Лекция 1: Интерполационна задача на Лагранж

Гено Николов, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски"

Съдържание на лекцията

- Интерполационна задача на Лагранж
- Интерполационна формула на Лагранж
- Представяне на остатъка във формулта на Лагранж

Интерполационна задача на Лагранж

Ще разгледаме следната интерполационна задача (ИЗ). Нека $x_0, \ldots, x_n$ са различни точки и $y_0, \ldots, y_n$ са дадени реални числа. Да се построи алгебричен полином $P(x)$ от степен $\leq n$, който удовлетворява условията

$$P(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{1}$$

С други думи, при дадени $n+1$ точки $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$ в равнината, търсим полином P от степен n, чиято графика минава през дадените точки (x_k, y_k), $k = 0, \ldots, n$. В случая $n = 1$ това е задачата за намиране на уравнение на права линия минаваща през две точки.

Съществуване и единственост на решението

Да отбележим най-напред, че ако изобщо съществува решение на интерполационната задача (1), то трябва да е единствено. Наистина, да допуснем, че има два полинома P и Q от степен n, които удовлетворяват (1). Тогава тяхната разлика

$$R(x) := P(x) - Q(x)$$

ще бъде също полином от степен $\leq n$ и освен това

$$R(x_k) = P(x_k) - Q(x_k) = y_k - y_k = 0$$

за $k = 0, \ldots, n$. И така, R е полином от степен n, който се анулира в $n + 1$ точки. Тогава, по основната теорема на алгебрата, $R(x)$ е тъждествено равен на 0. Следователно $P \equiv Q$.

Съществуване и единственост: друго доказателство

Съществуването и единствеността на решението на (1) се виждат и по следния начин. Да запишем полинома $P(x)$ в общия му вид

$$P(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n.$$

Тогава условието (1) добива вида

$$\begin{aligned}
a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_0 + a_n &= y_0 \\
a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_1 + a_n &= y_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\ \cdots \ \cdots \\
a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_n + a_n &= y_n.
\end{aligned}$$

Това е една система от $n+1$ линейни уравнения по отношение на неизвестните $a_0, \ldots, a_n$. Детерминантата на тази линейна система е

Съществуване и единственост: друго доказателство

$$V(x_0, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} x_0^n & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

Това е детерминанта на Вандермонд. От линейната алгебра знаем, че детерминантата на Вандермонд съответстваща на точките $x_0, \dots, x_n$ е различна от нула, ако $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Тъй като по условие точките $x_0, \dots, x_n$ в (1) са различни, $V(x_0, \dots, x_n) \neq 0$ и следователно системата, а оттук и задачата (1), има единствено решение. $\square$

Построяване на интерполационния полином

Означение.

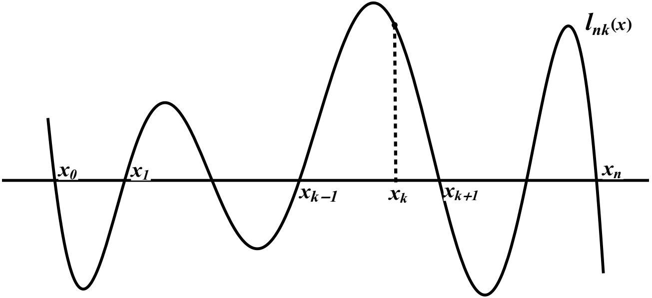
В продължение на този курс с π_n ще означаваме множеството от всички алгебрични полиноми от степен по-малка или равна на n.

За нас е важен въпросът за намиране в явен вид на полинома P, който решава интерполационната задача на Лагранж. Решението на (1) е било дадено в явен вид за първи път от Нютон. Тук ще дадем формулата за построяване на P, изведена от Лагранж, а в следваща лекция ще представим и решението на Нютон. Тъй като единствеността на решението P е очевидна, Лагранж пристъпва направо към построяването на това решение по следния остроумен начин.

Построяване на интерполационния полином

При фиксирано $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ да намерим полинома $\ell_{nk}(x)$ от π_n, който удовлетворява условията

$$\begin{aligned} \ell_{nk}(x_i) &= 0 \quad \text{за} \quad i = 0, \ldots, n, \quad i \neq k, \\ \ell_{nk}(x_k) &= 1. \end{aligned}$$



Фигура: Графика на базисния полином $\ell_{nk}(x)$.

Построяване на интерполационния полином (продълж.)

Първото условие означава, че точките $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ са нули на ℓ_{nk} (виж чертежа). Тъй като те са точно n на брой и ℓ_{nk} е полином от степен n, това са всичките нули на ℓ_{nk}. Тогава ℓ_{nk} може да се запише така

$$\ell_{nk}(x) = A(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n),$$

където A е някакво число. Това число ще определим от последното условие $\ell_{nk}(x_k) = 1$. Имаме

$$1 = \ell_{nk}(x_k) = A(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n).$$

Следователно

$$A = \frac{1}{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)}.$$

Построяване на интерполационния полином (продълж.)

Окончателно получихме

$$\ell_{nk}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}. \quad (2)$$

$\{\ell_{nk}\}_{k=0}^{n}$ се наричат базисни полиноми на Лагранж. Ще покажем, че решението $P(x)$ на ИЗ (1) се дава с формулата

$$\boxed{P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k\,\ell_{nk}(x).} \quad (3)$$

По построение, $\ell_{nk}(x_i) = \delta_{ki} := \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k = i \\ 0 & \text{при} \quad k \neq i. \end{cases}$ Тогава, за всяко $i = 0, 1, \dots, n$,

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k\,\ell_{nk}(x_i) = y_i\,\ell_{ni}(x_i) = y_i.1 = y_i\,.$$

Построяване на интерполационния полином (продълж.)

И така, полиномът (3) е от π_n (защото $\ell_{nk} \in \pi_n$ за всяко k) и удовлетворява интерполационните условия (1).
Следователно $P(x)$, даден в (3), е решението на ИЗ (1) (напомняме, че това решение е единствено).
Когато $\{y_k\}_{k=0}^n$ са стойности на някаква функция $f(x)$ в точките $x_0, \ldots, x_n$, т.е.

$$y_k = f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n\,,$$

решението на интерполационната задача

$$P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n,$$

се бележи с $L_n(f; x)$ и се нарича интерполационен полином по Лагранж за функцията f с възли $x_0, \ldots, x_n$. Казваме още, че $L_n(f; x)$ интерполира $f(x)$ в точките $x_0, \ldots, x_n$.

Теорема

И така, доказахме следната теорема.

Теорема 1.

Нека $x_0 < \cdots < x_n$ и функцията $f(x)$ е определена в тези точки. Тогава съществува единствен полином от π_n, който интерполира f в $x_0, \ldots, x_n$. Този полином се представя по формулата :

$$\boxed{L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.} \tag{4}$$

Теоремата следва веднага от (3), отчитайки, че съгласно (2),

$$\ell_{nk}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Интерполационна формула на Лагранж

Формулата (4) се нарича интерполационна формула на Лагранж.

Често ще използваме един по-кратък запис за ℓ_{nk}. Той следва от връзката

$$\omega'(x_k) = (x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n),$$

където

$$\omega(x) := (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\,.$$

Тази връзка се проверява директно, като се диференцира $\omega(x)$ и в $\omega'(x)$ се положи $x = x_k$. Тогава очевидно

$$\ell_{nk}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)}$$

и следователно

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\,\frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)}\,.$$

Грешка на интерполационния полином

Обикновено интерполационният полином $L_n(f;x)$ се използва за приближение на по-сложна функция $f(x)$. Възниква въпросът: Какво можем да кажем за грешката при това приближение, т.е. какво можем да кажем за разликата

$$R_n(f;x) := f(x) - L_n(f;x)$$

в някаква отнапред избрана точка x ?

Да обърнем внимание, че полиномът $L_n(f;x)$ е построен само въз основа на точките $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^n$. Но през тези същите точки минават графиките на безброй други непрекъснати функции $g(x)$ и очевидно за тях ще имаме $L_n(g;x) \equiv L_n(f;x)$. За всяко дадено число $C > 0$, можем да построим непрекъсната функция g от разглеждания клас такава че $g(x) - L_n(f;x) \geq C$. С други думи, грешката може да бъде произволно голяма, ако нищо друго не предполагаме за функцията освен това, че е непрекъсната.

Представяне на остатъка при интерполиране

Теорема 2.

Нека $[a, b]$ е даден краен интервал и $x_0, \dots, x_n$ са различни точки в него. Нека функцията $f(x)$ има непрекъсната $(n+1)$-ва производна в $[a, b]$. Тогава за всяко $x \in [a, b]$ съществува точка $\xi \in [a, b]$ такава, че

$$f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

(По-точно, $\xi \in (\min\{x, x_0, \dots, x_n\},\ \max\{x, x_0, \dots, x_n\})$.)

Доказателство на Теорема 2

Доказателство. Да образуваме помощната функция

$$F(t) = f(t) - L_n(f;t) - C(t-x_0)\dots(t-x_n),$$

където C е параметър. Веднага се вижда, че $F(t)$ се анулира в точките $x_0,\dots,x_n$ при всеки избор на C. Наистина

$$F(x_k) = f(x_k) - L_n(f;x_k) - C.0 = f(x_k) - f(x_k) = 0.$$

Сега да изберем константата C така, че $F(t)$ да се анулира и в точката $t = x$. От равенството

$$f(x) - L_n(f;x) - C(x-x_0)\dots(x-x_n) = 0$$

определяме

$$C = \frac{R_n(f;x)}{(x-x_0)\dots(x-x_n)}. \tag{5}$$

Доказателство на Теорема 2 (продължение)

При този избор на C, $F(t)$ има поне $n+2$ различни нули в $[a,b]$. Това са точките x, $x_0, x_1, \ldots, x_n$. По теоремата на Рол, F' ще има поне $n+1$ нули, които лежат в интервала $(\min\{x, x_0, \ldots, x_n\},\ \max\{x, x_0, \ldots, x_n\})$, F'' ще има поне n нули, и т.н., $F^{(n+1)}$ ще има поне една нула в този интервал. Да я означим с ξ. Имаме $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. От друга страна,

$$
\begin{aligned}
F^{(n+1)}(\xi) &= f^{(n+1)}(\xi) - L_n^{(n+1)}(f;\xi) - C(n+1)! \\
&= f^{(n+1)}(\xi) - C(n+1)!
\end{aligned}
$$

Следователно

$$C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,.$$

Като сравним това равенство с (5), получаваме

$$R_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n). \qquad \square$$

Оценка за грешката при интерполиране

Представянето на остатъка в интерполационната формула на Лагранж от Теорема 2 ни позволява да оценяваме грешката, която допускаме, замествайки функцията $f(x)$ с $L_n(f;x)$.

Следствие

Нека са изпълнени предположенията в Теорема 2, и нека

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \qquad \text{за всяко} \quad x \in [a,b]\,.$$

Тогава за всяко $x \in [a,b]$ е изпълнено неравенството

$$|f(x) - L_n(f;x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,|\omega(x)|\,.$$

Край на лекцията !