} = 1$
0	1	$\frac{-1-1}{1-0} = -2$	$\frac{4-(-2)}{2-0} = 3$	
1	-1	$\frac{3-(-1)}{2-1} = 4$		
2	3			

Оцветените в червено разделени разлики участват във формулата на Нютон. Заместваме в нея:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p[x_0,x_1,\dots,x_k](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})$$
$$= 3 - 2(x+1) + 0(x+1)(x-0) + 1(x+1)(x-0)(x-1) = x^3 - 3x + 1.$$

Задача 10. Да се напише програма на Wolfram *Mathematica* за намиране на ИПЛ по условията от **задача 9**.

Решение: Нека означим разделената разлика $a[i,j] = f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+j}]$. Програмата е:

```
n=3;
Do[x[i]=i-1,{i,0,n}];
a[0,0]=3;a[1,0]=1;a[2,0]=-1;a[3,0]=3;
Do[Do[a[i,j]=(a[i+1,j-1]-a[i,j-1])/(x[i+j]-x[i]),{i,0,n-j}],{j,1,n}];
L[t_]:=a[0,0]+Sum[a[0,j]*Product[t-x[i],{i,0,j-1}],{j,1,n}];
Simplify[L[t]]
```

Out[1]= $1 - 3t + t^3$

Разделени разлики с кратни възли. Интерполационен полином на Ермит

Нека $a \le x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n \le b$ и $f \in C^n[a,b]$. Разделена разлика на функцията $f(x)$ във възлите $x_0, x_1, \dots, x_k$ се дефинира по следния начин:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \begin{cases} \dfrac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, x_0 \ne x_k \\ \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad x_0 = x_k \end{cases}$$

Интерполационният полином на Ермит се задава с формулата на Нютон:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\ x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}).$$

Задача 1. Да се намери полином $p(x) \in \pi_4$, такъв че $p(-1) = \frac{1}{2}, p(0) = 1, p'(0) = 0, p''(0) = -2, p(1) = \frac{1}{2}$.

Решение: Имаме 5 интерполационни възела $x_0 = -1, x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 1$. Нулата е трикратен възел. Можем да построим единствен полином от четвърта степен с тези условия по формулата на Нютон. За целта са ни необходими разделените разлики. Тях най-лесно можем да пресметнем от рекурентната връзка в следната таблица:

x_i	$p[x_i]$	$p[x_i, x_{i+1}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$p[x_i, \dots, x_{i+4}]$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1 - \frac{1}{2}}{0 - (-1)} = \frac{1}{2}$	$\frac{0 - \frac{1}{2}}{0 - (-1)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1 + \frac{1}{2}}{0 - (-1)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + 1} = \frac{1}{2}$
0	1	$\frac{p'(0)}{1!} = 0$	$\frac{p''(0)}{2!} = -1$	$\frac{-\frac{1}{2} + 1}{1 - 0} = \frac{1}{2}$	
0	1	$\frac{p'(0)}{1!} = 0$	$\frac{-\frac{1}{2} - 0}{1 - 0} = -\frac{1}{2}$		
0	1	$\frac{\frac{1}{2} - 1}{1 - 0} = -\frac{1}{2}$			
1	$\frac{1}{2}$				

Оцветените в червено разделени разлики участват във формулата на Нютон. Заместваме в нея:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{1}{2}(x + 1)(x - 0) - \frac{1}{2}(x + 1)x^2 + \frac{1}{2}(x + 1)x^3 = \frac{x^4}{2} - x^2 + 1.$$

Задача 2. Да се намери полином $p(x) \in \pi_4$, такъв че $p(-1) = 4, p'(-1) = -11, p(1) = 2, p'(1) = 5, p''(1) = 10$.

Решение: Преминаваме към попълване на таблицата с разделените разлики:

x_i	$p[x_i]$	$p[x_i, x_{i+1}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$p[x_i, \dots, x_{i+4}]$
-1	4	$\frac{p'(-1)}{1!} = -11$	$\frac{-1+11}{1-(-1)} = 5$	$\frac{3-5}{2} = -1$	$\frac{1+1}{1+1} = 1$
-1	4	$\frac{2-4}{1-(-1)} = -1$	$\frac{5+1}{1+1} = 3$	$\frac{5-3}{2} = 1$	
1	2	$\frac{p'(1)}{1!} = 5$	$\frac{p''(1)}{2!} = 5$		
1	2	$\frac{p'(1)}{1!} = 5$			
1	2				

Оцветените в червено разделени разлики участват във формулата на Нютон. Заместваме в нея:

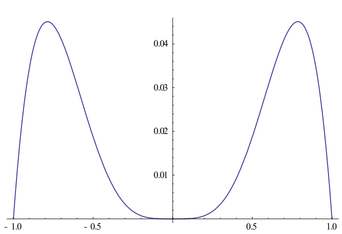
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) =$$
$$= 4 - 11(x+1) + 5(x+1)^2 - 1(x+1)^2(x-1) + 1(x+1)^2(x-1)^2$$
$$= x^4 - x^3 + 2x^2.$$

Задача 3. Да се намери интерполационния полином на Ермит във възлите $x_0 = -1, x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 1$ за функцията $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ чрез функция на Wolfram Mathematica. Да се визуализира графиката на грешката.

Решение: Намираме $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}; f(0) = 1; f'(0) = 0; f''(0) = -2$. Ще използваме вградената функция за намиране на интерполационен полином по зададени възли, техните функционални стойности и стойностите на производните. Така изглежда:

```
f[t_]:=1/(1+t^2);
L[t_]:=InterpolatingPolynomial[{{-1,1/2},{0,{1,0,-2}},{1,1/2}},t];
a=Expand[L[t]]
Plot[f[t]-a,{t,-1,1}]
```

Out[1]= $1 - t^2 + \frac{t^4}{2}$



Крайни разлики

Крайни разлики използваме, когато интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка h, т. е. възлите се задават се с формулата $x_k = x_0 + k.h,\ k = 0,1,\dots,n$. Означаваме функционалните стойности в тези възли с $f_k = f(x_k)$.

Разделена разлика за функцията $f(x)$ във възлите $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ се дефинира по следния начин:

- от първи ред: $\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$;
- от k-ти ред рекурентно: $\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j$.

На лекции са доказани следните формули:

1) $\Delta^n f_0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_j$;
2) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}$.

Доказали сме (в предходното упражнение), че:

а) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0,$ за $f(x) = x^m, m = 0,1,\dots,n-1;$ (*)

б) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1,$ за $f(x) = x^n.$ (**)

Ще интерпретираме тези изводи в термините на крайни разлики.

Задача 4: Да се докаже тъждеството $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = 0$ за $k = 0,1,\dots,n-1$.

Доказателство: Лявата страна на равенството е крайна разлика за функцията $f_j = f(j) = j^k, k \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Това са стойностите на функцията $f(x) = x^k \in \pi_{n-1}$ в точките $x_j = j,\ j = 0 \div n$. Интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка $h = 1$. Но разделената разлика в (n +1) точки на полином от (n-1) степен е равна на нула, т. е. $x^k[x_0 x_1, \dots, x_n] = 0,\ k = 0 \div n-1$ и от връзката между разделена и крайна разлика 2) получаваме $\Delta^n f_0 = 0$, т.е. $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = 0$.

Задача 5: Да се докаже тъждеството $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^n = n!$

Доказателство: Лявата страна на равенството е крайна разлика за функцията $f_j = f(j) = j^n$. Това са стойностите на функцията $f(x) = x^n \in \pi_n$ в точките $x_j = j,\ j = 0 \div n$. Интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка $h = 1$. Но разделената разлика в (n +1) точки на полином от n-та степен е равна на едно, т. е. $x^n[x_0 x_1, \dots, x_n] = 1$ и от връзката между разделена и крайна разлика 2) получаваме $\Delta^n f_0 = n!\, h^n f[x_0, x_1, \dots, x_n]$, т.е. $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = n!$

Задача 6: Да се намери $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{m+j}{k}$, където $m \in N, k = 0,1,\dots,n-1$.

Доказателство: Лявата страна на равенството е крайна разлика от n-ти ред за $f_j = f(j) = \binom{m+j}{k}$.

$$=> f(x) = \binom{x+m}{k} = \frac{(x+m)(x+m-1)\dots(x+m-k+1)}{k!} \in \pi_k \subseteq \pi_{n-1}.$$

Но $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$ и от равенството 2) получаваме, че $\Delta^n f_0 = 0$ и следователно $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{m+j}{k} = 0$.

Лема на Поповичу

Тя ни дава формула, по която да пресметнем разделената разлика на произведение на две функции в (n +1) интерполационни възли чрез раделените разлики на отделните функции. Лемата гласи:

$$(f.g)[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k].g[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n].$$

Задача 7: Да се намери $x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Решение: Можем да представим $x^{n+1} = x.x^n$. От (*) и (**) получаваме, че

$x[x_0] = x_0, x[x_0, x_1] = 1,\ x[x_0, x_1, \dots, x_k] = 0,\ \ x^n[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1.$

Прилагаме лемата на Поповичу за функцията x^{n+1}

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x[x_0, x_1, \dots, x_k].x^n[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] =$$
$$= x[x_0].\ x^n[x_0, x_1, \dots, x_n] + \ x[x_0, x_1].\ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n] + 0 = x_0 + \ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Така получихме рекурентна връзка за разделените разлики на функциите x^{n+1} и x^n

Прилагаме отново лемата за $x^n[x_1, x_2, \dots, x_n]$

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = x_0 + \ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n] = x_0 + x_1 + \ x^{n-1}[x_2, x_3, \dots, x_n]$$

След многократно приложение на лемата на Поповичу окончателно получаваме

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Задача 8: Да се намери $\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, за $x_k \neq 0, \forall k$.

Решение: Можем да представим $1 = x.\frac{1}{x}$, но $1 \in \pi_0 => 1[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$. Прилагаме лемата на Поповичу за константата 1, равенствата (*) и (**). Получаваме:

$0 = 1[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x\,[x_0, x_1, \dots, x_k].\frac{1}{x}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] = x_0.\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] + x[x_0, x_1].\frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n] + 0 = x_0.\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] + \frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n].$

От това равенство изразяваме $\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ и получаваме

$$\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] = -\frac{1}{x_0}.\frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

Аналогично прилагаме лемата на Поповичу още $(n-1)$ пъти и получаваме:

$$\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{(-1)^n}{x_0.x_1 \dots x_n}.$$

Задача 9: Да се намери $\frac{1}{x^2}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, за $x_k \neq 0, \forall k$.

Решение: Можем да използваме намереното в **Задача 8** и лемата на Поповичу.

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}.\frac{1}{x} => \frac{1}{x^2}[x_0, x_1, \dots, x_n] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_k].\frac{1}{x}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x_0.x_1 \dots x_k}.\frac{(-1)^{n-k}}{x_k.x_{k+1} \dots x_n} = \frac{(-1)^n}{x_0.x_1 \dots x_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k}.$$

Системи на Чебишов

Задача 1. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} k^3$ чрез интерполиране с разделени разлики.

Решение: Нека $S(n) = \sum_{k=0}^{n} k^3$ => $S(0) = 0, S(1) = 1, S(2) = 9, S(3) = 36, S(4) = 100, \dots, S(n) = S(n-1) + n^3$. Интерполационните възли са $x_i = i,\ i = 0, 1, 2, \dots, n$. Създаваме таблицата за намиране на разделените разлики:

x_i	S[i]	S[i,i+1]	S[i,i+1,i+2]	S[i,i+1,i+2,i+3]	S[i,i+1, …,i+4]	S[i,i+1, …,i+5]
0	0	1	7/2	2	¼	0
1	1	8	19/2	3	¼	…
2	9	27	37/2	4	…	0
3	36	64	61/2	…	¼	
4	100	125	…	n-1		
…	…	…	$\frac{3n^2 - 3n + 1}{2}$			
n-1	$S(n-1)$	n^3				
n	$S(n)$					

$$S(n) \in \pi_4 => S(n) = L_n(S; n) =$$

$$= 0 + 1.n + \frac{7}{2}n(n-1) + 2n(n-1)(n-2) + \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Системи на Чебишов:

Нека $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ са непрекъснати и линейно независими функции в интервала I. Казваме, че те образуват система на Чебишов в интервала I, ако всеки обобщен ненулев полином по тези функции има не повече от n различни нули в I.

Обобщен полином на функциите наричаме линейна комбинация на системата $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$:

$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$, където $a_k \neq 0$ за някое k.

Задача 2. Нека $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ са различни реални числа. Да се докаже, че $\{e^{\alpha_i x}\}_{i=0}^{n}$ образуват Чебишова система върху реалната права.

Доказателство: Индукция по броя на функциите.

$n = 0, \varphi(x) = a_0 e^{\alpha_0 x} \neq 0$ за $a_0 \neq 0$ => твърдението е вярно.

Допускаме, че твърдението е вярно за $(n-1)$. Ще докажем, че твърдението е в сила за $n \in N$.

Да допуснем противното, т.е. съществува обобщен полином $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{\alpha_k x}$, който има $(n+1)$ различни реални нули $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Ясно е, че $a_i \neq 0, i = 0,1, \dots, n$, защото в противен случай ще попаднем в индукционното предположение. Тогава

$\varphi(x) = e^{\alpha_0 x}\{a_0 + a_1 e^{(\alpha_1-\alpha_0)x} + \cdots + a_n e^{(\alpha_n-\alpha_0)x}\}$. Но $e^{\alpha_0 x} \neq 0$ => нулите на $\varphi(x)$ съвпадат с нулите на $\theta(x) = a_0 + a_1 e^{(\alpha_1-\alpha_0)x} + \cdots + a_n e^{(\alpha_n-\alpha_0)x}$. За $\theta(x)$ прилагаме теоремата на Рол. Следователно $\theta'(x)$ има поне n различни реални нули. Но $\theta'(x)$ е обобщен полином на функциите

$\{e^{(\alpha_i-\alpha_0)x}\}_{i=1}^{n}$, където $\alpha_1 - \alpha_0 < \alpha_2 - \alpha_0 < \cdots < \alpha_n - \alpha_0$. Съгласно индукционното предположение $\theta'(x)$ има не повече от $(n-1)$ различни реални нули, което е противоречие, дължащо се на грешното допускане. Следователно $\{e^{\alpha_i x}\}_{i=0}^{n}$ образуват Чебишова система върху реалната права.

Задача 3. Нека $f(x) \in C^n[a,b]$ и $f^{(n)}(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$. Да се докаже, че $\{1, x, \dots, x^{n-1}, f(x)\}$ образуват Чебишова система в интервала $[a,b]$.

Доказателство: Да допуснем, че функциите не са Т-система в интервала $[a,b]$. Тогава съществува $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n f(x)$ с $(n+1)$ различни нули в интервала $[a,b]$. Ясно е, че $a_n \neq 0$, защото ако $a_n = 0$, то $\varphi(x)$ има не повече от n различни нули. От теоремата на Рол следва, че $\varphi'(x)$ има $\boldsymbol{n}$ различни нули в (a,b) и след многократно приложение на теоремата на Рол получаваме, че $\varphi^{(n)}(x) = a_n f^{(n)}(x)$ има поне една нула в (a,b). Но $f^{(n)}(x) \neq 0$ и $a_n \neq 0 \Rightarrow \varphi^{(n)} \neq 0$, което е противоречие, дължащо се на грешното допускане. Следователно $\{1, x, \dots, x^{n-1}, f(x)\}$ образуват Чебишова система в интервала $[a,b]$.

Задача 4. Да се докаже, че $\{1, x, x\cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Доказателство: Да допуснем, че функциите $\{1, x, x\cos x\}$ не са Т-система в интервала. Тогава съществува $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x\cos x$, която има три различни нули в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$, $a_2 \neq 0$, защото ако $a_2 = 0$, то $\varphi(x)$ има не повече от един корен. От теоремата на Рол следва, че $\varphi''(x)$ има поне един корен в интервала $(0, \frac{\pi}{2})$. Но $\varphi''(x) = -a_2(2\sin x + x\cos x) \neq 0, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Получихме противоречие, дължащо се на грешното допускане. Следователно $\{1, x, x\cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Задача 5. Да се докаже, че функциите $\{1, \sin x\}$ не образуват Чебишова система в интервала $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Доказателство: Трябва да намерим такава линейна комбинация на тези функции, която да има поне две нули в интервала $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$. Нека $a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_1 = -1$. Функцията $\varphi(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x$ има два корена $x_1 = \frac{\pi}{4}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ в интервала $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$. Следователно функциите $\{1, \sin x\}$ не образуват Чебишова система в интервала $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Интерполиране с тригонометрични полиноми

Нека $f(x)$ е периодична функция с период 2π. Нека са зададени стойностите на тази функция $f(x_k) = y_k$ в $(2n+1)$ възела $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} \leq 2\pi$. Тогава може да построим единствен тригонометричен полином $\tau(f; x)$, който интерполира функцията $f(x)$ във възлите $\{x_k\}_{k=0}^{2n}$.

$$\tau(f; x) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k(x) y_k,$$

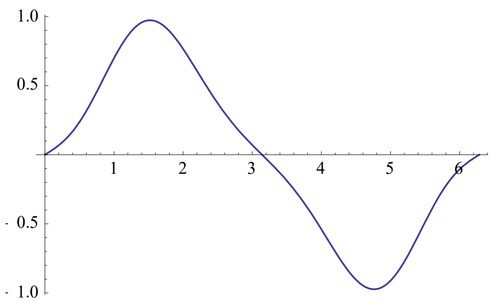
$$\lambda_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{2n} \frac{\sin\frac{x-x_j}{2}}{\sin\frac{x_k-x_j}{2}}.$$

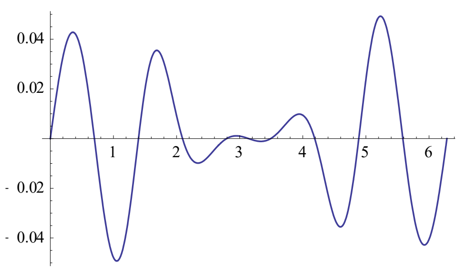
Изпълнени са следните интерполационни условия: $\tau(f; x_k) = f(x_k) = y_k,\ k = 0,1,\dots,2n.$

Задача: Да се състави програма за построяването на тригонометричен полином $\tau(f;x)$ за функцията $f(x) = \frac{\sin x}{1+(\cos x)^2}$ с интерполационни възли $x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, k = 0,1,\ldots,2n,$ за $n = 4$.

Решение:

```
n=4;
Do[x[k]=2k*Pi/(2n+1),{k,0,2n}];
f[t_]:=Sin[t]/(1+Cos[t]^2);
Do[l[k_,t_]:=(s=1;Do[If[j≠k,s*=Sin[(t-x[j])/2]/Sin[(x[k]-
x[j])/2]],{j,0,2n}];s),{k,0,2n}];
T[t_]:=Sum[l[k,t]*f[x[k]],{k,0,2n}];
Plot[T[t],{t,0,2Pi}]
Plot[f[t]-T[t],{t,0,2Pi}]
```





Задачи са самостоятелна работа:

1) Да се докаже, че функциите $\{1, \cos x\}$ не образуват Чебишова система в интервала $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
2) Да се докаже, че $\{1, x, x\sin x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

Интерполиране със сплайни от първа степен

Задача 1. Да се докаже, че функциите $\left\{\frac{1}{x-a_i}\right\}_{i=0}^{n}$ образуват Чебишова система върху всеки интервал, несъдържащ $a_0,\ a_1, \dots, a_n$.

Доказателство: Всеки обобщен полином на тези функции има вида

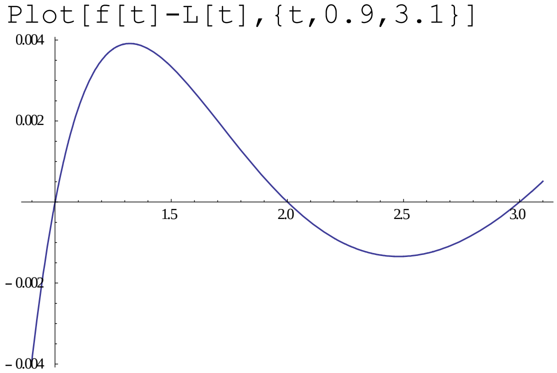
$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{x-a_k} = \frac{P_n(x)}{\omega(x)},\ P_n(x) \epsilon \pi_n.$$

Нулите на $\varphi(x)$ съвпадат с нулите на $P_n(x)$, а броят им не надвишава n. Следователно функциите $\left\{\frac{1}{x-a_i}\right\}_{i=0}^{n}$ образуват Чебишова система върху всеки интервал, несъдържащ $a_0,\ a_1, \dots, a_n$.

Задача 2. С помощта на *Wolfram Mathematica* да се построи обобщен полином по функциите $f_0(t) = \frac{1}{t+1}, f_1(t) = \frac{1}{t+2}, f_2(t) = \frac{1}{t+3},$ интерполиращ функцията $f(t) = e^{-t}$ във възлите $t_0 = 1, t_1 = 2, t_2 = 3$. Да се изобрази графиката на грешката в интервала $[1,3]$.

Решение:

```
f0[t_]:=1/(1+t);
f1[t_]:=1/(2+t);
f2[t_]:=1/(3+t);
f[t_]:=Exp[-t];
result=Solve[{a*f0[1]+b*f1[1]+c*f2[1]==f[1],
a*f0[2]+b*f1[2]+c*f2[2]==f[2],a*f0[3]+b*f1[3]+c*f2[3]==f[3]},{a,b,c}]
L[t_]:=Simplify[a*f0[t]+b*f1[t]+c*f2[t]/.result];
Plot[f[t]-L[t],{t,0.9,3.1}]
```



Сплайн функции от първа степен – начупена линия

Когато интерполираме със сплайни от първа степен ще използваме модулните функции вместо отсечените. Ще докажем, че те са линейно независими в интервала на интерполационните възли. Без ограничение на общността ще разглеждаме интервала $[0,1]$.

Задача 3. Нека $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$. Докажете, че функциите $\{|x - x_i|\}_{i=0}^{n}$ са линейно независими в интервала $[0,1]$.

Доказателство: Допускаме, че $f(x) = c_0|x - x_0| + c_1|x - x_1| + \cdots + c_n|x - x_n| \equiv 0$ в интервала $[0,1]$.

Нека $x \in (x_k, x_{k+1}),\ k = 0 \div n - 1$. Тогава, разкривайки модулите имаме

$$f(x) = c_0(x - x_0) + c_1(x - x_1) + \ \dots + c_k(x - x_k) - c_{k+1}(x - x_{k+1}) - \cdots - c_n(x - x_n)$$
$$= (c_0 + c_1 + \cdots + c_k - c_{k+1} - \cdots - c_n)x + A \equiv 0$$

$$=> (c_0 + c_1 + \cdots + c_k - c_{k+1} - \cdots - c_n) = 0, x \in (x_k, x_{k+1}).$$

Получаваме аналогично равенство, ако $x \in (x_{k-1}, x_k)$. Като извадим две такива последователни уравнения получаваме $2c_k = 0 => c_k = 0, k = 1 \div n - 1$. Тогава

$$f(x) = c_0(x - 0) + c_n(1 - x) = (c_0 - c_n)x + c_n \equiv 0 => c_0 = c_n = 0.$$

Следователно функциите $\{|x - x_i|\}_{i=0}^{n}$ са линейно независими в интервала $[0,1]$. Техният брой е равен на размерността на множеството от сплайни от първа степен $S_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ и следователно те образуват базис.

Задача 4. Нека $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1, I_1(f; x) \in S_1(x_1, x_{2,} \dots, x_{n-1})$ е сплайн функция от първа степен, такъв че $I_1(f; x_i) = f(x_i), i = 0 \div n$. Да се намерят коефициентите c_k в представянето

$$I_1(f; x) = \sum_{k=0}^{n} c_k|x - x_k|.$$

Решение: От интерполационните условия имаме

$$I_1(f; x_i) = \sum_{k=0}^{n} c_k|x_i - x_k| = f(x_i), i = 0 \div n.$$

$$=> \sum_{k=0}^{i-1} c_k(x_i - x_k) + \sum_{k=i+1}^{n} c_k(x_k - x_i) = \sum_{k=0}^{i-1} c_k(x_i - x_k) - \sum_{k=i+1}^{n} c_k(x_i - x_k) = f(x_i).$$

Аналогично

$I_1(f; x_{i+1}) = \sum_{k=0}^{i} c_k(x_{i+1} - x_k) - \sum_{k=i+2}^{n} c_k(x_{i+1} - x_k) = f(x_{i+1}).$

От второто равенство изваждаме първото и получаваме

$$\sum_{k=0}^{i} c_k(x_{i+1}-x_i) - \sum_{k=i+1}^{n} c_k(x_{i+1}-x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i),$$

Делим двете страни на уравнението на $(x_{i+1}-x_i) \neq 0$

$$\sum_{k=0}^{i} c_k - \sum_{k=i+1}^{n} c_k = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} = f[x_i, x_{i+1}], i = 0,1, \dots, n-1 \qquad (1)$$

$$=> \sum_{k=0}^{i-1} c_k - \sum_{k=i}^{n} c_k = f[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n \qquad (2).$$

Изваждаме левите и десните страни на тези равенства и получаваме:

$$2c_i = f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]$$

$$=> c_i = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{2}\ , i = 1 \div n-1 \qquad (3)$$

Остава да намерим c_0 и c_n. Използваме интерполация в краищата на интервала.

$$I_1(f; x_0) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x_k - x_0) = f(x_0),$$

$$I_1(f; x_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x_n - x_k) = f(x_n).$$

Събираме двете уравнения и получаваме:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \frac{f(x_0)+f(x_n)}{x_n - x_0} \qquad (4).$$

Прилагаме равенството (1) за $i = 0$ и събираме с уравнението (4). Така намираме c_0

$$c_0 = \frac{1}{2}\left(f[x_0, x_1] + \frac{f(x_0)+f(x_n)}{x_n - x_0}\right) \qquad (5).$$

За да намерим c_n използваме уравнението (2) за $i = n$ и го изваждаме от уравнението (4). Получаваме

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{x_n - x_0} - f[x_{n-1}, x_n]\right) \qquad (6).$$

Задача 5. Да се построи сплайн функция от първа степен $I_1(f; x) \in S_1(x_1, x_{2,} \dots, x_{n-1})$ за функцията $f(x) = \sqrt{x}$ с възли:

а) $x_k = \frac{k}{n}, k = 0,1, \dots, n$ при $n = 5$;

б) $x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^4, k = 0,1,\dots,n$ при $n = 5$.

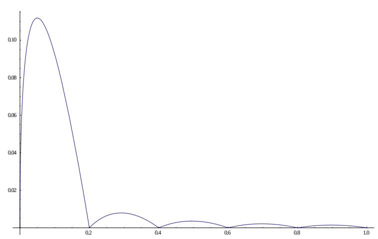
Да се визуализира графика на грешката, както и графика на фунцията и сплайна едновременно. Сравнете грешките в двата случая.

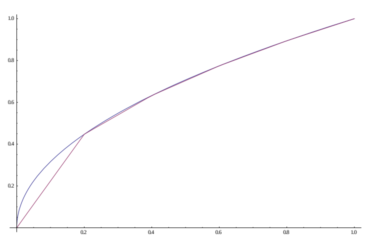
Решение:

а) От формули (3), (5) и (6) за коефициентите в представянето на сплайна $I_1(f;x)$ като линейна комбинация на модулните функции.

В конкретната задача $x_n - x_0 = 1$. В програмата ще запазим същите означения.

```
n=5;
Do[x[k]=k/n,{k,0,n}];
f[t_]:=Sqrt[t];
c[0]=(f[x[0]]+f[x[n]]+(f[x[1]]-f[x[0]])/(x[1]-x[0]))/2;
c[n]=(f[x[0]]+f[x[n]]-(f[x[n]]-f[x[n-1]])/(x[n]-x[n-1]))/2;
Do[c[i]=((f[x[i+1]]-f[x[i]])/(x[i+1]-x[i])-
(f[x[i]]-f[x[i-1]])/(x[i]-x[i-1]))/2,{i,1,n-1}];
I1[t_]:=Sum[c[k]*Abs[t-x[k]],{k,0,n}];
Plot[f[t]-I1[t],{t,0,1},PlotRange→All]
Plot[{f[t],I1[t]},{t,0,1}]
```





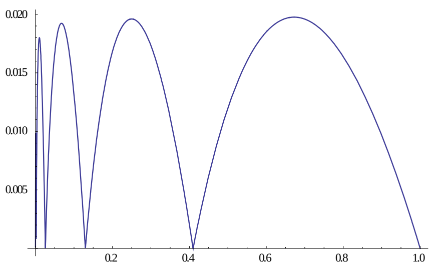
Първата графика е на грешката, а втората е сравнителна графика на функцията и сплайна.

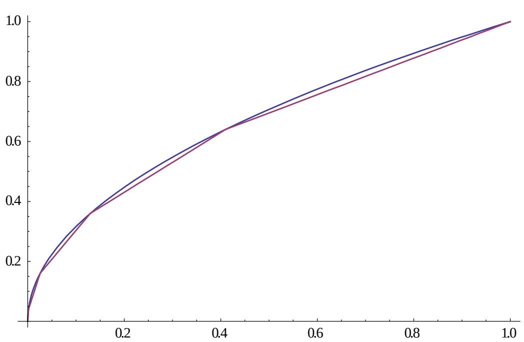
Наблюдения: От първата графика на грешката забелязваме, че грешката е най-голяма в левия край на интервала. Това се дължи на факта, че функцията $f(x)$ бързо нараства, както е видно от втората графика на сплайна и функцията едновременно. В син цвят е графика на функцията $f(x) = \sqrt{x}$, а в червен цвят е графиката на сплайна $I_1(f;x)$.

Моля студентите да стартират програмата с други стойности на n, например 10 и 50. Направете съответните изводи.

б) За подточка б) е необходимо да се промени формулата за изчисляване на интерполационните възли. Ето програмата:

```
n=5;
Do[x[k]=(k/n)^4,{k,0,n}];
f[t_]:=Sqrt[t];
c[0]=(f[x[0]]+f[x[n]]+(f[x[1]]-f[x[0]])/(x[1]-x[0]))/2;
c[n]=(f[x[0]]+f[x[n]]-(f[x[n]]-f[x[n-1]])/(x[n]-x[n-1]))/2;
Do[c[i]=((f[x[i+1]]-f[x[i]])/(x[i+1]-x[i])-
(f[x[i]]-f[x[i-1]])/(x[i]-x[i-1]))/2,{i,1,n-1}];
I1[t_]:=Sum[c[k]*Abs[t-x[k]],{k,0,n}];
Plot[f[t]-I1[t],{t,0,1},PlotRange→All]
Plot[{f[t],I1[t]},{t,0,1}]
```





Наблюдения и изводи: Забелязваме, че грешката значително намалява при втория случай. Това е така, защото интерполационните възли са сгъстени в левия край на интервала, където функцията стръмно нараства.

Моля студентите да стартират втория вариант на програмата с други стойности на n, например 10 и 50. Направете съответните изводи. Сравнете двата случая за различните стойности на n.

Разделени разлики с кратни възли. Интерполационен полином на Ермит

Нека $a \le x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n \le b$ и $f \in C^n[a,b]$. Разделена разлика на функцията $f(x)$ във възлите $x_0, x_1, \dots, x_k$ се дефинира по следния начин:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \begin{cases} \dfrac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, x_0 \neq x_k \\ \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad x_0 = x_k \end{cases}$$

Интерполационният полином на Ермит се задава с формулата на Нютон:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\ x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}).$$

Задача 1. Да се намери полином $p(x) \in \pi_4$, такъв че $p(-1) = \frac{1}{2}, p(0) = 1, p'(0) = 0, p''(0) = -2, p(1) = \frac{1}{2}$.

Решение: Имаме 5 интерполационни възела $x_0 = -1, x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 1$. Нулата е трикратен възел. Можем да построим единствен полином от четвърта степен с тези условия по формулата на Нютон. За целта са ни необходими разделените разлики. Тях най-лесно можем да пресметнем от рекурентната връзка в следната таблица:

x_i	$p[x_i]$	$p[x_i, x_{i+1}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$p[x_i, \dots, x_{i+4}]$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-\frac{1}{2}}{0-(-1)} = \frac{1}{2}$	$\frac{0-\frac{1}{2}}{0-(-1)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1+\frac{1}{2}}{0-(-1)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+1} = \frac{1}{2}$
0	1	$\frac{p'(0)}{1!} = 0$	$\frac{p''(0)}{2!} = -1$	$\frac{-\frac{1}{2}+1}{1-0} = \frac{1}{2}$	
0	1	$\frac{p'(0)}{1!} = 0$	$\frac{-\frac{1}{2}-0}{1-0} = -\frac{1}{2}$		
0	1	$\frac{\frac{1}{2}-1}{1-0} = -\frac{1}{2}$			
1	$\frac{1}{2}$				

Оцветените в червено разделени разлики участват във формулата на Нютон. Заместваме в нея:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)(x-0) - \frac{1}{2}(x+1)x^2 + \frac{1}{2}(x+1)x^3 = \frac{x^4}{2} - x^2 + 1.$$

Задача 2. Да се намери полином $p(x) \in \pi_4$, такъв че $p(-1) = 4, p'(-1) = -11, p(1) = 2, p'(1) = 5, p''(1) = 10$.

Решение: Преминаваме към попълване на таблицата с разделените разлики:

x_i	$p[x_i]$	$p[x_i, x_{i+1}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$p[x_i, \dots, x_{i+4}]$
-1	4	$\frac{p'(-1)}{1!} = -11$	$\frac{-1+11}{1-(-1)} = 5$	$\frac{3-5}{2} = -1$	$\frac{1+1}{1+1} = 1$
-1	4	$\frac{2-4}{1-(-1)} = -1$	$\frac{5+1}{1+1} = 3$	$\frac{5-3}{2} = 1$	
1	2	$\frac{p'(1)}{1!} = 5$	$\frac{p''(1)}{2!} = 5$		
1	2	$\frac{p'(1)}{1!} = 5$			
1	2				

Оцветените в червено разделени разлики участват във формулата на Нютон. Заместваме в нея:

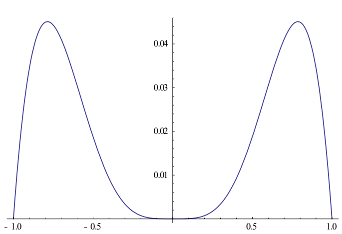
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) =$$
$$= 4 - 11(x+1) + 5(x+1)^2 - 1(x+1)^2(x-1) + 1(x+1)^2(x-1)^2$$
$$= x^4 - x^3 + 2x^2.$$

Задача 3. Да се намери интерполационния полином на Ермит във възлите $x_0 = -1, x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 1$ за функцията $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ чрез функция на Wolfram Mathematica. Да се визуализира графиката на грешката.

Решение: Намираме $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}; f(0) = 1; f'(0) = 0; f''(0) = -2$. Ще използваме вградената функция за намиране на интерполационен полином по зададени възли, техните функционални стойности и стойностите на производните. Така изглежда:

```
f[t_]:=1/(1+t^2);
L[t_]:=InterpolatingPolynomial[{{-1,1/2},{0,{1,0,-2}},{1,1/2}},t];
a=Expand[L[t]]
Plot[f[t]-a,{t,-1,1}]
```

Out[1]= $1 - t^2 + \frac{t^4}{2}$



Крайни разлики

Крайни разлики използваме, когато интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка h, т. е. възлите се задават се с формулата $x_k = x_0 + k.h,\ k = 0,1,\dots,n$. Означаваме функционалните стойности в тези възли с $f_k = f(x_k)$.

Разделена разлика за функцията $f(x)$ във възлите $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ се дефинира по следния начин:

- от първи ред: $\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$;
- от k-ти ред рекурентно: $\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j$.

На лекции са доказани следните формули:

1) $\Delta^n f_0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_j$;
2) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}$.

Доказали сме (в предходното упражнение), че:

а) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0,$ за $f(x) = x^m, m = 0,1,\dots,n-1;$ (*)

б) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1,$ за $f(x) = x^n$. (**)

Ще интерпретираме тези изводи в термините на крайни разлики.

Задача 4: Да се докаже тъждеството $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = 0$ за $k = 0,1,\dots,n-1$.

Доказателство: Лявата страна на равенството е крайна разлика за функцията $f_j = f(j) = j^k, k \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Това са стойностите на функцията $f(x) = x^k \in \pi_{n-1}$ в точките $x_j = j,\ j = 0 \div n$. Интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка $h = 1$. Но разделената разлика в (n +1) точки на полином от (n-1) степен е равна на нула, т. е. $x^k[x_0 x_1, \dots, x_n] = 0,\ k = 0 \div n-1$ и от връзката между разделена и крайна разлика 2) получаваме $\Delta^n f_0 = 0$, т.е. $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = 0$.

Задача 5: Да се докаже тъждеството $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^n = n!$

Доказателство: Лявата страна на равенството е крайна разлика за функцията $f_j = f(j) = j^n$. Това са стойностите на функцията $f(x) = x^n \in \pi_n$ в точките $x_j = j,\ j = 0 \div n$. Интерполационните възли са равноотдалечени със стъпка $h = 1$. Но разделената разлика в (n +1) точки на полином от n-та степен е равна на едно, т. е. $x^n[x_0 x_1, \dots, x_n] = 1$ и от връзката между разделена и крайна разлика 2) получаваме $\Delta^n f_0 = n!\, h^n f[x_0, x_1, \dots, x_n]$, т.е. $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = n!$

Задача 6: Да се намери $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{m+j}{k}$, където $m \in N, k = 0,1,\dots,n-1$.

Доказателство: Лявата страна на равенството е крайна разлика от n-ти ред за $f_j = f(j) = \binom{m+j}{k}$.

$$=> f(x) = \binom{x+m}{k} = \frac{(x+m)(x+m-1)\dots(x+m-k+1)}{k!} \in \pi_k \subseteq \pi_{n-1}.$$

Но $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$ и от равенството 2) получаваме, че $\Delta^n f_0 = 0$ и следователно $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{m+j}{k} = 0$.

Лема на Поповичу

Тя ни дава формула, по която да пресметнем разделената разлика на произведение на две функции в (n +1) интерполационни възли чрез раделените разлики на отделните функции. Лемата гласи:

$$(f.g)[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k].\, g[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n].$$

Задача 7: Да се намери $x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Решение: Можем да представим $x^{n+1} = x.x^n$. От (*) и (**) получаваме, че

$x[x_0] = x_0, x[x_0, x_1] = 1,\ x[x_0, x_1, \dots, x_k] = 0,\ \ x^n[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1.$

Прилагаме лемата на Поповичу за функцията x^{n+1}

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x[x_0, x_1, \dots, x_k].\, x^n[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] =$$
$$= x[x_0].\ x^n[x_0, x_1, \dots, x_n] + \ x[x_0, x_1].\ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n] + 0 = x_0 + \ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Така получихме рекурентна връзка за разделените разлики на функциите x^{n+1} и x^n

Прилагаме отново лемата за $x^n[x_1, x_2, \dots, x_n]$

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = x_0 + \ x^n[x_1, x_2, \dots, x_n] = x_0 + x_1 + \ x^{n-1}[x_2, x_3, \dots, x_n]$$

След многократно приложение на лемата на Поповичу окончателно получаваме

$$x^{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \textstyle\sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Задача 8: Да се намери $\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, за $x_k \neq 0, \forall k$.

Решение: Можем да представим $1 = x.\frac{1}{x}$, но $1 \in \pi_0 \Rightarrow 1[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$. Прилагаме лемата на Поповичу за константата 1, равенствата (*) и (**). Получаваме:

$0 = 1[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x\,[x_0, x_1, \dots, x_k].\frac{1}{x}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] = x_0.\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] + x[x_0, x_1].\frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n] + 0 = x_0.\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] + \frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n].$

От това равенство изразяваме $\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ и получаваме

$$\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] = -\frac{1}{x_0}.\frac{1}{x}[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

Аналогично прилагаме лемата на Поповичу още $(n-1)$ пъти и получаваме:

$$\frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{(-1)^n}{x_0 . x_1 \dots x_n}.$$

Задача 9: Да се намери $\frac{1}{x^2}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, за $x_k \neq 0, \forall k$.

Решение: Можем да използваме намереното в **Задача 8** и лемата на Поповичу.

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}.\frac{1}{x} => \frac{1}{x^2}[x_0, x_1, \dots, x_n] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x}[x_0, x_1, \dots, x_k].\frac{1}{x}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x_0 . x_1 \dots x_k}.\frac{(-1)^{n-k}}{x_k . x_{k+1} \dots x_n} = \frac{(-1)^n}{x_0 . x_1 \dots x_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k}.$$