

## 32. Смяна на променливите в определения интеграл на функция на две променливи

## Трансформации в равнината

Нека  $O \subseteq \mathbb{R}^2$  е отворено. Казваме, че изображението  $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^2$  е гладко, ако координатните му функции притежават непрекъснати първи частни производни, т.е. ако

$$\Phi(u, v) := (\varphi(u, v), \psi(u, v)), \quad (1)$$

то  $\varphi'_u(u, v)$ ,  $\varphi'_v(u, v)$ ,  $\psi'_u(u, v)$  и  $\psi'_v(u, v)$  са непрекъснати в  $O$ .

Казваме, че  $\Phi(u, v)$  е инективно (обратимо), ако

$$(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1)) \neq (\varphi(u_2, v_2), \psi(u_2, v_2))$$

при  $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ . (2)

В такъв случай още казваме, че е дадена гладката инективна (обратима) трансформация

$$\Phi : \begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v). \end{cases} \quad (3)$$

## Теорема

Нека  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  е измерим компакт и  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъснатата. Нека  $D' \subset \mathbb{R}^2$  е също измерим компакт и  $\Phi(u, v) := (\varphi(u, v), \psi(u, v))$  е гладко инективно изображение, дефинирано в отворено множество  $O \supset D'$ , като  $\Phi(D') = D$ . Тогава

$$\iint_D F(x, y) \, dx dy = \iint_{D'} F(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J_\Phi(u, v)| \, du dv, \quad (4)$$

където

$$J_\Phi(u, v) := \begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \varphi'_v(u, v) \\ \psi'_u(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix}. \quad (5)$$

$J_\Phi(u, v)$  се нарича якобиан на трансформацията  $\Phi$ .

## Схема на д-вото

Ще предположим, че  $J_{\Phi}(u, v) \neq 0$  в  $D'$ .

Нека  $\tau' := \{D'_i\}_{i=1}^n$  е измеримо разбиване на  $D'$  и  $(u_i, v_i) \in D_i'^o$ .

Благодарение на ф-лата за крайните нараствания (тема 24, т-ма 4) имаме

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= \varphi(u_i, v_i) + \varphi'_u(u_i + \theta_i h, v_i + \theta_i k)h + \varphi'_v(u_i + \theta_i h, v_i + \theta_i k)k, \\ \psi(u, v) &= \psi(u_i, v_i) + \psi'_u(u_i + \eta_i h, v_i + \eta_i k)h + \psi'_v(u_i + \eta_i h, v_i + \eta_i k)k,\end{aligned}$$

където  $h := u - u_i$ ,  $k := v - v_i$  и  $\theta_i, \eta_i \in (0, 1)$ .

Ако  $\text{diam } D'_i$  е малък, то  $h$  и  $k$  ще бъдат близки до  $0$ ; тогава поради непрекъснатостта на частните производни имаме

$$\begin{aligned}\varphi'_u(u_i + \theta_i h, v_i + \theta_i k) &\approx \varphi'_u(u_i, v_i), & \varphi'_v(u_i + \theta_i h, v_i + \theta_i k) &\approx \varphi'_v(u_i, v_i), \\ \psi'_u(u_i + \eta_i h, v_i + \eta_i k) &\approx \psi'_u(u_i, v_i), & \psi'_v(u_i + \eta_i h, v_i + \eta_i k) &\approx \psi'_v(u_i, v_i).\end{aligned}$$

Следователно образът при трансформацията  $\Phi$  е близък до образа на линейната трансформация  $L(u, v) := (\ell_1(u, v), \ell_2(u, v))$ , където

$$\ell_1(u, v) := \varphi(u_i, v_i) + \varphi'_u(u_i, v_i)(u - u_i) + \varphi'_v(u_i, v_i)(v - v_i), \quad (6)$$

$$\ell_2(u, v) := \psi(u_i, v_i) + \psi'_u(u_i, v_i)(u - u_i) + \psi'_v(u_i, v_i)(v - v_i). \quad (7)$$

Понеже  $J_{\Phi}(u_i, v_i) \neq 0$ , то  $L$  трансформира всеки правоъгълник в успоредник. Понеже трансляцията запазва лицето, можем да считаме, че свободните членове в  $L$  са  $0$ . Тогава, ако правоъгълникът  $\Pi$  е определен от векторите  $\vec{a} := (a_1, a_2)$  и  $\vec{b} := (b_1, b_2)$ , то  $L(\Pi)$  е успоредник, определен от векторите  $\vec{c} := L(\vec{a}) = (\ell_1(a_1, a_2), \ell_2(a_1, a_2))$  и  $\vec{d} := L(\vec{b}) = (\ell_1(b_1, b_2), \ell_2(b_1, b_2))$ .

Лицето на този успоредник се дава от

$$\begin{aligned} |\vec{c} \times \vec{d}| &= \text{abs} \left( \begin{vmatrix} \ell_1(a_1, a_2) & \ell_2(a_1, a_2) \\ \ell_1(b_1, b_2) & \ell_2(b_1, b_2) \end{vmatrix} \right) = |J_{\Phi}(u_i, v_i)| \text{abs} \left( \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= |J_{\Phi}(u_i, v_i)| S(\Pi), \end{aligned} \quad (8)$$

където  $S(\Pi)$  е лицето на  $\Pi$ .

Така установихме, че  $\mu(L(\Pi)) = |J_{\Phi}(u_i, v_i)| \mu(\Pi)$ .

Следователно за всяка елементарна фигура  $E$  имаме  $\mu(L(E)) = |J_{\Phi}(u_i, v_i)| \mu(E)$ .

Оттук може да се покаже, че  $\Phi(D'_i)$  е измеримо и

$$\mu(\Phi(D'_i)) \approx |J_\Phi(u_i, v_i)| \mu(D'_i). \quad (9)$$

Тогава  $\tau := \{\Phi(D'_i)\}_{i=1}^n$  е измеримо разбиване на  $D$  и с  $(x_i, y_i) := \Phi(u_i, v_i)$  имаме

$$\begin{aligned} R_\tau(F) &:= \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i) \mu(\Phi(D'_i)) \\ &\approx \sum_{i=1}^n F(\Phi(u_i, v_i)) |J_\Phi(u_i, v_i)| \mu(D'_i) =: R_{\tau'}(F(\Phi) |J_\Phi|). \end{aligned} \quad (10)$$

Остава да използваме, че

$$\lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} R_\tau(F) = \iint_D F(x, y) \, dx dy \quad (11)$$

и

$$\lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} R_{\tau'}(F(\Phi) |J_\Phi|) = \iint_{D'} F(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J_\Phi(u, v)| \, du dv. \quad (12)$$