RESUME DES FORMULES DE PROBA

1 Loi normale $X = (X_1, \ldots, X_n)$

— Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{N}^n(\mu, \Sigma)$

— Densité :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{\det(\Sigma^{-1})}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} Q(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

avec $Q(x_1, \ldots, x_n) = {}^t(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)$

— Determination de μ : C'est la solution du système $\overrightarrow{\text{grad}}(Q)$.

— Determination de $\Sigma^{-1} = (C_{ij})$: On a : $C_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

— Determination de k : $k = \frac{\sqrt{\det(\Sigma^{-1})}}{(2\pi)^{n/2}}$

— Fonction génératrice des moments :

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathrm{E}(e^{tX}) = \mathrm{E}(e^{t_1X_1 + \ldots t_nX_n}) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{t_1X_1 + \ldots t_nX_n} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= \exp\left(t\mu + \frac{1}{2} t\, \Sigma\, {}^t t\right) \\ &\underset{n=1}{=} \exp\left(t\mu + \frac{1}{2} t^2\, \sigma^2\right) \text{ ,Cas unidimensionnel} \end{aligned}$$

— Fonction caractéristique :

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathrm{E}(e^{itX}) = \mathrm{E}(e^{i(t_1X_1 + \ldots t_nX_n)}) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{i(t_1X_1 + \ldots t_nX_n)} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= \exp\left(i\, t\, {}^t\mu - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} t_i\, t_j\right) \text{ , avec } \Sigma = (C_{ij}) \\ &\underset{n=1}{=} \exp\left(i\, t\mu - \frac{1}{2} t^2\, \sigma^2\right) \text{ ,Cas unidimensionnel} \end{aligned}$$

— Moments :

$$\mathrm{E}(X_1^{h_1} \ldots X_n^{h_1}) = \frac{\partial^{h_1 + \cdots + h_n}\, m_X(t)}{\partial^{h_1} t_1 \cdots \partial^{h_n} t_n}(0, \ldots, 0)$$

$$i^{h_1 + \cdots + h_n}\, \mathrm{E}(X_1^{h_1} \ldots X_n^{h_1}) = \frac{\partial^{h_1 + \cdots + h_n}\, \varphi_X(t)}{\partial^{h_1} t_1 \cdots \partial^{h_n} t_n}(0, \ldots, 0)$$

(Voir aussi les différentes lois de probabilités dans le cours ...)

2 Autres formules

— Coefficient de corrélation linéaire : $\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)\, V(Y)}}$.

— L'espérance mathématique est linéaire : $\mathrm{E}(x + a\, y) = \mathrm{E}(x) + a\mathrm{E}(y)$ et $\mathrm{E}(a) = a$.