

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*Кафедра теоретической механики*

# ЗНАКОМСТВО С ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИЕЙ

Учебно-методическое пособие

по курсу *Аналитическая механика*

Составитель  
*А. В. Фомичев*

МОСКВА  
МФТИ  
2022

УДК 517.93  
ББК 22.161.1, 22.161.6.

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент *Д. А. Притыкин*

**Знакомство с инерциальной навигацией:** учебно-методическое пособие по курсу *Аналитическая механика* / сост. А.В. Фомичев. – М.: МФТИ, 2022. – 48 с.

Пособие посвящено основам теории инерциальных навигационных систем на примерах простейших одноканальных моделей. Наряду с изложением принципов работы, элементов теории ошибок и описанием многих эффектов, наблюдаемых в инерциальной навигации, демонстрируются приложения ряда разделов курса «аналитическая механика» к выводу уравнений, описывающих работу и погрешности навигационных систем, и анализу их свойств.

Предназначено для студентов, интересующихся практически приложениями методов аналитической механики и основами инерциальной навигации.

© Фомичев А.В., 2022  
© Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский  
университет)», 2022

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1. Принципы работы одноканальных ИНС и БИНС</b>	<b>8</b>
1.1. Принципы работы идеальных одноканальных ИНС и БИНС, уравнения идеальной работы . . . . .	8
1.2. Принцип работы реальной ИНС, возмущенные уравнения . . . . .	15
<b>2. Уравнения ошибок ИНС и БИНС, их свойства и частные решения</b>	<b>19</b>
2.1. Уравнения ошибок ИНС . . . . .	19
2.2. Принцип работы, уравнения ошибок одноканальной БИНС и их особенности . . . . .	34
2.3. Устойчивость горизонтальных каналов ИНС и БИНС	39
<b>3. Неустойчивость вертикального канала ИНС и БИНС и коррекция по высоте от внешнего источника</b>	<b>40</b>
3.1. Неустойчивость вертикального канала ИНС и БИНС	40
3.2. Использование внешней информации о высоте для обеспечения асимптотической устойчивости вертикального канала . . . . .	42
<b>Литература</b>	<b>48</b>

# Введение

Инерциальные навигационные системы предназначены для определения положения, скорости, ориентации и других параметров движения подвижных объектов. Они отличаются от других навигационных приборов абсолютной автономностью в сочетании с выдачей полного набора навигационных данных, отсутствием излучений в окружающее пространство и возможностью определять угловую ориентацию с точностью, недостижимой другими средствами. Эти уникальные качества объясняют незаменимость ИНС во многих приложениях.

По конструкции выделяется два больших класса – *платформенных* и *бесплатформенных* инерциальных навигационных систем. Далее для обозначения платформенных систем будем использовать аббревиатуру «ИНС» и «БИНС» – для бесплатформенных систем. В тех случаях, когда класс (ИНС или БИНС) не важен, применяется обобщенное название «навигационная система».

Не вдаваясь в подробности, отметим, что первыми были разработаны платформенные системы, но затем они были вытеснены бесплатформенными системами из большинства областей применения. Это связано с рядом технологических и эксплуатационных преимуществ БИНС.

Математические основы, заложенные в алгоритмы обоих классов систем, не зависят от технического воплощения и, по существу, являются уравнениями классической механики, описывающими движения точек и твердых тел относительно Земли и выбранных опорных трехгранников. Напротив, технические особенности реализации навигационных систем весьма многоплановые и в пособии не рассматриваются.

Естественно, что любая техническая реализация навигационной системы отличается от идеальной модели, что приводит к навигационным погрешностям, которые изучаются в теории ошибок навигационных систем. Уравнения ошибок оказываются линейными дифференциальными уравнениями. Эти же уравнения используются при коррекции навигационных систем и в теории оценивания их параметров.

В пособии рассмотрены элементарные, так называемые *одноканальные* модели ИНС и БИНС. От общей постановки задачи инерциальной навигации их отличает простота и наглядность, однако оказывается, что эти модели позволяют практически полностью описать общие принципы работы ИНС и БИНС и даже получить правильные представления о порядке и качественном поведении погрешностей. Это неочевидное утверждение требует анализа общей (трехмерной) навигационной задачи и здесь рассматриваться не будет. Однако не стоит думать, что однока-

нальная модель исчерпывает все нюансы навигационной задачи. Ее анализ требует изучения специальной литературы и значительного опыта.

Среди множества книг по инерциальной навигации можно выделить классические монографии В. Д. Андреева [1], [2] и современные издания [3], [4], [5], активно использованные при написании данного материала. Алгоритмам численного интегрирования дифференциальных уравнений инерциальной навигации посвящено несколько известных книг, например [11], [12], и бесчисленное количество статей.

Теория гироскопических приборов и навигационных систем тесно связана со многими разделами аналитической механики и нередко была предметом исследований многих крупных механиков и математиков. В частности, разбираемые в пособии простейшие модели требуют записи уравнений движения в обобщенных координатах, дают пример голономной связи, уравнения подвергаются линеаризации и исследованию устойчивости по линейному приближению, к ним применяются частотные методы анализа. Все эти вопросы входят в программу курса аналитической механики, читаемого студентам второго курса МФТИ.

### **Задача инерциальной навигации и ее решение с использованием ИНС и БИНС**

Задача инерциальной навигации состоит в определении координат, скорости и ориентации подвижного объекта относительно заданных опорных систем координат по информации от инерциальной навигационной системы, установленной на объект.

В основе технического воплощения любой навигационной системы лежит следующая математическая идеализация.

- Считается, что подвижный объект является абсолютно твердым телом, которое отождествляется со связанным с ним координатным трехгранником (базисом).

- Положение объекта описывается координатами полюса (начала координат) связанного трехгранника относительно некоторого базиса, который в околоземной навигации обычно жестко связан с Землей. Скорость и ускорение объекта отождествляются со скоростью и ускорением полюса относительно этого базиса.

- Угловое положение (ориентация) объекта описывается параметрами ориентации связанного трехгранника относительно опорной системы координат. В околоземных приложениях обычно используется географическая опорная система координат с двумя координатными осями в плоскости местного горизонта и заданной ориентацией в азимуте (т. е. относительно направления на север в плоскости местного горизонта).

- Движения всех точек и координатных трехгранников описываются известными законами классической механики (см., например, [7] – [10]). Данные уравнения, записанные в координатных трехгранниках, используемых для решения навигационной задачи, называются *уравнениями идеальной работы* навигационной системы.

Правомерность такой идеализации следует из фактически абсолютной точности законов классической механики для околоземных подвижных объектов и подтверждается результатами работы высокоточных навигационных систем. В реальных условиях, конечно, приходится учитывать и другие факторы, например, конечные размеры объекта и навигационной системы, погрешности датчиков, ограниченную точность угловой привязки навигационной системы, ее блока чувствительных элементов (БЧЭ) и объекта, отличия элементов конструкций от абсолютно твердых тел и т. п.

Важно подчеркнуть, что учет «неидеальностей» всегда происходит за счет введения поправок, максимально приближающих реальную систему к рассмотренной выше математической идеализации.

Перечислим некоторые общие технические особенности построения и использования навигационной системы.

- В состав навигационной системы любого типа всегда входят *бортовой вычислитель* и инерциальные *датчики первичной информации*. В вычислителе вместо дифференциальных уравнений идеальной работы реализован набор численных методов их интегрирования, а в качестве входной информации используются начальные координаты и скорость, вводимые извне, и сигналы инерциальных датчиков, используемые вместо точных значений измеряемых ими параметров.

- Навигационная система жестко связана с объектом, ее оси чувствительности обычно совпадают со строительными осями объекта либо ориентированы относительно них известным образом. В качестве полюса  $M$  связанного трехгранника выбирается одна из точек БЧЭ навигационной системы.

- Для решения навигационной задачи с помощью ИНС используются показания тройки акселерометров, устанавливаемых по трем взаимно ортогональным осям гиростабилизированной платформы<sup>1</sup>. Показания акселерометров являются основной ин-

---

<sup>1</sup> Для понимания принципа работы ИНС конструкции гиростабилизированных платформ не важны. Как будет вскоре показано, реализация автономной ИНС требует высокой точности поддержания заданной ориентации опорного трехгранника. Гироплатформа и выполняет эту функцию, благодаря свойствам быстро вращающихся механических гироскопов сохранять пространственное положение оси при отсутствии моментов внешних сил, устойчивость ее положения к малым возмуще-

формацией для численного интегрирования уравнений, заложенных в навигационный алгоритм, из решений которых формируются и сигналы управления гироскопом. Гироскоп управляется так, что его движение повторяет движение опорной системы координат (например, инерциальной или географической). Ориентация объекта относительно опорной системы координат определяется по углам рамок карданова подвеса, на который устанавливается платформа относительно корпуса ИНС. Углы поворота рамок измеряются специальными точными датчиками.

- В БИНС акселерометры жестко связаны с корпусом БЧЭ БИНС, а для определения ориентации относительно опорного трехгранника используется информация от датчиков абсолютной угловой скорости (ДУС), также жестко связанных с корпусом БЧЭ БИНС и, как правило, соосных с акселерометрами <sup>2</sup>.

Вычисление параметров ориентации БИНС относительно опорного трехгранника и «управление» его угловым положением выполняется по показаниям ДУС и акселерометров с использованием вычислительного алгоритма, замещающего управление платформой ИНС. Соответствующий опорный трехгранник не материализован физически, однако играет ту же роль, что гироскоп, в силу чего его называют *квазиприборным трехгранником*, а иногда – *виртуальной платформой*.

Заметим, что ДУС обычно называют «гироскопами», и такие термины как «лазерный гироскоп», «волоконно-оптический гироскоп» или «волновой твердотельный гироскоп» стали устойчивыми словосочетаниями. Все они отличаются от механических гироскопов своим принципом работы, но, по сути, выполняют ту же функцию – задают ориентацию инерциального пространства.

- Кроме основных параметров – положения, скорости и ориентации – навигационная система обычно выдает набор дополнительных величин, выражающихся через основные параметры и показания датчиков. Они служат только для выдачи потребителям и не важны для понимания принципа работы навигационной системы. Напротив, алгоритмы вычисления основных параметров образуют вычислительное ядро навигационной системы.

---

ниями и угловое движение по известным законам при воздействии управляющих моментов.

<sup>2</sup> Чувствительные оси приборов могут быть расположены по любым некомпланарным направлениям, однако показания приборов всегда пересчитываются в некоторый единый ортогональный трехгранник. Поэтому с информационной точки зрения показания датчиков всегда относятся к осям одного ортогонального трехгранника.

# 1. Принципы работы одноканальных ИНС и БИНС

Для понимания общих принципов работы инерциальных навигационных систем очень полезно изучить простейшие модели ИНС и БИНС, называемые *одноканальными системами*. Они весьма полно отражают суть задачи, дают верные качественные и даже количественные представления о работе ИНС и БИНС, например о характере накопления погрешностей со временем и их порядках, обходясь элементарными математическими методами.

## 1.1. Принципы работы идеальных одноканальных ИНС и БИНС, уравнения идеальной работы

**Математическая модель одноканальной ИНС.** Изучение принципа работы инерциальной навигационной системы удобнее начинать с рассмотрения платформенной ИНС. В простейшей модели одноканальной ИНС считается, что Земля – тяжелый (гравитирующий) однородный шар радиуса  $a$ , неподвижный в абсолютном пространстве. Точка  $M$ , моделирующая положение объекта, может двигаться только по экватору. Ее положение описывается одной координатой – долготой точки  $\lambda$ . Угловое движение трехгранника, связанного с объектом, также происходит в плоскости экватора и может быть произвольным. Соответствующая конструкция представлена на рис. 1.

Географическая система координат  $Mx_1x_2x_3$  является опорной. Ее ось  $x_1$  задает направление местной вертикали в точке  $Mx_1x_2x_3$ ,  $x_2$  – направление местного горизонта, ось  $x_3$  дополняет оси до правого трехгранника и на рисунке не изображена.

Для краткости все системы координат будем обозначать двумя буквами, соответствующими полюсу и первой координатной оси, или одной буквой координатной оси. Например, система координат  $Mx_1x_2x_3$  обозначается как  $Mx$  или просто  $x$ .

Ориентация объекта относительно опорной системы координат задается углом  $D$  между направлением горизонта и строительной осью объекта.

Допустим, что движение точки  $M$  описывается вторым законом Ньютона. Запишем уравнения движения точки  $M$  и вычислим угловую скорость системы координат  $Mx$ , обеспечивающую нахождение оси  $x_2$  в плоскости горизонта при произвольном перемещении точки  $M$  по экватору. Предварительно договоримся, что здесь и далее векторы и матрицы обозначаются строчными буквами, как и скаляры. Это не должно вызвать недоразумений, т. к. из контекста обычно ясен смысл всех величин и позволяет не отяжелять текст разнородными шрифтами.



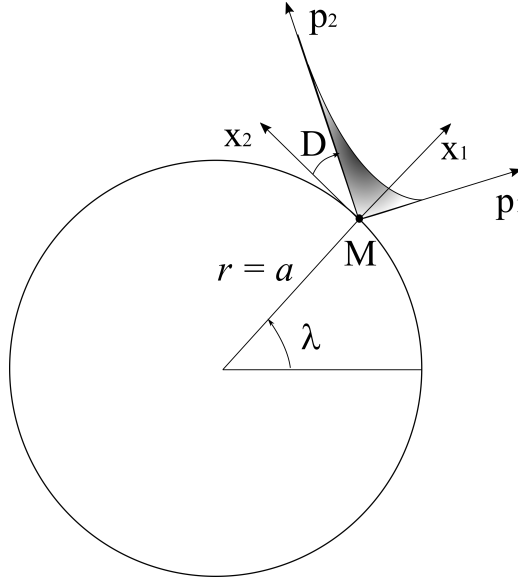


Рис. 1. Модель одноканальной ИНС. Точка  $M$  моделирует положение объекта относительно Земли,  $Mx$  – сопровождающий трехгранник, ось  $x_2$  которого – местный горизонт,  $D$  – угол между строительной осью объекта и горизонтом. Для наглядности объект, размер которого, конечно, много меньше Земли, изображен не в масштабе

Будем считать, что точка  $M$  имеет массу  $m$ , а ее движение происходит под действием внешней силы  $F$ , силы тяготения  $mg$  и описывается вторым законом Ньютона:

$$m\ddot{r} = F + mg, \quad (1)$$

где  $r$  – радиус-вектор точки относительно инерциальной системы координат, который в нашем случае логично отсчитывать от центра Земли<sup>3</sup>. Будем считать, что в силу  $F$  включена сила реакции механической связи (см., например, [7]), удерживающей точку на окружности экватора. Также учтем, что удобнее работать с удельными силами  $f = F/m$  и  $g$ , отнесенными к единице массы точки, которые, как показано ниже, измеряются акселерометрами – приборами, используемыми для технической реализации

<sup>3</sup> Согласно теореме о движении центра масс этим уравнением описывается движение центра масс объекта под действием внешней силы и силы тяготения.

К внешним силам относятся все силы негравитационной природы – например, силы, действующие от двигателей, аэродинамические силы, силы реакции, действующие на шасси при движении по земле, и т. п.

ИНС. Через удельные силы уравнение движение переписывается в виде

$$\ddot{r} = f + g. \quad (2)$$

Известно, что уравнение (1) (и, значит, следующее из него (2)) может быть записано в произвольной криволинейной системе координат [7]:

$$\frac{1}{H_i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial V^2/2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V^2/2}{\partial q_i} \right) = (f + g) \cdot e_i, \quad (3)$$

где  $H_i$  – коэффициенты Ляме,  $q_i$  – криволинейные координаты,  $V^2$  – квадрат скорости, выраженный через криволинейные координаты и их производные по времени,  $e_i$  – орты локального базиса криволинейной координатной сетки, « $\cdot$ » – скалярное произведение.

В рассматриваемой задаче естественно использовать полярную систему координат на плоскости, в ней положение точки задается модулем радиус-вектора  $r$ , отложенного от центра Земли, и полярным углом  $\lambda$ , совпадающим с долготой. Проектируя (2) на оси локального базиса, совпадающие с осями  $x_1$  и  $x_2$  опорной системы координат, представленной на рис. 1, по формулам (3) и  $V^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2$  получим

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r \dot{\lambda}^2 &= f_{x1} - g, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\lambda}) &= f_{x2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $f_{x1}$  и  $f_{x2}$  – проекции удельной силы на оси  $x_1$  и  $x_2$ . При движении по экватору  $r = a = \text{const}$  и поэтому  $\dot{r} = 0$ ,  $\ddot{r} = 0$ , откуда следует, что

$$\begin{aligned} f_{x1} &= g - a \dot{\lambda}^2, \\ a \ddot{\lambda} &= f_{x2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Первое уравнение выражает удельную *силу реакции голономной связи*, обеспечивающей нахождение точки  $M$  на окружности, уравновешивая силу тяготения и центробежную силу. Второе уравнение описывает изменение координаты точки, движущейся под действием силы, со временем.

Выражение для угловой скорости трехгранника  $Mx$  следует из того, что его ориентация описывается единственным углом  $\lambda$  поворота относительно оси  $x_3$ . Соответственно, угловая скорость трехгранника направлена по оси  $x_3$  и равна  $\omega_{x3} = \dot{\lambda}$ .

Линейная скорость точки  $V_{x2}$  равна  $V_{x2} = a\dot{\lambda}$ . Это соотношение позволяет выразить угловую скорость  $\omega_{x3}$  через  $V_{x2}$ . После несложных преобразований получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \frac{V_{x2}}{a}, \\ \dot{V}_{x2} &= f_{x2}, \\ \omega_{x3} &= \frac{V_{x2}}{a}.\end{aligned}\tag{6}$$

Соотношения (6) представляют собой *уравнения идеальной работы* одноканальной ИНС. Если известны начальная координата  $\lambda(0)$ , скорость  $V_{x2}(0)$  и функция времени  $f_{x2} = f_{x2}(t)$ , то интегрирование второго уравнения дает текущую скорость относительно Земли:

$$V_{x2}(t) = V_{x2}(0) + \int_0^t f_{x2}(\tau) d\tau,$$

а интегрирование первого уравнения – текущую координату точки  $M$ :

$$\lambda(t) = \lambda(0) + \frac{1}{a} \int_0^t V_{x2}(\tau) d\tau.$$

Последнее уравнение дает угловую скорость географического трехгранника, обеспечивающую нахождение оси  $x_2$  в плоскости горизонта при произвольном движении точки  $M$  по экватору:

$$\omega_{x3}(t) = \frac{1}{a} \left( V_{x2}(0) + \int_0^t f_{x2}(\tau) d\tau \right).$$

Из этого выражения вытекает иногда используемый термин *интегральная коррекция*. Впервые она была предложена у нас в стране Л. М. Кофманом и Е. Б. Левенталем в 1932 г. Близкая идея была также высказана И. Бойковым в Германии в 1934 г. [6].

Интегрирование уравнений (6) вместе с измерением угла  $D$  дает полное решение навигационной задачи: из (6) получают скорость и местоположение объекта, а угол  $D$ , описывающий ориентацию объекта относительно местного горизонта, подлежит непосредственному измерению, как будет ясно из дальнейшего описания приборного воплощения ИНС.

**Приборная реализация одноканальной ИНС.** Для приборной реализации описанного принципа решения навигационной задачи используется датчик удельной силы – акселерометр (ньютонметр), который устанавливается на гиросплатформу, поддерживающую его ось чувствительности в направлении горизонта  $x_2$ .

Для качественного представления о работе акселерометра его можно смоделировать осциллятором, движущимся без трения в трубке, ось которой является осью чувствительности.

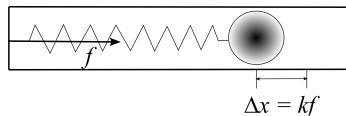


Рис. 2. Простейшая модель акселерометра: отклонение чувствительной массы  $\Delta x$  пропорционально проекции удельной силы на ось чувствительности  $f$

Отклонение чувствительной массы пропорционально проекции удельной силы (ускорения) на ось чувствительности. Заметим, что приведенная модель полезна лишь для выяснения сути работы прибора. В реальности такая схема не применима хотя бы из-за невозможности измерить ускорения, быстро меняющиеся в сравнении с собственным периодом колебаний, и отсутствием затухания колебаний, однажды возбужденных в системе. Конструкции реальных акселерометров, конечно, существенно сложнее, и в них чувствительная масса обычно удерживается в нейтральном положении достаточно жесткой электромагнитной обратной связью, управляющий сигнал которой пропорционален проекции удельной силы. Это позволяет измерять большие и быстро меняющиеся ускорения. Однако маятниковые конструкции часто используются в реальных акселерометрах.

Вычислению навигационных параметров предшествует *начальная выставка ИНС*, при которой гироскопическая платформа выставляется в горизонт так, что акселерометр измеряет нулевой сигнал, соответствующий ортогональности его оси чувствительности силе тяжести. Положение гироскопической платформы в горизонте, таким образом, отождествляется с горизонтальностью оси чувствительности акселерометра. Для проведения начальной выставки используется управление гироскопической платформой через обратную связь по ускорению, измеряемому акселерометром. Вопрос ее реализации рассматривать не будем.

После завершения выставки система переходит в *режим навигации*, в котором численно интегрируются уравнения (6) в бортовом вычислителе, а гироскопическая платформа сообщает угловую скорость относительно оси  $x_3$ , вычисляемая из последнего уравнения (6). Конструкция гироскопической платформы для понимания принципа работы ИНС не существенна. Важно понимать лишь то, что это устройство позволяет управлять собственным угловым движением по заданному закону с высокой точностью.

Угловое положение объекта относительно опорного трехгранника ИНС измеряется датчиками в осях карданова подвеса платформы. В случае одноканальной системы ориентация описывается единственным углом  $D$  между осью горизонта и продольной осью объекта, который и подлежит прямому измерению.

**Одноканальная БИНС.** В БИНС реализуется тот же принцип работы, что заложен в функционирование ИНС. Однако гиросtabilизированная платформа в БИНС физически отсутствует, акселерометры и ДУС жестко устанавливаются по строительным осям блока чувствительных элементов БИНС. Опорный трехгранник БИНС строится по показаниям датчиков математически. ДУС измеряют проекции абсолютной угловой скорости на ось чувствительности или интеграл от нее за некоторый такт съема данных. По измерениям ДУС определяется изменение ориентации объекта относительно инерциального (неподвижного) пространства.

Покажем, что информация от акселерометров и ДУС позволяет построить полный информационный аналог платформенной ИНС. Свяжем с объектом трехгранник  $Mr_1p_2p_3$ , где ось  $p_1$  направлена по «вертикали» объекта,  $p_2$  – по его продольной оси,  $p_3$  ортогональна плоскости рис. 1 и сонаправлена с осью  $x_3$ . Акселерометры одноканальной БИНС устанавливаются по осям  $p_1$  и  $p_2$  ДУС – вдоль оси  $p_3$ . Для построения одноканальной БИНС этого количества датчиков достаточно, однако в общем (трехмерном) случае, конечно, необходимо использовать триады ДУС и акселерометров. Система координат  $Mr$ , образованная осями чувствительных элементов, называется *приборным трехгранником*.

Для повторения принципа работы ИНС с помощью БИНС показания акселерометров из осей  $p_1p_2$  перепроектируются на ось  $x_2$  в любой момент времени, после чего интегрируется система (6). Из рис. 1 имеем

$$f_{x2} = -f_{p1} \sin D + f_{p2} \cos D,$$

таким образом, осталось показать принципиальную возможность вычислений по этой формуле в начальный момент времени и последующем произвольном движении объекта.

Начнем с инициализации навигационного алгоритма – процесса начальной выставки. Обычно в процессе начальной выставки объект неподвижен (на практике – малоподвижен) относительно Земли, и акселерометры будут измерять проекции удельной силы тяжести  $g$  на оси чувствительности.

Заметим, что сила тяжести, действующая «против» оси чувствительности акселерометра приводит к положительному результату измерения «+g», что следует из принципа работы при-

бора: чтобы акселерометр находился в равновесии относительно Земли, на него надо действовать силой  $-mg$ , компенсирующей его вес. Прибор измеряет соответствующую ей удельную силу, чем и объясняется обращение знака. Это же можно показать и на модели осциллятора: чувствительная масса при положительном ускорении вдоль оси чувствительности отклоняется в ту же сторону, как и при действии на чувствительную массу силы тяжести «против» оси.

**Замечание.** Блок акселерометров БИНС как в одноканальной модели, так и в общем случае, измеряет вектор удельной силы, равный разности  $f - g$ . Эту величину, соответствующую ускорению от всех сил, кроме сил тяжести, называют *кажущимся ускорением*. Этот термин не будет применяться, однако иногда удобен и встречается в литературе.

Измерение силы тяжести акселерометрами позволяет получить значение угла  $D(0)$  в начальный момент. Поскольку  $x_2 \perp g$ , получаем <sup>4</sup>:

$$g_{x2} = -g_{p1} \sin D(0) + g_{p2} \cos D(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} D(0) = \frac{g_{p2}}{g_{p1}}.$$

Вычисленное значение угла  $D(0)$  служит начальным условием алгоритма определения угла ориентации  $D$ . Для решения навигационной задачи в бортовом вычислителе интегрируются следующие *уравнения идеальной работы одноканальной БИНС*:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{V_{x2}}{a}, \\ \dot{V}_{x2} &= f_{x2}, \\ \omega_{x3} &= \frac{V_{x2}}{a}, \\ \dot{D} &= -\omega_{p3} + \omega_{x3}, \\ f_{x2} &= -f_{p1} \sin D + f_{p2} \cos D. \end{aligned} \tag{7}$$

Прокомментируем уравнение для угла  $D$ . Этот угол описывает относительное вращение приборной системы координат  $Mr$  относительно  $Mx$  и представляется в виде композиции двух вращений: приборного трехгранника  $Mr$  с угловой скоростью  $-\omega_{p3}$  и сопровождающего трехгранника  $Mx$  относительно инерциального пространства с угловой скоростью  $\omega_{x3} = \frac{V_{x2}}{a}$ . Знак «-» угловой

---

<sup>4</sup> При движении объекта в процессе выставки, конечно, приходится использовать более сложные подходы к построению горизонта по показаниям датчиков, однако описанное простейшее вычисление часто используется в качестве первого приближения.

скорости  $-\omega_{p3}$  обусловлен тем, что увеличению угла  $D$  соответствует вращение «против» оси  $p_3$ .

Первые три уравнения (7) полностью повторяют уравнения идеальной работы платформенной ИНС. Отличие от ИНС состоит в добавлении двух новых уравнений, описывающих изменение угла  $D$  и перепроектирование показаний акселерометров из приборного трехгранника в опорный трехгранник, моделирующий движение плоскости горизонта. В платформенной одноканальной ИНС этому соответствует управление гиropлатформой с угловой скоростью  $\omega_{x2}$  и непосредственный замер угла  $D$ .

Таким образом, установлена почти полная аналогия принципов работы одноканальных ИНС и БИНС.

**Замечание.** Рассмотренные идеи практически дословно переносятся на общую постановку навигационной задачи. Принципиальные отличия состоят в использовании эллипсоидальной модели поверхности Земли, учете высоты над этой поверхностью, учете вращения Земли, нецентральности поля тяжести и замене углов на матрицы и кватернионы ориентации. Это сильно усложняет геометрию задачи, но не затрагивает идею интегральной коррекции, поддерживающей две оси опорного трехгранника в плоскости местного горизонта.

## 1.2. Принцип работы реальной ИНС, возмущенные уравнения

Рассматривая принципы работы ИНС и БИНС, мы считали, что все выражения и математические операции абсолютно точны. Однако в реальности всегда действуют возмущения – погрешности датчиков первичной информации, ошибки ввода начальных координат, начальной выставки, численного интегрирования уравнений и т. п. Поэтому навигационное решение любой реальной навигационной системы отличается от идеального.

В данном разделе рассмотрена работа одноканальной ИНС с учетом возмущений, выведены уравнения ошибок одноканальной ИНС. Проведен анализ уравнений ошибок, позволяющий понять динамику погрешностей ИНС в первом приближении и оценить порядок погрешностей датчиков первичной информации, обеспечивающих навигационное решение заданной точности.

**Возмущенные уравнения.** Функционирование реальной ИНС основано на интегрировании уравнений идеальной работы в бортовом вычислителе ИНС, в которые вместо неизвестных идеальных значений параметров поступает фактически доступная информация – показания инерциальных датчиков и параметры, вычисленные ИНС. Этому соответствуют *возмущенные уравнения*, структурно совпадающие с (6). Выведем их.

Следуя [3, 4, 5], отметим штрихами значения параметров, измеренных или вычисленных ИНС. Погрешности акселерометров и отклонения гиросплатформы от идеального положения приводят к тому, что вычисленная долгота точки  $\lambda'$  отличается от точной долготы  $\lambda$ , и появляется *модельная точка  $M'$* , соответствующая  $\lambda'$ . Точка  $M'$  перемещающаяся с вычисленной (модельной) скоростью  $V'_{y2}$ .

Возмущения приводят к появлению дополнительных координатных трехгранников. С точкой  $M'$  связан *модельный трехгранник  $M'y$* , ось  $y_2$  которого образует местный горизонт в точке  $M'$ . Трехгранники  $Mx$  и  $M'y$  совмещаются поворотом вокруг оси  $x_3$  на угол  $\gamma = \lambda' - \lambda = \Delta\lambda$ , характеризующий *ошибку местоположения*. Скорость  $V'_{y2}$  точки  $M'$  направлена вдоль оси  $y_2$  трехгранника  $M'y$ .

Гиросплатформе сообщается вычисленная угловая скорость  $V'_{y2}/a$ , однако ориентация гиросплатформы не будет совпадать с трехгранником  $y$  из-за ошибки начальной выставки и собственного *дрейфа* гиросплатформы  $\nu_{z3}$ , обусловленного ее неидеальностью. Так появляется еще один трехгранник  $Mz$ , связанный с платформой и называемый *приборным*, поскольку с ним связаны датчики ИНС. Этот трехгранник получается из  $M'y$  поворотом относительно оси  $y_3$  на угол

$$\beta = \beta_0 + \int_0^t \nu_{z3}(\tau) d\tau,$$

называемый *кинематической ошибкой*, характеризующей погрешность построения инерциального пространства с помощью гиросплатформы. В нее входит ошибка начальной выставки гиросплатформы  $\beta_0$ , а интегральная часть соответствует уходу гиросплатформы относительно инерциального пространства с *угловой скоростью дрейфа*  $\nu_{z3}$ . Дифференцируя последнее выражение, получим дифференциальное уравнение для кинематической ошибки:

$$\dot{\beta} = \nu_{z3}. \quad (8)$$

Гиросплатформа конструктивно связана с фактическим (идеальным) положением объекта, т. е. точкой  $M$ , поэтому она и указана в качестве полюса трехгранника  $Mz$ . Кроме углов  $\beta$  и  $\gamma$  вводится угол  $\alpha$ , совмещающий трехгранники  $Mx$  и  $Mz$  и называемый *динамической ошибкой* вертикали. Взаимное расположение трехгранников  $Mx$ ,  $M'y$  и  $Mz$  и все перечисленные углы изображены на рис. 3.

Дрейф характеризует уход трехгранника  $Mz$ , и поэтому величине  $\nu_{z3}$  приписан индекс трехгранника  $z$ . Акселерометр связан



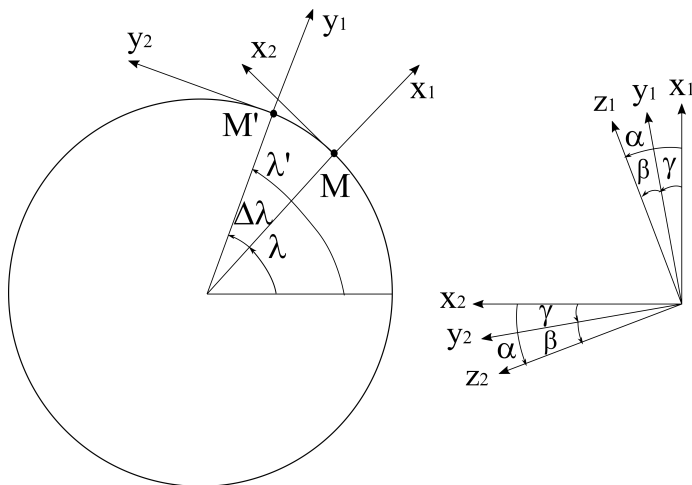


Рис. 3. Отличие реальной работы ИНС от идеальной. Вместо идеальной точки  $M$ , соответствующей фактическому положению объекта, вычисляется положение модельной точки  $M'$ . Вместо идеального опорного трехгранника  $Mx$  появляются модельный трехгранник  $M'y$ , соответствующий вычисленному положению модельной точки  $M'$ , и приборный трехгранник  $Mz$ , соответствующий фактическому положению гиropлатформы. Ориентация трехгранников совмещается поворотами на углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  согласно правой части рисунка

с этим же трехгранником, и его измерению  $f'_{z2}$  тоже присваивается индекс  $z$ . За неимением другой информации это измерение подставляется в уравнение для скорости  $V'_{y2}$ .

Смещение нуля акселерометра и дрейф платформы, связанные с несовершенством конструкций этих приборов, могут быть произвольными функциями времени.

Описанные рассуждения позволяют записать следующие возмущенные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}' &= \frac{V'_{y2}}{a}, \\ \dot{V}'_{y2} &= f'_{z2}, \\ \omega'_{z3} &= \frac{V'_{y2}}{a} + \nu_{z3} \end{aligned} \tag{9}$$

и сформулировать принцип работы реальной ИНС. Он следует из написанного выше и системы (9), но, ввиду исключительной важности для понимания работы ИНС, сформулируем его отдельно.

**Принцип работы реальной ИНС.** Координате  $\lambda'$  модельной точки  $M'$ , вычисленной навигационной системой, соответствует модельный трехгранник  $M'y$ . В системе координат  $M'y$  интегрируются уравнения для скорости  $V'_{y2}$  модельной точки  $M'$ , в которые вместо неизвестной проекции удельной силы  $f_{y2}$  подставляется измерение акселерометра  $f'_{z2}$ , установленного на гиросплатформу. Гиросплатформа управляется вычисленной угловой скоростью  $V'_{y2}/a$ , однако из-за дрейфов гиросплатформы и ошибок ее начальной выставки угловое положение приборного трехгранника  $Mz$  гиросплатформы отличается от  $Mu$  на угол кинематической ошибки  $\beta$ .

**Замечание 1.** Этот принцип работы практически дословно переносится на общий случай с заменой осей и углов, использованных в одноканальной модели, на координатные трехгранники, матрицы и кватернионы.

**Замечание 2.** Положения идеального  $Mx$  и приборного  $Mz$  трехгранников относительно Земли неизвестны. Для трехгранника  $Mx$  нет аппаратного средства, позволяющего его построить, а знание угла  $D'$ , вычисляемого ИНС, не дает возможности восстановить ориентацию  $Mz$  относительно Земли, поскольку точная ориентация связанной системы координат  $Mr$  относительно Земли не вычисляется ИНС и не подлежит прямому измерению никакими приборами. Идеальная ИНС вычисляет ориентацию связанного трехгранника  $Mr$  относительно идеального  $Mx$ . Реальная ИНС вычисляет ориентацию  $Mr$  относительно  $Mz$ , однако при перепроектировании замеров акселерометров трактует ее как ориентацию  $Mr$  относительно  $M'y$ , поскольку информация только об этой системе координат относительно Земли имеется в бортовом вычислителе.

**Замечание 3.** Описанный принцип работы фактически полностью переносится на БИНС – см. (26).

## 2. Уравнения ошибок ИНС и БИНС, их свойства и частные решения

### 2.1. Уравнения ошибок ИНС

Введем следующие обозначения для погрешностей навигационных параметров и измерений:  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ ,  $\Delta V_{x2} = V'_{y2} - V_{x2}$ ,  $\delta f_{x2} = f'_{z2} - f_{x2}$ , где намеренное отличие в обозначении  $\delta f_{x2}$  раскрыто ниже. Вычитая из (9) уравнения (6), получим

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\lambda} &= \frac{\Delta V_{x2}}{a}, \\ \Delta\dot{V}_{x2} &= \delta f_{x2}.\end{aligned}\tag{10}$$

Теперь рассмотрим ошибку измерения акселерометра  $\delta f_{x2}$ . Она складывается из собственной погрешности – «смещения нуля» акселерометра, обозначаемого  $\Delta f_{z2}$ , и ошибки измерения удельной силы из-за погрешности ориентации приборного трехгранника (гироплатформы)  $\Delta_\alpha f_{z2}$ . Ориентация приборного трехгранника отличается от идеальной на угол  $\alpha$ , и соответствующая погрешность измерения удельной силы равна

$$\Delta_\alpha f_{z2} = f_{x2} \cos \alpha - f_{x1} \sin \alpha - f_{x2} \simeq -\alpha f_{x1}.$$

По формуле (5)  $f_{x1} = g - a\dot{\lambda}^2$ , следовательно,  $\Delta_\alpha f = -(g - a\dot{\lambda}^2)\alpha$ . Но, например, авиационные скорости  $a\dot{\lambda}$  обычно не превышают 500 м/с, и, поскольку  $a \simeq 6.74 \cdot 10^6$  м, получаем, что  $a\dot{\lambda}^2 < 0.04$  м/с<sup>2</sup>  $\ll g \simeq 9.81$  м/с<sup>2</sup>.

Далее будем пренебрегать этим малым членом и считать, что ошибка измерения акселерометра равна

$$\delta f_{z2} = -g\alpha + \Delta f_{z2}.\tag{11}$$

Для замыкания системы уравнений ошибок требуется уравнение для  $\alpha$ . Из формул  $\alpha = \beta + \gamma$ ,  $\dot{\alpha} = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$ ,  $\dot{\beta} = \nu_{z3}$ ,  $\dot{\gamma} = \Delta\dot{\lambda} = \Delta V_{x2}/a$  следует уравнение  $\dot{\alpha} = \Delta V_{x2}/a + \nu_{z3}$ . Таким образом, система уравнений ошибок одноканальной ИНС имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\lambda} &= \frac{\Delta V_{x2}}{a}, \\ \Delta\dot{V}_{x2} &= -g\alpha + \Delta f_{z2}, \\ \dot{\alpha} &= \frac{\Delta V_{x2}}{a} + \nu_{z3}.\end{aligned}\tag{12}$$

Приступая к анализу этой системы, временно «уберем» индексы для сокращения записи и перепишем (12) без них:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\lambda} &= \frac{\Delta V}{a}, \\ \Delta \dot{V} &= -g\alpha + \Delta f, \\ \dot{\alpha} &= \frac{\Delta V}{a} + \nu.\end{aligned}\tag{13}$$

**Ключевые свойства уравнений ошибок ИНС.** Уравнения ошибок одноканальной системы позволяют понять многие важные свойства ошибок ИНС, верные и в общем случае. Перечислим ключевые свойства системы (13).

- **Линейность уравнений ошибок.** Это свойство существенно упрощает анализ погрешностей ИНС. Например, из линейности уравнений ошибок следует линейная зависимость погрешностей «на выходе» системы от «входных» инструментальных погрешностей и применимость широкого арсенала методов, развитых для линейных систем, например, теорий случайных процессов, наблюдаемости и оптимального оценивания [4].

Напомним основные свойства линейных систем [14, 13]. Линейная система общего вида описывается уравнениями

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),\tag{14}$$

где  $x$  называется *фазовым вектором или вектором состояния системы*,  $A(t)$  – *матрицей системы*, в общем случае зависящей от времени,  $f(t)$  – *воздействием*. Система  $\dot{x} = A(t)x$  называется однородной. Общее решение (14) имеет вид  $x(t) = x^\circ(t) + x^p(t)$ , где  $x^\circ(t)$  – общее решение однородной системы,  $x^p(t)$  – любое частное решение неоднородной системы.

Матрица  $\Phi(t, t_0)$ , удовлетворяющая уравнению

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi$$

при начальном условии  $\Phi(t_0, t_0) = E$ , где  $E$  – единичная матрица соответствующего порядка, называется *фундаментальной матрицей* системы. Через нее выражается общее решение задачи Коши для системы (14) с произвольной функцией  $f(t)$ :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)f(\tau)d\tau.$$

Для линейных неавтономных систем (т. е. когда  $A(t) \neq \text{const}$ ) фундаментальная матрица в большинстве случаев не вычисля-

ется аналитически. Фундаментальная матрица автономной системы ( $A(t) = A = \text{const}$ ) равна

$$\begin{aligned}\Phi(t, t_0) &= \Phi(t - t_0) = \exp(A \cdot (t - t_0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (t - t_0)^k}{k!} = \\ &= E + A(t - t_0) + \frac{A^2 (t - t_0)^2}{2!} + \dots\end{aligned}$$

Уравнения ошибок одноканальной ИНС относятся к классу линейных автономных систем  $\dot{x} = Ax + f(t)$ :

$$x = \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta V \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & -g \\ 0 & 1/a & 0 \end{bmatrix} = \text{const}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta f \\ \nu \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Для этой системы фундаментальная матрица имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{ga}} \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t - 1 \\ 0 & \cos \omega_0 t & -\sqrt{ga} \sin \omega_0 t \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{ga}} \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{bmatrix}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}. \quad (16)$$

- Колебания погрешностей с периодом Шулера. Из выражения (16) видно, что элементы фундаментальной матрицы содержат гармонические функции, меняющиеся с частотой  $\omega_0 = \sqrt{g/a} \simeq 1.24 \cdot 10^{-3} \text{с}^{-1}$ , называемой *частотой Шулера*. Соответствующий ей период  $T_0 \simeq 84.4$  мин называется *периодом Шулера*. Присутствие гармоник с периодом Шулера является характерной особенностью погрешностей околоземных автономных ИНС и БИНС и в общем случае.

- Малая чувствительность погрешностей к высокочастотным воздействиям, например, к высокочастотным шумам датчиков. Из теории колебаний линейных систем (см., например, [7]) известно, что если в системе  $\dot{x} = Ax + f(t)$  воздействие  $f(t)$  имеет характерные частоты, существенно превышающие собственные частоты однородной системы  $\dot{x} = Ax$ , то воздействие практически не влияет на решение.

- Малая зависимость погрешностей от траектории движения точки  $M$  – так называемая невозмущаемость инерциальных систем. Она следует из того, что параметры движения точки  $M$  не входят в уравнения (12). Однако это свойство в точности выполняется лишь для одноканальной ИНС. В трехмерном случае в уравнения ошибок ИНС будут входить траекторные параметры. Для БИНС даже в одноканальной модели появится зависимость

ошибок от угла  $D$ , связанная с перепроектированием показаний акселерометров (см. ниже), а в общем случае добавляется вклад от перепроектирования дрейфов из приборного трехгранника в опорный и ошибки ориентации, связанные с погрешностями масштабов и перекосами осей чувствительности ДУС. Однако малая возмущаемость погрешностей ИНС и БИНС сохраняется и в общем случае.

**Частные решения уравнений ошибок ИНС.** Записи сигналов реальных датчиков показывают, что обычно в них выделяются постоянные (систематические) составляющие инструментальных ошибок и отклонения от средних значений, которые в большинстве случаев можно считать высокочастотным шумом, мало влияющим на погрешности на фоне систематических составляющих. Из этого и следует актуальность исследования постоянных инструментальных погрешностей. К тому же для них система уравнений ошибок легко интегрируется аналитически.

Решение для постоянных инструментальных ошибок сразу следует из фундаментальной матрицы (16), однако для большей наглядности получим его непосредственно. Продифференцируем уравнения для  $\Delta V$  и подставим вместо  $\dot{\alpha}$  правую часть уравнения для  $\alpha$ . Это даст

$$\Delta \ddot{V} + \omega_0^2 \Delta V = -g\nu, \quad (17)$$

его общее решение

$$\Delta V = -\frac{g\nu}{\omega_0^2} + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

где  $A$  и  $B$  – произвольные постоянные. Из уравнения  $\Delta \dot{V} = -g\alpha + \Delta f$  следует, что

$$\alpha = \frac{\Delta f}{g} + \frac{A\omega_0}{g} \sin \omega_0 t - \frac{B\omega_0}{g} \cos \omega_0 t.$$

Последние две формулы позволяют выразить постоянные интегрирования через начальные условия

$$\Delta V(0) = \Delta V_0 = -\frac{g\nu}{\omega_0^2} + A, \quad \alpha(0) = \alpha_0 = \frac{\Delta f}{g} - \frac{B\omega_0}{g},$$

и получить следующие решения:

$$\begin{aligned} \Delta V &= -\frac{g\nu}{\omega_0^2} + \left( \Delta V_0 + \frac{g\nu}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} (\Delta f - g\alpha_0) \sin \omega_0 t, \quad (18) \\ \alpha &= \frac{\Delta f}{g} + \frac{\omega_0}{g} \left( \Delta V_0 + \frac{g\nu}{\omega_0^2} \right) \sin \omega_0 t - \frac{1}{g} (\Delta f - g\alpha_0) \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

Ошибку местоположения удобнее представить не в угловой мере  $\Delta\lambda$ , а в метрах:  $\Delta r = a\Delta\lambda$ . Из уравнения для  $\Delta\lambda$  следует, что

$$\begin{aligned}\Delta r &= \Delta r_0 + \int_0^t \Delta V(\tau) d\tau = \\ &= \Delta r_0 - \frac{g\nu}{\omega_0^2} t + \frac{1}{\omega_0} \left( \Delta V_0 + \frac{g\nu}{\omega_0^2} \right) \sin \omega_0 t - \\ &- \frac{1}{\omega_0^2} (\Delta f - g\alpha_0) (\cos \omega_0 t - 1).\end{aligned}\tag{19}$$

Формулы (18) и (19) позволяют оценить порядок и качественное поведение «выходных» погрешностей ИНС по вертикали, скорости и местоположению для разных «входных» воздействий, вызывающих эти погрешности. Рассмотрим по очереди смещение нуля акселерометра  $\Delta f$ , ошибку начальной выставки вертикали  $\alpha(0)$ , дрейф  $\nu$ , ошибку задания начальной скорости  $\Delta V(0)$  и ошибку ввода координаты  $\Delta r_0$ .

Еще раз отметим, что линейность уравнений ошибок гарантирует, что изменение любой из указанных «входных» ошибок в  $k$  раз приведет к изменению в  $k$  раз любой «выходной» погрешности системы и для любого момента времени <sup>5</sup>. Это позволяет ограничиться численными значениями «входных» ошибок, характерными для навигационных систем со стандартной точностью порядка одной мили (1.85 км) за час работы. Линейность существенна и для решения обратной задачи назначения допусков на инструментальные погрешности, ошибки начальной выставки и ввода начальных условий, гарантирующие нахождение навигационных погрешностей в заданных диапазонах.

**Замечание.** Для измерения погрешностей в задачах инерциальной навигации удобно использовать внесистемные единицы измерения, такие, как угловые секунды для погрешностей вертикали, угловые минуты для погрешностей курса, угловые секунды для смещений нулей акселерометров и градусы за час для дрейфов гироскопов. В системе СИ соответствующие числа получаются малыми и дробными. Например, дрейфу  $0.01^\circ/\text{час}$  в системе СИ соответствует число  $4.85 \cdot 10^{-8} \text{с}^{-1}$ , очевидно, не удобное для восприятия и запоминания. Тем не менее все формулы записываются в единицах СИ, что надо иметь в виду при расчетах.

Ниже перечислены навигационные ошибки одноканальной ИНС от различных постоянных по величине входных погрешностей. Существенно, что полученные зависимости характерны

---

<sup>5</sup> Конечно, до тех пределов, пока углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  можно считать малыми – см. допущения при выводе уравнений ошибок.

и для общего случая на интервалах времени порядка часа и они активно используются при оценках погрешностей ИНС и БИНС, например, при калибровке или диагностике погрешностей. В этих экспериментах навигационная система неподвижна относительно Земли и поэтому имеет нулевую скорость и фиксированные координаты. Таким образом, скорости и координаты, выдаваемые системой в наземном запуске, дают прямые замеры соответствующих погрешностей. Угловые погрешности не подлежат измерениям, поскольку начальные значения углов ориентации с достаточными для этого точностями заранее неизвестны. Более того, ИНС стандартного класса точности (с погрешностями порядка мили за час) сама служит источником информации об углах, точности которой практически невозможно достичь другими инструментами. Справедливость этого утверждения сразу следует из оценок, приведенных ниже.

- Смещение нулевого сигнала («нуля») акселерометра  $\Delta f = 10^{-3} \text{ м/с}^2$ . Из (18) и (19) получаем

$$\begin{aligned}\Delta r &= \frac{\Delta f}{\omega_0^2}(1 - \cos \omega_0 t), \\ \Delta V &= \frac{\Delta f}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \\ \alpha &= \frac{\Delta f}{g}(1 - \cos \omega_0 t).\end{aligned}\tag{20}$$

Графики этих функций представлены на рис. 4–6. На графиках

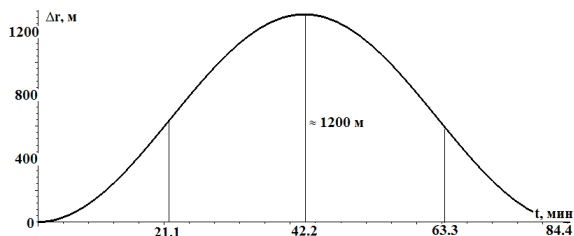


Рис. 4. Погрешности положения, соответствующие смещению нуля  $\Delta f = 10^{-3} \text{ м/с}^2$

погрешностей скорости и координаты, надо обратить внимание на пропорциональности  $\sin \omega_0 t$  и  $1 - \cos \omega_0 t$  соответственно. Из них следует, в частности, практически линейный набор погрешности скорости на начальном интервале времени, позволяющий



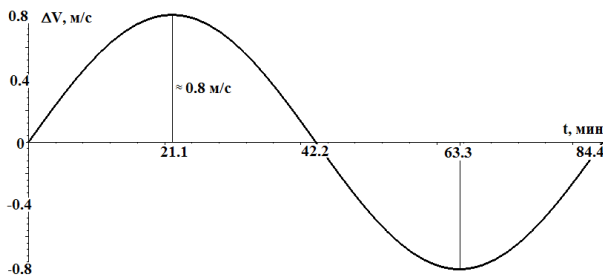


Рис. 5. Погрешности скорости, соответствующие смещению нуля  $\Delta f = 10^{-3} \text{ м/с}^2$

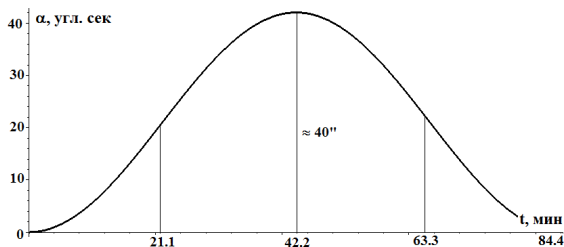


Рис. 6. Погрешности вертикали, соответствующие смещению нуля  $\Delta f = 10^{-3} \text{ м/с}^2$

быстро оценить величину смещения нуля. Линейный набор скорости соответствует равноускоренному движению с ускорением, равным смещению нуля. Кроме того, видно, что все погрешности совершают колебания с периодом Шулера без накопления со временем.

• Погрешность начальной выставки  $\alpha_0 = 20'' \simeq 9.7 \cdot 10^{-5} \text{ рад}$ . Из (18) и (19) получаем

$$\begin{aligned} \Delta r &= \frac{g\alpha_0}{\omega_0^2}(\cos \omega_0 t - 1), \\ \Delta V &= -\frac{g\alpha_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \\ \alpha &= \alpha_0 \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (21)$$

Графики этих функций представлены на рис. 7–9. Из них видно, что скоростная и позиционная погрешности имеют тот же характер, что при смещении нуля акселерометра, в силу чего начальную погрешность вертикали невозможно отделить от смещения

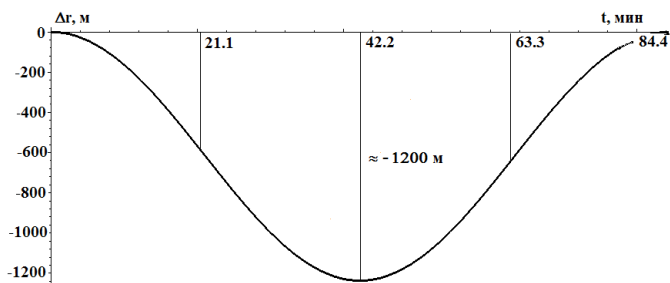


Рис. 7. Погрешности положения, соответствующие ошибке начальной выставки вертикали  $20''$

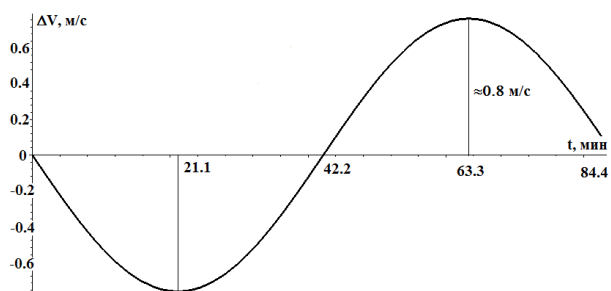


Рис. 8. Погрешности скорости, соответствующие ошибке начальной выставки вертикали  $20''$

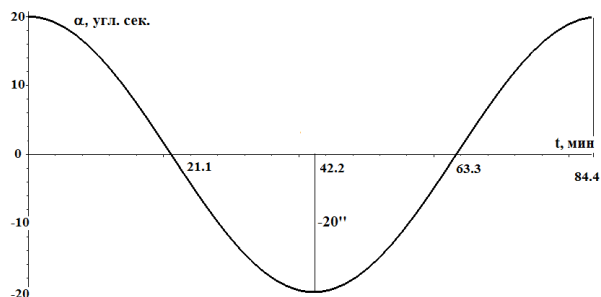


Рис. 9. Погрешности вертикали, соответствующие ошибке начальной выставки вертикали  $20''$

нуля акселерометра, наблюдая погрешности ИНС на неподвиж-

ном основании <sup>6</sup>. Отличия в знаках  $\Delta V$  и  $\Delta r$  от предыдущей группы формул устраняются заменой знака  $\Delta f$  или  $\alpha_0$ . Зависимости погрешностей вертикали от времени отличаются на константу, однако на практике эту разность измерить невозможно, поскольку нет эталонного средства, определяющего положение идеального трехгранника *Мх*. А колебания погрешностей вертикали относительно средних значений в обоих случаях одинаковы.

Идентичность ошибок координат и скоростей, соответствующих смещениям нулей акселерометров и погрешностей начальной выставки вертикали, позволяет ввести удобную внесистемную единицу измерения нулевого сигнала акселерометра, специфичную для использования в инерциальной навигации. Как видно из графиков, смещение нуля  $\Delta f = 10^{-3}$  м/с<sup>2</sup> приводит к колебаниям вертикали с той же амплитудой (относительно среднего значения)  $20''$ , что и начальная ошибка вертикали, равная  $20''$ .

Это позволяет измерять смещение нуля акселерометра в угловых секундах. Например, вместо фразы «смещение нуля равно  $10^{-3}$  м/с<sup>2</sup>» можно сказать «смещение нуля  $20''$ ». Указанное соответствие также следует и из уравнений ошибок, в которые  $g\alpha$  и  $\Delta f$  входят в виде суммы в одно уравнение и смещение нуля трактуется как угловая ошибка  $\alpha$ , такая, что  $g\alpha = \Delta f$ .

- Дрейф гироскопа  $\nu = 0.01^\circ/\text{час}$ . Из (18) и (19) следует

$$\begin{aligned}\Delta r &= \frac{g\nu}{\omega_0^3}(\sin \omega_0 t - \omega_0 t), \\ \Delta V &= \frac{g\nu}{\omega_0^2}(\cos \omega_0 t - 1), \\ \alpha &= \frac{\nu}{\omega_0} \sin \omega_0 t.\end{aligned}\tag{22}$$

Графики данных функций представлены на рис. 10–12.

В отличие от предыдущих решений, здесь проявляется составляющая позиционной погрешности, линейно растущая со временем. Такое влияние дрейфа гироскопического тракта на позиционные ошибки качественно повторяется и в трехмерном случае, откуда следует, что точность гироскопов – один из критических факторов точности ИНС.

- Погрешность начальной скорости  $\Delta V_0 = 1$  м/с. Из (18) и (19) имеем следующее решение уравнений ошибок и графики по-

---

<sup>6</sup> В случае БИНС смещения нулей акселерометров и погрешности вертикали разделяются при разворотах корпуса БИНС, о чем будет сказано ниже.

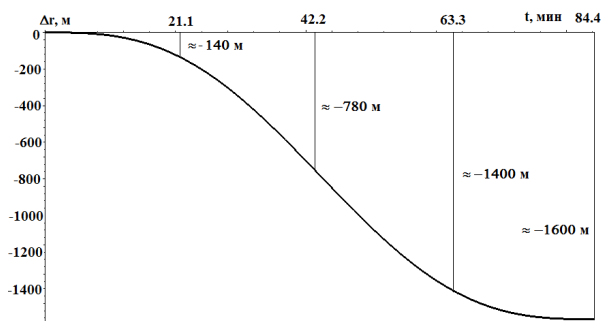


Рис. 10. Погрешности положения, соответствующие дрейфу  $\nu = 0.01^\circ/\text{час}$

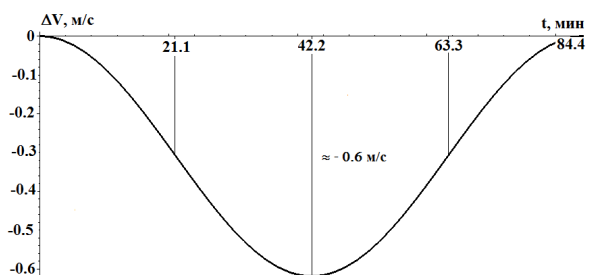


Рис. 11. Погрешности скорости, соответствующие дрейфу  $\nu = 0.01^\circ/\text{час}$

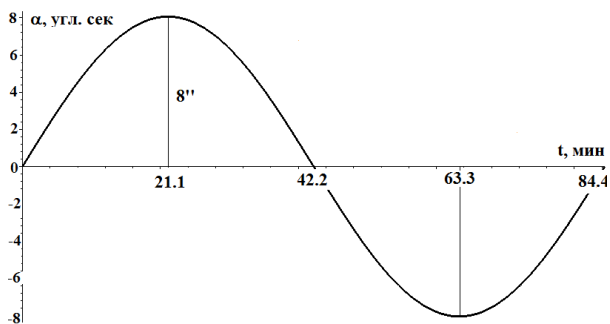


Рис. 12. Погрешности вертикали, соответствующие дрейфу  $\nu = 0.01^\circ/\text{час}$

грешностей, представленные на рис. 15–13:

$$\begin{aligned}\Delta r &= \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \\ \Delta V &= \Delta V_0 \cos \omega_0 t, \\ \alpha &= \frac{\Delta V_0 \omega_0}{g} \sin \omega_0 t.\end{aligned}\tag{23}$$

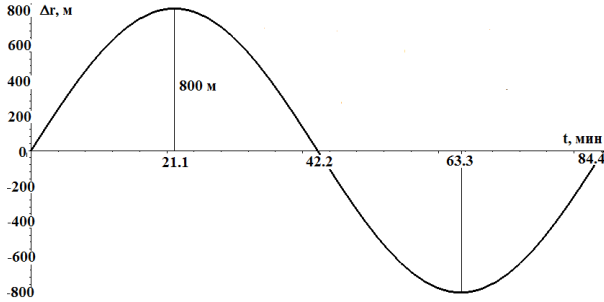


Рис. 13. Погрешности положения, соответствующие ошибке начальной скорости  $\Delta V_0 = 1$  м/с

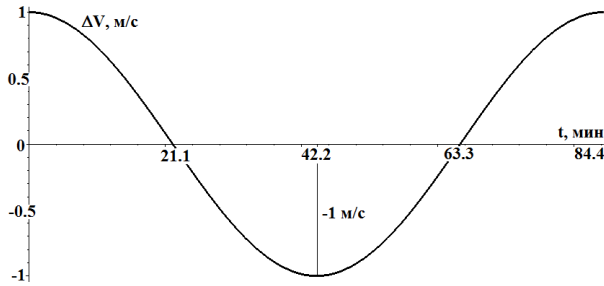


Рис. 14. Погрешности скорости, соответствующие ошибке начальной скорости  $\Delta V_0 = 1$  м/с

Заметим, что в процессе начальной выставки ИНС объект обычно неподвижен, и с большой точностью его начальная скорость равна нулю. Поэтому ошибка начальной скорости при включении ИНС на Земле чаще всего отсутствует, но может наблюдаться при выставке на подвижном основании.

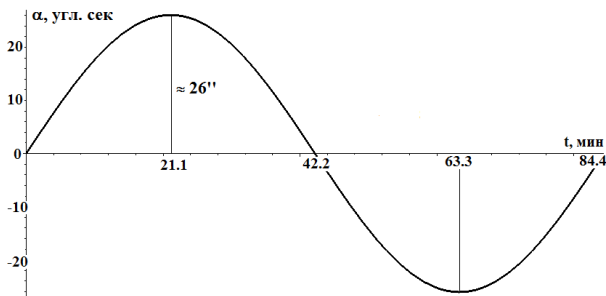


Рис. 15. Погрешности вертикали, соответствующие ошибке начальной скорости  $\Delta V_0 = 1$  м/с

- Позиционная погрешность  $\Delta r(0)$  дает  $\Delta r(t) = \Delta r(0)$ , при этом ошибки скорости и вертикали отсутствуют. Однако в общем случае это верно лишь для ошибки долготы. Объяснение этого факта требует учета вращения Земли и рассмотрения движения модельной точки не по экватору, а вдоль меридиана. Качественно об этом сказано в подразделе об учете вращения Земли.

**Общие свойства погрешностей ИНС.** Частные решения уравнений ошибок позволяют увидеть некоторые общие закономерности, следующие из графиков погрешностей.

- В зависимостях погрешностей от времени присутствует характерный период Шулера  $T = 84.4$  мин. На Земле погрешности скоростей и координат фактически выдаются системой напрямую, при этом километровым позиционным ошибкам соответствуют ошибки порядка 1 м/с по скорости.

- Ошибки вертикали имеют очень малые величины, исчисляемые десятками угловых секунд. Из этого следует необходимость поддерживать ориентацию гироплатформы с указанной высокой точностью. Ошибки ориентации, вычисляемой ИНС, неизмеримы непосредственно, однако если корпус БИНС фиксирован относительно Земли достаточно точно, то на графиках зависимостей углов от времени также видны шулеровские колебания. Однако начало отсчета погрешностей вертикали по этим записям восстановить невозможно, что и препятствует непосредственной измеримости ошибок углов.

- Инструментальные погрешности и ошибки начальной выставки, вызывающие километровые позиционные ошибки, сами по себе чрезвычайно малы. Этим объясняется большая техническая сложность навигационных систем на фоне относительно простого принципа работы.

- Из решений уравнений ошибок видно, что разные погрешности навигационной системы всегда взаимосвязаны. Поэтому невозможно «испортить» какой-то один или несколько параметров, не затронув остальные. Следовательно, инерциальная система чувствительна к выходу из строя любого ее элемента.

- Из графиков ошибок вертикали видно, что они являются ограниченными функциями времени даже при наличии гироскопического дрейфа, вызывающего накопление позиционных погрешностей. Интересно заметить, что кинематическая ошибка описывается уравнением (8)  $\dot{\beta} = \nu$ , и  $\beta(t)$  накапливается при постоянном дрейфе. Из равенства  $\alpha = \beta + \gamma$  следует, что при наличии дрейфа «уходы» по  $\beta$  и  $\gamma$  взаимно компенсируются.

С точки зрения эксплуатации ИНС это означает, что при наличии постоянного дрейфа погрешность местоположения, вычисленного ИНС, будет расти, однако гироплатформа БИНС будет совершать колебания ограниченной амплитуды.

**Учет вращения Земли.** При рассмотрении работы одноканальной ИНС было сделано максимальное упрощение – считалось, что Земля неподвижна. В реальности Земля вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 7.2921158553 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  относительно оси, ортогональной экватору. В этом подразделе качественно описаны некоторые эффекты, связанные с вращением Земли. Отдельные рассуждения заведомо не строги и служат скорее для описания общих идей.

Для учета вращения Земли в уравнениях идеальной работы (6) и (7) одноканальных ИНС и БИНС, перемещающихся по экватору, к угловой скорости опорной системы координат добавляется угловая скорость Земли: т. е.  $\omega_{x3} = V_{x2}/a$  заменяется на

$$\omega_{x3} = \frac{V_{x2}}{a} + \omega.$$

Эта же угловая скорость  $\omega$  войдет и в возмущенные уравнения, т. е.

$$\omega'_{y2} = \frac{V'_{y2}}{a} + \omega,$$

и уравнения ошибок, получающиеся вычитанием уравнений идеальной работы из возмущенных уравнений, никак не изменятся, а выводы о поведении погрешностей одноканальной ИНС, движущейся по экватору, полученные в предположении о неподвижности Земли, полностью сохраняются.

Однако в общей постановке навигационной задачи возможны движения по меридиану. При учете вращения Земли это приводит к появлению погрешностей, имеющих «дрейфовый» характер и связанных с ошибками широты. Поясним механизм их появления.

Допустим, что точка  $M$  находится на поверхности шаровидной Земли, вращающейся относительно оси, ортогональной плоскости экватора, с угловой скоростью  $u$ . Пусть точка  $M$  находится на широте  $\varphi$ . Тогда в географическом трехграннике  $Mx^0$ , у которого ось  $x_1^0$  ориентирована на восток, ось  $x_2^0$  – на север, а  $x_3^0$  – по вертикали, угловая скорость Земли равна

$$u = [0, u \cos \varphi, u \sin \varphi]^T.$$

Если гиropлатформа повторяет движение географического трехгранника, то эта угловая скорость сообщается гиropлатформе. При вводе ошибочной широты  $\varphi'$  гиropлатформе вместо нее сообщается угловая скорость

$$u' = [0, u \cos \varphi', u \sin \varphi']^T,$$

а ее отличие от «правильного» значения эквивалентно следующему дрейфу в географических осях:

$$\nu = u' - u \simeq [0, -u \Delta \varphi \sin \varphi, u \Delta \varphi \cos \varphi]^T,$$

где  $\Delta \varphi = \varphi' - \varphi$ . В первом приближении горизонтальная составляющая этого дрейфа вдоль северной оси равна  $-u \Delta \varphi \sin \varphi$ . Она приводит к «дрейфовому» поведению погрешностей ИНС по восточной скорости и долготе, которое уже было рассмотрено в рамках одноканальной модели. Однако на практике начальные

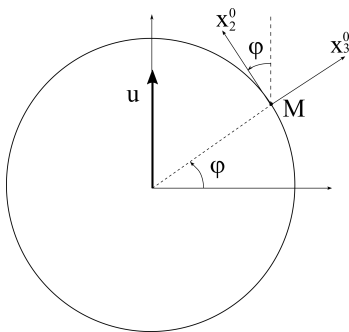


Рис. 16. Географический трехгранник  $Mx^0$  и его сечение меридиональной плоскостью (нумерация осей опорного трехгранника отличается от использованной при рассмотрении одноканальных ИНС и БИНС)

координаты, как правило, вводятся точно и «дрейфовый» уход ИНС в восточном направлении соответствует дрейфу гиropлатформы вдоль северного направления.



Аналогичным образом объясняется проявление погрешности выставки навигационной системы (гироплатформы) по курсу  $\beta_3$  в виде «дрейфовых» ошибок северной скорости и широты. Если гиросплатформа выставлена по курсу с малой погрешностью  $\beta_3$ , то ей должна сообщаться угловая скорость

$$u \simeq [u\beta_3 \cos \varphi, u \cos \varphi, u \sin \varphi]^T,$$

однако ошибка выставки по курсу заранее неизвестна (иначе можно было ее компенсировать), и гиросплатформе сообщается угловая скорость, соответствующая  $\beta_3 = 0$ :

$$u = [0, u \cos \varphi, u \sin \varphi]^T.$$

Разность этих векторов дает дрейф  $\nu \simeq u\beta_3 \cos \varphi$ , направленный на восток, который и проявляется в виде «дрейфовых» погрешностей северной составляющей скорости и широты.

**Замечание о начальной выставке.** Начальная выставка навигационной системы – процедура задания начальной ориентации опорного трехгранника по показаниям инерциальных датчиков и стартовой широте. Результат начальной выставки ИНС зависит от способа выставки, характера возмущений, действующих при ее проведении, и инструментальных ошибок. При неподвижности объекта относительно Земли точность выставки определяется преимущественно инструментальными ошибками. Рассмотрим этот вопрос в объеме, возможном в рамках одноканальной модели.

Как уже говорилось, выставка гиросплатформы в горизонте сводится к ее установке в положение, в котором акселерометр выдает нулевой сигнал. В идеальном случае это соответствует ортогональности оси чувствительности полю тяжести. Теперь допустим, что акселерометр ИНС имеет постоянное смещение нуля  $\Delta f$ , и будем действовать по тому же алгоритму. Тогда гиросплатформа выставится с угловой ошибкой, компенсирующей смещение нуля соответствующей проекцией  $g$ . Измерение акселерометра, неподвижного относительно Земли, при малом отклонении оси чувствительности от вертикали  $\alpha$  описывается формулой (11):

$$f = \delta f = -g\alpha + \Delta f, \quad (24)$$

следовательно, из условия  $f = 0$  получаем выражение ошибки выставки  $\alpha_0 = \Delta f/g$ . Если считать, что координаты начального положения введены точно, то  $\gamma_0 = 0$ , и поэтому  $\alpha_0 = \beta_0 + \gamma_0 = \beta_0$ . Этот момент имеет место и в общем случае – ошибка выставки трактуется как кинематическая ошибка ( $\beta$ ).

Из решений уравнений ошибок (18) и (19) следует, что если погрешности начальных координат и скорости нулевые, то ошибки выставки компенсируют смещения нулей акселерометров не только после выставки, но и в дальнейшей навигации. Если представить, что дрейф отсутствует или пренебрежимо мал, то ИНС после выставки вовсе не будет давать навигационных ошибок скорости и местоположения. В отличие от нулевых сигналов акселерометров дрейфы гироскопического тракта не полностью компенсируются некоторыми ошибками ориентации. Доказательство требует выхода за рамки одноканальной модели и объясняет то, почему на неподвижном основании погрешности ИНС после выставки обычно имеют «дрейфовый» характер.

**Замечание.** Компенсация нулей акселерометров постоянными ошибками вертикали в течение всей навигации характерна для платформенных ИНС в общем случае. Ей объясняется нечувствительность платформенных ИНС к постоянным смещениям нулей акселерометров. Акселерометры БИНС установлены на подвижный корпус. Поэтому проекции смещений нулей в географическом трехграннике уже зависят от движения корпуса (см. следующий раздел), и эффект компенсации при произвольном движении отсутствует. Этим объясняются более жесткие требования к стабильности тракта акселерометров БИНС.

## 2.2. Принцип работы, уравнения ошибок одноканальной БИНС и их особенности

Принципы работы одноканальных ИНС и БИНС фактически идентичны, поэтому их уравнения ошибок имеют много общего. Еще раз выпишем уравнения идеальной работы одноканальной БИНС:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \frac{V_{x2}}{a}, \\ \dot{V}_{x2} &= f_{x2}, \\ \omega_{x3} &= \frac{V_{x2}}{a}, \\ \dot{D} &= -\omega_{p3} + \omega_{x3}, \\ f_{x2} &= -f_{p1} \sin D + f_{p2} \cos D.\end{aligned}\tag{25}$$

Соответствующие возмущенные уравнения структурно совпадают, но записываются в модельном трехграннике  $M'y$ :

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}' &= \frac{V'_{y2}}{a}, \\ \dot{V}'_{y2} &= f'_{y2}, \\ \omega'_{y3} &= \frac{V'_{y2}}{a}, \\ \dot{D}' &= -\omega'_{p3} + \omega'_{y3}, \\ f'_{z2} &= -f'_{p1} \sin D' + f'_{p2} \cos D'.\end{aligned}\tag{26}$$

Как и для ИНС, в эти уравнения «подставляется» информация, фактически доступная измерению  $(f'_{p1}, f'_{p2}, \omega'_{p3})$  или вычислению (все остальное). Уравнения ошибок получаются вычитанием уравнений идеальной работы из возмущенных уравнений и последующей линеаризацией. При этом направления осей  $x_3$ ,  $y_3$  и  $p_3$  совпадают, а для проекций по несовпадающим осям  $x_2$ ,  $y_2$  и  $z_2$  берется формальная «цифровая» разность.

В теории ошибок БИНС появляется трехгранник  $Mz$ , аналогичный приборному трехграннику платформенной ИНС, который ввиду фактического отсутствия гиросплатформы у БИНС называется *квазиприборным*. Его ориентация относительно идеального трехгранника  $Mx$  описывается уравнением

$$\Delta \dot{D} = \dot{D}' - \dot{D} = -(\omega'_{p3} - \omega_{p3}) + \frac{\Delta V_{x2}}{a}.$$

Величина  $\Delta V_{x2}/a = \omega'_{y3} - \omega_{x3}$  задает скорость изменения позиционной погрешности  $\dot{\gamma} = \Delta V_{x2}/a$ , а член в скобках – скорость изменения кинематической ошибки:  $\dot{\beta} = -(\omega'_{p3} - \omega_{p3})$ , обусловленной только погрешностями тракта ДУС  $\nu_{p3} = \omega'_{p3} - \omega_{p3}$ . Таким образом, мы снова получаем, что квазиприборный трехгранник отклонен от идеального на угол

$$\alpha = D' - D = \Delta D = \beta + \gamma,$$

состоящий из ошибки местоположения и кинематической ошибки. Существенно обратить внимание на изменение знака дрейфа в уравнении для кинематической ошибки:

$$\dot{\beta} = -\nu_{p3}.$$

Оно является простым следствием рассмотренных соотношений, однако допускает и качественную трактовку. Для случая платформенной ИНС положительный дрейф  $\nu_{x3}$  приводит к «уходу» приборного трехгранника против часовой стрелки (напомним, что речь идет об одноканальных системах и повороте в плоскости рисунка). А в случае БИНС положительный дрейф ДУС  $\nu_{p3}$  также соответствует вращению приборного трехгранника  $Mr$  относительно оси  $p3$  против часовой стрелки. Однако приборный трехгранник  $Mr$  фактически материализован осями чувствительности акселерометров и ДУС и поэтому даже при наличии дрейфа ДУС никуда не «уходит», а дрейфу соответствует поворот квазиприборного трехгранника  $Mz$  в противоположную сторону, чем и объясняется обращение знака. Из этой трактовки следует, что знак дрейфа ДУС БИНС меняется на противоположный и в общем трехмерном случае.

Теперь выразим погрешности акселерометрического тракта. Обозначим смещения нулей акселерометров в собственных приборных осях через  $\Delta f_{pi} = f'_{pi} - f_{pi}$ ,  $i = 1, 2$ . Из (25) и (26) получим

$$\begin{aligned} \delta f_{x2} &= f'_{z2} - f_{x2} \simeq -\Delta f_{p1} \sin D + \Delta f_{p2} \cos D - \\ &- (f_{p1} \cos D + f_{p2} \sin D) \Delta D. \end{aligned}$$

Первый член формулы представляет собой перепроектирование смещений нулей акселерометров из приборного трехгранника в  $Mr$  в  $Mx$ . Преобразуем второй член. Из взаимного расположения трехгранников  $Mr$  и  $Mx$  (см. рис. 1) следует, что  $f_{p1} = f_{x1} \cos D - f_{x2} \sin D$ ,  $f_{p2} = f_{x1} \sin D + f_{x2} \cos D$ , поэтому

$$-f_{p1} \cos D - f_{p2} \sin D = -f_{x1} \simeq -g,$$

и с учетом  $\Delta D = \alpha$  получаем

$$\delta f_{x2} \simeq -\Delta f_{p1} \sin D + \Delta f_{p2} \cos D - g\alpha. \quad (27)$$

Используя уравнение  $\dot{\alpha} = \dot{\beta} + \dot{\gamma} = -\nu_{p3} + \Delta V_{x2}/a$ , записываем систему уравнений ошибок одноканальной БИНС:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\lambda} &= \frac{\Delta V_{x2}}{a}, \\ \Delta \dot{V}_{x2} &= -g\alpha - \Delta f_{p1} \sin D + \Delta f_{p2} \cos D, \\ \dot{\alpha} &= \frac{\Delta V_{x2}}{a} - \nu_{p3}. \end{aligned} \quad (28)$$

Сравнение (28) с уравнениями ошибок платформенной ИНС (12) показывает, что отличия этих систем заключаются лишь в пересчете дрейфов (с обращением знака) и

смещений нулей акселерометров из приборных осей  $Mp$  в оси опорного трехгранника  $Mx$ . Поскольку значение идеального угла  $D$  неизвестно, при пересчете инструментальных погрешностей из приборного трехгранника можно использовать угол  $D'$ , вычисляемый БИНС и отличающийся от  $D$  на малую величину  $\alpha$ . С точностью до малых второго порядка:  $-\Delta f_{p1} \sin D + \Delta f_{p2} \cos D \simeq -\Delta f_{p1} \sin D' + \Delta f_{p2} \cos D'$ . Погрешность скорости  $\Delta V_{x2}$  с точностью до малых второго порядка ( $\sim \alpha \Delta V_{x2}$ ) будет той же и в модельном трехграннике  $My$ , положение которого вычислено БИНС:  $\Delta V_{x2} \simeq \Delta V_{y2}$ .

С учетом этих приближений уравнения ошибок одноканальной БИНС переписываются в виде

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\lambda} &= \frac{\Delta V_{y2}}{a}, \\ \Delta \dot{V}_{y2} &= -g\alpha - \Delta f_{p1} \sin D' + \Delta f_{p2} \cos D', \\ \dot{\alpha} &= \frac{\Delta V_{y2}}{a} - \nu_{p3}.\end{aligned}\tag{29}$$

Из аналогии уравнений ошибок ИНС и БИНС следует совпадение парциальных вкладов от различных источников погрешностей, оцененных выше для ИНС если  $-\Delta f_{p1} \sin D' + \Delta f_{p2} \cos D' = \text{const}$  и  $\nu_{p3} = \text{const}$ .

Пересчет инструментальных погрешностей из приборных осей в модельные приводит к ряду существенных отличий в поведении БИНС от ИНС при угловом движении БИНС. Напомним, что в случае идеальной выставки ИНС, имеющая смещение нуля акселерометра  $\Delta f_{z2}$  ( $z_2$  – приборная ось акселерометра), выставляется с погрешностью вертикали  $\alpha_0 = \Delta f_{z2}/g$ , «компенсирующей» смещение нуля акселерометра проекцией силы тяжести  $g$  (см. (24)). После этого погрешности координаты и скорости в режиме навигации не набираются при любом движении ИНС.

При идеальной выставке БИНС горизонт восстанавливается также с точностью до ошибок инерциальных датчиков. Если БИНС при выставке неподвижна относительно Земли, то постоянные смещения нулей акселерометров приводят к ошибке горизонта  $\alpha_0 = \Delta f_{z2}/g = (-\Delta f_{p1} \sin D'_0 + \Delta f_{p2} \cos D'_0)/g$ , где  $D'_0$  – угол, полученный по результатам выставки, а  $z_2$  – ось квази-приборного трехгранника, вычисленного к концу выставки. Без разворотов корпуса БИНС после идеальной выставки, т. е. при  $D' \simeq \text{const}$ , ошибка  $\alpha_0$  продолжает компенсировать  $\Delta f_{z2}$  проекцией силы тяжести, и погрешности по координатам и скоростям по-прежнему не набираются (см. (18)). Однако при движении корпуса БИНС угол  $D'$  будет функцией времени  $D'(t)$  и  $\Delta f_{z2} = -\Delta f_{p1} \sin D'(t) + \Delta f_{p2} \cos D'(t)$  уже не компенсируется

постоянной величиной  $-g\alpha_0$ . Это приводит к «проявлению» смещений нулей акселерометров в виде навигационных ошибок координат и скоростей после поворота БИНС (изменения угла  $D$ ).

Таким образом, даже для простейшей модели одноканальной БИНС видна существенная зависимость навигационных погрешностей от движения корпуса БИНС, не свойственная платформенной одноканальной ИНС <sup>7</sup>.

Простейшая одноканальная модель позволяет выявить группу «неблагоприятных» маневров, после которых проявляются большие навигационные ошибки БИНС. Разворот после перехода в режим навигации на угол  $D \simeq 180^\circ$  и дальнейшая стоянка БИНС приводят к тому, что погрешности  $\Delta f_{z2}$  и  $-g\alpha_0$  не компенсируются, а складываются, и после разворота погрешности БИНС по координатам и скоростям проявляются так, как если бы действовал «удвоенный» ноль акселерометра. Этот результат справедлив и для общего трехмерно случая. Еще одним «неблагоприятным» маневром оказывается разворот на  $180^\circ$  по курсу. Кроме нулей акселерометров здесь аналогичным образом «удваиваются» навигационные ошибки БИНС, связанные с начальной выставкой БИНС по курсу при наличии дрейфов ДУС. Объяснение этого требует анализа общих уравнений ошибок.

Из (29) следует, что при интенсивном маневрировании  $D'(t)$  быстро меняется в сравнении с периодом Шулера, а  $\Delta f_{z2}(t) = -\Delta f_{p1} \sin D'(t) + \Delta f_{p2} \cos D'(t)$  может оказаться быстроосциллирующей функцией со средним значением, близким к нулю. В этом случае наблюдается существенное уменьшение влияния ошибок акселерометров  $\Delta f_{p1}$ ,  $\Delta f_{p2}$ , что следует из теории вынужденных колебаний линейных систем, ослабляющих входные воздействия с частотами, много большими собственных частот системы [7]. Этот эффект сохраняется для БИНС в общем случае.

Однако следует учесть, что даже при интенсивном маневрировании будут проявляться ошибки выставки, вызванные погрешностями датчиков первичной информации. Ввиду линейности системы уравнений ошибок выходные ошибки БИНС являются суммой решения, соответствующего ошибкам выставки, и решения, соответствующего влиянию инструментальных погрешностей. При интенсивном маневрировании часть, связанная с инструментальными ошибками, осредняется, и в выходных по-

---

<sup>7</sup> Конечно, зависимость навигационных погрешностей от движения может объясняться конструктивными особенностями. Например, если инерциальные датчики или следящая система, управляющая платформой, чувствительны к механическим воздействиям, соответствующим определенным движениям. Однако такие эффекты не являются следствием принципа работы ИНС и БИНС и подлежат устранению.

грешностях фактически проявляется только решение, связанное с ошибками выставки.

Из (29) нетрудно показать чувствительность погрешностей БИНС к дрейфам ДУС, пропорциональным угловой скорости, например, связанным с погрешностями масштабного коэффициента. Действительно, если выполнить полный оборот по углу  $D$  на  $2\pi$  радиан и считать, что время поворота пренебрежимо мало в сравнении с периодом Шулера, то ошибка масштабного коэффициента ДУС  $\theta$  приведет к приращению ошибки вертикали:

$$\beta = -\theta \int_0^t \omega_{p3}(\tau) d\tau = -2\pi\theta.$$

Поэтому даже такая малая ошибка масштаба ДУС, как  $\theta = 10^{-5}$ , т. е.  $10^{-3} \%$ , дает достаточно большую погрешность вертикали  $13''$ . Для маневренных объектов типа легких самолетов и самолетов-истребителей число угловых маневров типа «петель» и «бочек» может исчисляться десятками, что приводит к многократному увеличению навигационных погрешностей из-за ошибок масштабов ДУС. Отметим, что еще одним из критических факторов, влияющих на точность БИНС, являются и перекосы осей чувствительности ДУС. Доказательство требует рассмотрения пространственного движения.

### 2.3. Устойчивость горизонтальных каналов ИНС и БИНС

Одно из фундаментальных свойств горизонтальных каналов ИНС и БИНС состоит в устойчивости нулевого положения равновесия следующей однородной подсистемы системы уравнений ошибок:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{V} &= -g\alpha, \\ \dot{\alpha} &= \frac{\Delta V}{a}. \end{aligned}$$

Заметим, что эти уравнения входят и в уравнения ошибок ИНС, и в уравнения ошибок БИНС и фактически определяют динамику погрешностей. Малое отклонение начальных условий  $\Delta V(0)$  и  $\alpha(0)$  от нуля и малые воздействия на правую часть приводят к малым погрешностям в течение всей последующей навигации. Это свойство горизонтальных каналов качественно сохраняется в общем случае и фактически делает возможным использовать сам принцип инерциальной навигации. С точки зрения теории устойчивости, положение равновесия приведенной подсистемы

устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически (см., например, [7])<sup>8</sup>.

Отсутствие асимптотической устойчивости означает, что любое возмущение приводит к незатухающему отклику в погрешностях ИНС и БИНС. Поэтому инерциальные системы чувствительны к любым импульсным погрешностям. Например, если по трактам гироскопов или акселерометров проходит достаточно интенсивная импульсная погрешность, то система выходит из строя и уже не возвращается к нормальной работе, пока не будет выставлена заново. Это же относится и к любым вычислительным сбоям при решении навигационной задачи.

Заметим, что полная система уравнений ошибок ИНС и БИНС не будет устойчивой, поскольку ошибки координат накапливаются со временем при наличии дрейфов. Однако линейный характер накопления ошибок со временем не оказывается принципиальным препятствием к использованию ИНС и БИНС. Самое существенное, что в уравнениях не проявляются экспоненциальные неустойчивости, которые как раз бы оказались непреодолимым препятствием, подобным тому, что возникает при попытке поставить карандаш на стол. В следующем подразделе показано, что именно такие проблемы возникают при попытке построить автономный вертикальный канал ИНС и БИНС и то, как дополнительная информация обеспечивает асимптотическую устойчивость за счет введения обратной связи.

### **3. Неустойчивость вертикального канала ИНС и БИНС и коррекция по высоте от внешнего источника**

#### **3.1. Неустойчивость вертикального канала ИНС и БИНС**

Покажем неустойчивость вертикального канала ИНС и БИНС, рассматривая движение материальной точки по вертикали под действием силы тяжести  $g$  и внешней силы удельной силы  $f$  (рис. 17). Уравнения Ньютона в проекции на направление

---

<sup>8</sup> Из теории устойчивости известно, что (не асимптотическая) устойчивость линеаризованной системы не гарантирует устойчивости исходной системы. Однако для уравнений ошибок ИНС и БИНС нелинейные члены пренебрежимо малы, и линейные уравнения ошибок практически абсолютно точны.



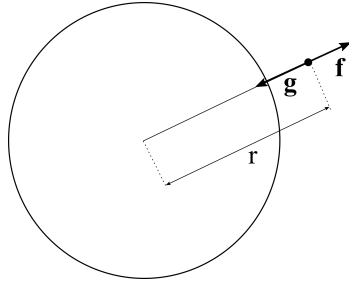


Рис. 17. Движение материальной точки по вертикали в поле тяжести Земли под действием внешней удельной силы  $f$  и силы тяжести  $g$

радиус-вектора точки имеют вид <sup>9</sup>

$$\ddot{r} = f - g(r), \quad g(r) = \frac{GM}{r^2}, \quad (30)$$

где  $M$  – масса Земли,  $G$  – гравитационная постоянная. Чтобы реализовать интегрирование этих уравнений аппаратно, необходимо установить акселерометр, измеряющий удельную силу  $f$  вдоль радиуса-вектора точки  $r$ , а в вычислитель навигационной системы подавать информацию об удельной силе тяжести  $g$ , соответствующей вычисленному расстоянию от центра Земли  $r$ .

В случае использования БИНС перепроектирование удельной силы на вертикальное направление осуществляется алгоритмически.

Если вместо точного начального значения  $r(0)$  в вычислитель будет введена величина  $r'(0) = r(0) + \Delta r(0)$ , то в вычислителе (за неимением другой информации об  $r$ ) будут решаться возмущенные уравнения

$$\ddot{r}' = f - g(r'), \quad g(r') = \frac{GM}{r'^2}, \quad (31)$$

в которые подставляется та же удельная сила  $f$ , фактически измеряемая акселерометром, и начальное условие  $r'(0)$ . Но  $g(r') - g(r) \simeq g'(r)\Delta r = -2G\Delta r/r^3$ , и поэтому вычитание идеальных уравнений из возмущенных приводит к следующему результату:

$$\Delta \ddot{r} = 2 \frac{GM \Delta r}{r^3}.$$

<sup>9</sup> Оно несколько упрощено в сравнении с общим случаем. Движение в горизонтальной плоскости относительно вращающейся Земли приводит к появлению дополнительных членов в проекции на вертикальное направление, однако они достаточно малы и не оказывают влияния на приводимые качественные результаты.

При движении вблизи поверхности Земли  $r \simeq r' \simeq a$ , поэтому  $GM\Delta r/r^3 = g\Delta r/a$ , где  $g = g(a) = GM/a^2$  – удельная сила тяжести на поверхности Земли. Вспомнив, что частота Шулера равна  $\omega_0 = \sqrt{g/a}$ , перепишем уравнение для погрешности вертикальной координаты вблизи поверхности Земли в виде

$$\Delta\ddot{r} - 2\omega_0^2\Delta r = 0. \quad (32)$$

Следовательно, погрешность вертикальной координаты равна

$$\Delta r(t) = \Delta r_0 \operatorname{ch} \sqrt{2}\omega_0 t + \frac{\Delta \dot{r}_0}{\sqrt{2}\omega_0} \operatorname{sh} \sqrt{2}\omega_0 t,$$

где  $\Delta r_0$  и  $\Delta \dot{r}_0$  – начальные погрешности по высоте и вертикальной скорости. Экспоненциальный рост погрешностей, описываемый этой формулой, довольно быстрый, хотя в показателе экспоненты и стоит малый множитель перед временем. За 10 минут ошибки увеличиваются примерно в  $e \simeq 2.7$  раз.

По теореме Ляпунова об устойчивости по линейному приближению (см. [7], [13], [14]) из экспоненциального роста решений линеаризованных уравнений следует неустойчивость решений исходных нелинейных уравнений. Поэтому *инерциальный вертикальный канал невозможно реализовать на практике, в особенности на длительных (порядка периода Шулера и больше) интервалах времени.*

### 3.2. Использование внешней информации о высоте для обеспечения асимптотической устойчивости вертикального канала

Покажем, как *дополнительная информация* о высоте от внешнего источника позволяет избавиться от экспоненциальной неустойчивости автономного инерциального канала. Отметим, что на практике автономным источником внешней высоты является баровысотомер, но можно применять и другие навигационные средства, например, спутниковую навигационную систему.

Самым простым способом учета дополнительной информации является подмена параметров вертикального канала ИНС или БИНС данными от внешнего источника: высота поступает от него непосредственно, а скорость получается, например, численным дифференцированием информации о высоте. Для подавления случайных помех может проводиться дополнительная цифровая фильтрация, одними из простейших способов которой являются осреднение или оконное сглаживание. Но такой способ использования внешних данных неоптимален.

Здесь мы впервые сталкиваемся с появлением так называемой *избыточной информации*: в нашем распоряжении оказываются как данные от инерциальной системы, так и от внешнего источника. Избыточность позволяет построить алгоритмы *комплексной обработки информации (КОИ)*, комбинирующие преимущества всех источников данных. Задачи КОИ также называют *комплексированием*. Если в задаче комплексирования один из источников является более точным (эталонным), задачу комплексирования еще называют *коррекцией*.

Один из простейших способов коррекции состоит во введении в уравнения системы *обратной связи* с постоянными коэффициентами по отклонению от эталона.

Перепишем уравнение (30) в виде системы

$$\begin{aligned}\dot{r} &= V_h, \\ \dot{V}_h &= f - g(r),\end{aligned}\tag{33}$$

где  $V_h$  – вертикальная скорость. Пусть  $r^*$  – внешняя информация о расстоянии до центра Земли от баровысотомера или СНС (обычно выдается высота  $h^*$  над поверхностью Земли, но ее нетрудно пересчитать в расстояние до центра Земли  $r^*$ ). Введем в правые части этой системы обратную связь по  $r^*$ :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{r}} &= \tilde{V}_h + k_1(\tilde{r} - r^*), \\ \dot{\tilde{V}}_h &= f - g(\tilde{r}) + k_2(\tilde{r} - r^*).\end{aligned}\tag{34}$$

Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  выбираются постоянными. Введение обратной связи в (34) приводит к отличию решений (33) и (34), поэтому компоненты фазового вектора (34) отмечены тильдой. Важно понимать, что при введении обратной связи в бортовом алгоритме  $g$  определяется по доступной в вычислителе информации, т. е.  $r^*$  либо  $\tilde{r}$ . Здесь выбран вариант  $\tilde{r}$ , и о его целесообразности будет сказано ниже.

Теперь покажем, что за счет выбора коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  обеспечивается асимптотическая устойчивость ([7, 13, 14, 8, 9]) системы (34) по отклонениям начальных условий. Рассмотрим возмущенную систему, получающуюся из (34) при начальных условиях  $\tilde{r}'(0) = \tilde{r}(0) + \Delta\tilde{r}(0)$ ,  $\tilde{V}'_h(0) = \tilde{V}_h(0) + \Delta\tilde{V}_h(0)$  вместо  $\tilde{r}(0)$ ,  $\tilde{V}_h(0)$ :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{r}}' &= \tilde{V}'_h + k_1(\tilde{r}' - r^*), \\ \dot{\tilde{V}}'_h &= f - g(\tilde{r}') + k_2(\tilde{r}' - r^*).\end{aligned}\tag{35}$$

Вычитание из нее (34) приводит к уравнениям для отклонений  $\Delta\tilde{r} = \tilde{r}' - \tilde{r}$ ,  $\Delta\tilde{V}_h = \tilde{V}_h' - \tilde{V}_h$ :

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\tilde{r}} &= \Delta\tilde{V}_h + k_1\Delta\tilde{r}, \\ \Delta\dot{\tilde{V}}_h &= -g(\tilde{r}') + g(\tilde{r}) + k_2\Delta\tilde{r}.\end{aligned}\tag{36}$$

Преобразование  $-g(\tilde{r}') + g(\tilde{r}) = 2\omega_0^2\Delta\tilde{r}$  (см. выкладки после (31)) дает линейную систему с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\tilde{r}} &= \Delta\tilde{V}_h + k_1\Delta\tilde{r}, \\ \Delta\dot{\tilde{V}}_h &= (k_2 + 2\omega_0^2)\Delta\tilde{r},\end{aligned}\tag{37}$$

которую легко исследовать на асимптотическую устойчивость по корням характеристического уравнения. Матрице системы (37)

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 1 \\ k_2 + 2\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}$$

соответствует характеристическое уравнение

$$P(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - k_1 & -1 \\ -k_2 - 2\omega_0^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - k_1\lambda - (k_2 + \omega_0^2) = 0.$$

Для асимптотической устойчивости нулевого решения (37) необходимо и достаточно потребовать положительности коэффициентов характеристического многочлена  $P(\lambda)$ , чего всегда можно добиться выбором отрицательных коэффициентов  $k_1$   $k_2$ . Однако рассмотрим явное решение уравнения  $P(\lambda) = 0$ , поскольку оно легко выписывается и показывает темп затухания компонент фазового вектора:

$$\lambda_{1,2} = \frac{k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + 4(k_2 + 2\omega_0^2)}}{2}.$$

Соответственно решения системы (37) убывают с характерными скоростями  $e^{\lambda_{1,2}t}$ . Малые по модулю коэффициенты приводят к инерционности и более «затянутым» переходным процессам, но лучше фильтруют высокочастотные помехи эталона. Обычно их выбирают так, что характерное время переходных процессов имеет порядок десятков секунд. При этом  $\{|k_1|, |k_2|\} \gg \omega_0^2$ , и член, «отвечающий» за неустойчивость вертикального канала в системе без обратной связи, практически не влияет на  $\lambda_{1,2}$ . При

выборе коэффициентов часто используется условие  $\lambda_1 = \lambda_2$ , равносильное равенству  $k_1^2 + 4(k_2 + 2\omega_0^2) = 0$ , поскольку в этом случае остается только одна постоянная времени  $\tau = 1/|\lambda_1|$ .

Рассмотрим вопрос о работе обратной связи при сбоях в эталонной информации, выделяя два принципиально разных случая – когда сбой «проходит» в обратную связь и когда он обнаружен и отбракован.

В первом случае сбой  $\Delta r^*$  эталонной информации  $r^*$  в обратной связи приводит к некоторому «отклику» вертикального канала системы, зависящего от ошибки  $\Delta r^*$  и коэффициентов  $k_i$ . Чем меньше длительность сбоя, его характерная амплитуда и модули коэффициентов  $k_i$ , тем меньше отклик.

Во втором случае достаточно медленный характер расходимости автономного инерциального канала с характерным временем  $\tau_0 = 1/(\sqrt{2}\omega_0)$  позволяет некоторое время работать автономно в режиме «прогноза» вплоть до появления достоверных данных о высоте. При идентификации сбоя в уравнениях (34) можно «отключить» обратную связь и интегрировать уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{r}} &= \tilde{V}_h, \\ \dot{\tilde{V}}_h &= f - g(\tilde{r}),\end{aligned}\tag{38}$$

в которых в качестве начальных условий выбираются значения  $\tilde{r}, \tilde{V}_h$ , известные на момент идентификации сбоя перед переходом в прогноз.

Именно этой возможностью перехода в прогноз продиктован выбор аргумента  $\tilde{r}$  в  $g(\tilde{r})$ , а не  $r^*$ , в уравнениях (34).

При появлении достоверной информации  $r^*$  снова «подключаются» обратные связи (коррекция), и начинают интегрироваться уравнения (34) с начальными условиями  $\tilde{r}, \tilde{V}_h$ , полученными в прогнозе на момент получения внешних достоверных данных  $r^*$ . Если достоверное значение  $r^*$  существенно отличаются от «прогнозного»  $\tilde{r}$ , то оценка высоты сходится к эталонному значению  $r^*$  после завершения переходного процесса. Скорость сходимости увеличивается при увеличении модулей коэффициентов  $k_i$ .

На примере вертикального канала навигационной системы иллюстрируется и типичная проблема выбора настроек алгоритма КОИ, связанная с тем, что улучшение одних качеств приводит к ухудшению других. Например, повышение устойчивости к кратковременным сбоям за счет уменьшения  $|k_i|$  ведет к более медленному восстановлению работоспособности после длительного отключения коррекции. Выбор настроек едва ли может быть формализован и часто сводится к некоторому компромиссу.

Обратная связь с постоянными коэффициентами не является оптимальным алгоритмом коррекции. Эффективность ком-

плексирования существенно повышается на счет использования теории оптимального оценивания, развитой Р. Калманом. Интересно, что она дает обратные связи того же вида, однако оптимальные коэффициенты уже не постоянны, а вычисляются по специальному алгоритму, называемому *фильтром Калмана*. Оптимальность соответствует минимизации дисперсии оценки в определенных предположениях.

В заключение отметим, что рассмотренная выше обратная связь по внешней высоте с постоянными коэффициентами тем не менее используется на практике.

## Заключение

На примерах одноканальных моделей ИНС и БИНС продемонстрированы принципы работы инерциальных навигационных систем. Описан принцип интегральной коррекции, сформулированы понятия уравнений идеальной работы и возмущенных уравнений, выведены уравнения ошибок. Выполнен анализ частных решений уравнений ошибок, демонстрирующий характерные особенности погрешностей ИНС и БИНС, такие, как колебания ошибок с периодом Шулера, равным 84.4 минуты, и поведение навигационных ошибок, соответствующих типичным инструментальным погрешностям и ошибкам начальной выставки.

Из этого следуют порядки величин инструментальных и навигационных погрешностей. Показано, что даже для километровых точностей навигации требуются чрезвычайно точные инерциальные датчики.

На основе уравнений ошибок ИНС и БИНС объяснены некоторые характерные эффекты, наблюдаемые при эксплуатации ИНС и БИНС и обусловленные взаимосвязью инструментальных погрешностей с ошибками начальной выставки, такие как «компенсация» инструментальных ошибок ошибками выставки и «проявление» этих инструментальных ошибок при развороте корпуса БИНС.

Показаны (не асимптотическая) устойчивость горизонтальных каналов ИНС и БИНС по скорости и ошибке вертикали в рамках линейной теории ошибок и экспоненциальная неустойчивость автономного вертикального канала, принципиально препятствующая возможности его реализации. Для построения устойчивого вертикального канала привлекается внешняя корректирующая высота, демонстрируется способ ее обработки за счет введения обратной связи по отклонению вычисленной высоты от корректирующей.

Анализ всех перечисленных вопросов требует элементарных сведений из программы курса аналитической механики, читаемого студентам МФТИ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Автономные системы. Москва : Наука, 1966. 579 с.
2. Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. Москва : Наука, 1967. 648 с.
3. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть I Математические модели инерциальной навигации. - 3-е изд., испр. и доп. Москва : МАКС Пресс, 2011. 136 с.
4. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть II Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации. - 2-е изд., испр. и доп. Москва : МАКС Пресс, 2012. 172 с.
5. Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы инерциальных навигационных систем. Москва : Издательство МГУ, 2020, 164 с.
6. Парусников Н.А. К истории инерциальной навигации в нашей стране. В сборнике Навигация и управление движением: материалы докладов VIII конференции молодых учёных (Санкт-Петербург, 16 марта – 29 сентября 2006 г.) / под ред. В.Г. Пешехонова. ЦНИИ «Электроприбор». Санкт-Петербург : с. 178–184.
7. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. Москва : Физматлит, 307 с.
8. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Москва : ЧеРо, 1999. 572 с.
9. Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В. Теоретическая механика. Москва : Изд. центр «Академия», 2010. 432 с.
10. Голдстейн Г. Пул Ч. Сафко Д. Классическая механика. Москва–Ижевск : Ижевский институт компьютерных исследований, 2012. 802 с.
11. Панов А.П. Математические основы теории инерциальной ориентации. Киев : Наукова думка, 1995. 278 с.
12. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. Москва : Наука, 1992. 280 с.
13. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск : Удм. ГУ. 2000. 368 с.
14. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва : Наука, 1974. 331 с.



Учебно-методическое пособие

## ЗНАКОМСТВО С ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИЕЙ

Учебно-методическое пособие

по курсу *Аналитическая механика*

Составитель Фомичев Александр Владимирович

Редактор *Н.Е. Кобзева.*  
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать ????.2022. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 50 экз. Заказ № 17.

---

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Московский  
физико-технический институт (национальный исследовательский  
университет)»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
E-mail: rio@mail.mipt.ru

---

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
E-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок

Для заметок