Wojciech Błyskal 247632
Łukasz Centkowski 247638

Rok akademicki 2023/24
poniedziałek, godzina 12:15

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 5 – Aproksymacja wielomianami Hermite'a.

Opis rozwiązania

Celem zadania było napisanie programu, który podaną funkcję na danym przedziale aproksymuje funkcją wielomianową stworzoną na bazie wielomianów Hermite'a. Wielomiany Hermite'a to wielomiany postaci: $G_{n+1}(x) = 2G_n(x) - 2\,G_{n-1}(x)$, przy czym $G_0(x) = 1$ i $G_1(x) = 2$. W przeciwieństwie do interpolacji, przy dokonywaniu aproksymacji nie potrzebujemy znać dokładnej wartości funkcji aproksymowanej dla żadnego argumentu. W celu zaimplementowania aproksymacji w programie wykorzystano kwadraturę Gaussa-Hermite'a, którą można stosować na przedziale (-∞, ∞). Kwadratura ta służy liczenia całek postaci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{i=0}^{2} H_i f(x_i)$$

gdzie x_i węzły kwadratury Gaussa-Hermite'a (miejsca zerowe odpowiednich wielomianów Hermite'a), a H_i to wagi kwadratury Gaussa-Hermite'a(wartości pobrane z pliku).

Aproksymacji dokonuje się wzorem:

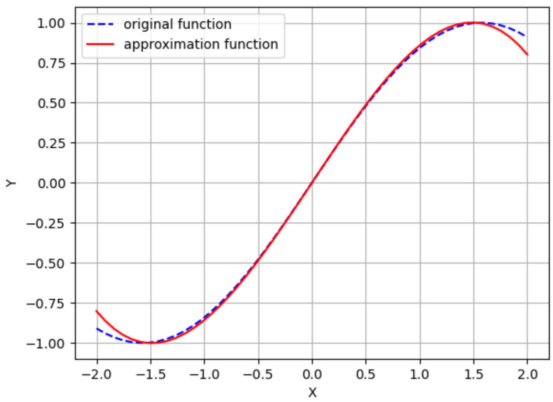
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} G_k(x)\, a_k$$

gdzie G_k to wielomiany Hermite'a, a_k to współczynniki obliczane ze wzoru:

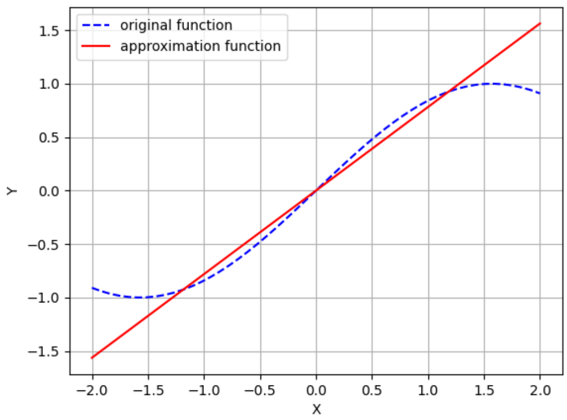
$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}2^k k!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_k\,(x) e^{-x^2} dx$$

gdzie $f\,(x)$ to funkcja aproksymowana, a k to wartości: 0, 1, 2, …, n. Błąd jest obliczany jako suma różnicy wartości funkcji między równoodległymi węzłami znajdującymi się na przedziale.

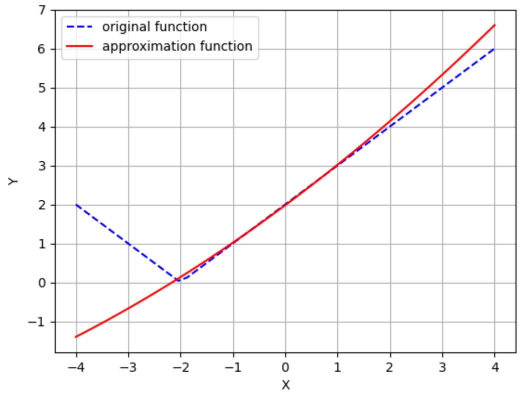
Wyniki



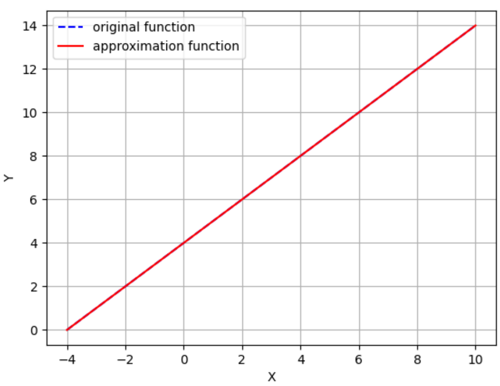
Funkcja aproksymowana: f(x) = 0,3cos(x)
Funkcja aproksymująca: $f(x) = -0{,}019x^3 + 0{,}391x$
Błąd aproksymacji: 0,00098



Funkcja aproksymowana: f(x) = 0,3cos(x)
Funkcja aproksymująca: f(x) = 0,391x
Błąd aproksymacji: 0,05598



Funkcja aproksymowana: f(x) = |x + 2|
Funkcja aproksymująca: $f(x) = 0{,}0097x^2 + 0{,}5x + 2$
Błąd aproksymacji: 1,08496



Funkcja aproksymowana: f(x) = x + 4
Funkcja aproksymująca: f(x) = x + 4
Błąd aproksymacji: 0

Wnioski

- Aproksymowanie wielomianami Hermite'a jest skuteczne na wąskich przedziałach lub przy mało skomplikowanych funkcjach. Przy bardziej skomplikowanych funkcjach metoda przestaje sobie radzić.
- Stopień wielomianu aproksymującego wpływał na jakość aproksymacji, ale to czy większy stopień był lepszy w tym celu zależało od funkcji i przedziału(często większy błąd przy wyższym stopniu był spowodowany szerszym przedziałem, przez co wcześniej przyzwoity wielomian nagle osiągał bardzo odległe od oryginalnej funkcji wartości).