24. Локални и глобални екстремуми. Необходимо условие за локален екстремум — теорема на Ферма

Локални екстремуми

Дефиниция

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}$.

(а) Казваме, че x_0 е <u>точка на локален минимум</u> за $f(x)$, ако

$$\exists\, \delta > 0 : \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D \text{ и } f(x_0) \leq f(x), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{1}$$

Казваме, че x_0 е <u>точка на строг локален минимум</u> за $f(x)$, ако $f(x_0) < f(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$.

(б) Казваме, че x_0 е <u>точка на локален максимум</u> за $f(x)$, ако

$$\exists\, \delta > 0 : \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D \text{ и } f(x_0) \geq f(x), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{2}$$

Казваме, че x_0 е <u>точка на строг локален максимум</u> за $f(x)$, ако $f(x_0) > f(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$.

(в) Казваме, че x_0 е <u>точка на (строг) локален екстремум</u> за $f(x)$, ако тя е точка на (строг) локален минимум или максимум.

(г) Стойността на $f(x)$ в точка на локален минимум или максимум се наричат съответно локален минимум или максимум на $f(x)$.

Глобални екстремуми

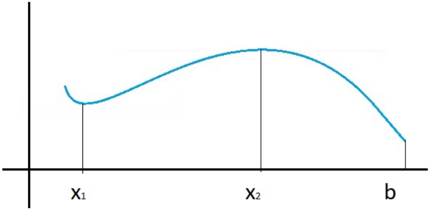
Дефиниция

(а) Казваме, че x_0 е <u>точка на глобален минимум</u> за функцията $f(x)$, ако $f(x)$ достига своята НМ стойност в x_0.
(б) Казваме, че x_0 е <u>точка на глобален максимум</u> за функцията $f(x)$, ако $f(x)$ достига своята НГ стойност в x_0.
(в) Казваме, че x_0 е <u>точка на глобален екстремум</u> за функцията $f(x)$, ако тя е точка на глобален минимум или максимум за $f(x)$.
(г) НМ и НГ стойност на $f(x)$ се наричат съответно нейни глобален минимум и максимум.

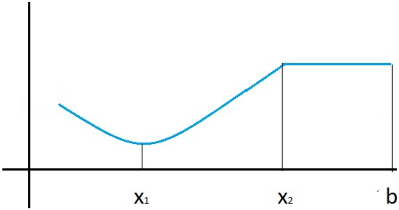
Бележка

Не всеки локален екстремум е глобален, нито всеки глобален екстремум е локален. Но всеки глобален екстремум, който се достига във вътрешна точка е и локален от същия вид.

Геометрични илюстрации



x_1 — (строг) локален мин., но не глобален
x_2 — (строг) локален и глобален макс.
b — (строг) глобален мин.



x_1 — (строг) локален и глобален мин.
$\forall x \in [x_2, b)$ — локален и глобален макс.
b — глобален макс.

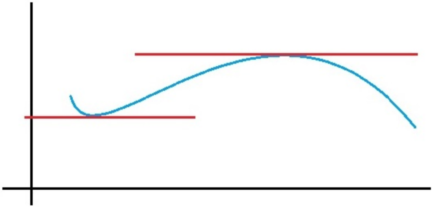
НУ за локален екстремум — теорема на Ферма

Теорема (НУ за лок. естр., Ферма)

Ако x_0 е точка на локален екстремум за функцията $f(x)$ и $f(x)$ е диференцируема в x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Бележка

Това означава, че допирателната към графиката на функция в нейна точка на локален екстремум е хоризонтална.



Решенията на уравнението

$$f'(x) = 0 \tag{3}$$

се наричат <u>критични точки</u> на $f(x)$.

Д-во на т-мата на Ферма

Понеже $f(x)$ е диференцируема в т. x_0, то съществува границата

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{4}$$

Нека x_0 е точка на локален минимум за $f(x)$. Тогава $\exists\, \delta > 0$ такова, че интервалът $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ се съдържа в дефиниционната област на ф-цията и

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{5}$$

Тогава за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, имаме

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0, & x \in (x_0 - \delta, x_0), \\ \geq 0, & x \in (x_0, x_0 + \delta). \end{cases} \tag{6}$$

От тези н-ва следва съответно, че

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \tag{7}$$

Понеже

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\leq 0} = \underbrace{\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0}, \tag{8}$$

то $f'(x_0)$ е както ≤ 0, така и ≥ 0; следователно е $= 0$.

Нека x_0 е точка на локален максимум за $f(x)$. Тогава x_0 е точка на локален минимум за $-f(x)$ и, според вече доказаното, $(-f)'(x_0) = 0$, т.е. $-f'(x_0) = 0$. Следователно $f'(x_0) = 0$.

Намиране на НГ и НМ стойност

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Т-ма на Вайерщрас $\implies$ $f(x)$ има НГ и НМ ст. Всяка една от тях се достига в край на интервала или във вътрешна точка. Ако това става във вътрешна точка, то тя непренно е точка на локален екстемум. Т-ма на Ферма $\implies$ тя е критична точка на $f(x)$.

Това дава възможност да намерим НГ и НМ стойност на $f(x)$, както и точките, в които се достигат по следната схема:

1. Намираме критичните точки на $f(x)$, т.е. намираме решенията на у-нието $f'(x) = 0$ в (a, b). Да ги означим с $x_1, x_2, \dots$
2. Тогава

$$f_{\text{НГ}} = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots\} \tag{9}$$

$$f_{\text{НМ}} = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots\} \tag{10}$$