Бинока, ИМ0800106 КР #2

Задача 1) $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,\ 3^{-c}b+3^{-a}d)$

ще докажем, че $(\mathbb{R}^2,\oplus)$ е група:

1. Нулевият елемент е $(0,0)\in\mathbb{R}^2$

$$(a,b)\oplus(0,0)=(a+0,\ 3^{0}\cdot b+3^{-a}\cdot 0)=(a,b)$$

2. Обратният елемент на (a,b) е $(-a,-3^{2a}b)\in\mathbb{R}^2$

$$(a,b)\oplus(-a,3^{2a}b)=(a+(-a),\ 3^{-(-a)}b+3^{-a}(-3^{2a}b))=$$

$$=(0,\ 3^{a}b-3^{a}b)=(0,0)$$

~~3. Нека вземем $(a_1,b_1)\in\mathbb{R}, (a_2,b$~~

3. Нека вземем $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)\in\mathbb{R}^2$, и да док. асоц.

$$((a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2))\oplus(a_3,b_3)=(a_1+a_2,\ 3^{-a_2}b_1+3^{-a_1}b_2)\oplus(a_3,b_3)=$$

$$=((a_1+a_2)+a_3),\ (3^{-a_3}(3^{-a_2}b_1+3^{-a_1}b_2)+3^{-(a_1+a_2)}b_3))=$$

$$=(a_1+(a_2+a_3),\ 3^{-(a_3+a_2)}b_1+3^{-a_1}(3^{-a_3}b_2+3^{-a_2}b_3))=$$

$$=(a_1,b_1)\oplus(a_2+a_3,\ 3^{-a_3}b_2+3^{-a_2}b_3)=$$

$$=(a_1,b_1)\oplus((a_2,b_2)\oplus(a_3,b_3))$$

Доказахме, че $(\mathbb{R}^2,\oplus)$ е група, сега да разгледаме защо е абелева. Трябва да док., че $ab=ba$:

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,\ 3^{-c}b+3^{-a}d)=(c+a,\ 3^{-a}d+3^{-c}b)=$$

$$=((c,d)\oplus(a,b))$$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^2, \oplus)$ е абелева група

$$-(4,5) = (-4, -3^{2\cdot 4} \cdot 5) = (-4, -3^8 \cdot 5)$$

Проверка:

$$(4,5) \oplus (-4, -3^8 \cdot 5) = (4 - 4, 3^4 \cdot 5 + 3^{-4} \cdot (-3^8 \cdot 5)) =$$

$$= (0, 3^4 \cdot 5 - 3^4 \cdot 5) = (0, 0)$$

Бильяна, 4 MI0800108

Задача 2)

$$H=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z}_3,\ (a,b)\neq(\bar{0},\bar{0})\right\}$$

Ще докажем, че $(H,\cdot)$ е група

~~1. Нулевият елемент е~~

1. Единичният елемент е $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ (защото $a=1, b=0 \in \mathbb{Z}_3$)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

2. Обратният ел. на $A \in H$, принадлежи на H, док:

$\det A = a^2 + b^2$ $\left(A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right)$

Тв. $\det A \not\equiv 0 \pmod 3$

Ще разгледаме всички случаи за a и b, $a \leq b$

1) $a \equiv 0 \pmod 3$, $b \equiv 1 \pmod 3$
$\det A \equiv 1 \pmod 3$

2) $a \equiv 0$, $b \equiv 2$
$\det A \equiv 1$

3) $a \equiv 1$, $b \equiv 1$
$\det A \equiv 2$

4) $a \equiv 1$, $b \equiv 2$
$\det A \equiv 2$

5) $a \equiv 2$, $b \equiv 2$
$\det A \equiv 2$

Аналогично за $a > b$. $\Rightarrow \det A > 0$ ~~$\Rightarrow A$ същ~~
$\Rightarrow A^{-1}$ съществува

Сега да видим защо $A^{-1} \in H$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$(\det A)^{-1} \equiv x \pmod 3$$

~~Понеже~~ Понеже $\det A = 1$ или $\det A = 2$, и двете са взаимно прости с $3 \Rightarrow \det A$ има обратен ел. в $\mathbb{Z}_3$

$\varphi(3) = 2 \Rightarrow (\det A)^{-1} \equiv (\det A)^{2-1} \pmod 3$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \det A . a & -\det A . b \\ \det A . b & \det A . a \end{pmatrix}$$

$a' = \det A . a$, ~~$\det A . b$~~ $b' = -\det A . b$

$\left.\begin{matrix} a', b' \neq (\bar{0}, \bar{0}) \\ \text{и } a', b' \in \mathbb{Z}_3 \end{matrix}\right\}$ (защото $\det A \neq 0$ и $(a,b) \neq (\bar{0}, \bar{0})$)

$$\Downarrow \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} \in H$$

3. Асоциативност:

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ -b_3 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ -a_2b_1 - a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ -b_3 & a_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1b_3a_2 & \\ & \dots \end{pmatrix}$$

Понеже ~~събирането~~ умножението на матрици е асоц. $\Rightarrow$ и тук има асоциативност

Понеже матриците са само 8, ще разгледаме всички от кой ред са.

g	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&2\\-2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&\\-1&2\end{pmatrix}$
$r(g)$	1	4	2	4	8	8	8	8

Тъй като $r\left(\begin{pmatrix}2&2\\-2&2\end{pmatrix}\right) = 8 = |H| \Rightarrow H = \left\langle \begin{pmatrix}2&2\\-2&2\end{pmatrix} \right\rangle$

и H е циклична група

Подгрупи са:

$C_0 = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

$C_1 = C_0 \cup \left\{\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right\}$

$C_2 = C_0 \cup \left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}\right\}$

$C_3 = H$

Схемата на влагане е:

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[d] \\ C_2 \arrow[r] & C_3 \end{tikzcd}$$

Задача 3) $G = \langle g_0 \rangle$, $H = \langle h_0 \rangle$ цикл групи

$A = G \times H$, да докажем, че $(A, \cdot)$ е група

$(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in A$ и. ?

$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 \circ_H h_2)$

~~[illegible]~~

1. Единичният ел е (e_G, e_H)

$(g_1, h_1) \cdot (e_G, e_H) = (g_1 *_G e_G, h_1 \circ_H e_H) = (g_1, h_1)$

2. Обратния ел на (g_1, h_1) е (g_1^{-1}, h_1^{-1})

$(g_1, h_1)(g_1^{-1}, h_1^{-1}) = (g_1 *_G g_1^{-1}, h_1 \circ_H h_1^{-1}) = (e_G, e_H) = e_A$

3. Асоциативността ~~[illegible]~~ следва от асоц. на $*_G$ и $\circ_H$

$\Rightarrow$ A е група

~~$A = \langle (g_0, h_0) \rangle$~~

~~Понеже $|G|$ и $|H|$ са взаимн~~

Нека $g = |G|$ и $h = |H|$ и

ще докажем, че $A = \langle (g_0, h_0) \rangle$

$\Leftrightarrow A = \{ (g_0, h_0)^k \mid k \in \mathbb{N} \}$

$\Leftrightarrow A = \{ (g_0^k, h_0^k) \mid k \in \mathbb{N} \}$

Тъй като $A = G \times H \Rightarrow |A| = |G||H|$

Остава да покажем, че $r((g_0, h_0)) = |G||H|$
откъдето ще следва, че $A = \langle (g_0, h_0) \rangle$

Нека $k \in N$, такова че $(g_0^k, h_0^k) = (e_G, e_H)$

$\Leftrightarrow g_0^k = e_G$ и $h_0^k = e_H$

$\Leftrightarrow |G| \mid k$ и $|H| \mid k$

$\Leftrightarrow [|G|, |H|] \mid k$

$\Leftrightarrow |G||H| \mid k$

Най-малкото такова $k > 0$ е $|G||H|$

$\Rightarrow A = \langle (g_0, h_0) \rangle$

~~Тъй като~~ $\cancel{|A| = g.h}$ ~~и~~ $\cancel{A}$

$\Rightarrow G \times H$ е циклична група от ред $|G||H|$