Решение на комбинирана контролна работа 2
по Алгебра 1

Задача 1. *Да се пресметне детерминантата*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & -1 & -1 & \dots & -2 & -1 \\ n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Решение: Умножаваме първия ред по $\frac{1}{2}$, прибавяме към всички останали редове и свеждаме към

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-3 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ n-2 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

За всяко $3 \leq i \leq n$ умножаваме i-тия стълб по $(i-2)$, прибавяме към първия стълб и получаваме

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -2+2\left[\sum_{i=3}^{n}(i-2)\right] & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left[-1+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right](-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}(n^2-3n) = (-1)^{n-1}n(n-3).$$

Задача 2. *Да се намери рангът на матрицата*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ p & 5 & -2 & -11 \\ -1 & p & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

в зависимост от стойностите на комплексния параметър $p \in \mathbb{C}$.

Решение: Записваме трети и четвърти стълб като първи и втори стълб без промяна на ранга на A и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & -11 & p & 5 \\ 0 & 5 & -1 & p \end{pmatrix}.$$

Изваждаме първия ред от втория. Прибавяме удвоения първия ред към третия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & p+2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & p \end{pmatrix}.$$

Изваждаме втория ред от третия. Прибавяме втория ред към четвъртия и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & p+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p+1 \end{pmatrix}.$$

Ако $p = -1$, горната матрица е равна на

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и има ранг 2. За $p \neq -1$, делим трети и четвърти ред на $p+1 \neq 0$ и получаваме матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с ранг 4. По този начин получихме, че за $p = -1$ матрицата A има ранг $\mathrm{rk}(A) = 2$. Ако $p \neq -1$, то $\mathrm{rk}(A) = 4$.

Задача 3. *Кои от следните твърдения са в сила за изображението φ на пространството $\mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$ на полиномите на x от степен ≤ 3 с реални коефициенти:*

(i) $\varphi : \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(f(x)) = (f(1), f'(-3))$, $\forall f(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$ *е линейно изображение;*

(ii) $\varphi : \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_1, a_2 + 2, a_3 + 3)$, $\forall a_i \in \mathbb{R}$ *е линейно изображение;*

(iii) $\varphi : \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)} \to \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$,

$$\varphi(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_3 - 2a_2)x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad \forall a_i \in \mathbb{R}$$

е линеен оператор;

(iv) $\varphi : \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)} \to \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$,

$$\varphi(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_3x^3 + a_0x^2 + a_1x + a_2, \quad \forall a_i \in \mathbb{R}$$

е линеен оператор;

(v) $\varphi : \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)} \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(f(x)) = (f(0) - 1, f'(2)), \quad \forall f(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$$

е линейно изображение;

(vi) $\varphi : \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)} \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_0, a_1, a_3), \quad \forall a_i \in \mathbb{R}$$

е линейно изображение;

(vii) $\varphi : \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)} \to \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$,

$$\varphi(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_3x^3 + (a_2 - 2)x^2 + a_1x + a_0, \quad \forall a_i \in \mathbb{R}$$

е линеен оператор;

(viii) $\varphi : \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)} \to \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$,

$$\varphi(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_1 + 1)x^3 + a_2x^2 + (a_3 - 3)x + a_0, \quad \forall a_i \in \mathbb{R}$$

е линеен оператор.

Решение: (i) За произволни $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ е в сила

$$\begin{aligned}\varphi(f(x) + g(x)) = ((f+g)(1), (f+g)'(-3)) = (f(1) + g(1), f'(-3) + g'(-3)) = \\ = (f(1), f'(-3)) + (g(1), g'(-3)) = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x)) \quad \text{и}\end{aligned}$$

$$\varphi(\lambda f(x)) = ((\lambda f)(1), (\lambda f)'(-3)) = (\lambda f(1), \lambda f'(-3)) = \lambda(f(1), f'(-3)) = \lambda\varphi(f(x)).$$

Това доказва, че φ от (i) е линейно изображение.

(ii) Ако $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} a_ix^i, g(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} b_ix^i \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$, то

$$\begin{aligned}\varphi(f(x) + g(x)) = \varphi\left(\sum_{i=9}^{3}(a_i + b_i)x^i\right) = \\ = (a_1 + b_1, a_2 + b_2 + 1, a_3 + b_3 + 3) \neq (a_1 + b_1, a_2 + b_2 + 2, a_3 + b_3 + 6) = \\ = (a_1, a_2 + 1, a_3 + 3) + (b_1, b_2 + 1, b_3 + 3) = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x)),\end{aligned}$$

така че φ от (ii) не е линейно изображение.

(iii) За произволни $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} a_ix^i, g(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} b_ix^i \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ е в сила

$$\begin{aligned}\varphi(f(x) + g(x) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{3}(a_i + b_i)x^i\right) = \\ = [(a_3 + b_3) - 2(a_2 + b_2)]x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) = \\ = \left[(a_3 - 2a_2)x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\right] + \left[(b_3 - 2b_2)x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0\right] = \\ = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x))\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f(x)) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{3}(\lambda a_i)x^i\right) = \\ = \left[(\lambda a_3) - 2(\lambda a_2)\right]x^3 + (\lambda a_2)x^2 + (\lambda a_1)x + (\lambda a_0) = \\ = \lambda\left[(a_3 - 2a_2)x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\right] = \lambda\varphi(f(x)).\end{aligned}$$

Следователно φ от (iii) е линеен оператор.

(iv) За произволни $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i x^i, g(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} b_i x^i \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ е изпълнено

$$\begin{aligned}\varphi(f(x)+g(x)) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{3}(a_i+b_i)x^i\right) = \\ = (a_3+b_3)x^3 + (a_0+b_0)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2) = \\ = \left(a_3x^3 + a_0x^2 + a_1x + a_2\right) + \left(b_3x^3 + b_0x^2 + b_1x + b_2\right) = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x))\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f(x)) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{3}(\lambda a_i)x^i\right) = \\ = (\lambda a_3)x^3 + (\lambda a_0)x^2 + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2) = \lambda\left(a_3x^3 + a_0x^2 + a_1x + a_2\right) = \lambda\varphi(f(x)).\end{aligned}$$

Това доказва, че φ от (iv) е линеен оператор.

(v) Ако $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$, то

$$\begin{aligned}\varphi(f(x)+g(x)) = ((f+g)(0)-1, (f+g)'(2)) = (f(0)+g(0)-1, f'(2)+g'(2)) \neq \\ \neq (f(0)+g(0)-2, f'(2)+g'(2)) = \\ = (f(0)-1, f'(2)) + (g(0)-1, g'(2)) = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x))\end{aligned}$$

показва, че φ от (v) не е линейно изображение.

(vi) За произволни $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i x^i, g(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} b_i x^i \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имаме

$$\begin{aligned}\varphi(f(x)+g(x)) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{3}(a_i+b_i)x^i\right) = (a_0+b_0, a_1+b_1, a_3+b_3) = \\ = (a_0, a_1, a_3) + (b_0, b_1, b_3) = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x))\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f(x)) = \varphi\left(\sum(\lambda a_i)x^i\right) = (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_3) = \\ = \lambda(a_0, a_1, a_3) = \lambda\varphi(f(x)),\end{aligned}$$

така че φ от (vi) е линейно изображение.

(vii) За произволни $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{3} a_i x^i, g(x)=\sum\limits_{i=0}^{3} b_i x^i \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$ е изпълнено

$$\begin{aligned}
\varphi(f(x)+g(x)) &= \varphi\left(\sum_{i=0}^{3}(a_i+b_i)x^i\right)= \\
&= (a_3+b_3)x^3+(a_2+b_2-2)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\neq \\
&\neq \big[(a_3+b_3)x^3+(a_2+b_2-4)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\big]= \\
&= \big[a_3x^3+(a_2-2)x^2+a_1x+a_0\big]+\big[b_3x^3+(b_2-2)x^2+b_1x+b_0\big]=\varphi(f(x))+\varphi(g(x)),
\end{aligned}$$

откъдето φ от (vii) не е линеен оператор.

(viii) Ако $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{3} a_i x^i, g(x)=\sum\limits_{i=0}^{3} b_i x^i \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$, то

$$\begin{aligned}
\varphi(f(x)+g(x)) &= \varphi\left(\sum_{i=0}^{3}(a_i+b_i)x^I\right)= \\
&= [(a_1+b_1)+1]x^3+(a_2+b_2)x^2+[(a_3+b_3)-3]x+(a_0+b_0)\neq \\
&\neq (a_1+b_1+2)x^2+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3-6)x+(a_0+b_0)= \\
&= \big[(a_1+1)x^3+a_2x^2+(a_3-3)x+a_0\big]+\big[(b_1+1)x^3+b_2x^2+(b_3-3)x+b_0\big]= \\
&= \varphi(f(x))+\varphi(g(x))
\end{aligned}$$

показва, че φ от (viii) не е линеен оператор.