18. Основни теореми за непрекъснати функции върху краен затворен интервал: теорема на Вайерщрас и теорема за равномерната непрекъснатост

Ограничени функции

Дефиниция

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}$. Казваме, че $f(x)$ е:

(а) ограничена отгоре, ако $\exists\, M \in \mathbb{R} : \ f(x) \leq M \quad \forall x \in D$,

(б) ограничена отдолу, ако $\exists\, m \in \mathbb{R} : \ f(x) \geq m \quad \forall x \in D$,

(в) ограничена, ако е едновременно ограничена както отгоре, така и отдолу, т.е. ако $\exists\, M, m \in \mathbb{R} : \ m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in D$, еквивалентно, ако $\exists\, C \in \mathbb{R} : \ |f(x)| \leq C \quad \forall x \in D$.

Дефиниция

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}$. Казваме, че $f(x)$

(а) има НГ стойност, ако $\exists\, M \in \mathbb{R}$ и $c \in D : \ f(x) \leq M \quad \forall x \in D$ и $f(c) = M$,

(б) има НМ стойност, ако $\exists\, m \in \mathbb{R}$ и $\zeta \in D : \ f(x) \geq m \quad \forall x \in D$ и $f(\zeta) = m$.

Теорема на Вайерщрас

Теорема 1 (Вайерщрас)

Всяка непрекъсната функция, дефинирана върху краен затворен интервал, е ограничена и има НГ и НМ стойност.

Д-во: Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Първо ще докажем, че $f(x)$ е ограничена отгоре, т.е. че $\exists\, M \in \mathbb{R} : \;\; f(x) \le M \quad \forall x \in [a, b]$.
Допускаме противното. Това влече, че каквото и $n \in \mathbb{N}$ да вземем, $\exists\, x_n \in [a, b] : \;\; f(x_n) > n$. Редицата $\{x_n\}$ е ограничена. От т-мата на Б.-В. следва, че тя има сходяща подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Да пол. $c := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. За членове на $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ имаме

$$a \le x_{n_k} \le b \quad \forall k. \tag{1}$$

След граничен преход в тези неравенства $k \to \infty$, получаваме $a \le c \le b$, така от непрекъснатостта на $f(x)$ в $[a, b]$ и в частност в т. c следва, че $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$.

От друга страна,

$$f(x_n) > n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad f(x_{n_k}) > n_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$\Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = +\infty. \quad (2)$$

Противоречие.
Така установихме, че $f(x)$ е ограничена отгоре.

Всъщност досега доказахме, че всяка непрекъсната функция, дефинирана върху краен затворен интервал, е ограничена отгоре.

За да покажем, че непрекъсната функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена отдолу, разглеждаме $-f(x)$. Тя е непрекъсната върху $[a, b]$ и, съгласно вече установеното, е ограничена отгоре. Следователно $f(x)$ е ограничена отдолу.

Ще докажем, че $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ има НГ стойност.
Вече доказахме, че $f(x)$ е ограничена отгоре. Това означава, че множеството $f([a, b])$ е ограничено отгоре.
Следователно, благодарение на Пр. за непрекъснатост, то има точна горна граница: полагаме $M := \sup f([a, b])$.
Ще докажем, че $\exists\, c \in [a, b] : \ f(c) = M$.
Допускаме противното. Тогава $f(x) < M, \quad x \in [a, b]$. Разглеждаме функцията

$$g(x) := \frac{1}{M - f(x)}. \tag{3}$$

Тя е дефинирана и непрекъсната в $[a, b]$. Тогава, според вече доказаното, е ограничена отгоре, т.е.
$\exists\, C \in \mathbb{R} : \ g(x) \leq C \quad \forall x \in [a, b]$. Така имаме

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq C \quad \xRightarrow{C>0,\ M-f(x)>0} \quad \frac{1}{C} \leq M - f(x)$$

$$\Longrightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{C} \quad \forall x \in [a, b], \tag{4}$$

което обаче противоречи на това, че $M := \sup f([a, b])$.

Така установихме, че $f(x)$ има НГ стойност.
Всъщност дори установихме, че всяка непрекъсната функция, дефинирана върху краен затворен интервал, има НГ стойност.

За да покажем, че $f(x)$ има НМ стойност, прилагаме това към $-f(x)$. Така получаваме, че $-f(x)$ има НГ стойност. Следователно $f(x)$ има НМ стойност.

Равномерна непрекъснатост

Дефиниция

Казваме, че $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, е <u>равномерно непрекъсната</u> (в D), ако

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in D \text{ такива, че } |x_1 - x_2| < \delta. \tag{5}$$

Сравнение между непрекъснатост и равномерна непрекъснатост:

$$f(x) \text{ е непрекъсната в } D : \quad \forall x_0 \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ такова, че } |x - x_0| < \delta;$$

$$f(x) \text{ е равномерно непрекъсната в } D : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in D \text{ такива, че } |x_1 - x_2| < \delta.$$

$$\text{равномерна непрекъснатост} \quad \Longrightarrow \quad \text{непрекъснатост} \tag{6}$$

Пример

$f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Имаме за $x_1, x_2 \geq 0$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = (x_1 + x_2)|x_1 - x_2|. \tag{7}$$

Следователно $f(x)$ е равномерно непрекъсната във всеки интервал от вида $[a, b]$, но <u>не е</u> равномерно непрекъсната в $[0, \infty)$ или $\mathbb{R}$.

Зад. Определете върху кои интервали е равномерно непрекъсната функцията $\sqrt{x}$.

Теорема за равномерната непрекъснатост

Теорема 2 (теорема за равномерната непрекъснатост)

Всяка функция, която е непрекъсната върху краен затворен интервал, е и равномерно непрекъсната върху него.

Д-во: Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Ще докажем, че е равномерно непрекъсната. Допускаме противното:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists u, v \in [a, b] : \\ |u - v| < \delta, \text{ но } |f(u) - f(v)| \geq \varepsilon_0. \tag{8}$$

В частност за $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, получаваме от последното, че

$$\exists u_n, v_n \in [a, b] : |u_n - v_n| < \frac{1}{n} \text{ и } |f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon_0. \tag{9}$$

Редицата $\{u_n\}$ е ограничена ($u_n \in [a, b] \quad \forall n$). Т-ма на Б.-В. $\Longrightarrow$ $\{u_n\}$ има сходяща подредица $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Да положим $x_0 := \lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k}$. Имаме $a \le u_{n_k} \le b \quad \forall k$. След граничен преход $k \to \infty$ в тези неравенства, получаваме $x_0 \in [a, b]$. Да резгледаме подредицата $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на редицата $\{v_n\}$. За нея имаме

$$|u_{n_k} - v_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \le \frac{1}{k} \quad \forall k. \tag{10}$$

Ще докажем, че $\lim\limits_{k\to\infty} v_{n_k} = x_0$. Това следва от

$$|v_{n_k} - x_0| = |(v_{n_k} - u_{n_k}) + (u_{n_k} - x_0)| \le |u_{n_k} - v_{n_k}| + |u_{n_k} - x_0| \le \frac{1}{k} + \underbrace{|u_{n_k} - x_0|}_{\to 0 \text{ при } k\to\infty}.$$

От непрекъснатостта на $f(x)$ в т. x_0 следва, че

$$\lim_{k\to\infty} f(u_{n_k}) = f(x_0) \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} f(v_{n_k}) = f(x_0). \tag{11}$$

Следователно

$$\lim_{k\to\infty} [f(u_{n_k}) - f(v_{n_k})] = \lim_{k\to\infty} f(u_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(v_{n_k}) = f(x_0) - f(x_0) = 0,$$

което обаче влиза в противоречие с $|f(u_{n_k}) - f(v_{n_k})| \ge \varepsilon_0 \quad \forall k$.

Осцилация на функция

Означение: Нека $f : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}$, е ограничена. Полагаме

$$\sup_{x\in D} f(x) := \sup f(D) \quad \text{и} \quad \inf_{x\in D} f(x) := \inf f(D). \tag{12}$$

Дефиниция

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}$, е ограничена. Осцилация на $f(x)$ върху (или във) D наричаме числото

$$\omega(f, D) := \sup_{x_1, x_2 \in D} |f(x_1) - f(x_2)| \overset{\text{по деф.}}{=} \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in D\}. \tag{13}$$

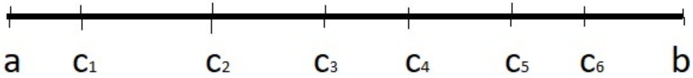
Имаме, че

$$\omega(f, D) = \sup_{x\in D} f(x) - \inf_{x\in D} f(x). \tag{14}$$

Теорема за осцилациите

Теорема 3 (теорема за осцилациите)

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ интервалът $[a, b]$ може да се разбие на краен брой затворени подинтервали, непресичащи се или с общ край, върху всеки от които осцилацията на $f(x)$ е по-малка от ε.



Д-во: Непосредствено следва от Т-ма 2; за упражнение.