Полином на най-добро равномерно приближение

Нека $f(x)$ е непрекъсната функция в интервал $[a,b]$. Равномерна (Чебишова) норма в това пространство се определя с равенството: $\|f\| := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Равномерната норма поражда равномерно разстояние $\rho(f,g) := \|f-g\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$.

В метризираното по този начин пространство $C[a,b]$ търсим полином $p \in \pi_n$ на най-добро равномерно приближение. Величината

$$E_n(f) := inf \|f-p\|,\ p \in \pi_n$$

ще наричаме *най-добро равномерно приближение* на *f* с полиноми от степен *n.* Ако инфимумът се достига за някакъв полином $p_* \in \pi_n$, т.е. ако $\|f-p_*\| = E_n(f)$, то p_*се нарича *полином на най-добро равномерно приближение* в π_n.

Теорема на Чебишов за алтернанса: Нека $f(x)$ е произволна непрекъсната функция в интервала $[a,b]$. Необходимото и достатъчно условие полиномът $P \in \pi_n$ да бъде полином на най-добро равномерно приближение за f от *n*-та степен в $[a,b]$ е да съществуват *n* + 2 точки $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ от $[a,b]$ такива, че $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \le b$ и $f(x_i) - P(x_i) = (-1)^i\, \varepsilon \|f-P\|,\quad i=0,1,\ldots,n+1$,
където $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$.

Задача 1: Докажете, че ако $f(x)$ е четна (нечетна) функция за $x \in [-a,a]$, то и полиномът на най-добро равномерно приближение (ПНДРП) за $f(x)$ в $[-a,a]$ е също четен (нечетен).

Доказателство: доказателството на твърдението следва от единствеността на ПНДРП. Нека например функцията е четна, т. е. $f(x) = f(-x), \forall x \in [-a,a]$. Нека $P(x) \in \pi_n$ е ПНДРП за $f(x)$ в $[-a,a]$. Тогава

$$E_n(f) = \max_{x\in[-a,a]} |f(x)-P(x)| = \max_{x\in[-a,a]} |f(-x)-P(-x)| = \max_{x\in[-a,a]} |f(x)-P(-x)|$$

$=> P(-x)$ е също ПНДРП от n-та степен за $f(x)$ в $[-a,a]$. Но знаем, че ПНДРП е единствен

$$=> P(-x) \equiv P(x),$$

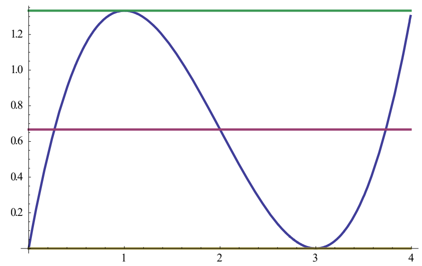
т. е. $P(x)$ е четен полином. Аналогично се доказва твърдението в случая на нечетна функция $f(x)$ в $[-a,a]$.

Задача 2: Нека $f(x) \in C[a,b]$. Да се намери ПНДРП от π_0 за $f(x)$ в $[a,b]$.

Решение: Тъй като $f(x) \in C[a,b] => \exists\ x_1$и $x_2 \in [a,b]$, за които функцията достига максимума и минимума си в този интервал. По Теоремата на Чебишов за алтернанса са необходими две точки на алтернанс. Тези точки са x_1и x_2. Тогава ПНДРП е

$$P(x) = \frac{1}{2}\big(f(x_1) + f(x_2)\big) = const \in \pi_0.$$

На долната графика са изчертани функцията $f(x)$ (в син цвят) и ПНДРП $P(x)$ (в тъмно червен цвят) за интервала $[0,4]$. Точките на алтернанс в конкретния пример са $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, а абсцисната ос и правата в зелен цвят образуват ивицата от успоредни прави, която $P(x)$ разполовява.



Задача 3: Нека $f(x) \in C^1[a,b]$ е изпъкнала (вдлъбната) в $[a,b]$. Да се намери ПНДРП от π_1 за $f(x)$ в $[a,b]$.

Решение: Нека функцията е изпъкнала в интервала. Това означава, че втората производна на функцията е положителна и следователно първата производна на функцията е монотонно растяща в интервала $[a,b]$. По Теоремата на Чебишов за алтернанса са необходими три точки на алтернанс $a \leq x_0 < x_1 < x_2 \leq b$. Нека $P(x) \in \pi_1$ е ПНДРП за $f(x)$ в $[a,b] \Rightarrow P(x) = Ax + B$. Допускаме, че две от точките на алтернанс $a < x_0 < x_1$ са вътрешни. От условието

$$f(x_0) - P(x_0) = P(x_1) - f(x_1) = \pm\|f - P\| \Rightarrow f'(x_0) - P'(x_0) = P'(x_1) - f'(x_1) = 0$$

И тъй като $P'(x) = A$ получаваме $f'(x_0) = f'(x_1) = A$, което е противоречие с монотонността на $f'(x)$. Следователно $x_0 = a$ и аналогично се доказва, че $x_2 = b$. От теоремата за крайните нараствания съществува точка $x_1 \in (a,b)$, такава че $f'(x_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, т. е. допирателната към $f(x)$ в точка x_1 е успоредна на хордата $\big(a, f(a)\big), \big(b, f(b)\big)$. Правата, която разполовява ивицата между двете успоредни прави е ПНДРП от π_1 за $f(x)$ в $[a,b]$. Ето и стъпките от алгоритъма за построяване на ПНДРП:

1) Построяваме правата $g(x) = L_1(f;x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$;
2) Намираме точка $x_1 \in (a,b)$: $f'(x_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$;
3) Построяваме ПНДРП от π_1 за $f(x)$ в $[a,b]$: $P(x) = g(x) - \frac{1}{2}\big(g(x_1) - f(x_1)\big)$.

Задача 4: Да се намери ПНДРП от π_1 за $f(x) = \sqrt{x}$ в $[0,1]$.

Решение: Проверяваме дали функцията има постоянна по знак втора производна, т. е. дали функцията е изпъкнала или вдлъбната. Ако е такава, то може да приложим алгоритъма от **Задача 3.**

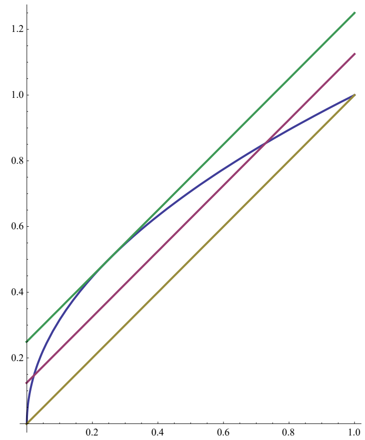
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0 \text{ в } (0,1],$$

следователно $f(x)$ е вдлъбната. Правата $g(x) = L_1(f;x) = x$.

Търсим $x_1 \in (0,1)$: $f'(x_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$,

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow P(x) = x - \frac{1}{2}\big(g(x_1) - f(x_1)\big) = x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = x + \frac{1}{8}; E_1(f) = \frac{1}{8}.$$

На графика виждаме функцията $f(x)$ (в син цвят) и ПНДРП $P(x)$ (в тъмно червен цвят). Точките на алтернанс са $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}$ и $x_2 = 1$, а правите в зелен и резидав цвят образуват ивицата от успоредни прави, която се разполовява от $P(x)$.



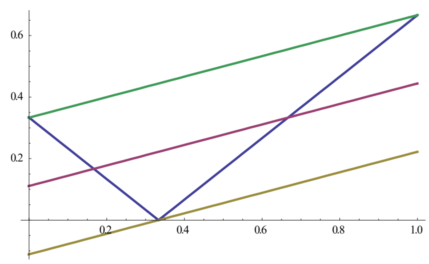
Задача 5: Да се намери ПНДРП от π_1 за $f(x) = \left|x - \frac{1}{3}\right|$ в $[0,1]$.

Решение: По Теоремата на Чебишов за алтернанса са необходими три точки на алтернанс $0 = x_0 < x_1 < x_2 = 1$. За $x = \frac{1}{3}$ функцията $f(x)$ има глобален минимум и в тази точка графиката на функцията е най-отдалечена от хордата $\big(0, f(0)\big), \big(1, f(1)\big)$ – интерполационния полином $L_1(f; x)$. Следователно вътрешната точка на алтернанс е $x_1 = \frac{1}{3}$.

Следваме първа и трета стъпка от алгоритъма от **Задача 3.** и получаваме

$$g(x) = L_1(f; x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3} => P(x) = g(x) - \frac{1}{2}\big(g(x_1) - f(x_1)\big) = \frac{x}{3} + \frac{1}{9}.$$

На графика са илюстрирани функцията $f(x)$ (в син цвят) и ПНДРП $P(x)$ (в тъмно червен цвят). Точките на алтернанс са $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = 1$, а правите в зелен и резидав цвят образуват ивицата от успоредни прави, която се разполовява от $P(x)$.



Задача 6: Да се намери ПНДРП от π_3 за $f(x) = |x|$ в $[-1,1]$.

Решение: По Теоремата на Чебишов за алтернанса са необходими пет точки на алтернанс $-1 \leq x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 1$. Функцията $f(x)$ е четна, интервалът е симетричен относно нулата и от **Задача 1.** следва, че ПНДРП $P(x)$ е също четен. Следователно ПНДРП за f от трета степен съвпада с ПНДРП за f от втора степен, т. е. $E_3(f) = E_2(f)$. Тогава $P(x) = Ax^2 + B$. От съображения за четност (симетрия) следва, че точките на алтернанс са разположени симетрично $x_0 = -x_4 = -1,\ x_1 = -x_3,\ x_2 = 0,\ x_4 = 1$. Тогава да разгледаме половината интервал $[0,1]$. Точките на алтернанс x_2, x_3 и x_4 удовлетворяват $P(0) - f(0) = f(x_3) - P(x_3) = P(1) - f(1)$. Точката x_3 е вътрешна точка на алтернанс (екстремум) и следователно $f'(x_3) - P'(x_3) = 0$. Заместваме в тези равенства и получаваме следната система от уравнения за коефициентите a и b на $P(x)$ и x_3:

$$\left|\begin{array}{c} A + B - 1 = B \\ x_3 - Ax_3^2 - B = B \\ 1 - 2Ax_3 = 0 \end{array}\right.$$

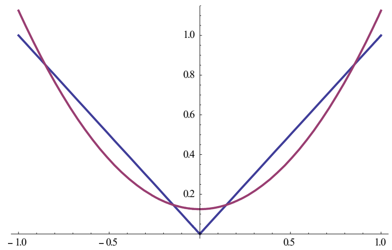
$$=> A = 1, x_3 = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{8},$$

$$=> P(x) = x^2 + \frac{1}{8}, E_2(f) = E_3(f) = \frac{1}{8}.$$

Ще използваме Wolfram Mathematica за да начертаем графиката на функцията $f(x)$ и полинома на най-добро равномерно приближение от трета степен $P(x)$ за f в интервала $[-1,1]$.

$$\mathrm{Plot}[\{\mathrm{Abs}[x], x\hat{}2 + 1/8\}, \{x, -1,1\}, \mathrm{PlotStyle} \to \mathrm{Thick}]$$

На графика е изобразена $f(x)$ (в син цвят) и $P(x)$ (в тъмно червен цвят). Разстоянието от координатното начало до върха на параболата е равно на $E_3(f) = \frac{1}{8}$.



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−1.0
−0.5
0.5
1.0