вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност	минала година
1						
Име:						

Първо контролно по Дизайн и анализ на алгоритми (част 2)
22.04.2023 г.

Алгоритми, които не са представени формално и/или не са съпътствани с аргументация/доказателство за коректност, завършване и/или оценка на времевата сложност, може да не бъдат оценявани.

Задача 1. *(2.5 т.)* Нека $n > 1$ е естествено число. С $H_n = (V_n, E_n)$ бележим графа с върхове $V_n = \{0,1\}^n$ и ребра точно онези двуелементни множества $\{u, v\} \subseteq V_n$, които се различават точно в една позиция, която означаваме с $\delta(u, v)$.

Път в H_n наричаме всяка редица $\pi = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$ от върхове на H_n, за която $\{v_i, v_{i+1}\} \in E_n$ за всяко $0 \leq i < m$. С $|\pi| = m$ бележим *дължината на път* π. С $\rho(u, v)$ бележим най-малката дължина на път от u до v в H_n.

За естествени числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *устойчивост* на пътя $\pi = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$ ще наричаме:

$$s_{f,x}(\pi) = \sum_{i=0}^{m-2} f(x_{j_i}, x_{j_{i+1}}), \text{ където } j_i = \delta(v_i, v_{i+1}) \text{ за всяко } i < m-1.$$

1. Ако $u, v \in V_n$ и $\rho(u, v) = k$, колко са най-късите пътища от u до v в H_n? Защо?

2. За функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ дефинираме проблема MaxResistibility:

   Вход: $U[1..n], V[1..n]$ масиви от 0 и 1 и $X[1..n]$ масив от естествени числа
   Изход: s максималната стойност на устойчивост, $s_{f,X}(\pi)$, на най-къс път π, който свързва U с V.

   Ако $f(a, b) = (a+b)(a-b)$, да се предложи алгоритъм с времева сложност $O(n)$, който решава проблема MaxResistibility.

3. Нека отново $f(a, b) = (a+b)(a-b)$. Да се предложи алгоритъм, който решава следния проблем с времева сложност $O(n + \rho(U, V) \log K)$:

   Вход: $U[1..n], V[1..n]$ масиви от 0 и 1, $X[1..n]$ масив от естествени числа, цяло число $K \geq 1$
   Изход: 0, ако броят на най-късите пътища от U до V е по-малък от K, K-тата в намаляващ ред стойност на устойчивост, $s_{f,X}(\pi)$, на най-къс път π, който свързва U с V, иначе.

4. Да се предложи алгоритъм със времева сложност $O(n \log n)$, който решава MaxResistibility в случая, когато $f(a, b) = (a+b)(a+b)$.

Да се докаже коректността и времевата сложност на предложените алгоритми.

Пример: Ако $n = 3$, а $v_0 = (0,0,0)$, $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$, то $\pi = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ е път в H_3 от v_0 до v_3 с дължина $|\pi| = 3$. Тъй като v_0 и v_1 се различават в позиция 2, то $\delta(v_0, v_1) = 2$. Тъй като v_1 и v_2 се различават в позиция 1, то $\delta(v_1, v_2) = 1$. Тъй като v_2 и v_3 се различават в позиция 3, то $\delta(v_2, v_3) = 3$. Също $\rho(v_0, v_3) = |\pi| = 3$.

Поради това: $s_{f,x}(\pi) = f(x_2, x_1) + f(x_1, x_3)$.

При $f(a, b) = (a-b)(a+b)$, функцията $s_{f,x}(\pi)$ за път $\pi = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$ изглежда така:

$$s_{f,x}(\pi) = \sum_{i=0}^{m-2} (x_{j_i} - x_{j_{i+1}})(x_{j_i} + x_{j_{i+1}}) \text{ където } j_i = \delta(v_i, v_{i+1}) \text{ за всяко } i < m-1.$$

При $m < 2$, тази сума е тъждествено равна на 0, понеже в нея няма събираеми.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност	минала година
2						
Име:						

Първо контролно по Дизайн и анализ на алгоритми (част 2)
22.04.2023 г.

Алгоритми, които не са представени формално и/или не са съпътствани с аргументация/доказателство за коректност, завършване и/или оценка на времевата сложност, може да не бъдат оценявани.

Задача 1. *(2.5 т.)* Нека $n > 1$ е естествено число. С $H_n = (V_n, E_n)$ бележим графа с върхове $V_n = \{0, 1\}^n$ и ребра точно онези двуелементни множества $\{u, v\} \subseteq V_n$, които се различават точно в една позиция, която означаваме с $\delta(u, v)$.

Път в H_n наричаме всяка редица $\pi = (v_0, v_1, \dots, v_m)$ от върхове на H_n, за която $\{v_i, v_{i+1}\} \in E_n$ за всяко $0 \leq i < m$. С $|\pi| = m$ бележим *дължината на път* π. С $\rho(u, v)$ бележим най-малката дължина на път от u до v в H_n.

За естествени числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ и функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *устойчивост* на пътя $\pi = (v_0, v_1, \dots, v_m)$ ще наричаме:

$$s_{f,x}(\pi) = \sum_{i=0}^{m-2} f(x_{j_i}, x_{j_{i+1}}), \text{ където } j_i = \delta(v_i, v_{i+1}) \text{ за всяко } i < m - 1.$$

1. Ако $u, v \in V_n$ и $\rho(u, v) = k$, колко са най-късите пътища от u до v в H_n? Защо?
2. За функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ дефинираме проблема MinResistability:

   Вход: $U[1..n], V[1..n]$ масиви от 0 и 1 и $X[1..n]$ масив от естествени числа
   Изход: s минималната стойност на устойчивост, $s_{f,X}(\pi)$, на най-къс път π, който свързва U с V.

   Ако $f(a, b) = (a+b)(a-b)$, да се предложи алгоритъм с времева сложност $O(n)$, който решава проблема MinResistability.

3. Нека отново $f(a, b) = (a+b)(a-b)$. Да се предложи алгоритъм, който решава следния проблем с времева сложност $O(n + \rho(U, V) \log K)$:

   Вход: $U[1..n], V[1..n]$ масиви от 0 и 1, $X[1..n]$ масив от естествени числа, цяло число $K \geq 1$
   Изход: 0, ако броят на най-късите пътища от U до V е по-малък от K, K-тата в нарастващ ред стойност на устойчивост, $s_{f,X}(\pi)$, на най-къс път π, който свързва U с V, иначе.

4. Да се предложи алгоритъм със времева сложност $O(n \log n)$, който решава MinResistability в случая, когато $f(a, b) = (a + b)(a + b)$.

Да се докаже коректността и времевата сложност на предложените алгоритми.

Пример: Ако $n = 3$, а $v_0 = (0, 0, 0)$, $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$, то $\pi = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ е път в H_3 от v_0 до v_3 с дължина $|\pi| = 3$. Тъй като v_0 и v_1 се различават в позиция 2, то $\delta(v_0, v_1) = 2$. Тъй като v_1 и v_2 се различават в позиция 1, то $\delta(v_1, v_2) = 1$. Тъй като v_2 и v_3 се различават в позиция 3, то $\delta(v_2, v_3) = 3$. Също $\rho(v_0, v_3) = |\pi| = 3$.

Поради това: $s_{f,x}(\pi) = f(x_2, x_1) + f(x_1, x_3)$.

При $f(a, b) = (a - b)(a + b)$, функцията $s_{f,x}(\pi)$ за път $\pi = (v_0, v_1, \dots, v_m)$ изглежда така:

$$s_{f,x}(\pi) = \sum_{i=0}^{m-2} (x_{j_i} - x_{j_{i+1}})(x_{j_i} + x_{j_{i+1}}) \text{ където } j_i = \delta(v_i, v_{i+1}) \text{ за всяко } i < m - 1.$$

При $m < 2$, тази сума е тъждествено равна на 0, понеже в нея няма събираеми.