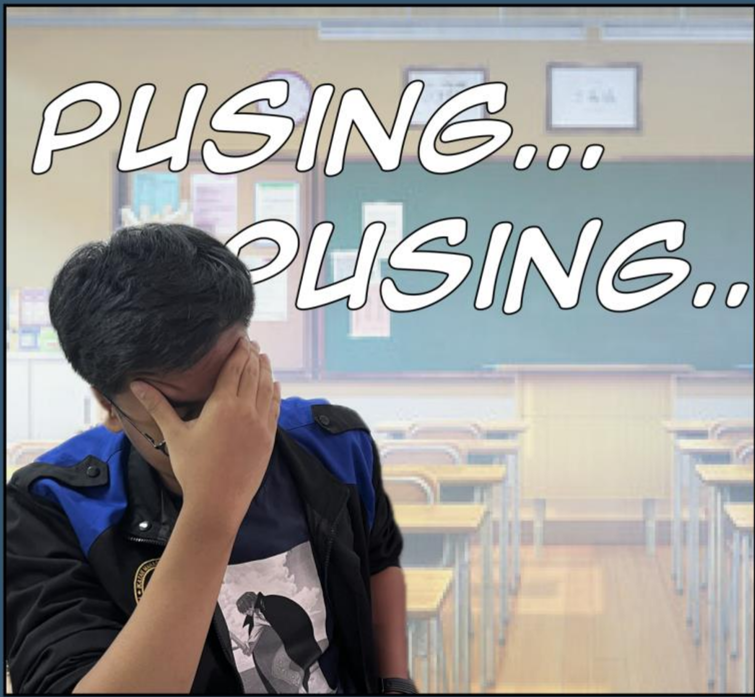
RP 35 JAM

VOL 1

18 MARET 2024

AKPRO IME FTUI 2024

DIKTAT UTS GENAP 2024



MATEMATIKA TEKNIK
TEKKOM/BIOM

Daftar Isi

Pelanggaran dan Sanksi

Segala bentuk pelanggaran tata tertib maupun tindakan kecurangan akademik; seperti melihat catatan atau pekerjaan orang lain, kerja sama dengan peserta lain atau mahasiswa di luar ruangan, dan menggantikan atau digantikan oleh mahasiswa lain pada saat ujian; sesuai ketentuan/ketetapan yang ada dapat dikenakan sanksi mulai dari sanksi akademik berupa:

- Pembatalan nilai (pemberian nilai E)
- Pembatalan studi satu semester
- Skorsing
- Dikeluarkan (pemberhentian sebagai mahasiswa) dari FTUI.

Bila diperlukan, dapat melalui sidang pemeriksaan Panitia Penyelesaian Pelanggaran Tata Tertib (P3T2).

Disclaimer

A. Diktat ini **BUKAN** merupakan kisi-kisi atau hal sejenisnya yang merujuk pada soal ujian yang akan diberikan

B. Diktat ini dibuat dan dikerjakan pembahasannya oleh mahasiswa dengan bekal ilmu yang sudah didapatnya dengan tujuan mematangkan konsep dasar dalam menjawab soal, cara pengerjaan soal-soal mungkin berbeda dengan yang diinginkan dosen Anda, gunakanlah cara yang dianjurkan dosen Anda jika ada.

Contact Person:

Natano Juditya Sihan (Line ID : natanojs, WA : 081212361505)

Kevin Imanuel Hutagaol (Line ID : kevin_imanuel62, WA : 081345519179)

BIDANG AKADEMIS DAN KEPROFESIAN

IKATAN MAHASISWA ELEKTRO

FAKULTAS TEKNIK

UNIVERSITAS INDONESIA

ime.eng.ui.ac.id/akademis

Kata Pengantar

Puji dan syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga diktat Matematika Teknik ini dapat diselesaikan dengan baik. Ucapan terima kasih juga kami sampaikan kepada para dosen, asisten dosen dan laboratorium, serta teman-teman yang telah berkontribusi dalam proses pengerjaan dan pengecekan diktat ini.

Kami dari pihak Akpro IME FTUI berharap agar diktat Matematika Teknik ini dapat membantu mahasiswa dalam mempersiapkan diri untuk menghadapi Ujian Tengah Semester Genap ini. Semoga diktat Matematika Teknik ini bisa menambah pengetahuan dan keterampilan mahasiswa sehingga mampu menjawab soal-soal ujian yang akan dihadapi dengan maksimal.

Adapun karena keterbatasan pengetahuan maupun pengalaman kami, kami menyadari masih terdapat kekurangan dalam penyusunan diktat ini yang perlu diperbaiki. Oleh karena itu, kritik dan saran sangat kami harapkan sehingga dapat dijadikan bahan evaluasi dan perbaikan untuk diktat yang lebih baik lagi. Kami juga memohon maaf apabila ada kesalahan dan kekurangan dalam penyusunan diktat ini.

Akpro IME FTUI menegaskan bahwa mempelajari diktat ini tidak menjamin kelulusan mahasiswa pada mata kuliah yang berkaitan, namun kami berharap diktat ini dapat membantu mahasiswa untuk belajar dan memahami lebih lanjut mata kuliah yang akan diujikan saat UTS ini. **Diktat ini hanya berfungsi sebagai suplemen** sehingga pada ujian nanti nilai mahasiswa tidak ditentukan oleh diktat ini, namun ditentukan oleh usaha masing-masing individu untuk mendapatkan hasil yang memuaskan.

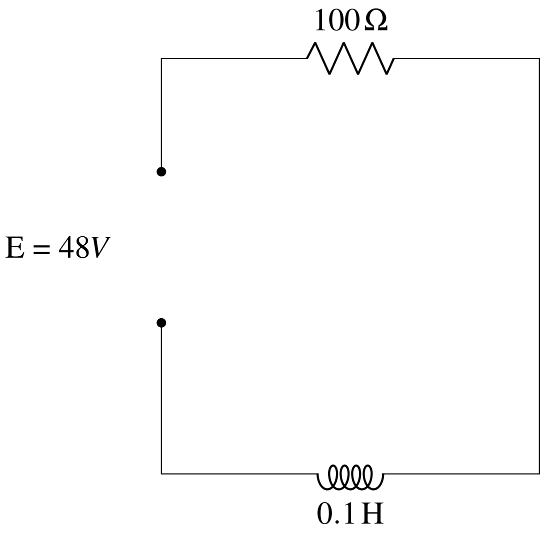
Matematika Teknik Paket 1

Dosen	: Pak Sahrul
Jumlah Soal	: 3
Waktu Pengerjaan	: 90 Menit
Pengetikan Soal	: Alexander Christhian TKom'23

1. Carilah solusi umum dari persamaan di bawah ini

$$\frac{(3xy+y^2)}{M}\,dx+\frac{(x^2+xy)}{M}\,dy=0$$

2. Cari I(t) dari rangkaian di bawah ini. Cari juga ketika $IF(0)=0A$



3. Carilah solusi umum dari persamaan di bawah ini

$$4x^2y''+5y=0$$

Pembahasan Matematika Teknik Paket 1

Pengetikan Jawaban : Alexander Christhian TKom'23 dan
Natano Juditya Sihan E'23

Pembahasan Jawaban : Albertus Satrio Aditama Christiyanto Biom'22

Pengecek Jawaban : Kayla Annaya Khairulainy Biom'22

1. **Diketahui:**

$$\frac{(3xy+y^2)}{M}\,dx+\frac{(x^2+xy)}{M}\,dy=0$$

Ditanya:

Solusi umum dari persamaan di atas?

Jawab:

Separable ODE

$$\begin{aligned} g(y)\cdot y' &= t(x) \\ g(y)\,\frac{dy}{dx} &= t(x) \\ \int g(y) &= \int t(x)\,dy \\ \boxed{\int g(y)\,dy = \int t(x)\,dx + C} \end{aligned}$$

Exact ODE and Integrating Factors

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

dengan kondisi:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

dimana

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = M$$

sehingga

$$du = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M}\,dx + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N}\,dy = 0$$

$$u = c$$

Solusi umum untuk $u(x,y)$:

$$u = \int M\,dx + k(y)$$

Reduction to Exact

Dipakai ketika ODE tidak exact.

Cara mencari faktor integrasi dari:

$$\frac{-y}{M}\,dx + \frac{x}{N}\,dy = 0$$

adalah

$$F(x) = e^{\int\left[\frac{My-Nx}{N}\right]}$$

dimana

$$\frac{My-Nx}{N} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

---

dan berlaku juga:

$$F(y) = e^{\int\left[\frac{Nx-My}{M}\right]}$$

Langkah pertama, kita harus menguji exact ODE terlebih dahulu:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y} \rightarrow \text{Jika exact}$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$$
$$3x+2y = 2x+y \rightarrow \text{Tidak exact}$$

Ketika kita tidak mendapatkan hasil tidak sama, maka ODE itu tidak exact. Kita dapat membuat ODE itu exact dengan cara mengalikan ODE dengan faktor integrasinya.

Sekarang, kita akan mencari faktor integrasinya dengan metode **Reduction to Exact**:

$$\begin{aligned}
F(x) &= e^{\int \left[\frac{(3x+2y)-(2x+y)}{x^2+xy}\right]\,dx} \\
&= e^{\int \left[\frac{x+y}{x^2+xy}\right]\,dx} \\
&= e^{\int \left[\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x+y}{x+y}\right)\right]\,dx} \\
&= e^{\int \frac{1}{x}\,dx} \\
&= e^{\ln|x|} \\
&= x
\end{aligned}$$

Diperoleh $F(x) = x$. Setelah mendapatkan faktor integrasinya, kita tinggal mengalikannya dengan ODE kita:

$$\begin{aligned}
&= \left[(3xy+y^2)\,dx+(x^2+xy)\,dy\right]\cdot x \\
&= (3x^2y+xy^2)\,dx+(x^3+x^2y)\,dy
\end{aligned}$$

Penyelesaian Solusi Umum:

Setelah semua langkah-langkah tersebut, misalkan:

$$\underbrace{3x^2y+xy^2}_{M}\,dx+\underbrace{x^3+x^2y}_{N}\,dy = 0$$

Sekarang, kita akan mencari solusi umum:

$$\begin{aligned}
u &= \int N\,dy + l(x) \\
&= x^3+x^2y\,dy+l(x) \\
u &= x^3y+\frac{1}{2}(x^2y^2)+l(x)
\end{aligned}$$

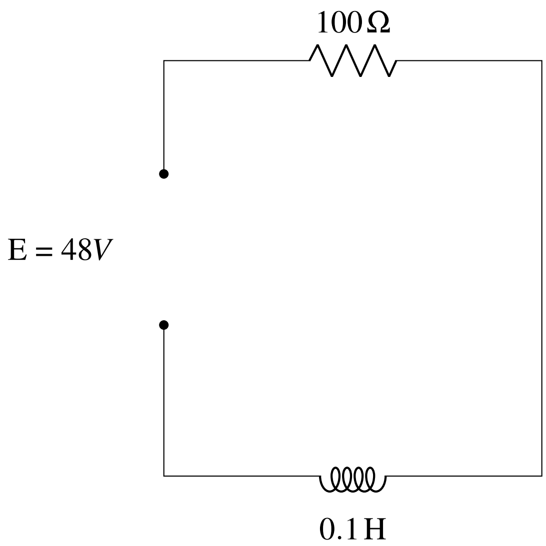
Kemudian, kita akan mencari $l(x)$ dengan mencari turunan parsial u terhadap x dan dibandingkan dengan M karena kita sebelumnya memilih M saat mencari u:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= M \\
3x^2y + xy^2 + \frac{\partial l}{\partial x} &= 3x^2y + xy^2 \\
\frac{\partial l}{\partial x} &= 0 \\
l &= c \\
u &= x^3y + \frac{1}{2}(x^2+y^2) + C_1 = C_2
\end{aligned}
$$

Sehingga, diperoleh:

$$\boxed{x^3y + \frac{1}{2}(x^2+y^2) = C_2 - C_1}$$

2. **Diketahui**



Ditanya:

Cari $I(t)$ dari rangkaian di bawah ini. Cari juga ketika $IF(0) = 0A$

Linear ODE

Jika r(x) adalah input dan Y(x) adalah output, maka solusi dari Y(x):

$$Y(x) = e^{-h(x)}\left[\int e^{h(x)}\ r(x)\ dx + C\right]$$
$$\rightarrow h(x) = \int P(x)dx$$

dimana, P(x) dan r(x) mengikuti aturan persamaan:

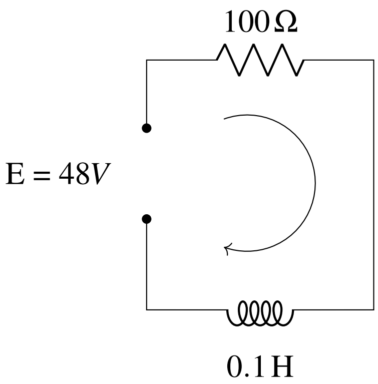
$$y' + P(x)y = r(x)\begin{cases} r(x) = 0, & \text{homogen} \\ r(x) \neq 0, & \text{non-homogen} \end{cases}$$

Jawab:

Pertama-tama, kita mendefinisikan apa yang kita ketahui dari soal:

- Sesuai dengan hukum Ohm, maka $V_R = I(t) \cdot R$
- Dari rumus induktor, diperoleh $V_L = L\ \frac{di(t)}{dt}$ dimana L = besar induktansi, di(t) = perubahan arus, dan dt = perubahan waktu.

Kemudian, kita akan melakukan KVL untuk mendapatkan persamaannya:



$$-V_E + V_R + V_L = 0$$
$$-48 + 11 \cdot I(t) + 0.1\ \frac{di(t)}{dt} = 0$$
$$0.i \cdot I' + 11I = 48$$
$$\left[0.1 \cdot I' + 11I\right] \cdot 10 = 48 \cdot 10$$
$$I' + 110I = 480$$

Karena kita telah mendapatkan persamaannya, kita dapat menyelesaikan linear ODE ini. Pertama, kita definisikan mana $P(x)$ dan $r(x)$ nya sesuai dengan sifat linear ODE:

$$I' + 110I = 480 \rightarrow P(x) = 110$$
$$r(x) = 480.$$

Setelah mendapatkan P(x) dan r(x), kita akan mencari h(x):

$$h(x) = \int 110 \, dx$$
$$h(x) = 110x$$

Sekarang, kita akan mencari solusi umumnya:

$$\begin{aligned}
Y(x) &= e^{-h(x)}\left[\int e^{h(x)}\, r(x)\, dx \,+\, C\right] \\
I(x) &= e^{-110x}\left[\int e^{110x} \cdot 480\, dx \,+\, C\right] \\
&= e^{-110x}\left[\frac{1}{480} \int e^{110x}\, dx \,+\, C\right] \\
&= e^{-110x}\left[\frac{110}{480}\, e^{110x} \,+\, C\right] \\
I(x) &= \frac{48}{11} \,+\, e^{-110x}\, C
\end{aligned}$$

Kemudian, untuk persamaan khususnya:

$$\begin{aligned}
IF(0) &= 0A \\
I(x) &= \frac{48}{11} \,+\, e^{-110x}\, C \\
0 &= \frac{48}{11} \,+\, e^{-110(0)}\, C \\
0 &= \frac{48}{11} \,+\, C \\
C &= -\frac{48}{11}
\end{aligned}$$

Sehingga, dengan mensubstitusikan C ke I(x), diperoleh:

$$Y_p = \frac{48}{11} \,-\, \frac{48}{11}\, e^{-110x}$$
$$\boxed{Y_p = \frac{48}{11}\left[1 \,-\, e^{-110x}\right]}$$

3. **Diketahui:**

$$4x^2y'' + 5y = 0$$

Ditanya:

Solusi umum dari persamaan di atas?

Euler Cauchy Equation

Jika diberikan sebuah persamaan $ax^2y'' + bxy' + Cy = 0$, dengan basis solusi:

$$y = x^m$$
$$y' = mx^{(m-1)}$$
$$y'' = m(m-1)x^{(m-2)}$$

Persamaan di atas memiliki persamaan karakteristik:

$$am^2 + (b-a)m + C = 0$$

Case 1, (Akar beda $\rightarrow m_1 \neq m_2$)

$$Y(x) = C_1 x_1^{m_1} + C_2 x_2^{m_2}$$

Case II, (Double real $\rightarrow m_1 = m_2$)

$$Y(x) = \left[C_1 + C_2 \ln(x)\right] \cdot x^m$$

Case III, (Complex Conjugate $\alpha \pm \beta$)

$$Y(x) = x^a \Big[A \cos(\beta \ln(x)) + B \sin(\beta \ln(x))\Big]$$

Jawab:

Pertama, kita akan menentukan persamaan karakteristik di soal ini termasuk ke case berapa sesuai dengan **Euler Cauchy Equation**:

$$ax^2y'' + bxy' + Cy = 0 \rightarrow \boxed{am^2 + (b-a)\ m + C = 0}$$

Maka, untuk persamaan pada soal:

$$4x^2y'' + 0 + 5y = 0$$

Persamaan karakteristiknya adalah:

$$\begin{aligned} 4m^2 + (0-4)m + 5 &= 0 \\ 4m^2 - 4m + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Setelah itu, kita akan mencari akar-akar penyelesaian dari m:

$$\begin{aligned} m_{12} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ m_{12} &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4} \\ m_{12} &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 80}}{8} \\ m_{12} &= \frac{1}{2} + \frac{\pm\sqrt{-64}}{8} \\ m_{12} &= \frac{1}{2} + \frac{\pm\sqrt{64} \cdot \sqrt{-1}}{8} \\ m_{12} &= \frac{1}{2} + \frac{\pm 8 \cdot \sqrt{-1}}{8} \\ m_{12} &= \frac{1}{2} \pm i \\ &\rightarrow \frac{1}{2} = \alpha \ \text{ dan } \ 1 = \beta \end{aligned}$$

Sehingga, kasus persamaan pada soal termasuk ke **kasus 3 Euler Cauchy Equation**, complex conjugate. Maka, solusi umum dari persamaan pada soal adalah:

Case III, Complex Conjugate $\alpha \pm \beta$:

$$Y(x) = x^{\alpha}\left[A\ \cos\left(\beta\ \ln(x)\right) + \beta\ \sin\left(\beta\ \ln(x)\right)\right]$$

Dengan mensubstitusikan $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $\beta = i$, diperoleh:

$$\boxed{Y(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot \left[A\ \cos\left(\ln(x)\right) + B \sin\left(\ln(x)\right)\right]}$$