31. Неопределен интеграл. Интегриране на линейна комбинация от функции

Едно помощно понятие

Дефиниция

Нека $f : D \to \mathbb{R}$ и $D \subseteq \mathbb{R}$ е интервал. Казваме, че функцията $F : D \to \mathbb{R}$ е <u>примитивна</u> на $f(x)$ в D, ако $F(x)$ е диференцируема в D и $F'(x) = f(x)$, $x \in D$.

Пример 1: $f(x) = 1$. Тогава $F_1(x) = x$ е нейна примитивна в $\mathbb{R}$, както и $F_2(x) = x + 1$, и $F_3(x) = x - 1$, и изобщо $F(x) = x + \text{const}$.

Пример 2: $f(x) = x$. Тогава $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$ е нейна примитивна, както и $F(x) = \frac{x^2}{2} + \text{const}$.

Твърдение

Ако $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в интервала D, то всяка функция от вида $F(x) + c$, където $c = \text{const}$, е също примитивна на $f(x)$ в D и $f(x)$ няма други примитивни в D.

Д-во: Щом $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в интервала D, то $F(x)$ е диференцируема в D и $F'(x) = f(x)$, $x \in D$. Тогава $F(x) + c$ също е диференцируема в D и $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, $x \in D$.
Обратно, нека $G(x)$ е също примитивна на $f(x)$ в интервала D. Това означава според дефиницията за примитивна, че $G(x)$ е диференцируема в D и $G'(x) = f(x)$, $x \in D$. Тогава за функцията $H(x) := G(x) - F(x)$ имаме, че е диференцируема в D и

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in D. \tag{1}$$

Сега от Критерия за константност следва, че $H(x) \equiv \text{const}$ в D.
Следователно $G(x) = F(x) + c$, $x \in D$, с някаква константа $c \in \mathbb{R}$.

Неопределен интеграл

Дефиниция

Неопределен интеграл на функция в интервал е общо наименование за нейните примитивни в този интервал. По-точно, ако $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ е интервал и $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в D, неопределен интеграл на $f(x)$ в D, наричаме функцията

$$F(x) + c, \quad x \in D, \tag{2}$$

където c е произволна константа. Неопределеният интеграл на $f(x)$ се означава чрез

$$\int f(x)\,dx. \tag{3}$$

Така накратко

$$\int f(x)\,dx := F(x) + c, \quad x \in D, \tag{4}$$

където $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в D и $c = \text{const}$.

Елементарни свойства на неопределения интеграл

(а) Неопределният интеграл е диференцируема функция и

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \quad x \in D. \tag{5}$$

(б) Ако $f(x)$ е диференцируема в интервала D, то $f'(x)$ има неопределен интеграл в D и

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + \text{const}, \quad x \in D. \tag{6}$$

Бележка

Не всяка функция има неопределен интеграл. Може да се докаже, че всяка непрекъсната върху интервал функция има неопределен интеграл върху него.

Основни неопределени интеграли

(а) $\displaystyle \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{const}, \quad \alpha \neq -1;$

(б) $\displaystyle \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + \text{const}; \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \text{const};$

(в) $\displaystyle \int e^x dx = e^x + \text{const};$

(г) $\displaystyle \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \text{const}, \quad a > 0,\ a \neq 1;$

(д) $\displaystyle \int \sin x\, dx = -\cos x + \text{const};$

(е) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + \text{const};$

(ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + \text{const};$

(з) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \text{const};$

(и) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \text{const};$

(й) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + \text{const}.$

Интегриране на линейна комбинация от функции

Теорема

(а) Ако $f(x)$ и $g(x)$ имат неопределен интеграл в интервала D, то и $f(x) + g(x)$ също има неопределен интеграл в D и

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx, \quad x \in D. \tag{7}$$

(б) Ако $f(x)$ има неопределен интеграл в интервала D и $k \in \mathbb{R}$, то и $kf(x)$ също има неопределен интеграл в D и

$$\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx, \quad x \in D. \tag{8}$$

Следствие

Ако са изпълнени предположенията на (а), то и $f(x) - g(x)$ също има неопределен интеграл в D и

$$\int [f(x) - g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx, \quad x \in D. \tag{9}$$

Доказателство на теоремата

(a) От дефиницията на неопределен интеграл имаме, че функциите $\int f(x)\,dx$ и $\int g(x)\,dx$ са диференцируеми в D и

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \quad \text{и} \quad \left(\int g(x)\,dx\right)' = g(x), \quad x \in D. \tag{10}$$

Както знаем сума на две диференцируеми функции също е диференцируема и производната на сумата е сума от производните. Следователно функцията $\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ е диференцируема в D и

$$\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' + \left(\int g(x)\,dx\right)' \tag{11}$$

$$= f(x) + g(x), \quad x \in D. \tag{12}$$

Това показва, че функцията $\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ е примитивна на $f(x) + g(x)$ в D.

(б) Аналогично на (а), като тук се използва формулата $[kF(x)]' = kF'(x)$. По-точно имаме

$$\left(k \int f(x)\, dx\right)' = k \left(\int f(x)\, dx\right)' = kf(x), \quad x \in D. \tag{13}$$

Така се убеждаваме, че функцията $k \int f(x)\, dx$ е примитивна на $kf(x)$ в D.