6. Интегриране по части и смяна на променливата в определените интеграли

Означение: нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ е диференцируема, като производната ѝ е непрекъсната. Полагаме

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) := \int_a^b f(x) g'(x)\, dx. \tag{1}$$

Твърдение

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ е диференцируема, като производната ѝ е непрекъсната, и $k \in \mathbb{R}$. Тогава:

(а) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, d[g(x) + k] = \int_a^b f(x)\, dg(x);$

(б) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, d[kg(x)] = k \int_a^b f(x)\, dg(x).$

Интегриране по части

Теорема 1 (формула за интегриране по части)

Нека $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ имат непрекъснати производни в $[a, b]$. Тогава

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx. \tag{2}$$

Да припомним: $[f(x)g(x)]\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Ф-ла (2) може да се запише още във вида:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = [f(x)g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x). \tag{3}$$

Доказателство

Интегрираме от a до b равенството

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{4}$$

Всички участващи функции са непрекъснати и следователно интегруеми. Получаваме

$$\int_a^b [f(x)g(x)]'\,dx = \int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx \tag{5}$$

$$\overset{\text{линейн.}}{=} \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx. \tag{6}$$

Към лявата страна прилагаме основната т-ма на ДИС, II част (ф-лата на Л.-Н.), по-точно прилагаме (13) в Тема 5 с $G(x) := [f(x)g(x)]'$. С това формулата е доказана.

Смяна на променливата

Теорема 2 (за смяна на променливата)

Нека $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната, D е интервал и $a, b \in D$, $a < b$. Нека $\psi : E \to D$ е диференцируема, като производната ѝ е непрекъсната, E е интервал и $\alpha, \beta \in E$. Накрая, нека

$$\psi(\alpha) = a \quad \text{и} \quad \psi(\beta) = b. \tag{7}$$

Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\,d\psi(t). \tag{8}$$

Бележка: 1) интегралите в теоремата съществуват, защото подинтегралните функции са непрекъснати;
2) не се иска непременно $\alpha < \beta$.

Доказателство

Първо да отбележим, че

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t))\, d\psi(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t))\psi'(t)\, dt. \tag{9}$$

Ще използваме основната т-ма на ДИС. Полагаме

$$G(x) := \int_{a}^{x} f(y)\, dy, \quad x \in D. \tag{10}$$

От основната т-ма на ДИС, I част следва, че $G(x)$ е диференцируема в D и

$$G'(x) = f(x), \quad x \in D. \tag{11}$$

Тогава съставната функция $H(t) := G(\psi(t))$ е диференцируема в E и

$$H'(t) = G'(\psi(t))\psi'(t) \stackrel{(11)}{=} f(\psi(t))\psi'(t), \quad t \in E. \tag{12}$$

Следователно $H(t)$ е примитивна на подинтегралната функция в (9) в интервала с краища α и β.

От основната т-ма на ДИС, II част следва, че

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t))\psi'(t)\,dt = H(\beta) - H(\alpha). \tag{13}$$

От дефиницията на $H(t)$ следва

$$H(\alpha) = G(\psi(\alpha)) \stackrel{(7)}{=} G(a) \stackrel{(10)}{=} 0, \tag{14}$$

$$H(\beta) = G(\psi(\beta)) \stackrel{(7)}{=} G(b) \stackrel{(10)}{=} \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{15}$$

Като заместим последните два резултата в (13), получаваме твърдението на теоремата.

Пример: лице на кръг

Уравнение на окръжност с център O и радиус 1: $x^2 + y^2 = 1$.
Уравнение на горната полуокръжност с център O и радиус 1:
$y = \sqrt{1 - x^2}$.

Така лицето на полукръга с център O и радиус 1, разположен в I и II квадрант се дава чрез стойността на определения интеграл

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx. \tag{16}$$

Тогава

$$\text{лицето на единичния кръг} = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx. \tag{17}$$

Ще пресметнем интеграла чрез смяна на променливата.

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{x=\sin t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,d\sin t \tag{18}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\,(\sin t)'\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t\,dt \tag{19}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \tag{20}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt \tag{21}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,d2t \tag{22}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin(-\pi)) \tag{23}$$

$$= \frac{\pi}{2}. \tag{24}$$