Колинеарност и компланарност на вектори чрез координати

Координати спрямо базис в линейно пространство (припомняне)

Нека V е n-мерно реално линейно пространство и $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на V.

Определение 1 Нека $v \in V$. Тогава v се представя по единствен начин като линейна комбинация на базисните вектори: $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Коефициентите $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ в тая линейна комбинация се наричат *координати на v спрямо базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$*. Пишем $v(x_1, \dots, x_n)$.

Векторът $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ се нарича *координатен вектор на v спрямо e*.

Изображението

$$\varkappa_e : V \to \mathbb{R}^n : \quad v \mapsto x$$

се нарича *координатно изображение съответно на базиса e*.

Забележка 1 Разглеждайки $e = (e_1, \dots, e_n)$ като вектор-ред, а $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ като вектор-стълб и считайки, че вектор може да се умножава с число отдясно, получаваме, че равенството $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ може да се запише в матричен вид като $v = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, тоест $v = e.x$. Следователно координатното изображение се задава с $\varkappa_e(e.x) = x$.

Пример 1 $\varkappa_e(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Пример 2 Нека $e^0 = (e^0_1, \dots, e^0_n)$ е *стандартният базис на $\mathbb{R}^n$*, тоест

$$e^0_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \ , \quad i = 1, \dots, n$$

(i-тата компонента на e^0_i е 1, всички останали са 0).

Тогава за $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ имаме $x = x_1 e_1^0 + \cdots + x_n e_n^0$. Следователно координатите спрямо стандартния базис са си компонентите на вектора. В частност, координатното изображение $\varkappa_{e^0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е $\varkappa_{e^0}(x) = x$, тоест $\varkappa_{e^0}$ е тъждественото изображение на $\mathbb{R}^n$.

Твърдение 1 *Ако координатните вектори спрямо базиса e на $u, v \in V$ са съответно $x, y \in \mathbb{R}^n$, то $u = v \Leftrightarrow x = y$.*

Следствие 1 *Координатното изображение $\varkappa_e : V \to \mathbb{R}^n$ е биекция.*

Твърдение 2 *Нека координатните вектори спрямо базиса e на $u_1, \ldots, u_k, v \in V$ са съответно $x_1, \ldots, x_k, y \in \mathbb{R}^n$ и нека $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Тогава $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \Leftrightarrow y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$.*

Следствие 2 *Координатното изображение $\varkappa_e : V \to \mathbb{R}^n$ е линеен изоморфизъм.*

Следствие 3 *Нека координатните вектори спрямо базиса e на $u_1, \ldots, u_k \in V$ са съответно $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Тогава $u_1, \ldots, u_k$ са линейно зависими $\Leftrightarrow$ $x_1, \ldots, x_k$ са линейно зависими $\Leftrightarrow$ рангът на матрицата $X = (x_1 \ldots x_k)$ (със стълбове $x_1, \ldots, x_k$) е строго по-малък от k.*

Забележка 2 В направеното по-горе не се използват никакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че то важи и за линейни пространства над произволно поле F — навсякъде вместо $\mathbb{R}$ се пише F, тоест вместо реални числа се взимат елементи на F.

Колинеарност и компланарност чрез координати

Теорема 1 *Нека векторите u и v в геометричната равнина имат спрямо даден базис координати $u(x_1, x_2)$ и $v(y_1, y_2)$. Тогава u и v са колинеарни $\Leftrightarrow$ рангът на матрицата от координатите им $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2 $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$.*

Доказателство: u и v са колинеарни $\Leftrightarrow$ (от предишния въпрос) са линейно зависими $\Leftrightarrow$ (от Следствие 3) рангът на матрицата от координатите им $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2. С това е доказана първата еквивалентност.

Рангът на $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2 $\Leftrightarrow$ всичките ѝ минори от ред 2 са 0. Тъй като матрицата е 2×2, то тя има единствена подматрица 2×2, а именно цялата матрица, и следователно единствен минор от ред 2, а именно детерминантата на цялата матрица. Значи рангът на $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2 $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$. С това е доказана и втората еквивалентност. □

Теорема 2 *Нека векторите u и v в геометричното пространство имат спрямо даден базис координати $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава u и v са колинеарни $\Leftrightarrow$ рангът на матрицата от координатите им $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2 $\Leftrightarrow$ $\det\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = 0$, $\det\begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} = 0$, $\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$.*

Доказателство: u и v са колинеарни $\Leftrightarrow$ (от предишния въпрос) са линейно зависими $\Leftrightarrow$ (от Следствие 3) рангът на матрицата от координатите им $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2. С това е доказана първата еквивалентност.

Рангът на $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2 $\Leftrightarrow$ всичките ѝ минори от ред 2 са 0. Тъй като матрицата е 3×2, то за да получим подматрица 2×2, трябва да вземем и двата стълба, а от редовете да махнем един. Следователно има три подматрици 2×2, а именно получените чрез махането съответно на първи, втори и трети ред, така че и минорите от ред 2 са три — техните детерминанти. Значи рангът на $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2 $\Leftrightarrow$ $\det\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = 0$, $\det\begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} = 0$, $\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$.
(Тук във втората матрица съм написал първо третия ред, а след това първия, а не първо първия ред, а след това третия, както се получава при махането на втория ред. Това в случая няма значение, защото при размяна на двата реда знакът на детерминтата се сменя, а тук ни интересува условието детерминантата да е 0, за което смяната на знака не играе роля. Направил съм го за да тренираме за в бъдеще, където координатите на векторното произведение са тия три детерминанти, написани точно по тоя начин.) С това е доказана и втората еквивалентност. $\square$

Теорема 3 *Нека векторите u, v, w в геометричното пространство имат спрямо даден базис координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$. Тогава u, v, w са компланарни $\Leftrightarrow$ рангът на матрицата от координатите им $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 3 $\Leftrightarrow$ $\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$.*

Доказателство: u, v, w са компланарни $\Leftrightarrow$ (от предишния въпрос) са линейно зависими $\Leftrightarrow$ (от Следствие 3) рангът на матрицата от координатите им $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 3. С това е доказана първата еквивалентност.

Рангът на $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 3 $\Leftrightarrow$ всичките ѝ минори от ред 3 са 0. Тъй като матрицата е 3×3, то тя има единствена подматрица 3×3, а именно цялата матрица, и следователно единствен минор от ред 3, а именно детерминантата на цялата матрица. Значи рангът на $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 3 $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$. С това е доказана и втората еквивалентност. $\square$