

DM 2 : finance mathématique

Enzo Benbalit, enzo.benbalit@umontreal.ca
Romain Soliman, romain.soliman@umontreal.ca
lien vers le notebook python : en annexe

13 décembre 2023

Table des matières

1	Exercice 1	2
1.1	2
1.2	3
1.3	3
1.4	4
2	Exercice 2	6
2.1	6
2.2	6
2.3	6
2.4	6
3	Exercice 3	7
3.1	7
3.2	7
3.3	7
3.4	7
3.5	7
3.6	8
4	Exercice 4	9
4.1	9
4.2	9
4.3	9
4.4	9
5	Exercice 5	11
5.1	11
5.2	11
5.3	12
6	Exercice 6	13
6.1	13
6.2	14
6.3	14
6.4	16
7	Annexe	17

1 Exercice 1

Soit un processus $\{B_t\}_{t \geq 0}$ défini par

$$B_t = e^{\int_0^t r_s ds} \quad (1)$$

avec $\{r_t\}_{t \geq 0}$ le processus du taux d'intérêt instantané qui satisfait l'équation différentielle ordinaire

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt \quad (2)$$

1.1

Vérifions que $r_t = \theta + (r_0 - \theta)e^{-kt}$ est solution de 2.

Soit $r_t = \theta + (r_0 - \theta)e^{-kt}$, ici, r_t définis un processus déterministe. Notons f la fonction définie comme

$$\begin{aligned} f(t) &= r_t = \theta + (r_0 - \theta)e^{-kt} \\ &= \theta + (f(0) - \theta)e^{-kt} \end{aligned}$$

Par la règle de dérivation usuelle de la fonction f , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(t) &= -k(f(0) - \theta)e^{-kt} \\ &= k(\theta - f(0))e^{-kt} \\ &= k[(\theta - f(0))e^{-kt}] \\ &= k[\theta - \theta + (\theta - f(0))e^{-kt}] \\ &= k[\theta - (\theta - (\theta - f(0))e^{-kt})] \\ &= k[\theta - (\theta + (f(0) - \theta)e^{-kt})] \\ &= k(\theta - f(t)) \end{aligned}$$

ainsi $\frac{d}{dt}f(t) = k(\theta - f(t))$ donc $\frac{d}{dt}r_t = k(\theta - r_t)$. Nous vérifions bien l'EDO 2

$$\frac{d}{dt}r_t = k(\theta - r_t) \iff dr_t = k(\theta - r_t)dt$$

De plus, r_t est un processus d'Itô. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} r_t &= \theta + (r_0 - \theta)e^{-kt} \\ &= r_0 - \int_0^t k(r_0 - \theta)e^{-ks} ds \end{aligned}$$

Donc r_t est bien de la forme

$$r_t = r_0 + \int_0^t \mu_s ds \quad \text{avec} \quad \mu_s = -k(r_0 - \theta)e^{-ks}$$

et μ_s un processus \mathcal{F} -adapté et qui satisfait

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{E}[|\mu_s|] ds &= \int_0^t |k(r_0 - \theta)| e^{-ks} ds \\ &= |k(r_0 - \theta)| \int_0^t e^{-ks} ds \\ &= \frac{|k(r_0 - \theta)|}{k} (1 - e^{-kt}) < +\infty \end{aligned}$$

1.2

Soit

$$B_t = e^{\int_0^t r_s ds}$$

avec r_s le processus de taux d'intérêt instantané, solution de 2. Notons $Y_t = \int_0^t r_s ds$ un processus stochastique, ici $r_s \in L^p, p \geq 1$. De plus, nous avons

$$\int_0^t \mathbb{E}[|r_s|] ds < \infty$$

ainsi $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ est bien un processus d'Itô. De plus, par le théorème fondamental de l'analyse,

$$dY_t = r_t dt$$

Ainsi, par la formule d'Itô appliquée à $f(t, y) = e^y$, nous avons que $\{B_t\}_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô qui admet la différentielle

$$dB_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, Y_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, Y_t)d\langle S \rangle_t \quad (3)$$

$$= B_t(r_t dt) \quad (4)$$

$$= r_t B_t dt \quad (5)$$

1.3

Soit $\{S_t\}_{t \geq 0}$ le processus qui décrit l'évolution du prix de l'actif risqué et qui satisfait l'équation différentielle stochastique ,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^P \quad (6)$$

S_t est définis comme le prix d'un actif risqué dans le modèle de Black&Scholes, c'est aussi un processus d'Itô.

Et Soit $\tilde{S}_t = h(S_t, B_t) = S_t/B_t$ avec $h(x, y) = \frac{x}{y}$.

La fonction $(x, y) \longrightarrow h(x, y) = x/y$ est une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et dans $\mathcal{C}^{2 \times 2}$ (produit de deux polynômes). De plus S_t et B_t sont deux processus d'Itô, ainsi par le Lemme d'Itô, \tilde{S}_t est aussi un processus d'Itô. Ainsi par la formule d'Itô bi-dimensionnelle appliquer sur $h(S_t, B_t)$, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t = \tilde{S}_0 &+ \int_0^t \frac{d}{dx} h(S_s, B_s) dS_s + \int_0^t \frac{d}{dy} h(S_s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d^2}{dx^2} h(S_s, B_s) d\langle S, S \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d^2}{dxy} h(S_s, B_s) d\langle S, B \rangle_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d^2}{dy^2} h(S_s, B_s) d\langle B, B \rangle_s \end{aligned}$$

Or $\langle B, B \rangle_s = 0, \langle B, S \rangle_s = 0$ et $\langle S, S \rangle_s = \sigma^2 S_s^2$. De plus,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} h(x, y) &= \frac{1}{y} \\ \frac{d}{dy} h(x, y) &= -\frac{x}{y^2} \\ \frac{d^2}{dx^2} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_t &= \tilde{S}_0 + \int_0^t \frac{d}{dx} h(S_s, B_s) dS_s + \int_0^t \frac{d}{dy} h(S_s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d^2}{dx^2} h(S_s, B_s) d\langle S, S \rangle_s \\
&= \tilde{S}_0 + \int_0^t \frac{1}{B_s} dS_s - \int_0^t \frac{S_s}{B_s^2} dB_s + 0 \\
&= \tilde{S}_0 + \int_0^t \frac{1}{B_s} (\mu S_s ds + \sigma S_s dW_s^{\mathbb{P}}) - \int_0^t \frac{S_s}{B_s^2} (r_s B_s ds) \quad (\text{par 3 et 6}) \\
&= \tilde{S}_0 + \int_0^t (\mu - r_s) \frac{S_s}{B_s} ds + \int_0^t \sigma \frac{S_s}{B_s} dW_s^{\mathbb{P}} \\
\tilde{S}_t &= \tilde{S}_0 + \int_0^t (\mu - r_s) \tilde{S}_s ds + \int_0^t \sigma \tilde{S}_s dW_s^{\mathbb{P}}
\end{aligned}$$

Ou de manière équivalente,

$$d\tilde{S}_t = (\mu - r_t) \tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t^{\mathbb{P}} \quad (7)$$

1.4

D'après le théorème de Girsanov et son inverse, nous avons que pour toute mesure $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, il existe un processus $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ telle que

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} + \int_0^t \gamma_s ds \quad (\text{donc } dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t^{\mathbb{P}} + \gamma_t dt)$$

est un mouvement brownien sous la mesure \mathbb{Q} . En conséquence, la dynamique de prix actualisé sous toute mesure $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ est solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned}
d\tilde{S}_t &= (\mu - r_t) \tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t^{\mathbb{P}} \\
&= (\mu - r_t) \tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t (dW_t^{\mathbb{Q}} - \gamma_t dt) \\
d\tilde{S}_t &= (\mu - r_t - \sigma \gamma_t) \tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t^{\mathbb{Q}}
\end{aligned}$$

Or \tilde{S}_t doit être martingale sous la mesure \mathbb{Q} donc son terme de *drift* doit être égal à 0, on cherche un processus $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ t.q.

$$\mu - r_t - \sigma \gamma_t = 0 \iff \gamma_t = \frac{\mu - r_t}{\sigma} \quad \forall t \geq 0$$

On note donc $\gamma_t = \frac{\mu - r_t}{\sigma}$, $\forall t \geq 0$

Montrons que γ_t vérifie bien les hypothèses du théorème de Girsanov. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s^2 ds} \right] &= \mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^t \frac{(\mu - r_s)^2}{\sigma^2} ds} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^t \mu^2 - 2\mu r_s + r_s^2 ds} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2\sigma^2} (\mu^2 t - \mu \int_0^t r_s ds + \int_0^t r_s^2 ds)} \right] \quad (\text{Avec } r_s = \theta + (r_0 - \theta)e^{-ks}) \\
&= \mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2\sigma^2} (\mu^2 t - \mu \int_0^t r_s ds + \int_0^t r_s^2 ds)} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2\sigma^2} (\mu^2 t - \mu \int_0^t \theta + (r_0 - \theta)e^{-ks} ds + \int_0^t (\theta + (r_0 - \theta)e^{-ks})^2 ds)} \right]
\end{aligned}$$

Et nous avons

- $\mu \int_0^t \theta + (r_0 - \theta)e^{-ks} ds = \theta t + \frac{r_0 - \theta}{k} (1 - e^{-kt}) = R_1$
- $\int_0^t (\theta + (r_0 - \theta)e^{-ks})^2 ds = \theta^2 t + \frac{2\theta}{k} (r_0 - \theta) (1 - e^{-kt}) + \frac{(r_0 - \theta)^2}{2k} (1 - e^{-2kt}) = R_2$

Donc on à bien

$$\mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s^2 ds} \right] = e^{\frac{1}{2\sigma^2} (\mu^2 t - \mu R_1 + R_2)} < +\infty$$

Ainsi d'après le théorème de Girsanov, il existe $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ tq sous \mathbb{Q} , $\{W_t^{\mathbb{Q}}\}_{t \geq 0}$ est bien un mouvement brownien et t.q sous \mathbb{Q} , \tilde{S}_t est martingale. De plus, sous \mathbb{Q} , $\{S_t\}_{t \geq 0}$ admet la dynamique suivant :

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}} \\ &= \mu S_t dt + \sigma S_t (dW_t^{\mathbb{Q}} - \gamma_t dt) \\ &= (\mu - \sigma \gamma_t) S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}} \\ &= (\mu - \sigma \frac{\mu - r_t}{\sigma}) S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}} \\ dS_t &= r_t S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

2 Exercice 2

2.1

(voir notebook python)

2.2

(voir notebook python)

le prix d'une option d'achat est 3.99

le prix d'une option de vente est 7.94

2.3

(voir notebook python)

2.4

(voir notebook python)

la volatilité implicite pour l'option d'achat est 0.23

la volatilité implicite pour l'option de vente est 0.14

3 Exercice 3

3.1

(voir notebook python)

3.2

(voir notebook python)

L'estimation par le modèle binomial du prix d'un Call européen est 4.012 pour $N=20$
la vraie valeur d'un Call européen sous le modèle B-S est 3.99

3.3

(voir notebook python)

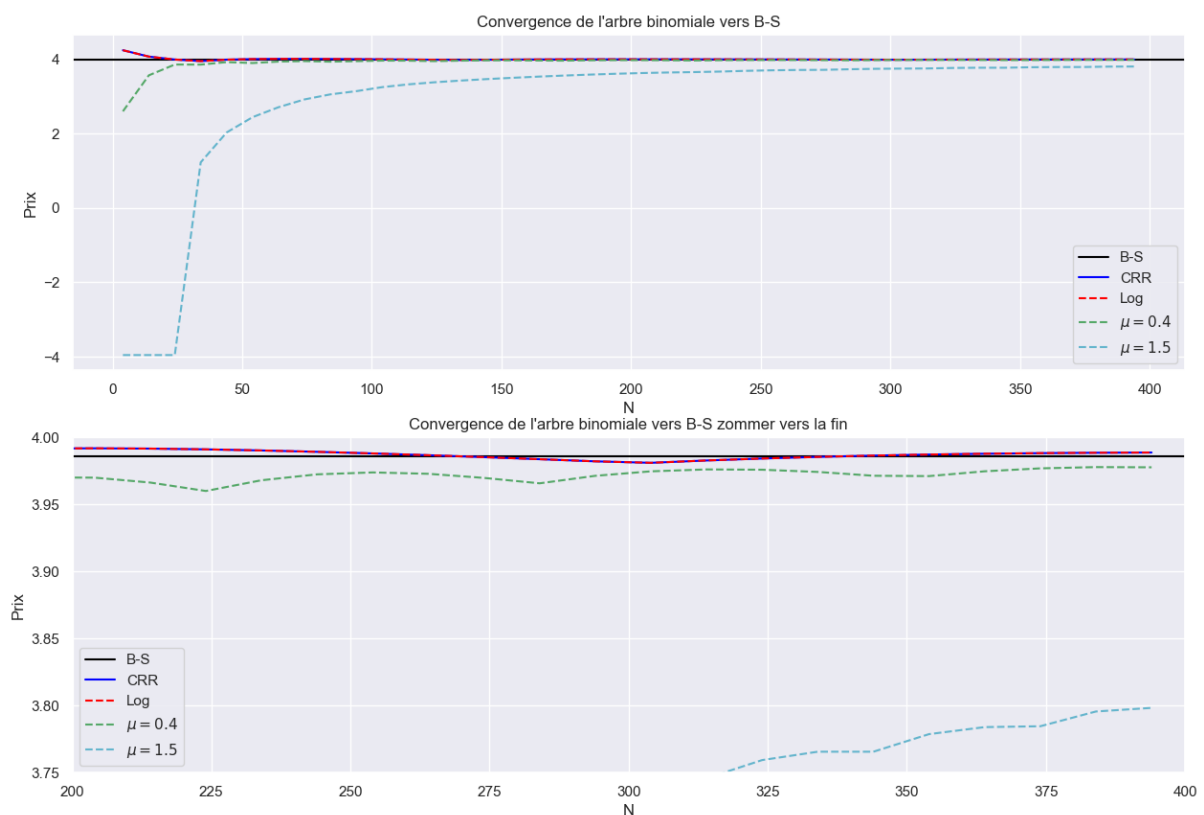


FIGURE 1 – Convergence du prix d'option vanilles européennes en fonction de n pour différent μ .

3.4

Observation : La convergence de l'arbre binomiale vers le modèle de Black-Scholes semble plus rapide lorsque μ est proche de 0. En effet, on observe bien que pour $N = 150$, l'arbre de CRR et log-normale est déjà très proche de la vraie valeur alors que le prix pour $\mu = 1.5$ en est encore très loin

3.5

(voir notebook python)

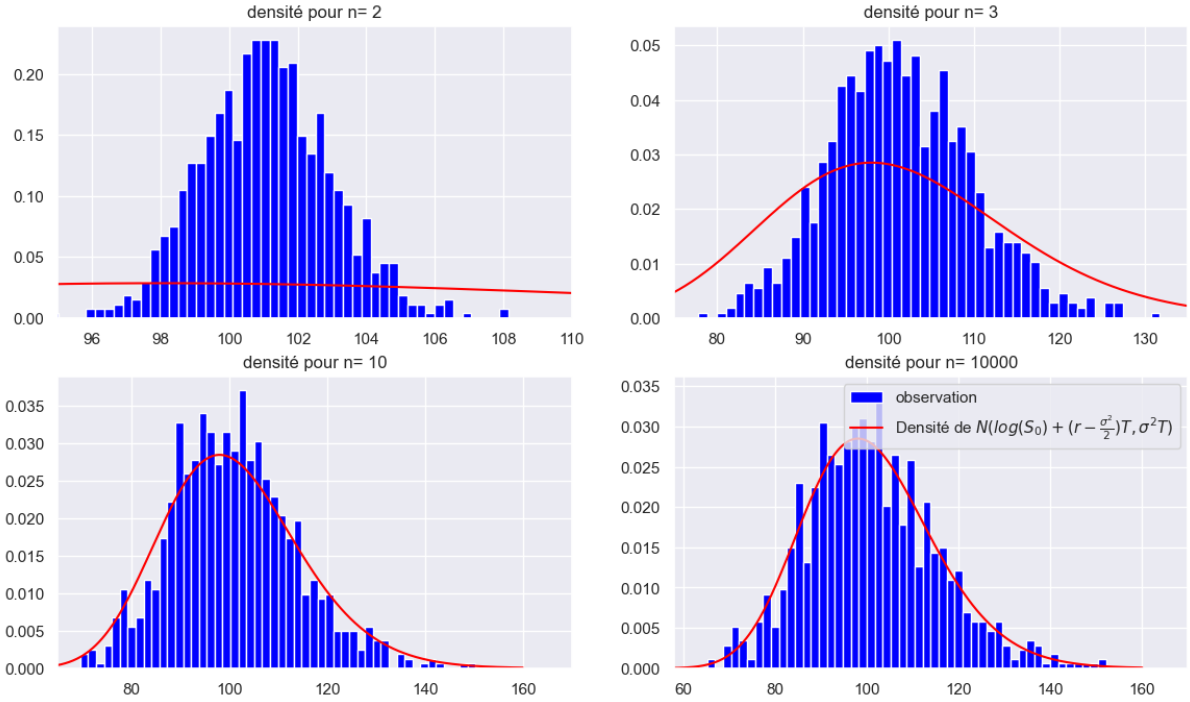


FIGURE 2 – Comparaison de la densité de nos observation contre la vrai densité de la loi Log-normale lorsque que n croit.

3.6

Observation : d'un point de vue numérique, l'utilisation du modèle binomial pour approximer le prix d'option exotiques sous le modèle Black-Scholes n'est généralement pas appropriée, en effet, de nombreuses options exotiques sont path-dependent, c'est-à-dire que leur valeur dépend non seulement du prix final de l'actif sous-jacent, mais également de son comportement durant toute la durée de vie de l'option. Le modèle binomial peut devenir extrêmement complexe et lourd en termes de calculs pour ces types d'options, car il nécessite de suivre et de calculer des chemins de prix multiples à chaque étape de l'arbre. De plus, avec une augmentation du nombre d'étapes dans l'arbre binomial, le coût computationnel augmente exponentiellement, en particulier pour les options path-dependent.

4 Exercice 4

4.1

(voir notebook python)

4.2

(voir notebook python)

4.3

(voir notebook python)

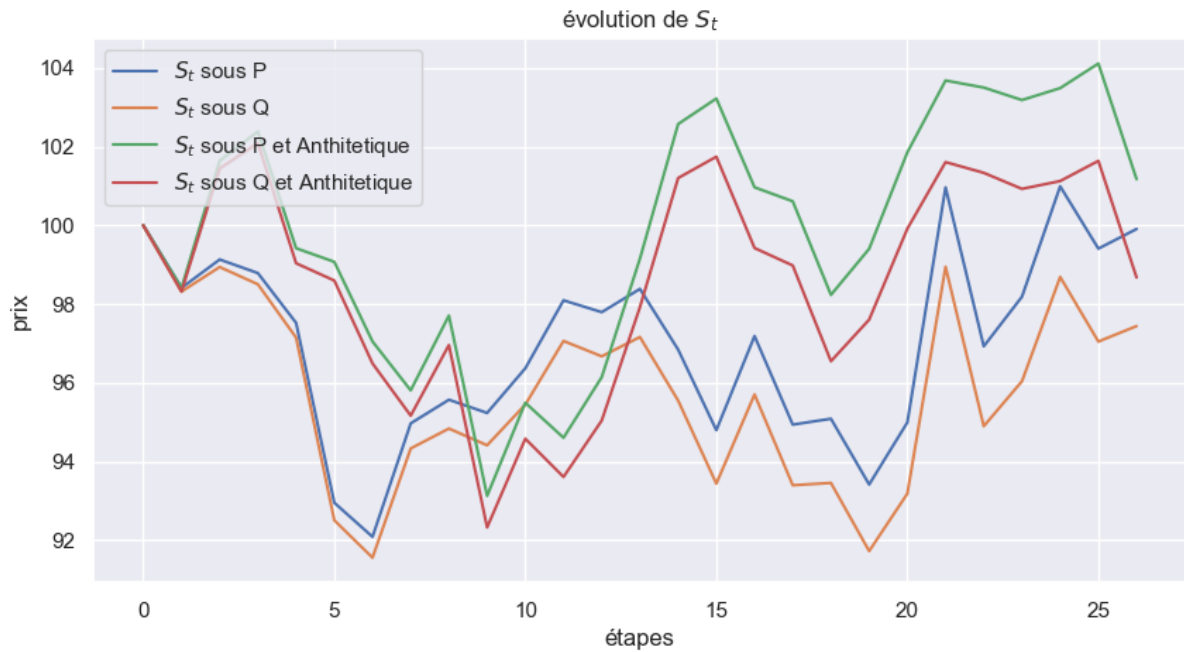


FIGURE 3 – Évolution de S_t sous la mesure \mathbb{P} ou \mathbb{Q} selon que l'on simule directement ou par variable antithétique.

4.4

(voir notebook python)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^P[S_T] &= \mathbb{E}^P[S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^P}] \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} \mathbb{E}^P[e^{\sigma W_T^P}] \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{\sigma^2}{2}T} \\ &= S_0 e^{\mu T}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}}}] \\
&= S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{\sigma W_T^{\mathbb{Q}}}] \\
&= S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{\sigma^2}{2}T} \\
&= S_0 e^{rT}
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_T] = 103.56$ sous la mesure \mathbb{P}

$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T] = 101.01$ sous la mesure \mathbb{Q}

estimation de $E[S_T]$ sous la mesure \mathbb{P} : 103.76

estimation de $E[S_T]$ sous la mesure \mathbb{Q} : 101.2

estimation de $E[S_T]$ sous la mesure \mathbb{P} par variables anthitétique : 103.55

estimation de $E[S_T]$ sous la mesure \mathbb{Q} par variables anthitétique : 100.99

un intervalle de niveau 95% pour $E[S_T]$ est [103.48,104.05] sous \mathbb{P} et avec une méthode classique

un intervalle de niveau 95% pour $E[S_T]$ est [100.92,101.48] sous \mathbb{Q} et avec une méthode classique

un intervalle de niveau 95% pour $E[S_T]$ est [103.26,103.84] sous \mathbb{P} et avec les variables anthitétiques

un intervalle de niveau 95% pour $E[S_T]$ est [100.71,101.27] sous \mathbb{Q} et avec les variables anthitétiques

Observation : Les simulations par variable anthitétiques sont beaucoup plus précises. En effet, les intervalles de confiance par variables anthitétiques sont inclus dans les intervalle de confiance sans variable anthitétique pour un même niveau de confiance.

5 Exercice 5

5.1

(voir notebook python)

Une estimation du prix de l'option Asiatique est : 3.64

Un intervalle de confiance au niveau 95% pour le prix de l'option asiatique est [3.53, 3.74]

Une estimation du prix de l'option Asiatique par variable Anthitétique est : 3.54

Un intervalle de confiance au niveau 95% pour le prix de l'option asiatique par variable anthitétique est [3.44, 3.65]

Observation : La encore, les simulation par variable anthitétique sont bien plus précise

5.2

Soit

$$H^{(ari)} = (A_T^{(ari)} - K)_+$$

avec

$$A_T^{(ari)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}$$

nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Q[A_T^{(ari)}] &= \mathbb{E}^Q\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}\right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}^Q[S_{t_i}] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}^Q[S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t_i + \sigma W_{t_i}^Q}] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t_i} \mathbb{E}^Q[e^{\sigma W_{t_i}^Q}] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t_i} \mathbb{E}^Q[e^{\sigma W_{t_i}^Q}] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t_i} e^{\frac{\sigma^2}{2}t_i} \quad (\text{Par la transformé de Laplace}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_0 e^{rt_i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_0 e^{ri\Delta t} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_0 (e^{r\Delta t})^i \\ &= \frac{S_0}{n} \left(\frac{e^{r\Delta t} - e^{r(n+1)\Delta t}}{1 - e^{r\Delta t}} \right) \\ &= \frac{S_0 e^{r\Delta t}}{n} \left(\frac{1 - e^{rn\Delta t}}{1 - e^{r\Delta t}} \right) \end{aligned}$$

5.3

(voir notebook python)

une estimation du prix de l'option asiatique par variable de contrôle est : 3.56

un intervalle de confiance de niveau 95% pour cette estimation du prix de l'option est $[3.51, 3.6]$

Observation : La méthode de la variable de contrôle est encore plus précise que la méthode des variables Anthitétiques car l'intervalle de confiance à 95% est plus petit

6 Exercice 6

6.1

On a $A_T^{(geo)} = (\prod_{i=1}^n S_{t_i})^{\frac{1}{n}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \log(A_T^{(geo)}) &= \log\left(\left(\prod_{i=1}^n S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \\
 &= \frac{1}{n} \log\left(\prod_{i=1}^n S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t_i + \sigma W_{t_i}}\right) \\
 &= \frac{1}{n} \log\left(S_0^n e^{\sum_{i=1}^n (r - \frac{\sigma^2}{2})t_i + \sigma W_{t_i}}\right) \\
 &= \log(S_0) + \frac{1}{n} \log\left(e^{\sum_{i=1}^n (r - \frac{\sigma^2}{2})t_i + \sigma W_{t_i}}\right) \\
 &= \log(S_0) + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (r - \frac{\sigma^2}{2})t_i + \sigma W_{t_i}\right) \\
 &= \log(S_0) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r - \frac{\sigma^2}{2})t_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma W_{t_i} \\
 &= \log(S_0) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r - \frac{\sigma^2}{2})t_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma W_{t_i} \\
 &= \log(S_0) + \frac{1}{n} (r - \frac{\sigma^2}{2}) \sum_{i=1}^n i \Delta t + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma W_{t_i} \\
 &= \log(S_0) + \frac{1}{n} (r - \frac{\sigma^2}{2}) \Delta t \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma W_{t_i} \\
 &= \log(S_0) + \frac{1}{n} (r - \frac{\sigma^2}{2}) \Delta t \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma W_{t_i} \\
 &= \log(S_0) + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \Delta t \frac{(n+1)}{2} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma W_{t_i}
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n W_{t_i} &= W_{t_1} + W_{t_2} + \dots + W_{t_n} \\
 &= nW_{t_1} + (n-1)(W_{t_2} - W_{t_1}) + \dots + 2(W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}) + (W_{t_n} - W_{t_{n-1}}) \\
 &= \sum_{i=1}^n (n-i+1)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \quad (W_{t_0} = 0) \\
 &= \sum_{i=1}^n (n-i+1)X_i \quad \text{Avec } X_i \sim N(0, \Delta t) \text{ i.i.d} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta t}(n-i+1)Z_i \quad \text{Avec } Z_i \sim N(0, 1) \text{ i.i.d} \\
 &= \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n iZ_{n-i+1} \quad \text{On renverse les indices}
 \end{aligned}$$

Ainsi on trouve la formule

$$\begin{aligned}\log \left(A_T^{(geo)} \right) &= \log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t \frac{(n+1)}{2} + \frac{1}{n} \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n i \sigma Z_{n-i+1} \\ &= \log(S_0) + \frac{(n+1)}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sum_{i=1}^n \sigma_i Z_{n-i+1}, \quad \sigma_i = \frac{i\sigma}{n} \sqrt{\Delta t}\end{aligned}$$

6.2

la variable aléatoire $\log \left(A_T^{(geo)} \right)$ est bien de loi normale, en effet, c'est une somme finie de v.a de loi normale indépendante deux à deux. De plus, nous avons

- $\mathbb{E} \left[\log \left(A_T^{(geo)} \right) \right] = \log(S_0) + \frac{(n+1)}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathbb{E} [Z_{n-i+1}] = \log(S_0) + \frac{(n+1)}{2n} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$
- $\text{Var} \left(\log \left(A_T^{(geo)} \right) \right) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \text{Var} (Z_{n-i+1}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \frac{\sigma^2 \Delta t}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{\sigma^2 (n+1)(2n+1)}{6n} \Delta t = \frac{\sigma^2 (n+1)(2n+1)}{6n^2} T$

Donc $\log \left(A_T^{(geo)} \right) \sim N(A, B)$, $A = \log(S_0) + \frac{(n+1)}{2n} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$ et $B = \frac{\sigma^2 (n+1)(2n+1)}{6n^2} T = \nu_n^2 T$

6.3

Soit un produit dérivé H défini par

$$H = (A_T^{(geo)} - K)_+$$

Le modèle de Black-Scholes est un modèle viable est complet, ainsi tous les produits dérivés y sont atteignables et vérifies (par la propriété de caractérisation des produits atteignables) la relation

$$\Pi_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [H \mid \mathcal{F}_t]$$

ainsi,

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [H \mid \mathcal{F}_0] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(A_T^{(geo)} - K)_+ \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(A_T^{(geo)} - K) \mathbf{1}_{\{A_T^{(geo)} > K\}} \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[A_T^{(geo)} \mathbf{1}_{\{A_T^{(geo)} > K\}} - K \mathbf{1}_{\{A_T^{(geo)} > K\}} \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[A_T^{(geo)} \mathbf{1}_{\{\log(A_T^{(geo)}) > \log(K)\}} - K \mathbf{1}_{\{\log(A_T^{(geo)}) > \log(K)\}} \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{\log(A_T^{(geo)})} \mathbf{1}_{\{\log(A_T^{(geo)}) > \log(K)\}} - K \mathbf{1}_{\{\log(A_T^{(geo)}) > \log(K)\}} \right] \quad \text{Par indépendance des } Z_i \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{\log(A_T^{(geo)})} \mathbf{1}_{\{\log(A_T^{(geo)}) > \log(K)\}} \right] - e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[K \mathbf{1}_{\{\log(A_T^{(geo)}) > \log(K)\}} \right]\end{aligned}$$

On a,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[K \mathbb{1}_{\{\log(A_T^{(geo)}) > \log(K)\}} \right] &= K \mathbb{Q} \left(\log(A_T^{(geo)}) > \log(K) \right) \\
&= K \mathbb{Q} \left(A + \sqrt{B} N(0, 1) > \log(K) \right) \\
&= K \mathbb{Q} \left(N(0, 1) > (\log(K) - \log(S_0) - (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{n+1}{2n} T) / \sqrt{B} \right) \\
&= K \mathbb{Q} \left(N(0, 1) > (\log(K) - \log(S_0) - (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{n+1}{2n} T) / \nu_n \sqrt{T} \right) \\
&= K \mathbb{Q} \left(N(0, 1) < -(\log(K) - \log(S_0) - (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{n+1}{2n} T) / \nu_n \sqrt{T} \right) \\
&= K \mathbb{Q} \left(N(0, 1) < (\log(S_0) - \log(K) + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{n+1}{2n} T) / \nu_n \sqrt{T} \right) \\
&= K \Phi \left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{n+1}{2n} T}{\nu_n \sqrt{T}} \right) \\
&= K \Phi \left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{n+1}{2n} T + \nu_n^2 T - \nu_n^2 T}{\nu_n \sqrt{T}} \right) \\
&= K \Phi \left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (\alpha_n + \frac{\nu_n^2}{2}) T - \nu_n^2 T}{\nu_n \sqrt{T}} \right), \quad \alpha_n = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{n+1}{2n} + \frac{\nu_n^2}{2} \\
&= K \Phi \left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (\alpha_n + \frac{\nu_n^2}{2}) T}{\nu_n \sqrt{T}} - \nu_n \sqrt{T} \right) \\
&= K \Phi \left(d_n - \nu_n \sqrt{T} \right)
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{\log(A_T^{(geo)})} \mathbb{1}_{\{\log(A_T^{(geo)}) > \log(K)\}} \right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{A + \sqrt{B} N(0, 1)} \mathbb{1}_{\{N(0, 1) > d_3\}} \right], \quad d_3 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{n+1}{2n} T}{\nu_n \sqrt{T}} \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{n+1}{2n} T + \nu_n \sqrt{T} N(0, 1)} \mathbb{1}_{\{N(0, 1) > d_3\}} \right] \\
&= \int_{d_3}^{+\infty} S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{n+1}{2n} T} e^{\nu_n \sqrt{T} x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{n+1}{2n} T} \int_{d_3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 - 2\nu_n \sqrt{T} x}{2}} dx \\
&= S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{n+1}{2n} T} \int_{d_3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 - 2\nu_n \sqrt{T} x + \nu_n^2 T}{2} + \frac{\nu_n^2 T}{2}} dx \\
&= S_0 e^{\alpha_n T} \int_{d_3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \nu_n \sqrt{T})^2}{2}} dx
\end{aligned}$$

soit le changement de variable $y = x - \nu_n \sqrt{T}$

$$\begin{aligned}
dy &= dx \\
d'_3 &= d_3 - \nu_n \sqrt{T}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{\log(A_T^{(geo)})} \mathbb{1}_{\{\log(A_T^{(geo)}) > \log(K)\}} \right] &= S_0 e^{\alpha_n T} \int_{d'_3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= S_0 e^{\alpha_n T} \Phi(-d'_3)
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
d'_3 &= \frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{n+1}{2n} T}{\nu_n \sqrt{T}} - \nu_n \sqrt{T} \\
&= \frac{\log(\frac{K}{S_0}) - [(r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{n+1}{2n} + \nu_n^2] T}{\nu_n \sqrt{T}} \\
&= \frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (\alpha_n + \frac{\nu_n^2}{2}) T}{\nu_n \sqrt{T}}
\end{aligned}$$

et donc $-d'_3 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (\alpha_n + \frac{\nu_n^2}{2}) T}{\nu_n \sqrt{T}}$. On retrouve bien la relation

$$\Pi_0 = e^{-rT} \left[S_0 e^{\alpha_n T} \Phi(d_n) - K \Phi(dn - \nu_n \sqrt{T}) \right]$$

6.4

(voir notebook python)

une estimation du prix de l'option asiatique par variable de contrôle est : 3.4

un intervalle de confiance de niveau 95% pour cette estimation du prix de l'option est [2.94,3.86]

Observation : La variable de controle $H^{(geo)}$ est moins efficace que $A_T^{(ari)}$ pour le calcul de $\Pi_0^{(ari)}$. En effet, l'intervalle de confiance de la première méthode est bien plus restreint que celui de la deuxième méthode. Pour un même nombre de simulation, la première méthode est plus précise.

7 Annexe

https://github.com/enzoben/dm_finance/blob/main/DM2_Enzo_BENBALIT_Romain_SOLIMAN.ipynb