T4

$\xi \sim p(t) = a\{(-1;1)\setminus 0\} + \frac{b}{2}\{0\} + \frac{b}{2}\{2\}$

$\int_{-\infty}^{\infty} p\,dt = 1$, $\int_{-1}^{1} a\,dx + b = 1$

$2a + b = 1$

$a = \theta \Rightarrow b = 1 - 2\theta$, $\theta \in [0; \frac{1}{2})$

$p(t,\theta) = \theta\{(-1;1)\setminus 0\} + \frac{1-2\theta}{2}\{0\} + \frac{1-2\theta}{2}\{2\}$

$\overline{X_n}$ — выборка

1) ОММ

$\alpha_1 = M\xi = \int_{-1}^{1} x\theta\,dx + \frac{1-2\theta}{2}\cdot 2 = 1 - 2\theta$

$M\xi^2 = \int_{-1}^{1} \theta x^2 dx + \frac{1-2\theta}{2}\cdot 4 = 2 - \frac{10}{3}\theta$

$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi = 1 + \frac{2}{3}\theta - 4\theta^2$

$\alpha_1 = \widehat{\alpha_1} = \overline{x}$

$1 - 2\theta = \overline{x} \longrightarrow \widehat{\theta} = \frac{1}{2}(1 - \overline{x})$

несмещ:

$M[\tilde{\theta}] = M[\frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{x}}{2}] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} M\xi = \theta \Rightarrow$ несмещ

сост:

$D[\tilde{\theta}] = \frac{1}{4} D[\bar{x}] = \frac{1}{4n}(1 + \frac{2}{3}\theta - 4\theta^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ сост.

Эффективность

а) регулярность модели:

1) непр. дифф

2) $\int (\frac{\partial}{\partial\theta} p)\, dx = 0$

$\int_{-1}^{1} (\frac{\partial}{\partial\theta} p)\, dx + (\frac{\partial}{\partial\theta} \cdot \frac{1-2\theta}{2}) + (\frac{\partial}{\partial\theta} \cdot \frac{1-2\theta}{2}) =$

$= 2 - 2 = 0$

3) $I(\theta) = \int (\frac{\partial \ln p}{\partial\theta})^2 p\, dx = \int^{1} \frac{1}{\theta^2} \cdot \theta\, dx +$

$+ \frac{4}{(1-2\theta)} \cdot (\frac{1-2\theta}{2}) \cdot 2 = \frac{2}{\theta} + \frac{4}{1-2\theta} = \frac{4\theta + 2 - 4\theta}{\theta(1-2\theta)} =$

$= \frac{2}{\theta(1-2\theta)} > 0$ и непр. на $(0; \frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ регулярна

б) рег

$D[\tilde{\theta}_1]$

на $[0,$

регуляр

$\Rightarrow D[$

$\frac{1 + \frac{2}{3}\theta}{4n}$

на $(0,$

2) ОМП

$L(\theta) =$

т рав

$\ln(L)$

$(\ln L)'_\theta$

$(\ln L)''_\theta =$

$\Rightarrow$ та

б) рег. оценки

$D[\tilde{\theta}_1]$ огр. на $\forall$ компакте

из $(0; \frac{1}{2})$, ~~рег~~

регулярна

$\Rightarrow D[\tilde{\theta}_1] \geq \frac{1}{n \cdot I(\theta)} = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$

$\frac{1+\frac{2}{3}\theta-4\theta^2}{4n} \geq \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$

на $(0; \frac{1}{2})$ $>$

2) ОМП

$L(\theta) = \prod p(x_i, \theta) = (1-2\theta)^m \cdot \theta^{n-m}$

m раз из $\{0; 2\}$

$\ln(L) = m\ln(1-2\theta) + (n-m)\ln\theta \to \max$, $\theta \in (0; \frac{1}{2})$

$(\ln L)'_\theta = \frac{-2m}{1-2\theta} + \frac{n-m}{\theta} = 0$

$(\ln L)''_\theta = \frac{-4m}{(1-2\theta)^2} - \frac{n-m}{\theta^2} < 0$ в т. экстр.

$\Rightarrow \max$

$$\frac{2m}{1-2\theta} = \frac{n-m}{\theta}$$

$$2m\theta = (n-m)(1-2\theta)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{n-m}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu$$

несмещ.:

$$M[\tilde{\theta}] = M[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\nu] = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}M\nu = \{M\nu = p = 1-2\theta\} =$$

$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \theta = \theta \implies \text{несмещ.}$$

сост.:

$$D[\tilde{\theta}] = \tfrac{1}{4}D\nu = \left\{D\nu = \frac{p(1-p)}{n}\right\} = \frac{1}{4}\frac{(1-2\theta)\cdot 2\theta}{n} = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\implies$ сост, по дост. усл.

Эффективность:

модель регул.

$D[\tilde{\theta}_2]$ огр. на $\forall$ компакте из $(0;\tfrac{1}{2})$

$\implies$ рег.

$$D[\tilde{\theta}_2] \geq \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

$$\frac{\theta(1-2\theta)}{2n} = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_2$ эффективна

$\Rightarrow \tilde{\theta}_1$ не эффективна