

# Линейная комбинаторика

Даниил Гафни

2019-07-30

1

Сколько существует А) трехзначных чисел? Б) пятизначных чисел? В) пятизначных чисел, в которых все цифры четные? Г) пятизначных чисел, в которых есть хотя бы одна четная цифра?

2

Сколькими способами можно 20 человек разбить на пары?

3

В классе из 25 человек требуется выбрать а) старосту и его заместителя; б) двух дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

4

В классе 10 учеников. Сколькими способами можно разбить этот класс а) на две; б) на три не обязательно равные непустые группы? (Назначения групп различны!)

5

Сколько существует трехзначных чисел, у которых цифры идут по возрастанию?

6

В алфавите племени Умбо–Юмбо всего три буквы: А, У и О. Словом считается любая последовательность букв, содержащая не более, чем 4 буквы. Сколько слов в языке племени Умбо–Юмбо?

7

Назовем число симпатичным, если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует а) пятизначных симпатичных чисел; б) пятизначных не симпатичных чисел?

8

Монету бросают трижды. Сколько различных последовательностей орлов и решек можно получить? А если монету бросать 100 раз?

9

Докажите, что количество способов выбрать из  $n$  элементов группу из  $k$  равно  $n!/(k!(n-k)!)$

10

Кощей Бессмертный, желая сделать Бабе Яге подарок на Новый Год, приобрел кучу метелок трех сортов, ступы 5 видов и головные платки 7 расцветок. Он хочет каждый Новый Год дарить Яге 1 метлу, 1 ступу и 1 платок, но так, чтобы ни один год наборы подарков не совпадали. На сколько лет ему хватит приобретенных товаров? (Считайте, что количество приобретенных предметов сколь угодно велико.)

11

В магазин «Всё для чая» завезли 4 различные чайные ложки. а) Сколькими способами можно купить набор из трех предметов? б) А из двух предметов?

12

Сколько существует десятизначных чисел, у которых сумма цифр равна 4?

13

На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 2 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими способами это можно сделать?

14

В команде из 11 человек нужно выбрать капитана и заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

15

Сколько существует двоичных слов длины  $n$ , в которых ровно  $k$  нулей? Это называется число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  и обозначается  $C_n^k$  или  $\binom{n}{k}$

16

Сколько существует двузначных чисел, у которых цифры идут по возрастанию?

17

Каких двоичных слов длины 50 больше: тех, в которых 36 единиц, или тех, в которых 14 единиц?

18

Сколько диагоналей имеет выпуклый а) 25-тиугольник б)  $n$ -угольник?

19

Сколько существует двоичных слов длины 10, в которых ровно 4 нуля?

20

На дискотеку пришли 10 юношей и 10 девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары перед очередным медленным танцем?

21

Сколькими способами можно поставить на доску  $3 \times 3$  белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

22

В 7М классе учится 26 человек. Сколькими способами их можно выстроить в ряд при условии, что а) Ваня и Женя должны обязательно стоять рядом; б) Ваня и Женя ни в коем случае не должны стоять рядом.

23

Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть 1 или остальных?

24

Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы в слове «КРУЖОК»?

25

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску а) белого и черного королей; б) двух белых королей так, чтобы они не били друг друга?

26

Рота состоит из 3 лейтенантов, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выбрать из них отряд, состоящий из одного лейтенанта, двух сержантов и 20 рядовых?

27

Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно составить, используя 3 буквы А, 4 буквы Б и 5 букв В?

28

Сколькими способами можно из 15 слов выбрать набор, состоящий не более чем из 5 слов?

29

В группе Платоны учатся 2 девочки и 8 мальчиков. Сколькими способами Дмитрий Владимирович может отправить на олимпиаду команду из четырех человек так, чтобы среди участников была хотя бы одна девочка?

30

Сколькими способами можно 10 человек разбить на 2 баскетбольные команды по 5 в каждой?

31

Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных пешек на черных полях шахматной доски?

32

Имеется  $k_1$  шариков 1-го цвета,  $\dots$ ,  $k_n$  шариков  $n$ -го цвета. Сколькими способами их можно расставить в ряд?

33

Сколькими способами можно поставить на доску  $3 \times 3$  двух белых ладей так, чтобы они не били друг друга?

34

Сколько существует шестизначных чисел у которых четных и нечетных цифр поровну?

35

Семен имеет 6 друзей и в течение 5 дней приглашает в гости каких-то троих из них так, чтобы компания ни разу не повторялась. Сколькими способами он может это сделать?

36

Сколькими способами можно переставить 7 подносов, стоящих на длинном узком столе?

37

Имеется 6 разноцветных коробок. Сколькими способами можно в эти коробки разложить 20 шаров при условии, что: а. Шары разных размеров. б. Шары одинаковые. в. Шары одинаковые, и не должно остаться пустых коробок. г. Шары одинаковые, и в каждой коробке должно оказаться не менее двух шаров.

38

На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 11. Сколько существует трапеций с вершинами в этих точках?

39

Сколько решений в целых числах имеет уравнение  $a + b + c + d + e + f = 20$  при условии, что а)  $a, b, c, d, e, f \geq 0$  б)  $a, b, c, d, e, f \geq 1$  в)  $a, b, c, d, e, f \geq 2$

40

Сколькими способами натуральное число  $n$  можно представить в виде суммы  $k$  а) неотрицательных; б) положительных слагаемых?

41

Переплетчик должен переплести 12 одинаковых книг в красный, синий или зеленый переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

42

В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить а) 8 различных открыток; б) 12 открыток?

43

В стране живет  $n$  человек. Президента выбирают посредством тайного голосования, при котором каждый гражданин голосует за одного из граждан (возможно, за себя самого). Сколькими способами может быть составлен протокол этого голосования? (Тайным называется голосование, при котором известно, сколько голосов подано за каждого из кандидатов, но не известно, кто именно как проголосовал.)

44

Сколькими способами можно 4 белых шара, 4 синих шара и 4 красных шара разложить в 6 различных ящиков?

45

Сколькими способами можно выложить в ряд 5 белых, 5 красных и 5 синих шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

46

В кошельке лежит а) по 20 монет; б) по 10 монет достоинством 1, 2 и 5 рублей. Сколькими способами можно из этих монет выбрать 20?

47

Сколько решений в целых числах имеет уравнение  $x + y + z = 20$  при условии, что  $0 \leq x, y, z \leq 10$ ?

48

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение  $xyz = 10^9$ ?

49

На полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг, никакие две из которых не стоят рядом?

50

Сколькими способами можно переставить  $n$  подносов, стоящих на длинном узком столе? Это называется число перестановок из  $n$  элементов и обозначается  $P_n$ .

51

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску а) белую и черную ладью; б) две белых ладьи так, чтобы они не били друг друга?