Содержание

1 Виды сходимости случайных векторов и связи между ними

Пусть $\xi, \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – случайные векторы размерности m.

Определение 1.1. Сходимость **почти наверное**:

$$\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi \Leftrightarrow P(\xi_n \to \xi) = 1$$

Определение 1.2. Сходимость **по вероятности**:

$$\xi_n \overset{\text{P}}{\to} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(\|\xi_n - \xi\|_2 > \varepsilon) = 0$$

Определение 1.3. Сходимость в L_p **(в среднем)**:

$$\xi_n \overset{L_p}{\to} \xi \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\|\xi_n - \xi\|_p^p = 0$$

Определение 1.4. Сходимость по распределению:

$$\xi_n \overset{\text{d}}{\to} \xi \Leftrightarrow \forall f \in \text{BC}(\mathbb{R}^m) : \mathbb{E}f(\xi_n) \overset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}f(\xi)$$

Утверждение 1.1. *Связь между сходимостями:*

1. *п.н.* $\Rightarrow P$
2. $L_p \Rightarrow P$
3. $P \Rightarrow d$

Утверждение 1.2. $\xi_n \overset{d}{\to} const \Rightarrow \xi_n \overset{P}{\to} const$

Утверждение 1.3. *Связь между сходимостью векторов и сходимостью их компонент:*

1. $$\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi \Leftrightarrow \forall i : \xi_n^{(i)} \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi^{(i)}$$
2. $$\xi_n \overset{P}{\to} \xi \Leftrightarrow \forall i : \xi_n^{(i)} \overset{P}{\to} \xi^{(i)}$$
3. $$\xi_n \overset{L_p}{\to} \xi \Leftrightarrow \forall i : \xi_n^{(i)} \overset{L_p}{\to} \xi^{(i)}$$
4. $$\xi_n \overset{d}{\to} \xi \Rightarrow \forall i : \xi_n^{(i)} \overset{d}{\to} \xi^{(i)}$$

Доказательство. 1.

$$\cap_{i=1}^m \{\xi_n^{(i)} \to \xi^{(i)}\} = \{\xi_n \to \xi\} \subset \{\xi_n^{(i)} \to \xi^{(i)}\}$$

Тогда для $\Rightarrow$ используем включение и свойство меры:

$$1 = P(\{\xi_n \to \xi\}) \leqslant P(\{\xi_n^{(i)} \to \xi^{(i)}\})$$

А для $\Leftarrow$:

$$1 = P(\cap_{i=1}^m \{\xi_n^{(i)} \to \xi^{(i)}\}) = P(\{\xi_n \to \xi\})$$

2. Для $\Rightarrow$:
$$\{|\xi_n^{(i)} - \xi^{(i)}| > \varepsilon\} \subset \{\|\xi_n - \xi\|_2 > \varepsilon\}$$
А для $\Leftarrow$:
$$\{\|\xi_n - \xi\|_2 > \varepsilon\} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \left\{|\xi_n^{(i)} - \xi^{(i)}| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right\}$$

3. Заметим, что
$$\forall i:\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\xi_n^{(i)} - \xi^{(i)}|^p = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\|\xi_n - \xi\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} |\xi_n^{(i)} - \xi^{(i)}|^p = 0$$

4. Для $\Rightarrow$ в качестве f возьмём функцию-проектор.

$\square$

Теорема 1.1. *О наследовании сходимостей.*

Пусть $\xi, \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – случайные векторы в $\mathbb{R}^m$, причём $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m):\ P(\xi \in B) = 1$ и $h:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ непрерывна в каждой точке множества B. Тогда
$$\xi_n \overset{\text{п.н.}, P, d}{\to} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \overset{\text{п.н.}, P, d}{\to} h(\xi) \tag{1}$$

Доказательство.

- Случай п.н.:
$$P(h(\xi_n) \to h(\xi)) \geqslant P(h(\xi_n) \to h(\xi), \xi \in B) \geqslant P(\xi_n \to \xi, \xi \in B) = 1$$

- Случай P:

  Пусть $h(\xi_n) \overset{P}{\not\to} h(\xi) \Rightarrow$:
$$\exists \varepsilon_0, \delta_0, \{n_k\}_{k=1}^{\infty}:\ P(\|h(\xi_{n_k}) - h(\xi)\| > \varepsilon_0) \geqslant \delta_0$$
  Но из неё мы можем выбрать $\{\xi_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$, сходящуюся почти всюду (по прошлому семестру), но тогда мы получили противоречие с предыдущим пунктом доказательства.

- Докажем для непрерывных h:

  Тогда
$$\forall f \in BC(\mathbb{R}^k):\ f(h(x)) \in BC(\mathbb{R}^m)$$
  Значит мы можем взять $f \circ h$ в качестве функции из определения сходимости по распределению и получить требуемое.

$\square$

2 Закон больших чисел, усиленный закон больших чисел...

Теорема 2.1. *ЗБЧ.*

Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – попарно некорелированные вектора и $\sup_{n,i} \mathbb{V}\xi_n^{(i)} \leqslant C$. Тогда
$$\frac{s_n - \mathbb{E}s_n}{n} \overset{P}{\to} 0$$
где $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{i=1}^{n} \xi_i\}_{n=1}^{\infty}$

Теорема 2.2. *УЗБЧ.*

Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– независимые одинаково распределённые, причём* $\mathbb{E}\xi_1 < +\infty$. *Тогда*

$$\frac{s_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}\xi_1$$

Теорема 2.3. *ЦПТ.*

Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– независимые одинаково распределённые, причём* $\exists$ *ковариационные матрица* $\mathbb{V}\xi_1$. *Тогда*

$$\sqrt{n}\left(\frac{s_n}{n} - \mathbb{E}\xi\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}\xi_1)$$

Лемма 2.1. *Лемма Слуцкого.*

Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ *и* $\eta_n \xrightarrow{d} c\,(const)$. *Тогда*

$$\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi + \eta; \quad \xi_n \cdot \eta_n \xrightarrow{d} \xi \cdot c$$

Доказательство. По некому утверждению без доказательства, будет верно

$$\begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \begin{pmatrix} \xi \\ c \end{pmatrix}$$

Тогда, применив теорему о наследовании сходимостей с функциями $+, \cdot$ всё получится. □

Пример. Применение леммы Слуцкого.

Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ – последовательность случайных величин и $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – дифференцируемая в точке a и $b_n \to 0$, причём $b_n \neq 0$. Тогда

$$\frac{H(a + \xi_n b_n) - H(a)}{b_n} \xrightarrow{d} H'(a)\xi$$

Доказательство. Введём

$$h(x) := \begin{cases} \frac{H(a+x) - H(a)}{x}, x \neq 0 \\ H'(a), x = 0 \end{cases}$$

Тогда h непрерывна в 0.

По лемме Слуцкого:

$$b_n \xi_n \xrightarrow{d} 0$$

По теореме о наследовании сходимости

$$h(b_n\xi_n) \xrightarrow{d} h(0) = H'(a) \Rightarrow \frac{H(a + \xi_n b_n) - H(a)}{b_n} = h(b_n\xi_n)\xi_n \xrightarrow{d} H'(a)\xi$$

□

Теорема 2.4. *Обобщение на многомерный случай.*

Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ *в* $\mathbb{R}^m$, *и* $H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$, *у которой в точке* $a \in \mathbb{R}^m$ $\exists$ *матрица частных производных* $H'(x) = \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\, j=1}^{s,\, m}$, *а также числовая последовательность* $b_n \to 0, b_n \neq 0$. *Тогда*

$$\frac{H(a + \xi_n b_n) - H(a)}{b_n} \xrightarrow{d} H'(a)\xi$$

3 Вероятно-статистическая модель...

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$ – измеримые пространства.

Определение 3.1. Если $\xi : \Omega \to E$ такова, что

$$\forall B \in \mathcal{E} : \xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

то ξ называется **случайным элементом**.

Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, то ξ называется **случайным вектором**.

Более того, если $m = 1$, то ξ называется **случайном величиной**.

Определение 3.2. Распределением случайного элемента ξ называется мера P_ξ на $\mathcal{E}$, такая что $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$

Определение 3.3. Выборочное пространство $\mathcal{X}$ – множество всевозможных исходов одного эксперимента (обычно $\mathbb{R}^m$).

$\mathcal{B}_\mathcal{X}$ – σ-алгебра на $\mathcal{X}$ будем считать Барелевской.

Утверждение 3.1. *Построим модель эксперимента, как случайной величины.*

Пусть

$$\forall x \in \mathcal{X} : X(x) = x$$

получим отображение $X : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, которое является случайным элементом на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_\mathcal{X}, P)$ и имеет распределение $P_X = P$

Доказательство. Проверим, что данная случайная величина действительно имеет необходимое нам распределение

$$P_X(B) = P(X \in B) = P(x : X(x) \in B) = P(x \in B) = P(B)$$

□

Утверждение 3.2. *Построим модель n независимых повторений нашего эксперимента.*

Рассмотрим $\mathcal{X}^n = \mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X}$ и $\mathcal{B}^n_\mathcal{X} = \mathcal{B}(\mathcal{X}^n) = \sigma(B_1 \times \cdots \times B_n), B_i \in \mathcal{B}_\mathcal{X}$, а $P^n = P \otimes \cdots \otimes P$ – мера на $(\mathcal{X}^n, \mathcal{B}^n_\mathcal{X})$, такая что $P^n(B_1 \times \cdots \times B_n) = P(B_1) * \cdots * P(B_n)$.

Для этого рассмотрим тождественное отображение $X : \mathcal{X}^n \to \mathcal{X}^n$. Его i-я компонента X_i (по сути i-й проектор) является случайным вектором с распределением P, причём $X_1, \cdots, X_n$ независимы в совокупности.

Доказательство. Фиксируем i, рассмотрим вероятность

$$P^n(X_i \in B_i) = P^n((x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{X} : X_i(x_1, \cdots, x_n) \in B_i) = P^n((x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{X} : x_i \in B_i) = P^n(\mathcal{X} \times \cdots \times B_i \times \cdots \times \mathcal{X}) = 1 * \cdots * P(B_i) * \cdots * 1$$

Теперь докажем независимость:

$$P^n(X_1 \in B_1, \cdots, X_n \in B_n) = P^n((x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{X} : X_1(x_1, \cdots, x_n) \in B_1, \cdots) = P^n(B_1 \times \cdots \times B_n) = \prod_{i=1}^n P(B_i) = \prod_{i=1}^n P^n(X_i \in B_i)$$

□

Определение 3.4. Совокупность $X = (X_1, \cdots, X_n)$ независимых одинаково распределённых случайных величин (или векторов) с распределением P называется **выборкой** размера n из распределения P.

Также выборку X иногда будем называть **наблюдением**.

Замечание. Для бесконечных выборок определим $\mathcal{X}^\infty = \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \cdots$ и $\mathcal{B}_\mathcal{X}^\infty = \sigma(\{B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \cdots\}_{n=1}^\infty)$, а меру $P^\infty(B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathcal{X} \times \cdots) = P(B_1) * \cdots * P(B_n)$, такая мера существует и единственна.

Аналогично предыдущим пунктам определяем **бесконечную серию эскпериментов**.

Определение 3.5. Тройка $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_\mathcal{X}, \mathcal{P})$ называется **вероятностно-статистической моделью**.

Замечание. Пусть $X_1, \cdots, X_n$ – случайные величины (или векторы), и $X_1(\omega) = x_1, \cdots, X_n(\omega) = x_n$ – их значения, называются **реализацией выборки**.

Задачей статистики является сделать вывод о неизвестном распределении по реализации выборки.

Определение 3.6. Вероятно-статистическая модель $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_\mathcal{X}, \mathcal{P})$ называется **параметрической**, если семейство $\mathcal{P}$ параметризованно, то есть

$$\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$$

обычно $\Theta \subset \mathbb{R}^m$.

4 Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения

Определение 4.1. Для $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ положим

$$P_n^*(B) := \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i \in B\}}{n}$$

распределение P_n^* называется **эмпирическим распределением**, построенным по выборке $X_1, \cdots, X_n$.

Это случайное распределение (зависит от ω)

Определение 4.2. Функция $F_n^*(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i \leqslant x\}}{n}$ называется **эмпирической функцией распределения**.

Утверждение 4.1. *Пусть $X_1, \cdots, X_n$ – выборка на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ из распределения P_X. Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Тогда*

$$P_n^*(B) \xrightarrow{п.н.} P_X(B), n \to +\infty$$

Доказательство. Заметим, что $\mathbb{I}\{X_i \in B\}$ – независимые, одинаково распределённые величины.

Тогда мы можем применить УЗБЧ:

$$P_n^*(B) = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}\mathbb{I}\{X_1 \in B\} = P_X(B)$$

□

Теорема 4.1. *Гливенко-Кантелли.*

Пусть $X_1, \cdots, X_n$ – независимые случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Тогда

$$D_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n^*(x) - F(x)| \overset{\text{п.н.}}{\to} 0$$

Доказательство. Почему D_n – случайная величина?

F непрерывна справа, и $\forall\omega:\ F_n^*$ также непрерывна справа $\Rightarrow$

$$D_n(\omega) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n^*(x) - F(x)| = \sup_{x\in\mathbb{Q}} |F_n^*(x) - F(x)|$$

Значит D_n является случайной совокупностью случайных величин $\Rightarrow$ D_n – случайная величина.

Фиксируем $N \in \mathbb{N}$, тогда $\forall k \in \{1, \cdots, N-1\}$ положим

$$X_{N,K} = \inf\left\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geqslant \frac{K}{N}\right\}$$

Заметим, что это число конечно, а также определим $X_{N,0} = -\infty, X_{N,N} = +\infty$.

Если $x \in [X_{N,K}, X_{N,K+1}) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} F_n^*(x) - F(x) \leqslant F_n^*(X_{N,K+1} - 0) - F(X_{N,K}) = \\ F_n^*(X_{N,K+1} - 0) - F(X_{N,K+1} - 0) + F(X_{N,K+1} - 0) - F(X_{N,K}) \leqslant \\ F_n^*(X_{N,K+1} - 0) - F(X_{N,K+1} - 0) + \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Последний переход получили благодаря тому, что $F(X_{N,K+1} - 0)$ – отсуп чуть влево, от нижней границы значения, где $F(x) \geqslant \frac{K+1}{N}$, значит там $\leqslant \frac{K+1}{N}$. Ну а $F(X_{N,K})$ по определению $\geqslant \frac{K}{N}$.

Аналогично $F_n^*(x) - F(x) \geqslant F_n^*(X_{N,K}) - F(X_{N,K}) - \frac{1}{N}$. Тогда

$$|F_N^*(x) - F(x)| \leqslant \max(|F_n^*(X_{N,K+1} - 0) - F(X_{N,K+1} - 0)|, |F_n^*(X_{N,K}) - F(X_{N,K})|) + \frac{1}{N}$$

Но тогда супремум по всей прямой

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_N^*(x) - F(x)| \leqslant \max_{0\leqslant K\leqslant N-1} \max(|F_n^*(X_{N,K+1} - 0) - F(X_{N,K+1} - 0)|, |F_n^*(X_{N,K}) - F(X_{N,K})|) + \frac{1}{N}$$

Из предыдущего утверждения следует, что $F_n^*(y - 0) = P_n^*((-\infty, y)) \to P_X((-\infty, y)) = F(y - 0)$.

Теперь для ε фиксируем $\frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow$

$$\overline{\lim}_N \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_N^*(x) - F(x)| \overset{\text{п.н.}}{<} \varepsilon$$

В силу произвольности ε получаем требуемое. □

5 Статистики и оценки

Определение 5.1. Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}, \mathcal{P})$ – вероятно-статистическая модель, X – наблюдение, $(E, \mathcal{E})$ – измеримое пространство, и $S: \mathcal{X} \to E$ – измеримое отображение. Тогда $S(x)$ называется **статистикой**.

Определение 5.2. Пусть X – наблюдение в параметрической модели $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}, \{P_\theta\}_{\theta \in \Theta})$ и $S(X)$ – статистика со значениями в Θ. Тогда $S(X)$ называется **оценкой** неизвестного параметра Θ.

Пример. Пусть $X = (X_1, \cdots, X_n)$ – выборка из распределения в $\mathbb{R}^n$.

1. Если $g(x)$ – борелевская функция, то

   $$\overline{g(X)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(X_i)$$

   называется выборочной характеристикой функции $g(x)$. Например $\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$ – выборочное среднее. $\overline{X^k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$ – выборочный момент k-го порядка.

2. Функции от выборочных квантилей:

   $$S(X) = h(\overline{g_1(X)}, \cdots, \overline{g_k(X)})$$

   где h – борелевская.

   Например, $s^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$ – выборочная дисперсия. $M_k = \frac{1}{n} \sum (X_i - \overline{X})^k$ – выборочный центральный момент k-го порядка.

3. Порядковые статистики:

   $$X_{(1)} = \min(X_1, \cdots, X_n)$$
   $$X_{(2)} \text{ -- второй элемент в отсортированной выборке}$$
   $$X_{(n)} = \max(X_1, \cdots, X_n)$$

   вектор $(X_{(1)}, \cdots, X_{(n)})$ называется **вариационным рядом**.

Пусть $X = (X_1, \cdots, X_n)$ – выборка из неизвестного распределения $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}, \Theta \subset \mathbb{R}^k$.

Определение 5.3. Оценка $\theta^*(X)$ называется **несмещённой** оценкой параметра θ, если

$$\forall \theta \in \Theta: \ \mathbb{E}_\theta \theta^*(X) = \theta$$

где $\mathbb{E}_\theta$ – матожидание в случае, когда элементы выборки имеют распределение P_θ.

Определение 5.4. Оценка $\theta_n^*(X_1, \cdots, X_n)$ (а точнее последовательность оценок) называется **состоятельной**, если

$$\forall \theta \in \Theta: \ \theta^*(X) \xrightarrow{P_\theta} \theta$$

и называется **сильно состоятельной** если

$$\forall \theta \in \Theta: \ \theta^*(X) \xrightarrow{P_\theta\text{- п. н.}} \theta$$

Определение 5.5. Оценка $\theta^*(X_1, \cdots, X_n)$ называется **асимптотически нормальной** оценкой θ, если

$$\forall\theta \in \Theta : \sqrt{n}(\theta^*_n - \theta) \xrightarrow{d_\theta} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$$

Утверждение 5.1. *Пусть $T(X)$ – асимптотически нормальная оценка для $\tau(\theta)$. Тогда $T(X)$ – состоятельная оценка для $\tau(\theta)$.*

Доказательство. Используя лемму Слуцкого, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}(T_n - \tau(\theta)) \xrightarrow{d_\theta} 0$$

Но мы знаем, что из сходимости по распределению к константе следует сходимость по мере. □

Утверждение 5.2. *Из сильной состоятельности и асимптотической нормальности оценки следует её состоятельность.*

Доказательство. Следствие из сильной состоятельности автоматически следует из связи сходимостей.

Следствите из асимптотической нормальности было доказано в предыдущем утверждении. □

6 О наследовании состоятельностей

Утверждение 6.1. *Наследование состоятельности и сильной состоятельности при взятии непрерывной функции.*

Пусть $\theta^*_n(X)$ – сильно состоятельная (состоятельная) оценка θ. Если $\tau : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ непрерывна на $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, то $\tau(\theta^*_n)$ – сильно состоятельная (состоятельная) оценка $\tau(\theta)$.

Доказательство. Смотри доказательство теоремы о наследовании сходимости. □

Лемма 6.1. *О наследовании асимптотической нормальности.*

Пусть $\theta^*_n(X)$ – асимптотически нормальная оценка $\theta \in \Theta$ с асимптотической дисперсией $\sigma^2(\theta)$ и числовая функция $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в $\forall\theta \in \Theta$. Тогда $T(\theta^*_n)$ – асимптотически нормальная оценка $T(\theta)$ с асимптотической дисперсией $\sigma^2(\theta)(T'(\theta))^2$

Доказательство. Фиксируем $\theta, \xi_n := \sqrt{n}(\theta^*_n(X) - \theta) \xrightarrow{d_\theta} \xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta)), b_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

Вспомним дельта метод, взяв

$$a = \theta, h = T \Rightarrow \frac{T(\theta + \xi_n b_n) - T(\theta)}{b_n} \xrightarrow{d_\theta} T'(\theta)\xi \Rightarrow \sqrt{n}(T(\theta^*_n) - T(\theta)) \xrightarrow{d_\theta} T'(\theta)\mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$$

□

7 Метод подстановки и метод моментов

Определение 7.1. Пусть в параметрическом семействе $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ для некоторой функции G выполнено:

$$\forall\theta \in \Theta : \theta = G(P_\theta)$$

Тогда оценкой по **методу подстановки** называется $\theta^*(X_1, \cdots, X_n) = G(P^*_n)$

Пусть $X_1, \cdots, X_n$ – выборка из $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}, \Theta \subset \mathbb{R}^k$. Рассмотрим барелевские функции $g_1(x), \cdots, g_k(x)$ со значениями в $\mathbb{R}$.

Пусть $m_1(\theta) = \mathbb{E}_\theta g_i(X_1)$ конечно при $1 \leqslant i \leqslant k$.

Определение 7.2. Если $\exists!$ решение системы

$$\begin{cases} m_1(\theta) = \overline{g_1(X)} \\ \dots \\ m_k(\theta) = \overline{g_k(X)} \end{cases}$$

Тогда оценкой по **методу моментов** называется $\theta^* = m^{-1}(\overline{g})$, где

$$m(\theta) := \begin{pmatrix} m_1(\theta) \\ \vdots \\ m_k(\theta) \end{pmatrix}; \quad \overline{g} = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n g_1(X_i)}{n} \\ \vdots \\ \frac{\sum_{i=1}^n g_k(X_i)}{n} \end{pmatrix}$$

Стандартные **пробные функции**: $g_i(X) = X^i$ (i-й момент).

Замечание. О связи методов.

Заметим, что

$$\theta = m^{-1} \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{X}} g_1(x) dP_\theta(x) \\ \vdots \\ \int_{\mathcal{X}} g_k(x) dP_\theta(x) \end{pmatrix} = G(P_\theta)$$

Тогда по методу подстановки получим

$$\theta_n^* = m^{-1} \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{X}} g_1(x) dP_n^*(x) \\ \vdots \\ \int_{\mathcal{X}} g_k(x) dP_n^*(x) \end{pmatrix} = G(P_n^*)$$

Таким образом, метод моментов – это частный случай метода подстановки.

Теорема 7.1. *Сильная состоятельной оценки методом моментов.*

Если m биективна и функцию m^{-1} можно доопределить до функции, заданной на всём $\mathbb{R}^k$ и непрерывной в каждой точке множества $m(\Theta)$ тогда оценка по методу моментов является сильно состоятельной оценкой параметра θ.

Доказательство. Фиксируем θ, по УЗБЧ знаем, что

$$\overline{g} \overset{P_\theta \text{ п.н.}}{\to} m(\theta)$$

Используя теорему о наследовании сходимости, навесим m^{-1}:

$$\theta_n^* = m^{-1}(\overline{g}) \overset{P_\theta \text{ п.н.}}{\to} m^{-1}(m(\theta)) = \theta$$

$\square$

Теорема 7.2. *Асимптотическая нормальность ОММ.*

Если в условиях предыдущей теоремы m^{-1} дифференцируема на $m(\Theta)$ и $\forall i \leqslant k$: $\mathbb{E}_\theta g_i^2(X_1) < +\infty$. Тогда ОММ θ_n^* является асимптотически нормальной оценкой параметра θ.

Доказательство. По ЦПТ:

$$\sqrt{n}(\overline{g} - m(\theta)) \overset{d_\theta}{\to} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

Применяем многомерный дельта-метод и получаем требуемое. $\square$

8 Квантили и выборочные квантили

Определение 8.1. Пусть P – распределение вероятности на $\mathbb{R}$. Пусть $p \in (0,1)$. **p-квантилью** распределения P называют

$$z_p = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geqslant p\}$$

Определение 8.2. Пусть $X_1, \cdots, X_n$ – выборка, статистика

$$z_{n,p} = \begin{cases} X_{(\lceil np \rceil)}, np \notin \mathbb{Z} \\ X_{(np)}, np \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

называется **выборочной p-квантилью**.

Теорема 8.1. *О выборочной квантили.*

Пусть $X_1, \cdots, X_n$ – выборка из распределения P с плотностью $f(x)$. Пусть z_p – это p-квантиль распределения P, причём $f(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности z_p, причём $f(z_p) > 0$. Тогда

$$\sqrt{n}(z_{n,p} - z_p) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{p(1-p)}{f^2(z_p)}\right)$$

Доказательство. Пусть $k := \lceil np \rceil$.

Из соображений комбинаторики, заметим, что

$$P(X_{(k)} \leqslant x) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m F^m(x)(1-F(x))^{n-m}$$

Засчёт свойств биномиальных коэффициентов, после дифференцирования выражения выше, получим

$$p_{X_{(k)}}(x) = nC_{n-1}^{k-1}F^{k-1}(x)(1-F(x))^{n-k}f(x)$$

Введём

$$\eta_n = (z_{n,p} - z_p)\sqrt{\frac{nf^2(z_p)}{p(1-p)}}$$

Плотность такого линейного преобразования легко считается

$$p_{\eta_n}(x) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{nf^2(z_p)}} p_{X_{(k)}}(t_n(x))$$

где $t_n(x) = z_p + \frac{x}{f(z_p)}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Откуда это взялось? Вспомним, как меняется плотность при линейном преобразовании:

$$p_{a\xi+b}(x) = F'_{a\xi+b}(x) = P'(a\xi + b \leqslant x) = P'(\xi \leqslant \frac{x-b}{a}) = F'_\xi(\frac{x-b}{a}) = \frac{1}{a}p_\xi(\frac{x-b}{a})$$

Раскроем $p_{X_{(k)}}$ по формуле, которую получили в начале доказательства и разложим полученную плотность η_n в следующее произведение:

$$p_{\eta_n}(x) = A_1(n)A_2(n)A_3(n)$$

где

$$A_1(n) = \sqrt{npq} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}$$
$$A_2(n) = \frac{f(t_n(x))}{f(z_p)}$$
$$A_3(n) = \left(\frac{F(t_n(x))}{p}\right)^{k-1} \left(\frac{1 - F(t_n(x))}{q}\right)^{n-k}$$

Осталось заметить, что

$$A_1(n) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \quad A_2(n) \to 1;$$

Для $A_3(n)$ немного сложнее, разложим $F(t_n(x))$ в ряд Тейлора в окрестности z_p. (так как $t_n(x) \to z_p$):

$$F(t_n(x)) = F(z_p) + (t_n - z_p)F'(z_p) + \frac{1}{2}(t_n - z_p)^2 F''(z_p) + o(t_n - z_p)^2$$

Давайте упростим это выражение, раскрыв t_n и применив свойство квантиля $F(z_p) = p$:

$$F(t_n(x)) = p + x\sqrt{\frac{pq}{n}} + \frac{1}{2}\frac{x^2 pq}{n} \cdot \frac{f'(z_p)}{f^2(z_p)} + o(\frac{1}{n}), n \to +\infty$$

Теперь должны расписать приближение $\ln\left(\frac{F(t_n(x))}{p}\right)$, используя формулу $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, причём в квадрате нам нужен будет только $x\sqrt{\frac{pq}{n}}$:

$$\ln\left(\frac{F(t_n(x))}{p}\right) = x\sqrt{\frac{q}{pn}} + \frac{1}{2}\frac{x^2 q}{n}\frac{f'(z_p)}{f^2(z_p)} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{x^2}{2}\frac{q}{np}$$

Аналогично разложив для $\ln\left(\frac{1-F(t_n(x))}{q}\right)$, получим

$$\ln A_3(n) \to -\frac{x^2}{2}$$

Таким образом, $p_{\eta_n(x)} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ и эта сходимость равномерна на $\forall[-N, N]$.

Используя теорему из теории вероятностей,

$$\eta_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

□

Определение 8.3. **Медианой** распределения P называется $\frac{1}{2}$ квантиль.

Выборочной медианой называется

$$\hat{\mu} = \begin{cases} X_{(k)}, n = 2k+1 \\ \frac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2}, n = 2k \end{cases}$$

Теорема 8.2. *О выборочной медиане.*

В условиях теоремы о выборочной квантили:

$$\sqrt{n}(\hat{\mu} - z_{\frac{1}{2}}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4f^2(z_{\frac{1}{2}})}\right)$$

9 Сравнение оценок, функция потерь и функция риска

Определение 9.1. Борелевская неотрицательная функция $g(x, y)$ называется **функцией потерь**.

Если $\theta^*(X)$ – оценка, то $g(\theta^*(X), \theta)$ называется **величиной потерь**.

Определение 9.2. Если задана функция потерь g, то **функцией риска** оценки θ^* называется $R(\theta^*, \theta) = \mathbb{E}_\theta g(\theta^*, \theta)$

Определение 9.3. Оценка $\theta^*(X)$ лучше оценки $\hat{\theta}(X)$ в **равномерном подходе**, если

$$\forall \theta \in \Theta : \ R(\theta^*(X), \theta) \leqslant R(\hat{\theta}(X), \theta)$$

и для некоторого θ неравенство строгое.

Определение 9.4. Оценка $\theta^*(X)$ называется наилучшей в **минимаксном подходе**, если

$$\sup_{\theta \in \Theta} R(\theta^*(X), \theta) = \inf_{\hat{\theta}} \sup_{\theta \in \Theta} R(\hat{\theta}(X), \theta)$$

то есть у $\theta^*(X)$ наименьший максимум функции риска.

Определение 9.5. Предположим, что на Θ задано некоторое **априорное** распределение вероятности Q и θ выбирается случайно в соответствии с распределением Q.

Если $\hat{\theta}(X)$ – оценка θ и $R(\hat{\theta}, \theta)$ – её функция риска, тогда

$$R(\hat{\theta}(X)) = \mathbb{E}_\theta R(\hat{\theta}(X), \theta) = \int_\Theta R(\hat{\theta}(X), t) Q(dt)$$

Оценка $\theta^*(X)$ называется наилучшей в **байесовском** подходе, если

$$R(\theta^*(X)) = \min_{\hat{\theta}} R(\hat{\theta}(X))$$

Определение 9.6. Пусть $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ – две асимптотически нормальных оценки параметра θ с дисперсиями $\sigma_1^2(\theta), \sigma_2^2(\theta)$.

Оценка $\hat{\theta}_1$ лучше $\hat{\theta}_2$ в **асимптотическом подходе**, если

$$\forall \theta \in \Theta : \ \sigma_1^2(\theta) \leqslant \sigma_2^2(\theta)$$

10 Понятие плотности в дискретном случае

Определение 10.1. Считающей мерой μ на $\mathbb{Z}$ называется функция $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$, определённая по правилу

$$\mu(B) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{I}\{k \in B\}$$

Определение 10.2. Интегралом по считающей мере от функции $f(x)$ называется

$$\int_\mathbb{R} f(x) \mu(dx) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)$$

если ряд в правой части сходится абсолютно.

Определение 10.3. Пусть ξ – дискретная случайная величина, принимающая значения в $\mathbb{Z}$. Её плотностью относительно считающей меры μ называется функция

$$p(x) = P(\xi = x), x \in \mathbb{Z}$$

Замечание. Всюду далее, когда говорим о плотности, считаем, что либо это обычная плотность в абсолютно непрерывном случае, либо это плотность в дискретном случае по считающей мере на $\mathbb{Z}^n$.

Определение 10.4. Пусть X – наблюдение из неизвестного распределения $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, причём $\forall \theta \in \Theta:\ p_\theta(x)$ имеет плотность $p_\theta(x)$ по одной и той же мере μ.

В этом случае семейство $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ называется **доминируемым** относительно μ.

Определение 10.5. Пусть X – наблюдение с неизвестным распределением $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, где семейство доминируемо относительно μ (значит, что либо все дискретные, либо все абсолютно непрерывные).

Функцией правдоподобия называют

$$f_\theta(X) := p_\theta(X)$$

где $p_\theta(X)$ – плотность p_θ по мере μ.

Пример. Пусть $X = (X_1, \cdots, X_n)$ – выборка с плотностью $p_\theta(x)$, то $f_\theta(X) = \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i)$

Определение 10.6. Определим

$$L_\theta(X) = \ln f_\theta(X)$$

называется **логарифмической функцией правдоподобия**.

Определение 10.7. Случайная величина $u_\theta(x) = \frac{\partial}{\partial\theta} L_{p_\theta}(x)$ называется **вкладом** наблюдения X, и функция $I_X(\theta) = \mathbb{E}_\theta u_\theta^2(X)$ называется **количеством информации** о параметре θ содержащемся в X (информация **по Фишеру**).

Замечание. Будем считать, что выполнено условие **регулярности**:

1. $\Theta \subset \mathbb{R}$ – открытый интервал
2. Множество $A = \{x \in \mathcal{X} \mid p_\theta(x) > 0\}$ не зависит от θ.
3. Для $\forall$ статистики $S(X)$ с условием $\mathbb{E}_\theta S^2(X) < +\infty$ выполнено $\forall \theta$ выполнено

   $$\frac{\partial}{\partial\theta} \int_A S(x) p_\theta(x) \mu(dx) = \int_A S(x) \frac{\partial}{\partial\theta} p_\theta(x) \mu(dx)$$

   Левая часть это $\frac{\partial}{\partial\theta} \mathbb{E}_\theta S(X)$, а правая часть

   $$\int_A S(x) \frac{\partial}{\partial\theta} p_\theta(x) \frac{1}{p_\theta(x)} p_\theta(x) \mu(dx) = \mathbb{E}_\theta S(X) \frac{\partial}{\partial\theta} \ln p_\theta(X) = \mathbb{E}_\theta S(X) u_\theta(X)$$

4. $\forall \theta \in \Theta:\ 0 < I_X(\theta) < +\infty$

Теорема 10.1. *Неравенство Рао-Крамера.*

Пусть выполнено условие регулярности и $\hat{\theta}(X)$ – несмещённая оценка $\tau(\theta)$ с условием

$$\forall\theta \in \Theta: \ \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}(X))^2 < +\infty$$

Тогда

$$\mathbb{V}_\theta\hat{\theta}(X) \geqslant \frac{(\tau'(\theta))^2}{I_X(\theta)}$$

Доказательство. В силу условия 3, при $S(X) = 1$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}_\theta S(X) = \frac{\partial}{\partial\theta}1 = \mathbb{E}_\theta u_\theta(X) = 0$$

Также в силу условия 3, при $S(X) = \hat{\theta}(X)$ имеем (в силу несмещённости нашей оценки)

$$\tau'(\theta) = \mathbb{E}_\theta\hat{\theta}(X)u_\theta(X)$$

Умножим первое равенство на $-\tau(\theta)$ и сложим со вторым:

$$\tau'(\theta) = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \tau(\theta))u_\theta(X)$$

Возведём обе части в квадрат и применим КБШ:

$$(\tau'(\theta))^2 \leqslant \Big(\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta} - \tau(\theta))^2\Big) \cdot \big(\mathbb{E}_\theta u_\theta^2(X)\big) = \mathbb{V}_\theta\hat{\theta} \cdot I_X(\theta)$$

□

Определение 10.8. Если в неравенстве Рао-Крамера для оценки $\hat{\theta}(X)$ достигается равенство, то $\hat{\theta}(X)$ называется **эффективной**.

Теорема 10.2. *Критерий эффективности.*

В условиях регулярности $\hat{\theta}(X)$ эффективная для $\tau(\theta) \Leftrightarrow \hat{\theta}(X)$ – линейная функция от $u_\theta(X)$ вида $\hat{\theta} - \tau(\theta) = c(\theta)u_\theta(X)$.

Причём последнее равенство может быть выполнено $\Leftrightarrow c(\theta) = \frac{\tau'(\theta)}{I_X(\theta)}$

Доказательство. Пусть $\hat{\theta}$ – эффективная для $\tau(\theta) \Rightarrow \tau'(\theta) = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \tau(\theta))u_\theta(X)$. А мы знаем, что равенство в КБШ достигается $\Leftrightarrow (\hat{\theta} - \tau(\theta))$ и $u_\theta(X)$ линейно зависимы:

$$\alpha(\theta) + \beta(\theta)(\hat{\theta} - \tau(\theta)) + \gamma(\theta)u_\theta(X) = 0$$

Матожидания рассматриваемых величин равны нулю $\Rightarrow \alpha(\theta) \equiv 0$.

Можем поделить обе части на $\gamma(\theta) \neq 0$, это верно ведь иначе

$$\mathbb{V}_\theta\beta(\theta)u_\theta(X) = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \perp$$

То есть $\hat{\theta} - \tau(\theta) = r(\theta)u_\theta(X)$.

Обратно, пусть $\hat{\theta} - \tau(\theta) = c(\theta)u_\theta(X) \Rightarrow \hat{\theta} = \tau(\theta) + c(\theta)u_\theta(X) \Rightarrow \hat{\theta}$ – несмещённая оценка $\tau(\theta)$. Умножим обе части на $u_\theta(X)$ и берём матож:

$$\tau'(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta} - \tau(\theta))u_\theta(X) = \mathbb{E}_\theta c(\theta)u_\theta^2(X) = c(\theta)I_X(\theta)$$

□

Замечание. Эффективная оценка $\tau(\theta)$ – наилучшая оценка $\tau(\theta)$ в классе несмещённых L_2 оценок в равномерном подходе с квадратичной функцией потерь.

11 Экспоненциальные семейства распределений

Определение 11.1. Пусть $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_k)$

Экспоненциальным семейством распределений называют все распределения, обобщённая плотность которых имеет вид

$$h(x) \exp\left(\sum_{i=1}^{k} a_i(\theta) T_i(x) + V(\theta)\right)$$

и где $a_0(\theta) \equiv 1, a_1(\theta), \cdots, a_k(\theta)$ линейно независимы на Θ.

Замечание. Проверим, существует ли эффективная оценка, если семейство экспоненциальное:

$$f_\theta(x) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i); \quad p_\theta(x_i) = h(x_i) e^{a(\theta)T(x_i)+V(\theta)}$$

Тогда распишем вклад

$$u_\theta(X) = \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(x) = \frac{\partial}{\partial\theta}(a(\theta) \sum_{i=1}^{n} T(x_i) + nV(\theta)) = a'(\theta) \sum_{i=1}^{n} T(x_i) + nV'(\theta)$$

Работаем в предположении $T \neq const$, так как иначе

$$p_\theta(x) = h(x)e^{b(\theta)} \Rightarrow \int_{\mathcal{X}} p_\theta(x) d\mu = 1 \Rightarrow b(\theta) = const \Rightarrow p_\theta(x) \text{ не зависит от } \theta$$

Пусть также $a'(\theta) \neq 0$, тогда

$$\frac{1}{na'(\theta)} u_\theta(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} T(x_i)}{n} - \frac{-V'(\theta)}{a'(\theta)}$$

По критерию эффективности получаем, что $T^*(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} T(x_i)}{n}$ является эффективной оценкой для $\tau(\theta) = \frac{-V'(\theta)}{a'(\theta)}$

Обратно, пусть $\exists$ эффективная оценка T для $\tau(\theta)$, пусть $\forall\theta :\ \tau'(\theta) \neq 0$. Значит достигается равенство в Рау-Крамера:

$$\exists \tau'(\theta) < +\infty :\ \mathbb{V}_\theta \hat{\theta} = \frac{(\tau'(\theta))^2}{I_X(\theta)} < +\infty \Rightarrow \hat{\theta} \in L_2$$

Значит

$$\forall\theta :\ T(X) - \tau(\theta) = c(\theta) u_\theta(x) = \frac{\tau'(\theta)}{I_X(\theta)} u_\theta(X)$$

Выразив вклад, получим

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(X) = \frac{T(X) - \tau(\theta)}{c(\theta)}$$

Проинтегрируем, предполагая корректность:

$$\ln f_\theta(X) = \int \frac{T(X) - \tau(\theta)}{c(\theta)} d\theta + g(X)$$

Возведём экспоненту в обе части равенства и получим, что правдоподобие имеет нужный нам вид. Но как перейти от произведения плотностей с плотности определённого X_i? Зафиксируем остальные $X_j, j \neq i$ из носителя A и заметим, что вид остался экспоненциальным.

12 Достаточные статистики

Определение 12.1. Статистика $T(X)$ называется **достаточной** для параметра θ, если

$$P_\theta(X \in B \mid T(X) = t)$$

не зависит от θ.

Теорема 12.1. *Критерий факторизации Неймана-Фишера.*

Пусть $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ – доминирующее семейство. Статистика T является достаточной для параметра $\theta \Leftrightarrow$ функция правдоподобия $f_\theta(X)$ представима в виде

$$f_\theta(X) = \psi(T(X), \theta)h(X)$$

где функции ψ, h неотрицательны, $\psi(t, \theta)$ измерима по t и h измерима по X.

Доказательство. Для дискретного случая.

То есть $f_\theta(x) = P_\theta(X = x)$. Пусть $f_\theta(X) = \psi(S(X), \theta)h(X) \Rightarrow$

$$P_\theta(X = x \mid T(X) = t) = \frac{P_\theta(X = x, T(X) = t)}{P_\theta(T(X) = t)} = \begin{cases} 0, T(X) \neq t \\ \frac{P_\theta(X=x)}{\sum_{y\colon T(y)=t} P_\theta(X=y)} = \frac{\psi(T(X),\theta)h(X)}{\sum_{y\colon T(y)=t}\psi(T(y),\theta)h(y)} \end{cases}$$

После сокращения имеем

$$P_\theta(X = x \mid T(X) = t) = \begin{cases} 0, T(X) \neq t \\ \frac{h(X)}{\sum_{y\colon T(y)=t} h(y)}, T(X) = t \end{cases}$$

То есть получили что-то, независящее от θ, что подходит под определение достаточной статистики.

Обратно, пусть статистика T достаточная:

$$f_\theta(x) = P_\theta(X = x) = P_\theta(X = x, T(X) = T(x)) =$$
$$P_\theta(T(X) = T(x)) \cdot P_\theta(X = x \mid T(X) = T(x)) = \psi(T(x), \theta)h(x)$$

□

Лемма 12.1. *Пусть $\eta \in L_1$, тогда $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta \mid \xi) - \mathbb{E}\eta)^2 \leqslant \mathbb{V}\eta$.*

Более того, если $\eta \in L_2$, то равенство в неравенстве выше достигается $\Leftrightarrow \eta = \mathbb{E}(\eta \mid \xi) \Leftrightarrow \eta$ является ξ-измеримой.

Доказательство. Докажем лишь для L_2.

Пусть $\varphi = \mathbb{E}(\eta \mid \xi)$. Тогда по неравенству Йенсена

$$\varphi^2 = (\mathbb{E}(\eta \mid \xi))^2 \leqslant \mathbb{E}(\eta^2 \mid \xi)$$

Навесив матожидание, получим $\mathbb{E}\varphi^2 \leqslant \mathbb{E}\eta^2 < +\infty$. Далее,

$$\mathbb{V}\eta = \mathbb{E}(\eta - \mathbb{E}\eta)^2 = \mathbb{E}(\eta - \varphi + \varphi - \mathbb{E}\eta)^2 = \mathbb{E}(\eta - \varphi)^2 + \mathbb{E}(\varphi - \mathbb{E}\eta)^2 + 2\mathbb{E}(\eta - \varphi)(\varphi - \mathbb{E}\eta)$$

Распишем последнее слагаемое:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}((\eta - \varphi)(\varphi - \mathbb{E}\eta) \mid \xi)) = \mathbb{E}(\varphi - \mathbb{E}\eta)\mathbb{E}((\eta - \varphi) \mid \xi) = 0$$

Заметим, что мы всё доказали: оценим первое слагаемое нулём снизу и всё получится. □

Теорема 12.2. *Колмогорова-Блэкуэлла-Рао.*

Пусть $T(X)$ – достаточная статистика для θ и пусть $d(X)$ – несмещённая для $\tau(\theta)$, положим $\varphi(T) = \mathbb{E}_\theta(d(X) \mid T)$. Тогда $\varphi(T)$ зависит от выборки только через $T(X)$ (и не зависит от θ), причём

$$\mathbb{E}_\theta\varphi(T) = \tau(\theta); \quad \mathbb{V}_\theta\varphi(T) \leqslant \mathbb{V}_\theta d(X)$$

Доказательство. Рассмотрим $\varphi(T) := \mathbb{E}_\theta(d(X)|T)$. Распределение X (при фиксированном значении T) не зависит от $\theta \Rightarrow$ распределение $d(X)$ тоже не зависит $\Rightarrow \mathbb{E}_\theta(d(X) \mid T)$ является измеримой функцией только от T (и, как функция, не зависит от θ) $\Rightarrow \varphi(T)$ действительно статистика.

Очевидно, что $d(X)$ – несмещённая $\Rightarrow \varphi$ тоже (св-во УМО).

$$\mathbb{V}_\theta\varphi(T) = \mathbb{E}_\theta(\varphi - \mathbb{E}_\theta\varphi)^2 = \mathbb{E}_\theta(\mathbb{E}_\theta(d \mid T) - \mathbb{E}_\theta d)^2 \overset{\text{по лемме}}{\leqslant} \mathbb{V}_\theta d(X)$$

Если $d \in L_2 \Rightarrow$ неравенство переходит в равенство $\Leftrightarrow d = \varphi \Leftrightarrow d(X)$ – борелевская функция от T. □

13 Полные статистики, оптимальные оценки

Определение 13.1. Наилучшая оценка $T(\theta)$ в классе несмещённых оценок в равномерном подходе с квадратичной функцией потерь называется **оптимальной** оценкой.

Определение 13.2. Статистика $S(X)$ называется **полной** для параметра θ, если из условия

$$\forall\theta \in \Theta: \ \mathbb{E}_\theta f(S(X)) = 0$$

следует, что

$$\forall\theta \in \Theta: \ f(S(X)) \overset{P_\theta \text{ п.н.}}{=} 0$$

Теорема 13.1. *Лемана-Шеффе.*

Пусть T – полная достаточная статистика для $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, $d(X)$ – несмещённая для $\tau(\theta)$. Тогда $\varphi = \mathbb{E}(d \mid T)$ – несмещённая оценка с равномерно минимальной дисперсией для $\tau(\theta)$.

Если $\mathbb{V}_\theta(\varphi) < +\infty$, то φ – оптимальная оценка.

Доказательство. Очевидно, что φ несмещённая по той же логике, что и в теореме Колмогорова-Блекуэлла-Рао (свойство УМО).

Пусть $\tilde{d}$ – другая несмещённая оценка. Тогда улучшим её $\tilde{\varphi} = \mathbb{E}(\tilde{d} \mid T)$ не хуже d по (12) и несмещённая.

Имеем

$$\mathbb{E}_\theta(\varphi(T) - \tilde{\varphi}(T)) = \tau(\theta) - \tau(\theta) = 0$$

то есть для $h = \varphi - \tilde{\varphi}$ имеем $\forall\theta: \ \mathbb{E}_\theta h(T) = 0$. В силу полноты T получаем, что $\forall\alpha:$ $h(T) \overset{P_\theta\text{-п.н.}}{=} 0$. То есть наши оценки на самом деле равны почти наверное.

То есть любая несмещённая оценка, пройдя процедуру улучшения с помощью T почти наверное превращается в φ.

То есть

$$\forall\tilde{d}: \ \mathbb{V}_\theta(\tilde{d}) \geqslant \mathbb{V}_\theta(\tilde{\varphi}) = \mathbb{V}_\theta(\varphi)$$

Пусть $\mathbb{V}_\theta(\varphi) < +\infty$, теперь предполагаем, что неравенство на самом деле равенство.

Это по (12.1) означает, что $\tilde{d}$ уже была T-измеримой, то есть $\tilde{d} = \tilde{\varphi}$ □

Теорема 13.2. *Об экспоненциальном семействе.*

Пусть X_i – выборка из экспоненциального семейства. Если область значений векторной функции

$$\overline{a}(\theta) = (a_1(\theta), \cdots, a_k(\theta)), \theta \in \Theta$$

содержит k-мерный параллелепипед, то

$$T(X) = (\sum_{i=1}^{n} T_1(X_i), \cdots, \sum_{i=1}^{n} T_k(X_i))$$

является полной и достаточной для θ.

Замечание. Алгоритм поиска оптимальной оценки:

1. Ищем достаточную статистику T
2. Проверяем на полноту
3. Если полная, то решаем уравнение

$$\forall \theta \in \Theta : \ \mathbb{E}_\theta g(T(X)) = \tau(\theta)$$

14 Доверительные интервалы

Определение 14.1. Пара статистик $(T_1(X), T_2(X))$ называются **доверительным интервалом** уровня доверия γ для параметра θ, если

$$\forall \theta \in \Theta : \ P_\theta(T_1(X) \leqslant \theta \leqslant T_2(X)) \geqslant \gamma$$

Если равество достигается при всех $\theta \in \Theta$, то доверительный интервал называют **точным**.

Определение 14.2. Множество $S(X) \subset \Theta$ называют **доверительным множеством** уровня доверия γ для параметра θ, если

$$\forall \theta \in \Theta : \ P_\theta(S(X) \in \theta) \geqslant \gamma$$

Замечание. Метод центральных статистик.

Пусть $\exists$ известная одномерная функция $G(x, \theta)$, такая что её распределение не зависит от параметра θ. Такая функция G называется **центральной статистикой**.

Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$ таковы, что $\gamma_2 - \gamma_1 = \gamma$ и при $i = 1, 2 : \ \exists g_i - \gamma_i$-квантиль $G(X, \theta)$.

Тогда

$$\forall \theta \in \Theta : \ P_\theta(g_1 \leqslant G(X, \theta) \leqslant g_2) \geqslant \gamma_2 - \gamma_1 = \gamma$$

Введём обозначение

$$S(X) = \{\theta \in \Theta \mid g_1 \leqslant G(X, \theta) \leqslant g_2\}$$

для $\forall \theta \in \Theta$ имеем

$$P_\theta(\theta \in S(X)) \geqslant \gamma$$

то есть $S(X)$ – доверительное множество уровня доверия γ.

Докажем корректность данного метода, заметим, что

$$g_i = F^{-1}(\gamma_i) = \inf\{x : \ F(x) \geqslant \gamma_i\} \Rightarrow F(g_i) \geqslant \gamma_i$$

и при $t < g_i :\ F(t) < \gamma_i \Rightarrow$ устремляя $t \to g_i - 0$ получим $F(g_i - 0) \leqslant \gamma_i$. Тогда

$$P_\theta(g_1 \leqslant G(X,\theta) \leqslant g_2) = P_\theta(G(X,\theta) \leqslant g_2) - P_\theta(G(X,\theta) < g_1) \geqslant \gamma$$

что и требовалось.

Для поиска центральных статистик в общем случае можно пользоваться следующей леммой:

Лемма 14.1. $X_1, \cdots, X_n$ *– независимые одинаково распределённые с непрерывной функцией распределения* $F(x)$. *Тогда*

$$G(X_1, \cdots, X_n) = -\sum_{i=1}^{n} \ln F(X_i) \sim \Gamma(1, n)$$

Доказательство. Заметим, что

$$P(F(y) \leqslant x) = P(y \leqslant F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x, x \in [0,1] \Rightarrow F(x) \sim U[0,1]$$

Несложным упражнением докажите, что $-\ln U[0,1] \sim \exp(1)$ и тогда из свойства аддитивности экспоненциальных распределений, утверждение леммы станет очевидным. □

Определение 14.3. Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – выборка неограниченного размера из неизвестного распределения $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$. Последовательность пар статистик

$$(T_n^{(1)}(X_1, \cdots, X_n), T_n^{(2)}(X_1, \cdots, X_n))$$

называют **асимптотическим доверительным интервалом** уровня доверия γ для θ, если

$$\forall \theta \in \Theta :\ \underline{\lim}_{n\to+\infty} P_\theta(T_n^{(1)}(X_1, \cdots, X_n) \leqslant \theta \leqslant T_n^{(2)}(X_1, \cdots, X_n)) \geqslant \gamma$$

Если неравенство выше заменить на равенство (при условии, что нижний предел равен верхнему), то асимптотический доверительный интервал называют **точным**.

Замечание. Построение асимптотических интервалов.

Пусть $\hat\theta_n(X_1, \cdots, X_n)$ – асимптотически нормальная оценка θ с асимптотической дисперсией $\sigma^2(\theta) > 0$, то есть

$$\forall \theta \in \Theta :\ \sqrt{n}(\hat\theta_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$$

Тогда при условии $\sigma(\theta)$ – непрерывна, будем иметь, что $\hat\theta_n \xrightarrow{P_\theta} \theta$. Значит

$$\sqrt{n}\frac{\hat\theta_n - \theta}{\sigma(\hat\theta_n)} = \sqrt{n}\frac{\hat\theta_n - \theta}{\sigma(\theta)} \cdot \frac{\sigma(\theta)}{\sigma(\hat\theta_n)} \xrightarrow{d_\theta} \sqrt{n}\frac{\hat\theta_n - \theta}{\sigma(\theta)} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

по лемме Слуцкого.

И теперь не сложно догадаться, как будет выглядеть доверительный интервал

$$P_\theta\left(\sqrt{n}\left|\frac{\hat\theta_n - \theta}{\sigma(\hat\theta_n)}\right| < u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} \gamma$$

15 Метод максимального правдоподобия

Определение 15.1. Пусть X – наблюдения с функцией правдоподобия $f_\theta(X)$, тогда оценкой параметра θ по **методу максимального правдоподобия** (ОМП) называется такая статистика $\hat{\theta}(X)$, что

$$\hat{\theta}(X) = \text{argmax}_{\theta\in\Theta} f_\theta(X)$$

Замечание. Будем использовать новые условия регулярности:

1. $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ – параметрическое семейство доминируемое относительно меры μ, причём $P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$ при $\theta_1 \neq \theta_2$ и для $\forall\theta$ определена $P_\theta(X)$ – плотность P_θ относительно меры μ.
2. $A = \{x \in X :\ P_\theta(x) > 0\}$ не зависит от θ
3. Наблюдение X есть выборка из неизвестного распределения $p \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$
4. Θ – открытый интервал в $\mathbb{R}$ (возможно бесконечный)
5. Функция $p_\theta(x)$ непрерывно дифференцируемая по θ при всех $x \in A$.
6. $p_\theta(x)$ трижды непрерывно дифференцируема по $\theta\, \forall x \in A$.
7. Интеграл $\int_A p_\theta(x)\mu(dx)$ трижды дифференцируем по θ под знаком интеграла.
8. $\mathbb{E}(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p_\theta(X_1))^2 = i(\theta) \in (0,\, +\infty)$
9. Выполняется

$$\forall\theta_0 \in \Theta\, \exists c > 0\, \exists H(x)\, \forall\theta \in (\theta_0 - c, \theta_0 + c)\, \forall x \in A :\ \left|\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\ln p_\theta(x)\right| < H(x)$$

   причём $\mathbb{E}_{\theta_0} H(X_1) < +\infty$

Теорема 15.1. *Экстремальное свойство правдоподобия.*
Пусть выполнены условия регулярности 1-3. Тогда

$$\forall\theta_0, \theta \in \Theta\ \theta_0 \neq \theta :\ P_{\theta_0}(f_{\theta_0}(X_1, \cdots, X_n) > f_\theta(X_1, \cdots, X_n)) \overset{n\to+\infty}{\to} 1$$

Доказательство. Пусть $X_i \in A$. Заметим, что

$$f_{\theta_0}(X_1, \cdots, X_n) > f_\theta(X_1, \cdots, X_n) \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln\frac{f_\theta(X_1, \cdots, X_n)}{f_{\theta_0}(X_1, \cdots, X_n)} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln\frac{f_\theta(X_i)}{f_{\theta_0}(X_i)} < 0$$

Хотим применить ЗБЧ, а для этого нужно

$$\mathbb{E}_\theta \frac{f_\theta(X)}{f_{\theta_0}(X)} < 0$$

то есть

$$\int_A \ln\frac{p_\theta(x)}{p_{\theta_0}(x)} p_{\theta_0}(x)dx = \int_A \ln\left(1 + \frac{p_\theta(x)}{p_{\theta_0}(x)} - 1\right) p_{\theta_0}(x)dx \leqslant$$
$$\int_A \left(\frac{p_\theta(x)}{p_{\theta_0}(x)} - 1\right) p_{\theta_0}(x) = \int_A p_\theta(x)dx - \int_A p_{\theta_0}(x)dx = 1 - 1 = 0$$

Причём равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\mu(x \in A: \, p_\theta(x) \neq p_{\theta_0}(x)) = 0$$

что противоречит первому условию регулярности. $\square$

Следствие. *Если Θ конечно, то ОМП существует, единственная с вероятностью $\to 1$, и состоятельная*

Доказательство. Максимум $f_\theta(X_1, \cdots, X_n)$ с ростом n будет достигаться на истинном значении θ с вероятностью $\to 1$.

Почему вообще оценка измеримая?

$$\{x: \, \mathrm{argmax} \cdots = \theta_2\} = \{f_{\theta_{1(x)}} < f_{\theta_2}(x)\} \cap \{f_{\theta_3}(x) < f_{\theta_2}(x)\} \cap \cdots$$

то есть конечное пересечение измеримых множеств.

Как проверить, что $\exists$ измеримая версия ОМП, если максимум может достигаться при разных θ?

Если кандидатов несколько, то выберем с наименьшими номером. Тогда если введём $c_{i<j} = \{x: \, f_{\theta_i}(x) < f_{\theta_j}(x)\}$, то

$$\{\hat{\theta} = \theta_1\} = \cap_{j \neq 1} c_{j \leqslant 1}; \quad \{\hat{\theta} = \theta_2\} = c_{2>1} \cap (\bigcap_{j \geqslant 3} c_{j \leqslant 2}); \quad \cdots$$

$\square$

Определение 15.2. **Уравнением правдоподобия** называют

$$\frac{\partial \ln f_\theta}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Теорема 15.2. *Аналог состоятельности ОМП.*

Пусть выполняются условия регулярности 1-5 и пусть элементы выборки имеют распределение P_{θ_0}. Тогда $\exists$ отображение $\hat{\theta}_n(X_1, \cdots, X_n, \theta_0)$ со значениями в Θ:

$$(P_{\theta_0})^*(\{\theta_n \text{ не решение уравнения правдоподобия}\}) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$$

и

$$\forall \varepsilon > 0: \, (P_{\theta_0})^*(\{|\hat{\theta}_n - \theta_0| > \varepsilon\}) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$$

Доказательство. Определим $\hat{\theta}_n$, фиксируя $X_1, \cdots, X_n$ из множества A.

Если у уравнения $\frac{\partial \ln f}{\partial \theta} = 0$ есть хотя бы 1 корень, то возьмём ближайший корень к θ_0 (в силу непрерывности $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ такое возможно, так как предел последовательности корней сам является корнем).

Если же у уравнения нет корней, то доопределим $\hat{\theta}_n := \theta_0$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$, что $[\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon] \subset \Theta$. Рассмотрим

$$s_n(\theta_0, \varepsilon) = \{x: \, f_{\theta_0 - \varepsilon}(x_1, \cdots, x_n) < f_{\theta_0}(x_1, \cdots, x_n), f_{\theta_0}(\cdots) > f_{\theta_0 + \varepsilon}(\cdots)\}$$

Но по предыдущей теореме мы можем сказать, что $P_{\theta_0}(s_n) \overset{n \to +\infty}{\to} 1$.

Далее, $\forall x \in s_n \exists$ точка $\tilde{\theta}_n$, в которой f_θ имеет локальный максимум $\Rightarrow f'(\tilde{\theta}_n) = 0$, причём $\tilde{\theta}_n \in U_\varepsilon(\theta_0)$.

А так как $\hat{\theta}_n$ – ближайший к θ_0 корень, то $|\hat{\theta}_n - \theta_0| < \varepsilon$.

Тогда $\{\hat{\theta}_n$ - не решение уравнения$\} \subset \{\mathcal{X}^n \setminus s_n\}$, навесив внешнюю меру, то получим первое неравенство из теоремы.

Теперь осталось заметить, что если у нас не выполненяется неравенство $|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon$, то мы точно не в s_n, а значит снова сможем оценить сверху мерой $(P^*_{\theta_0})(\mathcal{X}^n \setminus s_n) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$ □

Замечание. Почему это почти состоятельность? Не проверяли измеримость $\hat{\theta}_n$ и всё равно $\hat{\theta}_n$ зависит от θ_0.

Если корней несколько, то неясно, какой ближе к θ_0.

Не факт, что корень – глобальный максимум.

Корень существует не всегда.

Следствие. *Пусть выполняются условия регулярности 1-5 и* $\forall n \, \forall X_1, \cdots, X_n : \exists!$ *решение* $\hat{\theta}_n(X_1, \cdots, X_n)$ *уравнения правдоподобия и пусть оно является измеримой функцией от выборки.*

Тогда $\hat{\theta}_n$ *– состоятельная оценка* θ *и с вероятностью стремящейся к 1,* $\hat{\theta}_n$ *является ОМП.*

Доказательство. Первая часть теоремы следует из предыдущей.

Как и ранее, с большой вероятностью выполняется

$$f_{\theta_0 - \varepsilon}(x_1, \cdots, x_n) < f_{\theta_0}(x_1, \cdots, x_n), f_{\theta_0 + \varepsilon}(x_1, \cdots, x_n) < f_{\theta_0}(x_1, \cdots, x_n)$$

На отрезке $[\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon]$ достигается максимум, это следует из непрерывности плотности, а это следует из предположения регулярности.

Этот максимум достигается на внутренней точке отрезка, которую обозначим θ^*_n, и в ней $\frac{\partial}{\partial \theta} f = 0$, так как корень единственный, то $\hat{\theta}_n = \theta^*_n$.

То есть $\hat{\theta}_n$ – локальный максимум, но пусть существует $\tilde{\theta}_n$, в которой значение f не меньше, чем в $\hat{\theta}_n$. Но тогда между $\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n$ будет точка, в которой занулится производная (локального минимума), что противоречит с единственностью корня уравнения правдоподобия. □

16 Дополнительные свойства ОМП

Теорема 16.1. *(б/д)*

В условиях регулярности 1-9 $\forall$ *состоятельной последовательности оценок* $\hat{\theta}_n$*, являющихся решениями уравнения правдоподобия, выполняется*

$$\forall \theta \in \Theta : \ \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \overset{d_\theta}{\to} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{i(\theta)}\right)$$

Теорема 16.2. *Бахадура. (б/д)*

Пусть выполнены условия регулярности 1-9 и $\hat{\theta}_n(X_1, \cdots, X_n)$ *– асимптотически нормальная оценка* θ*, причём* $\sigma(\theta)$ *непрерывна по* θ*. Тогда*

$$\forall \theta \in \Theta : \ \sigma^2(\theta) \geqslant \frac{1}{i(\theta)}$$

Определение 16.1. Если $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n(X_1, \cdots, X_n) - \theta) \overset{d_\theta}{\to} \mathcal{N}(0, \frac{1}{i(\theta)})$, то $\hat{\theta}_n$ называется **асимптотически эффективной** оценкой θ.

Утверждение 16.1. *Пусть выполняются условия регулярности для неравенство Крамера-Рао, $\hat{\theta}(X)$ – эффективная оценка и равенство из критерия эффективности для $\hat{\theta}(X)$ выполняется $\forall x\, \forall \theta$. Тогда $\hat{\theta}(X)$ – ОМП.*

Доказательство. Распишем это равенство

$$\hat{\theta}(X) - \theta = \frac{1}{I_X(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_\theta(X)$$

Тогда при $\theta < \hat{\theta}(X): \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(X) > 0$, а при $\theta > \hat{\theta}(X): \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(X) < 0 \Rightarrow \theta = \hat{\theta}(X)$ – точка максимума $\ln f_\theta(X) \Rightarrow$ ОМП. □