4MI0800109

Задача 1

$$4x \equiv 33^{146} + 4^{151234231} \cdot 7^{2124835} + 11 \pmod{28}$$

28 | 2
14 | 2
7 | 7

$$\varphi(28) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(7) = 2 \cdot 6 = 12$$

$$4x \equiv \underbrace{(5^{12})^{12}}_{1} \cdot 5^2 + \underbrace{(4^{12})^{12602952}}_{1} \cdot 4^7 \cdot \underbrace{(7^{12})^{177069}}_{1} \cdot 7^7 + 11 \pmod{28}$$

$$\Leftrightarrow 4x \equiv 5^2 + 4^7 \cdot 7^7 + 11 \pmod{28}$$

$$\Leftrightarrow 4x \equiv 25 + 11 + \cancel{16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 49 \cdot 49 \cdot 7} + 11 \equiv$$

$$\equiv 36 + 256 \cdot 64 \cdot 2401 \cdot 343 \equiv$$

$$\equiv 8 + 4096 \cdot 0 \equiv 8 \pmod{28}$$

$$\Leftrightarrow 4x \equiv 8 \pmod{28}$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow x = 7y + 2$$

ИМI0800106

Задача 3) $\varphi(n) = 30$

$\exists\, p_1 \dots p_k$ (прости) $: \varphi(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) = 30 = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \dots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$

$\alpha_i > 0$

Сега ще разгледаме всички делители на 30 и от тях ще опитаме да открием, такива които като прибавим едно, числото е просто

Поест p е просто и $(p-1)/30$

Делителите са:

$\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

От тях филтрираме ~~непростите~~ $d+1$ да е просто.

$\{1, 2, 6, 10, 30\}$

Понеже в простите дел. на 30, никое не е на някоя степен $\Rightarrow \alpha_i = 1$

Нека разгледаме всички случаи

- $n = 31 \cdot m$

$\varphi(n) = \varphi(31) \cdot \varphi(m) = 30 \cdot \varphi(m)$

имаме 2 решения, при $m = 1$ и $m = 2$

- $n = 11 \cdot m$

$\varphi(n) = \varphi(11) \cdot \varphi(m) = 10 \cdot \varphi(m) = 30$

$\Rightarrow \varphi(m) = 3$

Но няма такова m, за което $\varphi(m)=3$, тоест няма решение

- $n = 7 \cdot m$

$\varphi(n) = \varphi(7) \cdot \varphi(m) = 6 \cdot \varphi(m) = 30$

$\Rightarrow \varphi(m) = 5$

Отново няма такова m, понеже $(5+1)$ не е просто

- $n = 3 \cdot m$

$\varphi(n) = 2 \cdot \varphi(m) = 30$

$\Rightarrow \varphi(m) = 15$

Делителите на 15 са:

$\{1, 3, 5\}$

След филтриране:

$\{1\}$

$\Rightarrow$ Отново няма решения

Така разгледахме всички случаи и решенията ни са $n = \{31, 62\}$

4MI0800106

4MI0800106

Задача 2) ~~а~~б) Намерим $\overline{17}^{-1}$ в $\mathbb{Z}_{134}$

$(134, 17) = ?$

$134 = 7.\underline{17} + 15$

$17 = 1.\underline{15} + 2$

$15 = 7.\underline{2} + 1$

$2 = 2.\underline{1} + 0$

$\Rightarrow (134, 17) = 1 \Rightarrow \exists\ \overline{17}^{-1}$ в $\mathbb{Z}_{134}$

От Безу:

$1 = 15 - 7.2 = 15 - 7(17 - 15) = 8.15 - 7.17 =$

$= 8(134 - 7.17) - 7.17 = 8.\underline{134} - 63.\underline{17}$

$\Leftrightarrow -63.17 \equiv 1 \pmod{134}$

$\Leftrightarrow \overline{17}^{-1} \equiv -63 \equiv 71 \pmod{134}$

$\overline{17}^{-1} = 71$ в $\mathbb{Z}_{134}$

$x \equiv 17^{64} + 7^{68} \pmod{134}$

$134 \mid 2$
$67 \mid$

$\varphi(134) = \varphi(2)\,\varphi(67) = 66$

~~$17^{66} + 7^{66} \cdot 7^{2} \cdot 17^{2} \pmod{134}$~~

4MI0800106

~~$x \equiv 17^{66} \cdot 17^{2} \pmod{134}$~~

$$x \equiv 17^{66} \cdot 71^{2} + 7^{66} \cdot 7^{2} \pmod{134}$$

$$x \equiv 71^{2} + 7^{2} \equiv 5041 + 49 \equiv 5090 \equiv 132 \pmod{134}$$

$$x \equiv 132 \pmod{134}$$

$$\Rightarrow (7^{64} + 7^{68}) \,\%\, 134 = 132$$